Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur.

Dimitri Denimal

▶ **To cite this version:**

Dimitri Denimal. Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur.. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de Savoie, 2009. Français. NNT : . tel-00445871

HAL Id: tel-00445871
https://theses.hal.science/tel-00445871

Submitted on 11 Jan 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE SAVOIE

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGENIEUR

THESE

Présenté par

Dimitri DENIMAL

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE SAVOIE

Spécialité : Génie Industriel

Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur

Composition du Jury :

Jean Marc LINARES	Rapporteur	• Professeur des Universités IUT d'Aix en Provence - FRANCE
Abdessamad KOBI	Rapporteur	• Professeur des Universités ISTIA Angers - FRANCE
Georges ABDOUL NOUR	Examinateur	• Professeur Titulaire, Directeur École d'ingénierie Université du Québec - UQTR Trois-Rivières - CANADA
René NANTUA	Examinateur	• Directeur Générale du CODIR Pôle Compétitivité Arve Industries Mont Blancs - FRANCE
Laurent LEBLOND	Examinateur	• Statisticien PSA – PEUGEOT CITROEN Centre technique de Velizy - FRANCE
Maurice PILLET	Directeur	• Professeur des Universités IUT d'Annecy le vieux - FRANCE
Alain SERGENT	Co-directeur	• Maître de conférences IUT d'Annecy le vieux- FRANCE

À celle dont le sourire est ma source de réconfort,
À celle dont les mots sont sources d'optimisme,
À celle qui m'a donné sa main, pour construire nos lendemains…
À ma femme

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté ce travail de relecture.

Merci au Professeur Kobi qui, en tant que président du RUFEREQ, donnera un regard critique et pertinent dans le domaine de la qualité, et au Professeur Linarès, membre très actif du GRT[1] qui apportera une vision dans les domaines du tolérancement et de la métrologie. Leurs critiques et leurs remarques permettront d'apporter une valeur et une reconnaissance scientifique à ces travaux.

Merci au Professeur Abdul-Nour, de nous faire l'honneur d'accepter de faire un lointain déplacement pour participer à ce jury. Votre expérience et vos travaux en matière de qualité et de performance industrielle dépassent les frontières du Canada, vos critiques et vos questions seront les bienvenues.

Je remercie Monsieur Nantua, Directeur général du pôle compétitivité « Arve-Industries Haute Savoie Mont Blanc », qui a sans cesse soutenu ce projet et dont les conseils sur le développement stratégique du tolérancement inertiel sont particulièrement appréciés.

Merci à Monsieur Leblond, statisticien de chez PSA et acteur très actif du comité de normalisation français qui par ses remarques a contribué au déploiement du Tolérancement Inertiel, je souhaite qu'à la lecture de ces travaux son intérêt pour le tolérancement inertiel soit encore plus grand.

Une éternelle gratitude à Maurice Pillet et Alain Sergent, directeur et codirecteur de thèse ; d'avoir apporté un soutien, une vision et une dynamique à ce travail. Je leur suis reconnaissant de m'avoir proposé d'être leur « disciple » pendant ces trois années.

[1] Groupement de Recherche sur le Tolérancement

Je tiens à remercier particulièrement Max Giordano pour son enseignement, ses avis et nos discussions. C'était un réel plaisir de frapper à la porte de ce grand sage…

Mes remerciements vont aussi aux partenaires industriels de ce projet de recherche. En raison de leurs intérêts, leurs problématiques diverses, ils ont été réellement une source de motivation et d'échange sur cette thématique. Merci à Marc Bouix de Somfy, Pierre Olivier Brulay d'Halberg Précision, Yann Carrara de Patek Philippe, Christian Mele de 3M, Yvon Rebière, Alain Van-Hoecke et Claude Rubbo de Schneider Electric... la liste d'industriels est assez longue, mais sachez que leur implication n'est pas des moindres.

Pour les partenaires institutionnels, je tiens à remercier Jean Breton de Thésame qui a été un vecteur stratégique clé dans le déploiement du tolérancement inertiel. Je remercie et souhaite bon courage à Jacques Sappeï du CTDEC qui aura la responsabilité de pérenniser l'approche inertielle dans le pôle compétitivité « Arve-Industries Haute Savoie Mont blanc ». Merci à Eric Pairel de l'université de Savoie qui est responsable du programme Tolérancement & Qualité Géométrique des produits…

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire SYMME pour leurs passions de la science, leurs camaraderies, leurs amitiés, leurs soutiens. En particulier, Pascal Hernandez, Serge Samper, Eric, Fabrice, Pierre Antoine A, Frédéric G, Hugues F... Merci aux thésards et amis du laboratoire pour leur bonne humeur de chaque jour, Mamadou, Awa, Jihene, Gaetan et la cueillette aux Champignons, Hien, Thomas P, Ciprian, Matthieu, Laurent…

Une éternelle reconnaissance envers mes parents Marie Christine et Gérard qui m'ont permis d'arriver jusque-là. À mon frère, Florent, et mes amis de longue date qui seront se reconnaître.

Je tiens à remercier ma femme, Afaf, pour ses encouragements, ses motivations, son réconfort…

INTRODUCTION GENERALE 1

1 Tolérancement : Retour aux sources 3
2 Contexte et enjeux des travaux 6
3 Thématique 6

CHAPITRE I : ETAT DE L'ART 9

1 Introduction 11
2 Approches traditionnelles du tolérancement 11
2.1 Tolérancement arithmétique 12
2.2 Tolérancement quadratique 13
2.3 Comparaison des approches traditionnelles 13
2.3.1 Répartition des tolérances 13
2.3.2 Conformité et condition fonctionnelle 15
2.4 Conclusion 16
3 Tolérancement inertiel 17
3.1 L'origine 17
3.2 Conformité et Représentation 19
3.3 Tolérancer avec l'inertie 21
3.4 Garantir un Cpk sur la condition fonctionnelle. 22
4 Comparaisons « exotiques » des méthodes inertielles et quadratiques 23
4.1 Outil de comparaison 24
4.2 Cadre de la comparaison 28
4.3 Comparaisons 29
4.3.1 Tolérancement quadratique 29
4.3.2 Tolérancement quadratique augmenté 30
4.3.3 Tolérancement semi-quadratique 33
4.3.4 Tolérancement quadratique probabiliste 35
4.3.5 Tolérancement quadratique sécurisé 37
4.3.6 Tolérancement inertiel 39
4.3.7 Tolérancement inertiel ajusté (ou corrigé) 40
4.4 Synthèse des comparaisons 42
4.5 Conclusion Intermédiaire 45
5 Tolérancer les variations géométriques des composants. 45
5.1 Des enjeux communs 46
5.2 Première Définition : Inertie 3D Standardisée 46
5.3 Seconde définition : Inertie 3D ajustée 48
5.3.1 Origine de cette approche 48
5.3.2 Inertie 3D ajustée 49
5.4 Troisième définition : Inertie 3D Normalisée 50
5.5 Conclusion Intermédiaire 50
6 Garantir IMax par le pilotage d'un procédé 51
6.1 Carte de contrôle inertielle aux risques 52
6.2 Calcul des limites de la carte de contrôle inertielle 55
6.2.1 Limite de contrôle de la zone 1 (LSI_{α}) 56
6.2.2 Limite de contrôle de la zone 2 (LSI_{β}) 56
6.3 Conclusion Intermédiaire 57
7 Conclusions 57

8 Bibliographie 59

CHAPITRE II: CARTE DE CONTRÔLE AUX INERTIES 65

1 Introduction 67
2 Avantage de la carte de contrôle inertielle 68
3 Carte de Contrôle Inertielle avec Dérive (CCID) 70
3.1 Rappel concernant le calcul des limites 70
3.2 Contexte d'utilisation de la carte de contrôle inertiel avec dérive (CCID) 72
4 Définition de l'efficacité de la CCID 74
4.1 Détermination de la courbe d'efficacité 74
4.1.1 Courbe d'efficacité selon la limite LSI_α 75
4.1.2 Courbe d'efficacité selon la limite LSI_β 78
4.2 Influence de la taille d'échantillon sur l'efficacité 81
5 Variantes de la CCID 82
5.1 Carte de contrôle inertielle sans dérive (CCISD) 82
5.2 Carte de Contrôle inertielle ±inertie 84
5.3 Carte de Contrôle inertielle papillon (CCIP) 85
6 Evaluation de la CCID et ses variantes à travers un environnement de production simulé 86
6.1 Cas d'étude et objectifs 86
6.1.1 Définition de l'environnement 87
6.1.2 Indicateurs de sorties des environnements simulés 90
6.2 Synthèse de l'ensemble des environnements simulés 91
6.2.1 Dérive simulée de type ascendante 91
6.2.2 Dérive simulée de type écart supérieur 94
6.2.3 Synthèse des simulations 97
7 Recommandation pour le déploiement des cartes de contrôles inertielles 99
7.1 Recommandation dans l'utilisation des cartes inertielles 100
7.2 Choix en fonction de l'environnement de la carte de contrôle inertielle 101
7.3 Illustration : 103
8 Application dans le cadre du pôle compétitivité « Arve Industrie ». 103
8.1 Cas d'étude 1 : Pilotage avec la ± Inertie 104
8.1.1 Présentation 104
8.1.2 Contexte industriel 105
8.1.3 Contexte de production et Choix de la carte de contrôle 106
8.1.4 Retour d'expérience du cas d'étude n°1 108
8.2 Cas d'étude n°2 : Inertie et Conformité 110
8.2.1 Contexte industriel 111
8.2.2 Inertie et Conformité 112
9 Conclusion 115
10 Bibliographie 117
11 Extra Bibliographie 121
12 Annexes 122
12.1 Coefficient C(α,n) extrait de l'article de Minte Chao 122

CHAPITRE III : INERTIE 3D 123

1 Introduction 125
2 Rappel des inerties 3D 126
2.1 Inertie 3D Standardisée (IS) 126
2.2 Inertie 3D Ajustée (IA) 127
2.3 Inertie 3D Normalisée (IN) 127
2.4 Comparaison des inerties 3D 127
2.5 Spécification de l'inertie 3D 129
3 Cohérence entre les définitions de l'inertie 3D 132
3.1 Inertie 3D ; Cadre des petits déplacements 133
3.1.1 Cas de l'étude 133
3.1.2 Défauts des points centrés sur la surface cible 135
3.1.3 Variation autour d'un défaut orienté 138
3.2 Inertie 3D et Forme 140
3.2.1 Définition de l'étude d'un défaut de forme 140
3.2.2 Variation du défaut de forme autour de la cible 142
3.2.3 Variation autour d'un défaut de forme donné : 143
3.3 Conclusion sur les simulations 145
4 Relation entre l'exigence fonctionnelle et l'inertie 3D 145
4.1 Cas d'étude 145
4.2 Analyse de cas de figure 149
4.2.1 Variation du paramètre de translation. 149
4.2.2 Variation paramètre décentré 152
4.2.3 Synthèse des inerties 3D 153
4.3 Précaution et problématique dans l'utilisation de l'inertie 3D, cadre des petits déplacements 157
4.3.1 Précaution dans la position des points mesurés 157
4.3.2 Problématique de la nuance de spécification 158
5 Conclusions 159
6 Bibliographie 162
7 Annexes 165
7.1 Rappel statistique 165
7.1.1 Calcul des moments d'ordre n 165
7.1.2 Corrélation simple 166
7.2 Relation entre l'inertie 3D et la condition fonctionnelle 167
7.2.1 Variation d'un ensemble de paramètres. 167

CHAPITRE IV : INERTIE TOTALE 169

1 Introduction 171
2 Pourquoi l'Inertie totale ? 172
2.1 Problématique générale 172
2.2 Introduction à l'inertie totale 174
2.2.1 Problématique du tolérancement GPS 174
2.2.2 Définition de l'inertie Totale 175
2.2.3 Spécification d'une pièce en inertie totale 176
2.3 Intérêt d'une spécification en inertie totale 178

3 Régler une production en inertie totale 179
3.1 Problématique du pilotage 179
3.2 Approche pilotage par l'inertie totale 182
3.3 Définition de la matrice de relation X entre Correcteurs et Ecarts 183
3.3.1 Correcteur de position (Dec) 184
3.3.2 Correcteur de longueur (L) 185
3.3.3 Correcteur d'orientation (O) 185
3.3.4 Correcteur de rayon (R) 186
3.3.5 Correcteur de rayon de courbure (RC) 187
3.4 Repère d'expression des points 192
3.5 Qualifier la qualité du réglage. 193
3.6 Etapes d'utilisation de l'inertie totale dans un contexte de production 194
3.6.1 Définir les écarts E de l'ensemble des points palpés 194
3.6.2 Etapes de la mise en place 195
4 Exemples de pilotage en inertie totale 195
4.1 Exemple 1 : Sans changement de repère 196
4.1.1 Cas d'étude 196
4.1.2 Construction de la matrice d'incidence X 197
4.1.3 Application numérique et retour d'expérience 197
4.2 Exemple 2 : Intégration Changement de repère 199
4.2.1 Cas d'étude 199
4.2.2 Application numérique et retour d'expérience 200
4.3 Piloter en inertie totale pour respecter une spécification GPS. 201
4.3.1 Cas d'étude 201
4.3.2 Application numérique et Retour d'expérience 203
5 Conclusions 205
6 Bibliographie 207
7 Annexes 209
7.1 Détail du calcul de la matrice d'incidence de la partie 4.1 209
7.1.1 Influence en translation correcteur DEC1 et DEC2. 210

CHAPITRE V : DE L'EXIGENCE FONCTIONNELLE A L'INERTIE TOTALE 213

1 Introduction 215
2 Contexte scientifique 216
3 Expression de l'exigence fonctionnelle d'un assemblage 217
3.1 Traduction de l'exigence fonctionnelle 217
3.1.1 Exprimer le domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle (DAEF) 217
3.1.2 DAEF dans un contexte statistique 219
3.2 Expression du DAEF de type polytope dans un cadre statistique 222
3.2.1 Etude d'une tolérance de position : cas d'un plan 222
3.2.2 Etude d'une tolérance de position combinée à une tolérance d'orientation d'une surface plane 229
3.3 Expression du DAEF de type Convexe Hull 232
4 Synthèse de Tolérance 233
4.1 Du DAEF au nombre de ppm : Spécification du niveau de qualité : Transition Cp => ppm. 233
4.2 Introduction à l'approche de synthèse des tolérances. 235

4.2.1 Rappel Statistique sur les torseurs des petits déplacements 235
4.2.2 Approche de synthèse des inerties sans covariance 236
4.2.3 Approche de synthèse des inerties avec covariance 238
5 Cas d'étude n°1 : Empilage de composants 239
5.1 Présentation du mécanisme et de la condition fonctionnelle 239
5.2 Synthèse des tolérances du mécanisme 241
6 Cas d'étude n°2 : Condition fonctionnelle déportée 242
6.1 Présentation du mécanisme et de la condition fonctionnelle 242
6.2 Synthèse des tolérances du mécanisme 244
7 Critère de Conformité 245
7.1 Présentation d'autres Indicateurs de Capabilité multivariés 246
7.2 Nouvel indicateur de capabilité multivariable : la distance de Mahalanobis 248
7.1.1 Rappel sur la distance de Mahalanobis 248
7.1.2 Inertie des distances de Mahalanobis 250
7.3 Cas d'étude 1 : Inertie des distances de Mahalanobis 251
7.2.1 Configuration du mécanisme 251
7.3.2 Résultat des configurations 253
8 Conclusions 255
9 Bibliographie 257
10 Extra Bibliographie 261
11 Annexes 261
11.1 Détail du calcul des points tangents d'un hyperplan 261

CONCLUSIONS GENERALES 265

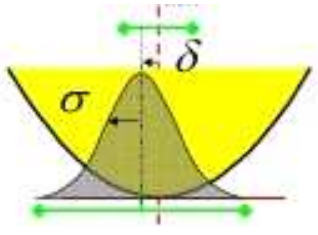
1 Conclusions 267
1.1 Utilisation de l'inertie en fabrication 267
1.2 Définition de l'inertie d'une surface 268
1.3 Nouvelle méthode de tolérancement alternative 268
1.4 Détermination de l'inertie totale 269
2 Perspectives 269
2.1 Cartes de contrôle inertielles 269
2.2 Inertie 3D 269
2.3 Inertie Totale 270
2.4 Inertie Synthèse 270

Introduction Générale

Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur

« Il n’est pas nécessaire de changer. La survie n’est pas obligatoire » .- W.Edwards Deming – 1900-1993

« Mon objectif, ce n'est pas de construire la société de demain, c'est de montrer qu'elle ne doit pas ressembler à celle d'aujourd'hui. »- Albert Jacquard – 1925…



1 Tolérancement : Retour aux sources

Le concept de tolérancement est à la base de l'interchangeabilité[1] et de la standardisation des pièces d'un assemblage. Cette notion d'interchangeabilité est née au XVIIIe siècle dans les esprits des maîtres-artilleurs français.

En effet, le besoin vint des champs de bataille où les armes des militaires se devaient d'être remplacées ou réparées par le maître-artilleur. À l'époque, chaque arme était unique, il était alors nécessaire de forger et limer les composants défectueux sur mesures. Par conséquent sur les champs de bataille, il fut plus aisé aux soldats de remplacer leurs armes lorsque celles-ci étaient défectueuses.

Ainsi, la guerre se gagna non seulement par la volonté des hommes et la stratégie des officiers, mais aussi au nombre et à la robustesse des fusils que chaque camp avait à sa disposition.

Afin de pallier ce problème d'interchangeabilité, une réflexion portant sur la standardisation des pièces naquit. Le principe fut que chaque artilleur répare son arme en utilisant des pièces de rechange standard ou provenant d'un autre fusil.

Pour autant, si ce concept de standardisation conquit les officiers sur les fronts, il rencontra de sérieux problèmes d'expansion dus à l'aspect économique non viable de la fabrication. Ces problèmes ralentirent et essoufflèrent à plusieurs reprises l'expansion du concept d'interchangeabilité. En effet, au XVIIIe siècle, l'ensemble des pièces d'une arme se faisait artisanalement à partir de composant forgé puis limé manuellement. Cette fabrication revenait trop chère au manufacturier -- 5 fois le prix d'une arme standard -- puisqu'il devait produire des pièces sur mesures pour pouvoir respecter l'interchangeabilité.

Il a fallu une traversée outre-Atlantique du concept et le début des développements d'outil de production conventionnel (tour, fraiseuse, presse…) que le XIXe siècle éveilla le concept de standardisation et d'interchangeabilité de pièces avec une vision économiquement viable.

1 Jean Louis Peaucelle, Du concept d'interchangeabilité à sa réalisation, Le fusil des XVIIIe et XIXe siècle, annales des mines.

Cet éveil s'accompagna de l'émergence de trois outils propres à l'industrie moderne :

- La maintenance industrielle ; l'émergence des outils de production conventionnels sous-entend un suivi et un maintien des performances du moyen de production dans le temps afin de perdre le moins d'argent possible.
- La qualité : Il faut compter à l'époque qu'il y avait beaucoup de problèmes de qualité. Ainsi, il n'était pas rare que 15 % d'un lot de fusils ne soit pas opérationnel à la livraison… ipso facto en temps de paix, beaucoup de fusils présents dans les stocks n'étaient pas en état de fonctionner. En conséquence, il était primordial de mettre en place une organisation permettant de suivre et de réduire ces dysfonctionnements au sein des manufactures d'armes.
- La mesure : Elle va de pair avec la qualité. Ainsi, au XVIIIe siècle, la mesure était réalisée essentiellement par calibre ce qui avait un coût considérable dans son utilisation. Cependant, l'évolution vers une mesure directe ou indirecte a permis d'apporter beaucoup plus de précision et de justesse à la fabrication. Les inventions du pied à coulisse et du palmer (XIXe) ont participé à cet essor.

Du XIXe siècle au XXIe siècle, ces évolutions qu'elles soient organisationnelles, techniques ou scientifiques, ont permis de construire l'industrie moderne telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Cependant, l'apport au XXe des statistiques a été sans aucun doute révolutionnaire et controversé. En effet, si son apport est indéniable dans les domaines de la production, de la maintenance, de la qualité ainsi que la mesure, il l'est moins pour l'interchangeabilité (conception des assemblages et tolérancement). En effet, sur des séries de production moyennes ou grandes, son utilisation s'avère potentiellement dangereuse.

Par dangereux, nous entendons qu'une entreprise amenée à assembler plusieurs lots de pièces conformes de plusieurs fournisseurs peut réaliser des assemblages non conformes… En bref, allez au marché, prenez des oranges, toutes individuellement sucrées et très goûteuses, et lorsque vous les pressez, vous obtenez un jus indéniablement imbuvable, ce qui est impossible… De même et plus sérieusement, en ces temps de crise les entreprises dont les rôles principaux sont d'assembler des composants ont augmenté le nombre de contrôles de lots en réception du fait du manque d'activité. En conséquence, certaines

entreprises produisant des composants ont vu augmenter leur taux de non-conformité de 1 % à 15 %... Pour autant, ils n'ont pas changé leurs façons de produire… C'est le résultat du dilemme de l'interchangeabilité actuelle, des lots de pièces individuellement bonnes amènent à des assemblages non conformes et des lots de pièces non conformes amènent à des assemblages conformes…

Néanmoins, ce n'est pas toujours aussi noir. Ainsi, si l'exigence en termes de qualité des produits est, en général, satisfaite pour des composants industriels sensibles (composants critiques en aéronautique, en automobile...), elle s'accompagne souvent d'un surcoût de production.

En d'autres termes, malgré les progrès et les apports récents, l'objectif de l'interchangeabilité reste inchangé et non résolu depuis le XVIII^{éme} siècle. En effet, il consiste toujours à maîtriser le niveau de qualité de l'assemblage à moindre coût.

Aujourd'hui, la croissance des volumes de production et des exigences qualités sur les produits, l'externalisation de la fabrication, voire de la conception sont autant de facteurs qui conduisent à de nouvelles difficultés de maîtrise de la qualité des produits.

L'enjeu de la maîtrise des tolérances, donc de l'interchangeabilité, est un enjeu majeur pour les entreprises et un atout non négligeable. Cette maîtrise permettrait de conserver et de développer des activités et des parts de marché face à la concurrence des pays en pleine expansion.

Aujourd'hui, nous sommes convaincus qu'une expression des tolérances par une bilimite [min ; max] montre ces limites… En dépit de la pléthore de travaux proposant de maîtriser l'interchangeabilité, peu d'approches sont transversales et cohérentes de la conception à la production. Dans ce contexte, une nouvelle voie d'expression des tolérances est proposée, l'idée n'est plus de tolérancer suivant un minimum et un maximum, mais suivant l'écart quadratique par rapport à une dimension cible. Cette réflexion a permis de proposer des travaux originaux cohérents et transversaux, appelés tolérancement inertiel. Cette réflexion change grandement la culture industrielle, mais sait conquérir les plus sceptiques.

Cette approche a été proposée par Pillet en 2002 et a fait l'objet d'une thèse soutenue par Adragna en 2007, dans le cadre d'un programme européen « INTEREG ». Nous proposons à travers cette thèse d'amener modestement une seconde pierre à cet édifice.

2 Contexte et enjeux des travaux

Cette deuxième thèse s'inscrit dans le programme Tolérancement & Qualité géométrique des produits. C'est un programme de recherche et développement du pôle de compétitivité « Arve-Industries Haute-Savoie Mont Blanc », dédié aux PMI de la Haute-Savoie. Il est conduit par une équipe de recherche du laboratoire Symme (SYstèmes et Matériaux pour la Mécatronique) de l'Université de Savoie et le Centre Technique de l'industrie du DEColletage (CTDec). Structuré en projets, ce programme a pour objectif de répondre à l'ensemble des difficultés rencontrées par les industriels locaux sur les aspects relatifs à la spécification et à la maîtrise de la qualité géométrique des produits (conception, industrialisation, production, vérification).

3 Thématique

Le tolérancement inertiel est abordé dans cette thèse par cinq chapitres.

Le premier chapitre propose de faire un rapide tour d'horizon sur le thème du tolérancement unidimensionnel et géométrique, ainsi que sur les cartes de contrôle inertielles. L'objectif est de rappeler l'ensemble des travaux scientifiques existants actuellement et pouvant aider à la compréhension de cette thèse.

Le second chapitre porte sur les cartes de contrôle inertielles. Ce chapitre a pour objectif de formaliser le contexte d'application de la carte de contrôle inertielle. Nous proposerons de rendre les cartes inertielles accessibles à une comparaison scientifique et généraliserons les contextes d'applications. Nous informerons sur l'impact des cartes sur la qualité d'une production pilotée avec celles-ci. Pour finir, nous introduirons le concept de la maîtrise inertielle des procédés et présenterons deux cas d'applications industrielles.

Le troisième chapitre est une introduction aux définitions des défauts d'une surface avec l'inertie. Des travaux scientifiques ont mis en évidence trois définitions de l'inertie 3D. Notre objectif est d'identifier la meilleure définition, de mettre en évidence les liens entre ces définitions, et de vérifier qu'elles sont cohérentes à l'amplitude des défauts des pièces. Ce chapitre a pour vocation d'orienter les développements futurs sur l'inertie de surface.

Le quatrième chapitre met en évidence une nouvelle forme de tolérancement de surface, l'inertie totale. Ce chapitre s'inscrit dans l'approche du Lean Design. Nous aborderons

l'aspect conceptuel de l'inertie totale puis nous présenterons une approche en production concernant l'aide au réglage d'outil de production complexe, comme les machines-outils cinq axes, les décolleteuses ou les presses à injecter.

Le cinquième chapitre est une proposition de détermination de la valeur de l'inertie totale d'un composant à partir d'une condition fonctionnelle spécifiée dans un contexte des petits déplacements.

Cette thèse n'a pour ambition que de proposer une approche parmi d'autres à la résolution de la problématique de l'interchangeabilité. Cependant, nous sommes convaincus que le tolérancement inertiel est une solution intéressante aux maux actuels…

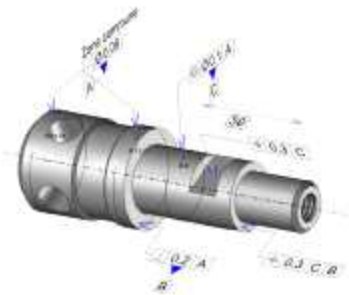
« Il faut oser en tout genre ; mais la difficulté, c'est d'oser avec sagesse. »

Bernard Fontenelle.1657 – 1757

Chapitre I
Etat de l'art

Pourquoi proposer une nouvelle forme de tolérancement?

« Si j'ai bien compris, tolérancer au fond c'est tolérer…Le client tolère de son fournisseur une variation bornée par des limites autour de la cible… et vous, que me proposez-vous ?...» - Mots d'un stagiaire en formation - Retour d'Expérience M.Pillet formation 2008



1 Introduction

Tolérancer consiste à tenter de concilier deux préoccupations antagonistes :

- déterminer des limites de variabilité acceptables les plus larges possibles pour diminuer les coûts de production,
- assurer le niveau de qualité spécifié par le cahier des charges d'un produit fini.

D'après le cahier des charges, le concepteur définit un ensemble d'exigences fonctionnelles à respecter sur le produit fini assemblé. Le tolérancement consiste à répartir du mieux possible, ces exigences sur les composants de l'assemblage. Actuellement, deux tendances, dans la façon de tolérancer, sont principalement décrites dans la littérature scientifique :

- le tolérancement au pire des cas, aussi appelé, tolérancement arithmétique,
- le tolérancement statistique, aussi appelé, tolérancement quadratique.

L'objectif du chapitre est de rappeler les définitions de ces approches en précisant leurs inconvénients et leurs avantages. Puis, nous présenterons le tolérancement inertiel et le comparerons aux approches de tolérancement statistique existantes. Ensuite, les définitions de l'inertie sont introduites dans un contexte tridimensionnel. Pour conclure, nous finirons par présenter l'inertie dans un contexte de pilotage d'outil de production.

2 Approches traditionnelles du tolérancement

Dans le cas général du tolérancement d'un assemblage (figure 1), le problème consiste à déterminer les tolérances (T_{Xi}) des caractéristiques élémentaires *Xi* (composants d'un assemblage) à partir de la (ou des) tolérances (de ou des) caractéristique(s) fonctionnelle(s) résultante(s) de l'assemblage, T_{YCF}, définie(s) par le cahier des charges.

Cette partie présente les approches traditionnelles de tolérancement.

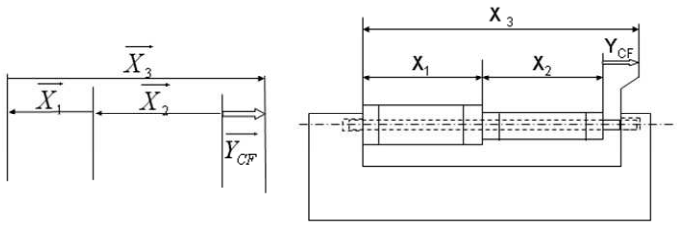


figure 1 : Exemple didactique

2.1 Tolérancement arithmétique

Le tolérancement arithmétique consiste à garantir la tolérance fonctionnelle T_{YCF} (cf. figure 1), quelles que soient les configurations du mécanisme. Pour traiter le problème, figure 1, une chaîne de cote unidirectionnelle est définie en considérant une répartition uniforme des tolérances. Donc, une tolérance T_{Xi} pour chaque caractéristique X_i est égale à la tolérance de la caractéristique résultante (T_{YCF}) divisée par le nombre de cotes dans la chaîne (n) :

$$T_{Xi} = \frac{T_{Y_{CF}}}{n} \tag{1}$$

En posant :

$$T_{Y_{CF}} = LSS_{CF} - LIS_{CF} \tag{2}$$

Où LSS_{CF} correspond à la Limite Supérieure de Spécification de la caractéristique fonctionnelle Y_{CF} et LIS_{CF} correspond à la Limite Inférieure de Spécification de la caractéristique fonctionnelle Y_{CF}.

La formulation générale du tolérancement arithmétique dans un cas unidirectionnel peut s'écrire sous la forme :

$$T_{Xi} = \beta_i . \frac{LSS_{CF} - LIS_{CF}}{\sum_i |\alpha_i| . \beta_i} \tag{3}$$

Où α_i est le coefficient d'influence ou de sensibilité, β_i est la pondération de faisabilité du composant *Xi* (caractéristique élémentaire).

2.2Tolérancement quadratique

Le tolérancement statistique est apparu dans les années 50 ([1]→ [3] ; [13] ; [17]→[20]). Cette approche a été développée pour tenir compte de l'aspect statistique des combinatoires de caractéristiques élémentaires (variables). Gauss a montré que dans le cas d'addition de variables indépendantes et de même ordre de grandeur, les variances s'additionnent (Théorème central limite). En conséquence, pour les chaînes de cotes unidirectionnelles, en supposant une répartition uniforme des écarts types (des tolérances) et en considérant l'ensemble des caractéristiques *Xi* centré, on obtient :

$$T_{Xi} = \frac{T_{Y_{CF}}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

La formulation générale du tolérancement statistique s'écrit alors :

$$T_{Xi} = \beta_i . \frac{LSS_{CF} - LIS_{CF}}{\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 . \beta_i^2}} \tag{5}$$

Où α_i est le coefficient d'influence ou de sensibilité et β_i est la pondération de faisabilité du composant *Xi* (caractéristique élémentaire).

Il est possible d'utiliser ce tolérancement à condition de respecter une hypothèse fondamentale qui concerne le centrage de toutes les caractéristiques élémentaires Xi sur la valeur cible. Ce centrage est obtenu par l'application de carte de contrôle de type Shewhart [4] dans un contexte de Maîtrise Statistique des Procédés [5].

2.3Comparaison des approches traditionnelles

Cette partie met en évidence les avantages et les inconvénients des méthodes de tolérancement présentées précédemment.

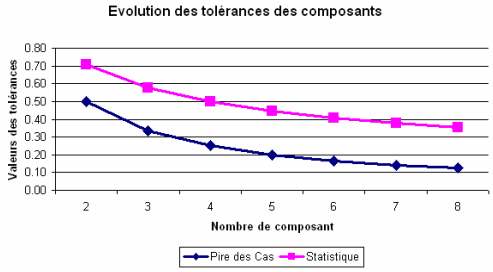
2.3.1 Répartition des tolérances

Sur la base de l'exemple (cf. figure 1), une répartition des tolérances est réalisée en fonction : du nombre de composants *n* ; de la tolérance de la condition fonctionnelle T_{YCF} égale à 1 ; des coefficients, α et β, égaux à 1 pour chaque composant, *Xi*.

Le Tableau 1 (a) quantifie plusieurs tolérances *Txi*, calculées en fonction du nombre de composants dans l'assemblage et de l'approche traditionnelle utilisée. Les valeurs des tolérances fonction du nombre de composants sont illustrées dans le graphique Tableau 1 (b). Sur ce graphique, il est possible de constater que le tolérancement statistique permet d'élargir les tolérances par $\sqrt{n}$; *n* étant le nombre de composants. Ainsi, pour un assemblage de 4 composants, l'intervalle de tolérance est multiplié par deux en comparaison au pire des cas. Par déduction, le tolérancement statistique repousse les limites de faisabilité des caractéristiques élémentaires contrairement au tolérancement pire des cas.

		Pire des Cas	Statistique
		Txi	Txi
Nbre de composants n	2	0.50	0.71
	3	0.33	0.58
	4	0.25	0.50
	5	0.20	0.45
	6	0.17	0.41
	7	0.14	0.38
	8	0.13	0.35

(a)



(b)

Tableau 1 : Évolution des tolérances des composants en fonction du nombre de composants dans l'assemblage

2.3.2 Conformité et condition fonctionnelle

La conformité d'une condition fonctionnelle est souvent spécifiée par un ensemble d'indicateurs. L'indicateur le plus souvent utilisé dans un contexte industriel est le Cpk (6), un indicateur de décentrage [6][7]. À partir de celui-ci, il est possible de calculer un indice de conformité d'un lot de caractéristiques élémentaires *Xi* exprimé en nombre de parties par million, ppm, sous l'hypothèse que les distributions statistiques des caractéristiques *Xi* soient gaussiennes [8].

$$Cpk_{Xi} = \frac{\min\{LSS_{Xi} - \mu_{Xi}; \mu_{Xi} - LIS_{Xi}\}}{3 \cdot \sigma_{Xi}} \quad (6)$$

Où LSS_{Xi} correspond à la Limite Supérieure de Spécification de la caractéristique élémentaire *Xi* et LIS_{Xi} correspond à la Limite Inférieure de Spécification de la caractéristique fonctionnelle *Xi*; μ_{Xi} est la moyenne d'un lot de caractéristique élémentaire Xi ; σ_{Xi} est l'écart type d'un lot de caractéristique élémentaire Xi.

Il est à rappeler que :

$$T_{X_i} = LSS_{X_i} - LIS_{X_i} . \quad (7)$$

Et,

$$ppm_{\text{inf érieur}} = (1 - \phi(3 \cdot Cpk_{Xi})) \cdot 10^6 , \quad (8)$$

Avec ϕ qui est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La relation (8) porte seulement sur le $ppm_{inférieure}$ étant donné que dans l'exemple traité (cf. Tableau 2) les décentrages (δ_{Xi}) de la moyenne μ_{Xi} par rapport à la cible sont tous de même direction.

Dans cet exemple, le Cpk_{Xi} minimum imposé sur les composants de l'assemblage (Xi) est de 1.33. Dans le Tableau 2, nous présentons les résultats d'un assemblage de 3 caractéristique (*Xi*) respectant un Cpk_{Xi} de 1.33 avec un décentrage de même signe sur chaque lot de composants. Le Tableau 2 (a) présente une configuration d'acceptation d'un lot de caractéristiques *Xi* dans l'hypothèse que l'intervalle des tolérances des *Xi* soit déterminé de façon statistique (IT_{Stat}). Tandis que le Tableau 2 (b) présente une configuration d'acceptation d'un lot de caractéristiques *Xi* dans l'hypothèse que l'intervalle des tolérances des *Xi* soit déterminé au pire des cas ($IT_{Pire\ Cas}$).

Nous observons que le *Cpk* résultant, Cpk_{YCF}, pour l'assemblage tolérancé suivant l'approche statistique est exécrable en comparaison au tolérancement pire des cas qui est très supérieur à la condition fonctionnelle attendue par le client. [9][10]

		IT_{Stat}	δ_{Xi}	σ_{Xi}	Cpk_{Xi}
Xi	1	0.577	0.133	0.039	1.33
	2	0.577	0.133	0.039	1.33
	3	0.577	0.133	0.039	1.33
		δ_{YCF}	σ_{YCF}	Cpk_{YCF}	ppm
Y_{CF}		0.399	0.0675	0.50	68588

(a)

		$IT_{Pire\ Cas}$	δ_{Xi}	σ_{Xi}	Cpk_{Xi}
Xi	1	0.333	0.077	0.022	1.33
	2	0.333	0.077	0.022	1.33
	3	0.333	0.077	0.022	1.33
		δ_{YCF}	σ_{YCF}	Cpk_{YCF}	ppm
Y_{CF}		0.230	0.0390	2.30	0

(b)

Tableau 2 : Calcul du nombre de ppm en fonction d'un Cpk_{Xi} standard de 1.33 pour chaque composant et approche de tolérancement : (a) Statistique (b) Pire des cas

2.4Conclusion

Concilier les deux préoccupations antagonistes du tolérancement consiste à :

- Fixer des limites de variabilité acceptables les plus larges possibles pour diminuer les coûts de production.
- Assurer un niveau de qualité optimal sur le produit fini.

Deux approches sont proposées dans la littérature avec chacune ces avantages et ces inconvénients :

☺ Le tolérancement au pire des cas garantit la qualité de l'assemblage dans toutes les situations à partir du moment où les caractéristiques élémentaires sont dans les tolérances.

☺ Le tolérancement statistique tient compte de la faible probabilité d'assemblages d'extrêmes entre eux et permet d'élargir de façon importante les tolérances pour diminuer les coûts.

☹ La première méthode garantit la qualité au détriment du coût,

☹ La seconde ne garantit pas le respect de la condition fonctionnelle de l'assemblage de lots de composants décentrés.

Pillet [10] introduit une nouvelle approche, appelée « tolérancement inertiel », qui permet de concilier les deux objectifs antagonistes tout en cumulant les avantages des approches traditionnelles.

3 Tolérancement inertiel

3.1 L'origine

Dans de nombreux cas, l'intervalle de tolérance est une exigence contractuelle qui permet de définir si un produit ou un lot de produit est conforme ou non. Toutefois, si l'on raisonne en termes de performance ou de coût, il est nécessaire de considérer la situation de chaque produit par rapport à l'objectif (l'objectif est considéré ici comme le produit le plus performant au meilleur coût).

Ainsi (cf. figure 2), si l'on considère la position des pièces 1, 2 et 3 par rapport aux limites de tolérances la question suivante peut se poser : « Qu'elle est la différence entre la pièce un et deux ? »

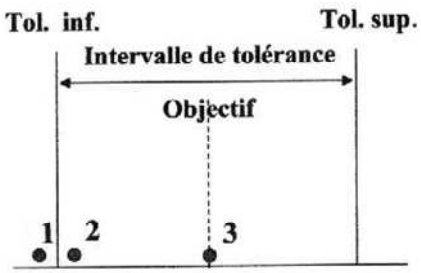


figure 2: Limite des tolérances

On peut alors s'interroger sur l'existence d'une différence de conformité entre les pièces 1 et 2 (figure 3). Même si l'écart entre les deux pièces est infime, on considère que la pièce 1 conforme et 2 non conforme. Au contraire de l'écart entre les pièces 2 et 3 qui est beaucoup plus important. Pourtant, le problème de conformité ne se pose pas. Cependant, si on considère la différence entre les caractéristiques élémentaires, il y a moins de différence entre 1 et 2 qu'entre 2 et 3. De plus, la position de la tolérance inférieure pourrait sans risque être déplacée légèrement à gauche ou à droite sans affecter la qualité globale de l'assemblage. Ce qui rendrait les pièces 1 et 2 toutes les deux conformes ou toutes les deux non-conformes.

Les limites de tolérance ne paraissent donc pas toujours adaptées. Taguchi propose donc une nouvelle définition : [11]

" Tout écart par rapport à l'objectif engendre une perte financière (pour le client ou en interne) égale au carré de l'écart à l'objectif ", ce qui se traduit par le schéma suivant :

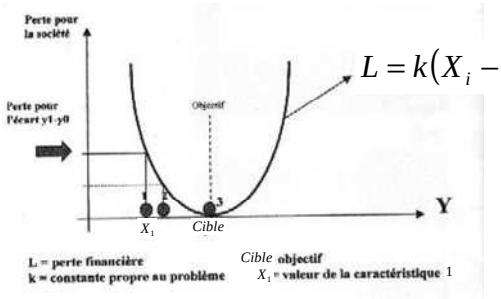


figure 3 : fonction de la perte financière de Taguchi

Cette vision économique des limites de tolérances et de la dispersion est un changement de culture radical. En effet, il ne suffit plus que les pièces soient à l'intérieures des limites de tolérances, il faut également une répartition centrée sur l'objectif et une dispersion la plus faible possible. Lorsqu'Y_{CF} est placée sur la cible, le fonctionnement est idéal. Lorsqu'Y_{CF} s'éloigne de la cible, le fonctionnement est de plus en plus dégradé, et peut entraîner une insatisfaction chez le client, donc une répercussion financière pour l'entreprise. Cette perte financière (*L*) est définie par le carré de l'écart par rapport à la cible (décentrage).

$$L = k(X_i - Cible)^2 \quad (9)$$

Où *k* est une constante propre au problème, et *Xi* la valeur d'une caractéristique *Xi*.

Dans le cas d'un lot, la perte financière est associée à la formulation suivante:

$$\overline{L} = k\left(\sigma_{X_i}^2 + \left(\overline{X_i} - Cible\right)^2\right) \quad (10)$$

Où $\overline{X_i}$ est la moyenne d'un lot de caractéristiques *Xi* et $\sigma_{X_i}^2$ correspond à l'écart type d'un lot de caractéristiques Xi.

Une comparaison entre une évaluation traditionnelle du coût de non-qualité [11] et la fonction de la perte financière présentée par Taguchi montre une très forte divergence entre les approches. Une des justifications les plus courantes se trouve dans le fait que l'insatisfaction du client final lors de l'achat d'un produit entraîne un impact direct sur les

ventes futures. De plus, très souvent l'évaluation du coût de non-qualité n'est pas représentative des moyens mis en place par l'entreprise pour réduire ces rebuts. Par exemple, pour limiter les coûts de non-qualité, l'entreprise achète des moyens couteux de contrôle ou d'appairage qui sembleraient injustifiés si le concept de la perte financière était assimilé en fabrication.

La notion d'inertie [10] est proportionnelle à la valeur de la fonction perte de Taguchi. Le terme variable $I^2 = \sigma^2 + \delta^2$ est homogène à une « inertie » des valeurs autour de la cible :

$$I = \sqrt{\left(\sigma_{Xi}^2 + \left(\overline{X}_i - Cible\right)^2\right)} \quad (11)$$

Si l'on veut réellement limiter le coût de non-qualité par les tolérances, il est nécessaire de ne pas utiliser un intervalle [min ; max] comme on le fait traditionnellement, mais plutôt de tolérancer la perte que l'on est prêt à accepter.

C'est le principe du tolérancement inertiel qui propose de remplacer le tolérancement classique X±ΔY par une tolérance $X^{I_{Max}}$ STI [12]. Dans laquelle I_{Max} représente l'inertie maximale que l'on accepte sur la variable X.

3.2Conformité et Représentation

Le tolérancement inertiel d'un lot d'une caractéristique Xi s'écrit :

$$I_{Xi} = \sqrt{\left(\sigma_{Xi}^{\ 2} + \delta_{Xi}^2\right)} \quad (12)$$

Avec

σ_{Xi} : l'écart type de la distribution des *Xi*

δ_{Xi} : L'écart entre la moyenne de la distribution *Xi* et la cible.

On note la tolérance de la façon suivante : Cible ^{IXi} STI [12]. Par exemple, une tolérance notée 10 $^{0.1}$ STI a une cible de 10 et une inertie maximale égale à 0.1.

L'interprétation des tolérances inertielles est relativement immédiate dans les deux situations extrêmes suivantes :

- Situation 1 : La production est parfaitement centrée sur la cible ($\delta_{Xi} = 0$). Dans ce cas, l'inertie est égale à l'écart type maximal autorisé dans le cas d'une production centrée.

$$I_{X\,i} = \sigma_{X_i} \tag{13}$$

- Situation 2 : La dispersion est nulle ($\sigma_{Xi} = 0$).

Dans ce cas, l'inertie est égale au décentrage maximal autorisé sur la moyenne.

$$I_{X\,i} = \delta_{Xi} \tag{14}$$

La figure 4 est une représentation graphique du tolérancement inertiel. Il est possible en calculant l'écart δ_{Xi} compte tenu de l'écart type du lot de définir le domaine d'acceptation par un demi-cercle. En l'occurrence, si les paramètres statistiques de moyennes et d'écart types d'un lot sont inclus dans ce domaine alors l'inertie est définie acceptable. Dans le cas contraire, l'inertie est inacceptable. Par exemple, si nous considérons un lot avec un écart-type de 0.4, la moyenne du lot doit être comprise entre -0.9 et 0.9 pour satisfaire l'inertie max (figure 4).

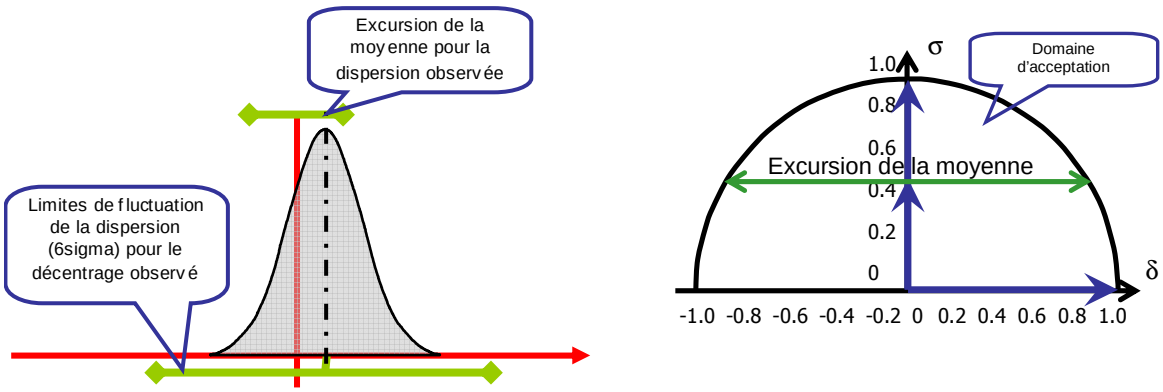


figure 4: Représentation du tolérancement inertiel

Outre l'aspect graphique, l'acceptation d'un lot peut se faire en calculant deux indicateurs de capabilité *IC* (*Cp*) (15)et *ICi* (*Cpi*) (16), dont les valeurs d'acceptation sont supérieures ou égales à 1 :

$$IC = Cp = \frac{I_{Max}}{\sigma_{X\,i}} \tag{15}$$

Et,

$$ICi = Cpi = \frac{I_{Max}}{I_{X\,i}} \tag{16}$$

Où σ_{Xi} est l'écart type et I_{Xi} est l'inertie du lot de la caractéristique élémentaire i étudiée.

Ces deux indicateurs ((15)et (16)) peuvent être respectivement assimilés aux indicateurs *Cp* et *Cpk* présentés dans la norme ISO 3534-2006 [6] qui correspondent à des indicateurs de centrage et de décentrage.

L'inertie est déduite des paramètres statistiques d'un lot, en conséquence, les indicateurs *ICi* et *IC* peuvent être calculés dans le cas d'une distribution de caractéristiques élémentaires *Xi* non normale.

3.3Tolérancer avec l'inertie

Le tolérancement inertiel diffère très peu du calcul des tolérances par la méthode statistique quadratique (cf. partie 2.2). En effet, le concepteur détermine les tolérances, de façon statistique, sur les composants *Xi* (T_{Xi}), puis calcule l'inertie max du composant *Xi* ($I_{Xi\,Max}$) par l'égalité suivante :

$$I_{Xi\ Max} = \frac{T_{X_i}}{6} \tag{17}$$

De manière plus générale, la détermination de l'inertie max de chaque composant *Xi* peut être déduite par la combinaison des relations (5) et (19) :

$$I_{Xi\ Max} = \beta_i . \frac{LSS_{CF} - LIS_{CF}}{6\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 . \beta_i^2}} \tag{18}$$

Où α_i est le coefficient d'influence ou de sensibilité et β_i est un coefficient de pondération de faisabilité de chaque composant *Xi* (caractéristique élémentaire).

3.4Garantir un Cpk sur la condition fonctionnelle.

Lors du tolérancement d'un assemblage le client a souvent le besoin de spécifier un *ppm* ou un *Cpk* (relation (6) et (8)). Adragna [14] propose une méthode de tolérancement, appelée inertie ajustée ou inertie corrigée, permettant de répondre à cette attente.

L'objectif est de déterminer le critère d'exigence minimal à respecter pour le fournisseur sur la caractéristique *Xi*. Cette exigence s'exprime à travers l'indicateur inertiel *ICi* par :

$$ICi = \sqrt{\left(Cpk_{Y_{CF}}\right)^2 + \frac{n}{9}} \tag{19}$$

Où Cpk_{YCF} est le *Cpk* minimal acceptable par le client sur la condition fonctionnelle, et *n* est le nombre de composants dans l'assemblage.

A partir de la relation (19), il est possible de déterminer l'$I^{ICk}_{Xi\ Max}$ à inscrire sur le plan garantissant le critère d'exigence minimal.

$$I^{ICk}_{Xi\ Max} = \frac{I_{Xi\ Max}}{\sqrt{\left(Cpk_{Y_{CF}}\right)^2 + \frac{n}{9}}} \tag{20}$$

Où $I_{Xi\ Max}$ est l'inertie calculée par la relation classique (18).

Ainsi, si l'ensemble des caractéristiques a un *ICi* égal au *ICi* spécifié par la relation (12), et si chaque caractéristique a un décentrage de même signe alors le Cpk_{YCF} est garanti. Il est à souligner que la probabilité d'atteindre ce Cpk_{YCF} est liée à la complexité de l'assemblage. Plus celui-ci est complexe, plus il est peu probable de se trouver dans une situation où le Cpk_{YCF} est atteint. En l'occurrence, Adragna propose de quantifier un taux de non-conformité médian ($TNC_{50\%}$) et moyen (TNC_{μ}) par les relations suivantes :

$$TNC_{50\%} = 0.5^n TNC_{CF} \tag{21}$$

et,

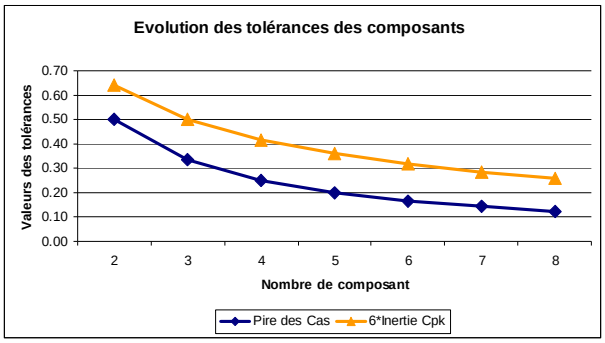
$$TNC_{\mu} = 0.6^n TNC_{CF} \tag{22}$$

Avec *n* le nombre de composants.

Le Tableau 3 présente une comparaison entre le tolérancement traditionnel et le tolérancement inertiel définit avec un Cpk_{YCF} de 1 (1350 ppm (2700/2)). Pour réaliser une comparaison avec l'intervalle de tolérance au pire des cas, l'inertie ajustée a été multipliée par 6 (Cf. relation (17)).

		Pire des Cas	Quadratique	Inertie Ajustée
		Txi	Txi	$6I_{Xi\ Max}^{ICk}$
Nbre de composants	2	0.50	0.71	0.64
	3	0.33	0.57	0.50
	4	0.25	0.50	0.42
	5	0.20	0.45	0.36
	6	0.17	0.41	0.32
	7	0.14	0.38	0.28
	8	0.13	0.35	0.26

(a)



(b)

Tableau 3 : Calcul de l'inertie pour un Cpk_{YCF} = 1 et comparaison avec l'approche traditionnelle

Le Tableau 3 met en évidence l'augmentation de tolérance des caractéristiques Txi par rapport au tolérancement arithmétique pour une même exigence sur le Cpk_{YCF}. L'inertie ajustée permet donc d'augmenter l'intervalle de tolérance tout en respectant la condition fonctionnelle spécifiée par le client. Cette étude a fait l'objet d'une application dans l'industrie horlogère [15].

Nous proposons dans la partie suivante de réaliser une comparaison des méthodes de tolérancement actuelles avec l'approche inertielle par une représentation proposée par Srinivasan [32].

4 Comparaisons « exotiques » des méthodes inertielles et quadratiques

L'objectif de cette partie est de rappeler l'enjeu du tolérancement quadratique par rapport au tolérancement arithmétique à travers les travaux de Srinivasan [32][33]. Pour

cela, nous vérifierons si les différentes méthodes de calcul d'une tolérance permettent de garantir le risque spécifié par le concepteur sur la condition fonctionnelle (Cpk_{YCF}). Huit approches de répartitions des tolérances sont comparées, ici :

- Tolérancement quadratique,
- tolérancement quadratique augmenté, [16][23][24][28]
- tolérancement semi-quadratique, [16][21][28]
- tolérancement quadratique probabiliste [16][22]
- tolérancement quadratique sécurisé, [22]
- tolérancement quadratique inertiel [14][21][28]
- tolérancement quadratique inertiel ajusté [14][21][28]
- Il est à noter que cette liste est non exhaustive.

4.1 Outil de comparaison

Les méthodes de répartition des tolérances sont comparées par l'approche introduite par Srinivasan [32][33], appelée Statistical Tolerance Zone (STZ). L'auteur préconise de présenter sous forme d'un domaine δ–σ^2, l'ensemble des configurations admissibles d'un lot de caractéristiques élémentaires *Xi*, pour une valeur lambda d'un indicateur de capabilité spécifié [34]. La figure 5 est une illustration de domaines définis à partir d'un indicateur $Cpk=1$ (figure 5 (a)) et $Cpm^2=1$ (figure 5 (b)). Sur cette figure, l'axe des abscisses correspond au décentrage δ et l'axe des ordonnées correspond à la variance σ^2, pour un δ donné.

Si chaque composant (caractéristique) d'un assemblage respecte un indicateur de capabilité de type Cpk_{Xi} ou Cpm_{Xi}, il est alors possible de définir un domaine δ-σ^2 pour chaque lot de caractéristiques *Xi*. Les limites de ce domaine δ-σ^2 représente alors l'ensemble des configurations d'un lot de caractéristiques Xi, en termes de moyenne et d'écart type,

[2] $Cpm = \frac{IT}{6\sqrt{\delta_{Xi}^2 + \sigma_{Xi}^2}}$ où, δ est l'écart de la moyenne d'un lot par rapport à la cible, et σ est l'écart-type du lot

respectant la valeur de l'indicateur donnée Cpk_{Xi} ou Cpm_{Xi}. L'assemblage de plusieurs composants respectant un Cpk_{Xi} ou un Cpm_{Xi}(cf. figure 6) se traduit par une somme de Minkowski des domaines δ-σ^2 de chaque composant [32][44]. La figure 6 est une illustration de cette somme de Minkowski déduite de l'assemblage de deux caractéristiques (X_1 et X_2) qui individuellement doivent respecter un indicateur Cpk_{Xi} donné.

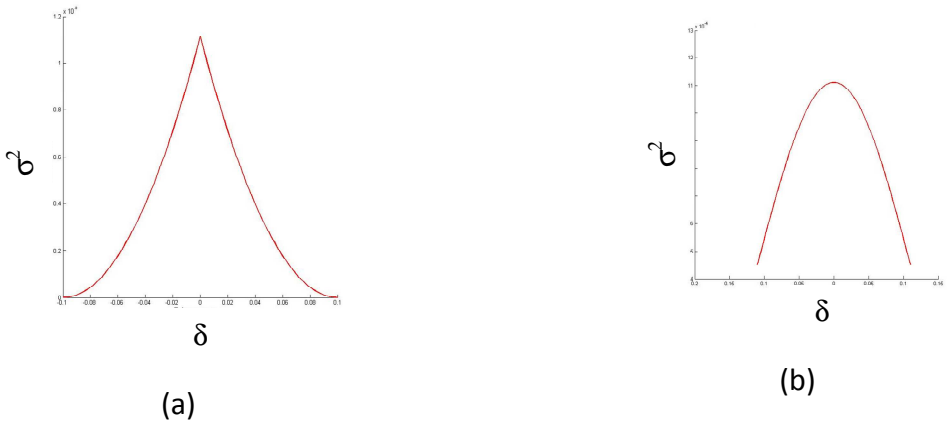


figure 5 :Représentation de Statistical Tolerance Zone:(a) Indicateur Cpk_{YCF}=1 (b) Indicateur Cpm_{YCF} =1 pour un intervalle de tolérance centré de valeur 0.2

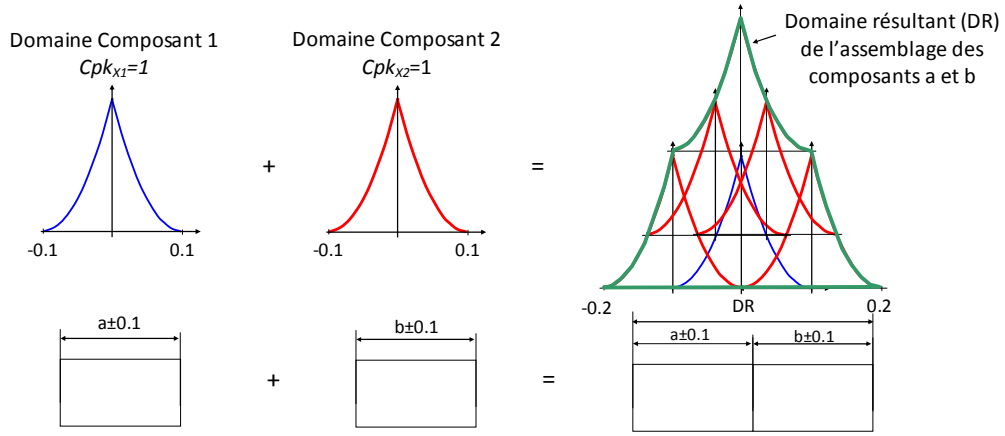


figure 6 : Assemblage de deux domaines STZ

La somme de Minkowski permet de représenter l'ensemble des combinaisons de lots assemblés en fonction d'un indicateur Cpk_{Xi} spécifié sur chaque composant. Ainsi, en définissant la zone d'acceptabilité de la condition fonctionnelle par un domaine δ-σ^2 décrit par un indicateur de type Cpk_{YCF} et en comparant ce domaine au domaine résultant de

l'assemblage, il est possible de mettre en évidence la capacité de la méthode de tolérancement à respecter le risque spécifié sur la condition fonctionnelle.

Par conséquent, si le domaine δ-σ^2 résultant de l'assemblage est trop grand par rapport au domaine δ-σ^2 de la condition fonctionnelle, il existe alors un ensemble de configurations qui ne respecte pas l'exigence spécifiée, alors qu'individuellement les lots de composants sont conformes au critère qualité défini (Cpk_{Xi} ou Cpm_{Xi}). Dans le cas contraire, où le domaine δ-σ^2 de la condition fonctionnelle est plus grand que le domaine résultant de l'assemblage, nous sommes dans une situation ou l'approche de tolérancement avec l'indicateur spécifié sur chaque composant ne permet pas de bénéficier de toute la plage de variabilité possible par la condition fonctionnelle.

En l'occurrence, cette approche permet de mettre en évidence rapidement les combinatoires statistiques des lots pouvant présenter un risque de non-respect de la condition fonctionnelle. Prenons l'exemple du point A (figure 7), celui-ci est à l'intérieur du domaine bleu et a pour coordonnée δ_A et σ^2_A, de valeurs respectives -0.04 et 0.2. Le point A correspond à une résultante d'assemblage déduite de la combinatoire statistique[3] des lots de composants.

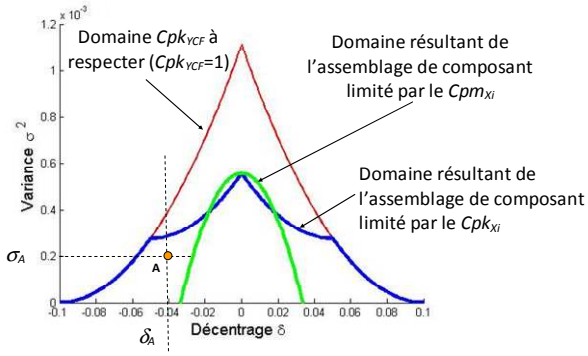


figure 7 : Comparaison des domaines

[3] Par combinatoire statistique, nous sous-entendons que chaque lot de composants est indépendant et de distribution statistique quelconque. Ainsi, la moyenne résultante de l'assemblage correspond à la chaîne de cotation des moyennes des lots et la variance résultante correspondant à la somme des variances des lots de composants assemblés

Pour qualifier l'efficacité des approches de tolérancement, nous proposons de reprendre les indices proposés par Adragna [44] pour quantifier le pourcentage de domaine résultant exploitant le domaine δ-σ^2 Cpk_{YCF}, appelé *RICF* (23), et quantifier le pourcentage de domaine résultant non exploité par la CF, appelé R_{exp} (24).

$$R_{ICF} = \frac{S_{RICF}}{S_{CF}} * 100 \quad , \tag{23}$$

R_{ICF} est le pourcentage du domaine δ-σ^2 Cpk_{YCF} exploité par le domaine résultant δ-σ^2 ; où S_{RICF} est la surface du domaine résultant δ-σ^2 comprise dans le domaine δ-σ^2 Cpk_{YCF} ; S_{CF} est la surface du domaine δ-σ^2 fonctionnel Cpk_{YCF}.

$$R_{\exp} = \frac{S_{RICF}}{S_R} * 100 \quad , \tag{24}$$

R_{exp} est le pourcentage du domaine δ-σ^2 résultant exploité par le domaine δ-σ^2 Cpk_{YCF} , S_R est la surface du domaine résultant de l'assemblage.

L'approche de tolérancement est qualifiée d'optimale si l'indice R_{ICF} est égal à 100 % et l'indice R_{exp} est égal à 100 %. Ces valeurs indiquent que la répartition des tolérances utilise l'ensemble de la variabilité permise par la condition fonctionnelle; tout en assurant que l'assemblage de composant pour un indicateur de capabilité donné ne présente pas de configuration pouvant présenter un risque de non-respect de la condition fonctionnelle.

Par exemple, le tolérancement au pire des cas ne permet pas d'exploiter au maximum le domaine de variabilité permise par la condition fonctionnelle. Sur le Tableau 4, nous observons que pour 9 composants seulement 16% de la variabilité permise par la condition fonctionnelle est exploitée, si chaque lot de composants respecte au minimum un indicateur Cpk_{Xi} égal à 1. Cependant, pour un nombre de composants égal à 3, le tolérancement arithmétique permet d'exploiter 44 % de la variabilité permise par la condition fonctionnelle.

Suivant ce constat, il est important de rechercher d'autres approches de tolérancement permettant d'exploiter au maximum la variabilité permise par la condition fonctionnelle.

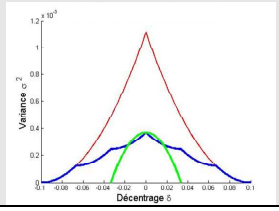
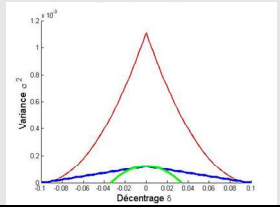
		3	9
$Cpk_{YCF}=1$	$Cpk_{Xi}=1$		
	R_{ICF}	44%	16 %
	R_{exp}	100%	100%
	$Cpm_{Xi}=1$		
	R_{ICF}	22,2%	7,4 %
	R_{exp}	100 %	100 %

Tableau 4: Tolérance Pire des cas par la méthode STZ (Statistical tolerance Zone)[32], Domaine résultant pour Cpk_{Xi} =1 sur chaque composant en bleu et Domaine résultant pour Cpm_{Xi} =1 sur chaque composant en vert

4.2Cadre de la comparaison

Dans cet exercice, nous considérons un exemple simple basé sur un empilement de pièces (figure 6), dont nous ferons varier le nombre de composants (3, 6, et 9). La condition fonctionnelle (Y_{CF}) de cet assemblage est exprimée par un jeu de [-0.1 ; 0.1] dont les lots de pièces assemblées respectent un Cpk_{YCF} [31][10] égal à 1, soit 2700 ppm[4]. De plus, il est considéré que chaque lot de composants respecte un indice Cpk_{Xi} ou Cpm_{Xi} de 1 et de 1.33 pour les tolérances avec une bilimite, et *ICi* (*Cpi*), pour les tolérances inertielles.

Tout au long de l'étude, la répartition des tolérances est réalisée de façon uniforme. Donc, l'ensemble des coefficients α_i et β_i sont égaux à 1. De même, nous supposerons qu'il n'y aura aucune covariance entre les lots de composants assemblés.

Sur chaque tableau présenté, le domaine δ-σ^2 résultant calculé à partir de l'indicateur Cpm_{Xi} est représenté en vert, celui calculé à partir du Cpk_{Xi} est en bleu. Le domaine δ-σ^2 de la condition fonctionnelle est représenté en rouge.

[4] ppm : partie par million

4.3Comparaisons

4.3.1 Tolérancement quadratique

Le tolérancement quadratique est la première forme de tolérance basée sur une répartition statistique. (cf. : partie 2.2). Cette approche détermine la tolérance T_{Xi} par rapport à la tolérance condition de la condition fonctionnelle T_{YCF} par :

$$T_{Xi} = \frac{T_{Y_{CF}}}{\sqrt{n}}, \tag{25}$$

Où n est le nombre de composants, T_{YCF} est l'intervalle de tolérances fonctionnelles, et T_{Xi} est l'intervalle de tolérance du composant Xi, à noter que cette formulation est une formulation simplifié de (5) pour laquelle il est considéré que les coefficients d'incidences sont réparties de façon uniformes ($\alpha_i=1$) et les pondérations de faisabilité égale à 1($\beta_i=1$).

Le Tableau 5 illustre l'ensemble des domaines résultants de l'assemblage de 3, 6, 9 composants pour deux indicateurs Cpk_{Xi} et Cpm_{Xi} différents.

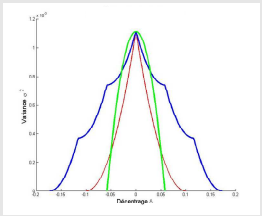
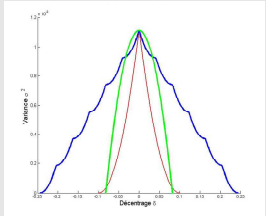
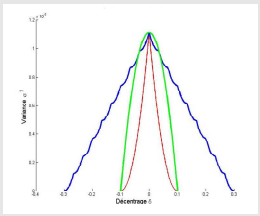
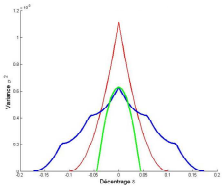
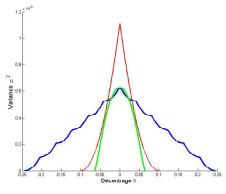
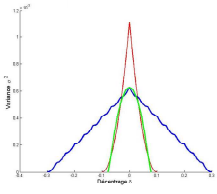
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1$			
	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1.33$			

Tableau 5: Evolution du tolérancement quadratique

Sur le Tableau 5 l'utilisation de l'indicateur Cpk_{Xi} égal à 1 sur les lots de composants (domaine en bleu) amène à des configurations d'assemblage hors domaine fonctionnel (domaine en rouge). Le Tableau 6 quantifie les pourcentages de domaine résultant hors de la condition fonctionnelle (R_{exp}) qui sont de 56, 70, 76 % pour des assemblages composés de 3, 6 et 9 pièces. Tandis que pour un indicateur Cpk_{Xi} égal à 1,33 ; les indices R_{exp} sont de 21, 38,

50 %. En conséquence, l'impact de l'indicateur Cpk_{Xi} porte essentiellement sur la réduction de la variance donc cet indicateur doit être couplé à un indicateur permettant de limiter les décentrages des lots. Ainsi, la combinaison des deux indicateurs amènerait à une annulation des configurations hors domaine fonctionnel. C'est le cas de l'indicateur *Cpm* qui correspond à une combinaison de variance et de décentrage par rapport à la cible. Nous pouvons constater que le passage d'un Cpm_{Xi} de 1 à 1,33 a permis d'annuler les configurations hors du CF. De même, il a permis d'obtenir des ratios supérieurs au tolérancement pire des cas pour un nombre de composants égal à 3 (Tolérancement pire des cas : R_{ICF}=44% ; Tolérancement quadratique : R_{ICF}= 49,2 %). En conséquence, l'utilisation d'une répartition statistique et de l'indicateur Cpm_{Xi} peut être généralisable aux assemblages dont le nombre de composants est inférieur à 5.

			Nombre de composants		
			3	6	9
Cpk_{YCF}=1	Cpk_{Xi}=1	R_{ICF}	100 %	100 %	100 %
		R_{exp}	56,7 %	70,8 %	76 %
	Cpm_{Xi}=1	R_{ICF}	90,7 %	99 %	100 %
		R_{exp}	21,4 %	38,5 %	50 %
	Cpk_{Xi}=1.33	R_{ICF}	77,1%	79,9 %	81,5%
		R_{exp}	40,9 %	59,2 %	66,6 %
	Cpm_{Xi}=1.33	R_{ICF}	49,2 %	69,5 %	85,2 %
		R_{exp}	100 %	100 %	99,5%

Tableau 6: tableau de synthèse de l'approche quadratique

4.3.2 Tolérancement quadratique augmenté

Le tolérancement quadratique augmenté a été introduit dans les années 51 par Gilson [24], il consiste en une répartition statistique des tolérances bornées par un coefficient f.

$$T_{Xi} = \beta_i . \frac{T_{Y_{CF}}}{f \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 . \beta_i^2}} \quad (26)$$

Où α_i est le coefficient d'influence ou de sensibilité et β_i est le coefficient de pondération de faisabilité de chaque composant *Xi* (caractéristique élémentaire).

On peut en déduire la relation suivante, en considérant une répartition uniforme des coefficients d'influences ($\alpha_i=1$) et les pondérations de faisabilité égales à 1 ($\beta_i=1$) :

$$T_{Xi} = \frac{T_{Y_{CF}}}{f \sqrt{n}} \quad (27)$$

Gilson propose une valeur empirique de 1.6. Cependant, Liggett [25] préconise d'utiliser les coefficients 1, 1.30, 1.39, 1.42, si le nombre de composants est de 1, 2, 3, 4. Si le nombre est supérieur à 4, il propose d'utiliser f= 1.5.

Plus récemment, Graves [26] introduit un calcul de f sur la base des indicateurs de capabilité comme le *Cp* ou le *Cpk*, cette définition est alors proche du tolérancement semi-quadratique que nous proposons dans la partie 4.3.3.

Dans le cadre de cette étude, nous nous référerons aux valeurs f données par Liggett (cf. :Tableau 7) :

Nombre de composants	3	6	9
f	1.39	1.5	1.5

Tableau 7 : Tolérancement statistique augmenté f de Liggett

Le Tableau 8 présente une illustration graphique des domaines. On constate graphiquement que le ratio R_{exp} est plus faible que dans l'approche vue dans la partie précédente (cf. Tableau 6 et Tableau 9). Cependant, celle-ci met en évidence de nouveau le fait que l'indice Cpk_{Xi} sans un indicateur d'écart par rapport à la cible ne permet pas d'annuler les configurations hors du domaine fonctionnel (R_{exp}<50%). Au contraire, l'utilisation de l'indicateur Cpm_{Xi} permet de mieux contrôler les écarts par rapport à la cible et d'assurer l'ensemble des configurations de lots inclus dans le domaine fonctionnel. Cependant, nous pouvons remarquer que pour un assemblage de 3 et 6 composants le Cpm_{Xi} de 1 n'exploite pas toutes les possibilités permises par la condition fonctionnelle.

L'indicateur *Cpm* peut encore être dégradé pour pouvoir bénéficier de toute la variabilité permise par le domaine fonctionnel.

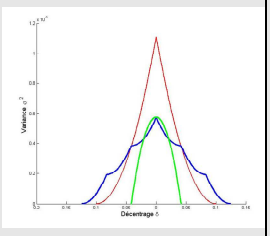
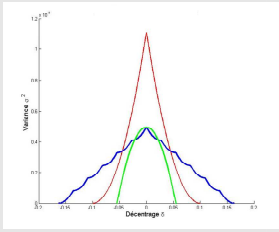
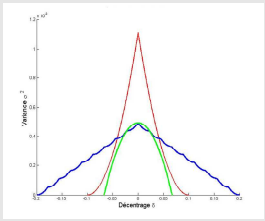
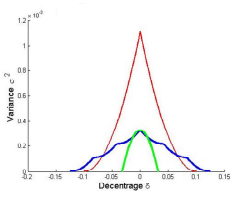
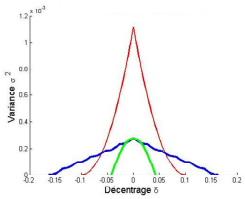
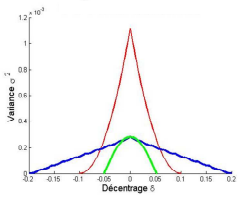
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1$			
	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1.33$			

Tableau 8 : Evolution du tolérancement quadratique augmenté

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$Cpk_{Xi}=1$	R_{ICF}	70,3 %	66,5 %	68,6 %
		R_{exp}	18,1 %	35,2 %	46 %
	$Cpm_{Xi}=1$	R_{ICF}	43 %	48,4 %	59.2 %
		R_{exp}	100 %	100 %	100 %
	$Cpk_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	43 %	42 %	43,8 %
		R_{exp}	10 %	27 %	39 %
	$Cpm_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	18 %	20 %	25 %
		R_{exp}	100%	100 %	100 %

Tableau 9: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement quadratique augmentée

4.3.3 Tolérancement semi-quadratique

Le calcul des tolérances selon la méthode statistique semi-quadratique est proposé par la norme NF 04-008[21]. Quelques hypothèses sont à considérer :

- les populations de chaque caractéristique fonctionnelle élémentaire sont centrées dans un domaine centré sur la valeur cible ;
- l'intervalle de tolérance est constitué d'une composante de variation de centrage prise en compte dans la méthode de calcul pire des cas et d'une composante de dispersion définie proportionnelle à un écart type.
- les caractéristiques sont indépendantes (absence de corrélation).

Les tolérances sur les caractéristiques fonctionnelles élémentaires sont calculées selon la formule proposée :

$$T_{Xi} = \beta_i \frac{T_{Y_{CF}}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|\alpha_i|\beta_i\right)\right)\times\left(1-\frac{ICi_i}{IC_i}\right)+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(|\alpha_i|\beta_i\right)}{IC_i}\right)^2}}, \quad (28)$$

Où ICi_i est l'indicateur d'inertie de décentrage et IC_i est l'indicateur inertiel intrinsèque.

Ainsi, il est possible d'en déduire le Tableau 10 qui présente l'ensemble des domaines δ-σ^2 :

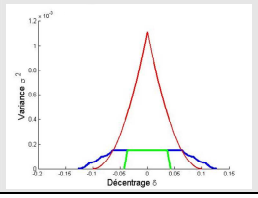
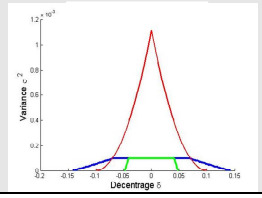
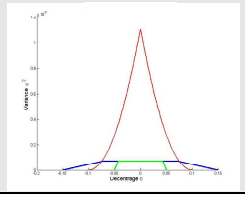
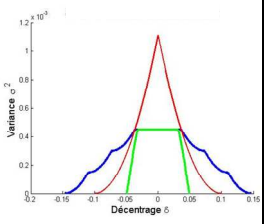
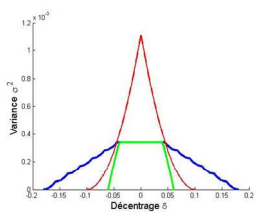
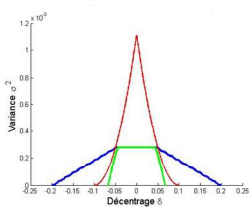
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	ICi_i =1 et IC=2			
	ICi_i=1 et IC=1.33			

Tableau 10 : Evolution du tolérancement semi-quadratique

La norme préconise d'utiliser l'indicateur inertiel *ICi* dans la qualification des lots de composants (Domaine en vert). En conséquence en respectant cet indicateur, nous pouvons constater que le domaine résultant est inclus dans le domaine fonctionnel. Il est préférable de choisir un indicateur IC_i de 1.33 afin de bénéficier d'un ratio R_{ICF} et R_{exp} adapté pour les assemblages de 3 voir 6 composants. Les proportions d'exploitation de la condition fonctionnelle (R_{ICF}) sont de 49 %, 46 % et 42 %. (cf. Tableau 11). On peut souligner que l'augmentation du nombre de composants dans l'assemblage diminue ce ratio, ainsi pour un assemblage de 15 composants, nous obtenons 36 % d'exploitation du domaine fonctionnel. Cet indicateur est intéressant, mais demande une optimisation des paramètres *ICi* et *IC* en fonction du nombre de composants de l'assemblage.

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$Cpk_{Xi}=1$	R_{ICF}	30,4 %	20,3 %	15,6 %
	IC=2	R_{exp}	17,3 %	22,6 %	24,8 %
	$Cpm_{Xi}=1$	R_{ICF}	15,9 %	11 %	8,77 %
	IC=2	R_{exp}	100 %	100 %	100 %
	$Cpk_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	70,4 %	57,9 %	50,5 %
	IC=1.33	R_{exp}	32,1 %	41,8 %	45,3 %
	$Cpm_{Xi}=1$	R_{ICF}	49,9 %	46,3 %	42,6 %
	IC=1.33	R_{exp}	100 %	100 %	100 %

Tableau 11: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement semi quadratique

4.3.4 Tolérancement quadratique probabiliste

Cette approche propose de considérer une répartition uniforme des composants d'un lot, et non pas une répartition normale comme réalisée dans le cas du tolérancement quadratique. Par conséquent, un coefficient q est défini pour lier l'approche quadratique et semi-quadratique. Nous obtenons donc d'un point de vue général :

$$T_{Xi} = \beta_i . q \frac{T_{Y_{CF}}}{6\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 . \beta_i^2}} \text{ avec } q = 2\sqrt{3} \quad (29)$$

Où α_i est le coefficient d'influence ou de sensibilité et β_i est le coefficient de pondération de faisabilité de chaque composant *Xi* (caractéristique élémentaire).

Et d'un point de vue particulier, où les coefficients d'influences sont égaux à 1 ($\alpha_i=1$) et les pondérations de faisabilité valent 1 ($\beta_i=1$).

$$T_{Xi} = q \frac{T_{Y_{CF}}}{6\sqrt{n}} \text{ avec } q = 2\sqrt{3} \quad (30)$$

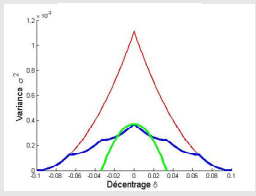
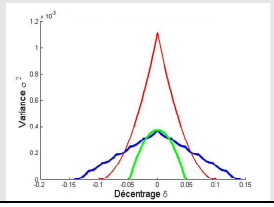
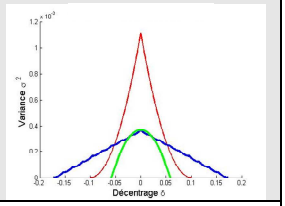
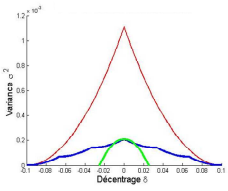
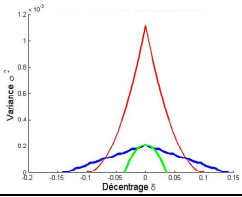
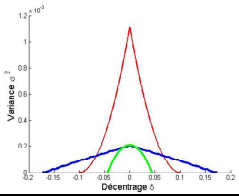
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	Cpk_{YCF}=1 ; Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1			
	Cpk_{YCF}=1 ; Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1.33			

Tableau 12 : Evolution du tolérancement statistique probabiliste

Le Tableau 12 met en évidence que cette approche reste assez contraignante en termes de variabilité suivant l'axe de la variance. Ainsi, pour un nombre de composants égal à 3, les performances de cette approche sont quasi égales à celle du tolérancement arithmétique. (cf. Tableau 4 (R_{ICF}=44 %) et Tableau 13(R_{ICF}=44 %)). De même, l'utilisation du Cpk_{Xi} conduit pour un nombre de composants supérieur à 3 à des configurations hors domaine fonctionnel. Nous remarquons que l'indicateur Cpm_{Xi} peut être dégradé (considéré inférieur à 1) pour pouvoir bénéficier de la variabilité permise par la condition fonctionnelle.

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$Cpk_{Xi}=1$	R_{ICF}	44,4 %	52,1 %	54,5 %
		R_{exp}	100 %	21,9 %	34,5 %
	$Cpm_{Xi}=1$	R_{ICF}	22,2 %	31,4 %	38,5 %
		R_{exp}	100 %	100 %	100 %
	$Cpk_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	25 %	31,3 %	33,3 %
		R_{exp}	100 %	17 %	29,1 %
	$Cpm_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	9,4 %	13 %	16,4 %
		R_{exp}	100%	100 %	100 %

Tableau 13: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement statistique probabiliste

4.3.5 Tolérancement quadratique sécurisé

Le tolérancement quadratique sécurisé a été introduit par B Anselmetti et S Besson [22]. Cette approche consiste à considérer qu'un lot de composants de l'assemblage peut-être en limite de tolérances tandis que les autres lots de composants sont conformes aux critères statistiques définis. Ainsi, les auteurs obtiennent la relation suivante :

$$T_{Xi} = \frac{IT_{Y_{CF}}}{\left(1 + 2p\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{q_i}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{q_i}\right)^2}\right)}, \quad (31)$$

où p est égale à 3 et q_i est égale à 3.46 (2√3).

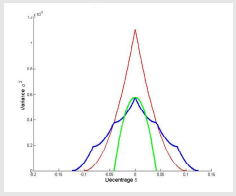
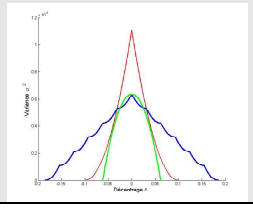
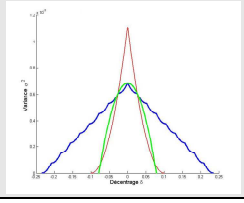
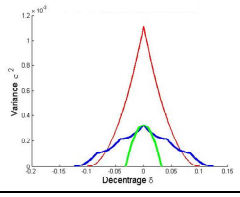
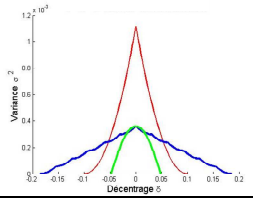
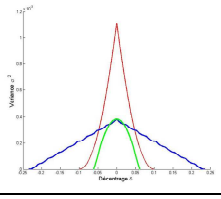
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1$			
	$Cpk_{YCF}=1$; $Cpk_{Xi}=Cpm_{Xi}=1.33$			

Tableau 14 : Evolution du tolérancement quadratique sécurisé

Cette approche de tolérance confirme que l'utilisation de l'indicateur Cpk_{Xi} n'est pas sans risque, car elle apporte des configurations hors de la condition fonctionnelle. L'utilisation de l'indicateur de capabilité de type Cpm_{Xi} donne de meilleurs résultats en termes d'exploitation du domaine fonctionnel, surtout quand le nombre de composants est élevé. Ainsi pour un nombre de composants égal à 9 et un Cpm_{Xi} égal à 1, nous avons les ratios R_{ICF} et R_{exp} égaux à 86 % et 98 % respectivement. Ces ratios sont très supérieurs aux approches précédentes.

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$Cpk_{Xi}=1$	R_{ICF}	70,1 %	79,8 %	85,3 %
		R_{exp}	17,7 %	46,8 %	59 %
	$Cpm_{Xi}=1$	R_{ICF}	42,6 %	70,8 %	86,4 %
		R_{exp}	100 %	100 %	98 %
	$Cpk_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	43 %	52,9 %	57,9 %
		R_{exp}	10,7 %	37,7 %	50,7 %
	$Cpm_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	18,1 %	30,1 %	41 %
		R_{exp}	100 %	100 %	100 %

Tableau 15: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement quadratique sécurisé

4.3.6 Tolérancement inertiel

Le tolérancement inertiel a été introduit précédemment dans la partie 3.3.

Le Tableau 16 met en évidence la particularité de cette approche qui d'une manière générale permet de contenir les décentrages par rapport à la cible. Cependant, pour ICi_{Xi} égale 1, elle autorise une variabilité de la variance du composant qui est supérieure à celle autorisée par le domaine fonctionnel (Domaine rouge). En l'occurrence, pour $ICi_{Xi}=1$, la valeur des indices R_{ICF} est supérieure à 90 % lors de l'assemblage. Néanmoins, l'indice de non-exploitation du domaine résultant par le domaine fonctionnel croît, ce qui signifie que des configurations d'assemblage de lots peuvent être hors du domaine fonctionnel. Cependant pour un ICi_{Xi} égal à 1.33, l'ensemble des configurations pouvant amener à des assemblages hors domaine fonctionnel est fortement réduit, voire annulé (cf. Tableau 16 et Tableau 17). Si la valeur ICi_{Xi} de 1.33, reste empirique ; Adragna[14] propose de calculer la valeur de l'indicateur ICi_{Xi} minimale à respecter sur chaque composant pour que le domaine fonctionnel soit garanti. C'est l'objet de l'approche présentée dans la partie suivante.

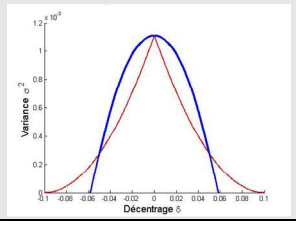
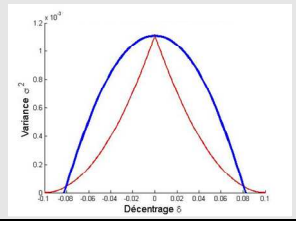
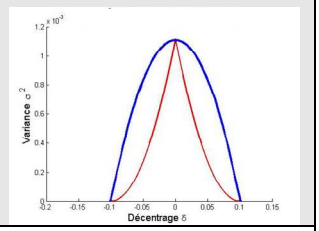
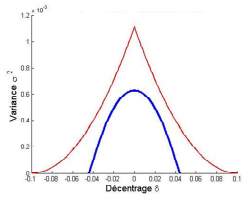
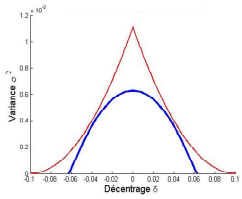
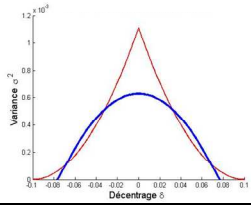
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	$ICi_{Xi}=1$			
	$ICi_{Xi}=1.33$			

Tableau 16 : Evolution du tolérancement Inertiel

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$ICi_{Xi}=1$	R_{ICF}	92 %	95 %	100 %
		R_{exp}	20,3 %	38,5 %	50 %
	$ICi_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	49,2 %	69,6 %	85,2 %
		R_{exp}	100 %	100 %	99 %

Tableau 17: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement Inertiel

4.3.7 Tolérancement inertiel ajusté (ou corrigé)

Le tolérancement inertiel ajusté a été proposé par Adragna [14], et introduit dans la partie 3.4. Cette approche consiste à déterminer l'indicateur minimal *ICi* à respecter pour garantir dans la plus mauvaise configuration le domaine fonctionnel. Dans ce cas d'étude, chaque inertie calculée de cette manière a été divisée par l'indicateur *ICi* égal à 1,15, 1,29, et 1,41 pour les assemblages de 3, 6, et 9 composants.

Le tableau suivant (Tableau 18) met en évidence le respect du domaine fonctionnel, quelle que soit la situation pour ICi_{Xi} égal à 1. De même, nous constatons que l'augmentation

de l'ICi_{Xi} n'apporte aucune plus-value sur l'exploitation du domaine fonctionnel.(Cf. : Tableau 18). Ainsi, le taux d'exploitation du domaine fonctionnel est supérieur à 70% pour les assemblages de 3, 6 et 9. Pour un nombre de composants de 3, le taux d'exploitation du domaine fonctionnel est de 75 % soit un ratio 1, 7 fois supérieur à celui proposé par le tolérancement arithmétique. Cette approche est beaucoup plus intéressante, et semble généralisable quelle que soit le nombre de composants du mécanisme.

Cependant, on constate que pour un nombre de composants égal à 9, le ratio R_{ICF} est inférieur à celui proposé par le tolérancement quadratique sécurisé. En l'occurrence, nous pensons que l'inertie ajustée peut vraisemblablement être améliorée pour exploiter au maximum le domaine fonctionnel pour un nombre de composants supérieur à 6. En effet, les travaux d'Adragna [14] mettent en évidence la recherche de la tangente du domaine résultant au domaine fonctionnel. Un travail complémentaire permettrait d'apporter une exploitation du domaine fonctionnel au maximum, voire permettant de définir un ratio d'acceptation de configuration hors domaine fonctionnel. Exemple : Accepter que k% du domaine résultant ne soit pas exploité par le domaine fonctionnel. La réponse à cette remarque ne fait pas l'objet de cette thèse.

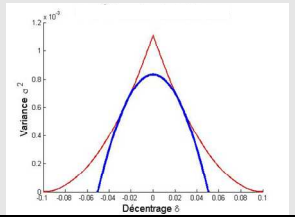
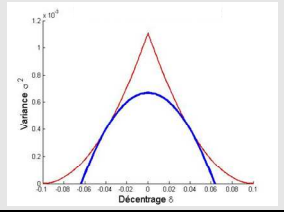
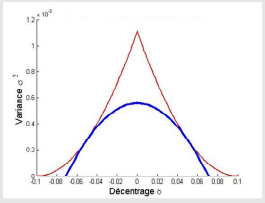
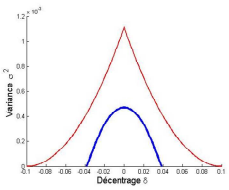
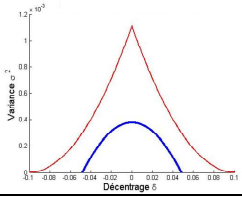
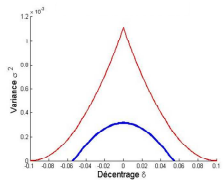
	Nombre de composants	3	6	9
Résultat Assemblage	Cpk_{YCF}=1 ; $Cpi=ICi_{Xi}$=1			
	Cpk_{YCF}=1 ; Cpi= ICi_{Xi} =1.33			

Tableau 18 : Evolution du tolérancement Inertiel Ajusté

			Nombre de composants		
			3	6	9
$Cpk_{YCF}=1$	$ICi_{Xi}=1$	R_{ICF}	75 %	75,9 %	70,7
		R_{exp}	100 %	100 %	100 %
	$ICi_{Xi}=1.33$	R_{ICF}	32%	32 %	30 %
		R_{exp}	100 %	100 %	100 %

Tableau 19: tableau de synthèse de l'approche de tolérancement statistique Inertiel

4.4 Synthèse des comparaisons

Cette partie peut se résumer aux points suivants :

- Afin de garantir la fonctionnalité de l'assemblage, il est nécessaire de définir un indicateur Cpk_{Xi} et un indicateur de centrage par rapport à la valeur cible sur chaque composant *Xi*. Rappelons que l'utilisation de l'indicateur *Cpk* seul crée des configurations pouvant amener au non-respect de la condition fonctionnelle de l'assemblage. L'augmentation du critère *Cpk* de 1 à 1,33, et de 1,33 à 1,67, réduit essentiellement la variabilité permise par la condition fonctionnelle et limite faiblement le risque des décentrages.
- L'indicateur *Cpm* présente un compromis intéressant au couple d'indicateurs Cpk_{Xi} et celui de centrage.
- Cette partie s'est intéressée seulement à la répartition des tolérances. Cependant, seule l'expression de l'inertie permet d'apporter une cohérence d'un point de vue de la conformité. Ainsi, des composants produits unitairement, proches des limites de tolérance conduisent à un *Cpm* non conforme. (cf. : Partie :3.1) [10]. En conséquence, l'utilisation de l'indicateur *Cpm* sous-entend une réflexion inertielle.
- De récents travaux proposent de définir les tolérances des composants à partir de l'équation du domaine fonctionnel résultant. Cette approche nous semble intéressante, car elle propose le meilleur couple R_{ICF} et R_{exp}.(Cf. Hernandez, Adragna [27])

Nous proposons de synthétiser sous la forme d'un tableau l'ensemble des informations introduites dans cette partie. (cf. Tableau 20)

	Approche de tolérancement	Indicateur de capabilité le plus adapté au respect du domaine fonctionnel		Nombre de composants dans l'assemblage	Remarques
		Cpk	Cpm/ICi		
1	Pire des cas			<5	Tolérancement trop restrictif sur la variabilité pour des assemblages de plus de 5 composants
2	Statistique (Quadratique)		>=1.33	2-∞[5]	Rechercher l'indicateur qualité Cpm_{Xi} optimum en fonction du nombre de composants de l'assemblage
3	Statistique Augmenté		>=1	2-∞[5]	Rechercher l'indicateur qualité Cpm_{Xi} optimum en fonction du nombre de composants de l'assemblage
4	Statistique semi quadratique		ICi=1 et IC=1.33	2-∞[5]	Rechercher l'indicateur qualité ICi_{Xi} et IC_{Xi} optimum en fonction du nombre de composants de l'assemblage
5	Probabiliste		?	2-∞[5]	Cette approche reste assez pessimiste, donc trop restrictive dans son utilisation, dans le contexte d'étude proposé.
6	Statistique Sécurisé		>=1	2-∞[5]	Rechercher l'indicateur qualité Cpm_{Xi} optimum en fonction du nombre de composants de l'assemblage
7	Inertiel		?	2-∞[5]	Rechercher l'indicateur qualité ICi_{Xi} optimum en fonction du nombre de composants de l'assemblage
8	Inertie Ajustée		1	2-∞[5]	Approche ayant un potentiel d'amélioration sous l'hypothèse d'une modification de la définition de l'inertie.

Tableau 20: tableau de synthèse de l'ensemble des approches quadratiques de tolérancement

Les parties précédentes ont permis d'évaluer pour chaque assemblage en fonction de l'indicateur Cpm_{Xi} appliquée au composant, le R_{exp} et le R_{ICF}. Le tableau suivant propose pour chaque composant une moyenne géométrique des indicateurs R_{exp} et R_{ICF} afin de noter globalement la qualité de l'approche en fonction du nombre de composants dans l'assemblage. Cette moyenne géométrique est en pour cent.

[5] Une recherche de la valeur de l'indicateur de capabilité *Cpk* ou *Cpm* est à réaliser la valeur indiquée dans la colonne précédente est à titre indicative.

	Approche de tolérancement	Cpm	Nombre de composants dans l'assemblage		
			3	6	9
1	Pire des cas	1	47,12		27,20
		1.33			
2	Statistique (Quadratique)	1	44,06	61,74	70,71
		1.33	70,14	83,37	92,07
3	Statistique Augmenté	1	65,57	69,57	76,94
		1.33	42,43	44,72	50,00
4	Statistique semi quadratique	ICi = 1 IC=2	39,87	33,17	29,61
		ICi = 1 IC=1.33	70,64	68,04	65,27
5	Probabiliste	1	47,12	56,04	62,05
		1.33	30,66	36,06	40,50
6	Statistique Sécurisé	1	65,27	84,14	92,02
		1.33	42,54	54,86	64,03
7	Inertiel	1	43,22	60,48	70,71
		1.33	70,14	83,43	91,84
8	Inertie Ajustée	1	86,60	87,12	84,08
		1.33	56,57	56,57	54,77

Tableau 21: Qualification des définitions de tolérancement quadratique par la moyenne géométrique des indicateurs R_{ICF} et R_{exp} : $(R_{ICF}*R_{exp})^{1/2}$ pour un Cpm_{Xi} appliqué à chaque composant

Dans le Tableau 21, nous considérons :

- En rouge, valeurs inférieures à 60 %, la définition ne doit pas être utilisée, car elle est trop restrictive et fait courir un risque, de ne pas respecter la condition fonctionnelle, beaucoup trop important.
- En Orange, valeurs de 60 % à 80 %, la définition est acceptable elle est moins restrictive, mais le risque est toujours présent.
- En vert, valeurs supérieures à 80 %, la définition est à retenir, l'exploitation est maximale et le risque est faible voir nul.

4.5Conclusion Intermédiaire

Le tolérancement unidimensionnel n'est qu'un premier degré de représentation de la réalité. Dans un cadre générale, ce premier degré de représentation est souvent suffisant. Cependant, pour des mécanismes demandant un certain niveau de précision, il peut être nécessaire de passer à un second voir un troisième degré de représentation qui consiste à intégrer les variations géométriques ou de forme des surfaces. Les approches, intégrant les variations géométriques et de forme, sont plus complexes mais permettront d'apporter une plus grande précision dans la définition et l'allocation des tolérances.

5 Tolérancer les variations géométriques des composants.

Depuis 1988, l'ISO[37] et l'ASME [35][36] deux organismes internationaux travaillent à la normalisation d'une codification des variations géométriques des surfaces. Ce langage normalisé a pour objectif de spécifier les limites des défauts des surfaces de façon univoque et compréhensible par tous les acteurs du cycle d'élaboration du produit. Ces organismes ont statué sur un ensemble de symboles permettant de limiter les écarts de géométrie. Le Tableau 22 en présente un bref récapitulatif :

Forme		Orientation		Position	
Désignation	Symbole	Désignation	Symbole	Désignation	Symbole
Rectitude	—	Parallélisme	//	Localisation	⌖
Circularité	○	Perpendicularité	⊥	Concentricité	◎
Planéité	▱	Inclinaison	∠	Coaxialité	
Cylindricité	⌭			Symétrie	≡
Forme d'une ligne quelconque	⌒	Orientation d'une ligne quelconque	⌒	Position d'une ligne quelconque	⌒
Forme d'une surface quelconque	⌓	Orientation d'une surface quelconque	⌓	Position d'une surface quelconque	⌓
Battement	Battement circulaire	↗	Battement total	⌰	

Tableau 22 : Récapitulatif des symboles utilisés par les normes ISO [ISO 8015] et ASME [Y14 ;5M-1994]

Cependant, la codification ou la lecture d'un plan coté selon les normes ISO et ASME présente des divergences ([38] → [40]), sur lesquelles nous ne nous attarderons pas. Notons que tout au long de cette thèse, nous nous référons à la norme ISO GPS en vigueur actuellement.

5.1Des enjeux communs

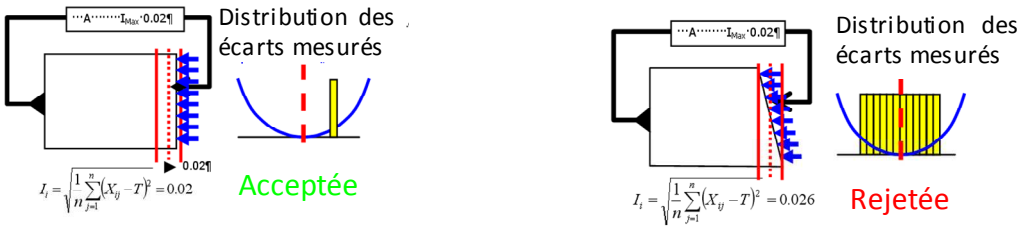
Si la codification des spécifications est établie par les normes, l'aspect automatisation et détermination des valeurs des spécifications dans l'objectif de garantir une condition fonctionnelle n'est pas clairement défini ; et reste aujourd'hui encore un enjeu scientifique pour les années à venir. En effet, l'automatisation totale de la codification des assemblages ainsi que son analyse est une thématique importante dans plusieurs laboratoires de recherche. Différents travaux ont permis d'apporter certaines réponses [41] à ces problématiques. L'état de l'art réalisé par Ngoi[42] permet de donner une vision globale des thématiques et des acteurs principaux dans le domaine.

A travers le tolérancement inertiel, il existe à ce jour très peu d'articles scientifiques définissant l'inertie d'une surface et son interprétation dans le cadre d'une spécification géométrique sur un lot. La partie suivante présente les différentes définitions de l'inertie d'une surface, appelée inertie 3D, introduites dans la littérature scientifique.

5.2Première Définition : Inertie 3D Standardisée

Elle a été introduite par Pillet [43]. Son objectif est de définir la qualité d'une surface en incluant les défauts de forme et de position.

L'inertie est définie par la mesure d'un nombre de points X_{ij} prédéfini. (figure 8)



(a) (b)

figure 8: Exemple de l'inertie suivant la définition de la première approche (Extrait de l'article : [43])

Concernant la surface i, l'inertie est calculée en utilisant ces relations :

$$I_i = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - T\right)^2} = \sqrt{\sigma_i^2 + \left(\overline{X_i} - T\right)^2} \quad (32)$$

Où, X_{ij} est la j ième mesures du composant i, σ_i est l'écart type des mesures de la pièce i, T est la cible ;k est le nombre de pièces ;n est le Nombre de mesure par pièce ; I_i est l'Inertie calculée à partir des n points de la pièce i ;I est l'Inertie globale sur l'ensemble des pièces (kn) ;I_{Max} est l'Inertie maximale admissible.

De plus, Pillet propose une expression de l'inertie pour un échantillon de k composants sous la forme:

$$I_{Lot}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} I_i^2 \quad (33)$$

La détermination de l'inertie d'un lot est déduite des inerties des surfaces de chaque pièce. Cependant, une autre approche consiste à présenter l'inertie du lot comme l'inertie des points. L'inertie 3D du lot se calcule alors par la moyenne quadratique des inerties de chaque point.

$$I_{Lot}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=k}\left(X_{ij} - T\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_j^2 \quad (34)$$

Où, I_j est l'inertie du point j .

On a donc deux méthodes permettant d'obtenir l'inertie 3D d'un lot :

- On calcule l'inertie pour chaque surface, et l'inertie du lot est ensuite obtenue en combinant les inerties de toutes les surfaces.
- On calcule l'inertie pour chaque point de mesure, et l'inertie d'un lot est ensuite obtenue en combinant l'inertie de tous les points mesurés.

Néanmoins, la méthode présentée ci-dessus demande dans une relation client-fournisseur de formaliser la démarche de contrôle par la mesure. En effet, l'écart type calculé sur 3, 5, 10 points peut être différent (figure 9).

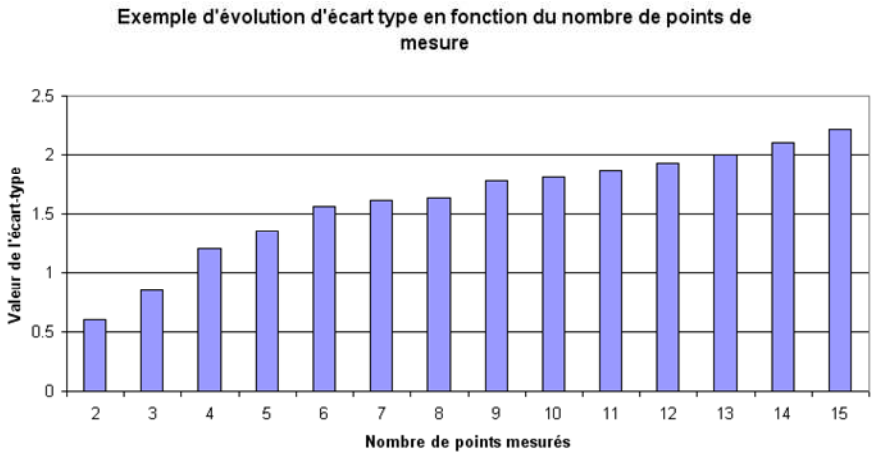


figure 9 : Evolution de l'écart type d'une surface comportant un défaut d'orientation en fonction du nombre de points mesurés

Donc, les deux parties (Client ou fournisseur) peuvent soit augmenter, soit réduire la valeur de l'inertie en fonction du nombre de points contrôlés. Il est donc nécessaire de spécifier le nombre de points de mesure et leurs emplacements. [44]

5.3Seconde définition : Inertie 3D ajustée

5.3.1 Origine de cette approche

Cette approche a été proposée par Adragna [44] suite à la remarque suivante :

En considérant le schéma figure 10, un empilement de deux composants. Il propose de décomposer le problème en deux chaînes de cotes 1D et applique le tolérancement inertiel classique au 3D. (Cf. chapitre 3).

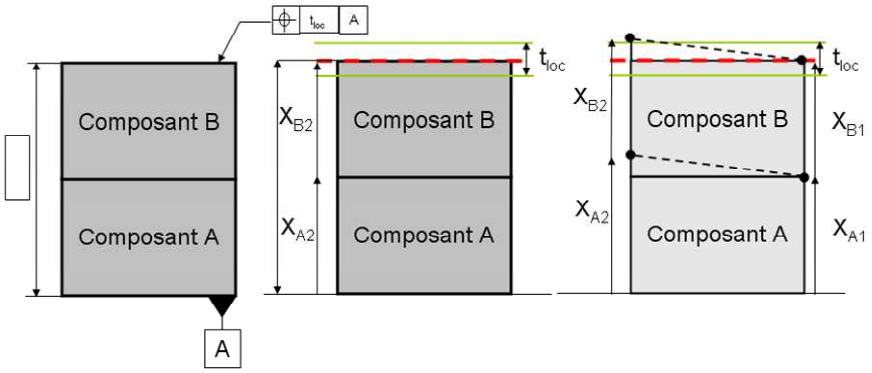


figure 10 :Schéma d'un empilage

« De ce fait, il constate que l'inertie 3D classique autorise plus d'écarts sur une chaîne de cote. Cette augmentation d'écart ne garantit plus la condition fonctionnelle. » [44]

Pour notre part, nous considérons ce problème essentiellement comme un problème de synthèse de tolérances auquel nous nous efforcerons d'apporter une solution au chapitre 5.

5.3.2 Inertie 3D ajustée

Elle consiste à définir une surface par une inertie maximale :

$$I_{Lot} = Max(I_j) \tag{35}$$

Dont I est un scalaire qui présente l'inertie 3D, et Ij correspond à la jième mesure.

L'inertie d'un échantillon est définie par l'inertie maximale des points mesurés (figure 11). L'inertie d'une pièce est proche de l'inertie présentée par la relation (35).

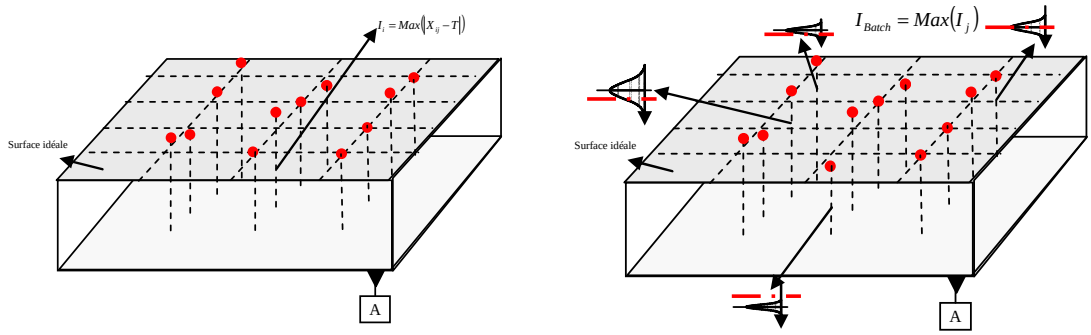


figure 11 : Approche par Adragna du tolérancement inertiel 3D

De ce fait, l'inertie d'une face ne dépend plus du nombre de points mesurés, mais est définie par la plus grande inertie mesurée. Cependant, il est à noter qu'elle dépend toujours de l'endroit où les écarts sont mesurés et que l'application de cette méthode sur une surface brute révèle l'inconvénient suivant :

Une erreur de mesure peut faire apparaître un pic sur la surface faussant la valeur de l'inertie 3D, alors que son impact sera moindre avec la première méthode présentée. Il est donc nécessaire de restreindre l'application de la deuxième méthode sur une surface filtrée (lissage des pics) pour éviter les erreurs.

5.4Troisième définition : Inertie 3D Normalisée

La troisième approche a été suggérée lors de l'avant-projet de norme [13] et propose de définir l'inertie d'une pièce comme le plus grand écart mesuré :

$$I_i = Max\left(\left|X_{ij} - T\right|\right) = Max\left(\left|\delta_j\right|\right) \tag{36}$$

Où, δ_j est l'écart maximal mesuré sur la pièce i.

L'inertie du lot se définie par la relation :

$$I_{Lot} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(I_i)^2} \tag{37}$$

Il est à noter que l'inertie dépend toujours de l'endroit où les écarts sont mesurés. Cependant, elle dépend toujours de la position de mesure des écarts et l'application de cette méthode sur une surface brute conduit à une erreur de détermination de l' inertie 3D normalisée.

En effet, une erreur de mesure peut faire apparaître un pic sur la surface faussant la valeur de l'inertie 3D normalisée, alors que son impact est moindre avec la méthode de l'inertie 3D standardisée. Donc, il est nécessaire d'appliquer la méthode sur une surface filtrée (lissage des pics).

5.5Conclusion Intermédiaire

Trois approches ont été présentées et définies avec leurs avantages et leurs inconvénients. Cependant, quelle est l'approche la plus viable ? Y a-t-il d'autres inconvénients à ces définitions ? Quelle est la convergence statistique de ces définitions ?

A travers le chapitre 3, nous tentons d'apporter une réponse à ces questions.

Dans le contexte industriel, c'est souvent l'approche utilisée pour piloter l'outil de production qui permet de garantir l'inertie max d'une caractéristique élémentaire. Pillet propose d'utiliser une carte de contrôle inertielle que nous rappelons dans la partie suivante.

6 Garantir I_{Max} par le pilotage d'un procédé

Le fondement du pilotage d'un processus de fabrication par carte de contrôle a été proposé par W.A. Shewhart en 1926 [4] et se base sur une analyse de deux paramètres statistiques d'un échantillon qui sont:

- La tendance (ou position) de l'échantillon,
- La dispersion de l'échantillon.

Le suivi de l'évolution temporelle des paramètres statistiques est réalisé par deux cartes de contrôle indépendantes entre elles.

- La carte des moyennes X-bar donne la tendance de l'échantillon,
- La carte des étendues R donne la dispersion.

Ce schéma de pensée a été repris par Pages [45] et Roberts [46], lors de la création des cartes CUSUM et EWMA. Ces dernières sont plus performantes que les cartes Shewhart à la détection des décentrages de faible amplitude de la moyenne.

Cependant en 1996, Chao [47] apporte une nouvelle vision de la carte de contrôle, en proposant une carte en demi-cercle (l'écart de la moyenne par rapport à la cible en abscisse, l'écart type en ordonnée), ainsi l'écart type et le décalage de la moyenne du prélèvement par rapport à la cible deviennent dépendant. Cette approche est reprise successivement par :

- Cheng et Spiring [48] proposent une carte de contrôle appelée MSE,
- Cheng et Li [49] proposent une carte de contrôle appelée T sur laquelle on inscrit la somme des déviations maximales de l'échantillon par rapport à la cible,
- Minte Chao [50] optimise la détection de la carte T de contrôle en demi-cercle et présente la carte $T_{optimum}$.

Chaque approche insiste sur la notion de valeur cible et apporte une autre vision de la carte de contrôle X-bar and R.

Cependant, que ce soit le pilotage par carte de contrôle traditionnelle (EWMA, CUSUM, Shewhart…) ou en demi-cercle (MSE, T, $T_{optimum}$), lors du pilotage d'une caractéristique

élémentaire, il y a un risque non négligeable de surqualité par rapport au besoin client spécifié [51].

De ce fait, de nouveaux travaux sont apparus, on note par exemple :

- Les travaux de Zhang [52] et de Pillet [53] qui apportent une réponse sur l'équilibre entre le respect du besoin client et la souplesse de fabrication (limitation de la surqualité).

Zhang base ses travaux sur les notions de tolérancement traditionnel quadratique (ASME [35][36]) et sur les indicateurs qualité existants (ISO 3534 :2 [6]), utilisés actuellement dans l'industrie. A la différence de Zhang, Pillet se base sur les travaux de Graves[9] et Taguchi [11], sur la problématique du tolérancement statistique ainsi que sur les incohérences des indicateurs de capabilité [10].

6.1Carte de contrôle inertielle aux risques

Dans le cas d'un tolérancement inertiel, il est nécessaire de piloter le processus pour garantir l'inertie spécifiée sur les plans par le bureau d'études (Plan contractuel entre le client et le fournisseur). Cette partie propose une adaptation des cartes de contrôle traditionnelles pour permettre de suivre l'inertie en production. Le principe consiste à suivre l'inertie des échantillons et à vérifier si cette inertie est incluse dans un domaine d'acceptation délimité par sa loi de distribution. La loi de distribution de l'inertie est définie par une loi du χ^2(Scheffe[56], Roy [54], Russel [55]).

L'étude du respect de l'inertie Max passe par les étapes suivantes :

- Un prélèvement séquentiel de la production,
- Un calcul de l'inertie de cet échantillon,
- Une vérification au moyen de la carte que l'inertie calculée se situe dans la zone de conformité.

Lors du pilotage en atelier, quatre zones distinctes sont identifiées, chacune correspond à une information ou une action spécifique à mener (cf. figure 12):

- Zone verte (1) : La production est centrée, et conforme à l'inertie historique, l'opérateur ne fait aucune action corrective (ex : réglage). La limite de cette

zone est calculée à partir du risque α (risque de fausse alarme) qui est le risque de ne pas dérégler un processus qui est bien centré.

- Zone orange (2) : L'inertie prélevée n'est pas conforme à l'inertie historique, mais elle est inférieure à l'inertie maximale admise, au risque β. Une action corrective est possible. La limite de cette zone est calculée à partir d'un risque β qui est le risque de non-détection d'un processus qui est déréglé.
- Zone rouge (3) : L'inertie de l'échantillon est conforme par rapport à I_{MAX} mais on ne garantit pas (au risque β) que l'inertie de la production soit conforme. Une action corrective est conseillée.
- Zone noire (4) : L'inertie de l'échantillon n'est pas conforme par rapport à l'inertie maximale admise. Une action corrective doit être réalisée impérativement.

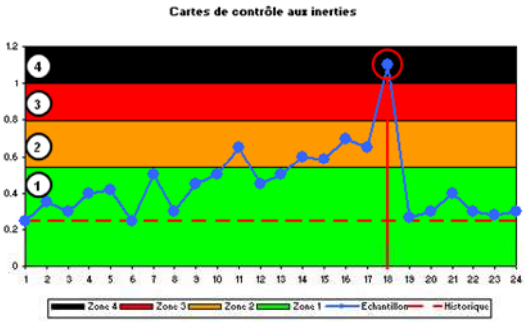


figure 12 :Première représentation de la carte de contrôle aux inerties

Par exemple pour la figure 12, l'inertie de l'échantillon prélevé n°18 montre qu'Imax n'est plus garantie. Il est impératif de réaliser une action corrective et de rechercher la source de cette dérive.

L'inertie étant une composition de deux paramètres (δ et σ), la figure 12, seule ne permet pas à l'opérateur d'identifier la cause d'une mauvaise inertie. Une solution consiste à décomposer l'inertie en deux composantes (δ en abscisse et σ en ordonnée). Ainsi, il est possible à l'opérateur d'identifier l'action corrective à réaliser suivant le type de dérive. La représentation en demi-cercle (cf. figure 13) des limites d'acceptation est due à la relation (38) :

$$\sigma_{Max(Ordonnée)} = f(\delta_{abscisse}; LI) \tag{38}$$

Où LI est la limite LC_{α} ou LC_{β}

$$\sigma^2_{Ordonnée} = \sqrt{LI^2 - \delta^2_{Abscisse}} \tag{39}$$

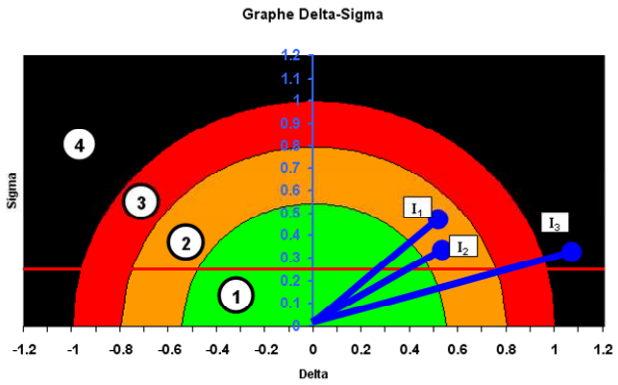


figure 13 :Deuxième représentation de la carte de contrôle aux inerties

L'exemple (cf. figure 13) présente deux inerties I_1, I_2 contenues dans la zone 2.Celles ci correspondent à des échantillons dont l'inertie est correcte. Néanmoins, la troisième inertie I_3 est dans la zone 4, la cause de la dérive est facilement identifiable. Le processus s'est décentré. Il est donc nécessaire d'appliquer une action corrective adéquate.

En cas de dérive d'un processus, le réglage peut intervenir lorsque l'inertie de l'échantillon se trouve dans la zone 2. Plus cette zone est importante, plus on a de degrés de liberté pour régler le processus au moment opportun.

Dans le cas présenté, les règles de pilotage ne sont pas spécifiées explicitement. Par principe, il est possible d'utiliser la règle simple ; «Report de l'inertie du prélèvement puis action corrective dans le cas nécessaire ». Cependant, il est toujours possible d'appliquer des règles de pilotage (intégration d'une vision d'antériorité de la production) pour améliorer l'efficacité de la carte de contrôle. L'auteur peut se reporter aux travaux récents de Divorski, et de Nelson ([57]→[60]) sur l'apport de nouvelles règles de pilotage, et Zhang, Montgomery, Juran ([61] →[63]) concernant l'influence des règles sur l'efficacité de détection.

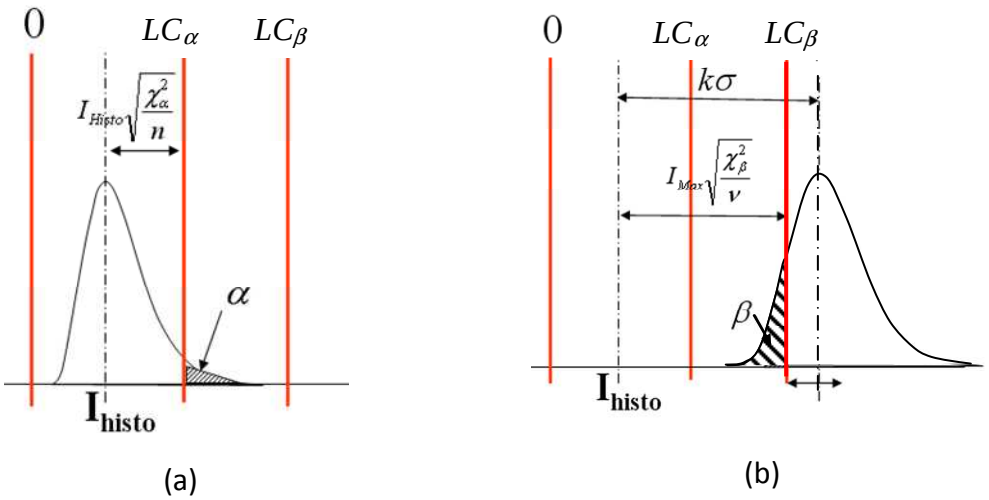
La partie suivante présente la méthode de calcul des zones 1 et 2 en prenant en compte les paramètres cités ci-dessus.

6.2Calcul des limites de la carte de contrôle inertielle

Dans la partie précédente, quatre zones ont été identifiées :

- La première zone (Zone 1) est une zone de fausse alarme. Elle est calculée à partir d'un risque α,
- La deuxième zone (Zone 2) est une zone de détection du décentrage. Elle est calculée à partir d'un risque β,
- La troisième zone correspond à l'inertie max (I_{MAX}).
- La quatrième zone est celle supérieure à I_{MAX}.

La figure 14 est une illustration des risques, α et β. La distribution des inerties est présentée sur la figure par une loi du chi deux, considérée centrée pour le risque α (figure 14 (a)) et décentrée pour le risque β (figure 14 (b)).Le risque α correspond au risque de considérer un processus hors limite LC_α alors qu'il est dans les limites. Et le risque β représente le risque de considérer que le processus est sous la limite LC_β alors que celui-ci est hors limite. Nous proposons de rappeler le calcul des limites des zones 1 (LC_α) et 2 (LC_β) dans les parties suivantes.



(a) (b)

figure 14 : Explication du risque α et β

6.2.1 Limite de Contrôle de la zone 1 (LCα)

La limite de contrôle de la zone 1 (LC_α) est calculée à partir du risque α et de l'inertie historique court terme du procédé :

$$LC_\alpha = I_{historique} \times \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}} \quad (40)$$

$I_{historique}$ correspond à l'inertie des productions antérieures. L'inertie historique correspond à l'écart type court terme du procédé (σ_{CT}) (41). Le degré de liberté de la loi du chi deux est fonction de la taille d'échantillon prélevée (n).

$$I_{historique} = \sigma_{CT} \quad (41)$$

Où, σ_{CT} est l'écart type court terme du procédé

6.2.2 Limite de Contrôle de la zone 2 (LCβ)

La limite de contrôle de la zone 2 (LC_β) se calcule suivant le risque β et à I_{MAX}.

Elle correspond à la probabilité de détection d'une dérive de la moyenne du procédé supérieure à la limite LC_β;

$$LC_\beta = I_{Max} \times \sqrt{\frac{\chi^2_{\beta,\upsilon}}{\upsilon}} \quad (42)$$

,

Où ν est le degré de liberté de la loi du χ^2 pour la limite LC_β. Le degré de liberté de la loi du χ^2 est défini par l'équation suivante :

$$\upsilon = n \frac{I^4_{Max}}{\sigma^2_{CT}\left(2I^2_{Max} - \sigma^2_{CT}\right)} \quad (43)$$

,

Où I_{Max} représente l'inertie client, n correspond à la taille de l'échantillon prélevé et σ_{CT} équivaut à l'écart type court terme du procédé.

En appliquant la relation de l'*IC* (*Cp*) qui lie I_{Max} à σ (cf. relation (15)), on en déduit :

$$\upsilon = n \frac{IC^4}{2IC^2 - 1} \quad (44)$$

Le degré de liberté ν peut être arrondi à la valeur entière supérieure ou inférieure.

6.3Conclusion Intermédiaire

Nous avons rappelé dans cette partie le calcul de la carte de contrôle inertielle avec dérive.

Au travers de cette thèse, nous rechercherons à répondre aux questions suivantes ; quelles sont les limites d'utilisation de la carte de contrôle ? Quel est le résultat sur la qualité livrée en pilotant avec cette carte ? Peut-on envisager des variantes de celle-ci ? Dans un contexte scientifique, nous évaluerons clairement son apport par rapport aux autres cartes traditionnelles de pilotage en définissant sa qualité de détection, communément appelée *POM* (Période Opérationnelle moyenne) ou *ARL* (Average Run length).

7 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter succinctement l'apport du tolérancement inertiel par rapport aux approches traditionnelles de tolérancement qui sont :

- le tolérancement au pire des cas (arithmétique) :

Il garantit la qualité de l'assemblage dans toutes les situations à partir du moment où les caractéristiques élémentaires sont dans les tolérances. Cependant, il garantit un niveau de qualité élevé en dépit de la faisabilité. (Intervalle de tolérance réduit)

- le tolérancement statistique (quadratique) :

Il tient compte de la faible probabilité d'assemblages d'extrêmes entre eux et permet d'élargir de façon importante les tolérances pour diminuer les coûts. Cependant, il ne garantit pas le respect de la condition fonctionnelle de l'assemblage lors d'une production décentrée des composants.

Si certains auteurs proposent de développer des approches pour réduire les risques du tolérancement statistique, Pillet [10] introduit une nouvelle approche appelée « tolérancement inertiel ». Celle-ci permet de concilier deux objectifs antagonistes :

- Fixer des limites de variabilité acceptables les plus larges possibles pour diminuer les coûts de production.
- Assurer un niveau de qualité optimal sur le produit fini.

L'inertie se base sur la fonction perte de Taguchi et propose de ne plus tolérancer selon une bi limite (un min et un max) mais selon le carré de l'écart par rapport à la cible. Du fait d'une nouvelle formulation de la tolérance, de nouveaux indicateurs sont présentés, le *IC* (*Cp*) et le *ICi* (*Ppi*). Ces deux indicateurs peuvent être respectivement assimilés aux indicateurs *Cp* et *Cpk* présentés dans la norme ISO 3534-2006. De plus, il est à noter que le tolérancement inertiel ne prend pas comme hypothèse la normalité des distributions, *ICi* peut donc être calculé même dans le cas de distribution non normale.

Dans l'objectif d'introduire l'apport de l'inertie dans le monde du tolérancement, nous avons réalisé une comparaison de plusieurs approches de répartition statistique des tolérances. Nous avons constaté que l'utilisation du seul indicateur Cpk_{Xi} appliqué à un lot de caractéristiques élémentaires ne permettait pas de garantir la fonctionnalité de l'assemblage. Pour réduire ce risque, il est nécessaire de coupler cet indicateur à un indicateur de centrage ; qui qualifie l'écart acceptable par rapport à la cible. Nous avons vu que l'indicateur Cpm_{Xi} permet de concilier la limitation de l'écart type et celle des écarts par rapport à la cible. Au final, celui-ci présente un très bon compromis pour certaines répartitions de tolérances. Cependant, son utilisation dans un contexte de production ne permet pas de pallier l'incohérence de conformité. En effet, seule une répartition de type inertie ajustée (corrigée) permettait de respecter la fonctionnalité de l'assemblage, et d'être cohérente à l'aspect de conformité en production. Cependant, nous avons fait remarquer que cette répartition de l'inertie pour des assemblages supérieurs à 9 composants pouvait sans aucun doute être améliorée dans l'hypothèse que la définition de l'inertie soit modifiée.

Dans cette thèse, nous ne traiterons pas de thématique au sujet de la répartition des tolérances inertielles dans un contexte unidimensionnel.

L'approche présentée dans les quatre précédentes parties est une approche unidimensionnelle des problèmes qui permet de traiter des problèmes assez simples. Ce tolérancement unidimensionnel n'est qu'un premier degré de représentation de la réalité. En effet, celui-ci ne prend pas en compte les variations géométriques ou de forme des surfaces. Les approches intégrant ces variations permettent de traiter des problèmes beaucoup plus complexes, et d'apporter une plus grande précision. Dans ce contexte et en référence à la littérature scientifique, trois définitions de l'inertie sont présentées : L'inertie 3D Standardisée, 3D Ajustée, 3D Normalisée. Celles-ci permettent de quantifier les défauts d'une surface ou d'un lot de surfaces. Pour autant, la littérature n'approfondit par la relation

entre ces définitions. Nous tenterons, au sein du chapitre 3, de rechercher les relations entre ces définitions, de mettre en évidence les relations entre l'inertie 3D et l'écart au niveau de la condition fonctionnelle, nous essayerons de montrer les inconvénients et les avantages de chaque approche.

Les réflexions portées par le chapitre 3 déboucheront sur deux autres chapitres. L'un porte sur l'aide au pilotage et la définition d'une nouvelle forme de tolérancement. L'autre propose dans le contexte des petits déplacements d'introduire une approche de tolérancement inertiel dans un contexte tridimensionnel.

Le dernier point traité dans ce chapitre bibliographique s'intéresse au pilotage d'une production avec la carte de contrôle aux inerties. Dans le chapitre suivant, nous rechercherons à identifier clairement son apport par rapport aux cartes de contrôle traditionnelles, mais aussi à définir la qualité de détection de cette carte (*ARL*) et proposerons de la décliner afin de l'adapter à plusieurs contextes industriels. Pour conclure ce chapitre 2, nous présenterons quelques cas d'applications du pilotage avec l'inertie réalisés dans le cadre du pôle compétitivité « Arves Industries Mont Blanc».

8 Bibliographie

[1] Gilson J A.M.I.Mech.E, A.M.I.Prod.E, [1951], A New approach to engineering tolerances, The machinery publishing CO.LTD, Chapter 3, 42-48.

[2] Evans, D.H, [1974], Statistical tolerancing the state of art, Part I: background, Journal of quality technology, Vol.6, pp 188-195, 1974

[3] Evans, D.H, [1975], Statistical tolerancing the state of art, Part II: methods for estimating moments, Journal of quality technology, Vol.7, pp 1-12

[4] Shewhart W. A. , [1926]. Quality control Charts. Bell System Technical Journal, 5, 593-602.

[5] Western Electric, [1956],.Statistical quality control handbook. Indianapolis : Western Electric Corporation.

[6] ISO 3534-2, [2006], Statistics -- Vocabulary and symbols -- Part 2: Applied statistics

[7] Kane V.E., « Process Capability Indices », Journal of quality Technology, Vol. 1, pp 41-52.

[8] Boyles R.A, [1991],« The Taguchi Capability Index », Journal of Quality technology, vol. 23, No 1, January 1991.

[9]Graves s., Bisgaard S., [2000], Five ways statistical tolerancing can fail, and what to do about them", Quality Engineering, Vol. 13, No 1, pp 73-82.

[10]Pillet M., [2004], Inertial Tolerancing, Total quality Management, 16, 3, 202-209

[11] Taguchi, G., [1987], « System of experimental design », Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs, Vol. 1 and 2, American Supplier Institute, Inc, Livonia, MI.

[12] Harringtin, H. James,[1990], Le coût de la non-qualité, Edition : Eyrolles

[13] NF XP E 04-008, [2009], GPS – Méthode de tolérancement, expression et declaration de la conformité.

[14] Adragna P-A, Pillet M, Samper S, Formosa F.,[2007]. "Garantying a maximum of non conformity rate on the assembly resultant with a statistical tolerancing approach", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlanger, Germany

[15] Maurice Pillet, Dimitri Denimal, Pierre-Antoine Adragna, Serge Samper:,[2008], Interest of the Inertial Tolerancing Method in the Case of Watch Making Micro Assembly. IPAS 2008: 189-197

[16] Fritz Scholz, [1995], Tolerance Stack Analysis Methods. Research and Technology, Boeing Information & Support Services.

[17] Spencer Graves, [1994], Tolerance Analysis Considering Manufacturing variability and the costs of deviating from the nominal. Center for quality and productivity Improvement, University of Wisconsin.

[18] Earle Buckingham, [1921], Principles of interchangeable manufacturing. Industrial Press; New York.

[19] Earle Buckingham, [1954], Dimensions and Tolerances for Mass Production. Industrial Press; New York.

[20] Reinhold Rüdenberg, [1929], Die beurteilung elektrischer Maschinen und apparate durch toleranzen auf grund statisticher Methoden, Zeitschrift fûr angewandte Mathematik ybd Mechanik 9, August 1929, pp 318-334.reprinted as p.40-56 in H.C. Plaut (1930), Fabrikationskontrolle auf grund statistischer methoden. VDI-Verlag;Berlin.

[21] NF XP E 04-008, [2009], Spécification géométrique des produits, calcul de tolérance, indications et critère d'acceptation, Méthodes arithmétique, statistique quadratique et statistique inertielle. AFNOR.

[22] Bernard Anselmetti et Serge Bisson, [2009], Calcul statistique sécurisé des chaînes de cotes fonctionnelles, 8éme édition du congrès international pluridisciplinaire – Qualita 2009 – Besançon (France)

[23] A.Bender, [1962], Benderizing tolerances – a simple pratical probability method of handling tolerances for limits-stack-ups, Graphic Science, pp 17-21, December 1962.

[24] J.Gilson, [1951], A new approach to engineering tolerances, the Machinery Publishing CO.LTD, London.

[25] Liggett, J.V , [1993], Dimensional Variation Management Handbook. Prentice Hall, Englewood cliffs, NJ

[26] Graves S, [2001], Tolerance Analysis Formula Tailored to your Organization, Journal of quality Technology, Vol 33, n°3.

[27] Pierre Antoine Adragna, Pascal Hernandez, [2009], A new method to express functional requirements and how to allocate tolerance to parts, Computer Aided Tolerancing, CAT- Annecy, France

[28] Pierre Antoine Adragna, [2009], Respecting the loss-cost of a non-symmetrical functional requirement with a statistical tolerancing approach, Computer Aided Tolerancing, CAT- Annecy, France

[29] Denniston B., [2006], Capability Indices and Conformance to Specification: The Motivation for Using Cpm, Quality Engineering, Vol. 18/1/2006, 78-88.

[30] Kotz, S. et Johnson,[1993] N. L. Process Capability Indices. Chapman and Hall, p179-201. London..

[31] Pillet M., [2006], Monographie sur le tolérancement inertiel, http://web.qlio.univ-savoie.fr/pillet/Fichiers/Monographie%20sur%20le%20tol%C3%A9rancement%20inertiel%20version%2003.pdf

[32] Vijay Srinivasan, O'Connor M. A., Scholz F. W.,[1997], Techniques for composing a class of statistical tolerance zones, Advanced Tolerancing Techniques, ISBN 0-471-14594-7, John Wiley & Sons.

[33] Vijay Srinivasan, [1997], ISO Deliberates Statistical Tolerancing, Computer Aided Tolerancing, Toronto, Canada

[34] Daniel GRAU, [2009], Indices de Capabilité : Centrage et proportion de Non conforme, 8éme édition du congrès international pluridisciplinaire – Qualita 2009 – Besançon (France)

[35] ASME (1994a), [1994], "Y14.5M-1994: Dimensioning and tolerancing: revision of ANSI Y14.5M-1982", The American Society of Mechanical Engineers, New York, NY.

[36] ASME (1994b), [1994],"Y14.5M-1994: Mathematical definition of dimensioning and tolerancing", The American Society of Mechanical Engineers, New York, NY

[37] ISO 8015, [1985], Technical drawings -- Fundamental tolerancing principle , ISO

[38] Denzer V, [2007], Dimensioning and tolerancing in international comparison-Confrontations of ISO, ASME and DIN standards, Proceeding of 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, March 21st - 23rd 2007, Erlangen, Germany, on CDRom.

[39] Pairel E, [2007], For a rewriting of the geometric tolerancing language , CIRP 2007, Proceeding of 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, March 21st - 23rd, Erlangen, Germany, on CDRom.

[40] Z. Humienny, [2007], State of art in standardization in GPS area, Proceeding of 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, March 21st - 23rd 2007, Erlangen, Germany, on CDRom.

[41] HONG Y.S., [2002], A comprehensive review of tolerancing research, vol 40, 11, 2425 – 2459.

[42] Ngoi, B.K.A and Ong, C.T., [2002], Product and process dimensioning and tolerancing techniques a state of the art review.

[43] Pillet M., Samper S., Formosa F., [2005], Geometrical Inertial Tolerancing, 6th congress, Qualita , Bordeaux, France, pp. 757-764

[44] Adragna P.A, [2007], Tolérancement des systèmes Assemblés, une approche par le tolérancement inertiel, Thèse, Université de Savoie, France

[45] Pages, E.S, [1954], Continuous inspection schemes. Biometrika, 41, 100-115.

[46] Roberts, S.W. [1959], Control charts based on geometric moving averages. Technometrics, 32(2), 163-171.

[47] Chao M.T., Cheng S. W. [1996]. Semicircle Control Chart for Variables Data - Quality Engineering, 8, 3, 441-446

[48] Cheng, S.W and Spiring, F. A. [1998]. Alternative variable control chart: The univariate and multivariate cases. Statistica Sinica, 8, 1, 273-287.

[49] Cheng, S.W and Li, G-Y. [1993]. A single variables control chart. Technical Report, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.

[50] Minte-Te Chao and Smiley W.Cheng. [2008]. On 2-D Control Charts, International journal of quality technology and quantitative management, 5, 3, 243-261, 2008

[51] Woodall, William H., [2000]. Controversies and Contradictions in statistical Process Control, Journal of Quality Technology, 32,4, 341-350

[52] Zhang Yu, Musheng Yang, and Yanxin Zhang. [2006]. Concurrent Design for Process Quality, Statistical tolerance and SPC, Communications in Statistics Theory and Methods, 35,10, 1869-1882.

[53] Pillet M, Adragna P.A, Ozouf V., Guerra A.S.[2007]. Pilotage par carte de contrôle dans le cas du tolérancement inertiel, Qualita 2007, TANGER – Maroc

[54] Roy L., Franklin A.[1999] Sample size determination for lower confidence limits for estimating process capability indices – Computers & Industrial Engineering,36, p603-614

[55] Russell A.. [1991]. The Taguchi capability index. Journal of Quality Technology, 23, 1.

[56] Scheffe H.,[1959], The analysis of variance, John Wiley & sons, New York – (1959)

[57] Divoky J.J. and all. [1995]. Detecting process drift with combinations of trend and zonal supplementary runs rules, International Journal of quality and reliability Management, 12(2),60-71.

[58] Nelson. L.S. [1984]. The Shewhart control charts-test for special causes", Journal of Quality Technology, 16(4), 237-239.

[59] Nelson. L.S. [1985]. « Interpreting Shewhart control charts. » , Journal of quality technology, 17(2), 114-116.

[60] Davis R.B. and al. [1988]. Performance of the control charts trend rule under linear shift, Journal of quality technology, 20, 260-262

[61] Juran J.M and al. [1988]. Juran's quality handbook, New York: McGraw-Hill.

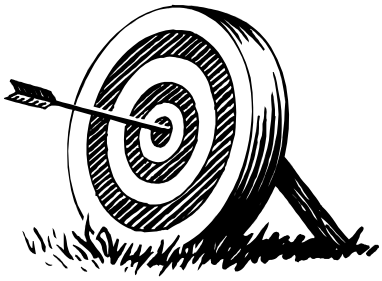
[62] Montgomery. D. C [2001]. Introduction to Statistical Quality Control, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York.

[63] Zhang S. and al. [2005]. Designs of control charts with supplementary runs rules. Computers & Industrial 49,76-97.

Chapitre II
Carte de contrôle aux inerties

Vers une Maîtrise Inertielle des Processus (M.I.P.)

« Je comprends l'intérêt du tolérancement inertiel... Mais concernant le pilotage..., l'utilisation et la mise en place de la carte de contrôle inertielle avec dérive me semblent trop complexes et restrictives… De plus quel est l'intérêt d'utiliser cette carte de contrôle ? Ne pourrais-je pas utiliser des cartes de contrôle déjà existantes ? » Marc Bouix – Somfy-Octobre 2007



Lexique

Mots	Notation	Commentaire	Formules
Inertie Plan/Inertie max	Iplan ou IMax	Inertie maximale admissible par le client, [64] Valeur inscrite sur le plan	
Indicateur de capabilité potentielle inertielle [64]	IC ; Cp	L'indicateur de Capabilité potentielle correspond à la capabilité intrinsèque du procédé, c'est-à-dire la capabilité naturelle. Deux notations la formalisent l'IC et le Cp. L'équivalent actuel est l'indicateur Cp [66] sous l'hypothèse d'une distribution normale	$IC = Cp = \frac{IT}{6\sigma}$
indice de capabilité inertiel [64]	ICi ; Ppi	L'indicateur de capabilité inertiel est un indicateur long terme. L'équivalent actuel est l'indicateur Ppk [66] sous l'hypothèse d'une distribution normale	$ICi = \frac{I_{Max}}{I_{lot}}$

1 Introduction

Le tolérancement inertiel est une approche intéressante pour le client qui lui permet de garantir son exigence qualité. En outre, le langage inertiel est unique et robuste du concepteur aux opérateurs de fabrication. (Aspect universel du langage)

Pour le concepteur, l'inertie se traduit par la variabilité maximale (σ) admissible pour une caractéristique élémentaire donnée. En d'autres mots, il réalise une répartition quadratique de l'exigence fonctionnelle sur chaque caractéristique élémentaire ce qui correspond à la base du tolérancement statistique (dit aussi quadratique). Quant à l'opérateur de fabrication, l'inertie est une composition de deux paramètres qui sont : l'écart de la moyenne par rapport à la valeur cible (δ), et l'écart type (σ) d'un échantillon ou d'un lot. Le rôle de l'opérateur est donc de garantir l'inertie du plan (I_{Max} ;I_{plan}) en maîtrisant les variations des paramètres δ et σ qui composent l'inertie.

Cependant, pour satisfaire I_{Max}, il faut maîtriser les paramètres de l'inertie, qui sont l'écart de la moyenne par rapport à la cible (δ) et l'écart type (σ).

Traditionnellement, cette maîtrise des paramètres (δ et σ) se réalise par la mise en place de la Maîtrise Statistique des Procédés (*MSP*), introduite en 1931 par W.E. Deming et W.A. Shewhart [67][68][69]. Cette approche permet de piloter les paramètres δ et σ de façons indépendantes. Contrairement à l'approche inertielle dont l'originalité revient à considérer ces paramètres comme dépendants. Cette différence entre une considération indépendante ou dépendante des paramètres statistiques (δ et σ) est l'essence même de la différence entre la maîtrise statistique des processus (*MSP*) et la maîtrise inertielle des processus (*MIP*).

Ce chapitre est dédié à la présentation de la maîtrise inertielle des processus. Dans ce contexte, nous proposerons d'aborder les avantages de la carte de contrôle inertielle avec dérive, dans une première partie.

Dans une seconde partie, nous identifierons les limites d'existence de la carte de contrôle inertielle avec dérive(CCID) en fonction de la taille d'échantillon et de la capabilité minimale.

Puis en troisième partie nous définirons la courbe d'efficacité de la CCID. En effet, dans la littérature scientifique, les cartes de contrôles sont comparées suivant le critère de performance POM (Période Opérationnelle Moyenne) ou ARL (Average Run Length) qui

correspond au nombre de prélèvements moyens nécessaires à la détection d'un décentrage donné. Ce critère est déduit de la courbe d'efficacité. De même, nous formaliserons l'influence de l'échantillon sur les limites et sur l'efficacité de la carte de contrôle en proposant un indicateur de pente.

La quatrième partie présente un ensemble de variantes de la carte de contrôle inertielle avec dérive qui permet d'élargir son contexte d'utilisation.

Ensuite, la cinquième partie illustre un ensemble de contexte d'utilisation des cartes de contrôle inertielles. L'expérimentation ne pouvant couvrir tous les contextes d'utilisation, il est donc proposé de simuler des configurations de pilotages avec différentes cartes de contrôle inertielles. Une synthèse de ces simulations est proposée.

Dans une sixième partie, nous présenterons quelques recommandations à considérer pour choisir et mettre en place les cartes de contrôles inertielles.

Nous achèverons ce chapitre par une septième partie qui présente deux cas d'expérimentation industrielle réalisés dans le cadre du pôle compétitivité (Arve Industrie).

2 Avantage de la carte de contrôle inertielle

L'objectif de la maîtrise des procédés est d'accorder deux objectifs :

- Le premier, concerne la satisfaction de l'exigence spécifiée sur le plan (I_{Plan} ;I_{Max}) par le concepteur.
- Le second est de permettre d'utiliser au mieux les moyens de production pour réaliser au juste nécessaire l'exigence spécifiée par le client.

Le deuxième point est introduit par l'AIAG[6] et l'ASQC[7] [74] qui préconise d'autoriser une dérive du procédé une fois la variabilité du procédé réduite. Néanmoins, elle ne précise pas formellement un calcul de Dérive Maximale Acceptable (DMA).

6 Automotive Industry Action Group

7 American Society for Quality control

Pour illustrer cette idée, la figure15 présente une comparaison entre deux cartes de contrôle considérant les paramètres δ et σ dépendants :

- La première carte de contrôle est la carte de contrôle en demi-cercle, proposé par Minte Chao, et calculée avec un risque α [72]. Cette carte de contrôle est semblable aux approches traditionnelles qui garantissent le procédé centré. Elle correspond aussi à la première limite de la carte de contrôle inertielle avec dérive calculée à partir du risque α (LC_α cf: Chapitre I).
- La seconde carte de contrôle est la deuxième limite de la carte de contrôle inertielle avec dérive calculée avec le risque β [73] (LC_β cf: Chapitre I).

La figure15 montre une décroissance des limites de la première carte de contrôle, représentée en pointillé long, lorsqu'il y a une augmentation de l'indice de capabilité intrinsèque du procédé (*IC*). En effet traditionnellement, les limites de contrôle sont calculées en fonction de la capabilité intrinsèque du processus. De ce fait, plus la capabilité du processus augmente, plus les limites de contrôle se resserrent autour de la valeur cible. Dans ces conditions, les efforts pour garder le processus centré sont beaucoup plus fréquents et aboutissent à un niveau de qualité de la fabrication (*ICi*) très supérieur à l'exigence client. Par conséquent, l'utilisation de ce type de carte de contrôle pour des processus de fabrication avec un niveau de capabilité (*IC*>2.5) amène inévitablement à une perte de productivité. Il est alors nécessaire de rechercher la dérive maximale acceptable du procédé (DMA) en vue de gagner de la productivité. La seconde limite de la carte de contrôle, représentée en pointillé court, est un exemple de carte de contrôle permettant au processus de dériver. Nous pouvons observer que plus la capabilité *IC* augmente, plus la limite de contrôle s'approche de l'inertie Max (trait continu I_{Max}=1).

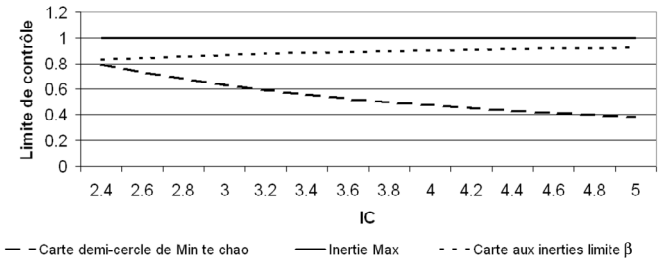


figure15 : Comparaison des cartes en demi-cercle en fonction d'une différence d'IC

Plusieurs travaux scientifiques proposent des calculs de DMA [75][76][77], sous l'hypothèse des paramètres δ et σ indépendants (*MSP*). Cependant, ces calculs sont fonction de la tolérance spécifiée sur la caractéristique élémentaire donc sur le respect des limites de tolérances (bilimite). Le risque de travailler avec une tolérance bilimite sur les composants (caractéristique élémentaire) a été introduit dans le chapitre bibliographique. En conséquence, les performances de ces cartes sont dépendantes de ces risques. Pour éliminer ou limiter ce risque, l'utilisation de l'inertie est une solution.[106]

Conformément à sa définition, le tolérancement inertiel autorise un décentrage de la production pour une capabilité *IC (σ)* donnée. L'objectif est donc d'exploiter au mieux ce décentrage. L'utilisation de la carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID) suivant la deuxième limite LC_β-figure15 : limite pointillé court - permet de respecter l'exigence demandée par le client (I_{Max}), et d'améliorer la capacité du moyen de production [73]. La particularité de cette carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID) est de récompenser les efforts d'accroissement de l'indicateur de capabilité intrinsèque (*IC*) par une augmentation de la DMA. La force de la carte se trouve dans l'utilisation au maximum du potentiel de variation (décentrage) qu'autorise le tolérancement inertiel sans négliger l'exigence client et la productivité du fabricant qui sont souvent réduites par des contrôles superflus ou des tolérances trop restrictives.

3 Carte de Contrôle Inertielle avec Dérive (CCID)

Cette partie a pour objectif de définir les limites d'utilisation de la CCID. Dans un premier temps, nous rappellerons le calcul des limites de la CCID et ensuite nous en déduirons les contextes d'utilisations de la CCID.

3.1 Rappel concernant le calcul des limites

Deux limites de contrôle sont définies pour les cartes de contrôle inertiel avec dérive (cf. Chapitre 1) : La limite au risque α (LC_α) et la limite au risque β.(LC_β)

Le chapitre bibliographique a introduit les limites de contrôle de la carte inertielle avec dérive. Par commodité, nous les rappelons ici.

Limite de contrôle LC_α : Elle est construite à partir des limites naturelles du procédé. On suppose connaître l'inertie naturelle du processus lorsque celui-ci est centré ($I_{Historique}=\sigma_{CT}=\sigma_{court\ terme}$). Cette limite est définie par la relation.

$$LC_\alpha = I_{Historique}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}} = \sigma_{CT}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}}, \tag{45}$$

Où n est la taille de l'échantillon, σ_{CT}, L'écart type court terme du procédé et $\chi^2_{1-\alpha,n}$ est la loi de distribution du χ^2 pour un degré de liberté *n* et un risque α que nous poserons pour tout le mémoire égale à 0.27 %. Ce risque correspondant au risque de juger une dérive sur l'inertie alors que celle-ci est conforme à l'inertie naturelle du processus (risque de fausse alarme).

Limite de contrôle LC_β : Elle permet une augmentation de l'inertie naturelle du processus tout en restant conforme (au risque β) à l'inertie limite acceptable (LC_β). La limite correspond à la Dérive Maximale Admissible (*DMA*) introduite ci-dessus. Elle est définie par la relation :

$$LC_\beta = I_{plan}\sqrt{\frac{\chi^2_{\beta,\upsilon}}{\upsilon}}, \tag{46}$$

Où I_{plan} est égale à I_{max}, $\chi^2_{\beta,\upsilon}$ est la loi de distribution du χ^2 pour un degré de liberté ν (47) et un risque β compris, entre 10 % et 50 %. Le risque β correspond au risque de considérer le processus inférieur à la limite DMA alors que celui-ci est hors limite. Pour un β de 20 %, la probabilité est d'une chance sur cinq de considérer à tort que l'inertie estimée est inférieure à la limite *DMA* (LC_β).

Le degré de liberté ν de la loi du χ^2 pour le risque β est donné par la relation :

$$\nu = n\frac{I^4_{Plan}}{\sigma^2_{CT}\left(2I^2_{Plan}-\sigma^2_{CT}\right)} \tag{47}$$

Où *n* est la taille d'échantillon, I_{plan} correspond à I_{Max} et σ_{CT} représente l'écart type court terme.

En posant,

$$IC = \frac{I_{Plan}}{\sigma_{CT}}, \tag{48}$$

nous en déduisons :

$$\upsilon = n\frac{IC^4}{2IC^2 - 1} \tag{49}$$

La limite de contrôle au risque β est donc influencée par trois paramètres :

- Le risque β,
- La taille d'échantillon *n*,
- La capabilité court terme *IC*.

L'influence de ces paramètres sur l'efficacité de la carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID) est détaillée dans les parties suivantes.

3.2Contexte d'utilisation de la carte de contrôle inertiel avec dérive (CCID)

La CCID se compose de deux limites bien distinctes. La première limite LC_α permet d'assurer un niveau de qualité livré (*ICi*) proche de la capabilité naturelle du procédé (*IC*). La seconde LC_β, permet de contenir l'augmentation de l'inertie naturelle (*IC*) tout en garantissant l'inertie limite acceptable (I_{Max}) à un niveau de qualité livré *ICi* acceptable.

Nous définissons la *CCID* utilisable lorsque la relation (50) est vérifiée. En d'autres mots, lorsque la limite de la *DMA* (LC_β) est supérieure à la limite naturelle du processus (LC_α) :

$$LC_\beta > LC_\alpha \tag{50}$$

Dans ces conditions, il est possible de déterminer la relation permettant de conclure sur le contexte d'utilisation de la *CCID* par l'identification de la capabilité et de la taille d'échantillon minimale pour un risque β donné. Il est à noter que le risque α est considéré invariant et égal à 0.27 %.

Ainsi, en introduisant dans la relation (50) les définitions des limites LC_α (relation (45)) et LC_β (relation (46)), nous obtenons:

$$IC_{historique} = \frac{I_{plan}}{\sigma_{historique}} = \frac{I_{plan}}{I_{historique}} \geq \frac{\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}}}{\sqrt{\frac{\chi^2_{\beta,\nu}}{\upsilon}}} \quad (51)$$

Où *n* est la taille d'échantillon et le degré de liberté pour $\chi^2_{1-\alpha}$; ν, est le degré de liberté pour la distribution statistique du χ^2_{β}, présenté dans la relation (47).

En considérant l'inéquation (51), nous avons défini la capabilité minimale nécessaire à l'utilisation de la *CCID* en fonction des paramètres comme le risque β, la taille d'échantillon *n*, et le risque α qui est toujours égal à 0.27%.

Dans le Tableau 23, la capabilité court terme minimale nécessaire à l'existence de la *CCID* a été déterminée pour différentes tailles d'échantillon *n*, et différentes valeurs du risque β. Nous considérons dans ces calculs la valeur du risque α est invariante et égale à 0,27%. Il est à rappeler que le tableau présente la condition d'égalité de l'équation (51).

		Carte Inertielle Avec Dérive (a)				
Taille d'échantillon (n)		β =10%	β =20%	β =30%	β=40%	β=50%
	2	3.39	3.24	2.91	2.73	2.70
	3	2.97	2.73	2.61	2.47	2.33
	4	2.73	2.54	2.33	2.22	2.11
	5	2.50	2.33	2.25	2.15	2.04
	6	2.41	2.25	2.11	2.02	1.94
	7	2.27	2.14	2.00	1.93	1.85

Tableau 23 : Capabilité minimale pour l'utilisation de la carte de contrôle avec dérive.

L'analyse du Tableau 23 montre une décroissance de la capabilité minimale d'existence de la *CCID*, en fonction de la taille d'échantillon et du risque β . Il est à noter qu'il n'informe pas de l'impact de la taille d'échantillon ou du risque β sur l'efficacité de détection d'une situation hors contrôle ou sur le niveau de capabilité livré (*ICi*). Nous proposons d'éclaircir ces remarques dans les parties suivantes.

4 Définition de l'efficacité de la CCID

La carte de contrôle inertielle avec dérive se compose de deux limites. Nous suggérons dans cette partie de définir la courbe d'efficacité, pour chaque limite, en fonction des paramètres *n*, *Cp*, α et β. Puis, nous nous intéresserons à l'influence de la taille d'échantillon sur l'efficacité de détection de la CCID.

Traditionnellement, la comparaison des efficacités de détection des cartes de contrôle se fait par le calcul de l'indicateur *POM* (Période Opérationnelle Moyenne), appelé aussi *ARL* (Average Run length : cf. relation (52)) [78] → [81]. Cet indicateur exprime le nombre moyen de prélèvements nécessaires pour détecter une situation hors limite de contrôle pour un décentrage k donné. Il est déterminé à partir de la probabilité (γ) de non-détection d'une valeur $k.\sigma$ représentée traditionnellement par la courbe d'efficacité (*Oc Curves*) de la carte de contrôle.

$$ARL_k = \frac{1}{1-\gamma} \tag{52}$$

Plus la valeur de l'*ARL* est importante, plus la détection d'un décentrage $k\ \sigma$ est peu probable, car il y a décroissance de la probabilité γ. En conséquence, plusieurs prélèvements sont nécessaires pour détecter ce décentrage.

Différentes approches existent [82][83] pour déterminer la courbe d'efficacité, donc l'indicateur *POM* (*ARL*) des cartes de contrôle. Nous proposons de les déterminer par une approche analytique.

4.1 Détermination de la courbe d'efficacité

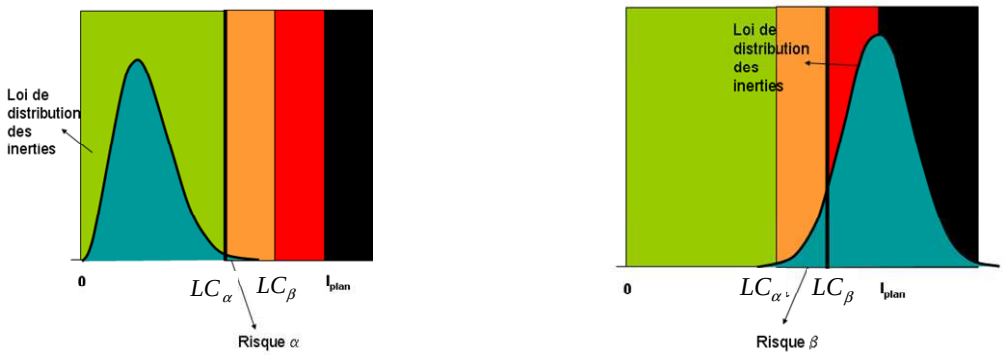
Pour calculer la courbe d'efficacité d'une carte de contrôle, la loi de répartition statistique des inerties doit être connue. Celle-ci a été proposée par Pillet [73] à partir de l'approximation de Scheffé, adaptée aux petites tailles d'échantillon (*n< 10*)[84]. Sur cette base, Pillet a montré que l'inertie estimée peut s'apparenter à l'égalité suivante :

$$\left(\frac{\hat{I}}{I}\right)^2 = \left(\frac{\chi^2_{x,\upsilon}}{\upsilon}\right), \tag{53}$$

Où $\hat{I}$ correspond à l'inertie estimée, I correspond à l'inertie vraie et ν représente le degré de liberté de la loi du chi-deux $\chi^2_{x,\upsilon}$ et $\chi^2_{x,\upsilon}$ retourne la probabilité associée pour une valeur x et un degré de liberté ν. Dans le mémoire, nous définirons $\chi^2_{x,\upsilon}[\ ]$ la valeur entre crochet comme la valeur x à associer à la loi $\chi^2_{x,\upsilon}$.

Pour déterminer l'équation de la courbe d'efficacité de chaque carte de contrôle, nous proposons de définir l'inertie estimée (cf. relation (53)) égale à la limite de contrôle concernée. En conséquence, les courbes d'efficacité sont au nombre des limites calculées à partir d'un risque. Étant donné que deux limites de la *CCID* sont définies, il y a deux calculs de courbes d'efficacités présentés.

La figure16 rappelle la correspondance de chaque risque avec une capabilité court terme *IC=3*, une taille d'échantillon *n* égale à 5 et I_{Max} égal à 1. La figure16 (a) présente le risque α, il correspond au risque de considérer à tort que le procédé est hors limite naturelle (LC_α). La figure16 (b) présente le risque β, il correspond au risque de considérer à tort que le procédé est dans les limites spécifiées (LC_β).



(a) (b)

figure16 : Illustration des risques α et β, le décentrage considéré pour la courbe (b) est égal à I_{Max}.

4.1.1 Courbe d'efficacité selon la limite LCα

En posant, l'inertie estimée égale à l'inertie historique aux risques α près, on obtient :

$$\hat{I} = I_{Historique} \times \sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}}, \qquad (54)$$

où $I_{Historique}$ correspond à l'écart type moyen court terme ($I_{Historique} = \sigma_{court\ terme}$) et α le risque de considérer une inertie hors limite naturelle alors que le processus est centré.

En remplaçant l'inertie estimée de la relation (54) dans (53), nous en déduisons γ_α la probabilité de détection d'un décentrage $k.\sigma$:

$$\gamma_\alpha = \chi^2_{x,\upsilon}\left[\chi^2_{1-\alpha,n}\left(\frac{I_{Historique}}{I}\right)^2\right], \qquad (55)$$

Où I est l'inertie vraie, n est la taille d'échantillon et aussi le degré de liberté de χ^2 et $\chi^2_{inv\alpha,n}$.

L'équation (55) permet de déterminer la courbe d'efficacité, en considérant le décalage par rapport à la cible exprimée en $k.\sigma$. L'inertie vraie I s'écrit :

$$I = k\sigma\ . \qquad (56)$$

La figure17 illustre la courbe d'efficacité de la carte de contrôle pour une taille d'échantillon n, égale à 5, et une capabilité court terme IC, égale à 2. L'ordonnée de la figure représente la probabilité de non-détection d'un décentrage k donné tandis que l'abscisse correspond à la valeur du décentrage k.

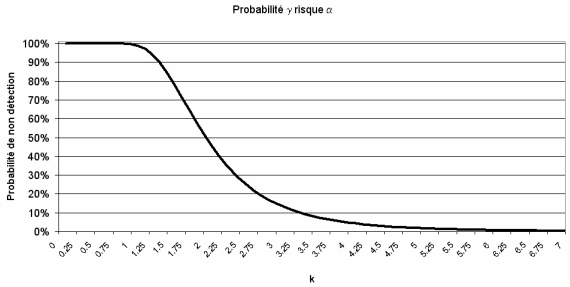


figure17 : Illustration de la courbe d'efficacité au risque α

Pour détecter un décentrage k, égal à 2, nous lisons sur la figure17, une probabilité de non-détection du décentrage égale à 45 %. En conséquence, l'utilisateur de la carte de contrôle a 55 % de chance de détecter un décentrage du processus piloté, égal à 2 fois le σ_{CT}. Cette probabilité de détection peut s'améliorer par l'augmentation du nombre de prélèvements d'échantillons consécutifs. La relation (57) présente la probabilité de détection résultante (βr) après r prélèvements consécutifs.

$$\beta_r = \beta^{r-1}(1-\beta) \tag{57}$$

Ainsi par rapport à l'exemple précédent (β=55%), la probabilité de détection est de 25 % pour *r=2*. La relation (57) permet dans les situations où la valeur de l'inertie est ambiguë de connaître le nombre de prélèvements nécessaires pour supprimer cette ambigüité.

L'étude de la figure17 montre une probabilité constante à 100 % de non-détection des décentrages inférieurs à 1 σ. Cette zone suppose les décentrages du processus comme acceptables, donc sans risque pour la fonctionnalité du produit assemblé. Nous remarquons que cette probabilité constante n'apparaît pas dans les courbes d'efficacités des cartes de contrôles traditionnelles au risque α de types Shewhart, EWMA, CUSUM… Cependant, on rappelle qu'une superposition des courbes d'efficacités type Shewhart, EWMA, CUSUM à la carte de contrôle inertielle n'est pas juste. Du fait des hypothèses de départ qui incluent pour les cartes de contrôles traditionnelles les variations de moyenne autour des limites naturelles. Au contraire, de la carte de contrôle inertielle qui regroupe les variations de moyenne et d'écart-type sous une même valeur, l'inertie.

Néanmoins, cette probabilité constante est mise en évidence dans les travaux de Minte Chao [72]. En effet, l'auteur met en évidence un écart entre le risque utilisé pour le calcul de la limite de contrôle (α=0.27 %) et celui résultant de plusieurs simulations (cf ;Tableau 24). Le Tableau 24 illustre l'écart entre le risque résultant de la simulation qui tend à être plus important que la valeur nominale utilisée.

Par exemple, pour *n*=5 avec (*1-α=97.5%),* nous obtenons un risque *1-α* de 98.96 %. Ce qui signifie que la limite de la carte de contrôle inertielle au risque α doit être réduit afin de respecter le risque défini. Cet écart vient du fait que l'approximation de la distribution de l'inertie à partir d'une distribution normale des pièces n'est pas adéquate même pour *n* > 20.

$1-\alpha$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=10$	$n=15$	$n=20$
.990	.9950	.9958	.9952	.9964	.9972	.9976
.975	.9876	.9896	.9908	.9900	.9918	.9936
.950	.9744	.9758	.9788	.9802	.9806	.9824

Tableau 24 :Tableau extrait de Chao[72] : Résultat des simulations pour différentes tailles d'échantillon (n) et différents risques α

Pour pallier cet écart, l'auteur propose une carte de contrôle, appelée « T optimum », qui permet de mieux respecter le risque α défini. Le calcul de la limite de cette carte de contrôle est le suivant :

$$LSC_{\alpha} = \sqrt{\frac{C(\alpha,n) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma_{CT}^2 + 2\left(1-\frac{2}{n}\right)\log\sigma_{CT}}{\pi}}, \quad (58)$$

Où α est habituellement égale à 0.27 % , n est la taille d'échantillon, σ_{CT}, est l'écart type court terme, et $C(\alpha, n)$ un coefficient correspondant à la surface minimale satisfaisant le risque α extrait de l'article de Minte Chao[72] (cf : l'annexe 12.1).

À partir de cette formulation, il propose une comparaison de la carte $T_{optimum}$ avec la carte au limite LC_{α} et conclut que celle-ci est plus efficace pour détecter les écarts simultanés de la moyenne et de l'écart-type que la carte au limite LC_{α} [70][71].

4.1.2 Courbe d'efficacité selon la limite LC_{β}

Dans le cas où l'inertie estimée est égale à l'inertie limite au risque, β, on obtient :

$$\hat{I} = I_{Plan} \times \sqrt{\frac{\chi^2_{\beta,\upsilon}}{\upsilon}} \quad (59)$$

En considérant l'inertie estimée de la relation (59) dans (53), on en déduit γ_{β} la probabilité de détection d'un décentrage :

$$\gamma_{\beta} = \chi^2_{x,\nu}\left[\chi^2_{\beta,\nu}\left(\frac{I_{Plan}}{I}\right)^2\right] \quad (60)$$

Où I est l'inertie vraie, avec ν, (47), le degré de liberté de χ^2 et $\chi^2_{inv\,\beta,\nu}$.

De l'équation (60), il est possible de déterminer la courbe d'efficacité, en considérant le décalage par rapport à la cible exprimée en $k.\sigma$ et σ_{stable} , l'inertie vraie, I :

$$I = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2} = \sqrt{k^2\sigma^2 + \sigma^2} \Rightarrow \sqrt{\sigma^2\left(1+k^2\right)} \quad . \quad (61)$$

Par combinaison de l'équation (60) et (61), on détermine l'équation de l'ARL_k.

$$ARL_k = \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\chi^2_{x,\nu}\left[\chi^2_{\beta,\nu}\left(\frac{I_{Plan}}{\sqrt{\sigma^2(1+k^2)}}\right)^2\right]}, \quad (62)$$

Où *k* correspond à un décalage d'une situation donnée. L'équation (62) est dépendante de la taille d'échantillon, *n*, du risque β et de σ l'écart type court terme.

En attribuant pour chaque paramètre les valeurs suivantes, *n*=5, β=20%, σ_{CT}=0.41, I_{Max}=1 et en considérant σ_{ct} stable, on en déduit la courbe d'efficacité, figure18. Sur cette figure, l'axe des ordonnées correspond à la probabilité de non-détection d'une inertie donnée et l'axe des abscisses correspond à l'inertie vraie pour un décentrage *k* donné(61).

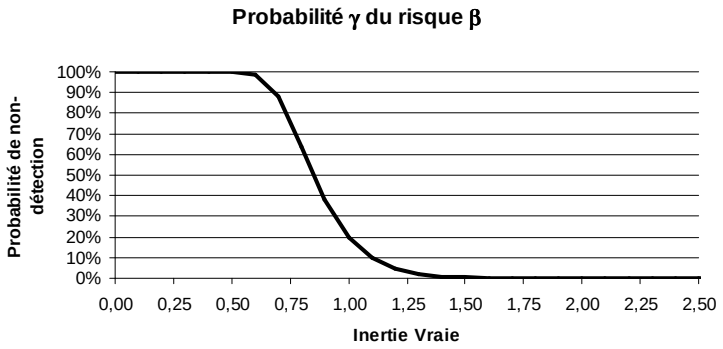


figure18 : Courbe d'efficacité en fonction de l'inertie vraie pour un risque β=20 %, σ_{CT}=0.41 et I_{Max}=1.

Nous observons que pour détecter une inertie max de 1, avec β=20 %, la probabilité de non-détection est de 20 % (k=2,22), soit un *ARL* de 1,25. En conséquence, il est nécessaire de prélever 1.25 échantillons en moyenne pour détecter l'inertie max (ARL_{Iplan}= ARL_1). Ainsi, pour *n*=5, *IC*=*Cp*=2.5 et pour différents risques β, les valeurs de l'ARL_1 sont respectivement de :

	β=10 %	β =20 %	β =30 %	β =40 %	β =50 %
ARL_{Iplan}	1.11	1.25	1.42	1.66	2

Tableau 25 : Représentation de l'ARL_1 pour différents risques β

L'étude du Tableau 25 montre que le nombre de prélèvements nécessaires à la détection de l'inertie maximale est supérieur à 1. La question que nous nous posons porte sur l'influence de l'*ARL* sur le niveau de qualité livré *ICi*, suite au pilotage avec une *CCID* avec des

risques β variant de 10 à 50%. Nous y répondrons, à travers la partie 6 par un ensemble de simulations, et dans la partie 8.1 par un retour d'expérience d'un an d'utilisation d'une *CCID* avec un risque β de 50 %.

La figure18 a illustré la variation d'un seul paramètre ; le décentrage δ (en considérant σ_{fixe}).En définissant cette fois, une variation du décentrage δ et de l'écart type σ suivant une valeur k_δ et k_σ, nous pouvons en déduire une nouvelle formulation de l'inertie vraie:

$$I = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2} = \sqrt{k_\delta^2\sigma^2 + k_\sigma^2\sigma^2} \Rightarrow \sqrt{\sigma^2\left(k_\delta^2 + k_\sigma^2\right)}. \quad (63)$$

La courbe d'efficacité (cf. figure19) obtenue par les équations (63) et (60) est en trois dimensions. L'axe des ordonnées représente la probabilité de non-détection dont l'évolution est représentée par un gradient de couleurs, et les axes des abscisses correspondent aux valeurs k_δ et k_σ composant l'inertie vraie (63).

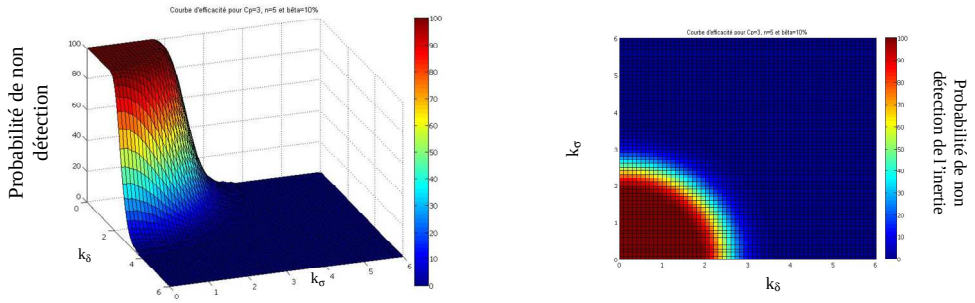


figure19 :Courbe d'efficacité tridimensionnelle en fonction des constantes k_δ et k_σ pour un risque β=10 %, I_{plan}=1, n=5 ;IC=3.

Ainsi, pour une variation et un écart donnés, il est possible d'en déduire la probabilité de détection de la carte de contrôle en %. De ce fait, lorsque l'inertie est égale à 0, il y a une probabilité de détection égale à 0 % (Zone rouge). Pour *IC*=3, k_σ=1 et k_δ=1 soit *I*=0.47 ; la probabilité de non-détection est de 100 %. Lorsque *I*=1 (ex : k_σ=2.05 et k_δ=2.2 (64)), la probabilité de non-détection est alors inférieure à 10 %. Connaissant l'inertie vraie et $k\sigma$, il est possible d'en déduire le décentrage $k_\delta$maximum pour respecter l'inertie vraie :

$$k_\delta = \sqrt{I^2 - k_\sigma^2} \ . \tag{64}$$

L'efficacité de la *CCID* dépend des paramètres suivant : le risque β, la taille d'échantillon *n*. Nous avons vu que l'accroissement du risque β peut dégrader l'efficacité de la carte (ARL plus fort), cependant qu'en est-il pour la taille d'échantillon ?

4.2Influence de la taille d'échantillon sur l'efficacité

Afin de comprendre l'influence de la taille d'échantillon sur l'efficacité de la CCID, nous représentons les courbes d'efficacités pour trois tailles d'échantillons différentes (*n=3, 6, 9*). Le calcul des probabilités de non-détection est réalisé à partir de l'équation (62) en définissant l'inertie vraie par une composition des décentrages k_δ et k_σ(63). La figure 20 présente l'évolution de la courbe d'efficacité de non-détection de la *CCID* pour différentes valeurs de *n*.

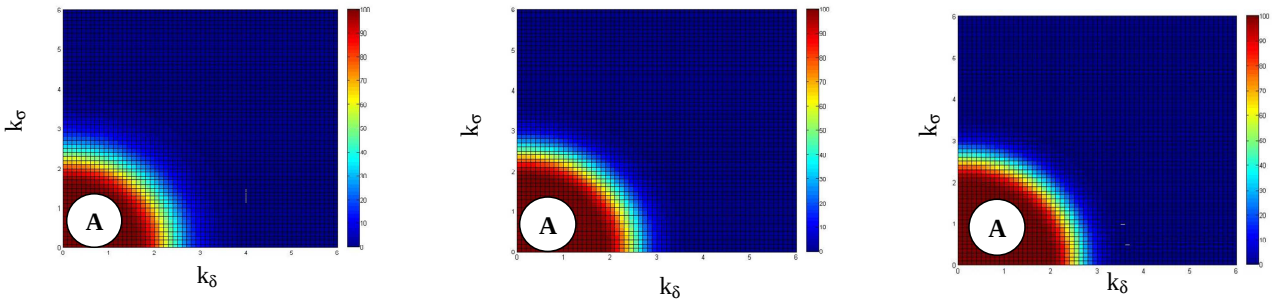


figure 20 : Évolution de la courbe d'efficacité pour un Cp de 3 β=10 %, n=3 (a), n=5 (b) et n=7 (c)

La figure 20 montre que lors de l'augmentation de la taille d'échantillon, la plage A, qui correspond à une probabilité constante de non-détection du décentrage égale à 100 %, croît sensiblement.

Cette augmentation implique deux phénomènes : le premier est l'augmentation de la limite de contrôle LC_β (Tableau 26 (b)) et le second, réduit l'étendue du dégradé de couleurs ce qui correspond à une augmentation de l'efficacité de détection de la carte de contrôle. En conclusion, accroître la taille d'échantillon augmente la limite de contrôle LC_β ainsi que l'efficacité de la carte. Une quantification du gain de l'efficacité est présentée dans le

Tableau 26 (a). Ce dernier présente un calcul de pente pour un seul paramètre variant (k_σ ou k_δ) selon deux ordonnées égales à 95 % et 5 % de probabilité de non-détection.

ν	33	24	14
n	7	5	3
95 %	0.699	0.656	0.574
5 %	1.052	1.063	1.088
Pente	2.546	2.211	1.748

(a)

		Limite LC_β
n	3	0.75
	5	0.81
	7	0.84

(b)

Tableau 26 : Calcul de la pente (a) et de la limite (b) pour différente valeur d'échantillon Cp=3

En conséquence, plus la taille d'échantillon est importante meilleure est la détection de la carte de contrôle. Pour une taille d'échantillon infinie, la limite de contrôle tend vers l'inertie du plan. Dans cette configuration, la détection d'un décentrage égal à 1 est immédiate. Néanmoins pour le cas présenté, la taille d'échantillon doit tendre vers une valeur égale à 77, ce qui industriellement n'est pas exploitable.

5 Variantes de la CCID

Le contexte d'utilisation de la CCID a été présenté dans le Tableau 23. Toutefois, une problématique se pose dans une situation « hors contexte ». En effet, la carte de contrôle inertielle avec dérive ne peut s'adapter à toutes les situations. Différentes applications industrielles nous ont permis de répertorier un ensemble de variantes de cette carte de contrôle. L'objectif de cette partie est de présenter un ensemble de variantes de la carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID).

5.1 Carte de contrôle inertielle sans dérive (CCISD)

La carte de contrôle inertielle sans dérive est la première variante de la CCID. Elle est construite à partir des limites naturelles du procédé. L'utilisation de cette carte de contrôle permet d'assurer que le procédé est centré autour de la valeur cible d'une caractéristique. Le choix d'utilisation de la carte de contrôle sans dérive est similaire aux cartes de contrôle traditionnelles de type *T* [91][92][93] qui assurent un centrage de la production.

L'inertie naturelle du processus est supposée connue (I=$\sigma_{\text{court terme}}$[8]). La limite de contrôle de la carte inertielle sans dérive fixe les limites des variations aléatoires de l'inertie imputable à l'échantillonnage. La limite de contrôle de la carte sans dérive est définie par la relation suivante :

$$LC_\alpha = \sigma_{CT}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha,n}}{n}}, \qquad (65)$$

Où *n* représente La taille de l'échantillon, σ_{CT} correspond à l'écart type court terme du procédé et χ^2_α est la loi de distribution du khi deux pour un degré de liberté *n* et un risque α=*0.27 %* correspondant au risque de juger une dérive sur l'inertie alors que celle-ci est conforme à l'inertie naturelle du processus (fausse alarme).

La figure21 présente la carte de contrôle inertielle sans dérive sous deux représentations : La représentation en demi - cercle reprend le graphe δ - σ permettant à l'opérateur d'identifier les dérives de décentrage ou d'écart type du procédé. La représentation traditionnelle (figure21-b) permet l'observation de l'évolution de la valeur de l'inertie dans le temps. Sur les deux représentations, la limite de la zone verte est donnée par l'équation (65) qui est le risque de fausse alarme.

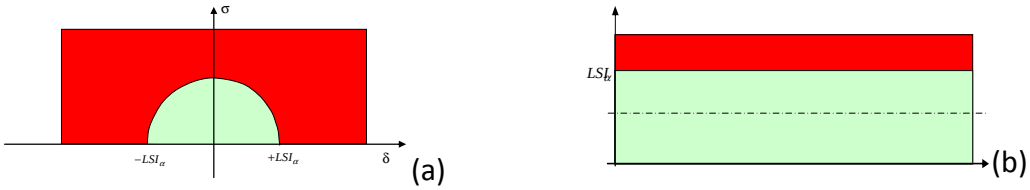


figure21 :Cartes de contrôle inertielle sans dérive

Cependant, l'utilisation de ce type de carte de contrôle n'est pas sans conséquence sur la fréquence de contrôle. Ainsi, l'observation de la figure22 montre que la limite de la carte de contrôle LC_α décroît en fonction de la capabilité du procédé. Cette décroissance va influer sur la fréquence de contrôle et d'intervention sur le procédé. Plus le $\sigma_{court\ terme}$ sera faible plus la fréquence de contrôle sera importante.

8 Le $\sigma_{\text{Cout terme}}$ est donné par l'analyse de capabilité

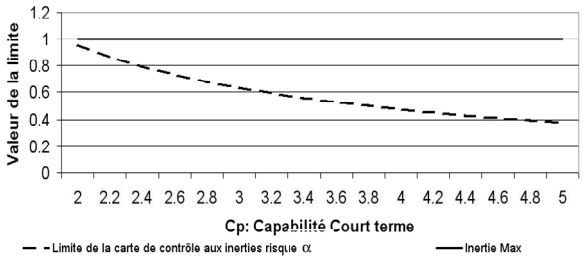


figure22 : Évolution de la limite de contrôle en fonction de la capabilité (I_{Plan}=1 et n=5)

En conséquence, la carte de contrôle inertielle sans dérive est à utiliser lorsque le centrage de la production est nécessaire pour respecter l'exigence client (capabilité faible). Nous avons fait remarquer que la carte de contrôle $T_{optimum}$ (cf. partie 4.1.1) donne de meilleurs résultats que la carte inertielle sans dérive. Nous proposons d'utiliser cette carte si les résultats de l'utilisation dans un contexte de production de la carte inertielle sans dérive ne sont pas assez satisfaisants.

Dans le cas où le centrage n'est pas imposé, il est préconisé d'utiliser la carte de contrôle inertielle avec dérive voire à ± inertie si la capabilité est satisfaisante (supérieure à 2.7 pour n=2 : Tableau 23).

5.2Carte de Contrôle inertielle ±inertie

Lorsque la capabilité court terme est excellente, la limite de la carte de contrôle inertielle avec dérive converge vers la valeur de l'inertie maximale. Il est alors possible de définir une carte à ± Inertie correspondant à une carte de contrôle inertielle avec un risque β=50 %. Le Tableau 27 présente les capabilités minimales nécessaires pour l'utilisation de cette carte.

	Carte ± inertie (b)					
	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
Cp minimale	2.70	2.33	2.11	2.04	1.94	1.85

Tableau 27 : Capabilités minimales pour l'utilisation de la carte de contrôle à ± Inertie en fonction de la taille d'échantillon n=2..7.

La figure 23 présente la carte inertielle à ± inertie (β=50%) sous deux représentations : La représentation en demi - cercle reprend le graphe δ - σ permettant d'identifier le type de

dérive du procédé (décentrage ou écart type). La représentation traditionnelle (figure 23-b) permet l'observation de l'évolution de la valeur de l'inertie de l'échantillon dans le temps.

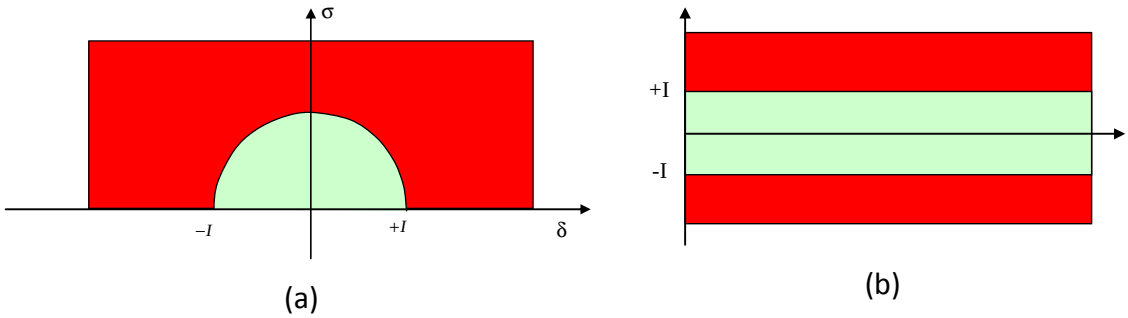


figure 23 : Carte de contrôle inertielle ± inertie

Cette carte de contrôle produit un niveau de qualité (*ICi*) moins bon que la *CCID* traditionnelle. Cependant, il est à noter que lorsque la capabilité du procédé est excellente (*IC*=*Cp*>2.5) et stable, le suivi de l'inertie peut alors être simplifié par une carte de contrôle médiane dont les limites sont ± I_{Max}.

5.3Carte de Contrôle inertielle papillon (CCIP)

Afin de la différentier avec les autres cartes de contrôles, nous nous sommes permis de baptiser cette carte de contrôle « Carte de Contrôle inertielle papillon (CCIP) ».[9]

Cette carte de contrôle est une amélioration des cartes de contrôle inertielles avec dérive, sans dérive et ± Inertie. En effet, contrairement aux cartes présentées précédemment qui garantissent la conformité à l'inertie du plan, la CCIP permet en plus d'informer l'opérateur d'une dégradation de la stabilité de l'écart type.

La figure24 présente une carte de type CCID à laquelle est ajoutée une limite horizontale. Ainsi, si un échantillon est au-dessus de cette limite cela signifie que le processus se dégrade. A cet instant, il est nécessaire pour l'opérateur de rechercher la cause de cette dégradation.

9 Cette carte de contrôle met en évidence les dérives de stabilité (« écart type»). D'un point de vue pratique, lors d'un constat de ce type de dérive l'opérateur doit s'armer d'outil qualité (5M, 5Why…) pour comprendre et résoudre cette dérive.

Cette limite horizontale est calculée selon la méthode proposée par Shewhart pour le calcul de la limite des écarts types.

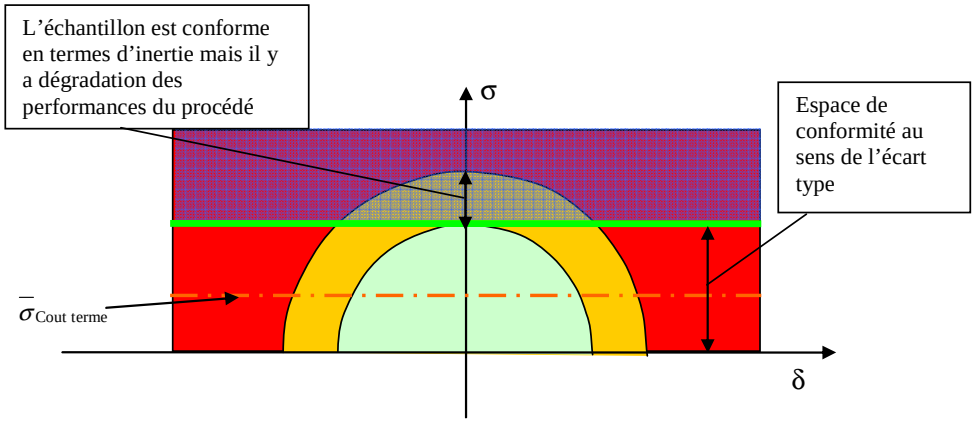


figure24 :Carte de contrôle inertielle papillon

6 Evaluation de la CCID et ses variantes à travers un environnement de production simulé

6.1 Cas d'étude et objectifs

Différentes applications industrielles ont permis de valider une mise en place de quelques cartes de contrôles inertielles avec dérive. Cependant, l'ensemble des contextes d'applications n'a pas été identifié. Pour compenser ce point, nous proposons de simuler plusieurs environnements de pilotage avec les cartes de contrôle *CCID* et leurs variantes, afin de qualifier leur impact sur la qualité d'un lot (*ICi*) produit.

Un environnement de pilotage se définit par trois critères d'entrée, qui sont :

- Le type de dérive du processus que l'on simule,
- La capabilité court terme du processus (Capabilité Intrinsèque) *IC*,
- La taille d'échantillon *n*.

Chaque environnement simulé donne les informations suivantes pour chaque carte de contrôle inertielle :

- La fréquence d'intervention,
- La qualité du lot *ICi* ; pour une production de 100 000 échantillons,

- Le rendement de stabilité *%Rs*,
- Le nombre de réglages.

La figure25 répertorie l'ensemble des entrées et sorties de l'environnement de pilotage simulé. Avant de présenter les résultats donnés pour chaque environnement, nous introduirons l'ensemble des configurations d'entrées de l'environnement.

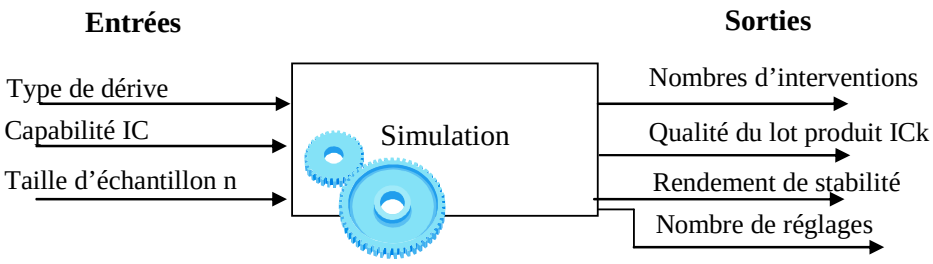


figure25 :Entrées et sorties de l'environnement de pilotage simulé

6.1.1 Définition de l'environnement

Une fois les entrées de l'environnement définies, une simulation de pilotage est réalisée pour chaque carte de contrôle, à partir du type de dérive, de l'échantillon et de la capabilité *IC* définie en entrée. L'environnement simulé est celui de la production d'un lot de 100 000 pièces. L'objectif est de pouvoir répondre aux questions suivantes pour chaque carte de contrôle inertielle :

- Quel est le niveau de qualité de la production livrée ?
- Quelles sont les contraintes sur l'outil de production ?

6.1.1.1 Définition des entrées IC et n pour chaque carte

Nous tentons à travers cette partie de répondre à ces deux questions en apportant une variation dans les contextes de production (Variation de la capabilité du procédé et de la taille d'échantillon). Cet exercice est développé pour différentes valeurs de capabilité et

d'échantillon. Le tableau ci-dessous présente l'ensemble des environnements de pilotages[10] simulés en fonction de la capabilité et la taille d'échantillon du procédé.

		Capabilité																			
Taille d'échantillon		2					3					4					5				
	3	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I
	5	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I
	7	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I	α	$\beta_{10\%}$	$\beta_{20\%}$	$\beta_{30\%}$	I

Tableau 28 : Ensemble des simulations de pilotages réalisées en noir – non existante de la carte de contrôle

Nous rappelons que la simulation de la production des pièces suit une loi de distribution normale de moyenne μ_i et σ_i , calculée à chaque instant *i* à partir du type de dérive pour la moyenne et la capabilité *IC* pour l'écart type.

6.1.1.2 Définition de l'entrée : Types de dérives simulés

Dans son article, l'auteur Gauri [94] recherche à identifier à partir d'un film de production la famille de dérives à laquelle appartient le procédé. Afin d'identifier si la catégorie de la dérive est naturelle ou non naturelle [80][95]. Ainsi, si la dérive détectée est non naturelle, une ou plusieurs actions préventives doivent être réalisées afin de supprimer cette dérive.[96] L'auteur Gauri différencie 7 types de dérives récapitulées dans le Tableau 29 .

[10] L'ensemble des simulations est réalisé dans le cadre de distribution normale des pièces

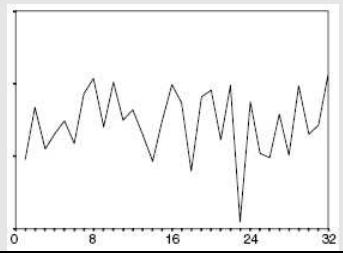
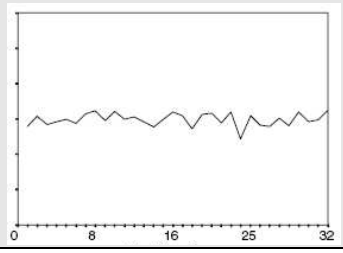
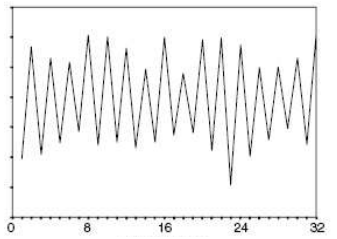
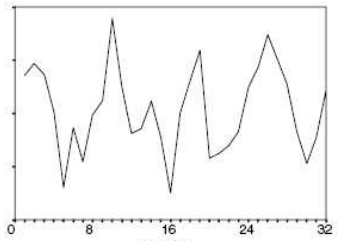
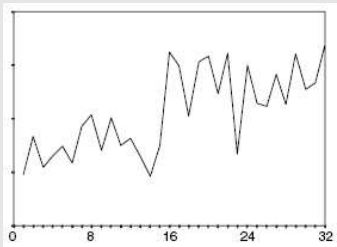
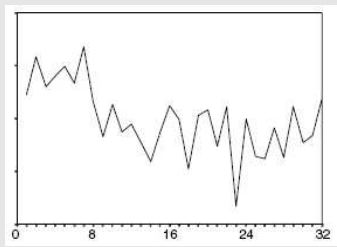
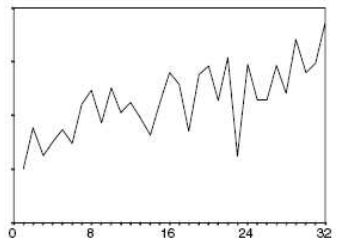
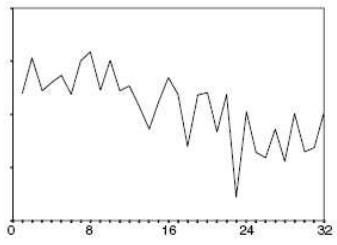
Nom de la dérive	Type de Dérive	Type de Dérive	Nom de la dérive
Dérive normale			Dérive Stratifiée
Dérive Systématique			Dérive Cyclique
Dérive avec écart supérieur			Dérive avec écart inférieur
Dérive ascendante			Dérive descendante

Tableau 29 : Récapitulatif des dérives de procédé présentées par Gauri [94]

Pour notre part, nous considérons comme entrées des environnements de pilotage deux types de dérives non naturelles :

- La dérive ascendante,
- La dérive avec écarts supérieurs.

En l'occurrence, les dérives normales, cycliques et stratifiées sont considérées comme des dérives naturelles [80][95].

6.1.1.3 Définition de la règle de pilotage de l'environnement

Traditionnellement lors du pilotage avec des cartes de contrôle, un ensemble de règles de pilotage peut être appliqué. Par exemple dans le cadre contexte de la carte de contrôle de Shewhart 14 règles sont définies, mais seulement sept sont réellement utilisées dans l'industrie [80][81][96]→[100]. Ces règles de pilotage ont pour objectif d'améliorer la capacité de détection des décentrages du procédé notamment concernant les dérives lentes.

Dans notre environnement de pilotage simulé, aucune règle de pilotage spécifique n'est intégrée ([101][102]). En conséquence, si l'inertie de l'échantillon est hors limite il est nécessaire d'appliquer une action corrective.

6.1.2 Indicateurs de sorties des environnements simulés

Afin de pouvoir comparer chaque carte de contrôle, il est nécessaire d'établir un ensemble d'indicateurs. Quatre indicateurs sont proposés :

- L'indicateur du niveau de qualité de la livraison *ICi* ou *Ppi* ;

Soit *Xi…Xn* un ensemble de caractéristiques qui suivent une distribution normale de paramètre μ_i et σ_i à l'instant *i*. L'indicateur *ICi* se détermine par la relation suivante :

$$Pp_i = ICi = \frac{I_{Plan}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - Cible\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Xi - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}} = \frac{I_{Plan}}{\sqrt{\left(\overline{X} - Cible\right)^2 + \sigma^2}} \quad (66)$$

- L'indicateur du nombre d'interventions ; $Nbre_Int$

La dérive du procédé étant connue, la fréquence d'intervention est établie par le temps moyen entre deux dérives divisé par 4. Cette fréquence d'intervention dépend essentiellement de la limite de contrôle de la carte dans le cas où la dérive est identique.

- L'indicateur du nombre de réglages ; $Nbre_\mathrm{Re}g$

Il correspond au nombre de réglages de la simulation sur la cible. Le nombre de réglages ne peut être supérieur au nombre d'interventions.

$$Nbre_Int \geq Nbre_\mathrm{Re}g \quad (67)$$

- Le rendement de stabilité % Rs entre le Cp et le Pp :

Cet indicateur est défini par le ratio entre le sigma court terme et le sigma long terme. Il permet de qualifier la stabilité de la production.

$$\%Rs = \frac{Cp}{Pp} \tag{68}$$

6.2Synthèse de l'ensemble des environnements simulés

Cette partie est une synthèse des environnements simulés. Deux sous-parties composent celle-ci. Chacune de ces sous-parties représente les deux types de dérives simulées. Ainsi, la première résume les résultats pour une dérive ascendante, tandis que la seconde présente les résultats pour une dérive avec un écart supérieur.

6.2.1 Dérive simulée de type ascendante

Pour les différentes configurations et selon l'hypothèse d'une dérive ascendante de la moyenne des valeurs simulées, nous obtenons pour les indicateurs *ICi* (*Ppi*) de la production les valeurs suivantes :

6.2.1.1 Résultat pour IC=2 et n=3, 5, 7

Cette partie présente les résultats de simulations pour un décentrage ascendant de la moyenne et une capabilité intrinsèque du procédé (*IC*) égale à 2.

Le Tableau 30 présente les indicateurs *ICi* et *%Rs* suite aux environnements simulés pour les cartes de contrôles inertielles sans dérive et la carte de contrôle ±inertie. Il a été vu dans la partie 5.2 que la carte de contrôle ± inertie ne devait pas être utilisée lorsque la taille d'échantillon est inférieure à 5. Cependant, nous avons souhaité mettre en évidence la remarque de Minte Chao [72], qui pour une limite de contrôle calculée avec un risque α présente dans un contexte d'utilisation un risque réel toujours inférieur à celui spécifié. Ce constat est perçu Tableau 30(b), où pour un *IC* de 2 et une taille d'échantillon de 3, la carte ± inertie livre un *ICi* (1.3) supérieur à la carte de contrôle inertielle sans risque (1.21). Il en est de même pour l'indicateur *%Rs*. Ce dernier met donc en évidence la différence de stabilité pour ces cartes de contrôle. En outre, le calcul des limites LC_α est supérieur à la limite I_{plan}, comme nous le montrons dans l'exemple suivant :

- I_{plan}=1, *IC*=*Cp*=2 et n=3,
- LC_α=1,09 cf :(54)

- Limite ± inertie = 1

Expression de la limite selon Minte Chao [72] nommée LSC_α:

$$LSC_\alpha = \sqrt{\frac{C(\alpha,n) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma_{CT}^2 + 2\left(1-\frac{2}{n}\right)\log\sigma_{CT}}{\pi}} = 0.92 \quad (69)$$

Donc α=0.27% et *n=3* avec *C* (α, *n*) coefficient extrait de l'article de Minte Chao [72] (cf. annexe 12.1) et σ_{CT} l'écart type court terme égal à Iplan/IC soit 0.5.

	Cp	n	ICi	%Rs
± Inertie	2	3	1.30	90.98
	2	5	1.25	88.27
	2	7	1.28	88.83
Limite α	2	3	1.21	86.18
	2	5	1.32	87.84
	2	7	1.38	90.98

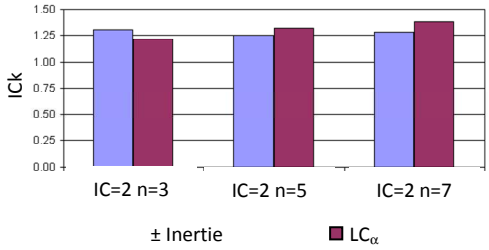


Tableau 30 :Synthèse des simulations pour un Cp=2

Lorsque l'indicateur *Cp* est égal à 2, plusieurs alternatives sont possibles dans le choix de la carte de contrôle. Ce choix est fonction du niveau de capabilité final (*ICi*) que l'on veut assurer. Ainsi, il est préférable de choisir une carte de contrôle calculée selon la formulation de Minte Chao afin que le niveau de capabilité final *ICi* soit proche de l'indicateur *Cp*, surtout lorsque la taille d'échantillon est faible (*n*<3). Dans le cas où la taille d'échantillon et la capabilité sont supérieures à 2, la carte de contrôle sans dérive est suffisante pour assurer une exigence supérieure à 1.30.

6.2.1.2 Résultat pour IC variant de 3 à 5 et n=3,5,7

Cette partie présente les résultats de simulations pour un décentrage ascendant de la moyenne et une capabilité intrinsèque du procédé (*IC*) variant de 3 à 5 et une taille d'échantillon *n* égale à 3,5,7.

La figure26 synthétise les valeurs des *ICi* obtenues pour différents environnements simulés avec l'ensemble des cartes de contrôles inertielles. Ainsi, on retrouve la carte de contrôle inertielle sans dérive (appelée « LC_α »), les *CCID* avec un risque β de 10 %, 20 %, 30 % (appelée « LC_β= k% »), la carte à ± inertie qui correspond à une *CCID* avec β=50% (appelée « ±Inertie »). La figure26 se décompose en quatre figures (a, b, c, d) qui synthétisent les résultats des environnements simulés pour une capabilité donnée. Ainsi, la figure26-a représente les *ICi* pour un *Cp* égal à trois (IC=3), la figure26-b correspond à un *Cp(IC)* égal à quatre (IC=4), la figure26-c a un *Cp* égal à 5.

L'ensemble des figures (a, b, c, d) montre que l'utilisation des cartes de contrôles avec dérive (CCID) permet de dégrader l'inertie tout en respectant un *ICi* seuil de 1.30, excepté pour la carte à ± inertie (β=50 %) dont la valeur minimale est de 1.20. En outre, une augmentation du risque β amène à réduire le niveau de capabilité final *ICi* (figure26-d). Il en est de même pour la taille d'échantillon dont l'impact est moins significatif sur l'indicateur *ICi*. En effet, l'augmentation de la taille d'échantillon est toujours accompagnée d'un accroissement de la limite de contrôle LC_β et de la pente de la courbe d'efficacité. En conséquence, la capacité de détection de la carte contrôle est améliorée donc permet de réduire l'influence de l'augmentation de la limite de contrôle. En conséquence dans une situation de capabilité limite, il est préférable d'augmenter la taille d'échantillon pour repousser les conditions limites au contraire du risque β qui dégraderait la performance long terme. Pour finir, nous observons que sur chaque figure la carte de contrôle inertielle sans dérive (LC_α) donne un indicateur *ICi* proche de la capabilité court terme *IC*. Il est à noter que les performances de cette carte de contrôle peuvent être améliorées par le calcul des limites proposées par Minte Chao.

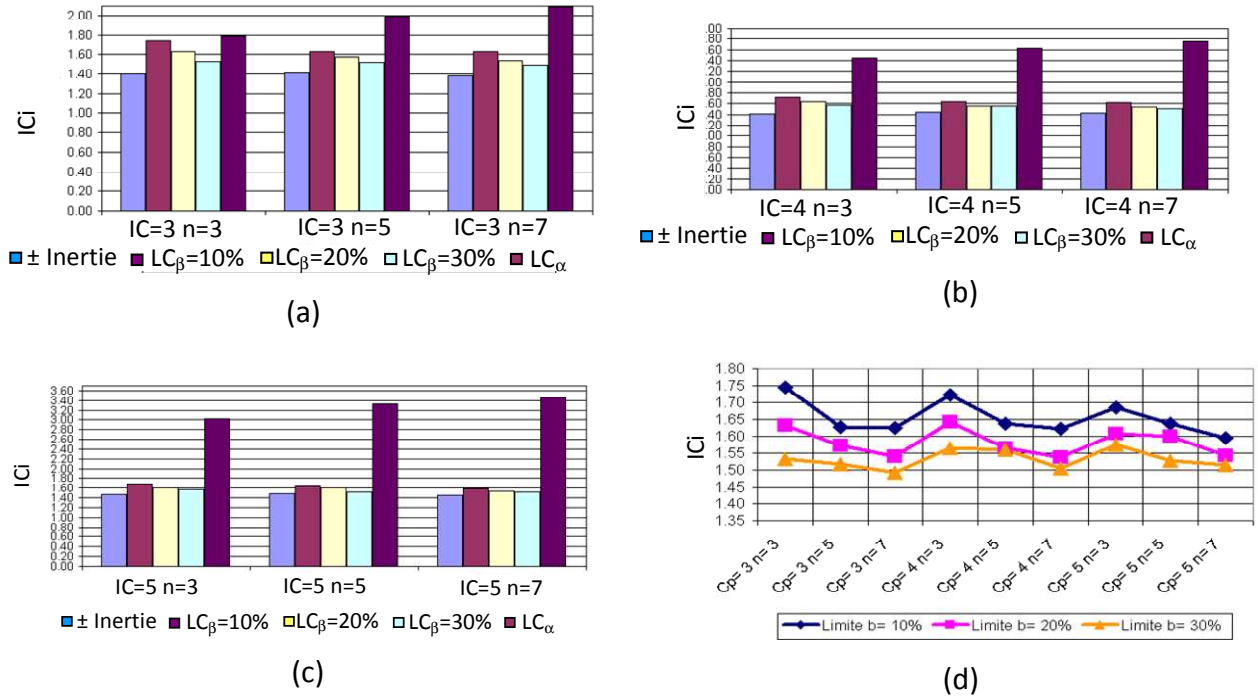


figure26 :Synthèse des simulations pour un Cp= 3(a) ,4(b),5 (c), évolution de la capabilité pour différents risques β(d)

6.2.2 Dérive simulée de type écart supérieur

Pour cette partie, nous avons considéré un écart de moyenne que nous appelons écart à un instant t. La fréquence d'apparition des écarts est définie toutes les 2 000 pièces ; la valeur de l'écart est de $I_{plan}/4$.

6.2.2.1 Résultat pour IC = 2 et n=3,5,7

Cette partie présente les résultats des simulations pour une dérive d'écart de la moyenne et une capabilité intrinsèque du procédé (*IC*) égale à 2.

La Tableau 31 présente les indicateurs *ICi* et *%Rs* suite aux environnements simulés pour les cartes de contrôles inertielles sans dérive et la carte de contrôle ±inertie.

Pour ces environnements simulés, les cartes de contrôle ± inertie et inertielles sans dérive donnent des résultats très semblables. Le procédé est stable et le niveau de détection est suffisant pour la dérive. Le *%Rs* est supérieur à 97% (*ICi* proche de 2). La qualité de ces indicateurs s'explique par la dérive simulée qui est toujours constante entre deux écarts.

	Cp	n	ICi	%Rs
± Inertie	2	3	1.80	99.07
	2	5	1.79	98.59
	2	7	1.78	97.88
Limite α	2	3	1.79	98.49
	2	5	1.80	98.78
	2	7	1.80	99.09

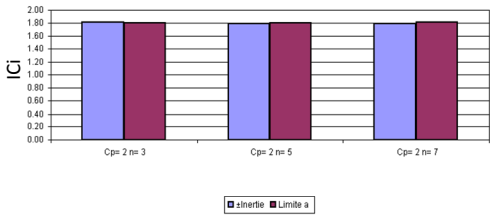


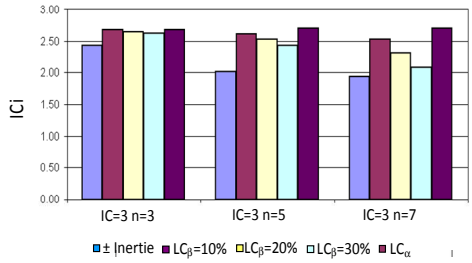
Tableau 31 :Synthèse des simulations pour un Cp=2, dérive de type écart

6.2.2.2 Résultat pour IC variant de 3 à 5 et n=3,5,7

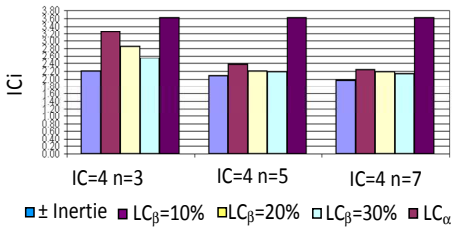
Cette partie présente les résultats de simulations pour une dérive de type écart de la moyenne et une capabilité intrinsèque du procédé (*IC* ;*Cp*) variant de 3 à 5 et une taille d'échantillon n égale à 3,5,7.

La figure 27 synthétise les valeurs des *ICi* obtenues pour différents environnements simulés avec l'ensemble des cartes de contrôles inertielles. Ainsi, on retrouve la carte de contrôle inertielle sans dérive (appelée « risque α »), les CCID avec un risque β de 10 %, 20 %, 30 % (appelée « Limite β= k% »), la carte à ± inertie qui correspond à une CCID avec β=50% (appelée « ±inertie »). La figure 27 se décompose en quatre figures (a, b, c, d) qui synthétisent les résultats des environnements simulés pour une capabilité donnée. Ainsi, la figure 27-a représente les *ICi* pour un *Cp* égal à trois (*IC*=3), la figure 27-b correspond à un *Cp* égal à quatre (*IC*=4), la figure26-c a un *Cp* égal à 5. La figure 27-d est une illustration d'une simulation réalisée, avec le film de production d'une carte de contrôle sur 2000 valeurs représentées et l'histogramme de l'ensemble des valeurs produites pour cet environnement de pilotage simulé.

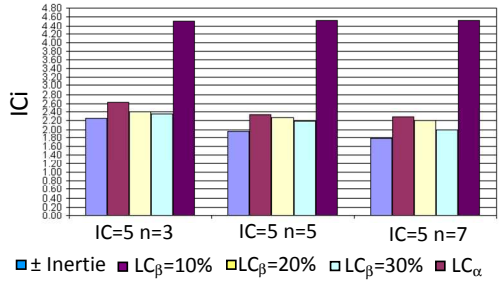
Globalement, les résultats de ces simulations sont meilleurs que pour les simulations avec dérives ascendantes du fait de la proportion de pièces proche de la valeur cible. (ICi_{mini}=1.78 contre 1.21 pour la carte ± inertie).



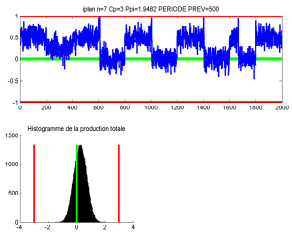
(a)



(b)



(c)



(d)

figure 27 :Synthèse des simulations pour un Cp= 3 (a), 4(b), 5(c), représentation graphique d'une carte simulée (d)

La figure 28 montre l'évolution des niveaux de capabilité livrés *ICi* pour la carte de contrôle inertielle sans dérive (risque α) et ± inertie (risque β=*50 %*) suivant différentes valeurs de capabilité (*IC ;Cp*) et de taille d'échantillon. Nous constatons que la carte à ± Inertie permet de donner un niveau de qualité stable quelque soit la capabilité du procédé de fabrication ou la taille d'échantillon choisie. Au contraire, la carte de contrôle à la limite α dont le rôle est de veiller à ce que le procédé soit centré, présente un niveau de capabilité *ICi* proche de la capabilité intrinsèque du processus (*IC ;Cp*).

Pour conclure sur la figure 28, la carte de contrôle ± inertie permet de livrer un même niveau de capabilité *ICi* quels que soient les niveaux de capabilité *IC* des outils de production, en plus de la réduction des interventions de contrôle sur le procédé.

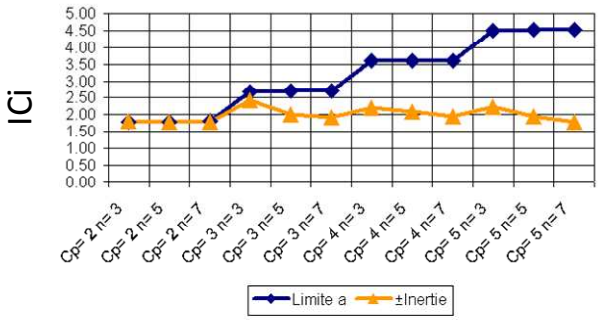


figure 28 : Évolution de la capabilité livrée des cartes de contrôle inertielle sans dérive et ± inertie pour différentes configurations

La figure 29 montre l'évolution des niveaux de capabilité livrés *ICi* pour la carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID) pour différents risques β=10 %, 20 % et 30% suivant différentes valeurs de capabilité (*IC ;Cp*) et de taille d'échantillon. La capabilité livrée est meilleure que la carte de contrôle inertielle à ± inertie. L'influence du risque β reste assez mineure parce que les résultats paraissent proches en termes de capabilité. Ainsi, l'écart moyen suivant chaque configuration est respectivement de 0.27 avec un maximum à 0.71 pour la configuration *Cp*=4 et n=3.

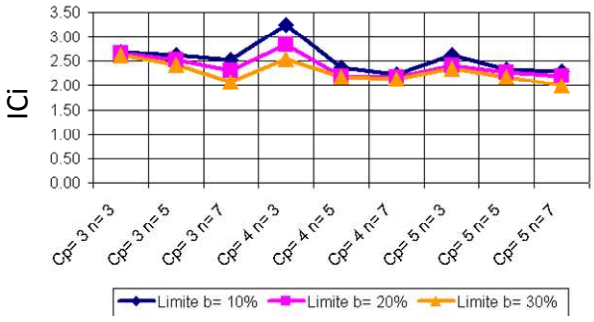


figure 29 : Évolution de la capabilité livrée des cartes de contrôle inertielle avec dérive

6.2.3 Synthèse des simulations

L'ensemble des environnements simulés (cf. :6.2.1 et 6.2.2) a permis d'observer le comportement des différentes cartes de contrôles inertielles dans différents contextes. Par ce biais, plusieurs points de discussion sur l'utilisation et l'efficacité de ces cartes ont pu être confirmés ou infirmés. Nous proposons de les rappeler :

- L'utilisation de la carte de contrôle inertielle sans dérive (risque α) peut-être améliorée pour les capabilités faibles (*Cp=IC<=2 n=3)*. En effet, le *%Rs* est de

l'ordre de 86 % pour une taille d'échantillon *n* égale à 3. Ce ratio n'est pas exécrable puisque supérieur à 70 %. Cependant, la simulation n'a illustré qu'une configuration *(Cp =IC=2 et n=3),* pour laquelle la carte de contrôle à ± Inertie *(risque β=50%)* donne de meilleurs résultats *(%Rs =91%)* que la carte de contrôle inertielle sans dérive. En outre, nous avons souligné l'intérêt des travaux de Minte Chao qui propose une carte de contrôle ayant un calcul des limites plus adapté aux cartes δ-σ. A l'avenir, nous conseillons l'utilisation de la carte de Minte Chao, si le niveau de capabilité est faible afin d'assurer un meilleur *%Rs*, donc un *ICi* livré proche de l'*IC* du processus de fabrication.

- L'intérêt de la carte de contrôle inertielle avec dérive est de permettre au processus de dériver en moyenne au risque β près. L'ensemble des environnements simulés a montré que le niveau de capabilité produit était compris entre 1.20 et 1.70 quel que soit le risque β. Ces valeurs sont proches des exigences actuelles demandées par les clients (*Cpk*> 1 voir 1,33). Cependant, si nous nous référons à la partie bibliographie, il a été vu que l'approche de tolérancement par l'inertie ajustée demande à respecter un indicateur *ICi* est égal à 1. En conséquence, les cartes de contrôles permettraient d'assurer un niveau de capabilité supérieur à celui spécifié.

- Le niveau de qualité livrée (*ICi*) est quasi-similaire dans la situation ou une caractéristique est produite par différents procédés, quels que soient leur capabilité intrinsèque et taille d'échantillon, en supposant qu'il soit piloté avec une carte de contrôle inertielle avec dérive ou ± inertie. Ainsi, l'entreprise productrice fournit des lots avec un niveau de qualité livrée stable dans le temps. Cette stabilité est un atout pour le client, car elle limite considérablement la variabilité des performances du produit final si l'ensemble des fournisseurs adhère à la Maîtrise Inertielle des Procédés (*MIP*).

- L'influence du risque β sur le niveau de capabilité livrée est illustrée par la figure 30. Cette figure introduit l'évolution de l'indicateur *ICi* pour les différentes cartes de contrôles inertielles avec risque. Ainsi pour la limite calculée à partir du risque β de 10%, le niveau de capabilité livré quelques soient le Cp et la taille d'échantillon est supérieur à 1.60. Concernant un risque $\beta = 30\ \%$, le niveau de

capabilité est supérieur à 1.50. Et pour un risque $\beta = 50\ \%$, le niveau de capabilité est supérieur à 1.20. Ces résultats numériques confirment l'impact de l'augmentation du risque β qui implique une augmentation de la DMA (Dérive Maximale Acceptable) et donc une baisse du niveau de qualité livré.

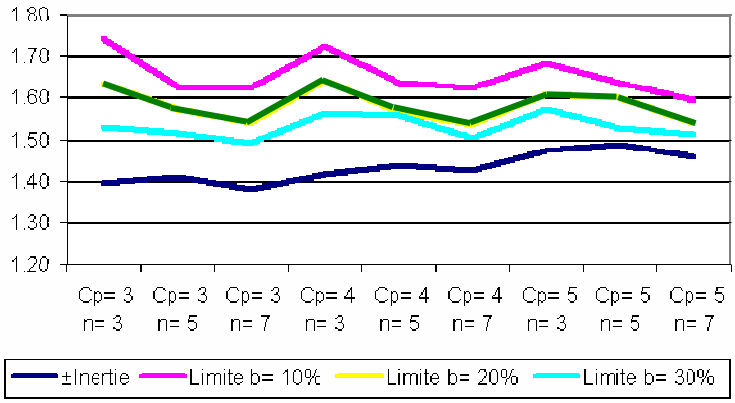


figure 30 :Niveau de capabilité livrée (ICi) pour les différentes cartes de contrôle inertielles avec dérive.

Lors d'une situation proche du hors contexte d'utilisation de la *CCID*, les simulations ont mis en évidence les paramètres qui peuvent être modifiés pour s'extraire de ce contexte et assurer la meilleure capabilité livrée. Nous avons vu que l'augmentation de la taille d'échantillon a un impact faible sur le niveau de capabilité livré, contrairement à une augmentation du risque β. Il est donc préférable d'augmenter la taille d'échantillon, puis en dernier recours celui du risque β. L'avantage de la taille d'échantillon est d'influencer la limite de la carte de contrôle et son efficacité. Il y a donc une amélioration de la qualité de détection de la carte de contrôle et une augmentation de la Dérive Maximale Admissible (DMA) du processus.

7 Recommandation pour le déploiement des cartes de contrôles inertielles

Dans le cadre du pôle de compétitivité « Arve Industries – Haute Savoie Mont Blanc », le programme "TOLERANCEMENT ET QUALITE GEOMETRIQUE" aborde une thématique sur le tolérancement inertiel. L'objectif du pôle a été de proposer à un ensemble d'industriels d'expérimenter cette approche. Un club a été créé afin de promouvoir les différentes expérimentations du tolérancement inertiel. Cette partie résume les réflexions introduites

lors de la mise en place de la carte de contrôle inertielle dans les différentes entreprises du pôle.

La mise en place d'une carte de contrôle inertielle ou une de ses variantes exige de suivre une démarche bien définie. Les étapes proposées dans la démarche DMAIC[11] permettent de garantir la réussite du projet [88][103]. Cette démarche n'est pas contradictoire avec l'ISO 9000 :2000 et la nouvelle version, elle est même similaire voire complémentaire, d'ailleurs Lupan R et Kobi A propose une stratégie d'implantation de cette approche dans une dynamique d'amélioration [89][90]. En effet, elle permet de définir au mieux les capacités du procédé à produire une caractéristique donnée et insiste sur la pérennisation à terme.

7.1 Recommandation dans l'utilisation des cartes inertielles

Sept points clefs sont à considérer afin de maximiser les performances des cartes inertielles.

- La capabilité du processus de contrôle [85][86][87] :

Il s'agit de traduire la capacité de mesurer une caractéristique produite par un processus donné. Le niveau de cet indicateur va influer sur la qualité d'analyse et donc sur le choix de la carte de contrôle. Un ensemble d'outils et d'indicateurs permet une analyse des sources de variabilités du processus et du moyen de contrôle. Ces différents indicateurs et outils sont proposés dans les différentes normes en vigueur actuellement [86][87]. Il est à noter que D.Duret[104], par exemple, propose de regrouper sous la forme d'une inertie les sources de variabilités de type erreur de justesse, et reproductibilité & répétabilité.

- L'analyse de la capabilité de l'outil de production

Elle va influer sur le choix : des limites, des fréquences de prélèvements et de l'efficacité de détection des cartes de contrôles. Elle est déterminée par l'analyse de capabilité du procédé. Cette analyse de capabilité doit permettre de donner une vision court terme et long terme de la production. La première vision permet de déterminer le « Potentiel du

[11] DMAIC : Define, Measure, Analyze, Improve and Control. DMAIC est une méthode que l'on peut considérer comme un processus d'amélioration continue à part entière. Fondée sur l'analyse statistique elle vise l'élimination systématique de toutes les sources de non-qualité.

procédé », tandis que la seconde vision informe sur la variabilité du processus donc sur les dérives non naturelles de celui-ci.

- La taille d'échantillon :

La taille influe sur l'efficacité de détection de la carte de contrôle.

- Le risque β acceptable :

Pour une même capabilité et une même taille d'échantillon, son augmentation va permettre d'accroître la limite de contrôle aux risques β en dépit de la qualité globale de production (*ICi*). Le choix de la valeur β dépend donc du niveau de qualité à livrer.

- L'Exigence Client ou Unité contractuelle :

Il est important que dans la relation client fournisseur la qualité exigée par le client soit exprimée sur un volume de composants proche des volumes utilisés lors de l'assemblage. En effet, les volumes livrés par le fournisseur (sous forme de lot économique) sont très souvent différents du contexte d'utilisation. Si bien que le calcul d'un *ICi* sur une unité de conditionnement n'est pas représentatif d'une production livrée donc peut réaliser une proportion d'assemblage non conforme alors que le lot économique livré est conforme.

- La variabilité non naturelle du processus :

Elle correspond au type de dérive du procédé. [94]

- La fréquence de contrôle :

Elle est conditionnée par la variabilité du processus [94], et les limites de la carte. La fréquence de prélèvement se définit par la fréquence moyenne d'intervention divisée par 4 (théorème d'échantillonnage des signaux de Nyquist-Shannon). Cette approche est simple à appliquer et efficace, cependant d'autres approches existent comme celle proposée par Chirico[105] ou de Carré.

7.2Choix en fonction de l'environnement de la carte de contrôle inertielle

À partir des limites d'utilisation de chaque carte de contrôle, nous proposons un diagramme (figure 31) afin d'orienter l'utilisateur dans le choix de la carte de contrôle la plus adaptée à son environnement de production.

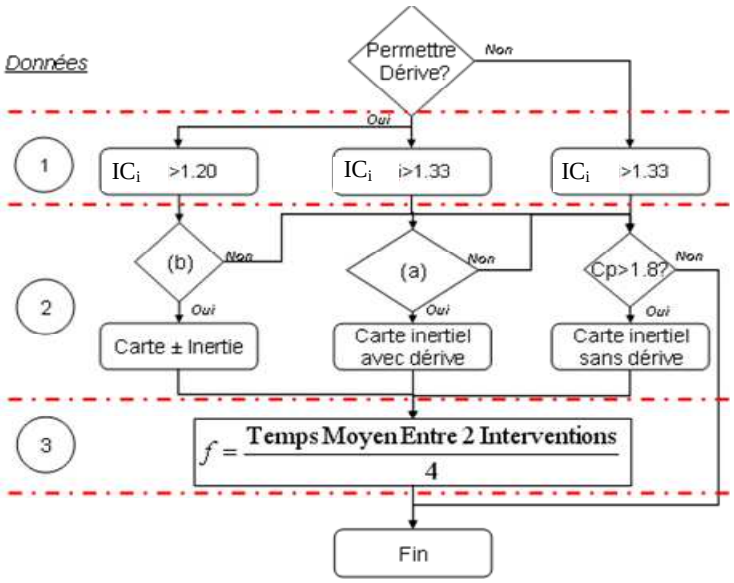


figure 31 :Processus de choix de la carte de contrôle

La figure 31 introduit une première question portant sur l'autorisation ou non de la dérive du procédé. Lors de la réalisation de ce diagramme, nous avons considéré que c'était au client (responsable de la conception) de spécifier si la production peut ou non se décentrer dans les limites de l'inertie ainsi que la capabilité minimale requise [106]. Dans le cas d'une restriction de la dérive du procédé, la carte de contrôle inertielle sans dérive est alors utilisée. Afin de garantir un *ICi* >1.33, le critère minimal pour le *Cp*(*IC*) est de 1.8. Dans la situation où une dérive du procédé est autorisée, la question concernant la qualité minimale à réaliser se pose. La valeur de ces indicateurs est définie à la suite de différentes simulations [107]. Si le critère spécifié (*ICi*) doit être supérieur à 1.33, il est nécessaire de s'orienter vers une carte inertielle avec dérive au lieu de la carte ± inertie. La capabilité minimale pour l'utilisation de la carte de contrôle se détermine par deux paramètres ; la taille d'échantillon et la capabilité du procédé. Le premier paramètre dépend du choix du fournisseur qui va choisir sa taille d'échantillon en fonction de critère considéré historique, pratique ou lié à la qualité du *Cp(IC)* de son procédé.

Sur la figure 31, les lettres (a) et (b) correspondent respectivement au tableau synthétisant les contextes d'utilisation de la CCID (Tableau 23). Comme nous pouvons l'observer sur la figure 31, la détermination de la fréquence de contrôle est présentée par le temps moyen entre deux interventions divisées par 4. Le chiffre 4 est lié au théorème de

Shannon concernant l'échantillonnage des systèmes qui spécifie que la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la fréquence du signal analogique.

7.3 Illustration :

Supposons qu'un client exprime une exigence sur la caractéristique d'une pièce. « Un *ICi* de 1.33 sur un volume de 5 000 pièces ». L'historique de production permet de connaitre la capabilité court terme *Cp*=*IC*=2.8, ainsi que le temps moyen entre deux interventions sur le processus (8 heures).

En prenant un risque β de 30 %, le tableau 1 permet de déterminer une taille d'échantillon de 3.

Le besoin étant de satisfaire un *ICi* de 1.33, le fournisseur choisit la carte de contrôle avec dérive. Il détermine la fréquence d'intervention toutes les deux heures à partir du temps d'intervention moyen (8 h/4). Ainsi à partir du diagramme, l'opérateur devra piloter le processus de fabrication en respectant l'inertie sur la carte de contrôle et en intervenant sur le processus chaque fois que l'inertie est supérieure à la limite LC_β.

8 Application dans le cadre du pôle compétitivité « Arve Industrie ».

Les exemples présentés font partie des retours d'expériences que nous avons suivi dans le cadre du club tolérancement inertiel.

Le premier exemple traite d'un pilotage avec une carte de contrôle avec une dérive à ± inertie (β=50 %). L'utilisation de la carte de contrôle est inscrite dans un contexte Maîtrise Inertielle des Procédés, c'est-à-dire :

- Tolérancement suivant l'approche inertielle réalisée,
- Mise en place de la carte de contrôle dans le respect de la démarche DMAIC et des recommandations (cf. partie 7),
- Suivi des productions livrées par un contrôle réception selon l'inertie.

Le second exemple porte sur un pilotage réalisé en parallèle d'une carte de contrôle traditionnelle de type Shewhart.

Dans les deux cas présentés, nous ne nous intéresserons qu'à l'aspect pilotage du procédé et aux résultats sur les performances de l'assemblage et de l'outil de production. Nous n'aborderons pas l'aspect tolérancement.

8.1 Cas d'étude 1 : Pilotage avec la ± Inertie

8.1.1 Présentation

L'exercice porte sur l'assemblage d'un réducteur épicycloïdal. (figure 32). Ce réducteur est composé de trois axes décolletés et d'un barillet injecté. Une fois l'assemblage réalisé, l'axe est serti dans le barillet.

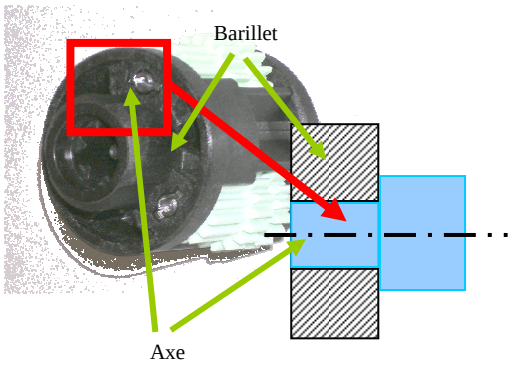


figure 32 :Réducteur épicycloïdal

Plusieurs anomalies ont été identifiées lors de l'assemblage :

- La première concerne la fonctionnalité du produit (mauvais engrènement). Cette anomalie est considérée comme critique par le client.
- La seconde concerne la tenue de l'axe dans le barillet lors de l'assemblage. Cette anomalie est considérée comme acceptable par le client, malgré les quelques difficultés rencontrées lors de l'assemblage.

Le tolérancement a donc été réalisé entre l'axe et les alésages des barillets. L'exigence client en termes de capabilité long terme (*ICi*) a été demandée à 1.10 pour les productions livrées sur deux unités de conditionnement. Pour donner suite à ce travail, une analyse de capabilité et du moyen de mesure a été réalisée avant de porter un choix sur la carte de contrôle inertielle adéquate.

8.1.2 Contexte industriel

Avant de définir la carte de contrôle inertielle, il a été nécessaire d'apporter une expertise sur le processus de contrôle. Celle-ci a permis d'identifier les faiblesses du contrôle et rendre celui-ci plus robuste (réduire la part de variabilité). De ce fait, les mesures des caractéristiques suivies ont été moins influencées par les variations intrinsèques du processus de contrôle.

Suite à cette étude, une analyse de la capabilité portant sur les différents fournisseurs de pièces a été réalisée. Le Tableau 32 est une synthèse de cette analyse. Elle montre pour chaque fournisseur un niveau de capabilité du processus (*Pp*/*Ic*) acceptable (>1.7). Toutefois l'observation des indicateurs *IC*/*ICi* pour chaque fournisseur, nous montre une certaine dérive. Ainsi, on peut constater que les fournisseurs de barillet ont un décentrage moins important que le fournisseur d'axe. Il a été vu précédemment que la robustesse est dépendante de l'écart par rapport à la cible des composants. Plus cet écart est important, moins l'assemblage est robuste. Néanmoins, l'exigence de viser la cible est à modérer sur certains outils de production comme l'injection plastique, la frappe à froid, les procédés de mises en forme… donc le paramétrage sur la cible est beaucoup plus difficile et souvent lié à des raisons économiques comme la durée de vie de l'outil. Ainsi pour ces raisons, il a été choisi de porter l'étude sur la production des axes décolletés qui sont plus faciles à recentrer.

	Barillet		Axe
	Fournisseur 1	Fournisseur 2	
Moyenne	0.017	0.014	0.00424
Ecart type	0.004621	0.005017	0.00236
$IC_{(long\ terme)}$	1.94	1.79	1.906
Inertie	0.0055	0.00744	0.0048
ICi	1.64	1.21	0.9375
Inertie des composants injectés	0.0081		0
ICi des composants injectés	1.11		0
ICi de l'assemblage	0.8930		

Tableau 32: Tableau de synthèse de l'analyse de capabilité

8.1.3 Contexte de production et Choix de la carte de contrôle

La production des axes décolletés est réalisée sur plusieurs machines à décolleter ayant chacun un niveau de capabilité court terme moyen (*Cp*) qui peut être différent. En conséquence, le choix de la carte de contrôle a été conditionné par la décolleteuse la moins performante du parc machine.

Une étude de suivi de production de 25 échantillons de 5 pièces (soit 6,25 heures de production) a été réalisée et est présentée figure 33. Cette figure montre que le procédé est assez stable hormis le point hors limite en étendue qui correspond au besoin d'affutage de l'outil. De même, nous remarquons que l'opérateur ne centre pas son procédé sur la cible spécifiée. La figure 34 illustre le résultat du suivi si l'opérateur avait centré le moyen de production (décentrage moyen de 3 µ). Le procédé a alors une stabilité remarquable sur les 6 heures de suivi.

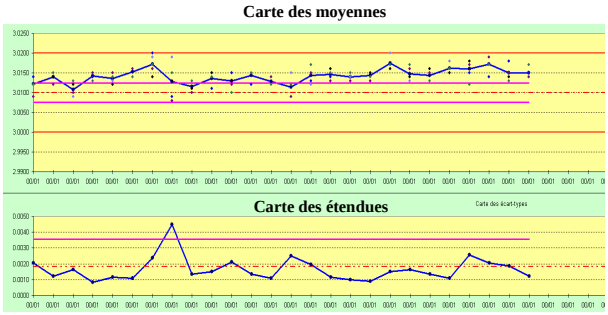


figure 33 :Étude de suivi de la machine la moins performante sur 6 heures de production

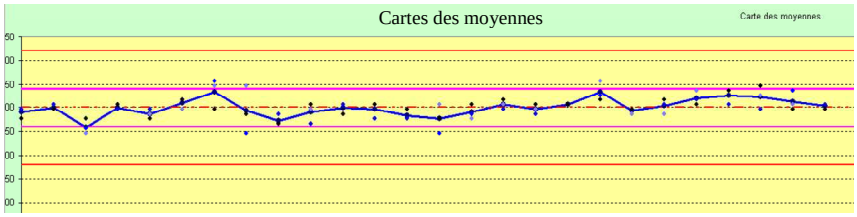


figure 34 :Résultat du suivi pour un décentrage moyen de 3μ

Suite à l'analyse de la capabilité, un calcul du *Cp* (*Ic*) intrinsèque de l'outil de production est réalisé et égal à 2.5. Le tableau suivant propose les cartes de contrôles pouvant être utilisées pour ce niveau de capabilité.

		Carte inertielle avec Dérive (a)				
		β =10 %	β =20 %	β =30 %	β=40 %	β=50 %
Taille d'échantillon (n)	2					
	3				2.47	2.33
	4			2.33	2.22	2.11
	5	2.50	2.33	2.25	2.15	2.04
	6	2.41	2.25	2.11	2.02	1.94
	7	2.27	2.14	2.00	1.93	1.85

Tableau 33 : Capabilité minimale pour l'utilisation de la carte de contrôle avec dérive.

Le choix de la carte de contrôle inertielle est conditionné par deux aspects qui sont l'exigence client de 1.10 et la taille d'échantillon dont le critère interne était de 3 si le niveau de capabilité du procédé le permet.

Dans le cas étudié, l'entreprise a le choix entre deux cartes de contrôles inertielles.

- La première est la carte de contrôle inertielle avec dérive pour un β= 40 %,
- la seconde correspond à la carte de contrôle inertielle avec dérive pour un β=50 %.

En outre, la stabilité du processus de contrôle le permettant, il a été possible de simplifier la carte de contrôle et de considérer au final que la carte de contrôle inertielle avec dérive pour un β=*50 %* soit (±Inertie). Avec une représentation en ± Inertie et un pilotage suivant la médiane des échantillons de 3 pièces. Pour le pilotage, une seule règle a été définie.

« Si la médiane de l'échantillon est hors zone verte alors recentrez le processus ».

La figure 35 est une représentation de la carte utilisée en production. Ainsi, pour chaque échantillon, s'il est dans la zone verte alors il est conforme à l'inertie du plan au risque β. Dans la zone rouge l'échantillon est accepté, mais le processus de fabrication doit être recentré sur la valeur cible représentée en pointillée.

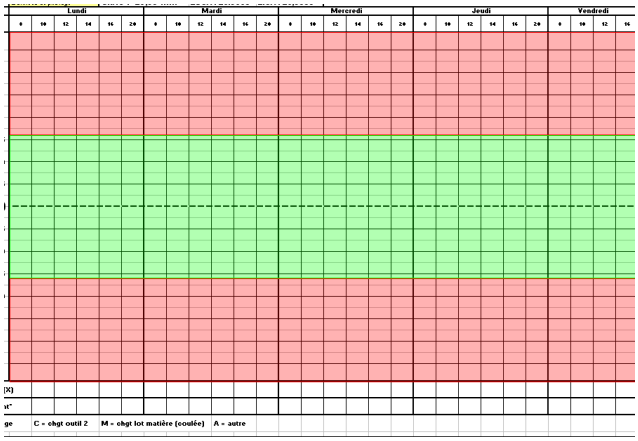


figure 35 :Exemple de la carte de contrôle appliquée

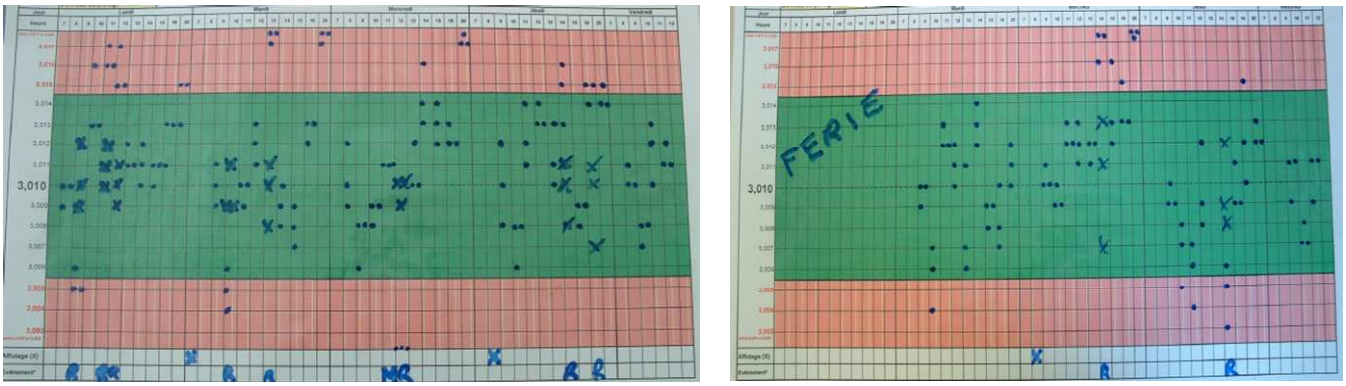
Une fois la formation des opérateurs réalisée un retour d'expérience a pu être réalisé.

8.1.4 Retour d'expérience du cas d'étude n°1

Cette partie est le retour d'expérience d'un an d'utilisation de la carte de contrôle présentée figure 35. L'objectif est d'étudier l'impact de la carte sur le niveau de qualité livré par le fournisseur.

La figure 36(a) présente la carte de contrôle lors des deux premières semaines d'application de celle-ci. On constate en premier lieu qu'un temps d'adaptation à la règle de

pilotage (« Viser la Cible) » est nécessaire. C'est un changement de culture qui a été non négligeable pour les opérateurs, habitués à viser plus une limite de tolérance qu'une cible. Cependant une fois intégrée, nous observons une réduction importante du temps de contrôle et de réglage effectif. En effet sur la première carte de contrôle, l'opérateur réalise en moyenne trois réglages par jour (figure 36 (a) : croix et R). Tandis que sur la figure 36 (b), le nombre de réglages se situe entre 1 et 2, cependant des actions correctives portant sur les réglages de type croix ont permis de réduire le nombre de réglages effectifs à 1 réglage tous les 3,5 jours pour certaines machines.



(a) (b)

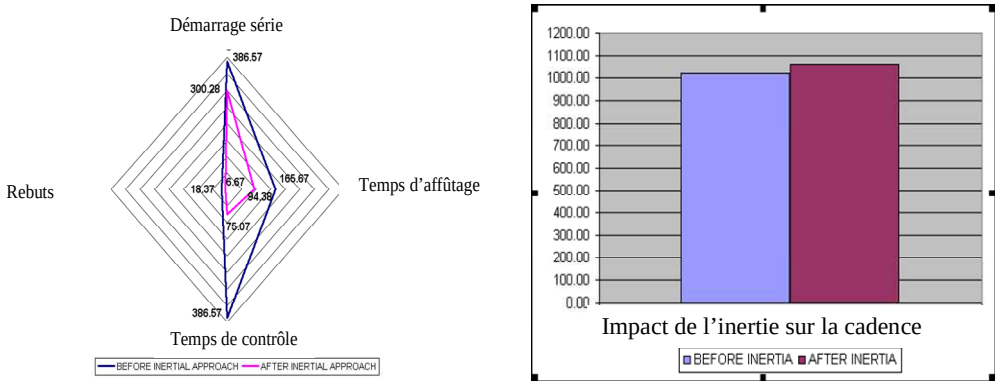
figure 36 : Carte de contrôle inertielle appliquée dans un contexte industriel

Le Tableau 34 montre que l'approche du tolérancement inertiel a permis d'augmenter l'intervalle de tolérance de 35 %. Et d'augmenter les limites de la carte de contrôle de 50 %. Pour finir, la période de réglage a augmenté de 100 % passant de 2 heures à 4 heures et le gain de productivité est de l'ordre de 4 heures par jour. L'utilisation de cette carte de contrôle a permis de supprimer les retours clients et les anomalies de deuxième ordre correspondant à la tenue de l'arbre lors du montage.

Axe	Sans inertie	Avec inertie	gain
Équivalence intervalle de tolérance	0.020	0.027	+35%
Limite de la carte de contrôle des moyennes	± 0.0030	± 0.0045	+ 50 %
Période de réglage	Toutes les 2 h	Toutes les 4 h	+ 100 %
Gain en productivité		4 h par jour	+ 30 %
Retour client (plainte)	2 + Anomalies de deuxième ordre	0	

Tableau 34 :Synthèse de l'impact de l'inertie sur un an de fabrication

La figure 37(a) présente une estimation des répartitions des différents temps d'arrêt sur le volume annuel produit sur une seule machine. La figure 37(b) illustre le gain de l'inertie sur la cadence réelle (exempt de tout arrêt) de l'outil de production. Celle-ci a augmenté de 5 % comparé à la production antérieure.



(a) (b)

figure 37 : Synthèse graphique de l'impact de l'inertie

Rappelons qu'une fois la carte de contrôle inertielle généralisée aux autres procédés de fabrication le niveau de qualité livré au client a été homogène. Ce qui est conforme à la simulation de la partie 6.

8.2Cas d'étude n°2 : Inertie et Conformité

Le cas d'étude n°2 n'a pas fait l'objet d'une application de la carte de contrôle inertielle, mais juste d'un suivi en parallèle à une carte de contrôle de type Shewhart. Ainsi, l'ensemble

de la démarche appliquée dans le premier cas d'étude n'a pas été déployé. De ce fait, le potentiel pouvant être espéré avec l'approche *MIP* n'a pas été atteint. Cependant, cette application a permis de mettre en évidence l'importance du respect de l'inertie.

8.2.1 Contexte industriel

Dans cet exemple, les performances du produit fini dépendent en partie des variations du produit semi-fini. Nous sommes donc intéressés à ce dernier.

A la suite d'un prélèvement consécutif de 400 assemblages semi-finis, nous avons pu tracer la répartition de la caractéristique fonctionnelle (cf. figure 38). Sur cet histogramme, on peut constater deux populations bien distinctes près des limites de tolérances. En conséquence, les produits livrés ne seront pas homogènes en termes de performance. La recherche de l'homogénéité de la performance est liée au contrôle des décentrages de la production.

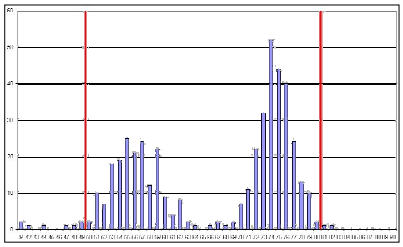


figure 38 : Variation d'une production de produit semi-fini sur une journée

Nous proposons d'étudier la chaîne de production d'assemblage schématisée, figure 39.

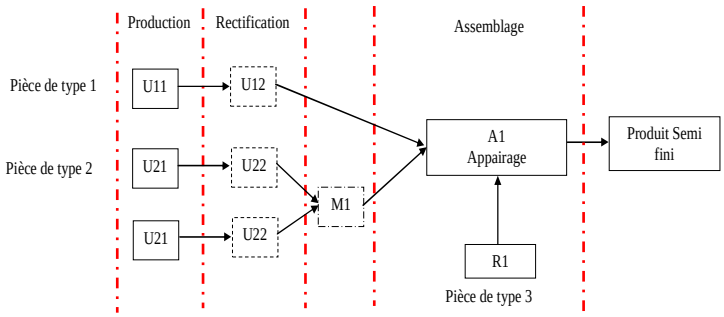


figure 39 : Schématique de production et d'assemblage du produit semi-fini

Cette chaîne d'assemblage est constituée de trois unités de production (U11, et deux U22) dont une dédiée aux pièces de type 1 (I_{max}=5.75) et les deux autres à la pièce de type 2. (I_{max}=8.17). Les pièces produites sont ensuite rectifiées puis préparées pour le module d'appairage pour les pièces de type 1 tandis que les productions des pièces de type 2 sont

mélangées avant de rejoindre le module d'appairage. Le module d'appairage mesure et assemble un produit semi-fini composé d'un composant de type 1, un composant de type 2, et un troisième composant qui est réceptionné (type 3).

L'indicateur de sortie correspond au pourcentage de non-montable de sous-ensemble. En effet, lors de l'entrée dans l'unité d'appairage, les pièces de type 1 et 2 sont mesurées et la pièce 3 déduite de ces mesures. Cependant pour certains assemblages, les configurations des pièces de type 1 et 2 ne permettent pas de trouver la pièce 3 correspondante. Cette configuration correspond à une configuration non-montable. L'exigence qualité spécifie que ce taux de non-montable ne doit pas excéder les 2.5 % de la production réalisée par mois.

8.2.2 Inertie et Conformité

Dans le cadre de l'étude, il a été souhaité par l'industriel de réaliser une comparaison entre leur carte de suivi actuelle de type Shewhart et la carte de contrôle inertielle sans dérive au risque α.

Le niveau de capabilité des unités de production permet d'utiliser les cartes de contrôle inertielles avec dérive β= 10 % pour une taille d'échantillon n=3. Cependant, la règle de pilotage imposée a été de centrer le processus dès la sortie de la première limite, ce qui correspond à considérer la carte de contrôle inertielle sans dérive (limite au risque α).

Sur une journée de production, les résultats de 11 heures obtenus pour la première unité de production U1 sont illustrés sur la figure suivante. (figure 40)

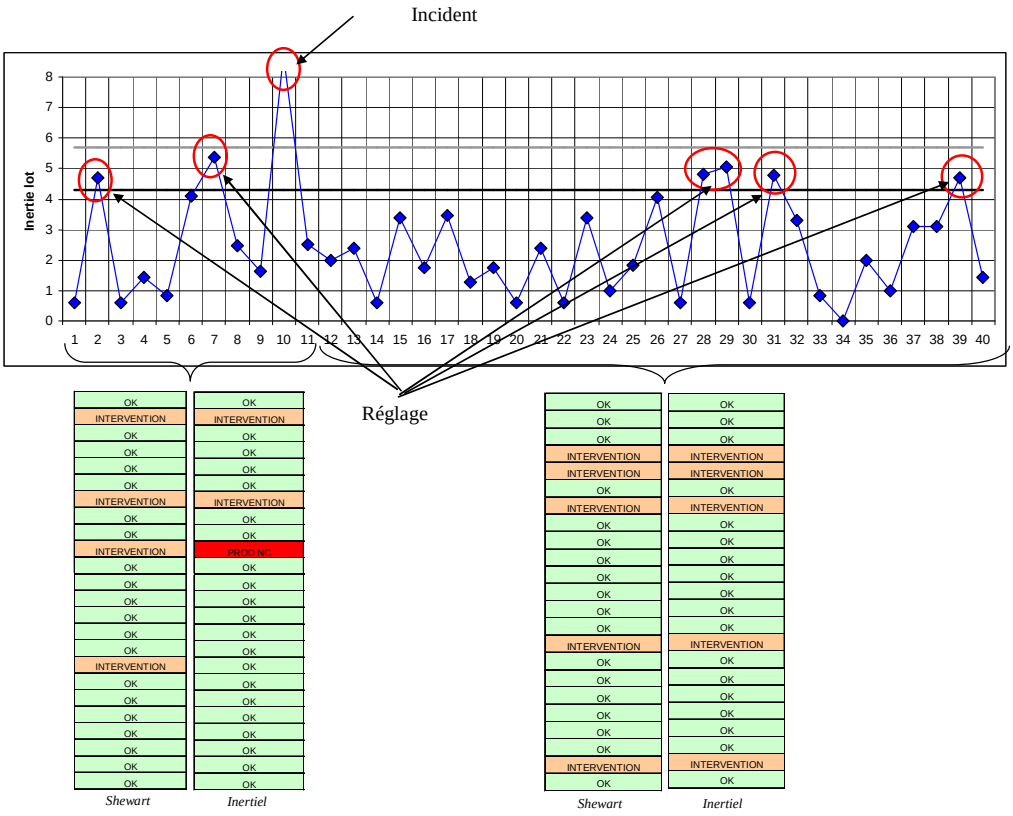


figure 40 : Suivi d'une production de 10 heures des U1

La figure 40 met en évidence que le pilotage suivant la zone α de la carte inertielle avec dérive et celui suivant la carte de contrôle de type Shewhart donnent des résultats similaires. Pour 11 heures de production 9 interventions ont été réalisées avec la carte de type Shewhart et 8 pour la carte de contrôle inertielle. Notons qu'en considérant la limite β comme limite de réglage, le nombre d'interventions serait de 1 pour 11 heures de production.

Le lot produit a une inertie qui est égale à 2.8 pour une inertie maximale de 5.75. En conséquence, l'indice *ICi* est alors de 2.00 pour l'U1. Ce qui est à notre sens très bon.

Concernant l'inertie des pièces de type 2(figure 27), elle est égale à 4 pour une inertie max de 8. L'indice *ICi* est alors de 2.00. De même concernant l'unité de production 2, la figure 41 présente quatre caractéristiques hors limite α de la carte de contrôle inertielle avec dérive. Ces mêmes points ont été détectés avec la carte de contrôle de type Shewhart.

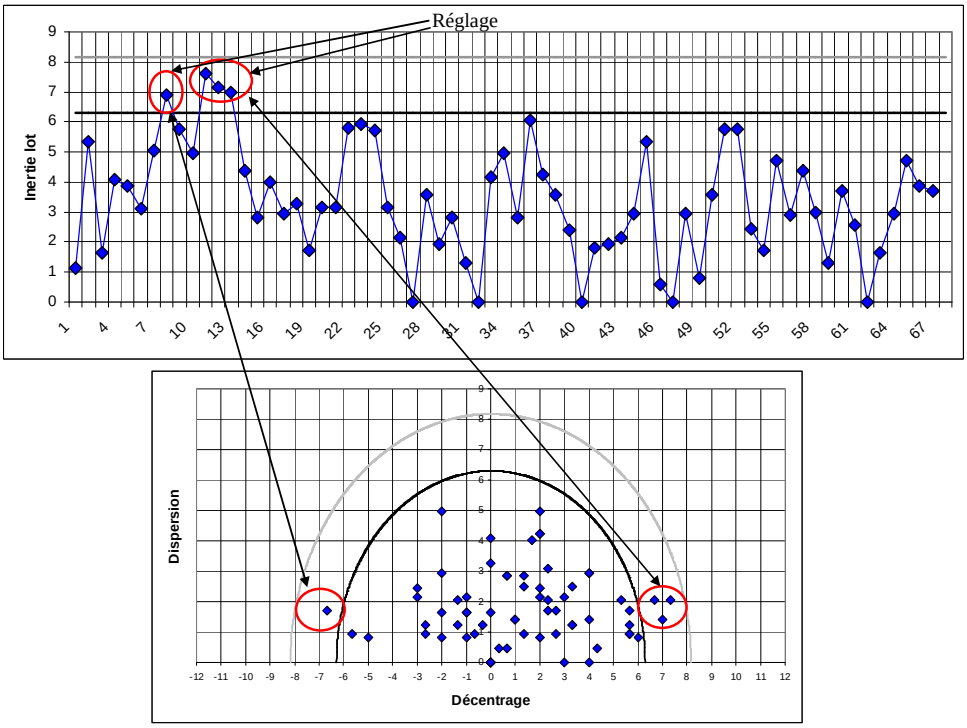


figure 41 : Suivi d'une production de 10 heures des U2

Les résultats de l'assemblage des productions U1 et U2 ont permis de réaliser un pourcentage de non-montable de l'ordre de 0.05 % ce qui est en dessous des exigences spécifiées par la qualité (2.5 %).

Cependant après cette première expérimentation une période de multiples dérives du procédé a été enregistrée par l'entreprise concernant la fabrication de pièce de type U2. Le suivi de 10 heures de production est alors présenté sur la figure 42. Nous observons que la carte de contrôle inertielle avec dérive détecte les différentes dérives du procédé qui sont de deux types le décentrage et la dérive d'écart type. Ces différentes dérives présentent une inertie supérieure à l'inertie max. L'inertie du lot produit est alors 8,3 au lieu de 8. Donc, l'indicateur *ICi* est inférieur à 1, le niveau de capabilité étant bas, le taux de non-montable a augmenté, passant de 0.05 % à 2.88 % soit au-dessus de l'exigence qualité spécifiée.

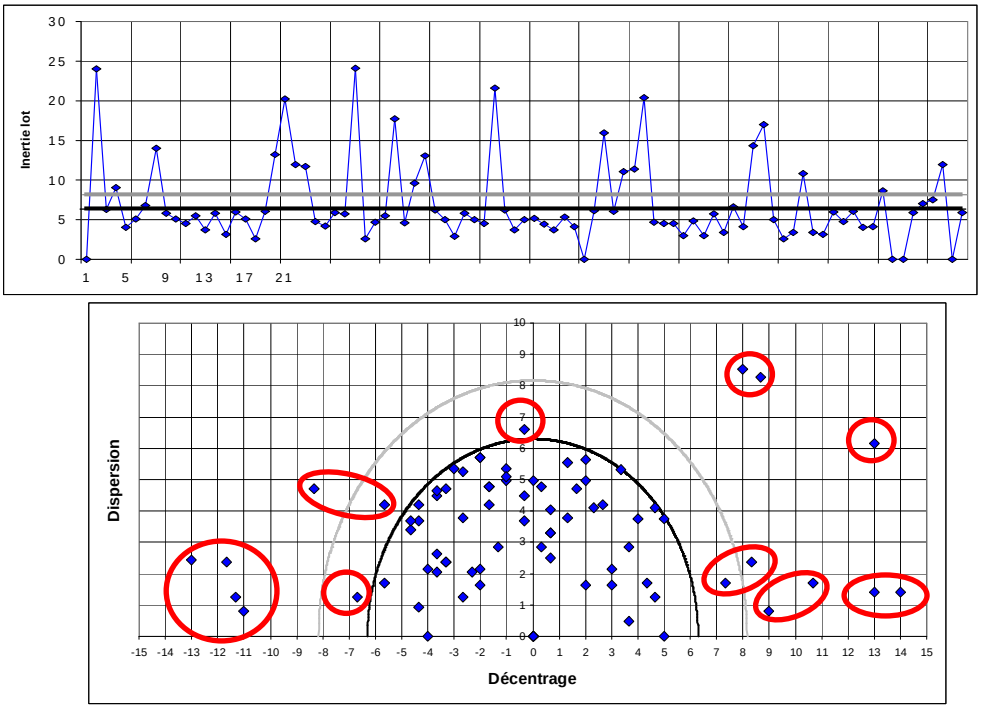


figure 42: Suivi d'une production de 10 heures des U2

Cet exemple a mis en évidence le besoin de respecter l'inertie du lot *ICi* défini par le concepteur ou le client. Si celui-ci n'est pas respecté par la production alors, il y a un risque important de produire des assemblages non-conformes à l'exigence spécifiée. Le tolérancement inertiel n'est pas une approche miracle. Le non-respect des inerties se répercute indubitablement sur le taux de non-montable. C'est le prix à payer pour une cohérence dans le modèle de tolérancement (au contraire du pire des cas) qui va être avant tout un changement de culture.

Nous regrettons que l'entreprise n'ait pas approfondi ce cas d'étude auquel nous avons vu un gain économique substantiel.

9 Conclusions

L'inertie présente l'avantage d'être un langage universel et cohérent du bureau d'études jusqu'à l'outil de production. L'objectif de ce chapitre a été de s'intéresser à l'outil permettant le respect de l'inertie maximale en production, cet outil est la carte de contrôle inertielle avec dérive.

La carte de contrôle inertielle avec dérive (CCID) a été introduite par Pillet. Elle a la capacité d'accepter un décentrage du procédé, dont la valeur est proportionnelle au gain de la variabilité intrinsèque (*IC*) du procédé. Elle permet donc de respecter l'inertie spécifiée sur le plan en permettant au procédé de se décentrer. Ce décentrage autorisé est sans risque pour la fonctionnalité de la caractéristique. Cette carte de contrôle présente donc un apport intéressant aux cartes de contrôles traditionnelles déjà existantes.

De même, les conditions minimales d'utilisations de la CCID ont été recherchées. Ce travail nous a permis de synthétiser dans un tableau les capabilités minimales à respecter en fonction de la taille d'échantillon et du risque lié à la détection d'un décentrage. De même, nous avons recherché à définir de façon analytique la courbe d'efficacité de la CCID afin qu'il soit possible de la comparer dans des travaux à venir à des cartes de contrôle de même type. Nous nous sommes intéressés aux influences des risques et des tailles d'échantillons sur les limites de contrôle et d'efficacité de détection. Cela, nous a permis de conclure que l'augmentation de la taille d'échantillon permettait d'accroître la limite de contrôle et l'efficacité de détection. Tandis qu'une augmentation du risque influe sur l'augmentation de la limite de contrôle seulement.

Des échanges industriels ont permis de mettre en évidence le besoin de décliner la CCID en plusieurs variantes que nous avons détaillées. Ensuite à partir de l'ensemble des cartes de contrôles inertielles, nous avons proposé de réaliser des simulations qui ont permis de nous renseigner sur l'impact qualité du pilotage avec ces cartes de contrôle sur une production simulée de 100 000 pièces. En outre, plusieurs points intéressants sont identifiés :

- la faiblesse de la carte de contrôle inertielle sans dérive pour une faible capabilité ($Cp=IC<2$) et une taille d'échantillon ($n<=3$),
- la stabilité de la production livrée (*ICi ;Ppi*) quels que soient le risque, la taille d'échantillon et la capabilité du procédé choisie. Ce dernier point ne concerne que les cartes de contrôles inertielles avec dérives.

Notre réflexion sur la mise en place des cartes de contrôles inertielles nous amène à présenter un ensemble de recommandations. Ces recommandations insistent sur le contexte de choix et de mise en application de la carte de contrôle. Ces recommandations enrichies de l'approche DMAIC et du pilotage avec les cartes de contrôle inertielles sont regroupés dans une seule notion que nous nommons « Maîtrise Inertielle des Procédés ».

Pour clore ce chapitre, deux exemples industriels ont été présentés. Le premier exemple a été réalisé suivant la maîtrise inertielle des procédés, l'inertie a été définie par le bureau d'études et utilisée en production après avoir appliquer les recommandations introduites dans ce chapitre. Un retour d'expérience a permis de montrer l'apport du tolérancement inertiel et celui du pilotage avec les cartes de contrôles inertielles avec dérive. Nous pouvons citer parmi ces améliorations l'élimination de toutes anomalies dans l'assemblage, le gain en productivité, la stabilité du niveau de qualité livré pour chaque lot de composants….Le second exemple a permis de s'intéresser à l'inertie et à la conformité. L'étude réalisée a pu mettre en évidence le lien du respect de l'inertie en production et son impact sur la condition fonctionnelle. L'intégration des outils inertiels du bureau d'études jusqu'à la production en passant par le service qualité est appelée « Maîtrise Inertielle Globale ». L'objectif de cette approche est de permettre d'apporter une réelle maîtrise des aspects statistiques donc inertielle dans toute l'entreprise.

Nous pouvons envisager trois perspectives à ce chapitre:

- Le déploiement de la carte de contrôle inertielle dans le cadre des petites séries,
- Le déploiement de la carte de contrôle inertielle dans le cadre du pilotage de surface gauche, et
- Le déploiement de la carte de contrôle inertielle dans le cadre d'un processus multidimensionnel.

10 Bibliographie

[64] NF XP E 04-008, [2009], GPS – Méthode de tolérancement, expression et déclaration de la conformité, AFNOR.

[65] Ford, [1991], Quality Procedures SPC Q1, Ford Motor Company, Dearborn, MI

[66] ISO 3534-2, [2006], Statistics -- Vocabulary and symbols -- Part 2: Applied statistics, ISO.

[67] Shewhart, W. A. [1926]. Quality control charts. Bell System Technical Journal, 5,

593-602.

[68] Shewhart, W.A., [1931], Economic Control of Quality of Manufactured Products. New York: Van No strand, London: MacMillan, 1931, 501 p.

[69] Shewhart W. A. and Deming W. Edwards, Statistical method from the viewpoint of quality control, Mineola, New York USA: Dover Publications, Inc.; 1939, 1986

[70] Repco, J. [1986]. Process capability plot. 30-th EOQC Conference, Stockholm, 373-381.

[71] Van Nuland, Y. , [1992-93],. ISO 9002 and the circle technique. Quality Engineering, 5(2),

269-291.

[72] Minte-Te Chao and Smiley W.Cheng. [2008]., On 2-D Control Charts, International journal of quality technology and quantitative management, 5, 3, 243-261, 2008

[73] Pillet M, Adragna P.A, Ozouf V., Guerra A.S.[2007]. Pilotage par carte de contrôle dans le cas du tolérancement inertiel, Qualita 2007, TANGER – Maroc

[74] Automotive Industry Action Group, American Society for Quality control, [1995], Statistical process control (SPC) : reference manual, Cincinnati (Oh.).AIAG

[75] Satterthwaite, F.E, [1985], Pre-Control. Rath and Strong Report 54-1, Rath and Strong, Winchester, Mass

[76] Pillet, M, [2005], Appliquer la maîtrise statistique des processus MSP/SPC, Editions d'Organisation, Groupe Eyrolles, ISBN : 2-7081-3349-7

[77] Zhang Y, Musheng Y, and Yanxin Z. [2006]. Concurrent Design for Process Quality, Statistical tolerance and SPC, Communications in Statistics Theory and Methods, 35,10, 1869-1882.

[78] Wolfowitz, J [1943], On a theory of runs with some applications to quality control, Annals of mathematical Statistics, 14, 280-288

[79] Mosteller, F [1941], Note on an Application of runs to quality control charts, Annals of mathematical Statistics, 12, 228-232.

[80] Montgomery D. C, [1996], Introduction to Statistical Quality Control, 3rd edition, John Wiley & Sons, New York.

[81] Juran J.M and al, [1988], Juran's quality handbook, New York: McGraw-Hill

[82] Brook, D. et Evans, D.A., [1972]. An approach to the probability distribution of CUSUM run legth, Biometrika 59, 539-449

[83] Schwagger, S J [1983], Run probabilities in Sequences of Markov Dependent trials, Journal of the american statistical association, 78, 168-175.

[84] Scheffé, H., 1959, The analysis of variance, John Wiley & Sons, New York

[85] Automotive Industry Action Group (AIAG),[2002], Measurement Systems Analysis Reference Manual, 3rd edition. Chrysler, Ford, General Motors Supplier Quality Requirements Task Force.

[86] CNOMO, [1991], Moyens de production (Agrément Capabilité) des moyens de mesure - Moyens de contrôle spécifique , CNOMO E.41.36.110.N

[87] ISO/IEC Guide 98, [1995], Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM), ISO

[88] Pyzdek Thomas,[2006], The Six Sigma Handbook: The Complete Guide for Greenbelts, Blackbelts, and Managers at All Levels, Revised and Expanded Edition (Hardcover).

[89] Lupan R, Bacivarof I C, Kobi A and Robledo C,[2005], A Relationship between Six sigma and ISO 9000:2000, Quality Engineering, Vol 17-4, 2005.

[90 Kobi A, Tiplica T, Lupan R, Robledo C, [2002], Six Sigma: principe et methodologies. Plenary Sessions, 8th International conferenceQuality, Reliability, Maintenability, CCF2002, SINAIA, September 18-20.

[91] Chao M.T., Cheng S. W. [1996]. Semicircle Control Chart for Variables Data, - Quality Engineering, 8, 3, 441-446

[92] Cheng, S.W and Li, G-Y. [1993], A single variables control chart, Technical Report, University of Manitoba, Winnipeg, Canada.

[93] Cheng, S.W and Spiring, F. A. [1998], Alternative variable control chart: The univariate and multivariate cases,. Statistica Sinica, 8, 1, 273-287.

[94] Gayri SK and Chakraborty Shankar,[2006], “Feature based Recognition of control Chart Patterns : A Generalized Approach”, Computer & Industrial engineering, Vol., N0 51, pp 726-742.

[95] Grant E and Leavenworth R, [1996], Statistical Quality control, McGraw-Hill Series in Industrial Engineering and Management.

[96] Western Electric.[1956].Statistical quality control handbook. Indianapolis : Western Electric Corporation.

[97] Davis R.B. and al. [1988]. Performance of the control charts trend rule under linear shift, Journal of quality technology, 20, 260-262

[98] Divoky J.J. and all. [1995]. Detecting process drift with combinations of trend and zonal supplementary runs rules, International Journal of quality and reliability Management, 12(2),60-71.

[99] Nelson. L.S. [1984]. The Shewhart control charts-test for special causes, Journal of Quality Technology, 16(4), 237-239.

[100] Nelson. L.S. [1985]. Interpreting Shewhart control charts. , Journal of quality technology, 17(2), 114-116.

[101] Khoo, Michael B. C.; Quah, S. H.; Low, H. C, [2005], Powerful Rules for the Hotelling'sχ2 Control Chart, Quality Engineering, 2005, Vol. 17 Issue 1, p139-149, 11p

[102] Koutras M.V, Bersimis S. and Antzoulakos D.L, [2006], Improving the performance of the Chi square control chart via Runs rules, Methodology and Computing in Applied Probability, Volume 8, Number 3 / septembre 2006, 409-426p

[103] Pillet. M, [2003], Six Sigma : Comment l'appliquer, Editions d'Organisation, Groupe Eyrolles, ISBN : 2-7081-3349-7

[104] Duret. D, Pillet. M, Sergent A. Denimal. D, [2009], Validation of a reception or production control process by the inertial indicator IG, Computer Aided Tolerancing, Annecy 2009.

[105] Chirico A.J, Control Charting : Process Improvement over Theoretical Elegance,, Quality Engineering ,8 :1 ,1-12,1995.

[106] Adragna P-A, Pillet M, Samper S. Formosa F., « Inertial tolerancing guarantying a Cpk indice on the final characteristic in an assembly production », 6th International conference on integrated design and manufacturing in mechanical engineering, IDMME 2006.

[107] Denimal D, Pillet M, Sergent A, « Inertial Control Chart « Industrial Application and feedback », IDMME-Virtual Concept 2008, Pékin, Chine

11 Extra Bibliographie

[108] Mackertich, Neal, [1990], Precontrol Versus Control Charting: A Critical Comparison, Quality Engineering, Vol. 2, No. 3, January 1990, pp. 253-260

[109] Lorenzen, Thomas J.; Vance, Lonnie C, [1986], Economic Comparisons of Control Charts, 40th Annual Quality Congress, May 1986, Anaheim, CA, Vol. 40, No. 0, May 1986, pp. 255-263

[110] Roberts, S.W., [1966], A Comparison of Some Control Chart Procedures, Technometrics, Vol. 8, No. 3, August 1966, pp. 411-430

[111] Bourke PD, Performance Comparisons for the Synthetic Control Chart for Detecting Increases in Fraction Nonconforming, Journal of Quality Technology, Vol. 40, No. 4, October 2008, pp. 461-475

[112] Boyles, R-A, [1991], The Taguchi capability index –Journal of quality technology - Vol 23, n°1, p17-26.

[113] Khoo Michael B.C., [2005], Two modified Semicircle Control Charts for Detecting Process Improvement, Quality Engineering, Vol.17, 453-458, 2005.

[114] Wald, A and Wolfowitz, J [1940], On a Test Whether Two population are from the same population, Annals of mathematical Statistics, 11, 147-152

.[115] FU, J.C. et Koutras M.V., [1994], Distribution Theroy of runs : A markov Approach, Journal of the American Statistical Association, September 1994, Vol 89, No 427.

[116] Woodall, W.. [1983]. The distribution of the run length of on sided CUSUM procedures for continuous random variables, Technometrics, 25, 295-301.

[117] Champ, Charles W. et Rigdon, Steven E,.[1991]. A comparison of the markov chain and the integral equation approaches for evaluating the run length distribution of quality control chart, Technometrics, 25, 295-301.

12 Annexes

12.1 Coefficient C(α,n) extrait de l'article de Minte Chao

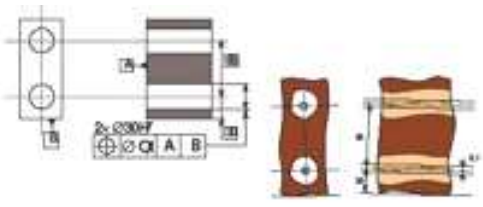
ν	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$
3	2.51	3.05	3.55
4	2.15	2.49	2.95
5	1.94	2.21	2.57
6	1.79	2.02	2.32
7	1.68	1.88	2.14
8	1.60	1.77	2.01
9	1.54	1.69	1.90
10	1.49	1.63	1.81
11	1.45	1.57	1.74
12	1.41	1.53	1.68
13	1.38	1.48	1.63
14	1.35	1.45	1.58
15	1.33	1.42	1.55
16	1.31	1.40	1.51
17	1.29	1.37	1.48
18	1.27	1.35	1.46
19	1.26	1.33	1.43
20	1.25	1.32	1.41

figure 43 :Coefficient C(α,n) ; Extrait du tableau de l'article de Minte Chao [72]

Chapitre III

Inertie 3D

Evaluation des définitions des Inerties 3D



1 Introduction

L'inertie d'une caractéristique élémentaire a souvent été présentée comme une variable aléatoire unidimensionnelle. Ces caractéristiques contribuent à la réalisation d'une spécification fonctionnelle dont les variables sont par nature (ou par hypothèse) de dimension 1 : c'est le cas dans une chaîne de cotes unidirectionnelles, pour les variables aléatoires telles que l'intensité de courant, la tension électrique, la pression…

Pour des assemblages, les caractéristiques élémentaires sont souvent liées à des surfaces et donc par nature, tridimensionnelles. Une question se pose alors : « comment définir l'inertie dans le cas tridimensionnel ? »

La littérature scientifique propose plusieurs définitions de l'inertie 3D pour les surfaces tridimensionnelles :

a) L'inertie standardisée (IS),

b) L'inertie Ajustée (IA),

c) L'inertie Normalisée (IN).

Actuellement, la valeur de l'inertie pour une surface donnée est dépendante du choix de la formulation de l'inertie 3D. Les questions, que nous nous posons, sont donc les suivantes :

- « Comment évaluer la pertinence d'une définition ?
- « Existe-t-il une relation entre chaque définition de l'inertie 3D ? Et quelle est la meilleure définition de l'inertie 3D ? »
- « Quelle définition de l'inertie 3D a la combinatoire la plus corrélée aux écarts résultant d'un assemblage ? »

Ce chapitre présente dans une première partie les différentes définitions de l'inertie 3D. Dans la seconde partie, nous proposons d'évaluer la pertinence des définitions de l'inertie 3D par une simulation de défauts aléatoires de surface. Ce travail, nous permettra de mettre en évidence les relations et la convergence statistiques de chaque définition. Dans une troisième partie, une simulation de lots de composants assemblés est réalisée afin de

souligner l'existence ou non d'une corrélation entre la combinatoire des lots d'inertie 3D pour chaque définition, et le résultat de l'assemblage de ces lots.

2 Rappel des inerties 3D

Dans la partie bibliographie, trois définitions de l'inertie 3D ont été présentées. Nous les rappelons brièvement.

2.1 Inertie 3D Standardisée (IS)

Elle est introduite par Pillet (cf. Chapitre I). Son objectif est de définir la qualité d'une surface en incluant les défauts de forme et de position.

La formulation (70) correspond au calcul de l'IS pour une surface définie par n points :

$$I_i = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij}-T\right)^2} = \sqrt{\sigma_i^2 + \left(\overline{X_i}-T\right)^2} \qquad (70)$$

Soit pour un lot de k surfaces :

$$I_{Lot}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} I_i^2 \qquad (71)$$

De même, l'inertie d'un lot de surfaces peut s'exprimer à partir de l'inertie de chaque point :

$$I_{Lot}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=k}\left(X_{ij}-T\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_j^2 \qquad (72)$$

Dans ces expressions, nous définissons :

X_{ij} : j ème mesures de la pièce i

σ_i : Écart type de la mesure de la pièce i

T : Cible

k : Nombre de pièces

n : Nombre de mesures par pièce

I_i Inertie calculée à partir des n points de la pièce i

I : Inertie globale sur l'ensemble des pièces (kn)

I_{Max} : Inertie maximale admissible.

2.2Inertie 3D Ajustée (IA)

Elle est introduite par Adragna (cf. Chapitre I). Elle définit l'inertie d'une surface par l'écart non signé le plus important par rapport à l'élément de référence. L'inertie d'un lot se détermine en considérant l'inertie des points maximums des surfaces mesurées :

$$I_{Lot} = Max(I_j) \tag{73}$$

Cette définition de l'inertie a fait l'objet d'une extension de travaux d'analyse et de synthèse des inerties dans un contexte de tolérancement modal.[120]

2.3 Inertie 3D Normalisée (IN)

Cette approche est très semblable aux définitions des normes GPS actuelles (cf. Chapitre I) qui considèrent k fois l'écart maximal de la surface. L'inertie 3D normalisée propose de définir l'inertie d'une surface comme le plus grand écart mesuré non signé :

$$I_i = Max(|X_{ij} - T|) = Max(|\delta_j|) \tag{74}$$

Où δ_j est l'écart maximal mesuré sur la pièce i.

L'inertie d'un lot se définit par l'inertie des plus grands écarts mesurés non signés.

$$I_{Lot} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(I_i)^2} \tag{75}$$

2.4 Comparaison des inerties 3D

La définition de l'inertie ajustée et normalisée est identique dans le cas d'une pièce. Cependant, il n'en est pas de même dans le cas d'un lot. En effet, l'inertie normalisée considère l'inertie des écarts maximums de chaque pièce. Au contraire de l'inertie ajustée qui considère l'inertie des points maximale. Nous proposons de détailler le calcul de chaque définition à partir d'un exemple simple, portant sur la localisation d'un plan. Le plan localisé

(figure 44) est défini par un ensemble de 20 points. Nous en proposons une représentation en deux dimensions, suffisante pour la compréhension des définitions de l'inertie 3D.

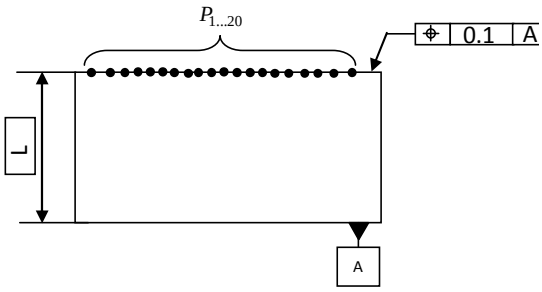


figure 44 : Illustration de la définition des Inerties 3D dans le cas d'une pièce.

L'ensemble des points $P_{1...\ 20}$ définit le défaut de la surface plane. Le tableau suivant présente les écarts de chaque point mesuré de 5 pièces. À partir de ces valeurs, nous allons calculer l'inertie 3D suivant chaque définition.

L'inertie 3D standardisée peut être calculée de deux façons ; la première consiste à calculer l'inertie de chaque surface et à déterminer l'inertie du lot. Ainsi pour l'inertie de la pièce 1, nous obtenons 0.058 et l'inertie du lot est de 0.062. La seconde consiste à calculer l'inertie de chaque point et l'inertie du lot à partir de l'ensemble des inerties des points. La valeur de l'inertie du lot est identique (0.062) à la formulation précédente.

Pour l'inertie ajustée, il est nécessaire de calculer l'inertie de chaque point j pour le lot défini. Pour le point 1, l'inertie est de 0.075. L'inertie ajustée du lot correspond à l'inertie maximale des 20 points, nous obtenons alors la valeur de 0.079. (Point 18)

Le calcul de l'inertie normalisée correspond à la recherche de l'écart maximum pour chaque pièce i, par exemple pour la pièce 1 l'écart maximum est de 0.1 correspondant au point 8. L'inertie normalisée du lot correspond à l'inertie des écarts maximums de chaque surface. Pour ce lot, l'inertie normalisée du lot est égale à 0.97.

		Lot de 5 composants					
		Pièce 1	Pièce 2	Pièce 3	Pièce 4	Pièce 5	Inerties des points
Points mesurés	1	0.009	**0.099**	0.079	0.087	0.055	0.075
	2	0.046	0.080	0.087	0.046	**0.097**	0.075
	3	0.011	0.089	0.041	0.067	0.051	0.060
	4	0.004	0.004	0.013	0.012	0.049	0.025
	5	0.007	0.006	0.029	0.072	0.060	0.046
	6	0.078	0.082	0.095	0.052	0.051	0.074
	7	0.077	0.082	0.004	0.005	0.081	0.065
	8	**0.100**	0.071	0.071	0.091	0.036	0.078
	9	0.083	0.065	**0.096**	0.012	0.026	0.067
	10	0.027	0.004	0.091	0.026	0.085	0.061
	11	0.020	0.033	0.004	0.021	0.064	0.036
	12	0.038	0.041	0.086	0.082	0.023	0.061
	13	0.086	0.032	0.062	0.023	0.004	0.053
	14	0.034	0.089	0.061	0.079	0.050	0.066
	15	0.069	0.036	0.075	0.030	0.085	0.064
	16	0.029	0.084	0.092	0.041	0.004	0.062
	17	0.099	0.061	0.094	0.028	0.062	0.075
	18	0.082	0.086	0.010	**0.095**	0.083	**0.079**
	19	0.028	0.084	0.089	0.025	0.004	0.060
	20	0.001	0.061	0.072	0.004	0.008	0.045
Inertie Ajustée							0.079
Inertie des pièces		0.058	0.067	0.071	0.054	0.057	0.062
Inertie Standardisée		⇒					
δ max		0.100	0.099	0.096	0.095	**0.097**	0.097
Inertie Normalisée		⇒					

Tableau 35 : Exemple de calcul des inerties 3D pour un lot de 5 composants

2.5Spécification de l'inertie 3D

Sur l'exemple précédent, nous avons montré que les définitions de l'inertie 3D ne convergent pas vers une valeur pour un même lot. Nous proposons dans cette partie une illustration graphique des définitions de l'inertie 3D et introduisons la problématique de la spécification de l'inertie 3D.

En effet, l'inertie 3D standardisée d'un lot correspond à une moyenne des écarts quadratiques de l'ensemble des surfaces. Au final, cette définition évalue le défaut moyen

(par une approche quadratique) du lot de surfaces. La figure 45 est une illustration de la définition de l'inertie 3D standardisée d'un lot. Les droites en gris représentent le profil d'un lot de cinq surfaces mesurées en 20 points, la surface cible est zéro. Pour chaque point mesuré, l'inertie des points a été calculée et représentée par la droite pointillée, c'est le profil moyen du lot de surface. L'inertie standardisée du lot correspond à la racine de la moyenne des écarts absolus, soit 0,044.

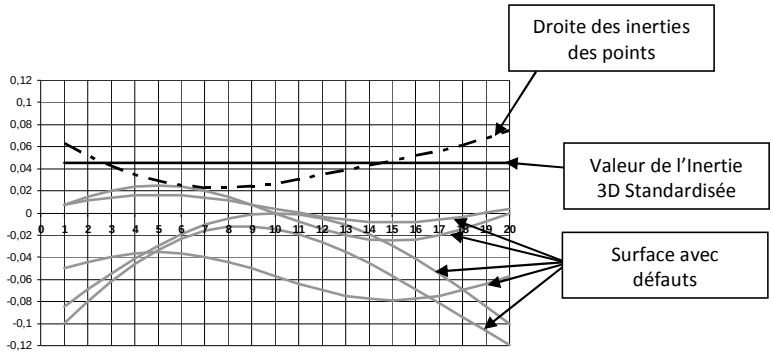


figure 45 : Illustration de l'inertie 3D standardisée

La définition de l'inertie ajustée correspond à l'inertie maximale des points du lot mesuré. Donc, elle informe sur l'inertie du point mesuré ayant la variabilité la plus importante. Cette définition apporte une information sur un maximum localisé des défauts. La figure 46 est l'exemple introduit à la figure 45 et adapté à l'inertie 3D ajustée. En pointillé, nous retrouvons la droite des inerties des points et en continu la valeur de l'inertie 3D Ajustée. L'inertie 3D la plus importante correspond au point 20 où IA=0,074.

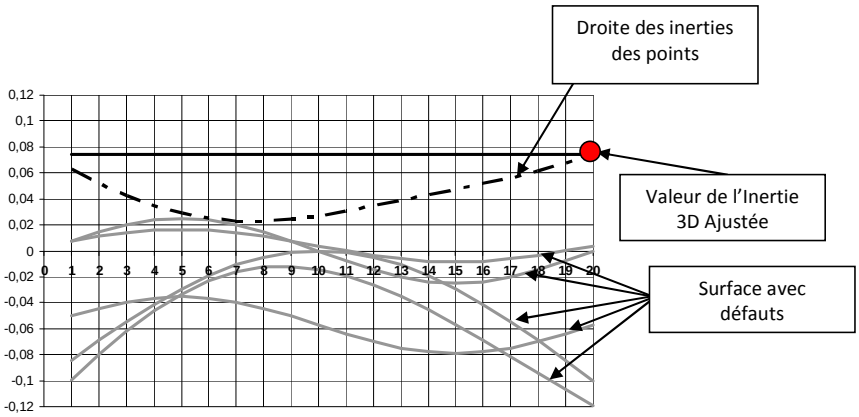


figure 46 : Illustration de l'inertie 3D Ajustée

La dernière définition considère l'inertie des écarts maximums. Sa valeur représente l'inertie de la surface construite à partie des écarts maximums en valeurs absolues, elle correspond entre autres à la surface la plus imparfaite pouvant être contenue dans le lot. La figure 47 illustre cette définition. À titre pédagogique, l'inertie 3D normalisée a été signée afin de mettre en évidence que son calcul représente la moyenne des écarts quadratique du profil de la surface la plus désavantageuse du lot de cinq pièces. L'inertie 3D normalisée est égale à 0,076.

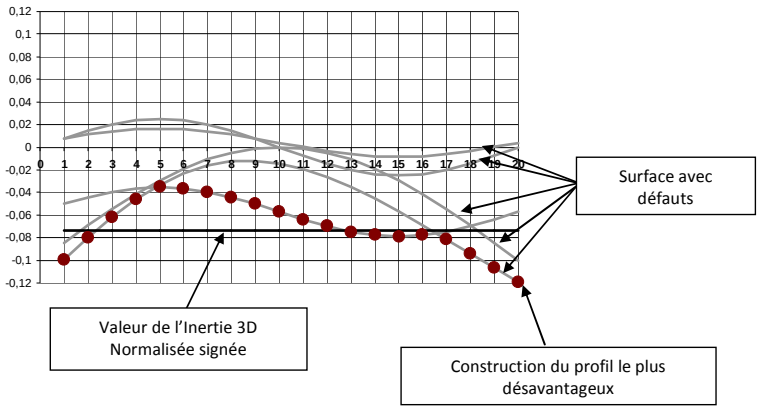


figure 47 : Illustration de l'inertie 3D Normalisée

Ces trois illustrations mettent de nouveau en évidence la différence des trois définitions. Chaque définition semble viable pour exprimer les défauts d'un lot de surfaces, seule l'expression du défaut du lot diffère.

Notre première réflexion est de penser qu'un outil de synthèse des tolérances prenant en compte les défauts de formes permettrait de mettre en évidence l'utilisation de l'une ou de l'autre des définitions de l'inertie 3D. Dans ce contexte, il est primordial pour le concepteur d'indiquer la définition de l'inertie 3D choisie pour la synthèse, afin que la conformité soit garantie. Dans le cas où l'inertie 3D choisie n'est pas indiquée sur le plan, l'utilisation des différentes définitions, dans un contexte de production ou de vérification de la conformité, peut aller à l'encontre comme à l'avantage de la fonctionnalité du produit. Ainsi, si l'exigence a été déterminée suivant la définition de l'inertie 3D standardisée. L'utilisation des définitions de l'inertie Ajustée et Normalisée apporterait une surqualité sur la fonctionnalité, car elles sont plus restrictives que l'inertie 3D standardisée. Dans le cas contraire, si l'exigence fonctionnelle est définie par la définition l'Inertie ajustée ou normalisée. L'utilisation de l'inertie 3D standardisée dans un contexte de contrôle ou de production

conduirait à une non-conformité sur la fonctionnalité de la caractéristique. (cf. figure 45, figure 46, figure 47)

De nos jours, quelques travaux proposent une approche de synthèse ou d'analyse des tolérances dans un contexte de défauts de forme. Nous pouvons citer ceux de Persépoli [127] Sellem [128], Shiu [129], Merkley [130] sur les problématiques d'accostage et de mécanismes flexibles, et de Favrelière [131], Adragna [120] Gupta[132], …[133][134][135] concernant les problématiques d'assemblages de pièces mécaniques avec défauts de forme dans un contexte d'analyse.

En conclusion, la définition de l'inertie en fonction d'un outil de synthèse des tolérances intégrant les défauts de forme n'est pas accessible à notre connaissance. Donc, le choix d'une définition ne peut être réalisé par cette voie de recherche pour l'instant.

En contrepartie, nous nous concentrerons à la recherche d'une cohérence entre chaque définition de l'inertie 3D et nous intéresserons à la convergence statistique de chaque définition. De même, nous essayerons de mettre en évidence la relation entre une définition de l'inertie 3D et l'exigence fonctionnelle résultante d'un assemblage.

3 Cohérence entre les définitions de l'inertie 3D

L'exemple précédent (2.4) montre que le choix de la définition de l'inertie conduit à des valeurs d'inerties très différentes. Ces différences posent le problème de la cohérence entre chacune de ces définitions. Dans cette partie, nous chercherons à comparer les différentes définitions des inerties 3D dans des situations intégrantes des variations géométriques et des variations de formes. Les questions auxquelles nous répondrons sont les suivantes :

- "Quelle est la convergence de la loi de distribution des inerties suivant les trois définitions et dans différents cas de figure avec ou sans prise en compte de défauts de forme ?" La réponse à cette question permettrait d'orienter les travaux futurs vers les développements d'outils statistiques comme les cartes de contrôle ou le contrôle réception intégrant la convergence statistique spécifique à chaque définition.

- « Y a-t-il une corrélation entre les résultats de l'inertie 3D calculée selon les trois définitions ? » et « Cette corrélation est-elle dépendante de la prise en compte des défauts de forme ou des défauts géométriques ? » L'objectif de ces deux questions est de mettre en évidence la robustesse des liens entre chaque définition de l'inertie 3D. Ainsi, on peut penser qu'un outil de synthèse qui exprimerait l'inertie 3D pour une définition sur les composants de l'assemblage soit traduit dans une autre définition. Exemple de l'inertie 3D standardisée qui pourrait ne pas convenir au fabricant habitué à utiliser une autre définition de l'inertie 3D, comme l'inertie 3D normalisée.

3.1 Inertie 3D ; Cadre des petits déplacements

Cette partie introduit une étude des définitions de l'inertie 3D dans un contexte de petits déplacements, sans une prise en compte des défauts de forme.

Nous proposons de réaliser un ensemble de simulations de défauts rigides d'un plan localisé. Par conséquent, le défaut peut être soit un défaut d'orientation suivant deux axes de rotation soit un défaut de translation suivant le troisième axe. Traditionnellement, ces défauts sont regroupés dans un torseur écart. Afin de pouvoir calculer les inerties 3D, nous proposons de définir les défauts rigides par le nombre de points minimums nécessaires au calcul du torseur écart d'un plan, soient trois points [121].

3.1.1 Cas de l'étude

Cette étude recherche à identifier la cohérence et la convergence statistique entre chaque définition de l'inertie 3D. Pour souligner ces relations, nous proposons de définir l'inertie 3D d'un lot de 25 surfaces dont chaque surface est caractérisée par un défaut simulé sur trois points. La mise en évidence des liens statistiques est réalisée par le calcul de l'inertie 3D de 40 000 lots dont chaque défaut de surface est simulé dans un contexte que nous définissons avant chaque synthèse. Le choix de la taille de lot et du nombre de répétitions est un compromis entre la dimension de la simulation et sa précision. En conséquence, les valeurs indiquées dans les tableaux correspondent à des valeurs « stables». Si la simulation est refaite, elle donnera les mêmes valeurs tronquées présentées ci-dessous (sous l'hypothèse de matériel et logiciel équivalent). Pour une plus grande précision dans les

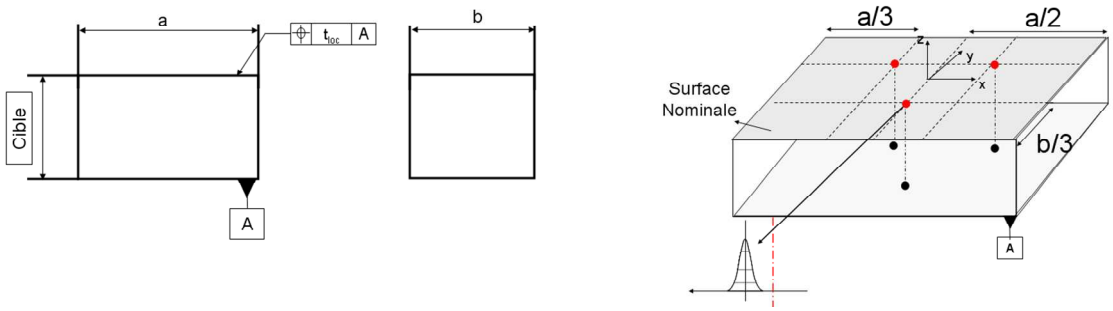
résultats, il est nécessaire d'augmenter la dimension de la simulation, en conséquence le temps de calcul.[122].

Dans cet exemple, un plan est défini par trois points ; P1, P2, P3, dont les coordonnées sont :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \\ Cible + e_1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{3} \\ \frac{b}{3} \\ Cible + e_2 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{b}{3} \\ Cible + e_3 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

Où, a b correspondent à la longueur et à la largeur du plan, Cible est la hauteur nominale de la pièce, e_i est l'écart du point i, celui-ci correspond à une variation de la surface autour de la valeur Cible suivant une loi de distribution et des paramètres statistiques que nous définirons.

Dans cet exercice, seules les variations suivant la normale z à la surface seront considérées. (figure 48)



(a) (b)

figure 48 : Représentation du contexte étudié (a) cotation de la pièce (b) représentation de la position des points mesurés.

Les définitions de l'inertie sont calculées sur une valeur de distance ($D_{\overrightarrow{P_{Ai}P_i}}$) entre le point appartenant au plan de référence A (P_{Ai}) et le point simulé (P_i) à la position i, suivant la normale à la surface au point i, $\overrightarrow{.n_i}$ (77)

$$D_{\overrightarrow{PA_iP_i}} = \left(\overrightarrow{PA_iP_i}\right)\overrightarrow{n_i}\,, \tag{77}$$

Dont $\overrightarrow{n_i}$ est le vecteur normale à la surface cible tolérancée à la position i, soit $\overrightarrow{n_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous définissons la surface cible par une surface dont les points Pi ont un écart e_i nul.

Dans ce cas d'étude, le plan de référence A est considéré parfait. En conséquence, la loi de distribution statistique des distances $D_{\overrightarrow{PAiPi}}$ correspond à la loi de distribution statistique de l'écart e_i pour le point P_i en considérant $\left\{D_{\overrightarrow{P_{Ai}P_i}}\right\} \in \Re^+$. C'est à partir des distances $D_{\overrightarrow{PAiPi}}$ que les inerties 3D seront calculées pour chaque lot.

Dans cette partie, la loi de distribution des écarts e_i est normale. Ce choix nous semble le plus proche du contexte industriel qui est de considérer qu'un point d'une surface a un défaut moyen et une variation autour de ce défaut, du fait de la variabilité du procédé.

3.1.2 Défauts des points centrés sur la surface cible

Dans ce cas d'étude, nous allons considérer que chaque écart e_i du point *Pi* est indépendant et suit une loi normale de moyenne égale à la cible, 5, et d'écart type ($\sigma_{donné}$), 0.1.

3.1.2.1 Résultat : Défaut des points centrés sur la surface cible

Les tableaux ci-dessous synthétisent l'ensemble des informations statistiques portant sur les inerties 3D calculées pour 40 000 lots de 25 pièces. La première ligne représente l'histogramme, en l'occurrence la distribution statistique pour chaque définition de l'inertie 3D. La ligne suivante présente le résultat d'un test de normalité[12] sur la distribution statistique de la définition de l'inertie 3D étudiée. Les moments d'ordres de 1à 4 sont présentés dans les lignes suivantes. Ils sont calculés à partir de la répartition statistique de la définition de l'inertie 3D, en l'occurrence la moyenne représente la moyenne des 40 000 inerties 3D.

Ainsi, le graphe de corrélation entre l'inertie 3D Ajustée et Standardisée (Tableau 37) présente une corrélation de 0.82 ($\rho_{IA/IS}$=0.82). Pour les simulations suivantes, les tableaux ont une construction identique.

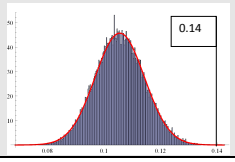
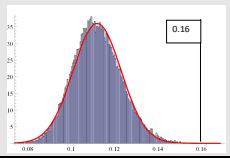
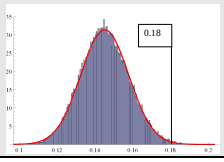
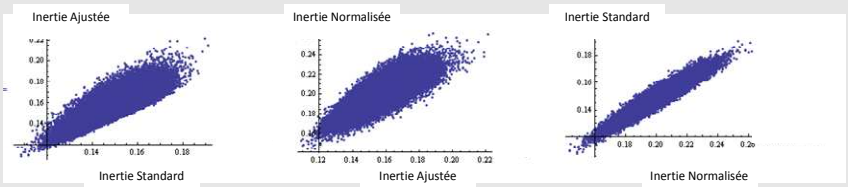
Lot de 25 pièces	Inertie 3D Standard (IS)	Inertie 3D Ajustée (IA)	Inertie 3D normalisée (IN)
Histogramme			
Normalité[12]	Oui	Non	Oui
Moyenne	0.10	0.11	0.14
Ecart type	0.0086	0.011	0.012
Kurtosis	3.01	3.15	3.03
Skewness	0.05	0.2	0.09
Graphe de Corrélation			

Tableau 36 : Défauts des points centrés sur la surface cible, $\sigma_{donné}$ =0.1

	IS	IA	IN
IS	1	0.82	0.95
IA	0.82	1	0.79
IN	0.95	0.79	1

Tableau 37 : Tableau des corrélations pour les défauts des points centrés sur la surface cible, $\sigma_{donné}$ =0.1

[12] Le test de Normalité suit l'approche proposée par Shapiro Wilk [123]

3.1.2.2 Conclusions : Variation de défauts de points centrés

Ce tableau met en évidence plusieurs points de différence ou de similitude entre chaque définition.

a) L'observation du tableau de synthèse permet de désigner la corrélation la plus importante entre les définitions de l'inertie 3D standardisée et normalisée ($\rho_{IN/IS}$ = 0.95). Concernant les autres couples de définitions, les corrélations sont plus faibles, mais tout aussi significatives (=0.8). En conséquence, il est possible d'établir un lien mathématique entre chaque définition avec un niveau de précision différent. La précision de cette relation dépend du coefficient de corrélation et de la variation autour de la droite de régression. Les graphes de corrélations illustrent ces variations. Le couple de définitions présentant la corrélation la plus forte est l'inertie Standardisée et l'inertie Normalisée. Ainsi, dans le cadre des petits déplacements la relation mathématique entre l'inertie normalisée et l'inertie standardisée est la plus robuste. La moins robuste est le couple de définitions de l'inertie Ajustée et normalisée.

b) De même, nous pouvons identifier une légère dissymétrie de l'histogramme concernant de l'inertie 3D Ajustée. Cette dissymétrie implique une convergence statistique non normale. Cette non-normalité est confirmée par le test de Shapiro et Wilk et les coefficients de skewness et kurtosis, qui sont proches de 0 et 3 (valeurs d'une loi normale) pour les définitions IS et IN et qui présentent une asymétrie positive (skewness > 0) et une tendance leptokurtique (kurtosis >3) pour l'IA. En conséquence, dans ce cas d'étude l'inertie 3D ajustée ne tend pas vers une distribution statistique normale a contrario d'autres définitions dans le cadre des petits déplacements.

c) Enfin, dans ce contexte de simulation nous constatons que pour un même défaut, l'inertie normalisée donne une valeur moyenne supérieure aux autres définitions (inertie standardisée et Ajustée). En conséquence, la tendance observée dans la partie 2.5 concernant les risques d'utiliser une définition de l'inertie 3D différente de celle spécifiée sur un plan est confirmée

Cette première simulation a fait apparaître des similitudes entre certaines définitions des inerties. Nous avons une forte corrélation entre la définition de l'inertie normalisée et l'inertie standardisée et une corrélation plus faible entre l'inertie ajustée et l'inertie normalisée et entre l'inertie standardisée et ajustée.

L'objectif de la partie suivante est d'augmenter le niveau de variabilité pour cela nous allons tirer un écart aléatoire pour chaque point est considéré une variation autour de cet écart.

3.1.3 Variation autour d'un défaut orienté

Pour la simulation suivante, chaque écart e_i est défini par une inertie maximale inférieure ou égale à 0.1 (Imax). Nous introduisons un écart type égal à $\sigma_{donné} = 0.05$ et un décentrage, δ, tiré aléatoirement de façon uniforme entre les bornes extrêmes de l'inertie (figure 49) :

$$\delta_i = Y_{\left[-\sqrt{Imax^2-(\sigma_{donné})^2};\sqrt{Imax^2-(\sigma_{donné})^2}\right]} \quad (78)$$

Où $Y_{[u\ ;\ v]}$ est une loi de répartition uniforme bornée par les valeurs u et v.

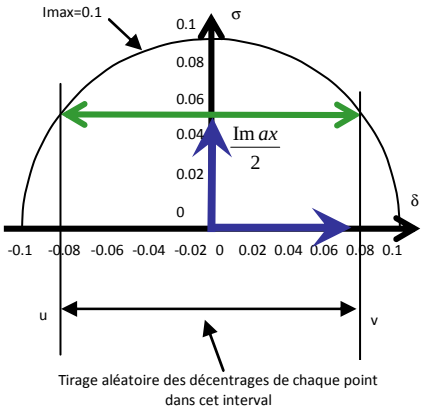


figure 49 : Représentation graphique des bornes de tirage aléatoire des décentrages pour un $\sigma_{donné}$ =0.05

3.1.3.1 Résultat : Variation autour d'un défaut orienté

Le cas présenté correspond à un défaut moyen avec une variabilité autour de ce défaut. Le défaut moyen est défini par la moyenne δ_i des distributions des écarts e_i et la variation correspond à l'écart type ($\sigma_{donné}$) de la distribution des paramètres e_i, ici $\sigma_{donné}$ est égale à

0,05. A titre indicatif, la moyenne δ_i des distributions des écarts e_i est égale à ; δ_1 = 0.033, δ_2=-0.057 et δ_3= -0.0087.

Nous obtenons les résultats suivants :

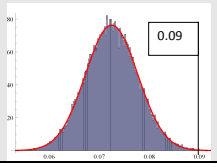
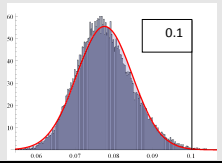
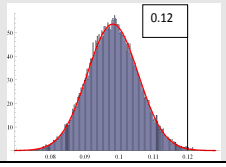
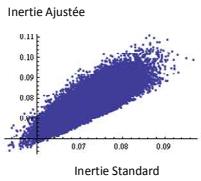
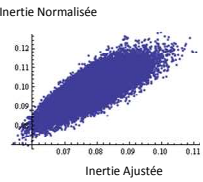
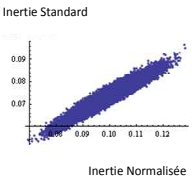
Lot de 25 pièces	Inertie 3D Standard (IS)	Inertie 3D Ajustée (IA)	Inertie 3D normalisée (IN)
Histogramme			
Normalité	Oui	Non	Oui
Moyenne	0.072	0.077	0.098
Ecart type	0.0051	0.0071	0.0075
Kurtosis	3.01	3.12	3.03
Skewness	0.05	0.30	0.08
Graphe de Corrélation			

Tableau 38 : Simulation défaut rigide, $\sigma_{donné}$=0.05 ei décentré δi

	IS	IA	IN
IS	1	0.80	0.96
IA	0.80	1	0.81
IN	0.96	0.81	1

Tableau 39 : Matrice de corrélation ; Simulation défaut rigide, $\sigma_{donné}$=0.05, ei décentré δi

3.1.3.2 Conclusions : Variation autour d'un défaut orienté

Ces deux simulations permettent d'apporter quelques réponses aux questions posées dans la première partie, dans le contexte des petits déplacements.

A partir du Tableau 36 et du Tableau 38, nous constatons que la distribution statistique des définitions de l'inertie standardisée et de l'inertie normalisée converge vers une loi de distribution de type normale. Au contraire, de la définition de l'inertie ajustée qui converge vers une distribution de type inconnu, en effet, celle-ci présente une dissymétrie et une tendance leptokurtique dans les deux cas.

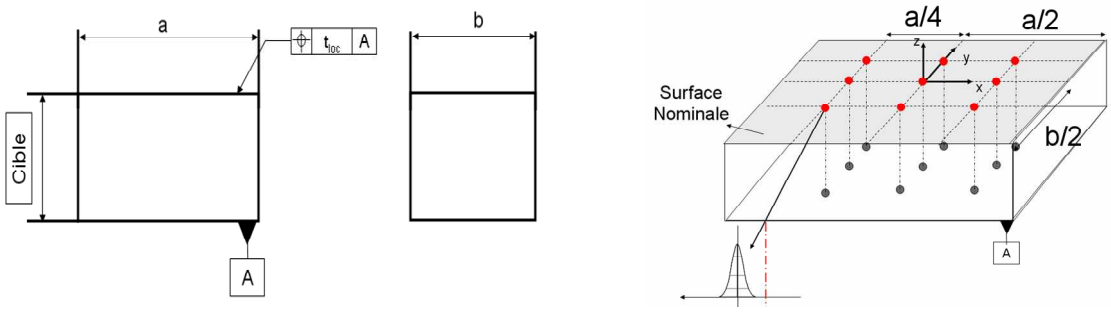
De plus, nous observons l'existence d'une corrélation très forte ($\rho>0.90$) et invariante entre les définitions de l'inertie standardisée et celle de l'inertie normalisée. Et une corrélation forte ($\rho=0.80$) entre les autres couples de définitions. Ainsi, en connaissant les inerties des points mesurés, il est possible d'aboutir à une relation mathématique linéaire entre chaque définition. Cette relation peut être déterminée si les paramètres statistiques de chaque définition sont connus.

Dans cette première partie, le contexte des petits déplacements a fait ressortir un ensemble de réponses aux questions posées. La partie suivante présente une surface définie par un défaut de forme. Le nombre de points, déterminant la surface, est augmenté. Dans ces nouvelles conditions, nous recherchons à vérifier les réponses du contexte précédent.

3.2Inertie 3D et Forme

3.2.1 Définition de l'étude d'un défaut de forme

En reprenant l'exemple présenté dans le paragraphe 3.1.1, nous définissons la surface par 9 points au lieu de 3. Les objectifs de cette partie sont les mêmes que précédemment à savoir ; vérification de l'existence d'une relation entre les définitions de l'inertie 3D et recherche de la convergence statistique des définitions.



(a) (b)

figure 50 : Représentation du contexte étudié (a) cotation de la pièce (b) représentation de la position des points mesurés.

Dans un premier temps, les variations des surfaces ne seront pas définies par un positionnement spécifique des points. En outre, la variation est appliquée au point définissant l'extrémité de la surface et les points « centraux» correspondent aux points moyens des deux points extrêmes de la surface. (cf. figure 50 et relation (79))

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4} \\ \frac{b}{4} \\ Cible + e_1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{4} \\ Cible + e_2 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} \\ \frac{b}{4} \\ Cible + e_3 \end{pmatrix};$$
$$P_4 = moyenne(P_1; P_7); P_5 = moyenne(P_2; P_8); P_6 = moyenne(P_3; P_9), \quad (79)$$
$$P_7 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{4} \\ -\frac{b}{4} \\ Cible + e_7 \end{pmatrix}; P_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{4} \\ Cible + e_8 \end{pmatrix}; P_9 = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} \\ -\frac{b}{4} \\ Cible + e_9 \end{pmatrix};$$

Où, a b correspondent à la longueur et à la largeur du plan, Cible est la hauteur nominale de la pièce, e_i est l'écart du point i, celui-ci correspond à une variation de la surface autour de la valeur Cible suivant une loi de distribution et des paramètres statistiques que nous définirons.

La figure 51 présente un échantillon des points simulés avec une surface extrapolée passant par ces points. Cette figure est juste indicative est donne une information sur les défauts potentiels de la surface.

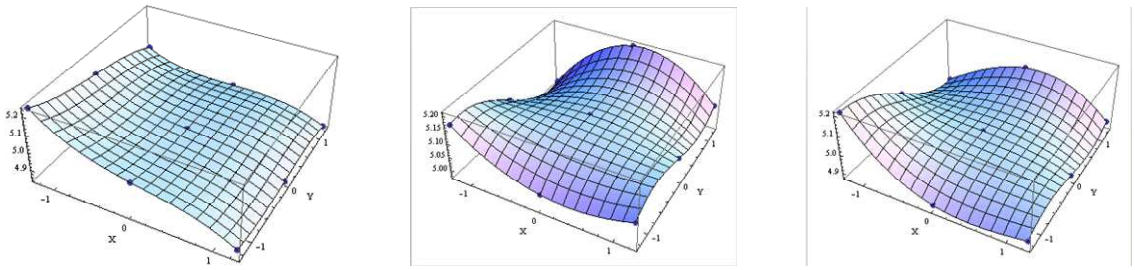


figure 51 : Exemple de forme de Surface passant par les points mesurés

Dans cette partie, la loi de distribution des écarts e_i est normale. Ce choix nous semble le plus proche du contexte industriel qui est de considérer qu'un point d'une surface a un défaut moyen et une variation autour de ce défaut, du fait de la variabilité du procédé.

3.2.2 Variation du défaut de forme autour de la cible

Cette partie présente une variation de forme autour de la cible. Par conséquent, les moyennes des distributions d'écarts e_i sont nulles et l'écart type est égal à Imax soit 0.1.

3.2.2.1 Résultat : Variation du défaut de forme autour de la cible

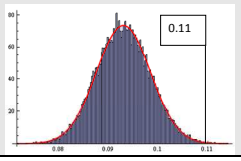
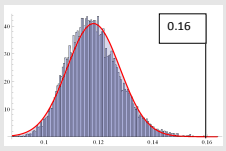
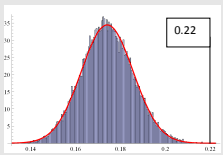
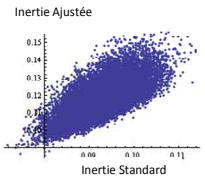
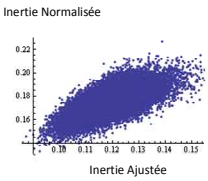
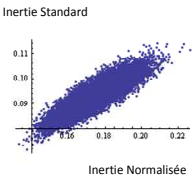
Lot de 25 pièces	Inertie 3D Standard (IS)	Inertie 3D Ajustée (IA)	Inertie 3D normalisée (IN)
Histogramme			
Normalité	Oui	Oui	Non
Moyenne	0.092	0.11	0.17
Ecart type	0.0054	0.0096	0.011
Kurtosis	2.97	3.39	2.99
Skewness	0.063	0.43	0.12
Graphe de Corrélation	  		

Tableau 40 : Variation du défaut de forme autour de la cible $\sigma_{donné}$=0.1

	IS	IA	IN
IS	1	0.68	0.86
IA	0.68	1	0.689
IN	0.86	0.689	1

Tableau 41 : Matrice de corrélation Variation du défaut de forme autour de la cible $\sigma_{donné}$=0.1

3.2.2.2 Conclusion : Variation du défaut de forme autour de la cible

Le Tableau 40 présente de nouveau les corrélations entre les définitions de l'inertie ajustée et de l'inertie normalisée. Cette corrélation est plus faible que celle présentée dans les simulations sur les petits déplacements, mais toujours significative. De même, nous observons que la définition de l'inertie normalisée est supérieure en moyenne aux autres définitions.

Afin de confirmer les variations, nous proposons dans cette seconde étape de considérer un décentrage des points mesurés et une variation autour de ce décentrage.

3.2.3 Variation autour d'un défaut de forme donné :

L'objectif est de considérer les variations d'un défaut de forme moyen tiré aléatoirement. Ce défaut moyen est défini par la moyenne de la distribution des écarts e_i; δ_1 = 0.0557, δ_2=0.0486, δ_3= 0.0857, δ_4= - 0.027, δ_5= -0.074, δ_6=-0.016 ; et la variabilité ($\sigma_{donné}$) de la distribution des écarts e_i est égale à 0.05 soit $I_{Max}/2$.

3.2.3.1 Résultat : Variation des défauts de (9) points décentrés

	IS	IA	IN
IS	1	0.68	0.85
IA	0.68	1	0.70
IN	0.85	0.70	1

Tableau 42 : Matrice de Corrélation autour d'un défaut de forme donné pour $\sigma_{donné}$=0.05

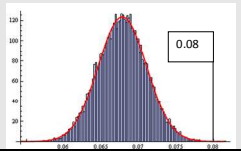
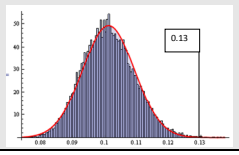
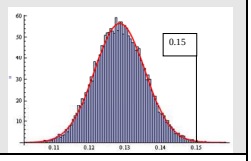
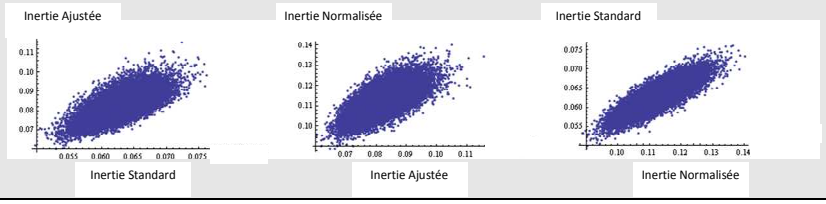
Lot de 25 pièces	Inertie 3D Standard (IS)	Inertie 3D Ajustée (IA)	Inertie 3D normalisée (IN)
Histogramme			
Normalité	Oui	Non	Oui
Moyenne	0.067	0.10	0.128
Ecart type	0.0032	0.0081	0.00706
Kurtosis	2.98	3.04	3.00
Skewness	0.028	0.23	0.067
Graphe de Corrélation			

Tableau 43 : Variation autour d'un défaut de forme donné pour $\sigma_{donné}$=0.05

3.2.3.2 Conclusion : Variation de 9 points décentrés

De nouveau, cette simulation présente des corrélations entre chaque définition de l'inertie 3D. Ainsi, la corrélation de l'inertie standardisée et l'inertie normalisée est comme précédemment plus importante (0.85) que les autres corrélations. Cependant, nous observons une légère dissymétrie de la distribution des inerties normalisée. En conséquence, la convergence statistique de l'inertie normalisée n'est pas normale.

3.3 Conclusion sur les simulations

A travers l'ensemble des simulations présentées, nous avons répondu en partie aux questions introduites au début de ce chapitre:

a) « Comment évaluer la pertinence d'une définition ? »

Nous avons proposé d'évaluer la pertinence des définitions dans un contexte de simulation. Ainsi, à partir d'une génération de défauts aléatoires avec différentes variabilités, nous avons recherché à montrer les relations statistiques entre les trois approches.

b) « Existe-t-il une relation entre chaque définition de l'inertie 3D ? »

Ces simulations ont mis en évidence les relations statistiques entre les trois définitions. De ce fait, une corrélation forte existe entre les définitions de l'inertie standardisée et normalisée. En outre, la définition de l'inertie normalisée est en moyenne toujours plus importante que l'inertie standardisée ou ajustée. De même, la convergence statistique a pu mettre en évidence que seule l'inertie 3D standardisée converge vers une loi de distribution normale au contraire des deux autres définitions pour lesquelles la convergence statistique n'a pu être clairement définie.

4 Relation entre l'exigence fonctionnelle et l'inertie 3D

Dans cette partie, nous souhaitons mettre en évidence l'existence ou non d'une relation entre les définitions des inerties 3D et une condition fonctionnelle d'un assemblage.

4.1 Cas d'étude

Pour cela, nous proposons de réaliser une analyse de tolérance par l'approche des petits déplacements. Cette approche a été introduite par Giordano [136][137].

Cette étude concerne un empilement de 5 pièces sans jeu.

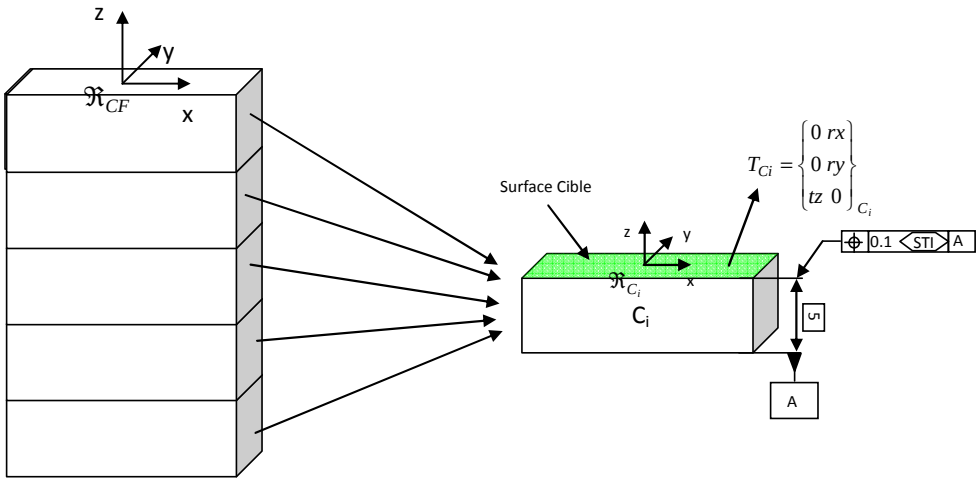


figure 52 : Cas d'étude d'un empilement de 5 pièces

Dans cette étude, on considère l'empilement de 5 composants, C_i (cf. figure 52). Chaque surface d'un composant présente un ensemble de défauts rigides ; l'impact du défaut de forme sur l'assemblage est négligeable. Les défauts de chaque surface sont représentés par un torseur de petits déplacements dans le repère du composant i. Étant donné que la surface est plane, le torseur des petits déplacements a deux composantes de rotation suivant y et x et une composante de translation suivant z. Le défaut de chaque surface d'un composant *Ci* s'exprime par un torseur de petits déplacements T_{Ci} regroupant l'ensemble des défauts rigides. A titre indicatif, nous décomposerons ce torseur T_{ci} en deux vecteurs regroupant les composantes de translations T_{Tci} et les rotations $R_{TCi.}$ Dans l'exercice, le plan de référence est parfait. Donc pour un composant *Ci*, il n'y a qu'un seul torseur des petits déplacements correspondant au défaut rigide de la surface localisée.

Le torseur résultant d'un assemblage j, T_{CFj}, correspond à la somme des torseurs écarts de chaque composant T_{Ci}, il s'exprime par :

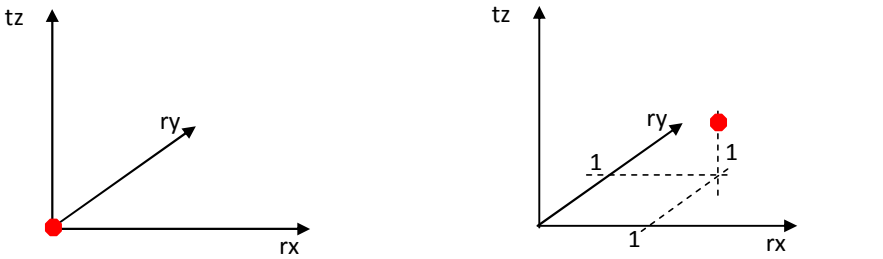
$$T_{CF_j} = \sum_{i=1}^{nbcpt} T_{Ci} = \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=1}^{nbcpt} Tx_{Ci} & \sum_{i=1}^{nbcpt} Rx_{Ci} \\ \sum_{i=1}^{nbcpt} Ty_{Ci} & \sum_{i=1}^{nbcpt} Ry_{Ci} \\ \sum_{i=1}^{nbcpt} Tz_{Ci} & \sum_{i=1}^{nbcpt} Rz_{Ci} \end{matrix} \right\} \quad (80)$$

Afin de pouvoir réaliser une comparaison entre le torseur des petits déplacements et une combinatoire des différentes définitions de l'inertie 3D, nous proposons de calculer l'inertie de la norme euclidienne du lot du torseur résultant d'un assemblage. Le principe de la norme euclidienne comme indicateur a été proposé par Wang [138]. Elle permet de quantifier le défaut résultant d'un assemblage en comparaison d'une configuration sans défaut. Ainsi, E_{TCFj} nul signifie que l'assemblage présente une configuration sur la cible, donc pas de défaut sur la surface localisée. Au contraire, pour E_{Tcf} non nul la configuration présente un défaut par rapport à la surface idéale. Bien entendu plus la valeur de E_{Tcf} est importante, plus le défaut de la surface le sera.

Pour chaque torseur résultant de l'assemblage T_{CFj} la norme euclidienne $E_{T_{CFj}}$ (81) est déterminée. Pour un lot d'assemblage, nous considérerons la relation suivante pour déterminer l'inertie des normes euclidiennes I_{ETCF} du lot de pièces assemblées :

$$E_{T_{CFj}} = \left\| T_{CFj} \right\| = \sqrt{(tz_{CFj})^2 + (rx_{CFj})^2 + (ry_{CFj})^2} \ , \quad (81)$$

La figure 53 désigne par un point rouge la position des composantes du torseur écart résultant de l'assemblage (80). Dans le premier cas, l'assemblage des 5 composants donne un torseur résultant nul en conséquence la norme euclidienne de l'assemblage est nulle. Dans le second cas, chaque composante du torseur écarts résultant de l'assemblage à une valeur égale à 1. Dans cette situation, la norme euclidienne de cette surface est égale à 1,73. Cet indicateur permet d'évaluer le défaut de l'assemblage de 5 composants.



$$E_{T_{CF}} = 0 \qquad E_{T_{CF}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.73$$

figure 53 : Cas d'étude d'un empilement de 5 pièces

Pour un lot d'assemblage, nous considérons l'inertie des normes euclidiennes des assemblages composants le lot, nous obtenons ainsi ;

$$I_{E_{T_{CF}}} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(E_{T_{CFj}}\right)^2}\ , \tag{82}$$

Où *k* est le nombre d'assemblages dans le lot.

Concernant le calcul des définitions de l'inertie 3D, on en déduit dans un premier temps les écarts de chaque point à partir du torseur T_{Ci} :

$$\overrightarrow{O_{CF}P_i'} = \overrightarrow{O_{CF}P_i} + \left(\overrightarrow{T_{T_{Ci}}} + \overrightarrow{PiO} \wedge \overrightarrow{R_{T_{Ci}}}\right), \tag{83}$$

Où $\overrightarrow{O_{CF}P_i}$ est le vecteur des coordonnées des points P_1, P_2, P_3 sur la cible présentée dans la partie 3.1.1 dans le repère fonctionnel d'origine O_{CF}. Le point $\overrightarrow{O_{CF}P_i'}$ correspond au point avec les défauts rigides simulés dans le repère fonctionnel d'origine O_{CF}.

A partir des points P'_i, il est possible de déterminer les correspondances suivant les définitions des inerties 3D. L'inertie de l'assemblage d'un lot est notée IS_{CF}, IA_{CF}, et IN_{CF}, respectivement, inertie 3D standardisée, ajustée et normalisée de la condition fonctionnelle et elle est calculée par la racine carrée de la somme quadratique :

$$IS_{CF} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} IS_i^2}$$
$$IA_{CF} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} IA_i^2} \quad . \qquad (84)$$
$$IN_{CF} = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} IN_i^2}$$

Nous réalisons dans cette partie une simulation de 50 000 assemblages composés de 5 composants appartenant à des lots de 50 composants.

4.2 Analyse de cas de figure

Dans un premier temps, nous traitons uniquement la variation d'une composante du torseur écart, la translation. Ensuite, nous nous intéresserons à la variation de l'ensemble des composantes d'écart pour une orientation moyenne donnée.

4.2.1 Variation du paramètre de translation.

La figure 54 illustre le cas de simulation. La surface d'un composant Ci sans défaut est représentée en vert (trait épais, gris clair) tandis que le défaut de translation suivant l'axe Z (Tz_{Ci}) est représenté par un trait en pointillé. La loi de répartition statistique de la variation de Tz_{Ci} est une loi de distribution normale de moyenne égale à la valeur cible et d'écart type 0.1.

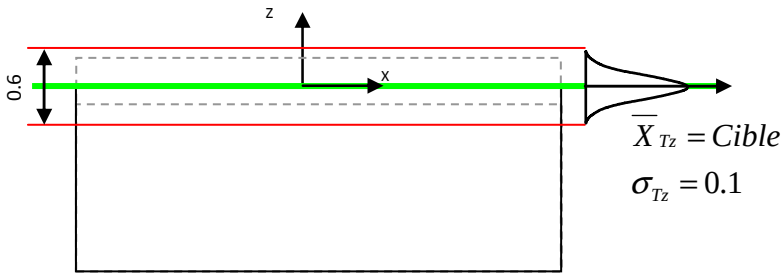


figure 54 : Principe de variation de la composante de translation selon l'axe z pour chaque composant Ci des assemblages

Dans ce cas particulier où le défaut est identique sur chaque point de la surface, les définitions de l'inertie 3D normalisée, standardisée et ajustée d'un lot de surface sont identiques. Le Tableau 44 synthétise les distributions statistiques des inerties 3D d'un lot de cinquante composants :

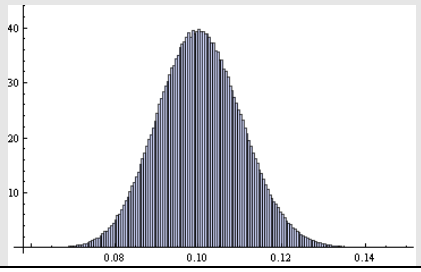
	Inertie Standardisée / Inertie Normalisée / Inertie Ajustée
Histogramme	
Moyenne	0.1
Ecart type	0,01
Kurtosis	2,99
Skewness	0,10

Tableau 44 : Répartition de la distribution statistique des inerties d'un lot de 50 composants.

La distribution statistique des inerties d'un lot est une distribution de moyenne 0.1 et d'écart type 0,01.

Le Tableau 45 présente deux histogrammes de la distribution des inerties 3D de lots de 50 composants assemblés. Nous rappelons que l'assemblage se compose de cinq composants empilés. La deuxième colonne est calculée suivant la relation (82), elle correspond à l'inertie des normes euclidiennes calculée sur la résultante des assemblages de lots de composants. La troisième colonne est calculée suivant la relation (84), elle correspond au calcul de l'inertie 3D de l'assemblage à partir de la combinaison de lots d'inertie 3D de chaque composant. Les définitions de l'inertie 3D de l'assemblage et de la combinatoire des inerties sont identiques en moyenne mais pas en écart type (cf. Tableau 45)

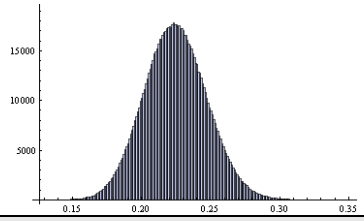
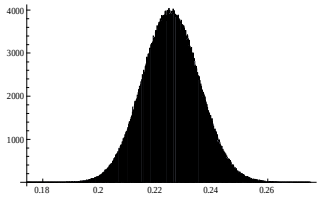
	I_{ETCF} de l'assemblage	Calcul de l'inertie résultante à partir de la combinatoire des inerties 3D
Relation	(82)	(84)
Histogramme		
Moyenne	0,224	0,224
Ecart type	0.022	0.010

Tableau 45 : Distributions statistiques des assemblages

De même à partir des relations (82) et (84), il est possible de tracer le graphe de corrélation entre l'inertie des normes euclidiennes du lot d'assemblage (cf. relation (82)) et la combinaison des lots d'inerties 3D (cf. relation (83)). Les résultats sont présentés dans le Tableau 46.

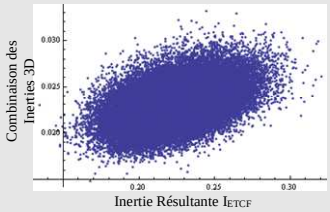
	Inertie 3D Standardisée / Normalisée / Ajustée
Inertie Résultante	
Matrice de corrélation	$\begin{pmatrix} 1 & 0.45 \\ 0.45 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 46 : Corrélation entre la combinatoire des définitions de l'inertie 3D et l'inertie des normes euclidiennes calculées sur les composants assemblés.

Le tableau ci-dessus met en évidence la faible corrélation entre la définition de la combinatoire des inerties 3D et celle réalisée à partir de la résultante de l'assemblage. Cette faible corrélation s'explique en partie par les définitions de l'inertie 3D. En effet, celles-ci sont toujours strictement positives en conséquence un défaut Tz d'une surface de grandeur k est identique à un défaut –k d'une autre surface. Pour autant, la combinatoire de ces deux

défauts donnera 0 sur la condition fonctionnelle alors que la combinatoire des inerties donnerait k ($\sqrt{\frac{1}{2}\left[(k)^2+(-k)^2\right]}$)(84). Nous retrouvons, ici, les résultats connus de l'inertie.

En clair, les définitions de l'inertie 3D permettent de mettre en évidence les défauts d'une surface, mais ne permettent pas lorsqu'elles sont combinées d'être représentatives de la résultante de l'assemblage. Ceci, si nous considérons que les lots ne sont pas « homogènes ». Un lot homogène est un lot dont les composants ont tous des défauts de même signe par rapport à une valeur cible.

Afin d'approfondir ce constat, nous proposons de montrer un contre-exemple pour lequel nous obtiendrons une corrélation forte.

4.2.2 Variation paramètre décentrée

Ce contre-exemple permet de mettre en évidence une corrélation entre les définitions des inerties 3D et de la résultante dans un cas particulier que nous décrivons ci-dessous.

Cet exemple considère que :

a) Les composantes du torseur des petits déplacements Tz, Rx, Ry suivent toutes une loi de distribution statistique normale avec un décentrage δ et un σ de 0.05. Le défaut simulé correspond à un défaut moyen δ avec une variation σ autour de ce défaut pour chaque composante du torseur des petits déplacements. Chaque lot de surface a un défaut moyen différent, cependant la variation (σ) est identique.

b) Les lots de composants sont homogènes.

Compte tenu de ce qui précède, les simulations mettent en évidence la corrélation entre les définitions des inerties 3D et celle de l'inertie résultante de l'assemblage (Tableau 47).

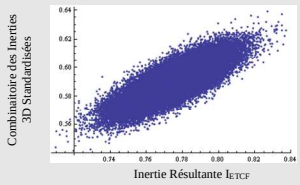
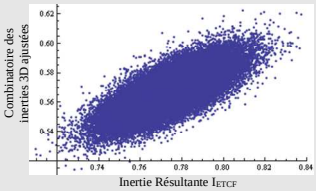
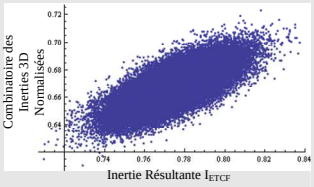
	Inertie 3D Standardisée	Inertie 3D Ajustée	Inertie 3D Normalisée
Inertie Résultante			
Matrice de corrélation	$\begin{pmatrix} 1 & 0.80 \\ 0.80 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.74 \\ 0.74 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.77 \\ 0.77 & 1 \end{pmatrix}$

Tableau 47 : Corrélation entre la combinatoire des définitions de l'inertie 3D et le torseur résultant de l'assemblage pour un lot de 50 assemblages de 5 composants.

En conclusion, la combinatoire des inerties 3D est corrélée à l'inertie résultante de l'assemblage si et seulement si les lots sont homogènes. Le Tableau 47, nous fait remarquer que la corrélation 3D de l'inertie standardisée est la plus importante. Pour la suite du chapitre, nous considérerons cette définition pour la définition de l'inertie d'une surface.

Il est sous-entendu par homogène que chaque composant d'un lot donné a un défaut de même signe par rapport à la surface cible. Par conséquent, sous cette hypothèse d'homogénéité des défauts d'un lot, il est possible d'en déduire une synthèse 3D des inerties.

4.2.3 Synthèse des inerties 3D

La partie précédente met en évidence la possibilité de définir l'inertie 3D de chaque composant à partir de la définition de la condition fonctionnelle. (Synthèse des inerties dans un contexte tridimensionnel).

Le Tableau 47 met en évidence que la définition de l'inertie 3D standardisée présente la meilleure corrélation dans un contexte d'assemblage. Nous baserons donc l'ensemble du calcul de la synthèse à partir de cette définition de l'inertie.

4.2.3.1 Approche de synthèse de l'inertie 3D Standardisée

La partie bibliographique a mis en évidence les deux limites extrêmes de l'inertie :

a) La première limite consiste à considérer les décentrages d'un lot comme nuls, en ce sens l'inertie est égale à l'écart-type,σ. Cette approche est utilisée dans le cadre d'un tolérancement unidimensionnel (voir partie Bibliographique)

$$I_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \delta_i^2} \xrightarrow{=0} I_i = \sigma_i \tag{85}$$

b) La seconde limite consiste à considérer qu'il n'y a aucune variation (écart type = 0). En conséquence, l'inertie est égale au décentrage, δ.

$$I_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \delta_i^2} \xrightarrow{\sigma=0} I_i = \left|\delta_i\right| \tag{86}$$

Le Tableau 46 et le Tableau 47 ont montré que la corrélation entre la définition des inerties 3D est forte lorsqu'il y a un décentrage, et faible dans une configuration centrée. Nous proposons donc de déduire l'inertie 3D par rapport à une combinatoire des décentrages maximums acceptables définis à partir de la condition fonctionnelle. La combinatoire des décentrages est linéaire. En conséquence la définition de l'inertie 3D maximale d'une surface i, en supposant le σ_i nul s'écrit :

$$I_{E_{T_{CF_j}}} \cong \sum_{i=1}^{nbcpt} \left|\delta\right|_i \Rightarrow \left|\delta\right|_i = IS_i = \frac{I_{E_{T_{CF_j}}}}{nbcpt}, \tag{87}$$

Où $I_{E_{T_{CF_j}}}$ est l'inertie des normes euclidiennes du torseur des petits déplacements résultants de l'assemblage, IS_i est l'inertie standardisée d'un lot i et *nbcpt*, le nombre de composants de l'assemblage.

4.2.3.2 Exemple numérique

Dans cet exemple, on définit un assemblage de 5 composants, C_i, en posant la condition fonctionnelle I_{ETCF} égale à 1. Il est possible d'en déduire pour chaque lot de C_i l'inertie maximale admissible à partir de la relation (87):

$$IS_i = |\delta_i| = \frac{I_{E_{T_{CF_j}}}}{n} = \frac{1}{5} = 0.2 \,. \tag{88}$$

Afin de vérifier la valeur donnée par l'équation (88), nous proposons d'utiliser une simulation à partir de défauts de surfaces rigides.

Les entrées de la simulation sont les défauts des points P_1, P_2, P_3 constituant la surface d'un composant d'un lot. Les paramètres de la simulation sont : la dimension du lot de 50 composants, les dimensions de la pièce a=5 et b=5, le nombre de composants de l'assemblage est de 5. Les simulations d'assemblage de 5 composants appartenant à un lot de 50 composants sont répétées 10 000 fois. Le tableau suivant récapitule les cinq configurations que nous proposons de simuler pour vérifier le modèle.

		P1			P2			P3			ISi
N°	Configuration	δ	σ	I_{P1}	δ	σ	I_{P2}	δ	σ	I_{P3}	I_{Max}=0.2
1	δ Maximum de tous les points	0.2	0	0.2	0.2	0	0.2	0.2	0	0.2	0.2
2	σ maximal centrée de tous les points	0	0.2	0.2	0	0.2	0.2	0	0.2	0.2	0.2
3	δ Aléatoire Inertie Maximale	0.17	0.1	0.2	0.17	0.1	0.2	0.17	0.1	0.2	0.2
4	δ Aléatoire et σ Aléatoire dans la limite de l'inertie maximale	>0	?	0.2	>0	?	0.2	>0	?	0.2	0.2
5	δ Aléatoire et Variation Aléatoire	?	?	<0.2	?	?	<0.2	?	?	<0.2	<0.2

Tableau 48 : Récapitulatif des configurations réalisées pour une vérification de l'approche de synthèse de l'inertie 3D

Le Tableau 49 est une synthèse des différents résultats obtenus. La configuration n°1 n'apparaît pas dans ce tableau étant donné que la simulation donne une valeur moyenne de 1 pour un écart type de 0.00001 sur l'ensemble des répétitions. Au contraire, l'ensemble des

simulations réalisé n'a donné aucune valeur maximale supérieure à la valeur fonctionnelle limite qui était $I_{E_{T_{CF_j}}}$ =1. Cette approche est donc acceptable.

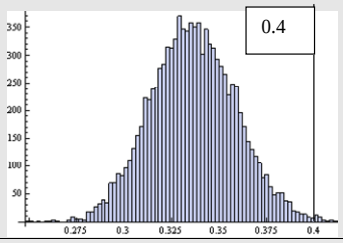
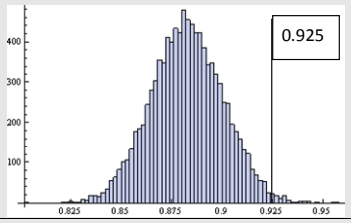
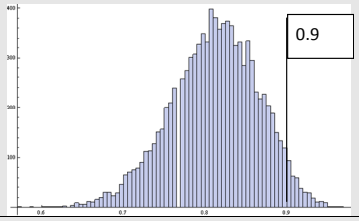
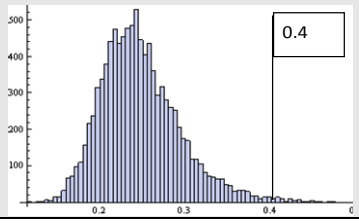
N° Configurations	Histogramme de répartition des $I_{E_{T_{CF_j}}}$	Paramètres Statistiques de $I_{E_{T_{CF_j}}}$	
2		Moyenne	0.33
		Ecart type	0.022
		Max	**0.41**
		Min	0.249
3		Moyenne	0.88
		Ecart type	0.017
		Max	**0.957**
		Min	0.80
4		Moyenne	0.81
		Ecart type	0.053
		Max	**0.96**
		Min	0.57
5		Moyenne	0.24
		Ecart type	0.046
		Max	**0.50**
		Min	0.11

Tableau 49 : Résultat des simulations suite aux configurations présentées dans le Tableau 48

4.2.3.3 Conclusions

A priori, la synthèse des tolérances comme présentée semble être satisfaisante pour contrôler les défauts résultants d'un assemblage puisque l'inertie fonctionnelle est respectée pour chaque configuration. En effet, l'ensemble des configurations présente une valeur maximale inférieure à 1. Néanmoins, les différentes configurations simulées ne permettent pas de mettre en évidence l'existence ou non d'une configuration ne respectant

pas l'inertie des normes euclidiennes spécifiées. Ce point fait partie des perspectives de ce travail.

4.3Précaution et problématique dans l'utilisation de l'inertie 3D, cadre des petits déplacements

L'utilisation des formulations de l'inertie 3D dans le contexte des petits déplacements doit être réalisée en considérant la précaution et la problématique suivantes :

4.3.1 Précaution dans la position des points mesurés

Cette précaution porte sur la mesure du défaut rigide d'un plan. Pour mettre en évidence ceci, nous proposons d'étudier la mesure d'une surface à deux dimensions (figure 55).

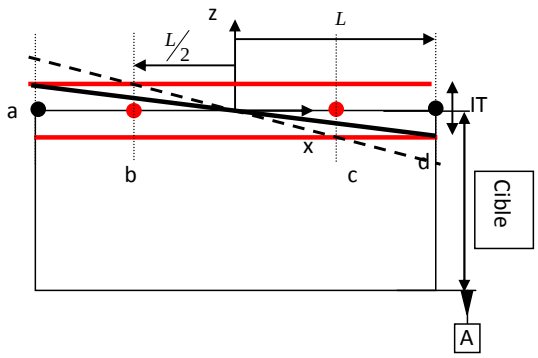


figure 55 : précaution 1 Localisation des inerties des points

Le calcul de l'inertie 3D du plan peut être réalisé soit en considérant les points extrêmes (a et d) soit en considérant les points intermédiaires (b et c). De ce fait, la valeur de l'inertie 3D du point ne sera pas la même suivant sa position.

En clair, si IT est l'intervalle de défaut acceptable de la surface. Les points a et d auront une inertie égale à IT/6 dans le cas ou les défauts sont centrés sur la valeur cible. Maintenant, si l'inertie des points b et c est calculée cela signifie que l'écart présenté sur la figure 55 par un trait pointillé est acceptable. Ce qui a pour conséquence que l'observation de ce même défaut sur les points extrêmes (a et d) le montre hors limite.

Par conséquent, l'inertie 3D doit être calculée par rapport aux composantes de défaut les plus contraignantes. Ainsi pour les points b et c, nous considérons que l'écart le plus contraignant est donné par l'orientation du plan.

Pour conclure, l'écart d'un point est une composition de plusieurs composantes du torseur des petits déplacements (sur le schéma ci-dessus une translation et une rotation) en l'occurrence les points palpés doivent être choisis de façon à ce qu'ils soient bien représentatifs des défauts rigides que l'on souhaite restreindre. Dans ce cas d'étude pour être conformes, les points palpés doivent se positionner aux extrêmes de la pièce.

4.3.2 Problématique de la nuance de spécification

Dans le cadre d'un tolérancement traditionnel, il peut s'avérer utile de tolérancer une surface suivant plusieurs spécifications géométriques complémentaires. Par exemple, un plan peut avoir une spécification de localisation et de parallélisme.

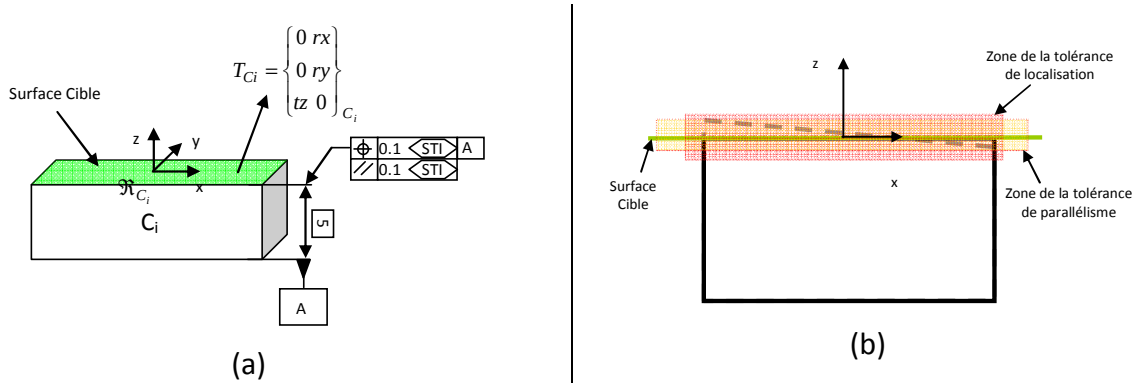


figure 56 : précaution 1 Localisation des inerties des points

Dans l'exemple présenté figure 56, les déplacements en translation suivant l'axe z sont autorisés au maximum de l'intervalle spécifié, a contrario des déplacements de type rotations rx et ry sont restreints par la spécification de parallélisme. Pour pouvoir appliquer l'inertie 3D avec ce niveau de subtilité, il serait nécessaire de réaliser un traitement au niveau des écarts des points par rapport au plan de référence ce qui amènerait à une recherche des composantes du torseur des petits déplacements de la surface à partir des points mesurés. Bien entendu, il est toujours possible de ne considérer que la composante la plus pénalisante de la surface. Ainsi, dans l'exemple présenté, l'inertie d'un point quelconque serait calculée à partir de la spécification la plus contraignante en l'occurrence le parallélisme.

Par conséquent, une synthèse des inerties 3D pourrait être réalisée sur la base d'un calcul à partir des défauts les plus contraignants. Cependant, cette approche, dans le contexte des petits déplacements, nous semble restrictive et pas assez flexible dans l'approche de

tolérancement. Nous proposerons donc dans le dernier chapitre de cette thèse d'introduire une nouvelle forme de l'inertie 3D basée sur les petits déplacements.

5 Conclusions

Ce chapitre identifie les relations statistiques entre chaque définition de l'inertie 3D ainsi que les limites de ces définitions. Ainsi, il a permis de répondre aux questions présentées en introduction.

« Comment évaluer la pertinence d'une définition ? Quels éléments de mesure peut-on utiliser pour évaluer les différentes solutions ? »

Les définitions de l'inertie 3D ont été évaluées dans un contexte de simulation. Ainsi, à partir d'une génération de défauts aléatoires avec différents niveaux de variabilité, nous avons recherché à montrer les relations statistiques entre les trois définitions. Cet ensemble de simulations souligne les points suivants :

a) La valeur de l'inertie Normalisée est en moyenne supérieure aux valeurs de l'inertie ajustée et standardisée. Les conséquences de l'utilisation de l'inertie Normalisée peuvent se répercuter sur la conformité d'un lot ou d'une pièce si l'inertie de la surface calculée correspond à une autre définition. Par exemple, si, nous considérons que l'exigence d'une surface est déterminée suivant la définition de l'inertie 3D standardisée, l'utilisation des définitions de l'inertie Ajustée et Normalisée apporterait a priori une surqualité sur l'exigence fonctionnelle (de l'assemblage). Cela s'explique par le fait qu'en moyenne la valeur de l'inertie normalisée est supérieure à l'inertie standardisée. Dans le cas contraire, si l'exigence fonctionnelle est définie par l'Inertie ajustée ou normalisée, l'utilisation de la définition de l'inertie standardisée conduirait a priori à une non-conformité sur la fonctionnalité de l'assemblage.

b) La convergence statistique de l'inertie standardisée tend a priori vers une distribution normale par le test de Shapiro-Wilk. Cette convergence est intéressante, car elle peut se baser sur des outils statistiques déjà existants comme la carte de contrôle ou le contrôle réception. Au contraire, les définitions de l'inertie Ajustée et celle de l'inertie Normalisée pour lesquelles il y a une dissymétrie induite par la considération d'un maximum dans la formulation. Au

premier abord, la loi de distribution statistique tend vers une loi de distribution des valeurs extrêmes pour l'inertie ajustée et loi de distribution de Gumbel pour l'inertie Normalisée. Cependant, la confirmation par une approche plus pragmatique est nécessaire à l'avenir. Ainsi, elle pourra servir de base pour le développement d'application pour le contrôle réception ou le pilotage par carte de contrôle. D'ailleurs, nous proposons d'orienter les développements statistiques autour de la distribution statistique générale des valeurs extrêmes pour lesquelles les distributions de Gumbel, des Valeurs Extrêmes sont des cas particuliers.[144].

c) A travers ce chapitre, nous avons pu identifier que les définitions de l'inertie 3D les plus corrélées sont les définitions de l'inertie Standardisée et Normalisée, que ce soit dans un contexte de forme ou de petits déplacements. Cette corrélation se traduit par l'existence d'une relation linéaire entre les deux définitions. On peut penser que l'utilisation de l'inertie 3D standardisée est plus difficile dans un contexte de production au contraire de l'inertie Normalisée. En effet, le calcul de l'inertie 3D standardisée d'un ensemble de points demande un moyen informatique au contraire d'une surface définie par l'écart maximale. L'existence de cette relation entre l'inertie 3D standardisée et l'inertie 3D normalisée donnerait beaucoup plus de flexibilité dans l'utilisation de l'inertie à différente échelle de l'entreprise. Ainsi, la définition de l'inertie standardisée peut se traduire, du fait de la corrélation, en inertie normalisée. Il est à rappeler que dans un contexte de déploiement d'outils statistiques, l'inertie 3D standardisée présente l'avantage de converger vers une distribution normale. En conséquence, elle sera plus abordable dans une perspective proche de développer des outils statistiques (cartes de contrôle, contrôle réception…). Au contraire de l'inertie normalisée et l'inertie ajustée qui demanderaient une étude plus approfondie sur le développement d'outils statistiques du fait de leur convergence non normale.

Le Tableau 50 regroupe l'ensemble des commentaires sur le rapport statistique entre les définitions de l'inertie 3D. La corrélation est significative si la valeur ρ et supérieur à 80%:

	Uniquement des défauts géométriques (petit déplacement)			Prise en compte des défauts de forme		
	Corrélation significative ?	Convergence Statistique	Relation entre définition	Corrélation significative ?	Convergence Statistique	Relation entre définition
Inertie Standardisée (IS)	Oui, IA, IN	Normale	$\overline{IN} > \overline{IA} \approx \overline{IS}$ [13]	Oui, IA, IN	Normale	$\overline{IN} > \overline{IA} > \overline{IS}$
Inertie Ajustée (IA)	Oui, IS, IN	Non Normale	$\overline{IN} > \overline{IA} \approx \overline{IS}$	Non	Non Normale	$\overline{IN} > \overline{IA} > \overline{IS}$
Inertie Normalisée (IN)	Oui, IA, IS	Normale	$\overline{IN} > \overline{IS}$ $\overline{IN} > \overline{IA}$	Oui, IA, IS	Non Normale	$\overline{IN} > \overline{IS}$ $\overline{IN} > \overline{IA}$

Tableau 50 : Synthèse des simulations

d) La dernière partie de ce chapitre a montré que la combinatoire dans le cadre de petits déplacements des définitions des inerties 3D standardisées et normalisées a une corrélation forte par rapport à l'exigence fonctionnelle, sous la condition que les lots assemblés soient homogènes. Concernant les développements de la synthèse des tolérances, nous avons considéré la définition de l'inertie standardisée qui présente l'avantage d'être évidente mathématiquement. Au contraire de l'inertie normalisée, qui demanderait à définir le critère de maximum des points mesurés. Cette synthèse a été réalisée en considérant une répartition des écarts maximums d'une surface. Cette approche semble intéressante pour exprimer l'inertie d'un composant à partir d'une inertie fonctionnelle cependant elle manque de flexibilité. Des travaux complémentaires seraient donc a priori nécessaires pour rendre cette approche plus subtile et pour vérifier que cette définition permet de garantir l'exigence fonctionnelle spécifiée. Néanmoins à

[13] Dépendant de la variabilité des points palpés

court terme, il est possible d'envisager que la synthèse des tolérances soit exprimée dans un contexte mathématique autre que celui de l'inertie 3D. Donc, réaliser une détermination de l'inertie 3D du composant à partir de cette synthèse. Aujourd'hui, il est sans doute plus abordable de considérer une transition du contexte des petits déplacements à celui de l'inertie 3D standardisée. Nous formulerons donc dans le chapitre V, une proposition de synthèse des tolérances.

De façon générale, une des perspectives à ce travail serait d'apporter une comparaison des définitions de l'inertie 3D sur des assemblages de lots de composants ayant des défauts de formes. La littérature scientifique présente déjà différentes approches d'analyses dans ce cadre.

Ce chapitre a permis de mettre en évidence deux axes que nous proposons d'aborder dans les chapitres suivants :

- En considérant, une utilisation de la définition de l'inertie 3D Standardisée comme indicateur des défauts d'une surface. Nous proposons dans le chapitre suivant un outil d'aide à la correction de moyens de production afin de réduire les défauts d'une surface définie par l'inertie 3D standardisée.
- La synthèse des inerties 3D Standardisées peut être rendue plus flexible. En considérant dans un premier temps un contexte mathématique basé sur les petits déplacements à partir duquel nous en déduisons les valeurs de l'inertie 3D de chaque composant. Cette étude est proposée dans le dernier chapitre de cette thèse.

6 Bibliographie

[118] ISO 5458, [1998], "Geometrical Product Specifications (GPS) -- Geometrical tolerancing -- Positional tolerancing", ISO

[119] Anselmetti B, [2003] "Tolérancement – Langage des norms ISO de cotation- Volume 1", Edition Lavoisier, ISBN : 274620665-X

[120] Adragna P.A, "Tolérancement des systèmes Assemblés, une approche par le tolérancement inertiel", Thèse, Université de Savoie, France, 2007

[121] CETIM, [1998], “Tolérancement et métrologie dimensionnelle ”, Edition CETIM, ISBN : 285400440-X

[122] Cvetko R, and al, [1998], “New metrics for evaluating Monte Carlo tolerance analysis of assemblies”, Proceedings of the ASME international Mchanical Engineering Conference and Exposition.

[123] Pillet M, [2007], “Six Sigma: Comment l’appliquer”, Edition organisations ISBN :9 782708130296.

[124] Saporta G, [2006], “Probabilités analyse des données et statistique”, Edition TECHNIP, ISBN : 2710805650

[125] Pillet M, [2006], “Monographie du tolérancement inertiel”, http://web.qlio.univ-savoie.fr/pillet/Fichiers/Monographie%20sur%20le%20tol%C3%A9rancement%20inertiel%20version%2003.pdf

[126] H. SCHEFFE - "The analysis of variance", John Wiley & sons, New York – (1959) CIRP Annals - Manufacturing Technology Volume 47, Issue 1, 1998, Pages 451-454

[127] Persepoli L, [2004], “Tolérancement des mécanismes flexibles, Application à une aile de carroserie”, Mémoire pour obtenir le diplôme d’ingénieur conservatoire national des arts et metiers en mécanique des structures et des systèmes, Cetre agrée de Grenoble (CUEFA) Antenne d’Annecy.

[128] Sellem E et al, [1998], « Tolerance analysis of deformable assemblies », proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, Atlanta, USA, 1998

[129] Shiu B.W et Al, [2003],« Tolerance allocation for sheet metal assembly using beam-base model », Transaction of the IE Journal of engineerins and Technology, Industrial and Production engineering, vol. 35,4,pp 329-342, 2003.

[130] Merkley K.G, “Tolerance Analysis of Compliant Assemblies”, dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, Brigham Young University, 1998.

[131]Favrelière H, [2009], “Tolérancement modale de la métrologie vers les specifications”, Thèse de l’Université de savoie.

[132]Gutpta S and al, [1993], « Variational solid modelling for tolerance analysis », IEEE comuter Graphics & Applications, Vol 17, 1993, pp 64-74.

[133]Radouani M, «Contribution à la validation des chaînes de cotes », thèse ENS Cachan, 2003.

[134]Lee et al, [2006], « The modeling and analysis of butting assembly in the presence of ,workpiece surface roughness and part dimensional error », Internation Journal of Manufacturing technology, Vol. 31, 528-538.

[135]Ameta G. and al, [2007], « Influence of Form Frequency Distribution for 1-D clearance Which is Generated from Tolerance Maps », Proceedings of the 10th CIRP Conference on Computer Aided tolerancing, Erlanger, Germany, 2007.

[136] Giordano M and Duret D, [1993], "Clearance space and deviation space. Application to three dimensional chain of dimensions and position", 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, pp 179-196.

[137] Germain F, [2007], "Tolérancement Statistique tridimensionnel, integration en CFAO", Thesis, University of Savoy, France

[138] Wang, FK, Hubele Norma, [1998], *Quality Evaluation using geometric distance approach*, International Journal of Reliability, Quality and safety Engineering, 6,2, 139-153.

[139] X.Jiang and al, [2007], "Freeform Surface Characterisation – A fresh strategy", Annals of the CIRP, vol 56-1.

[140] Weckenman A and al, [1998], "The Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements ", Annals of the CIRP, vol 47-1, 451-454.

[141] Chang-Xue JF and al, [2007], "Design and analysis of experiments in CMM measurement uncertainty study", Precision Engineering, 31, p 94-101.

[142] Woo TC and al, [1993], "Dimensional measurement of surfaces and their sampling", Computer aided design, April, 25, 4, p 233-239.

[143] Adragna PA, [2007], « Tolérancement des systèmes assemblés, une approche par le tolérancement inertiel et modal », Thèse de l'université de Savoie.

[144] Coles, Stuart, [2001], "*An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*",. Springer-Verlag. ISBN 1-85233-459-2.

7 Annexes

7.1 Rappel statistique

7.1.1 Calcul des moments d'ordre n

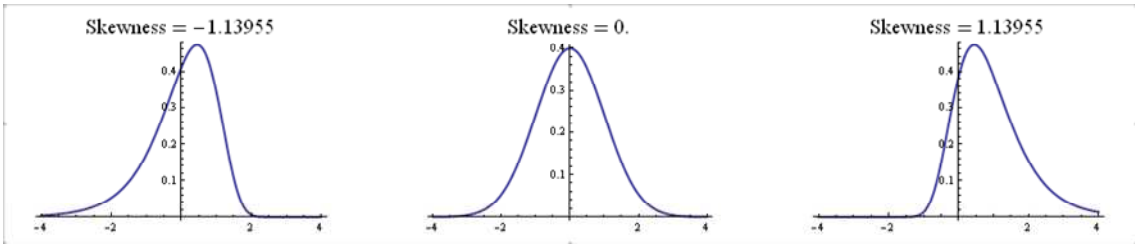
Une variable aléatoire peut être définie à partir de tous ses moments d'ordre n. En effet, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X, qui est la transformée de fourrier de sa loi de probabilité, est définie par la relation suivante : [124].

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} i^k E(X)^k \tag{89}$$

Pour en déterminer une approximation, nous utilisons couramment le moment d'ordre 1 « la moyenne μ » (Tableau 51) et le moment centré d'ordre 2 « la variance-V », ou sa racine carrée « l'écart type σ ». De plus, nous nous intéresserons au moment centré normé d'ordres 3 et 4 qui correspond au skewness γ_1 et au kurtosis γ_2.

Le premier permet de qualifier la symétrie de la distribution de la variable aléatoire quant au second qualifie l'aplatissement de la distribution, autrement dit, il mesure l'importance des queues de distribution.

En général pour une distribution statistique normale, les valeurs du Kurtosis sont aux environs de 3 et le Skewness est proche de 0, du fait de la symétrie de la distribution. Ces valeurs données à titre indicatif nous permettront de nous informer sur l'hypothèse de normalité de la distribution à contrario des tests de normalité usuelle. En effet, nous pensons que des développements mathématiques sont nécessaires pour confirmer la tendance statistique d'un lot de paramètres. Les figure 57 et figure 58 présentent les degrés d'aplatissement et de dissymétrie pour un Skewness et Kurtosis donnés.



Négative (γ_1<0) Symétrique (γ_1=0) Positive (γ_1>0)

figure 57 : Valeur du Skewness, coefficient de dissymétrie, pour différente distribution statistique.

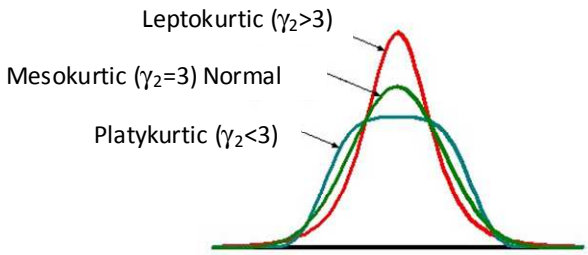


figure 58 : Valeur du Kurtosis, coefficient d'aplatissement, pour différente distribution statistique.

Moment d'ordre	Nom	Formulation
1	Moyenne	$\mu_i = E[X]$
2	Variance	$V_i = E[(X-\mu_i)^2]$
3	Skewness	$\gamma_1 = \frac{E[(X-\mu_1)^3]}{\sigma^3}$
4	Kurtosis	$\gamma_2 = \frac{E[(X-\mu_1)^4]}{\sigma^4}$

Tableau 51 : Tableau récapitulatif des moments d'ordres

Ces quatre moments d'ordres seront utilisés dans les simulations à venir.

7.1.2 Corrélation simple

L'idée est de définir l'existence d'un lien entre chaque définition de l'inertie 3D. Ce lien peut-être quantifié à l'aide d'une mesure numérique unique qui permettra d'établir des comparaisons entre la force des liens linéaires unissant diverses paires de définitions.

La mesure qui permet de quantifier la force de ce lien linéaire s'appelle coefficient de corrélation

7.1.2.1 Coefficient de corrélation simple

On définit le coefficient de corrélation simple par:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{90}$$

Où σ_x est l'écart type de la variable X.

Et σ_{xy} est la covariance entre les variables X et Y tu es sur de la notation ? pas s^2xy

On se rappellera que:

$$\sigma_{xy} = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right] \tag{91}$$

Et

$$V_x = \sigma_x^2 = E\left[(X - \mu_x)^2\right] \tag{92}$$

μ_x et μ_y sont les moyennes des variables X et Y.

La variance mesure la dispersion (carrée) moyenne autour de la moyenne de la variable X. L'écart-type (σ) en est la racine carrée. La covariance mesure si les dispersions des deux variables autour de leurs moyennes se produisent indépendamment (covariance nulle) ou si elles sont liées (positivement ou négativement).

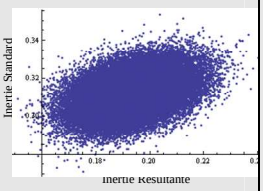
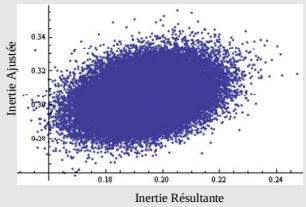
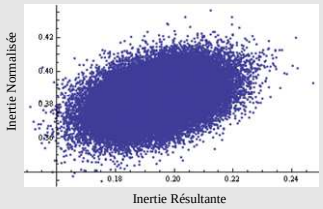
En fait, covariance et corrélation sont deux notions sœurs. Toutefois, alors que la covariance possède des unités et, conséquemment, varie selon le choix des unités de mesure, la corrélation, elle, est sans unité, et est donc invariable face au choix des unités de mesure.

7.2 Relation entre l'inertie 3D et la condition fonctionnelle

7.2.1 Variation d'un ensemble de paramètres.

Cet exemple est dans le même esprit que celui présentée dans la partie Variation du paramètre de translation.4.2.1 pour lequel nous avons fait varier une seule composante du

torseur écart (Tz). Dans cette partie, nous avons introduit une variation des composantes rx et ry de chaque composant Ci en plus du Tz. Ces paramètres suivent une loi de distribution normale de paramètres 0 et d'écart type 0.1.

	Inertie Standard	Inertie Ajustée	Inertie Normalisée
Inertie Résultante			
Matrice de corrélation	$\begin{pmatrix} 1 & 0.39 \\ 0.39 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.32 \\ 0.32 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.38 \\ 0.38 & 1 \end{pmatrix}$

Nous observons ici que la corrélation entre les définitions de l'inertie 3D et celle de l'inertie résultante ne sont pas importante (inférieur à 0.39).

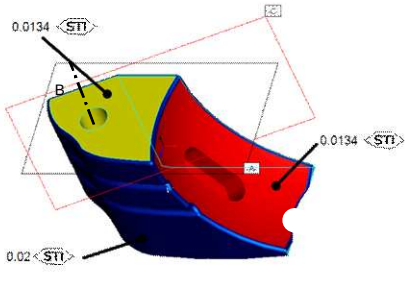
Chapitre IV

Inertie Totale

Comprendre l'inertie totale à travers le tolérancement et son utilisation en production

« Chaque science, chaque étude, a son jargon inintelligible, qui semble n'être inventé que pour en défendre les approches. » Voltaire – Extrait de « Essai sur la poésie épique »

« Si tu es contraire au bon sens fait demi-tour, tu vas te perdre ! » — Maurice Pillet



1 Introduction

D'un point de vue global, le tolérancement géométrique [145][146] est un langage de description de la géométrie d'une pièce que l'on souhaite réaliser. Ces dernières années, ce langage a évolué fortement pour atteindre un niveau de subtilité pouvant parfois présenter des incohérences [147][148]. Cependant, dans sa forme actuelle, il permet de bien représenter les limites fonctionnelles des caractéristiques [149]. Néanmoins, dans son utilisation quotidienne, il fait souvent l'objet d'innombrables discussions et interprétations, que ce soit dans les services de bureau d'études, de qualité ou de production. [150][151]

Un des fondements du raisonnement du tolérancement actuel consiste à ignorer l'information contenue dans la spécification cible du produit. En d'autres mots, le tolérancement géométrique déduit des exigences fonctionnelles de l'assemblage peut apparaitre aussi bien sur un dessin papier que sur un dessin réalisé en CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Pourtant, les informations de la géométrie cible sont plus pertinentes et exploitables sur un fichier CAO alors qu'elles le sont moins sur une représentation papier. Il est curieux que les démarches de tolérancement actuelles ne prennent pas en compte cet état de fait.

D'autre part, le tolérancement géométrique actuel est pensé pour définir la conformité d'une production. Il est difficile de piloter une production mécanique en s'appuyant sur un dessin de définition conforme aux règles du tolérancement géométrique. Cela oblige les services méthodes à un travail de transfert, entre le plan de définition et les instructions de pilotage, très chronophage. Ce travail supplémentaire est très souvent incompatible avec les contraintes actuelles dont la nouvelle tendance, nommée « lean design », est de raccourcir les délais d'industrialisation. Un des fondements de cette approche étant la suppression des opérations sans valeur ajoutée, nous pouvons considérer que la représentation actuelle du tolérancement géométrique peut être potentiellement génératrice de gaspillage, dans le cas où l'approche n'est pas maîtrisée.

Ces deux visions nous amènent à nous poser les questions suivantes :

« À l'ère numérique, avons-nous la capacité de maîtriser la production de produits finis en simplifiant le tolérancement géométrique ? »

« Comment définir une spécification permettant de définir la conformité d'un produit tout en restant compatible avec les impératifs de la production ? »

Notre réflexion nous a mené à introduire les bases d'un nouveau tolérancement de surface que nous nommerons « Inertie Totale ». Cette nouvelle approche de tolérancement peut être vue comme une évolution du tolérancement géométrique actuel.

Dans ce chapitre, nous proposons d'introduire le concept d'inertie totale appliquée à la fabrication de composants. Ce concept présente l'inertie totale comme une approche transversale aux domaines numériques de la conception et de la production.

L'inertie totale est illustrée en trois parties :

a) La première partie propose d'introduire le fil conducteur nous ayant mené au concept d'inertie totale. Nous énoncerons successivement les problématiques industrielles actuelles et nous présenterons le concept d'inertie totale.

b) La seconde partie porte une vision sur le pilotage de procédé complexe avec l'inertie totale. Dans cette partie, nous soumettons une méthode originale permettant d'apporter une aide à la correction d'un procédé de fabrication complexe (presse à injecter, fraiseuse 5 axes…) de façon instantanée. L'objectif de cette approche est de donner le meilleur réglage, quels que soient la forme et le défaut mesurés de la pièce.

c) La troisième partie regroupe trois exemples industriels de l'approche présentée dans la partie précédente.

2 Pourquoi l'Inertie totale ?

2.1 Problématique générale

Le tolérancement géométrique est un langage permettant de conditionner les variations de la géométrie cible (une surface) par une bilimite. Cependant, en raison de ses subtilités, ce langage est difficile à exploiter en production. Si le tolérancement géométrique actuel permet de bien représenter les limites fonctionnelles des caractéristiques [152], on peut lui reprocher d'aboutir à des spécifications assez difficiles à respecter en production, car éloignées des paramètres de réglage des machines. Il y a un contraste entre la conformité

exprimée par un ensemble de spécifications géométriques (tolérancement) et les possibilités du moyen de production à respecter ces spécificités.

Pour illustrer ce point, considérons la localisation d'un alésage (figure 59). D'un point de vue fonctionnel, cette localisation est bien représentative, mais en production, le pilotage des moyens de production implique souvent deux déplacements en X (outil : C1) et Y (outil : C2) par exemple. Il y a donc nécessairement un transfert de caractéristique pour passer de la spécification fonctionnelle du produit à la spécification de production. Ce transfert conduit inévitablement à une réduction de la variabilité permise, et à un temps d'industrialisation non négligeable.

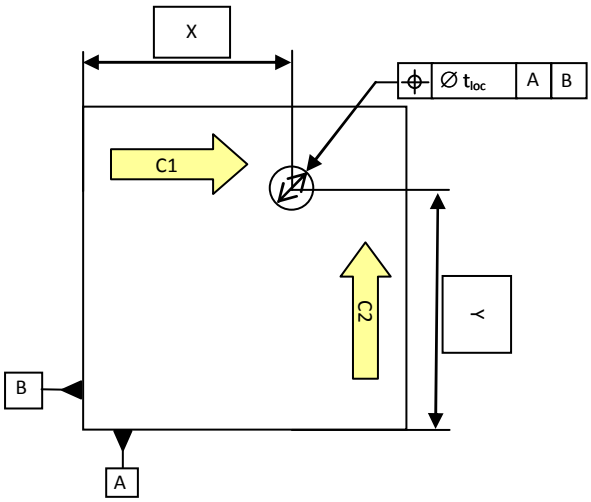


figure 59 : Localisation d'un alésage

Le second inconvénient du tolérancement par zone est dans sa compatibilité avec une répartition statistique des tolérances. Comme les écarts types ne s'additionnent pas, le cumul de plusieurs zones de tolérances ne peut pas représenter correctement un calcul statistique [120]. Avec le tolérancement inertiel, la représentation quadratique des écarts à la cible est plus adaptée à modéliser le comportement statistique d'un assemblage qu'une représentation par zone.

Ce chapitre élargit le principe de l'inertie au niveau de l'ensemble du produit. Nous proposons une évolution dans la façon de tolérancer les caractéristiques des produits avec les normes actuelles tout en respectant la fonctionnalité attendue. Nous partons du point de vue que l'on peut simplifier considérablement le langage du tolérancement si l'on considère que l'information intrinsèque de la cible est contenue dans le modèle numérique CAO

(Conception Assistée par Ordinateur). En effet, toutes les méthodes actuelles ne tiennent pas suffisamment compte des évolutions récentes des technologies. Aujourd'hui, nous disposons de modèle numérique donnant l'image cible souhaitée, de machines à commande numérique, de machines de mesures tridimensionnelles, mais l'évolution des méthodes de tolérancement n'a pas totalement intégré ce fait numérique.

Outre la simplification dans le mode de représentation de la fonctionnalité attendue et la meilleure modélisation des combinaisons statistiques des tolérances, nous montrerons que le tolérancement inertiel total permet de spécifier les tolérances d'une façon parfaitement compatible avec le pilotage des productions, éliminant ainsi le besoin de transfert de caractéristiques et limitant le travail d'industrialisation.

2.2Introduction à l'inertie totale

2.2.1 Problématique du tolérancement GPS

Sous l'hypothèse d'une absence de variabilité liée à la production, le tolérancement n'est pas nécessaire, il suffit d'indiquer les valeurs cibles que l'on souhaite. Le transfert d'information relative au tolérancement d'un modèle numérique vers un autre modèle n'est pas toujours trivial et explicite. De ce fait, le seul modèle numérique cible est en lui-même porteur de toutes informations.

Malheureusement, cette hypothèse d'absence de variabilité du moyen de production n'est pas réaliste, et il est nécessaire de spécifier la variabilité que l'on accepte autour de la valeur cible souhaitée. L'analyse fonctionnelle conduit à identifier l'influence des variations d'une surface par rapport à une autre surface sur les fonctions attendues du produit. Pour limiter ces variations, la pratique actuelle du tolérancement conduit à décrire la géométrie à partir d'un paramétrage de la géométrie du produit. Ainsi, le produit est conforme si la surface réelle est comprise entre deux zones géométriques issues du paramétrage de l'assemblage. [154][155].

Dans les cas de géométries complexes telles que les surfaces gauches (cf. : figure 60), de nombreuses entreprises ont déjà abandonné la description exhaustive de la géométrie de la pièce pour n'indiquer comme spécification qu'une tolérance de forme par rapport à la géométrie idéale contenue dans le modèle numérique (cf. : figure 60). La figure 60 illustre le tolérancement de la forme d'une surface. Nous pouvons observer la complexité de sa

compréhension lorsque l'ensemble des informations est détaillé. Cependant, on peut souligner une redondance dans l'information. En effet, si le dessin est à l'échelle, il est possible d'en déduire les paramètres de la géométrie cible.

La question qui peut se poser alors est la suivante : si cette pratique peut donner de bons résultats sur des surfaces complexes (cf. partie pilotage) ne pourrait-on pas l'étendre aux cas de géométries plus simples ?

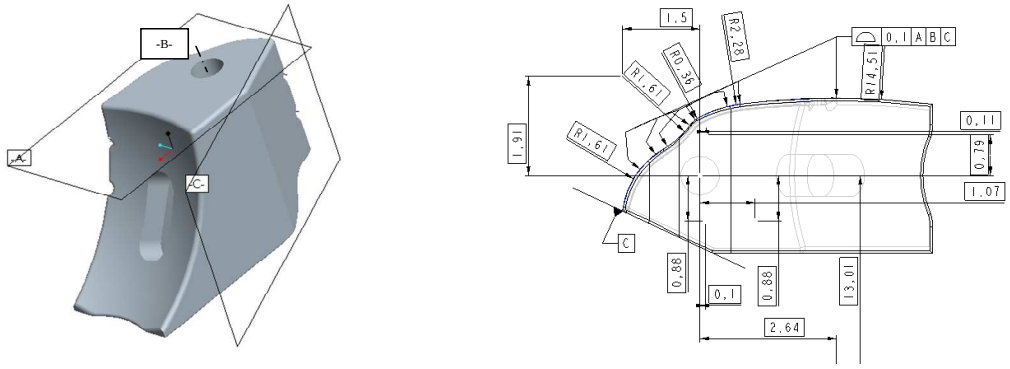


figure 60 : Exemple de tolérancement d'une surface gauche

2.2.2 Définition de l'inertie Totale

La logique du tolérancement inertiel total s'inscrit dans une démarche où :

On part de l'hypothèse que la géométrie définie par le modèle numérique est la situation idéale, et que le besoin fonctionnel consiste à limiter les écarts par rapport à cette géométrie idéale.

Une première réponse pourrait être donnée avec les approches géométriques actuelles en généralisant le tolérancement par défaut de forme. Cependant, dans le cas 3D, comme dans le cas 1D, le tolérancement par zone n'est pas compatible avec une approche statistique des tolérances. Notre proposition consiste donc à étendre le principe du tolérancement inertiel et à tolérancer la variabilité des écarts à la cible en fixant un seuil maximum à la moyenne des écarts quadratiques à la cible sur un nombre fini de points uniformément répartis sur la surface.

Ainsi, pour une surface i, l'inertie est calculée suivant la définition de l'inertie 3D standardisée, nous la rappelons ici :

$$I_i = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_{ij} - T_j\right)^2} = \sqrt{\sigma_i^2 + \left(\overline{X_i} - T\right)^2}\ , \qquad (93)$$

Dans cette relation (illustrée :figure 61), nous définissons par X_{ij} la mesure j sur la surface i ; σ_i est l'écart type des mesures sur la surface i ; T, la cible au point considéré ; n est le nombre de mesures sur la surface et Ii est l'inertie de la surface i. La figure 61 est une illustration du défaut d'une surface pour laquelle nous calculons l'inertie.

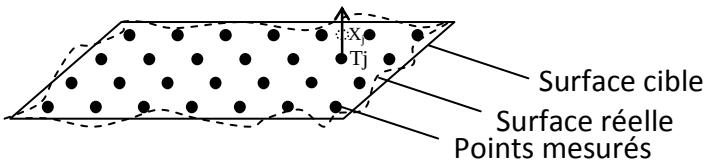


figure 61 : Définition de l'inertie totale

Contrairement à la spécification traditionnelle par zone, la mesure de la variabilité autour de la cible permet de mieux représenter le comportement statistique d'un assemblage. [156]

De même, nous avons montré dans le chapitre Inertie 3D, les avantages de l'utilisation de l'inertie 3D standard et ses limites, par l'équation (93), nous en proposons une généralisation aux surfaces.

2.2.3 Spécification d'une pièce en inertie totale

Le tolérancement inertiel global définit des « sous-ensembles fonctionnels cohérents ». Pour chacun de ces sous-ensembles, on définit la variabilité maximale que l'on accepte (inertie maximale) par rapport à la cible numérique. Le tolérancement consiste donc à identifier ces sous-ensembles fonctionnels, qui seront repérés par des couleurs différentes, à travers un repère de référence qui correspond au repère d'expression des écarts, et à tolérancer l'inertie maximale pour chacun de ces sous-ensembles.

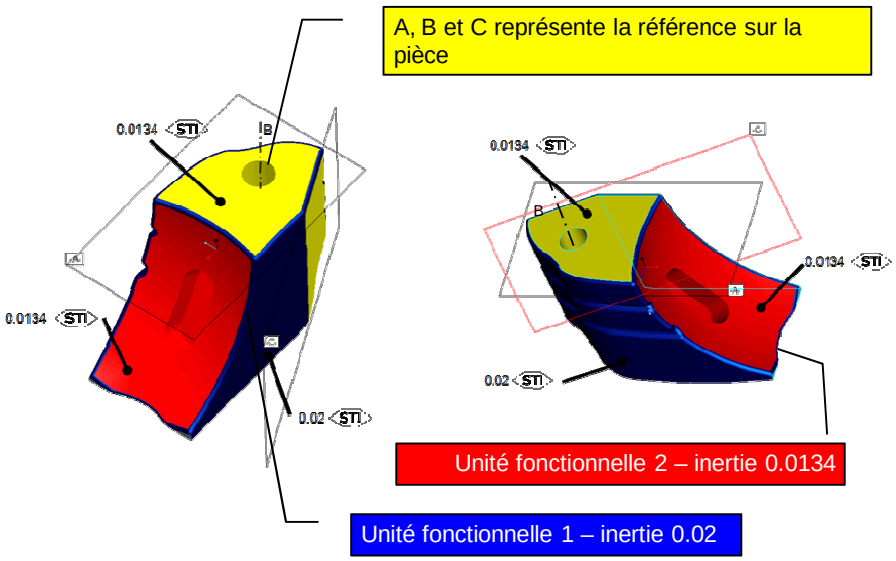


figure 62 : Spécification d'une pièce gauche en inertie totale

La figure 62 donne un exemple de représentation d'une pièce entièrement spécifiée en inertie totale. Dans cet exemple, la référence de la pièce est définie de façon ordonnée par :

a) Le plan A

b) L'axe B

c) Le plan C

Ces trois surfaces forment un premier sous-ensemble fonctionnel. L'inertie de cette zone est de 0.0134. Pour calculer les écarts par rapport à la cible, on « balance » la forme idéale de la pièce au moindre carré successivement par rapport à la surface A sur les trois premiers degrés de liberté, puis à la l'axe B ensuite au plan C.

La pièce cible étant positionnée, la spécification 0.0134 signifie que la racine carrée de la moyenne quadratique des écarts entre la pièce réelle et la pièce cible, mesurée selon la normale à la surface, doit être inférieure à 0.0134.

Pour les deux autres sous-ensembles fonctionnels bleus et rouges, on spécifie également l'inertie maximale que l'on peut accepter. La surface rouge ayant une exigence fonctionnelle plus importante, son inertie est plus faible.[157][158]

Dans l'exemple de la figure 3, la pièce ne comporte qu'une seule référence, cependant, il est tout à fait envisageable de définir sur la pièce plusieurs références et de préciser pour chaque sous-ensemble fonctionnel la référence qui permet de positionner la surface cible.

2.3Intérêt d'une spécification en inertie totale

L'approche de tolérancement en inertie totale est compatible avec les normes GPS (Spécification Géométrique des Produits) actuelles. Comme dans le cas de l'inertie simple qui a été normalisée [159], il est tout à fait possible d'utiliser l'inertie totale dans un cadre GPS. L'intérêt est de privilégier la représentation en inertie totale par rapport aux spécifications géométriques classiques. Cet intérêt porte sur plusieurs points.

a) La rapidité de spécification

La spécification d'un seul critère portant sur l'ensemble des surfaces d'un sous-ensemble fonctionnel est beaucoup plus rapide à réaliser par un tolérancement en inertie totale. Au contraire des spécifications géométriques actuelles, qui décomposent ces surfaces en éléments géométriques élémentaires et les contraignent entre eux.

b) La facilité de lecture et de compréhension du plan

La spécification fonctionnelle GPS conduit souvent à des plans dont la complexité de lecture et d'interprétation est difficile.(cf. : figure 60) Il faut par exemple plusieurs journées de formation à des étudiants post bacs pour être capables d'interpréter correctement un plan tolérancé suivant les normes GPS[150]. En inertie totale, chaque sous-ensemble fonctionnel est identifié par une couleur. L'inertie globale du sous-ensemble fonctionnel spécifiée en un seul paramètre permet de hiérarchiser très facilement l'importance relative de chaque sous-ensemble.

c) La facilité de mesure sur les machines de mesures tridimensionnelles

L'inertie est extrêmement proche de la façon dont on utilise les machines de mesures tridimensionnelles. Dans le cas d'un contrôle par inertie, il suffit de palper des points équirépartis sur l'ensemble de la surface, et de mesurer l'écart entre la pièce idéale et la pièce réelle. La mesure en inertie totale élimine de nombreux problèmes d'associations d'éléments géométriques.

d) La cohérence avec le pilotage des machines que nous présenterons dans la partie suivante

Un des reproches souvent formulés aux spécifications GPS est la difficulté rencontrée par les fabricants à passer d'un plan au pilotage d'une machine. Le tolérancement géométrique GPS décrit bien la conformité d'un produit, mais n'est pas adapté au pilotage de machines. Nous mettrons en évidence la simplification du pilotage (réglage) d'une machine ainsi que la cohérence entre la spécification de l'inertie totale et le pilotage des outils de productions.

3 Régler une production en inertie totale

3.1 Problématique du pilotage

Lors de la production, l'opérateur (ou régleur) a pour mission d'assurer la conformité de l'ensemble des spécifications des pièces d'un ordre de fabrication, dans un délai défini avec un objectif de rebut quasi nul. En plus de ces exigences, il doit assimiler la variabilité de son procédé et les paramètres les plus pertinents lors d'une situation de non-conformité. En bref, le respect de ces exigences va dépendre essentiellement de la connaissance et de l'habileté de l'opérateur à pouvoir régler au mieux son procédé dans les délais impartis.

Cependant, la complexité grandissante des pièces à réaliser couplée à celles des procédés de fabrication influe fortement sur ces capacités à corriger l'ensemble des écarts d'une pièce par rapport au modèle numérique cible.

En conséquence pour enrichir les capacités de l'opérateur, il est nécessaire de développer des outils mathématiques permettant de réduire ces complexités. C'est à dire, un outil ayant la capacité de proposer une correction totale des écarts par rapport au modèle numérique, à partir d'un ensemble de points mesurés.

Nos réflexions et différents échanges extérieurs nous ont permis d'identifier trois méthodes de minimisation des écarts :

a) La première approche consiste à positionner spatialement le volume du modèle numérique dans un volume de matière brute (défini suite à un palpage) en respectant un ensemble de contraintes prédéfinies [160]. Ces contraintes peuvent être de types fonctionnels, physiques, liés à la fabrication (ex. : un enlèvement de matière de 0.1 mm au maximum)… Ce positionnement se

modélise mathématiquement par une matrice de roto translation entre le repère du volume de la pièce brute (figure 63 : R_0) et celui du modèle numérique (figure 63 : R_1). On peut appliquer cette approche à l'exemple d'un brut de fonderie que l'on souhaite usiner en respectant une contrainte d'enlèvement de matière constante.

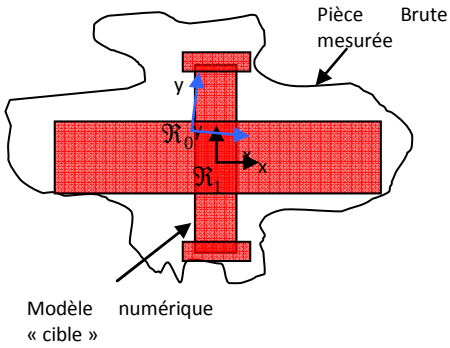


figure 63 : Positionnement spatiale du modèle numérique dans un brut palpé

b) La seconde approche consiste à considérer la trajectoire de l'outil comme fixe (non adaptative : figure 64 : Trait mixte), mais pouvant être influencée par les variations des paramètres d'outils (Exemple l'usure de l'outil : figure 64 : Trait pointillé modification du correcteur de longueur CL et de rayon CR). Dans ces conditions, l'objectif est d'optimiser les correcteurs par rapport à l'ensemble des points mesurés.

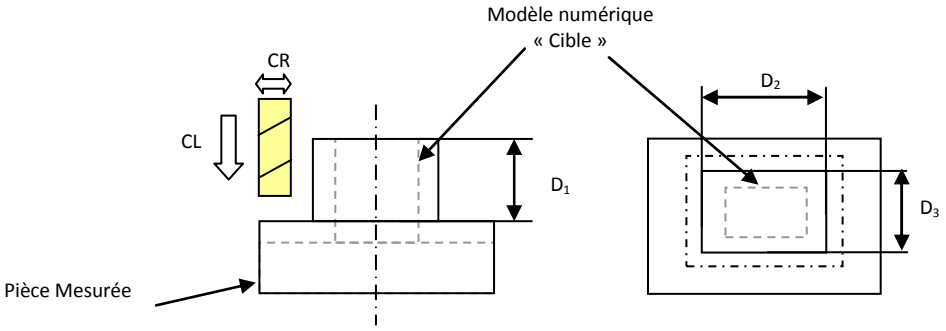


figure 64 : Correction des paramètres outils

c) La troisième approche consiste à adapter la trajectoire de l'outil [164][163] par rapport à l'ensemble des points mesurés. Par exemple, nous considérons une coque de bateau de 30 mètres de longueur dans laquelle nous souhaitons usiner

des hublots (figure 65). Lors de la phase d'usinage, celle-ci est positionnée de façon isostatique entraînant inévitablement une flexion de la coque. L'adaptabilité de la trajectoire de l'outil par rapport aux points mesurés permet de prendre en considération cette déformation. Ce phénomène physique est alors pris en compte lors de l'usinage de la forme des hublots, par conséquent le centre d'usinage usine des hublots sous une forme elliptique du fait de la flexion de la coque dans l'objectif d'être circulaire une fois la coque à flot.

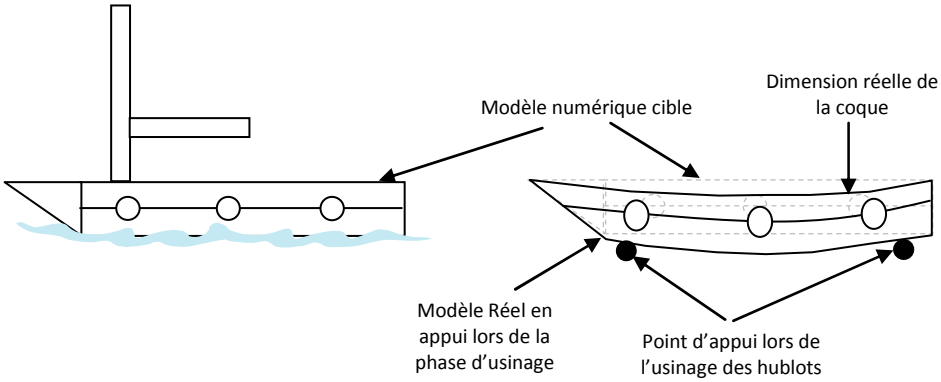


figure 65 : Correction de la trajectoire d'outil

Les approches a et c ont fait l'objet de développements récents. En effet, la collaboration entre la société Delcam et le Cetim[14] [161][162] a permis de proposer un outil numérique. En outre, de récents travaux scientifiques portent sur l'adaptabilité des trajectoires [163] dans le cadre de l'usinage et du prototypage rapide [164][165]. Cependant, à notre connaissance, peu de travaux [166] traitent du deuxième aspect, qui nous semble viable dans le contexte industriel régional.

Différentes rencontres ont mis en évidence le besoin industriel d'un outil permettant de résoudre ces problématiques de réglages induits par la variation des paramètres d'outils. C'est dans ce contexte que nous proposons d'introduire le prolongement du concept de l'inertie totale en production. Nous introduirons dans la partie suivante, une vision d'ensemble et proposerons d'introduire ensuite l'ensemble des outils utilisés pour mener à bien la correction des écarts mesurés et nous terminerons par quatre exemples d'applications industrielles.

[14] Centre Technique des Industries Mécaniques

3.2 Approche pilotage par l'inertie totale

L'objectif de toute production est d'être conforme aux exigences du plan (au modèle numérique). Cette exigence se matérialise par une cible numérique à laquelle nous spécifions un niveau de variabilité acceptable.

Étant donné que tout processus de production induit des dispersions, le pilotage des machines est nécessaire pour satisfaire le niveau de variabilité exigé. En réalisant un bilan sur l'environnement de production on constate que :

- Ces outils de production sont pilotés à travers un ensemble de variables d'actions, que nous noterons *C*. Par exemple, dans le cas d'une machine à commande numérique, ces variables d'actions seront les correcteurs d'outils, un recalage de l'origine programme ou une correction de programme. Dans le cas d'une presse à injecter ce seront plus tôt des variables processus telles que la pression de commutation, la température du moule…
- Le produit réalisé possède des écarts par rapport à son modèle numérique. Ces écarts sont représentés par un vecteur d'écarts entre la cible et la valeur réelle que nous noterons *E*. Ce vecteur contient l'ensemble des mesures réalisées et peut être de dimension importante (relative au nombre de points mesurés sur la pièce). Ainsi, la dimension d'un vecteur, *E*, peut être de plusieurs milliers de points dans le cas d'un scanning de la pièce, par exemple.

Nous proposons de lier ces deux paramètres *C* et *E* par une relation matricielle linéaire (94). Cette matrice, que nous nommerons matrice d'incidence *X*, représente la relation entre les variables d'actions *C,* et les variables d'écarts *E*. Par conséquent, connaissant l'une ou l'autre des variables (*C* ou *E),* il est possible d'en déduire l'autre :

$$E = X\ C\ . \qquad (94)$$

La construction de la matrice d'incidence *X*, dans le cas d'une commande numérique par exemple, est facile à calculer. Puisque l'objectif est de rechercher l'influence des correcteurs sur chaque écart d'un point mesuré. De même, dans le cas d'une presse à injecter, où les essais d'un plan d'expériences permettraient de déterminer de manière expérimentale la matrice d'incidence *X.*[167][168][169]

La relation (94) introduit une matrice d'incidence X, correspondant à la transition entre le vecteur des correcteurs et le vecteur des écarts de mesures. L'objectif est de rechercher les composantes du vecteur *C*, qui permettent de minimiser les écarts du vecteur *E*. Il est nécessaire de définir un critère d'optimisation. La proposition de Gauss apporte une réponse de minimisation au moindre carré qui se présente sous la forme :

$$C = \left(X^T X\right)^{-1} X^T E \,, \tag{95}$$

Avec X^T, la transposée de la matrice X, et X^{-1}, l'inverse de la matrice *X*.

On pourrait définir un autre critère d'optimisation (minimisation de l'écart maxi par exemple), mais l'intérêt de la minimisation des moindres carrés repose sur la cohérence entre la spécification de l'inertie totale sur le plan, et la problématique du pilotage des processus.

En effet, la minimisation des moindres carrés n'est autre qu'une minimisation de l'inertie totale. Contrairement au tolérancement géométrique traditionnel, il n'y a donc pas de transfert de paramètres à réaliser entre le plan de définition de la pièce et le pilotage en production. L'approche inertielle totale offre une approche cohérente de la spécification du besoin fonctionnel jusqu'à la production.

Nous proposons de détailler la construction d'une matrice d'incidence *X* dans la partie suivante, à partir de la relation définissant l'impact des correcteurs sur l'ensemble des points mesurés.

3.3 Définition de la matrice de relation X entre Correcteurs et Ecarts

La matrice d'incidence *X* est une composition d'un ensemble de correcteurs (C_i)[15] indépendants entre eux dont l'influence a été calculée pour chaque point mesuré.

De nos jours, il existe souvent une multitude de possibilités offertes par l'outil de production pour régler un procédé de fabrication. Dans cette partie, nous nous attachons à

[15] Le correcteur appelé C_i représente un correcteur *i* quelconque. Si le type de correcteur est connu, nous l'appellerons par son nom défini au préalable.

définir l'influence des correcteurs les plus utilisés à notre connaissance. (Correcteurs de types position *DEC*, longueur L, orientation *O,* rayon *R* ou courbure *RC*)

Il est à rappeler que nous considérerons dans toutes ces études que la trajectoire de l'outil est toujours la même, et que les correcteurs vont modifier la pièce usinée.

3.3.1 Correcteur de position (Dec)

La figure 66-a présente la localisation d'un alésage par rapport à un système de référence donné. Pour corriger la position du centre de l'alésage, il est possible de jouer sur deux correcteurs DEC_1 et DEC_2. Le premier permet de translater les coordonnées du centre du cylindre dans la direction *x,* le second permet une translation suivant *y*.

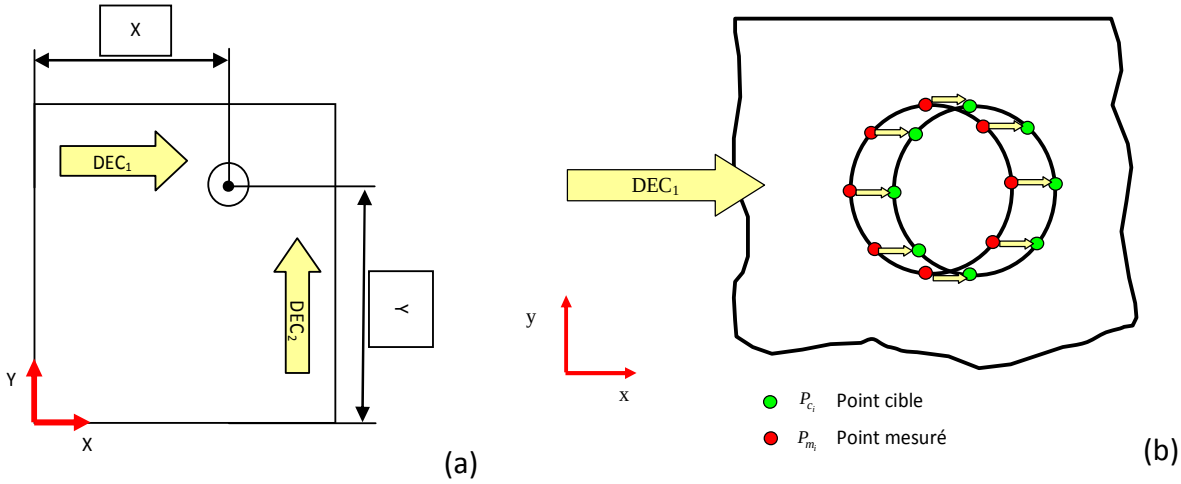


figure 66 : Localisation d'un alésage

La figure 66-b présente un alésage dont on souhaite corriger la position. Cet alésage est défini par un ensemble de 8 points. Les points verts correspondent aux points cibles du modèle numérique (Pc_i) et les points rouges correspondent aux points mesurés (Pm_i).

L'influence du correcteur DEC_1 est définie par son impact d'une unité sur les points mesurés suivant la direction de correction du correcteur $\vec{n}_i$.(cf. figure 66-b)

$$DEC_i = \left(\overrightarrow{Pm_i Pc_i}\right) \bullet \vec{n}_i \,, \tag{96}$$

où $\bullet$ représente le produit scalaire.

Ainsi, l'influence du correcteur est connue pour chaque point mesuré.

3.3.2 Correcteur de longueur (L)

Dans la figure 67 (a) une correction de longueur est proposée. La ligne pointillée correspond à la surface cible tandis que la ligne continue est la résultante des points mesurés. On observe un écart de type translation dû à l'outil représenté par un rectangle gris. La flèche représente la correction possible pour cet outil.

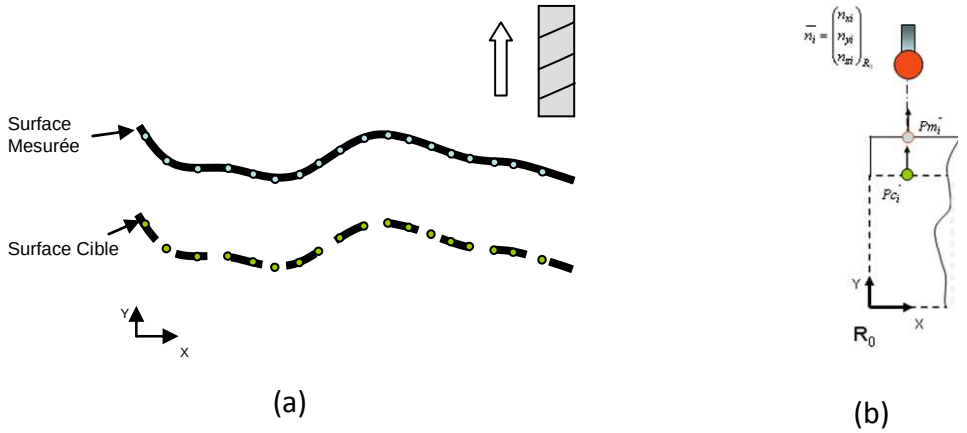


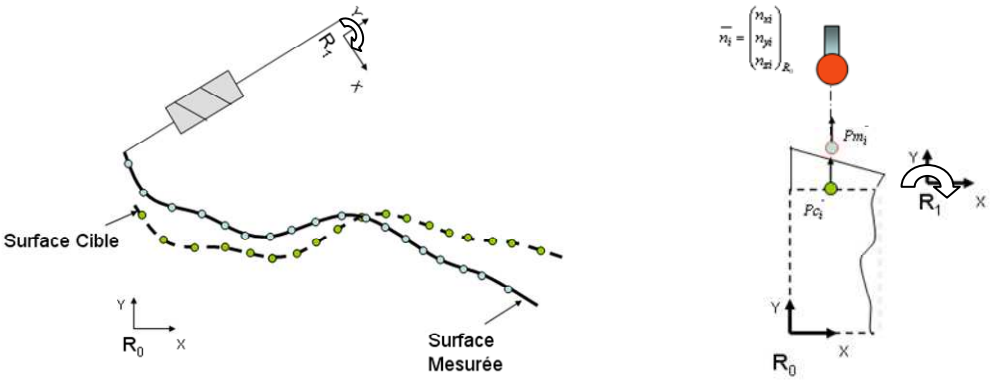
figure 67 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un outil de longueur

La figure 67 (b) présente le principe de mesure. Le point cible Pc_i est dans le repère R_0 et Pmi est un point appartenant à la surface réelle. L'écart entre la distance *Pci* et *Pmi* correspond à l'écart à corriger suivant la direction normale à la surface. Cet écart est défini suivant la direction d'accostage de la surface de la machine de mesures tridimensionnelles (*MMT*). Nous considérons que la direction d'accostage de la *MMT* est toujours perpendiculaire au point i appartenant à la surface réelle. Nous pouvons déduire l'écart *Ei* du point i dans le repère R_0 par une projection de l'écart entre les points Pc_i et Pm_i suivant le vecteur normal $\vec{n_i}$, soit :

$$L_i = \left(\overrightarrow{Pm_i Pc_i}\right) \bullet \vec{n_i}\ , \tag{97}$$

3.3.3 Correcteur d'orientation (O)

À la différence du correcteur de longueur, ce correcteur fait intervenir un deuxième paramètre qui est le centre de rotation. De ce fait, il est nécessaire de spécifier l'influence du correcteur dans le même repère d'expression que la mesure.



(a) (b)

figure 68 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un correcteur d'orientation

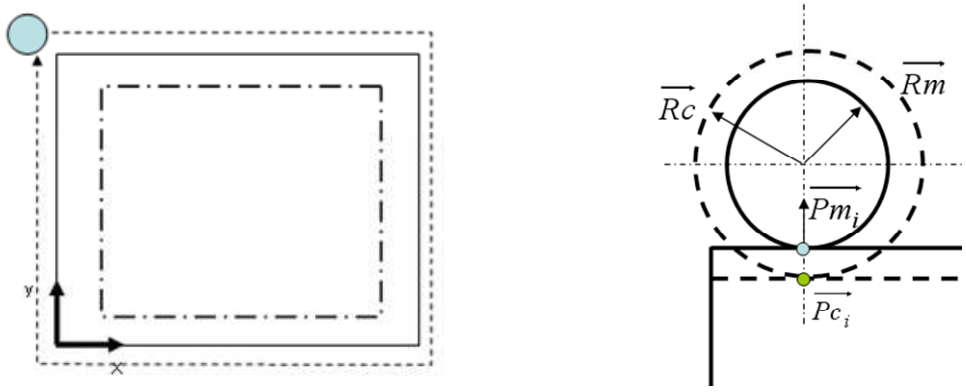
En supposant que les variations des surfaces restent dans un contexte des petits déplacements, nous pouvons en déduire la formulation :

$$O_i = \left(\overrightarrow{R_0R_1} + \left(\overrightarrow{Pm_iPc_i}\right)_{R_1} \wedge \overrightarrow{R_{mobilite}}\right) \bullet \vec{n}_i \ , \qquad (98)$$

dans laquelle, $R_{mobilite}$ est le degré de liberté en rotation de l'outil suivant un axe de rotation donné (x,y ou z.), $\vec{n}_i$ est le vecteur normal à la surface au point i, $\overrightarrow{R_0R_1}$ est le vecteur entre les repères R_0 et R_1.

3.3.4 Correcteur de rayon (R)

Le quatrième correcteur que nous proposons d'introduire et le correcteur de rayon (ou diamètre). Il est courant d'utiliser ce correcteur qui peut avoir un effet homothétique sur un contour de pièce. La figure 69 illustre l'effet de ce correcteur. Nous retrouvons la surface idéale en points mixtes, la trajectoire de l'outil par une flèche en pointillé et l'outil représenté par un cercle de couleur. La surface en ligne pleine continue correspond à la surface mesurée.



(a) (b)

figure 69 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un correcteur de rayon

La variation du diamètre de l'outil va influencer les écarts des points *i* suivant leurs normales. Cette influence est exprimée par la relation suivante :

$$R_i = \left(\overrightarrow{Pm_i Pc_i}\right) \bullet \vec{n}_i \Rightarrow r \bullet \left\|\vec{n}_i\right\|^2 = r \,, \tag{99}$$

r est le rayon de l'outil.

3.3.5 Correcteur de rayon de courbure (RC)

Ce dernier correcteur fait suite à une demande dans le cadre d'une application industrielle. Il a été demandé de prendre en compte dans cette approche la modification d'un rayon de courbure sur lequel un ensemble de points est palpé.

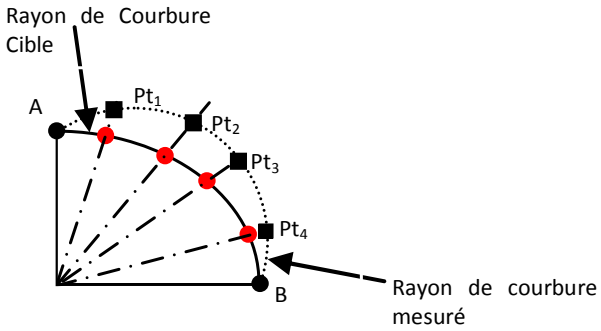


figure 70 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un correcteur de courbure

La figure 70 illustre le principe de la correction de rayon de courbure, l'idée est de considérer que les points extrêmes du rayon de courbure sont fixes et qu'ils appartiennent toujours à un cercle quelque soit le rayon.

Afin de déterminer, l'influence du correcteur de rayon de courbure sur un groupe de points, il est nécessaire de quantifier l'écart sur chaque point pour une augmentation du rayon de courbure d'une unité.

Nous allons schématiser l'approche utilisée pour définir la valeur de ces écarts sur chaque point appartenant au rayon de courbure.

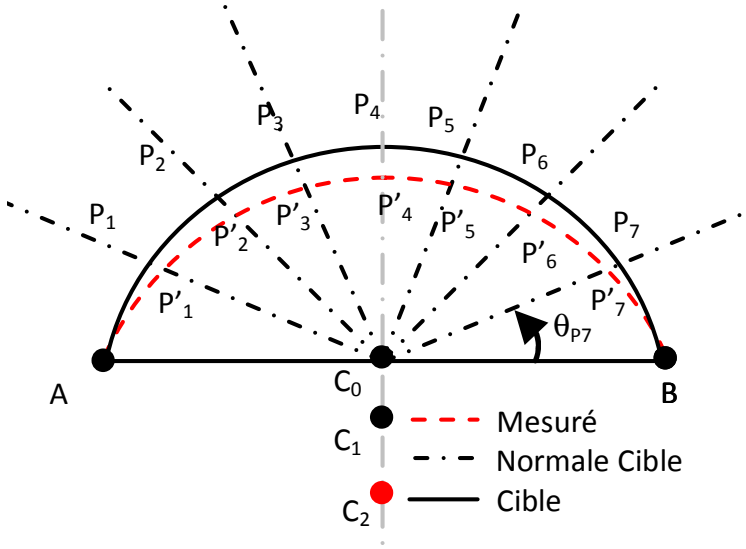


figure 71 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un correcteur de courbure

La figure 71 est une illustration de la problématique. L'objectif est de rechercher la valeur des écarts $\left\|\overrightarrow{P_iP_i'}\right\|$ pour un changement de rayon (*R+1*) où *R* est le rayon cible. Pour définir cet écart, il est nécessaire de déterminer la position des points P'_i mesurés suivant la normale de palpage et appartenant au rayon de courbure *R+1*. En somme, le point P'_i correspond à l'intersection de la droite correspondant à la trajectoire de palpage et au cercle auquel il appartient. Ainsi, on définit la trajectoire de palpage par l'équation (100) et celle du cercle par (101) :

$$-Y_{Pi} + X_{Pi}.\frac{\sin(\theta_{Pi})}{\cos(\theta_{Pi})} = -Y_{Pi} + X_{Pi}.\tan(\theta_{Pi}) = 0 \qquad (100)$$

,

où θ est l'angle entre le point BC_1P_i .

$$\left(X_{P_i}-a\right)^2+\left(Y_{P_i}-b\right)^2-\left(R+1\right)^2=0 \quad (101)$$

Dans l'équation précédente, a et b sont les coordonnées du centre du rayon de courbure *R+1* par rapport au centre du rayon *R*.

En remplaçant (100) dans (101), nous obtenons :

$$\left(X_{P_i}-a\right)^2+\left(\left(X_{Pi}.\tan\left(\theta_{Pi}\right)\right)-b\right)^2-\left(R+1\right)^2=0 \quad (102)$$

Ce qui correspond à une équation du second ordre dont les solutions *S1* et *S2* s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} Sx_1 \\ Sx_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{2\left(1+\tan\left(\theta_{Pi}\right)^2\right)}\left(2a+2b\tan\left(\theta_{Pi}\right)-\sqrt{\left(-2a-2b\tan\left(\theta_{Pi}\right)\right)^2-4\left(-1+a^2+b^2-2R-R^2\right)\left(1+\tan\left(\theta_{Pi}\right)^2\right)}\right); \\ \frac{1}{2\left(1+\tan\left(\theta_{Pi}\right)^2\right)}\left(2a+2b\tan\left(\theta_{Pi}\right)+\sqrt{\left(-2a-2b\tan\left(\theta_{Pi}\right)\right)^2-4\left(-1+a^2+b^2-2R-R^2\right)\left(1+\tan\left(\theta_{Pi}\right)^2\right)}\right) \end{Bmatrix}. \quad (103)$$

Nous retiendrons la solution Sx_2 adaptée au contexte d'étude. Ainsi, en posant a et b le centre du rayon *R+1* et θ_{Pi} la position angulaire du point P_i, il est possible de déterminer les coordonnées en *X* du point *P'i* par les relations (102) puis la coordonnée en *Y* par la relation (100).

$$P_i^{'}=\begin{pmatrix} Sx_2 \\ X_{Pi}.\tan\left(\theta_{Pi}\right) \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Maintenant, il est possible de définir les écarts $\left\|\overrightarrow{P_iP_i^{'}}\right\|$ pour chaque point dans l'hypothèse de la connaissance du centre *a*, *b* et de θ. L'angle θ est l'angle formé par la le segment P_iC_0 et le segment BC_0. Il est défini par la position du point que l'on souhaite mesurer. Au contraire, le centre *(a, b)* du rayon *R+1* est défini à partir des écarts mesurés et de la position du centre C_1 du rayon cible *R*. (cf. figure 71). Par conséquent, l'équation (101) dépend du centre du rayon de courbure *R+1*. La détermination du centre de ce rayon se fait en deux étapes : la première étape consiste à définir la distance entre les deux centres des rayons *R* et *R+1*. La seconde étape consiste à reporter cette distance suivant la direction inverse de la normale formée par l'angle φ (Angle :BC_1A). (cf. :figure 72).

3.3.5.1 Détermination de la distance entre centres

En posant C_0, le point médian de la corde *AB*, *C1*, le centre du rayon cible de courbure *R* ; et *C2* le centre du rayon de courbure *R+1*. Et, AC_0C_1 et BC_0C_2, deux triangles rectangles dont $\left\|\overrightarrow{AC_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC_0}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2}$, il est possible d'en déduire la distance séparant les rayons *C1* et *C2*.

Soit AC_0C_1, un triangle rectangle :

$$\left\|\overrightarrow{AC_0}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC_1}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_0C_1}\right\|^2 = R^2 - \left\|\overrightarrow{C_0C_1}\right\|^2, \quad (105)$$

En prenant en compte le triangle rectangle BC_0C_2 :

$$\left\|\overrightarrow{BC_0}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC_2}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_0C_2}\right\|^2 = (R+1)^2 - \left\|\overrightarrow{C_0C_2}\right\|^2 . \quad (106)$$

A partir de la relation de Chasles, on obtient au final :

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1C_0} + \overrightarrow{C_0C_2}$$

$$\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\| = \sqrt{(R+1)^2 - \left(\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2}\right)^2} - \sqrt{(R)^2 - \left(\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2}\right)^2} . \quad (107)$$

3.3.5.2 Détermination du centre (a,b) du rayon R+1

Pour définir les coordonnées du centre C_2, il est nécessaire de reporter la distance suivant la normale au segment *AB* dans la direction opposée, cependant le vecteur normal est déduit de l'angle formé par les segments AC_1B.

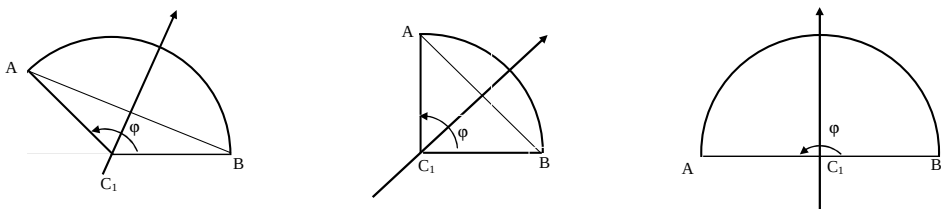


figure 72 : Représentation du principe de correction d'une surface avec un correcteur de courbure

Il est possible de déterminer l'angle φ composant le vecteur normal au segment *AB* :

$$\varphi = a\cos\left(\frac{\left\|\overrightarrow{BC_1}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right) \quad (108)$$

Donc, les coordonnées du centre C_2 peuvent être déduites par la relation suivante :

$$C_2 = C_1 + \left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|.\left(-\overrightarrow{n_{AB}}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|.\begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\\-\sin(\varphi)\end{pmatrix} \quad (109)$$

Maintenant à partir des équations (101) et (109), il est possible de déterminer les coordonnées du point *P'i*. L'influence du correcteur peut être déterminée sur chaque écart $\left\|\overrightarrow{P_iP_i'}\right\|$. Ainsi, pour l'exemple présenté figure 71 nous en déterminons le vecteur d'influence sur ces points :

	R= 5	A	P1	P2	P3	P4	B
	θ	90,00	72,00	54,00	36,00	18,00	0,00
P_i	X	0,00	1,55	2,94	4,05	4,76	5,00
	Y	5,00	4,76	4,05	2,94	1,55	0,00
P'_i	X'	0,00	1,48	2,76	3,80	4,56	5,00
	Y'	5,00	4,57	3,80	2,76	1,48	0,00
Ecart		0,00	0,20	0,30	0,30	0,20	0,00

Tableau 52 : Détermination du vecteur d'incidence

La dernière ligne du Tableau 52 présente le vecteur des écarts sur chaque point pour un rayon *R+1*. En l'occurrence, le vecteur d'incidence correspond aux écarts sur chaque point.

Cette liste de correcteurs n'est pas exhaustive et peut être complétée. En effet, c'est la capacité de réglage de l'outil de production et la gamme de fabrication qui permettront d'enrichir cette liste.

L'hypothèse forte de cette partie est que l'influence des correcteurs soit définie dans le même repère que celui des points mesurés, ce qui n'est pas souvent vérifié. Il est alors nécessaire de rechercher le lien entre le repère mesuré et le repère machine. Nous

proposons d'introduire dans la partie suivante, l'outil mathématique permettant d'exprimer dans le même repère les points mesurés et l'influence des correcteurs.

3.4 Repère d'expression des points

L'hypothèse forte de l'approche précédente est de considérer le repère machine confondu au repère mesure. Dans le cas contraire, il est nécessaire d'exprimer les points mesurés (exprimés traditionnellement dans le repère de mesure) dans le repère machine (celui de l'usinage de la pièce). L'idée est de rechercher la matrice de passage entre le repère de mesure et le repère machine.

Pour illustrer, nous proposons de résoudre l'exemple ci-dessous :

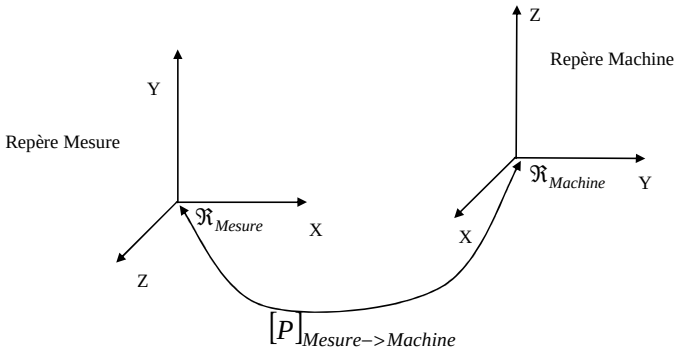


figure 73 : Exemple général d'un changement de repère

La figure 73 présente un changement de repère. Pour passer du repère de mesure au repère machine, il a été nécessaire de réaliser une translation suivant *TX* et *TY* puis une rotation suivant l'axe *x* de – 90 (figure 74 : 1) et puis une rotation suivant l'axe *z'* de -90 (figure 74 : 2).

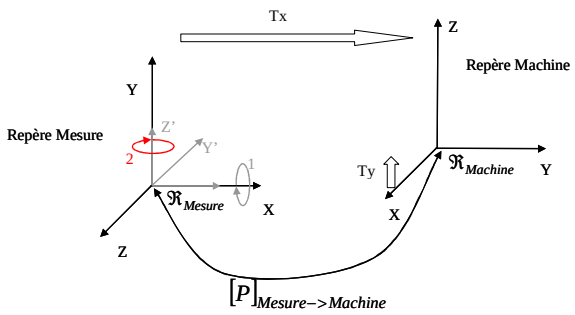


figure 74 : Exemple applicatif du changement de repère

Suite à l'exemple figure 74, la matrice de passage $[P]_{Mesure->Machine}$ est déterminée par :

$$\begin{aligned}&[P]_{Mesure->Machine} \Rightarrow R_{x,-90°} \rightarrow R_{z,-90°} \rightarrow T \\ &[P]_{Mesure->Machine} = T_{Mesure->Machine}.R_{Z,-90°}.R_{X,-90°}\end{aligned}. \quad (110)$$

Soit

$$[P]_{Mesure->Machine} = \begin{bmatrix}1&0&0&T_x\\0&1&0&T_y\\0&0&1&T_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)&0\\0&\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)&0&0\\\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}. \quad (111)$$

$$[P]_{Mesure->Machine} = \begin{bmatrix}0&0&1&T_x\\1&0&0&T_y\\0&1&0&T_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Pour un point Pi de coordonnée $\begin{pmatrix}Px_i\\Py_i\\Pz_i\end{pmatrix}_{\Re_{Mesure}}$ dans le repère mesure nous obtenons

$$[P_i]_{\Re_{Machine}} = [P]_{Mesure->Machine}[P_i]_{\Re_{Mesure}} = \begin{bmatrix}0&0&1&T_x\\1&0&0&T_y\\0&1&0&T_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Px_i\\Py_i\\Pz_i\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_x+Pz_i\\T_y+Px_i\\T_z+Py_i\\1\end{bmatrix}. \quad (112)$$

Chaque écart étant exprimé dans le même repère, la recherche des correcteurs optimums par rapport aux écarts mesurés doit être réalisée dans un même repère d'expression.

3.5Qualifier la qualité du réglage.

L'objectif est de proposer un indicateur permettant de qualifier l'efficacité de la correction proposée par rapport aux écarts mesurés.

Nous proposons d'appeler cet indicateur « Gain de Correction par l'Inertie Totale » (*GCIT*)(113). C'est un ratio entre la somme quadratique des écarts mesurés sur chaque point i (E_{mes_i}) et la somme des écarts résultants de la correction pour chaque point i. (E_{Res_i}). Les écarts résultants sont des écarts prédits à partir de la matrice d'influence et des correcteurs choisis. En l'occurrence, si une pièce est mesurée après correction, on peut constater que le

gain n'est pas forcement identique à celui présenté puisqu'il dépend de la variabilité du procédé.

$$GCIT = 100\left(1 - \frac{\sum E_{Res_i}^2}{\sum E_{mes_i}^2}\right) \quad (113)$$

Si l'indicateur est égal à 100 %, il faut comprendre que l'ensemble des écarts est corrigé donc que la pièce est quasi similaire au modèle numérique.

En conséquence, si le *GCIT* est égale à une valeur k% inférieure à 100 % cela signifie que les correcteurs proposés corrigent seulement *k %* des écarts.

La convergence de la valeur *k %* vers 100 % est dépendante du nombre et du type de correcteurs C_i choisis lors de la construction de la matrice *X*. D'un point de vue applicatif, nous recommandons pour pouvoir appliquer cette approche, de filtrer et de garder les principaux correcteurs parmi les dizaines souvent proposés par les outils de production. Ainsi, un des rôles de l'industrialisation sera de rechercher 20 % des correcteurs permettant de corriger à 100 %, 80 % des situations rencontrées par l'opérateur.

3.6 Etapes d'utilisation de l'inertie totale dans un contexte de production

Cette partie introduit les informations nécessaires à une bonne utilisation de l'inertie totale dans un contexte industriel.

3.6.1 Définir les écarts E de l'ensemble des points palpés

Le vecteur E regroupe l'ensemble des écarts des points palpés d'une pièce projetés suivant la normale de chaque point du modèle numérique :

$$E = \left(\overrightarrow{P_i C_i}\right) \bullet \vec{n}, \quad (114)$$

Où n est le vecteur normal à la surface cible (modèle numérique), et le vecteur, P_iC_i , est l'écart du point mesuré P_i par rapport au point appartenant à la surface cible C_i.

Le choix de considérer une projection normale est dû à l'importance de l'orientation des écarts dans le repère considéré. A contrario du calcul d'une norme entre le point cible et le point mesuré, pour lequel nous aurions perdu l'information relative à l'orientation du défaut.

3.6.2 Etapes de la mise en place

Dans un contexte industriel, deux phases sont à considérer dans l'application de cet outil :

a) La première phase s'intègre dans la partie industrialisation du produit. En effet, la connaissance du modèle numérique et des paramètres de réglages de l'outil de production sont connus. Il est alors possible de créer la matrice d'incidence X[16] et d'en faire l'optimisation. Cette matrice sera invariante tout au long de la vie de fabrication du produit excepté s'il y a une modification de la gamme de fabrication qui demandera nécessairement une mise à jour de la matrice d'incidence. L'optimisation de la matrice d'incidence (X) permet d'utiliser l'approche inertie totale dans une deuxième phase.

b) La seconde phase est celle de la production. La connaissance de la matrice X optimisée ainsi que la matrice des écarts des points mesurés permet d'optimiser les réglages des correcteurs, donc de corriger au mieux les écarts par rapport au modèle numérique.

Dans cette dernière phase, la matrice d'incidence optimisée (MIO) est alors figée. Ainsi, une MIO sous-entend une référence de pièce et une gamme de fabrication bien définies. À terme, une gestion des créations, modifications et mise à jour de ces matrices d'incidences sera à intégrer à un outil de Fabrication Assistée par Ordinateur.

Afin d'illustrer l'application d'utilisation de l'inertie totale en production, nous proposons d'introduire trois cas d'expérimentation industrielle. Nous informons de l'occultation de certaines informations clés afin de respecter les aspects de confidentialité nous liant aux industriels.

4 Exemples de pilotage en inertie totale

Afin de résoudre ces exemples industriels, un outil numérique a été développé permettant à partir des points mesurés, et des correcteurs du procédé, d'en déduire la

[16] La matrice d'incidence X est une composition d'un ensemble de correcteurs (Ci) indépendant entre eux dont leur influence a été calculée pour chaque point mesuré.

matrice d'incidence *X*, et de donner les correcteurs d'outils optimums en fonction des écarts mesurés.

Cette partie présente trois cas d'applications de l'inertie totale. L'objectif de ces exemples est de montrer l'efficacité et les subtilités de l'inertie totale appliquée en production, nous pourrons en déduire quelques perspectives à plus long terme.

Le premier cas est une pièce pour laquelle on vient réaliser l'usinage d'une forme avec une fraiseuse. Pour ce cas, il n'y aura pas de changement de repère entre le repère de mesure et le repère machine. Le second cas a l'avantage d'illustrer l'exemple du changement de repère. Le troisième cas présente le cas d'utilisation de l'inertie totale en vue de respecter des tolérances GPS.

4.1 Exemple 1 : Sans changement de repère

4.1.1 Cas d'étude

La pièce correspond à l'usinage d'une poche dans une pièce brute (figure 75 -a).

La figure 75 (b) présente le repère de la pièce (machine) construit à partir des plans *A*, *B* et *C* qui est le plan normal en *z*. L'ensemble des points mesurés est au nombre de 11. Les points sont mesurés suivant les normales de la surface du profil du modèle numérique. La géométrie du profil peut être influencée par des correcteurs de position (DEC_1, DEC_2), d'orientation (O_1) et de forme (R_1). Il est à noter que le correcteur O_1 correspond à l'orientation du plateau sur lequel repose la pièce (le brut).

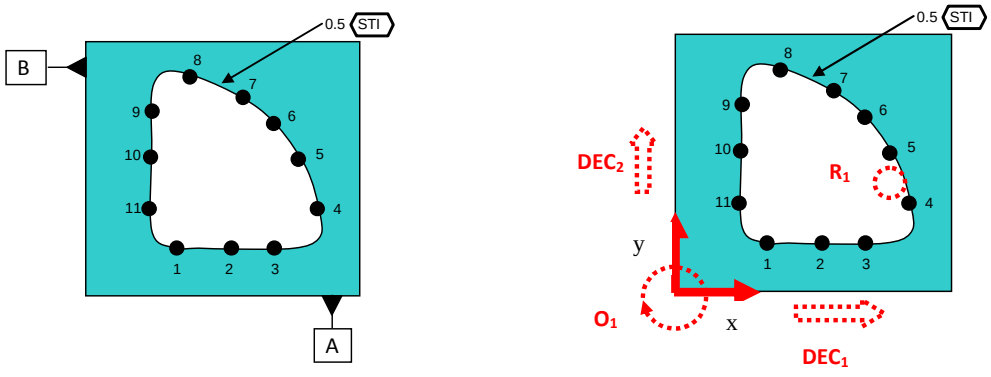


figure 75 : Exemple d'une pièce avec profil de forme (a) et (b) représente le repère de mesure de la pièce et des correcteurs.

4.1.2 Construction de la matrice d'incidence X

À partir des équations (97)(98)(99) et des points cibles du modèle numérique, il est possible pour chaque point de déterminer la matrice d'incidence *X* de 11 lignes (nombre de points) et 4 colonnes (nombre de correcteurs DEC_1, DEC_2, R_1, O_1) . Pour plus de détails sur le calcul du coefficient d'incidence, il est possible de se référer à l'annexe 7.1.

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1 & -6.75 \\ 0 & 1 & 1 & -10.65 \\ -0.98 & -0.17 & 1 & -1.62 \\ -0.86 & -0.5 & 1 & 0.73 \\ -0.71 & 0.71 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.86 & 1 & 0.73 \\ -0.17 & 0.95 & 1 & 1.62 \\ 1 & 0 & 1 & 10.65 \\ 1 & 0 & 1 & 6.75 \\ 1 & 0 & 1 & 3.5 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

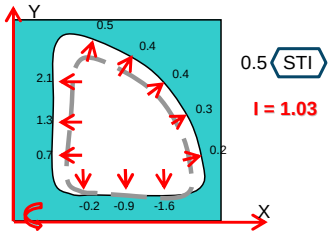
Le Tableau 53 présente, sous la forme d'un tableau, la matrice d'incidence *X* optimisée avec en colonne les points mesurés et en ligne les correcteurs :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11
DEC_1	-0.23	-0	0.28	-0.41	-0.24	-0.1	0.06	0.259	-0.14	0.145	0.38
DEC_2	0.38	0.14	-0.14	0.26	0.06	-0.1	-0.24	-0.41	0.281	-0	-0.23
R_1	0.09	0.09	0.094	0.088	0.087	0.087	0.087	0.088	0.094	0.094	0.094
O_1	0.03	-0.01	-0.06	0.039	0.018	0	-0.02	-0.04	0.057	0.01	-0.03

Tableau 53 : Matrice d'incidence X optimisée

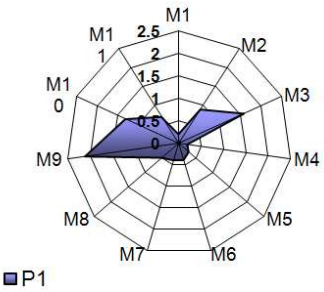
4.1.3 Application numérique et retour d'expérience

A partir du Tableau 53 et de l'équation (95), il est possible de déduire les corrections à réaliser. La figure 76 illustre un exemple de défaut. Ainsi, la figure 76 (a) fait apparaître le profil cible et le profil réel en pointillé. L'inertie sur l'ensemble des points mesurés a été calculée et est de 1.03 alors que la spécification est de 0.5. Par conséquent, il est nécessaire d'apporter une correction puisque l'inertie calculée est supérieure à la spécification. Sur la figure 76 (b), on peut observer la répartition des écarts absolus pour chaque point Mi.



(a)

Point Mesuré	P1
M1	-0.2
M2	-0.9
M3	-1.6
M4	0.2
M5	0.3
M6	0.4
M7	0.4
M8	0.5
M9	2.1
M10	1.3
M11	0.7



(b)

figure 76 : Exemple de défaut de profil (pointillé gris) (a)et d'écart suivant chaque point (b)

A partir de la matrice présentée au Tableau 53, des valeurs d'écarts mesurés, nous obtenons les valeurs des correcteurs suivants par la relation (94):

	Correction à apporter sur les outils (réglage)
DEC_1	0.11
DEC_2	-0.22
R_1	0.29
O_1	0.19

Tableau 54 : Matrice d'incidence X optimisée

L'application de ces corrections amène à une inertie résultante de 0.02 soit un *GCIT=97,67 %.* Il faut comprendre que les écarts mesurés par rapport au modèle numérique sont corrigés à 97 %.

Ce premier cas d'étude met en évidence la facilité de l'utilisation de l'approche. En effet, une fois la matrice d'incidence définie les résultats sont alors instantanés contrairement à un réglage conventionnel pouvant durer de 10 min à 1 heure suivant l'expérience du régleur.

En outre, l'avantage de cette approche est de permettre d'utiliser des correcteurs potentiellement plus efficaces mais souvent non utilisés par les opérateurs du fait de leur impact complexe sur les points mesurés (ex. correcteur d'orientation, de rayon de courbure…). Par conséquent, des correcteurs dont l'influence est complexe sur les écarts peuvent être utilisés et ainsi permettre d'augmenter la capacité de correction des écarts mesurés.

4.2Exemple 2 : Intégration Changement de repère

L'intérêt de cet exemple est de présenter une pièce qui est une combinaison d'un ensemble de surface gauche.

4.2.1 Cas d'étude

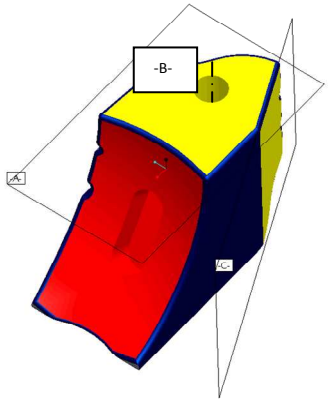


figure 77 : Cas d'application industriel n°2.

L'ensemble des surfaces de la pièce est défini par un ensemble de 32 points pouvant être corrigés par 16 correcteurs.

Le repère de mesure est construit suivant les plans *A*, *C* et l'axe *B*. Une fois le repère construit, les écarts de mesures sont exprimés dans ce repère qui est différent de celui de la machine en raison de l'orientation et la translation. En conséquence, il est nécessaire de traduire les coordonnées de l'ensemble des points mesurés dans le repère machine. Cette transition est réalisée par une matrice de passage $[P]_{Mesure\text{-}Machine}$.

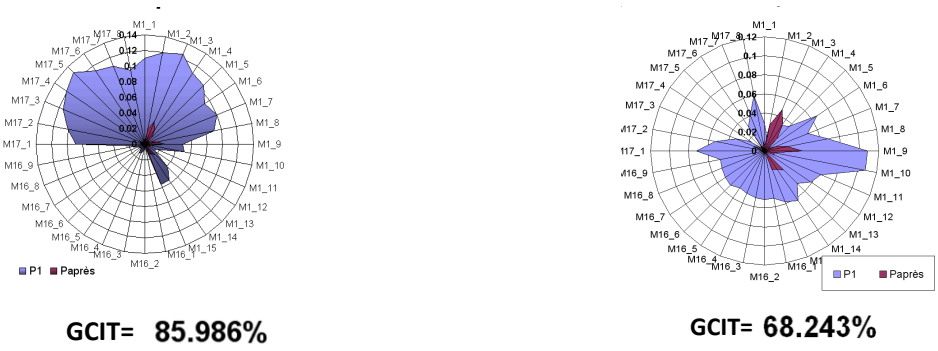
La matrice de passage du repère mesure au repère machine s'écrit alors :

$$[P]_{Mesure->Machine} \Rightarrow R_{x,-90^\circ} \rightarrow R_{z,-90^\circ} \rightarrow R_{x,+7^\circ} \rightarrow T$$
$$[P]_{Mesure->Machine} = T_{Mesure->Machine} . R_{X,7^\circ} R_{Z,-90^\circ} . R_{X,-90^\circ} \quad (116)$$

En conséquence, la matrice d'incidence X est calculée dans le repère de l'influence des correcteurs donc le repère machine. Il est alors possible de réaliser une optimisation de la correction des écarts mesurés.

4.2.2 Application numérique et retour d'expérience

La figure ci-dessous présente des exemples de mesure d'écarts dans le cadre de l'utilisation :



(a) (b)

figure 78 : Deux exemples (a) et (b) de pièces ayant un défaut mesuré et le pourcentage de gain obtenu par la machine.

La figure 78 illustre graphiquement la répartition des écarts en valeur absolue des points des deux pièces mesurées. La surface claire (bleue) correspond à l'ensemble des écarts mesurés tandis que la surface foncée (rouge) correspond aux écarts résiduels, une fois les correcteurs appliqués. On constate pour chaque exemple que le réglage permet de corriger 85 % et 68 % des erreurs mesurées.

L'observation de chaque graphique (figure 78) montre qu'il reste un léger résidu qui peut s'expliquer par le fait qu'un correcteur n'a pas été pris en considération. Dans une politique d'optimisation du temps de réglage, une étape de choix des correcteurs influents a été réalisée ce qui par conséquent met de côté d'autres correcteurs.

En outre, ce résidu peut être lié au critère d'optimisation, le critère de Gauss est un critère d'optimisation au moindre carré. Cependant, on peut envisager un autre critère pouvant donner une autre configuration de correcteurs apportant une correction de meilleure qualité (ex. La recherche opérationnelle).

L'approche proposée a permis en outre de gagner en temps de réglage et d'obtenir des réglages de meilleure qualité du fait de l'intégration aisée de correcteur habituellement non utilisée par les régleurs, il s'agit des correcteurs d'angles, de rotations de plateau...

L'approche proposée a permis de mettre en évidence la facilité pour le régleur de régler son procédé tout en intégrant des correcteurs complexes.

En effet, dans l'approche proposée, la réduction des écarts est réalisée de façon optimale sur l'ensemble des surfaces gauches. Cependant, d'un point de vue fonctionnel, un groupe de surfaces usinées par un même outil peut être composé de surfaces ayant une exigence en termes de variabilité différente. La question est donc comment peut-on intégrer cette subtilité ? Une première réflexion porte sur l'intégration de poids pour chaque surface, le poids le plus sévère correspond en l'occurrence à l'exigence la plus forte sur la surface. Ainsi, en affectant aux points d'une surface particulière des poids de 2 par exemple et pour les points des autres surfaces, un poids de 1, on multiplie les écarts de ces points par le poids respectif de chaque point dans le vecteur *E*. Ainsi l'optimisation va privilégier les points dupliqués au détriment des autres points. Cependant, cette discussion reste à prolonger à long terme et fait l'objet notamment des perspectives de notre travail de recherche.

4.3 Piloter en inertie totale pour respecter une spécification GPS.

L'objectif de cette partie est de monter l'intégration sur un exemple simple de satisfaction d'une exigence fonctionnelle de type GPS.

4.3.1 Cas d'étude

La figure 79 met en évidence deux systèmes de référence. Le premier système est construit suivant les surfaces *A*, *B*, *C* tandis que le second, basé sur le premier système de référence est noté *A*, *G*, *H*. Afin de pouvoir utiliser au mieux l'optimisation des correcteurs, il est nécessaire que l'ensemble des points mesurés soit exprimé dans le même système de référence. Deux matrices de passage sont nécessaires, une pour exprimer dans le même référentiel les points mesurés lors de la mesure et l'autre pour faire le passage de ce dernier référentiel vers le repère machine.

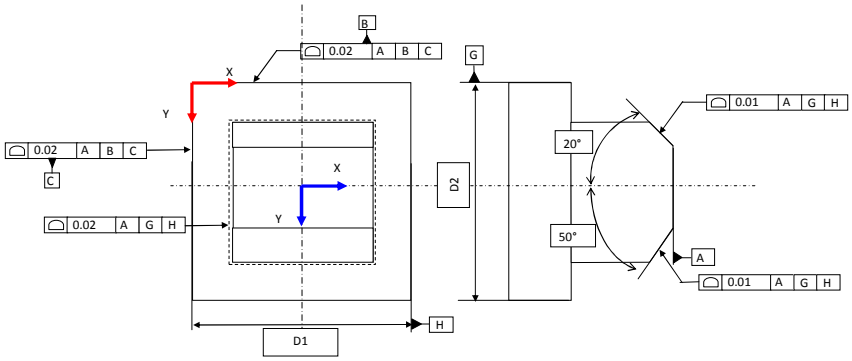


figure 79 : Exemples de pièces dont la spécification GPS est à satisfaire.

Le système de référence *A*, *G*, *H* est basé sur la construction des plans médians donc est dépendant des distances *D1*, et *D2*. En conséquence, un écart sur ces distances amène à un décentrage du système de référence. (figure 80)

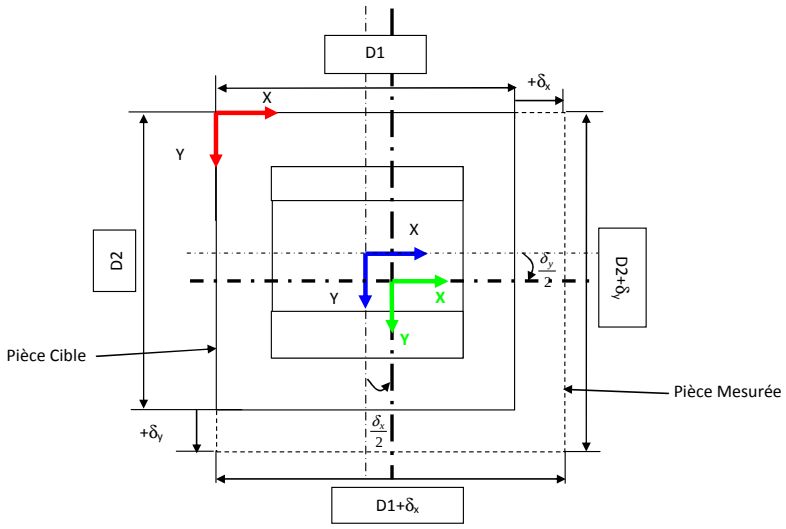


figure 80 : Evolution du système de référence A,G,H, en fonction du défaut mesuré.

La figure 80 présente l'évolution du repère en fonction du défaut mesuré. On constate que pour un écart entre les plans de δ_x et δ_y, le déplacement du système de référence est de $\delta_x/2$ et $\delta_y/2$ respectivement. Ainsi la matrice de passage du système de référence *ABC* au système de référence *AGH*, $[P]_{\Re_{ABC \to AGH}}$, s'écrit :

$$[P]_{\Re_{ABC\to AGH}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \delta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (117)$$

Il est à noter qu'il n'y pas de changement d'orientation du repère et que la composante en *z* est considérée nulle du fait de la référence primaire *A*.

À partir de l'équation (117), il est possible d'exprimer l'ensemble des points mesurés dans un même système de référence. Maintenant, il est possible de faire la transition vers le repère machine. Dans ce cas d'étude nous considérerons que le système *AGH* coïncide avec le repère machine. En l'occurrence, l'ensemble des points mesurés devra être exprimé dans le système *AGH*.

4.3.2 Application numérique et Retour d'expérience

Nous allons nous intéresser à un exemple pour lequel des défauts ont été générés. La figure 81 illustre l'ensemble des correcteurs influents sur cette pièce mesurée en 50 points.

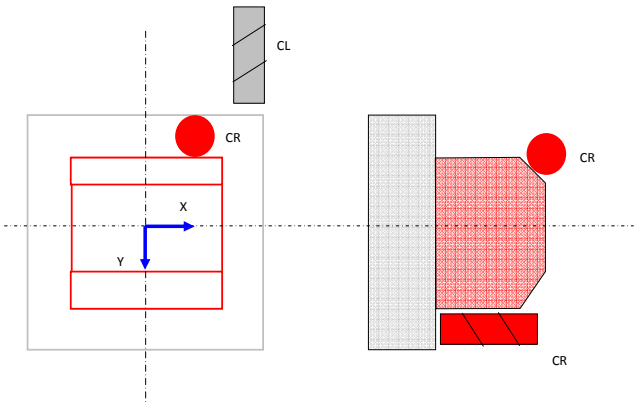
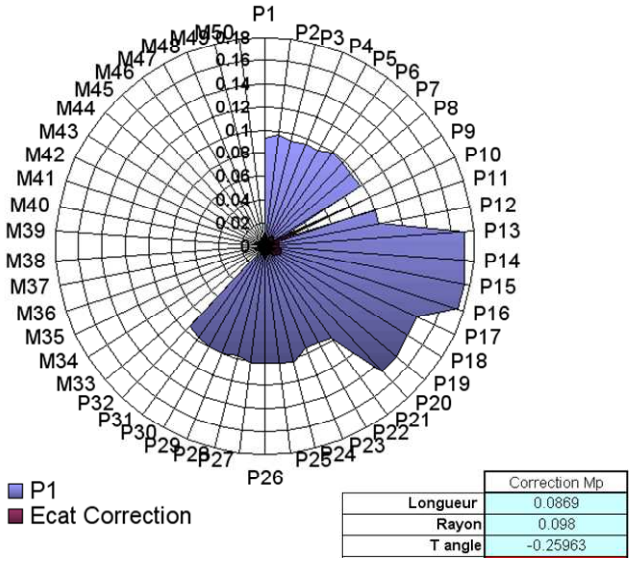


figure 81 : Exemples de pièces dont la spécification GPS est à satisfaire.

Cette pièce est usinée par deux types de correcteurs : Un correcteur de type longueur *CL* et un correcteur de type rayon *CR*. Cependant, ces correcteurs ne sont pas suffisants pour apporter une correction efficace pour les plans inclinés. En effet, lors de l'usinage des plans inclinés, l'outil de production a réalisé un changement d'orientation et de position. En conséquence, il est nécessaire de prendre en considération la position du centre de fraise lors de l'usinage des plans inclinés ; donc d'introduire un troisième correcteur que nous

nommerons *T angle*. Ce dernier correspond à la position du centre de fraise lors de l'usinage des plans inclinés.

Dans un contexte d'expérimentation, une pièce comportant des défauts a été réalisée. Par rapport à une situation connue, un écart de - 0.1 sur le correcteur de longueur a été ajouté en plus d'un correcteur de rayon de même valeur. Les résultats sont présentés par la figure suivante :



GCIT = **82,749%**

figure 82 : Résultat pour un défaut connu CL=-0.01 et CR=0.01.

L'optimisation des correcteurs apporte une correction de l'ordre de 83 %, le fait de ne pas considérer le correcteur du centre de fraise aurait introduit une correction plus faible (11,51 %).

Ce cas d'étude nous permet de mettre en évidence l'importance de la réflexion dans le choix des correcteurs pour la définition de la matrice d'incidence *X*. Il est nécessaire pour cela de définir clairement pour chaque surface les correcteurs susceptibles d'influencer ces dimensions dans un premier temps, et de réaliser un choix sur cet ensemble de correcteurs, dans un second temps. Le principe serait de conserver 20% des correcteurs pouvant corriger au moins 80% des situations rencontrées.

Notons que les performances de l'optimisation sont fortement dépendantes de la définition de la matrice d'incidence *X*.

D'autres exemples industriels ont mis en évidence l'utilité de réaliser une optimisation pas-à-pas. Ainsi, pour une pièce dont les corrections sont réalisées par des correcteurs de longueurs, d'orientations et de formes, il est préférable de faire une optimisation des correcteurs de longueurs et de formes dans un premier temps puis une optimisation des correcteurs d'orientations dans un second temps. En effet, la nature entre les correcteurs de longueurs (exprimée en mm) et d'orientation exprimée en radians (ou degré) n'est pas la même, l'optimisation est alors faussée lorsque le centre de rotation est trop éloigné de la pièce[17].

5 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de proposer une nouvelle approche de tolérancement : l'inertie totale.

À l'ère numérique, nous avons la capacité de maîtriser la production de produits en faisant évoluer les spécifications géométriques présentées dans les normes ISO GPS.

Seules les considérations du modèle numérique et de la maîtrise de la variabilité autour de cette cible permettent d'assurer la fonctionnalité du produit. Cependant lors des phases de réglages de l'outil de production, il n'est pas aisé pour l'opérateur de trouver le correcteur optimum permettant de ramener la production de pièces sur le modèle numérique, du fait, de la complexité des pièces, mais aussi des outils de production et des gammes de fabrications.

C'est dans l'optique de simplifier cette phase que nous avons proposé de développer un outil permettant de donner de façon instantanée le réglage optimum pour ramener la pièce sur la cible à partir d'un ensemble de points mesurés. Cet outil a trouvé échos auprès des industriels dont on a proposé de réaliser avec succès des applications. D'ailleurs, une application informatique a été mise au point afin de résoudre des cas d'optimisation de correcteurs de plus grande envergure. (Optimisation de correction d'une pièce sur 3000

[17] Bras de levier trop important -> implique un effet sur chaque point mesuré très faible par rapport au correcteur de longueur

points mesurés influencés par 9 correcteurs). Cet exemple industriel n'a pas été présenté, car confidentiel.

Cet outil prometteur nous a permis de mettre en évidence quelques perspectives en vue de son amélioration voir de sa diffusion.

Les perspectives sont aux nombres de 4 :

a) Dans les exemples industriels, nous avons vu qu'un correcteur pouvait usiner un groupe de surfaces. Cependant, chaque surface de ce groupe peut avoir une exigence fonctionnelle différente. De même, nous pouvons imaginer que l'orientation d'une surface soit limitée. Ainsi pour une même surface, les points mesurés n'auront pas la même inertie… Comment dans la façon de piloter ou de régler le procédé favoriser le réglage de ces surfaces ou de ces points, dont l'exigence est différente des autres ? Dans nos réflexions, nous avons pensé ajouter des poids sur les surfaces, cependant cette solution reste à valider.

b) Notre outil permet de corriger les écarts de la pièce. Cependant, on peut se poser la question du pilotage de la fabrication en lui-même. Si pour les pièces de révolution l'utilisation de la maîtrise inertielle des procédés est applicable qu'en est-il pour les surfaces gauches ? Doit-on considérer une répartition de l'inertie des surfaces suivant une loi du khi 2 ? Sachant que dans le chapitre précédent, nous avons montré une convergence vers une distribution normale. Quelle carte de contrôle faut-il choisir ?

c) La troisième perspective concerne le critère d'optimisation. En effet, dans le cas où nous mettons des poids pour augmenter l'optimisation d'une surface, le critère de Gauss peut ne plus être le plus suffisant. Doit-on converger vers d'autres critères d'optimisation comme la recherche opérationnelle, ou d'autres algorithmes ?

d) La quatrième perspective concerne l'interaction entre les compétences de l'opérateur sur la machine et celle de l'outil que nous proposons. Chaque outil de production est différent et à ses subtilités propres que seul l'opérateur connaît. Ainsi, le futur outil doit être capable d'intégrer la connaissance de l'opérateur. Par exemple, permettre à l'opérateur de régler ces correcteurs dans l'ordre qu'il le

souhaite ou que l'outil soit capable de réaliser une optimisation suivant le pas de correction et de son impact réel sur les écarts mesurés pour chaque correcteur …

Ce chapitre a permis d'introduire le concept de l'inertie totale et la cohérence avec l'outil de production. Pour compléter cette réflexion, nous proposons de définir l'inertie totale d'un composant à partir d'une synthèse statistique d'un assemblage tridimensionnel. Cette partie propose modestement d'introduire une approche de détermination de l'inertie totale d'une surface appartenant à un assemblage sous l'hypothèse des petits déplacements.

6 Bibliographie

[145] XP CEN ISO/TS 17450-1, Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux - Partie 1 : modèle pour la spécification et la vérification géométriques, Mars 2008

[146] Mathieu L, Villeneuve François, Tolérancement géométrique des produits (Traité IC2, série productique), hermès Lavoisier, 05-2007

[147] Z. Humienny, [2007], State of art in standardization in GPS area, Proceeding of 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, March 21st - 23rd 2007, Erlangen, Germany, on CDRom.

[148] Pairel E, [2007], For a rewriting of the geometric tolerancing language , CIRP 2007, Proceeding of 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, March 21st - 23rd, Erlangen, Germany, on CDRom.

[149] Anselmetti B, Tolérancement, Cotation de fabrication et métrologie, Volume 3, Hermès Lavoisier, ISBN : 2-7462-0667-6, 2003

[150] Krulikowski A. , "Nine Myths about Geometric Dimensioning and tolerancing", Quality Mag, Oct 2003

[151] Prévéraud JF, [2004] "Tolérancement un outil à mieux exploiter", revue Industrie et Technologie, avril.

[152] Temmerman M,[2001], Analyse et synthèse du tolérancement "au pire des cas" et statistique dans l'environnement CFAO, Ecole centrale de Paris.

[153] Adragna P.A, "Tolérancement des systèmes Assemblés, une approche par le tolérancement inertiel", Thèse, Université de Savoie, France, 2007

[154] ISO 8015, Technical drawings -- Fundamental tolerancing principle , ISO

[155] NF ISO/TS 17450-2, Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux - Partie 2 : principes de base, spécifications, opérateurs et incertitudes, Novembre 2004

[156] Denimal D. Giordano M. Pillet M. Sergent A. Inertial tolerancing according to Geometrical Product Specification Standard applied to stack up, CIRP conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy France , 2009

[157] Adragna P.A., Pillet M. Samper S., Formosa F., Guarantying a maximum of Non-Conformity Rate on the assembly resultant with a statistical tolerancing approach , Computer Aided Tolerancing (CAT) 2007. Erlangen, Germany

[158] Pillet M., Adragna P. A., Denimal D. Monographie sur le tolérancement inertiel, Rapport Interne LISTIC n° 05/11 - projet Interreg III, Université de Savoie, 2005, 110 pages.

[159] NF E 04-008, [juillet 2009], Spécification géométrique des produits (GPS), Calcul de tolérance indications et critères d'acceptation, Méthodes arithmétique, statistique quadratique et statistique inertielle

[160] LI.Y and al, [2005], « Sculptured surface tolerance verification with design datums », International Journal of production Research, 43-7, 1465-1482.

[161] Dubois D., [2008], « Rupture Adaptative », TraMetal, Septembre 2008, p 76

[162] Desplatz C., [2008], « L'usinage adaptatif pulvérise les rebuts », Cetim infos, Juin 2008, n°203, p22-25.

[163] Duc E., [1998], « Usinage des formes gauches, contribution à l'amélioration de la qualité des trajectoires d'usinage », Thèse de doctorat ENS Cachan

[164] Bouchenita H, Linarès JM and al, [2009] "Compensation relative deviations in the STL model using the FEM method: Application at the rapid prototyping technology", Computer Aided Tolerancing at Annecy.

[165] CAD-Magazine, [2006] "Zoom CAO- Fabrication directe vers la normalisation", Cad magazine N°134.

[166] Goldschmidt E, [2009] "Gammes et cotation pour le réglage des machines-outils de décolletage », thèse de l'Université de Savoie.

[167] Yang YK, [2006], Optimization of injection-molding process of short glass fiber and polytetrafluoroethylene reinforced polycarbonate composites via design of experiments method: A case study, Materials and Manufacturing Processes, 21, 915-921, 2006.

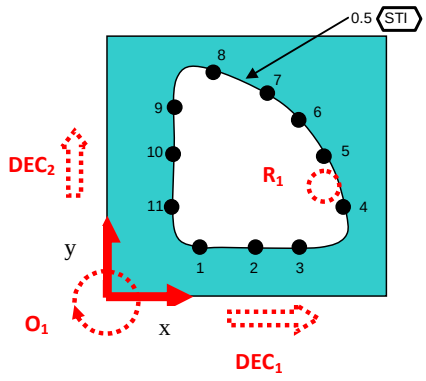
[168] Anderson MJ and Kraber SL, [1999], Keys to successful designed experiments, Quality Management Division of American Society for Quality conference

[169] Verseput R, [1998], DOE Breaks Traditional R&D Mold, R&D Magazine, www.rdmag.com.

7 Annexes

7.1 Détail du calcul de la matrice d'incidence de la partie 4.1

L'exemple présenté dans la partie 4.1 est l'usinage d'un profil gauche dans une pièce brute. La figure 83 présente la forme cible de la pièce et les coordonnées des points discrétisant la surface cible (1… 11). L'influence des correcteurs est représentée en pointillé rouge. La correction de la surface est définie par un ensemble de 5 correcteurs ; deux correcteurs de positions (DEC_1, DEC_2), un correcteur d'orientation (O_1), un correcteur de rayon (R_1) dont le centre de rotation est celui du repère pièce.



(a)

	Coordonnées			Normales		
M1	1.5	0	0	0	1	0
M2	4.75	0	0	0	1	0
M3	8.65	0	0	0	1	0
M4	9.55	1.68	0	-0.98	-0.17	0
M5	8.40	4.85	0	-0.86	-0.5	0
M6	6.85	6.85	0	-0.7	-0.7	0
M7	4.85	8.40	0	-0.5	-0.86	0
M8	1.68	9.55	0	-0.17	-0.98	0
M9	0	8.65	0	1	0	0
M10	0	4.75	0	1	0	0
M11	0	1.5	0	1	0	0

(b)

figure 83 : Exemple d'une pièce avec profil de forme (a) et (b) correspond aux coordonnées et normales des points cibles

Les quatre correcteurs influencent l'ensemble des points définissant le profil. Dans la partie suivante, nous proposons de détailler l'influence du correcteur de position *DEC₁*.

7.1.1 Influence en translation correcteur DEC_1 et DEC_2.

Dans la partie 3.3.1, nous avons défini le correcteur de longueur influençant chaque point par la relation suivante :

$$DEC_i = \left(\overrightarrow{Pm_i Pc_i}\right) \bullet \vec{n_i} \,, \tag{118}$$

Où $\overrightarrow{Pm_i Pc_i}$ correspond à la coordonnée du vecteur du point *i* borné par le point mesuré Pm_i et le point nominal cible Pc_i et n_i correspond à la direction de correction.

La détermination du vecteur d'incidence du correcteur de position *DEC₁* est déduite en supposant l'impact d'une unité de variation du correcteur sur le point cible. En conséquence, les coordonnées du point Pm_i peuvent se définir en fonction du point cible et de l'unité de correction que nous représentons sous la forme d'un vecteur $\overrightarrow{U_{DEC_i}}$

$$\overrightarrow{Pm_i} = \left(\overrightarrow{Pc_i} + \overrightarrow{U_{DEC_i}}\right). \quad (119)$$

En conséquence, le vecteur d'influence *DEC₁* du correcteur U_{DEC1} se détermine par la relation :

$$DEC = \left(\left(\overrightarrow{Pc_i} + \overrightarrow{U_{DEC_i}}\right) - \overrightarrow{Pc_i}\right) \bullet \overrightarrow{n_i}\,. \quad (120)$$

Le Tableau 55 présente le détail de l'influence du correcteur *DEC₁* sur l'ensemble des points définissant le profil. La dernière colonne de ce tableau donne l'influence du correcteur sur chaque point mesuré.

	$\overrightarrow{Pc_i}$; Coordonnée cible			$\overrightarrow{n_i}$; Normale Cible			$\overrightarrow{Pm_i} = \left(\overrightarrow{Pc_i} + \overrightarrow{U_{DEC_i}}\right) = \left(\overrightarrow{Pc_i} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$			DEC₁
M1	1.5	0	0	0	1	0	2.5	0	0	0
M2	4.75	0	0	0	1	0	5.75	0	0	0
M3	8.65	0	0	0	1	0	8.65	0	0	0
M4	9.55	1.68	0	-0.98	-0.17	0	10.55	1.68	0	-0.98
M5	8.40	4.85	0	-0.86	-0.5	0	9.40	4.85	0	-0.86
M6	6.85	6.85	0	-0.7	-0.7	0	7.85	6.85	0	-0.7
M7	4.85	8.40	0	-0.5	-0.86	0	5.85	8.40	0	-0.5
M8	1.68	9.55	0	-0.17	-0.98	0	2.68	9.55	0	-0.17
M9	0	8.65	0	1	0	0	1	8.65	0	1
M10	0	4.75	0	1	0	0	1	4.75	0	1
M11	0	1.5	0	1	0	0	1	1.5	0	1

Tableau 55 : Détail du calcul de l'influence X_{C1} du correcteur C1 sur l'ensemble des points du profil

De la même manière, il est possible de définir l'influence *DEC₂* du correcteur de position selon *Y*. Le Tableau 56 présente une synthèse des influences des deux correcteurs de position.

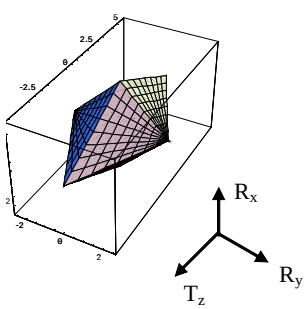
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11
DEC_1	0	0	0	-0.98	-0.86	-0.7	-0.5	-0.17	1	1	1
DEC_2	1	1	1	-0.17	-0.5	-0.7	-0.86	-0.98	0	0	0

Tableau 56 : Détail du calcul de l'influence X_{C1} du correcteur C1 sur l'ensemble des points du profil

L'approche est identique pour les correcteurs R_1 et O_1.

Chapitre V
DE L'EXIGENCE FONCTIONNELLE A L'INERTIE TOTALE

Méthode de synthèse de l'inertie totale dans un contexte de petits déplacements



1 Introduction

L'inertie totale introduit une nouvelle approche basée sur la maîtrise des variations de la surface autour d'un modèle numérique cible contrairement aux approches actuelles de tolérancement de surface dont le principal objectif est de borner ces variations.

Dans le chapitre III, une synthèse des inerties de surface dans le contexte des petits déplacements a été proposée. Celle-ci est utilisable si et seulement si les défauts géométriques d'une surface sur les points extrêmes sont de même ordre de grandeur. Par exemple pour une surface plane, il est possible que le concepteur accepte une plus grande variabilité pour un défaut de translation, et une variabilité plus faible pour un défaut d'orientation du plan ; ce qui correspond en termes de tolérancement géométrique GPS à la combinaison d'une spécification de localisation et de parallélisme. Dans ce cas, l'inertie 3D ne permet pas d'utiliser toute la variabilité permise. Nous en avons conclu qu'il serait intéressant de développer ces travaux pour permettre d'exprimer aux mieux certaines subtilités de la conception.

Ainsi, nous proposons une contribution à la répartition inertielle de l'exigence fonctionnelle sur les composants d'un assemblage dans un contexte de petits déplacements.

La première partie est dédiée au contexte scientifique du chapitre. La seconde apporte une réflexion sur l'expression statistique de l'exigence fonctionnelle, puis enchaîne sur une troisième partie qui porte sur la détermination de l'inertie pour chaque composant d'un assemblage. Cette répartition est illustrée par deux exemples de mécanismes avec et sans covariance.

La dernière partie s'interroge sur l'expression de la conformité d'un composant. Différents travaux sont présentés sur les indicateurs de capabilité multivariés. Nous discuterons de leurs faiblesses et leurs avantages afin d'introduire un nouvel indicateur de capabilité multivarié basé sur la distance de Mahalanobis.

2 Contexte scientifique

La partie bibliographique a exposé différentes approches permettant de déterminer l'inertie de chaque composant à partir d'une exigence fonctionnelle unidimensionnelle. Néanmoins, d'un point de vue industriel, une définition unidimensionnelle des surfaces et donc de l'exigence fonctionnelle peut ne pas être suffisante. Il est alors nécessaire de s'intéresser à un deuxième niveau de représentation. Ce deuxième niveau[18] consiste à considérer les défauts rigides (géométrique)[170] d'une surface qui sont au nombre de 6 (3 rotations et 3 translations).

L'évaluation quantitative des défauts rigides acceptables d'une surface à partir de l'exigence fonctionnelle a fait l'objet de plusieurs travaux scientifiques. Ces derniers mettent en évidence deux approches distinctes :

- L'approche ascendante

C'est une approche par « essais successifs » qui consiste à vérifier par simulation que la valeur quantitative des tolérances de chaque composant déterminée par itération satisfait l'ensemble des exigences fonctionnelles.

Différents travaux se sont intéressés à cette stratégie. On peut citer ceux de Ghie[171], Giordano[172] et Duret [136], Davidson[174], Dantan [175], Zhang[176], Anselmetti [177], Germain[137][179], Temmerman[152]…[182]

- L'approche descendante

La répartition de l'exigence fonctionnelle détermine les tolérances de chaque composant de l'assemblage. Cette approche tend vers une solution optimale.

Plusieurs travaux ont présentés une approche descendante dans le cadre d'une répartition arithmétique (pire des cas de l'exigence fonctionnelle)…. [137][152][175]. D'un point de vue répartition statistique inertielle, Adragna [44] propose une approche dans un

[18] Un troisième niveau de représentation existe et consiste à une prise en compte des défauts de forme d'une surface. Ce point n'est pas abordé dans ces travaux.

contexte de tolérancement modal dont la représentation des défauts diffère des petits déplacements. L'objectif principal de ces travaux était de faire une différence entre une répartition arithmétique et inertielle sans rechercher à optimiser ces répartitions.

Nous proposons dans la même lignée qu'Adragna une répartition statistique inertielle de l'exigence fonctionnelle dans un contexte de petits déplacements. Nos travaux se différencient par une définition de l'exigence fonctionnelle sous une forme elliptique optimisée et un calcul des chaînes de cotes à n dimensions sous une forme matricielle. La méthode proposée est une jonction de plusieurs travaux scientifiques notamment ceux de Ghie [171] et de Germain [137]. Cette approche est illustrée par des deux exemples que nous avons repris de la thèse d'Adragna [44] dans un contexte modal.

3 Expression de l'exigence fonctionnelle d'un assemblage

Globalement, le cahier des charges exprime un ensemble d'exigences fonctionnelles de manière qualitative (lié à la perception) ou quantitative (lié à la « performance »). Généralement, les exigences fonctionnelles qualitatives sont traduites en exigences fonctionnelles quantitatives ([183]→[187]).

Nous nous intéressons à une formalisation quantitative de l'exigence que nous exprimons sous la forme d'un domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle (DAEF). Ce domaine d'acceptation traduit l'ensemble des écarts sur la condition fonctionnelle acceptables par le client. Si l'assemblage se situe à l'intérieur du DAEF alors cet assemblage répond aux exigences du client dans le cas contraire il n'est pas conforme.

Le but de ce chapitre est de répondre à la question suivante : « Comment traduire l'exigence fonctionnelle pour qu'elle soit exploitable statistiquement ? ».

3.1 Traduction de l'exigence fonctionnelle

3.1.1 Exprimer le domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle (DAEF)

Dans le cadre de ce chapitre, les écarts géométriques des surfaces peuvent être formalisés par les torseurs de petits déplacements [170]. Les composantes d'écarts du torseur traduisent les variations rigides d'une surface par rapport à une surface cible. Ainsi, une surface est associée à un torseur écart regroupant l'ensemble des déplacements

(défauts) autorisés. Ce torseur est composé de six composantes d'écart (3 rotations (*Rx*, *Ry*, *Rz*) et 3 translations (*Tx*, *Ty*, *Tz*)) correspondant aux degrés de liberté de la surface i. (121).

$$E_i = \left\{ \begin{matrix} rx_{ij} & tx_{ij} \\ ry_{ij} & ty_{ij} \\ rz_{ij} & tz_{ij} \end{matrix} \right\}_{j \left(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j\right)} \quad (121)$$

L'équation (121) représente l'écart de la surface *i* au point d'expression *j* associé au repère $\left(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j\right)$.

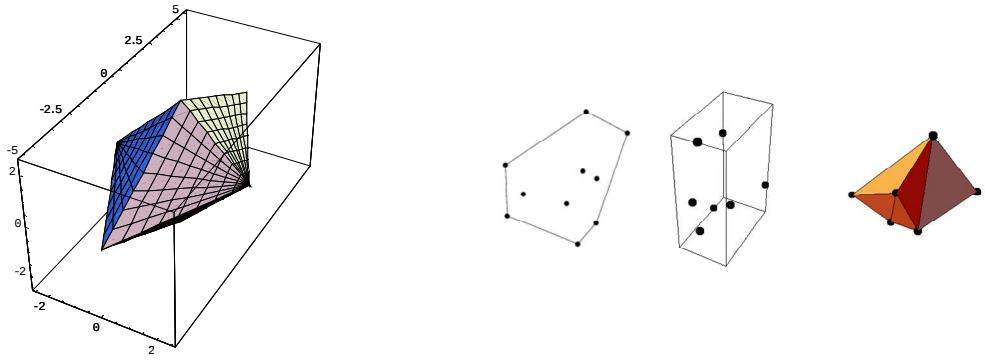
A partir du torseur E_i et en connaissance de la géométrie de la surface, Il est possible d'exprimer le défaut géométrique acceptable d'un assemblage et d'en décrire un DAEF. Nous nous intéresserons à deux formes de DAEF:

- Polytope
- Convexe Hull

Le premier (figure 84-a) définit un domaine d'acceptation borné par un nombre fini d'hyperplan dans un espace de dimension n [188]. Par exemple, ce domaine est déduit d'une exigence fonctionnelle traduite sous la forme du tolérancement ISO GPS [154][155][145].

Le second (figure 84-b) définit un domaine d'acceptation correspondant au plus petit domaine convexe englobant un ensemble de vecteur E_i de dimension n [192]. Cette définition permet de cadrer les domaines d'exigences fonctionnelles exotiques. (Exemple : Les domaines jeux [152][193]…).

Les domaines d'acceptation sont définis soit par un ensemble d'inéquations linéaires (polytope) ou non linéaires (Convexe Hull) dans un espace de dimension n. La dimension maximale de ces domaines est bornée par le nombre de composantes du torseur écart (3 rotations et 3 translations).



(a)Polytope (b) Convexe Hull[19]

figure 84 : Illustration du polytope et du convexe Hull

Un assemblage conforme est inclus dans le DAEF.

3.1.2 DAEF dans un contexte statistique

D'un point de vue statistique, la loi de distribution des assemblages doit être bornée par le domaine d'acceptation DAEF pour un nombre de ppm acceptable. La relation entre le DAEF et le nombre de ppm est intimement liée à la distribution statistique et à ces paramètres :

$$ppm = \left(1 - \int_{DAEF} f_X(tx,...,rz)dtx...drz\right) \times 1E6 \quad (122)$$

avec f_X la distribution statistique quelconque des composantes du torseur écarts.

Une population statistique quelconque de dimension n peut être modélisée par un vecteur moyen μ, et une matrice de variance covariance Σ. La dimension n de cette population statistique est la dimension du DAEF qui est égale aux nombres d'écarts du torseur Ei. En conséquence, les paramètres statistiques d'une population quelconque du DAEF sont définis par le torseur moyen μ_{Ei} (cf. relation (123)) et la matrice de variance-covariance Σ_{Ei} (cf. relation (124)).

[19] Extrait du site : www.mathworld.com => Thématique Convexe Hull

$$\overrightarrow{\mu_{E_i}} = {}_{j}\begin{bmatrix} \mu_{rx_{ij}} & \mu_{tx_{ij}} \\ \mu_{ry_{ij}} & \mu_{ty_{ij}} \\ \mu_{rz_{ij}} & \mu_{tz_{ij}} \end{bmatrix}_{\left(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j\right)}, \tag{123}$$

Le torseur moyen μ_{Ei} est exprimé dans le repère j

$$\Sigma_{E_i} = {}_{j}\begin{bmatrix} \sigma^2_{rx_{ij}} & \sigma_{ryrx_{ij}} & \sigma_{rzrx_{ij}} & \sigma_{txrx_{ij}} & \sigma_{tyrx_{ij}} & \sigma_{tzrx_{ij}} \\ \sigma_{rxry_{ij}} & \sigma^2_{ry_{ij}} & \sigma_{rzry_{ij}} & \sigma_{txry_{ij}} & \sigma_{tyry_{ij}} & \sigma_{tzry_{ij}} \\ \sigma_{rxrz_{ij}} & \sigma_{ryrz_{ij}} & \sigma^2_{rz_{ij}} & \sigma_{txrz_{ij}} & \sigma_{tyrz_{ij}} & \sigma_{tzrz_{ij}} \\ \sigma_{rxtx_{ij}} & \sigma_{rytx_{ij}} & \sigma_{rztx_{ij}} & \sigma^2_{tx_{ij}} & \sigma_{tytx_{ij}} & \sigma_{tztx_{ij}} \\ \sigma_{rxty_{ij}} & \sigma_{ryty_{ij}} & \sigma_{rzty_{ij}} & \sigma_{txty_{ij}} & \sigma^2_{ty_{ij}} & \sigma_{tzty_{ij}} \\ \sigma_{rxtz_{ij}} & \sigma_{rytz_{ij}} & \sigma_{rztz_{ij}} & \sigma_{txtz_{ij}} & \sigma_{tytz_{ij}} & \sigma^2_{tz_{ij}} \end{bmatrix}_{\left(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j\right)}. \tag{124}$$

Dans l'expression (124), nous considérons :

$$\sigma_{ryrx_{ij}} = \rho_{ryrx_{ij}} \sigma_{ry_{ij}} \sigma_{rx_{ij}}, \tag{125}$$

où $\rho_{ryrx_{ij}}$ est le coefficient de corrélation entre la variable rx et ry de l'écart Ei exprimé dans le repère j.

Lors de l'assemblage, la somme des défauts des surfaces doit être comprise dans le DAEF pour être conforme, ce qui revient à sommer les torseurs des petits déplacements Ei de chaque surface i. En outre d'un point de vue statistique, la somme de variables indépendantes et de même grandeur converge vers une loi statistique multi normale, dont la moyenne est la somme des moyennes de chaque variable et la variance est la somme des variances de chaque variable (Théorème de Gauss généralisé). [194][195]. Par conséquent, en définissant les torseurs écarts Ei indépendant et de même ordre de grandeur, il est possible de déterminer la distribution statistique de la résultante de la somme de ces torseurs écart E_i dont les composantes suivent des distributions statistiques quelconques. Cette somme converge vers un torseur écart résultant dont la distribution statistique suit une distribution Multi Normale (Gaussienne).

En conclusion, si la convergence d'une somme de torseur écart Ei est une loi de distribution multi-normale, la finalité de ce travail serait de trouver les paramètres de cette loi dont l'iso densité est maximale et incluse dans le domaine d'acceptation (DAEF)

considéré. En l'occurrence, l'iso-densité ne peut être maximale que si la loi de distribution multi-normale est centrée dans le DAEF

Traditionnellement et en supposant que la matrice de variance est régulière[20], la densité de la loi de distribution de l'assemblage s'écrit [195] :

$$f(X)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(X-\mu_X)^t\Sigma^{-1}(X-\mu_X)\right) \quad (126)$$

Avec X un vecteur aléatoire de dimension p, égal à la dimension du DAEF. ∑ la matrice de variance des composantes.

De même, l'iso densité d'une loi multi normale centrée se traduit par un hyper ellipsoïde (HE) de dimension p.

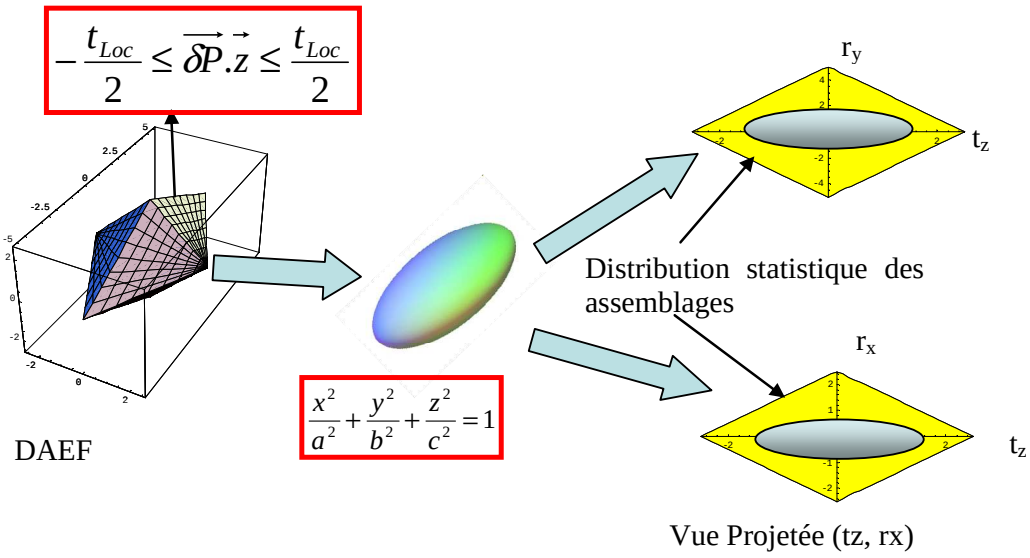
$$(X-\mu_X)^t\Sigma^{-1}(X-\mu_X)=\mathrm{M}^2, \quad (127)$$

Dont M est égal à 1.

La figure 85 schématise la problématique de la recherche du plus grand volume de l'hyper-ellipsoïde borné par le domaine d'acceptation considéré.

Les parties suivantes présentent une approche de détermination des paramètres de l'hyper-ellipsoïde en considérant le domaine d'acceptation sous la forme d'un polytope puis d'un convexe Hull.

[20] Une matrice de variance Σ est régulière si les composantes du vecteur aléatoire X ne sont pas linéairement dépendantes. On peut trouver une transformation inverse qui « normalise » le vecteur X.



Hypothèses préliminaires:

Hypothèse de répartition de l'assemblage (loi multi normale)

Hypothèse de répartition sur chaque écart (Forme de l'ellipse)

figure 85 : Représentation du DAEF par la densité de probabilité des assemblages.

3.2Expression du DAEF de type polytope dans un cadre statistique

Nous proposons dans cette partie de présenter une approche permettant de définir le plus grand volume de l'ellipsoïde inclus dans un DAEF de type polytope.

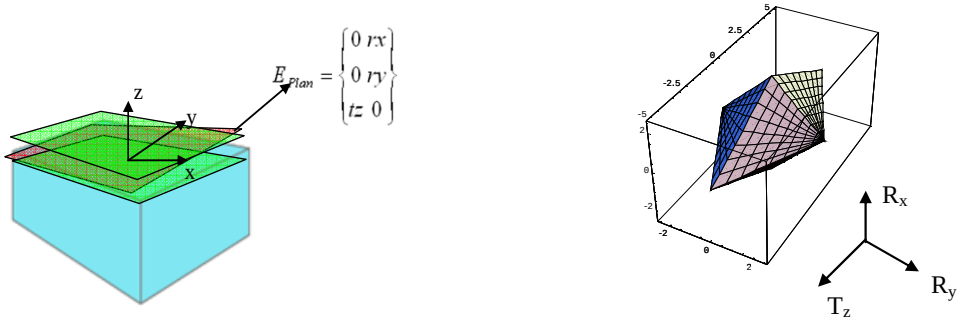
3.2.1 Etude d'une tolérance de position : cas d'un plan

Dans cette partie, l'exigence fonctionnelle est décrite par la localisation d'un plan.

Le torseur écart d'une surface plane(128) est défini par trois composantes : 1 composante de translation (Tz) et 2 composantes de rotation (Rx, Ry). Ces composantes permettent de définir les variations géométriques possibles du plan (cf. figure 86).

$$E_{Plan} = \begin{Bmatrix} 0 & rx \\ 0 & ry \\ tz & 0 \end{Bmatrix}_{0}^{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \tag{128}$$

A partir du torseur écart de la surface et des dimensions du plan, il est possible de définir le domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle (DAEF) qui est formalisé (figure 86 (b)) par un polytope de dimension égale au nombre de composantes du torseur écart.



(a) (b)

figure 86 : (a) Représentation des variations géométriques d'un plan et (b) du domaine fonctionnel rigide d'une localisation d'un plan de dimension a,b

Le DAEF est déduit par un ensemble de 8 inéquations dans l'espace des petits déplacements $\{tz, rx, ry\}$, le repère de la pièce est considéré au centre du plan (a/2 ;b/2).(129)

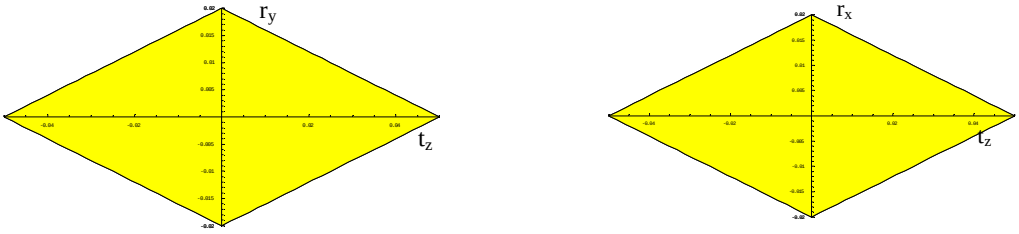
$$\begin{cases} -\frac{IT}{2} \le tz + \frac{b}{2}ry + \frac{a}{2}rx \le \frac{IT}{2} \\ -\frac{IT}{2} \le tz - \frac{b}{2}ry + \frac{a}{2}rx \le \frac{IT}{2} \\ -\frac{IT}{2} \le tz + \frac{b}{2}ry - \frac{a}{2}rx \le \frac{IT}{2} \\ -\frac{IT}{2} \le tz - \frac{b}{2}ry - \frac{a}{2}rx \le \frac{IT}{2} \end{cases} \tag{129}$$

Avec IT, l'intervalle de tolérance spécifié sur le plan, les dimensions du plan sont a pour la longueur et b, pour la largeur.

Cet ensemble d'inéquations définit le DAEF illustré figure 86(b) et figure 87 (a) et (b) en vue projetée {tz, ry} et {tz,rx} respectivement.

Rappelons que la condition fonctionnelle est respectée si chaque point correspondant à la somme des écarts de chaque surface vérifie la relation (129). En conséquence, en dehors de

ce domaine, l'assemblage n'est pas conforme, à l'intérieur de ce domaine l'assemblage est conforme à l'exigence spécifiée.



(a) (b)

figure 87 : Vue projetée du domaine fonctionnel (IT=0.1, a=b=5)

La figure ci-dessus montre que les sommets du polytope représentent les configurations maximales pouvant être atteintes par une composante d'écart du DAEF.

L'avantage de ce polytope est sa symétrie. En conséquence, l'étude est réalisée sur un quart du domaine (une équation d'hyper plan). Bien entendu, l'approche présentée ne s'applique qu'à ce cas particulier de symétrie.

3.2.1.1 Rappel des paramètres géométriques de l'iso-densité à p dimensions

Cette partie présente les expressions généralisées à la dimension p des paramètres, et du volume des hyper ellipsoïdes qui correspondent à l'iso-densité à p dimensions. La formule générale d'une HE s'écrit :

$$HE_p(X) = (X - \mu_X)^t \Sigma^{-1} (X - \mu_X) - 1 = 0, \quad (130)$$

Où X est un vecteur aléatoire de dimension p égale à la dimension du DAEF et Σ est la matrice de variance des composantes.

Le volume de l'HE à p dimensions est donné par [196]:

$$V_{HE} = g_p \sqrt{Det(\Sigma)} \quad et \quad g_p = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(1 + p/2)}, \quad (131)$$

Où Γ est la loi de distribution gamma, tel que pour tout *S* appartenant à l'ensemble des nombres fractionnaires positifs (Q^+), cette loi s'écrit alors :

$$\Gamma(S) = \int_0^{+\infty} t^{S-1} e^{-t} dt \quad (132)$$

Notons que si *S* appartient à l'ensemble des nombres entiers positifs (N^+) ; le calcul de la fonction gamma peut se simplifier est s'écrire :

$$\Gamma(S) = (S-1)\ !\ \text{pour S} \in N^+ \qquad (133)$$

3.2.1.2 Points de contact de l'iso-densité et du DAEF

Cette partie détermine les paramètres des hyper-ellipsoïdes inclus et tangents aux hyperplans du DAEF, ce qui correspond à la recherche de l'iso densité maximale.

Un hyperplan à p dimensions s'exprime par l'équation :

$$HP_p(X) = HP_p(x_i, x_{i+1}, .., x_p) = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i = Cste \qquad (134)$$

Où x_i correspond aux variables de l'hyperplan et a_i sont les constantes de l'hyperplan.

Pour que l'ellipse soit tangente à l'hyperplan, deux hypothèses doivent être vérifiées :

- La normale ($\overrightarrow{n_{HE}}$) du point HE_i appartenant à l'HE doit être colinéaire à la normale du point PL_i appartenant à l'hyperplan ($\overrightarrow{n_{HP}}$).
- Les coordonnées des points PL_i= HE_i.

A partir de ces hypothèses, nous en déduisons la relation suivante : (cf. annexe 11.1, pour plus de détails) :

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^2 X_i^2 - Cste^2 = 0\ , \qquad (135)$$

où a_i est la constante de la variable x_i de l'hyperplan, X_i est la constante i de l'hyper ellipsoïde et Cste représente la constante de l'hyperplan.

En bref, pour qu'un hyper ellipsoïde à *p* dimensions soit tangent à un hyper plan de même dimension. Il est nécessaire de vérifier que le produit quadratique des coefficients moins la constante de l'hyper-plan soit nul.

3.2.1.3 Détermination de l'iso-densité maximale bornée par le DAEF

La partie précédente a permis d'identifier un ensemble de points solutions pouvant satisfaire l'égalité (135). L'objectif de cette étape est de formaliser la recherche du plus

grand volume de l'hyper-ellipsoïde compris dans le DAEF à partir des coefficients de l'hyperplan connus, à partir d'un exemple.

Soit un DAEF de dimension 3 (p=3), l'équation du volume de l'ellipsoïde [196] dont les paramètres sont A, B, C s'écrit:

$$V_{HE} = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(1+3/2)}\sqrt{Det\left(A^2B^2C^2\right)} = \frac{4}{3} * \pi * A * B * C \qquad (136)$$

Où Γ est la loi de distribution Gamma.

En exprimant un paramètre de l'équation (135) en fonction de l'ensemble des autres paramètres, nous obtenons :

$$A = \sqrt{\frac{Cste^2 - B^2a_2^2 - C^2a_3^2}{a_1^2}} \qquad (137)$$

Soit en remplaçant (136) dans (137), nous obtenons :

$$V_{HE} = \frac{4}{3} * \pi * \sqrt{\frac{Cste^2 - B^2a_2^2 - C^2a_3^2}{a_1^2}} * B * C\,. \qquad (138)$$

Ainsi l'expression du volume est de dimension p-1. La recherche des extrémums de la fonction VHE (138) se fait par la résolution du système d'équations (139) des dérivées partielles (Matrice Heyssienne). Cette première étape permet d'identifier les extremums (mini ou maxi) de la fonction (138) :

$$\left\{\vec{\nabla}\ V_{HE} = 0\right\} \qquad (139)$$

En supposant V_{HE}, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine ouvert U. La matrice Heyssienne (139) permet de déterminer la nature des points critiques de la fonction V_{HE}, c'est-à-dire des points d'annulation du gradient. Précisément, un point critique de f est dit dégénéré lorsque le discriminant Heyssien (Déterminant de la matrice Heyssienne) s'annule. Lorsque les points critiques ne sont pas dégénérés, le signe des valeurs propres détermine la nature du point critique.

- si la matrice est définie positive, le point constitue un minimum
- si elle est définie négative, il s'agit d'un maximum

- s'il y a des valeurs propres de chaque signe, on a affaire à un point de selle.

Dans ce dernier cas, on définit, H(V_{HE}), l'ensemble des points critiques.

$$\{H(V_{HE})\}. \tag{140}$$

Soit pour l'exemple présenté, les paramètres de l'hyper ellipsoïde sont:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{Cste^2 - B^2 a_2^2 - C^2 a_3^2}{a_1^2}} \\ \dfrac{Cste}{\sqrt{3} * a_2} \\ \dfrac{Cste}{\sqrt{3} * a_3} \end{pmatrix} \tag{141}$$

où a_i est la constante de la variable x_i de l'hyperplan, Cste représente la constante de l'hyperplan et A, B, C sont les paramètres de ellipsoïde.

3.2.1.4 Application numérique:

L'exercice suivant est une application numérique de la théorie présentée ci-dessus.

L'ensemble des paramètres considérés connus est présenté dans le Tableau 57:

Coefficient du plan	
a1	1
a2	Long/2
a3	Larg/2
Cste	IT=tloc = 0.1
Dimension pièces	
a Longueur	5
b Largeur	5

Tableau 57 : Paramètres du plan et dimensions de la pièce avec t_{loc} la valeur de la localisation

L'équation de HE de dimension trois est :

$$\frac{tz^2}{a_{tz}^2}+\frac{rx^2}{b_{rx}^2}+\frac{ry^2}{c_{ry}^2}-1=0 \quad (142)$$

L'expression du volume de l'HE est :

$$V_{ellipsoïde}=\frac{4}{3}*\pi*a_{tz}*b_{rx}*c_{ry} \quad (143)$$

L'expression de la tangente entre HE et l'hyperplan s'écrit :

$$a_1^2a_{tz}^2+a_2^2b_{rx}^2+a_3^2c_{ry}^2-Cste^2=0 \quad (144)$$

Où a_1, a_2, a_3 sont les coefficients du plan (tz, rx, ry), Cste est la constante du plan. atz, brx, cry sont les paramètres de l'hyper ellipsoïde.

A partir des données du Tableau 57 et de l'équation (144), on en déduit :

$$V_{ellipsoïde}=\frac{4}{3}*\pi*\sqrt{\frac{\left(\frac{IT}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 b_{rx}{}^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2 c_{ry}{}^2\right)}{1}}*b_{rx}*c_{ry} \quad (145)$$

La figure 88 illustre la forme du volume de l'hyper-ellipsoïde tangent aux plans (145).

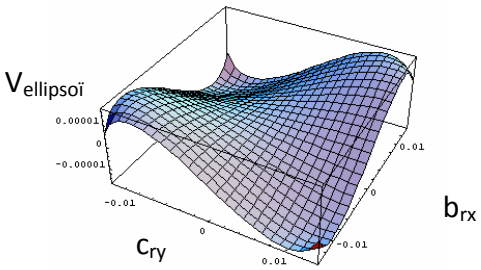


figure 88 : Evolution du volume de l'ellipsoïde en fonction des paramètres de l'ellipsoïde.

Comme le montre la figure 88, la recherche du volume maximum revient à la détermination des solutions de la fonction $V_{ellipsoïde}$.

$$\vec{\nabla}_{V_{ellipsoïde}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial b_{rx}}V_{ellipsoïde}=0\\ \frac{\partial}{\partial c_{ry}}V_{ellipsoïde}=0\end{pmatrix} \quad (146)$$

Nous en déduisons un ensemble de points critiques, extrémums de la courbe (figure 88). Les paramètres de l'ellipsoïde sont toujours positifs et considérés supérieurs à 0. Le point

critique est déterminé à partir de la signature négative de la matrice Heyssienne qui représente un maximum pour les valeurs suivantes :

$$Sol\begin{pmatrix} a_{tz} \\ b_{rx} \\ c_{ry} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0289 \\ 0.0115 \\ 0.0115 \end{Bmatrix}. \quad (147)$$

La figure 89 est une représentation d'une coupe transversale du DAEF et de l'ellipsoïde inclus.

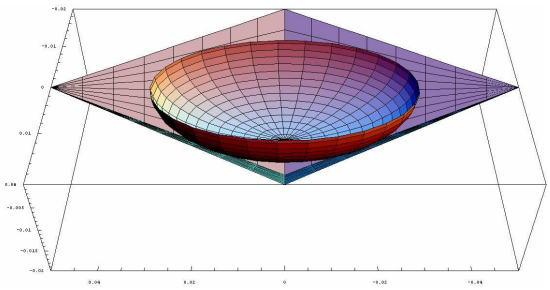


figure 89 : Vue en coupe de l'ellipsoïde intégré dans le DAEF

Les paramètres de l'ellipsoïde ainsi obtenus correspondent aux valeurs du demi-axe pour une direction donnée. De ce fait, l'étendue maximale de variation (IT_{DAEF}) pour une direction donnée est égale à deux fois le paramètre de l'ellipsoïde pour cette même direction, d'où :

$$Sol = \begin{pmatrix} IT_{DACF_{tz}} \\ IT_{DACF_{rx}} \\ IT_{DACF_{ry}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.a_{tz} \\ 2.b_{rx} \\ 2.c_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0578 \\ 0.023 \\ 0.023 \end{pmatrix}, \quad (148)$$

Ce qui permet de déterminer l'Etendue Admissible (EA) pour chaque direction du DAEF.

Connaissant l'EAs pour chaque direction, nous pouvons en déduire la matrice de variance Σ de la distribution multi normale centrée. Ce qui permet dans la suite de déterminer les valeurs pour chaque composant de l'assemblage.

3.2.2 Etude d'une tolérance de position combinée à une tolérance d'orientation d'une surface plane

Généralement, les écarts de surfaces peuvent être bornés par une combinaison de tolérances. Ainsi d'un point de vue fonctionnel, une tolérance de position (localisation) combinée à une tolérance d'orientation (parallélisme) peut être attribuée à une surface plane (figure 90), pour limiter les variations d'orientations du plan.

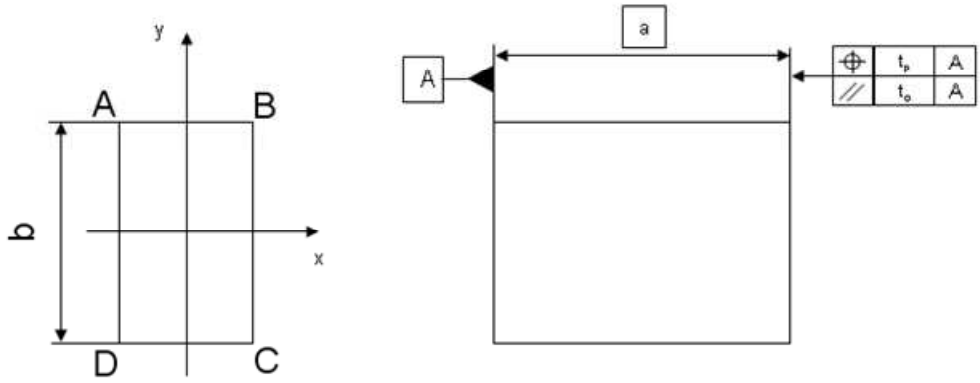


figure 90 : Tolérance complète d'un plan

Le domaine des tolérances est alors décrit par une concaténation des inéquations définissant la tolérance de position et d'orientation.

$$\begin{cases} -t_o \le b\ r_y + a\ r_x \le t_o \\ -t_o \le b\ r_y - a\ r_x \le t_o \\ -t_p \le 2tz + bry + arx \le t_p \\ -t_p \le 2tz - bry + arx \le t_p \\ -t_p \le 2tz + bry - arx \le t_p \\ -t_p \le 2tz - bry - arx \le t_p \end{cases} \quad (149)$$

Où tp et to sont les valeurs des tolérances de localisation et d'orientation (parrallélisme), a la longueur, et b la largeur du plan.

A partir du système d'équations (149), nous pouvons représenter le DAEF, pour les paramètres a=5, b=5 est une tolérance de position (tp=0.1) et de parallélisme (to=0.05) :

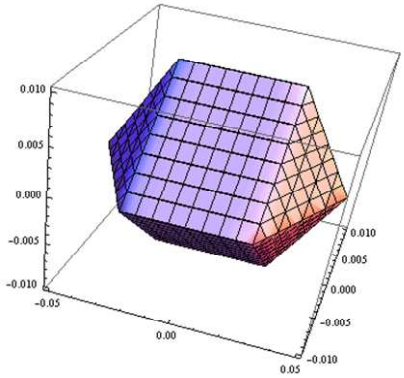


figure 91 : Domaine écart d'une tolérance de position et d'orientation d'un plan avec a=5,b=5 ;tp=0.1 et to=0.05

3.2.2.1 Points de contact de l'iso-densité et du DAEF

Un polytope est défini par un ensemble d'hyperplans. Dans ce contexte, l'équation (135) peut donc être réutilisée. L'ensemble des points tangents au DAEF doit respecter les conditions définies à partir des équations (135) et (149).

$$\begin{cases} b^2C^2 + a^2B^2 = t_o^2 \\ 2^2A^2 + b^2C^2 + a^2B^2 = t_p^2 \end{cases} \quad (150)$$

Avec A, B, C les paramètres de l'hyper ellipsoïde de dimension 3 suivant les directions tz, rx, ry respectivement et a, b les dimensions du plan.

En posant C^2 :

$$C^2 = \frac{t_o^2 - a^2B^2}{b^2} \quad (151)$$

Et,

$$A^2 = \frac{t_p^2 - t_o^2}{4} \quad (152)$$

En remplaçant les équations (151) et (152) dans l'équation du volume de l'hyper ellipsoïde (131), nous obtenons :

$$V_{ellipsoïde} = \frac{4}{3} * \pi * \sqrt{\frac{t_p^2 - t_o^2}{4}} * B * \sqrt{\frac{t_o^2 - a^2B^2}{b^2}} \quad (153)$$

Plus généralement, les paramètres de l'hyper ellipsoïde peuvent s'écrire:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tz \\ rx \\ ry \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{t_p^2 - t_o^2}{4}} \\ \frac{to}{\sqrt{2}a} \\ \frac{to}{\sqrt{2}b} \end{pmatrix} \quad (154)$$

Avec a et b les dimensions du plan et t_p, t_o les valeurs respectives de la tolérance de localisation combinée à la tolérance de parallélisme.

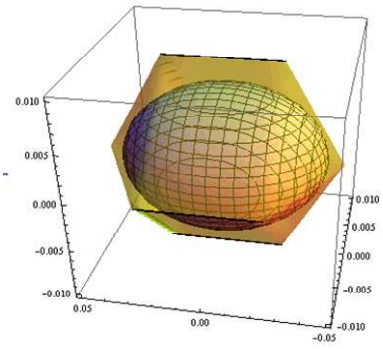


figure 92 : Domaine écart et statistique d'une tolérance de position et d'orientation d'un plan avec a=5,b=5 ;tp=0.1 et to=0.05

3.3Expression du DAEF de type Convexe Hull

La définition du domaine d'acceptation peut ne pas être linéaire ou être discrétisée par un ensemble de points. Dans ce contexte, ces différents points doivent être « habillés »pour définir le DAEF. Différents algorithmes (Triangle de Delaunay, Diagramme de Voronoï) [197][198][199] [200] permettent de développer la peau du domaine convexe sous la forme de surfaces planes comme présenté figure 93.

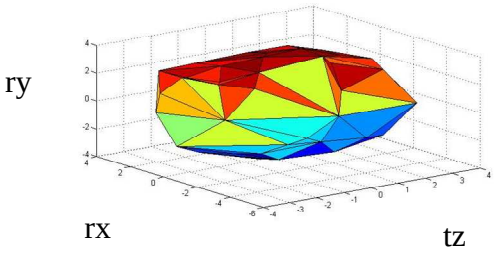


figure 93 : Représentation d'un convexe Hull dans un espace à trois dimensions

La recherche de l'hyper ellipsoïde englobé peut être réalisée, soit par la recherche des paramètres de l'hyper ellipsoïde tangent à l'ensemble des plans définissant le convexe Hull (cf. partie 3.2), soit par l'exploitation des travaux de recherche de Seeger [201] et Quingde [202].

Maintenant que nous savons exprimer de façon statistique le DAEF, il est possible de proposer une méthode de répartition de la variabilité (Synthèse) sur les composants en intégrant une notion de risque.

4 Synthèse de Tolérance

4.1 Du DAEF au nombre de ppm : Spécification du niveau de qualité : Transition Cp ⇔ ppm.

Les parties précédentes ont permis d'identifier les paramètres de l'hyper ellipsoïde. Donc d'exprimer un intervalle de variation par une bilimite (Min Max) autour de la valeur centrale pour chaque composante du torseur écart.

Traditionnellement, la conformité est souvent exprimée par le ppm qui se traduit par un nombre de pièces extérieur au domaine fonctionnel (représenté par le DAEF).(155)

$$P\left((tx,...,tz,rx...rz)\in DAEF\right)=1-\int_{DAEF} f_X\left(tx,...,rz\right)dtx...drz \qquad (155)$$

Avec fx distribution statistique quelconque des composantes du torseur écarts.

Pour satisfaire l'exigence fonctionnelle (DAEF), il est donc nécessaire d'identifier une relation reliant l'exigence finale de conformité à une exigence de conformité individuelle (ramenée à chaque composante des torseurs d'une surface donnée).

Dans ce contexte, nous considérons une population résultante centrée sur la cible. L'écart type selon chaque direction serait alors une passerelle entre le niveau de qualité résultant et celui envisagé. Rappelons qu'au sein du DAEF, chaque direction est considérée comme indépendante. En conséquence la covariance entre les composantes d'écarts sera nulle.

L'indicateur Cp ou IC introduit un premier moyen de transcrire le niveau de qualité exigé suivant chaque direction du domaine [204][158]:

$$IC_{tz}=Cp_{tz}=\frac{2e_{tz}}{6_{\sigma_{tz}}} \qquad (156)$$

La relation (156) est un exemple d'expression du Cp suivant la direction tz à partir du paramètre de l'ellipsoïde e_{tz}. A partir de cette expression, il est possible d'en déduire un torseur de capabilité suivant chaque direction:

$$Cp_{DAEF} = \left\{ \begin{matrix} \frac{e_{tx}}{3\sigma_{tx}} & \frac{e_{rx}}{3\sigma_{rx}} \\ \frac{e_{ty}}{3\sigma_{ty}}; & \frac{e_{ry}}{3\sigma_{ry}} \\ \frac{e_{tz}}{3\sigma_{tz}} & \frac{e_{rz}}{3\sigma_{rz}} \end{matrix} \right\}_{DAEF} , \quad (157)$$

où e_{ti} et e_{ri} sont les composantes de translation et de rotation suivant les directions x,y,z.

Nous pouvons remarquer que le nombre de ppm d'une exigence fonctionnelle est tributaire de deux choses :

- La première est la géométrie du domaine d'acceptation. Suivant la définition géométrique de celui-ci nous aurons des résultats différents pour des Cp_i identiques (Tableau 58).
- La seconde concerne le Cp autorisé sur chaque direction du DAEF. En effet, meilleur est le Cp_i, plus faible est le ppm dans une direction donnée.

Le tableau suivant synthétise les valeurs en termes de ppm suivant la considération d'un domaine ellipsoïde ou le DAEF de type localisation (cf. partie 3.2.1.4) présenté Tableau 58 pour différentes valeurs de Cp_{ti} et Cp_{ri}.

	Domaine Ellipsoïde	DAEF de type localisation
$Cp_{DAEF} = \left\{ \begin{matrix} Cp_{tx}=0 & Cp_{rx}=1 \\ Cp_{ty}=0; & Cp_{ry}=1 \\ Cp_{tz}=1 & Cp_{rz}=0 \end{matrix} \right\}$	29 257	10233
$Cp_{DAEF} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 2 \\ 0; & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix} \right\}$	0	0
$Cp_{DAEF} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & ;1.5 \\ 1.5 & 0 \end{matrix} \right\}$	5388	580

Tableau 58 : Valeur de ppm, pour une distribution normale centrée : pour différentes valeurs de Cp, basées sur l'application numérique 3.2.1.4.

Ainsi en précisant le niveau de qualité de l'exigence fonctionnelle suivant chaque direction, il est possible de déterminer pour chaque composant l'écart type à respecter suivant les directions spécifiées, donc de réaliser une synthèse.

4.2Introduction à l'approche de synthèse des tolérances.

4.2.1 Rappel Statistique sur les torseurs des petits déplacements

En connaissant le domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle, et l'expression statistique de celui-ci, nous allons présenter une répartition statistique sur chaque surface.

Nous avons vu que les écarts géométriques d'une face pouvaient être représentés par un torseur des petits déplacements E_i à partir d'un repère j associé à la surface i. En conséquence, les composantes du torseur écart correspondent aux écarts entre une surface réelle et une surface cible (nominale).

Dans le cas de mécanisme ne faisant pas intervenir de jeu, la résultante de l'assemblage de plusieurs composants correspond à la somme des composantes d'écarts [206].

En considérant que chaque composante d'écart suit une loi de distribution statistique différente pouvant être définie par des moments d'ordres 1 (moyenne) et 2 (écart type) et en considérant que les torseurs écarts de chaque surface sont indépendants statistiquement. La combinatoire de ses différentes lois statistiques converge vers une distribution multi normale de paramètre μ_n et de matrice de Variance-Covariance Σ_n pour chaque composante du torseur écart de l'assemblage (Résultant). [195][203],

De ce fait, on peut en déduire les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\mu_n} = \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{\mu_{Ei}} \ , \tag{158}$$

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{k} \Sigma_{Ei} \ , \tag{159}$$

Où k est le nombre de composants de l'assemblage.

Nous présentons dans une première étape une synthèse sans intégrer la notion de covariance entre les écarts des composants d'un torseur.

4.2.2 Approche de synthèse des inerties sans covariance

La relation entre le *ppm* et le Cp_{DAEF} appliquée à la condition fonctionnelle résultante est déterminée dans la partie 4.1. Ainsi, pour chaque composante d'écart du domaine d'acceptation un Σ_n est déterminable. (159)

Pour chaque Σ_{Ei} on en déduit une relation par composante d'écart du torseur de la surface i :

$$\Sigma_{Ei} = \begin{bmatrix} \left(\frac{e_{rx}}{3Cp_{rx}\sqrt{n}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{e_{ry}}{3Cp_{ry}\sqrt{n}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{e_{rz}}{3Cp_{rz}\sqrt{n}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{e_{tx}}{3Cp_{tx}\sqrt{n}}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{e_{ty}}{3Cp_{ty}\sqrt{n}}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{e_{tz}}{3Cp_{tz}\sqrt{n}}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (160)$$

Étant donné qu'il n'y a pas de covariance dans cette première partie, nous exprimerons la matrice de variances sous la forme d'un torseur. De façon générale, nous pouvons réécrire (160) en intégrant les coefficients d'influence ou de sensibilité et les pondérations de faisabilité [204] :

$$\Sigma_{Ei}=\left\{\begin{array}{ll}\sigma tx_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{tx}}{3Cp_{tx}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2 & \sigma rx_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{rx}}{3Cp_{rx}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2\\ \sigma ty_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{ty}}{3Cp_{ty}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2 & \sigma ry_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{ry}}{3Cp_{ry}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2\\ \sigma tz_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{tz}}{3Cp_{tz}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2 & \sigma rz_i^2=\left(\beta_i\dfrac{e_{rz}}{3Cp_{rz}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\beta_i^2}}\right)^2\end{array}\right\} \quad (161)$$

L'inertie maximale se définit dans une situation centrée pour chaque composante d'un torseur écart par :

$$I_{Ei}=\sqrt{\Sigma_{Ei}}\ . \quad (162)$$

Dans l'exemple numérique présenté dans la partie3.2.1.4 pour une pièce i avec $Cp_{tz}=Cp_{rx}=Cp_{ry}=1$ et un nombre de pièce n égal à 5, nous avons:

$$I_i=\left\{\begin{array}{cc}0 & 0.0017\\ 0 & 0.0017\\ 0.0043 & 0\end{array}\right\}_i \quad (163)$$

Pour chaque pièce, nous avons donc déduit une inertie par direction (chaque composante du torseur écart) à travers la spécification d'une exigence fonctionnelle globale.

La relation (163) correspond à l'inertie des composantes d'écarts Tz, Rx, Ry. Il est possible de déterminer pour un point quelconque appartenant à la surface la valeur de l'inertie du plan à respecter par la relation de Varignon (relation de transport des torseurs), et ainsi déterminer l'inertie 3D standardisée d'une surface.

4.2.3 Approche de synthèse des inerties avec covariance

Deux facteurs peuvent être source de covariance sur les composants :

- **La structure du mécanisme :** Dans le cas où la condition fonctionnelle est déportée. Il est donc nécessaire d'utiliser les matrices de passage pour pouvoir exprimer l'écart type résultant au point souhaité.
- **Les défauts de l'outil de production** qui répercute un écart sur des géométries identiques. Par exemple un perçage réalisé plusieurs fois sur une pièce par un même outil avec un défaut d'orientation.

Nous allons nous intéresser dans notre cadre d'étude à l'expression du premier type de covariance qui est lié à la structure du mécanisme. Germain [137] propose de définir une matrice de passage P_{ij} entre le repère de l'exigence fonctionnelle j et celui de la surface i que l'on souhaite tolérancer.

Il est possible de construire la matrice de passage P_{ij} des composantes d'écarts d'une surface. A partir d'un changement de repère identifié $\left(P_i,\left(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i\right)\right)$ à $\left(P_j,\left(\vec{x}_j,\vec{y}_j,\vec{z}_j\right)\right)$. Cette matrice se compose des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{P_iP_j}$ dans la base $\left(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i\right)$, et de la matrice de rotation MR_{ij} de la base $\left(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i\right)$ à la base $\left(\vec{x}_j,\vec{y}_j,\vec{z}_j\right)$. Ces paramètres s'écrivent sous la forme :

$$\overrightarrow{P_iP_j}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}, \tag{164}$$

Et

$$MR_{ij}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}. \tag{165}$$

Il est possible de formaliser (Germain [137]) un changement quelconque de repère d'un torseur de façon matricielle par la relation:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{(\vec{x}_j,\vec{y}_j,\vec{z}_j)}} \\ \overrightarrow{T_{(\vec{x}_j,\vec{y}_j,\vec{z}_j)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [MR_{ij}^{-1}] & [0] \\ [-MR_{ij}^{-1}.\tilde{U}_{ij}] & [MR_{ij}^{-1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}} \\ \overrightarrow{T_{(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}} \end{bmatrix} = P_{ij} \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_{(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}} \\ \overrightarrow{T_{(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}} \end{bmatrix} \quad (166)$$

Avec *R* les composantes de rotation et *T* les composantes de translation du torseur écart exprimées dans la base $(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ ou $(\vec{x}_j,\vec{y}_j,\vec{z}_j)$, et $\tilde{U}_{ij}$ la matrice de pré-produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{P_iP_j}$ (166) définie par :

$$\tilde{U}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (167)$$

Lors de la répartition des tolérances il est nécessaire d'exprimer l'ensemble des composantes d'écarts dans le repère du DAEF. Ainsi la relation entre le vecteur statistique résultant de la combinatoire des composantes d'écarts μ_n et Σ_n et les composantes d'écarts des surfaces du mécanisme s'écrivent :

$$\overrightarrow{\mu_n} = \sum_{i=1}^{k} P_{in} \overrightarrow{\mu_{Ei}} \quad (168)$$

Où k est le nombre de composants de l'assemblage.

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{k} P_{in} \Sigma_{Ei} P_{in}^T \quad (169)$$

Où P_{in} est la matrice de passage du repère i (appartenant à la surface d'un composant de l'assemblage, au repère n, repère d'expression du DAEF).

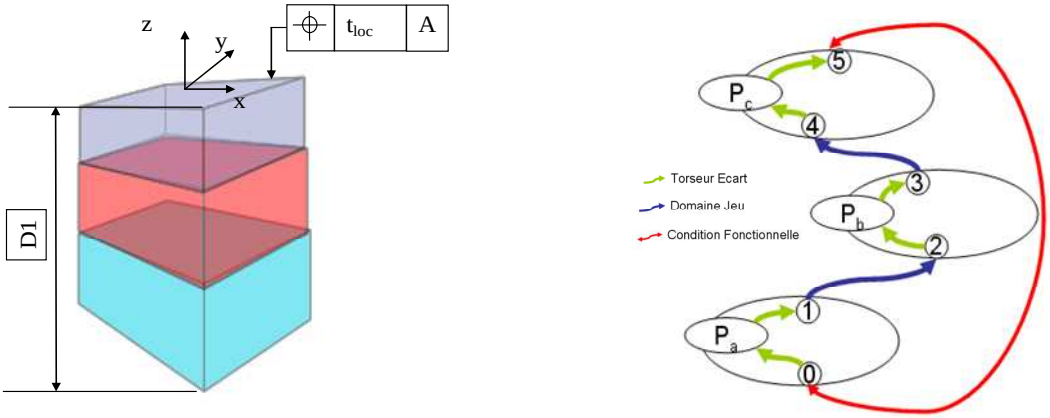
Un exemple de synthèse de tolérances du mécanisme est présenté dans les parties suivantes.

5 Cas d'étude n°1 : Empilage de composants

5.1 Présentation du mécanisme et de la condition fonctionnelle

Cet exemple traite d'un mécanisme assez simple. Il s'agit d'un empilage de n pavés. Dans la figure 94(a), nous illustrons l'assemblage de 3 composants. Tandis que la figure 94(b) est

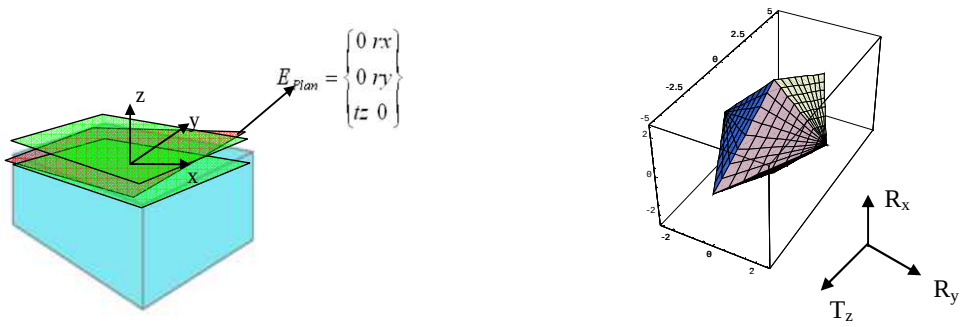
une représentation schématique du mécanisme. Cette dernière représente par des flèches les sources de variabilité du mécanisme. En vert, ce sont les flèches correspondant à l'écart géométrique des surfaces i $(i \in \{0..9\})$ par rapport au repère de la pièce Pj $(j \in \{a..z\})$. En bleu, ce sont les flèches relatives au jeu entre deux pièces. Le rouge représente la condition fonctionnelle. Pour cet exemple présenté figure 94, nous allons considérer pour chaque pièce une seule surface ayant un défaut géométrique. De plus le jeu entre deux pièces est défini comme nul puisque nous considérerons que les appuis plans sont maintenus.



(a) (b)

figure 94 : (a) Représentation du mécanisme étudié et (b) Représentation schématique

Une représentation des variations rigides de la géométrie d'un plan est illustrée sur la figure 95(a). Ces variations sont caractérisées par l'approche des torseurs écarts permettant de déduire le domaine de l'exigence fonctionnelle DAEF (figure 95(b)).



(a) (b)

figure 95 : (a) Représentation des variations géométriques d'un plan et (b) du domaine fonctionnel rigide d'une localisation

Dans ce cas d'étude, le DAEF correspond à la localisation d'un plan de dimensions a,b (ici a=b=5). Il est défini par un ensemble de 8 inéquations dans l'espace des petits déplacements $\{tz, rx, ry\}$: En considérant que le repère de la pièce est au centre du plan (a/2 ;b/2). Cet ensemble d'inéquations spécifie le DAEF illustré sur la figure 95(b).

$$\begin{cases} -\frac{t_{loc}}{2} \le tz + \frac{b}{2} ry + \frac{a}{2} rx \le \frac{t_{loc}}{2} \\ -\frac{t_{loc}}{2} \le tz - \frac{b}{2} ry + \frac{a}{2} rx \le \frac{t_{loc}}{2} \\ -\frac{t_{loc}}{2} \le tz + \frac{b}{2} ry - \frac{a}{2} rx \le \frac{t_{loc}}{2} \\ -\frac{t_{loc}}{2} \le tz - \frac{b}{2} ry - \frac{a}{2} rx \le \frac{t_{loc}}{2} \end{cases} \quad (170)$$

La condition fonctionnelle est respectée si la relation (170) est vérifiée pour chaque point correspondant à la somme des écarts de chaque surface. En conséquence, en dehors de ce domaine, l'assemblage n'est pas conforme, à l'intérieur de ce domaine l'assemblage est conforme à l'exigence spécifiée.

Dans ce cas d'étude nous considérerons les paramètres égaux à ceux de l'application numérique partie 3.2.1.4, soient les paramètres de l'hyper ellipsoïde résultante (a=5, b=5, t_{loc}=0.1):

$$Sol = \begin{pmatrix} IT_{DACF_{tz}} \\ IT_{DACF_{rx}} \\ IT_{DACF_{ry}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.e_{tz} \\ 2.e_{rx} \\ 2.e_{ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0578 \\ 0.023 \\ 0.023 \end{pmatrix} \quad (171)$$

5.2Synthèse des tolérances du mécanisme

L'exigence qualité du DAEF est définie par le vecteur Cp suivant :

$$Cp_{DAEF} = \begin{Bmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{Bmatrix}_{DAEF} \quad (172)$$

A partir des équations (161) et (172), on en déduit les Σ_{Ei} pour un assemblage de 3 composants, en supposant une distribution uniforme des tolérances:

$$I_i = \sqrt{\Sigma_{Ei}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0.0022 \\ 0 & 0.0022 \\ 0.00556 & 0 \end{Bmatrix} \quad (173)$$

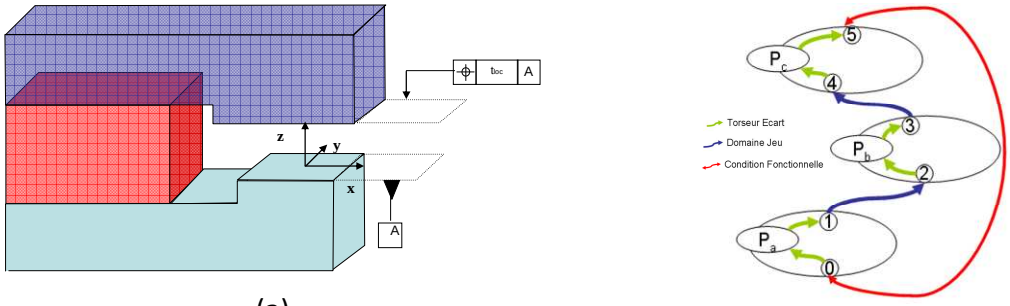
Le résultat (173) donne le niveau de variabilité acceptable sur les composantes du torseur des petits déplacements sur chaque composant de l'assemblage lorsqu'ils sont centrés. Cependant, cette hypothèse de centrage sur la cible n'est pas toujours vérifiée au contraire.

Par conséquent, nous proposerons dans la partie 7, un ensemble de critère de conformité pouvant être utilisé dans un contexte de tolérancement 3D et discuterons sur ces différentes approches.

6 Cas d'étude n°2 : Condition fonctionnelle déportée

6.1 Présentation du mécanisme et de la condition fonctionnelle

Ce second mécanisme est de même composition que le mécanisme précédent (empilement). Cependant il intègre un décentrage de la condition fonctionnelle. En conséquence, les écarts des composants doivent intégrer une notion de covariance pour respecter la condition fonctionnelle. (cf. figure 96)

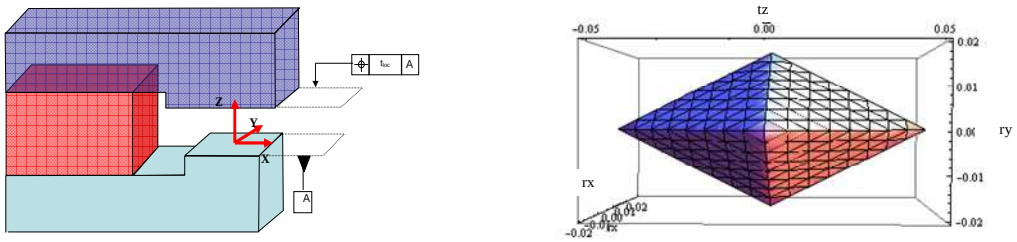


(a) (b)

figure 96 : (a) Représentation du mécanisme étudié et (b) Représentation schématique [205]

Le domaine d'acceptation de l'exigence fonctionnelle (DAEF) est décrit sur la figure 97(a). Afin de répartir les tolérances sur l'ensemble des composants du mécanisme, ce domaine a été exprimé au niveau de l'empilement à une hauteur nominale H1 de 5 et à une distance de -8 du repère d'expression de l'exigence fonctionnelle (cf. figure 97(b)).

a



b

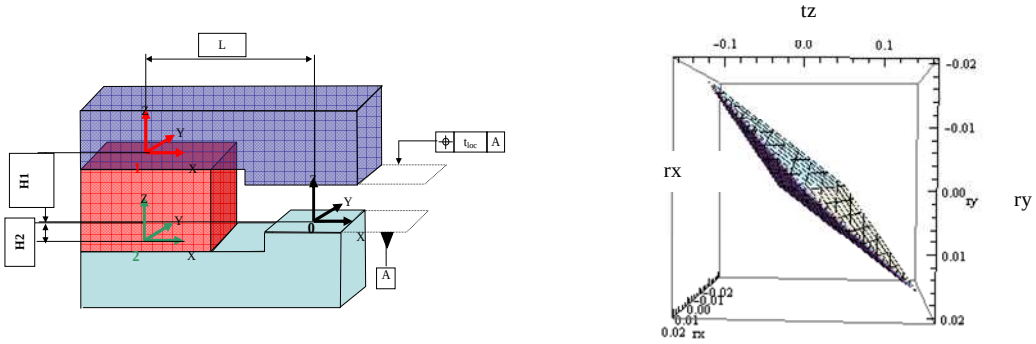


figure 97 : Présentation des domaines d'acceptation de l'exigence fonctionnelle en différents référentiels du mécanisme

Pour le premier domaine (figure 97(a)), le système d'inéquations est identique au système (170), tandis que le second système d'inéquations prend en compte le changement de référentiel. L'objectif est donc d'exprimer le DAEF dans le repère d'empilement (Repère rouge) et ensuite de répartir les tolérances en fonction de ce repère. Il est à noter qu'il n'y pas de changement de dimension du DAEF. Dans l'exemple, il est toujours de dimension 3.

En considérant, le calcul présenté dans la partie 4.2.3, il est possible d'écrire la matrice de passage P_{in}. Dans cet exemple, il n'y a pas de différence d'orientation entre les repères considérés (1,2 et 0 : figure 97 (b)). En conséquence, la matrice d'orientation correspond à une matrice identité dont les diagonales sont égales à 1.

$$P_{in} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Z & Y & 1 & 0 & 0 \\ Z & 0 & -X & 0 & 1 & 0 \\ -Y & X & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (174)$$

Les variables X, Y, Z sont données par le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$. Donc en considérant l'expression statistique du DAEF dans le repère 0 (figure 97(b)), il est possible de le transférer dans le

repère d'empilement 1. La moyenne du DAEF est considérée nulle (centré) donc seul le transfert de la matrice de Covariance est réalisé.

Soit l'application numérique avec $\overrightarrow{P_0P_1} = (-L,0,0)$ avec L=8, la dimension H est coaxiale au repère du DAEF donc n'apporte pas de covariance lors du transfert. De ce fait, nous concluons que seule la distance L influe sur le transfert du DAEF.

$$ {}_1\Sigma_n = \begin{bmatrix} Vrx_{DAEF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Vry_{DAEF} & 0 & 0 & 0 & Vry_{DAEF} * X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Vry_{DAEF} * X & 0 & 0 & 0 & Vtz_{DAEF} + Vry_{DAEF} X^2 \end{bmatrix}. \quad (175) $$

Avec Vtz_{DAEF}, Vrx_{DAEF} ; Vry_{DAEF} les variances du DAEF pour les directions tz, rx, ry.

La matrice (175) exprime la matrice des covariances du DAEF Σ_n dans le repère 1. Dans la suite de l'étude nous nous retrouvons dans un schéma similaire à l'exemple traité partie 5.

6.2Synthèse des tolérances du mécanisme

En considérant la relation (169), on peut déterminer les relations entre la matrice des variances du DAEF et celle des composants du mécanisme présentée figure 97. Dans cet exemple, deux faces sont considérées influentes sur la condition fonctionnelle localisée par les repères 1 et 2 de chaque face.

$$ {}_1\begin{cases} Vrx_{DAEF} = Vrx_1 + Vrx_2 \\ Vry_{DAEF} = Vry_1 + Vry_2 \\ Vtz_{DAEF} + Vry_{DAEF} X^2 = Vtz_1 + Vtz_2 \\ Vry_{DAEF} * X = \rho_{1tzry}\sigma tz_1\sigma ry_1 + \rho_{2tzry}\sigma tz_2\sigma ry_2 \end{cases} \quad (176) $$

Où ρ_{1tzry} est le coefficient de corrélation de la surface 1 entre les composantes tz et ry et ρ_{2tzry} est le coefficient de corrélation de la surface 2 entre les composantes tz et ry.

En considérant une répartition uniforme des variances et des coefficients de corrélation, nous obtenons les relations suivantes :

$$1\begin{cases} Irx_i^2 = Vrx_1 = Vrx_2 \le \dfrac{Vrx_{DAEF}}{2} \\ Iry_i^2 = Vry_1 = Vry_2 \le \dfrac{Vry_{DAEF}}{2} \\ Itz_i^2 = Vtz_1 = Vtz_2 \le \dfrac{Vtz_{DAEF} + Vry_{DAEF} X^2}{2} \\ \rho_{1tzry} = \rho_{2tzry} = \dfrac{Vry_{DAEF} * X}{2\sqrt{Vtz_1}\sqrt{Vry_1}} \end{cases} \quad (177)$$

En conclusion, pour respecter la condition fonctionnelle les matrices de covariances de chaque surface doivent respecter les équations (177).

Concernant les variances, les valeurs indiquées équivalent à la variance maximale admissible pour respecter la condition fonctionnelle. Cependant concernant les coefficients de corrélation, c'est une condition d'égalité:

$$\rho_{1tzry} + \rho_{2tzry} = \frac{Vry_{DAEF} * X}{\sqrt{Vtz_1}\sqrt{Vry_1}} \quad (178)$$

Si cette dernière n'est pas respectée alors les exigences du DAEF ne seront pas conformes aux attentes.

A notre connaissance, la normalisation ISO GPS permet de spécifier clairement une covariance sur le plan par la notion de zone projeté. [207].

En conséquence, respecter le DAEF signifie qu'il est nécessaire de produire des pièces avec des défauts géométriques connus et de disposer d'indicateur de capabilité permettant de qualifier un lot produit ou réceptionné.

7 Critères de Conformité

Dans le cadre d'une production ou d'un contrôle standard, il est nécessaire de disposer d'indicateurs de capabilité cohérents avec l'impact potentiel de la production sur la condition fonctionnelle (DAEF).

La partie précédente met en évidence l'importance d'utiliser des indicateurs de capabilités appliqués au contexte des petits déplacements. Envisager l'utilisation des indicateurs de capabilité traditionnels pour chaque composante du torseur écart amène à ne pas considérer les covariances qui peuvent être liées au fonctionnement (cf exemple présenté dans la partie 6).

Il est alors nécessaire de penser à une nouvelle façon de spécifier le niveau de capabilité des caractéristiques simulées, produites ou contrôlées. C'est dans ce cadre d'étude que nous proposons de rappeler les indicateurs de capabilités multi variés existant et proposons d'introduire un nouvel indicateur de capabilité à n dimensions.

7.1 Présentation d'autres Indicateurs de Capabilité multivariés

Les indicateurs multivariés sont apparus dans la littérature dans les années 1990. La plupart des définitions ont pour hypothèse une distribution multi normale des données et correspondent souvent à une généralisation des indicateurs unidimensionnels.

Dans un article de 2001, Wang [210] revoie en détail trois indicateurs multivariés (Taam [211], Chen [212] et Shahriari [213]) et effectue les calculs pour quatre problèmes différents à partir d'une définition rectangulaire ou sous la forme d'un abat-jour de l'exigence fonctionnelle.

Taam présente ainsi deux indicateurs multivariés qui sont le *MCp* et *MCpm*. Il suppose une répartition multi normale des données et considère que pour une équiprobabilité donnée, la spécification est garantie.

Shahriari définit par un vecteur à 3 dimensions son indicateur multivarié en supposant une répartition des données suivant une loi multi normale.

- La première composante de ce vecteur est une mesure du potentiel du procédé (CpM) qui est une généralisation de l'indicateur unidimensionnel Cp.
- La seconde composante est une PV (P-value). Cette valeur est définie sous l'hypothèse que le centre de la spécification (DAEF) correspond à la cible à atteindre. Une statistique d' Hotelling T^2 est alors calculée et le PV déduit. Si le PV est proche de 0, les données observées ne sont pas proches du centre. Dans le cas ou PV est proche de 1, les données observées sont proches du centre.
- La troisième composante correspond au pourcentage de données à l'intérieur du DAEF (*LI*). Si cet indicateur est égal à 100% alors l'ensemble des données est à l'intérieur du domaine.

Tandis que Chen propose un indicateur de capabilité multivarié général adapté pour les spécifications elliptiques ou rectangulaires (DAEF). Ce dernier indicateur est indépendant de la normalité.

Une application d'indicateur multivarié au tolérancement géométrique a été proposée par Wang [214] sur la base de la distance euclidienne. Cette approche ne considère pas la matrice de covariance en conséquence cet indicateur n'est pas viable lorsque des mécanismes ont des conditions fonctionnelles déportées.

Les travaux de Garcias-Castellanos [215] ont permis de mettre en évidence un nouvel indice de capabilité pour des lois bi-normal. Il propose de généraliser cette approche pour les lois non bi normale. Cette approche se base alors sur une transformation des données et de la zone de tolérance de telle manière que les données transformées aient une distribution proche d'une loi bi-normale. Néanmoins, l'auteur informe que son utilisation est complexe lorsque la dimension de la loi est supérieure à 2. En conclusion, ces travaux nécessitent des développements afin de réduire le temps de calcul.

L'objectif premier de ces indicateurs est d'évaluer le niveau de qualité d'un lot produit par rapport à une exigence spécifiée par le concepteur. Cependant, dans un contexte de bureau d'études l'enjeu est tout autre. En effet, le bureau d'études a pour ambition d'assurer la fonctionnalité du produit, quel que soit le lot de composants pouvant être accepté. Donc de définir sur chaque composant de l'assemblage, les « tolérances » ainsi que des indicateurs de tolérance. Les indicateurs présentés nous semblent a priori complexes à définir dans un aspect de synthèse ou d'analyse des tolérances. Nous proposons ainsi une alternative à ceux-ci. L'idée est de quantifier l'écart par rapport à l'exigence cible pour chaque composant produit puis d'évaluer le lot. En clair, cette approche consiste à noter l'écart d'une pièce ou d'un lot par rapport à une population cible, de la même manière que l'inertie dans le cas unidimensionnel.

Cet indicateur est calculé à partir d'une définition de la matrice de variance covariance cible (hyper-ellipsoïde Cible), nous proposons d'introduire ci-dessous ce nouvel indicateur.

7.2Nouvel indicateur de capabilité multi variable : la distance de Mahalanobis

Dans ce chapitre, il a été mis en évidence l'importance du respect de la matrice des covariances sur chaque composant de l'assemblage. Ainsi, l'enjeu est de proposer un indicateur de capabilité qui identifierait les écarts d'un lot, (ou d'une pièce,) par rapport à l'exigence calculée sur le composant.

L'exigence est qualifiée pour chaque composant par une matrice de covariance idéale. Cette matrice définit la cible à respecter pour garantir le respect de la fonctionnalité de l'assemblage. Il est donc nécessaire de qualifier une production par l'écart entre la covariance cible et la covariance produite. La distance de Mahalanobis représente une définition possible de cet écart.

Nous proposons dans un premier temps de faire un rappel sur la distance de Mahalanobis, d'introduire l'inertie des distances de Mahalanobis et de finir sur un ensemble de simulations d'assemblage suivant les cas présentés dans la partie 5.

7.2.1 Rappel sur la distance de Mahalanobis

La distance de Mahalanobis est une mesure de distance introduite par P. C. Mahalanobis en 1936 [208]. Elle est basée sur la corrélation entre des variables avec lesquelles différents modèles peuvent être identifiés et analysés. C'est une manière utile de déterminer la similarité entre une série de données connues et inconnues.

La distance de Mahalanobis diffère de la distance euclidienne par le fait qu'elle prend en compte la corrélation de la série de données. Elle est souvent utilisée pour la détection de données aberrantes dans un jeu de données, ou bien pour déterminer la cohérence de données fournies par un capteur. Par exemple : cette distance est calculée entre les données reçues et celles prédites par un modèle. [209]

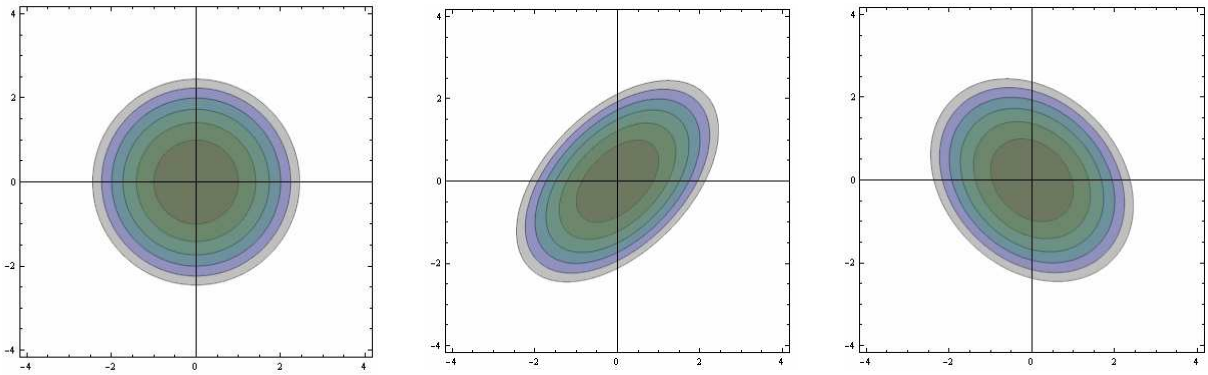
La distance de Mahalanobis d'une série de valeurs de moyennes, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_P)$, possédant une matrice de covariance, Σ, pour un vecteur à plusieurs variables $x = (x_1, x_2, ..., x_P)$ et définit comme suit :

$$D_M^2(x) = (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \tag{179}$$

Il a noté que :

- Si la matrice de covariance est une matrice identité, cette distance est alors la même que la distance euclidienne.
- Si la matrice de covariance est diagonale, elle est appelée distance euclidienne normalisée.

La figure 98 représente en deux dimensions la distance de Mahalanobis pour différentes matrices de Covariance (Σ). Les anneaux de couleurs correspondent à différentes distances de Mahalanobis allant de 1 à 6. Une valeur de Mahalanobis égale à k correspond à un écart de k σ par rapport au barycentre de l'ellipse.



$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

figure 98 : Représentation de la distance de Mahalanobis

Soit, la matrice de covariance connue. Nous calculons pour chaque pièce la distance de Mahalanobis. Si cette distance est inférieure à un seuil critique définit par le concepteur alors cette pièce est conforme, dans le cas contraire elle est considérée comme non conforme.

Étant donné que pour chaque pièce il est possible de déterminer la valeur des distances de Mahalanobis, nous proposons de définir un critère d'inertie qualifiant l'ensemble des distances de Mahalanobis de pièces pouvant appartenir à un lot.

7.2.2 Inertie des distances de Mahalanobis

Dans le cas d'un lot nous proposons d'utiliser l'inertie des distances de Mahalanobis (cf. relation (180)). Elle traduit la variabilité du lot par rapport à une situation idéale centrée sur les cibles.

$$I_{D_M} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} D_M^2(x_i)} \qquad (180)$$

Où k représente le nombre de composants d'un lot, $D_M(x_i)$ est la distance de Mahanalobis de la surface x_i.

La figure 99 représente deux valeurs d'inertie d'un lot selon la distance de Mahalanobis. Les écarts par rapport à la cible sont considérés comme nuls.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{D_M} = 2.81$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad I_{D_M} = 1.41$$

figure 99 : Représentation de la distance de Mahalanobis pour un lot donné

La problématique est donc de définir le seuil critique de l'acceptabilité d'un lot. Ainsi, si nous considérons I_{DM} égale à 2 pour chaque composant quelle sera la qualité finale de l'assemblage en considérant une matrice de variance puis dans le cas d'une matrice de covariance ?

L'objectif du point suivant est de vérifier que cet indicateur est cohérent avec la définition de l'inertie qui est pour un écart-type donné de permettre une excursion de la moyenne. Nous proposons donc de réaliser quelques simulations d'assemblages afin de vérifier la cohérence de ce nouvel indicateur de capabilité multi variables.

7.3Cas d'étude 1 : Inertie des distances de Mahalanobis

Considérons l'exemple d'un mécanisme avec la condition fonctionnelle au dessus d'un ensemble de surfaces empilées (4.2.2 Approche de synthèse des inerties sans covariance). Le niveau de capabilité du DAEF est identique à celui spécifié dans la partie 5 donc le nombre de ppm doit être inférieur à 10 300[21] composants pour le DAEF. Nous rappelons ici la matrice de variance à respecter pour les 5 composants de l'assemblage.

$$I_i = \begin{Bmatrix} 0 & 0.0017 \\ 0 & 0.0017 \\ 0.0043 & 0 \end{Bmatrix}_i \quad (181)$$

Pour illustrer ce cas d'étude, nous proposons de réaliser plusieurs configurations de de dimension 1 000 000 dans la partie suivante.

7.3.1 Configuration du mécanisme

Un ensemble de 6 configurations est testé pour ce mécanisme. Il y a 4 configurations centrées et deux décentrées suivant deux distributions statistiques Normale et Uniforme que nous considérons comme extrêmes en termes d'impact sur l'exigence fonctionnelle.

Les vecteurs d'entrées de la configuration sont donc de trois types :

La loi de distribution statistique normale ou uniforme de chaque composant d'écart dont les paramètres sont calculés à partir de deux vecteurs IC_i (Cp) et ICi_i [204] est attribuée pour chaque composante d'écart d'un torseur i. Elle permet de donner l'écart défini pour chaque composante d'écart. Dans l'exemple, si nous considérons la composante d'écart tz du torseur i avec un IC_i correspondant à 2. L'écart type de la distribution statistique sera alors égale à l'écart type défini par la relation (181) divisé par le IC_i, égale à 2

[21] Le critère d'exigence de 10 300 est considéré comme notre référence qualité, et correspond à un Cp_i égal à 1 pour chaque composante du torseur écart des surfaces. Bien entendu, cette référence peut être ajustée au besoin industriel et correspondrait à un Cp_i sur chaque composante du torseur écart des surfaces inférieure à 1.

le ICi_i [204] est attribué à chaque composante d'écart d'un torseur i. A partir de cet indicateur et pour un IC_i donné il est possible de calculer le décentrage maximal sur la composante d'écart tz (par exemple) par la relation:

$$ICi_i(tz) = \frac{I_i(tz)}{\sqrt{\delta_i^2(tz) + \sigma_i^2(tz)}} \Rightarrow \delta_i(tz) = \sqrt{\left(\frac{I_i(tz)}{ICi_i(tz)}\right)^2 - \sigma_i^2(tz)} \text{ avec } \sigma_i(tz) = \frac{I_i(tz)}{IC_i(tz)} \quad (182)$$

En conséquence pour une valeur donnée, il est possible d'en déduire les paramètres des distributions statistiques simulées pour chaque composante. Les simulations sont donc réalisées suivant les trois critères présentés ci-dessous.

N°	Configuration	Vecteur des IC_i (Cp) sur chaque composant	Centré sur cible?
1	Distribution Normale centrée sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 01 \\ 01 \\ 10 \end{Bmatrix}_i$	oui
2	Distribution Normale centrée sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 02 \\ 02 \\ 20 \end{Bmatrix}_i$	oui
3	Distribution Uniforme centrée sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 01 \\ 01 \\ 10 \end{Bmatrix}_i$	oui
4	Distribution Uniforme centré sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 02 \\ 02 \\ 20 \end{Bmatrix}_i$	oui
5	Distribution normale décentrée sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 02 \\ 02 \\ 20 \end{Bmatrix}_i$	Non ; $ICi_i = \begin{Bmatrix} 01 \\ 01 \\ 10 \end{Bmatrix}_i$
6	Distribution Uniforme décentrée sur la cible pour chaque composant	$IC_i = Cp_i = \begin{Bmatrix} 02 \\ 02 \\ 20 \end{Bmatrix}_i$	Non ; $ICi_i = \begin{Bmatrix} 01 \\ 01 \\ 10 \end{Bmatrix}_i$

Tableau 59 : Synthèse des configurations simulées.

7.3.2 Résultat des configurations

Le Tableau 60 synthétise les résultats des simulations. La deuxième colonne illustre la répartition statistique des distances de Mahalanobis pour un lot de 1 000 000 de composants. La troisième présente l'inertie des distances de Mahalanobis du lot et la dernière introduit le nombre de ppm atteint sur l'exigence fonctionnelle pour la configuration donnée.

L'observation des configurations 1,3 et 2,4 (Tableau 60) montre quelle que soit la distribution statistique d'entrée, normale ou uniforme, le I_{DM} est de même niveau. Bien entendu, l'influence sur la condition fonctionnelle est différente, mais de même ordre de grandeur pour une distribution statistique donnée.

Les configurations 5 et 6 (Tableau 60) représentent les configurations les plus désavantageuses dans les approches statistiques. Chaque composante des torseurs écarts est décentrée dans la même direction. De ce fait, les résultats sur la condition fonctionnelle sont exécrables. Dans le cas unidimensionnel, certains auteurs spécifient d'utiliser un maillon d'au moins 5 pièces afin de bénéficier des avantages du tolérancement statistique en réduisant les risques d'atteindre une configuration désavantageuse. Cependant dans le cas tridimensionnel, cette remarque n'est pas justifiée du fait d'une non-symétrie du DAEF. En effet, dans la partie 3.1, nous avons recherché à maximiser le volume de Hyper-Ellipsoïde englobé (HE). Ce critère implique qu'HE doit être tangent au DAEF en des points spécifiques. En conséquence, cette façon de faire engendre automatiquement une augmentation du risque de non-conformité due au décentrage pour ces configurations spécifiques.

Pour minimiser ce risque, Il est important de définir un I_{DM} acceptable pour un lot permettant ainsi d'assurer la fonctionnalité de l'assemblage dans les plus mauvaises configurations. Cette façon de faire peut être déterminée empiriquement ou de façon analytique. Dans l'exemple, on considère un ICi_i égale à 1.45 alors le I_{DM} est égale à 1.19 et le nombre de *ppm* à 8 948. En conséquence pour satisfaire la condition fonctionnelle, il est nécessaire de définir un I_{DM} cible, noté I_{DMC} et un ratio entre ce I_{DMC} et le I_{DM} produit (I_{DMP}) celui doit être supérieur à 1. Ce ratio est nommé TI_{DMi}.

$$TI_{DM\,i} = \frac{I_{DMC}}{I_{DMP}} \tag{183}$$

L'avancé des travaux ne permet pas d'exprimer ce ratio en fonction du besoin fonctionnel. Dans l'état des travaux, il est nécessaire de passer par une approche d'analyse des tolérances pour déterminer le I_{DMC}.

Pour finir, nous pouvons remarquer que le Tableau 60 présente pour les configurations, 1, 3, 5 et 6 un I_{DM} équivalent. Pour autant, le résultat sur le DAEF en nombre de ppm diffère beaucoup. Ainsi, pour les configurations 1 et 3, nous avons un nombre de ppm inférieur à l'exigence de 10 300[22] au contraire des configurations 5 et 6 pour laquelle le nombre de ppm est très supérieur à celui spécifié. En l'occurrence lorsque l'I_{DMC} est défini, on peut penser qu'il ne permet pas d'exploiter de façon optimale la liberté donnée par la répartition des inerties avec l'indicateur proposé (183). La preuve est donnée par les configurations 2 et 4 qui correspondent aux configurations centrées de 5 et 6 dont la valeur en nombre de ppm sur le DAEF est nulle. En conséquence, la relation (180) ne permet pas d'exploiter au maximum la variabilité permise par la synthèse des inerties que nous proposons.

[22] Le critère d'exigence de 10 300 est considéré comme notre référence qualité, et correspond à un Cp_i égal à 1 pour chaque composante du torseur de la surface. Bien entendu, cette référence peut être ajustée au besoin industriel.

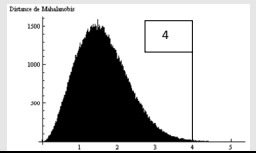
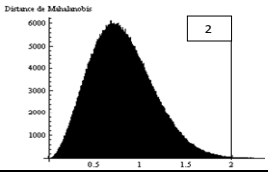
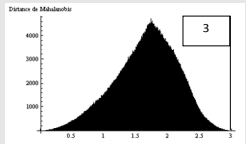
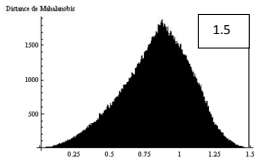
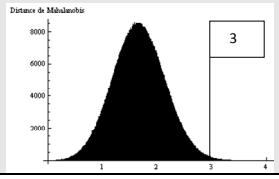
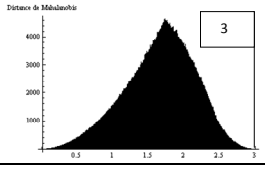
Configurations	Histogramme	I_{DM}	ppm sur DAEF
1		1.73	9605 (97.53)
2		0.86	0 (0)
3		1.73	7 983 (88,99)
4		0.867	0 (0)
5		1.73	743 933 (436)
6		1.74	742 676 (432)

Tableau 60 : Résultat des simulations des distances de Mahalanobis.

8 Conclusions

L'ambition de ce chapitre a été de proposer une méthode de répartition des inerties à partir d'une exigence fonctionnelle définie dans le contexte des torseurs de petits déplacements et de proposer un nouvel indicateur de capabilité.

Nous avons pu ainsi proposer une approche permettant de substituer l'exigence fonctionnelle à un domaine statistique pour faire une répartition inertielle.

Cette étude permet de soulever plusieurs perspectives à ce travail :

- L'expression de l'exigence fonctionnelle. Si dans cette étude, nous avons défini l'exigence fonctionnelle par un domaine. La construction de ce domaine peut ne pas être facile, surtout pour les variations physiques, les jeux…L'objectif est de déduire, de façon automatique, le domaine fonctionnel en fonction des performances (mécanique, physique, électrique…) du mécanisme dans l'ensemble de ces configurations, et de la géométrie cible de l'assemblage.
- Des développements sur la répartition des inerties sont à mener, notamment sur l'intégration de jeu dans le mécanisme, ou les répartitions parallèles de l'inertie (une condition fonctionnelle satisfaite par n chaînes de cotes). De même, l'expérimentation industrielle de cette façon de tolérancer peut aider à donner plus de crédibilité à cette approche de synthèse.
- A la manière d'Adragna, il serait intéressant de développer une répartition des inerties permettant de garantir un nombre de ppm sur le domaine fonctionnel.
- Ces travaux ont introduit un nouvel indicateur de capabilité et rappelé d'autres indicateurs de capabilités. La perspective serait de pouvoir statuer sur la performance de ces indicateurs. Ainsi, nous avons pu voir que l'inertie des distances de Mahalanobis est une approche assez simple, à calculer sous l'hypothèse de connaître les écarts des torseurs des petits déplacements de chaque valeur, et aisée à comprendre, puisqu'une seule valeur permet d'informer sur le niveau de qualité du lot. Les autres approches permettent elles aussi d'évaluer le niveau de capabilité du lot. Il est donc nécessaire de pouvoir à terme statuer sur un indicateur de capabilité permettant d'être représentatif de la qualité d'un lot, et d'être robuste, c'est-à-dire de ne pas amener à des situations d'assemblage ne permettant pas de respecter l'exigence fonctionnelle définie comme pour le Cpk dans le cas unidimensionnel. Il est à noter que l'indicateur des inerties des distances de Mahalanobis n'est pas optimum, c'est-à-dire qu'il ne permet pas d'exploiter le maximum des variations proposées par la répartition des inerties.
- Intégration de la forme : Comme, nous l'avons introduit tout au début de ce chapitre le contexte des petits déplacements correspond à un deuxième niveau de

représentativité de la réalité. Pousser l'étude plus loin amènerait à réaliser une synthèse sous la forme d'une tolérance de forme, ce qui à notre connaissance reste un champ libre malgré plusieurs travaux scientifiques sur l'analyse de forme.

9 Bibliographie

[170] Bourdet P, [1987], Contribution A La Mesure Tridimensionnelle: Modele d'Identification Des Surfaces, Métrologie Fonctionnelle Des Pieces Mecaniques, Correction Géométrique Des Machines A Mesurer Tridimensionnelles, Thèse d'Etat, Nancy I - LURPA ENS CACHAN, France.

[171] Laperriere L, Ghie L, Descrochers A, [2002], Statistical and deterministic tolerance analysis and synthesis using a unified Jacobian-torsor model, CIRP ANNALS-MANUFACTURING TECHNOLOGY, 51, 1, 417-420.

[172] Giordano M, Hernandez P, Denimal D, Synthesis and statistical analysis for three-dimensional tolerancing. In: 11 th edition of the CIRP conference on Computer Aided Tolerancing 26-27 march 2009 Annecy.(France).

[173] Giordano M and Duret D, 1993, Clearance space and deviation space. Application to three dimensional chain of dimensions and position, 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, pp 179-196.

[174] Davidson JK and Shas, JJ, [2002], Geometric tolerances: a new application for line geometry and screws, PROCEEDINGS OF THE INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS PART C-JOURNAL, 216,1, 95-104

[175] Dantan JY, Mathieu L, Ballu A, Martin, P, [2005], Tolerance synthesis: quantifier notion and virtual boundary, COMPUTER AIDED DESIGN, 37, 2, 231-240.

[176] Zhang Hong Chao, [1995], Advanced Tolerancing Technique, Wiley interscience, ISBN : 047114594790000

[177] Anselmetti B,[2007], Three-dimensional calculation of ISO standards scoring results, for a probabilist calculation, MECANIQUE & INDUSTRIES,8,3,173-185.

[178] Germain F, 2007, Tolérancement Statistique tridimensionnel, integration en CFAO, Thesis, University of Savoy, France

[179] Germain F, Denimal D, Giordano M, A Method for Three Dimensional Tolerance Analysis and Synthesis Applied to Complex and Precise Assemblies. IFIP International Federation for Information Processing Micro-Assembly Technologies and Applications, Volume 260/2009; pp55–65, 2009.

[180] Adragna P.A, [2007], Tolérancement des systèmes Assemblés, une approche par le tolérancement inertiel, Thèse, Université de Savoie, France

[181] Temmerman M,[2001], Analyse et synthèse du tolérancement "au pire des cas" et statistique dans l'environnement CFAO, Ecole centrale de Paris.

[182] Ngoi, B.K.A and Ong, C.T., 1998, Product and process dimensioning and tolerancing techniques a state of the art review, International journal, advanced manufacturing technology, vol. 14, no12, pp. 910-917.

[183] Forslund K and Söderberg.R,[2009], The effects of geometrical variation on perceived quality – A close look at the concept of visual robustness, Computer Aided Tolerancing at Annecy.

[184] Wickman, C. and Söderberg, R., [2003], Increased Concurrency Between Styling and Design using CAT Technology Combined with Virtual Reality, Journal of Concurrent Engineering: Research and Applications, 11, 1, 7-15.

[185] Juster, N. P., Fitchie, M., Taylor, S., Dew, P., Maxfield, J. and Zhao, J., [2001], Visualising the impact of tolerances on cosmetic product quality, International Conference on Engineering Design, Glasgow, August 21-23.

[186] Hekkert, P.,[2006], Design aesthetics: principles of pleasure in design, Psychology Science, 48, 2, 157-172.

[187] Forslund, K. and Söderberg, R., [2007], Categories of Visual Quality Cues, ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, Nevada, 4-7 September

[188] Coxeter, H. S. M, [1973], Regular Polytopes, 3rd ed. New York: Dover, p. 45, 1973.

[189] ISO 8015, Technical drawings -- Fundamental tolerancing principle , ISO

[190] NF ISO/TS 17450-2, Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux - Partie 2 : principes de base, spécifications, opérateurs et incertitudes, Novembre 2004

[191] XP CEN ISO/TS 17450-1, Spécification géométrique des produits (GPS) - Concepts généraux - Partie 1 : modèle pour la spécification et la vérification géométriques, Mars 2008

[192] Wenninger, M. J. [1983], Dual Models. Cambridge, England: Cambridge University Press.

[193] Kataya B, [2002], Modélisation des tolérances géométriques pour l'intégration en conception assistée par ordinateur. Laboratoire de Mécanique Appliquée, thèse de l'université de savoie.

[194] Meerschaert, MM and Scheffler HP, [2001], Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice, ISBN: 978-0-471-35629-5

[195] Saporta G, [2006], Probabilité analyse des données et statistique, ISBN: 978-2710808145

[196] Holzer, E.B, [2003], Figure of Merit for Muon Cooling –An Algorithm for Particle Counting in Coupled Phase Planes.

[197] D.F.Brown., [1979], Voronoi diagrams from convex hulls. Information Processing Letters, 9:223:228

[198] B.Chazelle and J.Matousek.[1991], Derandomizing an output-sensitive convex hull algoritm in three dimensions. Computational Geometry: Theory an d Applications.

[199] H.Edelsbrunner and N.R.Shah, [1992], Incremental topological flipping works for regular triangulations. In proceedings of the Symposium on Computational Geometry, pages 43, 52, ACM.

[200] Barber, C. B., D.P. Dobkin, and H.T. Huhdanpaa,[DEC 1996], The Quickhull Algorithm for Convex Hulls, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 22, No. 4, p. 469-483.

[201] Seeger A., [1992], Calculus Rules for combinations of ellipsoids and applications, Bulletin of the Australian Mathematics Society, Vol. 47, 1-12.

[202] Qingde Li and Griffiths John G, [2004], Least Squares Ellipsoid Specific Fitting, Bulletin of the Australian Mathematics Society, IEEE.

[203] Philips PCB, [1977], A large deviation Limit theorem for multivariate distributions, Journal of multivariate analysis, 7, 50-62.

[204] NF E 04-008, [juillet 2009], Spécification géométrique des produits (GPS), Calcul de tolérance indications et critères d'acceptation, Méthodes arithmétique, statistique quadratique et statistique inertielle

[205] M. Giordano, E. Pairel, P. Hernandez, Complex Mechanical Structure Tolerancing by Means of Hyper-graphs, in Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, J.K. Davidson Editor 2007, Springer, pp.105-114

[206] Petit JP, [2004] , Spécification géométrique des produits, Méthode d'analyse de tolérances. Application en conception assistée par ordinateur, Thèse, université de savoie.

[207] NF ISO 129-1 : janvier 2005, Technical drawings -- Indication of dimensions and tolerances -- Part 1: General principles, ISO

[208] Mahalanobis P C, On the generalised distance in statistics , Proceedings of the National Institute of Sciences of India, vol. 2, no 1, 1936, p. 49–55

[209] Taguchi, [2002], The Mahalanobis Taguchi Strategy , John Wiley, ISBN:9780471023333

[210] Wang, FK, Hubule, Norma F, [2000], Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices,32,3,263 .

[211] Taam, W; Subbaiah, P and Liddy, J.W. [1993], A Note on multivariate Capability indices, Journal of Applied Statistics 20, pp 339-351.

[212] Chen, H. [1994], A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance zone, Statistica Sinica 4, 749-758.

[213] Shahriari, Hubele NF et Lawrence, F.P, [1995], A multivariate Process capability vector, Proceedings of the 4th Industrial Engineering Research conference, Institute of industrial engineers, 304-309.

[214] Wang, FK, Hubele Norma, [1998], Quality Evaluation using geometric distance approach, International Journal of Reliability, Quality and safety Engineering, 6,2, 139-153.

[215] Garcia-Castellanos, [2004], Indices de capabilité multivariables dans le cas de deux caractéristiques qualité, Thèse de l'Université de Nantes.

10 Extra Bibliographie

[216] Hong Y.S., A comprehensive review of tolerancing research, vol 40, 11, 2425 – 2459, 2002

[217] Anselmetti B, Tolérancement, Cotation de fabrication et métrologie, Volume 3, Hermès Lavoisier, ISBN : 2-7462-0667-6, 2003

[218] Mathieu L, Villeneuve François, Tolérancement géométrique des produits (Traité IC2, série productique), hermès Lavoisier, 05-2007

[219] ASME , "Y14.5M-1994: Dimensioning and tolerancing: revision of ANSI Y14.5M-1982", The American Society of Mechanical Engineers, New York, NY,1994a.

[220] ASME, "Y14.5M-1994: Mathematical definition of dimensioning and tolerancing", The American Society of Mechanical Engineers, New York, NY, 1994b.

[221] Pillet M., Samper S., Formosa F., Geometrical Inertial Tolerancing, 6ème Congrès Int. Pluridisciplinaire Qualité et Sûreté de Fonctionnement (Qualita 2005), Bordeaux, France, 2005, pp. 757-764,

[222] Denimal D. Giordano M. Pillet M. Sergent A. Inertial tolerancing according to Geometrical Product Specification Standard applied to stack up, CIRP conference on Computer Aided Tolerancing, Annecy France , 2009

[223] Adragna P.A., Pillet M. Samper S., Formosa F., Guarantying a maximum of Non-Conformity Rate on the assembly resultant with a statistical tolerancing approach , Computer Aided Tolerancing (CAT) 2007. Erlangen, Germany

[224] Pillet M., Adragna P. A., Denimal D. Monographie sur le tolérancement inertiel, Rapport Interne LISTIC n° 05/11 - projet Interreg III, Université de Savoie, 2005, 110 pages.

11Annexes

11.1 Détail du calcul des points tangents d'un hyperplan

Supposons un DAEF de dimension p=3, les coefficients directeurs (a_i) des hyperplans (HP_3)du DAEF sont connus :

$$HP_3(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = Cste\ . \tag{184}$$

Nous recherchons les paramètres de A, B, C de l'hyper-ellipsoïde de dimension 3 (HE_3) en supposant μ_X nul (Repère sur le barycentre des points extrêmes du plan) :

$$HE_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C^2} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} + \frac{x_3^2}{C^2} = 1 \tag{185}$$

Le vecteur normal de HE au point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ est donné par:

$$\frac{(x_1 - x_0)}{\partial HE_{3x}} = \frac{(x_2 - y_0)}{\partial HE_{3y}} = \frac{(x_3 - z_0)}{\partial HE_{3z}} \tag{186}$$

Où HE_{3X} est la dérivée partielle selon x de la fonction HE_3, de même pour HE_{3y} et HE_{3z}, qui sont les dérivées partielles de HE_3 selon y et z. Et pour le vecteur normal de l'*HP* au point $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{(x_1 - x_0)}{\partial HP_{3x}} = \frac{(x_2 - y_0)}{\partial HP_{3y}} = \frac{(x_3 - z_0)}{\partial HP_{3z}} \tag{187}$$

On peut donc en déduire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = Cste \\ \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} + \frac{x_3^2}{C^2} = 1 \\ \frac{(x_1 - x_0)}{\partial HP_{3x}} = k\frac{(x_1 - x_0)}{\partial HE_{3x}}; \frac{(x_2 - y_0)}{\partial HP_{3y}} = k.\frac{(x_2 - y_0)}{\partial HE_{3y}}; \frac{(x_3 - z_0)}{\partial HP_{3z}} = k.\frac{(x_3 - z_0)}{\partial HE_{3z}} \end{cases} \tag{188}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = Cste \\ \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{B^2} + \frac{x_3^2}{C^2} = 1 \\ \frac{HE_{3x}}{HP_{3x}} = k; \frac{HE_{3y}}{HP_{3y}} = k; \frac{HE_{3z}}{HP_{3z}} = k \end{cases} \tag{189}$$

En posant :

$$\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{x_2^2}{B^2}+\frac{x_3^2}{C^2}=k.\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)=1 \quad (190)$$

A partir de l'équation (190), on en déduit :

$$k.Cste=1\Rightarrow k=\frac{1}{Cste}\ \text{avec}\ Cste=\frac{IT}{2} \quad (191)$$

En conséquence :

$$\begin{cases}\dfrac{HE_{3x}}{HP_{3x}}=\dfrac{1}{Cste}\ \text{donc}\ x_1=\dfrac{A^2a_1}{Cste}\\ \dfrac{HE_{3y}}{HP_{3y}}=\dfrac{1}{Cste}\ \text{donc}\ x_2=\dfrac{B^2a_2}{Cste}\\ \dfrac{HE_{3z}}{HP_{3z}}=\dfrac{1}{Cste}\ \text{donc}\ x_3=\dfrac{C^2a_3}{Cste}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{A^2a_1}{Cste}\\ x_2=\dfrac{B^2a_2}{Cste}\\ x_3=\dfrac{C^2a_3}{Cste}\end{cases} \quad (192)$$

Par déduction, nous obtenons la relation suivante :

$$a_1\frac{A^2a_1}{Cste}+a_2\frac{B^2a_2}{Cste}+a_3\frac{C^2a_3}{Cste}=Cste\Rightarrow A^2a_1^2+B^2a_2^2+C^2a_3^2=Cste^2 \quad (193)$$

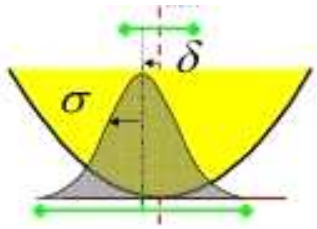
En bref, pour qu'un hyper ellipsoïde à *p* dimensions soit tangent à un hyper plan de même dimension. Il est nécessaire de vérifier que le produit quadratique des coefficients moins la constante de l'hyper-plan soit nul.

Conclusions générales et perspectives

Déploiement du tolérancement inertiel dans la relation client fournisseur

« Il n'est pas nécessaire de changer. La survie n'est pas obligatoire » .- W.Edwards Deming – 1900-1993

« La virilité d'une idée ne consiste pas moins dans sa puissance à créer un passage à travers la pensée contemporaine que dans sa capacité à dominer les mouvements futurs » - Le livre du Thé - Okakura Kakuzo -1862- 1913



1 Conclusions

Le tolérancement inertiel a été introduit comme une approche de tolérancement statistique unidirectionnel permettant de satisfaire l'exigence fonctionnelle spécifiée sur un plan. Notre objectif est d'étendre ces travaux dans la relation client-fournisseur. A cet égard, plusieurs thématiques ont été abordées.il s'agit de :

- L'utilisation de l'inertie en fabrication,
- La définition de l'inertie d'une surface,
- L'inertie totale est une nouvelle méthode de tolérancement alternative à celle proposée par l'ISO, et l'ASME,
- La synthèse de l'inertie totale à partir de l'exigence fonctionnelle

1.1 Utilisation de l'inertie en fabrication

Premièrement, nous nous sommes intéressés à l'utilisation de l'inertie en fabrication. Si, la définition de la carte de contrôle inertielle avec dérive est antérieure à nos travaux, nous avons recherché à s'enrichir en présentant deux voies de déploiements :

- La première voie porte sur l'aspect scientifique de la carte de contrôle,
- La seconde porte sur l'aspect applicatif en industrie.

Concernant l'aspect scientifique, nous avons proposé de définir une courbe d'efficacité permettant d'évaluer la capacité de la carte de contrôle inertielle avec dérive.

En ce qui concerne l'aspect applicatif, nous avons défini dans ce travail le contexte d'utilisation de la carte de contrôle inertielle avec dérive. De même, les différentes collaborations avec les industriels nous ont également permis d'élargir ce contexte par la proposition d'un ensemble de variantes de la carte de contrôle inertielle. En outre, afin de donner une vision de la qualité long terme du pilotage avec les cartes de contrôle inertielles, nous avons proposé de réaliser plusieurs simulations.

Nous avons étendu notre réflexion à la mise en place des cartes de contrôles inertielles et de choix de la carte. Ce raisonnement a permis de définir certaines recommandations, qui enrichies de l'approche DMAICS sont à la base d'une nouvelle approche de maîtrise des

statistiques en production, nommée « Maîtrise Inertielle des Procédés ». Dans ce cadre, un premier exemple industriel a été réalisé. Un retour d'expérience a permis de montrer l'apport du tolérancement inertiel et celui du pilotage avec les cartes de contrôles inertielles avec dérive. Nous avons cité parmi ces améliorations :

a) l'élimination de toutes anomalies dans le cas d'assemblage,

b) le gain en productivité,

c) la stabilité du niveau de qualité livré pour chaque lot de composants…

Un deuxième exemple a permis de s'intéresser à l'inertie et à la conformité. L'étude réalisée a pu mettre en évidence le lien entre le respect de l'inertie en production et son impact sur l'exigence fonctionnelle.

Ce travail sur les cartes de contrôle inertielles nous semble assez évolué pour permettre une diffusion de celui-ci, d'ailleurs il a fait l'objet d'un développement informatique aux prés de l'entreprise ABW Concept (Q-Das).

1.2 Définition de l'inertie d'une surface

La définition de l'inertie d'une surface a fait également l'objet de ces travaux de thèse, nous avons recensé l'ensemble des définitions existantes pour établir ensuite la relation statistique entre ces différentes définitions et la convergence statistique de chacune. La perspective de ce travail est de donner une orientation permettant de réaliser des travaux futurs plus complets sur l'inertie d'une surface.

1.3 Nouvelle méthode de tolérancement alternative

Une nouvelle méthode de tolérancement alternative à celle proposée par l'ISO, et l'ASME a été proposée dans ce travail. Cette méthode part du constat qu'à l'ère numérique il est possible de maîtriser la variabilité d'une pièce à partir de son modèle CAO. L'objectif n'est plus de limiter le défaut d'une surface par une zone, mais bien de le limiter par l'expression de la variabilité, donc l'inertie. Cette réflexion nous a amenée à développer un outil d'aide au pilotage de processus de fabrication complexe. En effet, le réglage d'un outil de production sur un modèle numérique n'est pas aisé du fait de la complexité des pièces, des outils de production et des gammes de fabrications... C'est dans l'optique de simplifier cette phase que nous avons proposé de développer un outil permettant de donner de façon

instantanée les réglages optimums à partir d'un ensemble de points mesurés. Cet outil a trouvé échos auprès des industriels, pour lesquels des applications ont été réalisées. Cela nous a permis de mettre en évidence quelques perspectives de diffusion et d'amélioration.

1.4 Détermination de l'inertie totale

La détermination de l'inertie totale d'une surface a été proposée dans un contexte des petits déplacements. À partir d'une définition de l'exigence fonctionnelle, nous avons proposé une répartition des inerties sur chaque composant. De même, nous avons introduit un nouvel indicateur de capabilité basé sur la distance de Mahalanobis.

2 Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse répondent à un certain nombre de questions, mais en fin de compte en soulèvent de plus nombreuses qui mériteraient d'être abordées dans des travaux ultérieurs. Nous proposons de parcourir les perspectives de recherches encore ouvertes à la suite de ce travail.

2.1 Cartes de contrôle inertielles

- La carte de contrôle inertielle présentée est adaptée à la production de moyenne ou de grande série. Cependant, pour les petites séries : peut-on utiliser la carte inertielle avec dérive ou faut-il en envisager une autre carte de contrôle ?
- La carte présentée correspond à un scalaire de dimension 1. Cependant, est-ce que la carte de contrôle inertielle est adaptée au pilotage de surface tridimensionnelle ?
- Comment peut-on piloter un processus multidimensionnel avec l'inertie ?

2.2 Inertie 3D

- Une des perspectives à ce travail serait d'apporter une comparaison des définitions de l'inertie 3D sur des assemblages de lots de composants ayant des défauts de forme. Cette comparaison devrait permettre de façon complémentaire de réaliser le choix de la définition de l'inertie 3D.

- Développer pour chaque définition des outils statistiques (outil de pilotage, de contrôle réception…) du fait de la convergence normale ou non des définitions de l'inertie 3D.
- Des travaux complémentaires sont nécessaires pour réaliser une synthèse des inerties 3D d'une surface plus subtile que celle proposée, de même il serait intéressant de vérifier que cette synthèse garantit l'exigence fonctionnelle spécifiée.

2.3 Inertie Totale

- Lors des phases de fabrication, un correcteur peut influencer un groupe de surfaces. Néanmoins, chaque surface de ce groupe peut avoir une exigence fonctionnelle différente. Comment dans la façon de piloter ou de régler le procédé favoriser le réglage de ces surfaces ou de ces points, dont l'exigence est différente des autres ? Dans nos réflexions, nous avons pensé ajouter des poids sur les surfaces, cependant cette solution reste à valider.
- Le critère d'optimisation utilisé par l'outil d'aide à la correction, est-il optimal ? En effet, dans le cas où nous mettons des poids pour augmenter l'optimisation d'une surface, le critère de Gauss peut ne plus être suffisant. Dans ce cas, doit-on converger vers d'autres critères d'optimisation, si oui, lesquels ?
- Chaque outil de production est différent et à ses subtilités que seul l'opérateur connaît. Ainsi, l'outil que nous proposons doit être capable d'intégrer la connaissance de l'opérateur. Par exemple, permettre à l'opérateur de régler ces correcteurs dans l'ordre qu'il souhaite ou que l'outil soit capable de réaliser une optimisation suivant le pas de correction du moyen de production et de son impact réel sur les écarts mesurés pour chaque correcteur…

2.4 Inertie Synthèse

- Si dans cette étude, nous avons défini l'exigence fonctionnelle par un domaine. La construction de celui-ci n'est pas aisée en particulier, si l'on désire intégrer le comportement réel du mécanisme (Dilatation thermique, Déformations

mécaniques, usures…). L'objectif est de déduire à partir d'un modèle numérique et de façon automatique le domaine fonctionnel en fonction de ces exigences.

- Des développements sur la répartition des inerties sont à mener, notamment sur l'intégration des jeux dans le mécanisme, ou les répartitions parallèles de l'inertie (une condition fonctionnelle satisfaite par plusieurs chaînes de cotes). De même, une expérimentation industrielle de cette façon de tolérancer peut être intéressante.
- À la manière d'Adragna dans le tolérancement unidimensionnel, il serait intéressant de développer une répartition des inerties permettant de garantir un nombre de ppm sur le domaine fonctionnel.
- Le nouvel indicateur de capabilité multi varié basé sur l'inertie des distances de Mahalanobis ne permet pas d'exploiter au maximum la variabilité permise par la répartition des inerties proposée. Il est donc nécessaire de rechercher un indicateur permettant d'exploiter cette variabilité sans faire courir de risque de non-conformité dans des situations d'assemblage. (ex. Problématique du Cpk dans un cas unidimensionnel)
- Ces travaux ont introduit un nouvel indicateur de capabilité et rappelé d'autres indicateurs de capabilités. La perspective serait de pouvoir statuer sur la performance et la robustesse de ces indicateurs. C'est-à-dire de ne pas amener à des situations d'assemblage ne permettant pas de respecter l'exigence fonctionnelle définie comme pour l'indicateur Cpk dans le cas unidimensionnel.
- Le contexte des petits déplacements correspond à un deuxième niveau de représentativité de la réalité. Pousser l'étude plus loin amène à réaliser une synthèse sous la forme d'une tolérance de forme, ce qui à notre connaissance reste un champ libre malgré plusieurs travaux scientifiques sur l'analyse de forme.