



Détection statistique des changements climatiques

Aurélien Ribes

► To cite this version:

Aurélien Ribes. Détection statistique des changements climatiques. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2009. Français. NNT: . tel-00439861

HAL Id: tel-00439861

<https://theses.hal.science/tel-00439861>

Submitted on 8 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

Discipline : Mathématiques - Statistiques

Aurélien RIBES

DÉTECTION STATISTIQUE DES CHANGEMENTS CLIMATIQUES

Thèse soutenue le 11 septembre 2009

JURY :

Laurent TERRAY	CERFACS	<i>Président</i>
Hervé LE TREUT	LMD	<i>Rapporteur</i>
Jean-Michel POGGI	Université Paris Sud - Orsay	<i>Rapporteur</i>
Philippe NAVEAU	LSCE	<i>Examineur</i>
Jean-Marc AZAÏS	Université de Toulouse, IMT	<i>Directeur de thèse</i>
Serge PLANTON	CNRM-GAME	<i>Directeur de thèse</i>

École doctorale : Mathématiques, Informatique, Télécommunications de Toulouse
Unité de recherche : Centre National de Recherches Météorologiques

Remerciements

Julie, papa, Philippe, Francis, Mickael, Jeanne, Martine, Yannick, Pere, Aurore, Aurélie, Sophie, Jean-Pierre, Céline, Benjamin, Anne-Sophie, Sandro, Gilles, Juliette, Simone, Fabrice, lofteurs, Nicolas, Youcef, Amélie, Seya, Virginie, Michel, Catherine, Julien, Marc, Hervé, Clotilde, Jean-Michel, Marine, Ramdane, Lili, Christophe, Stéphane, Lionel, Marion, Mylène, lofteuses, Cédric, Sylvie, Martin, Maïré, Anne-Marie, Antoine, Dirk, Rémy, Annie, Emilia, Mathieu, Étienne, Dimitri, Samuel, Vincent, Anne-Laure, Bertrand, Rémi, Fabien, Pauline, Olivier, Laurent, Maxime, Laurence, Jean-Claude, Florence, Jean-François, Alain, Yann, Laetitia, Quentin, maman, David, merci. Ces 43 mois de thèse n'ont pas été désagréables, et c'est en partie grâce à vous.

Le lecteur, attentif et organisé, n'aura cependant pas manqué de remarquer que deux prénoms font défaut dans cette vision collectiviste des relations humaines. J'en viens donc à remercier Jean-Marc et Serge pour avoir su rester attentifs face aux explications brouillonnes dans lesquelles j'ai coutume de me lancer face à un tableau, activité plus couramment désignée sous les termes « *d'encadrement de thèse* ». J'espère continuer à aller régulièrement me promener en montagne avec le premier, et j'espère avoir l'occasion d'y aller au moins une fois avec le second.

Enfin, j'adresse un petit mot à deux compagnons qui m'ont été fidèles et précieux tout au long de cette thèse, et jusque dans l'écriture de ces remerciements : Scilab et L^AT_EX.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vi
Abstract	vii
Notations	viii
I Climat, changements climatiques, détection et attribution	1
I.1 Climat	1
I.1.1 Notion de climat	1
I.1.2 Système climatique	3
I.1.3 Modélisation du climat	4
I.2 Changements climatiques	5
I.2.1 Forçages naturels et anthropiques du climat	6
I.2.2 Scénarios climatiques	7
I.2.3 Observation du climat et de ses changements	9
I.3 Études de détection et d'attribution	11
I.3.1 Variabilités climatiques	11
I.3.2 Problématiques de la détection et de l'attribution	12
I.3.3 Positionnement de cette thèse	13
I.3.4 Articulation de ce document	14
II Hypothèses, modèles et tests statistiques de la détection	17
II.1 Hypothèses générales sur les changements climatiques	18
II.1.1 Préliminaires	18
II.1.2 Modèle additif	18
II.1.3 Séparabilité espace-temps	20
II.2 Les différentes stratégies de détection	22
II.2.1 Effets $\psi^{(i)}$ connus à une homothétie près	24
II.2.2 Tests utilisant l'hypothèse de séparabilité	27
II.3 Représentation de la variabilité interne	29
II.3.1 « Inobservabilité » de ε et incertitudes	30
II.3.2 Réduction de la dimension et hypothèse de séparabilité	32
II.3.3 Utilisation d'un modèle AR1	34
III Détection de signaux spatiaux	39
III.1 Adaptation of the optimal fingerprint method for climate change detection using a well-conditioned covariance matrix estimate	40
III.1.1 Introduction	41

III.1.2	Presentation of the methods	42
III.1.3	Evaluating the methods	46
III.1.4	Application	51
III.1.5	Conclusion	57
III.1.6	Appendix	58
III.2	Compléments méthodologiques	61
III.2.1	Familles de tests	61
III.2.2	Méthodes de rééchantillonnage	63
III.3	Analyse des résultats sur la France	68
III.3.1	Résultats complémentaires	68
III.3.2	Sensibilité au choix du modèle climatique	71
III.4	Analyse des résultats sur le domaine Méditerranée	73
III.4.1	Principaux résultats	73
III.4.2	Rôle des « petites » composantes principales	76
IV	Détection de signaux temporels	81
IV.1	A method for regional climate change detection using smooth temporal patterns	82
IV.1.1	Introduction	82
IV.1.2	Methodology	84
IV.1.3	Results	88
IV.1.4	Conclusion	96
IV.1.5	Appendix	96
IV.2	Résultats complémentaires	97
IV.2.1	Domaine France	97
IV.2.2	Domaine Méditerranée	100
IV.3	Comparaison à l'approche spatiale	104
V	Détection sans a priori	109
V.1	Test de la significativité de la première composante principale lisse	109
V.1.1	Préliminaires et motivations	109
V.1.2	Cadre statistique	110
V.1.3	Estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée	111
V.1.4	Tests dans le cas $S = 1$	117
V.1.5	Tests dans le cas $S > 1$	119
V.2	Premières applications	121
V.2.1	Étude des températures moyennes annuelles	121
V.2.2	Autres variables	125
VI	Conclusions et perspectives	129
	Bibliographie	137

Résumé

DÉTECTION STATISTIQUE DES CHANGEMENTS CLIMATIQUES

Selon le Groupe Intergouvernemental d'experts sur l'Evolution du Climat (GIEC), la détection est la démonstration statistique de ce qu'un changement observé ne peut pas être expliqué par la seule variabilité interne naturelle du climat. Cette thèse s'intéresse à la détection des changements climatiques à l'échelle régionale, et en particulier aux méthodes statistiques adaptées à ce type de problématique. Plusieurs procédures de tests statistiques sont ainsi présentées et étudiées.

La première méthode développée consiste à rechercher, dans les observations, la présence d'un signal de changements climatiques dont la distribution spatiale est connue. Dans ce cas, une nouvelle adaptation de la méthode des empreintes digitales optimales a été proposée, basée sur l'utilisation d'un estimateur bien conditionné de la matrice de covariance de la variabilité interne du climat. Une seconde approche propose de rechercher un signal ayant une forme d'évolution temporelle particulière. La forme recherchée peut alors être évaluée à partir de scénarios climatiques en utilisant des fonctions de lissage « splines ». Une troisième stratégie consiste à étudier la présence d'un changement non spécifié à l'avance, mais qui vérifie une propriété de séparabilité espace-temps, et qui présente une certaine régularité en temps. On utilise dans ce cas un formalisme de statistique fonctionnelle, pour construire un test de significativité de la première composante principale lisse, basé sur le rapport des vraisemblances pénalisées.

L'application de ces différentes méthodes sur des données observées sur la France et le bassin Méditerranéen a permis de mettre en évidence de nouveaux résultats concernant les changements climatiques en cours sur ces deux domaines. Des changements significatifs sont notamment mis en évidence sur les températures annuelles et saisonnières, ainsi que sur les précipitations annuelles, dans le cas de la France. Ces changements ne sont pas uniformes en espace et modifient la distribution régionale de la variable étudiée. La comparaison des différentes méthodes de détection proposées a également permis de discuter de la capacité des modèles de climat à simuler correctement les caractéristiques spatiales et temporelles des changements climatiques.

Mots clés : climat, changement climatique, détection, attribution, forçage anthropique, variabilité, France, Méditerranée, test d'hypothèse, splines, empreintes digitales optimales, estimation de matrice de covariance, vraisemblance pénalisée.

Abstract

STATISTICAL DETECTION OF CLIMATE CHANGES

According to the International Panel on Climate Change (IPCC), detection is the statistical demonstration that an observed change cannot be explained by natural internal variability alone. This PhD Thesis deals with regional climate changes detection and in particular with the statistical methods well suited to it. Several statistical hypothesis testing procedures are introduced and studied.

The first method considered involves looking for a climate change signal in the observations, assuming that its spatial distribution is known. In this case, a new adaptation of the optimal fingerprint method is proposed. It is based on the use of a well-conditioned covariance matrix estimate of the internal climate variability. The second approach proposes to look for a signal with a prescribed temporal pattern. This investigated pattern can be evaluated from climate model runs by using smoothing splines. A third strategy involves the study of an undefined climate change signal but one which satisfies a space-time separability assumption. Its time component also need to be regular. A functional statistical framework can be used in this case to construct a test of significance for the first smooth principal component, based on the penalised likelihood ratio.

Applying these different methods to observed datasets covering France and the Mediterranean basin has led to new sets of results regarding the current climate changes over these regions. Significant changes are found in the mean annual and seasonal temperatures as well as in the annual precipitation over France. These changes are not spatially uniform, and modify the spatial distribution of the variable considered. Finally, comparing the various methods proposed allows to discuss the ability of numerical climate models to properly represent the spatial and temporal features of climate changes.

Keywords : climate, climate change, detection, attribution, anthropogenic forcing, variability, France, Mediterranean, hypothesis testing, splines, optimal fingerprint, covariance matrix estimation, penalised likelihood.

Notations

Notations générales

s, t	Indices de localisation (espace) et de date (temps)
$\psi_{s,t}$	Observable climatique étudiée (température ou précipitations), au lieu s et à l'instant t
m_s	Valeur moyenne de l'observable au lieu s , sans changements climatiques
$\psi^{(s)}$	Signal de changements climatiques
$\psi^{(i)}, \psi^{(ANTH)}$	Changements climatiques induits par le forçage (i) , le forçage anthropique
$\phi^{(i)}$	Changements climatiques induits par le forçage (i) , simulé par un modèle de climat
$\beta, (\beta_i)$	Facteurs d'amplitudes de l'effet des forçages (du forçage i) sur le climat
g	Distribution spatiale des changements climatiques
$\mu, \mu(\cdot)$	Vecteur ou fonction d'évolution temporelle des changements climatiques
ε	Variabilité interne du climat
$C, C^{(S)}$	Matrice de covariance spatiale de ε
$C^{(T)}$	Matrice de covariance temporelle de ε
$\hat{C}, \hat{C}$	Matrice de covariance empirique, estimant C
α	Coefficient de dépendance d'un processus AR1
I_n	Matrice identité en dimension n
0_n	Vecteur nul en dimension n
$\mathbb{1}_n$	Vecteur de dimension n dont toutes les coordonnées valent 1
$N(m, C)$	Distribution gaussienne d'espérance m et de covariance C
$T(n)$	Loi de Student à n degrés de liberté
$F(m, n)$	Loi de Fisher à (m, n) degrés de liberté
$W(n, C)$	Loi de Wishart à n degrés de liberté, associée à la matrice C

Chapitre III

$\tilde{\psi}$	Variabilité interne du climat
f_o	Empreinte digitale optimale
d_f	Variable de détection associée à la direction f
T_f	Test de détection basé sur d_f
W_f	Région de rejet de T_f
A^+	Pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice A
A_q	q -troncature de A (somme des q premiers termes de la SVD de A)
$\hat{C}_I$	Estimateur régularisé de Ledoit de C

δ	Variable de détection ROF « normalisée »
$\mathcal{D}_{C,g}$	Distribution de δ sous H_0
$\mathcal{D}^{(\alpha)}$	Quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution $\mathcal{D}$
$\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$	Test ROF avec rééchantillonnage bootstrap
Ψ, Ψ^L, Ψ^T	Échantillon, échantillon d'apprentissage, échantillon de test

Chapitre IV

ϕ	Variabilité interne du climat
λ	Paramètre de pénalisation pour l'estimation « spline »
$\tilde{\psi}, \tilde{\mu}, \tilde{\phi}$	Valeurs de ψ , μ et ϕ après blanchiment de la dépendance temporelle
$\bar{\psi}$	Valeur de ψ après centrage spatial
$\hat{g}$	Estimateur TOD de g

Chapitre V

$f^{(q)}(t)$	Dérivée q -ième de $f(t)$
$l(\cdot)$	Fonction de -2 log-vraisemblance
$pl(\cdot)$, pen	Fonction $l(\cdot)$ pénalisée, pénalité
$\hat{pl}_{H_0}, \hat{pl}_{H_1}$	Minimum de la -2 log-vraisemblance pénalisée sous H_0 , H_1
$\hat{x}$	Estimateur du maximum de vraisemblance pénalisée de x
$\mathcal{S}_r$	Espace des splines d'ordre r
$(s_k(\cdot))_{k=1\dots p}$	Base canonique de $\mathcal{S}_r$
Σ, G	Semi-normes sur $\mathcal{S}_r$
ρ	Paramètre de pénalisation
$H_\rho = \Sigma + \rho G$	Norme sur $\mathcal{S}_r$
$\mathbb{S}_{p-1}$	Sphère unité dans $\mathbb{R}^p$
v	Variable de test du test du rapport des vraisemblances pénalisées
$\mathcal{D}, \mathcal{D}_{m,C}$	Distribution de v sous H_0

Chapitre I

Climat, changements climatiques, détection et attribution

Lundi 6 Avril 2009, Haute-Garonne :

Température en nette hausse. À l'avant d'une perturbation plus à l'ouest, dans le flux de sud bien marqué, le temps est bien ensoleillé, et les températures très douces dès le matin.

L'après-midi, dopés par un bon ensoleillement, les thermomètres vont afficher partout plus de 20 degrés soit 6 à 7 degrés de plus que les normales de saison.

Le vent est faible avec un zeste de vent d'autan l'après-midi.

Que nous apprend ce bulletin météo sur le climat de notre époque ? Cette douceur précoce est-elle *normale* ou *naturelle* ? Dans quelle mesure la chaleur relative ressentie un 6 avril est-elle imputable aux dérèglements climatiques ou à l'action de l'homme sur le climat ?

Autant de questions, couramment posées et abordées par différents publics (scientifiques, journalistiques, citoyens, etc), qui interrogent sur les liens entre le *temps qu'il fait*, le *climat*, les *changements climatiques*, et le *rôle de l'homme* dans ces changements. Sans prétendre restituer en quelques pages les réponses apportées par les différents rapports du GIEC (Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat), et, ce faisant, par les travaux de quelques milliers de scientifiques au cours des dernières décennies, l'objectif principal de ce chapitre introductif est de fournir quelques premiers éléments de réponse, en précisant certaines des notions qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. Cela nous conduira notamment à introduire les problématiques de la détection et de l'attribution des changements climatiques, directement liées aux questions ici évoquées.

I.1 Climat

I.1.1 Notion de climat

Climate in a narrow sense is usually defined as the average weather, or more rigorously, as the statistical description in terms of the mean and variability of relevant quantities over a period of time ranging from months to thousands of millions of years. The classical period for averaging these variables is 30 years, as defined by the World Meteorological Organization. The relevant quantities are most often surface variables such as temperature, precipitation and wind. Climate in a wider sense is the state, including a statistical description, of the climate system.

IPCC, 2007, Glossary, p.942.

Comme l'indique cette citation, le GIEC s'est attaché, dans le cadre de ses travaux, à proposer une définition à la notion de *climat*. S'il fallait extraire en quelques mots, et dans la langue de Molière, l'esprit de la définition proposée dans son 4^{ème} rapport, on pourrait considérer que le climat est une description statistique en terme de moyenne et de variabilité, des variables météorologiques, sur une période de temps allant de quelques mois à plusieurs millions d'années. Le principal attrait de cette définition est qu'elle couvre l'essentiel des problématiques abordées par la communauté climatique, et qu'elle décrit également bien le cadre dans lequel s'inscrit cette thèse. La notion de climat est pourtant assez difficile à définir, comme en attestent les deux niveaux de lecture distingués par le GIEC, et le sens qui lui est attribué n'est pas toujours celui-ci.

Par exemple, le Petit Larousse indique : « **CLIMAT** *n.m.* Ensemble des phénomènes météorologiques (température, pression, vents, précipitations) qui caractérisent l'état moyen de l'atmosphère et son évolution en un lieu donné ». Cette définition diffère notamment de la précédente en cela qu'elle considère que le climat s'entend *en un lieu donné*. En réalité, certaines variables d'intérêt pour les climatologues, telles que la température *moyenne globale* (terme que l'on utilise pour désigner la température de l'atmosphère au voisinage de la surface, moyennée sur l'ensemble de la planète) ne revêtent pas ce caractère *local*. Une deuxième distinction peut-être établie en remarquant que le climat n'est ici envisagé que sous l'angle des valeurs moyennes, de la même manière que dans la formule : « *climate is what you expect, weather is what you get* ». La pratique scientifique, conformément à la définition proposée par le GIEC, est en réalité plus large et s'intéresse notamment à la variabilité de ces phénomènes météorologiques. Par exemple, l'étude de certains phénomènes météorologiques *extrêmes* peut s'avérer aussi précieuse dans la caractérisation du climat que la connaissance des valeurs moyennes des paramètres associés.

La définition proposée par le Petit Larousse correspond cependant à une certaine pratique du climat. En effet, l'étude du climat s'est longtemps apparentée à l'étude *des climats*, en regroupant en grandes classes les climats des différentes régions de la planète. Dans un tel cadre, on s'intéresse effectivement aux propriétés moyennes de l'atmosphère en un lieu. Ainsi, de nombreux ouvrages de géographie présentent des cartes de valeurs *climatologiques* (c'est-à-dire moyennes) des paramètres météorologiques. Ainsi également, ces ouvrages évoquent souvent quelques grands types de climat, tels que les climats *océanique*, *méditerranéen*, *continental*, etc. Vladimir Koeppen (1846-1940), en particulier, a établi une classification de ces différents climats, encore répandue de nos jours, basée sur des critères à la fois météorologiques et biologiques, faisant notamment intervenir le type de végétation.

Un point commun à toutes ces définitions est d'établir une distinction nette entre le climat et le *temps qu'il fait* à un instant donné et en un lieu donné. Cette distinction est une caractérisation fondamentale de l'étude du climat, et explique en particulier la séparation entre météorologie et climatologie. Contrairement à cette dernière, la météorologie s'attache à décrire et à prévoir l'évolution chronologique du temps. Depuis les travaux d'Edward Lorenz dans les années 60 (Lorenz, 1963, notamment), la dynamique de l'atmosphère est connue comme étant chaotique, dans ce sens que des différences infinitésimales des *conditions initiales* de l'atmosphère sont à l'origine de trajectoires différant largement. Ce caractère chaotique est souvent illustré par l'image de l'*effet papillon*, stipulant par exemple que les battements d'ailes d'un papillon en Australie peut « provoquer » un cyclone au-dessus de l'Atlantique. C'est, en outre, cette propriété qui explique la relative impuissance des prévisions météorologiques au-delà de deux semaines d'échéance. Au contraire, l'étude des grands équilibres planétaires peut permettre de comprendre, et le cas échéant de prévoir l'évolution des valeurs moyennes, sur des grandes périodes de temps, des variables météorologiques.

Lorsque l'on s'intéresse à la description du climat, l'*effet papillon* est généralement interprété comme un *aléa* intrinsèque au système climatique. Le temps qu'il fait en un lieu donné à un instant donné peut dès lors être considéré comme une variable aléatoire, ce qui motive l'utili-

sation, en climatologie, d'outils probabilistes et statistiques. La météorologie cherche à décrire l'évolution *déterministe* de la variable « *temps qu'il fait* » (qui n'est donc pas considérée comme aléatoire), alors que le climat s'intéresse uniquement aux propriétés de sa distribution. Dans un tel formalisme, les quelques questions posées en préambule de ce chapitre sont du même ordre que « *sachant que je viens de tirer un 5, puis-je considérer que mon dé est pipé ?* » Naturellement, le tirage, aléatoire, d'une seule valeur ne fournit que très peu d'information sur la distribution sous-jacente, et ne permet en aucun cas de conclure sur les propriétés de cette distribution. De la même façon, le bulletin météorologique émis le 6 Avril 2009 pour la Haute-Garonne ne permet pas de conclure quant à la réalité ou à l'intensité des changements climatiques en cours.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous référerons préférentiellement à la notion de climat telle que définie par le GIEC, ce qui motivera, notamment, l'utilisation et l'étude de certains outils et modèles statistiques, qui seront pour l'essentiel introduits au Chapitre II. L'énoncé de la définition donnée par le GIEC n'est cependant pas suffisant pour introduire l'objet climatique, puisque, comme le laisse entendre la dernière phrase utilisée, la notion de climat est intimement liée à celle de *système climatique*.

I.1.2 Système climatique

The climate system is the highly complex system consisting of five major components : the atmosphere, the hydrosphere, the cryosphere, the land surface and the biosphere, and the interactions between them. [...]

IPCC, 2007, Glossary, p.943.

La notion de système climatique, parfois désigné par le terme d'*enveloppe fluide*, est également définie par le GIEC, comme un système complexe constitué de cinq composantes principales : l'atmosphère, l'hydrosphère, la cryosphère, les surfaces continentales et la biosphère, ainsi que de leurs interactions. Cette définition est illustrée par la Figure I.1.

Quelques commentaires sont utiles afin de comprendre pourquoi l'ensemble de ces constituants est difficilement dissociable. L'océan, tout d'abord, recouvre un peu plus de 70% de la surface de la planète, et échange en permanence d'importantes quantités d'énergie avec l'atmosphère à son interface. L'énergie solaire incidente sur la planète, notamment, contribue à mettre en mouvement les masses d'eau océaniques de la même manière que les masses d'air atmosphériques, et le rôle des océans est déterminant dans le cycle de l'eau. Ainsi, la température de l'eau et les courants marins sont des sujets d'études pour le climatologue, de la même manière que les vents ou la température de l'air. Au-delà de l'océan, les *surfaces continentales* constituent une interface qui influence la dynamique de l'atmosphère, par exemple par sa faculté à absorber l'énergie solaire ou sa capacité à évaporer de l'eau. Le relief des continents exerce lui aussi une influence importante en contraignant les écoulements atmosphériques. La cryosphère, caractérisée par son albédo (capacité à réfléchir le rayonnement solaire incident) très élevé, et la biosphère, complètent le tableau.

À ces composantes *naturelles* peuvent être rajoutés les hommes, dont certaines activités peuvent influencer le climat. Par exemple, outre les échanges d'énergie et d'eau, mentionnés précédemment, l'atmosphère échange certains composés chimiques avec les autres composantes du système climatique : des aérosols avec les surfaces continentales, des composés carbonés avec la biosphère et l'océan, etc. Les activités humaines s'ajoutent parfois à ces échanges *naturels*, en étant elles-mêmes à l'origine de l'émission de diverses espèces chimiques vers l'atmosphère. Nous y reviendrons largement.

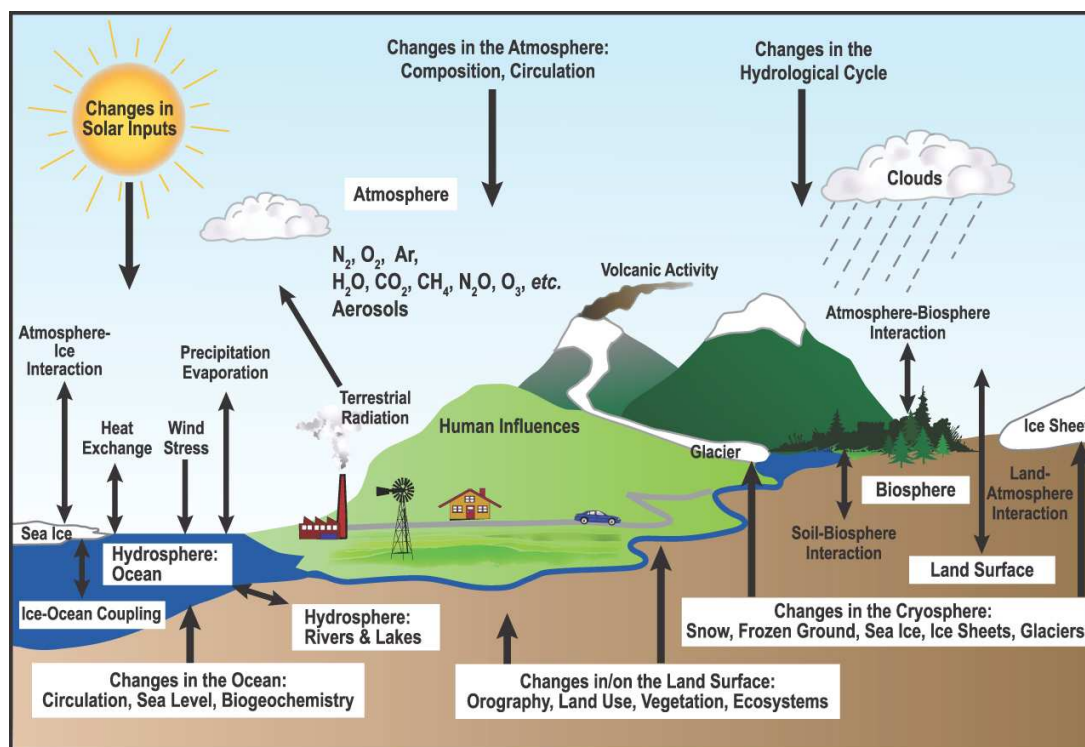


FIG. I.1 – **Le système climatique.** Description schématisée des composants du système climatique et de leurs principales interactions. [Figure tirée du 4^{ème} rapport du GIEC, IPCC, 2007, p.104]

I.1.3 Modélisation du climat

Dans le but d'étudier le fonctionnement de ce système complexe, la communauté scientifique utilise depuis plusieurs décennies déjà des *modèles* permettant de simuler numériquement le climat. Les objectifs d'une telle démarche sont multiples. La modélisation permet tout à la fois d'accroître la compréhension des mécanismes climatiques, par exemple en réalisant *in silico* des expériences impossibles à mettre en œuvre en pratique, et de permettre une reproduction, la plus fidèle possible, d'évolutions ou d'états climatiques.

La modélisation numérique du climat repose sur les mêmes principes que la prévision numérique du temps (qu'on pourrait également qualifier de modélisation météorologique), et historiquement, ces deux activités se sont développées conjointement. Dans les deux cas, la modélisation de l'atmosphère est un élément clé et les premières tentatives de modélisation se sont concentrées sur cette seule composante (cf Le Treut et al., 2007 pour une perspective historique). L'idée fondatrice est de calculer, par des méthodes numériques, une solution approchée des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution de l'atmosphère. Ces équations, principalement issues de la mécanique des fluides et de la thermodynamique, constituent en quelques sortes la partie *connue* du phénomène. Leur résolution explicite nous étant inaccessible à ce jour, les méthodes numériques constituent des outils adaptés de résolution.

Conformément à de nombreuses méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles, les modèles de climat utilisent une *discrétisation* de l'atmosphère, en la découpant en « petites boîtes », dans lesquelles les principaux champs physiques (température, pression, vitesse, etc) prennent des valeurs constantes, ou en tout cas simplifiées. Cette structure discrète est illustrée par la Figure I.2, qui décrit l'organisation d'un modèle de circulation générale (GCM). Avec le temps, de nombreuses autres composantes que l'atmosphère ont été prises en compte

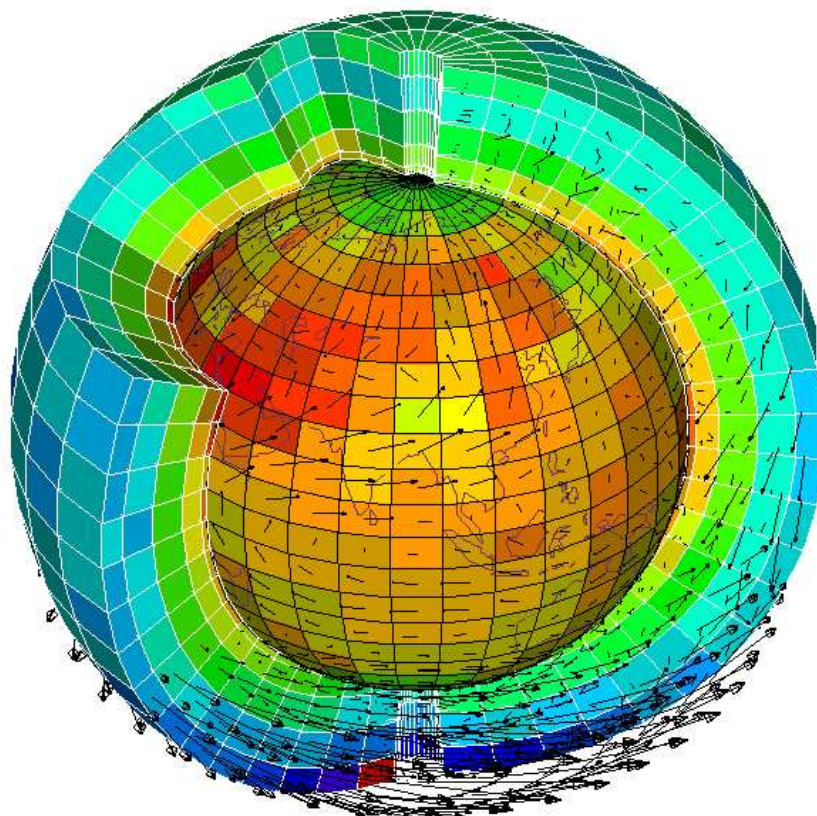


FIG. I.2 – **Structure des modèles de climat.** Illustration schématique de la structure discrète des modèles couplés de circulation générale, ici pour la composante atmosphérique. [Figure extraite du site du Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD), <http://web.lmd.jussieu.fr/>]

afin de véritablement modéliser le système climatique, distinguant ainsi modèles climatiques et modèles météorologiques. Désormais, les cinq composantes principales sont représentées dans de nombreux modèles, constituant ainsi des modèles couplés de circulation générale (CGCMs). La représentation correcte des interactions de chacun de ces compartiments, et les difficultés techniques associées, constituent cependant souvent des défis.

Bien qu'adaptée, cette démarche est donc souvent *coûteuse* et *imparfaite*. *Coûteuse*, tout d'abord, parce que l'évolution de l'atmosphère implique différents mécanismes d'échelles très différentes, et que la prise en compte d'un nombre croissant de ces mécanismes nécessite d'utiliser une résolution (nombre de mailles) de plus en plus élevée, et donc des moyens de calcul importants. *Imparfaite*, ensuite, parce que malgré les progrès de l'informatique, cette résolution demeure limitée (la dimension horizontale des mailles est de l'ordre de 100 km dans les modèles actuels), ce qui impose la simplification, ou la paramétrisation, de nombreux processus physiques.

Malgré toutes ces difficultés, les modèles climatiques constituent des outils privilégiés pour l'étude des *changements climatiques* en cours et à venir.

I.2 Changements climatiques

Aussi complexe et intéressant soit-il, le système climatique n'occuperait certainement pas la place, notamment médiatique, qui est la sienne aujourd'hui s'il n'était pas question des *change-*

ments climatiques. En effet, depuis plusieurs décennies maintenant, la question des conséquences des activités humaines sur l'ensemble de ce système, et particulièrement celle des conséquences de l'émission dans l'atmosphère de différents composés influençant le bilan radiatif de la planète, est posée par les scientifiques. La création du GIEC en 1988, en particulier, a été motivée par la nécessité de renseigner de façon éclairée et indépendante les pouvoirs publics sur ces questions délicates. C'est de nouveau en s'appuyant sur le dernier né de ses rapports que nous allons rapidement restituer les caractéristiques de ces changements, qui sont aussi le sujet principal de cette thèse.

I.2.1 Forçages naturels et anthropiques du climat

Commençons, de nouveau, par un point de vocabulaire. L'état du système climatique à un instant donné dépend, entre autres facteurs, de certains mécanismes et paramètres qui lui sont étrangers. Au premier rang de ces paramètres se trouve le flux d'énergie solaire incident sur la planète, le rayonnement solaire constituant le principal moteur du système climatique. Ce type de mécanisme s'imposant au système climatique et l'influençant directement est couramment désigné par le terme de *forçage externe*. Parmi ces mécanismes, on distingue classiquement les *forçages naturels* des *forçages anthropiques*.

Les *forçages naturels* sont principalement de trois natures : volcanique, solaire, astronomique. Le soleil, tout d'abord, voit son activité varier dans le temps, et modifie, en conséquence, la quantité d'énergie reçue par la planète, paramètre auquel le système climatique est logiquement très sensible. Les volcans, en envoyant dans l'atmosphère, au cours de leurs éruptions, d'importantes quantités de poussières et de gaz qui se condensent en aérosols, contribuent à rendre l'atmosphère plus opaque au rayonnement solaire, et, ce faisant, à modifier le bilan énergétique de la Terre (cf Figure I.3). Les éruptions les plus importantes ont ainsi un effet refroidissant sur la température moyenne à la surface du globe. On peut notamment remarquer que soleil et volcans sont explicitement indiqués dans la présentation schématique du système climatique Figure I.1. Enfin, le forçage astronomique, que l'on peut souhaiter distinguer, ou pas, de l'effet solaire, module fortement la façon dont l'énergie solaire est reçue par le système climatique, soit en faisant varier directement la quantité d'énergie incidente, soit en modifiant le cycle saisonnier, etc.

L'origine des *forçages anthropiques* réside dans l'émission, par l'homme, de différentes espèces chimiques qui modifient la composition de l'atmosphère. Certaines de ces espèces sont indiquées Figure I.1, au même titre que divers forçages naturels. Les plus connus de ces composés sont les gaz à effet de serre (GES), parmi lesquels CO_2 , CH_4 et N_2O notamment. Ces gaz se singularisent par leur capacité à absorber l'énergie rayonnée par la surface terrestre, typiquement dans les longueurs d'ondes de l'infrarouge, alors qu'ils laissent plus facilement passer le rayonnement solaire direct, situé dans les longueurs d'ondes du visible. Ces gaz agissent donc d'une certaine façon comme les vitres d'une serre exposée au soleil, et contribuent à réchauffer l'atmosphère à proximité de la surface.

Les GES sont présents naturellement dans l'atmosphère, et leurs bienfaits ne sont généralement pas remis en question, puisque la température moyenne à la surface du globe serait d'environ $-19^\circ C$ si l'atmosphère en était totalement dépourvue, contre $14^\circ C$ environ dans les *conditions actuelles*. Un bilan radiatif global de la planète, comme effectué Figure I.3, permet en outre de mettre en lumière l'importance de *l'effet de serre* qu'ils induisent. En dépit de cette présence *naturelle*, les activités humaines ont, de façon relativement soudaine à l'échelle climatique, considérablement augmenté les concentrations atmosphériques de certains de ces gaz.

Les émissions de GES ne sont cependant pas les seules perturbations du système climatique engendrées par les activités humaines. De nombreuses autres sont étudiées par le GIEC afin d'en quantifier les effets respectifs. On peut notamment citer l'émission d'aérosols (petites particules liquides ou solides résidant dans l'atmosphère au moins quelques heures), les modifications de

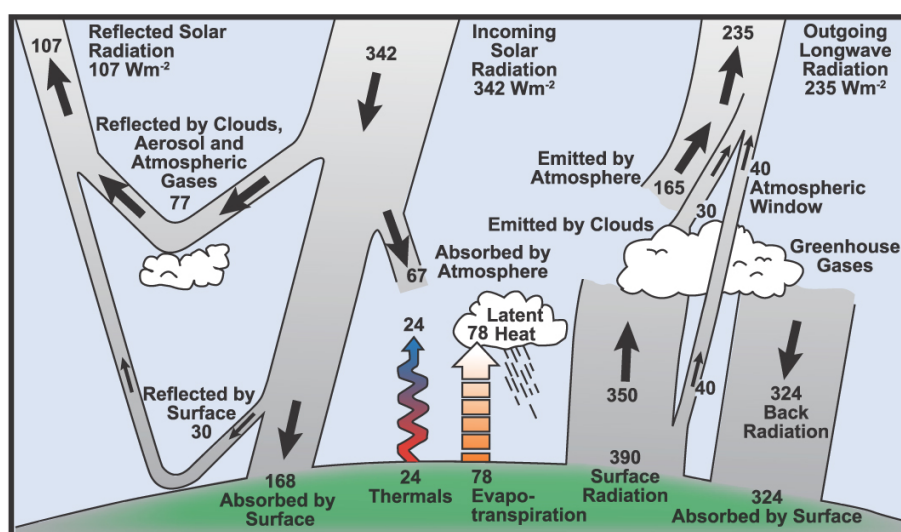


FIG. I.3 – **Bilan radiatif de la planète.** Bilans radiatifs de la surface et de l'atmosphère terrestre, en moyenne annuelle et planétaire. Ce schéma met en évidence l'importance des gaz à effet de serre, qui sont à l'origine de l'absorption, par l'atmosphère, de l'essentiel de l'énergie rayonnée par la surface. [Figure extraite du 4^{ème} rapport du GIEC, IPCC, 2007, p.96]

l'usage des sols des surfaces continentales (agriculture, forêt, urbanisation, irrigation, etc), ou encore l'amincissement de la couche d'ozone. Ces différents *forçages anthropiques* sont évalués et comparés aux variations naturelles du forçage solaire, Figure I.4.

Remarquons pour finir que ce document s'intéressera largement à la quantification de la *réponse* du système climatique à certaines variations de ces *forçages externes* ; dans la suite, la *réponse du système climatique à un forçage externe X* sera parfois désignée par le terme d'*effet de X* sur le climat.

I.2.2 Scénarios climatiques

De très nombreux travaux ont été menés afin de quantifier les conséquences des forçages anthropiques sur le climat, et bien au-delà, sur l'organisation de la société humaine, son économie, etc ; travaux dont le GIEC est souvent le chef d'orchestre.

La démarche mise en œuvre par le GIEC afin d'évaluer les conséquences des activités humaines sur le climat fait intervenir de nombreuses disciplines. Tout d'abord, la simulation du climat des décennies ou siècles à venir requiert la connaissance des forçages anthropiques *futurs*. Pour cela, différents scénarios d'évolution ont été proposés, correspondant à différentes hypothèses d'évolution de nos sociétés, notamment des points de vue économique, démographique et technologique. À ces scénarios sont associées certaines émissions pour le siècle à venir, et parfois au-delà. Les quantités émises estimées peuvent alors servir d'entrées aux modèles de climat pour simuler le climat du futur, chaque simulation étant alors faite conditionnellement à un scénario donné. C'est généralement en se basant sur ces simulations que d'autres outils, dépassant largement la sphère de la climatologie, sont utilisés pour évaluer les conséquences sociétales ou économiques des changements climatiques.

Concernant la dimension authentiquement climatique de cette vaste entreprise, le recours aux modèles de climat est rendu quasi-indispensable par la complexité du système climatique.

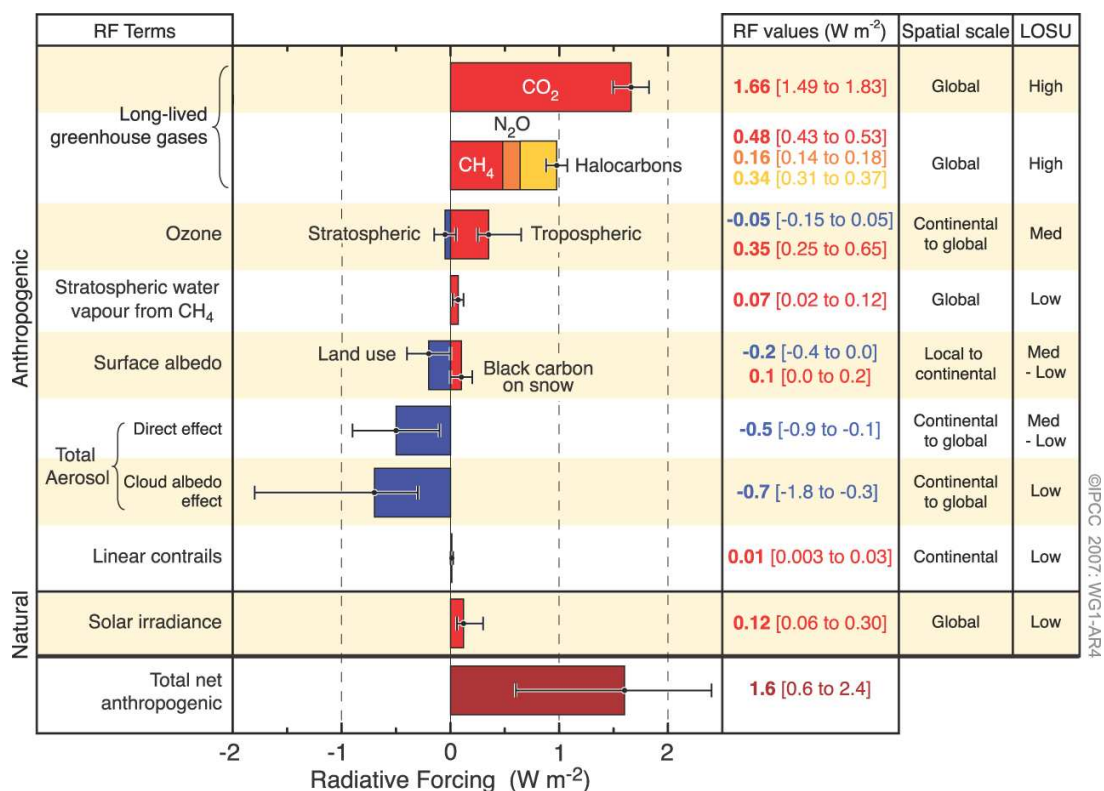


FIG. I.4 – **Forçages radiatifs en 2005.** Forçages radiatifs moyens et incertitudes associées pour différentes composantes des forçages anthropiques et naturels, évalués pour l'année 2005 (différence avec l'année 1750, utilisée comme référence pour la période pré-industrielle). Le niveau de compréhension scientifique est indiqué sous l'appellation LOSU. On observe en particulier que les incertitudes sur certains forçages demeurent importantes, notamment dans le cas du forçage induit par les aérosols. [Figure extraite du résumé technique du 4^{ème} rapport du GIEC, IPCC, 2007, p.24]

En effet, la quantification de la réponse du système à un forçage donné est rendue difficile par la présence de nombreuses *rétroactions*. À partir d'une perturbation ou d'un forçage climatique donné, une *rétroaction* pourrait se définir comme un mécanisme de réponse perturbant lui-même le système climatique et influençant, de ce fait, la réponse *totale* à la perturbation initiale. La réponse *attendue* (c'est-à-dire ne tenant pas compte des rétroactions) peut alors se trouver amplifiée, amoindrie, ou plus généralement modifiée.

Prenons deux exemples bien connus, et étudiés dans le cas du forçage anthropique. L'effet *direct* de l'augmentation de l'effet de serre est de réchauffer l'atmosphère au voisinage de sa surface. Du fait de cette augmentation, la glace de mer (banquise) peut se trouver menacée, et même disparaître (phénomène envisagé pour la glace de mer Arctique, en été, au cours du siècle prochain). La glace est alors remplacée par de l'eau *libre*, dont la capacité à réfléchir le rayonnement solaire est beaucoup plus faible, ce qui tend également à réchauffer la température de surface. C'est un exemple de rétroaction positive (le mécanisme amplifie le réchauffement). Inversement, la possibilité d'une modification de certains grands courants marins du fait de l'augmentation des températures est étudiée. Dans le cas particulier de l'Europe, un courant principal, le *Gulf Stream*, transporte des masses d'eau « chaudes », et contribue ainsi à adoucir le climat, particulièrement en hiver. Un arrêt de ce courant pourrait donc entraîner un refroidissement du climat à l'échelle régionale (précisons cependant qu'un arrêt de ce courant est considéré comme *très invraisemblable*). Cet exemple présente en outre l'intérêt de souligner le caractère pluriel

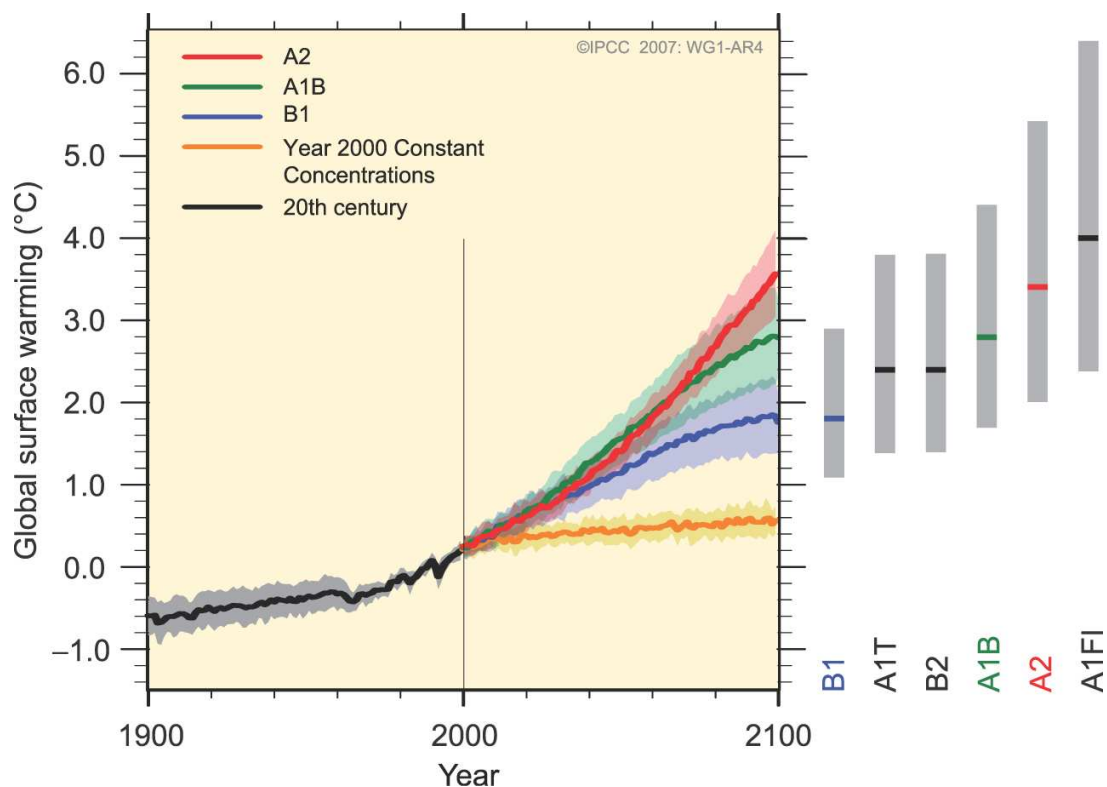


FIG. I.5 – **Projections climatiques pour le XXI^{ème} siècle.** Évolution de la température de surface moyenne globale pour différents scénarios d'émissions. La moyenne multi-modèle est représentée pour chaque scénario, ainsi que l'incertitude associée. [Figure extraite du résumé technique du 4^{ème} rapport du GIEC, IPCC, 2007, p.14]

des changements climatiques en différents lieux de la planète, puisque, par exemple, le réchauffement global peut être associé à un refroidissement local ; ce caractère pouvant rendre préférable l'emploi du pluriel, au sens propre, pour désigner le phénomène.

La Figure I.5 illustre le réchauffement de la température de surface moyennée sur le globe, tel que simulé par les CGCMs ayant contribué au dernier rapport du GIEC (une vingtaine, cf Randall et al., 2007), pour quelques uns de ces scénarios. Le scénario A1B, qui est relativement *moyen* parmi les hypothèses représentées ici, sera considéré à de nombreuses reprises dans cette thèse.

Si les modèles climatiques constituent des outils précieux dans l'appréhension des changements climatiques passés, en cours, et à venir, l'analyse de leurs résultats et de leurs diagnostics ne peut « naturellement » pas se passer d'une confrontation aux observations. Ce principe général s'applique également à l'étude des changements climatiques.

I.2.3 Observation du climat et de ses changements

Du fait de la nature statistique du climat, évoquée au I.1.1, l'observation du climat nécessite un certain *recul*, et ne peut se concevoir que sur une période de temps relativement longue. En particulier, si l'on considère, de façon simplifiée, le climat comme la distribution d'une variable aléatoire (le *temps qu'il fait*), on comprend que son *observation* (c'est-à-dire l'observation d'une distribution) requiert elle-même un grand nombre d'observations de la variable aléatoire sous-jacente. L'étude du climat, et qui plus est de ses changements, nécessite donc de longues séries d'observations météorologiques. À l'époque de l'observation satellite, les climatologues remercient donc les premiers érudits qui, aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles, principalement en Europe, ont

procédé à des observations régulières du temps (principalement en mesurant la température, la pression, et les précipitations), observations qu'ils ont consciencieusement archivées. Le besoin en données anciennes de qualité demeure cependant important, motivant de nombreuses opérations de *data rescue*, ou de reconstruction.

Une difficulté importante de ce point de vue concerne la qualité des longues séries d'observations, et plus précisément leur homogénéité. En effet, au cours du temps, les instruments utilisés pour l'observation ont évolué, de même que les protocoles préconisés ; les sites d'observation ont été souvent déplacés, et même lorsque ce n'est pas le cas, l'environnement immédiat du site de mesure a souvent évolué (modification de la végétation, urbanisation, etc), influençant directement la mesure. Tous ces défauts potentiels se traduisent souvent, en prenant l'exemple des températures, par quelques dixièmes de degrés à quelques degrés de *décalage* entre différentes périodes, quantités comparables, en ordre de grandeur, aux changements climatiques *estimés* sur le XX^{ème} siècle. Un retraitement a posteriori de ces données est donc généralement indispensable avant toute analyse climatologique.

Ce travail, fastidieux mais incontournable, est généralement désigné sous le terme de *procédure d'homogénéisation*, et basé sur des méthodes statistiques, ainsi que sur les méta-données pouvant accompagner les séries brutes (voir par exemple Mestre, 2000 et Caussinus et Mestre, 2004). Ces méthodes mettent en œuvre une étape de détection de ruptures, à partir d'une série individuelle, ou par comparaison d'une série à ses *voisines*, avant de procéder à une correction statistique de ces ruptures. Un important travail de ce type a été réalisé par Météo France, pour des données du territoire métropolitain ; les données homogénéisées ainsi obtenues seront utilisées à de nombreuses reprises au cours de cette thèse. À échelle plus globale, différents jeux de données ont été constitués sur des grilles régulières, a minima après *contrôle* des données brutes. Les observations HadCRUT3v (Brohan et al., 2006) seront notamment utilisées dans cette thèse.

L'analyse des observations, et des éventuels signaux de changements qu'elles indiquent, peut alors être menée. Concernant la température moyenne globale au cours des 150 dernières années, différentes observations convergentes indiquent une tendance au réchauffement. Celle-ci est notamment illustrée Figure I.6 et semble se renforcer au cours des dernières décennies. Les différents rapports du GIEC, et en particulier le Chapitre 3 du dernier d'entre eux (Trenberth et al., 2007), donnent de nombreuses autres illustrations de cette tendance au réchauffement. Le réchauffement de l'atmosphère, est ainsi constaté sur une très large majorité des régions du globe, au voisinage de la surface comme au niveau de la tropopause ($\sim 10\text{km}$ d'altitude). Les températures de surface de la mer évoluent dans le même sens, phénomène confirmé par l'élévation du niveau moyen des océans, résultant en particulier de leur dilatation thermique. Cette tendance s'exprime également sur des indicateurs plus indirects, parmi lesquels l'étendue de la couverture neigeuse de l'hémisphère Nord en hiver, le recul de la plupart des glaciers de *montagne*, etc.

Bien que présentant une certaine cohérence, ces observations ne suffisent pas à incriminer le forçage anthropique comme cause principale du réchauffement observé, ni même à démontrer que le climat a véritablement changé au cours des dernières décennies. On peut notamment toujours se demander si ces observations correspondent à des fluctuations naturelles du climat. De même, la mise en perspective historique, ne permet pas complètement de conclure, car il est difficile de quantifier l'effet des gaz à effet de serre par ce seul moyen. Pour répondre aux questions relatives au rôle des activités humaines (c'est-à-dire du forçage anthropique) sur le climat, et notamment sur les tendances observées au cours du dernier siècle, il est donc nécessaire de mener une étude statistique des observations climatiques. Ce travail est précisément l'objet des études de détection et d'attribution.

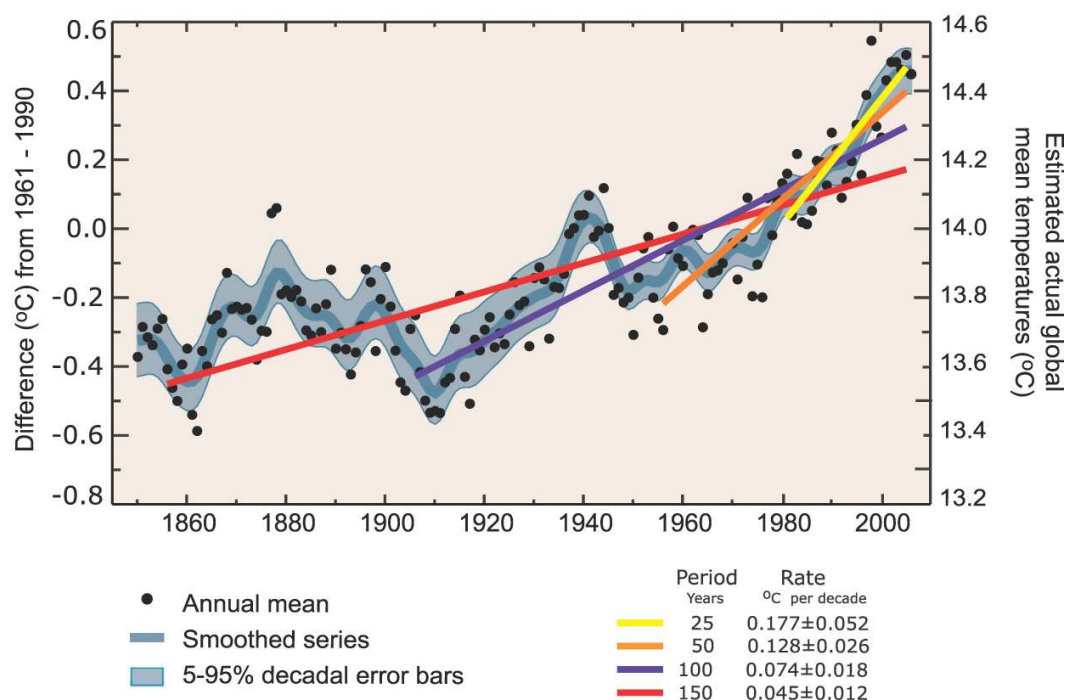


FIG. I.6 – **Tendances de la température moyenne globale.** [Figure extraite du résumé technique du 4^{ème} rapport du GIEC, IPCC, 2007, p.37]

I.3 Études de détection et d'attribution

I.3.1 Variabilités climatiques

La présentation des problématiques de la détection et de l'attribution, nécessite dans un premier temps l'introduction de la notion, et même des notions, de *variabilités climatiques*. En effet, la communauté climatique a pris l'habitude de distinguer trois niveaux de variabilité.

Le premier d'entre eux est la variabilité *interne*, qui correspond à l'aléa associé à la dynamique chaotique du système climatique, et de l'atmosphère en particulier. L'adjectif *interne* indique en effet qu'il s'agit d'une variabilité propre au système climatique, qui lui est intrinsèque. C'est cette fraction de la variabilité qui fait que, même si le système climatique ne subissait aucune perturbation extérieure, les promenades en montagne, les 6 mai, ou encore les années impaires seraient tous plus ou moins frais, pluvieux, ou ensoleillés.

Le terme de *variabilité* dans ce cas précis, peut faire l'objet d'une discussion. En effet, si l'on considère toujours le climat comme la distribution de probabilité dont le *temps* est la réalisation, variabilité climatique signifie variabilité de la distribution. Cette notion n'est pas celle utilisée dans la plupart des études climatiques, qui se ramènent à certaines hypothèses de stationnarité. En pratique, donc, la notion de variabilité *interne* désigne en général la variabilité des estimateurs de certains paramètres de la [véritable] distribution (moyenne, variance, etc), éventuellement évalués sur des longues périodes de temps.

La variabilité *naturelle*, un peu plus large, englobe la variabilité *interne* et les variations climatiques résultant des variations des *forçages naturels*, évoqués précédemment (solaire, volcanique, astronomique). La plupart du temps, ces forçages influencent largement la variabilité climatique. Par exemple, l'activité solaire varie selon un cycle d'environ 11 ans, mais également au-delà de ce cycle, et à toute échelles de temps. De même l'activité volcanique varie fortement dans le temps, et est à l'origine d'événements climatiques majeurs. Enfin, le forçage astronomique, pour

ne donner qu'un exemple, constitue la principale cause de l'alternance des périodes glaciaires et interglaciaires, et donc de très fortes variations de la température moyenne de la planète.

Un troisième niveau, enfin, correspond à la notion de variabilité *forcée* du système climatique. Celle-ci couvre les variations du climat en réponse à tout type de forçage externe, naturel ou anthropique. Cette variabilité forcée permet notamment d'évaluer la sensibilité du système climatique à ces forçages externes. Elle constitue une sorte de complémentaire de la variabilité interne, l'addition de ces deux termes de variabilité étant couramment désignée par le terme de variabilité *totale*.

Remarquons enfin que la distinction entre ces trois niveaux de variabilité n'est pas toujours aisée, puisque, par exemple, des phénomènes aussi intuitifs que le cycle diurne ou le cycle saisonnier sont les conséquences de mécanismes astronomiques. Ainsi, dans l'absolu, ces différentes variabilités sont liées, puisque la variabilité interne, singulièrement, serait très différente de ce qu'elle est dans le monde actuel, si la Terre ne tournait pas sur elle-même (pas de cycle diurne), ou si son axe de rotation était perpendiculaire au plan de l'écliptique (pas de cycle annuel). Dans cette thèse, comme dans de nombreuses études, nous nous référerons donc à la variabilité interne du système sachant certaines conditions extérieures (astronomiques et solaires notamment).

Comme nous allons le voir, c'est principalement la notion de variabilité interne du système qui est nécessaire à l'exposé des problématiques de la détection et de l'attribution. Une description plus approfondie de cette variabilité demanderait d'entrer dans des considérations statistiques, ce qui sera fait beaucoup plus en détail au Chapitre II.

I.3.2 Problématiques de la détection et de l'attribution

Detection is the process of demonstrating that an observed change is significantly different (in a statistical sense) that can be explained by natural internal variability.

IPCC, 2001, Chapitre 12, p.700.

La *détection*, pour commencer, a été définie par le 3^{ème} rapport du GIEC, comme le fait de démontrer qu'un changement observé est significativement différent (d'un point de vue statistique) de ce qui peut être expliqué par les seuls effets de la variabilité interne naturelle (cf citation ci-dessus). Il s'agit donc d'apporter une forme de preuve statistique de l'existence d'un changement (en considérant qu'un changement qui n'est pas *significatif* n'en est pas un).

Une telle procédure, appliquée aux changements climatiques évoqués au I.2, peut permettre, par exemple, de montrer le caractère *significatif* de l'évolution de la température moyenne globale représentée Figure I.6. En revanche, la simple *détection* de ce changement ne permet pas de conclure que ses causes sont correctement comprises et identifiées. En outre, la détection de changements non compris est tout à fait vraisemblable.

L'*attribution* d'un changement à une cause donnée propose d'aller plus loin, et a pour objectif, en quelques mots, de démontrer une relation de causalité *supposée*. Ce type d'étude est par nature beaucoup plus ambitieux, et nécessiterait, dans le cas du système climatique, et pour être incontestable, la mise en œuvre d'expériences contrôlées sur la planète, ce qui est évidemment impossible. En pratique, les études d'attribution prennent la forme de minutieuses comparaisons statistiques entre résultats déduits de simulations numériques et observations. Elles permettent donc de faire le lien entre les différents éléments mentionnés au I.2.

L'*attribution* se déroule typiquement en trois étapes. Premièrement, le changement étudié doit pouvoir être *détecté*, c'est-à-dire identifié comme étant *statistiquement non-imputable* à la seule variabilité interne. Deuxièmement, ce changement doit être *compatible* avec les réponses estimées (dans notre cas, par les CGCMs) aux forçages externes (naturels et anthropiques). Troisièmement, ce changement doit être *incompatible* avec les autres causes physiquement plausibles.

Dans le cas qui nous occupe, l'attribution vise à établir le lien entre les changements climatiques récents, au premier rang desquels on peut mentionner le réchauffement moyen de la surface de la planète, et les forçages anthropiques. Le troisième point s'entend donc généralement comme : montrer que la prise en compte des seuls forçages naturels ne permet pas d'expliquer les changements observés.

Ces quelques définitions indiquent que l'attribution est, dans un certain sens, beaucoup plus *forte* que la détection, notamment du point de vue des conclusions auxquelles elle permet d'aboutir. En contrepartie, la détection est plus *libre*, et peut notamment s'appliquer à des paramètres difficiles à simuler pour des modèles de climat. Elle peut également permettre de mettre en lumière certains changements non spécifiés ou connus à l'avance. Certaines des méthodes introduites dans cette thèse utiliseront largement cette possibilité.

On peut également remarquer qu'une démarche *intermédiaire* entre détection et attribution, a parfois été utilisée, notamment par le GIEC. Cette *troisième voie* consiste à détecter un changement particulier, considéré comme la réponse *attendue* à la cause étudiée. Dans le cas du climat, on cherchera par exemple à détecter le signal de réponse au forçage anthropique, tel que simulé par des modèles de climat. Ce faisant, on pourra conclure à la *détection des changements climatiques d'origine anthropique*, sans pour autant avoir procédé à son attribution. Une telle démarche sera également utilisée dans la suite de ce manuscrit.

Enfin, une dernière notion, plus spécifique à cette thèse, concerne la détection et l'attribution des changements climatiques *à l'échelle régionale*. Lorsqu'on étudie les propriétés régionales des changements climatiques, deux points de vue peuvent être adoptés. Le premier consiste à rechercher la présence d'un changement quelconque sur la région considérée, lequel peut être un réchauffement uniforme sur le domaine. En choisissant ce positionnement, la démonstration, par exemple, de la significativité d'une tendance linéaire sur une série d'observation constitue une étude de détection à la plus petite échelle qui soit : un lieu. Cette approche peut apporter des renseignements précieux, mais ne fournit pas nécessairement d'informations sur les propriétés régionales des changements climatiques. Le second point de vue, qui sera généralement préféré dans cette thèse, est plus ambitieux et consiste à véritablement s'intéresser aux caractéristiques régionales des changements. Le signal moyen sur le domaine étudié est ainsi retiré, afin de ne s'intéresser qu'à la distribution spatiale, à échelle régionale, des changements. On cherche alors à montrer non seulement l'existence de changements, mais le fait que ces changements modifient certains équilibres régionaux. Plusieurs occasions nous seront données, dans ce manuscrit, de revenir sur cette définition et sur les interprétations qu'elle autorise.

I.3.3 Positionnement de cette thèse

Les quelques définitions que nous venons de donner placent de facto les études de détection et d'attribution au cœur de la problématique et du débat sur les changements climatiques d'origine anthropique, puisqu'elles cherchent à en évaluer l'existence, les caractéristiques, l'incontestabilité, etc. De ce fait, ces études occupent une place tout à fait privilégiée dans les travaux du GIEC : le Chapitre 9 leur était dédié dans le dernier rapport publié (Hegerl et al., 2007b), et leurs conclusions étaient largement reprises dans ses différents résumés.

D'un point de vue historique, les notions de détection et d'attribution se sont beaucoup développées, dans le formalisme présenté ci-dessus, au cours des années 90. Les aspects méthodologiques ont tout d'abord été étudiés (Hasselmann, 1993 et 1997), même si certains éléments avaient déjà été introduits (Hasselmann, 1979). Puis, rapidement, de nombreuses études ont mis en évidence le rôle des forçages anthropiques dans l'évolution observée de la température moyenne globale (Tett et al., 1996, Hegerl et al., 1996, Hegerl et al., 1997, Barnett et al., 1999, Tett et al., 1999, Stott et al., 2001, etc), conduisant notamment à la rédaction du Chapitre 12 du 3^{ème} rapport du GIEC (Mitchell et al., 2001). L'effort portait alors principalement sur la détection

des différentes composantes du forçage anthropique, en étudiant les températures planétaires (à la surface ou sur la verticale).

Deux lignes directrices principales rendent compte des progrès et développements réalisés depuis.

D'une part, les paramètres météorologiques étudiés se sont largement diversifiés. On peut en particulier citer les travaux menés sur la température des océans (Barnett et al., 2001, Barnett et al., 2005), la pression atmosphérique (Gillett et al., 2003, Gillett et al., 2005), les précipitations (Lambert et al., 2004, Lambert et al., 2005, Zhang et al., 2007), les débits (Gedney, 2006) ou encore l'humidité de surface (Willett et al., 2007). Une certaine diversification des paramètres intervient également du fait d'un intérêt pour l'application des méthodes de détection et d'attribution aux valeurs extrêmes en lieu et place des valeurs moyennes (Hegerl et al., 2004, Christidis et al., 2005), ou pour l'étude d'observations *non-instrumentales* anciennes (Hegerl et al., 2003, Hegerl et al., 2007a).

D'autre part, les méthodes de la détection et de l'attribution ont été appliquées à des régions du globe de plus en plus petites. Ce mouvement vers la *régionalisation* s'est tout d'abord illustré par des études générales sur les échelles pertinentes pour la détection et l'attribution, et étudiant de façon systématique différentes régions du globe (Stott et Tett, 1998, Zwiers et Zhang, 2003, Stott, 2003, Karoly et Wu, 2005, Zhang et al., 2006). Différentes études se sont concentrées sur la détection ou l'attribution des changements sur des régions particulières (Spagnoli et al., 2002, Karoly et al., 2003, Karoly et Braganza, 2005, Gillett et al., 2008), type d'étude qui s'est également élargi au paramètre précipitations (Timball et al., 2005, Hoerling et al., 2006). On peut toutefois remarquer que dans ces études, le sens donné à la détection (ou à l'attribution) à l'échelle régionale n'était pas toujours celui indiqué au I.3.2.

Cette thèse se situe dans une problématique quelque peu différente de ces deux axes principaux, puisque ce sont principalement les aspects méthodologiques qui ont fait l'objet de recherches. Bien que moins nombreux que les études à vocation *applicative*, certains travaux ont été menés sur ces aspects depuis les premières études signalées précédemment (Hasselmann, 1993 notamment); ces travaux seront présentés plus en détail au Chapitre II. En particulier, l'un des objectifs de ce travail a été d'adapter ou de proposer des techniques statistiques efficaces pour la réalisation d'études de détection aux échelles *régionale* et *sous-régionale*. Notons à ce propos que le terme *régional* étant couramment utilisé pour des domaines assez étendus, typiquement des continents, le terme *sous-régional* est parfois préféré pour qualifier des domaines de taille plus réduite, dont la France constitue un exemple.

I.3.4 Articulation de ce document

Les chapitres suivants s'attacheront à montrer en quoi ce changement d'échelle peut nécessiter un approfondissement des méthodologies mises en œuvre. Plusieurs approches possibles pour la détection de changements climatiques à l'échelle régionale seront ainsi présentées et étudiées. La mise au point de ces méthodes sera accompagnée de diverses applications, conduisant parfois à la mise en évidence de nouveaux résultats quant aux changements climatiques en cours. Ces applications se sont principalement concentrées sur deux domaines d'intérêt particulier, la France et le bassin méditerranéen, et sur deux observables météorologiques, la température et, dans une moindre mesure, les précipitations.

En quelques mots, nous commencerons par présenter en détail le cadre statistique des études de détection au Chapitre II. Nous nous intéresserons pour cela à la façon dont les changements climatiques et la variabilité interne du climat peuvent être modélisés d'un point de vue statistique, ainsi qu'à la définition des tests statistiques d'hypothèses liés aux études de détection (et d'attribution).

Les Chapitres III, IV et V présenteront chacun une méthode de détection statistique des changements climatiques à l'échelle régionale, en mêlant aspects méthodologiques et applicatifs. Les trois méthodes ainsi introduites reposent sur trois approches différentes de la problématique de la détection, et correspondent à trois définitions différentes de l'hypothèse alternative d'un test de détection. Au Chapitre III, nous nous intéresserons pour commencer à la détection dans les observations, d'un signal de changements climatiques dont la distribution spatiale est donnée, ou simulée par un modèle de climat. Au Chapitre IV, nous étudierons la recherche de signaux temporels ; nous verrons que ces signaux recherchés peuvent être évalués, à partir de scénarios climatiques, en utilisant une technique de lissage. Au Chapitre V, nous verrons comment construire un test de détection d'un signal de changements non spécifié, mais présentant une certaine régularité en temps.

Le Chapitre VI, enfin, esquissera une synthèse avant de présenter quelques perspectives et problèmes non résolus.

Signalons enfin que cette introduction s'est attachée à introduire la problématique climatique, car ce sont principalement les questions climatiques qui ont guidé le travail vers les problèmes statistiques qui seront présentés tout au long de ce manuscrit. Ainsi, différents domaines des statistiques ont été visités, allant des tests d'hypothèses, au cœur de cette étude, à l'estimation de matrices de covariance (Chapitre III), ou à l'étude de données fonctionnelles (Chapitre V). Certains des résultats de nature statistique qui seront présentés n'en restent pas moins utilisables pour d'autres applications que l'étude du climat.

Chapitre II

Hypothèses, modèles et tests statistiques de la détection

Le but de ce chapitre est d'introduire le cadre statistique dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. Nous commençons par présenter les principales hypothèses sur lesquelles repose le modèle statistique *principal*, qui servira de cadre théorique commun à l'ensemble de ce manuscrit (II.1). Nous ferons ensuite un inventaire des différentes stratégies de détection, c'est-à-dire des différents tests d'hypothèses statistiques envisageables dans ce modèle (II.2). Parmi ces stratégies, celles qui ont fait l'objet de développements au cours de cette thèse seront introduites dans un cadre commun. Enfin, les hypothèses et caractéristiques statistiques de la variabilité interne du climat, bien que faisant partie intégrante du modèle statistique utilisé, feront l'objet d'une description détaillée séparée (II.3). Différentes difficultés et incertitudes sur ce terme de variabilité justifient une discussion afin de déterminer les hypothèses les plus adaptées à l'étude du climat.

Ce chapitre a également pour objet d'introduire et de relier entre eux les différents travaux réalisés dans le cadre de cette thèse, qui seront présentés dans les chapitres suivants. Ces travaux portent sur la mise en œuvre de tests d'hypothèses distincts, mais visant à répondre à une même question, et s'appuyant sur le même modèle statistique, dont le choix est ici justifié. Par conséquent, cet exposé sera parfois redondant avec certains extraits des publications présentées dans la suite de ce document, dans lesquelles la présentation du cadre statistique était également nécessaire. De la même façon, de nombreuses notations vont être introduites au fil de ce chapitre, souvent en accord avec les notations les plus utilisées par la communauté scientifique ; cependant, certaines de ces notations ont évolué au cours du travail de thèse, ce qui explique la présence de quelques divergences avec les notations utilisées dans le cadre des publications.

La plupart des points abordés dans ce chapitre ont été largement étudiés et discutés par plusieurs auteurs, notamment dans les publications ayant servi de base à la rédaction du Chapitre 12 du 3^{ème} rapport du GIEC (Mitchell et al., 2001), et, plus récemment, du Chapitre 9 du 4^{ème} rapport du GIEC (Hegerl et al., 2007b). Ces deux chapitres, dédiés aux thèmes de la détection et de l'attribution, constituent des synthèses privilégiées de l'état de l'art en la matière. Néanmoins, dans la plupart des travaux traitant des questions de la détection et de l'attribution, les aspects méthodologiques ne constituent pas l'objet d'étude principal, et leur présentation y est parfois réduite à la portion congrue.

Quelques auteurs ont accordé une attention particulière à la définition du cadre statistique de ces études, parmi lesquels Hasselmann (1979, 1993, 1997), Allen et Tett (1999), et Allen et Stott (2003). Ce chapitre reprend une part importante de ces travaux en tâchant de restituer leurs contributions respectives.

II.1 Hypothèses générales sur les changements climatiques

Les notations et hypothèses statistiques présentées dans cette partie s’inspirent largement des premiers travaux de Hasselmann (1979, 1993), notamment concernant les quelques préliminaires nécessaires à l’introduction d’un premier modèle statistique (II.1.1), et l’hypothèse d’additivité (II.1.2), qui ont servi de base à la plupart des travaux ultérieurs. L’hypothèse de séparabilité (II.1.3) a été moins systématiquement utilisée.

II.1.1 Préliminaires

Pour commencer, on désigne par ψ l’observable climatique étudiée. Dans toute la suite, on considère que cette quantité est observée de façon discrète, à la fois en temps et en espace. On note $\psi_{s,t}$ l’observation qui en est faite au lieu s ($1 \leq s \leq S$) et à la date t ($1 \leq t \leq T$). Le lieu s désignera souvent une station d’observation ponctuelle, et parfois un domaine plus large (une maille), synthétisant ainsi différentes observations ponctuelles réalisées sur un domaine. De façon similaire, la date t correspondra à un mois, une saison, ou une année, qui constituent souvent les unités de temps dans l’étude du climat. Dans le cadre de cette thèse, l’observable ψ correspondra le plus souvent à des températures, parfois à des précipitations. De ce fait, dans ce chapitre, le propos ainsi que les justifications et illustrations des hypothèses utilisées porteront sur la variable température. Quelques unes de ces hypothèses seront rediscutées en temps utiles pour le cas des précipitations.

Comme indiqué au Chapitre I, la variabilité interne du climat, résultant en particulier du caractère chaotique de la dynamique de l’atmosphère et de l’océan, confère à l’observable ψ un caractère naturellement aléatoire. Ce caractère explique que les variables climatiques soient couramment traitées comme des variables aléatoires, et que des techniques issues des statistiques soient utiles pour les étudier.

L’une des hypothèses fondamentales de l’étude du climat consiste à considérer que ψ est une variable aléatoire stationnaire dans le temps en l’absence de toute modification « extérieure » (c’est-à-dire en l’absence de toute modification des forçages externes, évoqués au Chapitre I). En supposant l’existence d’une espérance, on peut écrire un premier modèle statistique :

$$\psi_{s,t} = m_s + \varepsilon_{s,t}, \quad (\text{II.1})$$

dans lequel la variable climatique étudiée se décompose en une somme de son espérance en chaque lieu, et d’une variable aléatoire centrée, $\varepsilon_{s,t}$, correspondant à une réalisation de la variabilité interne (cf II.3). Moyennant l’hypothèse couramment utilisée de stationnarité en temps du terme aléatoire ε , le climat est stationnaire dans ce modèle ; il n’est soumis qu’à sa propre variabilité interne et ne subit donc pas d’évolution.

II.1.2 Modèle additif

La première hypothèse importante concerne la forme que peuvent prendre les changements climatiques dans le modèle stationnaire (II.1).

Tout d’abord, dans le cadre de cette thèse, comme dans le cadre d’une majorité de publications traitant de la détection et de l’attribution des changements climatiques, l’étude porte sur les changements de la moyenne des phénomènes étudiés. Historiquement, la première variable climatique étudiée pour évaluer l’influence de l’homme sur le climat a été la température, dont l’évolution sous l’effet d’une augmentation de l’effet de serre se caractérise essentiellement par une augmentation en moyenne. Cet effet justifie que l’on s’intéresse à la moyenne, et explique également que dans une première approche, on néglige les changements affectant le reste de la distribution de l’observable considérée. Le modèle statistique de changements climatiques proposé

par Hasselmann (1993) peut donc s'écrire :

$$\psi_{s,t} = m_s + \psi_{s,t}^{(s)} + \varepsilon_{s,t}, \quad (\text{II.2})$$

où $\psi^{(s)} = (\psi_{s,t}^{(s)})_{1 \leq s \leq S, 1 \leq t \leq T}$ désigne le « signal » des changements climatiques. On utilise ce faisant une hypothèse de type *modèle additif* : on suppose que le changement se porte exclusivement sur la moyenne, et que le terme aléatoire, en l'occurrence la variabilité interne du climat, n'est pas affecté par ce changement. Toutefois, l'écriture d'un tel modèle constitue avant tout une étape dans la recherche d'un modèle statistique adapté à l'étude du climat. D'une part, nous ne ferons pas d'inférence directement dans (II.2), puisqu'il n'est pas identifiable, et d'autre part, les hypothèses statistiques relatives au terme aléatoire ε seront décrites et discutées seulement au II.3.

Quelques remarques peuvent cependant être effectuées dans le cas où la variabilité ε est elle-même influencée par le changement, comme certains travaux le suggèrent (Schär et al., 2004 par exemple). Premièrement, si l'hypothèse (II.2) n'est pas respectée, les changements climatiques modifient a priori à la fois la moyenne et la distribution du terme de variabilité. Dans le cadre d'une étude de détection, qui vise à évaluer si l'absence de changements est une hypothèse acceptable, cela correspond à la définition d'une hypothèse *alternative* différente. L'hypothèse *nulle* de référence correspondant au modèle (II.1), est toujours la même, que (II.2) soit vraie ou pas. Si (II.2) n'est pas valide, les tests que nous allons utiliser peuvent demeurer appropriés, mais leur caractère optimal sera mis en défaut, puisqu'ils ne prennent en compte que les modifications de la moyenne de la distribution. Ces tests ne deviendront véritablement inopérants que dans le cas où la variance seule est modifiée par le changement (ou plus généralement la distribution, mais sans modification de la moyenne), ce qui est très peu vraisemblable pour l'évolution des températures dans le cadre des changements climatiques actuels. Deuxièmement, plusieurs auteurs se sont intéressés à la détection des changements climatiques portant sur des événements météorologiques extrêmes, auxquels les sociétés humaines sont souvent assez sensibles (Hegerl et al., 2004, Stone et Allen, 2005b, notamment). Un cadre différent a alors été défini, n'utilisant pas l'hypothèse (II.2).

Un deuxième niveau de l'hypothèse de *modèle additif* est couramment utilisé dès lors que l'on souhaite mener une étude d'attribution. Même si l'attribution des changements climatiques ne constitue pas le cœur du travail mené durant cette thèse, les modèles statistiques et les techniques d'inférence associées sont souvent communs à la détection. Qui plus est, le cadre de l'attribution est généralement plus général que celui de la détection, et mérite donc qu'on s'y attarde quelques instants. Comme nous l'avons évoqué qualitativement au I.3, on est amené, dans le cadre d'une étude d'attribution des changements climatiques, à considérer différents effets sur le climat, conséquences de différents forçages, ou phénomènes extérieurs au système climatique.

Soit I le nombre des forçages pris en compte. En pratique $I = 4$ est souvent utilisé (effet de serre anthropique, aérosols anthropiques, aérosols volcaniques, et activité solaire), mais il s'agit bien d'un nombre fixé, préalablement à l'étude, et relativement arbitraire. Une hypothèse d'additivité est alors classiquement utilisée, qui peut s'écrire

$$\psi_{s,t}^{(s)} = \sum_{i=1}^I \psi_{s,t}^{(i)}, \quad (\text{II.3})$$

où $\psi^{(s)}$ correspond au signal de changements climatiques écrit en (II.2), et les $\psi^{(i)}, 1 \leq i \leq I$, correspondent aux termes de changements associés à chaque forçage individuellement. On suppose donc que les changements climatiques sont une simple addition des différents changements induits par chaque forçage, et qu'il n'y a pas d'effet croisé, ou d'interaction.

Cette hypothèse, comme la plupart des hypothèses de linéarité, constituerait probablement une mauvaise approximation si les amplitudes de chacun des effets devenaient « grandes ». Dans

le cas du climat, et plus particulièrement concernant les deux forçages que constituent les perturbations anthropiques des concentrations de gaz à effet de serre d'une part, et d'aérosols d'autre part, Gillett et al. (2004), notamment, a montré qu'il s'agissait d'une hypothèse raisonnable aux échelles de temps considérées (quelques décennies).

À ce stade, aucune hypothèse concernant la forme de la réponse climatique $\psi^{(i)}$ à une perturbation extérieure n'a été faite. Nous verrons au II.2 que des études de détection et d'attribution peuvent être conduites sans plus d'hypothèses. Cependant, l'essentiel des travaux menés durant cette thèse s'appuient sur une hypothèse supplémentaire de séparabilité espace-temps des $\psi^{(i)}$.

II.1.3 Séparabilité espace-temps

L'hypothèse de séparabilité espace-temps, parfois dénommée hypothèse de « scalabilité », peut s'écrire, pour un effet $\psi^{(i)}$, sous la forme d'une factorisation

$$\psi_{s,t}^{(i)} = g_s^{(i)} \mu_t^{(i)}, \quad (\text{II.4})$$

où g et μ sont des vecteurs décrivant les réponses, respectivement spatiales et temporelles au forçage considéré. Une reformulation simple est que l'on suppose que la carte des changements climatiques est la même à tout moment, à une homothétie près.

Cette hypothèse de séparabilité constitue une étape importante du travail présenté dans ce manuscrit, puisque, notamment, certaines des méthodes qui seront introduites reposent sur une telle décomposition. En pratique, dans le cadre de cette thèse, l'hypothèse (II.4) ne sera appliquée qu'au forçage anthropique (émissions de gaz à effet de serre et d'aérosols par les activités humaines). Différents arguments peuvent être avancés pour la justifier.

D'un point de vue théorique, tout d'abord, cette hypothèse doit être entendue comme une approximation de type développement limité. On peut d'ailleurs remarquer que le deuxième niveau de l'hypothèse de modèle additif, énoncé en (II.3), est de même nature et pourrait se justifier avec le même type de raisonnement. Considérons, en quelques mots, et de façon extrêmement simplifiée, que le vecteur des températures moyennes en différents lieux, y (l'adjectif *moyenne* s'entend ici au sens de l'espérance, de sortes que y peut s'identifier au vecteur m du (II.1), décrivant les températures *moyennes* en S lieux) est une fonction (entre autres variables), de la concentration des gaz à effet de serre x . On peut alors définir

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^S \\ x \mapsto y = f(x). \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Considérons par ailleurs que la quantité x est elle-même une fonction du temps, $x(t)$. Dans un tel modèle, qui néglige l'effet d'inertie dû en particulier à la composante océanique du système climatique, on peut alors écrire les changements climatiques comme étant les variations de température moyenne entre un état de référence à $t = 0$ et l'état à l'instant t ,

$$\Delta y = y_t - y_0 = f(x(t)) - f(x(0)) \simeq f'(x(0)) (x(t) - x(0)). \quad (\text{II.6})$$

Une telle approximation est valable tant que les variations de x autour de x_0 restent « petites », ou tant que la fonction f n'est pas trop non-linéaire, au voisinage de x_0 . Dans un tel cas, on obtient le résultat de séparabilité souhaité, puisque $f'(x(0))$ est un vecteur de taille S , dont les coordonnées sont des valeurs de « sensibilité climatique » aux différents lieux s , et puisque le facteur $(x(t) - x(0))$ ne dépend, de son côté, que du temps t .

Le même type de résultat peut être obtenu dans un modèle un petit peu moins simplifié, et prenant en compte un effet d'inertie, où y est solution d'une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dt}(t) + \alpha y(t) = f(x(t)), \quad (\text{II.7})$$

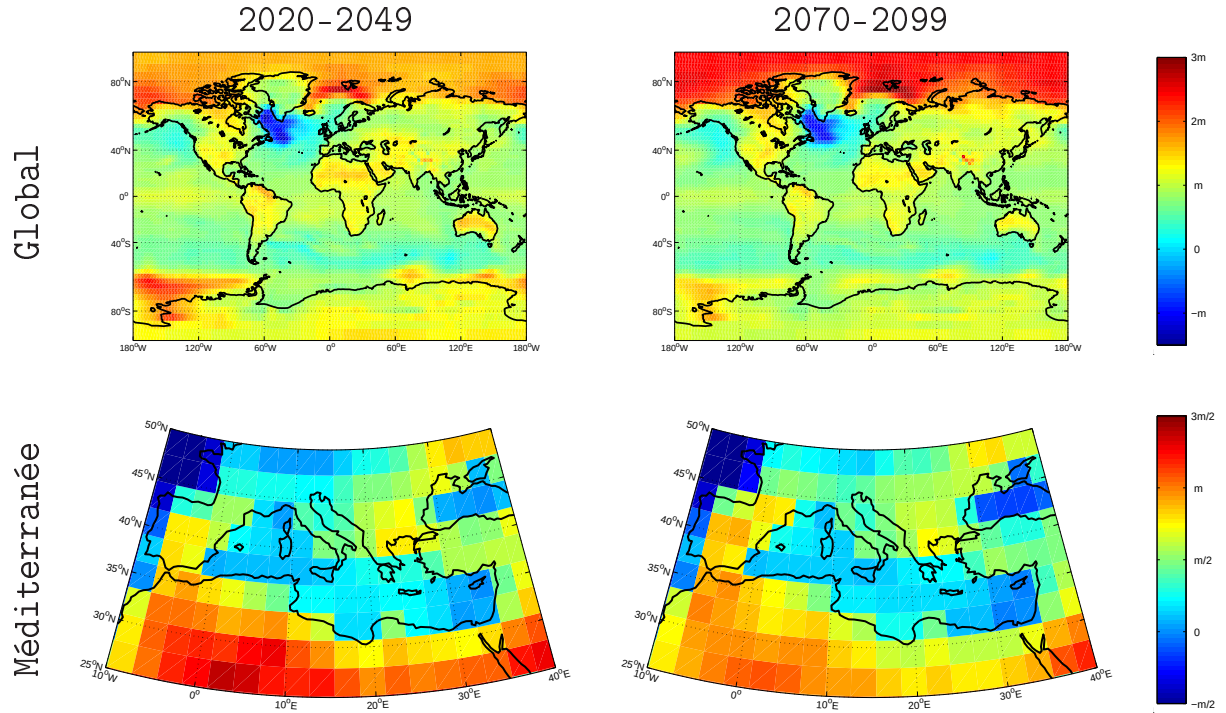


FIG. II.1 – **Évolution de la distribution spatiale du réchauffement avec le temps.** Pour chacune des périodes 2020-2049 et 2070-2099, on calcule une anomalie moyenne, comme la différence entre température moyenne sur la période indiquée et la température moyenne sur la période de référence 1870-1899. Ces anomalies sont ici représentées à échelle globale, et sur un domaine Méditerranée, telles que simulées par le modèle couplé CNRM-CM3, pour un scénario A1B. Les échelles de couleur sont relatives, c'est-à-dire faites pour être invariantes par homothétie. On se réfère donc uniquement à m , la valeur moyenne du réchauffement sur le domaine, sans indiquer de valeur « absolue ».

dans laquelle x désigne toujours la concentration des gaz à effet de serre, t le temps, et où α est un coefficient réel.

D'un point de vue plus pratique, on peut se demander dans quelle mesure cette hypothèse de séparabilité s'applique aux résultats de simulations climatiques conduites avec des CGCMs. Pour répondre à cette question, on peut naïvement comparer des cartes d'anomalies moyennes de températures à différentes périodes du siècle à venir. Une telle comparaison est faite Figure II.1, aux échelles globale et régionale (bassin méditerranéen), à l'aide de résultats obtenus avec le modèle climatique couplé CNRM-CM3, et pour un scénario A1B. On peut noter que modèle et scénario sont ici choisis de façon relativement arbitraire, mais que les résultats présentés sont robustes à ces choix. Afin de mener cette comparaison, deux périodes de 30 ans sont mises en vis-à-vis, au milieu du XXI^{ème} siècle (2020-2049), et à la fin de celui-ci (2070-2099). Dans chaque cas, une image des changements climatiques intervenu lors de ces périodes est représentée, par le biais de la différence entre la température moyenne sur la période considérée et la température moyenne sur une même période de référence (1870-1899).

À l'échelle globale, tout d'abord, cette comparaison indique qu'en de nombreuses régions, l'hypothèse de séparabilité est relativement acceptable, puisque les couleurs sur les deux cartes sont très similaires. Cependant cette hypothèse est médiocre en certains lieux, et singulièrement au voisinage du pôle Nord. Une non-linéarité manifeste rend alors l'approximation de type dé-

veloppement limité invalide. Dans le cas du pôle, ce phénomène est bien connu et tient à la disparition de la glace de mer en été, qui est à l'origine d'une *rétroaction* importante, liée à la modification de l'albédo.

À l'échelle régionale considérée, cependant, on peut vérifier que ce type de non-linéarité marquée est nettement moins avéré. Le zoom effectué, Figure II.1, sur le domaine Méditerranée, témoigne de cette propriété. Sur ce domaine, la corrélation des deux cartes d'anomalies (calculée en faisant varier la variable d'espace) avoisine 0.95, et ce en dépit du caractère naturellement bruité (la variabilité interne étant toujours à l'œuvre) des moyennes considérées. Une enquête similaire sur le domaine France, bien que non explicitement menée ici, conduit au même type de résultats.

Des comparaisons très similaires peuvent également être menées de façon indirecte, en comparant, sur une même période (typiquement la fin du XXI^{ème} siècle), les anomalies climatiques simulées en réponse à différents scénarios d'émissions, plus ou moins « polluants ». On peut par exemple comparer les réchauffements simulés, à la fin du siècle, avec un scénario A2 et avec un scénario B2, ce dernier prescrivant pour la fin du XXI^{ème} siècle un niveau de forçage radiatif atteint dans le courant de ce même siècle par le scénario A2. De cette façon, de nombreuses simulations numériques du climat, qui n'ont pas été réalisées en mode « transitoire », c'est-à-dire qui ne couvrent pas l'intégralité du XXI^{ème} siècle, peuvent être mises à profit pour évaluer la validité de l'hypothèse de séparabilité ; c'est notamment le cas des simulations réalisées avec des modèles climatiques régionaux dans le cadre du projet PRUDENCE. Si de telles comparaisons ne sont pas restituées ici, les résultats obtenus sont qualitativement équivalents (corrélations typiquement de l'ordre de 0.95). Elles seront également menées de façon indirecte, au Chapitre III, en comparant les résultats obtenus par un algorithme de détection basé sur la recherche des signaux spatiaux simulés pour différents scénarios.

Enfin, terminons par quelques précisions sur le champ d'utilisation de l'hypothèse de séparabilité. Dans les Chapitres IV et V, cette hypothèse n'est utilisée que sur la période de temps réellement observée, qui n'excède pas 2008. On se trouve donc dans un cas plus favorable que celui illustré Figure II.1, puisque les variations de l'effet de serre sur cette période sont plus faibles que celles envisagées ultérieurement par un scénario A1B. Au Chapitre III, en revanche, l'hypothèse est utilisée de façon plus large, sur l'ensemble du XXI^{ème} siècle.

En effet, dans ce chapitre, on évalue la distribution spatiale des changements climatiques en cours et à venir, comme étant celle de l'anomalie moyenne simulée par les modèles climatiques à la fin du XXI^{ème} siècle. Ce mode d'évaluation s'explique notamment par la difficulté d'isoler, dans une simulation climatique du XX^{ème} siècle, le terme des changements climatiques, qui demeure relativement faible, de la variabilité interne du climat. On préfère donc, dans certains cas, faire l'hypothèse de séparabilité afin de procéder à cette même évaluation à la fin du XXI^{ème} siècle, alors que le signal est beaucoup plus fort. On améliore ainsi le rapport signal sur bruit, même si l'hypothèse de séparabilité n'est pas parfaitement vérifiée. Plusieurs études (Spagnoli et al., 2002, notamment) ont préféré cette démarche « économique » à la réalisation d'ensembles de simulations, indispensables pour estimer correctement un signal relativement faible (option choisie par Allen et Stott, 2003, notamment).

II.2 Les différentes stratégies de détection

L'objectif de cette partie est de présenter dans un même cadre les tests statistiques intervenant dans les études de détection et d'attribution des changements climatiques, et parmi eux les tests qui seront étudiés en détail au cours des chapitres suivants. Comme nous l'avons fait précédemment, même si le thème de l'attribution ne constitue pas le sujet principal de cette thèse, certains développements lui seront consacrés, du fait de son lien avec le thème de la détection. Les méthodes d'attribution constituent en outre un prolongement naturel des méthodes

de détection qui sont étudiées dans cette thèse. L'inventaire des tests fait ici n'est toutefois pas exhaustif.

Comme le suggère la définition donnée au I.3.2, une étude de détection consiste à tester le caractère significatif, compte tenu de la variabilité du climat, d'un changement. Plus formellement, on applique donc un test d'hypothèses statistique, afin de confirmer ou d'infirmer le caractère « acceptable » du modèle (II.1), dans lequel il n'y a pas de changements climatiques. (II.1) sert alors d'hypothèse nulle, ou de référence. Au cours de cette partie, nous introduirons les principaux tests de la détection et de l'attribution, en présentant les hypothèses statistiques qu'ils mettent en jeu. Pour chaque test, nous présenterons une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse *alternative* H_1 .

Dans de nombreux cas, la définition d'une hypothèse alternative n'est pas indispensable à la mise en œuvre d'un test, puisque la définition d'une région de rejet de niveau donné ne dépend que de la distribution sous H_0 . Cependant, dans le cas de la détection, on s'intéressera souvent à des tests optimaux dans une certaine famille, l'optimalité étant entendue au sens de l'hypothèse alternative considérée. Ainsi, le test d'une hypothèse nulle donnée pourra s'avérer le plus efficace pour une certaine alternative, et pas pour une autre. Ceci s'explique par le fait que l'optimalité d'un test signifie souvent l'optimalité de sa puissance, laquelle dépend de la distribution sous H_1 de la variable de test.

Historiquement, les premières procédures d'inférence statistique dédiées à la détection et à l'attribution ont, comme les hypothèses sous-jacentes, été introduites par Hasselmann (1993, 1997), puis largement précisées ultérieurement, notamment par Allen et Tett (1999). La plupart de ces éléments ont ensuite été repris par le 4^{ème} rapport du GIEC (IPCC, 2007).

Comme nous l'avons évoqué au Chapitre I, les études de détection et d'attribution, prennent généralement la forme de délicates comparaisons entre résultats de simulations, obtenus par le biais des modèles numériques, et observations. Ainsi, la plupart des études de détection utilisent d'une façon ou d'une autre des résultats issus de modèles climatiques, utilisation qui est encore plus systématique dans le cas de l'attribution, puisque, pour différencier les rôles qu'ont pu jouer plusieurs effets sur le climat, il faut utiliser une connaissance a priori de ces effets. Plus précisément, parmi les techniques de détection qui seront étudiées, une part des changements recherchés est réputée connue. Par « part réputée connue », on désigne les propriétés supposées des changements climatiques, qui sont utilisées pour définir l'hypothèse alternative d'un test statistique de détection ou d'attribution. Par exemple, au Chapitre III, on supposera connue la distribution spatiale des changements (après l'avoir évaluée à l'aide de modèles numériques) mais pas son intensité, puis on construira un test basé sur la recherche de cette distribution. Le temps d'un test, cette quantité est donc bien « réputée connue », alors qu'en réalité, la connaissance n'est, au mieux, qu'imparfaite.

Dans le même temps, de nombreuses incertitudes demeurent sur les changements climatiques à venir et plus généralement sur la forme que peut prendre la réponse du système climatique aux différents forçages extérieurs ; si certains aspects de ces réponses sont bien connus et compris, d'autres caractéristiques sont plus incertaines (IPCC, 2007). Dans une procédure de détection, certaines hypothèses sur la part réputée connue de ces effets peuvent donc s'avérer plus judicieuses et efficaces que d'autres. Le but de ce II.2 est précisément de détailler quelques unes des options qui s'offrent au climatologue et au statisticien pour répondre aux questions de la détection et de l'attribution des changements climatiques, sans prétention d'exhaustivité. Ces quelques options seront ensuite étudiées en détail dans les chapitres suivants. Les différentes stratégies présentées dans ce II.2 se distinguent exclusivement par la part réputée connue du signal des changements climatiques ; d'autres distinctions, tout aussi importantes, sont liées au statut « connu » ou « inconnu » de la variabilité interne, lequel sera traité spécifiquement au II.3.

A minima, les hypothèses (II.2) et (II.3) d'additivité, présentées au II.1.2, seront toujours utilisées dans les tests étudiés, ce qui conduit à considérer le modèle statistique

$$\psi_{s,t} = m_s + \sum_{i=1}^I \psi_{s,t}^{(i)} + \varepsilon_{s,t}. \quad (\text{II.8})$$

Comme précédemment, les différentes valeurs prises par l'indice i désignent différents effets sur le climat.

Dans un tel modèle, une procédure de détection peut être appliquée pour détecter, individuellement, chacun des I effets considérés. Cette thèse s'intéressera essentiellement à la détection des changements climatiques d'origine anthropique, résultant de l'émission, par l'homme, de gaz à effet de serre et d'aérosols. Pour cette raison, dans cet exposé de principes, plutôt que de traiter de la détection d'un effet particulier $\psi^{(i_0)}$, nous désignerons souvent par $\psi^{(ANTH)}$ l'effet que l'on souhaite détecter. L'écriture des hypothèses testées se généralise aisément au cas où on souhaite tester la présence d'un autre forçage.

II.2.1 Effets $\psi^{(i)}$ connus à une homothétie près

Le cadre le plus utilisé par la communauté scientifique pour procéder à des études de détection attribution consiste à considérer que les différents effets $\psi^{(i)}$ sont connus, via les simulations numériques, à une constante multiplicative près, et que leur amplitude dans les observations est à évaluer, ou à valider. En notant $\phi^{(i)}$ les effets simulés on fait donc l'hypothèse

$$\psi^{(i)} = \beta_i \phi^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq I, \quad (\text{II.9})$$

où les β_i sont des paramètres réels inconnus, alors que les $\phi^{(i)}$ sont connus. Cela nous conduit à considérer le sous-modèle suivant du modèle (II.8) :

$$\psi_{s,t} = m_s + \sum_{i=1}^I \beta_i \phi_{s,t}^{(i)} + \varepsilon_{s,t}, \quad (\text{II.10})$$

dans lequel m et β sont les paramètres inconnus, les propriétés du terme de variabilité ε étant décrites au II.3. Ce modèle (II.10) a été introduit pour la première fois sous cette forme par Allen et Tett (1999).

L'hypothèse sous-jacente à ce type de modèle statistique est que les modèles numériques de climat reproduisent mieux la forme des effets $\psi^{(i)}$, à la fois en temps et en espace, plutôt que leur amplitude. On peut également considérer que l'introduction des coefficients β_i est une façon relativement minimaliste de mettre en œuvre, dans le modèle (II.8), des tests statistiques, notamment dans le but de tester la présence de certains des termes de la somme. Cependant, si les $\psi^{(i)}$ étaient réputés totalement connus, y compris en amplitude (c'est-à-dire $\psi^{(i)} = \phi^{(i)}$), une façon simple de tester leur « présence » dans les observations serait de n'autoriser que les valeurs 0 (effet absent) ou 1 (effet présent) pour les coefficients β_i . Une procédure de détection et d'attribution pourrait être mise en œuvre en utilisant seulement ce type d'hypothèses simples. En considérant que les β_i prennent des valeurs réelles, la philosophie de ce modèle est bien que les effets $\psi^{(i)}$ sont connus à une constante près.

L'inférence statistique dans le modèle (II.10) porte donc sur le vecteur β , en notant $\beta = (\beta_1 \dots \beta_I)$. La procédure de détection et d'attribution, dont le but est d'analyser les observations, cherche donc à déterminer ou à obtenir des informations concernant la valeur « réelle » de ce vecteur, c'est-à-dire sa valeur dans les observations. D'un point de vue statistique, cela peut être fait par le biais d'une procédure d'estimation de β par $\hat{\beta}$, ou par la mise en œuvre de tests statistiques sur les valeurs que prennent les β_i .

Dans le cas des tests de détection, l'objectif est seulement de mettre en évidence la présence d'un changement. La référence à laquelle on se compare est donc le modèle stationnaire (II.1), qui est rappelé ici :

$$\psi_{s,t} = m_s + \varepsilon_{s,t}. \quad (\text{II.1})$$

Dans ce modèle, aucun changement climatique n'intervient, ce qui dans le cadre de (II.10), correspond au cas $\beta = 0_I$, en notant 0_I le vecteur nul en dimension I . On cherchera alors à montrer que les observations sont incompatibles avec (II.1), vu comme un sous-modèle de (II.10).

Enfin, on peut remarquer que même si les coefficients β_i sont réputés « inconnus » dans la mise en œuvre des tests, les modèles numériques simulent également des valeurs pour ces coefficients, qu'on notera $\beta_i^{(\text{mod})}$. Dans le cadre de l'attribution, et dans le but de savoir si les observations sont compatibles avec les changements attendus en réponse à un forçage donné, il est naturel de comparer les valeurs de $\hat{\beta}_i$ estimées dans les observations aux valeurs simulées $\beta_i^{(\text{mod})}$. Dans cette partie, nous considérerons arbitrairement que

$$\beta_i^{(\text{mod})} = 1, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (\text{II.11})$$

Il ne s'agit là que d'un jeu d'écriture, qui revient à considérer que le terme de réponse $\phi^{(i)}$ contient lui même l'information sur l'amplitude, et donc que les différents $\phi^{(i)}$ utilisés dans la procédure ne sont pas *normés*.

Détection d'un changement

Cet inventaire commence tout d'abord par le test le plus simple, dont le but est d'évaluer la présence d'un changement quelconque (parmi ceux rendus possibles par le modèle (II.10)). On utilise alors un test dont l'hypothèse alternative est la plus « large » possible, c'est-à-dire la complémentaire de l'hypothèse nulle, ce qui donne :

$$\begin{cases} H_0 : \langle \beta = 0_I \rangle, \\ H_1 : \langle \beta \neq 0_I \rangle. \end{cases} \quad (\text{T1.1})$$

Dans un tel test, on suppose simplement que le changement appartient à l'espace engendré par les $(\phi^{(i)})_{1 \leq i \leq I}$. Cette hypothèse est minimaliste dans le sens où elle ne permet pas, par exemple, de savoir si la réponse à un forçage donné est présente dans les observations.

La région d'acceptation d'un tel test prend généralement la forme d'un ellipsoïde de confiance, centré sur la valeur 0_I . Inversement, une stratégie peut consister à estimer β par $\hat{\beta}$, à construire un ellipsoïde de confiance autour de $\hat{\beta}$, puis à observer si 0_I se trouve dans cet ellipsoïde.

Détection du forçage anthropique

Ici, on ne cherche pas à détecter la présence d'un changement quelconque, mais la présence d'un terme de réponse associé à un forçage particulier : le forçage anthropique. Bien entendu, le même test peut-être appliqué à un autre effet.

La philosophie de ce test est de ne s'intéresser qu'à un seul forçage, sans prendre en compte d'autres effets possibles. Cela revient à considérer que $I = 1$, ou, de façon équivalente, que $\beta = \beta^{(\text{ANTH})}$. Les hypothèses du test peuvent alors s'écrire de façon très similaires à celles du test T1.1 :

$$\begin{cases} H_0 : \langle \beta = 0 \rangle, \\ H_1 : \langle \beta \geq 0 \rangle. \end{cases} \quad (\text{T1.2})$$

Comme $I = 1$, la région d'acceptation s'appréhende comme un intervalle plutôt que comme un ellipsoïde. L'hypothèse alternative H_1 définie ici est cohérente avec celles utilisées dans cette thèse. Cependant, certains auteurs préfèrent considérer la variante

$$H'_1 : \langle \beta \neq 0 \rangle,$$

qui conduit à considérer une région de rejet bilatérale. On est alors conduit à rejeter les valeurs fortement négatives de β_{ANTH} , ce qui n'est pas naturel si on considère le signe de l'effet $\psi^{(\text{ANTH})}$ connu. L'hypothèse H_1 est donc raisonnable, et peut être préférable dans le cas de l'effet anthropique sur le climat.

Si l'on souhaite replacer ce test dans le cadre plus général où $I \geq 1$, l'écriture des hypothèses testées prend une forme un peu moins concise :

$$\begin{cases} H_0 : & \ll \beta = 0_I \gg, \\ H_1 : & \begin{cases} \ll \beta^{(\text{ANTH})} \geq 0 \gg, \text{ et} \\ \ll \beta^{(i)} = 0, i \neq \text{ANTH} \gg. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{T1.2bis})$$

Les régions d'acceptation et de rejet prennent, dans ce cas, la forme de demi-plans.

Comme nous le verrons, parmi les différents tests liés aux études de détection et d'attribution, (T1.2) est principalement celui qui a été l'objet de ce travail de thèse, mais souvent dans le cadre d'un modèle légèrement différent de (II.10).

Attribution : test de cohérence

Comme évoqué au Chapitre I, l'attribution des changements climatiques nécessite de pousser l'analyse statistique un peu au-delà de ce qui est nécessaire à une simple étude de détection. Un élément important consiste à montrer que le changement observé est compatible avec celui attendu en réponse aux forçages considérés. Comme les modèles numériques constituent le principal outil permettant de quantifier la réponse « attendue » à un forçage quelconque, la réponse à la question posée passe par la comparaison de l'estimation $\hat{\beta}$ de β déduite des observations à la valeur simulée ; cette valeur simulée est ici arbitrairement fixée à $\mathbb{1}_I$, en notant $\mathbb{1}_I$ le vecteur de dimension I dont toutes les coordonnées valent 1.

Les hypothèses mises en jeu par le test de cohérence d'attribution s'écrivent donc simplement :

$$\begin{cases} H_0 : & \ll \beta = \mathbb{1}_I \gg, \\ H_1 : & \ll \beta \neq \mathbb{1}_I \gg. \end{cases} \quad (\text{T1.3})$$

On peut remarquer que ces hypothèses sont du même type que celles utilisées par le test (T1.1), puisqu'elles sont identiques à une translation près. En particulier, la technique statistique à mettre en œuvre sera identique dans les deux cas.

L'introduction de ce test est essentiellement due à Hasselmann (1997) et Allen et Tett (1999). Comme pour (T1.1), la région d'acceptation prendra la forme d'un ellipsoïde, centré, cette fois-ci, sur la valeur $\mathbb{1}_I$. En pratique, de nombreux auteurs préfèrent construire un ellipsoïde de confiance autour de $\hat{\beta}$, puis vérifier que $\mathbb{1}_I$ se trouve dans cet ellipsoïde.

Différentes variantes de ce test peuvent être proposées, pour tester si les observations sont cohérentes avec d'autres valeurs de β . Par exemple, on peut se demander si les observations climatiques sont compatibles avec II.10 si l'effet des aérosols d'origine anthropique n'est pas pris en compte.

Attribution : test des autres causes physiquement plausibles

Enfin, la dernière condition pour pouvoir attribuer les changements climatiques à un effet donné consiste à vérifier que les observations sont incompatibles (toujours dans un sens statistique) avec les seuls effets des autres causes physiquement plausibles. Si on souhaite mettre en évidence le rôle de l'homme dans l'évolution du climat, on évaluera, typiquement, dans quelle mesure les observations climatiques sont compatibles avec les variations observées des activités solaire et volcanique.

Le test correspondant prend une forme très proche des tests de détection précédemment évoqués, puisqu'il met en jeu, dans le cas du forçage anthropique,

$$\begin{cases} H_0 : \ll \beta^{(ANTH)} = 0 \gg, \\ H_1 : \ll \beta^{(ANTH)} \geq 0 \gg. \end{cases} \quad (T1.4)$$

Ce test est cependant très différent du test (T1.2). En effet, les valeurs des coefficients $\beta^{(i)}$, pour $i \neq ANTH$ sont ici laissées libres (ce qui constitue la principale différence avec (T1.2)). Cette différence peut être illustrée au travers de l'exemple suivant : considérons que les observations indiquent une augmentation des températures, d'une part, et, d'autre part, qu'une augmentation de la constante solaire (rayonnement solaire au sommet de l'atmosphère), ainsi qu'une augmentation des concentrations de gaz à effet de serre (liée par exemple aux activités humaines), sont observées simultanément. Dans un test de détection du forçage anthropique, l'augmentation des températures, si elle est suffisante, sera interprétée comme témoignant de la présence significative d'un effet anthropique. En revanche, si on met en œuvre le test (T1.4), l'effet additionnel de l'effet de serre par rapport à l'effet solaire ne sera peut-être plus significatif.

Ce test n'est généralement mis en pratique qu'en considérant un couple d'effets (soit $I = 2$), typiquement aérosols anthropiques et gaz à effet de serre anthropiques, ou bien forçage anthropique total et forçage naturel total (aérosols volcaniques et activité solaire). En effet, plus I est grand, plus le nombre de degrés de libertés sous H_0 est élevé, et plus le caractère significatif d'un effet additionnel est difficile à mettre en évidence.

Ce test achève la description des tests couramment utilisés dans les études de détection et d'attribution formelles. Comme nous l'avons vu, le modèle statistique (II.10) est central dans cette pratique. Nous allons maintenant voir comment transposer ces tests à des modèles quelque peu différents.

II.2.2 Tests utilisant l'hypothèse de séparabilité

L'objectif de cette sous-partie est d'introduire, plus spécifiquement, les modèles statistiques et les tests de détection qui feront l'objet des 3 chapitres ultérieurs. D'une part, les tests ici introduits utilisent l'hypothèse de séparabilité (II.4) en plus de celles d'additivité (II.2) et (II.3). D'autre part, la présentation se restreint au cas de la *détection du signal anthropique*, correspondant au test (T1.2). Ainsi les tests qui vont être introduits visent à répondre à la même question sur la présence ou l'absence d'un effet anthropique, et ne prennent en compte que le seul forçage anthropique $\psi^{(ANTH)}$ (soit $I = 1$). De ce fait, le modèle statistique principal utilisé dans ce II.2.2 n'est plus (II.8), mais :

$$\psi_{s,t} = m_s + g_s \mu_t + \varepsilon_{s,t}, \quad (II.12)$$

dans lequel on note respectivement g et μ les vecteurs $g^{(ANTH)}$ et $\mu^{(ANTH)}$, puisqu'il n'y a pas de confusion possible avec un autre effet. Nous renvoyons toujours au II.3 pour la description des propriétés de ε .

Remarquons que dans deux des trois cas qui seront présentés ici, les modèles statistiques utilisés pourraient également permettre de mettre en œuvre une procédure de détection et d'attribution complète, et donc de construire des tests analogues aux tests (T1.1) à (T1.4). Cependant, tous ces tests ne seront pas étudiés en détail dans la suite de ce manuscrit, c'est pourquoi leur inventaire complet, qui revêtirait un caractère fastidieux, ne sera pas effectué.

Différentes approches peuvent être envisagées pour tester l'hypothèse nulle H_0 d'absence de changements, correspondant au modèle (II.1), contre l'hypothèse alternative H_1 définie par le modèle (II.12).

Signal spatial g connu

Une première stratégie, qui sera étudiée en détail au Chapitre III, consiste à supposer que les caractéristiques *spatiales* du signal, c'est-à-dire le vecteur g , sont connues. Le but est alors de tester la nullité du terme de réponse $g\mu$. Cependant, la mise en œuvre dans ce cadre d'un test de l'hypothèse « $\mu = 0$ », c'est-à-dire la mise en œuvre d'un test portant sur l'ensemble du vecteur μ , est difficile. On préfère donc fixer une certaine valeur pour le temps t , et réaliser le test à cette date. Comme il serait très inefficace et aléatoire de réaliser un test de détection des changements climatiques en prenant seulement en compte les observations d'une seule année t , un filtre temporel est couramment utilisé.

Une telle procédure a été utilisée par différents auteurs, parmi lesquels Hegerl et al. (1996), en considérant des tendances sur 30 ans. Le test évalue alors la présence d'une distribution spatiale connue de changements, g , dans les tendances observées. Nous verrons au Chapitre III que, de façon tout à fait similaire, l'utilisation de moyennes mobiles a été préférée dans le cadre de cette thèse. Quelque soit le traitement choisi, l'utilisation d'un filtre revient à supposer le vecteur μ en partie connu, même si cette connaissance est très simplifiée et n'utilise pas l'outil numérique (Hasselmann, 1997). On considère alors que le véritable μ se projette sur une tendance linéaire sur 30 ans par exemple, ou sur la différence des moyennes de deux périodes distinctes. L'appellation « pattern spatial g connu » pourrait donc être discutée, puisque des hypothèses sont également faites sur μ . L'objet de cette dénomination est avant tout d'indiquer l'utilisation qui est faite de l'outil numérique, et des informations qui en sont issues ; en l'occurrence, g est directement déduit de simulations numériques, alors que le choix de μ est relativement naïf.

La mise en œuvre d'un tel test est donc identique à celle du test (T1.2), dans le cas où l'on considère que l'effet $\psi^{(ANTH)}$ se factorise sous la forme (II.4), et où μ prend la forme simplifiée du filtre choisi. Pour cette raison, les hypothèses testées, qui en toute rigueur portent sur le coefficient $\beta^{(ANTH)}$, ne sont pas recopiées ici.

Dans un tel test, l'hypothèse de séparabilité n'est, à ce stade, utilisée que sur la période couverte par le filtre temporel, qui est relativement restreinte. Cependant, dans de nombreuses applications, et singulièrement au Chapitre III, cette hypothèse est utilisée de façon plus étendue, afin d'évaluer le vecteur g à partir de résultats de simulations numériques. On évalue ainsi souvent g comme la différence de température moyenne simulée entre la fin du XXI^{ème} siècle et la période contemporaine, ce qui nécessite d'utiliser l'hypothèse de séparabilité sur l'ensemble de ces deux périodes.

Signal temporel μ connu

Une seconde stratégie, qui sera étudiée en détail au Chapitre IV, consiste à supposer connue le terme d'évolution temporelle μ . Sans dévoiler le contenu du Chapitre IV, cette méthode présente quelques avantages. En particulier, elle permet, moyennant des hypothèses raisonnables, de construire un test des hypothèses

$$\begin{cases} H_0 : \langle g = 0_S \rangle, \\ H_1 : \langle g \neq 0_S \rangle. \end{cases} \quad (T2.1)$$

On peut ainsi effectuer un test portant sur l'intégralité du jeu des données disponibles pour répondre à la question posée. Ensuite, l'estimation de μ est possible à partir de résultats de simulations numériques, conformément à ce qui est couramment mis en œuvre pour évaluer les effets $\psi^{(i)}$ dans les procédures décrites au II.2.1. Mais dans le cas où la seule évolution temporelle est évaluée, l'utilisation d'une hypothèse de régularité peut s'avérer efficace (cf Chapitre IV).

On peut remarquer qu'une telle procédure utilise une connaissance a priori de l'effet recherché $\psi^{(ANTH)}$ moins importante que la précédente ; elle laisse, au contraire, davantage de degrés de libertés aux données étudiées (les observations), et peut permettre de mettre en évidence certaines caractéristiques, notamment spatiale, des changements observés. On peut remarquer

que l'hypothèse de séparabilité est utilisée sur l'intégralité de la période étudiée dans le cadre de ce test.

***g* inconnu, μ régulier**

Une troisième stratégie, qui fera l'objet du Chapitre V, consiste à réduire encore la part réputée connue du signal de changement, en ne supposant connu que le seul caractère régulier du vecteur μ , décrivant l'évolution temporelle. Dans un tel contexte, aucune hypothèse n'est faite sur le vecteur g , ni sur le détail des valeurs du vecteur μ . On suppose simplement que l'évolution temporelle du signal est *régulière*, c'est-à-dire en l'occurrence lisse par rapport au temps, sans rechercher une forme paramétrique (linéaire, quadratique, etc). L'inférence dans ce type de modèle statistique revêt un caractère non-paramétrique, et toute l'information statistique qui peut être tirée pour construire le test est liée à l'hypothèse de séparabilité, ainsi qu'à l'hypothèse de régularité.

Les hypothèses testées s'écrivent alors

$$\begin{cases} H_0 : \ll g\mu^T = 0_{S \times T} \gg, \\ H_1 : \ll g\mu^T \neq 0_{S \times T} \gg. \end{cases} \quad (T2.2)$$

L'esprit de ce test est d'accorder un rôle encore plus important aux données, afin d'éventuellement mettre en évidence des signaux de changements, spatiaux ou temporels, différents de ceux simulés par les outils numériques. De ce point de vue, une telle procédure se rapproche d'une méthode de « Data Mining ». En contrepartie, la généralisation de ce type de méthodologie au problème de l'attribution est quasi-impossible, puisque la distinction de plusieurs effets sur le climat nécessite une certaine connaissance a priori de ces effets, qui est ici volontairement niée.

II.3 Représentation de la variabilité interne

Dans toute étude de détection ou d'attribution des changements climatiques, les hypothèses relatives à la variabilité climatique interne jouent un rôle fondamental. En effet, comme nous l'avons évoqué, la question posée par une étude de détection est de savoir si un changement est compatible avec la variabilité interne du climat. La connaissance de cette variabilité interne est donc tout aussi précieuse et nécessaire que celle du changement étudié. En particulier, dans les chapitres dédiés aux questions de détection et d'attribution des deux derniers rapports du GIEC, ainsi que dans de nombreuses études (Allen et Tett, 1999, Stone et al., 2007a, et 2007b, notamment), une certaine place est toujours consacrée à la description et à la représentation utilisée de la variabilité interne. Par « représentation », on entend, en particulier, les hypothèses statistiques qui sont faites au sujet de cette variabilité, et la façon dont elle est évaluée. On peut également remarquer qu'au cours de ce II.3, en fonction du contexte, le terme d'évaluation sera parfois préféré à celui d'estimation, pour signifier que l'estimation, dans son sens statistique, se mêle d'informations (et d'hypothèses) a priori et d'un recours à la modélisation numérique, dont il est difficile d'évaluer les incertitudes.

Comme nous allons le voir, les questions du choix d'une bonne « représentation », et d'une correcte évaluation de cette quantité sont difficiles à plusieurs titres. Premièrement, de nombreuses précautions doivent être prises dans l'utilisation des observations climatiques à des fins d'évaluation de la variabilité interne, la plupart des observations effectuées par l'homme ayant directement subi les perturbations associées à différents forçages externes du système climatique. Deuxièmement, l'évaluation sans hypothèse simplificatrice de la variabilité interne est rendue quasi-impossible par le fait qu'elle nécessiterait une quantité de données très importante, et en pratique indisponible. Même le recours à des pseudo-observations issues de simulations numériques ne permet pas toujours de surmonter cette difficulté. Nous allons donc détailler ces

difficultés afin d'introduire les choix effectués et les hypothèses utilisées dans le cadre de cette thèse, puis nous préciserons quantitativement certaines des valeurs qui seront employées dans le reste de l'étude.

II.3.1 « Inobservabilité » de ε et incertitudes

Comme nous l'avons vu au I.3.1, différents types de variabilités doivent être distingués dans les variations du système climatique. La variabilité *interne* est seulement l'une de ces variabilités, qui se trouve mêlée à un terme de variabilité forcée dans les observations du climat. Outre l'influence permanente des sources de variabilité naturelle, les observations météorologiques, et donc climatiques, ne se sont généralisées que vers la fin du XIX^{ème} siècle dans certaines régions « privilégiées », et au cours du XX^{ème} pour de nombreuses autres, ce qui correspond à la période au cours de laquelle les activités humaines ont pu influencer le climat. Il en résulte que l'évaluation de la variabilité interne ne peut pas se baser directement sur des observations climatiques, et que l'utilisation d'observations conduit, a minima, à surestimer la variabilité interne par la variabilité totale.

Deux stratégies, nécessitant toutes les deux de recourir à l'outil numérique, peuvent principalement être envisagées pour dépasser cette difficulté : l'utilisation de simulations de contrôle (II.3.1.1), et l'utilisation d'observations « corrigées » (II.3.1.2). Ce II.3.1 sera consacré à la présentation et à la discussion de ces deux approches.

Dans le but de mener une comparaison entre modèles climatiques et observations « corrigées » du point de vue de la variabilité, et d'illustrer les incertitudes relatives à la variabilité *interne* du climat, nous allons nous concentrer, dans ce II.3.1, sur les caractéristiques temporelles de cette variabilité. Par caractéristiques temporelles, nous désignons ici les propriétés de mémoire dans le temps, telles que la persistance, ou plus généralement la fonction d'autocorrélation temporelle (ces caractéristiques seront déterminées par la matrice $C^{(T)}$ dans les notations utilisées dans la suite de ce II.3). Le propos sera, en particulier, illustré par la densité spectrale de la température moyenne globale, de la même façon que dans le rapport du GIEC (IPCC, 2007). L'intérêt pour ces caractéristiques temporelles se justifie, d'une part, par leur importance dans une étude de détection, qui traite d'échelles de temps relativement longues (la décennie au moins), et d'autre part, parce que la présence d'une tendance au réchauffement, par exemple, affectera davantage l'autocorrélation que les caractéristiques spatiales de la variabilité interne, surtout si les hypothèses du II.1 (additivité, séparabilité) sont vérifiées.

II.3.1.1 Utilisation de simulations de *contrôle*

Tout d'abord, une démarche naturelle pour évaluer la variabilité *interne*, consiste à remplacer les observations par des pseudo-observations *non perturbées* issues de simulations numériques du climat. L'outil numérique permet en effet de réaliser des simulations du climat dites de *contrôle*, c'est-à-dire dans lesquelles aucune source de variabilité forcée (naturelle ou anthropique) ne vient interagir avec le système climatique. Dans une telle simulation, les concentrations d'aérosols, de gaz à effet de serre, et la valeur de la constante solaire, sont fixées dans le temps ; le modèle numérique sert donc de laboratoire numérique pour évaluer des termes inaccessibles aux observations.

Une telle stratégie serait tout à fait satisfaisante si les modèles numériques étaient en capacité de reproduire le comportement du système climatique à l'identique. Malheureusement, cette reproduction est toujours imparfaite (voir aussi II.3.3.1, Figure II.5), et les sorties de modèles numériques doivent être validées par une comparaison aux observations.

Les deux derniers rapports du GIEC effectuent une comparaison entre modèles numériques et observations en se basant sur les densités spectrales de la température moyenne globale, telle qu'observée et modélisée. Ces densités sont alors estimées sur le XX^{ème} siècle, d'un côté à partir

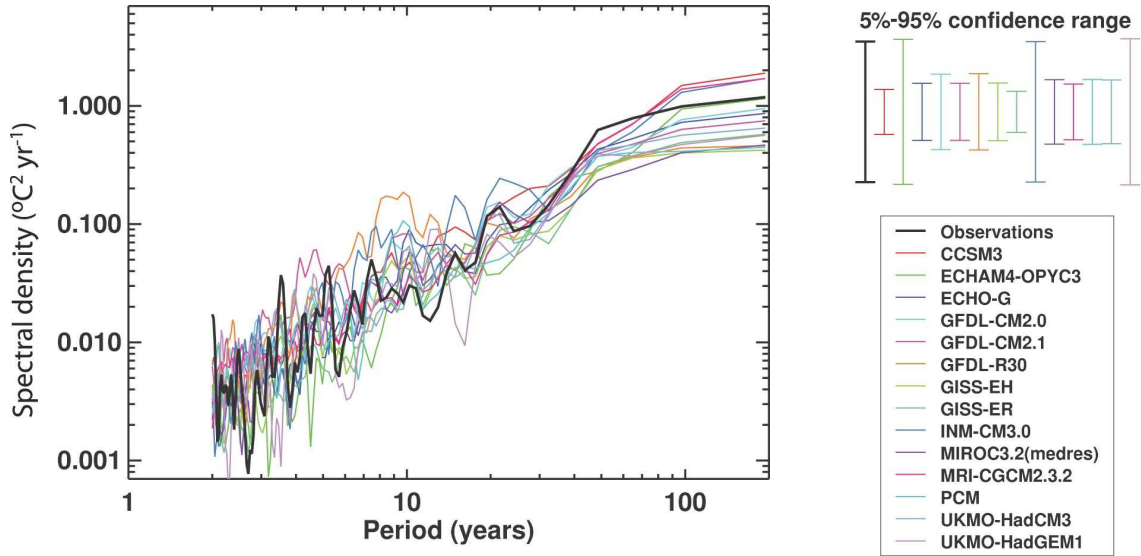


FIG. II.2 – Comparaison des densités spectrales de la température moyenne globale observée et modélisée sur le XX^{ème} siècle. La densité spectrale des observations (données HadCRUT3) est comparée à celle des 14 CGCMs ayant participé au projet CMIP3 en réalisant des simulations climatiques du XX^{ème} siècle prenant en compte l'ensemble des forçages externes, naturels et anthropiques. L'estimation de la densité spectrale est faite en utilisant des fenêtres de Tukey-Hanning (largeur de 97 ans), ce qui garanti, en échelle logarithmique, que l'intervalle de confiance ne dépende pas de la fréquence considérée. *Figure tirée du 4^{ème} Rapport du GIEC (IPCC, 2007, Chapitre 9, p. 686).*

des observations disponibles au cours de cette période, de l'autre à partir de simulations du climat du XX^{ème} siècle, c'est-à-dire imposant les mêmes forçages externes que ceux observés. La Figure II.2, directement issue du dernier rapport du GIEC (IPCC, 2007), montre les résultats fournis par cette comparaison, et indique en particulier l'accord relativement bon entre modèles et observations sur la période considérée. Ce résultat, qui vise avant tout à illustrer la capacité des modèles à reproduire correctement la variabilité climatique, ne permet cependant pas de conclure sur la question de la variabilité interne elle-même, puisque la comparaison est faite en présence de variabilité forcée, naturelle et anthropique.

En outre, le caractère *circulaire* des études de détection et d'attribution, particulièrement pointé par Stone et Allen (2005a), ne doit pas être négligé ici. En effet, les modèles climatiques sont souvent ajustés pour reproduire correctement les évolutions (et parfois la variabilité) observées au cours du siècle dernier (Kiehl, 2007, Knutti, 2008, par exemple). Les résultats pouvant être déduits d'une comparaison entre modèles et observations sur ces mêmes aspects doivent, en conséquence, être interprétés avec un minimum de circonspection. En particulier, les modèles peuvent reproduire la bonne variabilité totale pour de mauvaises raisons (réponse trop forte aux forçages, par exemple). Il est donc naturel de pousser un petit peu plus l'analyse, en tâchant de cerner de plus près la partie interne de cette variabilité.

II.3.1.2 Utilisation d'observations *corrigées*

Une autre stratégie permettant d'évaluer la variabilité interne consiste à traiter les observations réelles en leur retranchant les effets des forçages externes au cours de la période observée. La philosophie est alors de reconstituer des jeux d'observations vierges de toute perturbation externe, préalablement à l'évaluation de la variabilité interne. Bien sûr, une telle démarche requiert l'évaluation des réponses aux forçages naturels et anthropiques *passés*, c'est-à-dire ayant influencé

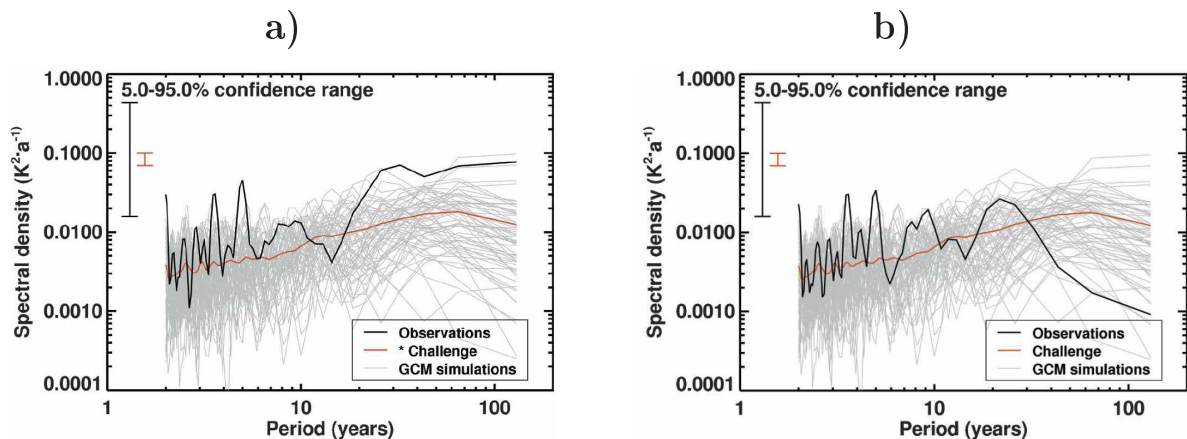


FIG. II.3 – Comparaison des densités spectrales de la variabilité interne de la température moyenne globale, modélisée et telle que déduite des observations. Les densités spectrales de 62 simulations climatiques (ensemble « Challenge ») sont représentées en gris, ainsi que leur moyenne, en rouge. La moyenne d'ensemble est retirée identiquement dans les deux cas, pour éliminer la réponse aux forçages extérieurs. La densité spectrale des observations est représentée en noir ; les observations sont « traitées » de deux façons différentes pour supprimer la réponse aux mêmes forçages : en **a**), la moyenne d'ensemble simulée est retirée (même traitement que chaque simulation), en **b**), on retire une combinaison linéaire des réponses à chaque forçage, combinaison linéaire dont les amplitudes sont régressées sur les observations elles-mêmes. Toutes les densités spectrales sont estimées sur la période 1940-2005, de la même façon que Figure II.2. *Figure tirée de Stone et al. (2007, p. 506 et 510).*

le système au cours de la période d'observation. De nouveau, les modèles numériques constituent les outils privilégiés pour évaluer ces termes. La reconstitution de ce type de d'observations virtuelles de la variabilité interne autorise en particulier une comparaison avec la variabilité interne directement simulée par les modèles numériques.

Ce type de comparaison a été effectué par Stone et al. (2007a), avec deux variantes, dont les résultats sont reproduits Figure II.3. Dans les deux cas, de nombreuses simulations climatiques sont utilisées (réalisées avec différents CGCMs du projet CMIP3), et comparées à des observations « traitées », c'est-à-dire dans lesquelles une estimation du *signal* (la réponse aux forçages externes) a été retranchée. Figure II.3a), l'estimation du signal utilisée est la moyenne d'ensemble des signaux simulés ; Figure II.3b), la quantité retranchée est en partie calculée à partir des observations elles-mêmes : comme au II.2.1, la forme de chacune des réponses aux forçages considérés (ici, classiquement, $I = 4$: effet de serre, aérosols, volcans, solaire) est imposée, mais l'amplitude de la réponse est estimée par régression (modèle II.10). La variance des observations ainsi traitées est nécessairement plus faible dans le second cas, puisqu'une procédure d'ajustement est alors utilisée. La Figure II.3 illustre ce phénomène, et indique également que les différences entre les deux approches sont particulièrement importantes à basse fréquence, ce qui témoigne des incertitudes sur cette partie du spectre. On peut également noter que la plupart des comparaisons faites, dans le cadre des études de détection et d'attribution, entre variabilités internes observée et simulée, le sont sur le même principe que celle réalisée Figure II.3b), conformément à l'algorithme proposé par Allen et Tett (1999).

II.3.2 Réduction de la dimension et hypothèse de séparabilité

Une deuxième difficulté dans l'évaluation des propriétés de ϵ tient à la dimension du problème posé. En effet, si on considère un jeu initial de données $(\psi_{s,t})$, dont la dimension $S \times T$ peut être

déjà relativement grande, l'estimation de sa distribution nécessite généralement un très grand nombre de données.

Dans le cadre de l'étude des variations des températures moyennes, la distribution du terme de variabilité interne ε (cf II.8) est couramment assimilée à une distribution gaussienne. Cette thèse utilisera largement cette hypothèse, notamment afin d'obtenir certaines propriétés d'optimalité des tests considérés (même s'il est indiqué, notamment au Chapitre III, que certaines « bonnes » propriétés peuvent être établies dans un cadre moins restrictif). Moyennant cette hypothèse de gaussiannité, et sachant que ε est supposé centré (d'espérance nulle), la distribution de ε est totalement caractérisée par la connaissance de sa covariance. Dans notre cas, et en conservant les notations précédentes, cette covariance prend la forme d'un tenseur d'ordre 4, de dimension S^2T^2 , et de coefficients

$$c_{s,t,s',t'} = \text{Cov}(\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{s',t'}). \quad (\text{II.13})$$

En considérant l'échantillon d'observations ψ , non pas comme une matrice de taille $S \times T$, mais comme un vecteur de taille ST , on peut assimiler cette même covariance à une matrice de covariance, de taille $ST \times ST$ (cette seconde représentation étant souvent préférée dans la littérature). Dans tous les cas, l'estimation de cette covariance est rendue délicate par le fait que sa dimension S^2T^2 est largement supérieure au nombre d'observations, ST . Elle est rendue encore plus difficile par le fait que c'est généralement son inverse matriciel (en tant que matrice de taille $ST \times ST$) qui est utile à la construction de tests optimaux (cf Chapitre III).

Différentes solutions ont été proposées pour lutter contre cette difficulté.

Premièrement, dans un souci de simplification du problème, plusieurs auteurs (Hasselmann, 1993, par exemple) ont utilisé une hypothèse de séparabilité espace-temps de la covariance, qui peut s'écrire

$$\text{Cov}(\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{s',t'}) = C_{s,s'}^{(S)} C_{t,t'}^{(T)}, \quad (\text{II.14})$$

où $C^{(S)}$ et $C^{(T)}$ désignent les facteurs respectivement spatial et temporel de la variabilité interne (de dimensions respectives $S \times S$ et $T \times T$). Cette hypothèse constitue le pendant de l'hypothèse de séparabilité utilisée pour le signal de changement $\psi^{(s)}$ et présentée au II.1.3.

L'utilisation de cette hypothèse découle du fait que pour l'étude du climat, et en première hypothèse, l'indépendance dans le temps de données annuelles est souvent acceptable. En particulier, l'étude de séries climatiques observées en un point révèle souvent de faibles autocorrélations. Inversement, l'indépendance dans l'espace est généralement une très mauvaise approximation puisque, notamment dans le cas des températures, les corrélations spatiales demeurent élevées à des distances relativement importantes (typiquement 1000km). En utilisant ce type d'approximation d'ordre 0, la séparabilité espace-temps s'obtient mécaniquement, puisqu'on peut écrire

$$\text{Cov}(\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{s',t'}) = C_{s,s'}^{(S)} \delta_{t,t'}, \quad (\text{II.15})$$

où δ est le symbole de Kronecker ($\delta_{t,t'} = \mathbb{1}_{t=t'}$). Comme nous le verrons, l'utilisation de l'hypothèse générale (II.14) permet d'assouplir (II.15), tout en simplifiant le modèle initial (II.13), puisque la dimension est alors réduite de S^2T^2 à $S^2 + T^2$.

Deuxièmement, depuis Hegerl et al. (1996), et plus particulièrement depuis les travaux de Allen et Tett (1999), de nombreux auteurs ont préféré réduire explicitement la dimension du problème. Toujours en considérant que ψ est un vecteur de dimension ST , la méthode consiste alors à projeter ce vecteur ψ dans un espace de dimension q correspondant aux q premières composantes principales empiriques. Le nombre q peut alors être choisi arbitrairement, ou en fonction de différents critères statistiques, afin d'assurer une certaine qualité d'estimation dans l'espace réduit. Cette solution présente plusieurs inconvénients, qui seront détaillés au Chapitre III. En particulier, l'un des résultats importants de cette thèse est de montrer que ce type de technique dégrade la performance (assimilée à la puissance) des tests de détection utilisés.

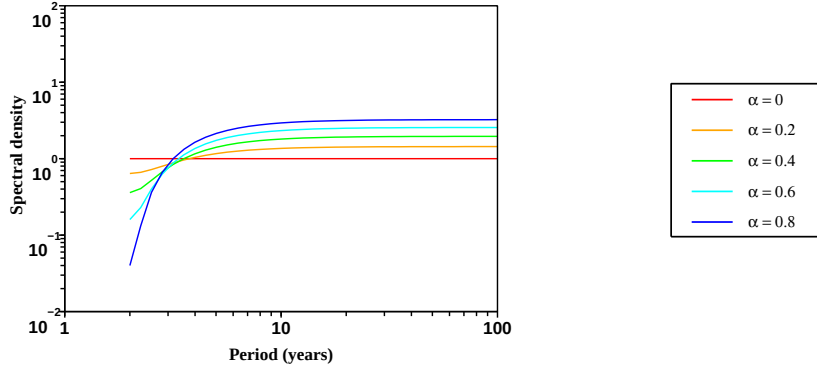


FIG. II.4 – **Densités spectrales des processus AR1.** Les densités spectrales des processus AR1 de même variance sont représentées, pour cinq valeurs différentes du coefficient α . Le cas du bruit blanc est obtenu en choisissant $\alpha = 0$. Une échelle logarithmique est utilisée en ordonnées, comme pour les Figures II.2 et II.3.

En conséquence, il a généralement été préféré, dans le cadre de cette thèse, de recourir à l'hypothèse de séparabilité espace-temps pour la variabilité interne ε , de façon similaire à ce qui est fait pour le signal de changement $\psi^{(s)}$. Cette hypothèse laisse notamment la liberté de choisir une covariance temporelle $C^{(T)}$ plus souple et mieux adaptée que celle utilisée en II.15.

II.3.3 Utilisation d'un modèle AR1

II.3.3.1 Choix de l'AR1

La stratégie utilisée dans cette thèse consiste à assimiler le facteur temporel de la covariance $C^{(T)}$ à celui d'un processus Auto-Régressif d'ordre 1 (AR1), ce qui peut s'écrire

$$C_{t,t'}^{(T)} = \alpha^{|t-t'|}, \quad (\text{II.16})$$

où α désigne un coefficient réel vérifiant $-1 < \alpha < 1$. En effet, un processus AR1 $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ peut être défini comme un processus stationnaire satisfaisant à l'équation

$$a_{t+1} = \alpha a_t + \epsilon_t, \quad (\text{II.17})$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de variance finie, et α est le même coefficient que celui introduit en (II.16). L'équation (II.16) est une conséquence directe de cette définition. Plusieurs justifications peuvent être apportées à l'utilisation de processus AR1.

La première de ces justifications est liée au fait que les processus AR1 constituent la façon la plus simple de prendre en compte un certain effet mémoire dans les variations climatiques, et donc de dépasser l'approximation d'ordre 0 d'un spectre de variabilité blanc en temps (II.15). Cet effet mémoire, notamment, est souvent attribué en grande partie au rôle régulateur de l'océan. Si l'on souhaite formaliser davantage ce phénomène, on peut indiquer, en suivant Von Storch et Zwiers (1995), que les processus AR1 peuvent être vus comme les solutions discrétisées d'une équation différentielle du premier ordre à second membre aléatoire. Plusieurs auteurs utilisent donc cette famille de processus pour modéliser la variabilité climatique.

Deuxièmement, on peut souhaiter comparer les processus AR1 aux estimations de la variabilité interne déduites des observations, obtenues au II.3.1.2. Une telle comparaison peut être effectuée en utilisant, de nouveau, l'outil de la densité spectrale. La Figure II.4 présente les densités spectrales de processus AR1, pour différentes valeurs du coefficient α . Le fait que cette

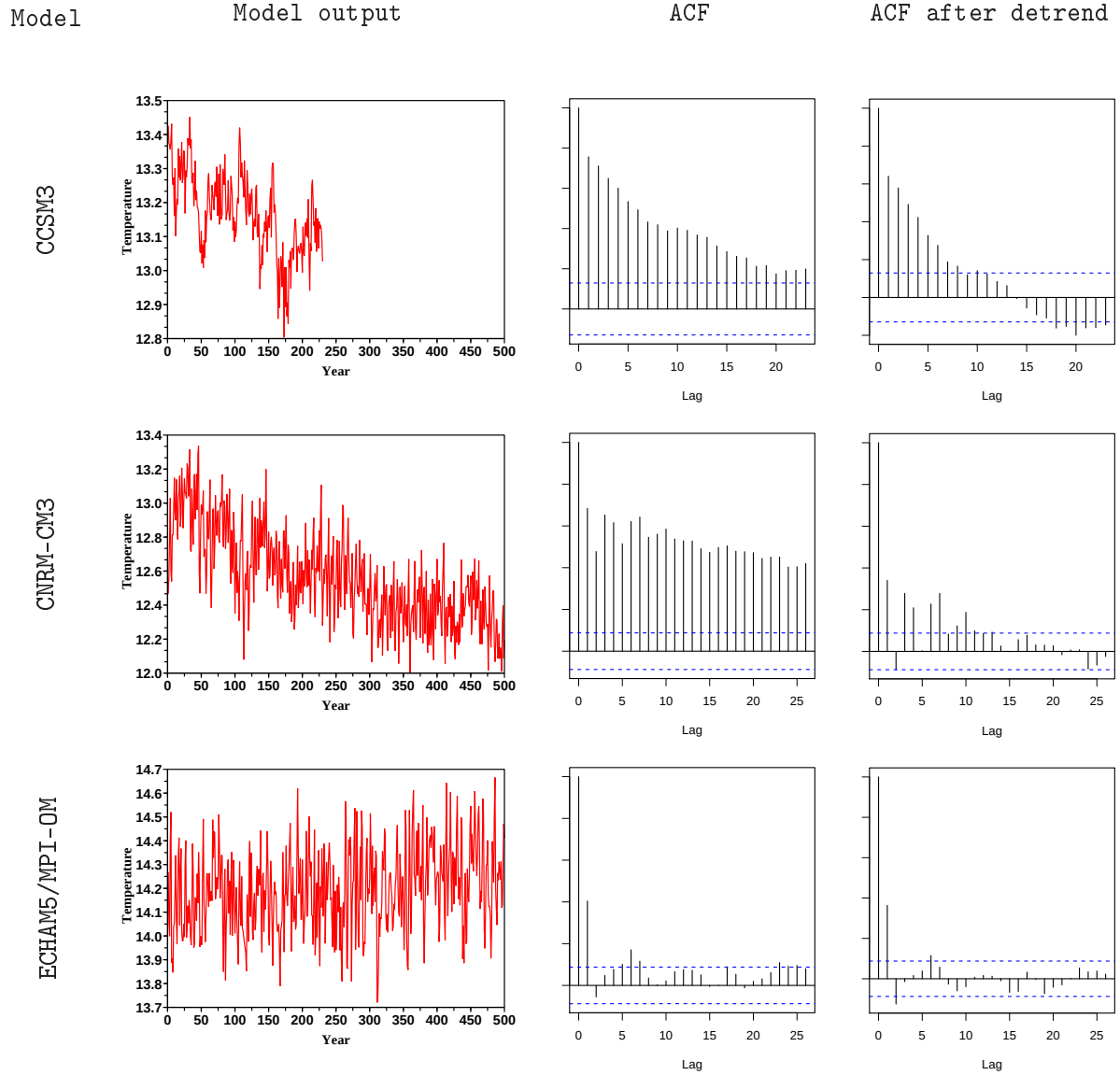


FIG. II.5 – **Comportement statistique des simulations de contrôle des modèles climatiques.** La température moyenne globale simulée dans les simulations de contrôle de trois CGCMs est représentée et étudiée sous l'angle de ses propriétés d'autocorrélation. On distingue l'autocorrélation des séries brutes (ACF, Auto Correlation Function), et l'autocorrélation des séries obtenues après retrait de la tendance linéaire (ACF after detrend).

densité spectrale soit quasi plate au-delà de 10 ans illustre le fait que les processus AR1 (et plus généralement AR) sont des processus à « courte mémoire ». Cette propriété est liée au caractère exponentiellement décroissant de la fonction d'autocorrélation, et explique que la variance portée par la partie basse fréquence du spectre soit limitée. La comparaison avec la Figure II.3 indique cependant qu'en fonction de la méthode de « correction » des observations choisie, le processus AR1 peut constituer une approximation acceptable. Cette approximation est plus particulièrement acceptable Figure II.3b), c'est-à-dire avec la méthode de correction utilisée par Allen et Tett (1999), et la plupart des études ultérieures, pour traiter les observations, avant de les utiliser comme références pour valider les estimations de la covariance déduites de simulations de contrôle.

Troisièmement, on peut se demander dans quelle mesure un processus AR1 permet de correctement restituer les comportements statistiques, tels que simulés par les modèles de climat, des variables étudiées. Pour répondre à cette question, la Figure II.5 donne quelques illustrations du comportement de la température moyenne globale et annuelle dans les simulations de contrôle réalisées par des CGCMs. Le choix de cette variable n'est pas neutre. D'une part, comme nous l'avons vu, la plupart des études (parmi lesquelles le dernier rapport du GIEC) relatives aux températures, étudient avant tout les propriétés de la température moyenne globale. D'autre part, la température moyenne globale, du fait de son caractère agrégé, permet de mettre en exergue l'effet mémoire du système climatique. On peut toutefois remarquer que certains modes de variabilité climatique privilégiés (tels l'*oscillation australe - El Niño* ou l'*oscillation Nord-Atlantique*) peuvent expliquer une plus grande part de la variabilité interannuelle planétaire ; cela pourrait justifier de les étudier spécifiquement, mais ne sera pas fait ici. Trois CGCMs ont été choisis relativement arbitrairement : CCSM3 et ECHAM5/MPI-OM sont deux modèles souvent utilisés comme références, et illustrent deux types de comportements très différents, CNRM-CM3 est également représentatif de plusieurs CGCMs.

L'étude de la Figure II.5 montre tout d'abord la relative difficulté pour les CGCMs à simuler un climat stable, c'est-à-dire sans tendance longue d'évolution. Les trois modèles représentés produisent ainsi une « dérive » plus ou moins forte, qui est souvent interprétée comme un défaut du modèle. Le calcul des coefficients empiriques d'autocorrélation avant et après retrait d'une tendance linéaire indique l'impact qu'elle peut avoir dans l'analyse des résultats et, ce faisant, la prudence avec laquelle il convient de traiter les résultats directement issus des simulations numériques. Cet effet « dérive » est ici particulièrement illustré par les modèles CNRM-CM3 et CCSM3. On peut également remarquer que la « dérive » d'un modèle n'étant pas nécessairement linéaire, l'étude des données après retrait d'une tendance linéaire n'est pas totalement satisfaisante. Par exemple, il est tout à fait possible que le modèle simule une relaxation non-linéaire vers un état d'équilibre légèrement différent de celui observé. Dans un tel cas, le retrait d'une tendance linéaire n'est pas équivalent au retrait du « défaut » du modèle, et la fonction d'autocorrélation sera surestimée malgré le traitement appliqué.

Après retrait de la tendance, les modèles conservent une grande diversité de comportements. CCSM3, par exemple, simule un effet mémoire relativement important, et on peut douter du caractère exponentiellement décroissant de sa fonction d'autocorrélation. Inversement, ECHAM5/MPI-OM ne simule quasiment pas d'effet mémoire au-delà de 2 ans, et reproduit ainsi relativement bien le comportement d'un processus AR1. En outre, l'utilisation de cette simulation de contrôle pour estimer la variabilité interne du climat conduirait à des résultats très proches de ceux obtenus en assimilant cette variabilité à un processus AR1.

Finalement, cette succincte étude permet de souligner que l'assimilation de la variabilité interne à un processus AR1 constitue l'hypothèse « minimale » permettant de restituer correctement les comportements observés et modélisés. L'évaluation de l'effet mémoire de plus longue portée du système climatique est délicate, et devrait faire l'objet de recherches plus approfondies. Dans cette thèse, nous utiliserons donc largement l'hypothèse (II.16) pour représenter la variabilité interne du climat. En outre, la discussion de la robustesse de certains résultats portera de façon privilégiée sur la valeur du coefficient α , plutôt que sur l'utilisation de l'hypothèse (II.16). La remise en cause de cette hypothèse pourrait néanmoins constituer le thème de futures recherches.

II.3.3.2 Choix de α

Une fois l'hypothèse (II.16) acceptée, un point important concerne le choix du coefficient α . En effet, pour les mêmes raisons que celles indiquées au II.3.1, il est délicat de procéder directement à l'évaluation de cette quantité dans les observations. Son évaluation par le biais de

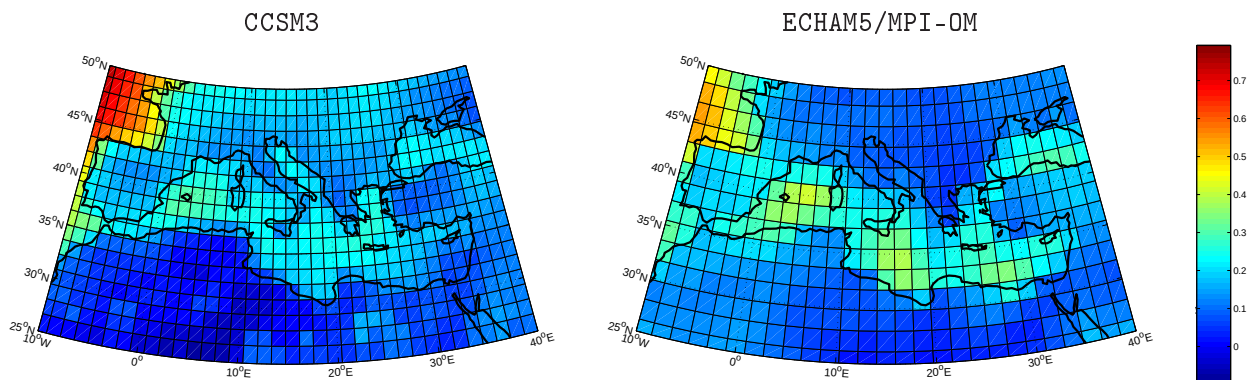


FIG. II.6 – α sur le domaine Méditerranée. Pour les CGCMs CCSM3 et ECHAM5/MPI-OM, le coefficient α (cf II.16) est estimé par la méthode de Yule-Walker, en chaque maille du domaine Méditerranée. Les valeurs obtenues sont cartographiées.

simulations de contrôle réalisées avec des CGCMs est donc naturelle, mais la Figure II.5 indique qu'en fonction des CGCMs choisis, les valeurs retenues peuvent être sensiblement différentes.

Dans le cadre de cette thèse, deux domaines seront préférentiellement étudiés : la France métropolitaine (Corse non-comprise), et un domaine Méditerranée, défini par la boîte $[10^\circ\text{W}, 40^\circ\text{E}] \times [25^\circ\text{N}, 50^\circ\text{N}]$. Le choix des valeurs de α a donc été spécifique à ces deux régions, ce qui a facilité la décision. En effet, et sans entrer dans une discussion qui n'est pas le sujet principal de cette thèse, le comportement d'un CGCM quant à la persistance globale des températures semble dominé par le comportement des températures océaniques, et, ce faisant, surtout lié au modèle océanique utilisé.

La Figure II.6, dans laquelle le coefficient α est estimé, pour deux CGCMs, sur chaque maille du domaine Méditerranée considéré, illustre en partie ce phénomène. En effet, au dessus des continents, et même sur la plus grande partie du domaine Méditerranée choisi, les coefficients α reproduits par les deux modèles CCSM3 et ECHAM5/MPI-OM sont relativement proches et petits, alors que l'estimation de ce même coefficient sur la moyenne globale aurait conduit à un facteur 2 de différence. On devine également, Figure II.6, que les différences sont nettement plus prononcées au dessus de l'Atlantique Nord.

Plus précisément, sur le domaine étudié, on peut remarquer que les valeurs sont souvent comprises entre 0 et 0.3, notamment au-dessus des continents, que quelques valeurs, notamment sur les mailles authentiquement méditerranéennes, sont plus élevées entre 0.25 et 0.4, et enfin, que des valeurs plus fortes sont obtenues sur le Golfe de Gascogne, entre 0.4 et 0.7. Le même coefficient, estimé sur la série des températures moyennes sur le domaine, est de 0.2 à 0.25. Dans la suite de l'étude, et dans le soucis de rendre les tests utilisés plutôt conservatifs, la valeur de 0.4 a été généralement utilisée sur ce domaine.

Sur le domaine France, le même type de consensus est obtenu entre de nombreux modèles. Comme, cette fois-ci, seules des données sur continent ont été traitées à des fins de détection des changements climatiques, la valeur attribuée au coefficient α est plus faible, de 0.2. D'une part, il s'agit approximativement de la valeur observée, Figure II.6, sur les mailles couvrant la France continentale, et d'autre part, l'estimation de α à partir de la température moyenne sur ce domaine ne conduit pas à une valeur supérieure.

Terminons par une remarque : bien que dans le cadre de ce travail, α soit toujours considéré comme un paramètre scalaire, une généralisation pourrait consister à utiliser un processus AR1 (ou même, plus généralement ARMA) vectoriel. Pour ce qui est des seuls processus AR1, en reprenant les notations de l'équation II.17, mais en considérant cette fois-ci que a_t est un vecteur

de dimension S , on peut alors considérer :

$$a_{t+1} = Aa_t + \varepsilon_t, \quad (\text{II.18})$$

où A est une matrice réelle vérifiant certaines conditions (pour que le processus soit stationnaire). Dans un premier temps, une adaptation possible serait de choisir A diagonale, ce qui permettrait à la valeur du coefficient α de varier selon le lieu considéré. Ce type de processus permettrait en particulier de tenir compte des différences continent océan en terme de persistance, et ainsi de mieux restituer la relative hétérogénéité spatiale observée Figure II.6.

II.3.3.3 Blanchiment de données générées par un processus AR1

Un avantage important qui peut être tiré de l'hypothèse (II.16) est qu'il est facile de traiter des données générées par un processus AR1 afin de les « blanchir », c'est-à-dire de retirer leur autocorrélation. Ce type de méthode, notamment mis en avant par Von Storch et Navarra (1999), permet en particulier d'étendre au cas de processus AR1 des tests construits pour des échantillons de données indépendantes.

En quelques mots, le blanchiment signifie simplement la reconstruction de la série de bruit blanc $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de la définition (II.17), à partir de la série effectivement observée $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Cette opération est très simple pour un processus AR1, puisqu'il suffit d'écrire

$$\epsilon_t = a_{t+1} - \alpha a_t. \quad (\text{II.19})$$

Cette procédure sera utilisée à différentes reprises au cours de ce manuscrit, en particulier aux Chapitres IV et V.

Chapitre III

Détection de signaux spatiaux

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une première stratégie de détection, basée sur la recherche dans les observations, d'un certain *signal spatial*, c'est-à-dire d'une certaine distribution spatiale de changements (ou « *pattern spatial* » en reproduisant un anglicisme courant). Pour être plus précis, le *signal* recherché dans les observations est généralement l'empreinte spatiale des changements climatiques, telle que simulée par un modèle de climat, en réponse au forçage anthropique. C'est cette notion de recherche d'une empreinte particulière qui est à l'origine du nom de la méthode de détection couramment associée, dite méthode des « empreintes digitales optimales ».

Le modèle statistique utilisé pour mener ce type de procédure de détection est le modèle (II.12), dans lequel nous verrons que l'indice de temps t est généralement fixé. On peut donc écrire ce modèle

$$\psi_s = m_s + \mu g_s + \varepsilon_s, \quad (\text{III.1})$$

dans lequel le vecteur g est connu. Ce modèle statistique s'apparente donc à un modèle de régression classique, dans lequel le test de détection correspond au test de nullité du coefficient de régression μ . D'un point de vue méthodologique, la principale difficulté tient au caractère « inconnu » de la matrice de covariance du terme aléatoire ε ; matrice dont la connaissance est nécessaire afin de construire un test efficace, et afin d'évaluer la p -value du test. Pour estimer cette covariance, un nombre réduit de réalisations de ε sont disponibles, ce qui nous conduira à utiliser des hypothèses de type *grande dimension*, que nous préciserons par la suite. Compte tenu des difficultés posées par l'estimation d'une matrice de covariance en grande dimension (voir notamment Marčenko et Pastur, 1967), la contribution méthodologique principale de ce chapitre est de montrer l'intérêt de l'utilisation d'un estimateur bien conditionné de cette matrice.

La première partie de ce chapitre (III.1) présente en détail le cadre statistique et la méthode proposée, avant de montrer l'intérêt de cette dernière par rapport à d'autres adaptations possibles. Une première application est menée sur des observations de températures en France. Ce III.1 reprend un article accepté par la revue *Climate Dynamics*. La deuxième partie (III.2), apporte quelques compléments sur la méthodologie, notamment en précisant quelques points théoriques. Enfin les parties III.3 et III.4 présentent en détail les résultats obtenus avec cette méthode de détection, respectivement sur les domaines France et Méditerranée. Ces parties illustrent à la fois les nouveaux résultats d'ordre applicatif qui ont été obtenus avec cette méthode, et les incertitudes qui demeurent pour certaines des variables étudiées.

La méthode introduite au III.1 sera dénommée *méthode ROF* (pour Regularized Optimal Fingerprint) dans la suite de ce manuscrit.

III.1 Adaptation of the optimal fingerprint method for climate change detection using a well-conditioned covariance matrix estimate

Ribes, A., Azaïs, J.-M., Planton, S.
Article accepté par *Climate Dynamics*

Résumé

La méthode des « empreintes digitales optimales », couramment utilisée dans les études de détection et d'attribution, nécessite de connaître, ou, en pratique, d'estimer la matrice de covariance de la variabilité interne du climat.

Dans ce travail, une nouvelle adaptation de la méthode des « empreintes digitales optimales » est présentée. L'objectif principal est de rendre possible l'utilisation d'une matrice de covariance estimée sur des jeux de données observées, dans lesquels le nombre d'années utilisées pour estimer la covariance est du même ordre que le nombre de séries observées. Notre adaptation repose sur l'utilisation d'un estimateur régularisé de la matrice de covariance, qui est bien conditionné, et asymptotiquement plus précis, au sens de l'erreur quadratique moyenne. Nous montrons que cette méthode est plus puissante que la simple « empreinte digitale du signal supposé », et que l'utilisation d'une pseudo-inverse tronquée de la matrice de covariance empirique, souvent employée. La construction du test de détection est complétée par l'utilisation d'une méthode de bootstrap, particulièrement adaptée pour estimer la variabilité climatique interne à partir d'observations réelles.

Dans le but de démontrer l'efficacité de l'algorithme de détection sur des données climatiques, la méthode présentée est d'abord appliquée à des pseudo-observations issues d'un scénario régional transitoire de changement climatique, couvrant la période 1960-2009. Elle est ensuite utilisée pour réaliser une étude de détection formelle des changements climatiques en France, et ce en étudiant des séries homogénéisées de températures observées depuis 1900. Dans ce cas, l'estimation de la matrice de covariance est basée sur une partie des données observées. Cette nouvelle approche permet de confirmer et d'étendre des résultats obtenus précédemment quant à la détection des changements climatiques anthropiques sur le pays.

Abstract

The “optimal fingerprint” method, usually used for detection and attribution studies, requires to know, or, in practice, to estimate the covariance matrix of the internal climate variability.

In this work, a new adaptation of the “optimal fingerprints” method is presented. The main goal is to allow the use of a covariance matrix estimate based on an observation dataset in which the number of years used for covariance estimation is close to the number of observed time series. Our adaptation is based on the use of a regularized estimate of the covariance matrix, that is well-conditioned, and asymptotically more precise, in the sense of the mean square error. This method is shown to be more powerful than the basic “guess pattern fingerprint”, and than the classical use of a pseudo-inverted truncation of the empirical covariance matrix. The construction of the detection test is achieved by using a bootstrap technique particularly well-suited to estimate the internal climate variability in real world observations.

In order to validate the efficiency of the detection algorithm with climate data, the methodology presented here is first applied with pseudo-observations derived from transient regional climate change scenarios covering the 1960-2009 period. It is then used to perform a formal detection study of climate change over France, analyzing temperature homogenized observed series from 1900 to 2006. In this case, the estimation of the covariance matrix is only based on a part

of the observation dataset. This new approach allows the confirmation and extension of previous results regarding the detection of an anthropogenic climate change signal over the country.

III.1.1 Introduction

According to the IPCC third assessment report (Houghton, 2001), “detection is the process of demonstrating that an observed change is significantly different (in a statistical sense) than can be explained by natural internal variability”. As a consequence of this definition, detection is mainly a statistical issue. A first methodology for the detection of a model-predicted signal in observational data has been proposed by Hasselmann (1979, 1993). This method, commonly referred to as the “optimal fingerprint” method, is based on a maximization of the signal to noise ratio, with a classical approach of statistics.

The “optimal fingerprint” method was first applied to climate data to detect a signal of change in the global surface temperature by (Hegerl et al., 1996), and subsequently to other parameters, such as the free atmosphere temperature and oceanic data sets (Barnett et al., 2001 ; Tett et al., 2002). The issue of the scale on which the climate change signal can be detected has also been investigated (Stott et Tett, 1998 ; Zwiers et Zhang, 2003), and there have been some successful detection studies at a regional scale. (Stott, 2003).

The main difficulty when using the “optimal fingerprint” is that it requires to know with a good accuracy the expected direction of climate change and the covariance matrix associated with the internal climate variability of the climate vector used. This is particularly challenging when the detection is applied at the sub-regional scale (Spagnoli et al., 2002).

On the one hand, the expected signal of climate change is classically taken from climate simulations using either General Circulation Models (GCMs) or Regional Climate Models (RCMs) according to the scale of the analysis. Although various sources of uncertainties are associated to this “guess-pattern”, detection studies usually assume that this direction of change is known.

On the other hand, the covariance matrix of the observations (namely the “covariance matrix” associated to the internal variability) is never known exactly, and has to be estimated. When studying the climate, the estimation of this covariance matrix C can be based directly on observations, as in (Spagnoli et al., 2002), or on pseudo-observations generated by climate model simulations without external forcing, as in Hegerl et al. (1996, 1997), and many other detection-attribution studies since. The choice of pseudo-observations can be justified by several reasons. Firstly, the matrix C denotes the only internal climate variability, whereas observations may include a part of natural variability, due to changes in natural forcings like solar radiation or volcanic aerosols, and a part of externally forced variability, notably due to human induced greenhouse effect. Secondly, the number of available years of observation is generally limited to a hundred or less, deteriorating the estimation.

The main difficulty when estimating C using pseudo-observations is to quantify the errors and uncertainties due to model representation. The sub-regional detection case is even more problematic than the detection at continental scales due to limited available long-term simulations of unforced climate variability with RCMs. To avoid this difficulty, in this study, the use of observations to estimate C is preferred. The difficulty in distinguishing forced and internal variability can be overcome by noting that the use of real observations yields an overestimation of the internal variability from the total variability. This overestimation is conservative for the statistical tests performed. The lack of observational years remains the main weakness, and this point is precisely dealt with by the methodological development proposed here. The new “optimal fingerprint” adaptation we introduce here allows us to perform a relatively efficient detection test in the unfavorable case where the length in years of the observed series used for the estimation of C , n , is of the same order as the number of series p . This allows the undertaking of a detection study without using pseudo-observations for the estimation of the internal variability.

Another key difficulty for applying the “optimal fingerprint” method, is to compute the inverse of the matrix C . The classical adaptation of the “optimal fingerprint” computes an estimate of the covariance C at first, and then takes into account a pseudo-inverted truncation of this estimate. This is a way to decrease the errors involved in the estimation procedure. These errors may be dramatic when taking the inverse of the matrix. However, such a procedure requires the use of a truncation parameter, the value of which is difficult to choose.

The main contribution of this paper is to revisit the “optimal fingerprint” method, and to propose an adaptation of this method that yields a test procedure avoiding the use of a pseudo-inverted truncation of a C estimate (Section III.1.2.3). This procedure is shown to be efficient in the sense that it is more powerful than the classical adaptation of the “optimal fingerprint”, and than a relatively simple test named “guess-pattern fingerprint” also introduced by (Hegerl et al., 1996). This paper also discusses the choice of the parameter truncation of the classical adaptation, focusing on the efficiency of the corresponding test.

The hypothesis and methods used in this study are introduced in the next section. Section III.1.3 presents a comparison of these different methods, especially demonstrating why the new method may be preferred. Section III.1.4 then provides some illustrations of the new method, where the estimation of C is based on observations. We conclude in the last section.

III.1.2 Presentation of the methods

III.1.2.1 Optimal climate change detection

III.1.2.1.1 Detection framework

We start by introducing some basic notations and hypothesis, following (Hasselmann, 1993). The observed climate state will be represented by a p -dimensional vector ψ , each coordinate representing one observational station. Within the probabilistic framework used, ψ is considered as a random vector, taking one value each year, typically the annual or seasonal average of one climatic parameter.

The assumption is made that, in a climate change context, the observed climate vector may be decomposed such as :

$$\psi = \psi^s + \tilde{\psi}, \quad (\text{III.2})$$

where ψ^s denotes the climate change signal, and $\tilde{\psi}$ denotes an internal-variability realization. It is also assumed that $\tilde{\psi}$ is centered, that is to say that :

$$E(\tilde{\psi}) = 0, \quad (\text{III.3})$$

denoting by E the mathematical expectation. This is virtually the case by removing the mean. Note that the first term on the right hand side of (III.2) is a consequence of external forcing, and it is not random. This decomposition assumes in particular that the internal variability is the same with or without climate change.

Furthermore, a second assumption is made concerning the first term of the decomposition with :

$$\psi^s = \mu g, \quad (\text{III.4})$$

where μ denotes a real amplitude factor, and g is the expected p -dimensional climate change vector, taken from climate model simulations, called “guess-pattern”. In practice, g corresponds to the response of the earth-system to an external forcing, which is generally, in the case of climate change detection, the anthropogenic climate change. Moreover, g is assumed to be known but is, as above mentioned, derived from an ensemble of climate model simulations.

With these notations, a detection study consists in applying a statistical test to the "null" hypothesis $H_0 : \mu = 0$ against the alternative hypothesis $H_1 : \mu > 0$. These hypothesis can be rewritten $H_0 : E(\psi) = 0$ and $H_1 : E(\psi) = \mu g$, with $\mu > 0$.

Note that this formulation and this type of statistical test only deal with the climate expectation, assuming that the noise structure is invariant. The study of possible changes on the variability could be investigated, but with a different approach.

As mentioned in the introduction, the matrix C , namely the covariance matrix of ψ due to internal climate variability, is a key parameter of the optimal climate change detection formalism. It will be seen that the "optimal fingerprint" method is derived while assuming that this matrix is known (Section III.1.2.1.2). In practice, this is not the case, and C has to be estimated. Therefore, we will assume that n years $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ are available for estimating C , and another year, denoted ψ_{n+1} , will be tested for the climate change hypothesis. Note that for clarity, the theoretical part of the study will be presented with only one tested observation ψ_{n+1} , although in practice, the detection procedure can be applied to several (see Section III.1.4).

Some assumptions are made about the data $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, that can be either observed or taken from a control run. On the one hand, they are assumed to be uncontaminated by external forcings. If these values are observed, this condition is not satisfied, but the detection will be more conservative, as stated before. On the other hand, these data are assumed to have a covariance C , that is to say the same covariance matrix than the tested observation ψ_{n+1} . This assumption can be discussed in the case of pseudo-observations taken from a climate model control run. $\tilde{\psi}$ being the random term of covariance C due to internal climate variability in (III.2), both assumptions can be summarized by writing :

$$\psi_i = \tilde{\psi}_i, \quad \text{for } 1 \leq i \leq n. \quad (\text{III.5})$$

III.1.2.1.2 The optimal fingerprint

In order to introduce the optimal fingerprint, the covariance matrix C of the internal climate variability component $\tilde{\psi}$ is temporarily assumed to be known. $\tilde{\psi}$ being the only random component of ψ , C also can be seen as the covariance of ψ . Note that C being known, the data $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ are not used in this section III.1.2.1.2.

The fingerprint approach consists in studying the set of the linear detection variables, to determine the best one, according to the signal to noise ratio. We introduce a family of "linear detection variables" d_f with :

$$d_f = \langle \psi_{n+1}, f \rangle, \quad (\text{III.6})$$

where f is an unspecified p -dimensional vector, and $\langle, \rangle$ is the symbol for the standard p -dimensional euclidean scalar product.

The use of the variable d_f naturally leads to a test T_f , whose rejection region is

$$W_f = \left\{ \psi_{n+1}, d_f = \langle \psi_{n+1}, f \rangle \geq d_f^{(\alpha)} \right\}, \quad (\text{III.7})$$

considering a α -level test, and denoting by $d_f^{(\alpha)}$ the $(1 - \alpha)$ -quantile of d_f under H_0 .

One of the main result of (Hasselmann, 1993) is to show that the d_f maximizing the signal-to-noise ratio is $d_{C^{-1}g}$. To use the optimal fingerprint method then leads to use the test $T_{C^{-1}g}$, that is optimal according to the signal-to-noise ratio. In the following, f_o will denote the optimal fingerprint vector :

$$f_o = C^{-1}g, \quad (\text{III.8})$$

used in this test T_{f_o} .

Some others interpretations have been proposed for this result. At first, it has been shown that the "optimal fingerprint" can be seen as a regression technique (Allen et Tett, 1999 ; Allen

et Stott, 2003). With this formalism, C^{-1} can be seen as an optimal metric for the regression. This point of view has also been developed in attribution studies by the same authors.

Focusing on a statistical testing theory, and using an assumption of Gaussian distribution for ψ_{n+1} , that is quite usual, other interpretations of this result can be useful. It can be shown first that, among the T_f family, T_{f_o} is the better test, in the sense that it is the most powerful. The “optimal fingerprint” detection test can also be interpreted as the likelihood ratio test (Hasselmann, 1997).

III.1.2.2 Classical adaptation of the optimal fingerprint

In practice, in the case of climate studies, the covariance matrix C is not known. In such a case, and assuming that data are available for estimating C , it is much more difficult to find one optimal test. Consequently, authors have search for an approximation of the optimal fingerprint test.

A natural idea, to adapt the equation (III.8) when C is not known might be to use the empirical covariance matrix deduced from the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ sample :

$$\hat{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_i \psi_i'. \quad (\text{III.9})$$

However, substituting directly the estimate $\hat{C}$ in (III.8) yield to a rather bad test. This test even is not defined when $p > n$, because $\hat{C}$ is not invertible. For this reason, the more frequently used adaptation of optimal fingerprints consists of applying a Moore-Penrose pseudo-inversion to a truncation of $\hat{C}$.

This adaptation can be introduced as follows. Let Σ be a $p \times p$ symmetric positive matrix. Σ is diagonalisable in an orthonormal basis, that can be written $\Sigma = P' \Lambda P$, where P denotes the changing basis matrix, and Λ the diagonal matrix of Σ -eigenvalues : $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$, denoting by k the rank of Σ . The Moore-Penrose pseudo-inverse of the q -truncation of Σ , what will be denoted by Σ_q^+ , can be defined, for $q \leq k$:

$$\Sigma_q^+ = P' \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_q}, 0, \dots, 0\right) P, \quad (\text{III.10})$$

where $\text{diag}(v)$ denotes the diagonal matrix of diagonal v . Note that Σ_k^+ is simply the Moore-Penrose pseudo-inverse of Σ , without truncation.

With this definition, using a pseudo-inverted truncation of $\hat{C}$ is equivalent to making a projection on the q first eigenvectors of $\hat{C}$ (EOF) and optimizing the fingerprint in the reduced space of dimension q . Above all, this solution can be adopted to prevent estimation problems which can occur for the smallest eigenvalues of the empirical covariance. Indeed, the use of empirical covariance introduces a bias in the estimation of eigenvalues : the biggest eigenvalues are over-estimated, whereas the smallest ones are underestimated.

The pseudo-inverted truncation of $\hat{C}$, that will be noted $\hat{C}_q^+$, provides a possible adaptation of the optimal fingerprint test T_{f_o} , that is $T_{\hat{C}_q^+ g}$. This test is based on the detection variable $d_{\hat{C}_q^+ g}$:

$$d_{\hat{C}_q^+ g} = \langle \psi_{n+1}, \hat{C}_q^+ g \rangle. \quad (\text{III.11})$$

In order to use the test $T_{\hat{C}_q^+ g}$, some methods have been developed in the literature to select q and apply a test procedure, in particular in Hegerl et al., 1996, and Allen et Tett, 1999. However, the choice is generally not discussed in terms of optimality. We try to focus on this point in Section III.1.3.4.

Another test, T_g , usually referred to as the Guess Pattern Fingerprint (GPF) test, and introduced by (Hegerl et al., 1996), will be used for comparison. Although it is not exactly an adaptation of T_{f_o} , it is worth using it as a basic reference. As the notation T_g suggests it, this test is based on the variable

$$d_g = \langle \psi_{n+1}, g \rangle. \quad (\text{III.12})$$

It is then a quite intuitive test, because a potential change of the expectation in the g direction is searched by making a projection on g . It also can be seen as the optimal test when $C = I_p$ (I_p being the $p \times p$ identity matrix).

III.1.2.3 A new method : the Regularized Optimal Fingerprint

We introduce here a new adaptation of the optimal fingerprints, based on the use of the Ledoit regularized estimate $\hat{C}_I$, introduced in Ledoit et Wolf (2004), and technically presented in the Appendix III.1.6.A. Using $\hat{C}_I$ for estimating C , the optimal fingerprint $C^{-1}g$ can be approximated by $\hat{C}_I^{-1}g$, hereafter referred to as the ROF (Regularized Optimal Fingerprints). A corresponding test $T_{\hat{C}_I^{-1}g}$ (ROF test) can be proposed, based on the detection variable :

$$d_{\hat{C}_I^{-1}g} = \langle \psi_{n+1}, \hat{C}_I^{-1}g \rangle. \quad (\text{III.13})$$

The basic idea of this original adaptation is to use a regularization technique, by searching for a suitable covariance matrix estimate of the form :

$$\gamma \hat{C} + \rho I_p, \quad (\text{III.14})$$

where I_p is the $p \times p$ identity matrix, γ and ρ being real numbers. Several arguments can justify the use of this kind of estimate.

Firstly, the use of such a regularization technique has some simple and qualitative justifications. In a “large dimension” framework, that is when n and p are close, the weakest eigenvalues of C are both strongly underestimated in $\hat{C}$, and very affected by the addition of the term ρI_p . This term, by increasing these estimated eigenvalues, decreases their weight after inversion and then in the detection algorithm. That is why this type of method is called “regularization”, and provides a more stable algorithm. On the contrary, using a pseudo-inverted truncation of $\hat{C}$, by setting to 0 the dominating terms of C^{-1} , cannot provide a suitable estimate of C^{-1} . Although $\hat{C}$ or its q -truncation $\hat{C}_q$, give generally an acceptable approximation of C , the inverted or pseudo-inverted matrices C^{-1} , $\hat{C}^{-1}$, and $\hat{C}_q^+$ are usually very different, as are the directions $C^{-1}g$, $\hat{C}^{-1}g$ and $\hat{C}_q^+g$, that may be used for detection.

Secondly, the use of a covariance estimate of the form (III.14) can be interpreted as a way to make a balance between the detection variables $d_{\hat{C}^{-1}g}$ and d_g .

Thirdly, this method can be justified in a regression framework. The links between the optimal fingerprint method and a regression of the observation vector ψ under the “guess-pattern” g has already been established (Allen et Tett, 1999 ; Allen et Stott, 2003). The basic idea is to estimate by $\hat{\mu}$ the amplitude coefficient μ such as $E(\psi) = \mu g$, and to compute a confidence interval for μ . When 0 doesn’t belong to this confidence interval, the hypothesis $H_0 : \mu = 0$ is rejected. Within this framework, the addition of the ρI_p term to the empirical estimate exactly amounts to use a ridge-regression technique, well-known in statistics. The more classical justification of it is that it allows the decrease of the root mean square error of the estimate. The use of a ridge regression is also justified in a Bayesian framework.

The main difficulty in using this regularization technique is to find relevant estimators of the parameters γ and ρ . Various methods might be considered. The method selected in this paper is taken from (Ledoit et Wolf, 2004). The main concepts are reviewed in the Appendix III.1.6.A,

and lead to the Ledoit regularized estimate $\hat{C}_I$. Basically, the choice of this estimate can be justified by the better properties of $\hat{C}_I$ as an estimator of C . The corresponding estimate $\hat{C}_I^{-1}$ of C^{-1} has also better properties than $\hat{C}_q^+$ (see above).

III.1.3 Evaluating the methods

III.1.3.1 What kind of evaluation ?

The final goal of this paper is to adapt the “optimal fingerprint” test T_{f_o} , for leading to an “efficient” test procedure when the covariance matrix C is not assumed to be known. As mentioned previously, in such a case, it is much more difficult to find one optimal test, and we will only compare the three adaptations of Section III.1.2 : $T_{\hat{C}_q^+g}$, $T_{\hat{C}_I^{-1}g}$, and T_g .

Some assumptions are made for this part of the study. First, the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ are assumed to be independent, centered, and normally distributed, with mean 0 and covariance C . Second, ψ_{n+1} is assumed to be independent of the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, and to have a $N(\mu g, C)$ distribution, where the vector g is known, unlike the coefficient μ . As in Section III.1.2.1.1, this coefficient μ is the tested parameter. Third, we assume that n and p are of the same order, that is an unfavorable case in which few data are available for estimating C (relatively to the size of C). This framework is called “large dimension” or “general asymptotics”, when n and p go to the infinity together, as in (Ledoit et Wolf, 2004). If one wants to estimate the covariance matrix C with observations, this is a rather reasonable assumption.

While searching for an “efficient” method, we will focus first on the power of the statistical tests. Indeed, for a statistical test of a hypothesis H_0 against a defined alternative hypothesis H_1 , the power is the criterion that allows to measure the efficiency of the test. Moreover, it has been shown that the T_{f_o} was optimal among the T_f family in the sense that it is the most powerful. So we will search for a good approximation by searching for the most powerful adaptation.

An important difficulty, when C is assumed to be unknown, is to control the level of the proposed tests. Indeed, the level being the probability to reject H_0 whereas H_0 is true, the control of the level requires to know the distribution of the test variable d under H_0 . In our case, the distribution of d under H_0 depends on C and as a consequence is difficult to compute.

This can be illustrated as follows. Using the normality assumption for the tested observation ψ_{n+1} , the distribution of the optimal fingerprint test variable d_{f_o} can be written, under H_0 :

$$d_{f_o} = \langle \psi_{n+1}, f_o \rangle \sim_{H_0} N(0, \sqrt{f_o' C f_o}). \quad (\text{III.15})$$

The covariance C is used twice in (III.15) : first, for computing the optimal fingerprint f_o , and second, for determining the threshold and the p -value of the test.

In our case, the distribution under H_0 has to be computed or approximated using only the observations $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, as well as the estimate of the optimal fingerprint vector f_o . Making errors while computing this distribution can lead to a test which hasn't a nominal level, that is to say for which the probability to wrongly reject H_0 is smaller than the expected value (the conservative test) or greater than the expected value (the permissive test). This directly impacts the power of the tests. For example, the power of a permissive test is artificially increased, the threshold being different from what it should be. In particular, tests that do not have a nominal level cannot be compared in terms of power, and are usually dangerous to use (unless they are known to be conservative).

Finally, the ability of a test to provide a correct p -value and to have a nominal level needs to be evaluated too. Note that this feature will be called accuracy of the test.

In the following we will separate the study into three steps. Firstly, we will search for an efficient estimation of the optimal fingerprint f_o . This will be done by comparing the power of the test in the ideal case where they have a nominal level. Secondly, we will evaluate the

accuracy of the ROF method. For this purpose, a bootstrap is performed in order to estimate the H_0 distribution, and then it is verified that this procedure leads to an exact test, that is to say a test having a nominal level. Thirdly, we will study specifically some aspects of the classical adaptation of the optimal fingerprints $T_{\hat{C}_q^+g}$, and explain why this test is not used in Section III.1.4.

III.1.3.2 Comparing the efficiency

The goal of this section is to compare the efficiency of the three tests presented : $T_{\hat{C}_q^+g}$, $T_{\hat{C}_I^{-1}g}$, and T_g .

This comparison has been mainly carried out by performing simulations, in order to compute empirically the power of these tests. As mentioned in III.1.3.1, the power is the natural measure of efficiency, as long as the compared tests have a nominal level. Therefore, in those simulations, the covariance matrix C is still assumed to be known, but only for computing the distribution under H_0 (and then, the “correct” threshold and p -value). The optimal fingerprint vector, for its part, is estimated from the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$. Note that all the simulations were performed in the case $n = p$, that clearly increases the errors due to the estimation of C . The only two parameters used for those simulations are the “true” covariance matrix C and the “true” vector g . The results may depend on the chosen values.

Firstly, some simulations have been performed, using values of C and g arbitrarily chosen. This type of simulation shows that for many cases, the power of $T_{\hat{C}_q^+g}$ is weaker than the T_g one, whatever the value of q (not shown). The power of T_g , for its part, is weaker than the one of $T_{\hat{C}_I^{-1}g}$, unless C and I_p are very close.

Secondly, in order to evaluate the tests’ properties when dealing with climate, simulations have been performed using values of C and g more consistent with the real cases. Concerning g , we used the expected climate change vector g taken from a climate model, as in Section III.1.4. This allows to compute the power for the hypothesis H_1 really tested. The choice of a “true” covariance matrix C close to the real one is more difficult. We then compute the simulations for three different plausible values, deduced from observed data, that are spatially centered (see Section III.1.4 for details about data and spatial centering). We used the regularized covariance matrix $\hat{C}_I$ (C_1), the empirical covariance matrix $\hat{C}$ (C_2), and a spatial covariance matrix (C_3), with entries of the form :

$$\text{Cov}(t_i, t_j) = \mu e^{-\lambda d(s_i, s_j)}, \quad (\text{III.16})$$

t_i and t_j denoting the observation at the stations s_i and s_j , and d being the distance between the stations s_i and s_j .

Starting from either C_1 , C_2 or C_3 , samples $(\psi_i^*)_{1 \leq i \leq n+1}$ are simulated, assuming that the H_1 hypothesis is true (a positive value is chosen for the coefficient μ). The compared tests T_g , $T_{\hat{C}_I g}$, and $T_{\hat{C}_q^+g}$ are then applied to the sample $(\psi_i^*)_{1 \leq i \leq n+1}$, and the empirical powers are computed.

On the one hand, the first case C_1 must be considered as the most significant, because of two reasons : the Ledoit regularized estimate is more precise, and, in this case, the observed sample $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ is really a typical realization assuming that the Ledoit estimate is the “true” covariance. On the other hand, it is useful to study whether the results remain qualitatively the same, even if the “true” covariance matrix is weakly regular (the two other cases).

The Figure III.1 shows such a comparison for values of g and C taken from a summer daily minimum temperatures dataset covering France. It can be seen that the ROF method is more powerful in all cases ; the GPF method leads sometimes to a power higher than the one of the pseudo-inverted truncation method, depending on the value of q and on the supposed “true” covariance matrix used. The results for other variables (eg daily minimum or maximum temperatures, and different seasons) are qualitatively the same (not shown). Note that equivalent

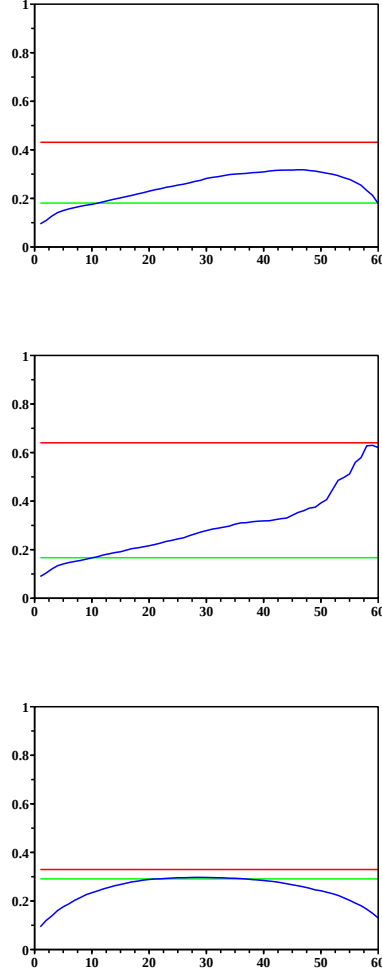


FIG. III.1 – **Power study** : Comparison of the power of the tests T_g (GPF test, green line), $T_{\hat{C}_I g}$ (ROF test, red line), and $T_{\hat{C}_q^+ g}$ (blue curve), as a function of q . Three covariance estimates are used as “true” C : the Ledoit regularized estimate $\hat{C}_I$ (top figure), the empirical estimate (middle figure), and the spatial covariance estimate (bottom figure).

simulations have been performed with a higher value of n , and gave qualitatively the same results. This allows in particular the use of the ROF method even to estimate C from pseudo-observation taken from a control run.

This result provides the main reason to prefer the ROF method to the two other ones. It is rather reinforced by a theoretical power study. Indeed, instead of computing the empirical power of $T_{\hat{C}_q^+ g}$, one can wonder what is the effect of using a pseudo-inverted truncation, by studying the power of $T_{C_q^+ g}$, and comparing it with the power of T_g . The estimation errors due to the estimation of C are then ignored. This theoretical comparison is not detailed for brevity, but it shows that even without estimation errors, $T_{C_q^+ g}$ has not necessarily better properties than T_g , unless $q = p$. It also shows that the power of $T_{C_q^+ g}$ increases with q . This result allows an interpretation of the behavior of the empirical power of $T_{\hat{C}_q^+ g}$. When q is small, the estimation errors don’t matter, and the $T_{\hat{C}_q^+ g}$ power increases with q as in $T_{C_q^+ g}$. When q is large, the estimation errors, which are strongest for the smallest eigenvalues, are dominating and the power of $T_{\hat{C}_q^+ g}$ decreases with q .

III.1.3.3 Bootstrap and accuracy of the ROF method

In this Section, we describe a method for computing the threshold of the test (and more generally the p -value), starting from the sample $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, and we check the accuracy of the resulting test. Note that this task is done only for the ROF test, and we will denote by $\hat{f}_o$ the ROF :

$$\hat{f}_o = \hat{C}_I^{-1} g. \quad (\text{III.17})$$

In order to compute the threshold and the p -value of the test, it is necessary to determine the distribution of the variable $d_{\hat{f}_o}$ under the hypothesis H_0 . This is not a trivial problem. Indeed, only the distribution of $d_{\hat{f}_o}$ conditionally to the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ is known :

$$d_{\hat{f}_o} | (\psi_i)_{1 \leq i \leq n} \sim_{H_0} N(0, \hat{f}_o' C \hat{f}_o). \quad (\text{III.18})$$

Moreover, the covariance C being still unknown, this formula is worthless, and it is necessary to substitute an estimate of the matrix. $\hat{C}_I$ is the main candidate, but two problems have to be taken into account. First, the use of an estimate, instead of the true value, carries some additional errors that lead to a different distribution (a classical example is the Student distribution). Second, the estimate $\hat{C}_I$ is also used in $\hat{f}_o$, and the dependence between both estimates may bias the results. This was pointed out by Allen et Tett (1999), who proposed to split the data into two independent samples.

We here used an alternative strategy, namely a bootstrap procedure, that approximates the distribution of the normalized detection variable :

$$\delta = \frac{d_{\hat{f}_o}}{\sqrt{\hat{f}_o' \hat{C}_I \hat{f}_o}}, \quad (\text{III.19})$$

as it can be made for a Student variable. In this way, the dependence between $\hat{C}_I$ and $\hat{f}_o$ is explicitly taken into account in order to avoid bias. Note that this (unconditioned) distribution only depends on C and g , and will be denoted by $\mathcal{D}_{C,g}$. The basic idea of the bootstrap is to estimate the distribution $\mathcal{D}_{C,g}$ by $\mathcal{D}_{\hat{C}_I,g}$, that can be simulated by Monte-Carlo technique. The details of this computation procedure are given in Appendix III.1.6.B.

Let $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ be the ROF test using this bootstrap procedure for evaluating both threshold and p -value.

A validation step is then necessary to demonstrate the accuracy of $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ and to justify that the use of $\mathcal{D}_{\hat{C}_I,g}$ instead of $\mathcal{D}_{C,g}$ is acceptable for computing the p -value of the test. In fact, there is no absolute reason for justifying this approximation. It has been shown that $\hat{C}_I$ is a relatively good estimate of C , but this is not a conclusive argument.

This validation has been achieved by simulating the whole test procedure, starting from a pseudo sample whose covariance is known. All the details about the implementation of the validation procedure are given in Appendix III.1.6.B. It can be noted that this procedure requires a starting covariance matrix C (similarly to the simulations performed in III.1.3.2), and then focuses on the level of $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$.

The validation has been first applied to some simple starting matrices, and gave the required results : the level of $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ is shown to be close to the nominal value, and its power is still greater than that of T_g . Finally, in order to validate the method for a starting covariance C next to that of the climate vector, this procedure has been applied to the matrix $\hat{C}_I$ estimated from real observations, with the same success.

III.1.3.4 Specific study of the classical approach

Although the power study presented in Section III.1.3.2 could be thought as sufficient an argument to prefer the ROF method, we want here to discuss some characteristics of the classical approach, particularly those due to the choice of the parameter q .

As mentioned while introducing the test $T_{\hat{C}_q^+g}$, the choice of q is a first difficulty when using this approach, and some methods have been proposed to select a value. (Hegerl et al., 1996) chose to study the spatial correlation between the “guess-pattern” g and the fingerprints $f_q = \tilde{C}_q^+g$, where $\tilde{C}$ denotes an estimate of the covariance matrix C carried from a climate model simulation. The dependence of the result on q is mentioned as not changing the result for neighboring values.

(Allen et Tett, 1999), after having presented the optimal fingerprint formalism as regression, and some problem due to the estimation of the covariance matrix, proposed a different treatment. In particular, they proposed to use a consistency test to check whether the estimate provided by some control simulations is consistent with the observed residuals. The values of q for which this consistency hypothesis is significantly rejected are not studied. In this way, a set of values of q is used, and an answer can be given to the detection question depending on the agreement of the results of the different tests computed for each selected q .

In both methods, some values are proposed for q , but the choice is not discussed in terms of optimality. One can wonder whether the power study highlights what could potentially be a good choice of q . We have tried in Section III.1.3.2 to focus on this point, by studying the power of the tests. Fig. III.1 suggests that finding the best value for q is actually a difficult task. In particular, it can be seen by comparing the three graphics that a small difference on the starting covariance matrix used for simulations should lead to a different choice.

After having chosen the value of q , which is a difficult task, the construction of a useful test using the direction $\hat{C}_q^+g$ should require an estimation of the threshold (as in III.1.3.3). But as the empirical estimate of the covariance matrix is not well-conditioned in large dimension, it can be thought that yielding a nominal level test is very difficult. In particular, the threshold estimation would have been more difficult than the threshold estimation used in Section III.1.3.3.

One can also wonder about the q -stability of the results when using the test $T_{\hat{C}_q^+g}$. Are the results actually sensitive to the choice of q ? An important dependence on q could make the interpretation much more difficult, although this wouldn’t be the most conclusive argument to prefer the ROF test.

We have tried to discuss this problem theoretically, focusing first on the tests $T_{C_q^+g}$, and then on the family $T_{\hat{C}_q^+g}$. This part of the study is detailed in Appendix III.1.6.C. It shows that the stability is generally not ensured, even without estimation problems (case $T_{C_q^+g}$).

Another way to discuss this sensitivity may be to look at the discrepancies of the results for several values of the parameter q . We have done such a comparison for two real-case applications studied using the ROF method in Section III.1.4. The results of these comparisons are represented in Figure III.2, and show that the choice of q clearly impacts the results of the test.

However, some care should be taken when interpreting Figure III.2. The p -value is actually the result provided by a statistical test, and is the criterion that allows to reject, or not, the “null” hypothesis. So the evaluation of the discrepancies between several tests should have been done by comparing their p -value. This is quite difficult in our case, because we haven’t proposed a way to compute the correct p -value of the tests $T_{\hat{C}_q^+g}$. Consequently, Figure III.2 represents the time evolution of the normalized detection variable δ introduced in (III.19), for several values of q , and the black dashed line shows what might have been the threshold of the tests using the basic assumption that the H_0 -distribution of δ is a standard normal distribution. Although using this threshold may lead to non exact $T_{\hat{C}_q^+g}$ tests, Figure III.2 gives a qualitative illustration of the sensitivity to the choice of q .

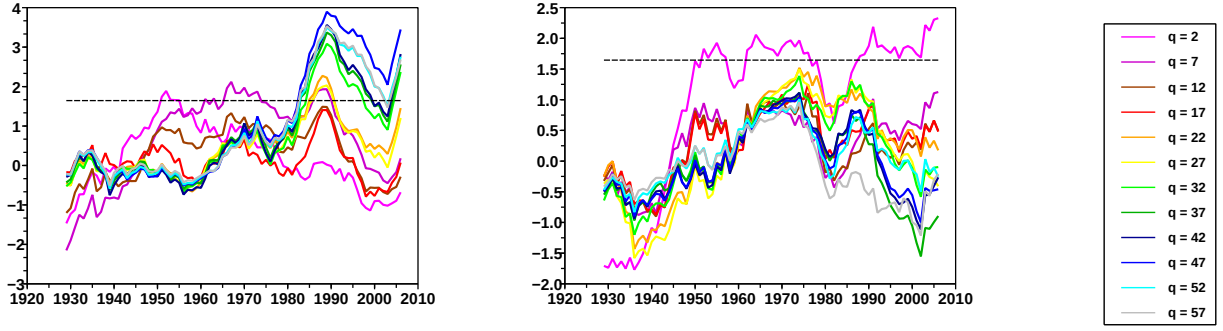


FIG. III.2 – *q*-sensitivity : Comparison of the the time evolution of the normalized detection variable δ using the classical “optimal fingerprint” adaptation $T_{\hat{C}_q^+g}$, for different values of the truncation parameter q . The comparison is done for autumn (on the left) and summer (on the right) daily maximum temperatures, following the procedure described in Section III.1.4. The black dashed line shows an hypothetical threshold assuming that the H_0 -distribution is a standard normal distribution.

In the case of autumn daily maximum temperatures, it can be seen that the results at the end of the period are scattered on both side of the hypothetical threshold. In such a case, it would be difficult to conclude whether the classical approach has detected a change. It would have been even more difficult to compute a p -value, due to these discrepancies. In the case of summer daily maximum temperatures, it can be seen that the sign of the normalized detection variable may depend on the choice q . It can also be noted that some very small values of q may reject the hypothesis H_0 whereas higher values do not.

It can be noted that many detection studies, performed at global or continental scales using many values for the truncation parameter q , haven’t highlighted so large discrepancies. In our case, such a sensitivity may be due to the sub-regional scale of the study (we used a dataset covering France), or to the spatial centering (see Section III.1.4), that removes the main part of the signal.

Finally, the classical approach of optimal fingerprint is difficult to implement in our case : the choice of q can be debated all the more so as it really impacts the results, and the computation of a correct p -value for this test is not guaranteed. This is the reason why we have preferred to use the GPF test instead of this method as reference in the following section, devoted to the application.

III.1.4 Application

III.1.4.1 Data

In order to perform a detection study based on the presented ROF methodology, two types of data are used : observations, and climate simulations for the 21st century.

Concerning the observations, a detection study requires data of high quality, covering a period as long as possible, and with a high spatial density. Such a dataset, covering France, has been produced at Météo France using an adapted penalized log-likelihood procedure (Caussinus et Mestre, 2004). This data covers the 1900-2006 period, with about 60 stations distributed over the country.

Regarding the estimate of the climate change signal (“guess pattern”), a set of eight simulations is averaged over the 2070-2099 period. The simulations are performed with the ARPEGE-Climat regional climate model with variable horizontal resolution (Gibelin et Déqué, 2003). This model is forced with sea surface temperatures and ice field extensions taken from climate change

simulations, corresponding to different IPCC scenarios (A2 and B2) and to different global coupled atmosphere ocean general circulation models. In order to represent the present climate, a set of three simulations performed with the same model over the 1960-1999 period, is averaged. The guess-pattern is then deduced as the difference between temperatures averaged over the 2070-2099 period, and the ones averaged over the 1960-1999 period.

Among the set of future climate simulations, two simulations are transient scenarios covering the 1960-2099 period (one A2 scenario and one B2 scenario). These two simulations will be used as an illustration of the ROF method presented here.

III.1.4.2 Implementation of the method

The precise implementation of the method is described here, starting from the two main variables used : the observations dataset Ψ , and the guess-pattern g .

The set Ψ can be seen as a sample, or a $N \times p$ matrix $(\psi_{t,s})$, where t represents the time (usually one year), and s the space (one station). This set has to be divided into two subsets Ψ^L and Ψ^T , that are respectively the learning sample, and the tested sample. The first one, Ψ^L , is dedicated to estimating the covariance matrix, and is usually constituted of the N_L first years of Ψ . The second one, Ψ^T groups the data that we want to test. The choice of the separating year between Ψ^T and Ψ^L is quite arbitrary, and allows to partially modulate the size of these subsets. Some care has to be taken when using the ROF algorithm when the number of years in Ψ^L is rather small. When presenting the method in Section III.1.2.3, the subsets Ψ^L and Ψ^T were, respectively, the family $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, and the one-year vector (ψ_{n+1}) . In the applications presented, the subset Ψ^T will usually contain more than one year, in particular for studying the time evolution of the detection variable. Note that strictly speaking, those two sets Ψ^L and Ψ^T could have been taken from different datasets, for example for testing observations, using a covariance matrix estimate deduced from a climate model run.

The vector g , taken from a climate model scenario, has to be represented on the same points as the observations, that are the p observation stations. This operation can be conducted with a basic interpolation procedure.

However, the p -dimensional space thus used for representing Ψ and g , could be inappropriate for the detection, for example due to a very irregular spatial distribution of the observation stations. In order to improve the regularity of this spatial distribution, a hierarchical clustering algorithm is applied to the observation stations (see for example Mardia et al., 1979). Such a procedure allows to reduce the spatial dimension from p to p' , with $p' \leq p$. The reduced dimension p' is then chosen to provide an exact test, and maximize the power. Note that if p is close to n , or smaller, $p' = p$ is often selected. This confirms the good behavior of the test $\mathbb{T}_{\hat{C}_T^{-1}g}$ in large dimension, as mentioned in III.1.3. In contrast, if the spatial dimension p is higher than the size of the learning sample N_L , a reduction of the dimension could be required for ensuring the accuracy of the ROF test.

An important characteristic of this study is its focus on the regional scale and, as a consequence, on the spatial distribution of the studied variables. Indeed, detecting a change on the variable ψ can be the consequence of an uniform global change, without any regional specificity. To avoid the detection of such a global signal, each observation ψ is decomposed into the sum of a spatial mean $\bar{\psi}$ and a centered variable $\tilde{\psi}$; and it is chosen to filter out the detection variable part due to the evolution of the spatial mean $\bar{\psi}$, basing the detection only on $\tilde{\psi}$.

A preliminary temporal treatment is usually applied in order to deal with climate. Indeed, as the notations of the previous section suggest, a detection test can be applied to the climatic observations of a unique year. But rejecting the hypothesis H_0 for one year doesn't allow to conclude on climate change. Climate denoting the characteristics of the weather on a long time period, the detection test must be applied to a more representative variable.

The first detection studies were based on linear trends over 15, 20 or 30-years periods, with some preferences for the last one (Hegerl et al., 1996). Here the use of moving averages has been preferred, as these are less sensitive to the interannual variability. The tested vectors used are then the difference between a moving average of N_T years (N_T can be chosen), and a reference average, that is the average under the learning period (the length of which is N_L). Note that this reference average is independent of the covariance estimate $\hat{C}_I$. Thus, if the N_T years averaged are taken in Ψ^T , those tested vectors are independent of $\hat{C}_I$.

Both transformations of spatial centering and temporal treatment can be summarized by the following formulas, denoting by $(\psi_{t,s})$ the original variables, and $(\phi_{t,s})$ the transformed ones :

$$\psi_{t,.} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \psi_{t,s}, \quad (\text{III.20})$$

$$\phi_{t,s} = \frac{1}{N_T} \sum_{h=1}^{N_T} (\psi_{t+h,s} - \psi_{t+h,.}) - \frac{1}{N_L} \sum_{h=1}^{N_L} (\psi_{h,s} - \psi_{h,.}). \quad (\text{III.21})$$

Thus, the transformed vectors $\phi_t = (\phi_{t,1}, \dots, \phi_{t,s}, \dots, \phi_{t,p})$ are deduced from the original vectors $\psi_t = (\psi_{t,1}, \dots, \psi_{t,s}, \dots, \psi_{t,p})$ via a projection and an average operations.

Consequently, the covariance matrix of the vectors ϕ_t can be deduced from the original covariance matrix of the vectors ψ_t using some simple formulas. The hypothesis of independence between ψ_t and ψ_{t+1} is used here. It is important to note that this hypothesis only impacts on the threshold computation, and not on the temporal evolution of the detection variable. Furthermore, if the dependence is weak, the impact on the threshold will be weak. Finally, we compute the covariance matrix of the (ψ_t) first, then we deduce the one of the (ϕ_t) , and we carry out the test.

III.1.4.3 Results : ideal case

In order to illustrate the presented ROF methodology, and to highlight its efficiency, the method is first applied to pseudo-observations derived from transient regional climate change B2 scenarios covering the 1960-2099 period. This is a kind of idealized experiment, because of two reasons. First, it allows to be placed under the hypothesis H_1 , the existence of a climate change being sure. Second, it avoids the difficulties for representing the climate change vector g . Indeed, the g used can be taken from the tested simulation itself. On the contrary, to apply the algorithm to the observations with an inexact g , can impact the efficiency of the test. It has been verified that the use of a guess-pattern g taken from a different simulation performed with the same model doesn't have an impact on the results presented here, including using an A2 scenario (not shown).

The application to model data allows to verify that the power of the test proposed is higher from a quasi-experimental point of view. Indeed, a more powerful test will reject H_0 for a smaller amplitude coefficient μ , or equivalently, earlier during the 21st century.

This section is focused on one single temperature variable that is the summer daily minimum near surface temperature. Note that this variable has been chosen arbitrarily among the eight ones studied in the next section ; but this choice doesn't impact the results, which are virtually the same ones for the other variables.

For this first application, the learning sample is chosen to be the first 40 years of the scenarios ($N_L = 40$), that is to say the 1960-1999 period. In a transient scenario, this period is clearly contaminated by the influence of climate change. But as mentioned previously, taking into account some climate change effect only leads to a more conservative test. The choice of 40 years for the covariance estimation is more or less arbitrary, but doesn't impact the results.

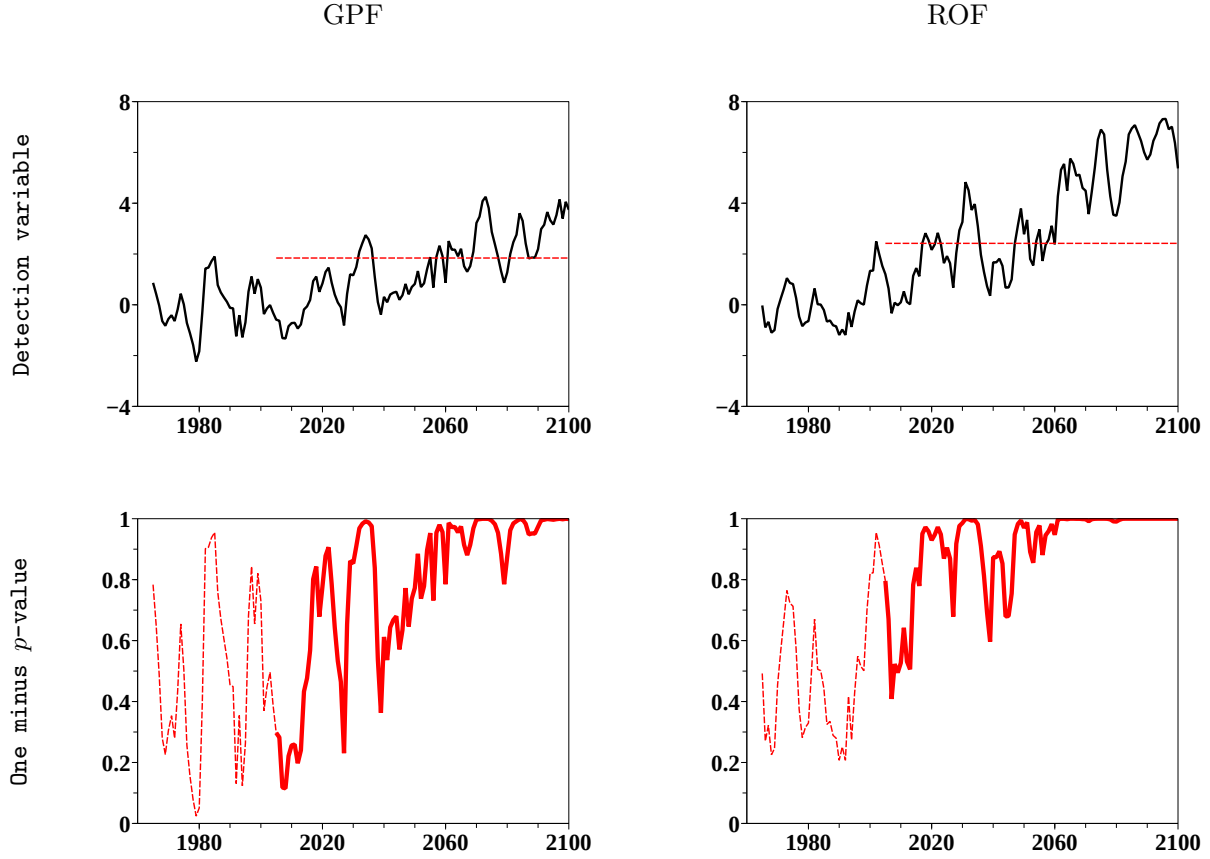


FIG. III.3 – **Summer minimum temperatures in a transient B2 scenario** : Comparison between the GPF test procedure and the ROF one for summer minimum temperatures taken from a transient B2 scenario from 1960 to 2099. The comparison is based on 5-years moving averages ($N_T = 5$), spatially centered, on 50 pseudo-stations over France. The top figures show the time evolution of the normalized detection variables (black curve), that is compared with the 95% confidence threshold (red dashed line), when it makes sense. The bottom figures represents the time evolution of the statistical significance (one minus p -value) of each test. The corresponding curves are dashed over the learning period.

During this learning period, the covariance estimate $\hat{C}_I$ and the values taken by the tested climate vector aren't independent. As a consequence, the H_0 -distribution of the detection variable is impacted, the threshold and the statistical significance have a different meaning and no conclusions can be drawn with respect to the detection issue. For this reason, the detection threshold will be represented only outside the learning period, and we take these cautions into account by representing the statistical significance with a dashed line (see Fig. III.3).

In order to perform a statistical test as close as possible to the one performed in the next section, the spatial dimension of model grid, presenting $p = 220$ points over France, has been reduced to $p' = 50$ (that is approximately the value used in the application to observation). Note however that the ROF has been shown to be efficient when p and n are of the same order, but the case “ p large relatively to n ” is not so favorable. In particular, it is possible that the ROF test is not as accurate in such a case. Consequently, a reduction of the spatial dimension is needed in any case, due to the size of the learning sample chosen ($N_L = 40$).

It can be seen (Fig. III.3) that the efficiency of the ROF technique is greater, because the detection variable exceeds the threshold more frequently, more rapidly. Note that in order to compare the efficiency of the tests, the date on which the detection variable goes beyond the

threshold for the first time isn't a good criterion. In particular, the threshold can be exceeded even under the hypothesis H_0 .

When the signal becomes strong enough three things happen : the statistical significance cannot go down to too small values, the detection variable "frequently" exceeds the threshold, and some values of this variable are well above the threshold. Looking at these different criterion on the case represented confirms the first impression, which is that the ROF test procedure is more efficient than the GPF one. Others variables (changing the season or studying daily maximum temperatures) give similar results.

It can be noted that for this experimental demonstration, the length N_T of the moving averages used (5 years) has been chosen arbitrarily, in order to highlight the differences between both tests. For example, the signal being strong over the 21st century, the use of 30-years moving averages over this period leads to a very significant detection, whatever the test used.

III.1.4.4 Results : observation dataset

In the case of observations, eight detection studies are performed, corresponding to the minimum and maximum near-surface temperatures, for each one of the four seasons. All studies are based on 30-year moving averages, spatial centered observations ($N_T = 30$). The learning sample consists of first 70 years, from 1900 to 1969 ($N_L = 70$). The choice of the size of the learning sample is quite arbitrary, because there is no evidence that would allow us to highlight a period less contaminated by climate change. But this choice is conservative just as in the application to the scenarios. The ROF method is applied in each case.

Some results are represented in Fig. III.4 and III.5. The same conventions as those of the previous section are used, for representing the 95% confidence level threshold, and the statistical significance. Over the learning period, that is prior to the year 2000 in this case, great care must be taken when interpreting the results. Indeed, the dependencies between the used ψ_{n+1} and $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ impact the distribution of the detection variable, and the statistical significance represented by the dashed line isn't exact.

Firstly, the strongest signal is observed on summer minimum temperatures. The p-value yields for the 1977-2006 period (that is compared with the mean over 1900-1969) a value smaller than 10^{-3} . This result confirms and reinforces the findings of (Spagnoli et al., 2002).

Secondly, two other variables present significant changes, although in a less significant way. The first one of these is the maximum autumn temperature, for which the final value of the normalized detection variable goes just beyond the threshold. Some higher values are observed, over more than one decade, for the last years of the learning period (these years being very slightly dependent on the observations used for covariance estimation). We then conclude that the detection is positive in this case. The second variable that present significant change is the winter maximum temperature. The last observed value of the associated normalized detection variable is smaller than the threshold considered, but stays quite high. Moreover, significant values are observed some years before. For example, the statistical significance of the test yields to 97% in 2001 (testing the 1972-2001 average).

These two success, beyond illustrating the possibilities of the method, constitutes advances with regards to detecting climate change over France, relatively to previous studies (Spagnoli et al., 2002, Planton et al., 2005).

Thirdly, in the case of summer daily maximum temperatures, and for the other variables studied, the detection algorithm failed to detect a change. We do not represent the whole time evolution of the detection variable for each studied case, but the p -value provided by the ROF test at the end of the period are given in Table III.1. It can be seen that autumn and spring daily minimum temperatures show interesting behaviour. In both cases, especially for the second one,

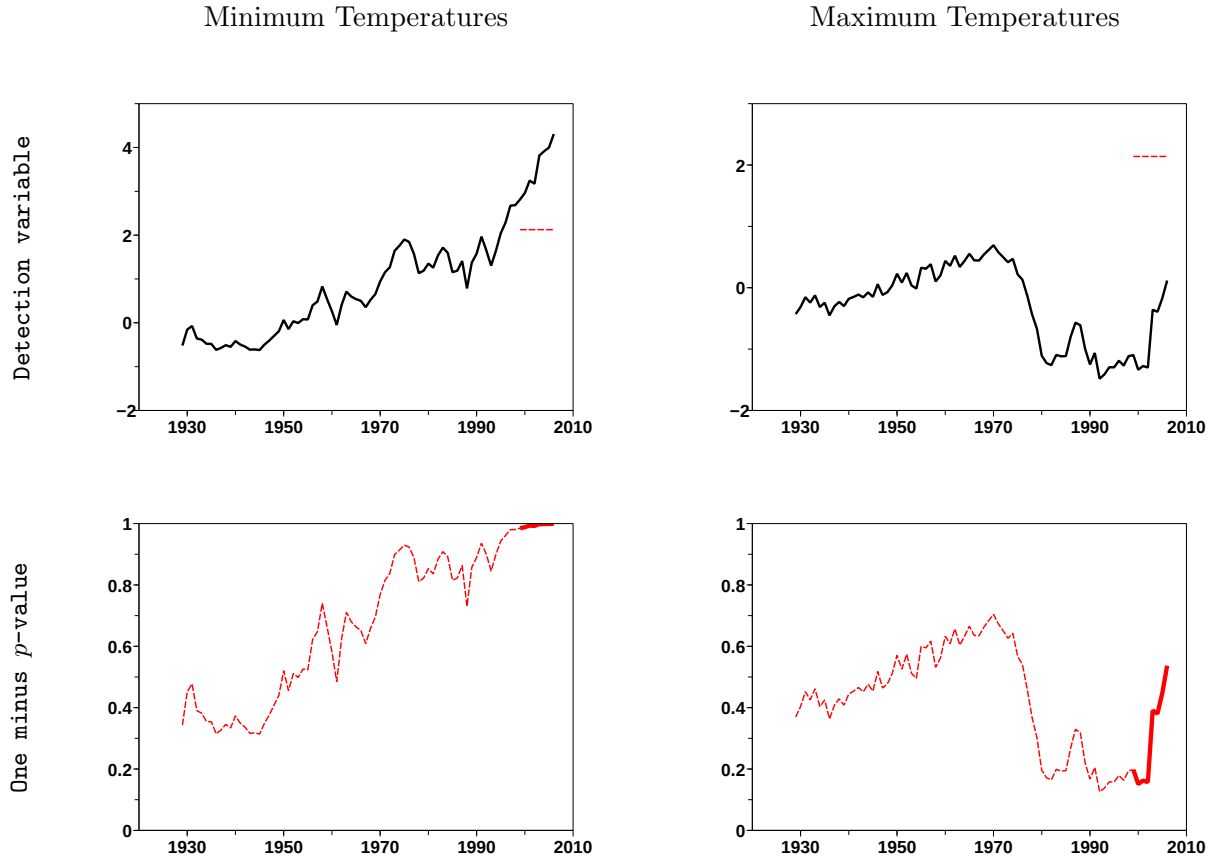


FIG. III.4 – **Summer temperatures in observations.** Results of the ROF methodology applied on observed daily minimum (left) and maximum (right) near-surface summer temperatures, from 1900 to 2006. The comparison is based on 30-years moving averages, spatially centered. The top figures shows the time evolution of the normalized detection variables (black curve), that is compared with the 95% confidence threshold (red dashed line), over the tested sample. The bottom figures represent the time evolution of the statistical significance of each test. The corresponding curves are dashed over the learning period.

TAB. III.1 – **Statistical significance of the ROF test :** results of the ROF test applied to daily minimum / maximum temperatures and each season. The statistical significances (one minus p -values) given are obtained when testing the 1977-2006 mean, and correspond to the last value represented in Figures III.4 and III.5.

Season	Min T	Max T
Summer	> 0.99	0.55
Autumn	0.08	0.95
Winter	0.50	0.85
Spring	< 0.01	0.78

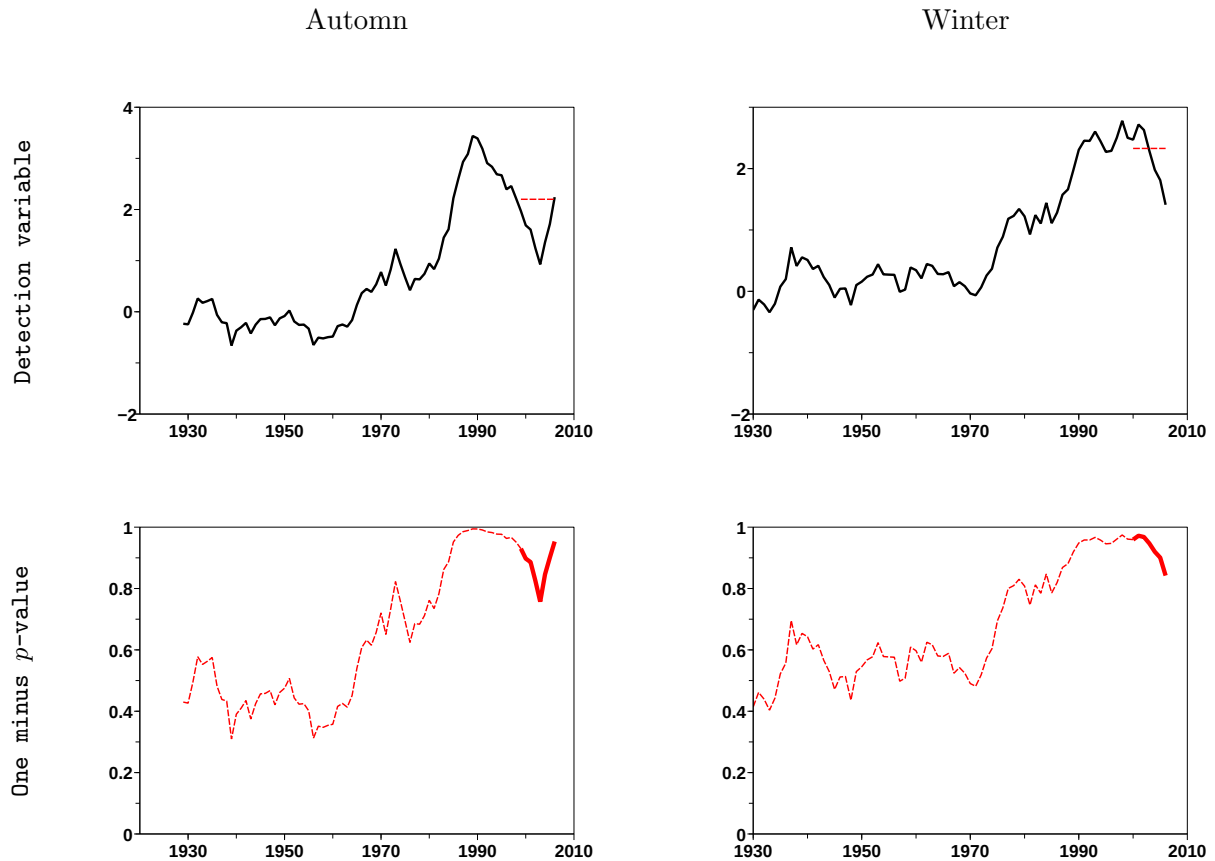


FIG. III.5 – **Autumn and winter daily maximum temperatures in observations** : results of the ROF methodology applied on observed autumn (left) and winter (right) daily maximum near-surface temperatures, from 1900 to 2006. The comparison is based on 30-years moving averages, spatially centered. The representation is the same than in Fig. III.4.

the detection variable takes very small values, that are quite unlikely under the hypothesis H_0 . The three last variables don't show a significant evolution. The explanation of such discrepancies would require further work, but it may be due to the weakness of the signal of change, or to an imperfect simulation of the pattern by the climate model, for some of the variables.

III.1.5 Conclusion

We have introduced a new adaptation of the “optimal fingerprint” statistical technique, based on the use of a well-conditioned covariance matrix estimate. This adaptation has been compared to the commonly used adaptation, in which the “optimal fingerprint” is computed in a reduced space corresponding to the first EOFs. The non-optimized “Guess Pattern Fingerprint” has also been used as a reference.

We have shown that our method is more efficient, in the sense that it yields a more powerful statistical test. Note that the comparison of the methods has been performed using a detection framework, and that the extension of the ROF methodology to the attribution problem could be a natural continuation of this work. Furthermore, to apply the “optimal fingerprint” in a reduced space requires to choose the dimension of this reduced space. Such a choice is difficult and can impact on the results. Our adaptation avoids this step, and thus is easier to implement.

Moreover, the use of regularization allows to base the covariance matrix estimation on a small-sized sample. In the case of climate change detection, the estimation of the internal climate variability can be based on observations, even if the number of available observations is reduced.

Such a possibility has been used for the detection tests performed in this paper. This is an alternative to the use of an estimate based on long control simulations, and avoids the model imperfections when representing the covariance structure.

A last step is needed to achieve the implementation of a statistical detection test, that is to compute the threshold and the p -value of the test. Due to the small number of data available for estimation, we have chosen to compute this p -value and to estimate the covariance matrix on the same sample. The dependencies between these two problems are taken into account via a bootstrap procedure.

The application of the Regularized Optimal Fingerprint (ROF) method on climate data confirms the theoretical results. Firstly, the ROF has been applied on the ideal case of a climate scenario which insures that the alternative hypothesis H_1 is true. Then, it is shown from a quasi experimental point of view that the power of the ROF method is greater than the power of the GPF technique. Secondly, the ROF has been used to study a temperature dataset over France. Some previous results concerning climate change detection are reinforced, especially concerning the summer daily minimum temperatures, and some new results are highlighted. However, it is difficult to make a general conclusion about the detectability of climate change over France : among the set of eight temperature variables studied, the results show some discrepancies. Further works will be useful to answer this question, for example by using a multi-model approach.

III.1.6 Appendix

III.1.6.A Ledoit estimate $\hat{C}_I$:

The main concepts of (Ledoit et Wolf, 2004) to lead to the Ledoit regularized estimate $\hat{C}_I$ are here reviewed.

The first question addressed is the following : given the empirical estimate of a $p \times p$ covariance matrix, $\hat{C}$, deduced from a $n \times p$ sample X , can a linear combination of the form $\tilde{C} = \gamma\hat{C} + \rho I_p$ be a more precise estimate of C than $\hat{C}$? The answer is yes, in the sense of the mean square error :

$$\mathbb{E} \left(\|\tilde{C} - C\|_T^2 \right), \quad (\text{III.A1})$$

for the classical norm :

$$\|A\|_T^2 = \frac{\text{Tr}(A'A)}{p}. \quad (\text{III.A2})$$

When C is known, the optimal values γ_o and ρ_o of γ and ρ are given by (Ledoit et Wolf, 2004) :

$$\gamma_o = \frac{\alpha^2}{\delta^2}, \quad (\text{III.A3})$$

$$\rho_o = \frac{\beta^2 \nu}{\delta^2}, \quad (\text{III.A4})$$

where

$$\nu = \langle C, I_p \rangle_T = \frac{\text{Tr}(C)}{p}, \quad (\text{III.A5})$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ being the scalar product associated with the norm $\|\cdot\|_T$, and :

$$\alpha^2 = \|C - \nu I_p\|_T^2, \quad (\text{III.A6})$$

$$\beta^2 = \mathbb{E} \left(\|\hat{C} - C\|_T^2 \right), \quad (\text{III.A7})$$

$$\delta^2 = \mathbb{E} \left(\|\hat{C} - \nu I_p\|_T^2 \right). \quad (\text{III.A8})$$

In the case when C is unknown, consistent estimators $\hat{\gamma}$ and $\hat{\rho}$ of those two optimal coefficients can be constructed, and they are shown to be convergent under general asymptotics hypothesis.

Note that the “general asymptotics” framework, also called “large dimensional”, is larger than the classical asymptotics framework for statistics, and it especially covers the case $n = p$, and $n, p \rightarrow \infty$. More precisely, estimates of the coefficients ν, α, β and δ are first defined :

$$\hat{\nu} = (\hat{C}, I_p) = \frac{\text{Tr}(\hat{C})}{p}, \quad (\text{III.A9})$$

$$\hat{\delta}^2 = \|\hat{C} - \hat{\nu} I_p\|^2, \quad (\text{III.A10})$$

$$\hat{\beta}^2 = \min \left(\hat{\delta}^2, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \|\psi_i \psi_i' - \hat{C}\|^2 \right), \quad (\text{III.A11})$$

$$\hat{\alpha}^2 = \hat{\delta}^2 - \hat{\beta}^2. \quad (\text{III.A12})$$

Then, the estimates of γ_o and ρ_o are deduced :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\delta}^2}, \quad (\text{III.A13})$$

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\beta}^2 \hat{\nu}}{\hat{\delta}^2}. \quad (\text{III.A14})$$

These estimates lead to a new estimate of the covariance matrix, namely the Ledoit regularized estimate :

$$\hat{C}_I = \hat{\gamma} \hat{C} + \hat{\rho} I_p. \quad (\text{III.A15})$$

III.1.6.B Bootstrap and validation implementation :

Simulating $\mathcal{D}_{\hat{C}_I, g}$

The procedure implemented to simulate the distribution $\mathcal{D}_{\hat{C}_I, g}$ is presented here.

Step 0

From the observed $n \times p$ sample X , containing the observation vectors $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, the estimate $\hat{C}_I$ of C is computed.

Step 1

$\hat{C}_I$ is used to simulate a set of N samples $(X_j^*)_{1 \leq j \leq N}$, each one of size $n \times p$, with a Monte Carlo technique : similarly to the matrix X , the lines of a X_j^* matrix (equivalent to one of the ψ_i) are independent random vectors, the distribution of which is a $N(0, \hat{C}_I)$. The X_j^* are independent between them.

Step 2

From X_j^* , an estimate $\hat{C}_j^*$ of $\hat{C}_I$ is computed, using the estimation method presented in Appendix III.1.6.A.

Furthermore, an estimate $\hat{f}_j^* = (\hat{C}_j^*)^{-1} g$ of $\hat{f}_o$ is computed.

Step 3

For each j , the conditional distribution $\mathcal{D}_{\hat{C}_I, g}$ given X_j^* is known :

$$\mathcal{D}_{\hat{C}_I, g} | X_j^* = N \left(0, \frac{\hat{f}_j^{*'} \hat{C}_I \hat{f}_j^*}{\hat{f}_j^{*'} \hat{C}_j^* \hat{f}_j^*} \right), \quad (\text{III.B1})$$

so that the conditional probability density function associated can be deduced.

Now, the $\mathcal{D}_{\hat{C}_I, g}$ distribution being the mixture of the conditional distributions, its density is approximated by computing the mean of the N conditional densities simulated.

Validation

The question addressed here is : in what measure the $\mathcal{D}_{\hat{C}_{I,g}}$ -distribution can be used instead of the $\mathcal{D}_{C,g}$ one for computing the p-value of the test ?

Using the distribution $\mathcal{D}_{\hat{C}_{I,g}}$, we can proposed a ROF test totally defined by the sample $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$. This test, denoted $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ is characterized by its rejection region $\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g}$:

$$\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \frac{\langle \psi_{n+1}, \hat{C}_I^{-1}g \rangle}{\sqrt{(\hat{C}_I^{-1}g)' \hat{C}_I (\hat{C}_I^{-1}g)}} \geq \mathcal{D}_{\hat{C}_{I,g}}^{(\alpha)} \right\}, \quad (\text{III.B2})$$

where $\mathcal{D}_{\hat{C}_{I,g}}^{(\alpha)}$ denotes the $(1 - \alpha)$ quantile of the distribution $\mathcal{D}_{\hat{C}_{I,g}}$, estimated from the $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ using the procedure presented in the previous paragraph. Note that we use here a specific notation $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$, because this test couldn't be defined by a rejection region of the form (III.7). So that $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ isn't part of the T_f family.

The validation proposed here focuses on the test level. To verify that the $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ level is nominal, it is equivalent to verify that :

$$P_{H_0}(\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g}) = \alpha. \quad (\text{III.B3})$$

The validation of this equality can be made similarly with the previous procedure.

Step 0

A "true" covariance matrix, C is fixed arbitrarily.

Step 1

C is used to simulate a set of N_0 samples $(X_k)_{1 \leq k \leq N_0}$, similarly to the (X_j^*) of the previous paragraph : each (X_k) is of dimension $n \times p$, and its lines are independent random vectors, the distribution of which is a $N(0, C)$. Note that X_k is equivalent to the unique set of available observations X . The regularized covariance estimate $\hat{C}_I^{(k)}$ is computed, for each k .

Step 2

Following the previously presented simulation procedure, the distribution $\mathcal{D}_{\hat{C}_I^{(k)},g}$ is generated. The candidate threshold $\mathcal{D}_{\hat{C}_I^{(k)},g}^{(\alpha)}$ is deduced.

Step 3

The conditional distribution $\mathcal{D}_{C,g}$ given X_k being known, the level and the power conditionally to X_k can be deduced. Finally, the unconditioned level and power are approximated, using a relatively large number of samples N_0 .

As mentioned in III.1.3.3, this validation procedure has been successfully applied to different starting matrices C .

III.1.6.C Discussing the sensitivity to the choice of q

We first study the tests $T_{C_q^+g}$. We denote respectively by λ_i^2 , g_i and ψ_i , the eigenvalues of C , and the coordinates of g and ψ in the C eigenvectors basis. The detection variable associated with $T_{C_q^+g}$ can be written :

$$d_{C_q^+g} = \langle \psi, C_q^+g \rangle = \sum_{i=1}^q \frac{\psi_i g_i}{\lambda_i^2}. \quad (\text{III.C1})$$

Note that $\text{Var}(\frac{\psi_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\psi_p}{\lambda_p}) = I_p$, that is to say that the $z_i = \frac{\psi_i}{\lambda_i}$ are random variables, independents and identically distributed, and, under the hypothesis H_0 , with $N(0,1)$ distribution. So,

$$d_{C_q^+g} = \sum_{i=1}^q z_i \frac{g_i}{\lambda_i}, \quad (\text{III.C2})$$

is a random walk, with weights $\frac{g_i}{\lambda_i}$.

This formula highlights the role of the family $(\frac{g_i}{\lambda_i})$, and shows that the results are generally “unstable” with respect to the choice of q , even when q is large. Indeed, some stability occurs only when the coefficients $(\frac{g_i}{\lambda_i})$ become “small”, as q goes to p . In such a case, the tests $T_{C_q^+g}$ tend to $T_{C^{-1}g}$ (and they are close to each other), so the choice of q doesn’t matter, as soon as q is large.

However, in the case of climate study, there isn’t any evidence that this condition on the $(\frac{g_i}{\lambda_i})$ family is satisfied. Consequently, under the hypothesis H_0 , the probability to reject H_0 for at least one of the considered tests can become important (clearly greater than the individual level α of each test). This illustrates the potential danger of the method and of the choice of q .

A similar study can be made for the tests $T_{\hat{C}_q^+g}$. Denoting respectively by $\hat{\lambda}_i^2$, $\hat{g}_i$ and $\hat{\psi}_i$ the eigenvalues of $\hat{C}$, and the coordinates of g and ψ in the $\hat{C}$ eigenvectors basis,

$$\hat{d}_{\hat{C}_q^+g} = \langle \psi, \hat{C}_q^+g \rangle = \sum_{i=1}^q \frac{\hat{\psi}_i}{\hat{\lambda}_i} \frac{\hat{g}_i}{\hat{\lambda}_i}. \quad (\text{III.C3})$$

Here, the main differences with the previous case is that, first, the random variables $\frac{\hat{\psi}_i}{\hat{\lambda}_i}$ are not exactly independent and identically distributed, and, second, the $\hat{\lambda}_i$ family decreases more rapidly than the λ_i one, due to estimation errors. Consequently to this last point, the sensitivity to the choice of q is increased.

Acknowledgments

The authors are very grateful for the careful work done by two anonymous reviewers which has resulted in real improvements of the manuscript.

III.2 Compléments méthodologiques

Certains développements autour de la méthode ROF, difficiles à présenter dans le cadre de la publication précédente, sont restitués ici. Ces développements concernent tout d’abord la définition rigoureuse des différents types de tests utilisés au cours de l’étude (III.2.1), puis quelques considérations sur les méthodes de rééchantillonnage utilisables (III.2.2).

Ce III.2 constitue donc un prolongement de l’article précédent, et la plupart des notations et hypothèses seront réutilisées sans être réintroduites. En particulier, nous supposons toujours que l’on dispose de n variables aléatoires $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une $N(0, C)$, et que ψ_{n+1} est une variable aléatoire indépendante des $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, de loi $N(\mu g, C)$ (μ réel, g vectoriel), pour laquelle on souhaite tester

$$H_0 : \ll \mu = 0 \gg \quad \text{contre} \quad H_1 : \ll \mu > 0 \gg. \quad (\text{III.22})$$

III.2.1 Familles de tests

Commençons donc par revenir sur les différents tests considérés, explicitement ou implicitement, au III.1.

Famille (T_f)

Dans un premier temps, au III.1.2.1.2, la famille de tests $(T_f)_{f \in \mathbb{R}^p}$ est introduite afin de présenter la méthode des empreintes digitales optimales. Un élément T_f de cette famille est défini par la région de rejet

$$W_f = \left\{ \psi_{n+1}, d_f = \langle \psi_{n+1}, f \rangle \geq d_f^{(\alpha)} \right\}, \quad (\text{III.23})$$

dans un cadre où la matrice C est connue, et en notant $d_f^{(\alpha)}$ le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la distribution sous H_0 de d_f . Remarquons que C étant connue, cette quantité est facile à calculer, en écrivant

$$d_f^{(\alpha)} = \sqrt{f' C f} \Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (\text{III.24})$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée réduite.

Le vecteur f peut donc dépendre du paramètre C , et le test optimal parmi les T_f (au sens de la puissance ou, identiquement dans ce cas là, du rapport signal sur bruit) est précisément obtenu en choisissant $f = f_o$, où

$$f_o = C^{-1}g. \quad (\text{III.25})$$

Le test T_{f_o} , optimal parmi les T_f , est alors défini par la région de rejet

$$W_{f_o} = \left\{ \psi_{n+1}, d_{f_o} = \frac{\langle \psi_{n+1}, f_o \rangle}{\sqrt{f_o' C f_o}} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right\}. \quad (\text{III.26})$$

Il est important de remarquer que la matrice de covariance C intervient deux fois dans cette expression : tout d'abord pour déterminer la direction f_o , donnée en (III.25), sur laquelle sont projetées les données, ensuite pour évaluer la distribution sous H_0 de la quantité d_{f_o} . En (III.26), cette évaluation se résume, moyennant l'hypothèse de gaussianité, au calcul de la variance dans la direction f_o (qui vaut $f_o' C f_o$), dans laquelle C intervient directement.

La philosophie de l'article, résumée en quelques mots, consiste à essayer d'approcher au mieux le test optimal T_{f_o} . La recherche d'une « bonne » approximation se fait en deux étapes, qui correspondent aux deux utilisations qui sont faites de la matrice C dans la formule (III.26).

Famille $(\mathcal{T}_{\hat{f}})$

Dans un premier temps, on recherche une estimation efficace de la direction f_o . Le terme efficace peut s'entendre ici comme « fournissant un test plus efficace que le test simple T_g ». L'évaluation de cette efficacité est faite par le biais de la puissance du test. Comme expliqué au III.1.3.1, une telle évaluation ne peut être faite qu'avec des tests dont le niveau est nominal. Pour cette raison, on considère la famille de tests $\mathcal{T}_{\hat{f}}$ définie par la région de rejet :

$$\mathcal{W}_{\hat{f}} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \langle \psi_{n+1}, \hat{f} \rangle \geq \sqrt{\hat{f}' C \hat{f}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right\}. \quad (\text{III.27})$$

Dans cette notation, $\hat{f}$ indique que la direction sur laquelle on projette les données est « estimée », au sens où elle est fonction des données de l'échantillon d'apprentissage $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par exemple, au III.1, nous avons proposé l'estimateur $\hat{f} = \hat{C}_I^{-1}g$, dans lequel $\hat{C}_I$ est l'estimateur de C donné par (III.A15). Dans un tel cadre, on ne peut qu'approcher la direction f_o . Au contraire, C est supposée connue pour le calcul de la variance sous H_0 . Ce choix est lié au fait que la distribution de la variable de test $d_{\hat{f}}$, sous H_0 et conditionnellement aux $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, peut s'écrire

$$d_{\hat{f}} \mid (\psi_i)_{1 \leq i \leq n} \sim_{H_0} N(0, \hat{f}' C \hat{f}). \quad (\text{III.28})$$

Ainsi, les tests $\mathcal{T}_{\hat{f}}$ ont un niveau nominal conditionnellement aux $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, et donc également un niveau nominal « dans l'absolu » (c'est-à-dire après déconditionnement).

Enfin, une remarque peut être faite concernant cette famille et le test simple T_g . En considérant g comme un $\hat{f}$ possible, on peut définir le test $\mathcal{T}_g$. g est alors perçu comme un estimateur (a priori relativement médiocre) de f_o . Cet estimateur g ne dépendant pas des données $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, les deux régions W_g et $\mathcal{W}_g$ coïncident, et $T_g = \mathcal{T}_g$.

Famille $(\mathbb{T}_{\hat{f}})$

Dans un second temps, une autre famille doit être considérée, comprenant les tests réellement accessibles, c'est-à-dire pour lesquels le seuil de rejet de H_0 est estimé à partir des données disponibles, au même titre que la direction $\hat{f}$. On peut remarquer que dans ce cas, l'ensemble de la distribution sous H_0 doit être estimée pour pouvoir calculer la p -value du test (et pas seulement le quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ qui correspond au seuil). Un test $\mathbb{T}_{\hat{f}}$ de cette famille pourra donc être défini par la région de rejet

$$\mathbb{W}_{\hat{f}} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \langle \psi_{n+1}, \hat{f} \rangle \geq \hat{s}_\alpha \right\}, \quad (\text{III.29})$$

où $\hat{s}_\alpha$ désigne une estimation du seuil et est fonction des $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$. Le niveau d'un tel test n'est pas nécessairement nominal, et a fortiori, le niveau conditionnellement aux $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ n'est généralement pas nominal. La recherche d'un test $\mathbb{T}_{\hat{f}}$ satisfaisant demande donc à la fois de contrôler le niveau, ce qui est lié à l'estimation de $\hat{s}_\alpha$, et de chercher un test le plus puissant possible, ce qui est lié au choix de $\hat{f}$.

Démarche revisitée

L'articulation de l'article précédent peut être reformulée à la lumière de ces quelques définitions. Partant du résultat d'optimalité de T_{f_o} parmi les T_f , on recherche tout d'abord une estimation « satisfaisante » de f_o en se basant sur la puissance des tests $\mathcal{T}_{\hat{f}}$. Dans ce cadre, on se compare au test T_g , qui moyennant la remarque faite précédemment, peut être considéré comme $\mathcal{T}_g$. Le caractère « simple » de ce test est alors avéré puisqu'il est basé sur une estimation de f_o ne dépendant pas des données. Le ROF est introduit dans le cadre de la recherche d'un $\hat{f}$ « satisfaisant ». Après avoir montré l'intérêt de l'estimateur ROF $\hat{C}_I^{-1}g$ par le biais de l'étude de la puissance de $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$, on complète l'algorithme en construisant, à l'aide d'une méthode bootstrap, le test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ défini en (III.B2). On vérifie enfin que ce test final demeure plus efficace que T_g .

Cette deuxième étape du passage de l'estimateur ROF à $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ est discutée de façon succincte au III.1, ce qui justifie que l'on s'intéresse un peu plus largement aux méthodes de rééchantillonnage, en proposant d'autres adaptations possibles.

III.2.2 Méthodes de rééchantillonnage

Dans l'article présenté Section III.1, une seule méthode de rééchantillonnage est présentée, basée sur un algorithme de type bootstrap (III.1, Appendice III.1.6.B). Cependant, le choix de la méthode de rééchantillonnage n'est pas neutre en termes de puissance du test final. On peut en particulier remarquer que, si différents estimateurs $\hat{f}$ de f_o sont comparés, via la puissance des tests $\mathcal{T}_{\hat{f}}$ correspondants, un seul $\mathbb{T}_{\hat{f}}$ est étudié (et considéré comme relativement satisfaisant).

Ce III.2.2 propose de revisiter le choix de l'estimateur $\hat{s}_\alpha$ du seuil s_α , tout en conservant $\hat{C}_I^{-1}g$ comme estimateur de f_o . À la lumière du III.2.1, le choix d'un « bon » $\hat{s}_\alpha$ constitue la deuxième étape de la mise au point d'un test « efficace », étape permettant de passer du test $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ à un test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$. Nous présentons donc quelques alternatives à la méthode bootstrap et discutons leurs performances, cette fois-ci en termes de niveau et puissance (contrairement à

l'étude des performances des $\mathcal{T}_{\hat{f}}$, qui ne portait que sur la puissance, le niveau étant toujours nominal). Cette étude s'inspire notamment du travail mené par Arlot (2007).

La difficulté vient ici du double emploi de la matrice C dans (III.26). En effet, le calcul du seuil du test nécessite d'estimer la variance dans la direction optimale estimée $\hat{f}_o$. En notant $\sigma_{\hat{f}_o}^2 = \hat{f}_o' C \hat{f}_o$ cette variance, il faut alors estimer $\sigma_{\hat{f}_o}^2$ par $\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2$, puis déterminer la distribution sous H_0 de

$$\frac{d\hat{C}_I^{-1}g}{\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}}, \quad (\text{III.30})$$

de façon tout à fait similaire à ce qui était fait en (III.19). Or, pour de nombreuses méthodes parmi lesquelles le bootstrap, le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont dépendants, le même estimateur de C étant utilisé dans les deux cas. Cette dépendance complique la connaissance de la loi sous H_0 . On peut donc préférer diviser l'échantillon en deux échantillons indépendants pour effectuer les deux estimations requises, mais comme nous le verrons une telle stratégie peut également présenter quelques inconvénients.

III.2.2.1 Inventaire des méthodes

On considère dans ce III.2.2.1, et conformément aux notations de l'article, que n données constituent l'échantillon d'apprentissage $\Psi^L = (\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$. Cet échantillon sert de base à la fois à l'estimation de la direction « optimale » f_o , et à l'estimation de la variance dans la direction estimée $\sigma_{\hat{f}_o}^2 = \hat{f}_o' C \hat{f}_o$.

Estimation naïve (EN)

La première méthode envisagée est une méthode naïve, bien que naturelle, consistant à utiliser l'ensemble de l'échantillon d'apprentissage Ψ^L pour évaluer $\hat{C}_I$ (estimateur régularisé de Ledoit), et ce faisant estimer C . Les deux quantités souhaitées ($\hat{f}_o$ et $\sigma_{\hat{f}_o}^2$) peuvent alors être déduites de $\hat{C}_I$, ce qui peut être résumé ainsi :

$$\hat{C}_I \quad \text{calculé sur } \Psi^L \quad (\text{III.31})$$

$$\hat{f}_o = \hat{C}_I^{-1}g, \quad (\text{III.32})$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2 = \hat{f}_o' \hat{C}_I \hat{f}_o = g' \hat{C}_I^{-1}g. \quad (\text{III.33})$$

On peut alors remarquer que la distribution sous H_0 de $d_{\hat{f}_o}$, conditionnellement à l'échantillon $\Psi^L = (\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$, peut s'écrire

$$\langle \psi_{n+1}, \hat{f}_o \rangle | \Psi^L \sim_{H_0} N(0, \sigma_{\hat{f}_o}^2). \quad (\text{III.34})$$

Si l'on remplace, dans cette formule, $\sigma_{\hat{f}_o}^2$ par son estimateur empirique $\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2$ en négligeant son caractère *aléatoire*, on peut considérer l'approximation suivante :

$$\frac{\langle \psi_{n+1}, \hat{f}_o \rangle}{\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}} \sim_{H_0} N(0, 1), \quad (\text{III.35})$$

ce qui fournit le test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(EN)}$, défini par la région de rejet :

$$\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(EN)} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \frac{\langle \psi_{n+1}, \hat{f}_o \rangle}{\sqrt{g' \hat{C}_I^{-1}g}} \leq \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right\}. \quad (\text{III.36})$$

Remarquons qu'une estimation, qui tout en restant naïve le serait un peu moins, consisterait à remplacer, dans (III.35), la loi normale centrée réduite par une loi de Student à n degrés de liberté. Dans notre cas, les valeurs typiques du paramètre n (> 50) rendent ces deux procédures approximativement équivalentes.

Validation (VAL)

Dans le cas de la validation, on contourne le problème de la dépendance entre les numérateur et dénominateur de (III.30) en partitionnant l'échantillon d'apprentissage Ψ^L en deux sous-échantillons. Soient donc I_1 et I_2 , respectivement de taille n_1 et n_2 , vérifiant

$$I_1, I_2 \subset \llbracket 1, n \rrbracket, I_1 \cup I_2 = \llbracket 1, n \rrbracket, I_1 \cap I_2 = \emptyset. \quad (\text{III.37})$$

On considère alors

$$\Psi^{L1} = (\psi_i)_{i \in I_1} \quad \text{et} \quad \Psi^{L2} = (\psi_i)_{i \in I_2}. \quad (\text{III.38})$$

On peut remarquer que les tailles n_1 et n_2 peuvent être arbitrairement choisies, pour rendre le test le plus efficace possible. Les estimateurs dans le cas de la validation sont

$$\hat{C}_I \quad \text{calculé sur } \Psi^{L1}, \quad (\text{III.39})$$

$$\hat{f}_o = \hat{C}_I^{-1} g, \quad (\text{III.40})$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i \in I_2} \langle \psi_i, \hat{f}_o \rangle^2. \quad (\text{III.41})$$

Ces formules peuvent être simplement résumées en remarquant que la matrice C , et avec elle le vecteur f_o , sont estimés sur le sous-échantillon Ψ^{L1} , puis que la variance dans la direction $\hat{f}_o$ est estimée de façon standard sur le sous-échantillon disjoint Ψ^{L2} .

En effectuant le même type de raisonnement que précédemment, on peut remarquer que conditionnellement à Ψ^{L1} , on a

$$\langle \psi_i, \hat{f}_o \rangle | \Psi^{L1} \sim N(0, \hat{f}_o' C \hat{f}_o), \quad \forall i \in I_2, \quad (\text{III.42})$$

et donc

$$\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2 | \Psi^{L1} \sim (\hat{f}_o' C \hat{f}_o) \frac{\chi^2(n_2)}{n_2}. \quad (\text{III.43})$$

On peut donc déduire que la variable de détection réduite indiquée en (III.30) est distribuée, sous H_0 , comme une loi de Student à n_2 degrés de liberté.

On peut alors proposer le test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(VAL)}$, qui correspond à la région de rejet

$$\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(VAL)} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \frac{\langle \psi_{n+1}, \hat{f}_o \rangle}{\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}} \leq T_{n_2}^{-1}(1 - \alpha) \right\}, \quad (\text{III.44})$$

où T_k désigne la fonction de répartition d'une loi de Student à k degrés de liberté. Compte tenu de la remarque précédente, ce test est de niveau exact. En contrepartie, un inconvénient de cette méthode est que le découpage entre les deux sous-échantillons est fait au hasard, et que le résultat en dépend.

Validation croisée (VC)

La validation croisée généralise l'approche précédente, en répétant K fois un algorithme de type validation. On commence par fixer les tailles n_1 et n_2 des deux sous-échantillons Ψ^{L1} et

Ψ^{L2} évoqués précédemment. Ensuite, pour $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$, on sélectionne aléatoirement $I_1^{[k]}$ et $I_2^{[k]}$, qui partitionnent I . On calcule alors

$$\hat{C}_I^{[k]} \quad \text{calculé sur } (\psi_i)_{i \in I_1^{[k]}} = \Psi_{[k]}^{L1}, \quad (\text{III.45})$$

$$\hat{f}_o^{[k]} = (\hat{C}_I^{[k]})^{-1} g, \quad (\text{III.46})$$

$$(\hat{\sigma}_{\hat{f}_o^{[k]}}^{[k]})^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i \in I_2^{[k]}} \langle \psi_i, \hat{f}_o^{[k]} \rangle^2. \quad (\text{III.47})$$

Comme précédemment, on a

$$(\hat{\sigma}_{\hat{f}_o^{[k]}}^{[k]})^2 \mid (\psi_i)_{i \in I_1^{[k]}} \sim (\hat{f}_o^{[k]}' C \hat{f}_o^{[k]}) \frac{\chi^2(n_2)}{n_2}. \quad (\text{III.48})$$

Une difficulté est alors d'agréger les différents estimateurs obtenus pour les différentes valeurs de k , ce qui peut être fait en considérant, de façon relativement empirique :

$$\hat{C}_I = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{C}_I^{[k]}, \quad (\text{III.49})$$

$$\hat{f}_o = \hat{C}_I^{-1} g, \quad (\text{III.50})$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\sigma}_{\hat{f}_o^{[k]}}^{[k]})^2. \quad (\text{III.51})$$

Bien que cette méthode soit la généralisation de la précédente, on perd le principal avantage de la validation, à savoir la maîtrise exacte du niveau du test. En particulier, la distribution du quotient (III.30) ainsi choisi n'est pas connue. On est cependant naturellement enclins à définir le test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(VC)}$, associé à la région de rejet

$$\mathbb{W}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(VC)} = \left\{ (\psi_i)_{1 \leq i \leq n+1}, \frac{\langle \psi_{n+1}, \hat{f}_o \rangle}{\hat{\sigma}_{\hat{f}_o}} \leq T_{Kn_2}^{-1} (1 - \alpha) \right\}. \quad (\text{III.52})$$

Bootstrap (*BOOT*)

La méthode bootstrap est celle présentée dans le cadre de l'article, et détaillée au III.1, Appendice III.1.6.B. Le test $\mathbb{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(BOOT)}$ est notamment défini par la formule (III.B2). La philosophie peut être résumée en quelques mots en disant qu'on utilise les mêmes estimateurs que dans le cadre de l'estimation naïve, mais on approche la loi du quotient à l'aide de simulations de type Monte-Carlo, au lieu de l'assimiler à une normale centrée réduite.

III.2.2.2 Comparaison des méthodes

Une comparaison de ces différentes méthodes de rééchantillonnage a été effectuée dans un cadre très similaire à celui de l'article (cf III.1.3.2, et Figure III.1). On fixe, comme précédemment, des valeurs pour les paramètres C et g , ce qui permet d'évaluer et de comparer les performances des différents tests entre eux, ainsi que de les comparer au test *idéalisé* $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$. Afin de se rapprocher du cas réel, on utilise ici aussi des valeurs de C et g déduites des observations pour le cas des températures minimales d'été en France. Le calcul du niveau est alors fait en effectuant des simulations de Monte-Carlo sous H_0 ; le calcul de la puissance est basé sur des simulations sous H_1 , l'hypothèse *alternative* étant fixée pour les différents tests par le choix d'une valeur du coefficient réel μ .

La Table III.2 présente les résultats de cette comparaison. Les méthodes introduites précédemment sont ainsi comparées, après avoir choisi quelques paramètres :

Méthode	Niveau	Puissance
EN	21.4% $\pm$ 0.1%	84.1% $\pm$ 0.1%
VAL	5%	50.3% $\pm$ 0.3%
CV₁	4.4% $\pm$ 0.04%	52.4% $\pm$ 0.2%
CV₃	4.2% $\pm$ 0.04%	51.4% $\pm$ 0.2%
BOOT	5.6% $\pm$ 0.15 %	56.4% $\pm$ 0.5%
$\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$	5%	56.3% $\pm$ 0.1%

TAB. III.2 – **Niveau et puissance des méthodes de rééchantillonnage.** Les performances des différentes méthodes de rééchantillonnage inventoriées au III.2.2.1 sont comparées en termes de niveau et puissance. Comme pour la Figure III.1, les valeurs indiquées sont calculées par des simulations de Monte-Carlo, dans lesquelles les valeurs attribuées à C et g sont déduites de données observées de températures minimales d’été sur la France. Les fourchettes indiquent les incertitudes associées, et sont liées au fait que les résultats sont calculés à partir d’un nombre *fini* de simulations de Monte-Carlo.

- La validation (*VAL*) est appliquée en utilisant un rapport $\frac{n_2}{n} = 0.2$. Des simulations ont montré que cette valeur maximise la puissance obtenue, et elle est en accord avec les valeurs couramment préconisées pour ce type de problème.
- La validation croisée (*CV*) est appliquée pour deux choix distincts du paramètre n_2 , à savoir $n_2 = 1$ pour (*CV₁*) et $n_2 = 3$ pour (*CV₃*). On peut remarquer que (*CV₁*) est plus couramment dénommé comme une méthode « leave one out ». Remarquons que l’ensemble des choix possibles pour I_1 et I_2 est exploré dans le cas (*CV₁*), soit $K = n$, mais que l’on choisit simplement une valeur de K *grande* dans le cas (*CV₃*), sans explorer tous les choix possibles.
- Le test « idéal » $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$, qui utilise toute l’information disponible pour estimer f_o , et dont le niveau est nominal, est utilisé comme référence.

L’examen de ce tableau permet de tirer quelques conclusions.

Tout d’abord, l’étude des niveaux des différents tests proposés montre que la méthode (*EN*) doit être évitée, car le niveau dans ce cas est très différent de sa valeur nominale. Parmi les autres méthodes, l’écart entre le niveau réel et le niveau nominal reste faible, même si le bootstrap est légèrement permissif, et la validation croisée légèrement conservative. Dans le cas « idéal » $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$ et dans le cas de la validation, le niveau des tests est connu comme étant exact.

La comparaison des puissances des tests, de son côté, ne permet pas de préférer définitivement l’un des tests proposés. Les puissances simulées sont relativement proches entre elles, et une partie des différences est certainement explicable par les petites différences des niveaux réels. De plus, ces puissances sont relativement proches de la puissance du test « idéal » $\mathcal{T}_{\hat{C}_I^{-1}g}$.

Ces résultats n’apportent donc pas la preuve d’une supériorité évidente de la méthode bootstrap. Cependant, l’évaluation de cette méthode sur d’autres jeux de valeurs utilisés dans le cadre de l’article a montré que le niveau réel s’écartait rarement davantage du niveau nominal que dans le cas ici présenté. Les performances de cette méthode en terme de niveau et puissance sont donc satisfaisantes. Ensuite, le bootstrap se distingue de la méthode de validation en utilisant toute l’information disponible pour estimer C , et en renvoyant une p -value non « aléatoire », c’est-à-dire ne dépendant pas du découpage arbitraire de l’échantillon en deux échantillons distincts. Ce découpage constitue un inconvénient de la méthode de validation, puisqu’il impacte souvent sensiblement le calcul de la p -value, même si l’étude montre qu’en moyenne il ne se traduit pas par une perte de puissance importante.

Il faut enfin noter que ces résultats peuvent être différents lorsqu’on travaille sur un échantillon d’apprentissage Ψ^L de taille différente, et notamment lorsque la dimension spatiale p devient

sensiblement plus grande que la dimension temporelle n . Ce phénomène, mentionné dans l'article, se traduit par le fait que le niveau du test $T_{\hat{C}_I^{-1}g}^{(BOOT)}$ est moins bien contrôlé dans un tel cas. Cela a parfois favorisé l'utilisation de la validation, ou de la validation croisée, notamment pour réaliser des tests à l'échelle globale (la dimension spatiale se trouve alors sensiblement accrue).

Ces quelques résultats achèvent la partie technique de l'étude de la méthode ROF, ce qui nous conduit directement vers l'étude plus détaillée des résultats applicatifs qu'elle a pu fournir.

III.3 Analyse des résultats sur la France

Dans le cadre du III.1, certains résultats, parfois nouveaux, sont présentés sur le domaine France. Cependant, la contribution apportée étant avant tout méthodologique, ces résultats sont relativement peu discutés, et on peut souhaiter approfondir l'analyse qui est faite de l'évolution des températures en France.

Ce retour sur les résultats fournis par la méthode ROF sur la France se fera en deux temps. Tout d'abord, quelques résultats complémentaires seront donnés, afin de revenir rapidement sur l'opération de centrage spatial, et d'étudier le cas des températures moyennes annuelles (III.3.1). Ensuite, afin d'évaluer la robustesse des résultats présentés, nous tâcherons de prendre en compte l'incertitude liée aux projections climatiques. Pour cela, nous étudierons les résultats obtenus en basant la méthode ROF sur des signaux de changements déduits de différentes simulations et différents modèles climatiques (III.3.2).

On peut remarquer, enfin, que le III.1 utilise une hypothèse d'indépendance des données, d'une année sur l'autre, rigoureusement équivalente à l'hypothèse (II.15). Comme évoqué au II.3, il pourrait être judicieux de tester également la robustesse des résultats à la prise en compte d'une certaine persistance climatique, par exemple sous la forme d'un processus AR1 (cf II.3.3). Une telle étude ne sera pas menée ici (à la différence du III.4), car l'impact sur la France de cette prise en compte est très limité, notamment du fait de la valeur estimée de cette persistance ($\alpha = 0.2$ sur la France, cf II.3.3.2).

III.3.1 Résultats complémentaires

L'objectif de cette partie est d'évaluer dans quelle mesure le signal spatial des changements climatiques, simulé par le modèle ARPEGE-Climat de Météo France, est détectable, à l'échelle de la France, sur le paramètre température moyenne annuelle. Ce paramètre est à la fois naturel et important, puisqu'il constitue une moyenne des huit variables étudiées au III.1, et dont on a pu voir qu'elles donnaient lieu à des résultats contrastés.

Commençons donc cette analyse par la question la plus naïve, concernant la détection d'un signal sur les températures moyennes annuelles « brutes ». L'épithète « brute » désigne ici des séries non centrées spatialement, et donc pour lesquelles les changements climatiques peuvent se traduire essentiellement en termes de réchauffement climatique uniforme. La figure III.6 indique les résultats obtenus par une telle analyse, en présentant trois variantes. Deux stratégies possibles consistent à utiliser les tests ROF et GPF introduits précédemment, pour les appliquer à l'échantillon Ψ . Une troisième possibilité est utilisée, qui consiste à n'étudier que la série $\bar{\Psi}$ de la température moyenne annuelle sur l'ensemble du domaine étudié, à savoir la France. Dans le cas d'un réchauffement spatialement uniforme, on peut également remarquer que cette série contient l'intégralité du signal de changement. La série $\bar{\Psi}$ étant univariée, les tests GPF et ROF coïncident alors et correspondent à un classique test de Student.

La Figure III.6 montre que les trois méthodes proposées concluent au caractère significatif de l'augmentation des températures. En outre, l'étude de la seule série $\bar{\Psi}$ suffit à mettre en évidence ce changement. Un tel résultat pourrait même être renforcé par l'étude de séries ponctuelles de températures moyennes annuelles (et non moyennées sur le domaine d'étude). En effet, la

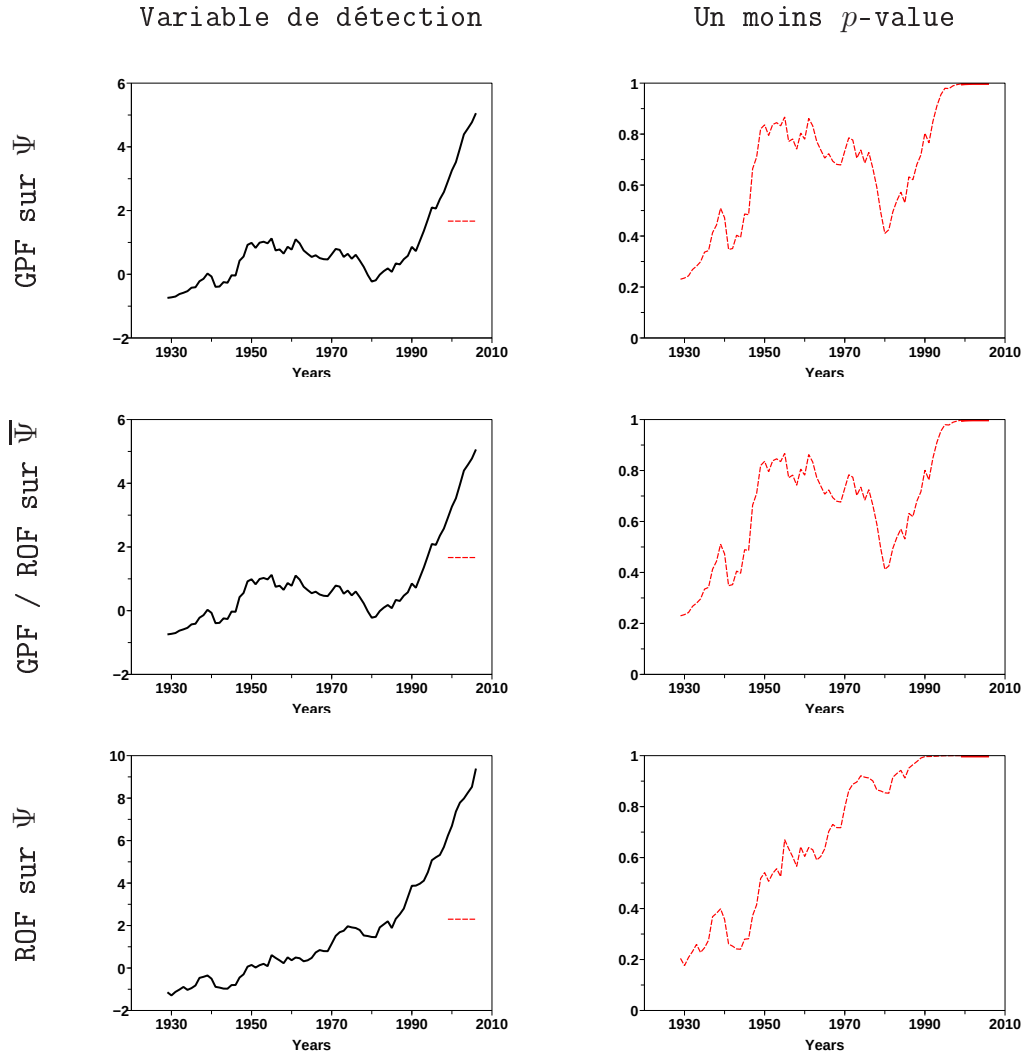


FIG. III.6 – **Détection sur les températures moyennes annuelles en France, sans centrage spatial.** Les méthodes GPF et ROF sont appliquées aux températures moyennes annuelles en France, dans les mêmes conditions qu’au III.1 concernant l’étude de Ψ (50 pseudo-stations). L’étude de $\bar{\Psi}$ correspond à l’étude de la température moyenne sur la France, qui est faite avec un classique test de Student (GPF et ROF coïncident dans ce cas).

même technique appliquée aux relevés météorologiques d’une seule station permet généralement d’aboutir à un résultat comparable, que l’on peut alors qualifier de détection « locale » d’un changement climatique.

Quelques constatations supplémentaires méritent d’être faites concernant cette Figure III.6.

Premièrement, la méthode ROF met en évidence de façon plus probante le changement observé sur la fin de la période, en fournissant des p -values plus petites que les deux autres stratégies présentées. Toutefois, ce résultat ne doit pas être interprété comme une preuve de l’efficacité de la méthode ROF, car plusieurs raisons contre-indiquent de comparer l’efficacité des méthodes statistiques sur ce type de données réelles. En particulier, une véritable comparaison de tests statistiques ne peut être menée que lorsque la réponse à la question posée (présence ou absence de changements) est connue à l’avance. Bien que l’existence d’un réchauffement du climat à l’échelle globale ait déjà été largement établie, notamment par les différents rapports du GIEC, on ne peut pas véritablement considérer cette réponse connue dans le cadre de la Figure III.6. Cette réponse est encore beaucoup moins évidente pour des questions plus fines telles que celles

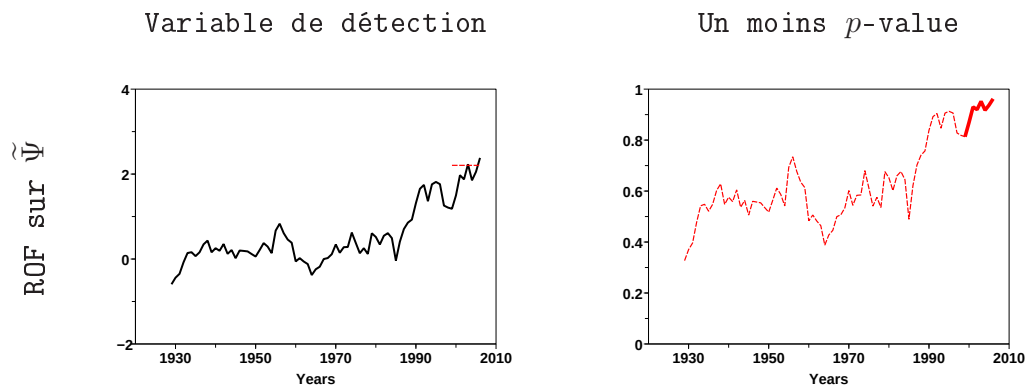


FIG. III.7 – **Détection sur les températures moyennes annuelles en France, centrées spatialement.** La méthode ROF est appliquée aux températures moyennes annuelles sur la France, dans les mêmes conditions, et avec les mêmes signaux qu’au III.1.4.4.

posées au III.1, sur la distribution spatiale de ce réchauffement, ce qui explique que l’on évite généralement de comparer les méthodes sur des applications réelles. En outre, la démonstration des meilleures propriétés de la méthode ROF a été faite, au III.1, sous certaines hypothèses précises, parmi lesquelles le fait que la distribution spatiale du changement, g , était connue. Dans la réalité, la validité de cette hypothèse peut mériter une discussion, et l’utilisation d’un a priori imparfait sur g peut impacter différemment plusieurs méthodes concurrentes. L’observation faite Figure III.6 ne traduit donc pas forcément la supériorité d’une méthode, mais plus modestement la qualité de cette méthode dans l’exemple traité ici, et pour l’a priori g fourni par le modèle climatique utilisé.

Dans la suite de ce chapitre, nous ne présenterons que les résultats obtenus en appliquant la méthode ROF, en nous plaçant délibérément sous l’hypothèse que le vecteur g fourni par les scénarios climatiques est satisfaisant. Moyennant cette hypothèse, qui sera discutée ultérieurement, nous avons vu au III.1 que la méthode ROF pouvait être préférée.

Deuxièmement, l’extrême similitude entre les courbes obtenues en appliquant la méthode GPF à l’échantillon Ψ , et en étudiant la seule moyenne $\bar{\Psi}$, nécessite un commentaire. Dans le cas des températures moyennes annuelles, le vecteur des changements climatiques g utilisé comme a priori est porté à plus 99% par le vecteur $\mathbb{1}_p$. Le test GPF étant basé sur l’utilisation d’une métrique euclidienne, la variable de détection associée à ce test est largement dominée par les variations selon cette direction $\mathbb{1}_p$, qui correspond exactement à la quantité $\bar{\Psi}$. Utiliser des outils de statistique spatiale multivariée dans un tel cadre a donc peu de sens. Il n’en va pas de même pour la méthode ROF, puisqu’alors le poids accordé aux variations se produisant dans la direction $\mathbb{1}_p$ est limité par la prise en compte de la métrique $\hat{C}_I^{-1}$. Cela se manifeste par le fait que l’évolution temporelle de la variable de détection de la méthode ROF est nettement différente des deux autres.

Une dernière remarque concerne la forme de l’évolution temporelle de la variable de détection de ROF. Si les deux autres courbes reproduisent le signal, bien connu sur la moyenne, d’un changement relativement rapide au cours des années 1920-1950 (représenté en 1950 sur les graphiques), suivi d’une légère décroissance de la variable de détection, la courbe associée à ROF indique un changement beaucoup plus régulier, sans retournement de tendance marqué. Ce résultat plaide en faveur de la meilleure capacité de la méthode ROF à filtrer une partie de la variabilité interne, et est à mettre en relation avec les résultats obtenus au Chapitre V.

Le même jeu de données de températures moyennes annuelles sur la France est étudié, Figure III.7, cette fois-ci après avoir effectué un centrage spatial. Le test est appliqué dans les mêmes conditions que celles présentées au III.1.4 et Figure III.6, en utilisant 50 pseudo-stations. Le

résultat montre qu’une modification significative de la distribution spatiale des températures est observée sur la fin de la période. Ce résultat, qui n’était pas mentionné au III.1, constitue un progrès par rapport aux précédentes études menées sur la France.

III.3.2 Sensibilité au choix du modèle climatique

Ce résultat sur les températures moyennes annuelles, ainsi que ceux, détaillés au III.1, concernant spécifiquement les températures minimales ou maximales des différentes saisons, méritent d’être testés face à différentes incertitudes. Nous allons ici chercher à évaluer dans quelle mesure ces résultats sont robustes aux incertitudes sur les scénarios climatiques.

Cette étude de sensibilité va tout d’abord s’appuyer sur l’exemple des températures moyennes annuelles, pour lesquelles trois niveaux d’incertitudes climatiques seront évalués et représentés Figure III.8 : l’incertitude liée aux conditions initiales d’une simulation climatique, celle liée au choix du modèle régional, et celle liée au choix du modèle global.

L’illustration du premier niveau d’incertitude est donnée Figure III.8a), en utilisant les sorties des différents scénarios climatiques régionaux réalisés par le CNRM dans le cadre du projet PRUDENCE, avec le modèle ARPEGE-Climat à maille variable. Les sigles indiqués en légende permettent simplement de dénommer ces scénarios et ne doivent pas faire l’objet de plus d’attention. Chacun de ces scénarios correspond à une simulation du climat dit « futur », sur la période 2071-2100. L’anomalie de température est alors calculée en faisant la différence avec des simulations du climat présent (1961-1990).

Le but de ce graphique est avant tout de représenter les différences pouvant être observées entre plusieurs scénarios réalisés avec le même modèle, et qui ne diffèrent que par les conditions initiales qui leurs sont attribuées. Dans l’exemple qui nous occupe cependant, l’effet des conditions initiales est mêlé à deux autres sources d’incertitudes : le scénario d’émission, et le choix du modèle global *forceur*, définissant les *conditions aux limites* (en l’occurrence les températures de surface de la mer et l’extension de la banquise). Ainsi, quatre simulations (E6, E7, E8, E9) correspondent à un scénario d’émission A2, les quatre autres correspondant à un scénario d’émissions B2. De même, quatre simulations ont été conduites avec des *conditions aux limites* calculées par le modèle couplé CNRM-CM (C2, C7, C9, E9), alors que les quatre autres ont utilisé des données équivalentes issues du modèle couplé HadCM3. Au final, parmi ces huit scénarios, seuls l’ensemble (C2, C7, C9) d’une part, et l’ensemble (E6, E7, E8) d’autre part, sont constitués de simulations ne différant que par leurs conditions initiales.

L’analyse de la Figure III.8a) montre principalement deux choses. Tout d’abord, les différences entre les huit scénarios demeurent dans l’ensemble limitées, notamment sur la fin de la période, et bien qu’elles soient réparties de part et d’autre du seuil de détection en 2006. Ces différences sont en tout cas sensiblement plus faibles que dans les deux autres figures (**b** et **c**). Ensuite, les simulations qui ne diffèrent que par les conditions initiales ne sont guère plus semblables entre elles que ne le sont les huit globalement. Ceci nous conforte dans l’idée que cette figure illustre effectivement la dispersion liée aux *conditions initiales*. Malgré la petite taille de l’échantillon, ces résultats montrent que cette dispersion est relativement faible. Cela conforte l’hypothèse mentionnée au II.1.3, selon laquelle différents scénarios d’émissions ne sont pas nécessairement associés à des signaux de changement très différents, à une homothétie près.

La poursuite de l’analyse nous amène à considérer la Figure III.8b), qui représente l’incertitude associée au choix du modèle régional. Ce graphique est basé sur les simulations de nombreux modèles régionaux, réalisées sur le domaine Europe dans le cadre du projet PRUDENCE. La grande majorité des simulations ont été réalisées avec les mêmes conditions aux limites (calculées avec le modèle couplé HadCM3, pour des scénarios d’émissions A2 et B2). Cette figure permet de constater que l’incertitude liée au modèle régional est importante, et conduit à relativiser le résultat indiqué précédemment.

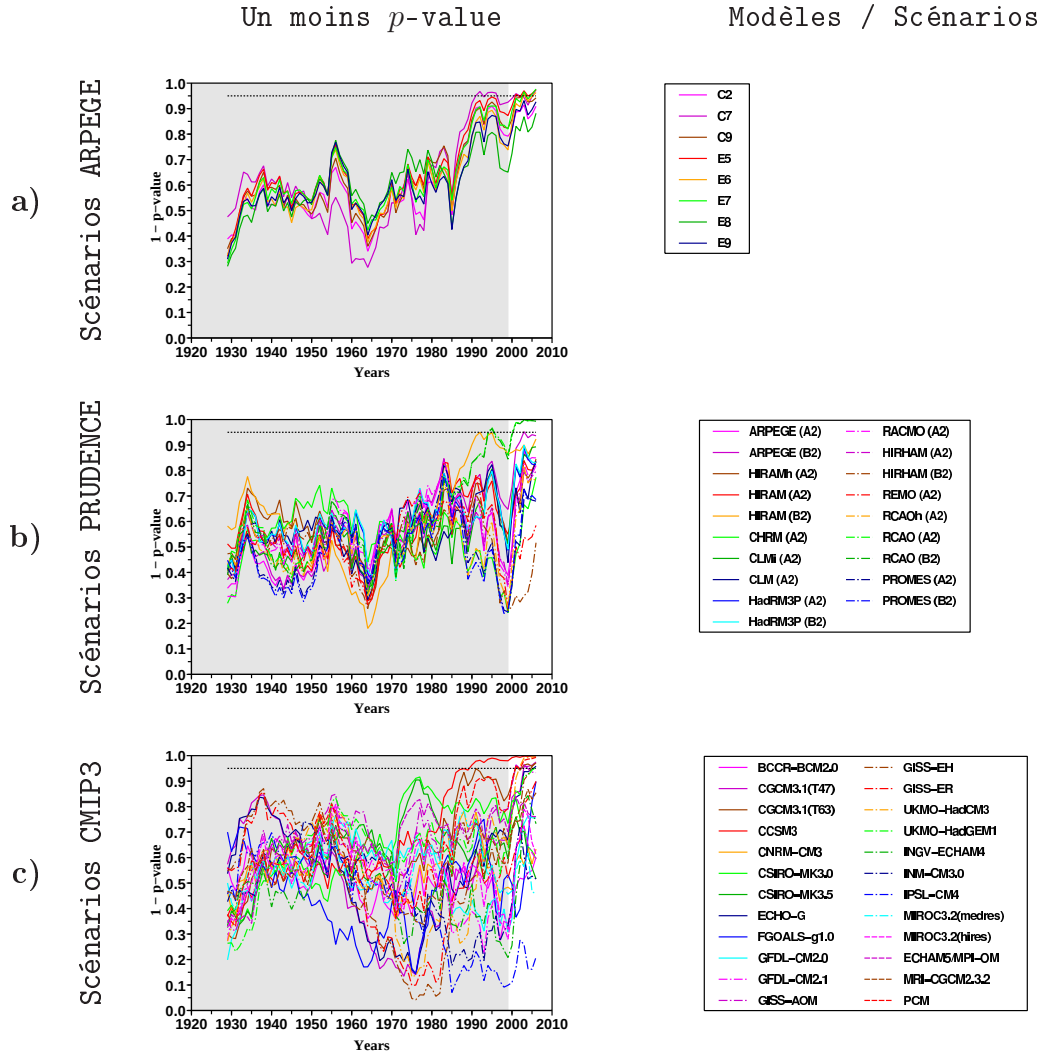


FIG. III.8 – **Sensibilité au choix du modèle des résultats sur les températures moyennes annuelles.** La méthode ROF est appliquée aux températures moyennes annuelles homogénéisées sur la France, en utilisant différents signaux spatiaux (cf texte). Les résultats, pour chaque signal, sont représentés sous la forme d'une courbe d'évolution de la p -value du test utilisé. Le fond grisé indique la période au cours de laquelle les échantillons d'apprentissage et de test ne sont pas disjoints, et le seuil de détection est représenté en pointillés.

Une remarque importante doit cependant être faite concernant les résultats obtenus dans ce cadre avec ARPEGE-Climat, et qui devraient être identiques en a) et b). Dans le cadre du projet PRUDENCE, toutes les sorties de modèles ont été interpolées sur une même grille de résolution 0.5° . Les valeurs utilisées pour l'algorithme de détection sont ensuite déduites de cette grille, sans spécification d'un masque terre-mer, contrairement à ce qui était fait précédemment. Dans le cas présent, ce phénomène tend à détériorer les résultats, et est plus prononcé avec les températures de surface de la mer simulées par le modèle HadCM3 (ce qui affecte davantage les scénarios CNRM de type A2). Le problème ainsi posé est de savoir quelle est la meilleure façon de ramener les anomalies moyennes simulées par les modèles de climat sur une maille plus ou moins grossière à un niveau local. Il s'agit d'une question assez large, sur laquelle travaillent de nombreux climatologues, au travers de l'étude des méthodes dites de *downscaling*, ou *descente d'échelle*, et relativement complexe, que nous n'aborderons pas véritablement ici. Cette Figure III.8b) est donc utilisée, comme les suivantes d'ailleurs, avant tout pour donner une idée des

incertitudes liées au choix du modèle, tous les modèles étant traités de la même façon. Ces incertitudes sont grandes dans le cas des modèles régionaux de PRUDENCE.

Enfin, on peut étendre cet exercice d'intercomparaison au cas des modèles couplés globaux (CGCMs). La Figure III.8c) est ainsi l'équivalent des précédentes, en prenant en compte l'ensemble des modèles ayant participé à l'exercice CMIP3. On peut constater que l'incertitude est de nouveau augmentée, ce qui n'est pas nécessairement surprenant, mais doit malgré tout inciter à une relative prudence.

De façon plus systématique, la comparaison des résultats obtenus avec des signaux spatiaux simulés par différents modèles de climat peut être faite dans les huit cas envisagés au III.1.4. La Figure III.9 illustre une telle comparaison dans le cas des modèles régionaux ayant participé au projet PRUDENCE. Cette figure montre que dans de nombreux cas, l'ensemble des simulations climatiques effectuées dans le cadre de PRUDENCE est à l'origine de larges incertitudes sur la détectabilité des changements climatiques en France. Plus précisément, l'étude des températures minimales d'hiver et de printemps, et maximales d'été, de printemps, et dans une moindre mesure d'automne, montre que des conclusions très différentes peuvent être adoptées concernant le même jeu de données en fonction du modèle choisi.

Cette analyse révèle toutefois une relative robustesse des signaux mis en lumière sur les températures minimales estivales ainsi que sur les températures maximales hivernales. En effet, concernant ces deux variables, les différents signaux spatiaux simulés conduisent à des résultats relativement concordants, et souvent significatifs, à l'exception toutefois de deux modèles (RCAO et REMO) dans le cas des maximales d'hiver. A l'opposé, les p -values obtenues dans le cas des minimales d'automne sont très faibles pour de nombreux modèles. Un tel phénomène peut s'expliquer par la présence effective d'un signal de changements climatiques, dont la distribution spatiale n'est pas cohérente avec celle simulée par les modèles fournissant les signaux a priori g .

Les résultats concernant l'ensemble de ces huit jeux de données demeurent donc relativement contrastés.

III.4 Analyse des résultats sur le domaine Méditerranée

Comme indiqué précédemment, la région méditerranéenne a constitué un domaine d'application important au cours de cette thèse, notamment dans le cadre d'une participation au projet européen CIRCE (Climate Change and Impact Research : the Mediterranean Environment). Le jeu de données homogénéisées sur une grille de $5^\circ \times 5^\circ$, produit par l'Université d'East Anglia, et couramment désigné par l'acronyme HadCRUT3v, ainsi que les données des scénarios climatiques simulés par de nombreux CGCMs, fournis par le projet CMIP3, ont permis de réaliser une telle étude. Ces choix se justifient, d'une part, par la rareté des jeux de données homogénéisées sur le domaine Méditerranée, et d'autre part, par la recherche d'un ensemble de simulations à la fois large et récent.

Nous présentons successivement les principaux résultats obtenus en appliquant la méthode ROF sur le domaine Méditerranée, puis une première piste permettant d'interpréter physiquement ces résultats.

III.4.1 Principaux résultats

L'étude effectuée sur le domaine Méditerranée est en tout point comparable à celles présentées aux III.1.4 et III.3. On considère la période 1900-2006, dans laquelle on sélectionne un échantillon d'apprentissage de 70 ans : 1900-1969. Dans le cas des données HadCRU3v couvrant le bassin méditerranéen, seuls 21 points de grille disposent de données sur l'ensemble de cette période ; une réduction supplémentaire de la dimension spatiale n'est donc pas nécessaire dans ce cas. De plus, l'homogénéité spatiale des données est en partie garantie par le fait qu'elles sont disponibles

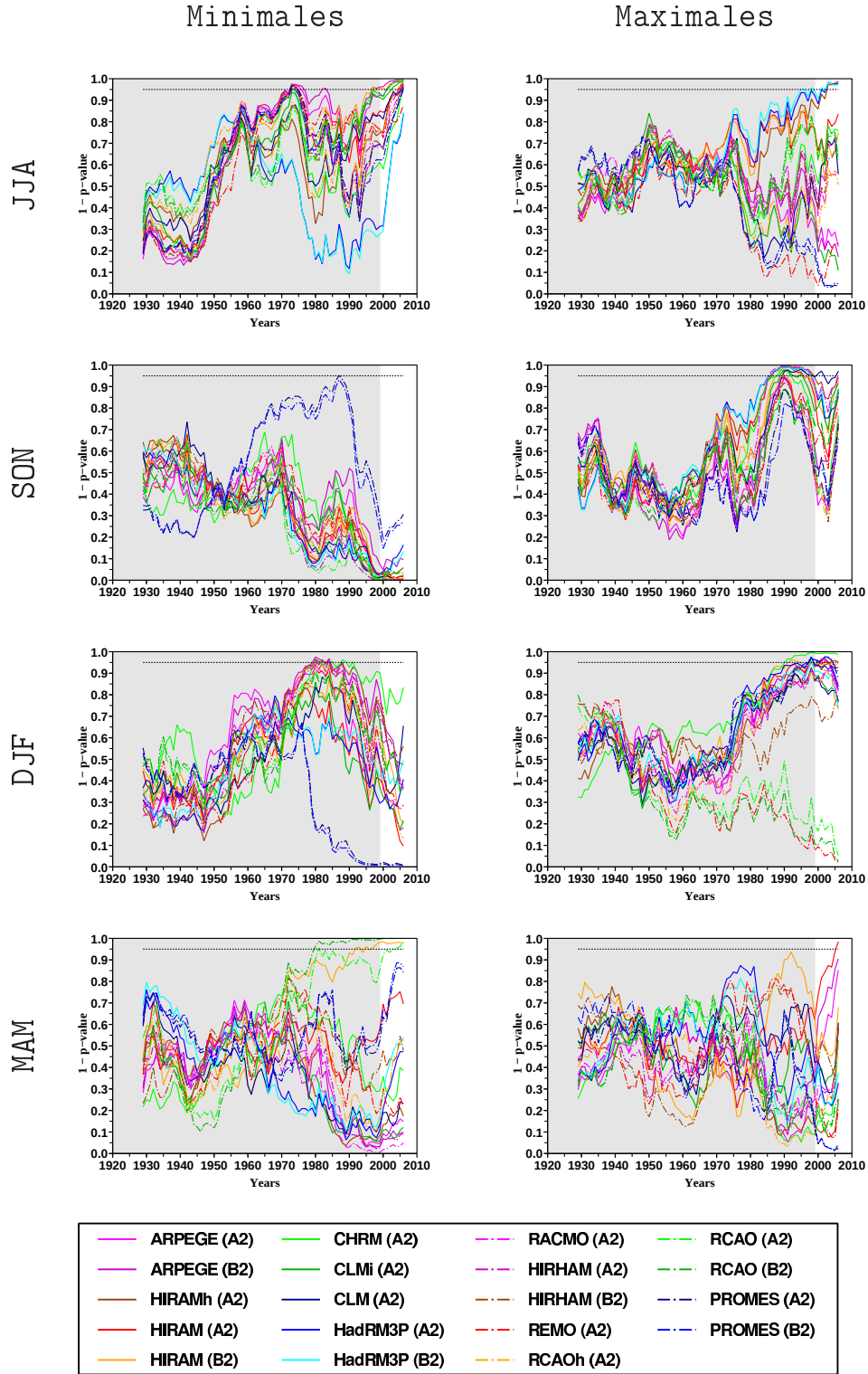


FIG. III.9 – Étude des températures en France avec les modèles de PRUDENCE. La méthode ROF est appliquée avec les signaux spatiaux (vecteurs g) simulés par les différents modèles régionaux ayant participé au projet PRUDENCE. On distingue les signaux déduits de scénarios A2 de ceux déduits de scénarios B2. Huit variables sont distinguées, comme au III.1.4 : températures minimales et maximales, pour chacune des quatre saisons. Les conventions de représentation graphique sont les mêmes que pour la Figure III.8.

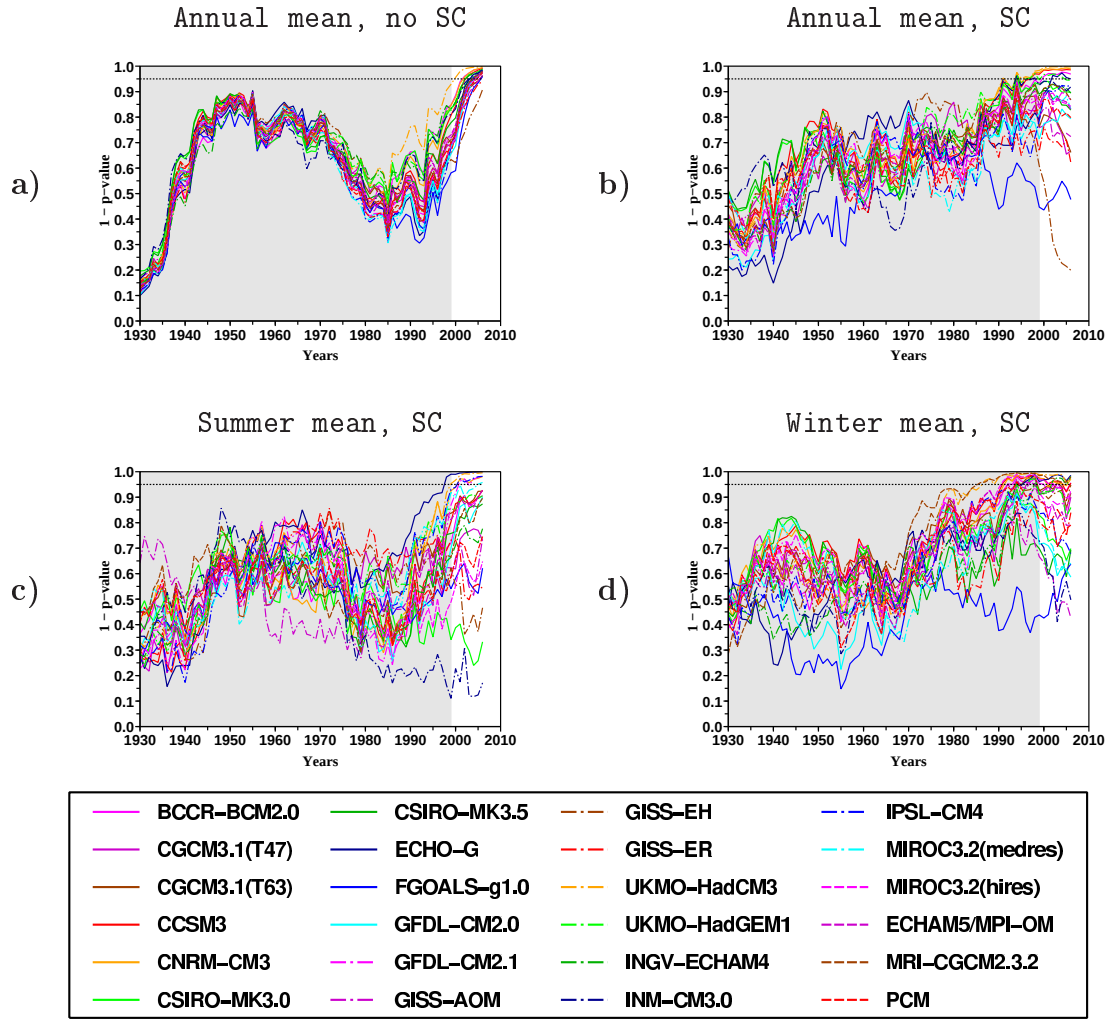


FIG. III.10 – **Résultats sur le domaine Méditerranée.** La méthode ROF est appliquée aux données de températures sur le domaine Méditerranée, en utilisant les différents signaux spatiaux simulés par les CGCMs ayant participé au projet CMIP3. Les conventions graphiques sont les mêmes que pour la Figure III.8. L'acronyme SC désigne ici l'opération de centrage spatial.

sur une grille régulière. Enfin les mêmes types de traitements sont appliqués, à savoir la prise en compte de moyennes mobiles de 30 ans dans la variable de détection, et l'utilisation, ou non, d'une opération de centrage spatial.

Une spécificité de l'étude du domaine Méditerranée réside toutefois dans la représentation de la variabilité interne qui est utilisée. Comme indiqué au II, l'effet de persistance climatique est plus important, en certain points de ce domaine, que celui observable sur le territoire national. De ce fait l'ensemble des résultats présentés le seront dans le cadre « conservatif » où la variabilité interne évolue dans le temps de la même façon qu'un processus AR1 de coefficient $\alpha = 0.4$ (cf II.3.3).

Les principaux résultats de cette étude sont illustrés Figure III.10.

La Figure III.10a) représente les résultats obtenus en étudiant les moyennes annuelles sans centrage spatial, et peut donc être comparée à la Figure III.6. Deux commentaires peuvent en être exhibés. Premièrement, un signal de changement est détecté pour une grande majorité de modèles climatiques sur la fin de la période. Cependant cette détection est plus tardive et nettement moins probante que dans le cas strictement français. Une analyse un peu plus détaillée montre qu'à « hypothèse constante », c'est-à-dire sans prise en compte de la persistance, les résultats sont

nettement plus proches. Un léger retard dans l'apparition du signal demeure toutefois observable dans le cas méditerranéen, en dépit du fait qu'il s'agisse d'un domaine de taille plus grande, et donc sur lequel on pourrait penser que le rapport signal sur bruit est plus élevé. Deuxièmement, on peut remarquer que dans le cas méditerranéen, la forme de l'évolution de la variable de détection est celle d'un tilde, et donc se rapproche davantage de la forme de la courbe des températures moyennes sur la période. En particulier, l'effet filtrant, ou lissant, de la méthode ROF, mis en évidence Figure III.6, n'est plus véritablement efficace ici.

La Figure III.10b) représente les résultats équivalents, obtenus avec application d'un centrage spatial, et constitue donc l'analogue de la Figure III.8. Cette figure montre que le seuil de détection est dépassé, sur la fin de la période, pour plusieurs des modèles considérés, alors que de nombreux autres modèles conduisent à une p -value relativement faible (souvent de l'ordre de 0.1). Cette Figure III.10b) indique notamment une cohérence des résultats obtenus avec les différents modèles (issus du projet CMIP3) largement supérieure à celle obtenue avec les mêmes scénarios sur le domaine France, illustrée Figure III.8c). Si les résultats exprimés en termes de p -value peuvent sembler relativement modestes, il faut de nouveau rappeler l'influence du choix du coefficient α du processus AR1 utilisé pour représenter la variabilité interne. Le II.3.3 indique que $\alpha = 0.4$ est une valeur maximale pour ce coefficient, et l'utilisation du même algorithme avec une persistance plus faible, par exemple $\alpha = 0.2$, conduit à une détection significative pour 20 des 24 modèles utilisés, détection qui est parfois très significative (p -value $< 10^{-3}$).

Ces résultats permettent donc de conclure avec une relative confiance à la détection d'un signal de changement de la distribution spatiale des températures annuelles sur le domaine Méditerranée. Ce résultat est particulièrement intéressant car les précédentes études de détection menées sur cette région avec des approches spatiales ou spatio-temporelles n'avaient pas permis d'aboutir à une telle conclusion (voir notamment Stott et al., 2004 et Zhang et al., 2006). De plus, il est relativement satisfaisant d'aboutir à un tel résultat par le biais d'une méthode de détection basée sur la recherche d'un signal spatial. Comme nous le détaillerons plus tard, ce type d'approche est relativement exigeant pour les CGCMs, puisque, notamment, la modélisation des gradients spatiaux de réchauffement à l'échelle régionale n'est pas nécessairement aisée pour des modèles globaux, et le domaine méditerranéen est de taille relativement modeste à l'échelle planétaire.

Les figures III.10c) et III.10d) montrent les résultats obtenus en appliquant la même procédure de détection aux moyennes estivales et hivernales, respectivement. Dans chacun des deux cas, plusieurs signaux sont détectés, mais la dispersion demeure relativement importante, et la grande majorité des signaux ne sont pas détectés. En outre, bien que cette dispersion soit plutôt moins importante que dans le cas de la France, elle perdure en diminuant la valeur attribuée à la persistance, ce qui ne permet pas d'apporter une conclusion générale sur la détection d'un signal de changement dans ces deux cas. Bien que ne permettant pas de conclure, ces résultats sont malgré tout encourageants, puisque la tendance semble aller dans le sens des signaux recherchés notamment pour les températures hivernales.

III.4.2 Rôle des « petites » composantes principales

Le but de ce III.4.2 est de revenir sur la méthode ROF, présentée au III.1, à la lumière de l'exemple méditerranéen, afin de discuter du rôle des « petites » composantes principales dans cette approche. Par « petites » composantes principales, nous entendons ici les composantes principales associées à des faibles variances. Comme nous allons le voir cette analyse n'est pas sans conséquences sur la compréhension des résultats obtenus sur le domaine Méditerranée.

Comme nous l'avons déjà évoqué (III.1), la distinction essentielle entre la méthode ROF et l'adaptation classique de la méthode des empreintes digitales concerne le traitement des modes de « faible » variance. Dans les cas de l'adaptation classique, les arguments avancés pour justifier de

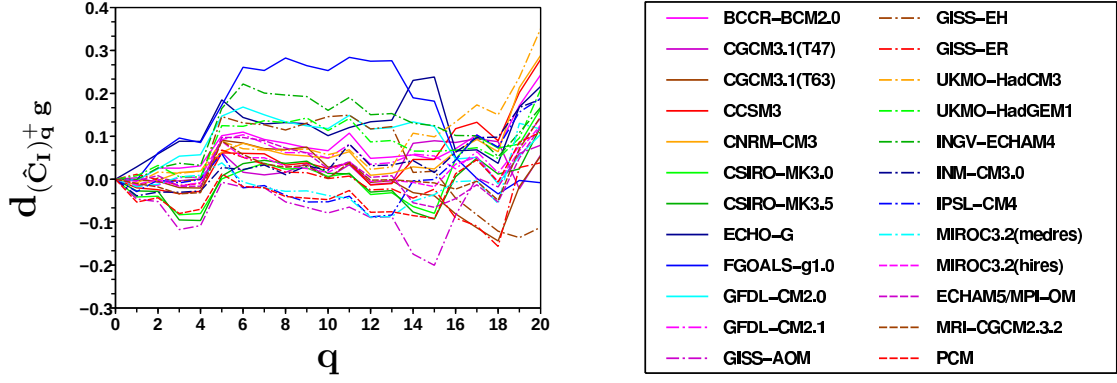


FIG. III.11 – **Contributions des composantes principales à la variable de détection ROF** $d_{\hat{C}_I^{-1}g}$. La contribution de chaque composante principale à la variable de détection ROF $d_{\hat{C}_I^{-1}g}$ est représentée par le biais de la somme partielle $d_{(\hat{C}_I)^+q}g$ (cf texte), vue comme une fonction de q .

l'élimination de ces modes concernent la nécessaire réduction de la dimension du problème, le fait que les changements climatiques attendus constituent avant tout un signal de « grande échelle » se portant sur les premières composantes principales, et le caractère très bruité des « petites » composantes principales. A contrario, la méthode ROF permet de maximiser la puissance du test finalement obtenu. De ce point de vue, la méthode ROF va jusqu'au bout de la démarche des empreintes digitales optimales : en cherchant à maximiser le rapport signal sur bruit, on est en fait amené à rehausser le poids donné aux « petites » composantes principales, relativement à celui donné aux « grandes ». L'adaptation classique cherche également à maximiser le rapport signal sur bruit (puisque c'est l'idée de la méthode des empreintes digitales optimales), mais commence pour cela par maximiser le bruit (en retenant les composantes principales de plus grande variance), ce qui n'est pas nécessairement efficace. On peut également remarquer que la prise en compte des « petites » composantes principales n'est pas obligatoirement contradictoire avec le fait de rechercher un signal de « grande échelle », mais revient simplement à le rechercher y compris dans des modes de faible variance, lorsqu'il s'y projette. Il peut donc être utile de tenir compte de ces composantes principales, bien que ce soit contraire à l'intuition.

Dans la pratique, l'apport relatif de chacune des composantes principales à la variable de détection utilisée peut être évalué. En adaptant les notations de l'Appendice III.1.6.C du III.1, désignons par $\hat{\lambda}_i^2$, $\hat{g}_i$ et $\hat{\psi}_i$, respectivement, les valeurs propres rangées par ordre décroissant de la matrice $\hat{C}_I$, et les coordonnées de g et ψ dans la base orthonormée des vecteurs propres associés. Pour un vecteur ψ testé, la variable de détection $d_{\hat{C}_I^{-1}g}$ peut donc se décomposer :

$$d_{\hat{C}_I^{-1}g} = \langle \psi, \hat{C}_I^{-1}g \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\psi}_i \hat{g}_i}{\hat{\lambda}_i^2}. \quad (\text{III.53})$$

Dans une telle décomposition, chaque terme $\frac{\hat{\psi}_i \hat{g}_i}{\hat{\lambda}_i^2}$ correspond à la contribution, dans la variable de détection $d_{\hat{C}_I^{-1}g}$, de la $i^{\text{ème}}$ composante principale.

Évaluons donc ces contributions dans le cas de l'étude des températures sur le domaine Méditerranée. L'analyse est faite ici sur la dernière valeur observée, c'est-à-dire que le vecteur ψ pris en compte est la moyenne des températures, en chaque point d'étude, sur la période 1977-2006 (à laquelle est retranchée la moyenne de référence calculée sur la période 1900-1969).

La Figure III.11 représente le détail des contributions des composantes principales, en représentant les sommes partielles

$$\sum_{i=1}^q \frac{\hat{\psi}_i \hat{g}_i}{\hat{\lambda}_i^2} = d_{(\hat{C}_I)_q^+} g, \quad (\text{III.54})$$

en fonction de q . Il faut tout d'abord noter que ce graphique représente des variables de détection « tronquées » et non des p -values, comme les autres graphiques. En effet, la procédure de bootstrap utilisée pour calculer la p -value n'a pas été validée pour ce type de test, ce qui ne permet pas de représenter directement des p -values. On peut toutefois remarquer que pour la valeur $q = p$ (la plus à droite sur le graphique), la variable de détection totale $d_{\hat{C}_I^{-1}} g$ est représentée, et les modèles se trouvent donc approximativement ordonnés de la même façon que pour la dernière année représentée sur le graphique III.10b). Les faibles différences s'expliquent par le fait que les distributions sous H_0 dépendent (faiblement en pratique) du signal recherché. Un autre élément permettant de comparer les deux figures III.10b) et III.11 consiste à remarquer que les distributions sous H_0 étant toujours centrées, la valeur 0 pour une variable de détection correspond à une p -value de 0.5.

Différents constats peuvent être établis à partir de la Figure III.11. Tout d'abord, les contributions relatives de chaque composante principale varient de façon assez irrégulière sur l'ensemble du spectre. Par exemple, les composantes 4 et 13 apportent très peu de signal, puisque les variables de détection évoluent très peu quand on ajoute ces deux composantes. Inversement, certaines composantes ont un rôle important, et parmi elles les numéros 5 et 16. Le principal enseignement est que les composantes de rang élevé contribuent, dans l'exemple qui nous occupe, au moins autant que les premières. En particulier, on observe que l'accord des résultats obtenus avec les différents modèles serait sensiblement dégradé si les deux plus petites composantes n'étaient pas prises en compte. Ce type de constat est inhabituel en climat, plutôt contre-intuitif et peut éventuellement être jugé perturbant.

On peut donc s'interroger sur le bien-fondé d'une telle mécanique. Tout d'abord, à titre de comparaison, l'écart-type selon la première composante principale est d'environ 1°C, alors qu'il est de 0.15°C pour la plus petite, ce qui relativise son caractère négligeable. Ensuite, il est intéressant de constater l'accord des différents modèles entre eux concernant le signe des changements à venir selon ces composantes. Ainsi, selon les composantes numéros 19 et 20 (les deux plus petites), 22 des 24 modèles simulent le même signe d'évolution en réponse au forçage anthropique. L'accord des modèles sur le sens du changement est, en particulier, nettement moins bon selon chacune des quatre premières composantes principales. La figure III.11 montre en outre que l'anomalie de température observée sur la fin de la période est compatible avec les scénarios climatiques. On peut donc être tenté de conclure que, pour le cas qui nous occupe, la méthode « Optimal Fingerprint » permet effectivement de réduire le poids des premières composantes principales, qui sont par définition davantage bruitées, au profit de directions dans lesquelles le rapport signal sur bruit est plus favorable.

Enfin, on peut souhaiter prolonger cette interrogation sur les causes physiques de ce constat. S'il est couramment admis que les changements climatiques sont un phénomène de grande échelle, l'une des caractéristiques les plus unanimes des scénarios climatiques concerne le contraste terre-mer et le fait que le réchauffement soit plus marqué sur continent. Cet effet continental peut être assimilé à une discontinuité spatiale du réchauffement et en ce sens n'est pas nécessairement assimilable à un signal de grande échelle. C'est singulièrement le cas sur la région Méditerranéenne, où les continents sont relativement découpés. Plus qu'un signal « régulier » en espace, cet effet peut a priori se projeter sur des composantes principales de tout ordre, et expliquer l'accord relatif des modèles selon ces mêmes composantes.

Quelques premiers éléments, non détaillés ici, semblent indiquer que ce contraste explique en grande partie la « forme » des signaux spatiaux déduits des modèles climatiques, après soustrac-

tion du terme de réchauffement uniforme. C'est notamment le cas pour la projection des signaux de changement simulés selon les deux plus petites composantes. Cependant, il serait prématuré de considérer que le résultat obtenu est directement lié à cet effet. En particulier, le jeu de données observées utilisé calcule, pour les mailles recouvertes partiellement d'océan et de continent, une pondération des observations terrestres et maritimes qui n'est pas directement liée à la fraction de maille couverte par chacun de ces deux types de surfaces. Une analyse plus développée sera donc nécessaire à l'établissement du rôle du contraste terre-mer dans les observations, et donc à la démonstration du possible rôle de ce contraste dans le succès de la méthode ROF sur le domaine Méditerranée. Cela constitue une piste de réflexion pour l'avenir.

Chapitre IV

Détection de signaux temporels

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une deuxième stratégie de détection, basée sur la recherche dans les observations, d'une empreinte temporelle de changements. Comme précédemment, le signal recherché est issu de scénarios climatiques réalisés avec des modèles de climat. Comme nous allons le voir cependant, plusieurs arguments peuvent être avancés pour justifier d'une telle stratégie. D'une part, l'estimation d'un signal de réponse temporelle est facilitée par le caractère *régulier* ou *lisse*, dans le temps, de la réponse attendue au forçages anthropiques. D'autre part, une telle approche ne nécessite pas une estimation extérieure de la variabilité interne, dont on a vu précédemment qu'elle pouvait poser quelques difficultés.

La mise en œuvre de cette stratégie de détection repose directement sur le modèle statistique (II.12), ici restitué

$$\psi_{s,t} = m_s + g_s \mu_t + \varepsilon_{s,t}, \quad (\text{II.12})$$

dans lequel le terme μ est supposé connu, et dans lequel les hypothèses concernant le terme aléatoire ε sont celles décrites au II.3. La méthode proposée permet, en quelques mots, d'estimer le vecteur g , et d'en évaluer la significativité. Au préalable, le signal temporel μ est calculé à partir d'une simulation climatique couvrant la même période que les observations, en utilisant une technique de lissage (ici des fonctions de lissage *splines*).

L'articulation de ce chapitre est relativement similaire à celle du précédent. Dans un premier temps, la partie IV.1 présente en détail le cadre statistique et la méthode proposée. Une application aux séries de températures homogénéisées sur la France illustre la présentation théorique. Ce IV.1 reprend un article soumis à la revue *Climate Dynamics*. Dans un second temps, la partie IV.2 détaille beaucoup plus largement les résultats obtenus avec cette méthode sur les domaines France et Méditerranée, et pour différentes variables. Ces résultats, obtenus sur les mêmes jeux de données que ceux étudiés au chapitre précédent, permettent une comparaison aux résultats obtenus en utilisant l'approche *spatiale* présentée au Chapitre III. Cette comparaison est menée en détail à la partie IV.3, qui clôture ce chapitre.

La méthode introduite en détail dans ce chapitre, et plus particulièrement au IV.1 sera dénommée *méthode TOD* (pour « Temporal Optimal Detection ») dans la suite de ce manuscrit.

IV.1 A method for regional climate change detection using smooth temporal patterns

Ribes, A., Azaïs, J.-M., Planton, S.
Article soumis à *Climate Dynamics*

Résumé

Cet article introduit une nouvelle méthode pour la détection des changements climatiques, qui est une alternative complémentaire et originale à l'algorithme des « empreintes digitales optimales ». La nouvelle méthode repose sur la recherche d'un signal temporel lisse de réponse au forçage anthropique. Le test statistique principal, utilisé pour savoir si ce signal temporel est significativement présent dans les observations, est différent du test des « empreintes digitales optimales ». Cette méthode permet d'étudier les caractéristiques spatiales de la variable considérée, mais ne nécessite pas d'estimer la distribution spatiale de la réponse au forçage. De la même façon, les propriétés spatiales de la variabilité climatique interne n'ont pas besoin d'être estimées. L'estimation de ces quantités étant difficile à l'échelle régionale, la méthode proposée est particulièrement bien adaptée à cette échelle.

L'efficacité de la méthode est illustrée par une application sur des données observées homogénéisées en France. Une étude de détection multi-modèle est réalisée sur ces données, en utilisant de nombreux Modèles de Circulation Générale pour estimer les signaux temporels. De nouveaux résultats sont obtenus dans ce cadre, et la sensibilité de la méthode, par rapport au choix du modèle et au calcul des signaux temporels, est discutée. La capacité de la méthode à estimer la distribution spatiale des changements associée aux signaux temporels prescrits est également illustrée dans ce cas.

Abstract

This paper introduce a new method for climate change detection, that is an original and complementary alternative to the “optimal fingerprint” algorithm. The new method is based on smooth temporal response pattern to anthropogenic forcing. The main statistical test, used to determine whether this temporal signal is significantly contained in the observations, is different from the “optimal fingerprint” one. This method allows to study the spatial characteristics of the climate field considered, but doesn't require to estimate the spatial distribution of the response to the forcing. The spatial properties of the internal climate variability doesn't need to be estimated either. The estimation of such quantities being very challenging at regional scale, the proposed method is particularly well-suited for such scale.

The efficiency of the method is illustrated by applying it on a real homogenized dataset of temperature over France. A multimodel detection is performed in this case, using many General Climate Models for estimating the temporal patterns. New results are highlighted in this case and the sensitivity of the method is discussed, relatively to the computation of the temporal patterns and to the choice of the model. The ability of the method to provide an estimate of the spatial distribution of the change following the prescribed temporal patterns is also illustrated in this case.

IV.1.1 Introduction

Since the establishment of the Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), many detection and attribution studies have been carried out in order to quantify the anthropogenic influence on climate. These study have led to the writing of Chapter 9 (Hegerl et al., 2007b) of the IPCC Fourth Assessment Report (IPCC, 2007).

As mentioned in this report, a perfect attribution study would require controlled experiments with the climate system in order to highlight a human influence. Since this is not possible, attribution studies are usually based on expected responses to external forcings, that are commonly estimated using General Circulation Models (GCMs). A careful comparison between the observations, the simulated responses to the external forcings, and the simulated internal climate variability is then required.

The case of detection study is slightly different, because any observed change can be studied and shown to be inconsistent with internal climate variability, although it doesn't correspond to an expected response to an external forcing. However, many detection studies, like this one, try to specifically detect a human influence, and are based on expected change as well as attribution studies.

The most popular method for detection and attribution has been introduced by (Hasselmann, 1993), and is usually referred to as the "optimal fingerprint". It can be presented as an optimal regression of the observations on the response guess-patterns of some external forcings (Allen et Tett, 1999). The amplitude of each response signal in the observation is then evaluated, as well as the associated incertitude, in order to decide on detection and attribution. To be optimal, this procedure also require an estimate of the internal climate variability. Because observed datasets are usually too short and contaminated by external forcings, this estimate is usually taken from GCMs runs (control runs or simulations in which the response to the forcings is removed). This method has been used first with spatial patterns (e.g. Hegerl et al., 1996), and afterward with spatio-temporal patterns (e.g. Stott et al., 2001).

Since the IPCC Third Assessment Report, the subject of detection or attribution studies have moved from global mean temperature to other variables, or smaller scales (see Hegerl et al., 2007b for a large review). Following this evolution, the estimation of the spatial response patterns of the responses, as well as the estimation of the internal climate variability, have become very difficult challenges. Moreover, failing in estimating the effective patterns could strongly deteriorate the results.

Due to these difficulties, we have searched for a procedure that is not based on so demanding requirements, and that allows to reduce the role of GCMs outputs. Some authors have yet studied this problem, notably by focusing on the temporal evolution, as we propose to do. Stone et Allen (2005a, 2007a) used tuned Energy Balance Models (EBMs) to reproduce the response of the global annual mean temperature to each forcing. A classical detection and attribution procedure can then be performed on the temporal evolution of this temperature. However, the spatial properties of the signal are not studied, and an external estimate of the internal climate variability is still needed. Studies based on non-parametric approach have also been led. For example, Schneider et Held (2001) use a discriminant analysis to highlight some aspect of the temperature evolution over the last century. Some changes are shown to be significant, but they are not directly related to the human influence.

In order to perform a detection study to a sub-regional scale, that is in our case over France, we here propose an alternative method, based on smooth temporal patterns, that can be estimated from global or regional mean temperature. This method uses a time-space separability assumption, and avoids the difficult estimation of the spatial structure of both the response to the forcing and the internal variability. Another advantage is that the method allows to estimate the spatial distribution of the change following the prescribed temporal pattern, and to decide whether it is significant.

The methodology section will first present the dataset used, and the statistical framework, hypothesis and test. Afterward, some results are presented, about the detectability of a human influence over France on the annual mean temperatures, and about the spatial distribution of the changes. The results are reinforced by performing a multimodel detection.

IV.1.2 Methodology

IV.1.2.1 Data

We will use two different datasets in this study : an observed dataset, and a set of climate scenarios.

About the observations, a detection study requires data of high quality, covering a period as long as possible, and with a quite high spatial density. Such a dataset has been produced at Météo France using an adapted penalized log-likelihood procedure (Caussinus et Mestre, 2004). These data cover the entire 1900-2006 period, with about 60 stations.

Regarding the estimate of the climate change signal, we used the set of simulations used in the IPCC AR4, and provided by the Program for Climate Model Diagnosis and Intercomparison (<http://www-pcmdi.llnl.gov/>). Our study deals with near surface temperature, so we used results of each GCM providing 2m temperatures for both XXth century and the 2000-2006 period with an A1B scenario.

IV.1.2.2 Statistical framework

In this paper, the observed climate will be represented by a $S \times T$ -dimensional matrix $\psi = (\psi_{s,t})$, denoting by s and t the spatial and temporal indices. The temporal index t takes one value per year, so that $\psi_{s,t}$ denotes the observation at the station s , the year t . ψ is considered to be a random matrix.

Three assumptions are made about the kind of climate change signal that can affect ψ , and about the statistical properties of ψ .

Firstly, following (Hasselmann, 1993), we assume the decomposition :

$$\psi = \psi^0 + \psi^{(s)} + \phi, \quad (\text{IV.1})$$

where ψ^0 denotes the expectation $E(\psi)$ without change, $\psi^{(s)}$ denotes the climate change signal, and ϕ denotes a centered noise due to internal climate variability. The expectation term ψ^0 is not always explicitly written in such a decomposition, but we here prefer to write it in order to make the term ϕ centered. Note that the $\psi^{(s)}$ term is a consequence of external forcing, and it is not random.

This decomposition especially assumes that the internal variability is the same with or without climate change. This assumption might be debated, but it is here only used as an approximation, over the studied period, say a lightly extended XXth century.

Secondly, a time-space separability assumption is made on the signal term, writing :

$$\psi_{s,t}^{(s)} = \mu_t g_s, \quad (\text{IV.2})$$

where μ and g are a T -dimensional and a S -dimensional vectors representing, respectively, the temporal pattern and the spatial pattern of climate change. Basically, the idea of a temporal pattern detection is to assume that μ is known whereas g is unknown. Such a separability assumption can be seen as a first order Taylor polynomial approximation on the expectation $E(\psi)$, due to a small perturbation. Some non-linearities in the climate system can obviously make it wrong, but it is an acceptable approximation as long as the climate change is “small”. As for the previous one, we consider that it is an acceptable assumption over the period we studied.

Thirdly, we assume some covariance structure for the random term ϕ . Without any assumption, the covariance of ϕ is a tensor of order 4, some terms of which can be small. We here use a space-time separability assumption, similarly to (IV.2) that can be written :

$$\text{Cov}(\phi_{s,t}, \phi_{s',t'}) = C_{s,s'}^{(S)} C_{t,t'}^{(T)}. \quad (\text{IV.3})$$

We also assume that ψ has a stationary autoregressive structure of order one (AR1) in time, i.e. :

$$\phi_{s,t} = \alpha \phi_{s,t-1} + \tilde{\phi}_{s,t}, \quad (\text{IV.4})$$

where, for fixed s and for varying t , the $(\tilde{\phi}_{s,t})$ are independent identically distributed random variables.

Such an assumption, and in particular the choice of an AR1 process, is worth to be discussed. The AR1 processes have been widely used in climate research because they may be understood as discretized solution of a first-order differential equations (see (Von Storch et Zwiers, 1995) for example). One specificity of these processes is to have an exponentially decreasing autocorrelation function, so that they are called "short-term" memory processes. The problem of the choice of the statistical process used to represent the term ϕ can be summarized as follows. On the one hand, we need to take into account the climatic persistence because ignoring it yields to a non conservative test. On the other hand, one can wonder whether a long range memory effect is statistically evident.

Because long range external forcings have impacted the statistical properties of the observed time-series, we chose to address this last question analyzing GCMs control runs. Although the IPCC-AR4 models show some discrepancies regarding those statistical properties, there are no evidence that the assumption of an exponentially decreasing autocorrelation function is unacceptable when studying the annual global mean temperature. The study of annual mean temperature over France even shows a smaller memory effect, and most of the GCMs simulate a coefficient α smaller than 0.2. Finally, we choose to use this value $\alpha = 0.2$, probably overestimating lightly the real coefficient α . But this overestimation makes the detection test more conservative.

At last, we assume the term $\tilde{\phi}$ to be normally distributed, that is a usual assumption for annual mean temperature.

Given these notations, a detection study consists in testing statistically the hypothesis

$$H_0 : \psi^{(s)} = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Using (IV.2), H_0 can be written

$$H_0 : \mu g = 0. \quad (\text{IV.6})$$

As mentioned previously, the detection of a temporal pattern will assume that the vector μ is known, and then will perform a test of $H_0 : g = 0$ against $H_1 : g \neq 0$.

These two steps are treated in the following : the next section discuss how to estimate the vector μ from climate runs, and then we describe the statistical test that has been used, given μ .

IV.1.2.3 Evaluating μ

Strictly speaking, a detection study doesn't require a specific μ . As suggested by the definition of "climate change detection" given in the IPCC AR3 (IPCC, 2001), detection only requires to show that an observed phenomenon is unlikely due to internal climate variability. Then, a detection study might be led with any temporal pattern μ . However, in our case, we especially search for the temporal pattern response of the climate system due to the anthropogenic forcing. Detecting in the observation this specific pattern doesn't allow to attribute the change to the human activity but provides a stronger result than detecting another change.

We chose to evaluate μ from climate model scenarios, over the studied 1900-2006 period, assuming that the GCMs are able to simulate a correct pattern. In a similar way, many detection and attribution studies are based on spatial or spatio-temporal "guess-pattern", also derived from climate model scenarios. Note that such a "guess pattern" is not right or wrong, but can lead to a less efficient detection procedure if it differs largely from the real pattern, for example due to systematic GCM errors.

Another option would have been to estimate μ directly from the observed mean series. However, in such a case, a change can be detected, but it is much more difficult to interpret its causes, and especially to link it with the human activities. Here, we especially search for the response signal to the human induced external forcing, that can only be computed by models. This doesn't allow to attribute the change to the human activities, but give a stronger result than detecting any change.

One difficulty with such an approach is to identify the impacts of the human activities in presence of internal variability, and other external forcings such as volcanic aerosols or changes in solar activity. A natural way to filter out a large part of the internal variability when evaluating μ is to assume this pattern to be smooth. Such an assumption can be justified by the fact that the largest part of the anthropogenic forcing is due to greenhouse gases emissions, that have been raising up little by little over the XXth century. Assuming that the real temporal pattern is smooth, we will compute, from each climate scenario, a response of the anthropogenic forcing that is rather regular.

It must be noted that requiring smoothness, we increase the chances to successfully detect the change (by increasing the signal to noise ratio), but we do not perfectly estimate the anthropogenic climate change simulated by each scenario. Indeed, such a procedure allows to eliminate a large part of internal variability, but some low-frequency internal variability modes are still remaining in the smoothed estimate of μ . Similarly, the effects of non-anthropogenic forcings are not totally removed. Our confidence in detecting an anthropogenic signal is strong however, due to the consistency of the results, with models simulating different realizations of internal climate variability, and ignoring, or not, the other external forcings (see the discussion in Section IV.1.3).

It can be noted too that the anthropogenic influence related to the aerosols emissions is not totally taken into account by such a treatment. Indeed, the evolution of the anthropogenic aerosols concentrations hasn't been so regular over the century, so this study will mainly take into account the low frequency part of this signal.

Different methods can be proposed in order to highlight a smoothed pattern. We choose to apply a penalized estimation technique to the annual mean temperature time series (that can be global or regional). Denoting by (y_i) the years taken into account and T_i the temperature of the year y_i , we compute the function f minimizing the quantity :

$$\sum_{i=1}^n (T_i - f(y_i))^2 + \lambda \int_{y_1}^{y_n} f''(x)^2 dx. \quad (\text{IV.7})$$

The solution of such a minimization problem is known to be a spline function, that is a piecewise cubic polynomial function, that is twice continuously differentiable. Some algorithms are known to compute the solution.

One of the key-points of such a procedure is the choice of the coefficient λ . The greater λ , the smoother solution to (IV.7). In order to determinate a "good" value for this coefficient λ , we first apply this estimation procedure to the global annual mean temperature simulated by the GCMs over the period, estimating the coefficient λ via a cross-validation procedure. These λ estimates show large discrepancies, that highlight different statistical properties of the GCMs. Searching for the low-frequency climate change signal that is represented by all the GCMs, we finally preferred to overestimate lightly λ , choosing a value λ_0 close to the maximal one deduced from the GCMs. This choice, that is relatively arbitrary, is however discussed in Section IV.1.3, in particular using another value λ_1 slightly smaller than λ_0 . Note that λ_0 will be used for both global and regional patterns, assuming, for example, that the regional response to climate change has the same smoothness than the global one.

IV.1.2.4 Statistical test

The statistical model defined by (IV.1) and (IV.2) can be written :

$$\psi_{s,t} = \psi_s^0 + g_s \mu_t + \phi_{s,t} \quad (\text{IV.8})$$

The hypothesis of the statistical test we want to perform can be written :

$$H_0 : "g = 0", \quad \text{vs} \quad H_1 : "g \neq 0". \quad (\text{IV.9})$$

Equation (IV.8) allows to identify a multivariate regression model, in which the vector (μ_t) is known. However, the classical tests for this model cannot be applied directly, due to the dependencies between the $(\phi_{s,t})$, as t varies. So we first use a pre-whitening transformation (see for example (Von Storch et Navarra, 1999)). Writing :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{s,t} = \psi_{s,t} - \alpha \psi_{s,t-1}, & t = 2, \dots, T, \\ \tilde{\mu}_t = \mu_t - \alpha \mu_{t-1}, \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

and using (IV.4), we have the new statistical model :

$$\tilde{\psi}_{s,t} = (1 - \alpha) \psi_s^0 + g_s \tilde{\mu}_t + \tilde{\phi}_{s,t}, \quad t = 2, \dots, T. \quad (\text{IV.11})$$

Model (IV.11) is really a classical multivariate regression model, where the $(\tilde{\phi}_{s,t})$, as t varies, are independent, identically and normally distributed random vectors. t varying from 2 to T , only one observed year is "lost" in relation to the original model (IV.8). So, the tests of the hypothesis (IV.9) in the models (IV.8) and (IV.11) are very similar, and we will use (IV.11).

The Hotelling test is the most appropriate for testing (IV.9) in (IV.11). Indeed, this test allows to test one linear hypothesis against another, when the difference between the dimension of the considered hypothesis is equal to one, that is the case. We refer to Appendix IV.1.5.A, and (Anderson et al., 1972) for technical details about this test, but yet want to mention some characteristics. At first, this test is the equivalent of the Student test that is used for testing whether a coefficient is equal to zero in a one-dimensional regression model. Similarly to the Student case, the H_0 -distribution of the Hotelling test variable doesn't depend on the covariance matrix $C^{(S)}$. This is a big advantage of this method, because the estimation of this matrix is both necessary and difficult for approaches based on spatial or spatio-temporal patterns (see for example Allen et Tett, 1999, or Ribes et al., 2009). Furthermore, the Hotelling test variable is based on an estimate $\hat{g}$ of the vector g , that may provide some worthwhile additional information (see Section IV.1.3.3). It can be noted too that the Hotelling test has been shown to have optimal statistical properties (see Anderson et al., 1972), and cannot be applied on too small samples ($T > S$ is required).

Different applications of this test will be presented. In a first step, we will apply it on the whole dataset ψ . In a very simple way, we will also apply it on the annual mean temperature, just wondering whether the mean shows a significant evolution following the temporal pattern μ . In a second step, we will apply the test procedure to the sample $\bar{\psi}$, obtained after removing the spatial mean $\psi_{.,t}$ of each year, that is :

$$\bar{\psi}_{s,t} = \psi_{s,t} - \psi_{.,t}, \quad (\text{IV.12})$$

with

$$\psi_{.,t} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \psi_{s,t}. \quad (\text{IV.13})$$

In this way, we only study the spatial distribution of the temperature, that can be seen as the search for a regional climate change effect, after removing the global one. This last sample $\bar{\psi}$ will be referred to as "spatially centered sample". In contrast, the whole dataset ψ will be nominated "uncentered" dataset.

IV.1.3 Results

IV.1.3.1 Smoothed temporal pattern

The evaluation procedure presented in Section IV.1.2.3 is here applied thrice, for each one of the IPCC AR4 GCMs. The computation is first applied to the global annual mean temperature, using a rather strong smoothing parameter λ_0 , as described in Section IV.1.2.3. Afterward, the procedure is performed on the same data, but using a slightly smaller value λ_1 of λ , and finally, it is applied to regional annual mean temperature using λ_0 . We call “regional annual mean temperature” the annual mean temperature over the box $[8W, 10E] \times [40N, 52N]$: this study being focused on climate change detection over France, we have chosen a small box containing our region of interest to evaluate the “regional temporal patterns”.

All the resulting patterns are shown in Figure IV.1. The year 1900 (i.e. the first year of the studied period) is used as a reference in each case, in order to highlight the differences between the curves. This arbitrary choice doesn’t impact the interpretation, because the mean value of μ doesn’t matter in the statistical detection test. It can be noted that similarly, the test is invariant by a homothetic factor on the vector μ , that is to say that the amplitude of μ doesn’t matter either. Consequently, one can state that only the “form” of those patterns plays a part in the detection test, and needs to be interpreted.

In the case of global annual mean temperature strongly smoothed ($\lambda = \lambda_0$, Figure IV.1a), some general characteristics may be highlighted. All the curves show an increase of the temperature between 1900 and 2010, and especially over last 40 years. Most of the GCMs show an increase all over the century, but the behavior of the curves over the starting XXth century show some discrepancies. Two GCMs (FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0) show a temperature decrease before 1940, that is probably due to a model drift, that can be observed in the control runs of these GCMs. Among the other GCMs, we find different forms for the pattern μ : a warming that is close to linear (for example CNRM-CM3 or INM-CM3.0), a two-step warming (for example ECHAM5/MPI-OM or BCCR-BCM2.0), or a tilde form with a smaller increase over the middle of the century (for example ECHO-G or GFDL-CM2.0).

A large extent of such discrepancies might probably have been explained by the different treatment of some physical processes in the GCMs, as mentioned in Section IV.1.2.3. For example, the aerosol indirect effect is not taken into account in all GCMs, and has probably impacted the XXth century warming. Although there are different responses and different representation of physical processes, we will still use the whole set of patterns to apply the detection test in order to discuss the robustness of the main results.

When decreasing slightly the value of λ (setting $\lambda = \lambda_1$, Figure IV.1b), the differences between the patterns are increased. The form of some patterns remains quasi unchanged (for example CNRM-CM3 or both versions of CGCM3.1), whereas other patterns take more complicated forms (for example CCSM3 or GFDL-CM2.0). This result is not surprising, and it is directly the consequence of a softer smoothing.

In the case of regional annual mean temperature (using $\lambda = \lambda_0$, Figure IV.1c), the form of the patterns also shows larger discrepancies than in the global case with the same value of λ . For example, several models show a temperature decrease at a certain time. Similarly to the previous case, this result is not surprising, notably because the mean temperature over a relatively small area is more affected by internal climate variability. It can be seen however that excluding the FGOALS-g1.0 run, that is strongly affected by a climate drift, the differences between the various patterns μ are of the same order than in the global case.

In each case, the spread will be used to study the sensitivity of the results.

Note that strictly speaking, to compute the regional smoothed pattern of a GCM, and to observe that it has a different shape than the global one make the assumption of time-space separability invalid. Indeed, if such an assumption is true, the two patterns should be the same to

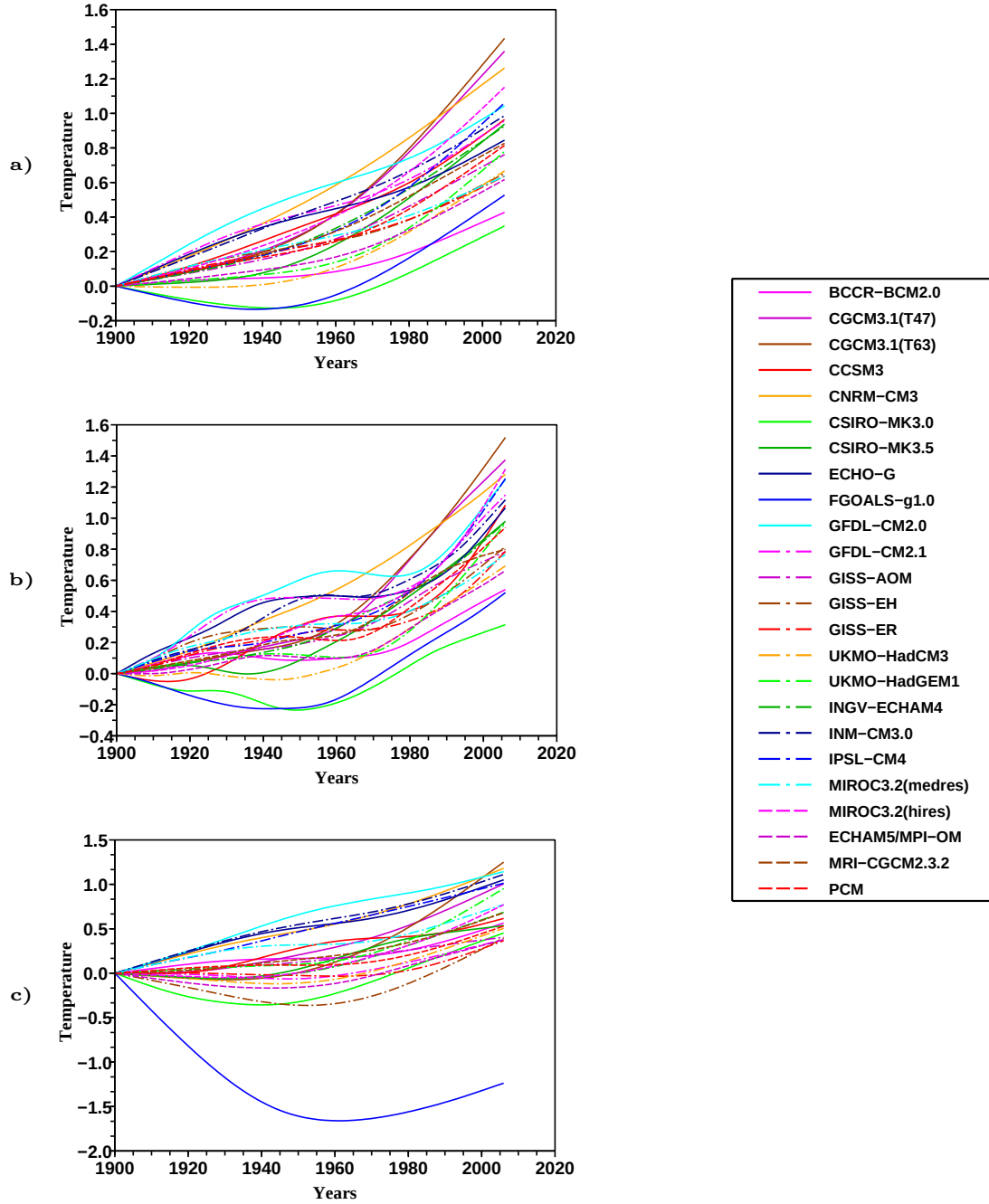


FIG. IV.1 – Temporal pattern μ evaluated from the IPCC AR4 GCMs. The figures represent the obtained smooth patterns as a function of time, using the year 1900 as a reference. Left figures represent the patterns deduced from global annual mean temperature, with $\lambda = \lambda_0$ (a) and $\lambda = \lambda_1$ (b). The figure (c) represents the patterns deduced from regional annual mean temperature. The evaluation is performed from XXth century run and A1B scenario of the IPCC AR4 GCMs, using the same denomination than in (IPCC, 2001).

a multiplicative factor. Some possible explanations and additional remarks must be mentioned however. Firstly, the difference can be due to a regional internal climate variability noise : to consider the mean over a relatively small area increases the impact of the noise term. Secondly, although the separability assumption is considered unacceptable at the global scale, it can be still acceptable at the regional scale where it is used. In particular, assuming a time-space separability at the regional scale is a weaker assumption than assuming it at a global scale. Thirdly, we will apply the detection test with both the global and the regional patterns, in order to discuss the results.

IV.1.3.2 Detection test

This section presents the main results of our study. In order to show the evolution of the signal over the time, we applied the test to "truncated" datasets :

$$\psi_Y = (\psi_{s,t})_{1 \leq s \leq S, 1900 \leq t \leq Y}, \quad (\text{IV.14})$$

where Y is smaller than 2006. For example, we will call " p -value in 1970" the p -value of the statistical test applied to the data over the period 1900-1970, that is ψ_{1970} . The detection result, that is the result when applying the test to the whole studied period 1900-2006, will then be represented, on the graphics, on the year 2006.

Due to the irregular distribution of the data over the country, we artificially reduce the number of stations using a clustering algorithm. So the closest stations are grouped into a single pseudo-station. This technique especially allows to chose the number of pseudo-stations that will be used, that is to say to reduce virtually the size S of the sample ψ . For this reason, we will often talk about pseudo-stations. We will mainly used a dataset "reduced" to 10 pseudo-stations in this section, but we will discuss the sensitivity of the results to this choice, notably by showing the results with 50 pseudo-stations. Note that the Hotelling test requiring $T > S$, a reduction of the spatial dimension S also allows to perform the test earlier and to present results over a larger period.

The detection test is first applied to the spatially uncentered observed dataset ψ , using the patterns represented in Figure IV.1a. Results are represented in Figure IV.2a, in terms of p -value. This figure shows that for 22 GCMs (all except FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0), the H_0 hypothesis is rejected after the year 1980. This rejection is extremely strong when applying the test on the 1900-2006 period, with a p -value smaller than 10^{-8} . On the contrary, there is no significant detection before the year 1980. One can find this result surprising, but it can be partially explained by the choice of the coefficient of the AR1 process used to represent internal variability. Indeed, as mentioned in IV.1.2.2, we chose $\alpha = 0.2$, overestimating lightly the value simulated by GCMs, and then making our test more conservative.

For FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0, the detection becomes significant later, but it is also very strong over the whole period. These 2 GCMs, as mentioned in Section IV.1.3.1, simulate a cooling at the beginning of the century. This probably explains that their patterns don't match the observations as well as the others, the appearance of the warming during the last 30 years being partially masked.

These results should be compared with the results of the same test, applied on the one-dimensional annual mean temperature series (Figure IV.2b). This test shows that a very significant signal is found on the annual mean value time series. This is clearly the effect of the global warming, that becomes extremely sensitive during the 1980's. The trend is very less strong before this period. Note that in this case, the test can be performed from 1902, because the spatial dimension S of the annual mean is equal to 1 (see previously and Section IV.1.2.4).

One of the key point of this study is to highlight the similarity of the two graphics of the Figure IV.2 : the curves show the same evolution and the final p -values are very close. So, a one-dimensional signal, that is the regional mean, allows to explain the very strong signal observed on

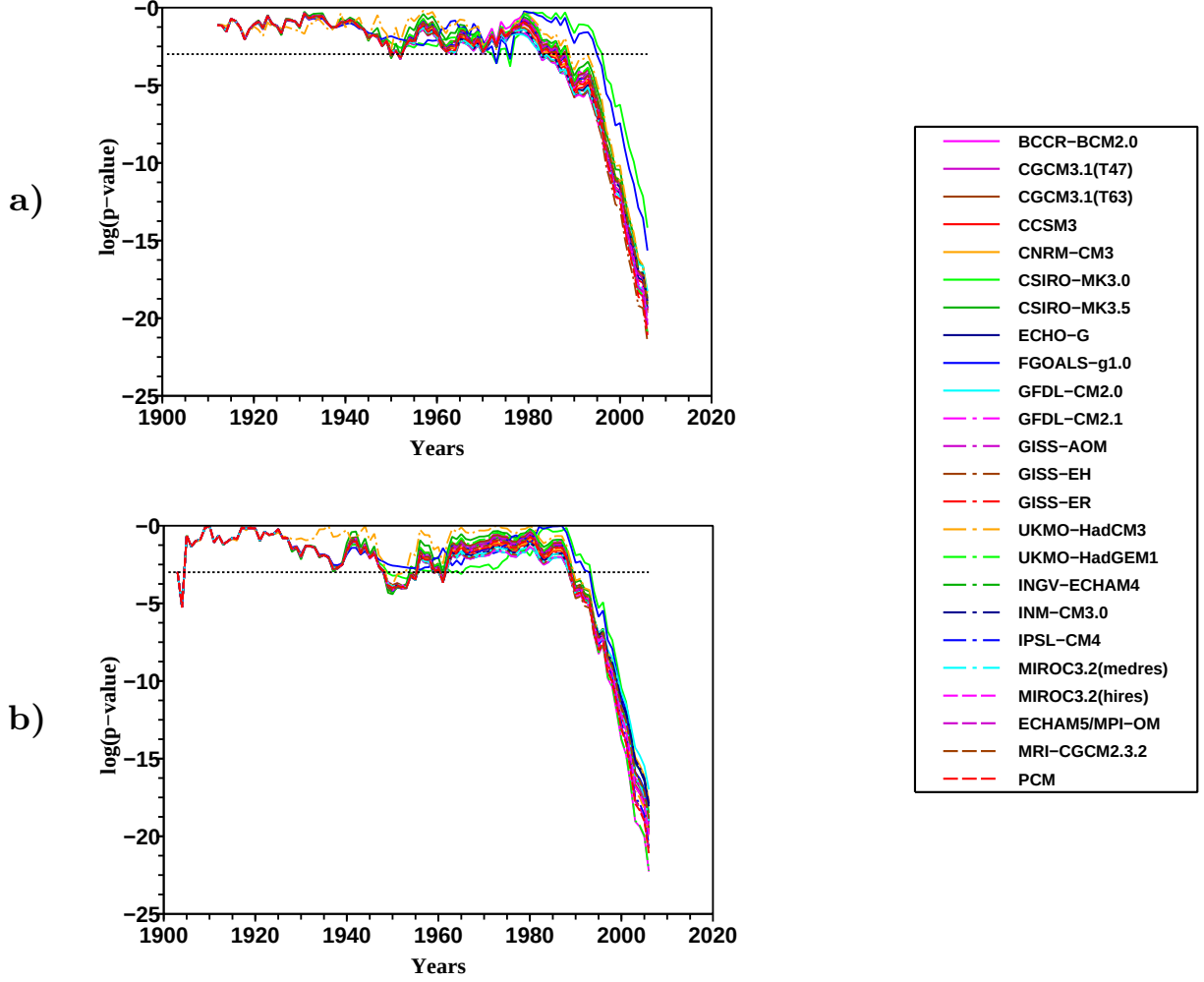


FIG. IV.2 – **Detection test applied to the uncentered observed dataset.** The detection test is applied to the observed dataset ψ (left), and to the single annual mean temperature series (right). In both cases, the 24 curves correspond to the 24 temporal patterns presented in Figure IV.1a. The ψ dataset is first reduced to 10 pseudo-stations, and the logarithm of the p -value of the statistical test is represented. The black dashed line corresponds to the 95% confidence threshold. For a given GCM, the H_0 hypothesis is rejected when the associated curve is under this line.

the sample ψ . Looking for a regional climate change, this result isn't really satisfying, although it proves that the climate over the considered area has changed, in the sense that it has been warming. In particular, this change can be uniform over space, and due to the global warming. These tests doesn't show evidences of a change of the regional distribution of temperatures, for example.

In the following, we search for a climate change that impacts the spatial distribution of the temperatures, and not only the mean. That is why we will apply the detection test to the spatially centered dataset $\bar{\psi}$, removing the spatially uniform part of the change.

The Figure IV.3 shows the results of the detection test applied to the sample $\bar{\psi}$. The patterns used are the one represented in Figure IV.1a, deduced from GCMs global annual mean temperature, with $\lambda = \lambda_0$ (identically to Figure IV.2). The Figure IV.3a shows the results in the same condition than in FIG. IV.2, that is to say using a reduced sample of 10 pseudo-stations. On the contrary, the Figure IV.3b shows the results of the same test when using 50 pseudo-stations.

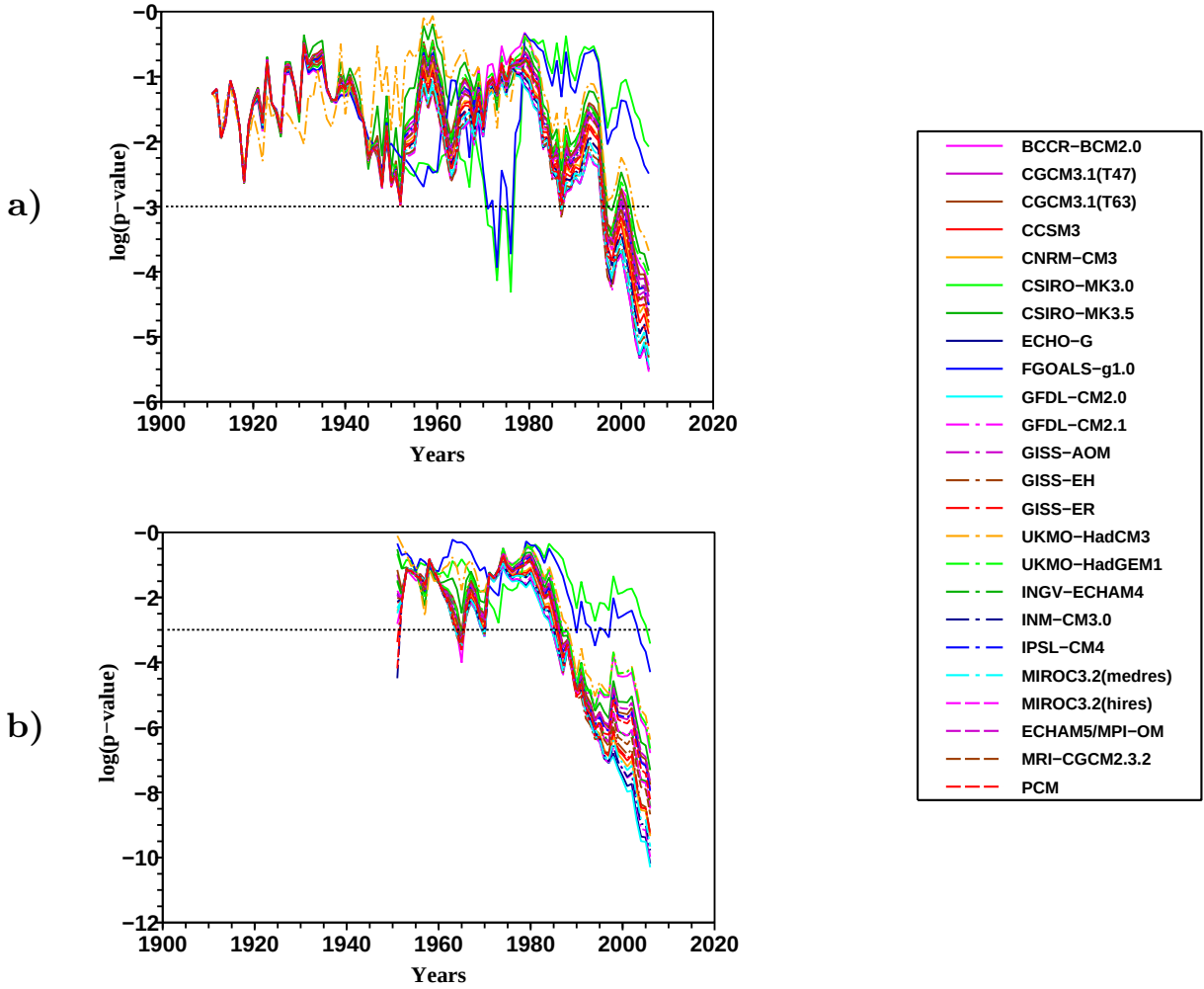


FIG. IV.3 – **Detection test applied to the spatially centered dataset $\bar{\psi}$, with global patterns.** The test is applied to the dataset $\bar{\psi}$, reduced to 10 pseudo stations (a), and reduced to 50 pseudo stations (b). The temporal patterns μ are the ones represented in Figure IV.1a, deduced from the global mean temperature of the considered GCMs, using $\lambda = \lambda_0$.

The use of 50 pseudo-stations explains that results cannot be computed or represented before the 50's.

In both cases, most of the patterns used yield to detect a significant change on the spatial distribution of the temperatures. This allows to conclude that a regional climate change is detected, that is the main result of this paper. More precisely, the 22 patterns being increasing all over the century (that is to say all patterns excepting the ones deduced from FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0, see Figure IV.1a), yield to a significant detection in both cases. In the first case (10 pseudo-stations), that gives the less strong results, the p -value are of the order of 1%, that is yet a relatively high confidence level.

The patterns given by FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0 yield to poorer results. The detection succeed with 50 pseudo-stations, but failed using 10 ones. This is certainly due to their original behavior, and notably to their decrease before 1940. This result contributes to prove that the other patterns match the observations better than these two ones. Regarding the Figures IV.2 and IV.3, one can be surprised to notice that the results using those two patterns are not so bad. This is due to the very strong trend observed during the last 30 years over the country, that is compatible with the patterns. In particular, it must be noted that to use these patterns for

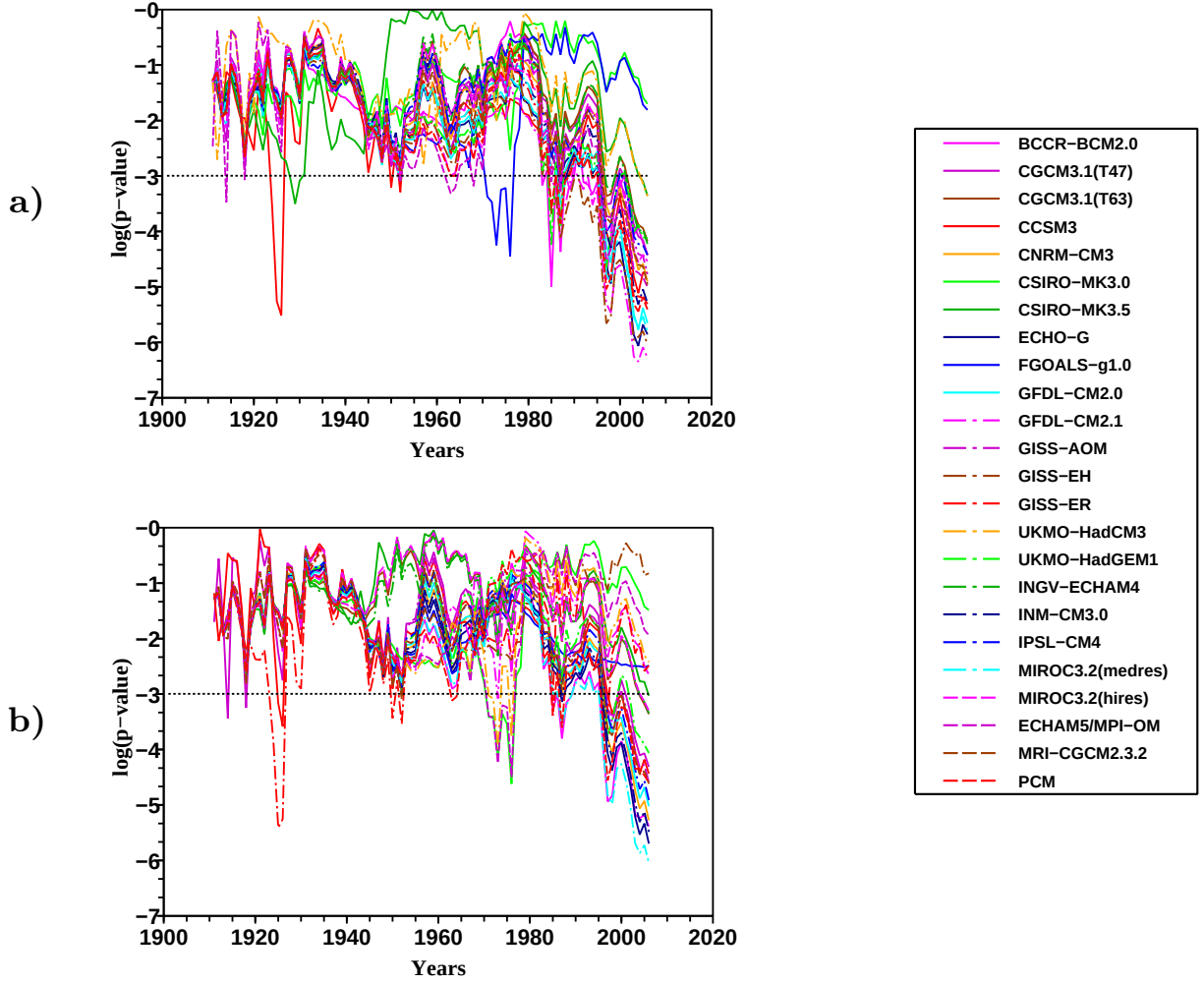


FIG. IV.4 – **Detection test applied to the spatially centered dataset $\bar{\psi}$, with different patterns.** The test is applied to the dataset $\bar{\psi}$, reduced to 10 pseudo stations, similarly to Figure IV.2. The temporal patterns μ used are the global ones, using $\lambda = \lambda_1$ (a) (see Figure IV.1b), and the regional ones, using $\lambda = \lambda_0$ (b) (see Figure IV.1c).

detecting a change on the mean temperature (Figure IV.2b), give results identical to the use of the others 22 patterns. Finally, it is very interesting to observe that the study of the spatially centered sample $\bar{\psi}$ provides a better discrimination between the patterns than it can be done studying the single mean.

Another point that worth be discussed is that the results are stronger when applying the test on the 50 pseudo-stations sample (Figure IV.3b). In this case, taking into account more points on the same area improves the significance of the results. This contributes to show that significant changes are observed even on relatively small scales. However, some cautions are worth to be taken for interpreting this result. A warming having a relatively complex spatial distribution, that impacts various different scales, is a possible explanation of such a result. But some other plausible causes may be involved. We can mention, for example, imperfections in the homogenization procedure, or alternative physical process, like urban warming, that can impact differently urban and rural stations.

The Figure IV.4 shows the equivalent results of the Figure IV.3a, but using different patterns : the patterns deduced from global annual mean temperature with a slighter smoothing procedure ($\lambda = \lambda_1$), and the regional patterns using $\lambda = \lambda_0$. Those patterns are represented respectively in

Figures IV.1b and IV.1b. As mentioned in IV.1.3.1, both sets of patterns show more discrepancies than the set used in Figure IV.3, and it can be seen that it is quite the same for the detection results.

In the case of Figure IV.4a, the differences with the Figure IV.3a are not so strong, and the impact of the change in λ is variable, depending on the GCM. For example, two patterns (CSIRO-MK3.5 and UKMO-HadCM3) lead to a very poor significant detection in the case $\lambda = \lambda_1$ whereas the results were more conclusive using $\lambda = \lambda_0$. In contrast, some patterns lead to smaller p -value when applying the test over the whole period, due to the slight reduction of λ . It must be noted however that a stronger reduction of λ deteriorate the results more clearly (not shown).

The case of Figure IV.4b shows that the use of regional patterns impacts more strongly the results. It can be seen that for some GCMs, the results are as well as the results obtained with the global patterns. But there are also several models that just reach the test threshold at the end of the period, and many others that don't yield to a significant detection. In particular, many regional patterns that reproduce a reversal of the change direction somewhere in the century don't lead to significant detection. So, such a behavior doesn't seem to be reproduced by the data. Finally, the results are mainly deteriorated by using regional patterns instead of global ones.

In both case, it is difficult to give a complete interpretation of the results. Our goal is not to explain physically the results obtained with each GCM, that might require another paper. However, the results show that the use of very smooth patterns deduced from global mean temperature (i.e. the most elementary used in this study), even for detecting a regional climate change, could be relatively efficient. To search for more detailed patterns, by using regional simulated temperature, or by letting many degree of freedom, don't improve really the results. So there is no evidence that the signal-to-noise ratio is increased by this way. From our point of view, it is difficult to make a stronger conclusion. In particular, such a phenomenon may be due to the impact of the internal climate variability or to possible errors of the GCMs, when going to more detailed characteristics. The separation between these two plausible explanations, would require further work, possibly using ensemble runs of the same models.

Finally, it is worth to mention that the method has been applied to minimum and maximum daily temperature for each one of the four seasons, using the same patterns than in Figure IV.3a. Among this set of 8 variables, 7 have shown a significant detection for most GCMs, leading to stronger results than previous detection studies over France (see Spagnoli et al., 2002, or Ribes et al., 2009 for example).

IV.1.3.3 Climate change pattern

This last paragraph will present another type of result that can be obtain with such a statistical study. In order to apply the test (IV.9), it is necessary to estimate the vector $g = (g_s)_{1 \leq s \leq S}$ in equation (IV.8), by $\hat{g}$ (see Appendix IV.1.5.A). A coordinate $\hat{g}_s$ could be easily interpreted as a one-dimensional regression coefficient when s is fixed in equation (IV.8) or (IV.11).

Using this point of view, the previous results can be summarized as follows : the uncentered study shows that $\hat{g}$ is significantly different from 0, and the centered study allows to conclude that $\hat{g}$ is statistically significantly different from a uniform vector ($g \neq \rho \mathbf{1}$ for all $\rho \in \mathbb{R}$).

After performing these two tests, it can be interesting to represent the estimated vector $\hat{g}$, that can be interpreted as the observed spatial distribution of the climate change, associated with the prescribed temporal pattern μ . However, some cautions must be taken with such an interpretation, because like every estimate, $\hat{g}$ is directly impacted by some errors (internal variability random term, imperfections on the homogenization procedure, wrong statistical model). In particular, we only have shown that it is different from 0, and non uniform.

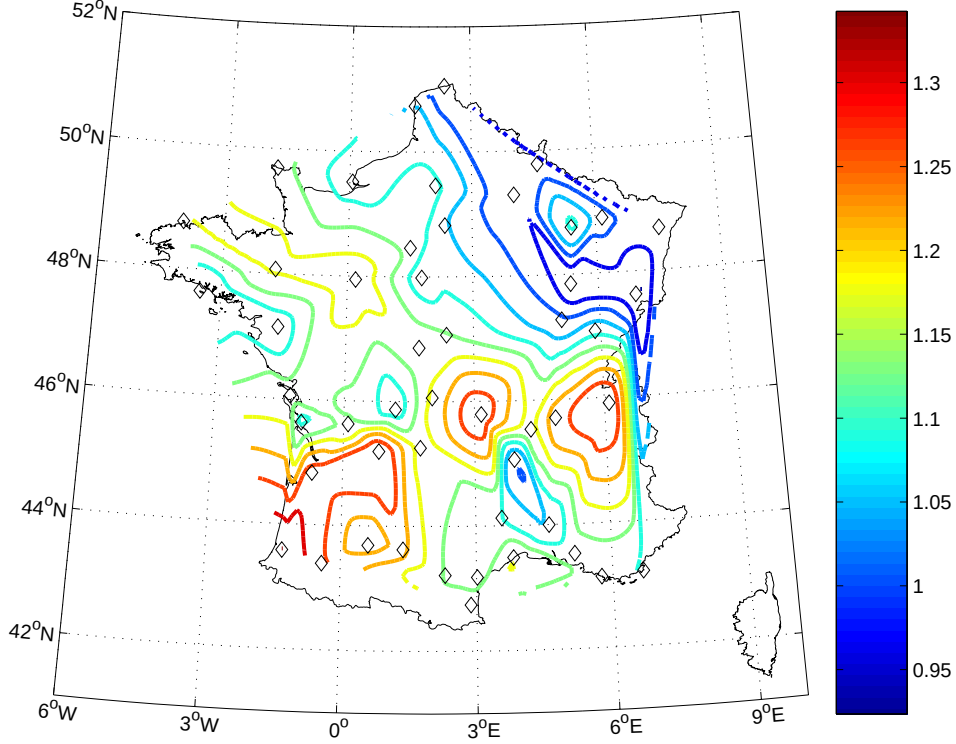


FIG. IV.5 – **Distribution of observed climate change.** For each of the 22 most similar patterns, we compute the estimate $\hat{g}$, that can be interpreted as the "observed climate change" following the given temporal pattern. We here represent the multimodel mean of the various $\hat{g}$. The sample has been reduced to 50 pseudo-station. The used method provides values at each pseudo-station (marked as diamonds), and we complete the data over the whole country using an interpolation procedure (the value over the pseudo-stations is not modified).

In the case of annual mean temperature over France, we computed the estimates $\hat{g}$ for each pattern μ , and next computed their spatial correlations, using 50 pseudo-stations (following Figure IV.3b). All the correlation coefficients are higher than 0.77 in such a case. Excluding the patterns of FGOALS-g1.0 and CSIRO-MK3.0 (that simulate a cooling over the starting XXth, and that were shown to not lead to a significant detection), they all exceed 0.93.

The Figure IV.5 shows an example of "observed climate change map" : each one of the 22 temporal patterns leading to a significant detection have been used for estimating a $\hat{g}$, and the multimodel mean of these 22 $\hat{g}$ is represented. Note that strictly speaking, this is different to compute an estimate $\hat{g}$ from a multimodel mean temporal pattern. However, the differences between both methods are very small.

Some characteristics must be highlighted in Figure IV.5. First, it can be observed that, although the colors go from blue to red, all values are contained in the interval $[0.9, 1.35]$. This reinforces the intuition that the change is relatively close to be uniform. Second, the spatial structure is rather irregular over some areas. This illustrates that different scales are present in the spatial signal, and that the spatial distribution of the warming can be relatively complex. This complexity explains that the results are slightly deteriorated when applying the method to a reduced dataset of 10 pseudo-stations, as mentioned in Section IV.1.3.2. However, the results obtained applying the test on the 10 pseudo-stations sample guaranties that the smallest scales alone (or irregularities) aren't sufficient to explain the rejection of H_0 .

IV.1.4 Conclusion

We have introduced an original method for climate change detection, that search in the observations the presence of smooth prescribed temporal pattern. This procedure is based on a space-time separability assumption, and on a Hotelling statistical test. Contrary to the “Optimal Fingerprint” method, commonly used for climate change detection and attribution, this method doesn’t require to estimate the spatial response pattern or the spatial properties of the internal variability. The presented algorithm is then easier to apply, and particularly well-suited for regional scale studies, when the GCMs are less accurate for reproducing the climate characteristics. In particular, our procedure only requires annual mean temperatures simulated in response to the anthropogenic forcing, and we have shown how smooth temporal patterns can be computed from such data.

The procedure has been applied to France using the whole set of GCMs outputs produced for the last IPCC Report and an homogenized temperature dataset covering the country. We have shown that the method is able to detect a change at this scale, even after having removed the global effect (studying spatially centered data). The comparison of the results using more or less smoothed patterns, deduced from global or regional mean temperature, shows that the “simplest” patterns (i.e. the global ones, rather strongly smoothed) are, at least, as efficient as the other ones in this case. The method also allows to give an estimate of the spatial warming pattern over the region that is based on observations. In the case of France, this pattern is quite complex and shows some small scale components. This result reinforces the idea that GCMs would have had difficulties to reproduce it accurately.

These results are a step forward concerning climate change detection over France. However, such analysis doesn’t allow to attribute the changes to the human activities, and further work will be necessary in order to extend this method to the attribution problem.

From our point of view, the new methodology could be an interesting complement of the conventionnal detection attribution method. Indeed, the “optimal fingerprint” approach may be used to perform a symmetric study, searching some spatial patterns in the observations, and using the same statistical hypothesis. Such dual approach might notably highlight some qualities or deficiencies of the climate models.

Additional outlooks of this work may be suggested. First, the method could be applied to variables that are more difficult to simulate in GCMs, like precipitation. The characteristics of the method, that requires few GCM outputs, will be very valuable in such a case. Second, the spatial estimate of the change, that is provided by the method, and shown to be significant, could be useful for model evaluation. For exemple, the same detection algorithm could be applied to GCMs outputs, wondering whether the spatial distribution deduced from the GCMs is significantly different from the observed one.

Acknowledgments

The authors are very grateful to Météo France and especially to Olivier Mestre for the production and the actualization of the homogenized dataset of temperature over France, that has been used in this work.

IV.1.5 Appendix

IV.1.5.A Hotelling test

Denoting $\tilde{\psi}_t = (\tilde{\psi}_{s,t})_{1 \leq s \leq S}$ and $\tilde{\phi}_t = (\tilde{\phi}_{s,t})_{1 \leq s \leq S}$, model (IV.11) can be written as a multivariate regression model :

$$\tilde{\psi}_t = m + g\tilde{\mu}_t + \tilde{\phi}_t, \quad t = 2, \dots, T, \quad (\text{IV.A1})$$

where the $\tilde{\phi}_t$ are independent and $N(0, C^{(S)})$ distributed random vectors, and where m denotes the mean $(1 - \alpha)\psi^0$.

Within this framework, the Hotelling test is the multivariate generalization of the student test to this problem. As in the univariate case, the test is optimal and based on euclidean projections. Set

$$X = [\mathbb{1}, \tilde{\mu}], \quad (\text{IV.A2})$$

one can estimate m , g , ϕ , respectively by $\hat{m}$, $\hat{g}$, $\hat{\phi}$, using a least square method. The univariate estimate of the standard deviation is then replaced by the random matrix $\widehat{C^{(S)}}$ that estimates $C^{(S)}$:

$$\widehat{C^{(S)}} = \frac{\hat{\phi}' \hat{\phi}}{T - 3}. \quad (\text{IV.A3})$$

This random matrix follows a Wishart distribution $W\left(T - 3, \frac{C^{(S)}}{T - 3}\right)$. Finally, the Hotelling test is based on the variable v :

$$v = \hat{g}' \widehat{C^{(S)}}^{-1} \hat{g}, \quad (\text{IV.A4})$$

that follows a Fisher distribution $F(S, T - S)$.

IV.2 Résultats complémentaires

Le but de cette partie est de compléter la présentation méthodologique faite au IV.1, afin de discuter plus largement les différents résultats applicatifs obtenus avec la méthode TOD. La présentation de ces nouveaux résultats est notamment utile à la comparaison des deux approches, temporelle et spatiale, qui sera abordée au IV.3. En particulier, nous allons voir que la détection de signaux temporels donne souvent des résultats plus probants que la détection de signaux spatiaux, conformément à ce qui a déjà été montré au IV.1.3.2 sur les températures moyennes annuelles. Comme au Chapitre III, les résultats seront ici présentés sur les deux domaines d'étude : France et Méditerranée.

IV.2.1 Domaine France

IV.2.1.1 Températures

Le cas des températures moyennes annuelles ayant déjà été traité (IV.1.3.2), nous nous consacrons ici à l'application de la méthode TOD aux huit jeux de données constitués par les températures minimales ou maximales, pour chaque saison. La Figure IV.6 présente les résultats ainsi obtenus et est donc l'équivalent de la Figure III.9. Il s'agit comme précédemment d'une étude multi-modèle, mais les simulations utilisées ne sont pas, comme pour la Figure III.9, issues du projet PRUDENCE. Comme nous l'avons déjà évoqué, les simulations réalisées dans le cadre de ce projet ne couvraient que les périodes actuelle (fin XX^{ème}) et future (fin XXI^{ème}), mais pas l'ensemble de la période ici étudiée (1900-2006), comme cela est nécessaire pour calculer une forme d'évolution temporelle. Tous les résultats présentés ici ont donc été obtenus avec les modèles globaux impliqués dans CMIP3.

Dans un souci de concision, les seuls résultats présentés ici sont ceux obtenus avec les signaux globaux, fortement régularisés (cf Figure IV.1a)), et en utilisant 50 pseudo-stations. Le premier choix se justifie notamment par le fait que ces signaux, plus « simples », donnent des résultats au moins aussi bons que des signaux plus sophistiqués dans le cas des températures annuelles. La discussion sur le choix de ces signaux n'est donc pas relancée ici. Le choix du nombre de pseudo-stations est fait par souci de « compatibilité » avec le chapitre précédent, mais impacte généralement peu les conclusions pouvant être tirées.

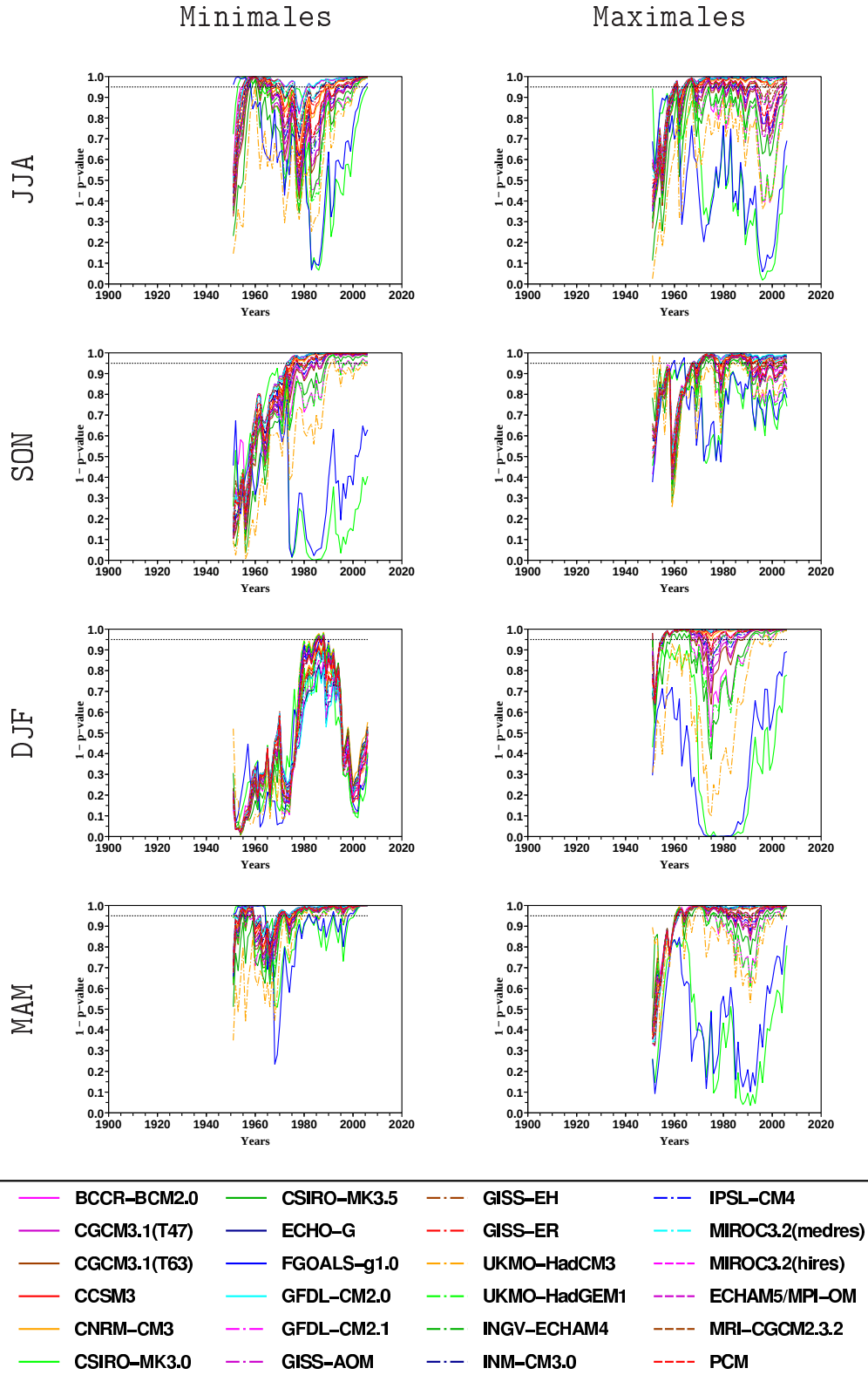


FIG. IV.6 – Étude des températures en France avec les signaux globaux. La méthode TOD est appliquée avec les signaux globaux représentés Figure IV.1a). Huit variables sont distinguées, comme au III.1.4 : températures minimales et maximales, pour chacune des quatre saisons. 50 pseudo-stations sont utilisées, la variabilité interne est toujours assimilée à un processus AR1, de coefficient $\alpha = 0.2$. Les conventions de représentation graphique sont les mêmes que pour la Figure IV.3.

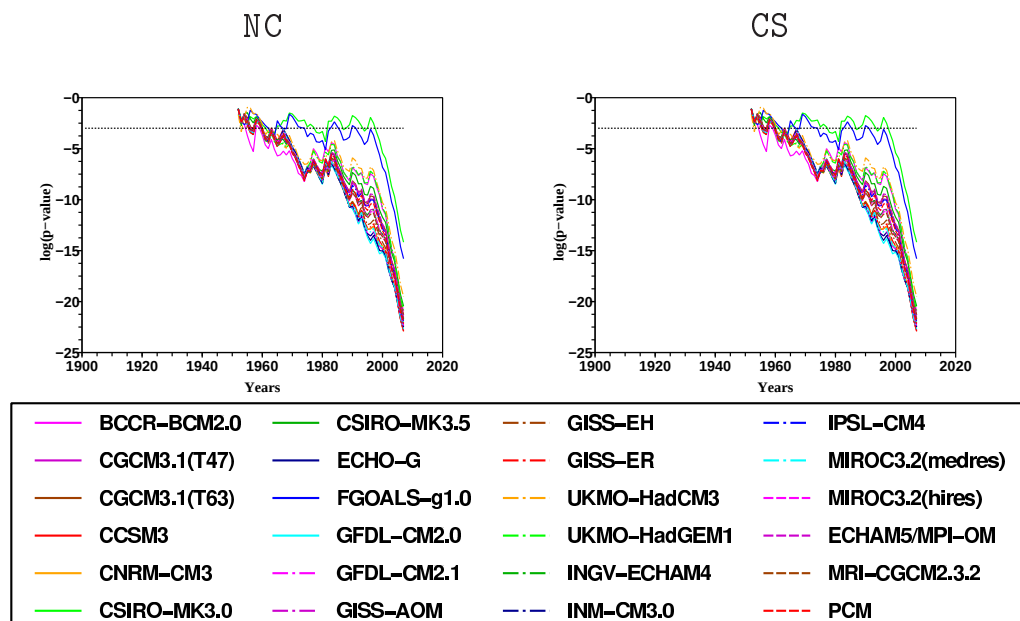


FIG. IV.7 – Étude des précipitations en France avec les signaux globaux. La méthode TOD est appliquée avec les signaux globaux représentés Figure IV.1a), aux cumuls annuels de précipitations sur la France. 50 pseudo-stations sont utilisées. Les conventions de représentations graphiques sont les mêmes que pour la Figure IV.3.

La Figure IV.6 montre que la méthode TOD donne de très bons résultats, même après suppression du terme de réchauffement uniforme, sur 7 des 8 variables considérées. Seules les températures minimales d'hiver ne montrent pas d'évolution selon ces signaux. Le cas des températures maximales d'été, et surtout d'automne sont malgré tout contrastés, mais de nombreux signaux sont significativement détectés, et surtout les résultats obtenus en diminuant le nombre de pseudo-stations (par exemple à 10, comme dans au IV.1), sont nettement moins équivoques (non montré). Dans les 5 autres cas, les résultats sont relativement forts, tant avec 50 pseudo-stations qu'avec 10.

IV.2.1.2 Précipitations

La méthode TOD a également été mise à profit pour étudier l'évolution des précipitations. Ce IV.2.1.2 détaille les premiers résultats obtenus, mais il est évident que de nombreux approfondissements devront être menés à l'avenir.

De façon générale, l'étude statistique de données de précipitations est plus délicate que celle des températures, essentiellement parce que la distribution des précipitations est généralement non-gaussienne. Sur des intervalles de temps courts (de l'ordre de la journée), cette distribution possède une masse en 0 ; sur des intervalles de temps plus longs (de l'ordre du mois), elle demeure sensiblement dissymétrique. Du fait de ses caractéristiques, la méthode TOD, comme de nombreuses autres méthodes de tests statistiques, ne peut pas s'appliquer telle qu'elle, puisqu'elle repose, entre autres, sur une hypothèse de normalité des « erreurs ». Dans le cadre de ce IV.2.1.2, les seuls résultats représentés ont donc été obtenus en appliquant la méthode TOD aux cumuls annuels de précipitations. Pour ce type de données, l'hypothèse de normalité est plus largement admise, et en tout cas nettement plus difficile à mettre en défaut.

Ensuite, contrairement aux températures, les propriétés de persistance des précipitations n'ont pas fait l'objet d'études poussées au II.3. L'analyse qui a été faite a porté sur les données observées, sur lesquelles ce type d'effet est a priori surestimé (du fait de la présence potentielle

de signaux de changement). Dans le cas des précipitations observées sur la France, les séries homogénéisées ne montrent pas, dans la grande majorité des cas, d'autocorrélations significatives, et une procédure comparable à celle présentée au II.3 conduit donc à ne pas prendre en compte cet éventuel effet. La procédure de « blanchiment » du bruit n'est donc pas appliquée ici.

La Figure IV.7 indique les résultats obtenus en menant une analyse rigoureusement équivalente à celle représentée Figures IV.2 et IV.3. On distingue donc deux cas : avec et sans centrage spatial. On peut remarquer que les résultats sont très largement positifs et indiquent une modification de la distribution des précipitations annuelles sur le pays. En particulier, la faible différence entre les deux graphiques s'explique par le fait que le changement porte essentiellement sur la distribution spatiale, et n'affecte que modestement la moyenne sur le pays. Ce comportement est donc différent de celui des températures, pour lesquelles le changement peut souvent être résumé, à l'ordre 0, comme étant un réchauffement uniforme.

Cet aspect est également illustré par la Figure IV.8a), qui représente la distribution spatiale du changement mise en évidence par la méthode TOD. Cette figure est donc l'analogue, pour les précipitations, de la Figure IV.5. On peut par exemple constater que le changement est relativement loin d'être uniforme, en cela que le signe du changement n'est pas le même sur tout le territoire. Un second constat est que le changement identifié par cette méthode entre le début du siècle et la fin de la période est parfois relativement important ($\geq 100\text{mm}$). Enfin, la structure spatiale ainsi obtenue est relativement complexe, et ne se résume notamment pas à un simple gradient Est-Ouest ou Nord-Sud.

En particulier, cette distribution peut être mise en relation avec les résultats obtenus dans le cadre du projet IMFREX, et reproduits à la Figure IV.8b). Cette étude portait sur les mêmes séries de précipitations homogénéisées, et visait à évaluer la présence d'une tendance linéaire d'évolution significative, en chaque lieu. La comparaison à la distribution spatiale des changements estimés par la méthode TOD indique que les résultats des deux études sont « compatibles », en cela que les changements sont relativement différenciés dans l'espace, et de distribution relativement similaire : une bande centrale, orientée Nord-Sud est identifiée comme subissant une augmentation plus marquée des précipitations. Naturellement, ces résultats devront faire à l'avenir l'objet d'analyses plus poussées.

Pour aller plus loin, le détail des résultats pour chaque saison constituerait une piste intéressante. Comme nous l'avons indiqué cependant, la distribution des précipitations à l'échelle saisonnière n'autorise pas une application directe de la méthode TOD. Plus précisément, lorsque l'hypothèse de gaussiannité n'est plus respectée, le test proposé n'est plus optimal, et surtout la distribution sous H_0 de la variable de détection n'est plus connue. L'évaluation de la p -value n'est donc plus correcte. Cependant, s'intéresser à la variable de détection v utilisée dans la méthode TOD (cf IV.A4) a toujours un certain sens. Nous nous limiterons donc ici au constat que l'étude de cette variable, saison par saison montre que c'est en hiver que le signal est le plus fort, alors qu'il est le plus faible en été.

IV.2.2 Domaine Méditerranée

Comme dans le cas de la détection spatiale, le projet CIRCE a constitué un cadre d'application de la méthode TOD sur le domaine Méditerranée. Le même jeu de données que celui utilisé au III a ainsi pu être étudié.

Tout d'abord, dans le cadre de ce travail, des signaux temporels ont été calculés sur le « domaine CIRCE ». De la même façon que des signaux « France » étaient calculés au IV.1.3.1, à partir des températures moyennes sur une petite boîte contenant la France, le calcul est ici fait à partir des températures sur le domaine d'étude, à savoir $[10^\circ\text{O}, 40^\circ\text{E}] \times [25^\circ\text{N}, 50^\circ\text{N}]$. La méthode de lissage est ensuite appliquée avec $\lambda = \lambda_0$.

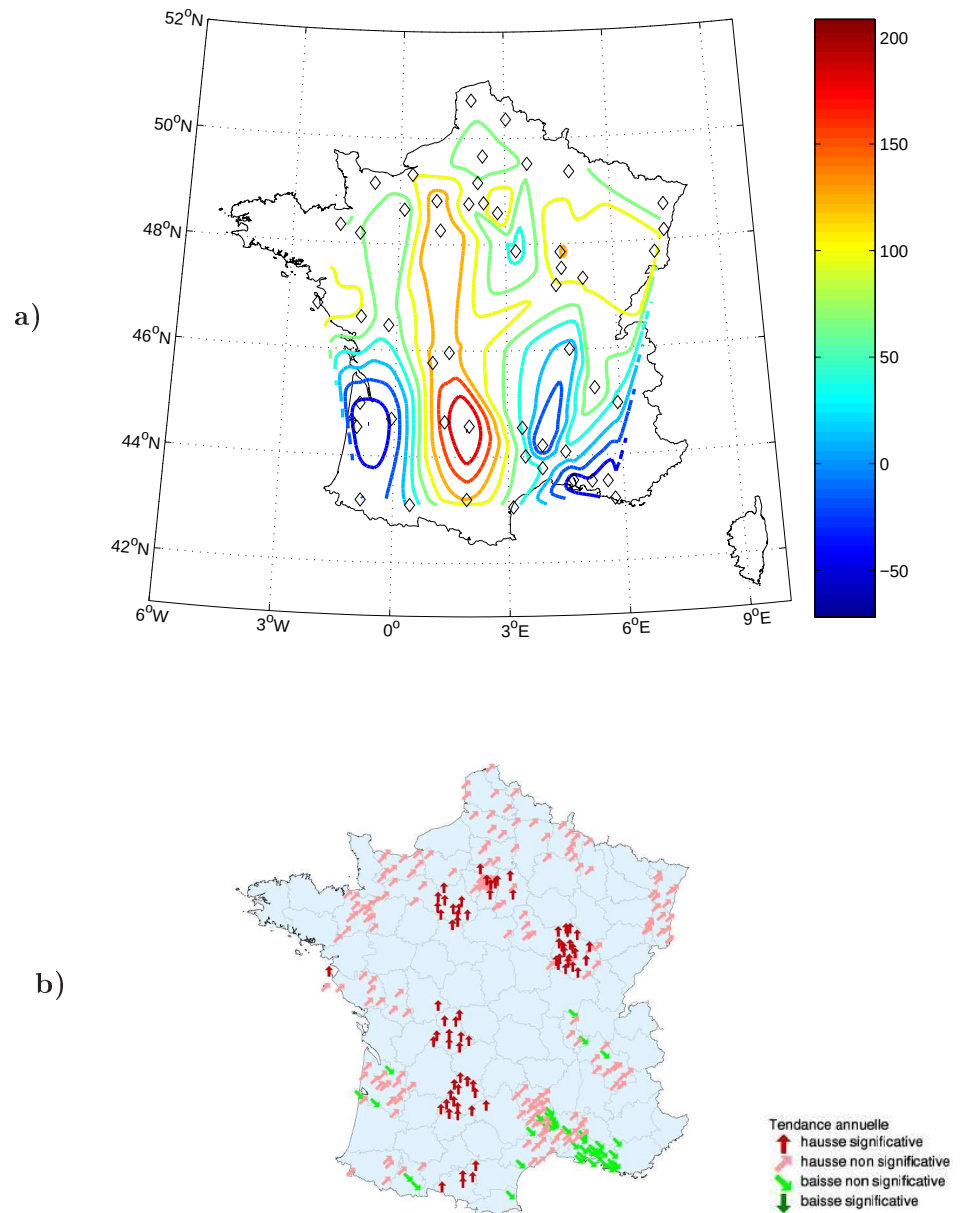


FIG. IV.8 – **Distribution spatiale des changements de précipitations annuelles en France.** En **a)**, la distribution spatiale des changements climatiques estimés par la méthode TOD sur les précipitations annuelles et sur la période 1900-2006 est représentée. Les signaux spatiaux déduits des 22 signaux temporels détectés sont moyennés. En **b)**, les résultats obtenus par le projet IMFREX (Impact des changements anthropiques sur la fréquence des phénomènes extrêmes de vent, de température et de précipitations), sur les séries de cumuls annuels de précipitations au cours de la période 1901-2000 sont reproduits (figure extraite du site <http://imfrex.mediasfrance.org/>). L'étude évalue, en chaque lieu, le signe et la significativité d'une tendance linéaire d'évolution sur la période. Les flèches verticales indiquent des changements significatifs, les flèches obliques, des variations non significatives.

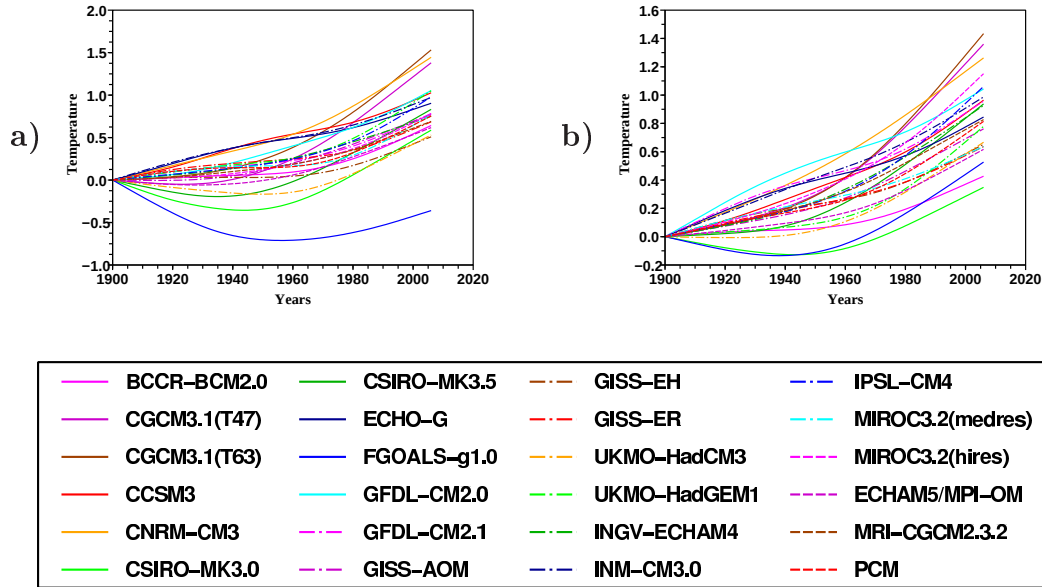


FIG. IV.9 – **Patterns temporels sur le domaine CIRCE.** Les signaux temporels calculés à partir des 24 CGCMs ayant participé au projet CMIP3 sont représentés en **a)**. Le calcul est fait de façon identique à celui illustré Figure IV.1c), avec $\lambda = \lambda_0$. La Figure **b)** est une reproduction des signaux globaux obtenus avec $\lambda = \lambda_0$, et déjà représentés Figure IV.1a).

La Figure IV.9a) présente les signaux régionaux ainsi obtenus. Ces signaux sont comparés aux signaux globaux, déjà représentés Figure IV.1a), et reproduits Figure IV.9b). L'analyse de cette figure montre que pour une large majorité de CGCMs, la forme du signal régional correspond à l'une des trois familles identifiées au IV.1.3.1 (réchauffement régulier, avec une rupture de pente, ou en forme de tilde). Cependant, de façon qualitativement comparable à ce qui était observé pour les signaux « France », le fait de ne considérer que des températures régionales contribue à rendre l'échantillon plus diversifié. Par exemple, plusieurs signaux présentent une inversion du signe de la pente au cours de la période. Le modèle FGOALS-g1.0 conserve également une certaine singularité, pour les mêmes raisons que précédemment.

Au cours de ce IV.2.2, conformément aux résultats publiés dans le cadre du projet CIRCE, la méthode TOD est basée sur les signaux régionaux du domaine Méditerranée, représentés Figure IV.9a). Ce choix se justifie par le souhait de couvrir une incertitude un peu plus large que dans le cas précédent. Au IV.1, l'objectif principal était de montrer l'accord entre les résultats obtenus avec une très large majorité de modèles. De ce fait, la méthode de calcul des signaux temporels laissait peu de degrés de liberté aux modèles et tendait à rechercher un plus petit dénominateur commun. Dans le cadre de l'étude du domaine Méditerranée, nous allons voir que même en laissant quelques degrés de liberté supplémentaires aux signaux, les résultats sont sans ambiguïtés, et demeurent très cohérents entre eux. La prise en compte des signaux globaux aurait, en l'occurrence, simplement contribué à resserrer la fourchette déjà étroite des p -values obtenues.

La Figure IV.10 représente les résultats obtenus en appliquant la méthode TOD à différentes données de températures du bassin méditerranéen : températures moyennes annuelles avec et sans centrage spatial, températures moyennes d'été et d'hiver. Ces résultats montrent clairement l'importance du changement observé selon les signaux d'évolution temporelle utilisés, et ce pour les quatre variables étudiées. Quelques clés de lectures méritent toutefois d'être mentionnées pour affiner ce constat. Concernant l'étude des températures moyennes annuelles, les résultats, en

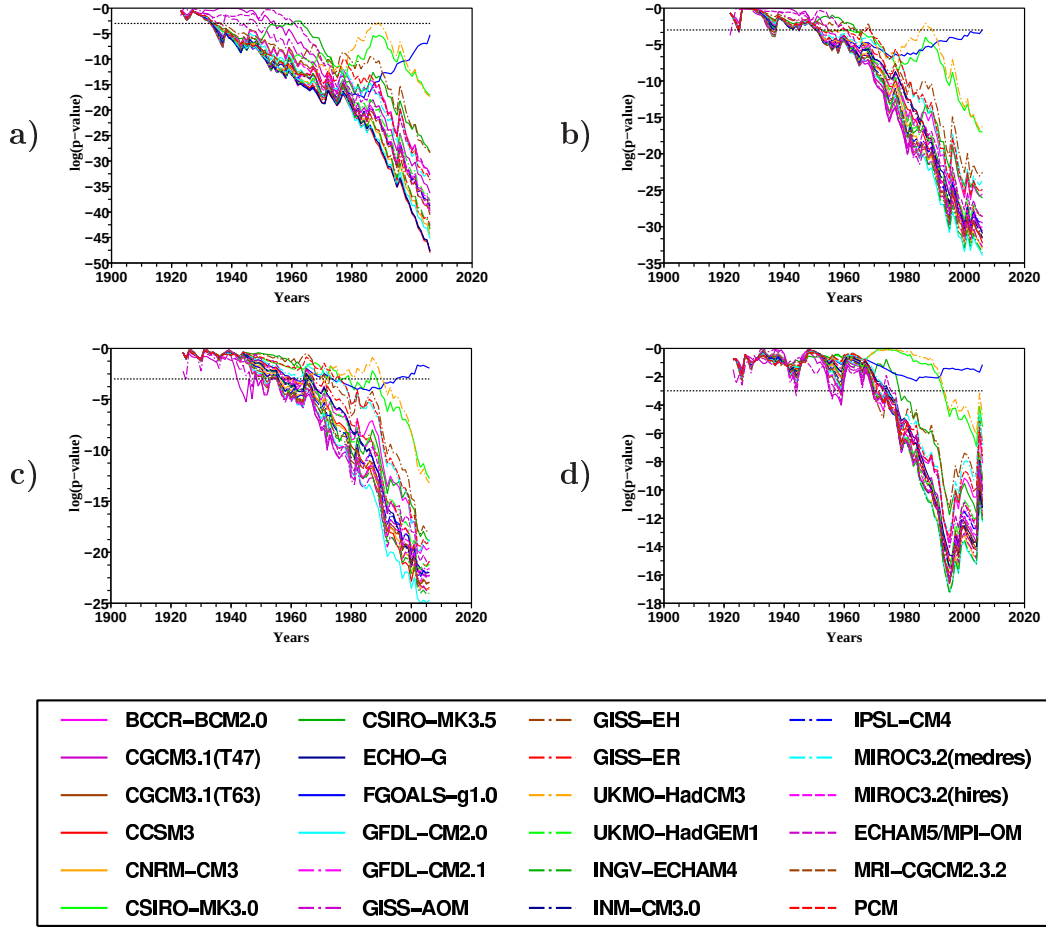


FIG. IV.10 – Étude des températures sur le domaine Méditerranée, avec des signaux régionaux du domaine Méditerranée. La méthode TOD est appliquée successivement aux températures annuelles sans centrage spatial (a), avec centrage spatial (b), puis aux températures moyennes estivales (c) et hivernales (d), toutes deux centrées spatialement. La variabilité interne est assimilée à un processus AR1 de coefficient $\alpha = 0.4$.

termes de p -values, sont sensiblement plus forts sans centrage spatial (a) qu'ils ne le sont avec (b). Cette différence montre indirectement l'impact de la moyenne sur le domaine, et en particulier le fait que cette moyenne ait évolué. Ensuite, comme attendu, les moyennes saisonnières montrent des changements qui, bien que largement significatifs, sont moins prononcés que ceux observés sur la moyenne annuelle. Ceci est cohérent avec l'a priori d'une variabilité interne plus importante sur une période de temps plus courte. De façon générale, on peut constater que les signaux temporels décrivant un retournement de tendance relativement prononcé et tardif au cours du XX^{ème} siècle sont moins bien détectés (notamment UKMO-HadCM3 et CSIRO-MK3.0), voire pas détectés du tout (FGOALS-g1.0). Ce phénomène est en accord avec la connaissance générale sur la courbe d'évolution de la température moyenne, globale ou régionale, et sont ici confirmés pour l'évolution de la distribution spatiale. Enfin, on peut constater, spécifiquement dans le cas des températures moyennes hivernales, la présence d'un événement singulier en 2005, qui diminue sensiblement l'ampleur des résultats. Cet événement, a priori dû à la variabilité interne, pourra mériter une analyse plus approfondie.

Comme dans le cas du domaine France, ces résultats méritent d'être illustrés par le biais d'une cartographie du réchauffement estimé sur la période en chaque point d'étude. Une telle

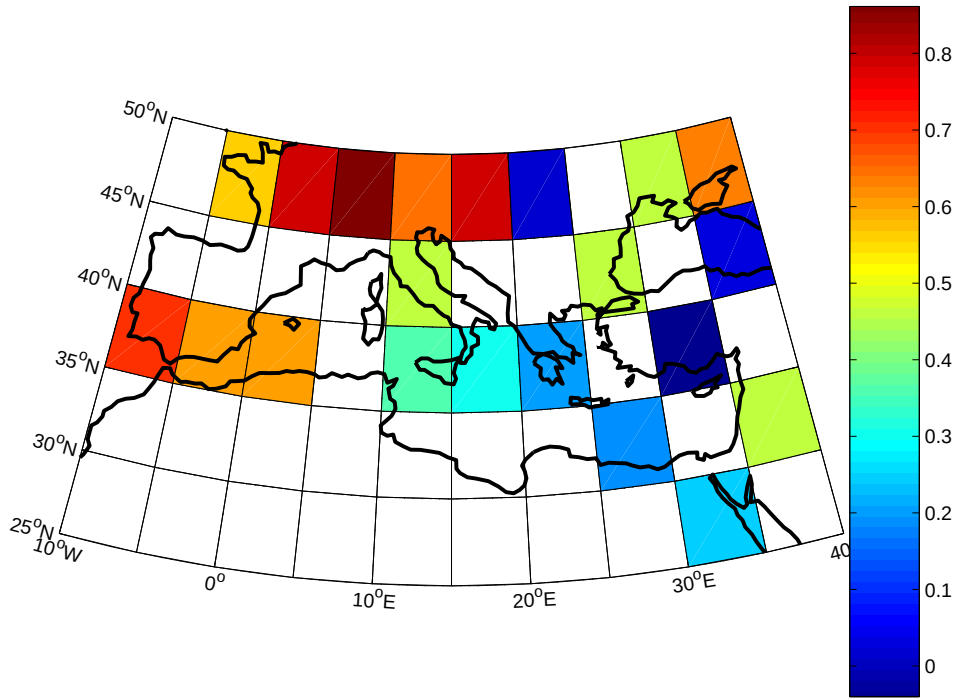


FIG. IV.11 – **Distribution spatiale des changements de températures moyennes sur le domaine Méditerranée.** La distribution spatiale des changements climatiques, estimée par la méthode TOD (cf IV.1.3.3) sur le domaine Méditerranée, est représentée. Les distributions spatiales associées aux 23 signaux temporels détectés sont moyennées.

illustration est fournie par la Figure IV.11, avec une méthodologie tout à fait similaire à celle utilisée au IV.1.3.3. Cette figure montre en particulier les différences importantes de changement de température entre différentes zones du domaine d'étude, et on constate aisément que le caractère « essentiellement uniforme » du réchauffement est nettement moins prononcé que dans le cas de la France. Ce constat peut en partie s'expliquer par la présence combinée de continents et d'océan sur ce domaine, et le fait que le réchauffement attendu soit plus faible sur océan.

IV.3 Comparaison à l'approche spatiale

Avant de conclure ce chapitre, cette partie a pour objet de discuter les résultats obtenus, sur les mêmes jeux de données, par les deux méthodes TOD et ROF. Ces deux méthodes, en étant basées sur des hypothèses très similaires, se prêtent bien à une comparaison : le même modèle statistique est utilisé, les hypothèses relatives à la variabilité interne sont identiques, et les deux tests mis en œuvre portent sur la présence d'un même terme (cf la partie II.2.2). La seule différence réside donc dans l'a priori utilisé, et, en conséquence, dans la technique statistique mise en œuvre. On peut donc véritablement comparer deux stratégies concurrentes.

Comme nous l'avons vu, la méthode TOD fournit souvent des résultats fortement significatifs, et surtout plus probants que ceux obtenus en appliquant la méthode ROF. C'est notamment le cas, sur le domaine France, pour les températures moyennes annuelles et la plupart des données saisonnières étudiées, et, sur le domaine Méditerranée, pour toutes les variables considérées. Ces résultats contribuent à valider a posteriori le choix d'une stratégie de détection basée sur l'utilisation de signaux temporels afin de mettre en évidence la présence effective d'un terme de changements climatiques tel que celui du modèle statistique (II.12). On peut cependant s'interroger sur les raisons de la non-détection de ce même terme de changement par le biais de la

méthode ROF, ou en tout cas sur les raisons d'une détection à la fois moins marquée, et moins fréquente. Plusieurs causes « candidates » peuvent être envisagées pour expliquer ce constat ; mais, en admettant la présence effective d'un changement, l'hypothèse que le signal spatial recherché, g , est correct constitue la principale hypothèse « non validée ». On peut donc souhaiter discuter cette hypothèse.

Dans cette perspective, la capacité de la méthode TOD d'exhiber un signal spatial associé au(x) signal(aux) temporel(s) détecté(s) peut être mise à profit. Conformément à la notation utilisée au IV.1.3.3, nous notons $\hat{g}$ ce signal spatial.

Tout d'abord, la conduite d'une étude de détection, par la méthode ROF, basée sur le signal spatial $\hat{g}$, fournit, pour chaque variable, des résultats relativement spectaculaires et souvent du même ordre (en termes de p -value) que ceux obtenus avec la méthode TOD. Si l'on peut trouver dans ce fait une confirmation du résultat fourni par l'étude « temporelle », son interprétation ne doit pas être excessive. En effet, le fait que $\hat{g}$ ne soit pas indépendant des données testées ne permet pas de conclure à la présence de changements climatiques de distribution spatiale $\hat{g}$. En toute rigueur, la dépendance entre $\hat{g}$ et les données testées introduit une modification de la distribution sous H_0 , et donc du seuil du test. Ce résultat constitue donc une condition nécessaire, mais pas suffisante pour conclure à la présence d'un changement dans la direction $\hat{g}$.

Une deuxième étape de l'analyse consiste à comparer les signaux spatiaux g prescrits au Chapitre III au vecteur $\hat{g}$. Une telle comparaison peut être effectuée, qualitativement, par le biais du coefficient de corrélation spatiale entre les vecteurs g simulés par les modèles, et le vecteur $\hat{g}$ obtenu par le biais de la méthode TOD. D'une part, les vecteurs g utilisés ne sont censés être représentatifs des changements actuels qu'à une homothétie près, et d'autre part, dans le cas des études de détection avec centrage spatial, la valeur moyenne sur le domaine ne doit pas être prise en compte. Moyennant ces deux degrés de liberté, le coefficient de corrélation spatiale constitue une distance naturelle.

Dans le but de mettre en exergue certaines caractéristiques de la méthode ROF, ce coefficient de corrélation sera calculé au sens de deux métriques : la métrique euclidienne et la métrique des empreintes digitales, noté métrique OF pour « Optimal Fingerprint ». Dans le premier cas, le coefficient calculé est le coefficient de corrélation standard des deux vecteurs g et $\hat{g}$; dans le second, le calcul est équivalent au calcul du coefficient de corrélation standard des vecteurs $\hat{C}_I^{-1/2} g$ et $\hat{C}_I^{-1/2} \hat{g}$. La transformation ainsi appliquée à un vecteur g est donc tout à fait similaire à celle considérée à l'Appendice III.1.6.C, lorsqu'on étudie le vecteur de coordonnées $\frac{d_i}{\lambda_i}$.

Dans les Figures IV.12 à IV.14, ce coefficient de corrélation est mis en relation avec les résultats obtenus sur la fin de la période étudiée par la méthode ROF (résultats obtenus en utilisant la moyenne sur les 30 dernières années disponibles). Pour un signal g donné, on compare ainsi la corrélation entre g et $\hat{g}$, et le résultat obtenu en utilisant la méthode ROF avec le signal g , sur la période 1977-2006. Chacun des vecteurs g , ou, identiquement, des modèles pris en considération, fournit ainsi un point.

Une première comparaison de ce type est tout d'abord réalisée à partir des différents résultats obtenus sur le domaine Méditerranée, avec les modèles ayant participé à CMIP3. La Figure IV.12 montre le lien entre les résultats obtenus avec la méthode ROF, et la proximité des signaux au vecteur $\hat{g}$. Comme attendu, les modèles relativement proches de $\hat{g}$, au sens de la métrique OF, donnent les meilleurs résultats. Entre les deux quantités considérées dans chacun des graphiques de droite de la Figure IV.12, ce lien n'est pas linéaire mais est très fort. Inversement, la comparaison des signaux au vecteur $\hat{g}$, au sens de la métrique euclidienne, n'indique qu'un lien très limité avec le résultat final de l'algorithme de détection ROF.

Ce résultat permet d'illustrer de nouveau les différences importantes entre les métriques euclidienne et OF, et ainsi de revenir sur la discussion du III.4.2. En effet, ces graphiques indiquent de façon claire que les modèles donnant les meilleurs résultats d'un point de vue détection ne sont pas nécessairement ceux reproduisant avec la plus grande fidélité la *carte* des changements

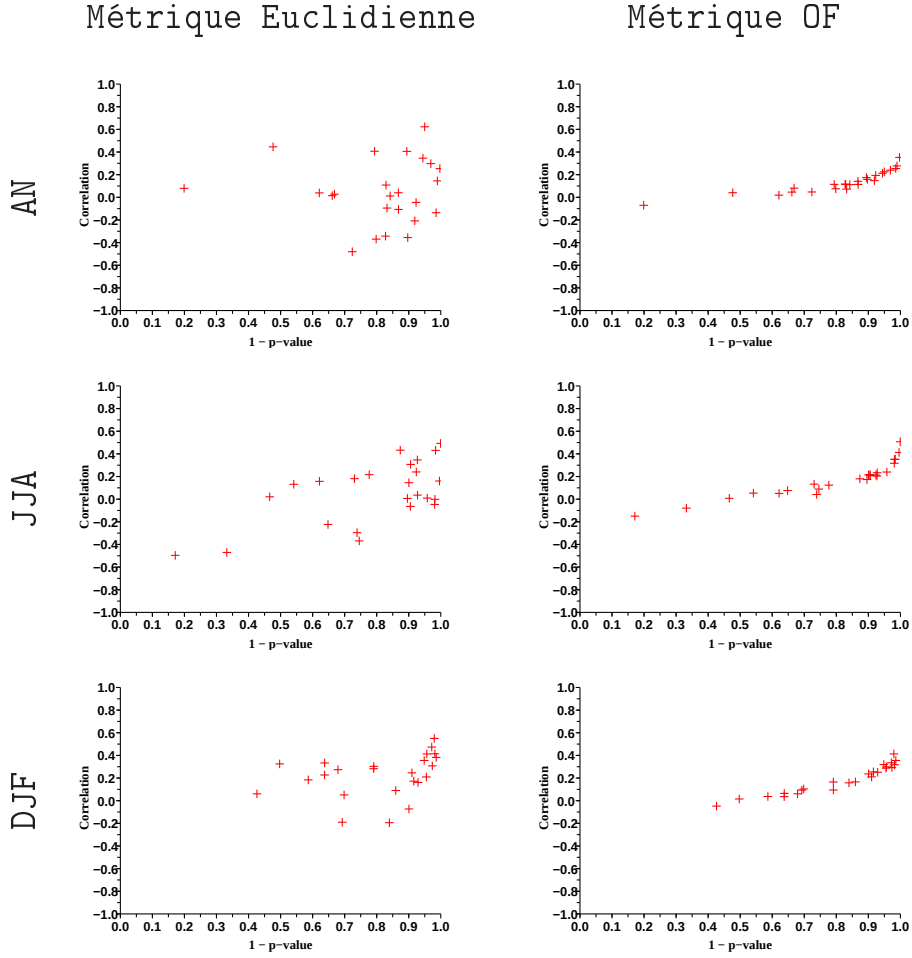


FIG. IV.12 – Relation p -value ROF / corrélation spatiale à $\hat{g}$: Températures moyennes du domaine Méditerranée, modèles CMIP3. Deux métriques sont utilisées pour le calcul de la corrélation : la métrique euclidienne, qui correspond au calcul standard du coefficient de corrélation, et la métrique OF (pour Optimal Fingerprint), qui correspond à celle qui rentre effectivement en compte dans le calcul de la variable de détection du test ROF.

climatiques en cours (c'est-à-dire s'approchant de $\hat{g}$ au sens de la métrique euclidienne, celle du monde physique). Ce constat vient appuyer l'analyse faite au III.4.2, où nous avons vu que les changements climatiques sur le domaine Méditerranée sont souvent détectés du fait de leur signature sur des « modes » (ou, ici, composantes principales) de faible variance, en l'occurrence certainement en lien avec le contraste Terre / Mer. Cependant, ces modes contribuent très peu (grosso modo à hauteur de la variance qu'ils expliquent) à la « carte » des changements climatiques en cours ; ils sont en particulier largement dominés par des modes de plus grande variance, sur lesquels les projections des changements climatiques sont beaucoup plus incertaines.

Bien que contre-intuitif, ce type de résultat est tout à fait en accord avec la philosophie de la méthode des empreintes digitales, qui consiste à maximiser le rapport signal sur bruit de la variable de détection, et ce faisant, à donner de l'importance à des modes de relativement faible variance. Inversement, la façon dont les scénarios climatiques se projettent sur quelques premières composantes principales suffit généralement à déterminer la carte des changements climatiques, mais n'influent que modérément les résultats d'un algorithme de détection basé sur la méthode des empreintes digitales optimales. De ce point de vue, la Figure IV.12 donne une bonne illustration des différences importantes de ces deux métriques.

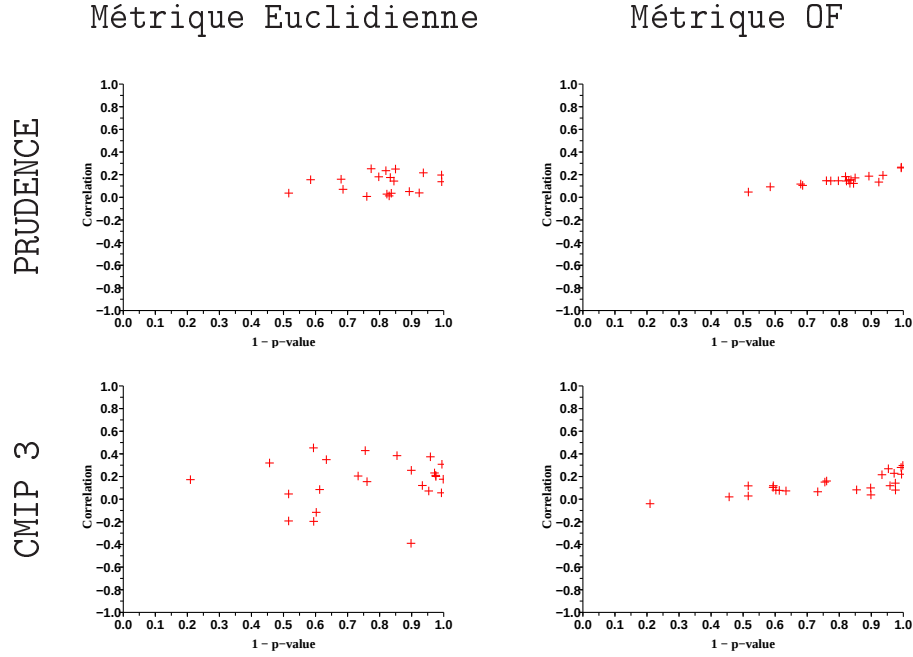


FIG. IV.13 – **Relation p -value ROF / corrélation spatiale à $\hat{g}$: Températures moyennes en France.** Figure équivalente à la Figure IV.12, mais portant sur les températures moyennes en France, et utilisant les modèles des projets PRUDENCE (en haut) et CMIP3 (en bas).

Ce constat nous pousse également à être relativement prudent quant au choix de l'une ou l'autre de ces deux métriques pour « évaluer » les modèles de climat. Si la recherche d'une « bonne métrique » est relativement à la mode pour « noter » les modèles, ou en sélectionner quelques « bons », les deux métriques ici étudiées conduisent à des résultats sensiblement différents. Si on définit un « bon » modèle comme un modèle en capacité de reproduire avec la plus grande fidélité la cartographie des changements en cours et à venir, la métrique euclidienne sera plus adaptée. Inversement, une procédure de détection peut constituer une façon de valider les modèles, en évaluant leur capacité à simuler des changements « rapidement » détectables dans les observations (un « bon » modèle est alors un modèle simulant des changements facilement détectables et détectés) ; on préférera alors retenir la métrique OF.

Les résultats obtenus sur le domaine France sont qualitativement comparables à ceux pouvant être obtenus sur le domaine Méditerranée, et sont illustrés Figures IV.13 et IV.14.

Tout d'abord, Figure IV.13, on observe que la comparaison des signaux spatiaux fournis par des modèles globaux et régionaux de climat, au signal $\hat{g}$ obtenu avec la méthode TOD, donne lieu au même type d'interprétation que sur le domaine Méditerranée. Dans le cas des modèles du projet CMIP3, on observe également que la dispersion, tant des résultats que des corrélations obtenues avec la métrique euclidienne, est sensiblement accrue, ce qui est cohérent avec ce que l'on peut attendre, à cette échelle, de modèles dont la résolution reste relativement basse. Pour le même type de raisons, notamment liées à la résolution, la relation entre les résultats de la méthode ROF et la corrélation du signal spatial avec $\hat{g}$ est également, dans le cas des modèles de CMIP 3, moins systématique.

Enfin, la Figure IV.14 achève l'illustration du propos, en apportant quelques résultats complémentaires sur les températures estivales. Comme nous l'avons vu, la variable des températures minimales d'été est celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats dans le cadre de l'application de la méthode ROF. En dépit d'une certaine robustesse de ces résultats, notamment quant au choix du modèle, on constate ici que la corrélation spatiale, au sens de la métrique euclidienne, est relativement médiocre pour cette variable. Cela indique que la fraction du signal responsable

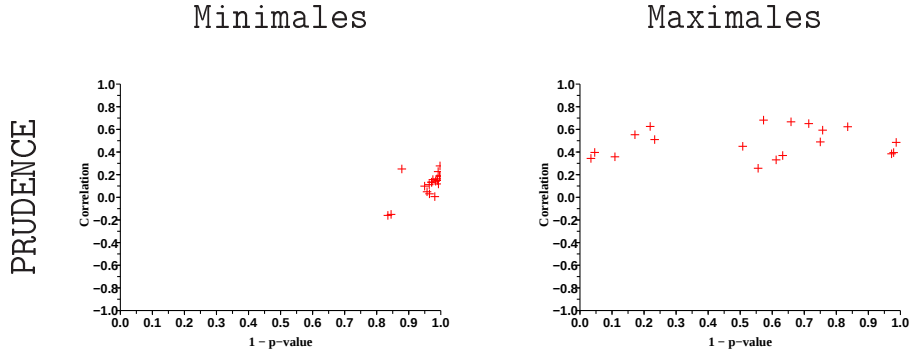


FIG. IV.14 – **Relation p -value ROF / corrélation spatiale à $\hat{g}$: Températures estivales en France.** Figure équivalente à la Figure IV.12, mais portant sur les températures minimales (à gauche), et maximales (à droite) d'été en France, et utilisant les modèles des projets PRUDENCE. La seule métrique utilisée ici est la métrique euclidienne.

de la détection n'est pas porté par les premières composantes principales. Cela contribue également à relativiser les performances des modèles sur cette variable. Inversement, les maximales d'été, arbitrairement choisies ici, constituent l'exemple d'une variable dont la carte d'évolution est relativement bien reproduite par les modèles, mais pour laquelle la méthode ROF ne permet pas d'aboutir à un résultat concluant. On peut cependant remarquer que l'utilisation, dans ce cas, du test naïf T_g , basé sur une métrique euclidienne (cf III.1), ne permet pas davantage de conclure à la présence d'un changement significatif.

Chapitre V

Détection sans a priori

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une troisième stratégie de détection, qui évalue la présence dans les observations, d'un signal de changement qui n'est pas déterminé à l'avance. On suppose seulement que ce signal vérifie l'hypothèse de séparabilité (II.4), et qu'il possède une certaine régularité en temps. Contrairement aux deux méthodes précédentes, on ne recherche donc pas la présence d'un signal de changement simulé par un modèle de climat. Cette méthode revêt donc un caractère plus descriptif des données, et repose, d'un point de vue statistique, sur des outils non-paramétriques.

La présentation de cette méthode est relativement complémentaire du travail fait au chapitre précédent, puisque le modèle statistique est précisément le même, la seule différence résidant dans le fait que le vecteur μ n'est plus, désormais, réputé connu. Ainsi, la forme du signal d'évolution temporelle des observations est évaluée et peut être comparée aux signaux temporels issus de simulations climatiques qui ont été utilisés au Chapitre IV. Cette comparaison sera seulement abordée ici, puisque ce chapitre présente des travaux en cours, pour lesquels certaines analyses doivent encore être menées.

Comme dans les deux précédents chapitres, nous commencerons par exposer le cadre et les outils statistiques proposés (V.1). La description méthodologique nécessitera cette fois-ci des développements un peu plus techniques que lors des chapitres précédents. Ce V.1 est principalement constitué de la traduction d'un manuscrit qui sera prochainement soumis à une revue de statistiques. Nous verrons cependant que quelques difficultés doivent encore être surmontées afin d'obtenir certains résultats théoriques. Dans un second temps, nous présenterons quelques premières applications de la méthode proposée, et discuterons les résultats obtenus (V.2).

La méthode spécifiquement développée dans le cadre de ce chapitre sera désignée *méthode NOP* dans la suite de ce document.

V.1 Test de la significativité de la première composante principale lisse

V.1.1 Préliminaires et motivations

Considérons le modèle statistique suivant :

$$\psi_{s,t} = m_s + g_s \mu_t + \varepsilon_{s,t}, \quad s = 1, \dots, S, \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{V.1})$$

où ε est une variable aléatoire gaussienne centrée (de moyenne nulle), et dont la covariance vérifie

$$\text{Cov}(\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{s',t'}) = C_{s,s'} \delta_{t,t'}, \quad (\text{V.2})$$

où C est une matrice réelle inconnue de taille $S \times S$, et où $\delta_{t,t'} = \mathbb{1}_{t=t'}$. Dans ce modèle, on souhaite tester les hypothèses

$$H_0 : "g\mu^* = 0" \quad \text{vs} \quad H_1 : "g\mu^* \neq 0", \quad (\text{V.3})$$

où A^* désigne la transposée de A .

Ce type de modèle peut-être utilisé, par exemple, pour la détection de changements climatiques. En considérant que $\psi_{s,t}$ désigne la température au lieu s et à l'instant t , on se demande si la moyenne des ces températures a évolué, en supposant que cette évolution peut se factoriser sous la forme $g_s \mu_t$. Sans hypothèse supplémentaire, nous allons voir que ce problème ne peut pas être résolu.

Commençons par reformuler le problème. En notant $y_t = (\psi_{1,t}, \dots, \psi_{S,t})^*$, pour $t = 1, \dots, T$, on peut considérer que T vecteurs aléatoires gaussiens de taille S sont observés. Ces vecteurs sont indépendants et identiquement distribués, suivant une $N(m, C)$, dans laquelle m et C sont des paramètres inconnus.

Dans cette reformulation du problème, une façon naturelle d'estimer le terme $g\mu^*$ consiste à utiliser l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). Cela constitue notamment la première étape de la mise en œuvre d'un test du rapport des vraisemblances (LRT). L'écriture des conditions du premier ordre de cette maximisation montre que l'estimateur du maximum de vraisemblance de $g\mu^*$ est le premier terme de la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de l'échantillon $Y = [y_1, \dots, y_T]$, après *centrage* (en lien avec l'estimation de m).

On souhaite alors tester la significativité de ce terme $g\mu^*$ par rapport au terme aléatoire ε . La question posée est donc de savoir si le premier terme de la SVD de Y est significativement différent de ce qu'il devrait être du fait du terme aléatoire ε , dont la covariance est inconnue. Sans plus d'éléments, il n'est pas possible de répondre à cette question, puisqu'il faudrait estimer séparément les deux quantités C et $g\mu^*$ afin de les comparer. En l'occurrence, l'estimation conjointe de ces deux quantités n'est pas envisageable, car le modèle n'est pas identifiable, et le LRT ne peut donc pas être mis en œuvre.

Pour répondre à la question initialement posée, une hypothèse supplémentaire doit être utilisée. Pour étudier les changements climatiques, une hypothèse convenable est que le changement présente une certaine régularité en temps (c'est-à-dire un caractère *lisse*). Comme nous allons le voir, cette hypothèse permet de proposer une solution au problème initial, et justifie l'utilisation d'un point de vue fonctionnel pour μ . Pour cette raison, dans la suite de cette étude, nous remplacerons le vecteur μ par une fonction $\mu(\cdot)$.

V.1.2 Cadre statistique

Considérons désormais le modèle de statistique fonctionnelle suivant :

$$\psi_{s,t} = m_s + g_s \mu(x_t) + \varepsilon_{s,t}, \quad s = 1, \dots, S, \quad t = 1, \dots, T, \quad (\text{V.4})$$

où $\mu(\cdot)$ est une fonction réelle inconnue, et où les $x_t \in [0, 1]$ sont des nombres réels pouvant être aléatoires ou déterministes (par exemple des points régulièrement espacés). Comme dans le modèle (V.1), ε est une variable aléatoire gaussienne centrée, dont la covariance vérifie

$$\text{Cov}(\varepsilon_{s,t}, \varepsilon_{s',t'}) = C_{s,s'} \delta_{t,t'}, \quad (\text{V.5})$$

où C est une matrice réelle inconnue de taille $S \times S$.

Le problème étudié dans ce V.1 est de tester les hypothèses

$$H_0 : "g\mu(\cdot) = 0" \quad \text{vs} \quad H_1 : "g\mu(\cdot) \neq 0". \quad (\text{V.6})$$

En considérant $\mu(\cdot)$ comme une fonction, une stratégie courante d'estimation consiste à maximiser une vraisemblance *pénalisée*, c'est-à-dire une vraisemblance à laquelle l'ajout d'un terme de *pénalité* permet d'imposer une contrainte de régularité. Dans le cadre de ce travail, nous nous restreignons à l'étude de pénalités du type

$$\text{pen}(\mu(\cdot)) = \int_0^1 (\mu^{(q)}(t))^2 dt. \quad (\text{V.7})$$

On peut remarquer que la valeur $q = 2$ est couramment utilisée dans le cadre de l'estimation de fonctions, afin de pénaliser la *rugosité*. Dans la suite de cette étude, nous allons estimer les paramètres du modèle en minimisant la fonction de -2 log-vraisemblance pénalisée

$$pl(m, g, \mu(\cdot), C) = l(m, g, \mu(\cdot), C) + \rho \text{pen}(\mu(\cdot)), \quad (\text{V.8})$$

où $\rho \in \mathbb{R}$ est un paramètre de lissage, et où l est la -2 log-vraisemblance classique, pouvant s'écrire

$$l(m, g, \mu(\cdot), C) = T \log(\det(C)) + \sum_{t=1}^T \|y_t - m - g \mu(x_t)\|_{C^{-1}}, \quad (\text{V.9})$$

en notant toujours $y_t = (\psi_{1,t}, \dots, \psi_{S,t})^*$.

Dans la partie V.1.3, nous allons montrer comment estimer les paramètres m , g , $\mu(\cdot)$ et C sous H_1 , par maximisation de la fonction pl , et pour une valeur donnée de $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$. Cette estimation est notamment nécessaire dans le but d'adapter le LRT afin de construire un test du rapport des vraisemblances pénalisées. À la partie V.1.4, nous allons étudier plus en détail les tests connus dans le cas $S = 1$, qui correspond au problème classique des fonctions de lissage *splines* univariées. La partie V.1.5 traitera des tests dans le cas $S > 1$. Nous indiquerons pour commencer les difficultés à généraliser les tests unidimensionnels à des dimensions plus grandes. Ensuite, nous montrerons comment un test du rapport des vraisemblances pénalisées peut-être construit.

V.1.3 Estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée

Nous allons, dans cette partie, étudier comment des estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée des paramètres du modèle (V.4) peuvent être obtenus sous H_1 . Afin de calculer ces estimateurs, nous commencerons par expliciter les conditions d'ordre 1 du problème de maximisation. Nous obtiendrons de cette façon un système d'équations vérifié par les estimateurs recherchés. Nous montrerons dans une deuxième étape comment résoudre numériquement ce système.

V.1.3.1 Définition des estimateurs

De façon analogue aux estimateurs du maximum de vraisemblance, les estimateurs $\hat{m}$, $\hat{g}$, $\hat{\mu}(\cdot)$ et $\hat{C}$, respectivement de m , g , $\mu(\cdot)$ et C , sous l'hypothèse H_1 , que nous allons étudier, sont définis par

$$(\hat{m}, \hat{g}, \hat{\mu}(\cdot), \hat{C}) = \underset{\substack{(m, g, \mu(\cdot), C) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} pl(m, g, \mu(\cdot), C). \quad (\text{V.10})$$

On peut en particulier remarquer que le problème de la minimisation de la fonction pl est mal posé si la contrainte $g^* C^{-1} g = 1$ est omise. En effet, seul le produit $g \mu(\cdot)$ a un sens, et l'un des deux facteurs de ce produit doit être arbitrairement normalisé. La contrainte imposée ici est choisie pour faciliter le calcul des solutions. Dans la suite de cette présentation, nous utiliserons la notation $\hat{pl}_{H_1}$ pour désigner le minimum de la fonction $pl(\cdot)$ sous H_1 , c'est-à-dire

$$\hat{pl}_{H_1} = \min_{(m, g, \mu(\cdot), C)} pl(m, g, \mu(\cdot), C) = pl(\hat{m}, \hat{g}, \hat{\mu}(\cdot), \hat{C}). \quad (\text{V.11})$$

Moyennant (V.7) et (V.9), l'équation (V.10) peut être réécrite

$$(\hat{m}, \hat{g}, \hat{\mu}(\cdot), \hat{C}) = \underset{\substack{(m, g, \mu(\cdot), C) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \sum_{t=1}^T \|y_t - m - g \mu(x_t)\|_{C^{-1}} + \rho \int_0^1 (\mu^{(q)}(t))^2 dt. \quad (\text{V.12})$$

On vérifie facilement que les conditions d'ordre 1 en m et C conduisent, respectivement, aux équations

$$\hat{m} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t = \frac{1}{T} \Psi \mathbb{1}_T, \quad (\text{V.13})$$

$$\hat{C}_{g\mu(\cdot)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{m} - g \mu(x_t)) (y_t - \hat{m} - g \mu(x_t))^*, \quad (\text{V.14})$$

où $\hat{C}_{g\mu(\cdot)}$ désigne la valeur de C minimisant pl , à $g\mu(\cdot)$ fixé. L'équation (V.13) indique que l'estimateur $\hat{m}$ est explicite, contrairement à $\hat{C}$.

Dans la suite, nous utiliserons $\Pi = (I_T - \frac{1}{T} \mathbb{1}_T \mathbb{1}_T^*)$, en remarquant que

$$\Psi - \hat{m} \mathbb{1}_T^* = \Psi \Pi. \quad (\text{V.15})$$

V.1.3.2 Espaces des fonctions *splines*

La principale difficulté pour écrire le système d'équations correspondant aux conditions d'ordre 1 de la minimisation (V.12) concerne donc l'écriture des conditions en g et $\mu(\cdot)$. Concernant l'estimation de $\mu(\cdot)$, Wahba (1990) a montré, en utilisant des espaces de Hilbert auto-reproduisants, que le minimum de ce type de quantité était atteint par des fonctions *splines*. Ces fonctions sont, en quelques mots, des polynômes par morceaux présentant une certaine régularité, et dont les points de raccord sont les noeuds $x_1, \dots, x_T$. En supposant, sans perte de généralité, que $x_1 < x_2 < \dots < x_T$, on peut définir plus précisément l'espace $\mathcal{S}_r$ des fonctions *splines* d'ordre r , comme l'ensemble des fonctions de la forme

$$\mu(x) = \mu_1 + \mu_2 x + \dots + \mu_{r+1} x^r + \sum_{k=1}^T \mu_{r+k+1} (x - x_k)_+^r, \quad (\text{V.16})$$

où $(x - x_0)_+^r = (x - x_0)^r$ si $x > x_0$ et $(x - x_0)_+^r = 0$ sinon. On peut notamment remarquer que les *splines* d'ordre r sont de classe $\mathcal{C}^{r-1}$.

Wahba (1990) a notamment montré que la solution $\hat{\mu}(\cdot)$ de (V.10) est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{q+1}$. Dans la suite de ce document, nous noterons $p = T + q + 2$ la dimension de cet espace, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^*$, et Z , la matrice de taille $T \times p$ dont la i -ème ligne est $Z_i = (1, x_i, \dots, x_i^{q+1}, (x_i - x_1)_+^{q+1}, \dots, (x_i - x_T)_+^{q+1})$. On définit également la base $(s_k(\cdot))_{k=1, \dots, p}$ de l'espace $\mathcal{S}_{q+1}$, en posant $s_k(x) = x^{k-1}$ pour $k = 1, \dots, q + 2$, et $s_k(x) = (x - x_{k-q-2})_+^{q+1}$, pour $k = q + 3, \dots, p$.

Avec ces notations, estimer la fonction $\mu(\cdot)$ revient à estimer le vecteur $\mu \in \mathbb{R}^p$ de ses coordonnées dans la base $(s_k(\cdot))_{k=1, \dots, p}$. L'équation « fonctionnelle » (V.12) peut donc être remplacée, en utilisant (V.13) et (V.15), par l'équation « vectorielle » suivante

$$(\hat{g}, \hat{\mu}, \hat{C}) = \underset{\substack{(g, \mu(\cdot), C) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr} \left((\Psi \Pi - g(Z\mu)^*)^* C^{-1} (\Psi \Pi - g(Z\mu)^*) \right) + \rho \mu^* G \mu, \quad (\text{V.17})$$

où G est la matrice, de taille $p \times p$, de terme général $G_{i,j} = \int_0^1 s_i^{(q)}(x) s_j^{(q)}(x) dx$. De plus, en introduisant P , une matrice de taille $T \times p$ telle que $PZ^* = I_T$, puis $\Sigma = Z^*Z$, on a

$$(\hat{g}, \hat{\mu}, \hat{C}) = \underset{\substack{(g, \mu, C) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}((\Psi \Pi P - g \mu^*)^* C^{-1} (\Psi \Pi P - g \mu^*) \Sigma) + \rho \mu^* G \mu. \quad (\text{V.18})$$

On peut notamment remarquer que Σ et G définissent deux semi-norme sur l'espace $\mathcal{S}_p$, ici assimilé à $\mathbb{R}^p$.

V.1.3.3 Conditions d'ordre 1 en (g, μ)

Présenté sous une forme « vectorielle », les conditions d'ordre 1 en (g, μ) de ce problème de minimisation peuvent être obtenues en effectuant l'analyse en composante principale d'une certaine matrice. La démonstration présentée ici s'inspire en partie de celle présentée par Besse et al. (1997) pour un problème similaire. On cherche à minimiser pl en (g, μ) , à C fixé, et sous la contrainte $g^* C^{-1} g = 1$. On notera $\hat{g}_C$ et $\hat{\mu}_C$ les valeurs de g et μ auxquelles le minimum est atteint.

En partant de l'équation (V.18), on a

$$(\hat{g}_C, \hat{\mu}_C) = \underset{\substack{(g, \mu) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}((\Psi \Pi P - g \mu^*)^* C^{-1} (\Psi \Pi P - g \mu^*) \Sigma) + \rho \mu^* G \mu, \quad (\text{V.19})$$

$$= \underset{\substack{(g, \mu) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}((\Psi \Pi)^* C^{-1} \Psi \Pi) - 2g^* C^{-1} \Psi \Pi Z \mu + \mu^* \Sigma \mu + \rho \mu^* G \mu, \quad (\text{V.20})$$

$$= \underset{\substack{(g, \mu) \\ g^* C^{-1} g = 1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}((\Psi \Pi)^* C^{-1} \Psi \Pi) - 2g^* C^{-1} \Psi \Pi Z \mu + \mu^* H_\rho \mu, \quad (\text{V.21})$$

en introduisant $H_\rho = \Sigma + \rho G$, qui est une matrice inversible, dès lors que $\rho > 0$.

Variables (u, v, C)

Comme la minimisation de cette quantité en (g, μ) se fait à C fixée, et C étant inversible, on peut effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} v = (\mu^* H_\rho \mu)^{1/2} C^{-1/2} g, \\ u = (\mu^* H_\rho \mu)^{-1/2} H_\rho^{1/2} \mu, \\ \tilde{\Psi} = C^{-1/2} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2}. \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

On peut remarquer, dans ce changement de variable, que l'utilisation du coefficient réel $(\mu^* H_\rho \mu)^{1/2}$ permet simplement de transformer la contrainte $g^* C^{-1} g = 1$ en $u^* u = 1$, et la quantité $\mu^* H_\rho \mu$ en $v^* v$. u est ainsi le vecteur unitaire colinéaire à $(H_\rho^{1/2} \mu)$.

L'évaluation de $(\hat{g}_C, \hat{\mu}_C)$ peut alors être ramenée au calcul des quantités $\hat{u}_C$ et $\hat{v}_C$ satisfaisant

$$(\hat{u}_C, \hat{v}_C) = \underset{\substack{(u, v) \\ \|u\|=1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}((\Psi \Pi)^* C^{-1} \Psi \Pi) - 2v^* \tilde{\Psi} u + v^* v. \quad (\text{V.23})$$

$$= \underset{\substack{(u, v, C) \\ \|u\|=1}}{\text{Argmin}} T \log(\det(C)) + \text{Tr}(\Pi \Psi^* C^{-1} \Psi \Pi) - \text{Tr}(\tilde{\Psi}^* \tilde{\Psi}) + \text{Tr}((\tilde{\Psi} - v u^*)^* (\tilde{\Psi} - v u^*)). \quad (\text{V.24})$$

Conditions d'ordre 1 en (u, v)

Dans cette dernière expression, seul le dernier terme dépend de u et v . Le minimum est donc atteint pour les valeurs de v et u minimisant ce terme, et on obtient

$$\hat{v}_C \hat{u}_C^* = \text{SVD}_1(\tilde{\Psi}), \quad \text{avec} \quad \|\hat{u}_C\| = 1, \quad (\text{V.25})$$

en notant $\text{SVD}_1(A)$ le premier terme de la décomposition en valeurs singulières de la matrice A . On déduit donc

$$\hat{u}_C = \text{ev}_1(\tilde{\Psi}^* \tilde{\Psi}), \quad (\text{V.26})$$

$$\hat{v}_C = \tilde{\Psi} \hat{u}_C, \quad (\text{V.27})$$

où $\text{ev}_1(A)$ désigne, pour une matrice symétrique réelle A , le vecteur propre unitaire associé à la plus grande valeur propre. Ce résultat montre l'unicité du minimum, à C fixé. L'équation (V.27) permet en outre de concentrer le problème de minimisation en C et u , en considérant $v = \tilde{\Psi}u$.

Conditions d'ordre 1 en (g, μ)

Les conditions du premier ordre en (g, μ) se déduisent simplement en utilisant (V.22). On obtient

$$\hat{g}_C = \lambda \cdot \text{ev}_1(\Psi \Pi \Gamma_\rho \Pi \Psi^* C^{-1}), \quad \text{où } \lambda \text{ est donné par } \hat{g}_C^* C^{-1} \hat{g}_C = 1, \quad (\text{V.28})$$

$$\hat{\mu}_C = H_\rho^{-1} Z^* \Pi \Psi^* C^{-1} \hat{g}_C, \quad (\text{V.29})$$

où $H_\rho = (\Sigma + \rho G)$, et $\Gamma_\rho = Z H_\rho^{-1} Z^*$.

Système d'équations complet des conditions d'ordre 1

En utilisant l'équation (V.14), et en écrivant que les estimateurs $\hat{g}$, $\hat{\mu}$ et $\hat{C}$ du maximum de vraisemblance pénalisée vérifient les conditions d'ordre 1 à la fois en C et en (g, μ) , on obtient le système complet des conditions du premier ordre :

$$\hat{g} = \lambda \cdot \text{ev}_1(\Psi \Pi \Gamma_\rho \Pi \Psi^* \hat{C}^{-1}), \quad \text{où } \lambda \text{ est donné par } \hat{g}^* \hat{C}^{-1} \hat{g} = 1, \quad (\text{V.30})$$

$$\hat{\mu} = H_\rho^{-1} Z^* \Pi \Psi^* \hat{C}^{-1} \hat{g}, \quad (\text{V.31})$$

$$\hat{C} = \frac{1}{T} (\Psi \Pi - \hat{g}(Z \hat{\mu})^*) (\Psi \Pi - \hat{g}(Z \hat{\mu})^*)^*. \quad (\text{V.32})$$

La principale difficulté concernant l'estimation des paramètres du modèle est due au fait que la résolution de ce système n'est pas explicite.

Dans le système de variable (u, v, C) , ce système revêt une forme plus simple. En effet, l'équation (V.32) peut être transformée afin d'obtenir la valeur $\hat{C}_u$ de C maximisant pl à u fixé. Tout d'abord,

$$g \mu^* Z^* = C^{1/2} v u^* H_\rho^{-1/2} Z^*, \quad (\text{V.33})$$

$$= \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2} u u^* H_\rho^{-1/2} Z^*, \quad (\text{V.34})$$

en choisissant $v = \tilde{\Psi}u$ (condition vérifiée au minimum, selon l'équation (V.27)). On en déduit, en utilisant (V.14),

$$\hat{C}_u = \Psi \Pi (I_T - Z H_\rho^{-1/2} u u^* H_\rho^{-1/2} Z^*)^2 \Pi \Psi^*. \quad (\text{V.35})$$

Comme l'équation (V.26) indique que la valeur u_C de u maximisant pl , à C fixé est donnée par

$$u_C = \text{ev}_1(H_\rho^{-1/2} Z^* \Pi \Psi^* C^{-1} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2}), \quad (\text{V.36})$$

on obtient le système d'équation complet que vérifie $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{C})$:

$$\hat{C} = \Psi \Pi (I_T - Z H_\rho^{-1/2} u u^* H_\rho^{-1/2} Z^*)^2 \Pi \Psi^*, \quad (\text{V.37})$$

$$\hat{u} = \text{ev}_1 (H_\rho^{-1/2} Z^* \Pi \Psi^* \hat{C}^{-1} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2}) \quad (\text{V.38})$$

$$\hat{v} = \hat{C}^{-1/2} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2} \hat{u}. \quad (\text{V.39})$$

On peut remarquer qu'il suffit de résoudre les équations (V.37)-(V.38) afin de résoudre ce système d'équations (l'équation (V.39) est indépendante des deux autres).

V.1.3.4 Algorithme de calcul des estimateurs $\hat{g}$, $\hat{\mu}$ et $\hat{C}$, solutions de (V.30)-(V.32)

Le but de cette partie est de proposer une méthode numérique permettant de calculer des estimateurs $\hat{g}$, $\hat{\mu}$ et $\hat{C}$, qui vérifient les conditions d'ordre 1 précédemment établies. Nous allons pour cela travailler avec les variables (u, v, C) , afin d'obtenir des estimateurs $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{C}$ satisfaisant les conditions équivalentes (équations (V.37)-(V.39)). La solution proposée consiste à construire des suites d'estimateurs qui convergent vers une solution du système d'équation associé. Le principal résultat sera énoncé dans la Proposition 2.

Construction des estimateurs

La stratégie que nous allons utiliser pour estimer C et u consiste à approcher numériquement des solutions des conditions d'ordre 1. On commence donc par définir les suites $\hat{u}_n$ et $\hat{C}_n$ de la façon suivante

$$\hat{u}_0 = 0_T, \quad (\text{V.40})$$

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{T} (\Psi \Pi) (\Psi \Pi)^* \quad [= \hat{C}_{\hat{u}_0}], \quad (\text{V.41})$$

puis par récurrence

$$\hat{u}_n = \hat{u}_{\hat{C}_{n-1}}, \quad (\text{V.42})$$

$$\hat{C}_0 = \hat{C}_{\hat{u}_n}. \quad (\text{V.43})$$

On peut remarquer que la connaissance de $(\hat{C}_n, \hat{u}_n)$ suffit pour déterminer des estimateurs $\hat{g}_n$, $\hat{\mu}_n(\cdot)$ et $\hat{C}_n$ des paramètres g , $\mu(\cdot)$ et C initiaux.

Existence d'un minimum global de pl

Commençons tout d'abord par montrer l'existence de solutions des conditions du premier ordre. On montre pour cela l'existence d'un minimum global. Comme on a vu qu'à u fixé, on peut calculer les valeurs $\hat{C}_u$ et $\hat{v}_{C,u}$ de C et v minimisant la vraisemblance pénalisée, on peut écrire simplement que

$$\hat{pl}_{H_1} = \min_{\|u\|=1} T \log (\det(\hat{C}_u)) + \text{Tr} (\Pi \Psi^* \hat{C}_u^{-1} \Psi \Pi) - u^* H_\rho^{-1/2} Z^* \Pi \Psi^* \hat{C}_u^{-1} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2} u. \quad (\text{V.44})$$

Ainsi, la vraisemblance sous H_1 est le minimum d'une fonction (de u) définie sur un compact.

Soit f cette fonction :

$$f(u) = T \log (\det(\hat{C}_u)) + \text{Tr} (\Pi \Psi^* \hat{C}_u^{-1} \Psi \Pi) - u^* H_\rho^{-1/2} Z^* \Pi \Psi^* \hat{C}_u^{-1} \Psi \Pi Z H_\rho^{-1/2} u. \quad (\text{V.45})$$

Une propriété importante de f est son caractère régulier sur la sphère unité de $\mathbb{R}^p$, notée $\mathbb{S}_{p-1}$.

Proposition 1 Si $T \geq S + q$, f est p.s. $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{S}_{p-1}$

Preuve : Il suffit de montrer que presque sûrement, $\forall u \in \mathbb{S}_{p-1}, \det \hat{C}_u > 0$, car par compacité, $\det \hat{C}_u$ sera alors minoré uniformément en u . $\hat{C}_u$ est une matrice de taille $S \times S$, qui se factorise, selon (V.35) :

$$\hat{C}_u = (\Psi \Pi M_u) (\Psi \Pi M_u)^*, \quad (\text{V.46})$$

où $M_u = (I_T - \omega_u \omega_u^*)$, et $\omega_u = Z H_\rho^{-1/2} u$. Il suffit donc de montrer que $M_u \Pi \Psi^*$ (qui est de taille $T \times S$) est p.s. de plein rang pour tout u , c'est-à-dire que son noyau est réduit à zéro.

Étape 1 : Le lemme suivant est facile à démontrer ;

Lemme 1 *Si $\omega \in \mathbb{R}^T$, alors la matrice $M = (I_T - \omega \omega^*)$ est de plein rang, sauf si $\|\omega\| = 1$, auquel cas*

$$\ker(M) = \text{Vect}(\omega). \quad (\text{V.47})$$

En appliquant ce lemme, M_u est de plein rang sauf si

$$u^* H_\rho^{-1/2} H_0 H_\rho^{-1/2} u = 1. \quad (\text{V.48})$$

Cependant, comme $\|u\| = 1$, cette condition n'est possible que si $\omega_u \in Z \ker(G)$. En effet,

$$v^* H_0 v \leq v^* H_\rho v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^p, \quad (\text{V.49})$$

avec égalité si et seulement si $v \in \ker(G)$. La condition (V.48) ne peut donc être satisfaite que pour $H_\rho^{-1/2} u \in \ker(G)$, soit $\omega_u \in Z \ker(G)$. On obtient finalement

$$\forall u \in \mathbb{R}^T, \ker(M_u) \subset Z \ker(G). \quad (\text{V.50})$$

Étape 2 : Nous allons montrer que p.s., il n'existe pas $\omega \in \mathbb{R}^S, \|\omega\| = 1$, tel que $\Pi \Psi^* \omega \in Z \ker(G)$, ce qui assure, compte tenu de (V.50), que $\ker M_u \cap \text{Im}(\Pi \Psi^*) = \{0\}$. Pour cela, nous appliquons le lemme de Bulinskaya (cf Azaïs et Wschebor, 2009, Proposition 6.11, p.132). Un énoncé simplifié de ce lemme peut être écrit de la façon suivante :

Lemme 2 (de Bulinskaya) *Soit S une variété de dimension d_1 d'un espace vectoriel E_1 , et soit $Y(s), s \in S$ un processus à valeurs dans E_2 , de dimension $d_2 > d_1$. Supposons que*

- Y est de classe $\mathcal{C}^1$,
- la densité de $Y(s)$ est bornée uniformément en $s \in S$, au voisinage de tout point $x \in E_2$.

Soit $u \in E_2$; alors, presque sûrement, il n'existe pas de point $s \in S$ tel que $Y(s) = u$.

$Z \ker(G) \subset \mathbb{R}^T$ est de dimension q , et est donc défini par la nullité de $T - q$ formes linéaires $f_1, \dots, f_{T-q}$. En notant F la matrice constituée de ces $T - q$ formes, la fonction $\omega \rightarrow F \Pi \Psi \omega$ définit un processus de la sphère unité $\mathbb{S}_{S-1}$ (de dimension $S - 1$) vers $\mathbb{R}^{T-q}$. Comme ce processus est linéaire, il vérifie toutes les conditions du lemme de Bulinskaya dès que $T - q > S - 1$. On déduit donc que p.s. ce processus ne s'annule pas, soit p.s. $\Pi \Psi^* \omega \notin Z \ker(G)$. Il faut alors remarquer que $\Pi \Psi^*$ est de plein rang dès que $T > S$, pour conclure que p.s. $\text{rg}(M_u \Pi \Psi^*) = S$, d'où le résultat. □

On déduit de cette proposition qu'avec probabilité 1, pl admet un minimum $\hat{pl}_{H_1}$, qui est atteint.

Convergence des estimateurs

Le principal résultat de convergence recherché concernant les estimateurs proposés est donné par la proposition suivante. À ce stade, il s'agit d'un résultat « recherché », car comme nous allons le voir, un élément fait pour l'instant défaut dans la démonstration.

Proposition 2 *Si $T \geq S + q$, alors*

$$(\hat{u}_n, \hat{C}_n) \xrightarrow{p.s.} (\hat{u}, \hat{C}),$$

où $(\hat{u}, \hat{C})$ est une solution des équations (V.37) et (V.38), c'est-à-dire des conditions d'ordre 1.

Éléments de preuve : Nous nous contentons ici de présenter des *éléments de preuve*, la démonstration de cette proposition étant pour l'instant inachevée.

La fonction f étant p.s. continue sur $\mathbb{S}_{p-1}$, on sait que son minimum existe et est atteint sur $\mathbb{S}_{p-1}$. Par ailleurs, $\hat{u}_n$ étant fixé, on obtient $\hat{C}_{n+1}$, puis $\hat{u}_{n+1}$ en procédant à deux minimisations successives de la fonction pl . On en déduit que $f(\hat{u}_n)$ est une suite décroissante et bornée, et donc qu'elle converge vers une valeur f_0 . $(\hat{u}_n)$ étant une suite sur un compact de $\mathbb{R}^p$, on peut en extraire une sous-suite convergente. La démonstration de la convergence de $(\hat{u}_n)$ se fait alors par l'absurde, en supposant que $(\hat{u}_n)$ admette au moins deux valeurs d'adhérence. Supposons donc l'existence de a_1 et a_2 , deux valeurs d'adhérence distinctes de $(\hat{u}_n)$. Par passage à la limite, on obtient $f(a_1) = f(a_2)$, et on sait que $df(a_1) = df(a_2) = 0$. On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 3 *p.s., f n'admet pas deux points critiques $x_1, x_2 \in \mathbb{S}_{p-1}$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$.*

La preuve de ce lemme repose de nouveau sur le lemme 2 (de Bulinskaya). Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{S}_{p-1}$, considérons le processus $g(x_1, x_2) = (df(x_1), df(x_2), f(x_1) - f(x_2))$. Ce processus envoie $(\mathbb{S}_{p-1})^2$ dans $\mathbb{R}^{2p-1}$; on peut remarquer que $(\mathbb{S}_{p-1})^2$ est une variété de $\mathbb{R}^{2p}$ de dimension $2p - 2$. Par ailleurs, la Proposition 1 indique qu'il s'agit d'un processus régulier. Pour appliquer le lemme de Bulinskaya, il reste donc à vérifier la seconde condition, c'est-à-dire le caractère uniformément borné de la densité de g . Cet élément constitue à l'heure actuelle l'élément manquant de cette preuve. Si on suppose que cette condition est vérifiée, le lemme de Bulinskaya peut s'appliquer pour conclure qu'avec probabilité 1, g ne s'annule pas si $x_1 \neq x_2$. Qualitativement, l'argument est que $g(x_1, x_2) = 0$ impose $2p - 1$ contraintes à un processus régulier défini sur une variété de dimension $2p - 2$, ce qui n'admet p.s. pas de solution.

Finalement, le lemme permet de conclure qu'il est p.s. impossible d'avoir deux points d'adhérence distincts. $\hat{u}_n$ n'admet donc qu'un seul point d'adhérence, et donc elle converge vers une valeur $\hat{u}$ qui est un point critique de f , c'est-à-dire qui vérifie les conditions d'ordre 1 du problème de minimisation. □

En admettant la Proposition 2, nous avons montré comment construire des estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée dans le modèle (V.4). Nous allons maintenant aborder le problème des tests dans ce modèle, en commençant par étudier le cas simplifié $S = 1$.

V.1.4 Tests dans le cas $S = 1$

Le cas « simplifié » $S = 1$ constitue un problème intéressant et non-trivial. Dans ce cas, le modèle (V.4) peut s'écrire

$$\psi_t = m + \mu(x_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (\text{V.51})$$

et l'hypothèse H_0 devient : « $\mu(\cdot) = 0$ ». Le problème étudié consiste donc à s'interroger sur la présence, dans une série unidimensionnelle, d'un signal *lisse* en x , mais dont la forme peut être quelconque. Comme nous allons le voir, si $S = 1$, les estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée sont explicites, et différents tests de H_0 peuvent être proposés. Plusieurs de ces tests ont déjà été étudiés.

V.1.4.1 Estimateurs explicites sous H_1

Lorsque $S = 1$, le système d'équations (V.30)-(V.32), possède une solution explicite. En notant $\hat{C} = \hat{\sigma}^2 \in \mathbb{R}$, ce système peut être réécrit de la façon suivante :

$$\hat{g} = \hat{\sigma}, \quad (\text{V.52})$$

$$\hat{g}\hat{\mu}^*Z^* = \Psi\Pi\Gamma_\rho, \quad (\text{V.53})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\Psi\Pi(I_T - \Gamma_\rho)^2\Pi\Psi^*. \quad (\text{V.54})$$

Dans la suite de ce V.1.4.1, on notera $\hat{g}_{H_1}$, $\hat{\mu}_{H_1}$ et $\hat{\sigma}_{H_1}^2$ ces estimateurs, du fait qu'ils sont obtenus sous l'hypothèse H_1 . L'estimateur $\hat{\sigma}_{H_0}^2$ de σ^2 sous l'hypothèse H_0 est donné par

$$\hat{\sigma}_{H_0}^2 = \frac{1}{T}\Psi\Pi\Psi^*, \quad (\text{V.55})$$

et on peut remarquer que l'équation (V.13) est vérifiée sous H_0 et H_1 , d'où

$$\hat{m}_{H_0} = \hat{m}_{H_1} = \frac{1}{T}\Psi\mathbb{1}_T. \quad (\text{V.56})$$

Finalement, on peut écrire la différence des -2 log-vraisemblances pénalisées sous H_1 et H_0

$$\hat{p}l_{H_1} - \hat{p}l_{H_0} = pl_{H_1}(\hat{m}_{H_1}, \hat{g}_{H_1}, \hat{\mu}_{H_1}(\cdot), \hat{\sigma}_{H_1}^2) - pl_{H_0}(\hat{m}_{H_0}, \hat{\sigma}_{H_0}^2), \quad (\text{V.57})$$

$$= T \log(\hat{\sigma}_{H_1}^2) - T \log(\hat{\sigma}_{H_0}^2) + \rho \text{pen}(\hat{\mu}_{H_1}(\cdot)), \quad (\text{V.58})$$

$$= T \log \left(\frac{\Psi\Pi\Psi^*}{\Psi\Pi(I - \Gamma_\rho)^2\Pi\Psi^*} \right) + T \frac{\Psi\Pi(\Gamma_\rho - \Gamma_\rho^2)\Pi\Psi^*}{\Psi\Pi(I - \Gamma_\rho^2)\Pi\Psi^*}. \quad (\text{V.59})$$

De façon similaire au test du rapport des vraisemblances, on peut proposer un test basé sur cette différence, qui constituerait un test du rapport des vraisemblances pénalisées. Il faut remarquer toutefois que la distribution sous H_0 de cette quantité est non-triviale, même si elle peut être facilement simulée par un bootstrap.

V.1.4.2 Fonctions de lissage *splines* et modèles linéaires à effets mixtes

Bien qu'un test du rapport des vraisemblances pénalisées soit envisageable, plusieurs auteurs ont proposé des stratégies alternatives. Ces stratégies sont souvent basées sur le lien pouvant être établi entre les fonctions *splines* et les modèles linéaires mixtes (LMM). Dans le cas $S = 1$, ce lien a notamment été mis en évidence par Wang (1998).

Comme nous l'avons vu, si $S = 1$, le modèle (V.4) s'écrit

$$\psi_t = m + \mu(x_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (\text{V.60})$$

Nous avons également vu que si l'on suppose $\mu(\cdot) \in \mathcal{S}_{q+1}$, ce modèle peut s'écrire

$$\Psi = m\mathbb{1}_T + Z\mu + \varepsilon, \quad (\text{V.61})$$

où μ est le vecteur des coordonnées de la fonction $\mu(\cdot)$ dans la base $(s_k(\cdot))_{k=1, \dots, p}$. Le vecteur μ peut alors être estimé en minimisant la quantité (estimation par maximum de vraisemblance pénalisée)

$$\frac{1}{\sigma^2} \|\Psi - m\mathbb{1}_T - Z\mu\|^2 + \frac{1}{\lambda\sigma^2} \mu^* G \mu, \quad (\text{V.62})$$

en posant $\rho = \frac{1}{\lambda\sigma^2}$.

Considérons, dans un second temps, le modèle linéaire mixte

$$\Psi = m\mathbb{1}_T + Z\mu + \varepsilon, \quad (\text{V.63})$$

où μ est un effet aléatoire, tel que

$$\text{Var} \begin{pmatrix} \mu \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \lambda G^{-1} & 0 \\ 0 & I_T \end{bmatrix}. \quad (\text{V.64})$$

Dans ce modèle, la -2 log-densité du couple (Ψ, μ) est donnée par

$$p_{(\Psi, \mu)} = f(\lambda, \sigma) + \frac{1}{\sigma^2} \|\Psi - m\mathbb{1}_T - Z\mu\|^2 + \frac{1}{\lambda\sigma^2} \mu^* G \mu. \quad (\text{V.65})$$

Le meilleur estimateur linéaire sans biais (BLUP) est obtenu par maximisation (en μ) de la vraisemblance de μ conditionnellement à Ψ , $p_{\mu|\Psi}$, ce qui est équivalent à la maximisation (en μ) de $p_{(\Psi, \mu)}$. Par conséquent, le BLUP est obtenu en minimisant la même quantité qu'à l'équation (V.62).

V.1.4.3 Tests dans le monde des modèles linéaires mixtes

Plusieurs tests de l'hypothèse nulle $H_0 : \mu(\cdot) = 0$ dans le modèle non paramétrique (V.61) ont été développés dans le cadre de ces modèles linéaires mixtes. L'hypothèse nulle correspondante est alors $H_0 : \lambda = 0$, puisque μ n'est pas un paramètre du LMM (V.63). Premièrement, on peut remarquer que la distribution de Ψ est la même sous chacune des deux hypothèses nulles. Deuxièmement, un des avantages du point de vue LMM est que λ (qui est l'équivalent du paramètre de lissage ρ), est un paramètre qui n'est pas nécessairement connu sous H_1 . En particulier, des tests ont été proposés pour les hypothèses suivantes (cf par exemple Crainiceanu et al., 2005)

$$H_0 : \lambda = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda > 0. \quad (\text{V.66})$$

À l'opposé, l'estimation dans le modèle de régression (V.61) nécessite de fixer une valeur de ρ , et donc correspond au test

$$H_0 : \lambda = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_0 \quad (\text{V.67})$$

dans le point de vue LMM. Il a été montré, par ailleurs, que le choix de ρ pouvait constituer un problème difficile (cf Wahba, 1990).

Liu et Wang (2004) présentent un inventaire ainsi qu'une comparaison des tests des hypothèses (V.66) les plus utilisés. En particulier, cette comparaison prend en compte le LRT, le LRT restreint (RLRT), et deux versions du test de Fisher. D'une part, les résultats obtenus en effectuant cette comparaison ne permettent pas de véritablement préférer un test, car leur efficacité relative dépend de la véritable fonction $\mu(\cdot)$ utilisée pour définir l'alternative. D'autre part, la plupart des distributions nulles sont difficiles à calculer. Ce phénomène est lié au fait que le paramètre testé λ est, sous l'hypothèse nulle, sur la frontière de son ensemble de définition (cf Van der Vaart, 1998). Cependant, la distribution sous H_0 du LRT et du RLRT ont été étudiées en détails par Crainiceanu et Ruppert (2004) et Crainiceanu et al. (2005). Pour en revenir au problème initial multidimensionnel (V.6), nous allons seulement montrer comment des modèles linéaires mixtes peuvent être utilisés lorsque $S > 1$, et quels types de difficultés peuvent se poser.

V.1.5 Tests dans le cas $S > 1$

V.1.5.1 Adaptation du LRT dans le cadre des modèles linéaires mixtes

Conformément à ce qui a été vu au (V.63), considérons maintenant le modèle linéaire mixte

$$\Psi = m\mathbb{1}_T^* + g(Z\mu)^* + \varepsilon, \quad (\text{V.68})$$

où Ψ est une matrice de taille $S \times T$, ε est une variable aléatoire gaussienne de même taille, satisfaisant (V.5), et μ est un vecteur aléatoire de dimension p , indépendant de ε , tel que

$$\text{Var}(\mu) = \lambda G^{-1}, \quad (\text{V.69})$$

où Z et G sont connus, alors que ρ est inconnu. On peut remarquer que la condition (V.5) peut s'écrire

$$\text{Var}(\varepsilon) = C \otimes I_T. \quad (\text{V.70})$$

Comme au V.1.2, la matrice C est supposée inconnue.

Dans le but de généraliser le LRT évoqué précédemment dans le cas des modèles mixtes à notre problème, il est naturel d'étudier le modèle (V.68). En effet, de façon similaire au cas $S = 1$, on a

$$p(\Psi, \mu) = f(\lambda, C) + \sum_{t=1}^T \|y_t - m - g(Z\mu)_t\|_{C^{-1}}^2 + \frac{1}{\lambda} \mu^* G \mu. \quad (\text{V.71})$$

Le BLUP de μ s'obtient alors en minimisant la dernière équation en μ , ce qui revient à minimiser (V.17). Le lien entre le problème de départ et le modèle (V.68) est donc équivalent à celui établi au V.1.4.2.

Cependant, la mise en œuvre d'un LRT dans ce modèle (V.68) constitue un problème difficile. Dans le cas $S = 1$, les seuls paramètres en jeu étaient λ et σ . Ici, un LRT nécessiterait d'estimer, sous H_1 , λ , C et g . De plus, la distribution de Ψ est donnée par

$$\Psi \sim N(m \mathbb{1}_T^*, \lambda g g^* \otimes \Gamma + C \otimes I_T), \quad (\text{V.72})$$

en utilisant les mêmes notations qu'en (V.70), et en introduisant $\Gamma = ZG^{-1}Z^*$. Par conséquent, le modèle (V.68) n'est pas véritablement un modèle linéaire, puisque la variance de Ψ dépend du produit $g g^*$. Cette difficulté rend la mise en œuvre d'un LRT beaucoup plus difficile. Pour cette raison, cette solution ne sera pas étudiée plus en détails.

V.1.5.2 Test du rapport des vraisemblances pénalisées

Comme nous l'avons vu, une solution possible pour le problème introduit au V.1.2, consiste à adapter le LRT, en introduisant un PLRT, basé les vraisemblances pénalisées au lieu des vraisemblances « classiques ». La difficulté principale dans ce cas là est de connaître la distribution sous H_0 de la variable de test $v = \hat{p}l_{H_0} - \hat{p}l_{H_1}$. En particulier, nous avons vu que même dans le cas $S = 1$, où cette variable v a une forme explicite, cette distribution n'est pas connue. Soit $\mathcal{D}_{m,C}$ la distribution nulle sous H_0 de cette variable de test, qui dépend a priori des valeurs des paramètres m et C . Le résultat principal concernant la connaissance de cette distribution peut être énoncé de la façon suivante :

Proposition 3

$$\mathcal{D}_{m,C} = \mathcal{D} \quad \forall m, C, \det(C) \neq 0.$$

Preuve : Ce résultat peut être obtenu en deux étapes. Tout d'abord, on peut remarquer qu'un changement de variable de la forme $\Psi \rightarrow A\Psi$ (A inversible), résulte en une transformation des estimateurs $\hat{g} \rightarrow A\hat{g}$ et $\hat{C} \rightarrow A\hat{C}A^*$, $\hat{\mu}$ étant inchangé. En particulier, les équations (V.30)-(V.32) ne sont pas modifiées par cette transformation. Ensuite, un rapide calcul montre que v est invariant par ce changement de variable. Il suffit donc de choisir $A = \hat{C}^{1/2}$, afin de transformer C en I_S , la distribution de v n'étant pas modifiée. Avec le même type de raisonnement, on obtient facilement que la distribution $\mathcal{D}$ ne dépend pas de m . □

Compte tenue de cette propriété, la distribution sous H_0 ne dépend que des dimensions du problème (S et T), ainsi que du choix du paramètre de lissage ρ (dont dépend également, d’une certaine façon, l’hypothèse alternative testée, en imposant une contrainte de régularité plus ou moins forte). Ce résultat permet donc d’estimer la distribution nulle de v par une simple procédure de bootstrap, puisque tous les paramètres en jeu sont connus. Pour des valeurs de S et T de l’ordre de 100, une procédure de bootstrap permet de simuler la distribution nulle dans un temps raisonnable (quelques dizaines de minutes pour 1000 tirages).

V.2 Premières applications

Comme nous l’avons indiqué, cette partie applicative sera relativement réduite comparée à celles des chapitres précédents, car les résultats présentés y sont relativement récents, et une présentation plus complète nécessiterait un peu plus de recul.

De façon générale, deux *produits* fournis par la méthode NOP vont être analysés et dans la mesure du possible, interprétés : les résultats du test de détection (p -value), et les valeurs estimées des composantes spatiales et temporelles des changements climatiques, notées respectivement g et μ jusqu’ici.

Comme les méthodes précédentes, la motivation première était naturellement de construire un test de détection, et donc d’obtenir une idée du niveau de significativité avec lequel on pouvait conclure à la présence d’un changement. La méthode NOP permet effectivement d’aboutir à ce type de résultat, que nous considérerons en premier lieu. Cependant, comme nous l’avons vu, l’évaluation de la p -value de ce type de test nécessite une méthode de bootstrap qui sans être excessivement coûteuse, rend difficile l’estimation de la queue de distribution, et donc des *petites* p -values. De plus, la distribution sous H_0 dépend de la taille (S, T) de l’échantillon étudié. En conséquence, la représentation de l’évolution dans le temps de la p -value, conformément à ce qui était fait au chapitre précédent, nécessiterait la simulation par bootstrap d’environ T distributions distinctes, ce qui serait trop coûteux et ne sera pas fait ici. La significativité ne sera donc évaluée que par une seule valeur, calculée sur l’ensemble de l’échantillon.

Outre la p -value, la méthode fournit des estimations *libres* des vecteurs μ et g , c’est-à-dire non contraintes par les modèles climatiques. Ces quantités constituent une bonne façon d’appréhender les données « en leur laissant une chance de s’exprimer ». Nous accorderons donc une certaine importance aux estimateurs obtenus dans le cas des applications climatiques, notamment en s’interrogeant, succinctement, sur leur ressemblance avec les signaux simulés par les modèles numériques.

V.2.1 Étude des températures moyennes annuelles

Illustrons, pour, commencer, les résultats fournis par la méthode NOP, sur les jeux de données *complets*, c’est-à-dire sans centrage spatial préalable. Les paramètres utilisés dans cette section seront, sauf mention explicite, identiques à ceux utilisés dans les chapitres précédents. Pour les deux domaines, l’étude est menée sur la période 1900-2006. Chacune des mailles possédant une série de données ininterrompue sur la période est prise en compte dans le cas Méditerranée, alors que 50 pseudo-stations sont utilisées dans le cas France. Dans cette première application, les p -values données sont évaluées en utilisant une hypothèse d’indépendance des observations d’une année sur l’autre, pour le cas France, et une hypothèse de dépendance de type AR1 de coefficient $\alpha = 0.4$ pour le cas Méditerranée. Dans le cas de la France, on utilise donc les mêmes hypothèses qu’au Chapitre III ; la prise en compte d’un AR1 de paramètre $\alpha = 0.2$ ne modifie pas les résultats présentés. Dans le cas de la Méditerranée, l’hypothèse est conforme aux indications données au II.3, et correspond à celle utilisée dans les chapitres précédents.

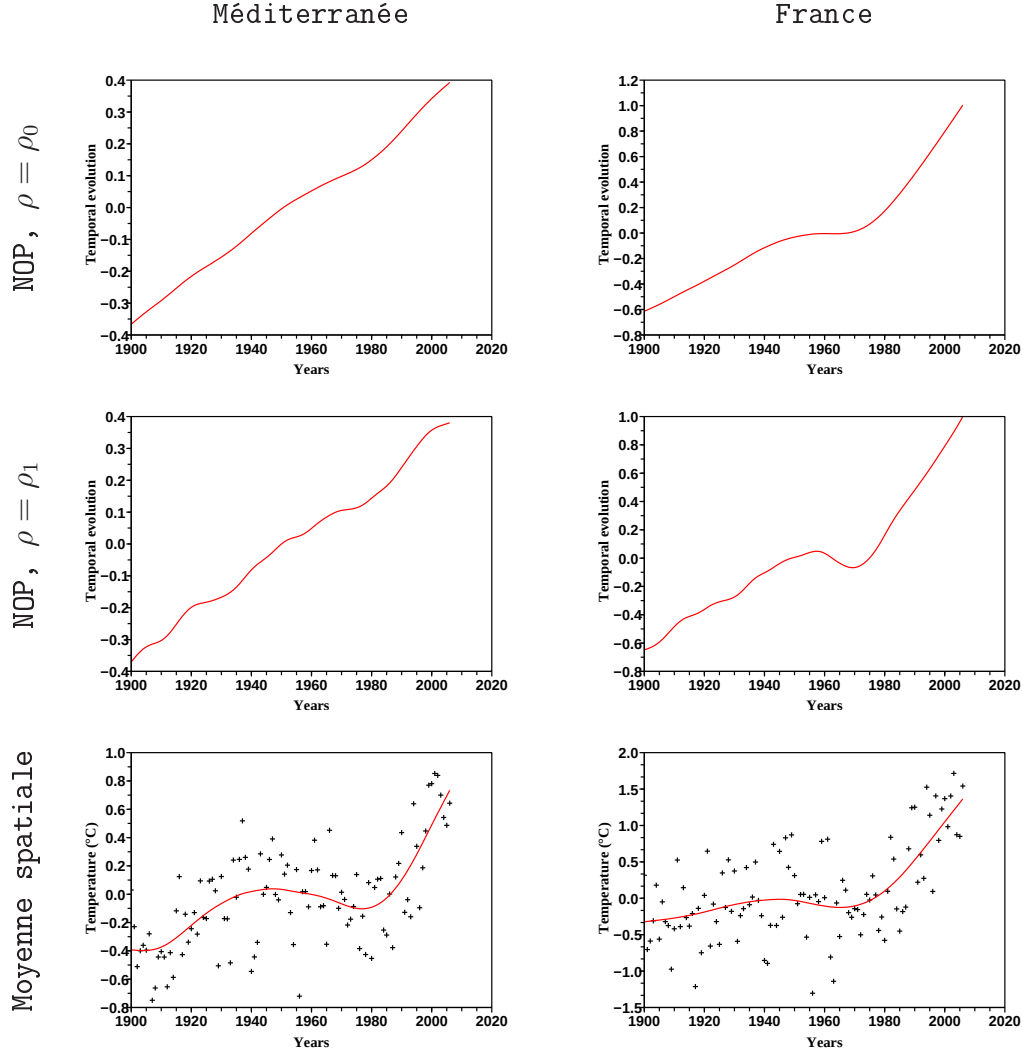


FIG. V.1 – **Signaux d'évolution temporelle estimés par la méthode NOP.** Les évolutions temporelles estimées par la méthode NOP (vecteur μ), sont représentés pour les domaines France et Méditerranée, et deux valeurs $\rho_1 < \rho_0$ sensiblement différentes du paramètre de lissage ρ . Ces évolutions temporelles sont comparées au lissage de la seule moyenne sur le domaine considéré.

Dans ce premier cas, les deux échantillons présentent des évolutions significatives au sens des hypothèses testées par la méthode NOP. Du fait des difficultés à représenter correctement la queue de la distribution sous H_0 , on peut seulement (avec une grande *confiance* toutefois) conclure que la p -value est dans les deux cas, plus petite que 10^{-4} . Si ce résultat est très remarquable, il ne permet pas véritablement d'établir une comparaison avec les p -values calculées au chapitre précédent (qui étaient encore plus petites), par exemple afin d'évaluer le *gain* occasionné par le changement de modèle statistique.

La Figure V.1 présente les estimateurs obtenus par la méthode NOP, en termes de forme d'évolution temporelle du signal. Plusieurs commentaires peuvent être tirés de cette figure, compte tenu de la significativité des changements. Ces signaux d'évolution temporelle sont notamment comparés à des signaux équivalents estimés par un simple lissage par fonction *spline* (avec un nombre similaire de degrés de liberté) de la seule série des températures moyennes sur l'ensemble du domaine considéré.

Dans le cas du domaine Méditerranée, pour commencer, l'estimateur de l'évolution temporelle est remarquablement linéaire. Ce signal relativement étonnant diffère en particulier sensiblement de la forme d'évolution pouvant être évaluée à partir des températures moyennes sur le domaine.

On peut remarquer qu'une telle linéarité pourrait être liée à un choix d'une valeur trop élevée du paramètre de lissage ρ . En effet, le choix de ce paramètre demeure, de la même façon qu'au chapitre précédent, en partie arbitraire. La construction d'une méthode d'estimation de ρ par validation croisée n'a pas été entreprise ici (elle serait plus compliquée à mettre en œuvre que dans le cas de données unidimensionnelles). De plus, la pénalité portant sur un terme de dérivée seconde, le choix d'une valeur très grande pour ρ conduit à l'annulation de la pénalité, et donc à l'obtention d'une fonction linéaire du temps. Cependant, dans le cas qui nous occupe, cette cause possible ne peut être retenue, puisque l'estimation de ce même signal temporel en choisissant une valeur ρ_1 de ρ sensiblement plus petite que la valeur initiale ρ_0 conduit toujours à l'estimation d'une évolution relativement linéaire dans le temps, comme l'indique la Figure V.1.

Dans le cas du domaine France, le résultat est à la fois comparable et différent. Comparable, tout d'abord, parce que l'évolution estimée par la méthode NOP fournit un signal nettement plus linéaire que celui pouvant être déduit d'un lissage de la moyenne spatiale des températures. On remarque d'ailleurs que dans ce dernier cas, le réchauffement estimé au cours des 70 premières années du siècle est très réduit, alors que la rupture de pente au cours des trente dernières années est très marquée. Cette rupture de pente, notamment, se retrouve également dans le signal déduit de la méthode NOP, de façon à peu près concomitante. C'est dans la forme « en tilde » de ce signal que se situe la différence avec le résultat obtenu sur la Méditerranée, forme qui se trouve accentuée lorsqu'on réduit le nombre de pseudo-stations utilisées (non montré). La forme obtenue reste toutefois plus « linéaire » que celle déduite de l'analyse des valeurs moyennes, quelque soit le nombre de pseudo-stations utilisées.

Deux remarques supplémentaires peuvent être faites concernant ces deux courbes. D'une part, le vecteur μ estimé par la méthode NOP est ici normalisé (nous avons évoqué au V.1 le problème de la normalisation entre μ et g), de sorte que les valeurs indiquées en ordonnée correspondent effectivement à une température moyenne sur le domaine. On peut constater de cette façon que le réchauffement moyen sur l'ensemble de la période estimé par NOP est globalement du même ordre que celui observé directement sur la courbe des températures moyennes. Dans le cas de la Méditerranée, l'absence de rupture de pente tend toutefois à légèrement limiter ce réchauffement. D'autre part, les valeurs de chaque année individuelle sont représentées sur la figure des valeurs moyennes, contrairement à ce qui est fait dans le cas de l'étude de la méthode NOP. Ceci se justifie par le fait que la méthode NOP utilise l'ensemble des dimensions spatiales de l'échantillon, et ne peut donc pas être représentée comme un simple lissage de données réelles (c'est-à-dire de dimension 1).

Les derniers résultats intéressants fournis par la méthode NOP sont les distributions spatiales des signaux estimés (vecteurs g). Ces distributions spatiales sont représentées Figure V.2, en appliquant cette fois-ci une normalisation au vecteur g , de telle sorte que l'échelle représentée décrive la variation de température estimée en chaque point entre le début et la fin de la période (1900-2006).

On peut tout d'abord remarquer que dans les deux cas, les distributions spatiales obtenues sont très similaires à celles représentées, respectivement, Figures IV.11 et IV.5. Ce résultat souligne l'accord entre les deux méthodes. Cet accord n'est d'ailleurs pas surprenant, compte tenu de la forme des signaux temporels estimés par NOP et représentés précédemment, signaux qui sont eux-mêmes conformes à certains (tout au moins) des signaux temporels du chapitre précédent, déduits de simulations climatiques.

Une différence toutefois notable concerne la valeur moyenne du réchauffement sur le domaine, particulièrement dans le cas de la France. Figure IV.5, en effet, cette valeur est de l'ordre de 1.1 à 1.2°C, contre 1.6 à 1.7°C dans le cas de NOP. Cette différence peut s'expliquer simplement,

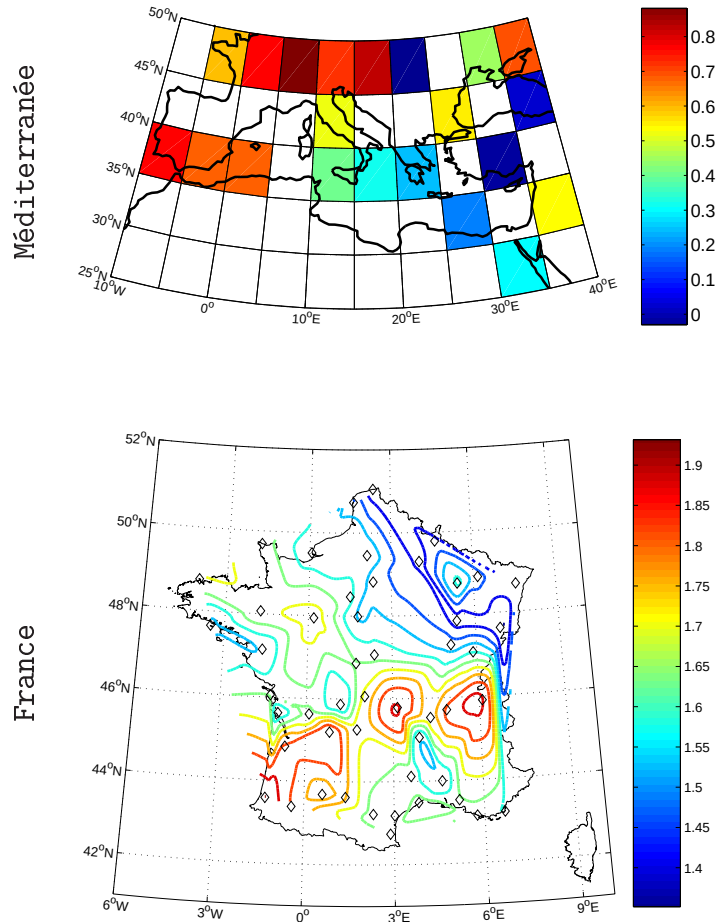


FIG. V.2 – **Distribution spatiale estimée par la méthode NOP.** Les distributions spatiales (vecteur g) des changements climatiques telles qu'estimées par la méthode NOP sont représentées, respectivement pour les domaines Méditerranée et France. Les estimateurs sont calculés sur les données de températures moyennes annuelles, et sur la période 1900-2006. Ces résultats peuvent être mis en relations avec les Figures IV.11 et IV.5

par la rupture de pente sensible du vecteur μ estimé par NOP. En effet, les signaux d'évolution temporelle utilisés au chapitre précédent présentaient généralement soit des évolutions plus linéaires, soit une rupture de pente plus précoce et moins marquée. La valeur du réchauffement moyen finalement estimée était en conséquence légèrement diminuée, de la même manière que l'estimation de cette quantité en ajustant une tendance linéaire sur les températures annuelles représentées Figure V.1 conduirait à une valeur plus petite que celle obtenue en utilisant une estimation par fonction *spline*.

Globalement, les résultats obtenus par la méthode NOP tendent plutôt à confirmer ceux obtenus au Chapitre IV en utilisant la méthode TOD. Les formes d'évolution temporelles déduites des observations (Figure V.1) pourraient toutefois faire l'objet d'une interprétation plus poussée. Une remarque intéressante consiste à signaler que la reproduction de la courbe en forme de tilde de l'évolution de la température moyenne (forme qui se retrouve à l'échelle globale) est longtemps demeuré une tâche difficile pour les CGCMs, ces derniers ayant tendance à simuler une évolution plus linéaire. Plus récemment, la prise en compte de l'effet des aérosols, notamment, a permis de se rapprocher un peu plus de la courbe d'évolution observée, en soulevant pourtant quelques questions (Knutti, 2008, Kiehl, 2007). L'interprétation des signaux estimés par NOP, notamment sur le domaine Méditerranée, peut être intéressante dans cette perspective.

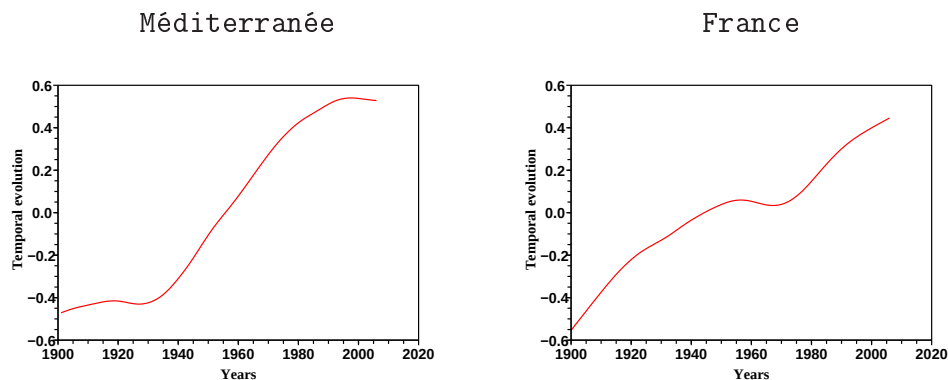


FIG. V.3 – **Évolution temporelle estimée par NOP pour les températures moyennes annuelles centrées spatialement.** La technique d'estimation est en tout point comparable à celle utilisée Figure V.1, avec $\rho = \rho_0$, et après retrait du terme spatialement uniforme du jeu de données traitées.

Il reste cependant difficile de faire la part des choses entre deux explications possibles. D'une part, la linéarité dans le temps peut s'expliquer par le fait que la méthode filtre de façon efficace l'effet des aérosols, par exemple parce que celui-ci a une empreinte spatiale différente. Dans ce cas, la méthode permet d'une certaine façon de confirmer le fait que l'effet du forçage *gaz à effet de serre* ait été très progressif au cours du siècle dernier. D'autre part, en présence d'un seul terme de changement, la méthode NOP permet de mieux estimer la forme de l'évolution temporelle, puisque l'estimation est basée sur l'ensemble de l'échantillon au lieu de se contenter d'une projection unidimensionnelle (ce qui est fait lorsque la moyenne est étudiée). Dans ce cas, on pourrait être tenté d'interpréter la linéarité observée comme un indice du rôle de la variabilité interne dans la forme en tilde couramment décrite de la moyenne. L'interprétation de ce résultat, en tout état de cause, suggère d'aller un peu plus en avant vers l'attribution.

V.2.2 Autres variables

Par soucis de compatibilité avec les chapitres précédents, nous allons ici présenter les résultats obtenus avec la méthode NOP sur les températures moyennes annuelles centrées spatialement, et ce sur les deux domaines considérés. Nous aborderons ensuite brièvement le cas déjà évoqué des précipitations annuelles sur la France.

V.2.2.1 Températures moyennes annuelles centrées spatialement

Dans un premier temps, nous allons donc nous concentrer sur les températures moyennes annuelles, centrées spatialement. En suivant la définition donnée en introduction de la détection à l'échelle régionale, et la pratique des chapitres précédents, c'est l'étude de cette variable qui peut véritablement permettre de conclure à la mise en évidence d'un changement *régional*.

Le test de détection effectué par la méthode NOP, tout d'abord, rejette pour chacun des deux domaines l'hypothèse nulle, et ce de façon très prononcée, les p -values étant, comme dans le cas précédent, largement inférieures à 10^{-4} . Les résultats obtenus sont donc, comme pour les variables non centrées, *compatibles* avec ceux mis en évidence par la méthode TOD, même si la comparaison est limitée par la difficulté d'estimer précisément la p -value dans le cas de NOP. Ces résultats sont sensiblement plus prononcés que ceux obtenus avec la méthode ROF.

En terme de forme d'évolution temporelle, les résultats fournis par la méthode NOP sont illustrés, pour les deux domaines étudiés, Figure V.3. Dans ces deux graphiques, l'échelle en ordonnée ne doit pas faire l'objet d'interprétation, et seule la forme du signal importe. En effet,

Figure V.1, les valeurs en ordonnée pouvaient grossièrement s'interpréter comme un indicateur de la température moyenne sur le domaine, mais ce n'est plus le cas ici, puisque en s'intéressant à des données centrées spatialement, la moyenne sur le domaine est toujours nulle.

Dans le cas du domaine Méditerranée, le signal observé sur le terme *non-uniforme* étudié peut constituer une début d'explication du caractère très linéaire de l'évolution obtenue sans centrage spatial. En effet, le changement ici est très prononcé au cours de la période de décroissance de la moyenne spatiale, essentiellement entre 1940 et 1980. Inversement, sur la fin de la période, lorsque l'évolution de la température moyenne est relativement forte, l'évolution du signal centré est très réduite. Comme le jeu de données total correspond à la somme de la moyenne spatiale et du terme centré étudié ici, une explication qualitative possible du résultat (bien que simplifiée) est que les évolutions de ces deux termes se « relaient » pour résulter en un changement très régulier dans le temps. La confirmation ou l'infirmer de cette interprétation nécessitera quelques approfondissements.

Aller au-delà de cette simple observation demanderait d'analyser beaucoup plus en profondeur ce signal, notamment afin d'expliquer son évolution, relativement irrégulière au cours du siècle. Dans le but de confirmer certains éléments apportés au III.4.2, on pourrait en particulier se demander si ce signal est lié aux variations du contraste Terre-Mer. Cette analyse pourra faire l'objet de futures recherches.

Dans le cas de la France, bien que le signal soit également très significatif, la forme du signal d'évolution dans le temps demeure un peu plus sensible à certains choix, comme le nombre de pseudo-stations utilisées. En conséquence, l'analyse faite ici ne sera pas davantage approfondie.

Enfin, les distributions spatiales estimées des changements climatiques ne sont pas ici reproduites. En effet, elles sont essentiellement identiques, à une constante près (liée au fait que pour des données centrées spatialement, la moyenne des changements sur le domaine est nulle), à celles représentées Figure V.2 ; nous renvoyons donc à cette figure.

V.2.2.2 Cumuls annuels de précipitations sur la France

L'étude des cumuls annuels de précipitations, comme celle des températures annuelles, permet de rendre compte de quelques résultats intéressants, même si elle revêt un caractère inachevé.

Tout d'abord, l'application de la méthode NOP aux données de précipitations conduit à la détection d'un signal de changement très significatif ($p\text{-value} < 10^{-4}$). Ce résultat est obtenu de façon très similaire avec ou sans centrage spatial.

Le cas des précipitations se singularise toutefois de celui des températures par le fait que la moyenne spatiale des précipitations (ici sur la France), ne montre aucune évidence de changement au cours de la période 1900-2006. Ce résultat peut être, en première approche, appréhendé visuellement en étudiant la série des cumuls annuels de précipitations moyennées sur le domaine. Il est surtout confirmé par l'application de la méthode NOP à la série unidimensionnelle des moyennes annuelles sur le domaine (la méthode NOP pouvant également servir à tester la présence d'un signal non-paramétrique dans le cas unidimensionnel). Comme nous l'avons évoqué au V.1, la méthode NOP constitue alors une solution *additionnelle* aux autres méthodes déjà connues pour effectuer ce type de test. Dans le cas des précipitations, la mise en œuvre d'un tel test sur la série des cumuls annuels moyennés sur le domaine ne rejette pas l'hypothèse nulle, ce qui confirme le diagnostic visuel, et l'absence d'évolution en moyenne sur le domaine.

Le signal détecté par l'application de la méthode NOP sur l'ensemble du jeu de données est donc entièrement lié à des changements de la distribution spatiale de ces cumuls annuels. Ceci explique également que les mêmes formes de changements soient estimées, en utilisant le jeu de données complet, ou le jeu de données centré (à une constante près toutefois dans le cas de la distribution spatiale, puisque comme précédemment, l'utilisation du jeu centré conduit

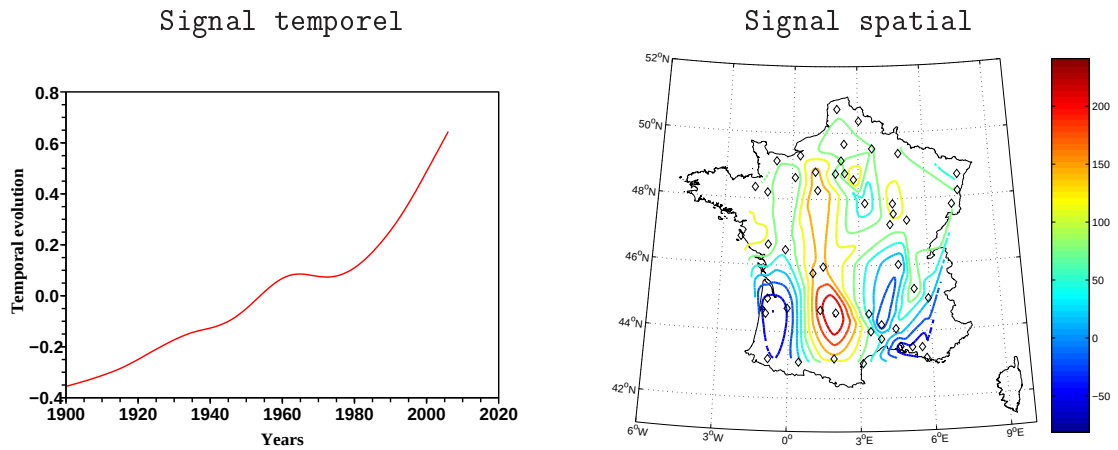


FIG. V.4 – **Évolution temporelle estimée par NOP pour les cumuls annuels de précipitations centrées spatialement.** La technique d'estimation est en tout point comparable à celle utilisée Figure V.1, avec $\rho = \rho_0$, et après retrait du terme spatialement uniforme du jeu de données traitées.

à l'estimation d'un changement nul en moyenne sur le domaine). Ces signaux de changements estimés par la méthode NOP sont représentés Figure V.4, dans le cas non centré.

Une interprétation fine de ces résultats demanderait, de nouveau, un certain recul, et est donc trop précoce. On peut toutefois constater que la distribution spatiale du changement est très similaire à celle relevée au chapitre précédent (Figure IV.8), et tout aussi *peu régulière*. Il est également intéressant de constater que dans la distribution spatiale représentée, la moyenne spatiale des changements semble sensiblement différente de zéro, alors qu'elle ne l'est pas *significativement* au sens du test statistique utilisé.

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la problématique de la détection des changements climatiques à l'échelle régionale, sujet que nous avons traité sous deux angles distincts. Du point de vue statistique, tout d'abord, nous avons proposé et étudié des tests d'hypothèses efficaces pour les études de détection à l'échelle régionale. Du point de vue climatologique, ensuite, nous avons appliqué ces méthodes à différentes observables climatiques sur les domaines France et Méditerranée, ce qui a permis de mettre en évidence de nouveaux résultats quant à la détectabilité des changements climatiques en cours. En outre, les échanges entre ses deux points de vue ont été permanents au cours de ce travail, ce qui a permis de construire des méthodes statistiques adaptées, et d'aborder certaines questions sur les évolutions climatiques avec des outils originaux.

Après avoir présenté le cadre à la fois statistique et climatique des études de détection, nous avons étudié en détail trois stratégies de détection, basées sur trois hypothèses différentes sur la part réputée connue des changements climatiques en cours et à venir. Ainsi nous avons successivement recherché dans les observations la distribution spatiale d'un signal de changements climatiques, telle que simulée par des modèles de climat, sa forme d'évolution temporelle, et enfin nous nous sommes intéressés à la détection d'un signal de changement régulier en temps, mais non spécifié. Pour chacune de ces trois options, nous avons proposé une méthode d'inférence, ou apporté une contribution aux méthodologies déjà existantes.

Concernant la première de ces stratégies, nous avons montré que la détection d'un signal dont l'empreinte spatiale est déterminée s'apparentait à un problème de régression multivariée, dans lequel la connaissance de la matrice de covariance de la variabilité climatique interne est précieuse. Dans le cadre d'applications climatiques, la *grande* dimension des variables considérées, combinée au petit nombre d'observations disponibles, est à l'origine de différentes difficultés, notamment d'estimation. La contribution méthodologique apportée au Chapitre III consistait à montrer que l'algorithme couramment utilisé dans la communauté pouvait être avantageusement remplacé par l'utilisation d'un estimateur de matrice de covariance bien-conditionné. La méthode ROF ainsi introduite est basée sur une approche de type *ridge regression*, et permet finalement d'obtenir un test de détection plus puissant.

L'utilisation de cette première méthode (ROF) a notamment permis de mettre en évidence certains résultats nouveaux sur les domaines étudiés. Ces résultats étaient particulièrement intéressants sur le bassin méditerranéen, où une première analyse a permis de proposer une possible interprétation physique, en mettant en avant le contraste Terre-Mer. Dans le cas de la France, cependant, si quelques variables semblent montrer des évolutions significatives, les résultats demeurent contrastés, et souvent sensibles au choix du signal recherché (c'est-à-dire au choix du modèle climatique utilisé pour le simuler).

Une deuxième stratégie a été introduite au Chapitre IV, afin d'évaluer la présence, dans les observations, d'un signal de changements présentant une évolution dans le temps déterminée à

l'avance (méthode TOD). D'un point de vue plus technique, cette méthode consiste à combiner un lissage par fonctions *splines* des signaux simulés et un test de Hotelling, sans toutefois qu'un point méthodologique authentiquement original n'ait été introduit. D'un point de vue applicatif, en revanche, l'utilisation de la méthode TOD a permis de réel progrès, et ce sur les deux domaines France et Méditerranée, en mettant en lumière des changements souvent importants au cours du siècle dernier. Nous avons vu que cette stratégie de détection permettait d'obtenir des résultats concordants avec une très large majorité de modèles climatiques ; cet accord est toutefois obtenu en limitant le nombre de degrés de liberté laissé aux modèles. La comparaison de la distribution spatiale des signaux ainsi détectés dans les observations avec ceux déduits des modèles climatiques (et utilisés comme point de départ de la méthode ROF) a montré que la reproduction, par les modèles de climat, de la distribution spatiale des changements observés, sur des domaines aussi petits, restait souvent un défi.

Enfin, une troisième stratégie a été étudiée au Chapitre V, proposant de détecter les changements climatiques de façon largement non-paramétrique, en évitant presque toute utilisation des modèles numériques (méthode NOP). L'inférence est alors basée sur deux hypothèses principales, à savoir l'hypothèse de séparabilité espace-temps, et l'hypothèse de régularité dans le temps, du signal de changements. Sous ces hypothèses, nous avons introduit un test du rapport des vraisemblances pénalisées, dans lequel le coefficient de pénalisation peut être librement choisi, afin de rechercher un signal plus ou moins régulier en temps. Les principales difficultés rencontrées concernaient le caractère non explicite des estimateurs du maximum de vraisemblance pénalisée, et à la détermination de la distribution sous H_0 de la statistique de test. Les premières applications de cette méthode montrent sa capacité à filtrer le signal d'évolution principal, et confirment en grande partie les résultats obtenus avec la méthode TOD, concluant à la détection de signaux de changements pour une large majorité des variables et domaines étudiés.

Si cette thèse a ouvert quelques pistes originales du point de vue de la détection statistique des changements climatiques, plusieurs prolongements possibles restent à aborder, et plusieurs questions demeurent ouvertes.

Généralisation de certaines méthodes au problème de l'attribution

Tout d'abord, un prolongement naturel du travail effectué dans le cadre de cette thèse concerne la généralisation des méthodes proposées au problème de l'attribution. Comme nous l'avons indiqué au Chapitre II, le problème de l'attribution requiert une plus grande information *a priori* que n'en nécessitent les méthodes de détection, puisque, par exemple, il faut évaluer la contribution des réponses à différents forçages dans les évolutions observées. Ainsi, la méthode NOP paraît très difficile à généraliser au problème de l'attribution, puisqu'elle est largement non-paramétrique, et qu'elle ne permet pas de distinguer les réponses à deux forçages distincts.

À l'opposé, la généralisation de la méthode ROF semble naturelle, puisqu'il s'agit d'une adaptation de la méthode des empreintes digitales optimales, déjà largement utilisée pour attribuer des changements climatiques. Au lieu de se porter sur la puissance du test, la justification de l'intérêt de la méthode ROF pourrait être apporté en évaluant l'éventuelle réduction de l'erreur quadratique moyenne des estimateurs des coefficients de régression, dans un modèle à plusieurs variables explicatives. Ce faisant, une indication serait apportée sur l'intérêt d'utiliser une matrice de covariance bien conditionnée pour effectuer une régression en grande dimension. Notons également qu'une certaine préférence peut être apportée à ce type de méthode dans le cas de l'attribution, puisque le rôle joué par les modèles de climat est plus important, en accord avec l'esprit de l'attribution, qui consiste à comparer résultats de simulations et observations sur des échelles de temps convenablement choisies.

Le cas de la méthode TOD, enfin, est plus ambigu. Si l'utilisation d'une méthode similaire à TOD ne semble pas exclue pour mener des études d'attribution, plusieurs difficultés devraient

au préalable être surmontées. Premièrement, le test de Hotelling, sur lequel repose la méthode TOD, n'est utilisable que pour tester des hypothèses linéaires dont la différence des dimensions est 1. Si d'autres variables explicatives sont ajoutées, il n'existe plus de test optimal. Certains tests ayant de bonnes propriétés sont toutefois connus, parmi lesquels le test de Wald. Une deuxième difficulté tient au caractère régulier dans le temps des réponses du système climatique aux forçages externes. Si cette hypothèse est tout à fait adaptée dans le cas du forçage anthropique par les gaz à effet de serre, lui-même très progressif dans le temps, elle l'est moins pour certains autres forçages. Elle est même très discutable dans le cas du forçage volcanique, puisque les effets d'une éruption majeure sont à la fois soudains et éphémères. Une autre technique devrait donc être utilisée pour estimer la réponse temporelle aux différents forçages. Une piste possible consisterait à utiliser la méthode proposée par Stone et al. (2007a), basée sur l'utilisation de modèles physiques simplifiés (EBMs).

Extension des domaines d'application

Un second prolongement naturel de ce travail consiste à étendre le domaine d'application des méthodes introduites. Trois pistes principales peuvent être envisagées pour cela.

Premièrement, l'application des méthodes introduites devra être menée à l'échelle globale. Plusieurs motivations justifient un tel travail. D'une part la question du rôle des activités humaines a été initialement posée de façon globale ; le GIEC, par exemple, s'emploie avant tout à démontrer l'incontestabilité de l'influence anthropique à l'échelle mondiale. D'autre part, les méthodologies « concurrentes » de celles développées ici ont été popularisées par leur utilisation à échelle globale, et c'est à cette échelle que leurs auteurs se sont efforcés d'en montrer les qualités. L'application à l'échelle mondiale des méthodes décrites dans cette thèse, cependant, n'est pas sans poser quelques difficultés, en lien avec la dimension spatiale du problème ; nous reviendrons sur ces difficultés.

Deuxièmement, comme indiqué au Chapitre I, les méthodes de détection et d'attribution ont été, au cours de ces dernières années, appliquées à différentes variables météorologiques ou océaniques. De la même façon, il est envisagé d'appliquer les méthodes introduites dans cette thèse à d'autres variables que la température. Nous avons vu que quelques premiers éléments ont été apportés concernant l'étude des précipitations, notamment grâce à la disponibilité de longues séries homogénéisées sur la France. Ce travail pourra être approfondi, par exemple en cherchant à interpréter le signal détecté sur les précipitations annuelles, ou en s'intéressant aux cumuls saisonniers de précipitations. Concernant ce dernier point en particulier, il sera utile d'évaluer la pertinence des méthodes proposées pour des variables non gaussiennes. Bien que cela n'ait pas été mentionné dans ce manuscrit, quelques premiers pas ont également été faits en vue d'une application en hydrologie, sur des données de débits, application qui est envisagée dans l'avenir.

Troisièmement, dans le but de rechercher, dans les observations, un signal issu d'une simulation numérique du climat, diverses études ont montré l'intérêt d'utiliser une empreinte spatio-temporelle du signal recherché (Stott et al., 2001 par exemple). L'extension de la méthode ROF, notamment, à ce cas d'application, sera donc souhaitable, singulièrement dans le but de mener des études d'attribution.

A plus long terme, cette fois-ci, deux prolongements supplémentaires peuvent être envisagés. D'une part, il pourra être intéressant d'appliquer des méthodes de détection et d'attribution directement à des jeux de données *multivariées*, c'est-à-dire en traitant de façon simultanée plusieurs paramètres météorologiques. Douville (2006), par exemple, a montré le lien qui existait entre température et précipitations dans certaines régions tropicales, et l'intérêt de la prise en compte de ce lien dans une étude de détection. D'autre part, comme nous l'avons déjà évoqué, l'étude des phénomènes extrêmes et de leur détection a déjà été abordée par différents auteurs, et constitue un prolongement naturel de la détection de changements sur la moyenne. Plus

largement, la mise en évidence d'une influence humaine dans la variabilité climatique constitue une question d'intérêt.

Réduction de la dimension et régularisation spatiale

Comme nous l'avons vu, la taille des échantillons étudiés pose souvent des difficultés, en particulier lorsque le nombre d'années observées (assimilable à un nombre d'individus) est du même ordre que le nombre de lieux d'observations (assimilable à un nombre de variables). Ce problème tend à empirer, par exemple, si l'on souhaite appliquer les méthodes de détection à l'échelle globale, où la dimension spatiale peut devenir encore beaucoup plus grande. Le problème de la réduction de cette dimension spatiale est donc posé.

D'une certaine façon, la dimension spatiale autorisant l'utilisation des méthodes que nous avons introduites est toujours limitée. Pour les méthodes TOD et NOP, la condition d'application du test est, précisément, que le nombre d'individus soit supérieur au nombre de variables. Si cette condition n'est pas vérifiée, la statistique sous H_0 est dégénérée, et le test ne s'applique plus de la même manière. Une solution possible pour surmonter ce problème, dans ce cas là, pourrait consister à étudier ces distributions dégénérées. Le cas de la méthode ROF est un peu plus délicat. En effet, nous avons vu que lorsque la dimension spatiale du problème devient trop importante, il est difficile de maîtriser le niveau du test, ce dernier tendant à devenir trop permissif (cf III.1). L'utilisation d'une technique de rééchantillonnage différente, comme proposé au III.2.2 pourrait constituer une solution satisfaisante, en fournissant un test exact, au prix d'une légère perte de puissance (cf III.2.2).

Dans les deux cas, donc, le problème de la dimension semble pouvoir être contourné, mais il est naturel de se demander si une solution permettant de réduire cette dimension spatiale ne pourrait pas être proposée. Cette question d'apparence naïve n'est en fait pas si simple à traiter. D'un point de vue historique, l'application de la méthode des empreintes digitales optimales a toujours été couplée à une certaine réduction de la dimension spatiale. Deux techniques ont principalement été utilisées pour parvenir à cette réduction. D'une part, les données (observations et signaux simulés) ont été projetées, lors d'application à l'échelle globale, sur des fonctions *lisses* à l'échelle planétaire (typiquement des harmoniques sphériques *planétaires*), afin de ne conserver que les structures de grande échelle (conduisant donc à un certain *lissage* spatial). D'autre part, les observations ont classiquement été projetées sur les premières composantes principales des variables utilisées, comme décrit au III.1.

Concernant ce second point, plusieurs éléments ont été apportés au Chapitre III afin de montrer les limites de cette procédure. En quelques mots, nous avons vu que la projection sur les premières composantes principales pouvait rendre la détection moins efficace, et que le choix du nombre de composantes à conserver était délicat et sensible pour le résultat. De plus, un problème de détection étant généralement considéré comme un problème de maximisation du *rapport signal sur bruit*, il est raisonnable de penser que la maximisation du bruit (qui est synonyme de projection sur les premières composantes) n'est pas nécessairement une stratégie adaptée. La solution que nous avons proposée permet de dépasser cette difficulté, sans toutefois permettre de réduire la dimension spatiale du problème.

Concernant la projection sur des fonctions *lisses*, la question sous-jacente est celle de l'intérêt d'une régularisation spatiale, ou *lissage*, des données dans le but de favoriser la mise en évidence de certains signaux. Cette question se pose d'autant plus que l'on considère généralement que les CGCMs sont avant tout capables de reproduire les structures de grande échelle des changements. Dans cette thèse, certaines techniques de régularisation ont été utilisées, mais toujours sur la partie temporelle du signal. Nous n'avons pas, à ce jour, étudié la possibilité d'utiliser des techniques similaires sur la distribution spatiale des changements. Plus précisément, la question posée ici est de savoir dans quelle mesure la réponse attendue au forçage anthropique, par exemple, est *lisse* en espace. Contrairement au cas de l'évolution temporelle des changements,

la réponse à cette question est relativement difficile. Au Chapitre III, nous avons vu, en nous basant sur l'exemple du contraste Terre-Mer, que certaines caractéristiques robustes des changements climatiques pouvaient être *irrégulières* en espace. Cet exemple est même particulièrement démonstratif, dans la mesure où à une certaine échelle, ce contraste apparaît comme une discontinuité spatiale. D'autres illustrations pourraient être données, par exemple le rôle d'un relief, ou encore une modification importante de la surface terrestre, comme par exemple la fonte d'un glacier. Ces exemples montrent les inconvénients, et la perte d'information pouvant être occasionnés par un lissage spatial.

Cependant, aux Chapitres IV et V, les distributions spatiales estimées représentaient parfois un caractère irrégulier en espace difficile à interpréter physiquement. Il peut alors être légitime de se demander si une forme de *surajustement* ne contribue pas au résultat, en interprétant à tort certaines différences entre stations *voisines* comme la marque de changements climatiques. Ce type de question se pose notamment sur des petits domaines comme la France, et lorsqu'on traite directement des données provenant de stations individuelles (c'est-à-dire non moyennées sur un domaine, comme peuvent l'être des données grillées type HadCRUT3v). Dans un tel cas, la maximisation du rapport signal sur bruit peut conduire à étudier des contrastes de très petite échelle, ce qui est relativement contradictoire avec la procédure d'homogénéisation des séries observées, basée sur la recherche d'une certaine cohérence spatiale. Afin de limiter le poids donné à des contrastes opposant des stations voisines, par exemple, on peut donc s'interroger sur l'opportunité de la prise en compte explicite d'une certaine incertitude sur les données (pouvant être due à des erreurs de mesure ou d'homogénéisation, par exemple). Une telle procédure pourrait notamment contribuer à régulariser les signaux en espace, sans imposer explicitement une contrainte de régularité, et en étant justifiée statistiquement.

Finalement, et pour en revenir au problème initial, il semble utile de rechercher un algorithme pertinent permettant de réduire la dimension spatiale du problème. L'élaboration d'une telle méthode dont le but serait de rendre la détection d'un changement (éventuellement *connu*) plus *efficace*, et non de restituer l'essentiel de la variabilité climatique, reste un défi à ce jour.

Prise en compte d'une incertitude de modélisation

Un des problèmes n'ayant pas été abordé dans cette thèse concerne la prise en compte de l'incertitude de modélisation, ou pour être plus précis d'une partie de cette incertitude, accessible par comparaison des différents CGCMs mondiaux. Cette remarque vaut particulièrement pour la détection (ou l'attribution) de signaux donnés, et donc pour les méthodes de type empreintes digitales optimales.

Plus précisément, le travail mené dans cette thèse sur ce type de problème (Chapitre III) repose toujours sur l'hypothèse que la direction des changements climatiques à venir est *parfaitement* connue. C'est sous cette hypothèse que la méthode des empreintes digitales optimales a été introduite, et c'est sous cette hypothèse que le bénéfice lié à l'utilisation de la méthode ROF a été évalué. Cela nous a notamment conduit à tester la méthode en *mode parfait*, c'est-à-dire à l'appliquer à une simulation climatique du XXI^{ème} siècle, dans laquelle on cherche le signal de changement simulé par le même modèle climatique. Si cette étape est importante dans l'élaboration d'une méthode efficace, on peut souhaiter aller au-delà de ce type d'hypothèse, notamment compte tenu des difficultés des modèles à simuler, à petite échelle, les bonnes structures spatiales de changements; difficulté qui a notamment été illustrée au IV.3, en comparant la distribution spatiale des changements estimée par la méthode TOD, aux résultats des simulations.

D'une certaine façon, cette thèse utilise déjà une approche multi-modèle, en comparant systématiquement les résultats obtenus avec les différents modèles de la communauté, à l'image de nombreuses autres études (Zhang et al., 2006, Gillett et al., 2005, Stott et al., 2006, notamment). On pourrait cependant souhaiter aller plus loin, en prenant en compte une certaine incertitude de modélisation, et en cherchant une méthode permettant de détecter relativement

efficacement, dans un modèle de climat donné, les changements simulés par les autres modèles (ce qui se rapproche davantage de la situation réelle où chaque modèle constitue une reproduction imparfaite de la réalité). Une telle approche se justifie notamment par le fait que certaines caractéristiques des changements climatiques projetés sont connues comme étant plus ou moins robustes au choix du modèle climatique. Une bonne illustration peut être donnée, par exemple, avec le contraste Terre-Mer, dont nous avons évoqué la robustesse, alors que certaines autres caractéristiques des changements climatiques, même de plus grande échelle, sont parfois moins unanimement reproduites par les CGCMs (cf III.4.2). La prise en compte de ce type d'information afin de chercher dans les observations les caractéristiques les plus robustes des changements pourrait donc permettre certains progrès.

Huntingford (2006), a proposé une première technique, en recherchant dans les observations, le signal moyen *multi-modèle*, et en modifiant la métrique de régression afin de tenir compte d'une incertitude de modélisation. D'autres approches pourraient être envisagées à partir du modèle de régression utilisé au Chapitre III :

$$\psi = \mu g + \varepsilon. \quad (\text{VI.1})$$

Une solution pourrait consister à considérer le vecteur g comme un effet aléatoire dont l'espérance et la variance sont *connues*, c'est-à-dire typiquement évaluées à partir de l'ensemble des CGCMs participant aux travaux du GIEC. Il resterait alors à construire un test de l'hypothèse H_0 : « $\mu = 0$ », éventuellement en utilisant un test du rapport des vraisemblances.

Étude de la variabilité interne du climat

Bien qu'il s'agisse d'une piste de réflexion relativement indépendante de celles précédemment présentées, la connaissance de la variabilité interne du climat est intimement liée à la réalisation d'études de détection et d'attribution. Comme nous l'avons vu au Chapitre II, pour séparer les effets des différents forçages du climat de ses variations internes, une bonne connaissance de la variabilité est tout aussi précieuse que la connaissance des termes de réponse aux différents forçages. Deux questions principales présentent un intérêt particulier concernant la variabilité interne du climat. Un premier problème concerne la « *bonne* » façon de décrire la variabilité interne du climat, telle que simulée par les modèles couplés de la communauté. Plus précisément, du point de vue de la détection et de l'attribution des changements climatiques, on peut s'interroger sur les hypothèses, notamment statistiques, les mieux adaptées à la représentation de cette variabilité. Un second problème consiste à se demander dans quelle mesure la variabilité interne simulée par les modèles couplés est-elle cohérente avec celle évaluée par les études de détection et d'attribution, après retrait des signaux imputables aux forçages externes du système climatique dans les séries observées (ces deux approches constituant les deux techniques généralement employées pour évaluer la variabilité interne). Ces deux problématiques peuvent être traitées sous l'angle de la température moyenne globale comme cela a partiellement été fait dans ce manuscrit, ou bien sous l'angle des grands modes de variabilité *régionaux*, comme, par exemple, l'El Niño Southern Oscillation (ENSO) ou l'Oscillation Nord-Atlantique (NAO), afin d'étudier quelques spécificités régionales.

Concernant le premier point, cette thèse s'est attachée à montrer que l'utilisation de processus AR1 constituait l'hypothèse *a minima* permettant de restituer les grandes caractéristiques de la variabilité interne du climat. Le travail mené reposait notamment sur l'étude de la variabilité de la température moyenne globale, et de sa densité spectrale. Afin d'approfondir ce travail, on pourrait souhaiter évaluer la plus value apportée par la prise en compte, de façon plus générale, de processus ARMA, ou même d'un effet mémoire de plus longue portée que celui associé aux processus AR1 ou ARMA, en utilisant des outils statistiques dédiés à l'étude des séries chronologiques. La sensibilité des résultats des études de détection aux hypothèses effectuées sur la variabilité interne pourrait ainsi être étudiée. De la même façon, nous avons évoqué, au II.3.3.2, l'intérêt de prendre en compte des processus (éventuellement AR1) vectoriels, pour

prendre en compte le caractère relativement différencié en espace, des propriétés de persistance (ou de mémoire) de la variabilité interne. Enfin, les quelques premiers résultats présentés dans ce manuscrit indiquent que les différences entre les modèles couplés de la communauté peuvent être importantes du point de vue de la variabilité interne. L'étude et l'interprétation physique de ces différences peut en soi constituer un sujet de recherche important.

Le second problème, qui concerne la cohérence des différentes estimations qui peuvent être faites de la variabilité interne, n'a été que très partiellement abordé dans ce manuscrit. L'enjeu est pourtant important, d'une part pour les études de détection et d'attribution, afin de montrer que la variabilité à laquelle on se réfère est correcte, et d'autre part pour les modèles de climat. Comme nous l'avons indiqué, la validation de la variabilité simulée par les modèles est souvent faite par le biais de la variabilité totale, ce qui ne permet de discriminer correctement les termes de variabilité interne et forcée. Une comparaison plus poussée des résultats des différentes études de détection et d'attribution aux simulations de contrôle des modèles couplés pourrait donc être utile. On peut notamment remarquer que ce travail constituerait un approfondissement du *test de cohérence* introduit par Allen et Tett (1999), qui visait notamment à répondre à ce type de question. Cette comparaison pourrait être faite à échelle globale, mais également à l'échelle régionale, par exemple en utilisant les résultats obtenus dans cette thèse. Elle pourrait également être menée sur des échelles de temps dépassant les derniers 150 ans, puisque certaines études ont récemment été menées sur le climat du dernier millénaire (Hegerl et al., 2003, Hegerl et al., 2007a, Saenger et al., 2009). Concernant ce dernier point, il est particulièrement frappant de constater que certaines variations climatiques importantes observées au cours du dernier millénaire ne semblent pas imputables aux effets de forçages externes (Hegerl et al., 2007a en particulier). Il est donc intéressant de se demander dans quelle mesure les modèles reproduisent ce type de variations.

Bibliographie

- Allen, M. and P. Stott (2003). Estimating signal amplitudes in optimal fingerprinting, part i : theory. *Climate Dynamics*, 21, 477–491.
- Allen, M. and S. Tett (1999). Cheking for model consistency in optimal fingerprinting. *Climate Dynamics*, 15, 419–434.
- Anderson, T., S. Das Gupta and G. Styan (1972). *A bibliography of multivariate statistical analysis*. Halsted press, john wiley and sons edition.
- Arlot, S. (2007). *Rééchantillonnage et sélection de modèles*. Thèse de Doctorat, Université Paris Sud.
- Azaïs, J. and M. Wschebor (2009). *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley and Sons.
- Barnett, T., K. Hasselmann, M. Chelliah, T. Delworth, G. Hegerl, P. Jones, E. Rasmusson, E. Roeckner, C. Ropelewski, B. Santer and S. Tett (1999). Detection and attribution of recent climate change : a status report. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 80, 2631–2658.
- Barnett, T., D. Pierce, K. AchutaRao, P. Gleckler, B. Santer, J. Gregory and W. Washington (2005). Penetration of human-induced warming into the world’s oceans. *Science*, 309, 284–287.
- Barnett, T., D. Pierce and R. Schnur (2001). Detection of anthropogenic climate change in the world’s oceans. *Science*, 292, 270–274.
- Besse, P., H. Cardot and F. Ferraty (1997). Simultaneous non-parametric regressions of unbalanced longitudinal data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 24, 255–270.
- Brohan, P., J. Kennedy, I. Harris, S. Tett and P. Jones (2006). Uncertainty estimates in regional and global observed temperature changes : a new data set from 1850. *Journal of Geophysical Research*, 111.
- Caussinus, H. and O. Mestre (2004). Detection and correction of artificial shifts in climate series. *Journal of the Royal Statistical Society : Series C (Applied Statistics)*, 53, 405–425.
- Christidis, N., P. Stott, S. Brown, G. Hegerl and J. Caesar (2005). Detection of changes in temperature extremes during the second half of the 20th century. *Geophysical Research Letters*, 32, L20716.
- Crainiceanu, C. and D. Ruppert (2004). Likelihood ratio tests in linear mixed models with one variance component. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 66, 165–185.

- Crainiceanu, C., D. Ruppert, G. Claeskens and M. Wand (2005). Exact likelihood ratio tests for penalized splines. *Biometrika*, *92*, 91–103.
- Douville, H. (2006). Detection-attribution of global warming at the regional scale : how to deal with precipitation variability. *Geophysical Research Letters*, *33*, L02701.
- Gedney, N. (2006). Detection of a direct carbon dioxide effect in continental river runoff record. *Nature*, *439*, 835–838.
- Gibelin, A.-L. and M. Déqué (2003). Anthropogenic climate change over the mediterranean region simulated by a global variable resolution model. *Climate Dynamics*, *20*, 327–339.
- Gillett, N., R. Allan and T. Ansell (2005). Detection of external influence on sea level pressure with a multi-model ensemble. *Geophysical Research Letters*, *32*.
- Gillett, N., D. Stone, P. Stott, P. Nozawa, A. Karpechko, G. Hegerl, M. Wehner and P. Jones (2008). Attribution of polar warming to human influence. *Nature Geosciences*, *1*, 750–754.
- Gillett, N., M. Wehner, S. Tett and A. Weaver (2004). Testing the linearity of the response to combined greenhouse gas and sulfate forcing. *Geophysical Research Letters*, *31*, L14201.
- Gillett, N., F. Zwiers, A. Weaver and P. Stott (2003). Detection of human influence on sea level pressure. *Nature*, *422*, 292–294.
- Hasselmann, K. (1979). On the signal-to-noise problem in atmospheric response studies. *Meteorology of Tropical Oceans*, 251–259.
- Hasselmann, K. (1993). Optimal fingerprints for the detection of time-dependent climate change. *Journal of Climate*, *6*, 1957–1971.
- Hasselmann, K. (1997). Multi-pattern fingerprint method for detection and attribution of climate change. *Climate Dynamics*, *13*, 601–611.
- Hegerl, G., T. Crowley, M. Allen, W. Hyde, H. Pollack, J. Smerdon and E. Zorita (2007a). Detection of human influence on a new validated 1500-year temperature reconstruction. *Journal of Climate*, *20*, 650–666.
- Hegerl, G., T. Crowley, S. Baum, K.-Y. Kim and W. Hyde (2003). Detection of volcanic, solar and greenhouse gas signals in paleo-reconstructions of northern hemispheric temperature. *Geophysical Research Letters*, *30*, 1242.
- Hegerl, G., K. Hasselmann, U. Cubash, J. Mitchell, E. Roeckner, R. Voss and J. Waszkewitz (1997). Multi-fingerprint detection and attribution analysis of greenhouse gas, greenhouse gas-plus-aerosol and solar forced climate change. *Climate Dynamics*, *13*, 613–634.
- Hegerl, G., H. Von Storch, B. Santer, U. Cubash and P. Jones (1996). Detecting greenhouse-gas-induced climate change with an optimal fingerprint method. *Journal of Climate*, *9*, 2281–2306.
- Hegerl, G., F. Zwiers, P. Braconnot, N. Gillet, Y. Luo, J. Marengo Orsini, N. Nicholls, J. Penner and P. Stott (2007b). *Understanding and attributing climate change*. In : *Climate Change 2007 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Solomon, S. ; Qin, D. ; Manning, M. ; Chen, Z. ; Marquis, M. ; Averyt, K.B. ; Tignor, M. ; Miller, H.L. (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.

- Hegerl, G., F. Zwiers, P. Stott and V. Kharin (2004). Detectability of anthropogenic changes in annual temperature and precipitation extremes. *Journal of Climate*, 17, 3683–3700.
- Hoerling, M., J. Hurrell, J. Eischeid and A. Phillips (2006). Detection and attribution of twentieth-century northern and southern african rainfall change. *Journal of climate*, 19, 3989–4008.
- IPCC (2001). *Climate change 2001 : The scientific basis. contribution of working group i to the third assessment report of the intergovernmental panel on climate change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 881pp. [Houghton, J.T., Ding, Y., Griggs, D.J., Noguer, M., van der Linden, P.J., Dai, X., Maskell, K. and Johnson, C.A. (eds.)].
- IPCC (2007). *Climate change 2007 : The physical science basis. contribution of working group i to the fourth assessment report of the intergovernmental panel on climate change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 996pp. [Solomon, S., Qin, D., Manning, M., Chen, Z., Marquis, M., Averyt, K.B., Tignor, M., Miller and H.L. (eds.)].
- Karoly, D. and K. Braganza (2005). Attribution of recent temperature changes in the australian region. *Journal of Climate*, 18, 457–464.
- Karoly, D., K. Braganza, P. Stott, J. Arblaster, G. Meehl, A. Broccoli and K. Dixon (2003). Detection of a human influence on north american climate. *Science*, 302, 1200–1203.
- Karoly, D. and Q. Wu (2005). Detection of regional surface temperature trends. *Journal of Climate*, 18, 4337–4343.
- Kiehl, J. (2007). Twentieth century climate model response and climate sensitivity. *Geophysical Research Letters*, 34, L22710.
- Knutti, R. (2008). Why are climate models reproducing the observed global surface warming so well? *Geophysical Research Letters*, 35, L18704.
- Lambert, F., N. Gillett, D. Stone and C. Huntingford (2005). Attribution studies of observed land precipitation changes with nine coupled models. *Geophysical Research Letters*, 32, L18704.
- Lambert, F., P. Stott, M. Allen and M. Palmer (2004). Detection and attribution of changes in 20th century land precipitation. *Geophysical Research Letters*, 31, L10203.
- Le Treut, H., R. Somerville, U. Cubasch, Y. Ding, C. Mauritzen, A. Mokssit, T. Peterson and M. Prather (2007). *Historical overview of climate change*. In : *Climate Change 2007 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Solomon, S. ; Qin, D. ; Manning, M. ; Chen, Z. ; Marquis, M. ; Averyt, K.B. ; Tignor, M. ; Miller, H.L. (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Ledoit, O. and M. Wolf (2004). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88, 365–411.
- Liu, A. and Y. Wang (2004). Hypothesis testing in smoothing spline models. *Journal of statistical computation and simulation*, 74, 581–597.

- Lorenz, E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130–141.
- Mardia, K., J. Kent and J. Bibby (1979). *Multivariate analysis*. Academic Press, London.
- Marčenko, V. and L. Pastur (1967). Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR - Sbornik*, 1, 457–483.
- Mestre, O. (2000). *Méthodes statistiques pour l'homogénéisation de longues séries climatiques*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier.
- Mitchell, J., D. Karoly, G. Hegerl, F. Zwiers, M. Allen and J. Marengo (2001). *Detection of climate change and attribution of causes*. In : *Climate Change 2001 : The Scientific Basis. Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Houghton et al. (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Planton, S., M. Déqué, H. Douville and O. Mestre (2005). Impact du réchauffement climatique sur le cycle hydrologique. *C.R. Géoscience*, 337, 193–202.
- Randall, D., R. Wood, S. Bony, R. Colman, T. Fichefet, J. Fyfe, V. Kattsov, A. Pitman, J. Shukla, J. Srinivasan, R. Stouffer, A. Sumi and K. Taylor (2007). *Climate models and their evaluation*. In : *Climate Change 2007 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Solomon, S. ; Qin, D. ; Manning, M. ; Chen, Z. ; Marquis, M. ; Averyt, K.B. ; Tignor, M. ; Miller, H.L. (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Ribes, A., J. Azaïs and S. Planton (2009). Adaptation of the optimal fingerprint method for climate change detection using a well-conditioned covariance matrix estimate. *Climate Dynamics*, 33, 707–722.
- Saenger, C., A. Cohen and O. D.W. (2009). Atlantic sea surface temperature trends and variability since 1552. *Nature Geosciences*. in review.
- Schär, C., P. Vidale, D. Lüthi, C. Frei, C. Häberli, M. Liniger and C. Appenzeller (2004). The role of increasing temperature variability in european summer heatwaves. *Nature*, 427, 332–336.
- Schneider, T. and I. Held (2001). Discriminants of twentieth-century changes in earth surface temperatures. *Journal of Climate*, 14, 249–254.
- Spagnoli, B., S. Planton, M. Déqué, O. Mestre and J.-M. Moisselin (2002). Detecting climate change at the regional scale : the case of france. *Geophysical Research Letters*, 29, 90–1, 90–4.
- Stone, D. and M. Allen (2005a). Attribution of global surface warming without dynamical models. *Geophysical Research Letters*, 32, L18711.
- Stone, D. and M. Allen (2005b). The end-to-end attribution problem : from emissions to impacts. *Climatic Change*, 71, 303–318.
- Stone, D., M. Allen, F. Selten, M. Kliphuis and P. Stott (2007a). The detection and attribution of climate change using an ensemble of opportunity. *Journal of Climate*, 20, 504–516.

- Stone, D., M. Allen and P. Stott (2007b). A multimodel update on the detection and attribution of global surface warming. *Journal of Climate*, 20, 517–530.
- Stott, P. (2003). Attribution of regional-scale temperature changes to anthropogenic and natural causes. *Geophysical Research Letters*, 30, 2–1, 2–4.
- Stott, P., J. Mitchell, M. Allen, D. Delworth, J. Gregory, G. Meehl and B. Santer (2006). Observational constraints on past attributable warming and predictions of future global warming. *Journal of Climate*, 19, 3055–3069.
- Stott, P., D. Stone and M. Allen (2004). Human contribution to the european heatwave of 2003. *Nature*, 432, 610.
- Stott, P. and S. Tett (1998). Scale-dependent detection of climate change. *Journal of Climate*, 11, 3282–3294.
- Stott, P., S. Tett, G. Jones, M. Allen, W. Ingram and J. Mitchell (2001). Attribution of twentieth century temperature change to natural and anthropogenic causes. *Climate Dynamics*, 17, 1–21.
- Tett, S., G. Jones, P. Stott, D. Hill, J. Mitchell, M. Allen, W. Ingram, T. Johns, C. Johnson, A. Jones, D. Roberts, D. Sexton and M. Woodage (2002). Estimation of natural and anthropogenic contributions to twentieth century temperature change. *Journal of Geophysical Research*, 107, 10–1 10–24.
- Tett, S., J. Mitchell, D. Parker and M. Allen (1996). Human influence on the atmospheric vertical temperature structure : detection and observations. *Science*, 274, 1170–1173.
- Tett, S., P. Stott, M. Allen, W. Ingram and J. Mitchell (1999). Causes of twentieth-century temperature change near the earth’s surface. *Nature*, 399, 569–572.
- Timball, B., J. Arblaster and S. Power (2005). Attribution of the late-twentieth-century rainfall decline in southwest australia. *Journal of Climate*, 19, 2046–2062.
- Trenberth, K., P. Jones, P. Ambenje, R. Bojariu, D. Easterling, A. Klein Tank, D. Parker, J. Rahimzadeh, M. Rusticucci, B. Soden and P. Zhai (2007). *Observations : surface and atmospheric climate change*. In : *Climate Change 2007 : The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Solomon, S. ; Qin, D. ; Manning, M. ; Chen, Z. ; Marquis, M. ; Averyt, K.B. ; Tignor, M. ; Miller, H.L. (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Van der Vaart, A. (1998). *Asymptotic statistics*. Cambridge University Press.
- Von Storch, H. and A. Navarra (1999). *Analysis of climate variability*. Springer edition.
- Von Storch, H. and F. Zwiers (1995). *Statistical analysis in climate research*. Cambridge university press edition.
- Wahba, G. (1990). *Spline models for observational data*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Wang, Y. (1998). Smoothing spline models with correlated random errors. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 341–348.

- Willett, K., N. Gillett, P. Jones and P. Thorne (2007). Attribution of observed surface humidity changes to human influence. *Nature*, *449*, 710–712.
- Zhang, X., F. Zwiers, G. Hegerl, F. Lambert, N. Gillett, S. Solomon, P. Stott and T. Nozawa (2007). Detection of human influence on twentieth-century precipitation trends. *Nature*, *448*, 461–465.
- Zhang, X., F. Zwiers and P. Stott (2006). Multi-model multi-signal climate change detection at regional scale. *Journal of Climate*, *19*, 4294–4307.
- Zwiers, F. and X. Zhang (2003). Toward regional scale climate change detection. *Journal of Climate*, *16*, 793–797.