



**HAL**  
open science

# Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine.

Marion Chambart

► **To cite this version:**

Marion Chambart. Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine.. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2009. Français. NNT: . tel-00436617

**HAL Id: tel-00436617**

**<https://theses.hal.science/tel-00436617>**

Submitted on 27 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°ENSC-2009/172



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Marion Chambart**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse :

**Endommagement anisotrope et comportement dynamique  
des structures en béton armé jusqu'à la ruine**

Soutenue à Cachan le 24 Septembre 2009 devant le jury composé de :

<b>Alain COMBESCURE</b>	Professeur-INSA Lyon	Rapporteur
<b>Rodrigue DESMORAT</b>	Professeur-ENS Cachan	Directeur de thèse
<b>Fabrice GATUINGT</b>	Maître de Conférence-ENS Cachan	Examineur
<b>Daniel GUILBAUD</b>	Ingénieur de Recherche-CEA Saclay	Examineur
<b>Djimedo KONDO</b>	Professeur-Université de Lille	Examineur
<b>Jacky MAZARS</b>	Professeur-INPG Grenoble	Examineur
<b>Lambertus Johannes SLUYS</b>	Professeur-TU Delft	Rapporteur

---

**LMT-Cachan**

ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris  
61, avenue du Président Wilson  
94235 CACHAN CEDEX



Il est trop rare de pouvoir dire merci, puisque l'occasion se présente ici, j'en profite en espérant n'oublier personne.

Mes premiers remerciements sont pour Rodrigue Desmorat, mon directeur de thèse, avec qui j'ai particulièrement apprécié travailler. Je le remercie notamment pour m'avoir transmis sa passion de la thermodynamique et de la mécanique de l'endommagement (surtout s'il est anisotrope) ainsi que pour toutes ses relectures consciencieuses. Je remercie également Fabrice Gatuingt qui m'a encadré durant ses trois années, et je lui souhaite bonne chance pour sa soutenance d'HDR qui approche.

Je souhaite ensuite remercier les deux rapporteurs de ce travail, Alain Combescure et Bert Sluys pour leurs conseils et leur remarques qui ont permis d'améliorer le manuscrit que vous pouvez lire. Je remercie en particulier Bert Sluys pour avoir accepté la difficile tâche de lire mon manuscrit en français !

Jacky Mazars a accepté d'être le président de mon jury, pour la dernière fois de sa carrière et je l'en remercie ainsi que pour ses encouragements. Je remercie également Djimedo Kondo pour l'intérêt qu'il a pu montrer à l'égard de mon travail. Enfin je remercie Daniel Guilbaud et le CEA Saclay sans qui cette thèse n'aurait pu se faire.

Le LMT est un laboratoire dont on ne vante plus la convivialité, c'est aussi un endroit où l'on rencontre des gens dont les conseils sont particulièrement précieux. Je tiens à remercier en particulier Arnaud Delaplace, Grégory Lebon, Jean Lemaitre, Frederic Ragueneau et les autres fidèles du groupe de travail du lundi pour les nombreuses discussions que l'on a pu y avoir.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé à préparer ma soutenance : Pierre-Alain Boucard, Philippe Rouch, François Hild, Julien Pebrel et Pierre Kerfriden, ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai travaillé au CEA tant sur les problèmes numériques que j'ai pu rencontrés que sur la réalisation de essais sur tour de chute.

Puisque trois ans de thèse, cela ne peut pas être que du travail cloîtrée dans son bureau, je salue tous mes camarades de pauses, de bar, de conférences et d'ailleurs. Merci à tous pour ces bons souvenirs, et en particulier à Thomas, Arnaud, aux deux Guillaumes, aux deux Gregs, aux deux Juliens, à Sandrine, PE, Chlöé, Mathieu, Frisou, à tous mes collègues de bureau et autres que je n'ai pas la place de citer.

Je remercie également mes parents qui ont organisé mon pot de thèse dont je garderai le souvenir d'un moment exceptionnel. Je remercie mon frère, mes grands-parents et mes amis Huy-San et Benji qui ont assisté à ces longues deux heures et demie de soutenance, sans peut-être tout comprendre (et pas que pour venir au pot la conscience tranquille).

Enfin, je remercie Mathieu pour son soutien et ses encouragements.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation du comportement et de l'endommagement anisotrope du béton</b>	<b>5</b>
1 Généralités . . . . .	5
2 Modélisation du comportement monotone du béton . . . . .	7
2.1 Anisotropie induite par le chargement . . . . .	7
2.2 Modèles de plasticité . . . . .	11
2.3 Modèles d'endommagement . . . . .	13
2.4 Couplage endommagement et plasticité . . . . .	20
3 Modèle d'endommagement anisotrope initial . . . . .	21
3.1 Potentiel d'état pour l'endommagement anisotrope . . . . .	21
3.2 Lois d'état . . . . .	22
3.3 Fonction critère . . . . .	23
3.4 Loi d'évolution . . . . .	23
3.5 Identification des paramètres . . . . .	24
3.6 Réponse du modèle pour les sollicitation uniaxiales . . . . .	24
4 Modélisation du comportement cyclique du béton . . . . .	27
4.1 Alternance des sollicitations en dynamique rapide . . . . .	27
4.2 Résultats cycliques expérimentaux et interprétation . . . . .	27
4.3 Modélisation de l'effet unilatéral . . . . .	29
4.4 Modèle initial pour les chargements alternés [Sou08] . . . . .	30
5 Domaine de validité du modèle initial . . . . .	34
6 Conclusion et bilan des équations du modèle . . . . .	35
<b>2 Implantation numérique et développements complémentaires</b>	<b>37</b>
1 Implantation numérique du modèle initial dans un code éléments finis . . . . .	37
1.1 Schéma numérique d'intégration du modèle initial . . . . .	38
1.2 Schéma numérique d'intégration du modèle pour chargements alternés	39
1.3 Modification de la gestion de la rupture . . . . .	40
2 Calcul de la dissipation intrinsèque . . . . .	41
2.1 Deux expressions de la dissipation intrinsèque . . . . .	42

2.2	Discrétisation temporelle pour le calcul de l'incrément de dissipation . . . . .	44
2.3	Méthode indirecte . . . . .	46
2.4	Choix de la méthode de calcul . . . . .	46
2.5	Estimation de l'élévation de température . . . . .	48
3	Estimation de l'ouverture de fissures . . . . .	49
4	Première application : l'essai brésilien . . . . .	50
4.1	Description de l'essai . . . . .	50
4.2	Apport de l'anisotropie . . . . .	52
4.3	Dissipation intrinsèque . . . . .	55
4.4	Estimation de l'ouverture de fissure . . . . .	56
5	Conclusion . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Modélisation du comportement dynamique du béton</b>	<b>59</b>
1	Effet de la vitesse sur la résistance du béton . . . . .	60
1.1	Effet de la vitesse de sollicitation en compression . . . . .	60
1.2	Effet de la vitesse de sollicitation en traction . . . . .	61
1.3	Interprétation de l'effet de vitesse . . . . .	62
1.4	Effet de vitesse pour des sollicitations alternées . . . . .	65
2	Modélisation du comportement et de l'endommagement du béton en dynamique	66
2.1	Modèles élasto-plastiques avec effet de vitesse . . . . .	66
2.2	Modèles élasto-visco-plastiques . . . . .	66
2.3	Modélisation des effets de vitesse par un écrouissage visqueux . . . . .	67
2.4	Modèles visco-endommageables . . . . .	68
2.5	Un modèle visco-plastique visco-endommageable . . . . .	69
2.6	Identification des paramètres . . . . .	72
3	Extension du modèle d'endommagement anisotrope initial aux chargements dynamiques . . . . .	74
3.1	Loi d'évolution de l'endommagement . . . . .	74
3.2	Bilan des équations du modèle d'endommagement anisotrope pour sollicitations dynamiques . . . . .	75
3.3	Schéma numérique d'intégration . . . . .	75
3.4	Identification des paramètres . . . . .	76
3.5	Influence de la viscosité sur la dissipation intrinsèque . . . . .	79
3.6	Désactivation des dommages en dynamique . . . . .	79
4	Application à l'essai de traction dynamique par écaillage . . . . .	82
4.1	Description de l'essai . . . . .	82
4.2	De la nécessité de l'effet de vitesse en calcul de structures . . . . .	86
4.3	Influence de la viscosité sur la dissipation intrinsèque . . . . .	90
5	Conclusion . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Instabilités, dépendance au maillage et régularisations</b>	<b>95</b>
1	Origine du phénomène de localisation des déformations en dynamique . . . . .	96
1.1	Illustration du phénomène de localisation . . . . .	98

2	Les limiteurs de localisation . . . . .	100
2.1	Les modèles à énergie constante . . . . .	100
2.2	Les modèles non-locaux intégraux . . . . .	101
2.3	Les modèles de type second gradient . . . . .	102
2.4	L'effet retard . . . . .	103
2.5	La multifragmentation . . . . .	106
3	Sensibilité à la méthode de régularisation . . . . .	107
3.1	Impact rapide . . . . .	107
3.2	Impact lent . . . . .	111
4	Un nouveau type d'instabilité due à l'anisotropie induite . . . . .	116
4.1	Origine de l'instabilité . . . . .	116
4.2	Existence d'une instabilité en compression simple . . . . .	117
4.3	Influence du choix du schéma . . . . .	121
4.4	Influence de la discrétisation du chargement . . . . .	123
4.5	Influence de la viscosité sur l'instabilité . . . . .	123
4.6	Nouvelle direction d'endommagement . . . . .	125
4.7	Influence de l'instabilité sur le résultat d'un calcul de poutre en flexion . . . . .	127
5	Conclusion . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Résultats expérimentaux sur structures en dynamique</b>	<b>133</b>
1	Comportement dynamique des structures en béton armé . . . . .	133
1.1	Chargements et structures étudiés . . . . .	133
1.2	Identification des mécanismes locaux sous impact . . . . .	135
1.3	Modes de ruine globaux . . . . .	135
1.4	Combinaison des mécanismes . . . . .	137
1.5	Classification des impacts . . . . .	138
2	Essais d'impact sur tour de chute . . . . .	140
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	140
2.2	Instrumentation . . . . .	142
2.3	Mesures de champs . . . . .	143
3	Essais brésiliens dynamiques . . . . .	145
3.1	Géométrie des éprouvettes et chargement expérimental . . . . .	145
3.2	Caractéristiques des bétons testés . . . . .	146
3.3	Mesure de la force d'impact . . . . .	146
3.4	Cinématique globale de l'impact . . . . .	147
3.5	Analyse de l'enregistrement de la caméra rapide . . . . .	148
3.6	Analyse par mesure de champs . . . . .	150
4	Essais d'impact sur poutre . . . . .	151
4.1	Géométrie, ferrailage et chargement expérimental . . . . .	151
4.2	Rupture en flexion . . . . .	152
4.3	Rupture en cisaillement . . . . .	158
4.4	Cinématique globale de l'impact . . . . .	159
5	Conclusion . . . . .	161

---

<b>6</b>	<b>Modélisation de structures en béton armé soumises à l'impact et au souffle</b>	<b>163</b>
1	Essai brésilien dynamique . . . . .	163
1.1	Paramètres de la modélisation . . . . .	163
1.2	Résultats de simulation . . . . .	164
2	Essai d'impact sur poutre . . . . .	167
2.1	Paramètres de la modélisation . . . . .	167
2.2	Résultats de simulation . . . . .	168
3	Essai de souffle sur dalles armées . . . . .	175
3.1	Description des essais . . . . .	175
3.2	Paramètres de la modélisation . . . . .	176
3.3	Résultats de simulation . . . . .	177
4	Difficultés numériques liées à l'endommagement isotrope . . . . .	183
4.1	Essai brésilien dynamique . . . . .	183
4.2	Impact sur poutre . . . . .	185
4.3	Essai de souffle . . . . .	188
4.4	Discussion sur l'endommagement isotrope pour des calculs de structures en dynamique . . . . .	188
5	Conclusion . . . . .	188
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>191</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>205</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>207</b>
	<b>Annexe C</b>	<b>209</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>

# Introduction

La tenue des structures en béton armé aux chargements dynamiques (impacts, explosions, séismes, ...) est une des exigences auxquelles sont soumis les ouvrages de l'industrie du nucléaire. Au delà de la ruine de la structure qui présente un danger évident, la fissuration du béton, par exemple pour les enceintes de confinement des réacteurs, doit être évitée. Puisqu'il n'est bien entendu pas possible de tester toutes les structures existantes à tous les chargements possibles (essais particulièrement coûteux, pensons notamment à la chute d'avions), le besoin d'estimations prédictives fiables est très important dans ce domaine. Pour les ouvrages de génie civil courants, où le risque reste limité en cas de dégradations, le dimensionnement s'effectue généralement à partir de méthodes forfaitaires, issues de règlements où les cas de sollicitations dynamiques, souvent qualifiés d'accidentel sont pris en compte au moyen de coefficients de sécurité sur le chargement et les caractéristiques des matériaux. Cependant lorsque le chargement devient trop important, que l'ouvrage est particulièrement sensible ou que l'on souhaite optimiser une structure (quantités de béton ou de ferrailage par exemple), ces méthodes de dimensionnement s'avèrent insuffisantes, et on a recours à des méthodes plus sophistiquées.

Dans le cas d'impact, l'empirisme reste cependant largement de mise, par l'application de formules établies à partir d'une large base d'essais expérimentaux [NRD46, BSG<sup>+</sup>78, RR84]. Ces formules permettent d'estimer les dommages causés par un projectile sur une structure en fonction de sa forme, de sa vitesse, de sa masse. Q.M. Li présente un état de l'art exhaustif des formules de dimensionnement dans le cas des chocs durs dans [LRWT05]. L'analogie avec des systèmes équivalents constitués de masses et de ressorts, au comportement linéaire ou non, est, pour sa part, une pratique relativement courante dans le cas des chocs mous [CEB88]. Cependant, ces méthodes ne permettent pas une estimation précise de la réponse de la structure, en particulier, elles ne donnent pas d'informations sur l'état de dégradation local ni sur la fissuration. Pour aller au delà il est nécessaire de recourir à une modélisation numérique plus complexe. C'est dans cette optique que ce travail de thèse a été mené, avec l'ambition de présenter une modélisation fine du comportement et de l'endommagement des structures en béton armé en dynamique.

Le parti pris initial est celui d'utiliser la méthode des éléments finis pour la modélisation, même si dans ce domaine particulier des sollicitations rapides sur structures d'autres méthodes ont prouvé leur efficacité, comme les éléments discrets [CS79, MD99], les modèles cohésifs ou les méthodes SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) [GM77, RES04].

La prévision du comportement global et l'estimation des dommages locaux dans le cas de calcul de structures réelles étant l'objectif final de ce travail, se pose la question de l'échelle de la

modélisation. Les échelles globales (éléments de poutre "béton armé" [Koe07]) ou semi-globales (éléments de poutre à fibres "béton" et "acier" [GPP94]) ne permettent pas de représenter ce qui se passe localement dans le béton à cette échelle. Par exemple, la description 3D de la fissuration ou de la multifissuration n'est pas possible. On se placera donc à l'échelle locale, en utilisant des éléments finis 3D (tout du moins pour le béton) avec des lois de comportements tridimensionnelles.

Parmi les modèles de comportement que l'on peut utiliser, il y a ceux qui décrivent explicitement la microstructure ou la mésostructure du béton et ceux qui considèrent le béton comme un matériau homogène. Avec les modèles mésoscopiques [WM06], le maillage reproduit la structure 'visible' hétérogène du béton, en considérant de manière distincte les granulats, la pâte de ciment et éventuellement les auréoles de transition autour des granulats. Cette modélisation est bien adaptée pour les chargements thermo-mécaniques complexes, par exemple pour la prise en compte des réactions chimiques ou des aspects multiphasiques comme en cas d'incendie. Ce type de modélisation est cependant en général mal adapté au calcul de structures, et encore moins en dynamique du fait de la finesse du maillage nécessaire et du temps de calcul que cela induit. On peut faire le même constat au sujet des modèles microplans [BBC84, Fic96], qui traduit l'aspect directionnel de l'endommagement par la discrétisation de la loi de comportement sur un certains nombres de plans (microplans) définis au sein de l'élément de volume. La modélisation microscopique, qui décrit à une échelle encore inférieure la structure du béton (échelle des hydrates), est par conséquent encore moins adaptée à nos préoccupations.

C'est donc à l'échelle macroscopique que l'on va se placer, en considérant le matériau béton comme un matériau homogène à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique des milieux continus.

Le modèle utilisé doit alors permettre de représenter à l'échelle macroscopique la globalité des phénomènes qui se produisent à l'échelle microscopique. On parle dans ce cas de modèle phénoménologique. L'anisotropie induite par le chargement, qui se traduit macroscopiquement par une dissymétrie du comportement entre la traction et la compression et microscopiquement par une fissuration différemment orientée est le plus important de ces phénomènes pour les matériaux cimentaires. La plupart des modèles d'endommagement pour le béton sont développés dans cet esprit [Maz84], et c'est sur la base du modèle d'endommagement anisotrope pour les matériaux fragiles [DGR07] que s'établit ce travail de thèse. Dans ce modèle, l'endommagement est représenté par une variable tensorielle d'ordre 2, ce qui lui confère un caractère naturellement directionnel. Le seuil d'endommagement et la loi d'évolution, tous deux écrits en fonction des déformations positives, permet de reproduire simplement l'anisotropie induite par le chargement et la dissymétrie du comportement. Outre une description plus naturelle du comportement du béton, l'anisotropie de l'endommagement est absolument nécessaire pour certains cas de calcul de structures fréquemment rencontrés en dynamique. Pour un calcul d'impact par exemple, la zone située sous le projectile peut s'endommager de manière importante en compression. Si l'endommagement est directionnel, comme c'est le cas avec le modèle étudié, la raideur n'est affectée que dans certaines directions. Avec un endommagement scalaire isotrope, la raideur est égale à la raideur endommagée dans toutes les directions si bien que si l'endommagement est important, les éléments n'ayant pratiquement plus de raideur se

déforment de manière excessive jusqu'à un point où le calcul n'est plus possible. Ce problème se rencontre également autour des appuis ou dans les zones où les directions de sollicitations tournent.

On fait le choix de respecter le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles qui assure au modèle un certain nombre de propriétés sur l'existence et l'unicité de la solution. Le modèle est ainsi robuste, c'est à dire qu'il converge vers une solution.

Le comportement non-linéaire du matériau est uniquement dû à l'endommagement, les déformations anélastiques ne sont pas reproduites. Cette simplification du comportement réel se justifie par le fait que dans la plupart des cas traités en dynamique, leur influence n'est pas prépondante et leur prise en compte alourdirait excessivement l'écriture du modèle pour un résultat peu significatif.

L'apport principal de ce travail de thèse est d'étendre aux cas de chargement dynamiques ce modèle écrit pour les sollicitations quasi-statiques. Le caractère dynamique du chargement se traduit essentiellement en terme de modélisation par :

- Une vitesse de déformation é parfois importante (jusqu'à environ 100/s) qui n'est pas sans influence sur la résistance du béton [Rei82, BP91, RMT<sup>+</sup>94] [BKK97] et doit de ce fait être prise en compte dans la modélisation.

Pour reproduire l'effet de vitesse, on modifie la loi d'évolution de l'endommagement de manière à y introduire une dépendance en temps (chapitre 3). Cette nouvelle loi s'inspire des travaux réalisés au LMT Cachan sur le visco-endommagement [DPCL96a] et sur l'endommagement à effet retard [AD97]. La particularité de ce modèle est d'étendre ce type de loi au cas de l'endommagement anisotrope et de combiner dans une même loi la viscosité (qui reproduit l'effet de vitesse) et l'effet retard (qui impose une durée non nulle au processus de rupture).

- Une alternance des directions du chargement due aux réflexions d'ondes sur les bords libres et les appuis.

Le modèle doit donc être capable de représenter le comportement cyclique du béton en statique (chapitre 1) et en dynamique (chapitre 3). Sous chargement alterné, les fissures initialement ouvertes en traction se referment en compression, et la raideur est en grande partie restaurée. Ces phénomènes connus sous le nom d'effet unilatéral [MB89] sont reproduits naturellement par le modèle du fait de son anisotropie. Il est néanmoins nécessaire de définir un endommagement actif ( $d_{act}$ ) égal à la projection du tenseur d'endommagement sur les directions des déformations positives, qui, introduit dans la fonction seuil d'endommagement et dans la loi d'évolution (statique et visqueuse) permet de désactiver les dommages sous sollicitations alternées.

Le modèle d'endommagement anisotrope, construit sous une forme modulaire, a été implanté lors de cette thèse dans deux codes de calcul aux éléments finis développés au sein du Service d'Études Mécanique et Thermique du CEA Saclay : Cast3M et Europlexus. L'utilisation de deux codes différents se justifie dans la mesure où le premier est un code implicite alors que le second est explicite, et donc plus particulièrement adapté aux calculs en dynamique rapide. Les schémas numériques utilisés sont présentés pour le modèle initial ainsi que pour le modèle

étendu à la dynamique (respectivement aux chapitres 2 et 3).

Pour comprendre et analyser au mieux les résultats numériques obtenus et valider la modélisation des développements complémentaires sont apportés au modèle initial. Une méthode de post-traitement est développée pour interpréter les résultats du modèle continu d'endommagement en termes d'ouverture de fissure et d'autre part l'algorithme de calcul est enrichi pour estimer la dissipation d'énergie par endommagement au cours du temps (présentés au chapitre 2).

Les modèles de comportement adoucissants, dont font partie les modèles d'endommagement, présentent intrinsèquement une dépendance pathologique au maillage due au phénomène de localisation des déformations [Baz76, HMP76, BDB88]. Des méthodes de régularisation existent [PCB87, Aif87, Nee88] et parmi elles, certaines (non-local et/ou effet retard) sont implémentées pour le modèle présenté. L'objectif que nous souhaitons atteindre est celui d'un calcul fiable, mais néanmoins rapide, ainsi chacune des méthodes employées doit être assortie d'un domaine de validité où son utilisation est la plus pertinente. Le chapitre 4 est consacré à cette étude.

La conséquence des phénomènes observés en dynamique se traduit par des modes de ruine observés radicalement différents de ceux obtenus pour un chargement équivalents en statique. Afin de le mettre en évidence et de disposer de données expérimentales fiables, des essais ont été menés au CEA de Saclay sur la tour de chute instrumentée Orion du Laboratoire d'Etudes de Dynamique (DYN). Le développement des caméras numériques rapides (jusqu'à plusieurs dizaines de milliers d'images par seconde) et d'outils d'analyse d'images (logiciel CORRELI pour la corrélation d'images [HRB<sup>+</sup>02]) permet d'interpréter de façon plus avancée ces nouveaux résultats (chapitre 5).

Enfin, l'intérêt d'une modélisation et la fiabilité de résultats se mesurent en confrontant le calcul à l'expérimentation. Les essais d'impact sur tour de chute vont servir de base de données à la validation du modèle d'endommagement en dynamique. Les essais de souffle de Pontiroli [Pon95] sont également simulés pour permettre d'élargir cette validation à un second type de sollicitation (chapitre 6).

# Chapitre 1

## Modélisation du comportement et de l'endommagement anisotrope du béton

### 1 Généralités

Si l'on regarde la bibliographie consacrée à la modélisation du béton, on constate plusieurs choses relativement singulières. Premièrement, cette bibliographie est très abondante, les références les plus anciennes [Cou73] datent d'un grand nombre d'années mais la production scientifique ne diminue pourtant pas avec le temps, au contraire. Cette longévité et cette quantité est même étonnante pour un matériau si courant que l'on rencontre tous les jours et a priori peu sophistiqué. En effet, si l'on s'en réfère à son faible coût et aux volumes importants qui peuvent être produits de manière industrielle, le béton est un matériau relativement facile à fabriquer. Ce serait néanmoins faux que de dire que le béton n'évolue pas ou plus. La recherche de bétons toujours plus "performants" est à ce point efficace qu'on ne sait plus quels noms donner à ces nouveaux bétons (après les BHP, béton hautes performances, les BTHP, bétons très hautes performances et les BFUP, bétons fibrés ultras performants). Ce n'est cependant pas à ce type de béton auquel on s'intéresse dans ce travail de thèse, c'est bien au béton ordinaire, simplement constitué de ciment, de granulats et d'eau. La seconde constatation que l'on peut se faire, c'est que les modélisations proposées sont également assez variées. Les modèles de comportement continus sont très divers, de degré de complexité très différents et nécessitant un nombre de paramètres également fortement variable d'un modèle à l'autre. Mais dans le même temps coexistent des modélisations moins "classiques" en nombre non négligeable (modèles particuliers de type éléments discrets [CS79, HDD04, ID03], méthodes SPH [CMCO08], modèles cohésifs...), aux résultats probants.

De ce constat, une conclusion s'impose : il n'existe pas aujourd'hui de modèle universellement adopté parce qu'il serait capable de tout représenter avec un nombre limité de paramètres que l'on identifierait facilement avec très peu d'essais et qui de plus serait numériquement robuste et convergerait rapidement. Et si ce modèle n'existe pas c'est que le comportement mécanique du béton est complexe, les phénomènes à reproduire sont nombreux, ce qui impose souvent de faire des choix : choix d'un domaine de validité (en température, en déformations maximales, en vitesse de sollicitations, ...), choix d'un type d'applications particulières

(chargements multi-axiaux, cycliques, dynamiques, fluage, comportement hydromécanique, ...) et choix finalement de l'échelle de la modélisation déterminée par le fait que l'on s'intéresse plutôt au comportement physico-chimique du béton ou plutôt au comportement de structures.

Pour cela on commencera par définir les applications que l'on souhaite faire du modèle et à partir de là les phénomènes à reproduire. Ainsi on fixera par la même occasion les limites -inévitables- de la modélisation. Les phénomènes à reproduire seront mis en évidence sur des résultats expérimentaux de référence de la littérature. Le but final de ce travail étant le calcul de structures, les aspects du comportement du matériau auxquels on s'intéresse sont les aspects macroscopiques globaux. Dans un premier temps, on présentera donc le comportement macroscopique uniaxial bien connu du béton, puis son comportement cyclique qui a fait l'objet d'un nombre beaucoup plus limité d'études.

Ce premier chapitre a principalement pour objet d'introduire le modèle d'endommagement anisotrope appelé par la suite modèle "initial". Développé au LMT-Cachan pour les applications quasi-statiques d'abord monotones puis sismiques, ce modèle sera la base du développement d'un nouveau modèle de comportement dynamique pour le béton. On s'attachera à justifier le développement de ce nouveau modèle, réflexion forcément nécessaire devant le nombre de modèles déjà existants. En effet, chaque modèle présente un certain nombre d'avantages et d'inconvénients imputables aux choix de modélisation qui ont été faits au départ. On ne s'intéressera ici qu'aux modèles continus, écrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, qui est le cadre dans lequel on se place. Parmi ceux-ci, il existe deux grandes classes de modèles : les modèles élasto-plastiques et les modèles d'endommagement. Enfin, afin de modéliser plus précisément les non-linéarités du béton, certains modèles couplent endommagement et plasticité, voire considèrent l'endommagement pour les états (multiaxiaux) de traction et la plasticité uniquement pour les états (multiaxiaux) de compression.

Le modèle initial présenté ici est donc un modèle de comportement continu écrit dans un cadre thermodynamique rigoureux, ce qui le rend robuste quelles que soient les sollicitations considérées. C'est un modèle élastique-endommageable, qui représente l'endommagement au travers d'une unique variable thermodynamique tensorielle  $\mathbf{D}$ , et de ce fait permet de reproduire un endommagement anisotrope. Sa particularité est d'être écrit dans un cadre non-standard, ce qui implique de vérifier la positivité de la dissipation ([Des06])

L'aspect unilatéral du comportement du béton (effet de refermeture des micro-fissures et restauration de la raideur sous sollicitations alternées) est présenté dans une dernière partie ainsi que les moyens de le modéliser.

## 2 Modélisation du comportement monotone du béton

### 2.1 Anisotropie induite par le chargement

Si l'on regarde la micro-structure (le mélange de granulats et de pâte de ciment) d'un béton bien formulé (fig. 1.1), on observe un matériau relativement isotrope, dans le sens où il n'y a pas d'orientation privilégiée comme sur un matériau à fibres longues par exemple. L'anisotropie n'apparaît que lorsque l'on sollicite le matériau. On constate expérimentalement

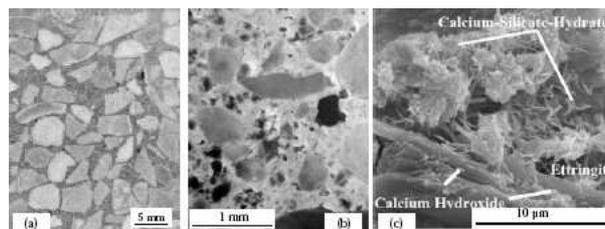


FIG. 1.1: Structure multi-échelles d'un béton d'après [Auv03]

que la résistance en compression est environ 10 fois plus grande que la résistance en traction. L'anisotropie n'existant pas à l'origine, on parle donc d'anisotropie induite par le chargement ou tout simplement d'anisotropie induite. Elle peut s'observer au niveau de la micro-structure, le mécanisme de dégradation (la micro-fissuration) qui se développe dans les deux cas est profondément différent.

#### 2.1.1 Comportement en traction uniaxiale

La réalisation d'un essai de traction directe sur une éprouvette est compliqué à réaliser. On préfère souvent, si l'on cherche à connaître uniquement la résistance en traction d'un béton, utiliser un essai de flexion 4 points ou un essai de fendage (également appelé essai brésilien). Ces différents essais sont représentés à la figure 3.5. En revanche, pour accéder au comportement post-pic du béton, il faudra avoir recours à des techniques plus sophistiquées.

La figure 1.3 représente la réponse d'un essai de traction. Au début du chargement (jusqu'à 50-60 % de la résistance en traction,  $f_t$ ) le comportement est quasiment linéaire. Le module d'Young commence ensuite à lentement diminuer jusqu'au pic de contrainte. Une fois le pic atteint ( $\sigma = f_t$ ), la contrainte chute brutalement (on parle d'adoucissement) et les fissures s'orientent perpendiculairement au chargement.

En traction, la non-linéarité apparaît très rapidement et de façon importante. Elle est principalement liée à la fissuration : les microfissures progressent et coalescent jusqu'à donner naissance à une fissure macroscopique perpendiculaire à la sollicitation. C'est un endommagement directionnel, le matériau, en se fissurant devient orthotrope (voir aussi figure 1.5). Cependant la propagation des fissures s'effectue dans la pâte de ciment en contournant les granulats, plus résistants. La fissuration n'est donc pas parfaitement perpendiculaire au chargement ce qui provoque des frottements internes qui se traduisent par des déformations permanentes, comme on peut le voir lors des décharges effectuées en fin d'essai. Comme la déformation à la rupture

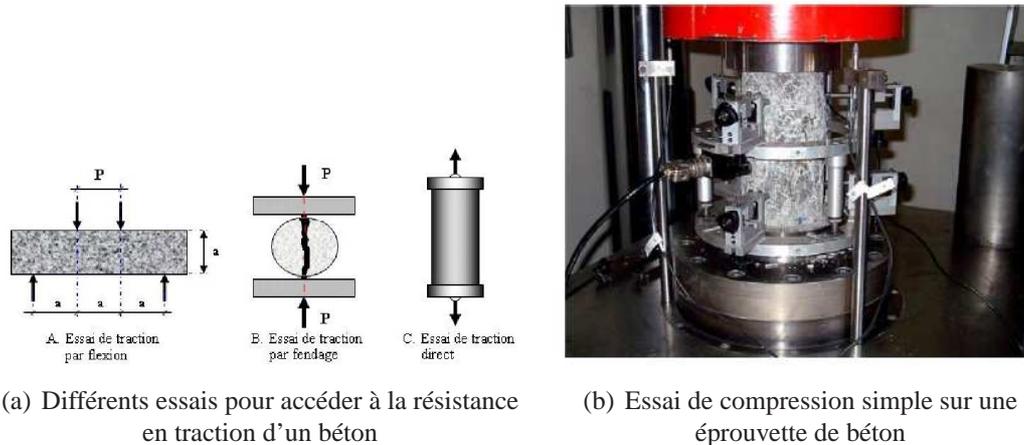


FIG. 1.2: Détermination expérimentale de la résistance du béton

en traction est faible (0,2 %), il est courant de ne pas modéliser les déformations anélastiques. L'endommagement est alors défini à partir du module sécant mesuré sur la courbe de l'essai.

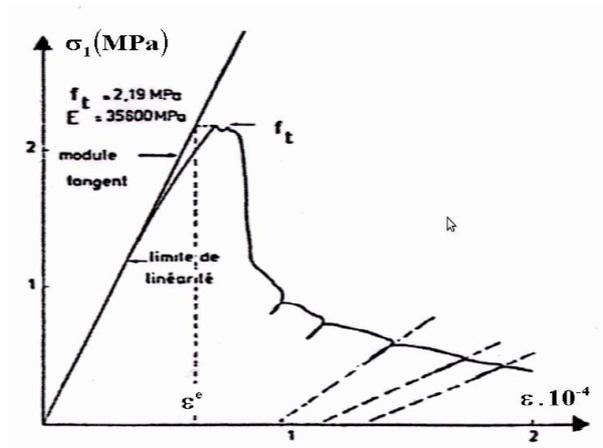


FIG. 1.3: Traction simple, d'après [Ter80]

La partie post-pic de la courbe n'est pas intrinsèque au matériau mais dépend de la longueur de l'éprouvette. Fixer la taille expérimentale de l'échantillon testé revient à fixer une longueur caractéristique au sens de la théorie de la régularisation spatiale non-locale (qui sera détaillée au chapitre 4). On verra plus loin que la raideur dégradée du matériau est récupérée en compression [MB89].

### 2.1.2 Comportement en compression simple

Le comportement en compression est plus facilement accessible que celui en traction. On pratique généralement un essai sur une presse hydraulique en ayant au préalable pris soin

de s'affranchir des effets parasites dus au frettage soit par un surfaçage cage au soufre, soit par rectification. Sur la figure 3.5.b, on voit une éprouvette normalisée cylindrique placée entre les deux plateaux de la presse qui permettent la mesure de la force appliquée et du déplacement vertical. Un capteur de déplacement annulaire est placé à mi-hauteur pour mesurer les déformations latérales pendant l'essai.

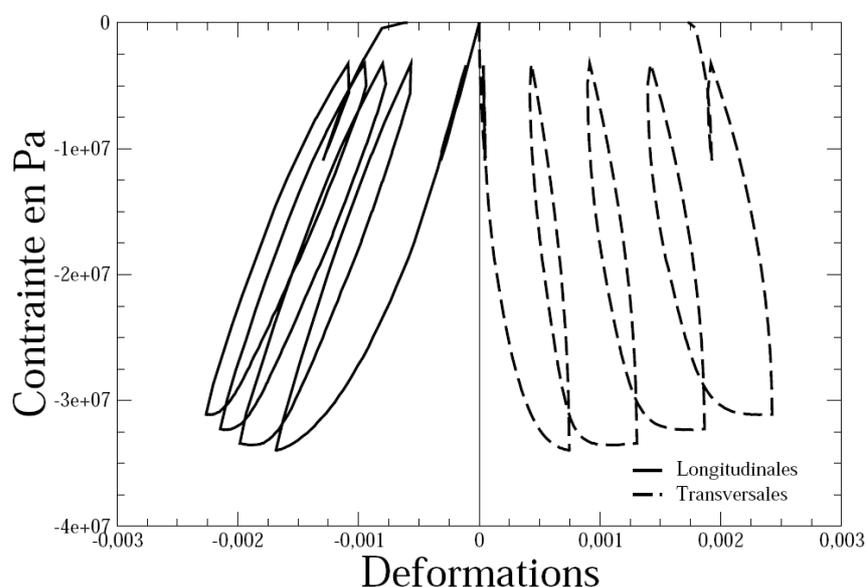


FIG. 1.4: Résultat d'un essai de compression simple [TB93]

L'analyse d'un essai de compression [Maz84] distingue 4 phases que l'on rappelle :

- Phase 1 : Réponse quasi-linéaire jusqu'à 30-50 % de la charge ultime en compression  $f_c$ ,
- Phase 2 : Apparition de la non-linéarité et de l'irréversibilité (déformations permanentes) entre 75 et 90 % de  $f_c$ ,
- Phase 3 : Jusqu'à  $f_c$  on assiste à une propagation instable : la non-linéarité augmente, les fissures s'orientent macroscopiquement plutôt parallèlement à la direction de chargement. On commence à fissurer la pâte de ciment.
- Phase 4 : Au delà de  $f_c$ , la contrainte diminue (adoucissement). On constate que cette diminution est d'autant plus brusque que la charge ultime  $f_c$  du matériau considéré est importante.



**FIG. 1.5:** Évolution de la micro-fissuration en compression - pétrographie Shah

En compression simple la rupture présente un caractère ductile, des fissures principalement verticales apparaissent avant la phase de localisation proprement dite (figure 1.5) et le volume augmente (dilatance). Le mécanisme gouvernant la non-linéarité semble être l'endommagement (dû à l'apparition des micro-fissures) mais également le frottement interne entre les lèvres des fissures mais aussi entre les granulats. Cet endommagement provoque la diminution de la raideur et l'apparition de déformations permanentes dues à l'ouverture des fissures.

### 2.1.3 Phénomènes à modéliser

De ces deux essais (ou types d'essais) les conclusions à tirer en termes de modélisation sont les suivantes :

- le comportement élastique initial du béton en traction comme en compression est linéaire isotrope (de même module d'élasticité)
- le comportement présente un caractère adoucissant aussi bien en traction qu'en compression,
- la dissymétrie du comportement se constate aussi bien sur les contraintes pic (10 fois plus élevées en traction qu'en compression) que sur les déformations (facteur 10 également),
- le phénomène à l'origine des non-linéarités s'interprète comme étant de l'endommagement du fait de la perte de raideur constatée sur les décharges élastiques. Cet endommagement se traduit au niveau microscopique par des micro-fissures orientées qui coalescent pour former des macrofissures conduisant à la ruine,
- des déformations permanentes apparaissent du fait de l'ouverture de ces micro-fissures. Ces déformations sont plus importantes en compression qu'en traction et en compression elles sont plus importantes latéralement que suivant l'axe de la sollicitation (phénomène classique de dilatance dans les géomatériaux).

De ces interprétations on peut envisager en termes de modélisation trois catégories de

modèles continus : les modèles de plasticité, d'endommagement ou les modèles couplés. C'est suivant ce schéma qu'est présentée l'étude bibliographique qui suit.

## 2.2 Modèles de plasticité

### 2.2.1 Formulation générale des modèles de plasticité

A l'origine, les modèles de comportement élasto-plastiques ont été développés pour modéliser le comportement des métaux [Hil50, SH98]. Par la suite on a tenté d'adapter cette formulation ainsi que le cadre thermodynamique associé au béton, matériau qui par son caractère fragile est fondamentalement différent [War75, Ort85, VAL94, GPC03].

Le potentiel thermodynamique associé aux modèles de plasticité correspond à l'énergie libre spécifique  $\psi$  écrite en fonction des variables suivantes : la déformation totale  $\boldsymbol{\epsilon}$ , la déformation anélastique communément appelée déformation plastique  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  et la, ou les, variable(s) d'écrouissage  $r$ .

$$\rho\psi = \rho\psi(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p, r) = \rho \underbrace{\psi_e(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)}_{\text{énergie élastique}} + \rho \underbrace{\psi_{an}(r)}_{\text{énergie bloquée}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) : \underline{\underline{\mathbb{E}}} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \rho\psi_{an}(r) \quad (1.1)$$

La loi d'élasticité s'obtient classiquement comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (1.2)$$

$R$  est la force d'écrouissage associée à  $r$  définie par :

$$R = \frac{\partial \psi_{an}}{\partial r} \quad (1.3)$$

La loi d'élasticité peut se simplifier pour la cas de l'élasticité isotrope (qui est le nôtre pour le béton)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G(\boldsymbol{\epsilon}^D - \boldsymbol{\epsilon}^{pD}) + Ktr(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)\mathbf{1} \quad (1.4)$$

avec  $G$  et  $K$  respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité.

On définit alors le domaine à l'intérieur duquel le matériau reste élastique. Pour les métaux où l'on assiste le plus souvent à une rupture ductile en traction et en compression, on décrit un domaine élastique symétrique par rapport à l'origine (tout du moins pour un état de sollicitation nul), comme avec le critère de von Mises. Pour le béton, la rupture a lieu en traction pour une déformation beaucoup plus faible qu'en compression. Pour reproduire cette dissymétrie, on peut soit utiliser deux (ou plusieurs) surfaces seuils différentes comme dans la théorie de plasticité multi-critère de Mroz [Mro67, Mro69], soit une seule non symétrique. Dans le premier cas la surface seuil "de traction" correspond souvent à un critère de rupture et on néglige alors les déformations irréversibles. On parle de modèle élastique fragile ou de modèle de fissuration élastique. Parmi les critères utilisés dans ce cas, deux le sont plus fréquemment : le critère de Rankine dit de contrainte principale maximale et celui d'Ottosen [Ott77] tous deux écrits en contraintes.

Les différents modèles de plasticité de la littérature se différencient d'une part par leur fonction critère et d'autre part par leur loi d'érouissage.

### 2.2.2 Les critères de plasticité

Pour les métaux les mécanismes microscopiques à l'origine de la plasticité (glissement des dislocations au niveau des joints de grains) sont activés en cisaillement. Ainsi un des critères de limite élastique fréquemment utilisé pour les métaux est le critère de von Mises (1913), uniquement fonction du second invariant du déviateur des contraintes :  $J_2 = \frac{1}{2}tr\boldsymbol{\sigma}^D^2$ . Ce critère ne permet pas d'atteindre la limite d'élasticité pour un chargement hydrostatique pur ce qui n'est pas réaliste dans le cas du béton. L'introduction du premier invariant du tenseur de contraintes  $I_1 = tr\boldsymbol{\sigma}$  permet de lever cette difficulté [DP52]

Le critère de Willam-Warnke [WW75] est différent dans la mesure où la dissymétrie entre le comportement en traction et celui en compression est introduite en faisant intervenir en plus le troisième invariant du tenseur des contraintes  $J_3 = \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}^3$  par l'intermédiaire de l'angle de Lode  $\theta$ .

Ces deux critères sont ouverts sur l'axe hydrostatique en compression, on ne peut donc pas activer la plasticité en tri-compression et représenter correctement le comportement du béton fortement confiné. Pour refermer le critère de Willam-Warnke sur l'axe hydrostatique, il faut faire intervenir un quatrième paramétrée (critère de Willam Warke à 4 paramètres) qui permet de reproduire la forme parabolique des méridiens dans le plan ( $p = \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}, \tau$ ).

La liste des critères existants est encore longue, on pourrait en citer beaucoup d'autres, des plus simples comme le critère de Tresca (un seul paramètre) aux plus compliqués [HTC82, Gur77, NT84]. Tous sont écrits en contraintes et font intervenir les invariants de  $\boldsymbol{\sigma}$  ou de  $\boldsymbol{\sigma}^D$ .

### 2.2.3 Les lois d'érouissage

Les possibilités suivantes sont envisageables lorsque l'on atteint la limite du domaine d'élasticité :

- soit le matériau continue de se déformer en étant parfaitement plastique et casse lorsque l'on atteint la déformation ultime,
- soit le matériau continue de se déformer mais la contrainte continue également à évoluer soit positivement (érouissage positif) soit négativement (érouissage négatif, qui permet de reproduire l'adoucissement).

La première possibilité a été largement exploitée associée au plus simple des critères, celui de von Mises. Cependant ces modèles ne permettent pas de décrire l'adoucissement post-pic du béton. Pour palier à ce manque on introduit une variable d'érouissage plastique qui, associée à une loi d'érouissage, permet de définir l'évolution de la surface limite d'élasticité. Cette loi modélise au niveau macroscopique l'augmentation ou la perte de résistance du matériau associée à la micro-fissuration. Cependant, elle ne permet pas de reproduire les dégradations des propriétés élastiques.

Deux types d'écrouissage sont alors possibles :

- l'écrouissage isotrope, bien adapté aux chargements monotones, où les surfaces de charge courantes se déduisent de la surface de charge initiale par une homothétie dans l'espace des contraintes.

- l'écrouissage cinématique où les surfaces de charges courantes se déduisent de la surface de charge initiale par une translation dans l'espace des contraintes. Cet écrouissage est finalement peu utilisé pour les bétons, si ce n'est parfois pour la modélisation des chargements cycliques

[RG03].

## 2.2.4 Conclusion

La modélisation du comportement du béton par un modèle de plasticité s'inspirant du cadre thermodynamique développé pour les matériaux métalliques est possible, mais ne permet en aucun cas de reproduire la perte de raideur du matériau (modélisé par l'endommagement). Cependant les modèles les plus fidèles nécessitent l'emploi d'une fonction seuil sophistiquée (parce que dissymétrique et refermée sur l'axe hydrostatique) ou de plusieurs fonction seuil. Une loi d'écrouissage est nécessaire pour reproduire le caractère adoucissant du matériau, et cet écrouissage se doit d'être cinématique pour reproduire le comportement du béton sous sollicitations alternées.

## 2.3 Modèles d'endommagement

Le but de la théorie de l'endommagement est de disposer d'un outil capable de modéliser via les variations des caractéristiques élastiques, la dégradation progressive du matériau en fonction du chargement et donc le phénomène d'adoucissement des contraintes. C'est un phénomène à part entière qui repose sur l'observation d'un état endommagé (ici micro-fissuré) et qui nécessite donc l'introduction d'une nouvelle variable interne au sens de la thermodynamique notée  $D$ . La théorie de l'endommagement suppose qu'il existe un état dans lequel le matériau est sain (ou proche de l'être) où l'endommagement est nul (ou quasiment nul).

### 2.3.1 Concept de la contrainte effective

La notion de matériau sain et de matériau endommagé conduit à la notion de contrainte effective initialement proposée par Kachanov et Rabotnov [Kac58, Rab69]. Pour la définir, on part de la définition de la contrainte qui peut s'écrire comme le rapport d'une force sur une surface  $\sigma = \frac{F}{S}$ . Dire que le matériau est endommagé équivaut à dire que la microstructure du matériau n'est plus continue, il y existe des micro-fissures ou des micro-cavités. Ainsi la surface  $\tilde{S}$  sur laquelle s'applique la force  $F$  peut être considérée comme la somme d'une surface saine  $\tilde{S}$  (la matière) et d'une surface endommagée  $S_D$  (les vides et les fissures).

Du point de vue du comportement de la matière, la force ne s'applique effectivement qu'à la surface saine que l'on appellera alors surface effective  $\tilde{S} = S - S_D$ .

Il en découle la notion de contrainte effective qui s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_D}{S})} \quad (1.5)$$

Le terme  $\frac{S_D}{S}$  représente la variable  $D$  d'endommagement en 1D ou dans le cas d'un endommagement isotrope. C'est une variable scalaire, l'endommagement est donc égal dans toutes les directions. La contrainte effective peut encore s'écrire :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.6)$$

De la même manière on peut définir le module d'Young du matériau endommagé ou module effectif  $\tilde{E}$  par le principe d'équivalence en déformations [Lem71] :

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon \iff \sigma = \tilde{E}\varepsilon \quad \text{et} \quad \tilde{E} = E(1 - D) \quad (1.7)$$

Dans la pratique l'évolution de l'endommagement est déduite des mesures expérimentales du module de Young faites lors de décharges élastiques. Le module d'Young effectif  $\tilde{E}$  varie donc entre  $E$  pour le matériau sain et  $E(1 - D_c)$  pour le matériau rompu à l'endommagement critique  $D_c$ . L'endommagement  $D$  est donc borné et prend les valeurs suivantes :

- $D = 0 \rightarrow$  matériau sain ou état vierge
- $0 < D < D_c \rightarrow$  matériau endommagé
- $D = D_c \rightarrow$  matériau rompu

### 2.3.2 Formulation d'un modèle d'endommagement pour le béton

La formulation thermodynamique d'un modèle d'endommagement est similaire à celle des modèles de plasticité précités. Cependant, il peut être dans certains cas plus commode de considérer le potentiel d'état comme étant l'enthalpie libre de Gibbs  $\rho\psi^*$  [DGR07] (écrite en fonction des contraintes) plutôt que l'énergie libre  $\rho\psi$  de Helmholtz [Mar81]. Le passage de l'une à l'autre se fait par une transformée de Legendre. Les variables intervenant dans le potentiel varient d'un modèle à l'autre. On trouve ou non une variable d'écrouissage pour décrire l'évolution de la surface seuil d'endommagement. On trouve aussi, et ce choix est maintenant largement contesté, des modèles à deux variables d'endommagement, une pour la traction et une pour la compression. Ce choix n'est pas thermodynamiquement admissible, une variable d'endommagement traduit un état (au sens thermodynamique) de micro-fissuration et ne peut dépendre, dans sa définition, du signe de la contrainte (ou de la déformation). On préférera la notion d'anisotropie induite de l'endommagement que l'on retrouve dans les modèles à une seule variable pour les matériaux quasi-fragiles. Cette variable d'endommagement peut être scalaire  $D$  ou tensorielle  $\mathbf{D}$ , les conséquences de ce choix seront détaillées par la suite. L'opposé de la force thermodynamique associée à l'endommagement  $Y$  (ou  $\mathbf{Y}$  pour un endommagement tensoriel) est appelée taux de restitution de densité d'énergie.

La fonction critère définissant l'évolution de l'endommagement est alors représentée soit

par une fonction des déformations soit du taux de restitution d'énergie pour une meilleure description de la dissymétrie du comportement traction-compression.

Pour les modèles écrits à partir de l'enthalpie libre de Gibbs, le choix d'une loi d'évolution de l'endommagement gouvernée par les extensions<sup>1</sup> implique que le modèle sorte du cadre des matériaux standards [HN75, CHMM03] pour lesquels les lois d'état et d'évolutions dérivent par normalité d'un potentiel d'évolution. Un cadre thermodynamique couplant élasticité et endommagement initialement proposé par [Lad83] pour les matériaux composites dans le cas d'un endommagement tensoriel d'ordre 2 a été rendu non standard [Des06] et ainsi adapté aux matériaux quasi-fragiles dont le béton fait partie.

### 2.3.3 Modèles d'endommagement isotrope pour le béton

#### Modèle de Mazars [Maz84]

Mazars en 1984 formule un premier modèle élastique endommageable isotrope pour le béton qui fait depuis référence et dont de nombreux auteurs se sont inspiré. Par la suite, afin de mettre en évidence les avantages de l'anisotropie de l'endommagement, il sera considéré comme le modèle de référence. Pour ces raisons, une description précise s'impose.

Le modèle de Mazars introduit une variable d'endommagement scalaire  $D$ , si bien que le matériau élastique isotrope à l'état sain reste isotrope quand il s'endommage, on peut le qualifier de matériau élastique isotrope à élasticité variable dont le module d'Young vaut  $E = E_0(1 - D)$ .

La formulation 3D de la loi d'état du modèle de Mazars symétrique en traction-compression s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)[K\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\epsilon}^D] \quad (1.8)$$

Avec  $K$  et  $G$  les modules de compressibilité et de cisaillement. Le coefficient de Poisson,  $\nu$  est égal à  $\nu_0$  à chaque instant. La prise en compte de la dissymétrie du comportement traction-compression se fait dans la définition du seuil d'endommagement et de l'évolution de l'endommagement. Le modèle associe l'endommagement à l'état d'extension locale, au travers de la variable  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ , la déformation équivalente de Mazars définie comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \sqrt{\sum \langle \boldsymbol{\epsilon}_I \rangle^2} \quad (1.9)$$

$\langle \cdot \rangle$  est l'opérateur partie positive (d'un scalaire) :  $\langle x \rangle = \max(x, 0)$ , et les  $\boldsymbol{\epsilon}_I$  sont les composantes principales du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  dans la direction  $I$ . Le seuil initial d'endommagement (donc pour un matériau sain à  $D=0$ ) est défini par :

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \kappa_0 = 0 \quad (1.10)$$

Il est donc bien différent en traction et en compression. Une fois le seuil initial atteint, on définit le seuil d'évolution de l'endommagement, fonction de l'état d'endommagement par :

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \kappa(D) = 0 \text{ avec } \kappa(D) \text{ tel que } \kappa(D=0) = \kappa_0 \quad (1.11)$$

<sup>1</sup>Les extensions  $\langle \boldsymbol{\epsilon}_I \rangle$  sont les valeurs propres positives du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$

Du fait de la dissymétrie du comportement traction-compression, 2 lois d'évolution sont définies pour l'endommagement, une en traction :

$$D_t = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_t)}{\widehat{\varepsilon}} - \frac{A_t}{e^{[-B_t(\widehat{\varepsilon} - \kappa_0)]}} \quad (1.12)$$

et une pour la compression :

$$D_c = 1 - \frac{\kappa_0(1 - A_c)}{\widehat{\varepsilon}} - \frac{A_c}{e^{[-B_c(\widehat{\varepsilon} - \kappa_0)]}} \quad (1.13)$$

Ces deux lois sont identiques, seuls les paramètres ( $A_t$  et  $B_t$  pour la traction et  $A_c$  et  $B_c$  pour la compression) diffèrent. On peut parler dans ce cas "d'endommagement à deux vitesses". Les paramètres sont identifiés à partir d'essais uniaxiaux de traction et de compression.

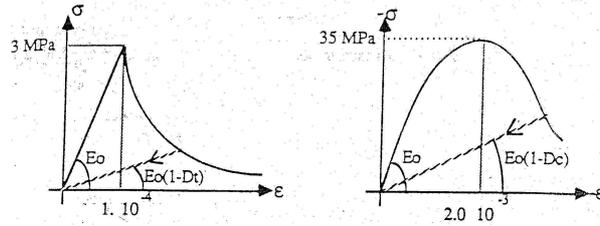


FIG. 1.6: Modélisation du comportement uniaxial du béton par le modèle de Mazars

En traction uniaxiale, la variable d'endommagement  $D$  est égale à l'endommagement de traction  $D_t$ , et en compression simple,  $D = D_c$ . Dans tous les autres cas, on obtient la valeur de  $D$  par combinaison de  $D_c$  et  $D_t$  suivant la relation suivante :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + \alpha_c^\beta D_c \quad (1.14)$$

avec  $\alpha_t$  un coefficient qui traduit l'importance relative des tractions, et  $\alpha_c$  un coefficient qui traduit l'importance relative des compressions. On les obtient en partitionnant les contraintes en une partie positive et une partie négative :

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \quad (1.15)$$

où  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+$  (respectivement  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-$ ) est la partie positive (négative) du tenseur des contraintes au sens des valeurs propres. On a alors :

$$tr \boldsymbol{\sigma} = tr \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ + tr \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \quad (1.16)$$

On peut également partitionner les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_c$ , avec

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \frac{1 + \nu}{E} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} tr \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \mathbf{1} \quad (1.17)$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \frac{1+\nu}{E} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle - \mathbf{1} \quad (1.18)$$

On définit les coefficients  $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  par :

$$\alpha_t = \sum_I \left( \frac{\varepsilon_{tI} < \varepsilon_I >}{\widehat{\varepsilon}^2} \right) \quad (1.19)$$

et

$$\alpha_c = \sum_I i \left( \frac{\varepsilon_{cI} < \varepsilon_I >}{\widehat{\varepsilon}^2} \right) \quad (1.20)$$

avec  $H_i = 1$  si  $\varepsilon_i > 0$ , et 0 sinon. On retrouve bien alors  $\alpha_t = 1$  et  $\alpha_c = 0$  en traction simple et  $\alpha_t = 0$  et  $\alpha_c = 1$  en compression simple.

Rappelons que ce modèle très efficace et très utilisé introduit les notions d'endommagement de traction et d'endommagement de compression, incompatibles a priori avec la thermodynamique car l'endommagement correspond à un phénomène unique.

Le modèle de De Vree [dVBvG95] La philosophie de ce modèle est assez proche de celle du modèle de Mazars, mais avec l'avantage majeur de ne comporter qu'une seule variable d'endommagement  $D$ , grâce à une nouvelle définition de la déformation équivalente :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{1-2\nu} I_1^2 + \frac{6k}{1+\nu^2} I_2} \quad (1.21)$$

où  $k$  est le rapport de la résistance en compression sur celle en traction,  $I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$  et  $I_2 = \frac{1}{3} \text{tr} (\boldsymbol{\varepsilon}^2)$ .

Le modèle de La Borderie [LaB91] se différencie des deux modèles précédents par son potentiel écrit non plus en déformations mais en contraintes utilisant une partition de l'énergie basée sur le signe des contraintes pour représenter l'effet de la refermeture des micro-fissures :

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+}{E_0(1-D1)} + \frac{1}{2} \frac{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-}{E_0(1-D2)} + \frac{1}{2} \frac{\nu}{E_0} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2] \quad (1.22)$$

Ce modèle présente le même problème d'admissibilité thermodynamique que le modèle de Mazars du fait de la présence à nouveau de deux variables d'endommagement différentes selon le signe des contraintes.

### 2.3.4 Les limites de l'endommagement isotrope

L'endommagement isotrope est le plus simple à formuler d'où le fait que les premiers modèles d'endommagement pour le béton ont été écrits en fonction de la variable scalaire  $D$ . Des limitations existent cependant et il est important de les signaler.

Dans le cas où l'endommagement se manifeste par des micro-vides au sein de la micro-structure, il est raisonnable de définir l'endommagement comme la densité de vides au sein de la matière :

$$D_v = \frac{\delta V_{vides}}{\delta V_{VER}} \quad (1.23)$$

Cette définition doit être remise en question lorsqu'il n'existe pas uniquement des microvides mais également des micro-fissures dans la mesure où la densité de fissuration s'exprime plus naturellement via une quantité surfacique que volumique. Il semble plus juste de définir la variable d'endommagement par rapport à un plan. Elle correspond alors à la densité de fissures dans ce plan et peut s'écrire pour le plan de normale  $\vec{n}$  (cf. figure 1.7) :

$$D_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (1.24)$$

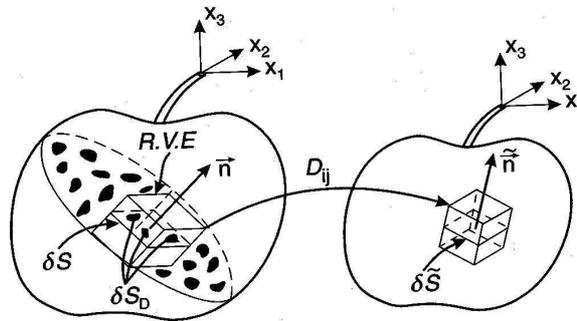


FIG. 1.7: Endommagement physique et endommagement mathématique, d'après [LD05]

Lorsque l'endommagement ne dépend pas de la normale (même densité de fissuration dans tous les plans), on peut définir la variable d'endommagement comme une variable scalaire  $D = \frac{\delta S_D}{\delta S}$ .

Si l'endommagement n'est pas isotrope, mais comme par exemple pour le béton où il est perpendiculaire aux extensions principales, cette définition n'a pas de sens. Dans ce cas il est plus correct de définir l'endommagement par une variable tensorielle [Cha79, LO81].

L'endommagement isotrope est donc par définition mal adapté au béton, et ne peut pas reproduire dans l'état la dissymétrie traction/compression de l'état de micro-fissuration. C'est pour palier ces difficultés que nombre de modèles d'endommagement introduisent non pas une mais deux variables d'endommagement scalaires.

L'autre limitation de ce type d'endommagement apparaît pour les chargements dont les directions principales tournent. Prenons l'exemple d'un élément de volume tout d'abord soumis à un chargement de traction suivant une première direction, puis, après décharge, suivant une seconde. Lors du second chargement la raideur du matériau est égale à la raideur endommagée  $E(1 - D)$  quelle que soit la direction. Le matériau est alors beaucoup plus fragile qu'il ne l'est dans la réalité du fait de l'orientation privilégiée de la fissuration.

Les limites de l'endommagement isotrope seront illustrées dans un cas d'un calcul de structure (modélisation numérique d'un essai brésilien) au chapitre suivant.

### 2.3.5 Choix de l'ordre de la variable d'endommagement tensorielle

Puisque le développement des microfissures, gouverné par l'action des contraintes et des déformations appliquées induit un état d'endommagement pour le béton essentiellement anisotrope, en toute logique, il est préférable de le représenter par une variable tensorielle. De nombreuses théories ont donc été développées pour une variable d'endommagement allant du vecteur au tenseur d'ordre 4. Les tenseurs d'ordre impair peuvent de suite être éliminés puisqu'ils ne conservent pas les invariants quand le repère initial tourne. Le choix le plus naturel est celui d'un tenseur d'ordre 4,  $D_{ijkl}$  comme variable d'endommagement [Cha79, LO81, Kra85]. Il a été montré [KM95] qu'un tenseur d'ordre supérieur (6) conduisait à la même estimation du module effectif qu'un tenseur d'ordre 4 (égale à la solution exacte), et qu'un tel niveau de complexité était de fait inutile. On étend facilement à l'anisotropie l'expression de la contrainte effective :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad \sigma_{ij} = (I_{ijkl} - D_{ijkl}) E_{klpq} \epsilon_{pq}^e \quad (1.25)$$

Le sens d'une telle variable est assez obscur et ses composantes si nombreuses (81 !) qu'une identification rigoureuse ne peut pas être vraiment raisonnable dans une approche purement phénoménologique. (En revanche, une telle approche est naturelle si fondée sur la micro-mécanique).

De ce fait, d'autres auteurs ont cherché à modéliser un endommagement orthotrope, ce qui pour le béton est un choix qui fait sens puisque les fissures sont soit parallèles soit perpendiculaires à la direction du chargement. Ainsi, il paraît naturel d'exprimer l'endommagement sous la forme d'un tenseur d'ordre 2 symétrique :  $\mathbf{D}$  ayant 3 valeurs principales assimilables à 3 réseaux de micro-fissures orthogonaux les uns aux autres [CS82]. Dans ce cas la contrainte effective que l'on calcule est une approximation de la contrainte effective calculée avec un tenseur d'ordre 4.

On se limitera donc par la suite à l'étude des modèles d'endommagement anisotropes tensoriels d'ordre 2.

### 2.3.6 Modèles d'endommagement anisotropes

Les modèles d'endommagement tensoriels d'ordre 2 ont déjà une longue histoire et sont par conséquent relativement nombreux. On distingue néanmoins des caractéristiques communes et des différences notoires. La majorité des modèles d'endommagement se basent sur une même forme de potentiel  $\rho\psi$  pris comme étant l'énergie libre spécifique de Helmholtz écrite en déformations [MK96, HD96, BGL07, CLC05]. Dans sa forme la plus générale, ce potentiel est une combinaison des 10 invariants de base du couple  $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D})$  :

$$\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}, \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^2), \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^3), \text{tr}\mathbf{D}, \text{tr}(\mathbf{D}^2), \text{tr}(\mathbf{D}^3), \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{D}), \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^2\mathbf{D}), \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{D}^2), \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^2\mathbf{D}^2)$$

Cependant, la plupart des auteurs postulent le potentiel quadratique en  $\boldsymbol{\epsilon}$  et linéaire en  $\mathbf{D}$ , puisque le matériau est élastique linéaire à  $\mathbf{D}$  constant. Il n'y a alors plus que 7 invariants en jeu. D'autre part on a  $\psi(\boldsymbol{\epsilon} = 0, \mathbf{D}) = 0$ , ce qui supprime également  $\text{tr}\mathbf{D}$  de la liste des invariants. L'expression classique du potentiel pour les modèles d'endommagement écrits en déformations

devient :

$$\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\mu\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \eta_1\text{tr}\mathbf{D}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \quad (1.26)$$

$$+ \eta_2\text{tr}\mathbf{D}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + \eta_3\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{D}) + \eta_4\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2\cdot\mathbf{D}) \quad (1.27)$$

Outre les valeurs des coefficients  $\eta_i$  qui varient, les modèles diffèrent par l'existence ou non d'une seconde variable interne (sorte d'écrouissage) pour modéliser l'évolution de la surface seuil d'endommagement avec le chargement (c'est le cas pour le modèle de Murakami [MK96]). Dans le cas du modèle de [CLC05] le potentiel est complété par un second terme  $\psi_1$  fonction uniquement de  $\mathbf{D}$ . Dans [BGL07] les auteurs font le choix constestable (et déjà contesté plus haut) d'introduire deux variables d'endommagement, l'une anisotrope pour l'endommagement en traction et l'autre isotrope scalaire pour l'endommagement en compression (sous l'hypothèse que l'endommagement de compression est un endommagement diffus non directionnel).

Ces modèles suivent ensuite le cadre classique des matériaux standards pour la définition des lois d'état et des lois d'évolution. Cela conduit à un domaine élastique et une évolution de l'endommagement exprimés en fonction de la force thermodynamique  $\mathbf{Y}$ . L'anisotropie de  $\mathbf{Y}$  est induite par le chargement (i.e. le signe et la valeur des déformations), cette anisotropie se transmet naturellement à  $\mathbf{D}$ . Le principal reproche que l'on peut faire alors à ce type de formulation est de provoquer un endommagement croissant dans toutes les directions, quelle que soit la direction du chargement, avec néanmoins un endommagement plus important dans la direction des déformations positives. Par exemple, en traction simple où la fissuration est clairement identifiée comme étant perpendiculaire au chargement, on a aussi un endommagement non nul dans les deux directions parallèles du fait de la dépendance en  $\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$  de  $\mathbf{Y}$  et donc de l'évolution de  $\mathbf{D}$ .

D'autres modélisations existent par ailleurs comme le modèle de Fichant [FPCL97] qui est en fait une simplification du modèle micro-plan de Bazant [BO90], mais qui n'est pas écrit dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles. Celui de Papa et Talierco [PT96], écrit dans un cadre thermodynamique non standard présente le même travers que celui de Badel mais introduit non plus deux mais cette fois trois variables d'endommagement (une scalaire et deux tensorielles, une pour la traction et une pour la compression). Enfin un certain nombre de modèles de référence comme celui de Ju ou de Chow et Wang [Ju89, CW82] posent d'importants problèmes numériques en ne satisfaisant pas la condition de continuité de la relation contraintes-déformations.

## 2.4 Couplage endommagement et plasticité

Le fait de coupler l'endommagement et la plasticité permet de décrire à la fois l'irréversibilité des déformations, la dégradation des caractéristiques élastiques et l'adoucissement post-pic de la réponse contrainte-déformation. On distingue parmi les modèles alliant plasticité et endommagement trois grandes catégories.

Il y a tout d'abord les modèles où la plasticité et l'endommagement sont réellement couplés. Dans ce cas on utilise des variables d'état différentes pour modéliser l'endommagement et la

plasticité [Ju89, LOD96, PT96, HD00, Bur97, JHPCG06]. Ces variables sont d'une part le tenseur de déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et éventuellement une variable d'écroutissage ( $r$  ou  $\mathbf{X}$ ) pour le comportement irréversible et d'autre part la variable d'endommagement  $D$ , généralement scalaire (et l'endommagement est alors isotrope).

Cette modélisation conduit généralement à considérer deux fonctions critère différentes comme limite d'élasticité. Les évolutions des deux variables peuvent alors être pilotées dans deux espaces différents par des quantités différentes (généralement les contraintes pour la plasticité et les déformations pour l'endommagement). Cette modélisation permet de coller au plus près du comportement réel du béton mais présente l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de paramètres.

D'autre part il y a les modèles de comportement où les deux phénomènes ne sont gouvernés que par une seule variable d'état. Pour les modèles de plasticité couplé à l'endommagement, le comportement non-linéaire du matériau est uniquement défini par des variables d'état irréversibles. L'effet de la micro-fissuration sur les caractéristiques mécaniques du matériau est introduit en écrivant ces caractéristiques comme des fonctions des déformations plastiques. On a alors un seul type de variable macroscopique pour modéliser à la fois l'apparition des déformations permanentes, l'évolution du module de Young et l'adoucissement (ou écroutissage) [FD87, Ulm96, ML06]. Le modèle de Matallah et La Borderie. propose une formulation nouvelle, où l'anisotropie des déformations élastiques module l'effet de l'endommagement représenté par une variable scalaire. L'introduction d'une variable interne supplémentaire  $\boldsymbol{\varepsilon}_{OUF}$  désactive partiellement l'évolution de l'endommagement en compression si bien que l'on obtient des réponses différentes, malgré un endommagement qui reste isotrope avec une unique variable scalaire  $D$ .

Enfin la dernière approche est le pendant de la seconde, qui sans introduire de variable d'état supplémentaire reproduit l'endommagement et le caractère anélastique du comportement en pilotant les déformations permanentes via la variable d'endommagement. C'est le cas du modèle de La Borderie [LaB91] où interviennent néanmoins deux variables d'écroutissage qui sont en fait l'équivalent de la déformation plastique cumulée.

### 3 Modèle d'endommagement anisotrope initial

#### 3.1 Potentiel d'état pour l'endommagement anisotrope

Le choix d'une contrainte effective symétrique du type  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$  ne permet pas d'écrire le potentiel élastique  $\psi^*$  de manière à ce que la contrainte dérive d'un potentiel thermodynamique [CS82].

$$\text{Si } \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \quad \psi^* \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \text{ n'existe pas} \quad (1.28)$$

Une possibilité existe cependant, elle consiste à décomposer la contrainte équivalente en une partie déviatorique et une partie hydrostatique [LDS00] :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}] + \frac{\sigma_H}{1 - \eta D_H} \mathbf{1} \quad (1.29)$$

avec  $\sigma_H = \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}$  et  $D_H = \frac{1}{3}tr\mathbf{D}$ .

Avec cette expression, on différencie l'effet de l'endommagement sur la partie hydrostatique et sur la partie déviatorique par l'introduction d'un nouveau paramètre  $\eta$ , le paramètre de sensibilité hydrostatique.

Le potentiel d'état correspondant est l'enthalpie libre de Gibbs suivante :

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E}tr[\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D] + \frac{(1-2\nu)}{6E} \frac{\sigma_H^2}{1-\eta D_H} \quad (1.30)$$

avec  $\mathbf{H} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}$ .

Ce potentiel thermodynamique est continûment différentiable, ce qui assure la continuité de la relation contrainte-déformation et la contrainte effective obtenue est indépendante des paramètres d'élasticité [LD05]. Dans le cas d'un chargement hydrostatique négatif (tri-compression) les mécanismes observés relèvent davantage de la plasticité que de l'endommagement (on n'observe pas de micro-fissures). Il convient donc de différencier les deux types de chargement hydrostatique en introduisant deux paramètres de sensibilité différents :

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E}tr[\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D] + \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[ \frac{\langle\sigma_H\rangle^2}{1-\eta_t D_H} + \frac{\langle-\sigma_H\rangle^2}{1-\eta_c D_H} \right] \quad (1.31)$$

On considère généralement (et c'est ce qui est fait dans la suite) que pour le béton  $\eta_c = 0$  (en compression) et  $\eta_t = 3$  de sorte que  $\eta_t D_H = tr\mathbf{D}$ . Le module de compressibilité effectif est alors  $\tilde{K} = K(1 - tr\mathbf{D})$  pour les contraintes hydrostatiques positives et  $\tilde{K} = K$  inchangé pour les contraintes hydrostatiques négatives.

### 3.2 Lois d'état

Les lois d'état qui déterminent les forces thermodynamiques associées aux variables d'état sont les suivantes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}[\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle\sigma_H\rangle}{1-tr\mathbf{D}} - \langle-\sigma_H\rangle \right] \mathbf{1} \quad (1.32)$$

On définit alors la contrainte effective de manière naturelle :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}tr\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1} \quad (1.33)$$

que l'on identifie par (1.32) et (1.33) comme étant :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \left[ \frac{\langle\sigma_H\rangle}{1-tr\mathbf{D}} - \langle-\sigma_H\rangle \right] \mathbf{1} \quad (1.34)$$

La force thermodynamique associée à l'endommagement, le tenseur taux de restitution de densité d'énergie, s'écrit :

$$\mathbf{Y} = \rho \frac{\partial\psi^*}{\partial\mathbf{D}} \quad (1.35)$$

et se calcule, mais pas si simplement [LaABD09].

### 3.3 Fonction critère

Le critère utilisé est très proche du critère de Mazars (eq. 1.17), mais s'exprime désormais, puisque l'endommagement est devenu tensoriel, comme une fonction de la trace de l'endommagement (cas particulier de l'expression générale formulée par [MBR90])

$$f = \widehat{\varepsilon} - \kappa(\text{tr}\mathbf{D}) \quad \text{et} \quad \widehat{\varepsilon} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+} \quad (1.36)$$

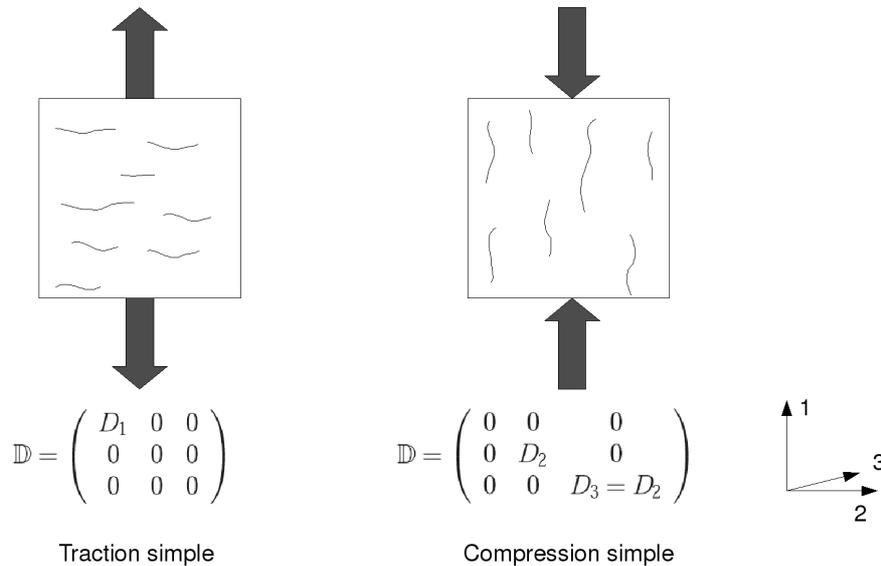
avec :

$$\kappa(\text{tr}\mathbf{D}) = a \cdot \tan \left[ \frac{\text{tr}\mathbf{D}}{aA} + \arctan \left( \frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \quad (1.37)$$

$\kappa_0$  est le seuil d'endommagement en déformation, et  $a$  et  $A$  deux paramètres d'endommagement sans dimension.

### 3.4 Loi d'évolution

Comme on l'a vu au 1.1.1 la micro-fissuration du béton est parallèle à l'axe de sollicitation en compression simple et perpendiculaire en traction simple, ce qui revient à dire que la micro-fissuration est perpendiculaire aux directions des déformations positives. Pour reproduire



**FIG. 1.8:** Tenseur d'endommagement associé à un état de fissuration donné

fidèlement ce phénomène, on écrit la loi d'évolution de l'endommagement comme une fonction des déformations positives :

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 \quad (1.38)$$

où  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$  correspond à la partie positive (au sens des valeurs propres) du tenseur des déformations.

L'expression du multiplicateur d'endommagement  $\dot{\lambda}$  s'obtient par la condition de cohérence  $f = 0, \dot{f} = 0$  :

$$f = 0 \rightarrow \text{tr} \mathbf{D} = \kappa^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rightarrow \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1.39)$$

D'après la loi d'évolution, on a

$$\text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 = \dot{\lambda} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \quad (1.40)$$

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\dot{\lambda} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \frac{\dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} = \frac{A}{1 + \left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{a}\right)^2} \frac{\dot{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \quad (1.41)$$

où l'on remarque que si  $a$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ , son rôle est négligeable en traction alors qu'en compression le terme  $\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{a}\right)^2$  ralentit le taux de croissance de l'endommagement ( $a$  du même ordre de grandeur que les déformations).

### 3.5 Identification des paramètres

Le modèle présenté ci-dessus comporte en tout 5 paramètres matériaux :  $E$ , le module d'Young,  $\nu$ , le coefficient de Poisson,  $\kappa_0$  la déformation seuil d'endommagement et enfin  $A$  et  $a$  les deux paramètres de la fonction critère.  $E$  et  $\kappa_0$  sont identifiables à partir d'un essai de compression simple. Si l'on mesure en plus les déformations latérales durant l'essai, on peut également connaître la valeur du coefficient de Poisson. Les deux derniers paramètres,  $a$  et  $A$  permettent d'ajuster les valeurs pics expérimentales en traction (obtenues par exemple par un essai de flexion 4 points) et en compression simple. Deux essais (classiques) sont donc suffisants pour identifier la totalité des paramètres du modèles.

On suppose que le paramètre de sensibilité hydrostatique en traction  $\eta_t$  ne varie pas en fonction du béton utilisé. Il n'est donc pas considéré comme un paramètre "matériau" et sera pris égal à 3.

### 3.6 Réponse du modèle pour les sollicitation uniaxiales

Dans ce paragraphe on présente la réponse analytique du modèle initial pour trois sollicitations simples : la traction simple, la compression simple et le cisaillement pur. Le choix des paramètres matériaux est le suivant [Des04] :

Paramètre	Valeur
$E$	42 GPa
$\nu$	0,2
$\kappa_0$	$5.10^{-5}$
$A$	5000
$a$	$2,93.10^{-4}$

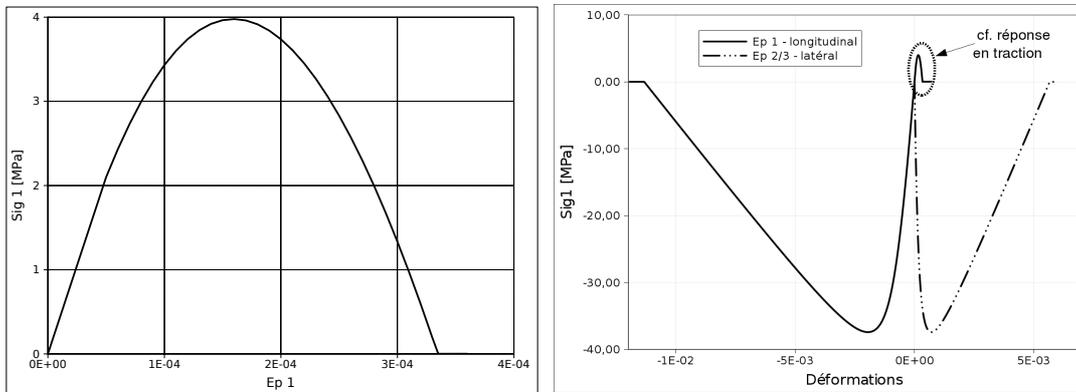
**TAB. 1.1:** Paramètres du modèle d'endommagement anisotrope, d'après [Des04]

### 3.6.1 Réponse en traction simple

Pour un cas de traction simple suivant l'axe 1, on impose la déformation  $\varepsilon_1$ , les autres déformations sont calculées à partir de la loi d'élasticité. L'état de déformation est le suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

et la réponse analytique est représentée sur la figure 1.9.



(a) Réponse du modèle en traction simple

(b) Réponse du modèle en compression simple

**FIG. 1.9:** Réponse du modèle en traction et compression simple

### 3.6.2 Réponse en compression simple

La déformation imposée est toujours  $\varepsilon_1$  et l'état de déformation est maintenant le suivant.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 < 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

On constate (fig 1.9) que l'anisotropie induite par le chargement est bien représentée par le modèle avec une résistance en traction de 3,98 MPa et en compression de 37,4 MPa, soit un rapport de l'ordre de 10 entre les deux.

### 3.6.3 Réponse en cisaillement

Le tenseur des contraintes pour une sollicitation de cisaillement pur suivant la direction (1,2) à la forme suivante, avec deux composantes égales sur les termes non diagonaux.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer la déformation équivalente et le tenseur d'endommagement associé, on ramène le tenseur des déformations dans sa base principale pour en prendre sa partie positive :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{DIAG} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} > 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{12} < 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{BP} \quad \text{d'où} \rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{BP} \quad \text{et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{12}$$

Ainsi dans la base principale (BP) le tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}$  a la forme suivante :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{BP} \quad \text{et ramené dans la base initiale : } \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_I & D_I & 0 \\ D_I & -D_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes finalement calculé comporte 4 composantes égales ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{21}$ ) dans la base initiale. La réponse est tracée sur la figure 1.10.

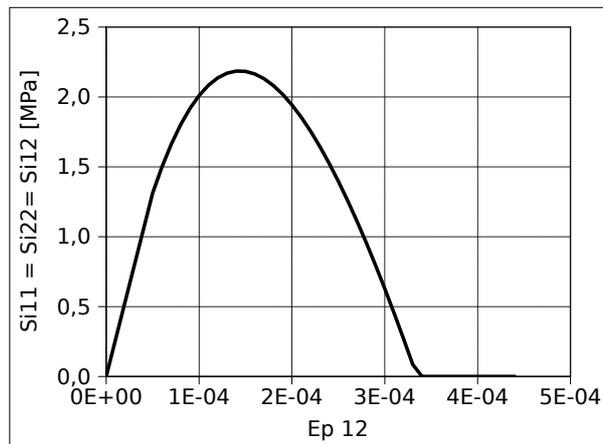


FIG. 1.10: Réponse analytique du modèle en cisaillement

## 4 Modélisation du comportement cyclique du béton

### 4.1 Alternance des sollicitations en dynamique rapide

Un des cas les plus courants où le comportement cyclique du béton est pris en considération est le cas des chargements sismiques. Le bâtiment ou l'ouvrage soumis à un séisme subit un déplacement alterné de sa base qui induit dans la structure une alternance de sollicitations de traction et de compression (entre autres). Ce cas d'alternance se retrouve également pour les structures soumises aux vibrations (vent, trafic, ...). Le comportement cyclique du béton est donc un sujet d'étude important, notamment parce que ce type de chargement conduit souvent à des dégradations importantes, voire, au pire, à la ruine de la structure.

Dans le cas de sollicitations dynamiques rapides, comme l'impact ou le souffle, la structure est mise en vibration, et la prise en compte du comportement cyclique ou tout du moins alterné est de ce fait nécessaire. Cependant, la rupture sous impact arrive souvent en quelques millisecondes, bien avant que la structure ne se mette à vibrer. Les déformations engendrées par le premier pic d'effort sont suffisantes pour endommager très sévèrement la structure. On ne peut néanmoins s'affranchir de modéliser le comportement cyclique. Dans le cas d'un impact, par exemple, la zone sous le projectile est d'abord sollicitée en compression, mais l'onde qui se développe suite au choc, en atteignant le bord libre de la structure se réfléchit en une onde de traction. Du fait de la dissymétrie du comportement entre traction et compression, il se peut, si le chargement n'est pas trop violent, que l'onde en compression n'endommage que partiellement le béton alors qu'une macro-fissure se développe au passage de l'onde de traction. C'est ce phénomène qui se produit lorsque l'on observe de l'écaillage en face arrière d'une structure soumise à un impact. Il sera étudié en détail au paragraphe 4 du chapitre 3.

Pour ces deux raisons (vibrations et réflexions d'ondes), il est également indispensable en dynamique rapide de reproduire le comportement du béton sous sollicitations alternées. Cette partie est donc consacrée à la présentation et l'interprétation des résultats expérimentaux, et aux manières de modéliser le comportement alterné dans le cas des modèles d'endommagement et en particulier pour le modèle anisotrope utilisé lors de cette thèse.

### 4.2 Résultats cycliques expérimentaux et interprétation

Les résultats expérimentaux sont très rares sur ce sujet du fait de la complexité de réaliser un essai de traction directe et surtout de générer un état d'endommagement diffus dans le matériau. Un des rares, sinon le seul essai réalisé dans ce domaine a été réalisé au LMT-Cachan par Mazars et Berthaud en 1989 [MB89]. Le résultat présenté ici, est celui obtenu pour un chargement en traction fortement endommageant suivi d'un chargement en compression (fig 1.11).

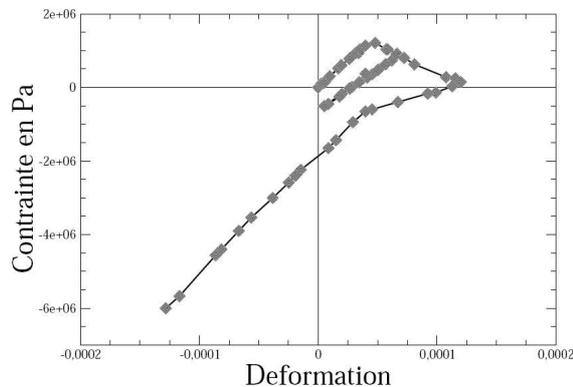


FIG. 1.11: Réponse expérimentale du béton sous sollicitations alternées d'après [MB89]

L'information principale de cet essai est que lorsque que l'on sollicite en compression une éprouvette préalablement endommagée en traction, la raideur du matériau n'est pas la raideur endommagée ( $\tilde{E} = E(1 - D)$  pour un endommagement scalaire), mais une raideur "restaurée" proche de la raideur initiale du matériau sain (16,2 GPa pour 16,5 GPa initialement). Ce phénomène est connu sous le nom d'effet unilatéral et s'interprète comme l'effet de la refermeture en compression des microfissures ouvertes en traction (fig.1.12). On constate également que la récupération de raideur n'est pas immédiate lorsque la contrainte devient négative, la refermeture des fissures nécessite d'appliquer un effort non nul (ici, la contrainte de compression pour laquelle on retrouve la raideur initiale est de l'ordre de 0,5 MPa). La prise en compte de ce phénomène a donné lieu à l'écriture de plusieurs modèles où il est modélisé de façons très variées. Le paragraphe suivant permettra de passer en revue les différents moyens de le prendre en compte dans les modèles de comportement.

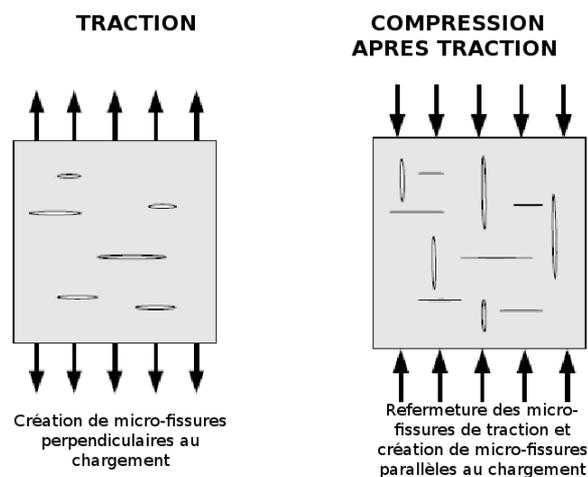


FIG. 1.12: Refermeture des fissures sous sollicitations alternées

### 4.3 Modélisation de l'effet unilatéral

La description isotrope de l'endommagement par une unique variable scalaire pose des difficultés quand on cherche à modéliser la refermeture de fissures. En effet, une seule raideur étant définie, la raideur initiale en compression après un chargement en traction est la raideur endommagée  $\tilde{E} = E(1 - D)$ . Pour modéliser le caractère unilatéral, il faut donc dans ce cas désactiver l'endommagement provoqué par la traction [LL84, Lie89, LD05]. C'est ce que fait Matallah pour le béton dans son modèle [ML06] où l'endommagement scalaire  $D$ , piloté par les déformations anélastiques, est activé ou désactivé progressivement en fonction de la sollicitation par une nouvelle variable interne  $\boldsymbol{\varepsilon}_{OUF}$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{OUF} = S\boldsymbol{\varepsilon}_t^{an} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{an} \quad (1.42)$$

avec  $S$  une fonction qui fait intervenir un paramètre  $\sigma_f$ , la contrainte de refermeture de fissures.

Cette nouvelle variable intervient de la façon suivante dans le potentiel d'état :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - D\boldsymbol{\varepsilon}_{OUF}) : \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - D\boldsymbol{\varepsilon}_{OUF}) + \rho\psi_{an} \quad (1.43)$$

Dans le cas où, comme pour le modèle de Mazars, l'endommagement est décrit par deux variables distinctes pour la traction et la compression, la modélisation de la refermeture des micro-fissures se fait de manière plus naturelle, sans variable supplémentaire. Le modèle de La Borderie [LaB91], l'un des plus souvent utilisé pour la modélisation des structures sous sollicitations sismiques, s'inscrit dans ce cadre avec  $D_1$  l'endommagement en traction et  $D_2$  en compression. Le potentiel est décomposé en deux parties suivant le signe des contraintes, respectivement affectées par  $D_1$  pour la partie positive et  $D_2$  pour la partie négative. La prise en compte de l'effet unilatéral se fait en ajoutant à ce potentiel une fonction de refermeture de fissures  $\psi_{an}$  définie de la façon suivante :

$$\rho\psi_{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1 - D_1)} g(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1 - D_2)} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (1.44)$$

avec

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} < -\sigma_f \rightarrow g(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1.45)$$

$$-\sigma_f < \text{tr } \boldsymbol{\sigma} < 0 \rightarrow g(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \left( 1 + \frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{2\sigma_f} \right) \quad (1.46)$$

$$\sigma_f > 0 \rightarrow g(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (1.47)$$

$$(1.48)$$

où  $\sigma_f$  est à nouveau la contrainte de refermeture de fissures. Ainsi, l'endommagement  $D_1$  est complètement actif en traction simple, complètement inactif en dessous de  $\sigma_f$  et varie quadratiquement entre les deux. L'effet de la refermeture de fissures est ainsi modélisé comme de l'élasticité non linéaire, mais nécessite l'introduction de trois nouveaux paramètres.

De la même manière pour le modèle de [BGL07] la refermeture des fissures se fait naturellement puisque l'endommagement de traction (anisotrope)  $\mathbf{D}$  agit sur la partie positive du tenseur

de déformations et l'endommagement de compression (isotrope)  $d$  sur la partie négative. Dans ce cas il n'y a pas de contrainte seuil pour la reprise de raideur, la restauration se fait donc pour  $\sigma = 0$ .

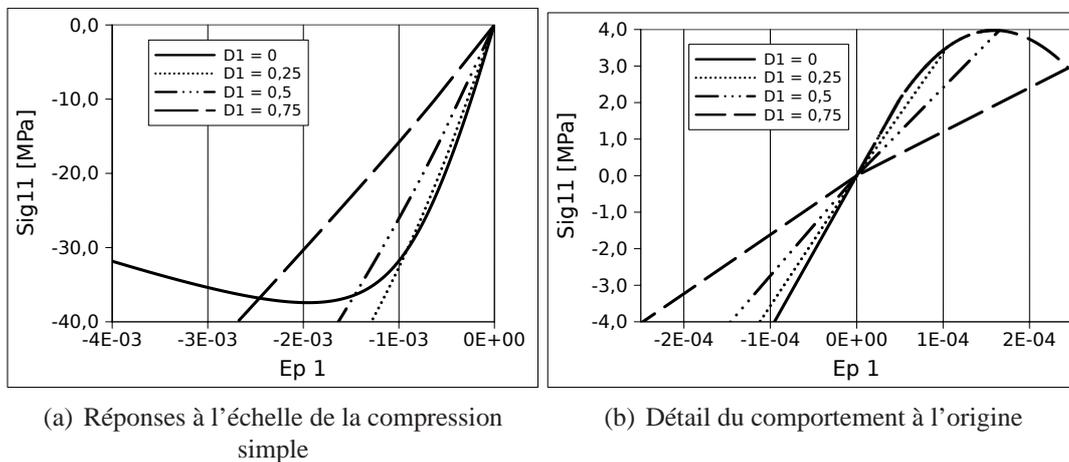
Pour les modèles d'endommagement anisotropes, le caractère directionnel de l'endommagement permet de reproduire plus facilement l'aspect unilatéral du comportement. L'endommagement étant différent en traction et en compression et gouverné par les déformations, la modélisation de la refermeture des micro-fissures est simplifiée. On peut par exemple introduire un paramètre fonction du signe des déformations [MK96]. Pour [CLC05], les conditions unilatérales sont ainsi prises en compte en supprimant du potentiel les termes couplés  $\text{tr} \mathbf{D} (\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+)^2$  et  $\text{tr} \mathbf{D} \text{tr} (\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2)$ . Le terme  $\text{tr} (\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2)$  n'est malheureusement pas continûment différentiable.

Le modèle développé lors de cette thèse étant anisotrope, piloté par les déformations positives, la prise en compte de l'effet unilatéral peut se faire de manière simple, et surtout sans variables ni paramètres supplémentaires. En effet, comme les endommagements de traction et de compression sont portés par des directions différentes, l'endommagement en compression est nul après un chargement en traction. C'est ce point qui sera développé au paragraphe suivant.

## 4.4 Modèle initial pour les chargements alternés [Sou08]

### 4.4.1 Réponse du modèle "monotone" pour un chargement alterné

Le modèle présenté au paragraphe 3 ne donne pas dans sa formulation initiale une réponse satisfaisante pour un chargement cyclique (cf. figure 1.13) [Sou08, SDRD09]. Une partie de



**FIG. 1.13:** Réponse analytique du modèle initial en traction puis compression pour différents endommagements

la raideur est récupérée à  $\sigma = 0$ , mais l'apparition de l'endommagement en compression est beaucoup plus tardif. La récupération partielle de raideur provient du fait que l'endommagement hydrostatique,  $\text{tr} \mathbf{D}$  ne joue que sur la partie positive de la trace des contraintes (eq. 1.31). En

traction cette trace est positive, et donc affectée par l'endommagement, en compression, elle est négative, elle n'est donc pas affectée. En revanche sur la partie déviatorique du potentiel, on ne fait pas de partition de la contrainte, ainsi, l'endommagement influe de manière égale en traction et en compression. Une restauration totale de la raideur est possible, mais nécessite une réécriture du potentiel. On utilise la partition de la partie déviatorique en considérant des parties positives "spéciales"  $\sigma_+^D, \sigma_-^D$ , qui conduit au potentiel suivant :

$$\begin{aligned} \rho\psi^* &= \frac{1+\nu}{2E} [\text{tr}(\mathbf{H}^p \langle \sigma^D \rangle_+ \mathbf{H}^p \langle \sigma^D \rangle_+) + \text{tr}(\mathbf{H}^n \langle \sigma^D \rangle_- \mathbf{H}^n \langle \sigma^D \rangle_-)] \\ &+ \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[ \frac{\langle \sigma_H \rangle^2}{1-\eta_t D_H} + \langle -\sigma_H \rangle^2 \right] \end{aligned} \quad (1.49)$$

On conserve les propriétés du potentiel initial (dérivabilité du potentiel et continuité de la relation contrainte-déformation. Deux termes nouveaux apparaissent dans cette équation  $\mathbf{H}^p$  et  $\mathbf{H}^n$  qui permettent de pondérer l'effet de l'endommagement sur les parties positives et négatives du déviateur des contraintes. Ils sont ici définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p &= (1-h_p \mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{H}^n &= (1-h_n \mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

où on introduit deux paramètres,  $h_p$  et  $h_n \in [0;1]$ .

La refermeture totale des fissures implique que le paramètre  $h_n$  soit nul, et si  $h_p$  est pris égal à 1 en traction on conserve le même endommagement que pour le modèle initial [LDS00, LD05]. Les définitions des parties positives des déviateurs ne sont pas classiques (voir [Lad83] ou [LD05] pour plus de détails) et font intervenir les valeurs propres des tenseurs  $\mathbf{H}^p \sigma^D$  et  $\mathbf{H}^n \sigma^D$ .

L'expression du potentiel devient alors :

$$\begin{aligned} \rho\psi^* &= \frac{1+\nu}{2E} [\text{tr}(\mathbf{H} \sigma_+^D \mathbf{H} \sigma_+^D) + \sigma_-^D : \sigma_-^D] \\ &+ \frac{(1-2\nu)}{6E} \left[ \frac{\langle \sigma_H \rangle^2}{1-\eta_t D_H} + \langle -\sigma_H \rangle^2 \right] \end{aligned} \quad (1.51)$$

La loi de comportement qui dérive de ce nouveau potentiel n'est pas analytiquement inversible et nécessite d'ajouter pour l'intégration numérique un schéma de Newton supplémentaire. Devant les difficultés numériques engendrées par ce nouveau potentiel nous opterons pour une restauration partielle de la raideur obtenue avec le potentiel initial.

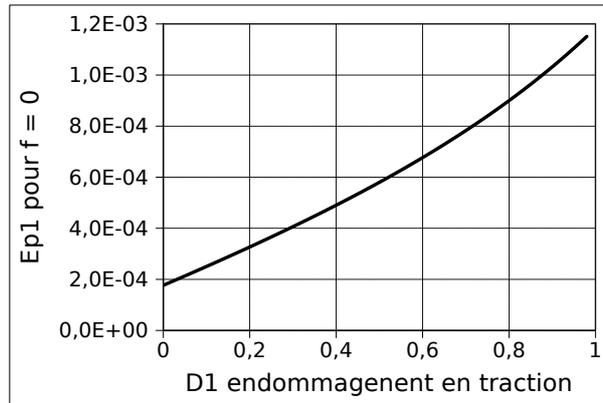
#### 4.4.2 Une fonction critère pour les chargement alternés

L'apparition trop tardive de l'endommagement pour des sollicitations cycliques provient du fait que la fonction seuil d'endommagement  $\kappa$  du critère est isotrope et fait intervenir la trace du tenseur  $\mathbf{D}$  dont la valeur se trouve modifiée pour un matériau endommagé.  $\text{tr } \mathbf{D}$  agit ici sur la surface seuil comme un écrouissage isotrope, or, et ce résultat est bien connu pour les matériaux

métalliques, un écrouissage isotrope n'est pas adapté à la modélisation du comportement sous sollicitations alternées. On utilise dans ce cas un écrouissage cinématique.

$$f = \widehat{\varepsilon} - \kappa(\text{tr}\mathbf{D}) \quad (1.52)$$

Pour un matériau sain,  $\text{tr}\mathbf{D} = 0$ , et on atteint pour la première fois  $f = \widehat{\varepsilon} - \kappa = 0$  pour  $\widehat{\varepsilon} = \kappa(0) = \kappa_0$ , soit en compression suivant la direction 1 pour  $\sqrt{2}\nu\varepsilon_1 = \kappa_0$ . Si maintenant  $\text{tr}\mathbf{D}$  n'est pas nul, ce critère est atteint pour une déformation longitudinale  $\varepsilon_1$  beaucoup plus importante comme le montre la figure 1.14.



**FIG. 1.14:** Évolution du seuil d'endommagement en compression en fonction de l'endommagement en traction

Pour palier ce problème de dépendance du seuil d'endommagement en fonction de l'histoire en chargement, la fonction critère est réécrite en remplaçant  $\text{tr}\mathbf{D}$  par la projection du tenseur d'endommagement sur le tenseur des déformations positives normé par sa plus grande valeur propre [SDRD09]. Cette nouvelle grandeur est nommée "endommagement actif" et notée  $d_{act}$  et est introduite dans la fonction critère en lieu et place de  $\text{tr}\mathbf{D}$  :

$$f = \widehat{\varepsilon} - \kappa(d_{act}) \text{ avec } d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\boldsymbol{\varepsilon}_I)} \quad (1.53)$$

En traction suivant 1 on a :

$$d_{act} = \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} D1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D1 = \text{tr}\mathbf{D}$$

La compression suivant la direction 1 sur un matériau sain donne :

$$d_{act} = \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D2 & 0 \\ 0 & 0 & D2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = 2D2 = \text{tr}\mathbf{D}$$

Ces deux dernières propriétés montrent que la réponse du modèle en chargement monotone est inchangée par rapport au modèle initial. Les paramètres "matériau"  $A$ ,  $a$  et  $\kappa_0$  sont inchangés. En compression après traction :

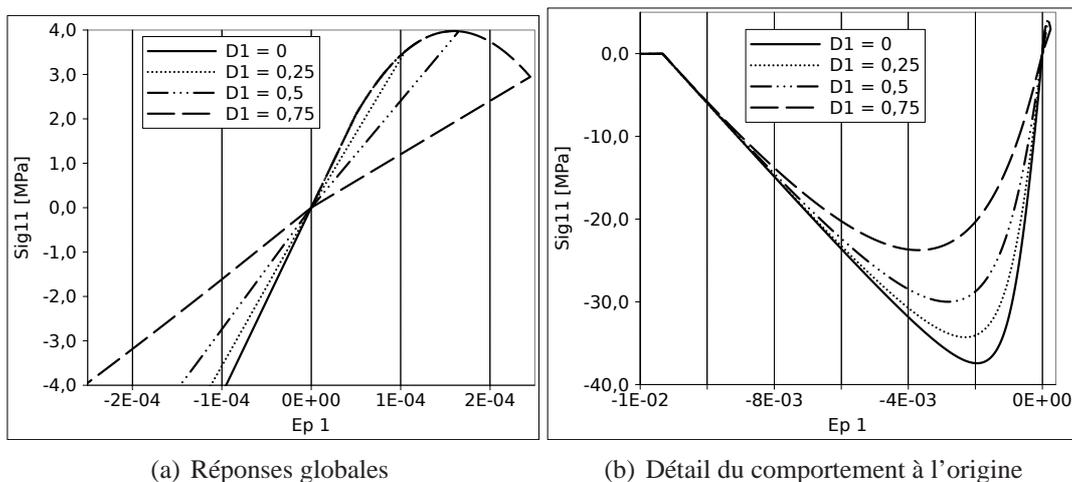
$$d_{act} = \frac{1}{\varepsilon_2} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = 2D_2$$

qui est la valeur serait obtenue si la traction n'avait pas eu lieu : l'endommagement actif permet de désactiver l'effet du dommage dû à la traction.

Pour résumer, la réponse en monotone n'est donc pas modifiée (puisque  $d_{act} = \text{tr} \mathbf{D}$  dans ces cas), et pour des chargements alternés on retrouve les mêmes seuils que pour les chargements monotones, sans traction (ou compression) préalable.

#### 4.4.3 Réponse pour un chargement alterné

Les réponses en contrainte-déformation obtenues avec la fonction critère  $f = \hat{\varepsilon} - \kappa(d_{act})$  sont présentées sur la figure 1.15.



**FIG. 1.15:** Réponse analytique du modèle modifié en traction puis compression pour différents endommagements

Du fait de la récupération partielle de la raideur, la contrainte pic en compression diminue lorsque l'endommagement en traction augmente, mais la déformation à la rupture reste inchangée.

Aucun paramètre matériau supplémentaire n'a été introduit, notamment pas de contrainte de refermeture de fissures ni de déformation permanente, si bien que la récupération -partielle- de raideur se fait à  $\sigma = 0$ .

## 5 Domaine de validité du modèle initial

Le modèle de comportement initial répond à un certain nombre des exigences généralement requises pour un modèle d'endommagement de béton développé pour le calcul de structures. Reprenons les critères de la liste établie par Challamel et al. [CLC05], le modèle doit pouvoir :

- 1) *Assurer la continuité de la relation contrainte-déformation.* Ce critère est vérifié puisque le potentiel est continu et continûment différentiable.
- 2) *Être écrit dans le cadre cohérent de la thermodynamique.* C'est le cas, mais le cadre retenu est non standard. La preuve de la positivité de la dissipation  $\mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} > 0$  est donnée dans [Des06].
- 3) *Reproduire le comportement dissymétrique du béton en traction et en compression (résistance mais aussi adoucissement différents).* Avec une résistance 10 fois plus élevée en compression qu'en traction, on vérifie donc bien le premier critère. Le second est également vérifié puisque en traction, la déformation au pic correspond à 42 % de la déformation ultime alors qu'en compression elle n'est que de 17 %
- 4) *Reproduire l'effet de la refermeture de fissure inclu dans les propriétés unilatérales.* La dernière partie a montré que l'on était capable de reproduire une restauration partielle de la raideur.
- 5) *Reproduire un comportement endommagé anisotrope : après un chargement endommageant, le comportement élastique est anisotrope.* C'est le cas grâce au choix de représentation tensoriel de l'endommagement.

Rajoutons à cette liste un point supplémentaire qui est d'avoir un nombre de paramètres minimal (5 contre 8 par exemple pour le modèle de Mazars). Rappelons qu'introduire plus de physique (comme l'anisotropie) doit réduire le nombre de paramètres (parfois au prix d'une plus grande complexité mathématique).

Néanmoins, le modèle a des limites qu'il est important de souligner.

La toute première concerne l'aspect dynamique des phénomènes que l'on souhaite en fine modéliser. Ce modèle ne prend pas en compte l'effet de la vitesse sur la résistance du béton. Il sera montré par la suite que cet effet est prépondérant en traction à partir d'une certaine vitesse de déformation (de l'ordre de  $\dot{\epsilon} = 10^{-1}$ ). Le modèle sera donc enrichi pour tenir compte de l'effet de vitesse.

L'évolution de l'endommagement piloté par les déformations positives ne permet pas de décrire le comportement non linéaire du béton en compression confinée (toutes les déformations sont négatives ou nulles). Ce sera un point à prendre en compte lors de l'analyse de simulations numériques d'impact. En effet sous impact, le matériau, du fait des effets inertiels engendrés par l'accélération, se retrouve alors dans ce cas.

Enfin, le modèle ne reproduit pas l'existence des déformations anélastiques. Ce phénomène est relativement négligeable en traction, mais ces effets sont importants en compression. Dans le cas où la rupture est essentiellement liée à des phénomènes relevant de la traction, ne pas prendre en compte le caractère irréversible des déformations est peu pénalisant. Les cas test qui seront étudiés par la suite (essais de fendage, essais de traction dynamique par écaillage, dalle soumise au souffle et poutre sous impact) mais aussi un grand nombre d'applications pratiques

sont principalement de cette sorte. La simplification de la réalité du comportement du béton peut alors se justifier.

## 6 Conclusion et bilan des équations du modèle

Le comportement non linéaire du béton a pour origine deux phénomènes distincts que sont l'endommagement et l'existence de déformations anélastiques. Leur couplage dans un même modèle est possible, mais conduit souvent à des modélisations compliquées dont la complexité n'est pas sans influence sur la bonne intégration numérique du modèle.

Pour les applications que nous souhaitons traiter, il nous a semblé plus judicieux de privilégier l'endommagement, le modèle sur lequel se base cette étude (modèle initial) présenté dans ce chapitre est un modèle élastique endommageable. Il reproduit la dissymétrie traction-compression du comportement du béton grâce à une variable d'endommagement tensorielle d'ordre 2,  $\mathbf{D}$ , pilotée par les extensions (déformations positives). L'endommagement ainsi introduit étant anisotrope, le comportement du béton endommagé le devient également contrairement aux modèles d'endommagement scalaires où le comportement reste isotrope. On verra par la suite (chapitres 2 et 6) quels sont les grands avantages de cette modélisation dans le cas de calculs de structures.

Le modèle initial avec désactivation des dommages a été présenté. Il permet de reproduire, sans variables supplémentaires et sans augmenter le coût du calcul, une restauration partielle de la raideur, proche de celle observée expérimentalement.

Enfin, les chargements dynamiques donnent lieu par nature à des phénomènes de propagation d'ondes qui conduisent à des états alternés de sollicitation. De ce fait, il a été jugé nécessaire de tenir compte de cet aspect particulier du chargement dans la modélisation.

### Modèle initial pour des chargements monotones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^D (1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1-\text{tr}\mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1}$$

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa(\text{tr}\mathbf{D})$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2$$

où le multiplicateur d'endommagement est donné par les conditions de Kuhn-Tucker classique :  $\dot{\lambda} \geq 0$ ,  $f \leq 0$  et  $\dot{\lambda} f = 0$ .

## Modèle initial pour des chargements alternés

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^D (1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1-\text{tr} \mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1}$$

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa(d_{act}) \text{ avec } d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$$

avec  $\dot{\lambda} \geq 0$ ,  $f \leq 0$  et  $\dot{\lambda} f = 0$ .

La fonction  $\kappa(x)$  est la même dans les deux cas :

$$\kappa(x) = a \cdot \tan \left[ \frac{x}{aA} + \arctan \left( \frac{\kappa_0}{a} \right) \right]$$

## Chapitre 2

# Implantation numérique et développements complémentaires

Le passage du modèle thermodynamique au calcul de structure nécessite une discrétisation spatiale et temporelle. Les problèmes liés à la discrétisation spatiale de la structure (problèmes de dépendance au maillage) seront abordés ultérieurement (chapitre 4). On décrit ici la discrétisation temporelle qui conduit à l'intégration numérique de la loi de comportement [DGR07]. Malgré le schéma implicite utilisé, l'intégration exacte de la loi de comportement se fait sans itérations.

Ce travail de thèse modifie la procédure numérique initiale de la gestion de la rupture. Cette nouvelle procédure permet de ne pas fixer a priori le plan (ou la direction) d'endommagement lorsque l'endommagement critique est atteint dans une (ou deux) directions. Elle présente ainsi l'avantage de ne pas conserver numériquement la matrice de passage entre la base initiale et la base propre de l'endommagement.

On présente également aux paragraphes 2 et 3 des développements complémentaires menés lors de cette thèse pour améliorer l'analyse et l'interprétation du calcul de structures : le calcul de la dissipation intrinsèque et de l'estimation de l'ouverture de fissures. Un premier exemple est traité au paragraphe 4 qui permet de mettre en évidence l'intérêt de l'anisotropie, de tracer des cartes de dissipation et enfin d'estimer dans un cas simple une ouverture de fissures à partir d'un calcul d'endommagement continu.

### 1 Implantation numérique du modèle initial dans un code éléments finis

Dans ce paragraphe on rappelle la discrétisation temporelle qui permet d'intégrer la loi de comportement dans un code aux éléments finis. Le schéma numérique présenté est le même pour les deux codes de calcul utilisés (Cast3M et Europlexus), la différence entre un code explicite et un code implicite se faisant au niveau de la résolution de l'équilibre global, qui n'est pas traité ici. Pour plus d'informations sur ce sujet, se reporter à [CEA09, JI09]

## 1.1 Schéma numérique d'intégration du modèle initial

Supposons connues l'ensemble des variables au temps  $n$  : contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_n$ , déformations  $\boldsymbol{\epsilon}_n$  et la variable interne  $\mathbf{D}_n$ . On connaît par ailleurs après la résolution de l'équilibre global, les déformations au temps  $n+1$  :  $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ . L'intégration numérique de la loi de comportement suit alors le schéma suivant :

### 1) Prévision élastique :

On calcule la valeur de la fonction seuil  $f = \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} - \kappa(\text{tr} \mathbf{D}_n)$ , avec  $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} = \sqrt{\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+ : \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+}$ <sup>1</sup>. En notant  $\boldsymbol{\epsilon}_I$  la  $I^{\text{eme}}$  valeur propre de  $\boldsymbol{\epsilon}$ , on peut aussi écrire  $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}$  sous la forme  $\sqrt{\Sigma \langle \boldsymbol{\epsilon}_{I n+1} \rangle_+^2}$ .

### 2) Test sur le critère

a) Si  $f < 0$  : chargement élastique ou décharge. On reste dans le domaine élastique si bien que l'endommagement n'évolue pas.  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n$  et on passe directement à l'étape 4.

b) Si  $f > 0$ , l'endommagement évolue, (étape 3).

### 3) Discretisation temporelle de l'endommagement

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+^2$$

### 4) Calcul du multiplicateur d'endommagement

On détermine  $\Delta \lambda$  à partir de la relation de cohérence :  $f_{n+1} = 0$

$$f_{n+1} = 0 \rightarrow \text{tr} \mathbf{D}_{n+1} = \kappa^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1})$$

$$\Delta \lambda = \frac{\text{tr} \mathbf{D}_{n+1} - \text{tr} \mathbf{D}_n}{\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^2}$$

On connaît ainsi sous l'hypothèse que  $\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^2$  est constant sur un pas de temps l'expression exacte de  $\Delta \lambda$  sans itérations.

### 5) Mise à jour du tenseur d'endommagement

$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2$ . Le tenseur  $\mathbf{D}_{n+1}$  est également connu de manière exacte.

On calcule  $\mathbf{H}_{n+1}^{-1} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}_{n+1})^{\frac{1}{2}}$  et  $D_{H n+1} = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D}_{n+1}$

### 6) Calcul du tenseur des contraintes effectives

<sup>1</sup>  $\langle \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \rangle_+$ , la partie positive du tenseur des déformations calculée comme suit :

- (i) Rendre  $\boldsymbol{\epsilon}$  diagonal :  $\boldsymbol{\epsilon}_{diag} = \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{P}$
- (ii) Prendre la partie positive au sens des valeurs propres  $\langle \boldsymbol{\epsilon}_{diag} \rangle_+$
- (iii) Ramener ce tenseur dans la base initiale :  $\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+ = \mathbf{P} \langle \boldsymbol{\epsilon}_{diag} \rangle_+ \mathbf{P}^{-1}$ .

La contrainte effective est calculée à partir de la loi d'élasticité :  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , soit ici :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \mathbf{1} \right)$$

### 7) Calcul du tenseur des contraintes totales

La contrainte totale s'obtient par inversion de la définition de la contrainte effective :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{H}_{n+1}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^{-1} - \frac{(1 - \mathbf{D}_{n+1}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{3 - \text{tr} \mathbf{D}_{n+1}} (1 - \mathbf{D}_{n+1}) \\ &+ \frac{1}{3} [(1 - \eta_t \mathbf{D}_{Hn+1}) < \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} > - < -\text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} >] \mathbf{1} \end{aligned}$$

La loi d'élasticité (eq. 1.32) reliant  $\boldsymbol{\varepsilon}$  à  $\boldsymbol{\sigma}$  étant analytiquement inversible, l'intégration numérique se fait sans itérations malgré un schéma implicite.

## 1.2 Schéma numérique d'intégration du modèle pour chargements alternés

La schéma d'intégration du modèle avec désactivation des dommages (avec une fonction seuil fonction de  $d_{act}$ ) est globalement équivalent à celui qui vient d'être présenté. Les seules modifications qui sont apportées le sont au niveau :

- de la fonction critère qui devient :

$$f = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \kappa^{-1}(d_{act\ n})$$

avec  $d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_I)}$

- de la loi d'évolution de l'endommagement que l'on écrit sans le carré :

$$\dot{\mathbf{D}} = \hat{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ \rightarrow \mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle$$

avec la nouvelle expression du multiplicateur d'endommagement :

$$\Delta \lambda = \frac{d_{act\ n+1}^* - d_{act\ n}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^2}$$

où  $d_{act\ n+1}$  est calculé par  $\kappa^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$ .

## 1.3 Modification de la gestion de la rupture

### 1.3.1 Gestion initiale de la rupture

L'endommagement est physiquement défini sur  $[0;1]$ , avec pour  $D$  (ou  $D_i$  dans la cas tensoriel) = 1, un matériau considéré comme rompu (ou rompu dans la direction  $i$ ). Il est donc nécessaire à l'intérieur du schéma numérique d'introduire une borne sur l'endommagement. Remarquons également que numériquement, la valeur  $D$  (ou  $D_i$ ) = 1 n'est acceptable que si l'on évite dans le calcul de travailler avec  $\mathbf{H} = (1 - \mathbf{D})^{-1/2}$  (qui conduit à diviser par 0). L'endommagement sera en fait borné à une valeur critique, notée  $D_c$ , inférieure à 1, pour éviter des problèmes de distorsion d'éléments qui seront détaillés par la suite. Notons au passage que les éléments finis étendus de type X-FEM permettent de lever cette difficulté [MDB99]. Dans le cas tensoriel, cela conduit à borner chacune des valeurs propres de  $\mathbf{D}$  à  $D_c$ . Le schéma numérique précédent est modifié pour intégrer cette procédure dite de gestion de la rupture au niveau de l'étape numéro 5 :

5) Mise à jour du tenseur d'endommagement :

a)  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta\lambda \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^\alpha$  avec  $\alpha = 1$  ou 2 suivant le modèle considéré (avec ou sans désactivation des dommages).

b) Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de  $\mathbf{D}_{n+1}$ , avec  $D_{n+1I} > D_{n+1II} > D_{n+1III}$  et  $\mathbf{P}$  la matrice de passage rendant le tenseur d'endommagement diagonal.

c) Test sur  $D_I$ ,

Si  $D_I < D_c$ , on ne modifie pas  $\mathbf{D}_{n+1}$  et on passe à l'étape 6,

Si  $D_I > D_c$ , on fixe  $D_I = D_c$  et on réitère l'opération sur  $D_{II}$ .

d) On repasse le tenseur diagonal  $\mathbf{D}_{n+1}^{diag}$  ainsi borné dans la base initiale par  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{D}_{n+1}^{diag}\mathbf{P}^{-1}$ .

Cette procédure de gestion de la rupture comporte deux inconvénients. D'un point de vue numérique, cette procédure est assez longue puisque elle nécessite de tester une par une les valeurs propres de  $\mathbf{D}$ , ce qui implique un certain nombre de tests dans le programme.

Cette méthode fixe a priori le plan (puis direction) d'endommagement une fois que  $D_c$  est atteint dans une (puis deux) direction(s). La direction où  $D_c$  est atteint est conservée pour le pas de temps suivant au cours duquel l'endommagement ne pourra évoluer que dans le plan normal à cette direction, même si par exemple les directions de chargement tournent. Cela nécessite de conserver d'un pas de temps à l'autre la matrice de passage  $\mathbf{P}$

On propose une nouvelle procédure de gestion de la rupture pour palier les problèmes de la procédure initiale.

### 1.3.2 Nouvelle procédure "sans base propre fixée"

On introduit dans le schéma numérique une nouvelle variable  $\mathbf{D}^*$ , le tenseur d'endommagement non tronqué, et on reprend le schéma d'intégration précédent :

1) Prévision élastique : calcul de la fonction critère  $f = \widehat{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1} - \kappa(\text{tr}\mathbf{D}_n)$ ,

2) Test sur la fonction critère

3) Discretisation temporelle de l'endommagement

$$\mathbf{D}_{n+1}^* = \mathbf{D}_n + \Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^\alpha$$

4) Si  $f > 0$ , on calcule le multiplicateur d'endommagement  $\Delta \lambda$

$$f = 0 \rightarrow \text{tr} \mathbf{D}_{n+1}^* = \kappa^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$$

$$\Delta \lambda = \frac{\text{tr} \mathbf{D}_{n+1}^* - \text{tr} \mathbf{D}_n}{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2}$$

5) Mise à jour du tenseur d'endommagement

a)  $\mathbf{D}_{n+1}^* = \mathbf{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2$ .

b) Calcul des valeurs propres et vecteurs propres de  $\mathbf{D}_{n+1}^*$  et  $\mathbf{P}$  la matrice de passage.

c) On définit  $\mathbf{D}_{n+1}^{diag}$  par :

$$\mathbf{D}_{n+1}^{diag} = \begin{pmatrix} \langle D_{I,n+1}^* - D_c \rangle_- + D_c & 0 & 0 \\ 0 & \langle D_{II,n+1}^* - D_c \rangle_- + D_c & 0 \\ 0 & 0 & \langle D_{III,n+1}^* - D_c \rangle_- + D_c \end{pmatrix}$$

d) On effectue un changement de base pour ramener  $\mathbf{D}_{n+1}^{diag}$  dans la base initiale de  $\mathbf{D}_{n+1}^*$  par  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{P} \mathbf{D}_{n+1}^{diag} \mathbf{P}^{-1}$ .

Cette nouvelle procédure permet donc de ne pas fixer a priori la base propre de  $\mathbf{D}_{n+1}$  puisque celle-ci est recalculée à chaque pas de temps sans qu'aucune des directions ne soit fixée par avance. L'opération qui conduit à limiter les  $D_I$  à  $D_c$  se fait sans boucles et enfin, on ne conserve à la fin du pas de temps qu'une seule variable scalaire  $\text{tr} \mathbf{D}^*$  contre 9 précédemment (les 9 composantes de  $\mathbf{P}$ ).

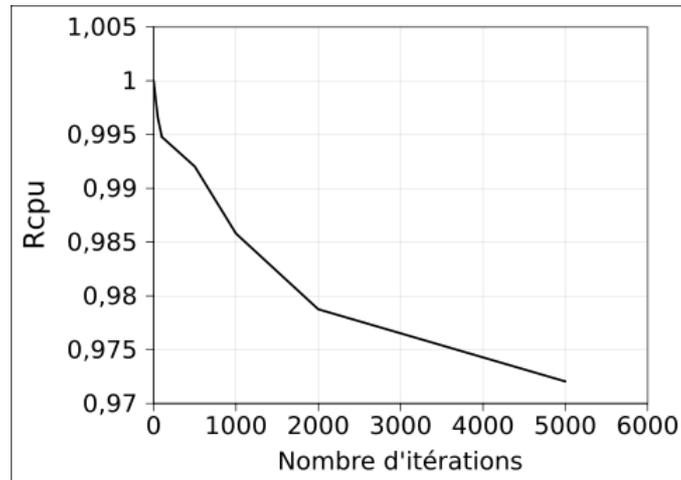
On compare sur un cas simple (cube à 8 points de Gauss en compression simple piloté en déplacements imposés) le temps CPU d'un même calcul avec la procédure de gestion de la rupture initiale et la procédure modifiée. On introduit  $R_{CPU}$  le rapport suivant :

$$R_{CPU} = \frac{\text{Temps CPU avec la procédure modifiée}}{\text{Temps CPU avec la procédure initiale}}$$

La figure 1.3.2 montre l'évolution de ce rapport en fonction du nombre de pas imposé pour atteindre la déformation imposée maximale. On constate effectivement une réduction du temps de calcul lié à la procédure de gestion de la rupture.

## 2 Calcul de la dissipation intrinsèque

La connaissance de la dissipation intrinsèque due à l'endommagement est une donnée supplémentaire dans la compréhension et l'analyse des résultats numériques de calculs de



**FIG. 2.1:** Influence de la procédure de gestion de la rupture sur le temps de calcul

structures [Jir97].

Le modèle d'endommagement présenté est écrit dans un cadre de la thermodynamique des processus irréversibles qui n'est pas celui des matériaux standards généralisés défini par Halphen et Nguyen [HN75]. Hors de ce cadre, la positivité de la dissipation n'est pas intrinsèquement assurée. Desmorat a montré que pour une certaine classe de modèles anisotropes (dont font partie les précédents) développés dans le cadre défini par Ladevèze [Lad83] la condition pour assurer la positivité de la dissipation était seulement d'assurer la condition naturelle  $\dot{\mathbf{D}} \geq 0$  [Des06].

Sachant que la dissipation est positive, on s'intéresse ici à la calculer. C'est une donnée qui peut avoir son intérêt si on la rapporte par exemple à l'énergie apportée au système ou à l'énergie de fracturation du béton pour évaluer l'état de dégradation provoqué par un chargement donné.

Plusieurs méthodes et algorithmes sont étudiés pour le calcul de la dissipation. Leur comparaison permet d'une part de s'assurer de la justesse du calcul et d'autre part de choisir la méthode la plus efficace en terme de temps de calcul.

La dissipation est calculée à chacun des points de Gauss des éléments de la structure, ce qui permet de tracer des cartes de dissipation intrinsèque. En intégrant la dissipation sur l'ensemble de la structure, on peut connaître l'énergie totale dissipée par l'endommagement. Sous certaines hypothèses, on peut évaluer l'augmentation de température (faible, on le verra) à partir de la connaissance de l'énergie dissipée par endommagement.

## 2.1 Deux expressions de la dissipation intrinsèque

On établit l'expression de la dissipation intrinsèque à partir du potentiel thermodynamique du modèle (eq. 1.31) dont l'expression est rappelée ici :

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E} \text{tr}[\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D] + \frac{(1-2\nu)}{6E} \left( \frac{\langle \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle^2}{1-\eta_t D_H} + \langle -\text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \right) \quad (2.1)$$

Pour simplifier l'écriture, on note  $g(D_H) = \frac{1}{1-\eta_t D_H}$  (qui est une fonction croissante,  $g' > 0$ ).

On obtient par dérivation par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\psi^*}{dt} &= \frac{1+\nu}{E} [\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}]^D : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1-2\nu}{3E} [g(D_H)(\langle \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle -\text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle) \text{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ &+ \frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}} + \frac{(1-2\nu)}{6E} \langle \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle^2 : \frac{d}{dt}[g(D_H)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

où l'on peut regrouper les différents termes de manière à faire apparaître la dissipation intrinsèque  $\mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}}$  ( $\mathbf{Y}$  étant la force thermodynamique associée à l'endommagement) :

$$\rho \dot{\psi}^* = \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} \quad (2.3)$$

La dissipation peut ainsi être calculée par deux méthodes :

- Soit directement (méthode directe) :

$$\mathcal{D} = \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} = \frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\mathbf{H}} + \frac{(1-2\nu)}{6E} \langle \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle^2 : \frac{d}{dt}[g(D_H)] \quad (2.4)$$

- Soit indirectement (méthode indirecte)  $\mathcal{D} = \rho \dot{\psi}^* - \boldsymbol{\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$  que l'on réécrit  $\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\psi}$ .  $\rho \dot{\psi}$ , le dual de  $\rho \dot{\psi}^*$ , est l'énergie libre de Helmholtz et s'obtient à partir de l'inversion de la relation de comportement (eq 1.32) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E} [\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - \text{tr}\mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1} \quad (2.5)$$

Cette relation, rappelons-le peut être inversée de manière à exprimer le tenseur des contraintes en fonction de celui des déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( (\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{H}^{-1}) - \frac{(1-\mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}}{3 - \text{tr}\mathbf{D}} (1-\mathbf{D}) \right) + \frac{E}{3(1-2\nu)} [\langle \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle (1 - \eta_t D_H) - \langle -\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle] \mathbf{1} \quad (2.6)$$

La relation (2.6) s'obtient par dérivation de l'enthalpie libre de Gibbs (eq.2.1). De la même manière, l'énergie libre de Helmholtz est définie comme étant la primitive de la relation de comportement exprimée en contraintes. On obtient :

$$\begin{aligned} \rho \psi &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \text{tr}(\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{[(1-\mathbf{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}]^2}{(3 - \text{tr}\mathbf{D})} \right) \\ &+ \frac{E}{6(1-2\nu)} [((1 - \eta_t D_H) \langle \text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle)^2 + \langle -\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \rangle^2] \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2 Discrétisation temporelle pour le calcul de l'incrément de dissipation

Comme pour l'évolution de l'endommagement, on discrétise l'évolution temporelle de la dissipation. On note alors :

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n + \Delta\mathcal{D} \quad (2.8)$$

L'incrément de dissipation  $\Delta\mathcal{D}$  s'écrit avec la méthode directe :

$$\Delta\mathcal{D} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} dt \quad (2.9)$$

Dans le cas de la méthode indirecte, on peut calculer directement  $\mathcal{D}_{n+1}$  avec :

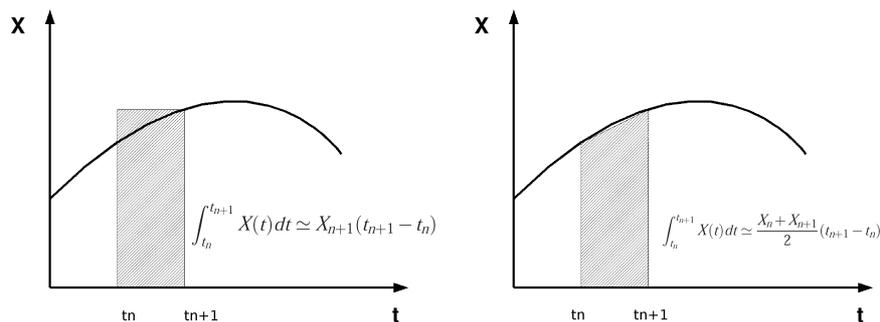
$$\mathcal{D}_{n+1} = \underbrace{\int_0^{\varepsilon_n} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}}_{w_n^e} + \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_{n+1}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} - \underbrace{[\rho\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})]_0^{n+1}}_{\Psi_0 = \Psi(0,0)=0} \quad (2.10)$$

On exprime donc directement  $\mathcal{D}_{n+1}$  :

$$\mathcal{D}_{n+1} = w_n^e + \int_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_{n+1}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} - \rho\Psi_{n+1} \quad (2.11)$$

où  $w_n^e$  est l'énergie élastique restituable au pas de temps  $n$ .

Pour les deux méthodes présentées, directe et indirecte, deux schémas numériques pour discrétiser l'intégration seront comparés, la méthode dite des rectangles à droite et celle des trapèzes (fig.2.2). On suppose que la méthode des rectangles à gauche présente les mêmes performances que celle des rectangles à droite, si bien que l'on se contente d'étudier la méthode des rectangles à droite.



(a) méthode des rectangles à droite

(b) méthode des trapèzes

**FIG. 2.2:** Méthodes numériques de discrétisation temporelle

### 2.2.1 Méthode directe

A partir de 2.4 et en discrétisant par la méthode des rectangles (DRE pour Directe Rectangles Exacte), on arrive, avec  $D_H = \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{D}$ , à :

$$\Delta\mathcal{D}^{DRE} = \frac{1+\nu}{E}(\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)_{n+1} : \Delta\mathbf{H} + \frac{(1-2\nu)}{6E}\langle\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_{n+1}^2(g(D_H^{n+1}) - g(D_H^n)) \quad (2.12)$$

et par la méthode des trapèzes (DTE pour Directe Trapèzes Exacte) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{D}^{DTE} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)_{n+1} + (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)_n}{2} : \Delta\mathbf{H} \\ &+ \frac{(1-2\nu)}{6E} \frac{\langle\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_{n+1}^2 + \langle\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_n^2}{2} (g(D_H^{n+1}) - g(D_H^n)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n = (1 - \mathbf{D}_{n+1})^{-\frac{1}{2}} - (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Dans les deux cas, on fait apparaître une différence entre les fonctions de  $\mathbf{D}$  au temps  $n$  et  $n + 1$ . Numériquement, c'est une opération qui peut conduire à des erreurs (notamment à des erreurs d'arrondis) et que l'on préférera approcher par des développements au premier ordre de manière à faire apparaître un produit. Pour  $\Delta g(D_H)$  le développement de son expression conduit au résultat suivant :

$$\Delta(g(D_H)) = g(D_H^{n+1}) - g(D_H^n) \simeq g'(D_H)\Delta D_H = \frac{\eta_t}{(1 - \eta_t D_H^n)^2} (D_H^{n+1} - D_H^n) \quad (2.15)$$

Pour calculer  $\Delta\mathbf{H}$ , on commence par exprimer  $\mathbf{H}_{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{D}_n$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{n+1} &= (1 - \mathbf{D}_{n+1})^{-\frac{1}{2}} = (1 - \mathbf{D}_n - \Delta\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{H}_{n+1} &= (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} [1 - (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}} \Delta\mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} \\ \mathbf{H}_{n+1} &\simeq (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} [1 + \frac{1}{2} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}} \Delta\mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}}] (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

On substitue cette nouvelle expression de  $\mathbf{H}_{n+1}$  dans celle de  $\Delta\mathbf{H}$  :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n &\simeq (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}} \Delta\mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{2}} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{1}{4}} \\ \Delta\mathbf{H} &\simeq \frac{1}{2} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \Delta\mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

On obtient finalement deux nouvelles expressions de l'incrément de dissipation. Pour la méthode des rectangles (DRA pour Directe Rectangles Approchée) :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{D}^{DRA} &= \frac{1+\nu}{E} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D)_{n+1} : \left[ \frac{1}{2} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \Delta\mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \right] \\ &+ \frac{(1-2\nu)}{6E} \langle\text{tr}\boldsymbol{\sigma}\rangle_{n+1}^2 \frac{\eta_t}{(1 - \eta_t D_H^n)^2} (D_H^{n+1} - D_H^n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

et pour celle des trapèzes (DTA pour Directe Trapèzes Approchée) :

$$\Delta \mathcal{D}^{DTA} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{(\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D)_{n+1} + (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma}^D)_n}{2} : \left[ \frac{1}{2} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \Delta \mathbf{D} (1 - \mathbf{D}_n)^{-\frac{3}{4}} \right] \quad (2.19)$$

$$+ \frac{(1 - 2\nu)}{6E} \frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_{n+1}^2 + \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle_n^2}{2} \frac{\eta_t}{(1 - \eta_t \mathbf{D}_H^n)^2} (\mathbf{D}_H^{n+1} - \mathbf{D}_H^n) \quad (2.20)$$

### 2.3 Méthode indirecte

Pour la méthode indirecte on approxime également l'intégrale par la méthode des rectangles à droite et par celle des trapèzes, on obtient à nouveau deux nouvelles expressions de la dissipation intrinsèque.

Par la méthode des rectangles (IR pour Indirecte Rectangles) on a :

$$\mathcal{D}_{n+1}^{IR} = \mathcal{D}_n + \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \rho \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{D}_{n+1}) \quad (2.21)$$

Et par la méthode des trapèzes (IT pour Indirecte Trapèzes) :

$$\mathcal{D}_{n+1}^{IT} = \mathcal{D}_n + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_n}{2} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \rho \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \mathbf{D}_{n+1}) \quad (2.22)$$

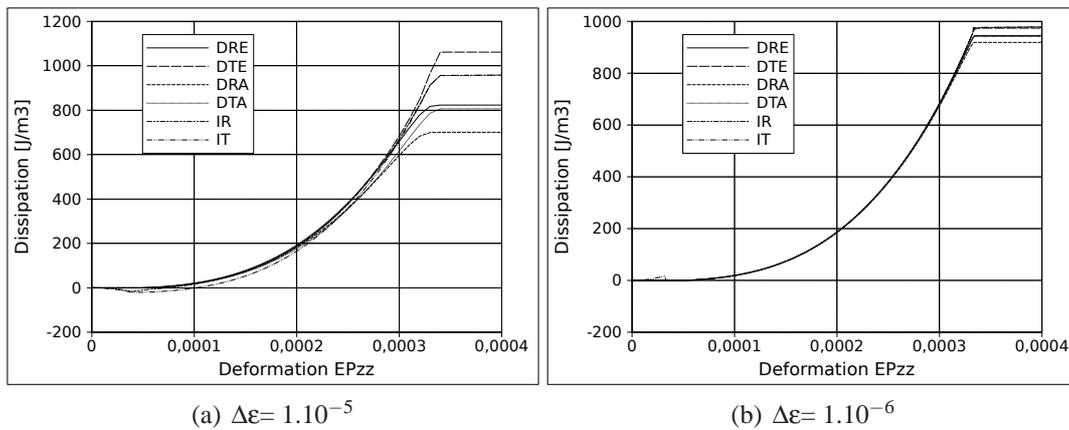
### 2.4 Choix de la méthode de calcul

On a donc six expressions différentes de la dissipation intrinsèque que le tableau 2.1 récapitule.

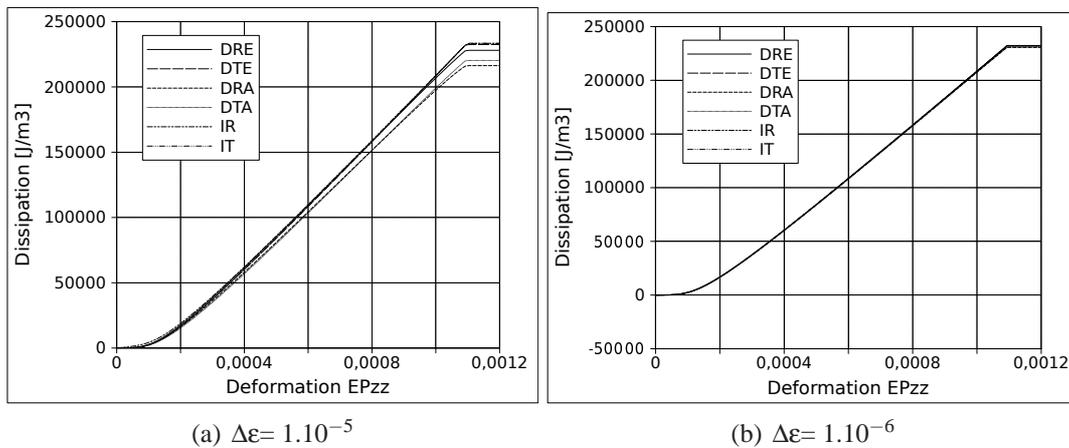
Méthode		Rectangles	Trapèzes
Directe	Exacte	DRE	DTE
	Approchée	DRA	DTA
Indirecte		IR	IT

**TAB. 2.1:** Récapitulatif des différentes méthodes étudiées

On applique ces différentes expressions au cas d'un élément cubique à huit points de Gauss sollicité en traction simple jusqu'à la ruine. L'évolution de la dissipation intrinsèque (volumique) pour les différentes expressions est tracée à la figure 2.4. Deux valeurs de l'incrément de déformation sont testées :  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = 1.10^{-5}$  et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = 1.10^{-6}$ . On effectue le même calcul dans le cas de la compression simple (fig. 2.4).

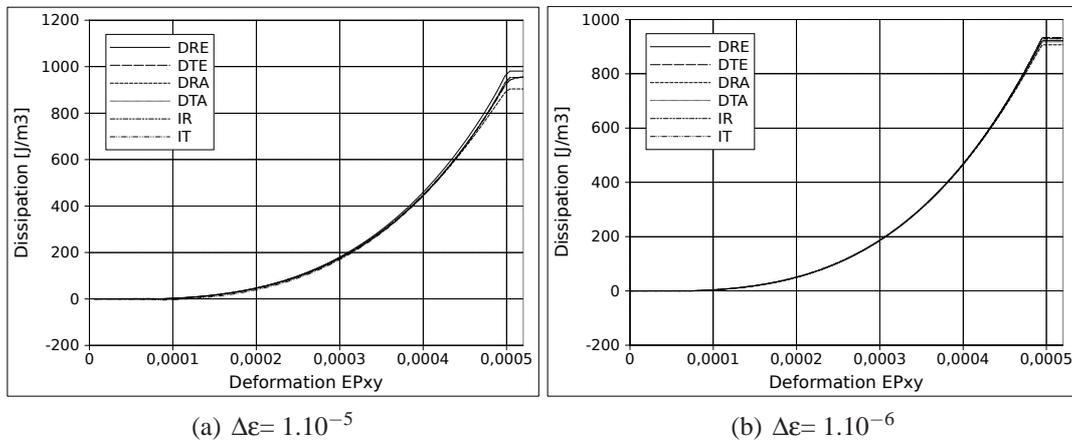


**FIG. 2.3:** Evolution de la dissipation sur un point de Gauss en traction avec les notations du tableau 1



**FIG. 2.4:** Évolution de la dissipation sur un point de Gauss en compression avec les notations du tableau 1

Enfin la figure 2.5 montre l'évolution de la dissipation pour un cube en cisaillement.



**FIG. 2.5:** Évolution de la dissipation sur un point de Gauss en cisaillement avec les notations du tableau 1

La cohérence des résultats des méthodes directes et indirectes valide le calcul. D'autre part on constate que toutes les méthodes convergent vers le même résultat lorsque l'on diminue le pas de temps. La méthode DTE est dans ce cas la plus efficace (c'est pour elle que le résultat varie le moins lorsque l'on diminue le pas de temps).

## 2.5 Estimation de l'élévation de température

L'équation complète de la chaleur s'écrit dans sa forme la plus générale [LC85] :

$$k\Delta T = \rho C\dot{T} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbf{A}_k : \dot{\mathbf{V}}_k - r_q - T \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial T} : \dot{\mathbf{V}}_k \right] \quad (2.23)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien,  $C$  la chaleur spécifique du matériau,  $k$  la conductivité thermique et  $r_q$  une source interne de chaleur. Les  $\mathbf{V}_k$  sont les variables internes (dans notre cas uniquement  $\mathbf{D}$ ) et les  $\mathbf{A}_k$  les forces thermodynamiques associées aux variables internes (dans notre cas  $-\mathbf{Y}$ ).

On peut dans le cas particulier qui est le nôtre, y apporter les simplifications suivantes :

- Sans déformations anélastiques  $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$
- Sans production interne de chaleur créée par des sources extérieures :  $r_q = 0$
- Sans couplage thermo-mécanique  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = 0$  et  $\frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial T} : \dot{\mathbf{V}}_k = 0$

L'équation de la chaleur devient :

$$\rho C\dot{T} = k\Delta T + \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} \quad (2.24)$$

En faisant en plus l'hypothèse d'évolution adiabatique (hypothèse qui peut se justifier par le fait que les phénomènes étudiés sont rapides), on obtient finalement l'expression suivante de l'évolution de la température :

$$\dot{T} = \frac{Y : \dot{D}}{\rho C} \quad (2.25)$$

On peut alors connaître l'élévation de la température en chacun des points de Gauss du maillage en divisant la dissipation volumique calculée par  $\rho C$ . Pour le béton,  $\rho$  est de l'ordre de  $2400 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $C$  est environ égal à  $880 \text{ J.kg}^{-1}\text{°C}^{-1}$ . Une application sera faite au paragraphe 4 de ce chapitre.

### 3 Estimation de l'ouverture de fissures

Dans la cadre des ouvrages du nucléaire (entre autres) la connaissance de l'ouverture de fissure est une donnée importante [MLM98, FLPC99, DPCCH08] notamment si l'on souhaite évaluer l'évolution de la perméabilité du béton soumis à un chargement mécanique donné (par exemple pour un ouvrage de confinement). Un nouvel indicateur pour estimer l'ouverture des fissures  $I$ , basé sur le concept d'endommagement actif décrit au chapitre 1 est présenté [CDD<sup>+</sup>09]. Soit AB un trajet entre deux points situés de part et d'autre d'une zone fissurée (représentée par la mécanique de l'endommagement par  $D = D_c \simeq 1$ ), l'indicateur s'écrit alors en 3D :

$$I_{3D} = \int_A^B \mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+ dx = \int_A^B d_{act} \max(\varepsilon_I) dx \quad (2.26)$$

et en 1D :

$$I_{1D} = \int_A^B d_{act} \varepsilon dx = \int_A^B D \langle \varepsilon \rangle_+ dx = I_{1D} \quad (2.27)$$

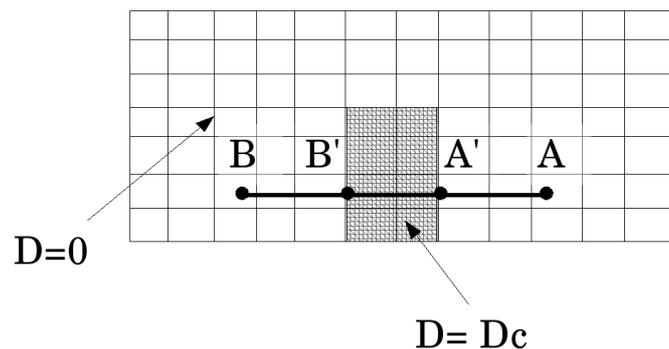


FIG. 2.6: Indicateur d'ouverture de fissure

- Si la bande où l'endommagement est localisé est en compression,  $\langle \varepsilon \rangle_+ = 0$  et  $I = 0$ , ainsi l'ouverture de fissure est nulle.
- Sous l'hypothèse (bien vérifiée dans le cas de calculs de structures en béton) d'un trajet

$A'B'$  dans une zone fortement endommagée à  $D = D_c$  entourée d'une zone saine (non endommagée) entre  $A$  et  $A'$  et entre  $B$  et  $B'$ , l'indicateur s'écrit :

$$\begin{aligned}
 I_{1D} &= \int_A^B D\langle\varepsilon\rangle_+ dx = \int_A^{A'} D\langle\varepsilon\rangle_+ dx + \int_{A'}^{B'} D\langle\varepsilon\rangle_+ dx + \int_{B'}^B D\langle\varepsilon\rangle_+ dx \quad (2.28) \\
 &= 0 + \int_{A'}^{B'} D_c \varepsilon dx + 0 = \int_{A'}^{B'} D_c \frac{du}{dx} dx \\
 &= D_c (u(B') - u(A')) \simeq [u]
 \end{aligned}$$

où  $[u]$  correspond bien à l'ouverture de fissure.

## 4 Première application : l'essai brésilien

Une première application est présentée ici pour illustrer les différents points développés dans ce chapitre.

### 4.1 Description de l'essai

Il s'agit d'un essai brésilien (également appelé essai de fendage) sur un éprouvette en béton dont les dimensions sont les suivantes :  $100 \text{ cm}^2$  de section et  $5 \text{ cm}$  d'épaisseur. Ces dimensions sont choisies afin de comparer les résultats de calcul aux résultats d'essais présentés dans [BPD<sup>+</sup>09]. Le dispositif expérimental utilisé correspond à celui de la figure 2.7.

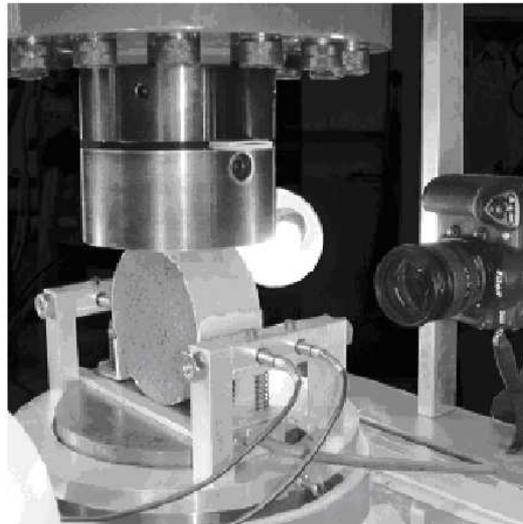
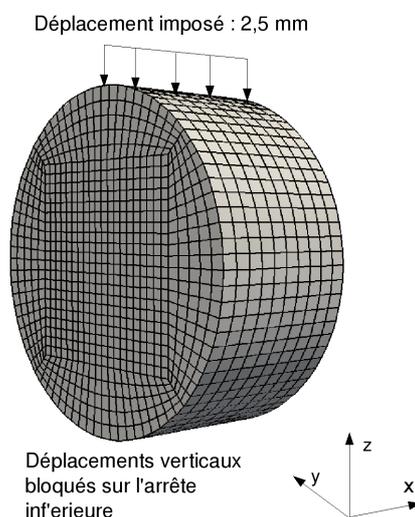


FIG. 2.7: Dispositif expérimental pour un essai brésilien d'après [BPD<sup>+</sup>09]

Le maillage et les conditions aux limites sont présentés à la figure 2.8. Ce maillage est constitué de 8000 éléments cubiques à 8 points de Gauss. Le centre de l'éprouvette est maillé

de manière régulière pour ne pas influencer la propagation de l'endommagement. Le repère utilisé tout au long de cet exemple est celui de la figure 2.8. Le chargement correspond à un déplacement imposé de compression suivant  $z$  de l'arrête supérieure de l'éprouvette. Le



**FIG. 2.8:** Maillage de l'éprouvette de béton pour l'essai brésilien

déplacement maximal atteint est de 0,25 mm, ce qui engendre pour un calcul en élasticité une contrainte maximale de traction suivant  $y$  de l'ordre de 12 MPa (fig. 2.11,  $E = 30$  GPa et  $\nu = 0,2$ ). On compare dans CAST3M les résultats obtenus avec deux modèles d'endommagement différents : le modèle d'endommagement isotrope de Mazars (c.f. chapitre 1) et le modèle anisotrope initial. Les caractéristiques mécaniques du béton de l'expérience n'étant pas connues avec précision, on se contente de caler les paramètres des deux modèles pour une réponse équivalente en traction et compression simple (fig. 2.10). Notre objectif prioritaire est d'obtenir des résistances égales en traction et en compression simples. Les paramètres utilisés pour le modèle anisotrope sont les mêmes que précédemment. Pour le modèle de Mazars, on utilise le jeu de paramètres suivant :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$E$	42 GPa	$\nu$	0,2
$\kappa_0$	$1,06 \cdot 10^{-4}$	$\beta$	1,06
$A_c$	1,515	$B_c$	2340
$A_t$	0,96785	$B_t$	10450

**FIG. 2.9:** Paramètres du modèle de Mazars

Enfin, les calculs sont effectués avec les versions locales des modèles (et donc dépendante du maillage, c.f. chapitre 4). La taille des éléments centraux est de 3,5 mm.

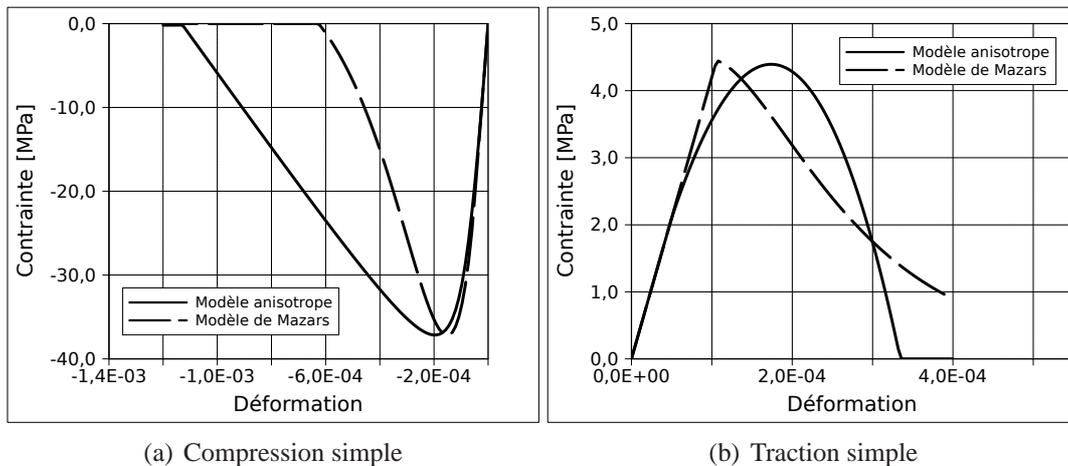


FIG. 2.10: Comparaison des réponses des deux modèles d'endommagement

Le champ de contrainte pour un calcul en élasticité est présenté sur la figure 2.11. Il met en évidence une zone centrale fortement sollicitée en traction (bien au-delà de la résistance du béton) et des zones proches des appuis en compression (avec une contrainte de l'ordre de 100MPa).

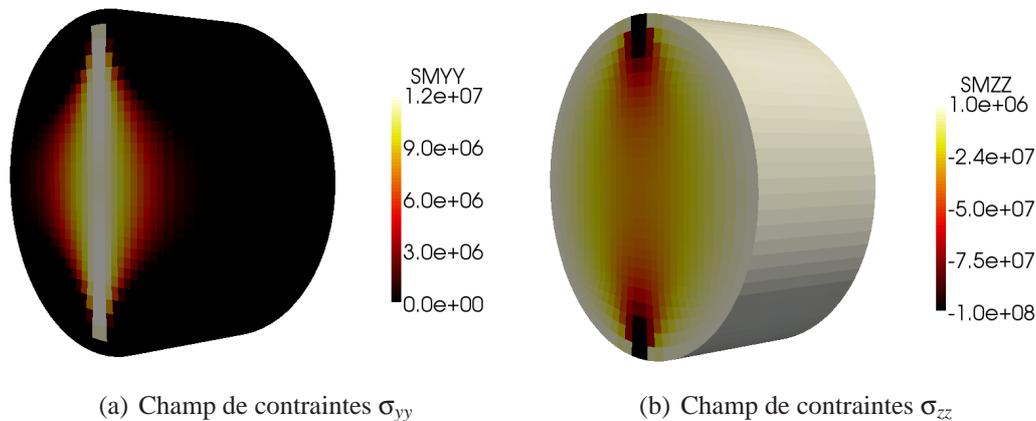


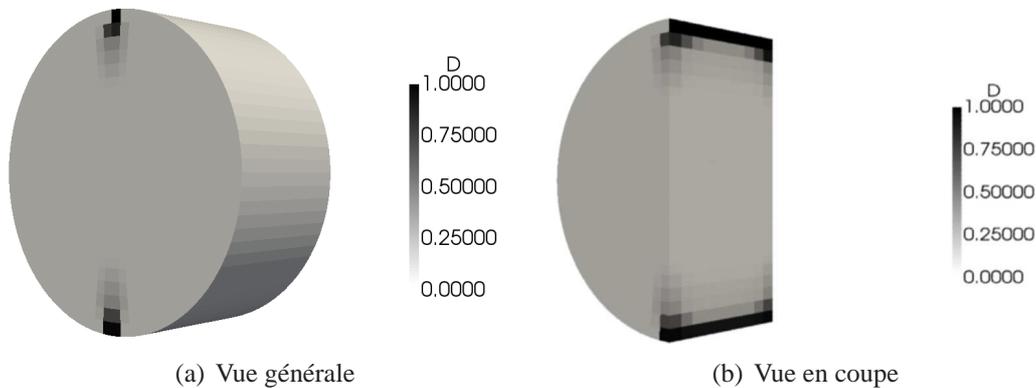
FIG. 2.11: Champ de contraintes en élasticité à 0,25 mm de déplacement imposé

## 4.2 Apport de l'anisotropie

### 4.2.1 Code implicite : Cast3m

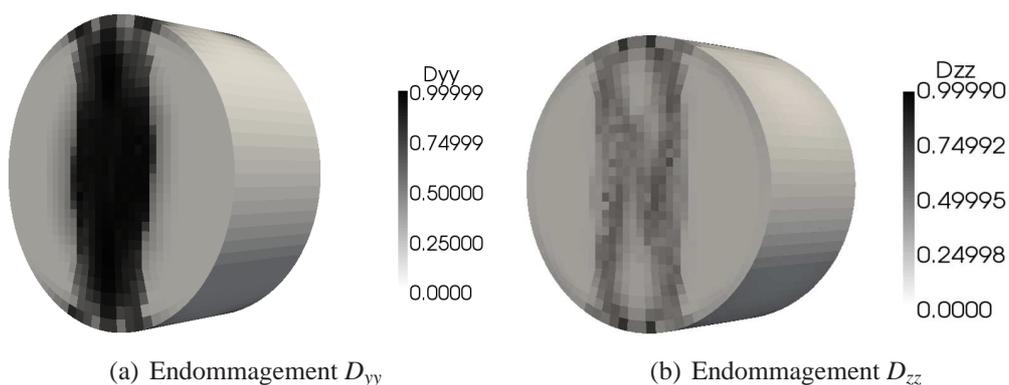
La difficulté de ce calcul provient du fait que le champ de contrainte est loin d'être homogène. La zone sous l'appui s'endommage fortement en compression, il peut alors s'avérer difficile de transmettre l'effort au reste de la structure. C'est ce que l'on observe avec le modèle

isotrope (fig. 2.12) où seule la zone en compression s'endommage (et non la zone sollicitée en traction où la macro-fissure se propage). Un très (trop) fort endommagement dans cette zone survient avant la rupture en traction et le calcul ne converge plus.



**FIG. 2.12:** Isovaleurs d'endommagement pour le modèle de Mazars - implicite

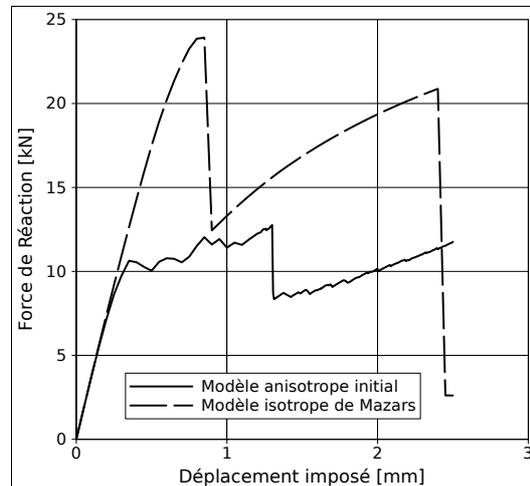
Avec un modèle anisotrope, l'endommagement est naturellement lié à une direction. Ainsi l'endommagement des deux zones comprimées ne perturbent pas la transmission des efforts au reste de la structure, et le calcul peut être mené à terme. On parvient ainsi à reproduire la fissuration (au travers d'un endommagement critique) en traction de la zone centrale de l'éprouvette. L'endommagement étant tensoriel, on ne peut représenter sur une carte d'endommagement qu'une seule des composantes du tenseur. Ici, on montre l'endommagement suivant  $y$  qui correspond à l'endommagement dans la zone de rupture et suivant  $z$  qui correspond à celui de la zone comprimée (fig. 2.13).



**FIG. 2.13:** Isovaleurs d'endommagement pour le modèle anisotrope - implicite

On compare par ailleurs les réactions calculées par les deux modèles (fig. 2.14). Le modèle isotrope, du fait de son incapacité à reproduire l'endommagement de la principale zone affectée

prévoit une force de réaction plus importante que le modèle anisotrope. Dans les deux cas on constate une chute brutale de l'effort qui caractérise un comportement fragile et instable (et pathologiquement dépendant du maillage).



**FIG. 2.14:** Comparaison de la force de réaction pour les deux modèles d'endommagement (calculs locaux)

#### 4.2.2 Code explicite : Europlexus

La même simulation est menée avec le code explicite Europlexus. Le même constat est fait vis à vis de l'endommagement isotrope : la zone d'appui et sous la zone où est appliqué le chargement s'endommagent rapidement et fortement si bien qu'il n'est pas possible de transmettre le chargement au reste de la structure. Il en résulte un état d'endommagement très localisé et qui ne correspond pas aux observations expérimentales (fig. 2.15).

Le résultat obtenu avec le modèle anisotrope est conforme au précédent, la zone centrale est fortement endommagée suivant  $y$ , ce qui correspond bien à l'expérience.

#### 4.2.3 Limites de l'endommagement isotrope

On a pu montrer par cet exemple que l'endommagement isotrope, même lorsque l'on différencie l'endommagement de traction et l'endommagement de compression, n'était pas capable de traiter les cas où l'endommagement est fortement localisé au niveau des appuis ou du chargement.

Le schéma d'intégration temporel explicite introduit un décalage temporel dans la mesure où les forces sont calculées au pas de temps  $n + 1$  à partir des déplacements au temps  $n$ . On constate sur cet exemple que ce décalage n'est pas suffisant pour laisser le temps aux efforts d'être transmis au reste de la structure.

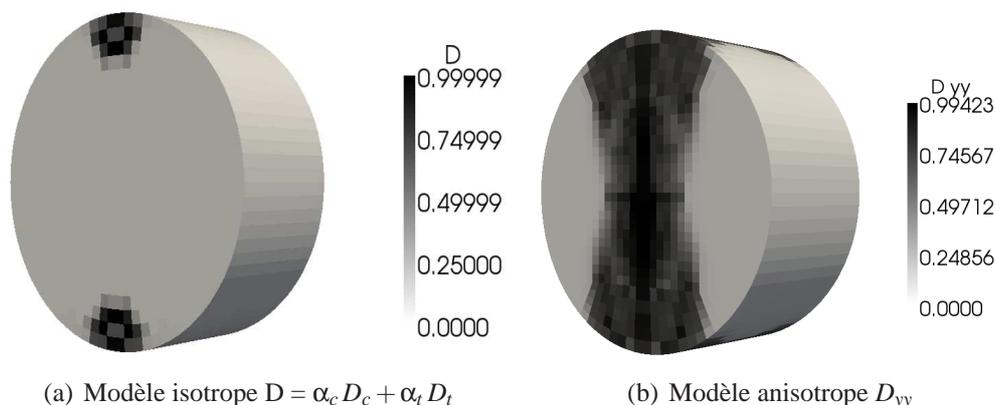


FIG. 2.15: Isovaleur d'endommagement pour le calcul- explicite

### 4.3 Dissipation intrinsèque

On présente ici la carte de dissipation intrinsèque calculée par la méthode directe exacte des trapèzes (DTE) décrite précédemment pour le modèle anisotrope (fig. 2.16) On constate que les zones où l'on dissipe le plus d'énergie sont les zones comprimées, ce qui s'explique par le fait que l'énergie nécessaire pour atteindre l'endommagement critique en compression est environ 25 fois supérieure à cette même énergie en traction.

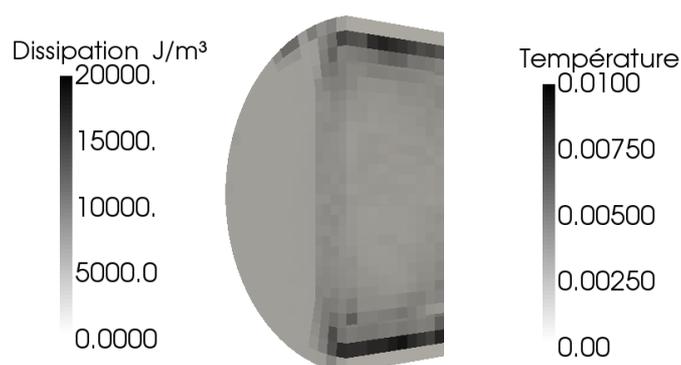


FIG. 2.16: Carte de dissipation volumique intrinsèque [ $\text{J}/\text{m}^3$ ] et d'élévation  $\Delta T$  de température

La carte de température montre une élévation insignifiante de la température. Cette variation est tellement faible qu'il est impossible de la mesurer expérimentalement. Néanmoins, cela concorde avec le fait que l'on ne constate pas pour le béton, d'augmentation importante de la température après fissuration.

#### 4.4 Estimation de l'ouverture de fissure

On estime l'ouverture de fissure sur l'une des faces de l'éprouvette à différentes hauteurs par la méthode décrite précédemment. La zone étudiée comporte 6 éléments répartis à gauche et à droite du diamètre central. La hauteur  $h = 5,64$  cm correspond à la demi-hauteur de l'éprouvette. L'estimation de l'ouverture de fissure est ensuite calculée tous les centimètres de part et d'autre du centre de la surface. On constate (fig 2.17) que cette ouverture est globalement homogène sur toute la hauteur de l'éprouvette.

Comme pour la force de réaction, on constate un saut important de l'estimation de l'ouverture fissure, qui caractérise à nouveau le caractère fragile de cet essai. La comparaison aux résultats expérimentaux montre que l'ordre de grandeur de l'estimation est correct ( $15 \mu\text{m}$  pour le calcul contre environ  $50 \mu\text{m}$  expérimentalement), mais que l'outil développé ne reste pour le moment qu'un indicateur.

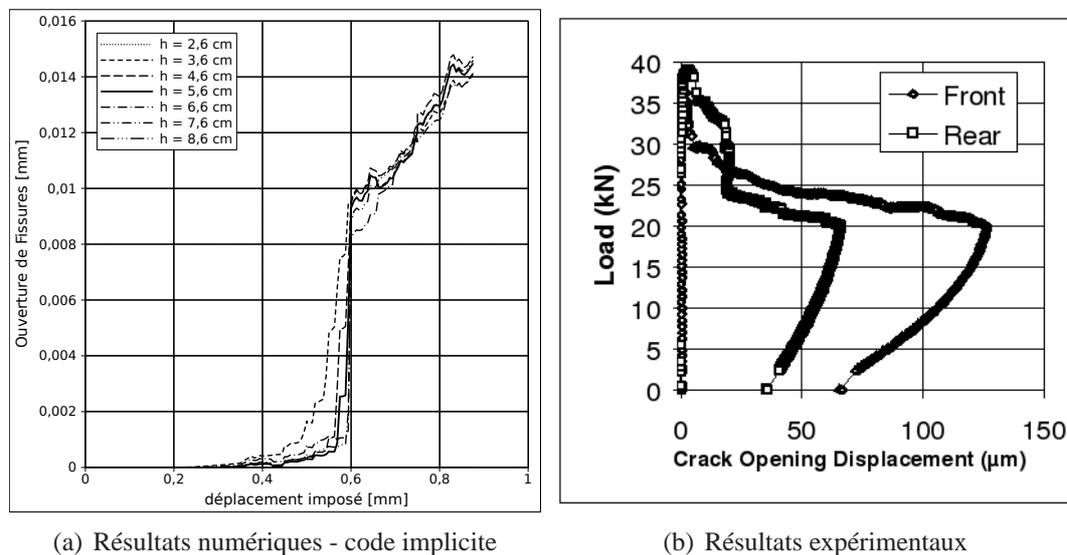


FIG. 2.17: Estimation de l'ouverture de fissure vs Résultats expérimentaux

L'estimation de l'ouverture de fissure sous chargement mécanique est un sujet qui fait actuellement l'objet d'un projet national (CEOS.fr, Comportement et Évaluation des Ouvrages Spéciaux - Fissuration et Retrait [RGC08]) auquel le LMT Cachan participe. La question de l'estimation de l'ouverture de fissure y est traitée par la méthode décrite dans ce chapitre pour le cas d'une poutre en béton armé sollicitée par un chargement de flexion 3 points (cf. chapitre 4 et [CLN<sup>+</sup>09]). Le projet national se poursuit mais les résultats numériques obtenus jusqu'à présent par cette méthode sont encourageants.

## 5 Conclusion

L'intégration numérique dans un code de calcul aux éléments finis du modèle de comportement initial présenté au chapitre 1 se fait de manière directe (i.e. sans itérations), ce qui présente

un avantage certain en terme de temps de calcul. Cependant le passage au calcul numérique nécessite de prendre certaines précautions, notamment avec ce que l'on appelle la "gestion de la rupture". Il faut en effet introduire dans le schéma numérique une procédure qui permet de borner les valeurs propres du tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}$  pour qu'elles restent dans le domaine de définition physique de l'endommagement (le domaine  $[0;1]$ ). La procédure initiale de gestion de la rupture imposait le plan dans lequel l'endommagement évoluait à partir du moment où la plus grande des valeurs propres du tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}$  atteignait sa valeur critique  $D_c$  (très peu différente de 1), puis elle fixait la direction d'endommagement lorsque deux des valeurs propres avaient atteint  $D_c$ . La nouvelle gestion de la rupture ne fixe pas de direction d'endommagement, même une fois que  $D_c$  est atteint. Les résultats numériques ne sont pas fondamentalement différents, mais cette procédure permet de réduire de manière importante le nombre de variables conservées par le code de calcul d'un pas de temps à l'autre.

Le cadre thermodynamique dans lequel le modèle a été développé permet d'assurer la positivité de la dissipation. Lors de ce travail de thèse, deux expressions équivalentes de la dissipation intrinsèque ont été établies. Plusieurs discrétisations temporelles du calcul de la dissipation ont été proposées et comparées pour finalement n'en retenir qu'une pour l'application aux calculs de structures. L'application au calcul d'un essai brésilien en statique montre que la dissipation intrinsèque dans ce cas est essentiellement due aux dégradations en compression, qui ne sont pas celles qui mènent à la ruine.

Un estimateur de l'ouverture de fissure, basé sur le concept d'endommagement actif (rappelé au chapitre précédent) a été développé. Son application au calcul (local, et donc dépendant du maillage) de l'essai brésilien donne le bon ordre de grandeur en comparaison aux résultats expérimentaux.

Enfin, cet exemple de calcul sur une structure (l'essai brésilien) a permis d'illustrer l'intérêt de l'anisotropie de l'endommagement. L'endommagement anisotrope confère au matériau endommagé un comportement élastique anisotrope (les paramètres d'élasticité ne sont pas dégradés de la même manière dans toutes les directions). Dans le cas de l'essai brésilien, la zone où l'on applique le chargement et la zone d'appuis sont sollicitées en compression, ce qui conduit avec le modèle d'endommagement anisotrope à dégrader l'élasticité dans les directions perpendiculaires au chargement. La direction parallèle au chargement garde sa raideur initiale, ce qui permet de transmettre les efforts au reste de la structure. Il a été montré qu'avec un modèle scalaire isotrope, le fait de dégrader la raideur dans toutes les directions, y compris celles orthogonales au chargement, conduisait à l'impossibilité de mener le calcul dans ce cas, pourtant apparemment simple, jusqu'à la ruine.



## Chapitre 3

# Modélisation du comportement dynamique du béton

Par essais dynamiques on désigne une large gamme d'essais à des vitesses de sollicitation très différentes mais qui ont en commun le fait que le temps influe sur la réponse de l'éprouvette ou de la structure testée. Les effets temporels sont de deux natures : inertiels quand ils sont liés à l'accélération induite par la vitesse chargement et "visqueux" quand c'est le comportement du matériau qui est dépendant de la vitesse de la déformation (ou de la contrainte).

De nombreuses techniques et moyens expérimentaux ont été développés pour caractériser le comportement dynamique des matériaux et dans le cas qui nous intéresse du béton, pour des vitesses de sollicitation allant du quasi-statique ( $\dot{\sigma} \leq 10^{-5} \text{GPa.s}^{-1}$  ou  $\dot{\epsilon}$  de  $10^{-4}$  à  $10^{-2} \text{s}^{-1}$ ) aux vitesses rapides ( $\dot{\sigma} > 100 \text{GPa.s}^{-1}$  ou  $\dot{\epsilon} > 10 \text{s}^{-1}$ ). Les moyens expérimentaux à mettre en oeuvre varient en fonction de la vitesse à atteindre et nécessitent des dispositifs différents. Il est donc dans ces conditions rare de connaître les caractéristiques d'un même béton sur toute l'étendue de la gamme de vitesse de sollicitation mentionnée. D'autre part, ces essais sont délicats à réaliser du fait des difficultés liées aux réflexions d'ondes et aux vibrations. L'acquisition des données est plus complexe que pour des essais statiques (problème de filtrage, de calage temporel précis des mesures [ZG96],...) et nécessite un matériel adapté. Les données expérimentales couvrent donc un domaine assez restreint de sollicitations, les données les plus nombreuses concernant les essais uniaxiaux. De plus elles se rapportent le plus souvent à des éprouvettes de petites tailles.

Ces essais ont permis de mettre en évidence une forte sensibilité du béton à la vitesse de sollicitation en traction, et une plus faible sensibilité en compression. On explique ces effets de vitesse par des considérations "matériau" (effets visqueux et obscurcissement de défauts) et par des effets inertiels [BJ71, Ros91, DH00a].

De nombreux modèles de comportement pour le béton, qu'ils soient de plasticité [GR03], d'endommagement [DPCL96b] ou couplés plasticité - endommagement [Ser97, Gat99, PSS08] reproduisent cet effet de la vitesse de sollicitation. Lors de cette thèse, un nouveau modèle d'endommagement avec effet de vitesse en traction a été développé. Il présente la particularité d'une part de borner la vitesse d'endommagement et d'autre part de tenir compte de l'effet des sollicitations alternées (non seulement sur le seuil d'endommagement mais aussi sur l'effet de la vitesse de sollicitation). Le cadre

thermodynamique dans lequel il a été développé permet d'assurer la positivité de la dissipation intrinsèque et de la calculer.

## 1 Effet de la vitesse sur la résistance du béton

### 1.1 Effet de la vitesse de sollicitation en compression

Historiquement, les essais dynamiques sur le béton ont consisté dans un premier temps, à pratiquer des essais de compression classiques sur machines hydrauliques, mais en faisant varier la vitesse de sollicitation. Cependant la manière la plus courante de caractériser le comportement dynamique du béton en compression repose sur des essais au barres de Hopkinson (essai SHPB, Split Hopkinson Pressure Bars), développés par [Hop14] puis améliorés par [Kol53].

Comme le montre la synthèse de ces essais réalisée par Bischoff et Perry [BP91], la résistance apparente du béton augmente avec la vitesse de sollicitation (fig. 3.1). Il est classique d'exprimer (surtout dans le cas d'une synthèse d'essais sur des bétons différents) l'augmentation de résistance comme le rapport de la résistance dynamique  $f_c^{dyn}$  sur la résistance en quasi-statique  $f_c$  (à  $\dot{\epsilon} = 10^{-6} s^{-1}$ ). L'échelle des vitesses de sollicitation est alors une échelle logarithmique.

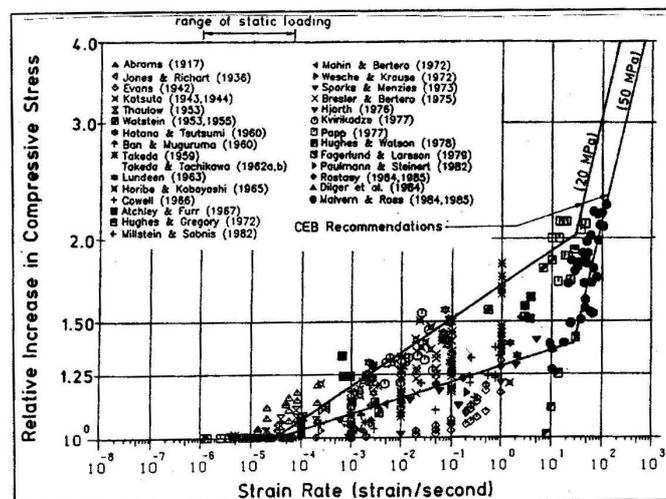


FIG. 3.1: Effet de vitesse en compression  $\frac{f_c^{dyn}}{f_c} V_s \dot{\epsilon}$  d'après Bischoff et Perry [BP91]

On distingue ainsi deux régimes de comportement :

Pour des vitesses de sollicitation comprises entre  $10^{-4}$  et  $10 s^{-1}$ , l'augmentation de résistance est faible, on peut exprimer l'accroissement de résistance comme une fonction linéaire du logarithme de la vitesse.

Au delà  $10 s^{-1}$ , la résistance du béton croit plus rapidement avec la vitesse de sollicitation (on passe d'un rapport résistance dynamique/résistance statique de 1,5 à  $10 s^{-1}$  à un rapport de 3 à  $100 s^{-1}$ ).

Des essais dynamiques sur barres de Hopkinson ont permis d'atteindre des vitesses encore plus élevées (jusqu'à environ  $1000 \text{ s}^{-1}$ ) et tendent à confirmer cette observation [RTK95]. On représente donc régulièrement l'effet de vitesse en compression comme une fonction bilinéaire du logarithme de la vitesse de sollicitation.

L'augmentation de résistance en compression peut s'expliquer, comme on le verra au paragraphe 1.3, par des considérations structurelles liées à l'inertie de l'échantillon testé.

## 1.2 Effet de la vitesse de sollicitation en traction

Les essais de traction en dynamique sont réalisés principalement grâce à deux dispositifs. Pour les essais "lents" on a recours à des presses (relativement) rapides, asservies classiquement. Ces presses permettent en général une montée en charge de  $0,05 \text{ MPa/s}$  à  $50 \text{ GPa/s}$ . Pour les vitesses supérieures on utilise le dispositif dit des barres de Hopkinson modifiées [WR89] [Wee91, BKK97, KB01]. L'avantage de combiner ces deux essais est qu'ils peuvent se faire sur les mêmes éprouvettes cylindriques. L'essai sur barre de Hopkinson modifié ne permet pas d'atteindre les mêmes vitesses de sollicitation qu'en compression et ce pour la simple raison qu'en augmentant la vitesse on endommage d'abord l'éprouvette en compression (et non en traction). Ainsi la vitesse maximale qui a été atteinte n'est que légèrement supérieure à  $100 \text{ s}^{-1}$ .

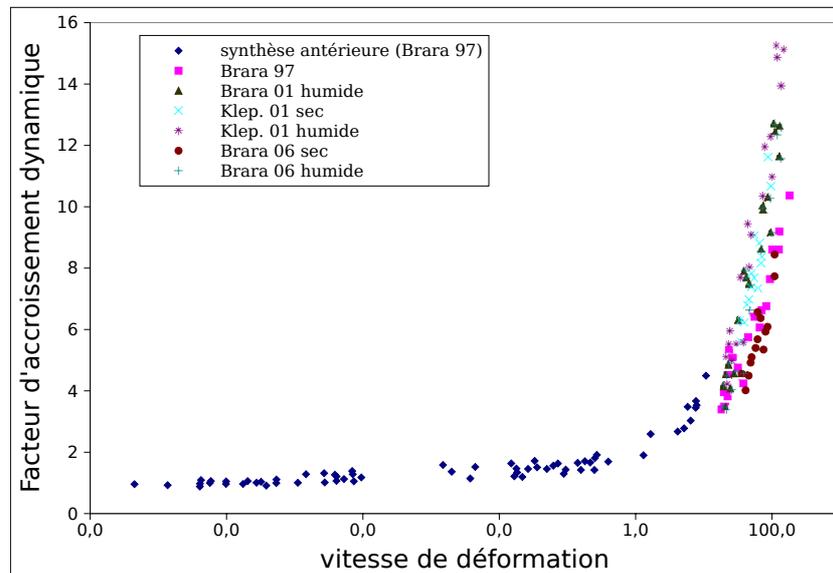


FIG. 3.2: Comportement dynamique du béton en traction uniaxiale - courbe de synthèse

Comme en compression, on exprime l'augmentation de contrainte comme le rapport de la résistance dynamique sur la résistance statique  $\frac{f_t^{dyn}}{f_t}$ . On distingue également deux régimes : le premier régime où l'augmentation de résistance est plutôt faible jusqu'à  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$  et au-delà où l'augmentation est beaucoup plus marquée (fig. 3.2). L'effet de la vitesse de sollicitation est

beaucoup plus sensible en traction qu'en compression (on multiplie la résistance par 14 au lieu de 3 en compression). Comme précédemment certains auteurs ont exprimé cet effet de vitesse comme une fonction bilinéaire, mais il semble qu'une loi puissance soit également bien adaptée (fig.3.3).

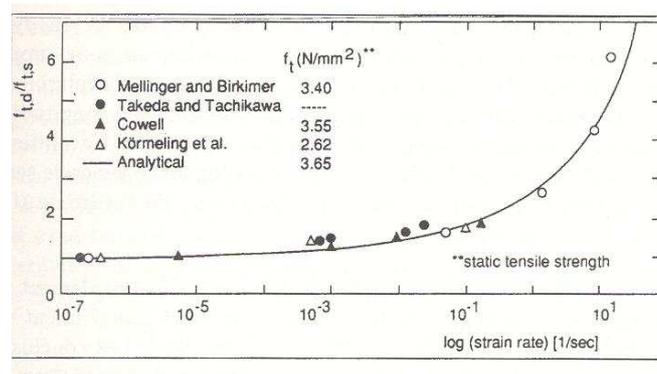


FIG. 3.3: Approximation de l'effet de vitesse en traction par une loi puissance, d'après [BP91]

### 1.3 Interprétation de l'effet de vitesse

On identifie en traction comme en compression un premier régime où l'effet de vitesse est faible. La limite de vitesse ce premier régime est 10 fois plus importante en compression qu'en traction ( $10 \text{ s}^{-1}$  contre  $1 \text{ s}^{-1}$ ). Dans cette gamme de vitesse, l'effet de vitesse est plus important en traction qu'en compression (à  $1 \text{ s}^{-1}$ , la valeur de résistance statique est multipliée par 1,4 en compression et par 2 en traction). Une interprétation de ce phénomène a été avancée par Rossi [Ros91]. L'idée est que si l'on évapore toute l'eau contenue dans les pores de la matrice cimentaire, on n'observe alors quasiment plus aucun effet de vitesse (fig. 3.4).

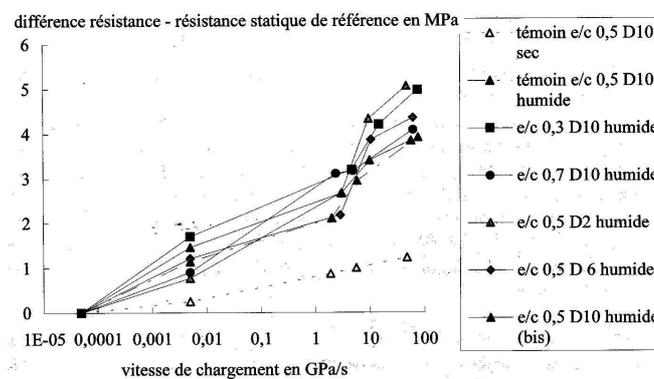


FIG. 3.4: Variation de la résistance en traction  $f_t^{dyn} - f_t$  avec la vitesse de chargement  $\dot{\sigma}$ , d'après [Tou95]

Cette observation a été faite aussi bien en traction qu'en compression. On en déduit donc que la sensibilité du béton à la vitesse de sollicitation dans la gamme de vitesse considérée est directement reliée à la présence d'eau libre dans le béton. Cette eau se trouve sollicitée comme un fluide visqueux par le déplacement rapide des parois des pores. La contrainte macroscopique appliquée au matériau béton se trouve donc reprise au sein de la microstructure d'une part par le squelette mais aussi par des contraintes visqueuses au sein du fluide. On appelle ce phénomène "l'effet Stefan" (fig. 3.6(a)). On peut comparer ce phénomène à une précontrainte du squelette par l'eau qui retarderait la rupture suivant la direction d'extension.

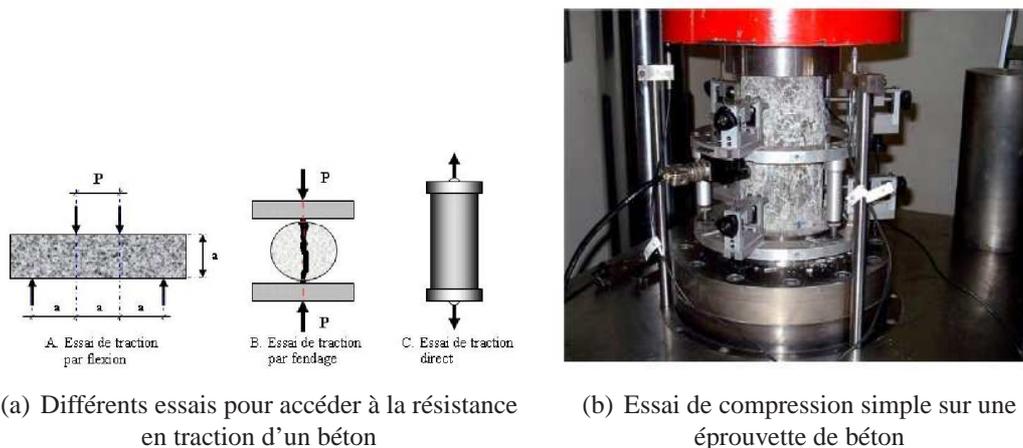


FIG. 3.5: Détermination expérimentale de la résistance du béton

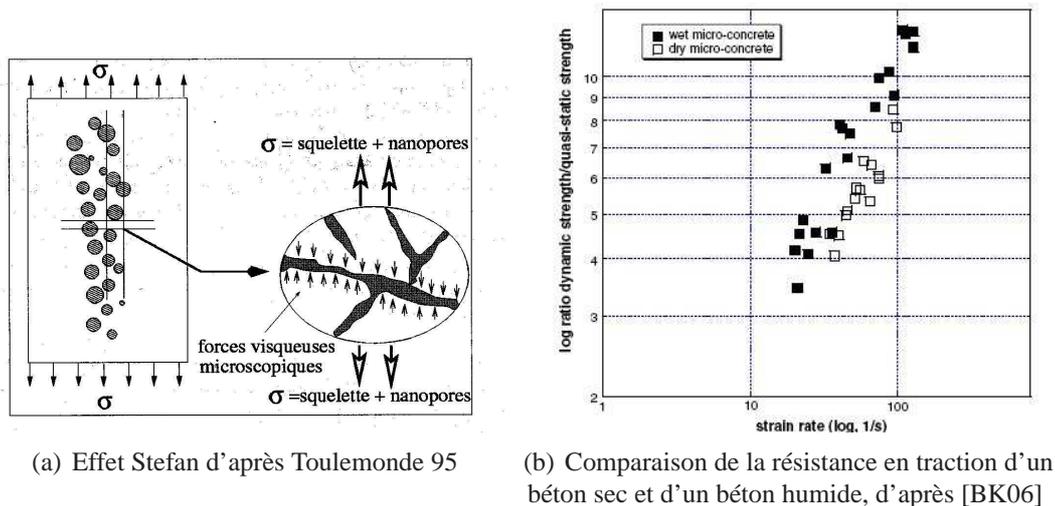


FIG. 3.6: Influence de l'eau libre sur l'effet de vitesse

Pour le second régime, les effets visqueux liés à la présence d'eau dans les pores ne suffisent plus à expliquer l'effet de vitesse. Même si une différence persiste entre les bétons secs et les bétons humides, il existe bel et bien un effet de vitesse pour les bétons secs (cf. fig. 3.6(b), qui

n'est donc pas lié à la présence d'eau. L'effet de vitesse est donc la conséquence d'au moins deux phénomènes : les effets visqueux et au moins un autre qui n'est visiblement pas le même en traction et en compression.

En compression, une interprétation possible est en effet la participation des effets d'inertie. Quand on sollicite dynamiquement le béton en compression, il a tendance à vouloir s'étendre latéralement. Les forces d'inertie limitent cette extension et confine alors le béton (fig. 3.7). Comme en quasi-statique, le confinement permet d'accroître la résistance du béton

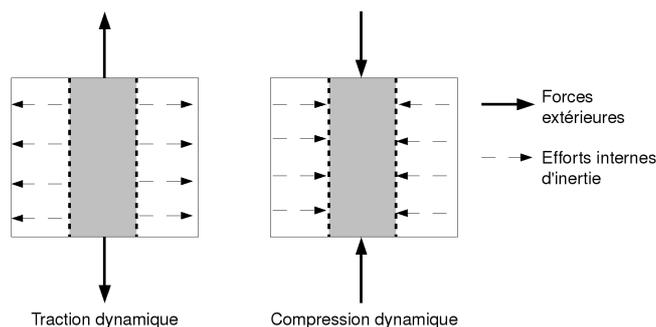


FIG. 3.7: Origine des effets d'inertie

[KHR69, FGG08]. Les simulations numériques dans lesquelles on prend en compte les forces d'inertie permettent de reproduire ce phénomène. La figure 3.8 représente la relation contrainte-déformation pour un élément cubique pour deux vitesses de sollicitation ( $\dot{\epsilon} = 10^{-2} s^{-1}$  et  $10 s^{-1}$ ). Pour  $\dot{\epsilon} = 10 s^{-1}$ , on fait également une simulation sans matrice de masse de manière à ne pas engendrer d'effets d'inertie. On constate alors que l'inertie seule permet de reproduire l'effet de vitesse en compression (résultat classique énoncé par [BJ71] et confirmé par [LM03] retrouvé ici avec le modèle d'endommagement anisotrope).

Le calcul est fait sur un élément cubique à 8 noeuds et 8 points d'intégration (CUB8) avec le code implicite Cast3M. Les résultats sont ceux directement calculés aux points de Gauss. Le modèle utilisé est le modèle d'endommagement anisotrope déjà présenté. Les paramètres du calcul sont  $E = 42 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $a = 2,93 \cdot 10^{-3}$ ,  $A = 5000$  et  $\kappa_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ . L'influence des effets d'inertie est proportionnelle à la masse de la structure et donc à son volume. On choisit ici de modéliser un cube de 10 cm de côté, ce qui correspond bien à l'ordre de grandeur des structures étudiées. Les conditions limites de la modélisation consistent à imposer un déplacement croissant sur une des faces du cube, la face opposée étant bloquée dans la direction du déplacement imposé.

Dans ce cas de figure la résistance est multipliée par un facteur 1,5, ce qui correspond aux résultats expérimentaux. Pour un élément de volume plus important, l'accroissement dynamique de la résistance aurait été plus important. Si on augmente encore davantage la vitesse (à 1000/s par exemple), la résistance de ce même élément atteint environ 300 MPa, ce qui est trop important au vu des résultats expérimentaux. Un résultat plus réaliste pourrait être obtenu en modifiant l'expression de la fonction seuil de manière à y faire apparaître par exemple le premier invariant du tenseur des déformations et ainsi tenir compte de l'aspect confiné du comportement.

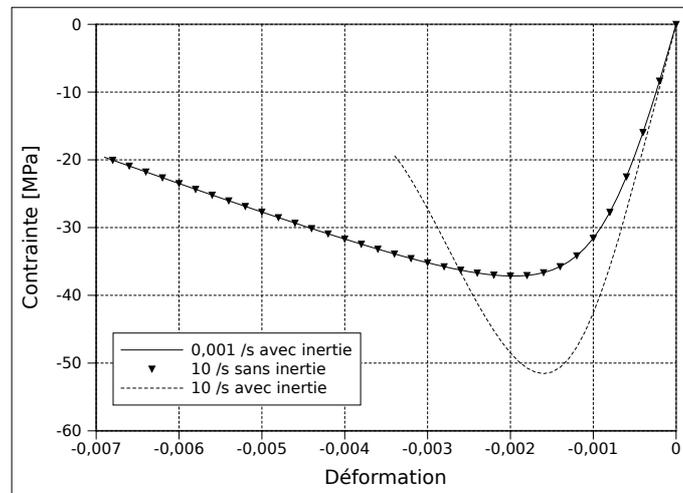


FIG. 3.8: Accroissement de  $r'$  esistance due à la prise en compte des effets d'inertie

En traction, selon cette théorie, il doit se passer le phénomène inverse, les forces d'inertie doivent engendrer un état de contrainte proche de la traction triaxiale, ce qui ne doit pas générer d'augmentation de la résistance.

L'explication de l'effet de vitesse en traction doit donc se chercher ailleurs. Dans la pratique on observe que le faciès de fissuration est complètement différent pour le premier et le second régime. Pour les vitesses de sollicitation lentes, il se développe une macro-fissure au sein du matériau alors que pour les vitesses élevées c'est une multi-fissuration diffuse qui provoque la ruine du matériau. La vitesse de propagation des fissures est inférieure à la vitesse des ondes pour ces vitesses. On empêche alors la première macrofissure de se développer et dans le même temps d'autres micro-fissures apparaissent. On peut parler de rupture retardée. Ce mécanisme de dégradation a été décrit par [DH00a] qui l'a nommé mécanisme d'obscurcissement de défauts.

#### 1.4 Effet de vitesse pour des sollicitations alternées

Comme cela a déjà été évoqué précédemment, en dynamique, la propagation et les réflexions d'ondes jouent un rôle déterminant sur le comportement et l'endommagement des structures. Or on ne dispose d'aucun résultat d'essais sous sollicitations dynamiques alternées. Les essais sur barre de Hopkinson modifiées induisent vraisemblablement un endommagement diffus en compression, mais très délicat à quantifier. En l'absence de données, les seules hypothèses que l'on puisse faire sont de l'ordre de la conjecture. En s'appuyant sur les observations faites en statique sur les directions privilégiées de fissuration du béton, il est probable qu'un endommagement généré en compression n'affecte que peu l'effet de vitesse en traction. Comme pour le cas statique on s'attend à retrouver l'effet unilatéral, et donc à ne pas avoir de dégradation importante des caractéristiques mécaniques. D'autre part les micro-fissures qui se développent en compression étant perpendiculaires à celles dues à une traction, leur potentiel d'obscurcissement au sens de [DH00a] est très faible. Il n'y donc en ce sens pas de raison de considérer un accroissement de la résistance en dynamique du fait de l'existence d'un état pré-endommagé.

Dans l'état actuel des connaissances, le plus raisonnable semble de considérer un effet neutre de l'alternance des sollicitations sur l'effet de la vitesse de déformation.

## 2 Modélisation du comportement et de l'endommagement du béton en dynamique

### 2.1 Modèles élasto-plastiques avec effet de vitesse

Comme il a été montré au paragraphe précédent, l'accroissement de résistance peut s'écrire comme une fonction linéaire par morceaux de la vitesse en échelle logarithmique. De cette constatation sont nées des lois phénoménologiques où la résistance en traction  $f_t^{dyn}$  s'exprime comme une fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  [BV92, MCWS95],

$$\sigma = f_t^{dyn} = f(\dot{\epsilon}) \quad (\sigma > 0) \quad (3.1)$$

L'érouissage  $R(r)$  est rendu dépendant de la vitesse de déformation au travers d'une vitesse de déformation effective  $\dot{\epsilon}_{eff}(R(r, \dot{\epsilon}_{eff}))$ . La définition du domaine élastique devient :

$$f(\sigma, (r, \dot{\epsilon}_{eff})) < 0 \quad (3.2)$$

Cette modélisation présente plusieurs difficultés :

- l'extension de la loi de l'effet de vitesse au cas 3D (tensoriel) s'avère délicat,
- la définition de la vitesse de déformation effective  $\dot{\epsilon}_{eff}$  est sujette à discussion,
- la règle de cohérence intègre désormais un terme lié à l'évolution de la vitesse de déformation effective pendant l'écoulement plastique, ce qui amène lors de la résolution à faire des hypothèses sur l'évolution de la surface de charge.

La modélisation proposée par [PSS08] (visco-élastique, visco-plastique endommageable) propose de reproduire l'effet de vitesse constaté pour les vitesses moyennes de sollicitation (et attribué à l'effet Stefan) par une modélisation visco-élastique du comportement.

### 2.2 Modèles élasto-visco-plastiques

En élasto-visco-plasticité le domaine élastique reste défini comme en elasto-plasticité :

$$f(\sigma, r) < 0 \quad (3.3)$$

mais le domaine plastique est étendu à l'ensemble des points  $f \geq 0$  qui ne vérifient pas cette condition. Ainsi si on nomme  $\mathbf{D}_E$  le domaine élastique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathbf{D}_E &\Leftrightarrow f(\sigma, r) = \sigma_v < 0 \\ \sigma \notin \mathbf{D}_E &\Leftrightarrow f(\sigma, r) = \sigma_v \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\sigma_v$  est la contrainte visqueuse.

Ce domaine n'est donc plus limité aux points sur la surface limite d'élasticité. La règle

d'écoulement définit alors l'évolution dans le temps des déformations permanentes lorsque l'état de contrainte est à l'extérieur de la surface de charge. On perd l'aspect instantané des déformations plastiques. Classiquement, on utilise pour le béton deux modèles visco-plastiques qui se différencient par leur règle d'écoulement et leur loi d'écrouissage :

- le modèle de [Per66] (notamment utilisé par [Cor75, OD82, Gat99]) qui s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.5)$$

avec  $F = f$  comme potentiel d'évolution pour le cas associé et :

$$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{f}{m} \right\rangle^n \quad \text{si } f \geq 0 \quad (3.6)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si } f < 0 \quad (3.7)$$

$m$  et  $n$  sont les deux paramètres de cette loi de viscosité.

- le modèle de [DL72], utilisé par [SKG88, GR03]. Dans ce modèle, le taux de déformations visco-plastique  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp}$  dépend de la différence entre l'état de contrainte viscoplastique  $\boldsymbol{\sigma}$  extérieur à la surface de charge et l'état de contrainte plastique  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  projeté sur la surface de charge (et qui vérifie  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ ),

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \frac{1}{\tau} \mathbf{E}^{-1} : [\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}] \quad \text{si } f > 0 \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = 0 \quad \text{si } f \leq 0 \quad (3.9)$$

avec  $\tau$  un paramètre temps de relaxation.

### 2.3 Modélisation des effets de vitesse par un écrouissage visqueux

C'est l'hypothèse de modélisation retenue par [Ser97]. Ce modèle élasto-plastique endommageable a une variable d'écrouissage dont la nature est celle d'une déformation visqueuse. Cet écrouissage est un écrouissage cinématique non plastique qui vient s'ajouter à l'écrouissage plastique classique de l'élasto-plasticité. La principale différence entre ces deux écrouissages tient au fait que l'écrouissage visqueux apparaît pour une certaine vitesse de déformation (que l'on soit ou pas sur la surface de charge), alors que l'écrouissage plastique n'apparaît que si  $f = 0$ .

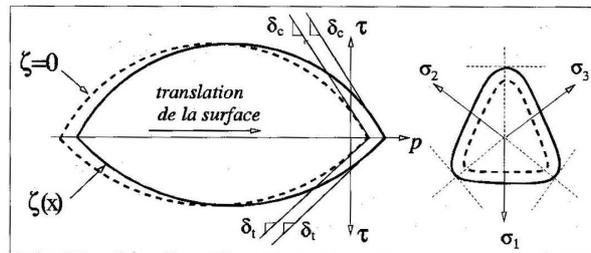


FIG. 3.9: Modèle visco-élastoplastique avec écrouissage visqueux, d'après [Ser97]

Le domaine élastique se trouve translaté par l'écroûissage visqueux (fig 3.9) dans le plan cisaillement ( $\tau$ ) - contrainte hydrostatique ( $p = \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}$ ). On reconnaît ici la forme particulière du domaine d'élasticité de Willam-Warnke à 4 paramètres [WW75].

## 2.4 Modèles visco-endommageables

La prise en compte des effets de vitesse pour les modèles d'endommagement est assez proche de ce que l'on a décrit pour les modèles élasto-plastiques. Deux méthodes sont généralement envisagées :

- Soit le seuil d'endommagement est modifié et exprimé en fonction de la vitesse de déformation. Par exemple, dans [Pon95], l'expression du seuil d'endommagement en déformation  $\kappa_0$  en quasi-statique (égal pour le critère de Mazars en traction et en compression) devient en dynamique :

$$\kappa_0^{dyn} = \alpha_t \kappa_0^{dyn t} + \alpha_c \kappa_0^{dyn c} \quad (3.10)$$

avec

$$\varepsilon_0^{dyn t} = \kappa_0 \left[ 1 + a_t (|\dot{\varepsilon}|)^{b_t} \right] \text{ et } \varepsilon_0^{dyn c} = \kappa_0 \left[ 1 + a_c (|\dot{\varepsilon}|)^{b_c} \right]$$

où  $a_t$ ,  $b_t$ ,  $a_c$  et  $b_c$  sont des coefficients "matériau" respectivement pour les effets de vitesse en traction (t) et en compression (c).

- Soit la loi d'évolution de l'endommagement est modifiée pour autoriser les états de charge à l'extérieur de la surface seuil. Ces modèles sont appelés visco-endommageables [Lad91, DPCL96a, PT05].

Sans viscosité, le domaine d'élasticité est défini comme le domaine pour lequel  $f$ , la fonction critère, est négative. (La fonction est en général reformulée  $f = g(\varepsilon) - D$ ). Ainsi l'endommagement évolue lorsque  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ .

Pour reproduire l'effet de vitesse on introduit une loi visqueuse  $D_v = D(\dot{\varepsilon})$  dans la fonction critère. L'endommagement n'évolue alors plus pour  $f=0$  mais pour  $f = g(\varepsilon) - D = D_v > 0$ . La loi de viscosité classiquement utilisée en visco-endommagement est la loi de Norton-Perzyna .

$$D_v = m \dot{D}^{\frac{1}{n}} \quad (3.11)$$

avec  $m$  et  $n$  les paramètres de viscosité. Avec cette loi de viscosité, la vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  n'est pas bornée et atteint des valeurs très importantes quand la vitesse de déformation augmente. Or il a été montré que la vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  sature à partir d'une certaine valeur de la vitesse de déformation [All01]. D'autres auteurs [AD97] ont donc proposé ou utilisé une loi d'évolution de l'endommagement exponentielle qui borne la vitesse d'endommagement à  $\dot{D}_\infty$  :

$$\dot{D} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\varepsilon}) - D))] \quad (3.12)$$

où  $b$  est un paramètre de viscosité. On verra au chapitre suivant que ce type de loi permet en outre de limiter le phénomène de localisation des déformations.

## 2.5 Un modèle visco-plastique visco-endommageable

Comme on l'a vu au chapitre 1, la prise en compte de l'ensemble des phénomènes non-linéaires observés ne peut se faire qu'avec un modèle couplant plasticité et endommagement. L'extension de ce type de modèle à la dynamique nécessite d'introduire un effet de vitesse pour la plasticité et pour l'endommagement. On présente ici un modèle visco-plastique, visco-endommageable développé par [Gat99, FG02]. Les résultats obtenus avec ce modèle seront utilisés par la suite comme base de comparaison pour les résultats du modèle d'endommagement anisotrope. On pourra ainsi estimer la perte d'information due à la non prise en compte des déformations irréversibles.

La loi d'élasticité de ce modèle fait intervenir un endommagement scalaire :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.13)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$  est la déformation élastique,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  la déformation totale et  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  la déformation plastique.

### 2.5.1 Modèle visco-endommageable

Le modèle d'endommagement utilisé découle du modèle de Mazars décrit au 1.2.2.2. Les surfaces seuil d'endommagement ont été écrites en fonction des déformations élastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  (au lieu des déformations totales) :

$$f_D^{touc}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \kappa_0 - \frac{1}{A_{touc}} \left( \frac{D_{touc}}{1 - D_{touc}} \right)^{1/B_{touc}} \quad (3.14)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I^e \rangle} \quad (3.15)$$

La loi d'évolution de l'endommagement est une loi visqueuse (qui autorise les états de contraintes à l'extérieur de la surface de charge) du type de celle de Norton-Perzyna :

$$\begin{aligned} D_v^t &= m_{D_t} \dot{D}_t^{\frac{1}{n_{D_t}}} \\ D_v^c &= m_{D_c} \dot{D}_c^{\frac{1}{n_{D_c}}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Comme pour le modèle de Mazars, on définit deux endommagements : un en compression  $D_c$  et un en traction  $D_t$ . L'endommagement  $D$  est alors défini comme une combinaison linéaire de ces deux termes :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad (3.17)$$

avec  $\alpha_c$  et  $\alpha_t$  fonctions du type de sollicitation comme pour le modèle de Mazars.

Il existe dans ce modèle deux fonctions seuils qui diffèrent uniquement par les valeurs des paramètres matériaux :  $A_c$  et  $B_c$  en compression et  $A_t$  et  $B_t$  en traction. Il en est de même pour la loi d'évolution avec les paramètres  $m_D$  et  $n_D$  qui prennent des valeurs différentes suivant que l'on est en traction ou en compression. On introduit pour le modèle d'endommagement 9 paramètres en plus de ceux d'élasticité (contre 5 pour le modèle anisotrope). L'influence de ces paramètres est décrite dans [Gat07].

### 2.5.2 Modèle visco-plastique (décrit ici sans endommagement)

Le partie visco-plastique du modèle doit servir à reproduire les phénomènes observés sous un chargement sphérique (déformations permanentes notamment). Les résultats expérimentaux montrent que sous ce type de sollicitations le comportement est sensible à la vitesse.

La surface seuil utilisée est le critère de Gurson modifiée par [NT84] qui s'écrit en fonction des invariants  $J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D$  et  $I_1 = tr \boldsymbol{\sigma}$  :

$$F_{NT}(\boldsymbol{\sigma}, f^*) = \frac{3J_2}{\sigma_M^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{I_1}{2\sigma_m}\right) - (1 + (q_3 f^*)^2) = 0 \quad (3.18)$$

$f^*$  correspond à la porosité du béton,  $\sigma_M$  est la contrainte limite d'élasticité (incluant l'écrasement) dans une matrice fictive sans vides et  $q_1, q_2, q_3$  sont des paramètres du critère. L'influence de ces différents paramètres, est développée dans [Bur97], et rappelée dans [Gat99].

On lui associe le modèle de comportement suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = K tr \boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\epsilon}^{De} \quad (3.19)$$

Les scalaires  $G$  et  $K$ , respectivement modules de cisaillement et de compressibilité tiennent compte de la variation de la porosité via la méthode d'homogénéisation de Mori Takana.

La loi de viscoplasticité est une loi de type Norton-Perzyna :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_{NT}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.20)$$

L'évolution des déformations plastiques équivalentes a la forme visco-plastique écrite par [CS96]. Le multiplicateur plastique prend en compte l'endommagement  $D$  en considérant que l'endommagement correspond à la création des vides, leur augmentation et leur coalescence, et donc à la porosité du matériau  $f^*$  que l'on définit par  $f^* = \frac{1}{2-D}$ . L'expression du multiplicateur d'endommagement, exprimée en fonction de la porosité a pour expression :

$$\dot{\lambda} = \frac{f^*}{1-f^*} \left\langle \frac{\partial F_{NT}}{m_{vp}} \right\rangle^{n_{vp}} \quad (3.21)$$

Lorsque  $f^*$  est nulle, ce qui correspond physiquement au cas où la porosité est entièrement refermée, on retrouve le comportement élastique.

La diminution de la porosité est contrôlée par l'écoulement plastique. L'évolution des micro-vides au sein de la matrice est supposée liée à la déformation volumique irréversible.

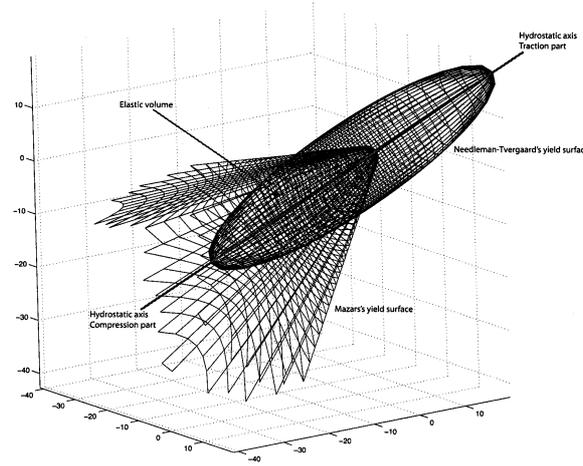
Pour un béton standard la porosité initiale  $f_0^*$  est d'environ 0,3, elle diminue lorsque la trace des déformations plastiques augmentent pour progressivement retrouver le comportement élastique

### 2.5.3 Couplage avec l'endommagement

Le couplage des deux modèles décrits précédemment conduit à la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)[Ktr\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{1} + 2G\boldsymbol{\epsilon}^{eD}] \quad (3.22)$$

où les modules de cisaillement et de compressibilité sont définis par homogénéisation de Mori Tanaka et peuvent être affectés par l'endommagement.



**FIG. 3.10:** Surfaces seuils du modèle de Gatuingt dans l'espace de contraintes, d'après [HGI05]

En traction, seule la surface seuil de Mazaris est activée puisque celle-ci est atteinte beaucoup plus rapidement que celle de Gurson. Dans ce cas il n'y a pas de couplage entre la viscoplasticité et le visco-endommagement.

En compression simple, les deux surfaces entrent en compétition et c'est la valeur des différents paramètres qui déterminera laquelle sera activée. Par exemple si  $\sigma_M$  est suffisamment grand on activera uniquement la surface de Mazaris, dans le cas contraire, on activera d'abord celle de Gurson puis celle de Mazaris. Dans la plupart des cas statiques le comportement sera découplé, on peut néanmoins avoir un comportement couplé en dynamique si les paramètres de viscosité le permettent.

Lorsque les déformations restent constamment négatives (compression hydrostatique), on retrouve le modèle visco-plastique seul.

L'organigramme de calcul est donné en annexe A et la surface seuil dans l'espace des contraintes est représentée figure 3.10

### 2.5.4 Synthèse des équations du modèle

- Elasticité couplé à la porosité et à l'endommagement :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)[Ktr\boldsymbol{\epsilon}^e \mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\epsilon}^{eD}] \quad (3.23)$$

- Module de compressibilité et de cisaillement :

$$K(f^*) = \frac{4K_M G_M (1 - f^*)}{4G_M + 3K_M f^*} \quad G(f^*) = \frac{G_M (1 - f^*)}{1 + \frac{6K_M + 12G_M}{9K_M + 8G_M} f^*} \quad (3.24)$$

avec  $K_M$  et  $G_M$  respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice sans vides.

Modèle visco-endommageable :

Endommagement de traction et de compression :

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad (3.25)$$

Déformation élastique équivalente de Mazars :

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\Sigma \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I \rangle^2} \quad (3.26)$$

Fonctions seuils :

$$F_D^{touc}(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) = (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) - \kappa_0 - \frac{1}{A_{touc}} \left( \frac{D_{touc}}{1 - D_{touc}} \right)^{1/B_{touc}} \quad (3.27)$$

Evolution de l'endommagement (vitesse d'endommagement) :

$$\dot{D}_t = \left( \frac{F_D^t}{m_{Dt}} \right)^{n_{Dt}} \quad \dot{D}_c = \left( \frac{F_D^c}{m_{Dc}} \right)^{n_{Dc}} \quad (3.28)$$

Modèle visco-plastique :

Surface seuil de Gurson :

$$F_{NT}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_M, f^*) = \frac{3J_2}{\boldsymbol{\sigma}_M^2} + 2q_1 f^* \cosh \left( q - 2 \frac{I_1}{2\boldsymbol{\sigma}_m} \right) - (1 + (q_3 f^*)^2) = 0 \quad (3.29)$$

Déformation visco-plastique

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_{NT}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.30)$$

Multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \frac{f^*}{1 - f^*} \left\langle \frac{\partial F_{NT}}{m_{vp}} \right\rangle^{n_{vp}} \quad (3.31)$$

## 2.6 Identification des paramètres

Le tableau de la figure 3.1 résume le processus expérimental d'identification des paramètres. Les différents essais sont désignés par les sigles suivants : T pour Traction, C pour Compression, O pour Oedométrique, H pour Hydrostatique, S pour Statique et D pour Dynamique.

*Endommagement anisotrope et comportement dynamique des ouvrages en béton armé jusqu'à la ruine*

	T. S.	C. S.	T D.	C. O. S.	C.O.D.	C. H. S.
$A_t, B_t$	*					
$A_c, B_c$		*				
$n_{Dt}, m_{Dt}$			*			
$n_{vp}, m_{vp}$					*	
$\sigma_{M0}, q_1, q_2, q_3, k$				*		*
$\kappa_0, E, \nu$	*	*				
$f_0^*, m_{Dc}, n_{Dc}$						

TAB. 3.1: Identification des paramètres du modèle

Six essais sont donc nécessaires pour identifier les quasi-totalité des paramètres du modèle. Les derniers paramètres non encore déterminés  $f_0^*$ ,  $m_{Dc}$ , et  $n_{Dc}$  sont fixés de manière plus arbitraire.

Un jeu de paramètre a été déterminé pour le béton MB50 (un micro béton de résistance en compression de 50 MPa) [Gat99]. Ces paramètres seront utilisés par la suite pour toutes les simulations à l'exception du module de Young que l'on adaptera sur celui du modèle anisotrope. Ils sont donnés dans le tableau 3.2.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$E$	57 GPa	$\nu$	0,2
$\rho$	2500 kg/m <sup>3</sup>	$\kappa_0$	1.10 <sup>-4</sup>
$A_c$	3000	$B_c$	4
$A_t$	20000	$B_t$	1,6
$n_{Dt}$	3	$m_{Dt}$	0,5.10 <sup>-4</sup>
$n_{Dc}$	20	$m_{Dc}$	0,5.10 <sup>-3</sup>
$n_{vp}$	1,5	$m_{vp}$	1.10 <sup>-4</sup>
$\sigma_{M0}$	70 MPa	$q_1$	1,5
$q_2$	0,8	$q_3$	1,0
$k$	15	$f_0^*$	0,3

TAB. 3.2: Paramètres du modèle visco-plastique visco-endommageable pour un béton MB50, d'après [Gat99]

### 3 Extension du modèle d'endommagement anisotrope initial aux chargements dynamiques

Dans ce paragraphe on propose un moyen d'étendre le modèle anisotrope initial décrit au chapitre 1 aux cas de sollicitations dynamiques en prenant en compte l'effet de vitesse constaté expérimentalement.

#### 3.1 Loi d'évolution de l'endommagement

Comme cela a été précédemment décrit au paragraphe 2.4, une manière d'introduire cet effet de vitesse dans un modèle élastique endommageable est de modifier la loi d'évolution de l'endommagement pour la rendre dépendante de la vitesse de sollicitation, ce qui revient à introduire de la viscosité dans l'évolution de l'endommagement.

La loi proposée s'inspire fortement de celle proposée par [AD97] mais est étendue au cas de l'endommagement anisotrope. Pour cela, il est suffisant d'exprimer  $tr\dot{\mathbf{D}}$  plutôt que de calculer une vitesse d'endommagement pour chacune des composantes du tenseur. La loi de viscosité devient :

$$tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D}))] \quad (3.32)$$

On a réécrit ici la fonction seuil d'endommagement pour faire apparaître directement  $tr\mathbf{D}$ . Le domaine élastique est ainsi défini par :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \kappa(tr\mathbf{D}) < 0 \quad \rightarrow \quad f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D} < 0 \quad (3.33)$$

et la fonction  $g$  par

$$g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \kappa^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = aA \arctan \left( \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{a} - \arctan \left( \frac{\kappa_0}{a} \right) \right) \quad (3.34)$$

On rappelle que l'effet de vitesse en compression est d'une part considérablement plus faible qu'en traction et d'autre part qu'il peut être reproduit par la simple considération des effets d'inertie. On désactive donc l'effet de vitesse matériau dû à la loi de viscosité en compression de la manière suivante :

$$\mathcal{H}(tr\boldsymbol{\varepsilon})tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D}))] \quad (3.35)$$

avec  $\mathcal{H}(\cdot)$  la fonction de Heaviside qui vaut 1 si  $tr\boldsymbol{\varepsilon}$  est positif (ce qui est le cas en traction) et 0 si  $tr\boldsymbol{\varepsilon}$  est négatif (donc en compression). Ainsi en traction ou pour tout chargement à déformation hydrostatique positive ( $tr\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ ) on retrouve la loi à effet retard (eq. 3.32). En compression ou pour tout autre chargement à  $tr\boldsymbol{\varepsilon} < 0$ , on a  $f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D} = 0$ , et on retrouve le modèle d'endommagement initial sans effet de vitesse.

### 3.2 Bilan des équations du modèle d'endommagement anisotrope pour sollicitations dynamiques

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^D (1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1-\text{tr}\mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1}$$

$$f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr}\mathbf{D} \rightarrow \begin{array}{l} * f < 0 : \text{élastique} \\ * f = D_v \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{array}$$

$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) \text{tr}\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr}\mathbf{D}))]$$

La condition sur la positivité de la dissipation  $\dot{\mathbf{D}}$  reste vérifiée avec cette nouvelle loi d'évolution. En effet l'endommagement n'évolue que pour  $f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr}\mathbf{D} \geq 0$  et  $\text{tr}\dot{\mathbf{D}}$  est strictement positif dans ce cas.

### 3.3 Schéma numérique d'intégration

On préfère utiliser un schéma implicite pour intégrer la loi de comportement car il a été montré [GD06, GDC<sup>+</sup>08] qu'un schéma explicite pouvait mener à des oscillations numériques.

Désormais, l'endommagement évolue pour  $f = D_v > 0$ . Invertissons tout d'abord la relation (3.32) afin d'exprimer directement  $f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr}\mathbf{D}$  en fonction de  $\text{tr}\dot{\mathbf{D}}$  :

$$f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \text{tr}\mathbf{D} = -\frac{1}{b} \frac{\text{tr}\dot{\mathbf{D}} - \dot{D}_\infty}{\dot{D}_\infty} = D_v \quad (3.36)$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \text{tr}\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{b} \frac{\text{tr}\ddot{\mathbf{D}}}{\dot{D}_\infty - \text{tr}\dot{\mathbf{D}}} \quad (3.37)$$

On discrétise l'équation 3.37, en calculant les dérivées au temps  $n+1$  sous la forme :

$$\text{tr}\ddot{\mathbf{D}}_{n+1} \approx \frac{\text{tr}\dot{\mathbf{D}}_{n+1} - \text{tr}\dot{\mathbf{D}}_n}{\Delta t} \quad (3.38)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \approx \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n}{\Delta t} \quad (3.39)$$

où  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , le pas de temps. En remplaçant les différentes dérivées de 3.37 par leurs valeurs discrétisées, on obtient le polynôme du second degré suivant, dont les racines sont les valeurs de  $\text{tr}\dot{\mathbf{D}}_{n+1}$  :

$$(\text{tr}\dot{\mathbf{D}}_{n+1})^2 - (g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \dot{D}_\infty + \frac{1}{b\Delta t}) \text{tr}\dot{\mathbf{D}}_{n+1} + g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \dot{D}_\infty + \frac{\text{tr}\dot{\mathbf{D}}_n}{b\Delta t} = 0 \quad (3.40)$$

Tous les termes de cette équation sont connus, puisque  $b$  et  $\dot{D}_\infty$  sont des paramètres matériels, que  $\Delta t$  est fixé pour un calcul donné et qu'on connaît  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  au début du pas de temps ce qui nous permet de calculer  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$ .

La dérivée de la fonction  $g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$  (eq. 3.34) est :

$$g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{a}\right)^2} \quad (3.41)$$

La solution qui permet de retrouver la loi quasi-statique  $\text{tr} \dot{\boldsymbol{D}}_{n+1} = g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1}$  quand  $b$  tend vers 0 est :

$$\text{tr} \dot{\boldsymbol{D}}_{n+1} = \frac{1}{2} B_{n+1} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{C_{n+1}^2}{B_{n+1}^2} \left( 1 + \frac{\text{tr} \dot{\boldsymbol{D}}_n}{b \Delta t C_{n+1}} \right)} \right] \quad (3.42)$$

avec

$$B_{n+1} = g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} + \dot{D}_\infty + \frac{1}{b \Delta t} \quad (3.43)$$

et

$$C_{n+1} = g'(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} \dot{D}_\infty \quad (3.44)$$

On calcule alors la valeur de  $\text{tr} \boldsymbol{D}_{n+1}$  :

$$\text{tr} \boldsymbol{D}_{n+1} = \text{tr} \boldsymbol{D}_n + \text{tr} \dot{\boldsymbol{D}}_{n+1} \Delta t \quad (3.45)$$

puis le multiplicateur d'endommagement  $\Delta \lambda$  :

$$\Delta \lambda = \frac{\text{tr} \boldsymbol{D}_{n+1} - \text{tr} \boldsymbol{D}_n}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \quad (3.46)$$

et on met finalement à jour le tenseur d'endommagement :

$$\boldsymbol{D}_{n+1} = \boldsymbol{D}_n + \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^2 \quad (3.47)$$

La procédure d'intégration de la loi de comportement (à anisotropie induite de l'endommagement, avec effet de vitesse) se fait ainsi toujours sans itérations locales (i.e. sans schéma de Newton).

### 3.4 Identification des paramètres

On cherche à identifier  $b$  et  $\dot{D}_\infty$ , les deux paramètres de la loi de viscosité. La valeur du paramètre  $\dot{D}_\infty$  a un sens physique, puisque c'est la vitesse de saturation de la vitesse d'endommagement, mais aucun essai expérimental n'a permis de la déterminer pour le béton. Néanmoins, pour des raisons de régularisation de la solution, on souhaite borner la vitesse d'endommagement pour des vitesses de l'ordre de  $\dot{\varepsilon} = 200 \text{ s}^{-1}$  au maximum.

Le paramètre  $b$  joue sur l'allure de la courbe d'effet de vitesse. Vu la dispersion expérimentale (cf. fig 3.2), c'est un paramètre de viscosité quasiment impossible à mesurer directement. On va simplement chercher à reproduire le plus fidèlement l'effet de vitesse tout en s'assurant

de saturer  $\dot{D}_\infty$  pour les vitesses de déformations importantes.

Dans un premier temps on cherche à déterminer la valeur du produit  $b \times \dot{D}_\infty$ . Réécrivons la loi de viscosité en fonction de  $f$ , la fonction seuil :

$$tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b \times f)]$$

Quand  $f$  tend vers 0, ce qui correspond aux cas où la déformation ou la vitesse de déformation est faible, on a :

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{d tr\dot{\mathbf{D}}}{d f} = \lim_{f \rightarrow 0} b \dot{D}_\infty \exp(-bf) \simeq b \dot{D}_\infty \quad (3.48)$$

On choisira donc la valeur du produit en question de manière à avoir un effet de vitesse très limité pour  $\dot{\epsilon} < 1 \text{ s}^{-1}$ .

La valeur  $b \dot{D}_\infty = 50000$  satisfait le critère énoncé. On va donc faire varier les deux paramètres  $b$  et  $\dot{D}_\infty$  et de manière à garder ce produit constant. On présente ici les résultats pour 3 couples de valeurs :

- $b = 0.1$  et  $\dot{D}_\infty = 500000 \text{ s}^{-1}$
- $b = 1$  et  $\dot{D}_\infty = 50000 \text{ s}^{-1}$
- $b = 2$  et  $\dot{D}_\infty = 25000 \text{ s}^{-1}$

avec comme autres paramètres du modèle les paramètres du modèle initial (quasi-statique) du tableau 1.1 du chapitre 1 :  $E = 42 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $a = 2,93 \cdot 10^{-3}$ ,  $A = 5000$  et  $\kappa_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ .

La figure 3.4 représente la loi comportement  $\sigma - \epsilon$  calculée numériquement avec Cast3M pour les différents couples de paramètres mentionnés ci-dessus et pour différentes vitesses de sollicitation. Le cas test consiste en un essai de traction piloté en déplacement sur un élément cubique à 8 points de Gauss. On fait varier la vitesse du déplacement de manière à obtenir des vitesses de sollicitations allant de  $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  à  $200 \text{ s}^{-1}$ .

Pour chacun des couples de valeurs considérés on trace également  $tr\dot{\mathbf{D}}$  fonction de  $f$  (fig. 3.12) pour étudier la saturation de la vitesse d'endommagement.

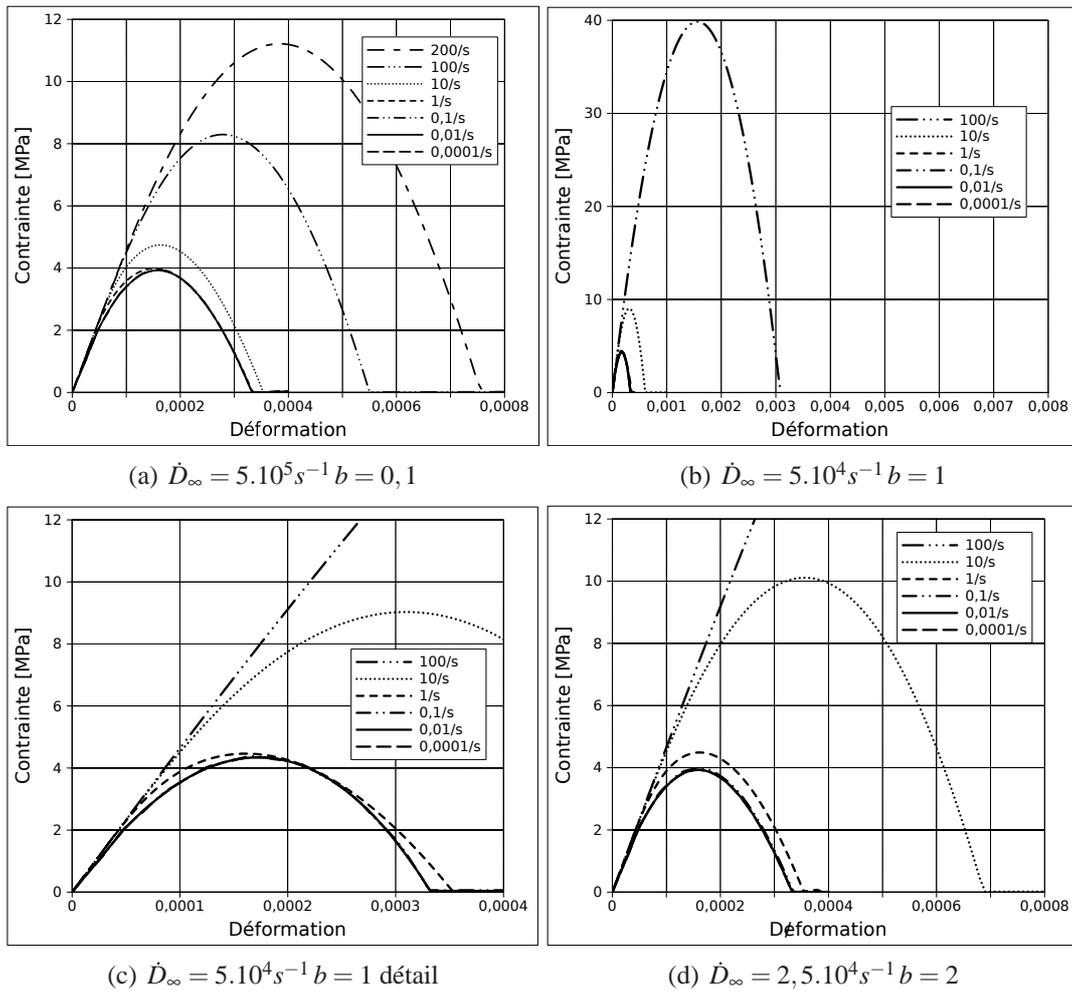


FIG. 3.11: Influence des paramètres de viscosité sur l'effet de vitesse

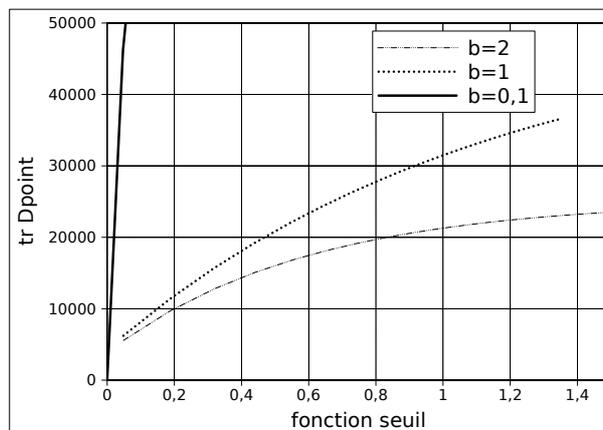


FIG. 3.12: Saturation de la vitesse d'endommagement pour  $\dot{\epsilon} = 100 s^{-1}$  à  $b \dot{D}_\infty = 50000 s^{-1}$  constant

On observe que plus  $\dot{D}_\infty$  est grand et plus la résistance de pic est faible pour les fortes vitesses de sollicitation. Pour ce qui est du "quasi-statique" et des faibles vitesses de déformation (jusqu'à  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ ) la réponse est la même quels que soient les paramètres utilisés. On vérifie bien que c'est la valeur du produit  $b \times \dot{D}_\infty$  qui gouverne la réponse pour les faibles vitesses et non la valeur de chacun des paramètres. A partir des résultats précédents, on choisit de retenir le couple de valeurs :  $b = 1$ ,  $\dot{D}_\infty = 50000 \text{ s}^{-1}$  qui présente le meilleur compromis vis à vis des critères que nous avons fixés.

### 3.5 Influence de la viscosité sur la dissipation intrinsèque

Le visco-endommagement augmente la déformation à la rupture du béton en même temps que sa résistance en traction. On modifie donc la valeur de l'énergie dissipée par endommagement quand la vitesse de déformation augmente. La figure 3.13 représente l'évolution de la dissipation intrinsèque pour les différents couples de valeurs étudiés et les différentes vitesses de sollicitations.

On constate que pour le troisième couple de valeur ( $b=2$ ) la dissipation devient excessive et dépasse même la dissipation à la rupture en compression. Cette nouvelle information justifie encore d'avantage le choix précédemment effectué quant aux valeurs de  $b$  et  $\dot{D}_\infty$ . Pour les valeurs des paramètres retenus, la dissipation est multipliée par 3 à  $\dot{\epsilon} = 100 \text{ s}^{-1}$  et par 7 pour  $\dot{\epsilon} = 200 \text{ s}^{-1}$ , ce qui reste raisonnable en l'absence de données expérimentales qui pourraient justifier notre choix. On constate également que l'augmentation de la dissipation est plus lente lorsque la vitesse de déformation s'accroît.

### 3.6 Désactivation des dommages en dynamique

Le seuil d'endommagement du modèle de comportement proposé  $f = g(\hat{\epsilon}) - \text{tr}\mathbf{D}$  est fonction de l'état d'endommagement au travers du terme  $\text{tr}\mathbf{D}$ , ce qui, comme cela a été montré au chapitre 1, ne permet pas de reproduire de manière satisfaisante le comportement du béton sous sollicitations alternées. Ce seuil est donc modifié comme cela avait été fait précédemment en faisant intervenir l'endommagement actif,  $d_{act}$ .

De plus, la prise en compte de l'effet de vitesse via la loi de visco-endommagement fait également intervenir le terme  $\text{tr}\mathbf{D}$ , ce qui implique que la vitesse d'endommagement  $\text{tr}\dot{\mathbf{D}}$  dépend elle aussi de l'état d'endommagement. En conséquence, comme cela est montré sur la figure 3.14, un endommagement initial en compression augmente de manière importante la résistance ultime du béton en traction dynamique ( $f_t^{dyn}$ ) : l'effet de vitesse est plus important pour un chargement alterné que pour un chargement de traction monotone.

Pour cette figure, l'endommagement atteint en compression au moment de la décharge est égal à 0,5 dans les deux directions perpendiculaires au chargement et la vitesse de sollicitation en traction est de  $10 \text{ s}^{-1}$ . Les paramètres du modèle sont les mêmes que ceux utilisés précédemment pour la partie statique et les deux paramètres de viscosité sont ceux que l'on a identifiés :  $b = 1$ ,  $\dot{D}_\infty = 50000 \text{ s}^{-1}$ . Le calcul est mené sur un unique élément cubique et est piloté en déplacement.

Cette modélisation ne paraît pas réaliste d'un point de vue physique et on propose pour

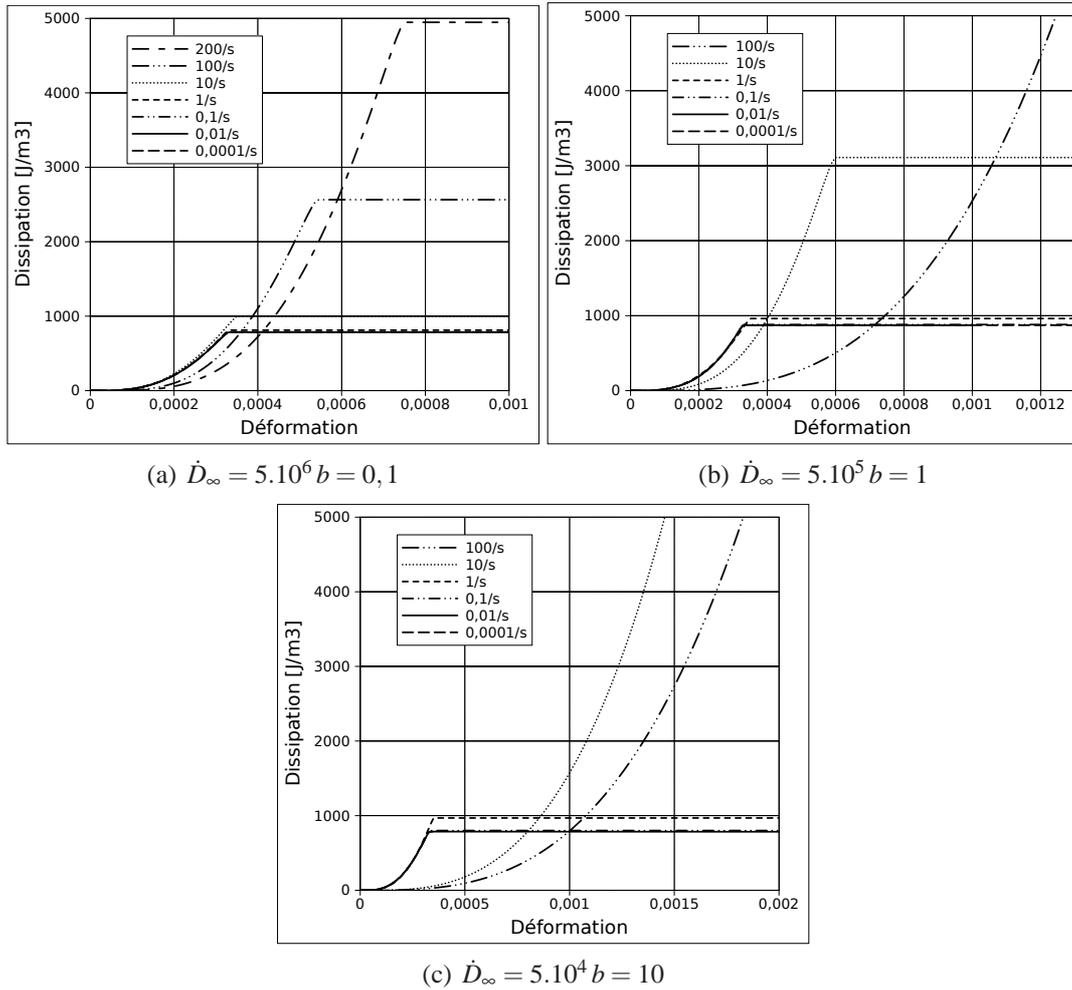


FIG. 3.13: Influence des paramètres de viscosité sur la dissipation intrinsèque  $\mathcal{D} = \int \mathbf{Y} : \dot{\mathbf{D}} dt$

remédier au problème de remplacer  $\text{tr}\mathbf{D}$  par  $d_{act}$  dans l'expression de la fonction seuil comme cela a déjà été fait pour le modèle statique (paragraphe 4.4 du chapitre 1) et dans la loi d'évolution de l'endommagement. On rappelle l'expression de  $d_{act}$ , l'endommagement actif :

$$d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}$$

La nouvelle loi d'évolution de l'endommagement avec effet de vitesse et désactivation des dommages en dynamique a pour expression :

$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_{act} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act}))] \quad (3.49)$$

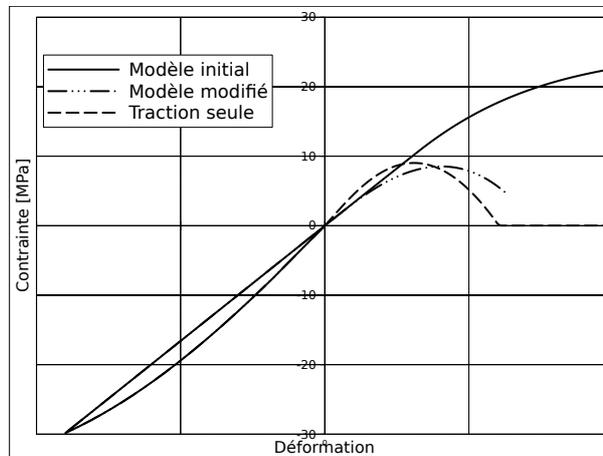
Le modèle de comportement présenté se réécrit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}^D (1-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \right]^D + \frac{(1-2\nu)}{3E} \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1-\text{tr}\mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1}$$

$$f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act} \rightarrow \begin{array}{l} * f < 0 : \text{élastique} \\ * f = D_v \geq 0 : \text{visco-endommagement} \end{array}$$

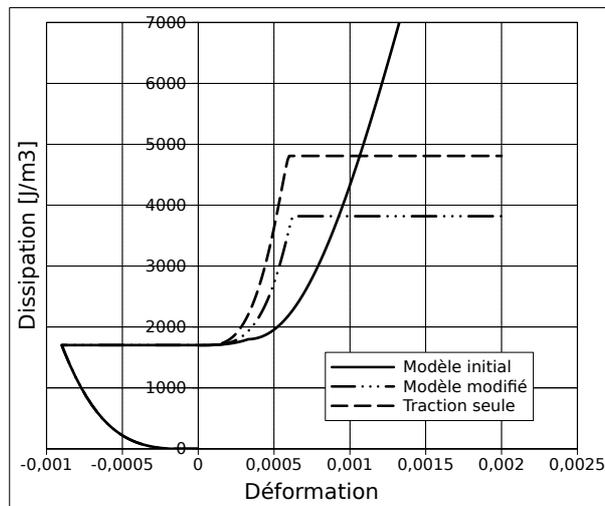
$$\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_{act} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act}))]$$

Rappelons que l'écriture avec l'endommagement actif ne change pas la réponse en traction monotone et en compression monotone. Le résultat obtenu avec ce nouveau modèle est également présenté sur la figure 3.14. La réponse n'est pas identique à celle d'un chargement en traction simple. Cela est dû au fait que la restauration de la raideur n'est que partielle, comme cela a déjà été évoqué au chapitre 1 pour le cas quasi-statique. Les résistances sont néanmoins égales, seules les valeurs de la déformation au pic est modifiée.



**FIG. 3.14:** Influence de la désactivation des dommages sur la résistance en traction pour un chargement alterné en dynamique (compression jusqu'à  $D=0,5$  puis traction à  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}= 10.s^{-1}$ )

On trace par ailleurs l'évolution de la dissipation intrinsèque pour ce même cas de chargement (fig. 3.15). Signalons que sur cette figure l'origine de la courbe en traction monotone a été décalée au niveau de la dissipation après décharge pour un chargement alterné de manière à pouvoir comparer les évolutions.



**FIG. 3.15:** Influence de la désactivation des dommages sur la dissipation pour un chargement alterné en dynamique -  $\dot{\epsilon} = 10.s^{-1}$

Le modèle en  $trD$  conduit à une dissipation très importante comparée à la valeur attendue qui est celle de la traction simple monotone (après décalage). Avec la prise en compte de la désactivation des dommages la dissipation est du même ordre de grandeur que cette dernière.

## 4 Application à l'essai de traction dynamique par écaillage

Le but de cette nouvelle application numérique est triple :

- Montrer que la prise en compte des effets de vitesse joue un rôle important sur la réponse d'un calcul de structure.
- Montrer que la désactivation des dommages (ou prise en compte de la désactivation des dommages) est également nécessaire pour une modélisation réaliste.
- Montrer l'influence de la viscosité sur la dissipation totale.

Pour cela on se propose de reproduire numériquement l'essai de traction dynamique par écaillage mis au point par [KB01].

### 4.1 Description de l'essai

Le schéma de principe de cet essai est présenté sur la figure 3.16.

### 4.1.1 Dispositif expérimental

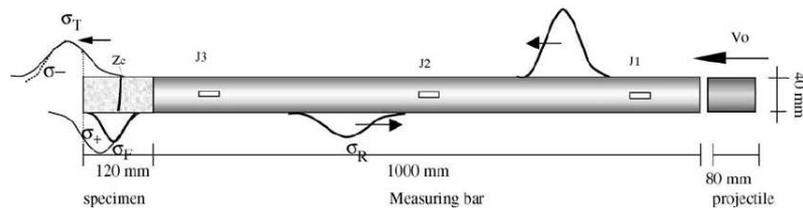


FIG. 3.16: Schéma de principe de l'essai de traction dynamique par écaillage d'après, [KB01]

Une éprouvette cylindrique de béton est impactée sur l'une de ses faces par une barre (dite de mesure) elle-même impactée par un projectile, ce qui engendre une onde de compression dans l'éprouvette. En atteignant la seconde face, libre, de l'éprouvette, l'onde se réfléchit en une onde de traction de même intensité qui mène à la ruine de l'éprouvette du fait de la dissymétrie du comportement du béton. Cette éprouvette a un diamètre de 4 cm pour une longueur de 12 cm. Le chargement expérimental est connu (figure 3.17) sous la forme de l'évolution la vitesse de la face impactée en fonction du temps. Le maximum de ce chargement est atteint au bout de 0,03 ms. Avec une masse volumique  $\rho$  de  $2400 \text{ kg/m}^3$  et une module d'Young  $E$  de 42 GPa, la vitesse des ondes dans le béton (calculée par  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ) est de 4183 m/s, ce qui signifie que le maximum du chargement atteint la face libre de l'éprouvette 0,059 ms après l'impact.

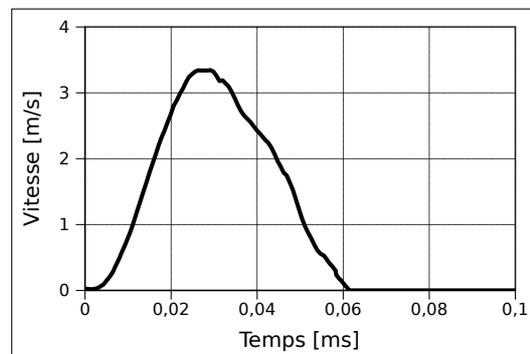


FIG. 3.17: Chargement expérimental pour l'essai de traction dynamique

Cet essai conduit à la ruine de l'éprouvette par l'apparition d'une macro-fissure qui coupe l'éprouvette en deux morceaux. Le résultat expérimental dont on dispose est la position cette fissure (fig. 3.18), située à 5,42 cm de la face impactée. La position de la zone de rupture dépend d'une part du chargement (intensité et durée), de la vitesse des ondes, mais également de la résistance en traction du béton. En effet, lors de la réflexion, l'onde de traction et l'onde de compression se superposent, ce qui conduit même pendant un court instant à un état de contraintes nulles (cf fig. 3.19 qui représente l'évolution de la contrainte au cours du temps

## Position expérimentale de la rupture

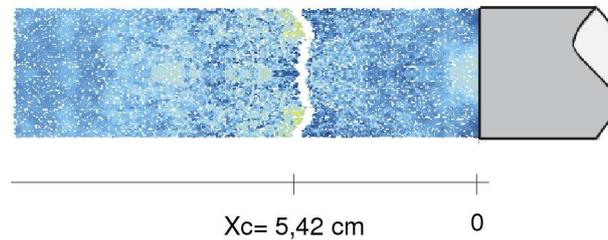


FIG. 3.18: Résultat d'un essai de traction dynamique

pour un calcul en élasticité). La rupture n'a donc pas lieu expérimentalement au niveau de la face libre, mais plus loin, quand la contrainte de traction devient suffisamment importante pour dépasser celle de compression et atteindre la valeur de la résistance du béton. L'effet de vitesse a donc un rôle prépondérant dans cet essai puisque c'est lui qui détermine la valeur de la résistance en traction, et de ce fait la position de la zone de rupture. D'autre part le chargement incident en compression n'est pas neutre vis à vis de l'endommagement latéral. La valeur de la contrainte calculée en élasticité est de l'ordre de 30MPa, soit une valeur assez proche de la résistance du béton en compression. La désactivation des dommages modifie a priori dans ce cas la réponse du calcul numérique. Cet essai peut nous permettre de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse précédemment formulée sur la relation entre l'état d'endommagement et l'effet de vitesse en traction.

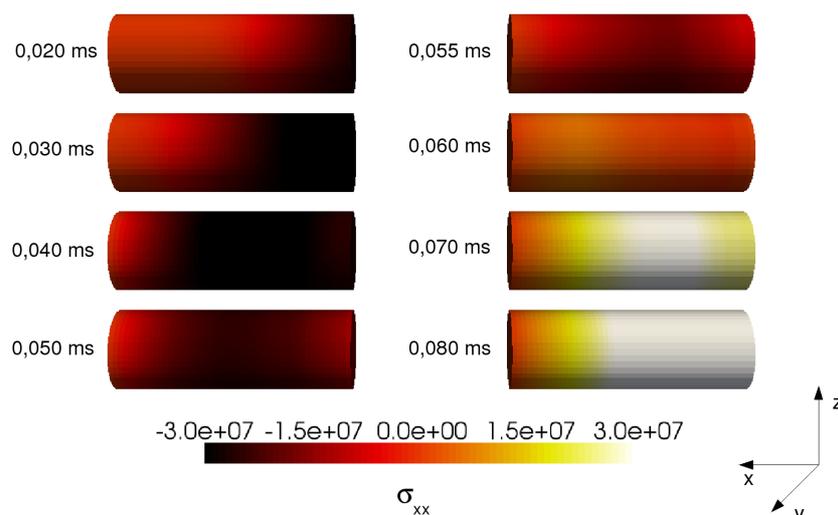


FIG. 3.19: Evolution de la contrainte longitudinale pour un calcul élastique

### 4.1.2 Paramètres de la simulation numérique

Le maillage utilisé est celui présenté sur la figure 3.20. Il est composé de 13632 éléments prismatiques à 6 points de Gauss. La discrétisation spatiale dans la longueur en 48 éléments conduit à une taille d'éléments suivant l'axe longitudinal  $x$  de 0,25 cm.

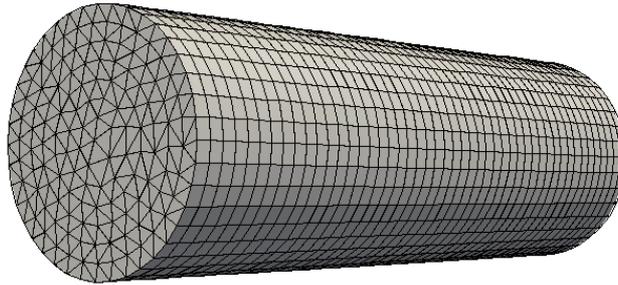


FIG. 3.20: Maillage Eléments finis 3D pour la simulation de l'essai de traction dynamique

On ne peut dans le logiciel utilisé (le code implicite Cast3m) imposer qu'un chargement en déplacement, aussi on intègre le chargement expérimental en vitesse pour obtenir un déplacement en fonction du temps (fig 3.21).

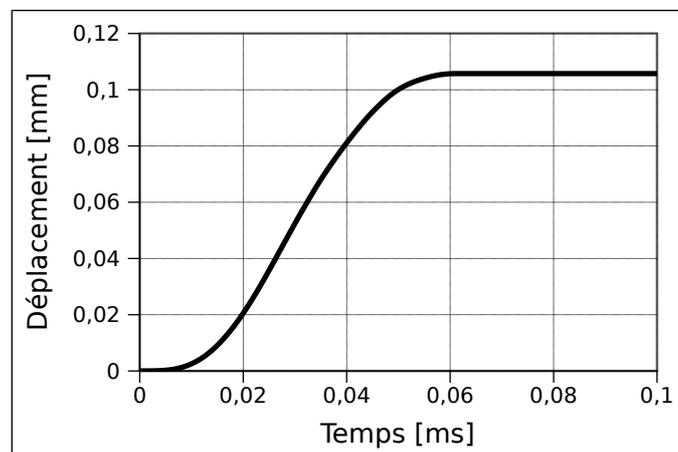


FIG. 3.21: Chargement imposé numériquement

On compare les résultats obtenus avec quatre versions différentes du modèle : le modèle initial (fonction critère en  $tr\mathbf{D}$ , sans effet de vitesse), le modèle initial avec désactivation des dommages (fonction critère en  $d_{act}$ , sans effet de vitesse), celui avec un effet de vitesse en traction (fonction critère en  $tr\mathbf{D}$ ) et enfin le modèle avec effet de vitesse et désactivation des dommages ( $d_{act}$ ). On les désigne par la suite par les abréviations suivantes :

Modèle	Désignation
Initial	INI
Initial avec désactivation des dommages	INI- $d_{act}$
Dynamique sans désactivation des dommages	DYN
Dynamique avec désactivation des dommages	DYN- $d_{act}$

**TAB. 3.3:** Différentes versions du modèle d'endommagement anisotrope

Les paramètres du modèle, déjà utilisés auparavant, sont rappelés ici :

Paramètre	Valeur
$E$	42 GPa
$\nu$	0,2
$\kappa_0$	$5 \cdot 10^{-5}$
$A$	5000
$a$	$2,93 \cdot 10^{-4}$
Si modèle avec effet de vitesse	
$b$	1
$\dot{D}_\infty$	$50000 \text{ s}^{-1}$

**TAB. 3.4:** Paramètres du modèle d'endommagement anisotrope

Aucune condition aux limites autre que le déplacement de la face impactée n'est imposée. On remarque néanmoins que l'intégration de la vitesse conduit à imposer un déplacement constant lorsque la vitesse redevient nulle alors qu'expérimentalement, l'éprouvette est laissée complètement libre, ce qui est numériquement impossible avec le code de calcul utilisé.

## 4.2 De la nécessité de l'effet de vitesse en calcul de structures

Afin de mettre en évidence les différences entre les versions du modèle étudiées, on compare les cartes d'endommagement suivant l'axe  $x$  (la direction de la propagation de l'onde). Ces cartes nous permettent de localiser l'endroit où la rupture est prévue et ainsi d'interpréter les effets de chacune des modifications apportées au modèle initial.

Pour toutes les versions du modèle présentées, l'évolution de l'endommagement est identique en compression (état caractérisé par  $tr\boldsymbol{\epsilon} < 0$ , donc sans autre effet de vitesse que celui dû à l'inertie). L'endommagement est dans ce cas porté par les directions perpendiculaires au chargement. L'éprouvette étant un cylindre d'axe  $x$ , l'endommagement est égal suivant n'importe lequel des axes perpendiculaires à  $x$  ( $D_{yy} = D_{zz}$ ). On représente la carte d'endommagement suivant  $y$  (donc équivalente à celle suivant  $z$ ) à la fin du calcul (fig 3.22). Signalons

par ailleurs que l'endommagement n'évolue plus dans cette direction à partir du moment où l'onde se réfléchit, c'est alors  $D_{xx}$  qui évolue en traction.



FIG. 3.22: Carte d'endommagement latéral ( $D_{yy} = D_{zz}$ ) à 0,06 ms

L'endommagement maximal atteint en compression est loin d'être négligeable, puisque de l'ordre de 0,75. Cet endommagement n'est pas uniforme, il est notamment nul à proximité du bord libre, là où les ondes de traction et de compression se superposent au moment de la réflexion.

#### 4.2.1 Calcul avec le modèle anisotrope initial (INI)

On trace l'évolution de l'endommagement pour le modèle initial, donc sans effet de vitesse ni désactivation des dommages.

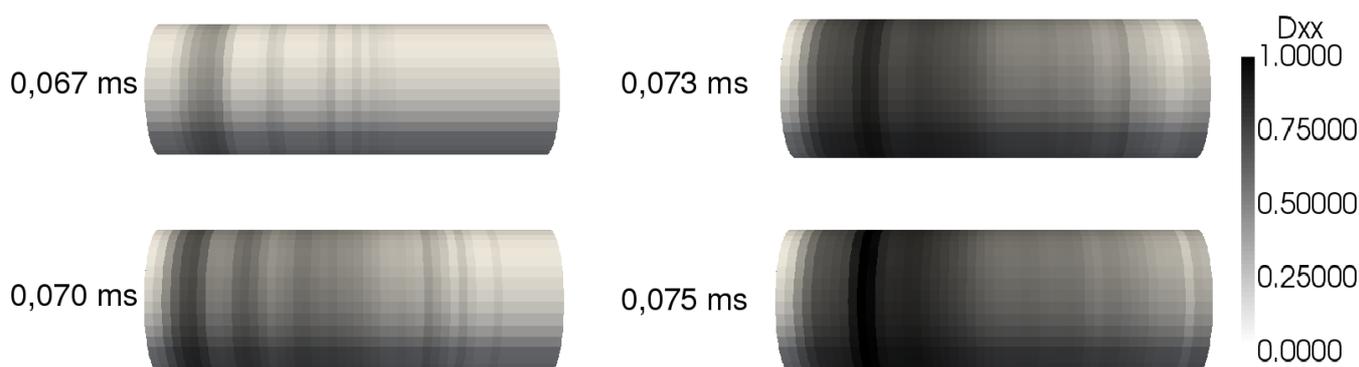


FIG. 3.23: Evolution de l'endommagement suivant  $x$  pour le modèle INI à différents instants

L'endommagement critique (que l'on interprète comme correspondant la zone de rupture de l'éprouvette) est localisé à proximité du bord libre aux alentours de 0,075 ms (pour  $x \simeq 10$  cm). La rupture n'a pas lieu à l'endroit où l'on atteint la résistance en traction pour la première fois, qui a lieu aux environs de 0,06 ms à une distance plus grande du bord libre (c.f. fig 3.24).

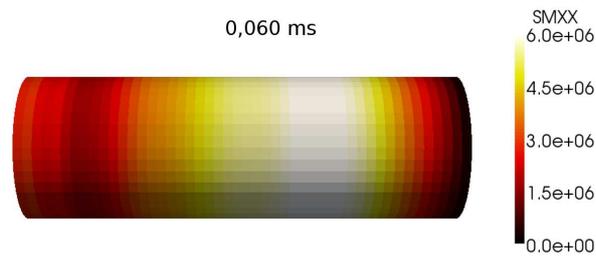


FIG. 3.24: Contrainte de traction suivant  $x$  pour un calcul en élasticité

On constate que la rupture survient lorsque l'on remplit simultanément deux conditions : on atteint la résistance en traction et l'endommagement en compression ( $D_{yy}$ ) est nul ou faible. On a vu que sans la prise en compte des effets unilatéraux, on atteignait le seuil d'endommagement en traction après un chargement en compression pour une déformation beaucoup plus grande que pour un chargement en traction simple. C'est ce phénomène qui est illustré ici. La non prise en compte des effets unilatéraux est donc préjudiciable pour cette simulation puisque la rupture n'a lieu ni au bon endroit, ni au bon moment.

#### 4.2.2 Calculs avec le modèle anisotrope initial avec désactivation des dommages (INI- $d_{act}$ )

Comme on pouvait s'y attendre, la prise en compte des effets unilatéraux conduit à une rupture plus précoce et dans une zone plus éloignée du bord libre, ce qui correspond d'avantage au résultat du calcul élastique présenté précédemment. La rupture a lieu à 0,66 ms à environ 7,25 cm de la face libre (de gauche) (cf. fig. 3.25).

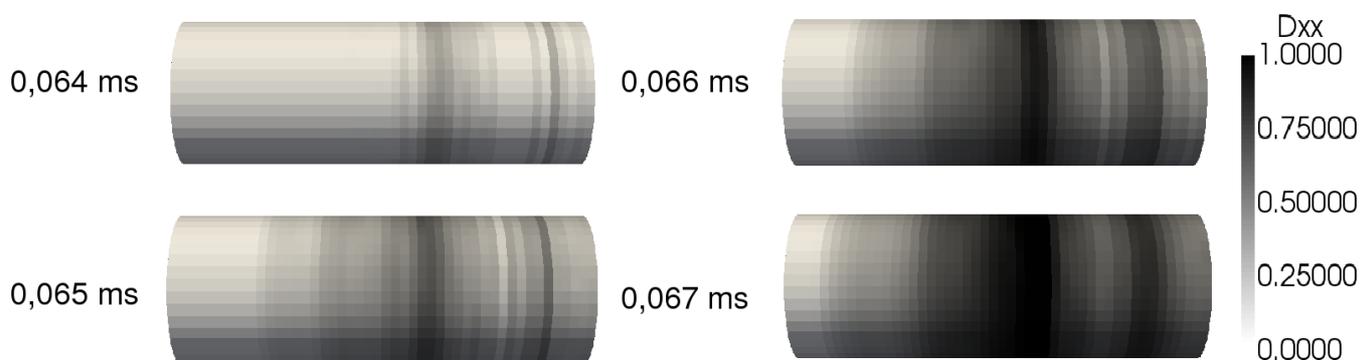


FIG. 3.25: Evolution de l'endommagement suivant  $x$  pour le modèle INI- $d_{act}$

### 4.2.3 Calcul avec le modèle anisotrope avec effet de vitesse (DYN)

La prise en compte de l'effet de vitesse en traction doit logiquement conduire à une rupture plus tardive dans une zone plus éloignée du bord libre (à  $x \simeq 1,5$  cm). C'est ce que confirme la figure 3.26.

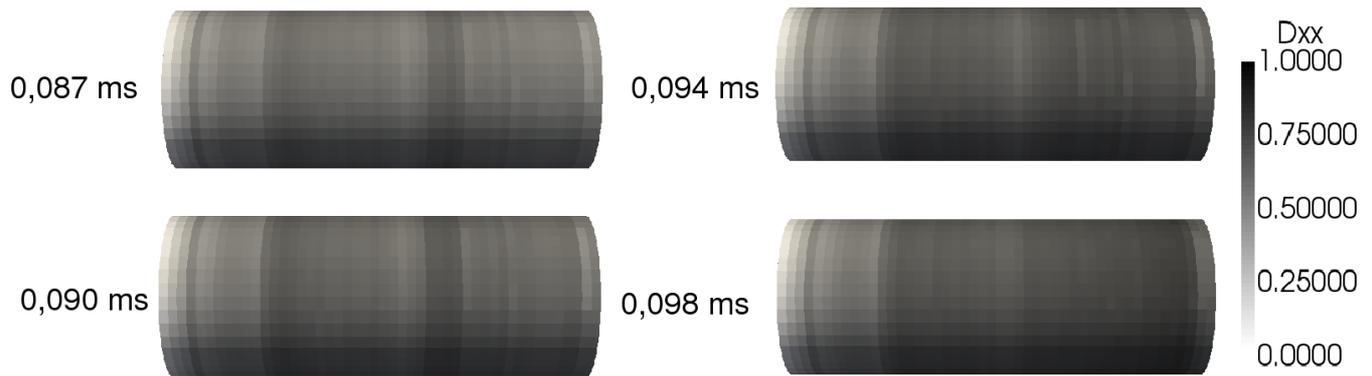


FIG. 3.26: Evolution de l'endommagement suivant  $x$  pour le modèle DYN

L'endommagement maximum se situe à proximité du bord impacté et apparaît plus tard que sans effet de vitesse.

### 4.2.4 Calcul avec le modèle anisotrope avec effet de vitesse et désactivation des dommages (DYN- $d_{act}$ )

La désactivation des dommages en dynamique permet, nous l'avons vu, de retrouver pour un chargement alterné l'effet de vitesse identifié en traction simple. Cet effet induit une résistance à la rupture plus faible et de ce fait, la rupture de l'éprouvette arrive plus tôt et dans une zone plus proche de la face libre (c.f. fig. 3.27).

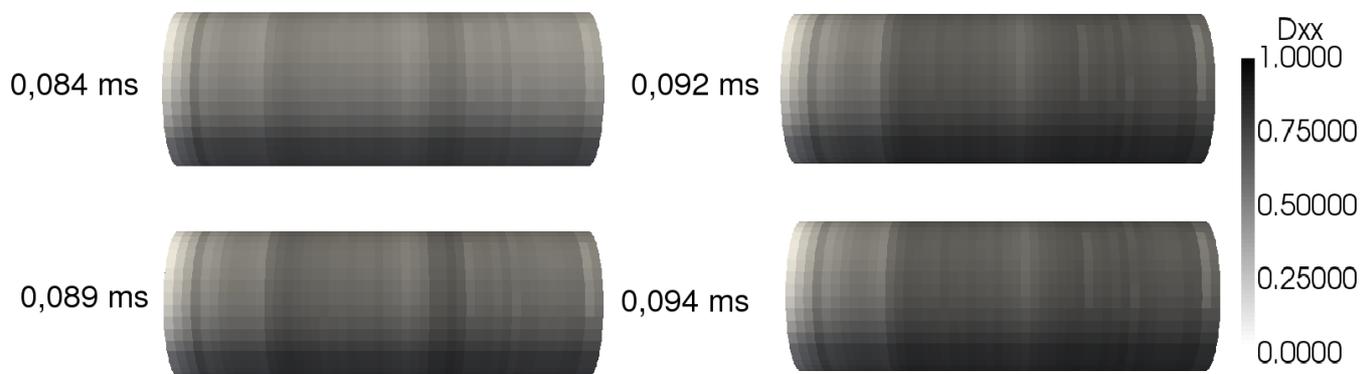


FIG. 3.27: Evolution de l'endommagement suivant  $x$  pour le modèle DYN- $d_{act}$

C'est cette modélisation qui est la plus réaliste. La non concordance exacte avec les résultats expérimentaux vient du fait que le comportement du matériau n'est pas identifié et que les paramètres du modèle sont ceux d'un béton quelconque qui ne correspond pas forcément à celui de l'expérience. Par exemple si l'on modifie la masse volumique  $\rho$ , on observe un changement de la localisation de la fissure expérimentale (cf. figure 3.28 à  $x = 5,7$  cm). Le module d'Young a bien entendu un rôle similaire (inverse), la célérité des ondes étant  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

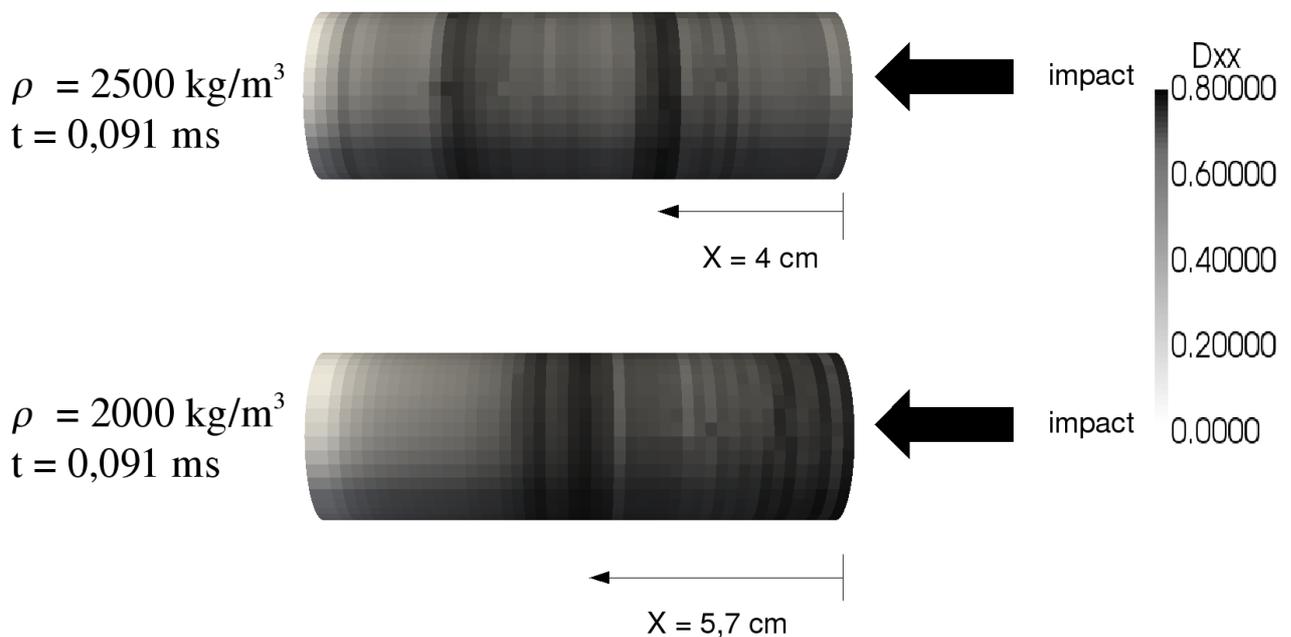


FIG. 3.28: Influence de la masse volumique sur la localisation de la fissuration en dynamique

### 4.3 Influence de la viscosité sur la dissipation intrinsèque

#### 4.3.1 Localisation des zones de dissipations maximales

On trace pour les mêmes instants que pour les cartes d'endommagement précédentes les cartes de dissipation volumique pour les 4 versions du modèle (fig. 3.29).

Le premier constat est que les valeurs maximales atteintes varient de manière importante suivant les modèles utilisés, de  $3000 \text{ J/m}^3$  pour le modèle INI à  $22000 \text{ J/m}^3$  pour le modèle DYN. La dissipation intrinsèque est ici la somme de la dissipation accumulée pendant le passage de l'onde de compression puis de l'onde de traction. La localisation de la zone de dissipation maximale n'est donc pas forcément concomitante avec la zone de rupture puisque que la dégradation du béton en compression est plus dissipative qu'en traction. Comme l'endommagement  $D_{yy}$  est le même pour tous les modèles, la dissipation maximale sera plus importante si la rupture a lieu dans une zone endommagée en compression que si elle a lieu dans une zone non endommagée. C'est ce que l'on observe lorsque l'on compare les modèles INI et INI- $Sd_{act}$ . La

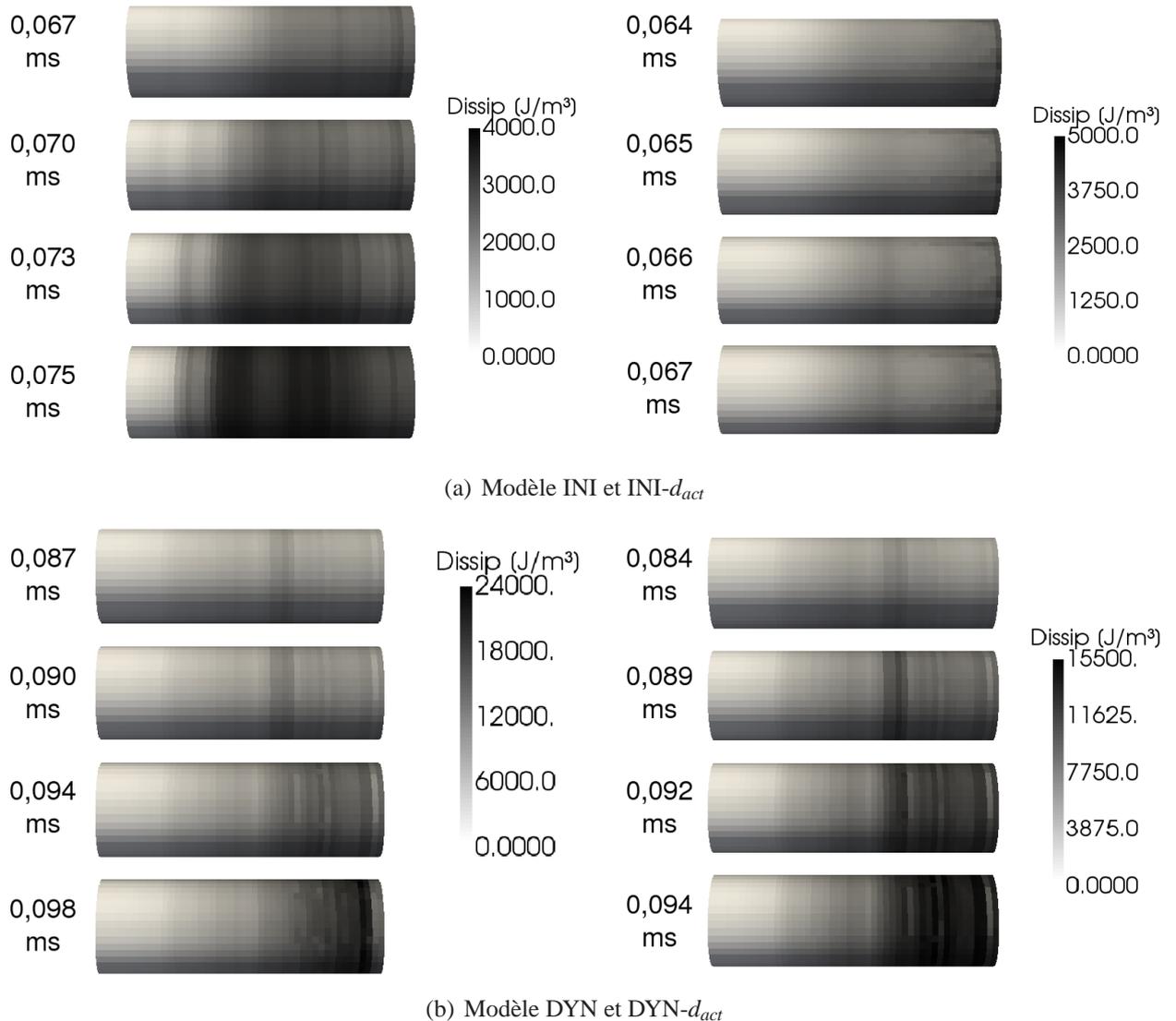


FIG. 3.29: Carte de dissipation intrinsèque pour l'essai de traction dynamique

dissipation maximale pour le second est donc logiquement plus importante que le premier pour lequel la macro-fissure se situe près du bord libre.

La prise en compte de l'effet de vitesse induit une dissipation plus importante, puisque la dissipation en traction augmente sous l'effet de la viscosité. La différence entre les deux modèles dynamiques peut s'expliquer par le fait que la prise en compte des effets unilatéraux conduit à une résistance en traction dynamique plus faible, et donc à une dissipation moins importante pour le même état d'endommagement.

### 4.3.2 Evolution de la dissipation totale

La dissipation intrinsèque totale est calculée en intégrant la dissipation intrinsèque volumique sur l'ensemble du maillage. On la compare à l'énergie injectée qui est calculée en intégrant le produit de la vitesse de la face impactée par la force de réaction sur cette face,

$$E_{inj} = \int_0^t F(t) \cdot v(t) dt \quad (3.50)$$

L'énergie injectée totale est de 3,49 J. La figure 3.30 montre les évolutions de la dissipation intrinsèque totale ( $\int \mathcal{D}dV$ ) pour les différents modèles et la figure 3.31 celles du pourcentage de l'énergie injectée qui est dissipée par endommagement ( $\frac{\int \mathcal{D}dV}{E_{inj}} * 100$ ).

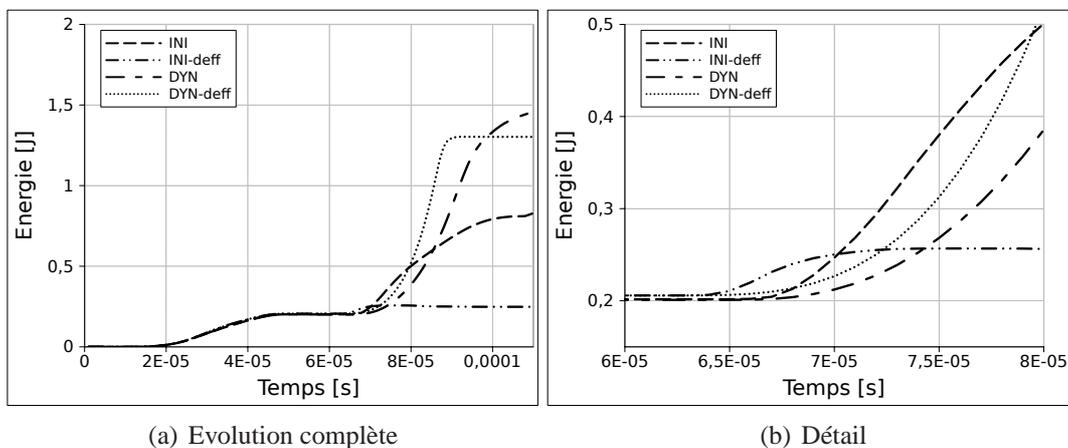


FIG. 3.30: Evolution de la dissipation intrinsèque totale

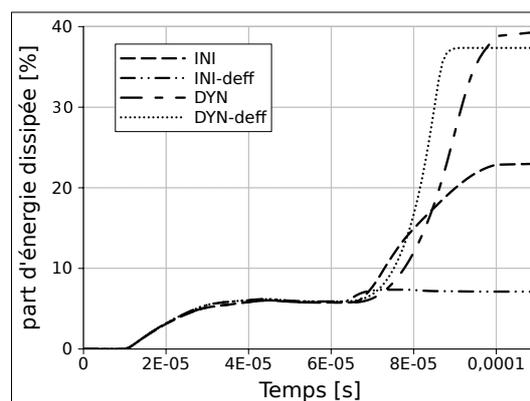


FIG. 3.31: Part de l'énergie injectée dissipée par endommagement

Les évolutions se superposent parfaitement jusqu'à environ 0,06 ms, soit le temps nécessaire pour que le pic de chargement atteigne la face libre de l'éprouvette. Au delà on constate les

différents effets des choix de modélisation :

- L'effet de vitesse augmente la dissipation totale, mais dans des proportions plus faibles que pour la dissipation volumique maximale. Il y a par exemple moins d'un facteur 2 entre le modèle initial avec désactivation des dommages et son équivalent dynamique (INI- $d_{act}$  et DYN- $d_{act}$ ).

- Pour les deux modèles, avec et sans viscosité, la modélisation de la refermeture de fissures conduit à une énergie dissipée plus faible puisque que le seuil d'endommagement est atteint plus tôt.

- La part de l'énergie dissipée varie de 8 à 40 %. Plus la rupture est tardive (ou éloignée de la face libre) et plus l'énergie dissipée est grande.

- Pour le modèle initial avec refermeture de micro-fissures (par désactivation des dommages), la dissipation cesse d'augmenter beaucoup plus tôt que pour les autres modèles. Dans ce cas, l'endommagement de traction est localisé au milieu de l'éprouvette. Une fois l'endommagement critique atteint dans cette zone, l'état du reste de la structure n'évolue plus.

Si l'on compare l'énergie totale dissipée pour le modèle INI- $d_{act}$  (0,25 J) avec l'énergie de fracturation du béton on retrouve le même ordre de grandeur ( $G_F = 81\text{J/m}^2$  d'après [GJP92], soit pour l'éprouvette de section  $S_{ep}$ , une énergie de fracturation de  $G_F^{ep} = G_F \times S_{ep} = 0,11\text{J}$ ).

## 5 Conclusion

Le modèle de visco-endommagement ou d'endommagement à effet retard développé lors de cette thèse modélise l'influence de la vitesse de sollicitation en retardant l'évolution de l'endommagement lorsque la vitesse de déformation augmente (d'où le nom d'effet retard). Cela a pour conséquence d'augmenter la résistance ultime du matériau  $f_t^{dyn}$ . La loi proposée borne la vitesse d'endommagement par une valeur  $\dot{D}_\infty$ ; sans cela, la vitesse d'endommagement peut tendre vers l'infini, ce qui n'est physiquement pas réaliste. Néanmoins la vitesse de saturation de la vitesse d'endommagement n'a jamais à ce jour été déterminée expérimentalement, si bien que ce paramètre est déterminé de manière à reproduire correctement l'effet de vitesse.

Pour les vitesses élevées de sollicitation en compression, l'effet de vitesse peut être attribué aux effets de l'inertie. Ainsi, sa modélisation par le modèle d'endommagement n'est pas nécessaire et le modèle présenté n'introduit qu'un effet de vitesse pour les chargements de traction (définis comme les chargements à trace des déformations positives). Cet effet de vitesse est isotrope (il agit sur la trace de la vitesse d'endommagement  $\dot{\mathbf{D}}$ ), ce qui est suffisant pour reproduire l'effet de vitesse en traction. On a pu montrer de manière numérique que pour le modèle anisotrope, les considérations inertielles suffisaient pour reproduire l'effet de vitesse en traction.

Comme pour le modèle initial, le cas des sollicitations alternées a été étudié. Pour reproduire d'une manière a priori convenable l'effet de vitesse en traction après un chargement endommageant en compression, il est nécessaire de désactiver les dommages dus à la compression. On modifie pour cela la loi de viscosité pour exprimer non plus la trace de la vitesse d'endommagement ( $tr\dot{\mathbf{D}}$ ) mais la vitesse de l'endommagement actif ( $\dot{d}_{act}$ ).

Le schéma numérique d'intégration est dans les deux cas implicite sans itérations, comme

pour le modèle initial.

La simulation numérique d'un essai de traction dynamique par écaillage a permis de mettre en évidence la nécessité de considérer à la fois l'effet de vitesse et la désactivation des dommages pour parvenir à un résultat proche de l'expérience. Le calcul de la dissipation intrinsèque pour cet essai a montré que sans effet de vitesse, mais avec désactivation des dommages on retrouve l'ordre de grandeur de l'énergie de fracturation du béton en statique. D'autre part, l'augmentation de la dissipation due à la viscosité peut être quantifiée. Pour l'essai brésilien dynamique, on calcule une dissipation totale de 0,25 J pour le modèle sans effet de vitesse mais avec désactivation des dommages contre 1,3 J pour celui avec effet de vitesse.

Enfin, on a constaté sur les différentes simulations numériques que sans effet de vitesse, la zone de rupture (qui correspond à la zone où l'endommagement vaut  $D_c$ ) se réduit à un nombre limité d'éléments. Ce dernier phénomène, connu sous le terme de localisation est une conséquence pathologique de l'adoucissement, il conduit à des résultats non objectifs, dépendants du maillage. Le chapitre suivant y est en grande partie consacré.

## Chapitre 4

# Instabilités, dépendance au maillage et régularisations

Le modèle d'endommagement présenté au chapitre 1 et étendu à la dynamique au chapitre 3 permet de reproduire le comportement adoucissant du béton, observé expérimentalement. L'adoucissement, qui se traduit par le fait que la matrice tangente cesse d'être définie positive, reflète au niveau macroscopique l'apparition de micro-fissures au sein du matériau. La contrainte pour un matériau adoucissant réduit alors graduellement à mesure que les micro-fissures se développent pour finalement atteindre zéro quand celles-ci coalescent en une macro-fissure visible. En conséquence, les solutions des équations différentielles qui gouvernent le comportement du matériau perdent leur unicité [Baz76, LB88, BBG91]. On distingue le cas statique où ces équations perdent leur ellipticité et deviennent hyperboliques et le cas dynamique où elles deviennent elliptiques. Le problème à résoudre devient alors mal posé. Une infinité de solutions existent et les résultats des simulations numériques dépendent de la discrétisation.

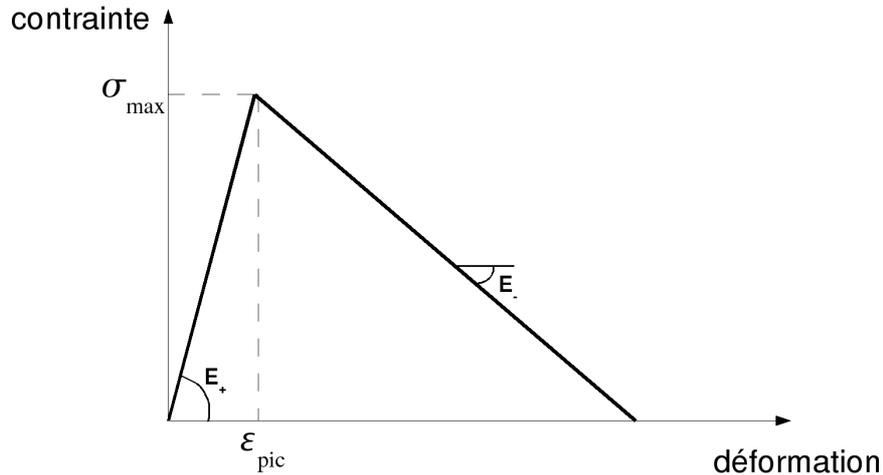
Pour les matériaux fragiles, la rupture est localisée, et se traduit par l'apparition d'une macro-fissure, autour de laquelle se développe généralement une micro-fissuration diffuse. Le comportement adoucissant reproduit la localisation de la rupture, cependant il ne va pas sans poser des problèmes d'ordre numérique qui se traduisent par une dépendance pathologique au maillage. En effet les déformations se localisent dans une bande étroite dont la largeur dépend de la taille des éléments. Si cette taille tend vers 0, la zone de localisation se réduira d'autant ce qui conduit *in fine* à une dissipation d'énergie qui tend elle aussi vers 0 lors du processus de fissuration.

Le présent chapitre est en grande partie dédié à ce phénomène, son origine, sa mise en évidence numérique et surtout aux moyens de s'affranchir des difficultés qu'il engendre. On présentera les différents "limiteurs de localisation" également appelés méthodes de régularisation. Parmi eux, deux sont employés pour le modèle d'endommagement anisotrope : la régularisation non-locale [PCB87] et la régularisation visqueuse (ou régularisation par effet retard) [Nee88]. Cette dernière, particulièrement adaptée aux problèmes de dynamique, perd de son efficacité lorsque la vitesse de sollicitation diminue, c'est pourquoi on étudie ici également l'influence de la vitesse de sollicitation sur la régularisation.

Enfin, dans une dernière partie on aborde le problème de la mise en évidence d'une autre instabilité, celle-ci inhérente au caractère anisotrope de l'endommagement et à sa représentation tensorielle.

## 1 Origine du phénomène de localisation des déformations en dynamique

Afin de rappeler l'origine du phénomène de localisation, on se place ici dans le cas d'un problème unidimensionnel (par exemple le cas d'une poutre en traction) en dynamique. On considère que le matériau est modélisé par un modèle adoucissant, par exemple un comportement bi-linéaire (fig 1). La matrice tangente (ou de le cas 1D bilinéaire le module d'Young) prend deux valeurs :  $E_+$  (positive) et  $E_-$  (négative).



On commence par écrire l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

avec  $u(x,t)$ , le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . La loi de comportement dans ce cas bilinéaire très simple s'écrit :

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) \quad (4.2)$$

avec  $E = E_+$  si  $\varepsilon < \varepsilon_{pic}$  et  $E = E_-$  si  $\varepsilon > \varepsilon_{pic}$ . La déformation s'exprime par :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial(u(x,t))}{\partial x} \quad (4.3)$$

En dérivant ces équations par rapport au temps, il vient :

$$\frac{\partial \dot{\sigma}(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{car} \quad v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (4.4)$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (4.5)$$

$$\dot{\sigma}(x,t) = E_+ \dot{\epsilon}(x,t) \quad \text{si } \epsilon \leq \epsilon_{pic} \quad (4.6)$$

$$\dot{\sigma}(x,t) = -E_- \dot{\epsilon}(x,t) \quad \text{si } \epsilon > \epsilon_{pic} \quad (4.7)$$

A partir de ces 4 dernières équations on peut écrire les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{E_+}{\rho} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avant le pic} \quad (4.8)$$

$$\frac{-E_-}{\rho} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{après le pic} \quad (4.9)$$

Le problème de la localisation peut alors s'expliquer de deux manières.

Tout d'abord d'un point de vue mathématique, on considère une équation différentielle ( $E$ ) de la forme :

$$a(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + c(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F(x,t) \quad (4.10)$$

Par définition, on sait que :

Une équation telle que  $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t) > 0$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  est dite hyperbolique dans ce domaine. Elle admet deux familles de courbes caractéristiques dans  $\mathcal{D}$ .

Une équation telle que  $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t) = 0$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  est dite parabolique dans ce domaine. Elle admet une seule famille de courbes caractéristiques dans  $\mathcal{D}$ .

Une équation telle que  $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t) < 0$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  est dite elliptique dans ce domaine. Elle n'admet pas de famille de courbes caractéristiques (réelles) dans  $\mathcal{D}$ .

Dans le cas où  $\epsilon < \epsilon_{pic}$ ,  $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t) = \frac{E_+}{\rho} > 0$ . L'équation aux dérivées partielles est hyperbolique, le problème est donc bien posé.

Dans l'autre cas,  $\epsilon > \epsilon_{pic}$ ,  $b^2(x,t) - a(x,t)c(x,t) = \frac{E_-}{\rho} < 0$ , l'équation devient elliptique et n'admet pas de solution réelle, le problème est mal posé.

D'un point de vue physique, on reconnaît dans l'équation (4.10) l'équation de propagation d'une onde avec  $\frac{E}{\rho} = c^2$  le carré de la célérité des ondes. Tant que  $\epsilon < \epsilon_{pic}$ , la vitesse est positive, il n'y a donc aucun problème, en revanche, lorsque  $\epsilon > \epsilon_{pic}$  cette célérité devient brusquement complexe. Les ondes restent alors "confinées" au premier élément où le signe du module change. L'augmentation de déformation n'est pas transmise aux éléments voisins, la déformation est donc localisée dans cet unique élément. Si on réduit la taille de cet élément, la déformation se localise alors dans une zone plus petite, qui tend vers 0 si l'on raffine à l'extrême le maillage.

En 3D et en quasi-statique, on montre [Hil58] que l'on perd l'unicité de la solution lorsque le tenseur du second ordre  $n_i L_{ijkl} n_l$  devient singulier c'est à dire lorsque :

$$\det(n_i L_{ijkl} n_l) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(n L n) = 0 \quad (4.11)$$

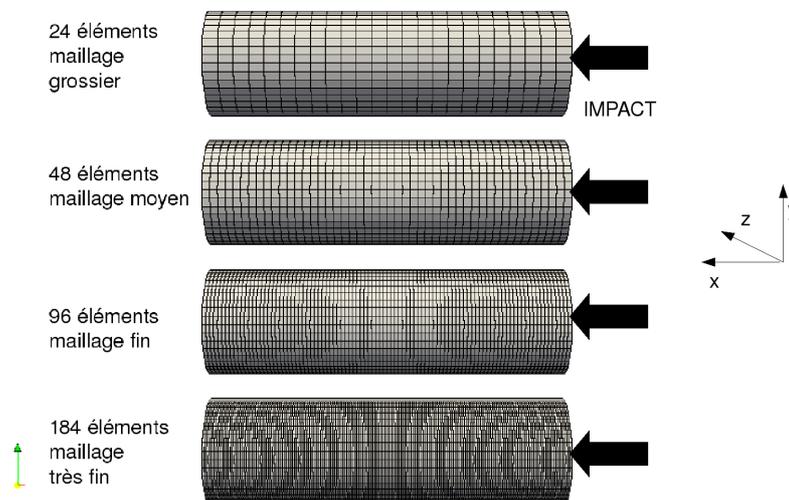
Le tenseur  $L_{ijkl}$  correspond à la rigidité tangente et est défini en dérivant la relation contrainte-déformation :

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{ou} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.12)$$

La perte d'unicité ne survient plus alors automatiquement au pic de contraintes.

## 1.1 Illustration du phénomène de localisation

Afin d'illustrer les conséquences bien connues du problème de la localisation en dynamique reprenons l'exemple du chapitre précédent (l'essai de traction dynamique par écaillage) en faisant varier la taille du maillage. On choisit de comparer quatre discrétisations différentes : 24, 48, 92 et 184 éléments dans la longueur, soit une taille d'éléments allant de 0,5 cm à 0,0625 cm. Le maillage de la base du cylindre reste lui inchangé pour les 4 discrétisations choisies. Les différents maillages utilisés sont représentés à la figure 4.1. Le modèle utilisé est le modèle initial et le chargement (évolution de la vitesse de de la face impactée) est celui de la figure 3.17. Les calculs sont menés avec le code implicite Cast3m.



**FIG. 4.1:** Différentes discrétisations pour l'étude de la dépendance au maillage (le nombre d'éléments dans la longueur est indiqué)

### 1.1.1 Cartes d'endommagement

Les cartes d'endommagement suivant  $x$  sont tracées pour les 4 maillages à un même instant  $t = 0,075$  ms postérieur au temps  $0,059$  ms d'un aller de l'onde de traction/compression (fig. 4.2). On constate que le choix du maillage n'influe ici qu'assez peu sur la taille de la zone rompue mais d'avantage sur le profil de rupture. Pour le maillage le plus fin, on distingue clairement deux zones où  $D_{xx} = D_c$ , le maillage fin laisse entrevoir également une seconde zone fortement endommagée alors qu'avec les maillages moyen et grossier, on n'obtient clairement qu'une seule fissure.

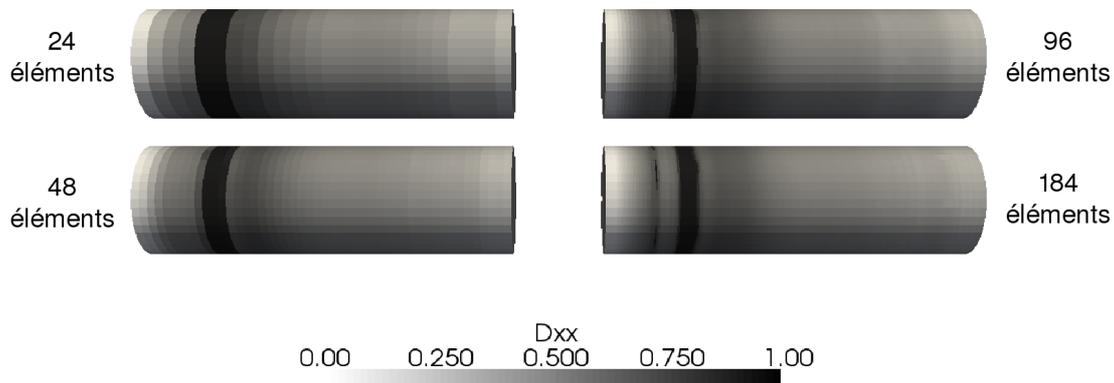


FIG. 4.2: Cartes d'endommagement pour le modèle initial à  $t = 0,075$  ms

### 1.1.2 Evolution de la vitesse d'éjection

Après avoir comparé les cartes d'endommagement qui illustrent le fait que le faciès de rupture est dépendant de la taille du maillage, on veut quantifier ici l'impact de la localisation sur un aspect plus global du comportement. Pour cela, on propose de comparer l'évolution temporelle de la vitesse d'éjection (fig. 4.3). Cette vitesse est la vitesse de la face libre (à gauche) de l'éprouvette, calculée en son centre qui correspond à la vitesse du fragment éjecté.

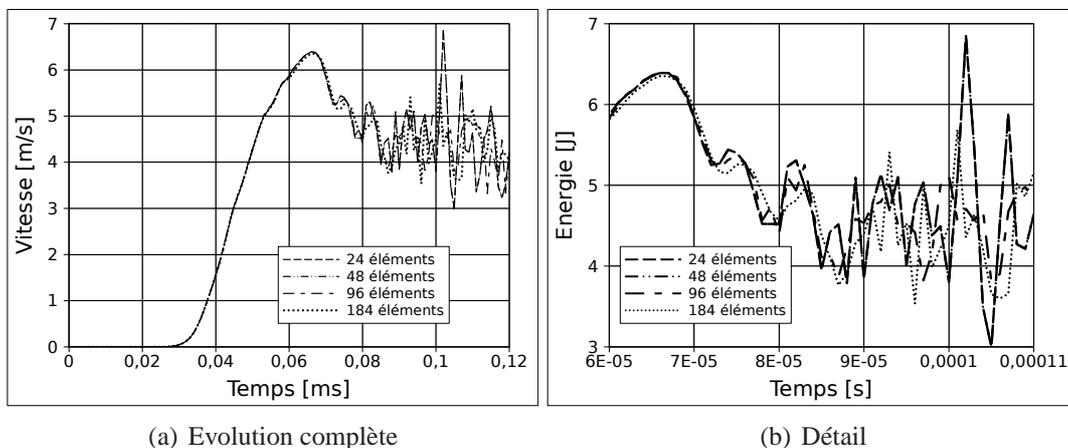


FIG. 4.3: Evolution de la vitesse d'éjection pour différents maillages

Avant rupture, cette vitesse est indépendante de la taille du maillage, les courbes se superposent donc très bien. Après  $t = 0,075$  ms, instant qui correspond à l'apparition de la zone fortement localisée, les courbes commencent à montrer des différences importantes, avec des écarts de valeurs allant jusqu'à 25 %.

L'analyse de la vitesse d'éjection met bien en évidence le phénomène de localisation, ce sera donc par la suite un bon critère pour évaluer l'efficacité des différents limiteurs de localisation.

### 1.1.3 Evolution de la dissipation

La localisation des déformations a pour conséquence en monotone de faire tendre la dissipation à la rupture vers 0 quand on raffine le maillage. Dans le cas présenté, on dissipe de l'énergie sur le trajet "aller" de l'onde de manière indépendante du maillage et c'est l'énergie de rupture en traction, sur le trajet "retour", qui tend vers 0 quand on raffine le maillage. On trace sur la figure 4.4 l'évolution de la dissipation totale dans la structure  $\int \mathcal{D}dV$  en fonction du temps.

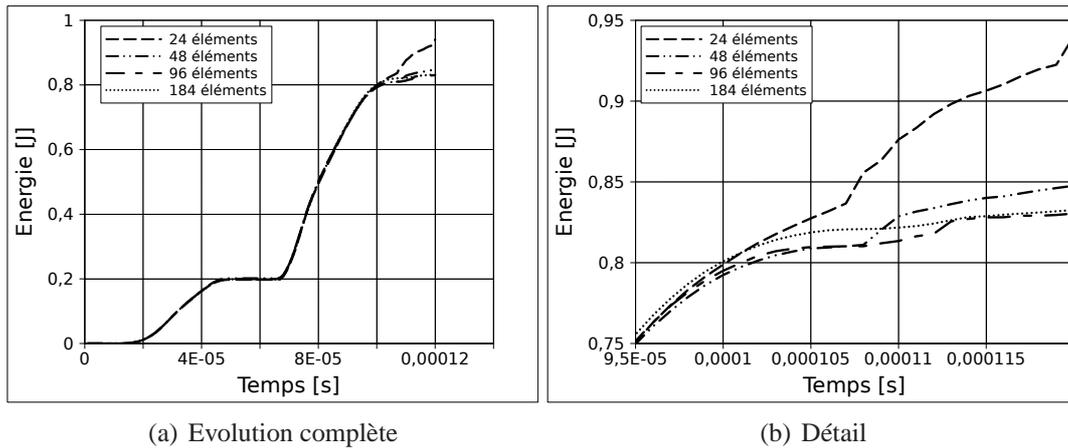


FIG. 4.4: Evolution de la dissipation intrinsèque totale pour différents maillages

Si on constate bien en fin d'évolution que la dissipation diminue quand on raffine le maillage, les différences observées demeurent très faibles. Cela s'explique d'une part par le fait que la majorité de l'énergie dissipée est en fait due à la dégradation en compression et donc égale pour tous les maillages et d'autre part parce qu'il semble que dans ce cas la localisation joue d'avantage sur le nombre de fissures que sur leur largeur. Ainsi pour les deux maillages les plus fins, la dissipation totale finale est égale. Le fait d'avoir deux fissures pour le maillage le plus fin compense le fait que l'endommagement est localisé sur une très faible largeur.

Dans ce cas particulier où la dissipation est majoritairement due à l'onde de compression incidente, l'évolution de la dissipation ne paraît pas être un critère pertinent pour évaluer la qualité de la régularisation d'un limiteur de localisation donné.

## 2 Les limiteurs de localisation

### 2.1 Les modèles à énergie constante

Le phénomène de localisation conduit à une dissipation par endommagement et donc une énergie de rupture qui dépend de la taille de l'élément dans lequel la localisation survient et qui tend vers zero à mesure que l'on raffine la discrétisation. Pour s'en affranchir une méthode consiste à imposer que la dissipation soit fonction de la taille de l'élément de manière à la rendre justement indépendante de la finesse du maillage [HMP76, BO83]. Pour cela on modifie

la partie post-pic de la loi de comportement, qui contrôle l'énergie dissipée.

Cette approche ne trouve pas de réelle justification physique (si ce n'est conserver l'énergie de rupture) et elle ne fonctionne bien que lorsque le trajet de fissuration est connu a priori et que les éléments dans la zone de localisation ont tous la même taille (et qu'ils ne sont pas distordus).

De ce fait, elle ne fait plus aujourd'hui l'objet de développements mais reste une des méthodes les plus utilisées, du fait de sa simplicité, dans le cadre industriel.

En dynamique, la difficulté liée à cette méthode est de connaître l'énergie de rupture à imposer car elle est également fortement fonction de la vitesse de chargement.

## 2.2 Les modèles non-locaux intégraux

### 2.2.1 Principe de la régularisation non-locale

Ce limiteur de localisation développé entre autres par [BBC84] pour la plasticité et par [PCB88] pour l'endommagement, impose une dimension finie à la région où se localise la déformation, cette dimension étant considérée comme une caractéristique du matériau. Dans le cas du béton, on justifie le choix de cette valeur par des considérations micro-mécaniques, elle est classiquement estimée à 4 fois la taille du plus gros granulats. Cette méthode consiste à remplacer une des variables gouvernant le comportement du matériau, souvent la déformation équivalente, par une variable dite non-locale obtenue par une moyenne pondérée des valeurs de cette variable sur un domaine entourant le point considéré ou sur l'ensemble des éléments de la structure. Soit  $\mathcal{V}(x)$  la valeur d'un champ local sur un domaine  $\Omega$ . La variable non-locale associée s'écrit sur ce domaine :

$$f^{nl}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \quad (4.13)$$

où  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  est la fonction de poids non-locale définie par :

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\alpha_{\infty}(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|)}{\int_{\Omega} \alpha_{\infty}(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|) d\mathbf{s}} \quad (4.14)$$

si bien que suffisamment loin des bords, la fonction de poids ne dépend que de la distance entre le terme "source"  $\mathbf{s}$  et le point  $\mathbf{x}$  où l'on calcule la valeur non-locale  $\mathcal{V}^{nl}(\mathbf{x})$ . A proximité des bords, la fonction de poids est modifiée pour conserver un champ uniforme. La fonction  $\alpha_{\infty}$ , dite fonction de poids pour un milieu infini, est une fonction décroissante de la distance  $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$ , généralement une fonction gaussienne ou une fonction "en cloche".

Le choix de la variable à rendre non-locale a été étudié dans [Jir97]. Jirasek conclut que certains choix sont à proscrire puisqu'ils ne permettent pas de revenir à un état de contrainte nulle après la rupture. C'est le cas des modèles où la variable rendue non-locale est l'endommagement ou la déformation irréversible. Pour les modèles d'endommagement quasi-fragiles, Jirasek préconise de pondérer la déformation totale  $\boldsymbol{\epsilon}$ , la déformation équivalente  $\hat{\epsilon}$  ou encore  $\mathbf{Y}$ , la force thermodynamique associée à l'endommagement. On préférera utiliser une variable non-locale scalaire, numériquement moins lourde,  $Y$  ou  $\hat{\epsilon}$  pour un modèle d'endommagement scalaire et  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  pour un modèle tensoriel.

### 2.2.2 Écriture non-locale du modèle d'endommagement anisotrope

Le modèle anisotrope initial présenté au chapitre 1 a été écrit sous une forme non locale dans [DGR07]. La variable rendue non-locale est la déformation équivalente  $\hat{\epsilon}$  qui a l'avantage d'être scalaire, on la note par la suite  $\hat{\epsilon}^{nl}$ .

Pour construire le modèle non-local, il suffit alors de réécrire la fonction seuil de Mazars  $f = g(\hat{\epsilon}) - tr\mathbf{D}$  du modèle local en fonction de la déformation équivalente non-locale :

$$f = g(\hat{\epsilon}^{nl}) - tr\mathbf{D} \quad (4.15)$$

avec  $\hat{\epsilon}^{nl}$  défini de la manière suivante :

$$\hat{\epsilon}^{nl} = \hat{\epsilon}^{nl}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \hat{\epsilon}(\mathbf{s}) ds \quad (4.16)$$

avec  $\alpha$  la fonction de poids non-locale (décroissante) :

$$\alpha_{\infty}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = e^{-\frac{4\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}{l_c^2}} \quad (4.17)$$

où  $l_c$  est la longueur caractéristique ou interne du matériau qui définit le volume sur lequel on moyenne  $\hat{\epsilon}$ .

Pour la suite de la modélisation du comportement, le seul changement intervient dans le calcul de l'évolution de l'endommagement ( $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2$ ). Pour le modèle initial, le multiplicateur d'endommagement (obtenu en écrivant  $\dot{f} = 0$ ) devient :

$$\dot{\lambda} = \frac{dg}{d\hat{\epsilon}^{nl}} \frac{\dot{\hat{\epsilon}}^{nl}}{\hat{\epsilon}^{nl}} \quad (4.18)$$

ainsi, la loi d'évolution de l'endommagement devient non locale via  $\hat{\epsilon}^{nl}$ , c'est à dire que la vitesse d'endommagement  $\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x})$  au point  $\mathbf{x}$  est une fonction des points environnants :

$$\dot{\mathbf{D}} = g'(\hat{\epsilon}^{nl}) \frac{\dot{\hat{\epsilon}}^{nl}}{\hat{\epsilon}^{nl}} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+^2 \quad (4.19)$$

Si l'on prend en compte la désactivation des dommages, aucun changement particulier n'est à apporter si ce n'est que la fonction seuil s'écrit (cette fois avec  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+$ ) :

$$f = g(\hat{\epsilon}^{nl}) - d_{act} \quad (4.20)$$

Même pour un modèle qui considère l'anisotropie induite par le chargement, l'introduction d'une longueur interne isotrope  $l_c$  est suffisante pour les applications pratiques.

## 2.3 Les modèles de type second gradient

Ce type de limiteur de localisation, d'abord développé dans le cadre de la plasticité en statique [MA91, dBM92] puis en dynamique [Slu92]

[SdB94] a été plus récemment étendu au cadre thermodynamique de l'endommagement [PdBrBdV96a, FN96, PdBrBdV96b]. En substituant l'expression de la déformation équivalente  $\widehat{\varepsilon}$  par son expression développée en une série de Taylor dans la définition de la déformation équivalente non-locale (eq 4.16), on obtient une nouvelle expression de la déformation équivalente non locale [MA91, dBM92] :

$$\widehat{\varepsilon}^{nl} = \widehat{\varepsilon} + c_i \frac{\partial^2 \widehat{\varepsilon}}{\partial x_i^2} + c_{ij} \frac{\partial^4 \widehat{\varepsilon}}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \dots \quad (4.21)$$

où les coefficients  $c_i$  et  $c_{ij}$  sont calculés en intégrant la fonction de poids sur un domaine qui dépend de la longueur interne. Les termes impairs n'apparaissent pas dans l'équation car ils s'annulent par symétrie. On peut alors approcher  $\widehat{\varepsilon}^{nl}$  (en négligeant les termes d'ordre 4 et supérieurs) par une relation différentielle qui fait intervenir le second gradient :

$$\widehat{\varepsilon}^{nl} = \widehat{\varepsilon} + c \nabla^2 \widehat{\varepsilon} \quad (4.22)$$

Cette forme est appelée "second gradient explicite", la variable non-locale  $\widehat{\varepsilon}^{nl}$  est exprimée en fonction de la variable locale  $\widehat{\varepsilon}$  et de son Laplacien  $\nabla^2 \widehat{\varepsilon}$ .

Comme pour le modèle non-local intégral, on remplace alors  $\widehat{\varepsilon}$  par la valeur que l'on vient de calculer pour l'expression de la surface seuil et de la loi d'évolution de l'endommagement (eq. 4.19). La longueur interne que l'on introduit pour le calcul de  $c$  est équivalente dans une certaine mesure à celle du modèle non-local défini plus haut.

Peerlings [Pee99] a montré que le choix d'une définition implicite de la variable non-locale :

$$\widehat{\varepsilon}^{nl} - c_i \frac{\partial^2 \widehat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x_i^2} - c_{ij} \frac{\partial^4 \widehat{\varepsilon}^{nl}}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} - \dots = \widehat{\varepsilon} \quad (4.23)$$

est meilleur (il permet d'obtenir une convergence quadratique notamment) avec au final comme modélisation retenue :

$$\widehat{\varepsilon}^{nl} - c \nabla^2 \widehat{\varepsilon}^{nl} = \widehat{\varepsilon} \quad (4.24)$$

L'avantage de ce modèle par rapport aux modèles non-locaux classiques est que la déformation équivalente aux points de Gauss ne dépend plus des déformations équivalentes des éléments voisins. On définit une sorte de nouvel élément contenant une inconnue supplémentaire en plus des déplacements aux noeuds : la déformation non-locale équivalente. La suite du problème peut alors être traitée par la méthode classique des éléments finis, on peut notamment calculer la matrice tangente de l'élément.

Le problème qui reste à résoudre est celui des conditions limites. En introduisant une inconnue supplémentaire on doit également introduire une nouvelle condition limite qui n'est pas a priori évidente. La discussion à ce sujet est toujours ouverte.

## 2.4 L'effet retard

### 2.4.1 La régularisation par effet retard

Needleman [Nee88] a montré que si l'on prend en compte la dépendance au taux de déformation dans la loi de comportement d'un matériau, il n'y a plus de perte d'ellipticité pour le

problème quasi-statique et la vitesse des ondes demeure réelle pour le problème dynamique. Le problème reste bien posé tant que le niveau de contrainte reste faible devant la raideur élastique. La dépendance au taux de déformation introduit de manière implicite une longueur dans le problème aux limites sans que celle-ci soit un paramètre de la modélisation. C'est cette longueur qui permet la régularisation de la solution. Needleman montre dans cet article comment un comportement visco-plastique permet de rendre la solution indépendante de la discrétisation spatiale à la fois dans le cas d'un chargement statique et d'un chargement dynamique. D'autres études ont confirmé ce résultat par la suite [Slu92, BMPS93, Suf04, PSS08].

Le même principe a été appliqué par la suite dans le cadre des modèles d'endommagement. L'introduction d'une dépendance en vitesse ralentit l'évolution de l'endommagement (on parle d'endommagement retardé ou d'endommagement à effet retard) et régularise la solution. En effet, en retardant l'endommagement, on laisse le temps à une zone plus importante de s'endommager, la déformation n'est plus localisée dans un unique élément. La première formulation d'un modèle d'endommagement à effet retard semble être due à Ladevèze [Lad91, Lad92] qui propose la loi d'évolution de l'endommagement suivante pour les composites stratifiés :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \frac{1}{m} \left\langle \frac{Y - Y(d)}{Y_c} \right\rangle^n \text{ pour } D \leq 1 \\ Y(D) &= Y_0 + Y_c d \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Elle fait intervenir deux paramètres  $m$  et  $n$  déjà rencontrés aux paragraphes 2.4 et 2.5 du chapitre 3 et  $Y_0$  et  $Y_c$  sont des constantes qui définissent l'évolution de l'endommagement. Par la suite, cette loi a été modifiée, toujours pour la modélisation des composites stratifiés de manière à introduire une borne supérieure pour la vitesse d'endommagement [AD97] :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \dot{D}_\infty (1 - \exp[-b(g(\epsilon_e) - D)]) \text{ pour } D \leq D_c \\ D &= D_c \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\dot{D}_\infty$  est l'inverse d'un temps caractéristique  $\tau_b$ . La justification physique de cette borne est que la rupture sous l'effet d'un chargement croissant ne peut pas être instantanée. Elle doit donc être gouvernée par un temps interne caractéristique qui traduit un certain retard. Combinée avec une analyse dynamique, ce temps caractéristique introduit une longueur caractéristique à travers la vitesse des ondes. La distinction doit être faite pour les composites entre les modèles d'endommagement retardé et les modèles de viscosité. Certains composites fragiles (les stratifiés epoxy/verre par exemple) ont un comportement éminemment visqueux. Pour autant le temps caractéristique introduit n'est pas lié au processus de rupture, il diffère du temps caractéristique de l'endommagement retardé de plusieurs ordres de grandeur. Ce temps caractéristique est déterminé à partir de la longueur caractéristique du matériau, elle-même fonction de la micro-structure. L'endommagement à effet retard ne sert donc pas le plus souvent à reproduire un effet de la vitesse de sollicitation puisque celui-ci n'existe pas pour les composites étudiés. C'est un outil de modélisation qui permet de rendre la rupture non instantanée et de ce fait régulariser la solution du problème.

La même loi d'évolution a ensuite été appliquée pour des matériaux métalliques dans le cas de sollicitations dynamiques [Suf04] puis pour les bétons et la glace [CMCO08].

### 2.4.2 Modèle local et non-local d'endommagement anisotrope à effet retard

Pour les matériaux fragiles comme le béton, et contrairement aux matériaux précédemment cités, il existe un effet de la vitesse de sollicitation, que l'on reproduit pour le modèle d'endommagement isotrope par une loi visqueuse d'évolution de l'endommagement [DPCL96a]. Pour le modèle présenté, la loi de viscosité s'inspire fortement de celle proposée par Allix et Deü dans le cas de l'endommagement à effet retard, mais a été modifiée pour le cas d'un endommagement anisotrope :

$$\mathcal{H}(tr\boldsymbol{\epsilon})tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty[1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) - tr\mathbf{D}))]$$

On pourra confondre "effet retard" et "viscosité" à la condition que le temps caractéristique introduit dans la loi d'évolution de l'endommagement soit du même ordre de grandeur dans les deux cas.

Pour le cas de la viscosité, on identifie ce temps interne à partir des courbes donnant l'accroissement de résistance en fonction de la vitesse de sollicitation. On a identifié au chapitre précédent la vitesse maximale de propagation de l'endommagement :  $\dot{D}_\infty \simeq 50000 \text{ s}^{-1}$ . Cette vitesse peut être reliée au temps caractéristique par  $\tau_b = \frac{1}{\dot{D}_\infty}$ , soit  $\tau_b \simeq 2.10^{-5} \text{ s}$ .

On définit généralement la longueur caractéristique du béton comme étant égale à 4 fois la taille du plus gros granulats soit de l'ordre de la dizaine de centimètre. (C'est tout du moins ce qui est fait quand il s'agit de définir la longueur caractéristique d'un modèle non local). On peut relier cette dimension au temps caractéristique par  $c$  la célérité des ondes, on obtient alors  $\tau_c = l_c/c \simeq 2,4.10^{-5} \text{ s}$  avec  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \simeq 4200 \text{ m/s}$ .

Les deux temps caractéristiques calculés,  $\tau_b$  et  $\tau_c$  sont très proches, on peut donc considérer que le modèle de visco-endommagement présenté au chapitre 3 est un modèle d'endommagement à effet retard dans le sens où Allix et Deü l'ont défini. Ce modèle peut donc a priori d'une part reproduire l'effet de vitesse et d'autre part régulariser la solution avec un unique jeu de paramètre. On ne refait pas ici la description du modèle et de son intégration numérique puisque rien ne diffère de ce qui a été présenté au chapitre précédent.

Comme on l'a montré au chapitre 3, l'effet de vitesse sur la résistance en traction du béton est sensible à partir d'une certaine valeur de  $\dot{\epsilon}$ , de l'ordre de  $1.\text{s}^{-1}$ . En deçà, la contrainte de pic en traction est égale à la contrainte de pic en quasi-statique. Si le matériau n'est pas sensible à l'effet de vitesse, il n'y a donc a priori pas de régularisation de la solution pour des tailles de mailles et de pas de temps raisonnables. L'effet retard n'est donc pas pour notre modèle et avec les paramètres retenus, un limiteur de localisation judicieux pour les faibles vitesses de sollicitation.

Afin de permettre la régularisation de la solution sur la totalité de la gamme des vitesses de sollicitations, on propose un modèle non-local d'endommagement à effet retard. Ce modèle doit permettre de reproduire l'effet de vitesse pour toutes les vitesses de sollicitation, de régulariser la solution en dynamique grâce à l'effet retard et de régulariser la solution en statique par son caractère non local. La loi d'évolution s'écrit à  $f = g(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}) - tr\mathbf{D} = D_v$  avec  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}$  comme définie au paragraphe 2.2 ; elle devient :

$$\mathcal{H}(tr\boldsymbol{\epsilon})tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty[1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}) - tr\mathbf{D})))] \quad (4.27)$$

avec la désactivation des dommages en dynamique, on l'écrit :

$$\mathcal{H}(tr\boldsymbol{\epsilon})d_{act} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\widehat{\boldsymbol{\epsilon}}^{nl}) - d_{act})))] \quad (4.28)$$

## 2.5 La multifragmentation

Les matériaux fragiles (bétons, céramiques) rompent, en traction soit sous l'effet d'une macro-fissure unique (en quasi-statique) soit par multifragmentation (en dynamique). Dans tous les cas la rupture s'initie au niveau de défauts préalablement existants au sein du matériau. Le modèle proposé par Denoual et Hild [DH00b] tient compte du caractère probabiliste de la contrainte à rupture lié à la répartition initiale aléatoire des défauts. La probabilité de rupture s'exprime par une loi de Weibull :

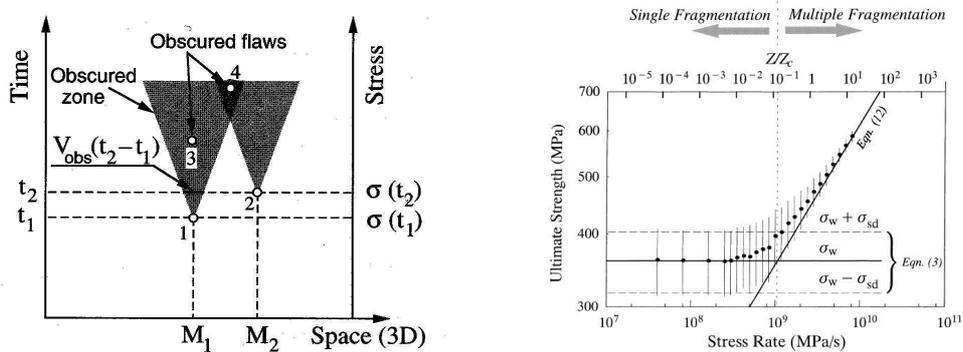
$$P_F = 1 - \exp(-\lambda_t(\sigma)V_{eff}) \quad (4.29)$$

où  $\lambda_t(\sigma)$ , la densité de défaut, s'exprime par  $\lambda_t(\sigma) = \lambda_0 \left[ \frac{\sigma}{S_0} \right]^m$  et où  $V_{eff}$  correspond au volume effectif.

En dynamique, il se crée autour des défauts activés (ou des fissures amorcées) une zone dans laquelle les contraintes sont relaxées si bien que la propagation de l'onde de contrainte ne peut engendrer une nouvelle fissure dans cette zone même si un défaut existe. Le volume (en 3D) de cette zone au temps  $t$  pour un défaut activé au temps  $\tau$  s'exprime par :

$$V_{Obs} = \frac{4}{3} [kc(t - \tau)]^3 \quad (4.30)$$

avec  $c$ , la célérité des ondes et  $kc$  la vitesse de propagation de la fissure. Ce phénomène "d'obscurcissement de défauts" est schématisé sur la figure 2.5 où les défauts situés en  $M_1$  et  $M_2$  écrantent ceux 3 et 4.



(a) Obscurcissement des défauts dans un schéma espace-temps (b) Changement de mode rupture en fonction de la vitesse

FIG. 4.5: Modèle probabiliste d'obscurcissement des défauts, d'après [DH00a, DH00b]

Sur le même principe qu'en quasi-statique, on définit en dynamique la probabilité d'obscurcissement par une loi de Weibull. Cette probabilité,  $P_0$  permet ensuite la définition d'une variable d'endommagement écrite dans le cadre de la mécanique classique de l'endommagement continu. La figure 4.5 compare les résultats obtenus de manière analytique avec ceux d'une simulation de Monte-Carlo.

On constate que l'on reproduit l'accroissement de la contrainte en fonction de la vitesse de sollicitation (prise en compte dans le modèle dynamique). D'autre part la dispersion des résultats par la méthode de Monte-Carlo diminue à mesure que le taux de contrainte augmente, comme expérimentalement.

Pour les faibles vitesses, où une fissure unique se propage, la dispersion est importante. On utilise dans ce cas les méthodes stochastiques décrites plus hauts pour le passage micro-macro. En dynamique, la rupture par multi-fragmentation a un caractère quasi-déterministe, il peut être traité par la mécanique de l'endommagement.

Cette modélisation qui reproduit finement ce qu'il se passe au niveau microscopique, introduit une longueur interne via la taille de la zone d'obscurcissement. En conséquence la solution du modèle d'endommagement est indépendante vis à vis du maillage. La modélisation phénoménologique selon ce genre d'approche semble prometteuse, mais elle demeure plus délicate à mettre en oeuvre que la "simple" considération d'un visco-endommagement. Nous ne poursuivrons pas cette voie

### 3 Sensibilité à la méthode de régularisation

On étudie l'efficacité de différents limiteurs de localisation sur l'essai de traction dynamique de Klepaczko et Brara déjà décrit (impact sur la face latérale droite d'un cylindre). La solution est considérée régularisée si lorsque l'on raffine le maillage, la bande d'endommagement maximum garde une largeur constante. On tracera donc les cartes d'endommagement pour vérifier numériquement la régularisation (ou la non régularisation). On comparera également l'évolution au cours du temps de la vitesse "d'éjection" de la partie de l'éprouvette située en amont de la rupture (face gauche). Deux vitesses de chargement seront étudiées, la première (fig 3.17) est la vitesse expérimentale déjà décrite (impact rapide), la seconde reprend la même fonction de chargement mais en multipliant la durée d'application par un facteur 4.

Les limiteurs de localisations comparés sont l'endommagement à effet retard, la régularisation non-locale, ainsi que ces deux limiteurs combinés. Rappelons que l'onde met 0,059 ms pour parcourir le barreau (aller simple).

#### 3.1 Impact rapide

L'impact rapide correspond en terme de géométrie et de chargement au cas expérimental déjà traité. La vitesse de déformation obtenue avec Cast3m pour le modèle de visco-endommagement anisotrope (fig. 4.6) est très chahutée mais est globalement supérieure à  $100.s^{-1}$ , soit clairement dans le domaine où l'effet de vitesse est sensible.

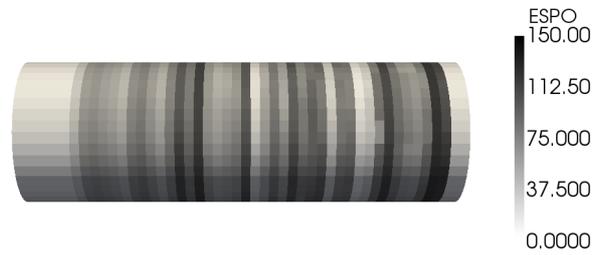


FIG. 4.6: Vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  à  $t=0,07\text{ms}$

### 3.1.1 Non-régularisation avec le modèle d'endommagement initial

Les résultats obtenus pour le modèle local sans effet de vitesse sont ceux présentés au paragraphe 1 sur l'illustration du phénomène de localisation. On a pu constater que le nombre de zones de localisation variait avec la finesse du maillage et que les différentes vitesses d'éjection différaient à partir du moment où la localisation de l'endommagement apparaissait ( $t=0,075\text{ms}$ ).

### 3.1.2 Régularisation par endommagement à effet retard

Le premier limiteur de localisation étudié est le visco-endommagement ou effet retard (eq. 3.35).

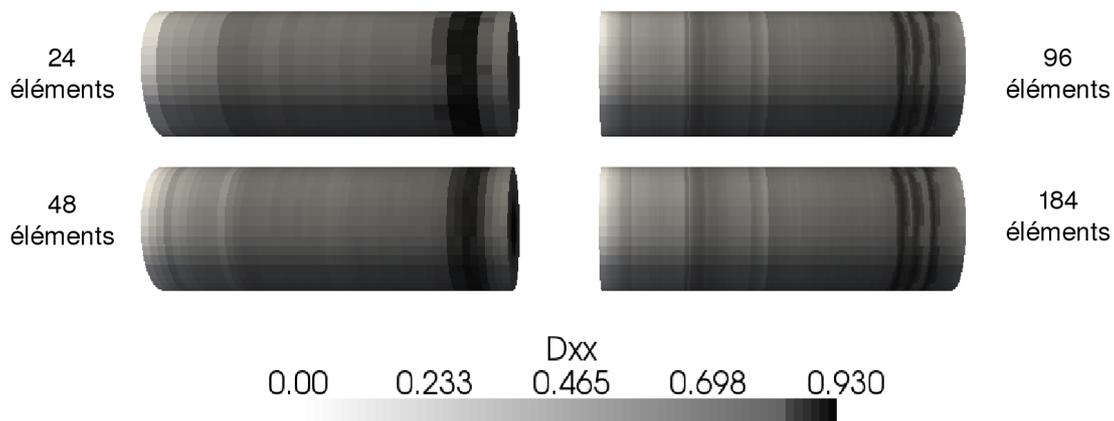


FIG. 4.7: Cartes d'endommagement avec effet retard (impact rapide)

Les cartes d'endommagement pour les différents maillages (fig. 4.7) montrent que l'endommagement n'est plus localisé dans un unique (ou un faible nombre) d'éléments. La zone "rompue" converge vers une taille constante, le calcul est donc bien régularisé.

On constate la même efficacité de la régularisation sur les courbes représentant l'évolution de la vitesse d'éjection en fonction du temps. Les courbes pour les différents maillages ne présentent aucun écart jusqu'à  $0,06\text{ms}$  et un écart très faible au-delà.

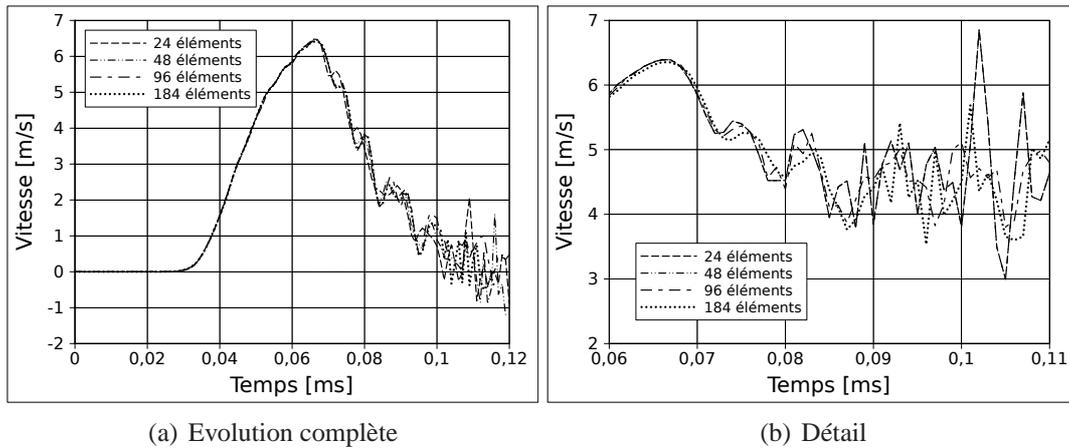


FIG. 4.8: Evolution de la vitesse d'éjection avec effet retard (impact rapide)

### 3.1.3 Régularisation non-locale

Rendre le calcul non-local est très coûteux, on multiplie par environ 20 le temps de calcul. De ce fait, on ne simule pas l'essai de traction dynamique sur le maillage le plus fin, pour lequel le temps de calcul est tel que l'on n'arrive pas au bout du calcul. La comparaison des cartes

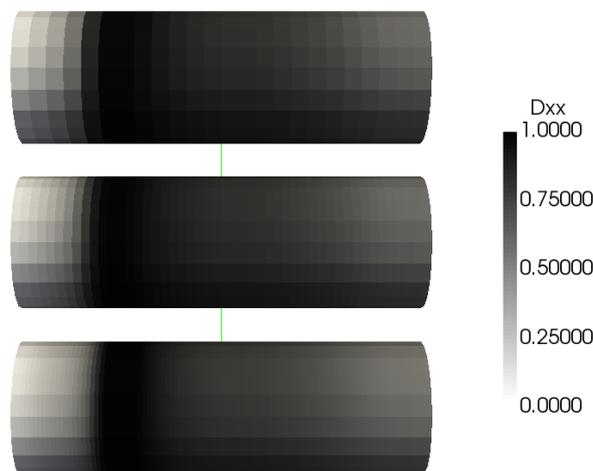


FIG. 4.9: Cartes d'endommagement régularisation non-locale (impact rapide)

d'endommagement (fig. 4.9) pour les trois maillages (grossier 24 éléments dans la longueur, moyen : 48 éléments et fin 96 éléments) montrent que le calcul est parfaitement régularisé. Cependant la zone endommagée est relativement large, ce qui correspond assez mal au type de rupture (localisée) observé. On a l'impression que la régularisation non-locale conduit à un "étalement" artificiel de l'endommagement quand celui-ci est lié à une propagation d'onde.

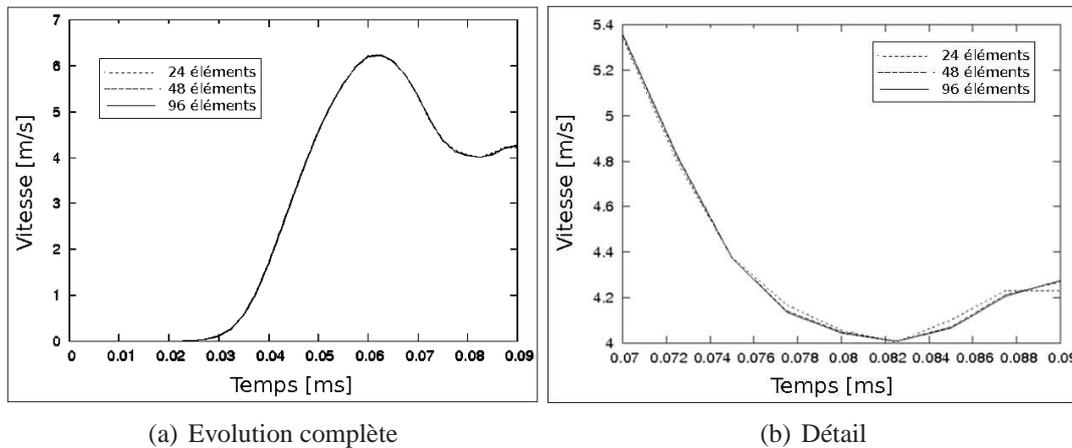


FIG. 4.10: Evolution de la vitesse d'éjection régularisation non-locale (impact rapide)

Les courbes de l'évolution de la vitesse d'éjection (fig. 4.10) montrent, comme les cartes d'endommagement, une régularisation parfaite.

### 3.1.4 Régularisation par endommagement à effet retard et non-local

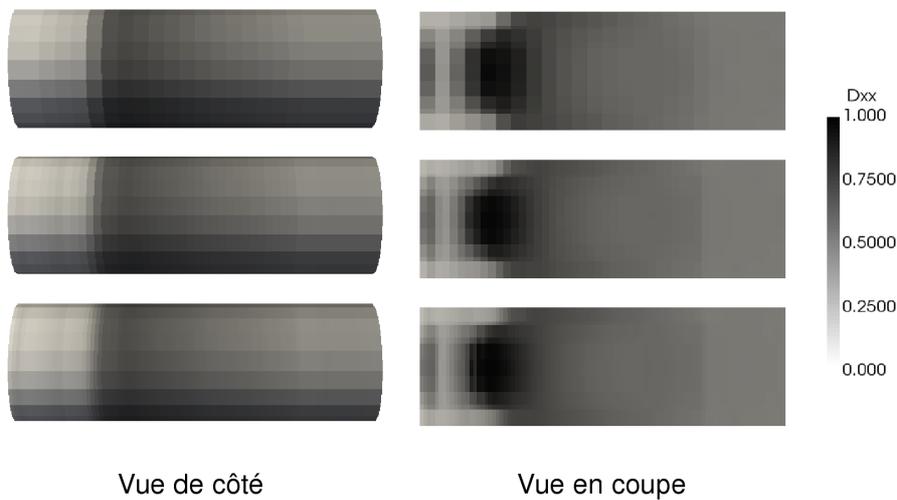
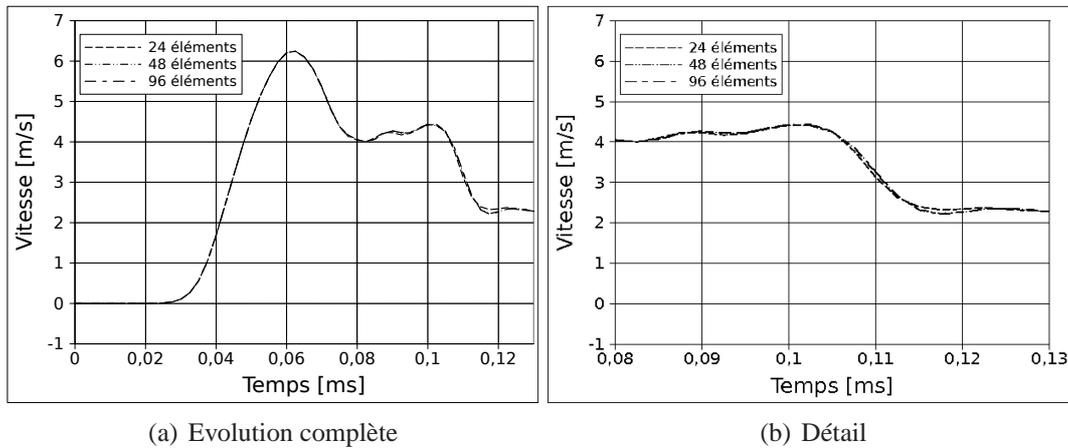


FIG. 4.11: Cartes d'endommagement régularisation non-locale et effet retard (impact rapide)

Pour le cas de la régularisation non-locale pour le modèle avec effet de vitesse, l'endommagement n'atteint pas (tout du moins sur les bords) sa valeur critique  $D_c$ , l'endommagement maximal est ici de l'ordre de 0,85. Néanmoins, on constate sur une coupe transversale que l'endommagement atteint à coeur est maximal et bien régularisé. Il semblerait que l'on rencontre des difficultés à traiter ce qu'il se passe sur les bords quand on combine effet retard et régularisation non-locale. Les courbes d'évolution de la vitesse d'éjection montrent une



**FIG. 4.12:** Evolution de la vitesse d'éjection régularisation non-locale et effet retard (impact rapide)

régularisation assez moyenne, meilleure que sans aucune régularisation, mais néanmoins moins bonne qu'avec l'effet retard ou le non-local seul.

## 3.2 Impact lent

### 3.2.1 Paramètres de la simulation numérique

On choisit d'appliquer pour l'impact lent la même valeur de déplacement maximum, mais on multiplie le temps de montée en charge par un facteur 4. La nouvelle fonction du déplacement imposé en fonction du temps est donné à la figure 4.13.

Le temps nécessaire pour atteindre le déplacement maximum imposé est maintenant de 0,24 ms. Comme la vitesse de propagation des ondes reste constante (elle n'est fonction que des paramètres matériau qui restent inchangés), garder la même géométrie d'éprouvette que précédemment conduirait à une superposition quasi-permanente d'ondes dans l'éprouvette. L'onde incidente met en effet environ 0,06 ms pour traverser l'éprouvette de 12 cm, soit 4 fois moins de temps que la durée totale du chargement. On décide donc d'augmenter la longueur de l'éprouvette afin d'atteindre la fin du chargement avant que l'onde ne commence à se réfléchir. La nouvelle longueur est 4 fois supérieure à celle de l'éprouvette précédente, soit une longueur de 96 cm. On choisit néanmoins de conserver la même discrétisation que précédemment en 24, 48, 96 et 184 éléments dans la longueur, ce qui implique donc une taille d'éléments 4 fois plus grande. Les différents maillages, toujours en 3D, sont présentés sur la figure 4.14

La vitesse de déformation calculée est beaucoup plus lente mais tout aussi chahutée que pour l'impact rapide. La vitesse de déformation maximale est de l'ordre de  $3 \text{ s}^{-1}$ , ce qui se situe à la limite entre les deux régimes de vitesse.

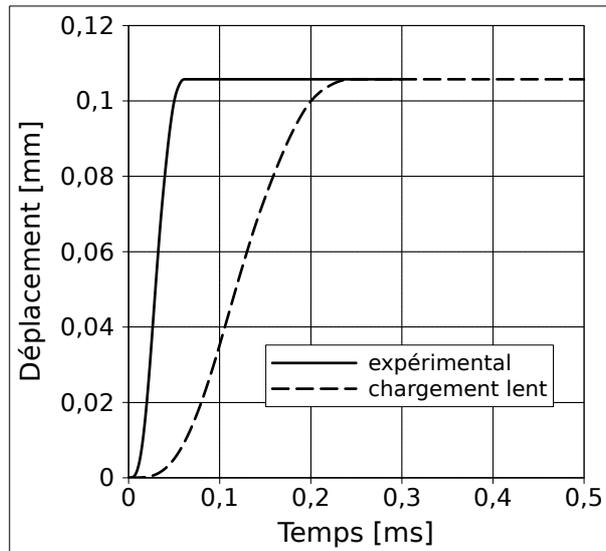


FIG. 4.13: Chargement appliqué pour l'impact lent

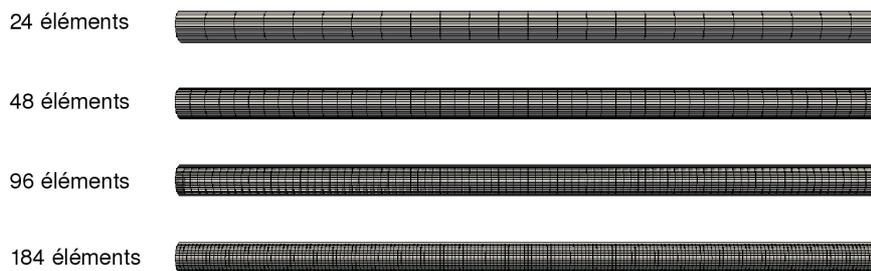


FIG. 4.14: Maillages 3D pour l'impact lent avec nombres d'éléments dans la longueur



FIG. 4.15: Vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  à  $t=0,4\text{ms}$

### 3.2.2 Sans régularisation

Pour le modèle d'endommagement anisotrope initial, les cartes d'endommagement mettent clairement en évidence la localisation. Plus le maillage est fin et plus la zone endommagée est étroite (fig 4.22). Les vitesses d'éjection sont elles aussi des indicateurs de la dépendance au

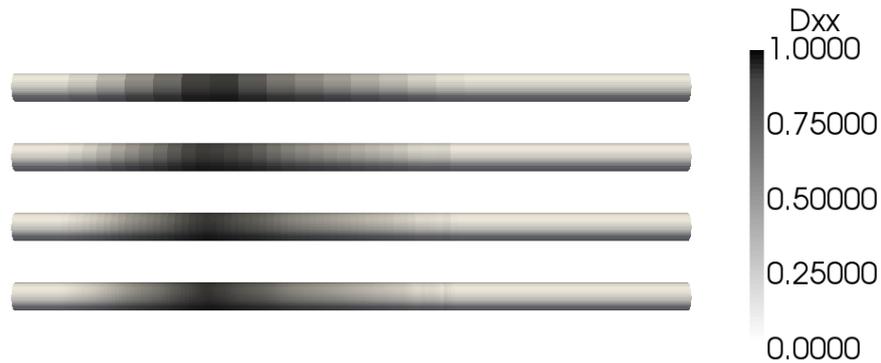


FIG. 4.16: Cartes d'endommagement sans régularisation - impact lent

maillage dans ce cas, on obtient ici des réponses en fin de simulations profondément différentes (fig. 4.17)

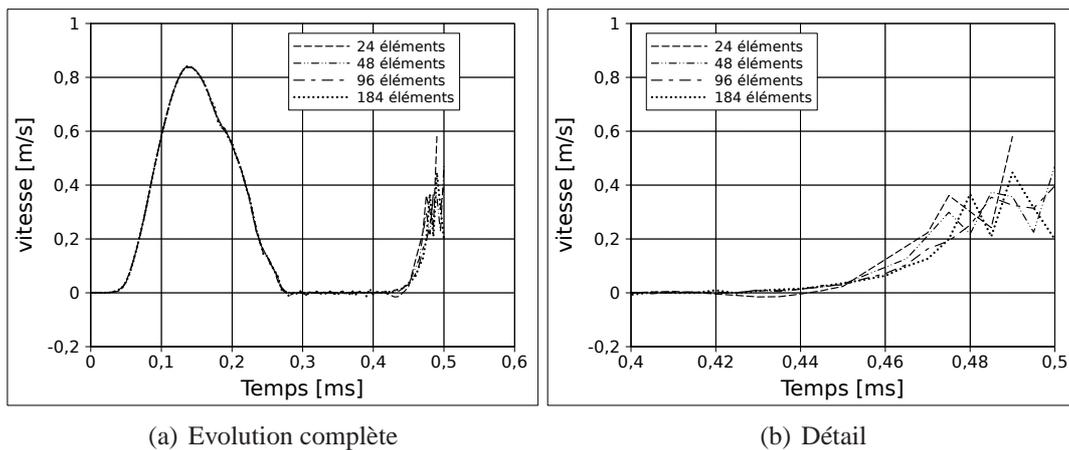


FIG. 4.17: Evolution de la vitesse d'éjection sans régularisation (impact lent)

### 3.2.3 Régularisation par endommagement à effet retard

Comme on pouvait s'y attendre, la régularisation par effet retard est sans effet pour des calculs dynamiques lents. Les cartes d'endommagement (fig. 4.18) sont clairement dépendantes du maillage et les courbes de vitesse d'éjection (fig 4.19) ne se superposent pas.

### 3.2.4 Régularisation non-locale

La régularisation non-locale pour une vitesse d'impact lente présente de bons résultats, l'endommagement (fig. 4.20) n'est pas localisé, et les vitesses d'éjection (fig 4.21) sont également régularisées.

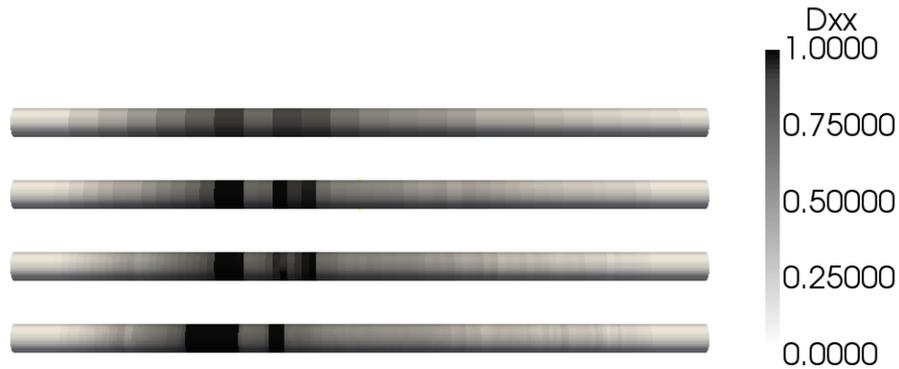


FIG. 4.18: Carte d'endommagement suivant  $x$  avec effet retard à  $t=0,55$  ms (impact lent)

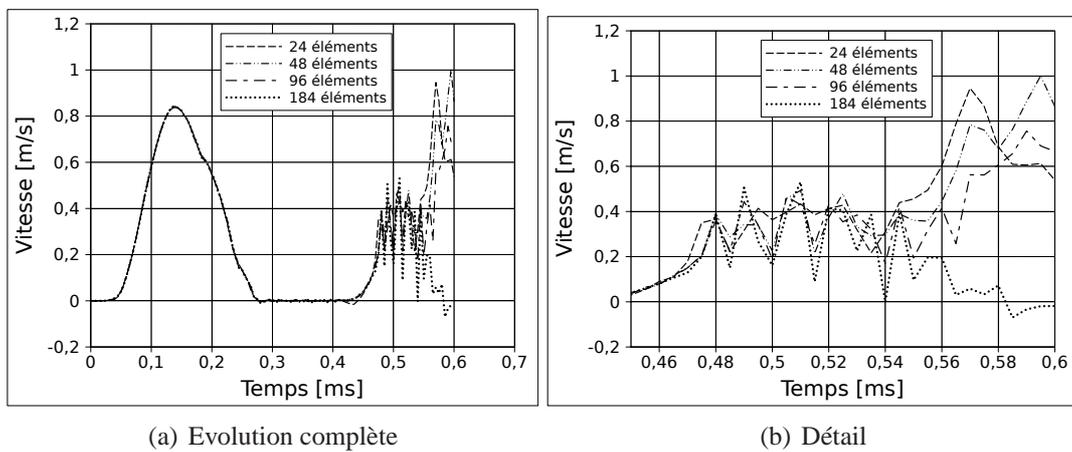


FIG. 4.19: Evolution de la vitesse d'éjection avec effet retard (impact lent)

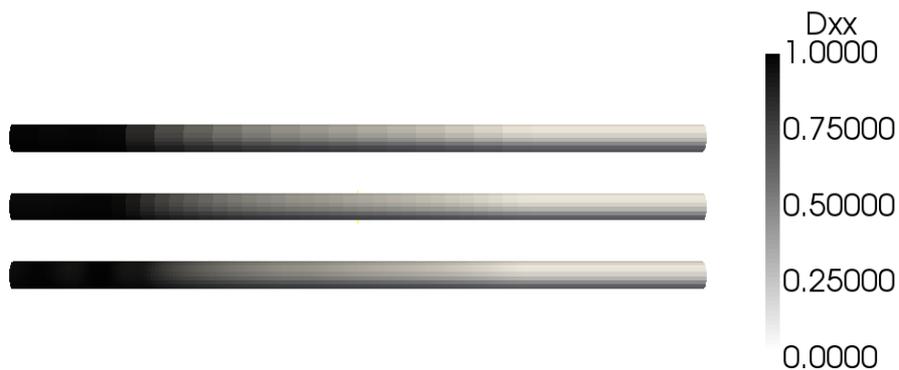


FIG. 4.20: Cartes d'endommagement régularisation non-locale (impact lent)

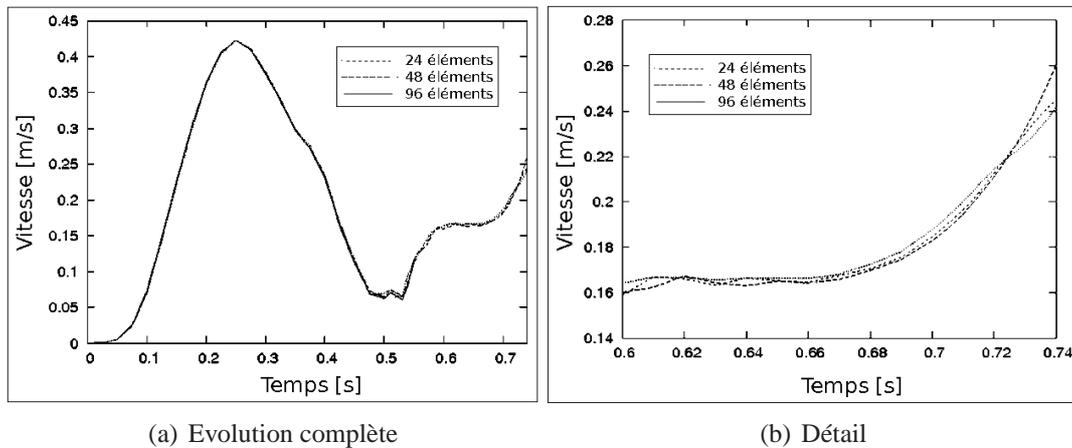


FIG. 4.21: Evolution de la vitesse d'éjection régularisation non-locale (impact lent)

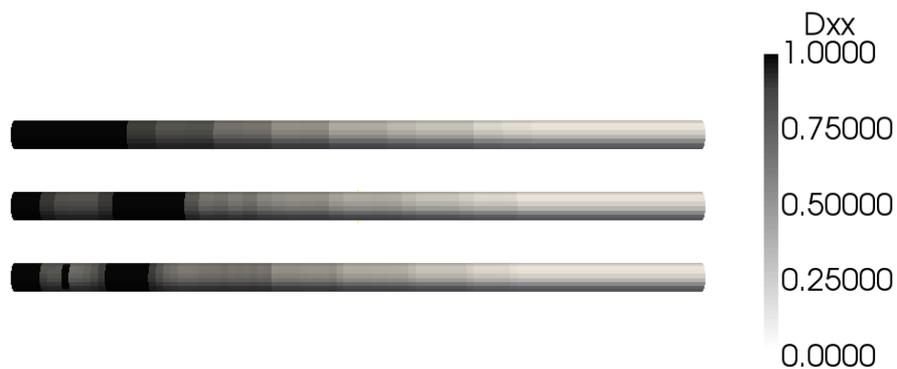


FIG. 4.22: Cartes d'endommagement régularisation non-locale et effet retard (impact lent)

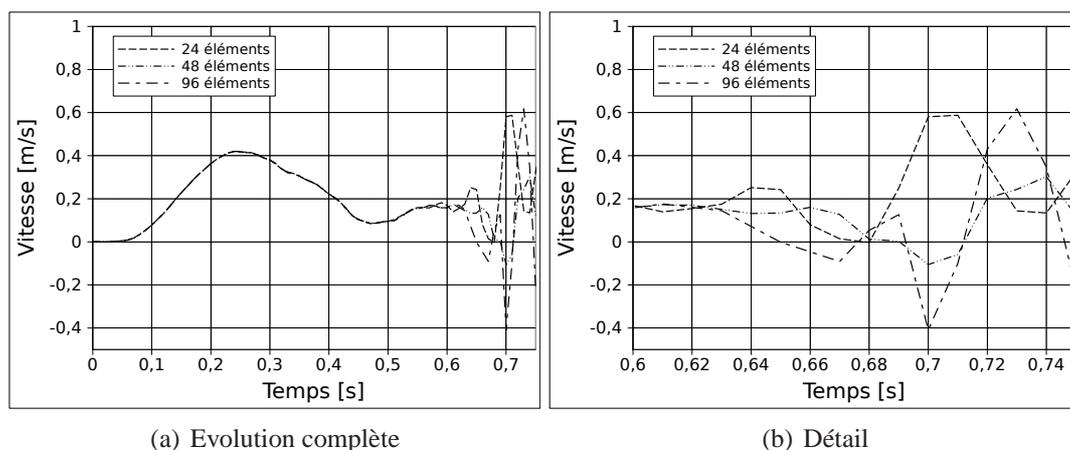
### 3.2.5 Regularisation par endommagement à effet retard non-local

L'effet retard combiné à l'endommagement non-local donne à nouveau des résultats assez peu satisfaisants aussi bien pour les cartes d'endommagement (fig.4.22) que pour les vitesses d'éjection (fig.4.23). En revanche, le problème que l'on rencontrait pour l'impact rapide d'un endommagement non uniforme sur la section ne se retrouve plus dans ce cas.

### 3.2.6 Discussion sur la régularisation

Cet exemple aura permis de montrer que pour des sollicitations dynamiques rapides (ici  $\dot{\epsilon} \simeq 100s^{-1}$ ) la régularisation par effet retard était particulièrement adaptée et suffisante par elle-même. De plus la manière dont l'effet de vitesse a été introduit dans le modèle permet à la fois de régulariser le problème en dynamique et de reproduire correctement l'augmentation de la résistance dynamique en traction  $f_t^{dyn}$  pour toutes les vitesses de sollicitation.

Pour cette même gamme de vitesse de sollicitation, la régularisation non-locale est elle aussi



**FIG. 4.23:** Evolution de la vitesse d'éjection régularisation non-locale et effet retard (impact lent)

efficace, mais la zone endommagée est excessivement large. D'autre part, l'effet de vitesse n'est pas reproduit.

Pour les vitesses lentes  $\dot{\epsilon} \simeq 3s^{-1}$ , l'effet retard ne régularise pas la solution alors que le calcul non-local donne de bons résultats.

La combinaison des deux limiteurs de localisation conduit à un état d'endommagement en dynamique rapide qui n'est pas homogène sur la section de l'éprouvette, les bords sont moins endommagés que la partie centrale. Le problème semble ne pas apparaître pour l'impact lent sans toutefois donner un résultat complètement satisfaisant.

Rappelons enfin que la durée d'un calcul non local est environ 20 fois supérieure à la durée du même calcul en local, ce qui exclut son utilisation avec un code explicite. En effet, en explicite, le pas de temps est volontairement réduit, ce qui conduit à effectuer un nombre très important de pas de temps. Il n'est donc pas concevable d'introduire ce type de régularisation qui rendrait quasiment inabordable le moindre calcul.

## 4 Un nouveau type d'instabilité due à l'anisotropie induite

### 4.1 Origine de l'instabilité

Dans le cas du modèle d'endommagement anisotrope développé (mais également dans d'autres modèles [BO90, Fic96]...), l'anisotropie est dite induite, c'est à dire que le matériau initialement isotrope acquiert un comportement anisotrope en fonction du chargement, (l'élasticité devenant orthotrope). Les déformations imposées (comme les déformations longitudinales précédentes) mais également les déformations non imposées directement (comme les déformations radiales) sont calculées par le modèle et affectées par l'endommagement (via un coefficient de Poisson pour les déformations radiales). Or ce sont les déformations qui pilotent l'endommagement, ou plus exactement les déformations positives par la loi  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle_+$ .

Dans le cas d'un chargement en traction selon l'axe 1 la seule déformation positive est la déformation imposée, le risque de rencontrer une instabilité est, nous allons le comprendre, inexistant. En revanche, en compression, les déformations positives sont celles, latérales  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{33}$ , calculées via le modèle, c'est ce qui provoque, nous allons le montrer, l'apparition d'un comportement erratique pour des contraintes de compression élevées (cf. figure 4.24) où l'on représente l'évolution des coefficients de Poisson apparents suivant  $y$  et  $z$  en fonction de la déformation de compression imposée suivant  $x$ ).

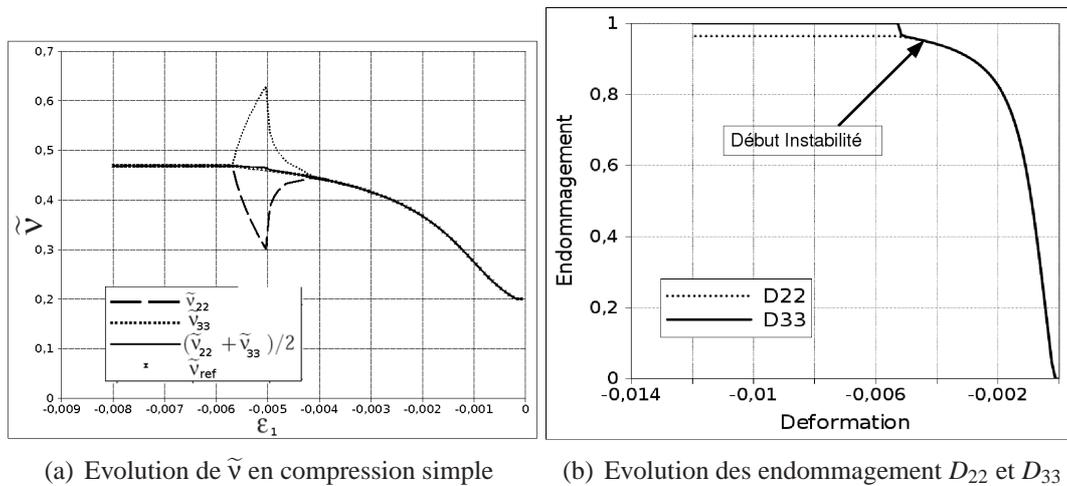


FIG. 4.24: Instabilité en compression simple suivant 1

Ce paragraphe est consacré à l'analyse de ce comportement, à la justification analytique de l'existence de cette instabilité et enfin à la proposition d'une solution pour s'affranchir du problème.

## 4.2 Existence d'une instabilité en compression simple

Un comportement instable signifie que s'il existe une erreur à un pas de temps  $n$ , au pas de temps  $n + 1$ , cette erreur s'amplifie. Si on note  $\delta X_n$  l'erreur sur  $X$  au pas de temps  $n$ , alors  $\delta X_{n+1} > \delta X_n$ .

Nous allons montrer que le comportement en compression simple du modèle anisotrope initial est instable. On suppose que cette instabilité se traduit dans le cas d'un chargement d'axe 1, par un endommagement porté selon la loi d'évolution  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda}(\boldsymbol{\epsilon})_+^2$  par les deux directions latérales,  $D_2$  et  $D_3$ , éventuellement différent. En notant  $\delta(\mathbf{D})_n$  l'erreur sur  $\mathbf{D}$  au temps  $n$  et  $\delta(\mathbf{D})_{n+1}$  l'erreur au temps  $n + 1$ , la relation linéaire qui lie les deux erreurs s'écrit :  $\delta(\mathbf{D})_{n+1} = \mathbf{C}\delta(\mathbf{D})_n$ . Le comportement sera instable lorsque  $\rho(\mathbf{C}) > 1$ , avec  $\rho(\mathbf{C})$  le rayon spectral de  $\mathbf{C}$ .

### 4.2.1 Expression des coefficients de Poisson apparents

En considérant le cas d'une compression simple pilotée par la déformation suivant 1, on connaît (impose)  $\varepsilon_1$  et on obtient par le calcul les déformations transverses  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ . Les relations suivantes régissent ces déformations :

$$\varepsilon_2 = -\tilde{\nu}_{12}\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = -\tilde{\nu}_{13}\varepsilon_1 \quad (4.31)$$

Si l'on exprime la loi d'élasticité couplée à l'endommagement anisotrope sous forme scalaire  $\varepsilon_i = B_i \frac{\sigma}{E}$  en compression, on peut exprimer les coefficients de Poisson effectifs :

$$\tilde{\nu}_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{B_2}{B_1} \quad \text{et} \quad \tilde{\nu}_{13} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{B_3}{B_1} \quad (4.32)$$

Les termes  $B_i$  sont obtenus à partir de la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} (\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{H})^D + \frac{1-2\nu}{3E} \left( \frac{\langle \text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle}{1-\eta_t D_H} - \langle -\text{tr}\boldsymbol{\sigma} \rangle \right) \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} = (\mathbf{1}-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

avec  $\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma < 0$ , on a donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} ((\mathbf{1}-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{1}-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}})^D + \frac{1-2\nu}{3E} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{1} \quad (4.34)$$

Dans le cas où  $D_1 = 0$  et  $D_2 = D_3$ , avec  $\mathbf{H}$  sous la forme :

$$\mathbf{H} = (\mathbf{1}-\mathbf{D})^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} (1-D_1)^{-\frac{1}{2}} = 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-D_2)^{-\frac{1}{2}} = (1-D_3)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & (1-D_3)^{-\frac{1}{2}} = (1-D_2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{1+\nu}{9} \left( 4 + \frac{2}{1-D_2} \right) + \frac{1-2\nu}{3} \quad (4.35)$$

$$B_2 = B_3 = \frac{1+\nu}{9} \left( -\frac{1}{1-D_2} - 2 \right) + \frac{1-2\nu}{3} \quad (4.36)$$

Si maintenant,  $D_2 \neq D_3$ , on a alors :

$$B_1 = \frac{1+\nu}{9} \left( 4 + \frac{1}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3} \right) + \frac{1-2\nu}{3} \quad (4.37)$$

$$B_2 = \frac{1+\nu}{9} \left( -2 - \frac{2}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3} \right) + \frac{1-2\nu}{3} \quad (4.38)$$

$$B_3 = \frac{1+\nu}{9} \left( -2 + \frac{1}{1-D_2} - \frac{2}{1-D_3} \right) + \frac{1-2\nu}{3} \quad (4.39)$$

et

$$\tilde{\nu}_{12} = -\frac{\frac{1+\nu}{3}(-2 - \frac{2}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3}) + 1 - 2\nu}{\frac{1+\nu}{3}(4 + \frac{1}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3}) + 1 - 2\nu} \quad (4.40)$$

$$\tilde{\nu}_{13} = -\frac{\frac{1+\nu}{3}(-2 - \frac{2}{1-D_3} + \frac{1}{1-D_2}) + 1 - 2\nu}{\frac{1+\nu}{3}(4 + \frac{1}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3}) + 1 - 2\nu} \quad (4.41)$$

qui sont les expressions des coefficients de Poisson du matériau endommagé. Les déformations transverses en compression s'en déduisent par l'équation (4.34).

#### 4.2.2 Problème complet

On considère qu'il existe une solution de référence telle que  $D_2 = D_3$ , pour laquelle on peut écrire  $\Delta \mathbf{D}^{ref} = \Delta \lambda^{ref} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\perp}^2$  soit encore en compression ( $D_1 = 0$ ) :

$$\Delta D_2^{ref} = \Delta \lambda^{ref} \tilde{\nu}_{12}^2 \varepsilon_1^2 \quad (4.42)$$

$$\Delta D_3^{ref} = \Delta \lambda^{ref} \tilde{\nu}_{13}^2 \varepsilon_1^2 \quad (4.43)$$

On peut alors exprimer l'endommagement calculé numériquement aux instants  $n$  et  $n+1$ ,  $\mathbf{D}_n$ ,  $\mathbf{D}_{n+1}$  comme la somme de la solution de référence et d'une erreur ou perturbation aux mêmes pas de temps  $\delta(\mathbf{D})_n$  et  $\delta(\mathbf{D})_{n+1}$  :

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_n^{ref} + \delta(\mathbf{D})_n \text{ et } \mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_{n+1}^{ref} + \delta(\mathbf{D})_{n+1} \quad (4.44)$$

Par la suite on simplifiera la notation en écrivant  $\delta \mathbf{D}_n$  pour  $\delta(s\mathbf{D})_n$ .

La discrétisation temporelle conduit à l'expression suivante :

$$\Delta D_2 = D_2^{n+1,ref} - D_2^{n,ref} + \delta D_2^{n+1} - \delta D_2^n \quad (4.45)$$

$$\Delta D_2 = \Delta D_2^{ref} + \delta D_2^{n+1} - \delta D_2^n \quad (4.46)$$

$$\Delta D_2 = \Delta \lambda^{ref} \tilde{\nu}_{12}^2 \varepsilon_1^2 + \delta D_2^{n+1} - \delta D_2^n \quad (4.47)$$

avec  $\tilde{\nu}_{12} = \tilde{\nu}_{12}(D_2^{n+1,ref} + \delta D_2^{n+1}, D_3^{n+1,ref} + \delta D_3^{n+1})$  par les équations (4.44 et 4.45). On développe l'expression précédente au premier ordre en  $\delta D_2$  et  $\delta D_3$  pour obtenir :

$$\Delta D_2^{ref} + \delta D_2^{n+1} - \delta D_2^n = (\Delta \lambda^{ref} + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_2} \delta D_2 + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_3} \delta D_3) \varepsilon_1^2 (\tilde{\nu}_{12}^{ref,2} + \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_2} \delta D_2 + \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_3} \delta D_3) \quad (4.48)$$

et

$$\Delta D_3^{ref} + \delta D_3^{n+1} - \delta D_3^n = (\Delta \lambda^{ref} + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_2} \delta D_2 + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_3} \delta D_3) \varepsilon_1^2 (\tilde{\nu}_{13}^{ref,2} + \frac{\partial \tilde{\nu}_{13}}{\partial D_2} \delta D_2 + \frac{\partial \tilde{\nu}_{13}}{\partial D_3} \delta D_3) \quad (4.49)$$

Pour la solution de référence, on a  $\Delta D_i^{ref} = \Delta \lambda^{ref} \varepsilon_1^2 \tilde{\nu}_{i3}^{ref,2}$ , si bien que, pour un schéma implicite (dérivées calculées au pas de temps  $n+1$ ) la différence des erreurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta D_2^{n+1} - \delta D_2^n &= \quad (4.50) \\ \varepsilon_1^2 [\delta D_2^{n+1} & \left( \Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_2} \Big|_{n+1} + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_2} \Big|_{n+1} \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_2} \Big|_{n+1} \delta D_2^{n+1} + \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_3} \Big|_{n+1} \delta D_3^{n+1} + \tilde{v}_{12}^{ref2} \right) \\ & + \delta D_3^{n+1} \left( \Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_3} \Big|_{n+1} + \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial D_3} \Big|_{n+1} \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_2} \Big|_{n+1} \delta D_2^{n+1} + \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_3} \Big|_{n+1} \delta D_3^{n+1} + \tilde{v}_{12}^{ref2} \right)] \end{aligned}$$

avec ici  $\frac{\partial \tilde{v}_{1i}}{\partial D_{jj}} = \frac{\partial \tilde{v}_{1i}}{\partial D_{ii}} \Big|_{n+1}$ . En considérant les termes du second ordre comme négligeables, et de développant de manière identique  $\delta D_3^{n+1} - \delta D_3^n$  on peut mettre le système sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1^2 \left( \Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_2} - \tilde{v}_{12}^{ref2} \frac{\partial \Delta \lambda^{ref}}{\partial D_2} \right) & \varepsilon_1^2 \left( -\Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_3} - \tilde{v}_{12}^{ref2} \frac{\partial \Delta \lambda^{ref}}{\partial D_3} \right) \\ \varepsilon_1^2 \left( -\Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{13}^2}{\partial D_2} - \tilde{v}_{13}^{ref2} \frac{\partial \Delta \lambda^{ref}}{\partial D_2} \right) & 1 - \varepsilon_1^2 \left( \Delta \lambda^{ref} \frac{\partial \tilde{v}_{13}^2}{\partial D_3} - \tilde{v}_{13}^{ref2} \frac{\partial \Delta \lambda^{ref}}{\partial D_3} \right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}^{-1}} \begin{pmatrix} \delta D_2^n \\ \delta D_3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta D_2^{n+1} \\ \delta D_3^{n+1} \end{pmatrix}$$

où la matrice  $\mathbf{C}$  représente la manière (stable ou instable) dont se propage une perturbation ou erreur numérique  $\delta \mathbf{D}$  sur l'endommagement  $\mathbf{D}$ . Montrer que  $\rho(\mathbf{C}) > 1$  et donc l'instabilité revient à montrer que la plus petite des valeurs propres de  $\mathbf{C}^{-1}$  est strictement inférieure à 1, soit  $\min(Vp(\mathbf{C}^{-1})) < 1$

#### 4.2.3 Problème simplifié : justification de l'hypothèse $\delta D_3 = -\delta D_2$

A partir de la simulation numérique d'un cube en compression simple, on constate que la moyenne des coefficients de Poisson apparents  $\frac{\tilde{v}_{12} + \tilde{v}_{13}}{2}$  est égale au coefficient de Poisson apparent pour la solution de référence  $D_2^{ref} = D_3^{ref}$ ,  $\tilde{v}_{12} = \tilde{v}_{13} = \tilde{v}_{ref}$  (fig. 4.24(a)). La solution stable étant obtenue en forçant  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , ce qui équivaut à écrire que :  $\delta \tilde{v}_{13} = -\delta \tilde{v}_{12}$ .

Or on a :

$$\delta D_2 = \delta D_2(\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{13}) = \frac{\partial \delta D_2}{\partial \tilde{v}_{12}} \delta \tilde{v}_{12} + \frac{\partial \delta D_2}{\partial \tilde{v}_{13}} \delta \tilde{v}_{13} \quad (4.51)$$

$$\delta D_3 = \delta D_3(\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{13}) = \frac{\partial \delta D_3}{\partial \tilde{v}_{12}} \delta \tilde{v}_{12} + \frac{\partial \delta D_3}{\partial \tilde{v}_{13}} \delta \tilde{v}_{13} \quad (4.52)$$

ainsi que :

$$\frac{\partial \tilde{v}_{12}}{D_2} = \frac{\partial \tilde{v}_{13}}{D_3} \quad \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{D_3} = \frac{\partial \tilde{v}_{13}}{D_2} \quad (4.53)$$

si bien que l'on obtient finalement :

$$\delta D_3 = \delta D_2 \left( \frac{\partial \delta D_2}{\partial \tilde{v}_{13}} - \frac{\partial \delta D_2}{\partial \tilde{v}_{12}} \right) = -\delta D_2 \quad (4.54)$$

$$\delta \tilde{v}_{13} = -\delta \tilde{v}_{12} \Leftrightarrow \delta D_3 = -\delta D_2 \quad (4.55)$$

Ces calculs montrent que l'hypothèse  $\delta D_3 = -\delta D_2$  (que l'on va considérer pour simplifier l'analyse) est justifiée. Cette hypothèse implique également que  $tr\Delta\mathbf{D} = tr\Delta\mathbf{D}^{ref}$ , ce qui revient à dire que le multiplicateur est pour les deux cas :  $\Delta\lambda^{ref} = \Delta\lambda$  : sa valeur n'est pas affectée par la perturbation.

#### 4.2.4 Preuve de l'existence d'une instabilité pour le problème simplifié

La manière dont la perturbation se propage, précédemment écrite sous forme matricielle, se simplifie sous l'hypothèse  $\delta D_3 = -\delta D_2$ ,

$$\delta D_2^{n+1} = \frac{\delta D_2^n}{1 - \varepsilon_1^2 (\Delta\lambda (\frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_2} - \frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_3}) - \tilde{v}_{12}^{ref} (\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial D_2} - \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial D_3}))} \quad (4.56)$$

Prouver que le schéma numérique est instable revient donc à prouver que  $\delta D_2^{n+1} > \delta D_2^n$  et donc que le dénominateur est inférieur à 1. Pour cela, exprimons tout d'abord les dérivées des coefficients de Poisson (en posant  $\alpha(D_2, D_3) = \frac{1+\nu}{3} (4 + \frac{1}{1-D_2} + \frac{1}{1-D_3}) + 1 - 2\nu$ ) :

$$\frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_2} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{1+\nu}{(1-D_2)^2} \left( \frac{1+\nu}{9} \left( -2 - \frac{3}{1-D_3} \right) - (1-2\nu) \right) < 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_3} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{(1+\nu)^2}{9(1-D_3)^2} \left( 6 - \frac{1}{1-D_2} \right) \quad (4.58)$$

D'autre part, comme on a  $(\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial D_2} - \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial D_3} = 0)$  et  $\Delta\lambda > 0$  la condition pour l'instabilité devient :

$$\frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_2} - \frac{\partial \tilde{v}_{12}^2}{\partial D_3} > 0 \quad (4.59)$$

La détermination du signe est faite de manière graphique (figure 4.25) en supposant  $D_2 = D_3$ , hypothèse raisonnable dans la mesure où les deux valeurs à l'origine de l'instabilité sont très proches (fig. 4.24(b)). L'expression est toujours positive, l'instabilité existe donc bien en compression, et ce quelle que soit la valeur de l'endommagement.

En traction suivant l'axe 1, l'endommagement n'est portée que par une seule composante,  $D_1$ , et son évolution est gouvernée par  $\varepsilon_1 > 0$ , la déformation imposée. Elle est donc par nature non affectée par l'endommagement et donc insensible au type d'instabilité considéré.

### 4.3 Influence du choix du schéma

Le calcul précédent a été fait pour un schéma implicite  $\Delta\mathbf{D} = \Delta\lambda \langle \varepsilon_{n+1} \rangle_+^2$ . Les dérivées des  $\Delta\lambda$  et des  $\tilde{v}_{1i}$  ont été calculées au pas de temps  $n+1$ . En reprenant le même calcul pour une discrétisation explicite de la loi d'évolution de l'endommagement  $\Delta\mathbf{D} = \Delta\lambda \langle \varepsilon_n \rangle_+^2$  (dérivée au temps  $n$ ), on obtient :

$$\delta D_2^{n+1} = \left( 1 + \Delta\lambda \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_2} \Big|_n - \frac{\partial \tilde{v}_{12}}{\partial D_3} \Big|_n \right) \right) \delta D_2^n \quad (4.60)$$

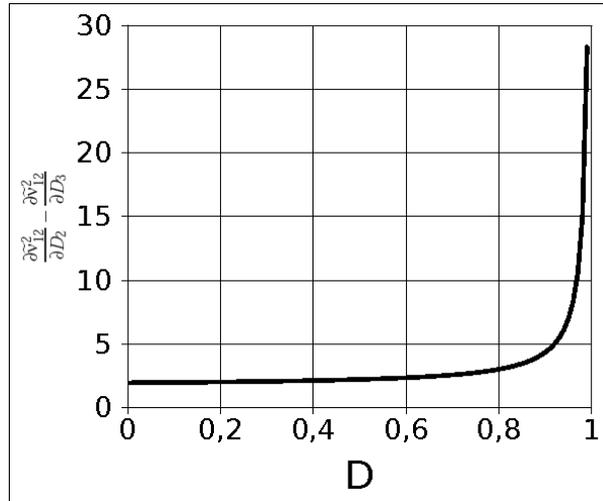


FIG. 4.25: Positivité de  $\frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_3^2}$

D'après le résultat ci-dessus (fig 4.25) on montre à nouveau que  $\delta D_2^{n+1} > \delta D_2^n$ , et donc que le schéma est instable également. Cependant, si l'on compare les valeurs de  $1 + \Delta\lambda \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_3^2} \right)$  et de  $\frac{1}{1 - \Delta\lambda \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_3^2} \right)}$  on montre que :

$$1 + \Delta\lambda \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_3^2} \right) > \frac{1}{1 - \Delta\lambda \varepsilon_1^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_2^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_{12}}{\partial D_3^2} \right)} \quad (4.61)$$

On en conclut donc que considérer que la direction de  $\Delta \mathbf{D}$  est donnée par les déformations positives à  $n+1$ ,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+$ , est plus instable que de la considérer donnée par  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_+$ , ce qui signifie que l'instabilité est plus violente ou encore que l'erreur se propage plus rapidement donc plus tôt.

On se propose donc de modifier le schéma d'intégration de la loi de comportement de manière à ralentir l'instabilité en prenant comme directions d'endommagement les directions des déformations positives au pas de temps  $n$  (et non plus  $n+1$ ). La loi d'évolution de l'endommagement initiale (pour les chargements monotones) :

$$\Delta \mathbf{D} = \Delta\lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \quad \text{devient :} \quad \boxed{\Delta \mathbf{D} = \Delta\lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle_+^2} \quad (4.62)$$

La figure 4.26 montre l'influence sur la réponse en compression du schéma choisi pour la recherche des directions d'endommagement.

Pour les chargements cycliques et dynamiques, les mêmes modifications sont apportées à la loi d'évolution de  $\mathbf{D}$ .

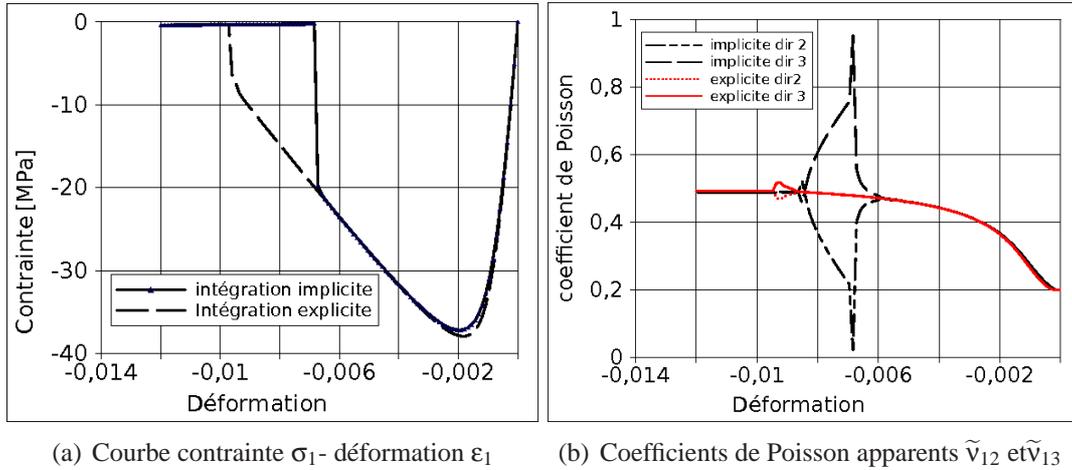


FIG. 4.26: Influence du schéma d'intégration sur l'instabilité (compression suivant 1)

#### 4.4 Influence de la discrétisation du chargement

Lorsque l'on rencontre une instabilité, la discrétisation du chargement peut avoir une influence importante sur la propagation de l'erreur. Supposons que l'on impose un accroissement de déformation suivant 1  $\delta\epsilon$  entre  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n+1}$  et étudions l'influence sur l'instabilité de la discrétisation du chargement.

Dans le cas où l'on ne fait qu'une seule itération entre  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n+1}$ , on a :

$$\delta D_{n+1} = C\delta D_n \quad (4.63)$$

avec  $C = \frac{1}{1 - \Delta\lambda\epsilon_1^2 \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_2} - \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_3} \right)}$  pour un schéma implicite et  $1 + \Delta\lambda\epsilon_1^2 \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_2} - \frac{\partial \tilde{\nu}_{12}}{\partial D_3} \right)$  pour un schéma explicite. Si, maintenant, on divise par  $k$  le chargement et que l'on effectue désormais  $k$  itérations entre  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_{n+1}$ , l'erreur sur  $D_{n+1}$  s'écrit :

$$\delta D_{n+1} \simeq C\delta D_{n+\frac{k-1}{k}} \simeq C^2\delta D_{n+\frac{k-2}{k}} = \dots = C^k\delta D_n \quad (4.64)$$

Comme on a montré que  $C > 1$  quel que soit le schéma choisi, on a donc  $C^k > C$ , ce qui est équivalent à dire que le schéma devient plus instable lorsque l'on diminue le pas de chargement. C'est bien ce qui a été observé numériquement.

#### 4.5 Influence de la viscosité sur l'instabilité

Les problèmes d'instabilité peuvent souvent être résolus par l'introduction d'une viscosité dans la réponse du modèle [Nee88]. Il a été montré que l'effet retard, qui correspond à une évolution visqueuse de l'endommagement, résolvait les problèmes de dépendance au maillage pour les modèles adoucissants dans une certaine gamme de vitesse.

Le modèle proposé au chapitre 3 permet à la fois de régulariser la solution, mais aussi de reproduire l'effet de vitesse en traction. L'effet de vitesse en compression pouvant être reproduit par les effets inertiels, l'action de la viscosité se limitait alors à la traction. On se propose ici d'étendre l'utilisation de cette loi visqueuse à la compression.

$$\mathcal{H}(-tr\boldsymbol{\varepsilon})tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_{\infty}^c(1 - \exp(-b_c(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D}))) \quad (4.65)$$

Un nouveau jeu de paramètre est proposé pour tenir compte du plus faible effet de vitesse en compression. On retient le couple de valeur  $b_c = 0,01$ ,  $\dot{D}_{\infty}^c = 1.10^7 s^{-1}$  (pour les chargement à  $tr\boldsymbol{\varepsilon} < 0$ ) qui permet d'obtenir une augmentation de résistance de 2,1 pour une vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} = 100/s$  et un effet très faible pour les vitesses inférieures.

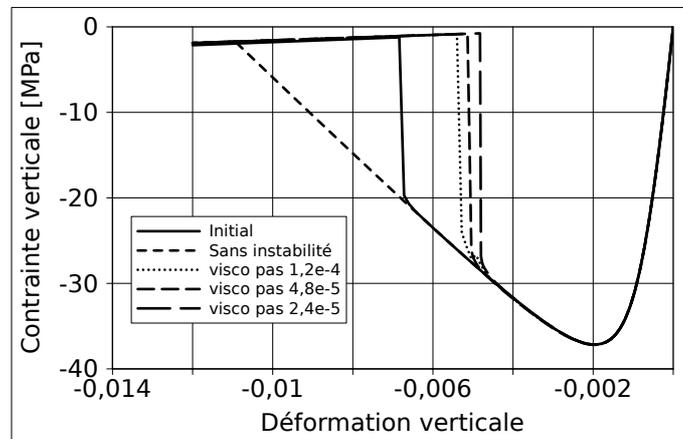


FIG. 4.27: Réponse en compression pour une vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon} = 1.10^{-2}$

La figure 4.27 montre que l'instabilité en compression apparaît en fait plus tôt lorsque l'on introduit la viscosité, même si avant d'atteindre le comportement instable, les réponses sont rigoureusement équivalentes. On observe également que réduire le pas de temps (ou la valeur de l'incrément de déformation) rend le comportement plus instable, comme dans le cas sans viscosité.

Pour les faibles vitesses de déformation la viscosité n'est donc pas la solution adéquate pour les problèmes d'instabilité.

Les figures 4.28 et 4.29(b) montrent que l'instabilité disparaît à partir de  $\dot{\varepsilon} = 100s^{-1}$ , soit à partir du moment où la viscosité est sensible sur la réponse. Mais on constate également que la courbe de l'évolution du coefficient de Poisson apparent change complètement d'allure pour cette vitesse. En effet, l'origine n'est plus à  $\nu = 0,2$  (le paramètre matériau imposé) mais à 0. On comprend bien dans ce cas que ce n'est plus la valeur du coefficient de Poisson qui gouverne les déformations latérales mais les efforts d'inertie. L'instabilité n'existe donc pas en dynamique rapide, et c'est l'inertie et non la viscosité qui stabilise le comportement.

La raison pour laquelle l'apport de viscosité ne stabilise pas le schéma numérique vient du fait que la loi d'évolution visqueuse est isotrope, (on calcule l'évolution de  $tr\dot{\mathbf{D}}$ ), si bien que

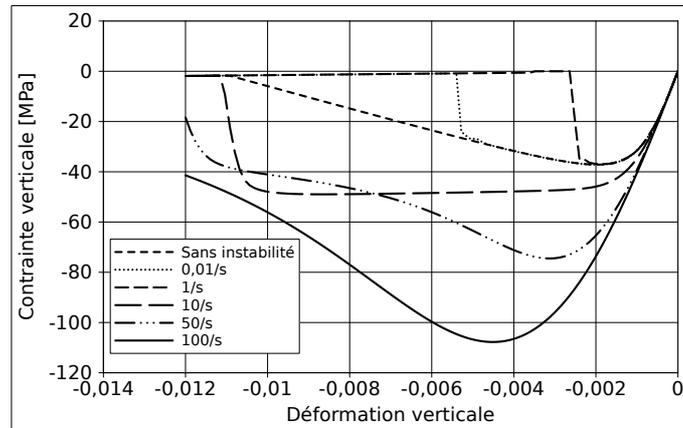
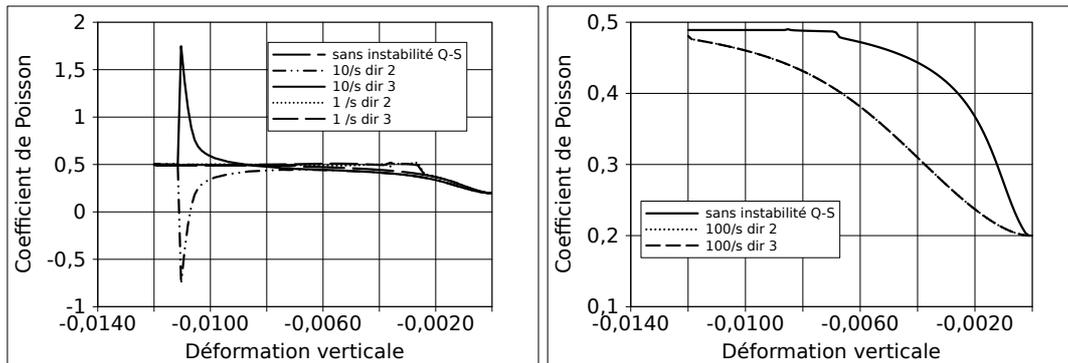


FIG. 4.28: Réponse en compression pour une vitesse de déformation pour différentes vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}$

la viscosité affecte de manière équivalente  $D_2$  et  $D_3$ . Cette manière de procéder ne permet pas de régulariser la solution, il faudrait pour cela introduire une loi d'évolution anisotrope donnant directement  $\dot{D}$  et non  $tr\dot{D}$ .



(a) Coefficients de Poisson apparents  $\dot{\epsilon} = 10/s$  (b) Coefficients de Poisson apparents  $\dot{\epsilon} = 100/s$

FIG. 4.29: Influence de la vitesse de déformation sur le coefficient de Poisson apparent

## 4.6 Nouvelle direction d'endommagement

### 4.6.1 Nouvelle loi d'évolution pilotée par les déformations effectives

Un moyen de supprimer de l'instabilité consiste à modifier la direction d'endommagement. Au lieu de piloter l'évolution de l'endommagement par les déformations positives, on propose de réécrire la loi d'évolution en fonction des déformations effectives positives  $\langle \tilde{\epsilon} \rangle_+$ , les déformations effectives étant calculées par  $\tilde{\epsilon} = \mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ . Ainsi les déformations calculées (en

compression, les déformations latérales) dépendent directement du coefficient de Poisson  $\nu$ , paramètre constant du modèle, et non plus du coefficient de Poisson effectif affecté par l'endommagement. De cette manière, on évite l'apparition de l'instabilité en empêchant la possibilité d'avoir une erreur sur les déformations latérales.

#### 4.6.2 Schéma numérique d'intégration de la loi de comportement

La nouvelle loi d'évolution de l'endommagement devient :

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+^2 \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.66)$$

Cependant, afin de conserver la même réponse du modèle en traction et compression simple, pour cela il est nécessaire de modifier l'expression du multiplicateur d'endommagement  $\delta\lambda$ . On détermine sa nouvelle expression de la manière suivante :

En prenant la trace de cette nouvelle loi d'évolution, on obtient :

$$tr\Delta\mathbf{D} = \Delta\lambda tr \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+^2 = \Delta\lambda \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \sqrt{\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+ : \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+} \quad (4.67)$$

Or, pour la compression ( $f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D} = 0$ , donc pas d'effet de vitesse autre qu'inertiel)

$$tr\Delta\mathbf{D} = tr\mathbf{D}_{n+1} - tr\mathbf{D}_n = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) - tr\mathbf{D}_n \quad (4.68)$$

avec  $tr\mathbf{D}_{n+1}$  obtenue grâce à la fonction critère d'endommagement :

$$f = 0 \leftrightarrow tr\mathbf{D}_{n+1} = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) \quad (4.69)$$

On connaît donc exactement  $\Delta\lambda \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_+^2$ . On peut ainsi réécrire la loi d'évolution :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}) - tr\mathbf{D}_n}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^2} \\ \Delta\mathbf{D} &= \Delta\lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \rangle_+^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

La partie positive du tenseur des déformations équivalentes est obtenue comme pour le tenseur des déformations, par diagonalisation (c.f. chapitre 1). Finalement, on actualise le tenseur d'endommagement  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta\mathbf{D}$ .

De cette manière, on évite l'apparition de l'instabilité (c.f. fig. 4.30), la question de la meilleure stabilité entre recherche explicite ou implicite de la direction d'endommagement ne se pose plus. Les différences en terme de réponse du modèle étant très peu significatives, les deux schémas pourront être considérés comme équivalents.

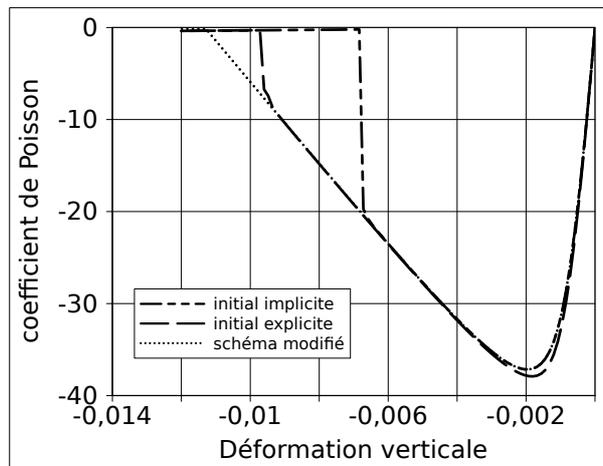


FIG. 4.30: Réponse en compression du nouveau schéma

## 4.7 Influence de l'instabilité sur le résultat d'un calcul de poutre en flexion

L'instabilité décrite ci-dessus semble n'affecter le comportement que dans le cas où l'on a deux endommagements supposés être égaux et où la déformation qui les pilote n'est pas imposée directement mais calculée. Ce cas de figure se rencontre typiquement en compression simple mais pas en traction. Cependant dans la majorité des cas, la ruine d'une structure en béton (ou béton armé) provient des sollicitations de traction plus que de compression, comme c'est le cas par exemple pour une poutre en flexion correctement ferrillée. On va cependant montrer que cette instabilité a un impact important sur le résultat global d'une telle simulation.

### 4.7.1 Paramètres de la modélisation

Le cas test simulé est celui de la poutre en flexion 3 points du projet national CEOS.fr (Comportement et Evaluation des Ouvrage Spéciaux, fissuration retrait) [CEO, CLN<sup>+</sup>09]. Cet exemple s'inspire lui-même d'un précédent benchmark organisé par EDF [GCD03]. La géométrie, le ferrailage, l'instrumentation et les conditions limites de l'essai sont présentés sur la figure 4.31. La longueur totale de la poutre est de 5,4 m et la distance entre appuis de 5,0 m.

Le chargement expérimental est un chargement en effort appliqué par un verin au centre de la poutre. L'effort maximal imposé est de 304 kN. Le maillage utilisé est celui de la figure 4.32, il est constitué de 4800 éléments cubiques (5,6 cm × 4 cm × 5 cm). Les armatures sont représentées explicitement par des éléments de type barre. La taille de ces éléments est la même que celle des éléments volumiques (soit 88 éléments dans le sens de la longueur). Tous les noeuds coïncidants de ces deux maillages sont connectés si bien que l'on reproduit un comportement de type adhérence parfaite entre les armatures et le béton.

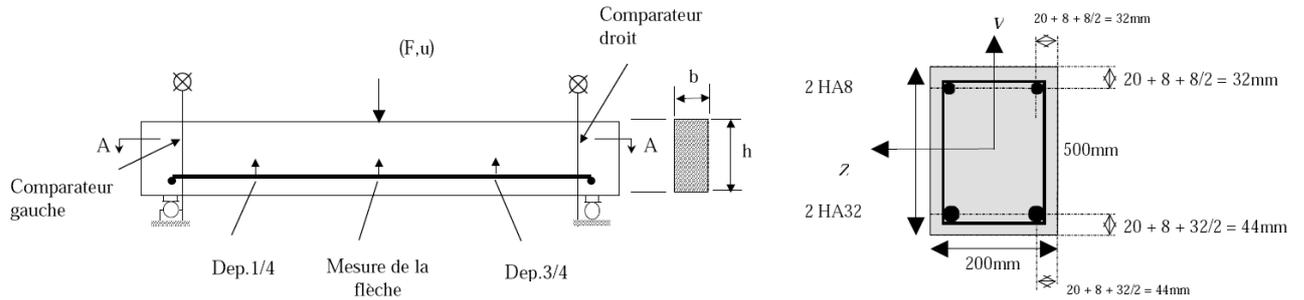


FIG. 4.31: Géométrie et ferrailage de la poutre étudiée

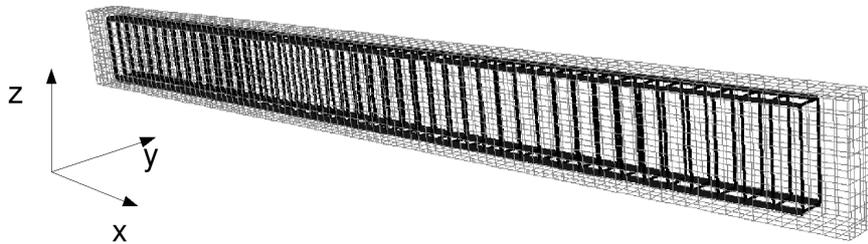


FIG. 4.32: Maillage de la poutre du projet national CEOS.fr

Le modèle utilisé pour le béton est dans un premier temps le modèle d'endommagement anisotrope avec effet retard ( avec la loi  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2$ ) puis le même modèle modifié pour s'affranchir de l'instabilité (écrit en fonction des déformations effectives de loi  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+^2$ ). Les paramètres des deux modèles sont les mêmes que ceux utilisés jusqu'à présent (tableau 1.9 du chapitre 1). La vitesse à laquelle le chargement est imposé est suffisamment lente pour considérer qu'elle n'a pas d'influence sur le comportement du béton en traction. Le comportement des armatures en acier est représenté par un modèle elasto-plastique parfait de von Mises (module d'Young  $E = 210$  GPa, limite d'élasticité  $\sigma_y = 500$  MPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ ).

#### 4.7.2 Réponse globale

La figure 4.33 compare les réponses globales force-déplacement obtenues avec les deux modèles quand on impose un chargement en effort ou un chargement en déplacement. La réponse expérimentale est reportée pour comparaison. Avec le modèle initial, la réponse en déplacement imposé et en force imposée ne se superposent pas. La différence est même réellement importante. Elle est l'expression de l'instabilité puisque le modèle écrit en déformations équivalentes ne présente pas la même pathologie. Le fait de ne pas tenir compte de l'existence de cette instabilité peut conduire à d'importantes erreurs pour la simulation numérique de

structures. Précisons que les calculs ont été menés sans activer la modélisation non-locale. Ils sont donc dépendant de la discrétisation.

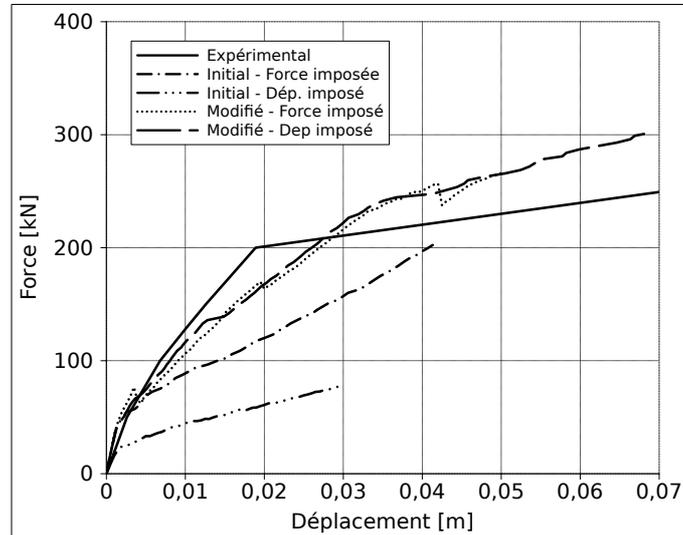


FIG. 4.33: Réponse globale en force et déplacement imposés

### 4.7.3 Cartes d'endommagement

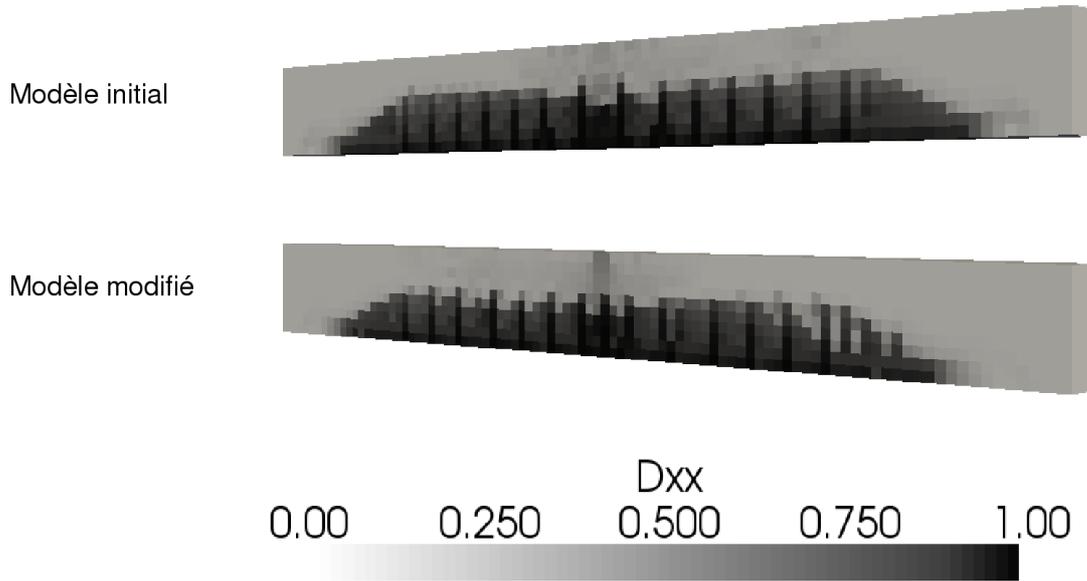
En revanche, les cartes d'endommagement (fig. 4.34) sont similaires pour les deux modèles (calcul en force imposée pour les deux modèles).

## 5 Conclusion

Les problèmes de régularisation pour les modèles présentant un adoucissement sont des problèmes complexes pour lesquels la solution idéale n'est pas immédiate. On a pu voir dans ce chapitre que le choix du limiteur de localisation à employer dépendait des vitesses de sollicitations considérées. On utilisera l'effet retard pour régulariser les calculs en dynamique rapide et la régularisation non-locale pour les calculs quasi-statiques ou lents.

Un des atouts de la loi de viscosité proposée pour le modèle d'endommagement anisotrope est de permettre à la fois de reproduire l'effet de vitesse et de régulariser la solution quand cet effet de vitesse est sensible. Ce cas est particulier au matériau béton où l'on a la chance d'avoir la même valeur du temps caractéristique pour les effets de vitesse (identifié à partir des résultats expérimentaux) et pour la régularisation (identifié à partir de la longueur caractéristique associée à la micro-structure et de la vitesse des ondes qui dépend des caractéristiques matériau du béton).

On a également mis en évidence une nouvelle instabilité liée à l'anisotropie induite du comportement. Cette instabilité apparaît pour les états de compression importants. Pour s'en



**FIG. 4.34:** Comparaison des cartes d'endommagement pour le modèle initial et le modèle modifié

affranchir, un nouveau modèle est proposé non plus écrit en fonction des extensions mais en fonction des "extensions effectives".

#### Bilan des équations du modèle proposé

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]^D + \left[ \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}_H \rangle}{1 - \text{tr} \mathbf{D}} - \langle -\boldsymbol{\sigma}_H \rangle \right] \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^{-1} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$f = g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act} \rightarrow * f < 0 : \text{élastique}$$

$$* f = D_v \geq 0 : \text{visco-endommagement}$$

$$d_{act} = \frac{\mathbf{D} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+}{\max(\boldsymbol{\varepsilon}_I)}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_+ \quad \text{où } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathcal{H}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d}_{act} = \dot{D}_\infty [1 - \exp(-b(g(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act}))]$$





## Chapitre 5

# Résultats expérimentaux sur structures en dynamique

Après avoir caractérisé au chapitre 3 le comportement dynamique du matériau béton, rappelé une modélisation couplant plasticité et endommagement isotrope et développé un modèle d'endommagement anisotrope avec effet de vitesse, on s'intéresse dans ce chapitre au comportement de structures sous chargements dynamiques. La philosophie de la plupart des essais dynamiques sur structures est de mettre en évidence sur des structures simples (poutres, dalles) un certain nombre de phénomènes locaux et globaux afin de permettre la modélisation de cas plus complexes (au niveau de la structure étudiée et du chargement). Les essais réalisés au Laboratoire d'Études de Dynamique (DYN) du CEA Saclay lors de cette thèse s'inscrivent dans cette perspective. Deux types d'essais sur tour de chute ont été réalisés : des essais brésiliens en dynamique et des essais d'impact sur poutres. Les essais brésiliens en dynamique sont relativement peu courants dans la littérature ([TRK93] a réalisé les premiers essais brésiliens sur des barres de Hopkinson), mais forts intéressants. Une caméra numérique rapide a été utilisée en plus d'une instrumentation classique mais précise et efficace (accéléromètre, mesure de déplacement par caméra et capteurs d'efforts). Les images enregistrées sont analysées par corrélation d'images grâce au logiciel CORRELI développé au LMT Cachan [HRB<sup>+</sup>02, BHR06, RH08].

Les essais d'impact sur poutres (4 essais au total) ont eu pour objectif d'étudier le passage d'un mode de rupture ductile (en flexion) à un mode de rupture fragile (par cône de cisaillement). Les deux facteurs influant dans cette études sont l'élanement de la poutre et le ferrailage transversal. Dans ce cas aussi la corrélation d'image est utilisée pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu.

## 1 Comportement dynamique des structures en béton armé

### 1.1 Chargements et structures étudiés

L'enjeu de la connaissance du comportement des structures de génie civil sous sollicitations dynamiques est généralement lié à des questions de sûreté (installations nucléaires, bâtiments sensibles) mais aussi parfois à des problèmes économiques (ponts, plates-formes pétrolières,

routes ...). Il est extrêmement rare que ces sollicitations soient les sollicitations courantes d'un ouvrage, il arrive même souvent qu'au cours de la vie de cet ouvrage, ce type de chargement ne se rencontre jamais. Cependant le risque engendré est trop important pour que l'on puisse négliger de le considérer. Ces sollicitations sont par nature la plupart du temps accidentelles (collision d'un véhicule [WSH92, HWS93] ou d'un bateau sur une pile de pont, chute de blocs en montagne

[BRTDM03, DD03, ZTLH08], impact de projectiles durant une tornade ou encore chute de conteneurs de déchets radioactifs [VS88, Ser97]) ou malveillante (impact ballistique [LRWT05, BDDE05], chute d'avion [Rie68, APGN95], attentats [Lep04] ...)

Parmi les cas possibles énoncés, on distingue deux grandes catégories : ceux qui relèvent de l'impact et ceux qui relèvent de l'onde de choc [Pon95, Tou95]. Le premier cas se caractérise par le contact entre deux solides alors que pour le second cas, le chargement consiste en une augmentation brutale de la pression. Les phénomènes engendrés dans ces deux cas sont nombreux et complexes et pas toujours facilement observables du fait de la rapidité à laquelle ils surviennent. Ce domaine du génie civil est l'un des domaines où les essais sont le plus nombreux, puisque ce n'est qu'en répétant les expériences et en faisant varier les paramètres que l'on a réussi à appréhender le comportement des structures. Les progrès dans l'instrumentation continuent d'améliorer notre compréhension sur ces sujets, c'est pourquoi, on continue de par le monde à faire des essais d'impact et de souffle sur des structures en béton armé.

Le cas de sollicitations couplées, onde de choc et impact de fragments, a également été étudié [Lep04] et a conduit à la conclusion que l'on pouvait modéliser les deux cas de manière découplée. Du point de vue de la modélisation, cela revient à appliquer le chargement dû à l'explosion sur une structure déjà endommagée par le ou les impacts.

Rares sont les cas où les expériences sont menées sur des structures réelles avec les sollicitations réellement envisagées. Ces expériences coûteuses (par exemple chute de bloc sur un pare-bloc [DMMP05] ou impact d'un avion [STK<sup>+</sup>93]), n'apportent pas toujours plus d'informations que des essais sur maquettes. C'est pourquoi, on trouve dans la littérature un nombre important d'essais sur des structures simples telles que des dalles ou des poutres [JMRR79, SS84, JS86, BMB86, ?, BMBP89, GaZ01, ZK07, ZRY08, CM09, IML<sup>+</sup>09].

Dans la plupart des cas la méthodologie suit l'idée suivante : on cherche d'abord à identifier les phénomènes de dégradation du béton, on identifie ensuite les facteurs qui influencent le résultat, puis on confirme par la modélisation les conclusions des essais.

On propose ici une rapide synthèse des conclusions des résultats d'essais d'impact sur structures. On distingue deux niveaux de réponse pour une structure sous chargement dynamique : le niveau global et le niveau local. A ces deux niveaux, les phénomènes observés sont foncièrement différents de ceux induits par un chargement statique. On constate généralement qu'un impact engendre des dégradations liées à l'action combinée de mécanismes aux deux échelles.

## 1.2 Identification des mécanismes locaux sous impact

### 1.2.1 Compactage dynamique

Dans le cas d'un chargement violent (par exemple l'impact d'un avion) le premier phénomène observé est le compactage du béton dans la zone directement sollicitée (sous un projectile). Il se développe à cet endroit, dans le cas de chargements de forte intensité un état de contrainte pratiquement triaxial du fait des forces d'inertie engendrées par l'accélération brutale. Le béton est tout d'abord pulvérisé en surface au contact du projectile, puis il se produit une diminution de volume due à l'effondrement de la structure poreuse du béton. Cette diminution de volume peut atteindre 10 % voire plus sous un état de contrainte très important (de l'ordre de 1000MPa avec une forte composante triaxiale). Pour mieux caractériser et modéliser le comportement du béton sous de telles sollicitations, des essais spécifiques ont été mis au points en statique [Bur97, BPCD01, GMD08] et en dynamique grâce à des barres de Hopkinson [Gat99, FGG08].

Les paramètres qui influencent le plus le phénomène de compaction semblent être d'une part la vitesse de l'impact (qui permet de générer les fortes contraintes hydrostatiques) mais également la porosité du béton. Le modèle visco-plastique visco-endommageable présenté au chapitre 3 reproduit la compaction via la diminution de la porosité du béton. Le modèle d'endommagement anisotrope lui ne rend pas compte de la compaction, la compressibilité  $K$  reste néanmoins constante en compression. Son domaine de validité n'inclue pas les états triaxiaux en compression. Des améliorations en ce sens (couplage avec la plasticité) peuvent être apportées mais ne font pas l'objet de cette thèse.

### 1.2.2 Ecaillage

L'écaillage est un phénomène qui se produit généralement sur la face non impactée d'une structure. Il est lié à la propagation des ondes dans le matériau. Lorsque l'onde de compression générée par l'impact atteint une face libre de la structure, elle se réfléchit et le béton dans cette zone est alors tendu. Si le niveau de contrainte est suffisant, il y a rupture et une certaine quantité de béton est éjectée. C'est le phénomène qui est observé lors d'un essai de traction dynamique par écaillage sur barre de Hopkinson (cf. chapitre 3 et 4).

Si cette explication du phénomène d'écaillage est assez largement acceptée, les moyens modernes d'acquisition (caméras rapides) et la simulation numérique semblent mettre en évidence un lien entre la mise en flexion de la structure et l'écaillage [Koe07]. L'analyse d'images permet en effet de savoir à quel instant survient l'écaillage et cet instant ne correspond pas au temps de l'aller-retour d'une onde.

Expérimentalement on constate (fig. 5.1) que le volume de matière éjecté par écaillage direct correspond à l'enrobage (le béton compris entre la surface libre et les armatures).

## 1.3 Modes de ruine globaux

Si localement les conditions de rupture n'ont pas été atteintes, la structure va répondre de manière globale à la sollicitation. La réponse en dynamique peut être différente de la réponse sous un chargement quasi-statique équivalent (même effort maximal par exemple). Les modes

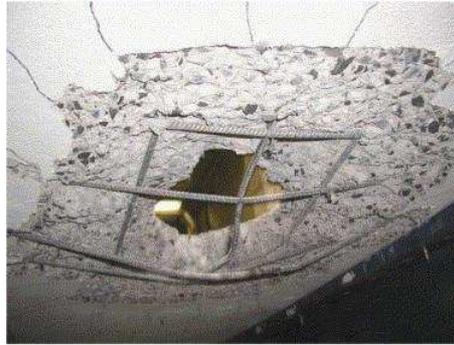


FIG. 5.1: Écaillage suite à un impact sur une dalle, d'après [ZK07]

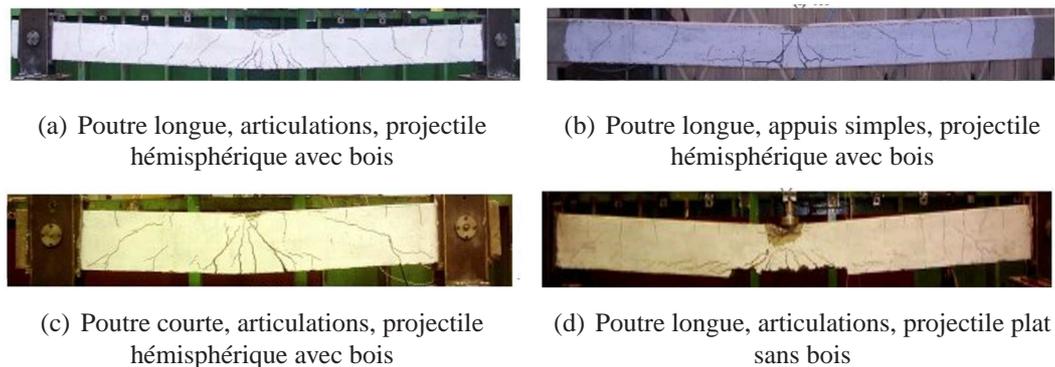
de rupture statiques vont rentrer en compétition avec des modes de rupture purement dynamiques. La vitesse de sollicitation joue un rôle primordial pour le passage d'un mode à l'autre.

### 1.3.1 Rupture par flexion

Pour des chargements relativement lents, on assiste à une rupture "classique", en flexion. Les effets d'inertie jouent néanmoins un rôle important dans ce cas, la réponse n'est pas immédiate, elle "fait suite" à la sollicitation. Si la sollicitation s'exerce pendant un temps long devant la période propre de la structure (cas d'un projectile dit "mou" par exemple), il peut s'établir un régime de vibrations et dans ce cas la déformée de la poutre est différente de celle observée sous un chargement quasi-statique.

May et Chen [MCO<sup>+</sup>05, CM09] ont étudié la rupture en flexion de poutre en béton armé sous impact. Les poutres étudiées ont toutes le même ferrailage, les caractéristiques du béton varient peu d'un impact à l'autre, et la vitesse et la masse du projectile restent constantes. Ce qui varie, ce sont les conditions d'appui (appui simple ou articulation), la longueur de la poutre, la forme du projectile (plat ou hémisphérique) et la présence ou non de bois sous l'impact pour amortir le choc.

La présence de bois et le choix d'un impacteur hémisphérique permet de réduire le maximum de la force d'impact mesurée et de ce fait d'éviter des dégradations locales trop importantes comme observées sur la figure 5.2. En revanche les autres paramètres n'influencent pas le mode de rupture puisque dans tous les cas on observe une rupture par flexion. Le nombre et l'inclinaison des fissures ne sont pas non plus modifiés. Le caractère dynamique du chargement provoque l'apparition de fissures en face supérieure de la poutre. Il faut en effet un certain temps avant que la totalité de la poutre soit fléchie. Durant les premiers instants de l'impact, la fibre supérieure est tendue car elle ne suit pas immédiatement le mouvement de la zone sous impact.



**FIG. 5.2:** Faciès de fissuration après impact, d'après [MCO<sup>+</sup>05]

### 1.3.2 Rupture par cisaillement global

En augmentant la vitesse de sollicitation sans augmenter l'intensité du chargement, les contraintes au niveau des appuis s'accroissent et font passer d'une rupture en flexion à une rupture en cisaillement, caractérisée par des fissures à 45° partant des appuis [ZK07]. La présence ou non d'armatures d'effort tranchant joue un rôle important dans ce type de rupture. Il se rencontre également en quasi-statique en l'absence d'un ferrailage d'effort tranchant suffisant.

### 1.3.3 Rupture par cône de cisaillement ou "punching cone"

Le dernier mode global de rupture est la rupture par cône de cisaillement. Ce cas de figure se rencontre pour des projectiles plus "durs", quand l'onde de chargement ne parvient pas jusqu'aux appuis. Un "bouchon" (en forme de cône ou de cloche) se découpe au droit de l'impact là où la limite en cisaillement est atteinte. Trois cas de figures sont ensuite possibles. Soit les armatures sont plastifiées puis rompues et le cône est éjecté. L'énergie cinétique emmenée par le cône correspond environ à l'énergie d'impact à laquelle on retranche l'énergie dissipée par endommagement, frottement des fissures (entre le cône et le reste de la structure) et par plastification des armatures (cf. fig. 5.3). Soit le projectile rebondit avec une énergie égale comme dans le cas précédent à l'énergie d'impact moins l'énergie dissipée, soit encore, il s'arrête si toute l'énergie est dissipée.

Ce type de rupture a été maintes fois reproduit [JMRR79, GS79, Bar82, ZK07], notamment sur des dalles et l'influence des divers paramètres a été largement étudiée. Des modèles simplifiés ou formules empiriques qui prévoient la profondeur de pénétration existent.

## 1.4 Combinaison des mécanismes

Les instants auxquels ces différents mécanismes (locaux et globaux) se déclenchent ne sont pas coïncidants. La figure 5.4 montre la superposition des différents phénomènes dans le cas de l'impact d'un bloc sur une structure pare-bloc.

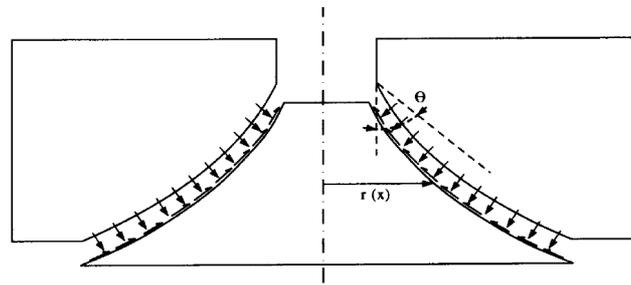


FIG. 5.3: Détachement d'un cône au droit de l'impact d'après Yankelevsky

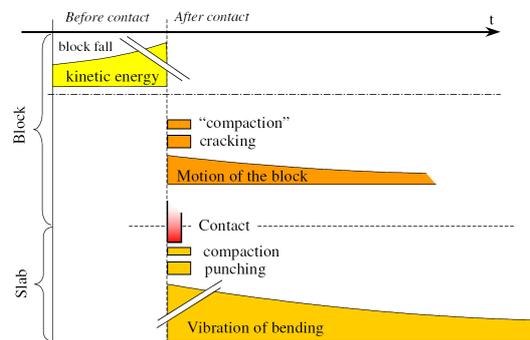


FIG. 5.4: Combinaison des différents mécanismes dans le cas d'une chute de bloc, d'après [DMMP05]

Les différents phénomènes s'influencent également entre eux. Dans sa modélisation du détachement du cône de cisaillement, [Yan97] prend en compte la profondeur de pénétration du projectile. Plus le projectile compacte le béton et s'enfonce et plus faible est la force s'opposant au détachement du cône.

L'interprétation faite par Jonas [JMRR79] des essais "Meppen" d'impact sur dalle conduit à la cinématique de la perforation de la figure 5.5. On constate que c'est la succession des différents mécanismes de dégradation qui mène à la perforation de la structure et que ces différents mécanismes interagissent entre eux. Dans le cas présenté par Jonas, se superposent du cisaillement, de l'écaillage et de la flexion qui affaiblissent conjointement la structure.

## 1.5 Classification des impacts

Devant le nombre important de facteurs pouvant influencer le mode de ruine, de nombreuses tentatives pour qualifier et classer les différents impacts ont vu le jour. Dans de nombreux cas, on a voulu distinguer deux types d'impact : les chocs durs, où les dégradations locales et surtout le compactage joueraient un rôle majeur et les chocs mous où l'on assisterait davantage à une rupture globale. Ainsi classés en deux catégories les différents impacts pourraient être traités par des méthodologies différentes adaptées à l'un ou l'autre des cas. Une définition du choc dur assez largement admise est celle d'un choc où le projectile se déforme peu (ou pas) pendant le choc. Par opposition, pour un choc mou, le projectile s'écrase progressivement sur la cible et

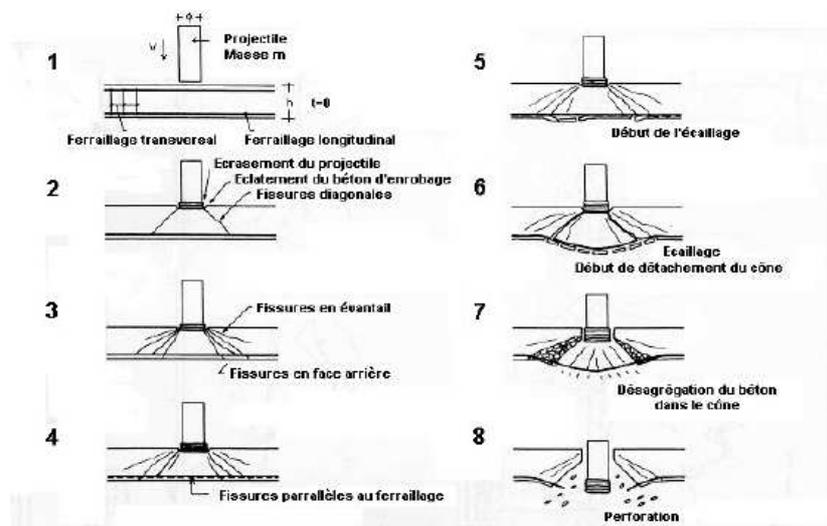


FIG. 5.5: Cinématique de la perforation dans le cas d'un choc mou, d'après [JMRR79]

reste en quelle que sorte "collé" à celle-ci, il n'y a donc pas de rebond. Dans le cas d'un choc mou, le déplacement de la cible étant faible devant celui du projectile, l'analyse est souvent faite de manière découplée en représentant le chargement par une force équivalente. Une telle analyse n'est pas possible suivant la définition du choc dur que l'on vient d'énoncer.

[KP09] font remarquer que cette définition ne tient pas compte de la vitesse de l'impact au rôle pourtant prépondérant dans la transition d'un mode de rupture vers un autre. Ils proposent donc une nouvelle définition du choc mou qui stipule que le projectile ne pénètre pas la cible. La mise en équation d'un tel critère nécessite de considérer la résistance du projectile  $\sigma_P$ , sa masse volumique  $\rho_P$  et sa vitesse  $V_0$  d'une part et d'autre part la résistance en traction de la cible  $\sigma_R^t = f_t$ . Leur critère s'écrit alors :

$$\frac{\sigma_P}{\sigma_R^t} + \frac{\rho_P V_0^2}{\sigma_R^t} < 1 \quad (5.1)$$

Sa représentation est donnée sur la figure 5.6. De cette distinction, on tire les mêmes conséquences en terme de modélisation couplée ou non de l'impact.

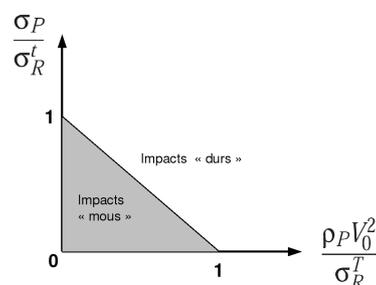


FIG. 5.6: Classification des impacts à basse vitesse, d'après [KP09]

## 2 Essais d'impact sur tour de chute

Un modèle de comportement est pertinent dans la mesure où il est capable de donner des résultats prédictifs auxquels on peut faire confiance. La confrontation des résultats de calculs aux résultats expérimentaux permet d'évaluer la fiabilité d'un modèle. Or les essais présentés dans la littérature ne sont pas tous suffisamment instrumentés ou suffisamment documentés. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail de thèse il a été décidé de procéder à une série d'essais d'impact sur tour de chute. Ces essais sont de deux types : impact sur des éprouvettes et impact sur des poutres renforcées. Dans le premier cas, il s'agit de reproduire un essai brésilien, mais en dynamique. Pour les impacts sur poutres, les conditions expérimentales sont choisies de manière à obtenir deux modes de rupture différents : en flexion et par cône de cisaillement et tester ainsi la capacité du modèle à reproduire ces deux modes. Le dispositif expérimental et son instrumentation sont décrits dans le paragraphe qui suit. Une des nouveautés de cette série d'essais est l'utilisation de la corrélation d'images pour l'analyse des résultats expérimentaux.

### 2.1 Dispositif expérimental

#### 2.1.1 La tour de chute Orion

Les essais d'impact sont réalisés sur la tour de chute Orion (fig. 5.7(b)) du Laboratoire d'Études Dynamiques du CEA Saclay (DYN) en collaboration avec T. Valin et P. Piteau. Cette tour de chute permet de lâcher un projectile d'une hauteur allant jusqu'à 7 m, ce qui permet d'atteindre une vitesse d'impact d'environ 11,5 m/s. Ce projectile est guidé par 4 rails afin qu'il tombe et rebondisse verticalement.

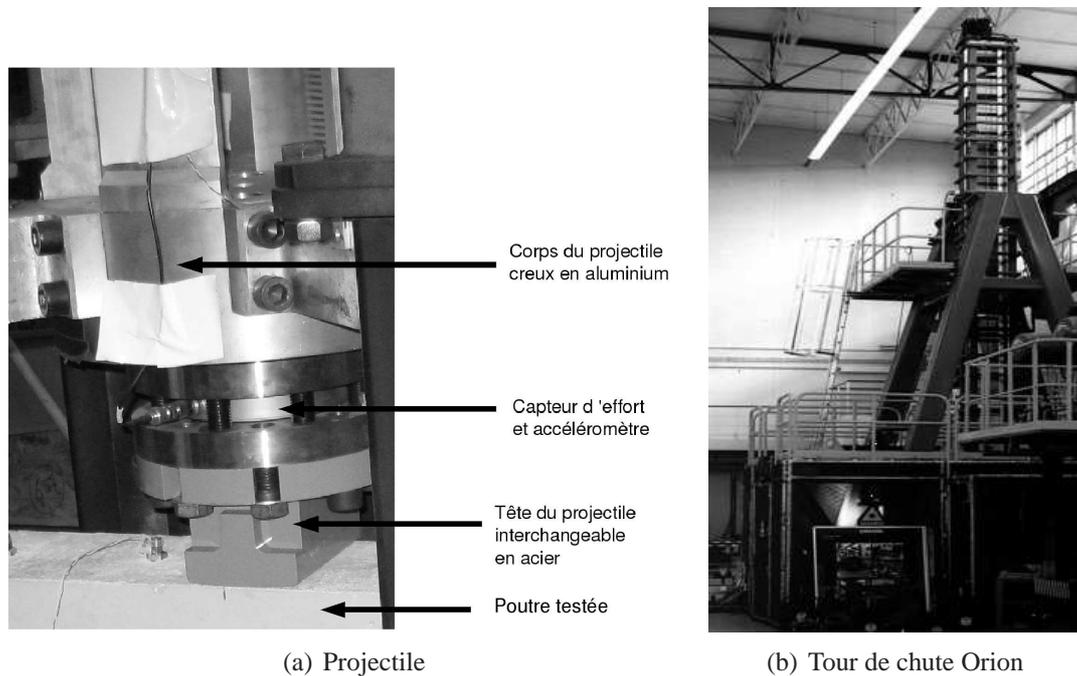


FIG. 5.7: Dispositif expérimental du CEA Saclay

### 2.1.2 Projectile

Différents projectiles sont disponibles, de masses diverses, dans des matériaux divers. Le projectile choisi est le plus léger. Il est constitué d'un corps creux en aluminium et d'une tête interchangeable en acier. La tête est fixée au corps par 4 vis sur une surface circulaire de 22 cm de diamètre (fig 5.7(a)). Deux têtes ont été usinées pour cette série d'essais, une plate pour les essais brésiliens et une légèrement arrondie pour les essais sur poutres. Le projectile plat a une surface circulaire de diamètre 22 cm, le projectile arrondi a une base rectangulaire de section  $11 \times 22 \text{ cm}^2$ .

### 2.1.3 Définition des appuis

Les appuis de la poutre sont construits de manière à permettre la rotation mais à empêcher le décollement de la poutre. Ils sont fixés au sol sur une plaque qui permet de faire varier leur écartement (fig. 36).

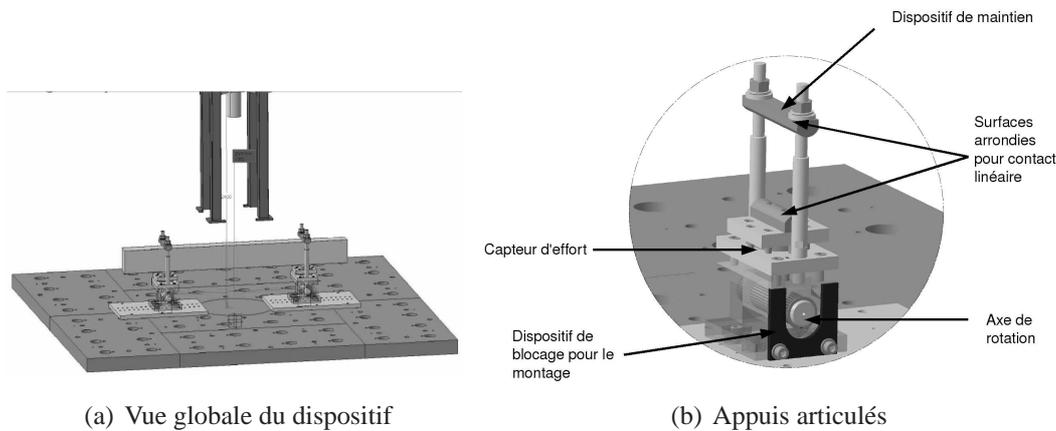


FIG. 5.8: Dispositif expérimental pour les impacts sur poutre

## 2.2 Instrumentation

### 2.2.1 Mesure du déplacement du projectile

Le déplacement du projectile est mesuré par une caméra "Zimmer", qui détecte le passage d'une ligne dans le champ de vision de la caméra et mesure son déplacement. Pour la mesure, une cible est fixée au projectile.

D'autre part, un accéléromètre est également embarqué sur le projectile. La double intégration de l'accélération permet de connaître le déplacement et de vérifier la mesure effectuée par la caméra.

### 2.2.2 Mesure de la force d'impact

La force est mesurée grâce à un capteur de force piézo-électrique précontraint placé entre la partie supérieure et la tête du projectile. Ce capteur a une résolution de 0,02 N et sa rigidité très importante confère au dispositif de mesure une fréquence propre très élevée. La force mesurée est corrigée pour tenir compte des forces d'inertie engendrées par le projectile durant le choc grâce aux valeurs données par l'accéléromètre embarqué.

### 2.2.3 Mesure des réactions d'appuis

Un capteur d'effort identique à celui du projectile est placé sur chacun des appuis de la poutre. Pour un souci de fiabilité, la mesure est à nouveau redondante. Ce dispositif n'est pas utilisé dans le cas des essais brésiliens.

### 2.2.4 Mesure de l'accélération le long de la poutre

Afin de mesurer l'accélération verticale le long de la poutre, 3 accéléromètres "1 axe" sont placés sur la face supérieure de la poutre. Ils sont répartis sur une moitié de celle-ci entre la surface d'impact et les appuis (fig. 5.9). Ces accéléromètres, identiques à celui du projectile,

spécialement conçus pour le choc, ont une fréquence d'acquisition très importante (jusqu'à 10000 Hz) et peuvent supporter des décélérations très violentes (de l'ordre de 50000g).

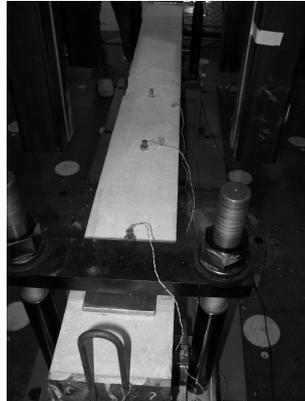


FIG. 5.9: Disposition des accéléromètres le long de la poutre

## 2.3 Mesures de champs

La caméra numérique rapide du LMT-Cachan enregistre les images de l'essai. Cette caméra a une fréquence d'acquisition maximale de 80 000 images par secondes. En revanche la capacité de stockage est limitée. Elle dépend de la durée de l'enregistrement, de la fréquence d'acquisition mais aussi de la taille des images (nombre de pixels). Un compromis est donc à trouver en fonction de la taille de la zone filmée et de la qualité de la résolution voulue. Cette résolution est importante dans la mesure où elle détermine en partie la qualité des résultats obtenus par la corrélation d'images.

### 2.3.1 Le logiciel CORRELI

Le logiciel CORRELI développé au LMT Cachan permet à partir d'images numériques de déterminer l'évolution au cours du temps des champs de déplacement et des champs de déformation [BHR06]. On compare deux images codées en niveaux de gris, une image de référence et une image "déformée". Les images sont discrétisées suivant un maillage régulier et on attribue à chacun des noeuds du maillage une intensité en niveau de gris. Le logiciel permet d'interpréter comme un champ de déplacement les variations observées entre les deux images en faisant l'hypothèse de conservation du flux optique. Des fonctions de formes identiques à celles de éléments finis sont ensuite utilisées pour interpoler le champ de déplacement sur le reste de l'image.

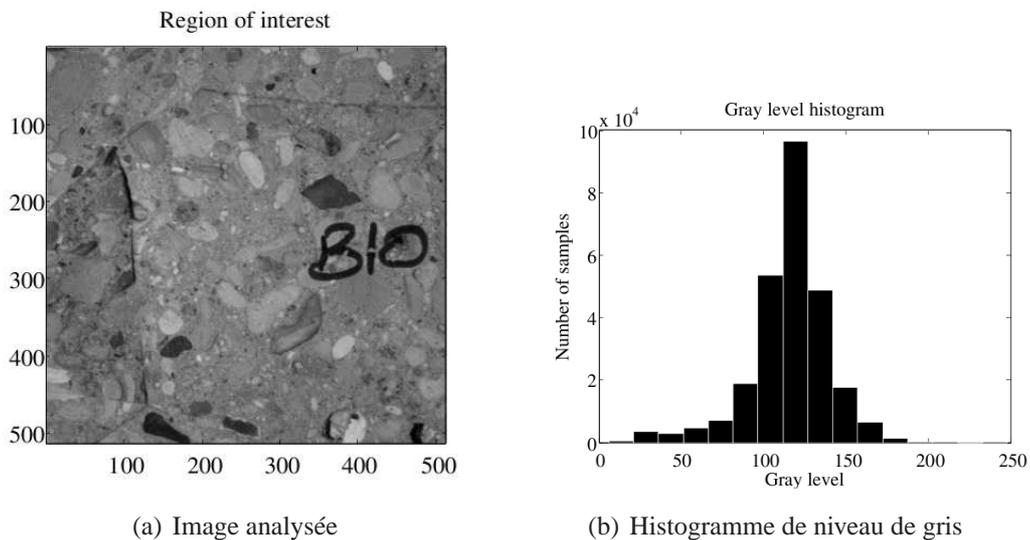
### 2.3.2 Préparation des surfaces

Pour que les résultats obtenus soient satisfaisants, il faut (entre autre) que les images analysées présentent un spectre en niveau de gris suffisamment large. Le logiciel CORRELI trace l'histogramme des niveaux de gris, ce qui permet d'estimer a priori la qualité de l'image. L'axe des

abscisses correspond au niveau de gris, 0 correspondant au noir et le blanc valant  $2^{nbits}$ , soit 256 pour une image 8 bits. La valeur en ordonnée représente le nombre de pixels ayant cette intensité du niveau de gris.

Un bon histogramme présentera donc un spectre large (du noir au blanc) et de préférence assez plat. On essayera d'éviter les courbes en cloches, qui dénotent un contraste assez faible, l'éclairage joue ici un rôle important.

Pour les essais brésiliens, la surface observée est la surface visible après découpe d'une éprouvette. On y voit les différents constituants du béton, pâte de ciment, granulats, sable ainsi que la porosité. Le contraste est donc relativement important (fig 5.10). L'histogramme n'est pas



**FIG. 5.10:** Zone d'intérêt pour l'analyse de l'essai brésilien

très bon, puisqu'il présente un fort pic pour une valeur de niveau de gris. Cependant, il présente un spectre assez large, ce qui doit néanmoins permettre d'obtenir des résultats satisfaisants par corrélation d'images.

La figure 5.11 présente le spectre pour une face d'un poutre en béton. La structure du béton n'est pas visible, si bien que l'image est trop uniforme, les seules variations de contraste provenant de l'éclairage insuffisamment uniforme. L'histogramme est très resserré sur une faible gamme de valeurs et reflète bien cette homogénéité de ton.

Pour l'analyse d'images d'une face coffrée d'une poutre, il est donc nécessaire d'augmenter le contraste. Pour cela on réalise un mouchetis de peinture, dont la taille des taches est légèrement supérieure à la taille d'un pixel de l'image (de l'ordre de 5 mm). Deux couches de peinture sont appliquées, une blanche et une noire afin d'élargir le spectre le plus possible. Le résultat de la figure 5.12 est plutôt satisfaisant.

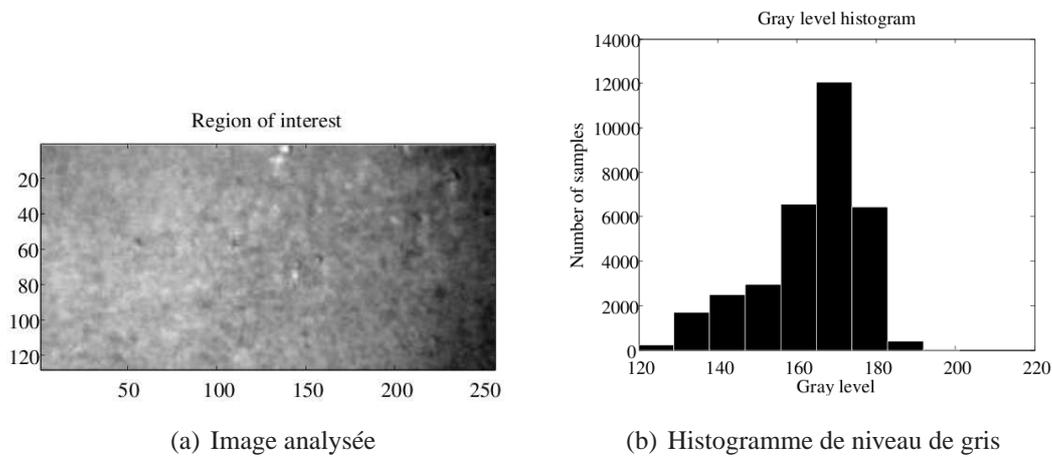


FIG. 5.11: sans mouchetis

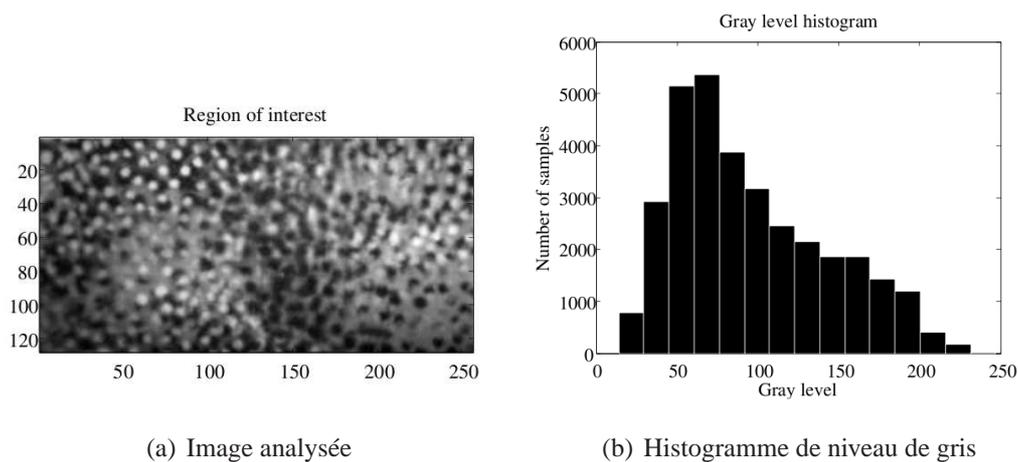


FIG. 5.12: Zone d'intérêt pour l'analyse d'une poutre

### 3 Essais brésiliens dynamiques

Le béton et les éprouvettes ont été réalisés lors de cette thèse au département de Génie Civil de l'ENS Cachan, en collaboration avec G. Bernier.

#### 3.1 Géométrie des éprouvettes et chargement expérimental

Les éprouvettes utilisées sont des éprouvettes cylindriques découpées dans des éprouvettes de compression normalisées de diamètre 16 cm et de hauteur 32 cm. La base du cylindre conserve son diamètre initial, seule la longueur varie. La hauteur de chute du projectile (et par conséquent la vitesse d'impact) varie également d'un essai à l'autre. Les caractéristiques

*Endommagement anisotrope et comportement dynamique des ouvrages en béton armé jusqu'à la ruine*

des différents essais et leur désignation sont données au tableau 5.1. On utilise le projectile plat dont le diamètre est de 22cm, c'est pourquoi, la longueur des éprouvettes ne peut dépasser cette valeur.

L'application du critère donné par [KP09] pour la classification des impacts ( $\frac{\sigma_p}{\sigma_R} + \frac{\rho_p V_0^2}{\sigma_R} < 1$  pour un choc mou) donne un résultat très supérieur à 1 pour les deux vitesses d'impact (1,47 m/s et 2,42 m/s). Dans ce cas la résistance du projectile est très grande devant celle de la cible, si bien que le choc peut être qualifié de dur au sens de ce critère quelle que soit la vitesse d'impact.

Désignation	Longueur	Hauteur de chute	Vitesse
B10	9,4 cm	12 cm	1,47 m/s
B11	22 cm	12 cm	1,47 m/s
B12	22 cm	30 cm	2,42 m/s
B13	6,8 cm	12 cm	1,47 m/s

TAB. 5.1: Caractéristiques et désignations des essais brésiliens

### 3.2 Caractéristiques des bétons testés

Deux gâchées ont été nécessaires pour réaliser les poutres testées sous impact (paragraphe 4). Pour caractériser le béton des poutres testées, des éprouvettes normalisées 16 × 32 ont été fabriquées pour chacune des gâchées. Les résultats des essais de compression normalisés à 28 jours sont présentés au tableau 5.2.

Gâchée	Contrainte mesurée [MPa]	Résistance moyenne [MPa]
1	29,75 - 34,20 - 36,55	32,90
2	32,40 - 32,35 - 33,25	33,66

TAB. 5.2: Résistance en compression à 28 jours du béton (3 essais par gâchée)

Les éprouvettes des essais brésiliens dynamiques sont toutes issues de la première gâchée.

### 3.3 Mesure de la force d'impact

Les courbes de la figure 5.13 représentent l'évolution de la force de choc en fonction du temps. Sur la première on regarde l'influence de la vitesse d'impact (les deux éprouvettes ont la même longueur) et sur la seconde l'influence de la longueur de l'éprouvette (la vitesse d'impact est identique pour les deux essais). On constate que la vitesse d'impact a peu d'influence sur la valeur de la force de choc, on mesure un écart au niveau de la force maximale de 32 kN (soit 13 %). En revanche la force de choc est directement proportionnelle à la longueur de l'éprouvette puisque le rapport  $\frac{F_{max}}{Longueur}$  est quasiment égal pour les essais B10 et B11. La durée du choc n'est pas influencée par la longueur de l'éprouvette mais diminue quand la vitesse d'impact augmente. On récapitule dans le tableau 5.3 les différentes valeurs mesurées.

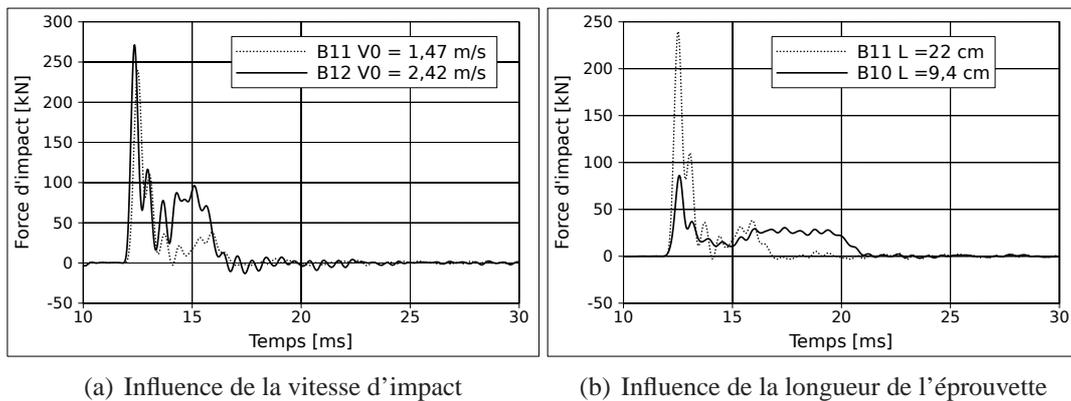


FIG. 5.13: Mesure de la force de choc

Essai	Temps à $F=F_{max}$	Durée du 1 <sup>er</sup> pic	Durée totale
B10	0,75 ms	1,7 ms	9,6ms
B11	0,6 ms	1,8 ms	6,0 ms
B12	0,35 ms	1,4 ms	5,0 ms

TAB. 5.3: Durée de l'impact en fonction de la vitesse et de la géométrie

### 3.4 Cinématique globale de l'impact

On représente sur la figure 5.14 le déplacement vertical du projectile en fonction du temps et sur la figure 5.15 l'évolution de l'accélération mesurée sur le projectile. Pour tous les essais

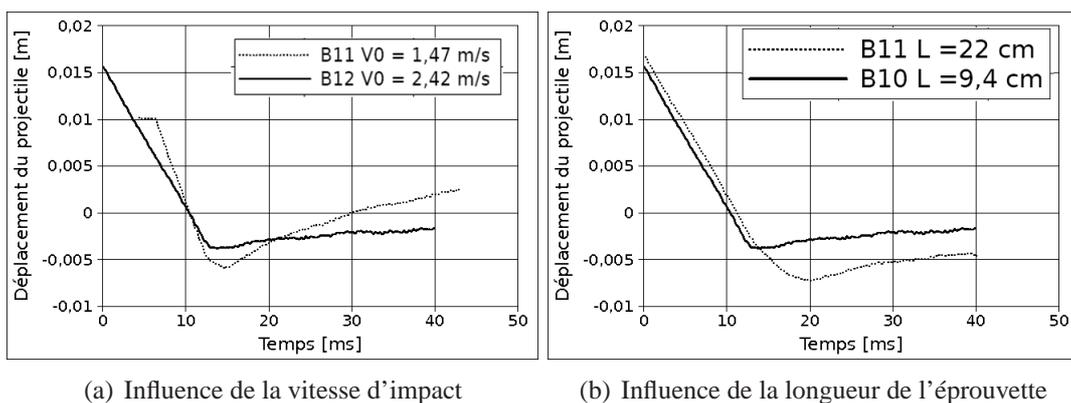


FIG. 5.14: Mesure de la force de choc

on peut décomposer l'évolution du déplacement en trois parties :

- Une première partie linéaire qui correspond à la chute libre du projectile et dont la pente est égale à la vitesse d'impact,
- Une seconde partie, qui correspond à l'impact proprement dit, durant laquelle le déplace-

ment ralentit jusqu'à changer de signe,

- Une dernière partie, quasiment linéaire mais de pente plus faible où le projectile remonte : c'est le rebond.

On constate que la vitesse de rebond est plus importante si la vitesse d'impact est plus grande. De même, si la surface de contact diminue, la vitesse du rebond augmente (on dissipe dans ce cas moins d'énergie). On calcule une vitesse de rebond de 0,115 m/s pour l'essai B10, de 0,07 m/s pour B11 et de 0,24 m/s pour B12 (cf. Annexe C).

L'accélération et la force de choc semblent directement liées, ainsi, la vitesse d'impact influe

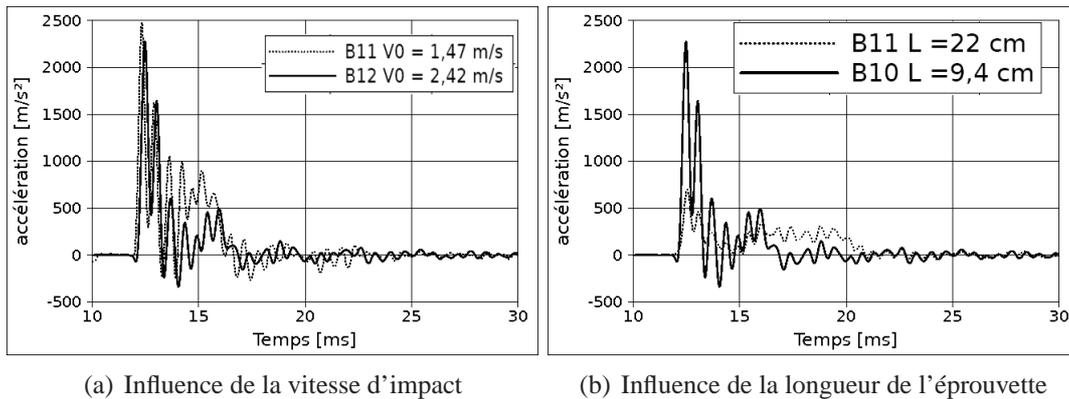


FIG. 5.15: Mesure de l'accélération du projectile

peu sur l'accélération maximale (2520 m/s<sup>2</sup> pour l'essai B12 contre 2320 m/s<sup>2</sup> pour B11), en revanche c'est la surface de contact (ici la longueur de la tranche l'éprouvette) qui joue un rôle prépondérant (on a seulement 710 m/s<sup>2</sup> pour l'essai B10). Toutes les courbes expérimentales sont données en annexe C.

### 3.5 Analyse de l'enregistrement de la caméra rapide

#### 3.5.1 Éprouvette complète, 6000 images/s

On analyse les images enregistrées pendant l'essai B10 avec la caméra rapide (vitesse  $V_0 = 1,47$  m/s,  $L = 9,4$  cm). La fréquence d'acquisition est de 6000 images par secondes, soit une image toutes les 0,166 ms. On considère comme temps 0, le temps de l'image (a) juste antérieure à celle où la fissure apparaît (b). Il n'est pas possible par la seule analyse des images de déterminer l'instant du contact. La vitesse d'acquisition ne permet pas de voir la fissure se propager, la fissure de fendage apparaissant complètement en une seule image (Sa vitesse de propagation est ainsi supérieure à  $\frac{16 \cdot 10^{-2}}{0,166 \cdot 10^{-3}} \simeq 1000$  m/s. Rappelons au passage que la vitesse des ondes de compression est de l'ordre de 4100 m/s et que celle des ondes de Rayleigh de l'ordre de 2770 m/s pour le béton.). Elle est continue sur presque toute la hauteur de l'éprouvette (en dehors des appuis) et elle contourne les granulats pour se propager dans la pâte de ciment, moins résistante. Sur les images suivantes, on voit la fissure s'ouvrir et les extrémités s'écraser

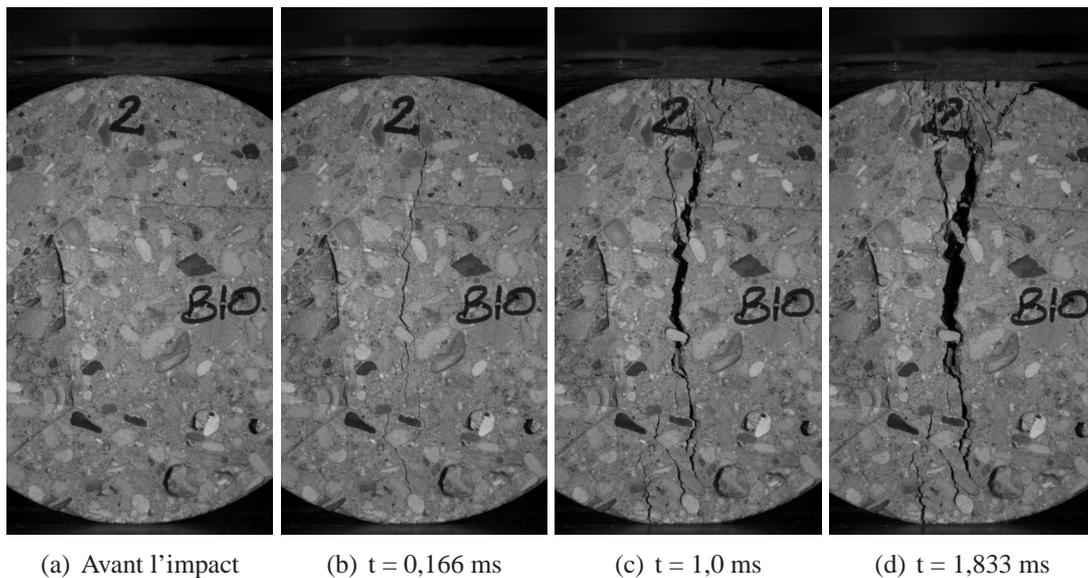


FIG. 5.16: Évolution de la fissuration, essai brésilien B10

progressivement. Après l'impact (cf Annexe C), l'éprouvette est fendue en deux, une des moitiés étant systématiquement éjectée latéralement.

### 3.5.2 Zoom - 30000 images/s

Afin de tenter d'observer la propagation de la fissure, on décide pour l'essai B13 de restreindre la zone filmée pour augmenter la vitesse d'acquisition à une image toutes les 0,0333 ms. La zone filmée de taille  $5 \times 5 \text{ cm}^2$  est centrée sur le diamètre vertical de l'éprouvette légèrement décalée vers le haut de l'éprouvette. Comme précédemment on constate que la fissuration est

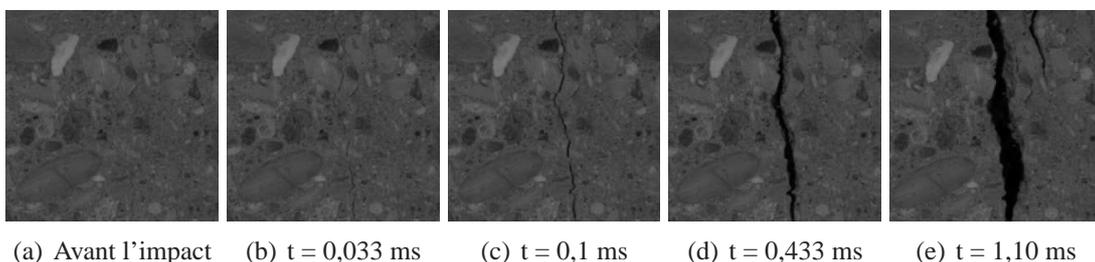
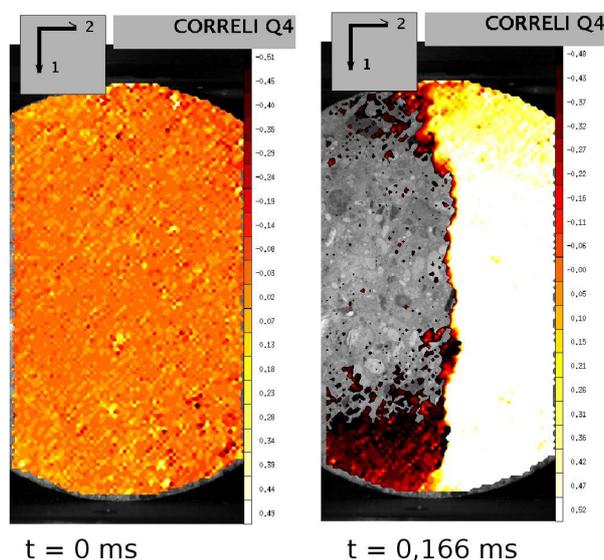


FIG. 5.17: Évolution de la fissuration, essai brésilien B13

trop rapide pour être observée avec une caméra rapide. On passe en une image d'un état a priori sain à un état entièrement fissuré, soit une vitesse de propagation supérieure à 1515 m/s.

### 3.6 Analyse par mesure de champs

#### 3.6.1 Champ de déplacement horizontal

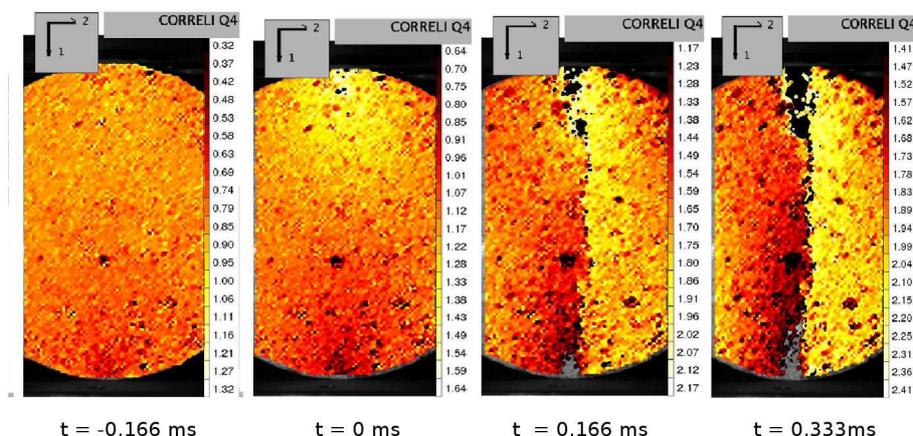


**FIG. 5.18:** Champ de déplacement horizontal essai B10 en pixels calculé par le logiciel CORRELI

La corrélation d'images permet de visualiser des champs de déplacement et de calculer des champs de déformation avant la fissuration. On trace le champ de déplacement horizontal obtenu par corrélation sur les images de l'essai B10 précédemment analysées. L'image de référence pour le calcul des déplacements n'est pas présentée. Elle est située 5 images avant l'image  $t = 0$  ms. On en arrive à la même conclusion que sans corrélation, la rupture en fendage a lieu en moins de 0,166ms, puisque que l'on ne peut, même avec la corrélation, observer un état intermédiaire entre l'état sain et l'état fissuré (fig. 5.18). Les champs de déformation ne sont pas présentés dans la mesure où ils n'apportent pas plus d'informations.

#### 3.6.2 Champ de déplacement vertical

L'analyse du déplacement vertical apporte en revanche des informations supplémentaires (fig. 5.19). Tout d'abord on constate que l'image  $t = 0$  ms précédente ne correspond pas à l'image précédent le début de l'impact puisque l'on mesure un champ de déplacement vertical sur cette image et celle qui la précède ( $t = 0$  ms et  $t = -0,166$ ms). Ce déplacement, localisé sur le diamètre vertical de l'éprouvette, décroît sur toute la hauteur ce qui signifie que l'onde de compression a déjà atteint le bord inférieur. Le temps nécessaire pour qu'une onde de compression parcoure les 16 cm qui séparent la face impactée de l'appui est de  $t = \frac{h}{c} = 0,039$  ms avec  $c$  la célérité des ondes de compression égale à 4100 m/s. Il n'est donc pas surprenant de ne pas voir se propager l'onde de compression à une telle vitesse.



**FIG. 5.19:** Champ de déplacement vertical essai B10 en pixels calculé par le logiciel CORRELI (échelle différente pour chaque vue).

Ce résultat nouveau est particulièrement intéressant dans l'optique de validation d'un modèle de comportement en dynamique puisque l'on dispose d'une nouvelle donnée qualitative de référence (apparition de contraintes de compression avant l'ouverture de la fissure) à comparer aux résultats numériques. La corrélation d'images permet de plus de dater précisément le début de l'impact et donc l'instant de la fissuration. Cette donnée cette fois quantitative est un critère de plus pour la validation.

## 4 Essais d'impact sur poutre

Les poutres de cette campagne expérimentale (formulation et fabrication du béton, façonnage des armatures et instrumentation) ont été réalisées au département de Génie Civil de l'ENS Cachan, en collaboration avec Gérard Bernier.

### 4.1 Géométrie, ferrailage et chargement expérimental

On réalise quatre essais d'impact sur poutres avec le dispositif d'impact déjà présenté dans le but d'obtenir deux modes de rupture différents sous un chargement identique. Le projectile utilisé pour tous les essais est le projectile hémisphérique et la vitesse d'impact est de 8,43 m/s. Les 4 poutres ont la même section  $15 \times 20 \text{ cm}^2$  et le ferrailage longitudinal est constitué de 2 armatures HA 20 en fibre inférieure et de 2 HA 8 en fibre supérieure. L'enrobage des armatures est de 25 mm et les armatures longitudinales sont soudées à chacune des extrémités de la poutre sur une plaque d'about pour éviter le glissement.

Deux longueurs de poutre sont testées, les 2 poutres longues ont une distance entre appuis (portée) de 1,50 m et une longueur totale de 1,80 m, et les 2 poutres courtes une portée de 1,00 m et une longueur de 1,30 m. Les deux poutres longues et une des poutres courtes sont renforcées à l'effort tranchant par des cadres de diamètre 6 mm espacés de 20 cm et répartis

symétriquement de part et d'autre de la zone d'impact.

La disposition des armatures est présentée à la figure 5.20 (cadres en grisé) et le tableau 5.4 résume les caractéristiques des différentes poutres.

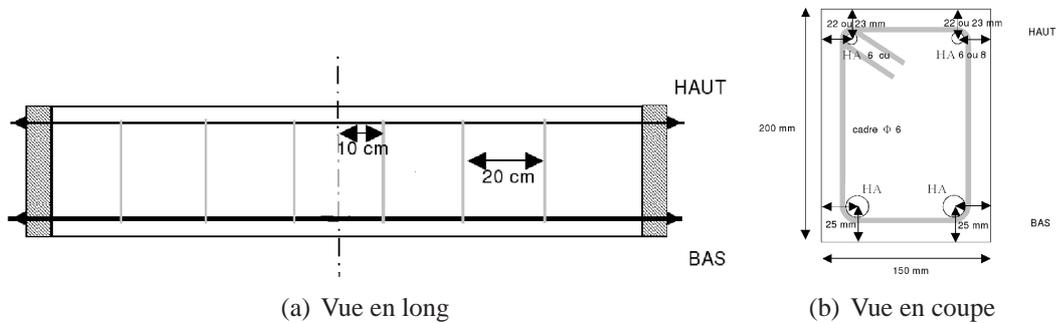


FIG. 5.20: Géométrie et ferrailage de la poutre

Poutre	Longueur	Portée	Cadres	Gâchée	Mouchetis
P 1	1,8 m	1,5 m	Oui	2	Non
P 2	1,8 m	1,5m	Oui	1	Oui
P 3	1,3 m	1,0m	Non	2	Non
P4	1,3 m	1,0m	Oui	1	Oui

TAB. 5.4: Caractéristiques de poutres et désignation

On observe selon le renfort, une rupture en flexion des poutre P1, P2 et P4 (cf. fig.5.21) et une rupture par cône de cisaillement de la poutre P3 sans cadres (cf. fig.5.28) . Pour les 4 poutres l'impact est celui d'un projectile de masse 100kg à une vitesse  $V_0$  de 8,43 m/s.

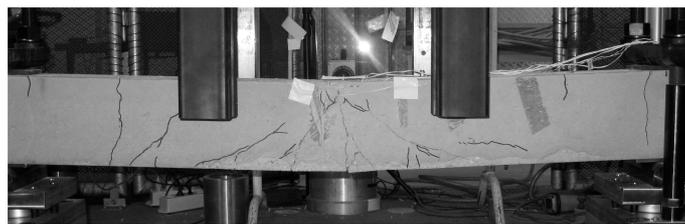


FIG. 5.21: Faciès de rupture en flexion

Comme pour l'essai brésilien, la résistance de la cible est faible devant celle du projectile, si bien que le choc est dur au sens de [KP09] quelle que soit la vitesse d'impact.

## 4.2 Rupture en flexion

On présente ici l'analyse des résultats effectuée pour la poutre P1, On ne dispose pas à l'heure actuelle des résultats d'essais (mesures des capteurs) des poutres P2 et P4. Ces mesures

existent mais n'ont pas encore été traitées. La même analyse peut être conduite pour ces deux poutres. L'essai a été mené en plaçant une couche de balsa d'environ 2 cm de hauteur au niveau du point d'impact dont le but est de limiter légèrement la valeur du premier pic pour protéger le capteur d'effort (dont la charge ultime est de l'ordre de 700 kN).

#### 4.2.1 Mesure de la force d'impact

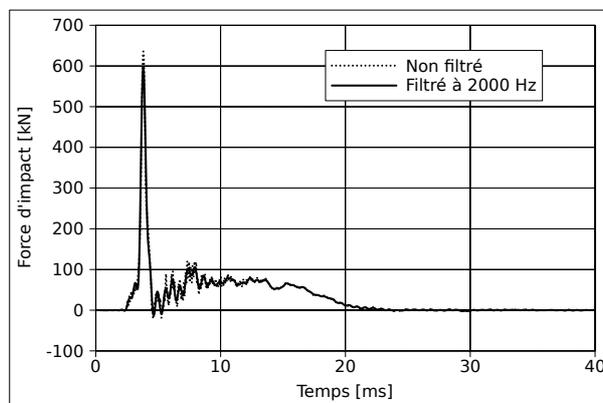


FIG. 5.22: Force d'impact mesurée pour la poutre P1

La courbe d'effort se décompose en deux parties, une première, relativement courte qui correspond au violent pic d'effort généré par l'impact, puis un plateau assez long marque la mise en flexion de la poutre. L'effort maximal atteint pendant le pic  $F_{max}$  est de 597 kN (mesure filtrée à 2000 Hz) et la valeur d'effort pendant le plateau oscille autour de 70 kN. La montée en charge est légèrement ralentie en début d'impact du fait de la présence de la couche de bois (balsa) entre le projectile et la poutre.

L'instant où l'effort mesuré redevient nul (autour de  $t=24$  ms) marque le rebond du projectile. (Si l'on disposait de l'intégralité de l'évolution de la force d'impact, on pourrait constater, comme sur le film de l'essai qu'il y a en fait plusieurs impacts dus aux rebonds successifs.)

#### 4.2.2 Cinématique globale de l'impact

Les courbes de la figure 5.23 représentent l'évolution mesurée du déplacement et de l'accélération du projectile.

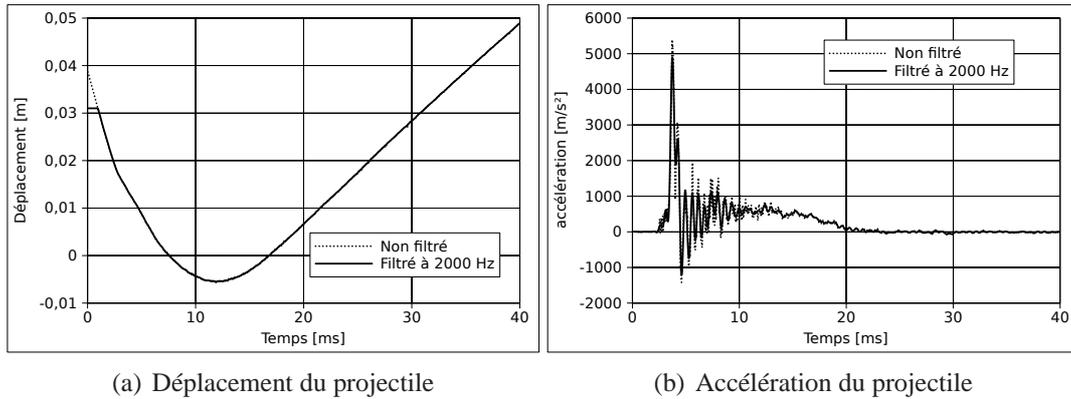


FIG. 5.23: Cinématique de l'impact, poutre P1

On peut faire la même analyse que pour les essais brésilien avec un processus en 3 étapes : chute, impact et rebond. La vitesse de rebond mesurée sur la courbe est de 2,12 m/s et la durée du choc est de 3,6 ms. L'accélération atteint un maximum de  $5000 \text{ m/s}^2$  soit 500g, ce qui est moins que pour les essais brésiliens. La présence de bois joue ici un rôle important.

#### 4.2.3 Mesure de réactions d'appuis

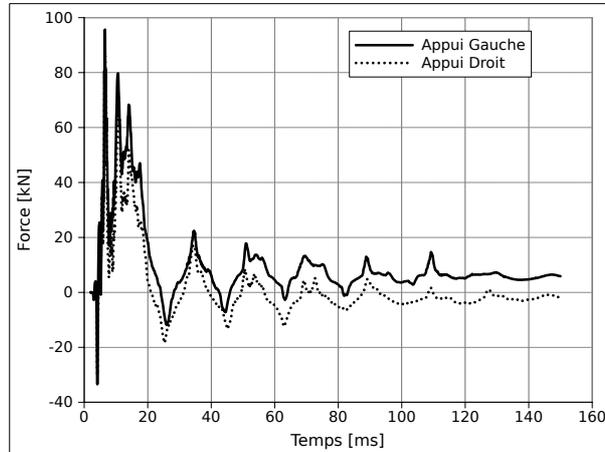


FIG. 5.24: Réactions d'appuis mesurées pour la poutre P1

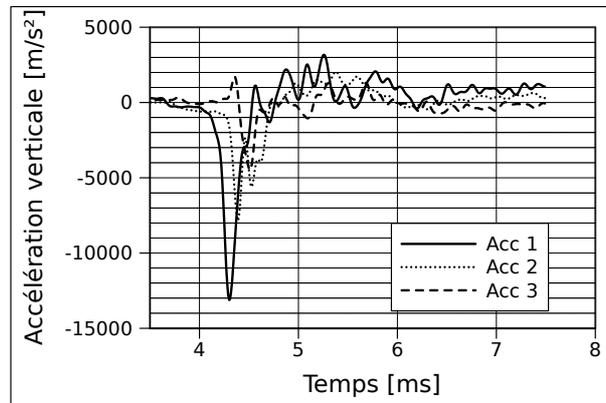
La mesure des réactions d'appui (fig. 5.24) montre que le premier pic de réaction mesurée est négatif. Les appuis décollent au moment de l'impact du fait du caractère très dynamique du chargement. Le second pic (positif) a une valeur de l'ordre de  $F_{max}^{reac} = 100 \text{ kN}$ , on ne retrouve donc pas l'équilibre statique de la poutre ( $2 \times F_{max}^{reac} \neq F_{max}^{(imp)}$ ). Pendant la partie correspondant au plateau de la force d'impact (de  $t \simeq 5 \text{ ms}$  à  $t \simeq 15 \text{ ms}$ ), on mesure une force qui oscille autour de 50 kN, ce qui est supérieur à la moitié de la force d'impact mesurée pendant le plateau ( $F \simeq 70 \text{ kN}$ ). On continue à mesurer des pics de réaction périodiquement (toutes les 18 ms environ) qui

s'amortissent petit à petit pendant un temps relativement long (jusqu'à plus de 100 ms). Notons que la première fréquence propre calculée pour cette poutre est de 165 Hz, soit une période propre de 6,1 ms. La période propre mesurée après impact est moindre que la période propre calculée pour la même poutre, non endommagée. La dégradation des propriétés élastiques du matériau a pour conséquence de diminuer les valeurs des fréquences propres de la structures (proportionnelles à  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  et donc à augmenter les périodes propres.

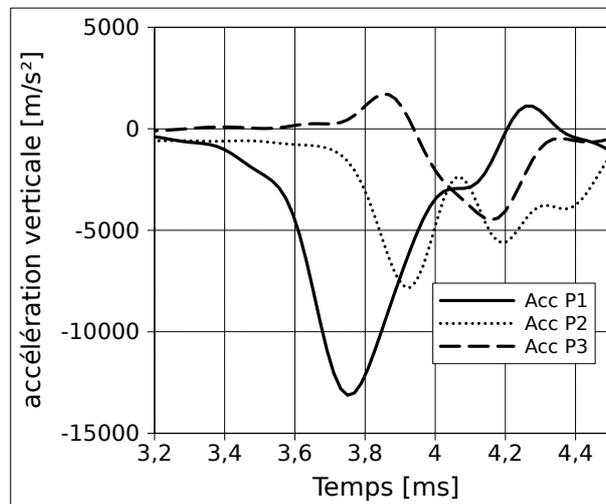
#### 4.2.4 Accélération verticale le long de la poutre

L'accélération verticale mesurée le long de la poutre (fig. 5.25) montre plusieurs phénomènes intéressants. On constate que le signe de l'accélération mesurée par le 3<sup>ème</sup> accéléromètre (le plus éloigné de l'impact) est positif au départ alors que de celui des deux autres est négatif. L'accélération négative traduit un déplacement vers le bas de la poutre, ce qui est logique pour une poutre sollicitée en flexion. L'accélération positive du troisième accéléromètre traduit elle un déplacement vers le haut. Ce phénomène s'explique par le fait que la mise en flexion de la poutre sous un chargement dynamique passe par une étape transitoire où le chargement se propage sous la forme d'ondes et où la déformée de la poutre tend progressivement vers une déformée classique en flexion.

D'autre part, avec ces 3 accéléromètres on peut mesurer le temps que met le chargement à parcourir la distance qui sépare deux accéléromètres, et ainsi la vitesse de propagation des ondes de surface. Il faut en effet 0,018 ms pour que l'accélération observée sur le premier accéléromètre parvienne (avec moins d'intensité) au second, soit une vitesse de propagation de 833 m/s. Cette vitesse de propagation est moindre que la vitesse théorique des ondes de Rayleigh (de l'ordre de 2700 m/s). En revanche, le chargement atteint le troisième en même temps le second et le dernier accéléromètre ce qui montre que ce n'est pas le passage des mêmes ondes de chargement qui est mesuré. (La vitesse des ondes qui atteignent en premier le troisième accéléromètre est double, soit 1666 m/s). Il est donc difficile de connaître la nature des ondes à l'aide de ces mesures.



(a) Évolution totale



(b) Vue détaillée

FIG. 5.25: Force d'impact mesurée pour la poutre 1

#### 4.2.5 Analyse des images enregistrées par la caméra rapide

Les images de l'essai sont enregistrées à une fréquence de 10000 images par secondes, l'objectif est centré sur le milieu de la poutre.

*Endommagement anisotrope et comportement dynamique des ouvrages en béton armé jusqu'à la ruine*

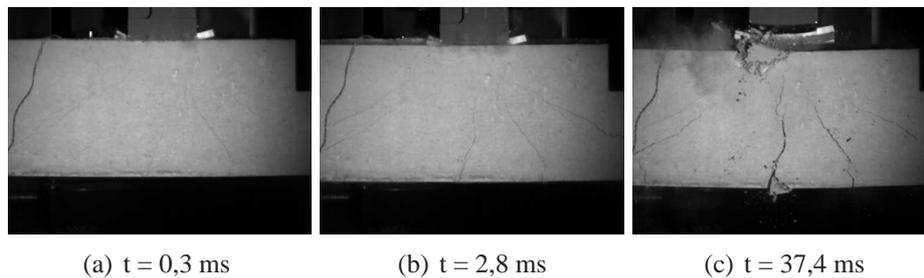


FIG. 5.26: Évolution de la dégradation de la poutre P1

On observe sur la figure 5.26(a) à l'apparition simultanée de plusieurs fissures de flexion (une fissure verticale au milieu de la poutre et des fissures de plus en plus inclinées à mesure que l'on s'éloigne du milieu). Ce qui semble être une fissure en haut à gauche de l'image est en fait un fil de connexion d'un des accéléromètres verticaux). A mesure que le temps progresse, ces fissures s'ouvrent mais aucune nouvelle fissure n'apparaît. Au moment du rebond ( $t = 37,4$  ms) on remarque la dégradation locale du béton sous l'impact, une épaisseur de béton parallèle à l'épaisseur de la poutre se détache.

#### 4.2.6 Analyse par mesure de champs

La corrélation d'images réalisée à partir du film de l'essai P2 (essai identique à l'essai P1, mais avec en plus la réalisation d'un mouchetis de peinture) est présentée sur la figure 5.27. On représente l'évolution du déplacement vertical, l'axe des déplacements croissants est orienté vers le bas.

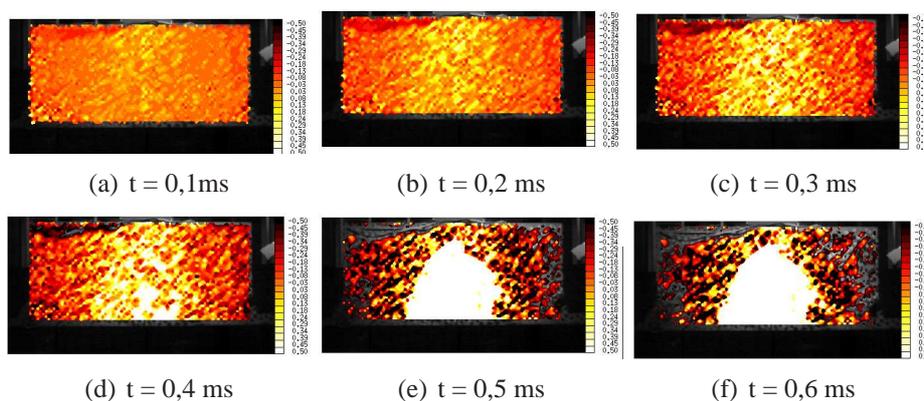


FIG. 5.27: Champ de déplacement vertical mesuré par corrélation d'images (logiciel CORRELI)

On distingue très clairement l'apparition rapide d'un cône de déplacements homogènes (en blanc sur la figure) dont le déplacement est plus important et qui a tendance à vouloir se détacher. Il est probable que ce sont les armatures transversales qui empêchent son éjection. Les fissures de flexion inclinées ne correspondent pas aux limites de ce cône, il semble donc que deux mécanismes entrent en compétition. La flexion l'emporte finalement car le chargement appliqué n'est pas suffisant pour rompre les cadres.

### 4.3 Rupture en cisaillement

La poutre P3, courte et surtout sans cadres rompt du fait de la formation, sous la zone d'impact, d'un cône de béton qui se détache et dont le déplacement provoque la plastification des armatures (fig. 5.28).

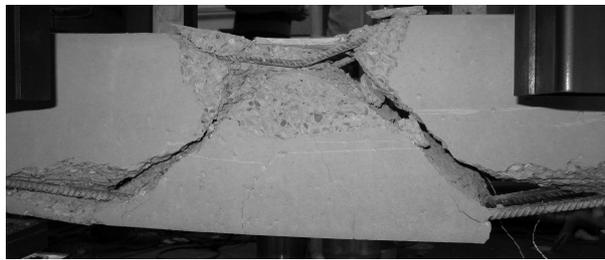


FIG. 5.28: Faciès de rupture par cône de cisaillement

#### 4.3.1 Mesure de la force d'impact

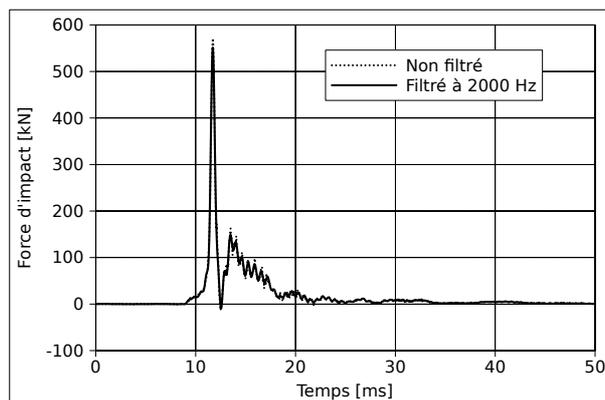


FIG. 5.29: Force d'impact mesurée pour la poutre P3, courte sans cadres

Comme pour la rupture en flexion, la force de choc présente un premier pic important dont la valeur maximale est ici légèrement plus faible ( $F_{max} = 551\text{kN}$ ). La force redevient nulle puis très rapidement une seconde phase de chargement a lieu, d'amplitude plus importante (jusqu'à  $160\text{kN}$ ) que pour la rupture en flexion et rapidement décroissante (il n'y a pas ici de "plateau")

correspondant au moment de flexion de la poutre). Le premier pic peut s'interpréter comme la formation du cône et le second comme son déplacement ralenti par la présence des armatures longitudinales.

#### 4.4 Cinématique globale de l'impact

Les courbes de la figure 5.30 représentent l'évolution du déplacement et de l'accélération du projectile.

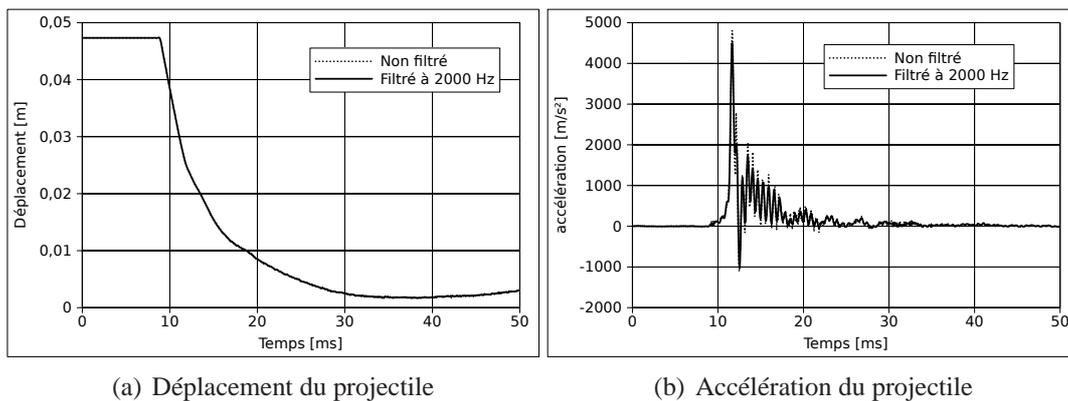


FIG. 5.30: Cinématique de l'impact, poutre P3

Contrairement à l'essai précédent (poutre P1) on n'observe pas de rebond sur la courbe du déplacement, le projectile s'arrête directement. L'impact est en effet plus long et le déplacement à la fin est très lent. Il semble suivre le déplacement de la poutre ou plutôt du cône qui se détache. L'accéléromètre du projectile mesure une accélération maximale de 4590 m/s<sup>2</sup> (mesure filtrée).

##### 4.4.1 Mesure des réactions d'appuis

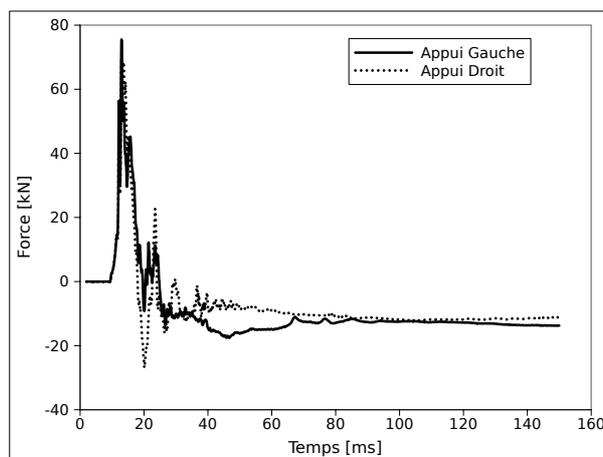
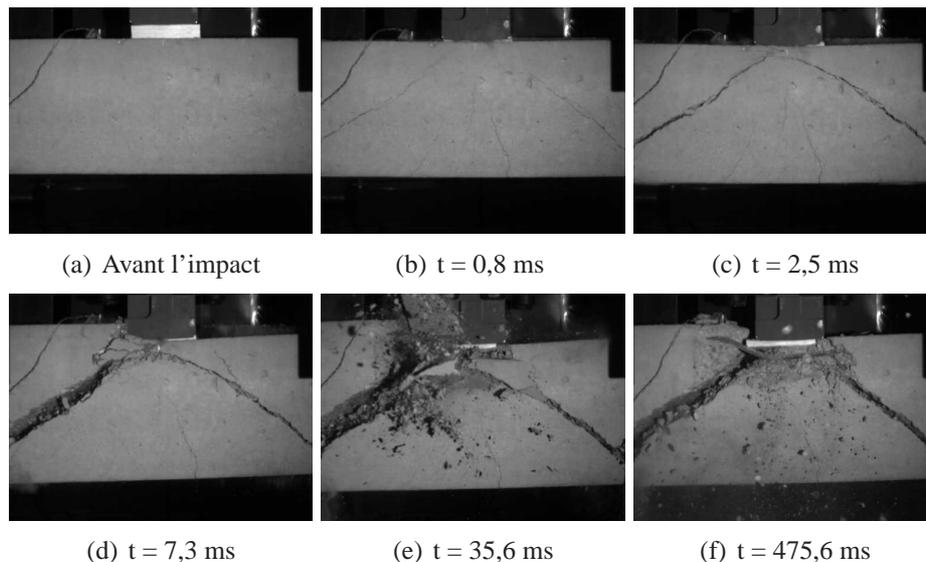


FIG. 5.31: Réactions d'appuis mesurées pour la poutre P3

La figure 5.31 reproduit l'évolution des réactions d'appui mesurées au cours de l'essai. Le premier pic de réaction mesuré est positif, il n'y a donc pas dans ce cas de décollement des appuis. La force mesurée est à peu près égale à la moitié de la valeur du second pic d'effort mesuré par le projectile (160kN pour le projectile contre 80 kN aux appuis) et la suite de l'évolution de la réaction d'appui suit celle de la force d'impact. De plus, on ne constate pas comme c'était le cas pour la rupture en flexion de mise en vibration de la structure. Dans ce cas, il semble que les appuis ne voient que la deuxième partie du chargement, celle qui correspond au déplacement du cône de cisaillement créé par l'impact.

#### 4.4.2 Analyse des images

Cet essai est le seul à présenter une rupture en cisaillement mais, effectué en premier, il n'a pas été préparé pour la corrélation d'images. L'analyse des phénomènes de dégradation se fait donc uniquement sur les images du film. Comme précédemment, il faut faire attention à ne pas confondre le fil de l'accéléromètre avec une fissure !



**FIG. 5.32:** Évolution de la dégradation de la poutre P3

La deuxième image (5.32(b), à  $t = 0,8\text{ms}$ ) ressemble beaucoup à celle de la poutre P1, à la différence près que certaines fissures sont d'avantage ouvertes, ce sont celles qui délimitent par la suite le cône de cisaillement. L'angle de ces fissures est proche de  $45^\circ$  et ces fissures remontent plus haut dans la poutre, quasiment jusqu'à sa face supérieure, sous l'impacteur. Les fissures se rejoignent ensuite et le cône se détache. On remarque que le béton est fortement dégradé entre les deux lèvres des fissures ainsi que directement sous l'impact. Comme en flexion des écailles se détachent parallèlement à l'impact en partie supérieure de la poutre.

## 5 Conclusion

Ces essais d'impact sur tour de chute s'inscrivent dans une longue tradition d'essais d'impacts gravitaires comme cela a été rappelé au début de ce chapitre. L'un des objectifs de cette campagne d'essais était de mettre au point un dispositif expérimental et une instrumentation fiables, dont on ne disposait pas au début de cette thèse. La tour de chute existait déjà mais il a fallu concevoir les dispositifs d'appui pour les poutres, leur instrumentation, concevoir un "nez" pour le projectile et enfin choisir les capteurs les mieux adaptés. Tous les essais se sont déroulés sans encombre et tous les enregistrements, ont parfaitement fonctionné. Le qualité de ces résultats ouvre la voie au CEA vers d'autres campagnes d'essais plus importantes, où l'on pourra étudier l'influence d'autres facteurs, comme la vitesse d'impact par exemple, et où l'on pourra vérifier la répétabilité des résultats.

Une des nouveautés de ces essais est d'avoir associé à l'instrumentation traditionnelle l'analyse par mesure de champs grâce à une caméra rapide et au logiciel CORRELI du LMT-Cachan. Un des constats est que les phénomènes observés sont très rapides, souvent même trop rapides au vu de la fréquence d'acquisition de la caméra (utilisée jusqu'à 30000 images/secondes). De plus, les déformations à la rupture sont trop faibles pour pouvoir être mesurées avant l'apparition des fissures. Néanmoins, on a pu observer deux phénomènes que l'on n'aurait pas pu voir sinon :

- Pour l'essai brésilien, on a pu comparer les champs des déplacements verticaux (direction de l'impact) et horizontaux (perpendiculaires à l'impact). On a pu constater que le champ vertical s'établissait en premier, mais que la rupture de l'éprouvette avait lieu avant que l'onde de compression ne se réfléchisse sur l'appui.

- Pour l'impact sur la poutre, on a pu observer la création d'un cône de déplacement uniforme, qui ressemble, au moins en partie supérieure de la poutre au niveau de l'impacteur, au cône qui se détache lors de la rupture en cisaillement.

D'autre part, les essais d'impact sur poutres ont permis de mettre en évidence deux modes de rupture différents. La comparaison des poutres P3 et P4 (courtes avec et sans cadres) montre que l'élément qui détermine le mode de ruine est la présence ou non d'armatures d'effort tranchant, puisque tout est identique par ailleurs. La corrélation d'image a également permis de montrer que le mode de ruine vers lequel tendent toutes les poutres est ce second mode, par cisaillement, puisque que le mouvement naturel de la poutre va dans ce sens. Pour les longueurs étudiées, l'élanement n'a pas joué de rôle sur le mode de rupture. Il pourrait néanmoins être intéressant de refaire le même essai (même géométrie, même vitesse d'impact) sur une poutre longue sans cadres pour confirmer ce constat.

Ces essais avait également pour objectif de fournir une base de données expérimentales pour la validation du modèle d'endommagement anisotrope développé lors de cette thèse. Les résultats des simulations numériques sont présentés au chapitre suivant.



## Chapitre 6

# Modélisation de structures en béton armé soumises à l'impact et au souffle

Ce dernier chapitre est consacré à l'application du modèle d'endommagement développé lors de cette thèse et synthétisé en conclusion du chapitre 4 sur des cas de calculs de structures réelles, de complexité croissante. Les paramètres du modèles sont ceux du tableau 3.4 de la page 86 . Trois exemples sont traités, les deux essais réalisés sur tour de chute présentés au chapitre précédent (essai brésilien dynamique et impact sur poutres renforcées) ainsi que le cas d'un essai de souffle sur une dalle en béton armé [Pon95].

## 1 Essai brésilien dynamique

### 1.1 Paramètres de la modélisation

La géométrie et le chargement sont ceux de l'expérience menée sur la tour de chute Orion (cf. fig. 5.1). Les trois premiers essais, B10 ( $L=9,4$  cm,  $V_0 = 1,47$  m/s), B11 ( $L=22$  cm,  $V_0 = 1,47$  m/s) et B12 ( $L=22$  cm,  $V_0 = 2,42$  m/s) sont simulés pour voir si l'on retrouve numériquement l'influence de la vitesse d'impact et de la longueur de l'éprouvette observée expérimentalement.

Le code de calcul utilisé (le code explicite Europlexus) permet de simuler l'impact entre deux solides. On reproduit donc précisément le chargement en modélisant d'une part l'éprouvette et d'autre part le projectile auquel on impose une vitesse égale à la vitesse d'impact ( $V_0$ ). Pour les conditions aux limites, on autorise le glissement (latéral) entre les deux solides et on bloque les déplacements verticaux de la génératrice inférieure de l'éprouvette.

Le projectile est représenté par un cylindre d'acier plein ayant la même masse (100 kg) et le même diamètre (22 cm) que le projectile utilisé lors de l'expérience. Le maillage est constitué d'éléments cubiques à 8 points de Gauss pour l'éprouvette (7200 pour B10 et 17600 pour B11 et B12) et de 900 éléments prismatiques à 6 points de Gauss pour le projectile.

## 1.2 Résultats de simulation

La direction verticale (hauteur de l'éprouvette) est la direction  $z$  et la direction latérale est  $y$ . (La longueur est ainsi selon  $x$ ).

### 1.2.1 Cartes d'endommagement

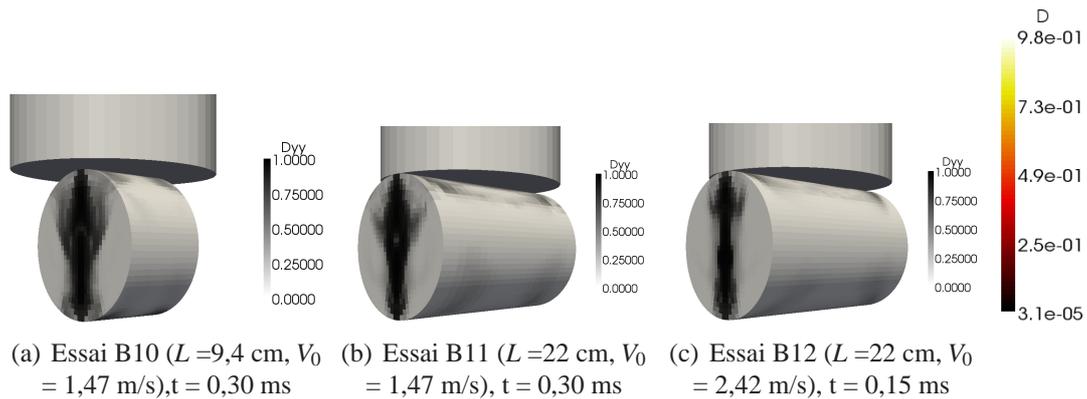


FIG. 6.1: Isovaleurs d'endommagement  $D_{yy}$

Les trois simulations numériques permettent de reproduire le mode de rupture expérimental caractérisé par une fissure centrale traversante (fig 5 pour le résultat expérimental et fig 6.1 à 6.3 pour les résultats numériques associés). Pour les trois structures (B10, B11 et B12), l'endommagement suit la même évolution, il apparaît tout d'abord sous l'impact puis au niveau de l'appui. De ces deux amorces se propagent deux fissures qui finalement se rejoignent au centre de l'éprouvette (fig 6.2). La propagation proprement dite a lieu en moins de 0,05 ms, soit en une durée moindre que la fréquence d'acquisition de la caméra (qui est pour mémoire d'une image toutes les 0,166 ms)

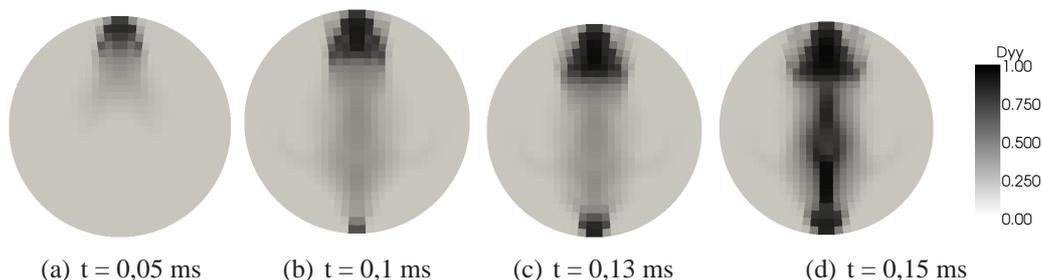


FIG. 6.2: Propagation de l'endommagement  $D_{yy}$

### 1.2.2 Cartes de déplacement, comparaison avec la corrélation d'images

La corrélation d'images a permis de mettre en évidence que le champ de déplacement vertical  $U_z$  s'établissait avant le champ latéral  $U_y$  (chapitre 5). Le résultat de la simulation numérique

confirme cette observation (fig. 6.3). L'onde de chargement vertical atteint le bord inférieur au bout de 0,1 ms alors qu'il faut le double du temps pour que le champ horizontal s'établisse dans toute l'éprouvette. Le retard dans l'établissement du champ de déplacement latéral peut s'expliquer par l'existence de forces internes d'inertie tendant à limiter ce déplacement.

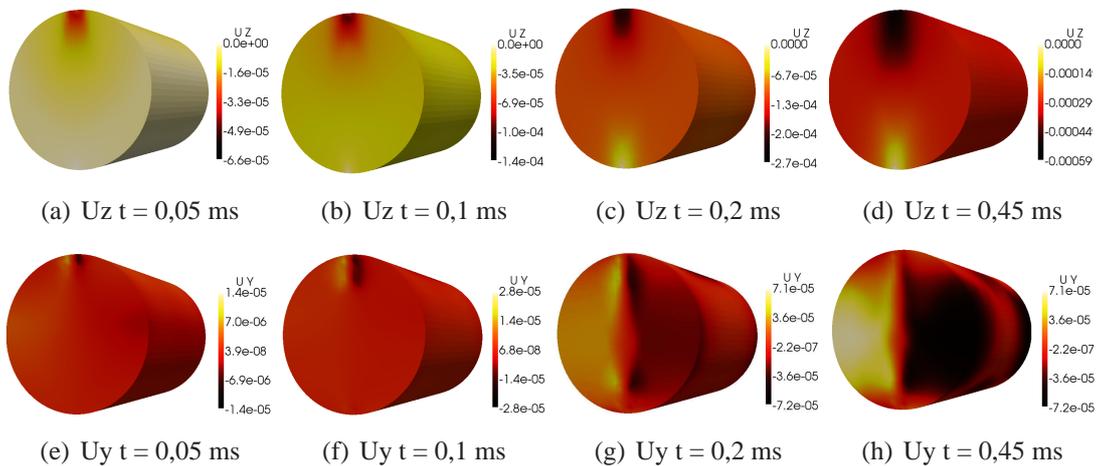


FIG. 6.3: Evolution des déplacements (Les échelles diffèrent d'une image à l'autre)

### 1.2.3 Forces d'impact et déplacements

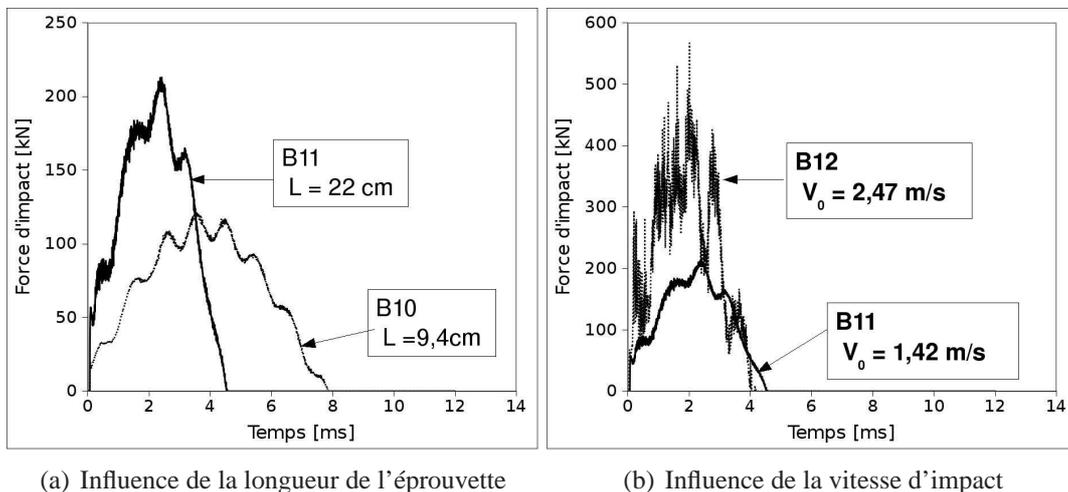


FIG. 6.4: Comparaison des forces d'impact numériques

Les essais sur tour de chute ont montré que la force d'impact était peu sensible à la vitesse d'impact (tout du moins pour les vitesses étudiées,  $V_0 = 1,47$  m/s et  $V_0 = 2,42$  m/s) mais en revanche directement proportionnelle à la longueur (mesurée suivant l'axe  $x$ ). La simulation numérique reproduit cette dernière observation (on voit sur la figure 6.4 que la force d'impact

est double pour l'éprouvette la plus courte). En revanche, le calcul numérique exagère l'influence de la vitesse d'impact, elle est double pour la vitesse rapide alors qu'expérimentalement l'augmentation n'était que de quelques pourcents. On n'observe pas expérimentalement une influence aussi importante de la longueur de l'éprouvette sur la durée du choc. Enfin on constate que le résultat est très bruité pour l'impact rapide et qu'un filtrage numérique de la réponse se justifierait certainement.

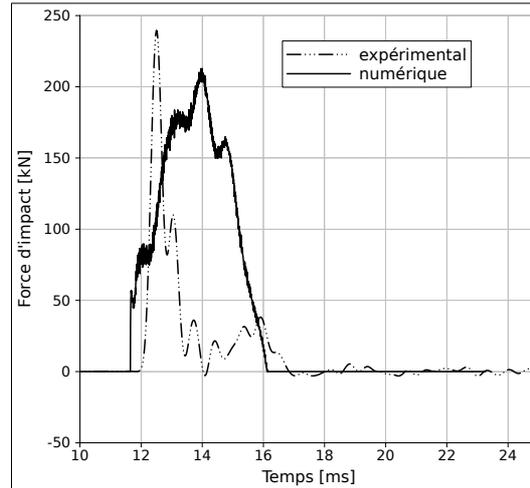
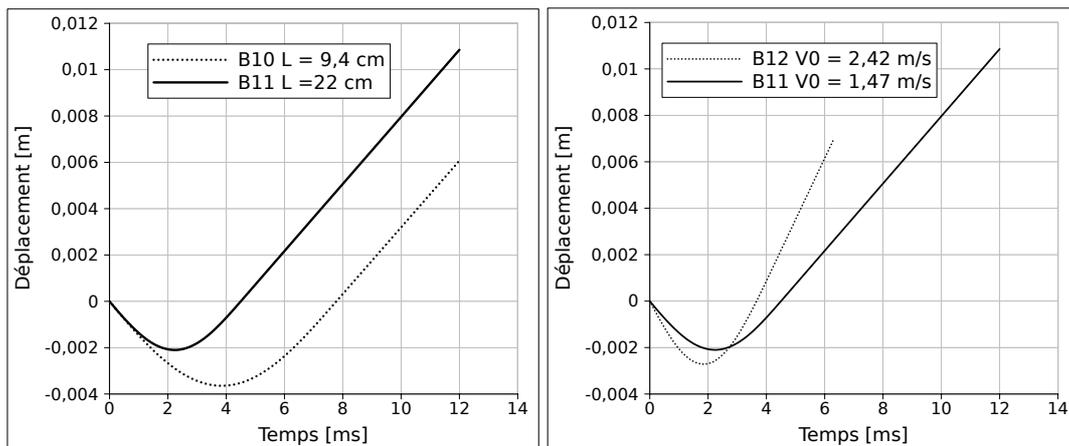


FIG. 6.5: Comparaison de la force d'impact numérique et expérimentale essai B11

Néanmoins sans recalage aucun (paramètres du tableau 3.4), la figure 6.5 montre que l'ordre de grandeur de la force d'impact pour l'essai B11 est correct (de même que pour l'essai B10). En revanche si les durées d'impact sont quasiment identiques également, les aspects des deux courbes sont différents. La montée en charge est plus violente expérimentalement et la force de choc décroît plus vite.



(a) Influence de la longueur de l'éprouvette

(b) Influence de la vitesse d'impact

FIG. 6.6: Déplacement du projectile, résultats numériques

Les courbes du déplacement du projectile en fonction du temps (fig. 6.6) mettent en évidence plusieurs difficultés :

- La vitesse de rebond est quasiment la même que la vitesse d'impact. Le calcul numérique ne dissipe pratiquement pas d'énergie durant l'impact. La prise en compte des déformations permanentes du béton permettrait peut être d'améliorer ce résultat.
- La durée de l'impact et le déplacement maximal du projectile augmente avec la longueur de l'éprouvette ce qui n'est pas vérifié par l'expérience.

## 2 Essai d'impact sur poutre

Ce paragraphe est consacré à la modélisation numérique d'essais d'impact sur des poutres en béton armé. Les calculs numériques correspondent aux essais sur structures présentés au chapitre 5. Les calculs sont menés avec le modèle d'endommagement à effet retard anisotrope développé lors de cette thèse dont les paramètres sont donnés dans le tableau 3.4. L'orientation de la poutre par rapport au repère est la suivante : longueur selon l'axe  $x$ , largeur suivant  $y$  et hauteur suivant  $z$ .

### 2.1 Paramètres de la modélisation

Les paramètres de la modélisation sont choisis de manière à reproduire les essais expérimentaux. Trois calculs différents sont menés :

- Simulation de la poutre P1 ou P2, longue avec des cadres d'effort tranchant,
- Simulation de la poutre P3, courte sans cadres,
- Simulation de la poutre P4, courte avec cadres.

Le projectile est modélisé par un solide déformable ayant la même section que la tête du projectile utilisé et la même masse ( $m = 100$  kg) que celui-ci. Son comportement est élastique et ses propriétés sont celle de l'acier (masse volumique  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, module d'Young  $E = 210$  GPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ ).

Le maillage de la poutre est constitué de 5 éléments dans la largeur, 10 dans la hauteur et de 130 éléments dans la longueur pour la poutre courte (180 pour la poutre longue), soit un total de 6500 éléments (9000 pour la longue) parallélépipédiques de dimension  $1 \times 3 \times 2$  cm<sup>3</sup>.

Les armatures sont modélisées par des éléments de type barre connectés au maillage 3D de la poutre (adhérence parfaite). Elles ont un comportement elasto-plastique parfait (modèle de von Mises dont les paramètres sont  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,3$  et  $\sigma_y = 500$  MPa). Les armatures de flexion en fibre inférieure ont un diamètre de 20 mm, celles en fibre supérieure 8 mm et les cadres, eux ont un diamètre de 6 mm.

Les deux lignes d'appuis sont complètement bloquées suivant la direction verticale  $z$  et on impose au projectile une vitesse verticale  $V_0$  de 8,43 m/s qui correspond à la vitesse d'impact.

## 2.2 Résultats de simulation

### 2.2.1 Evolution de la force d'impact

Les forces d'impact numériques et expérimentales sont comparées pour les poutres P1 (longue avec cadres) et P3 (courte sans cadres) (fig. 6.7). La corrélation est bonne pour la poutre courte P3 à l'exception du premier pic qui est sous-évalué par le calcul. La durée du premier pic et surtout la seconde phase de l'impact, correspondant à l'ouverture du cône de cisaillement sont assez bien reproduites.

Pour la poutre longue, P1, la simulation donne des résultats moins satisfaisants. Le premier pic d'effort est cette fois largement supérieur à la réponse expérimentale et surtout la partie post-pic montre une succession de rebonds que l'on n'observe pas au cours de l'essai. L'impact n'est pas assez amorti, la dégradation du béton ne dissipe pas suffisamment d'énergie. (Notons néanmoins que la valeur extrême de la force d'impact n'est représentée que par un unique point isolé qui peut être erroné. Si on ne tient pas compte de ce point, le premier pic d'impact est assez bien reproduit).

Une différence entre l'essai et le calcul est la présence de bois entre le projectile et la poutre (comme on peut le voir à la figure 6.7). Cependant, le film de l'essai montre que cette fine couche de balsa s'écrase très rapidement (moins d'une milli-seconde) et d'autre part l'évolution de la force d'impact montre aussi (au tout début) que l'énergie dissipée dans le bois est relativement faible. Cette couche de bois a pour fonction, rapellons-le, d'amortir le premier pic pour protéger le capteur d'effort placé sur le projectile. On a tenté de la modéliser grâce au modèle de bois orthotrope implanté dans Europlexus, mais les éléments sont alors tellement écrasés que le pas de temps, régi automatiquement par la condition de Courant diminue trop. Les calculs présentés sont donc sans la couche de balsa.

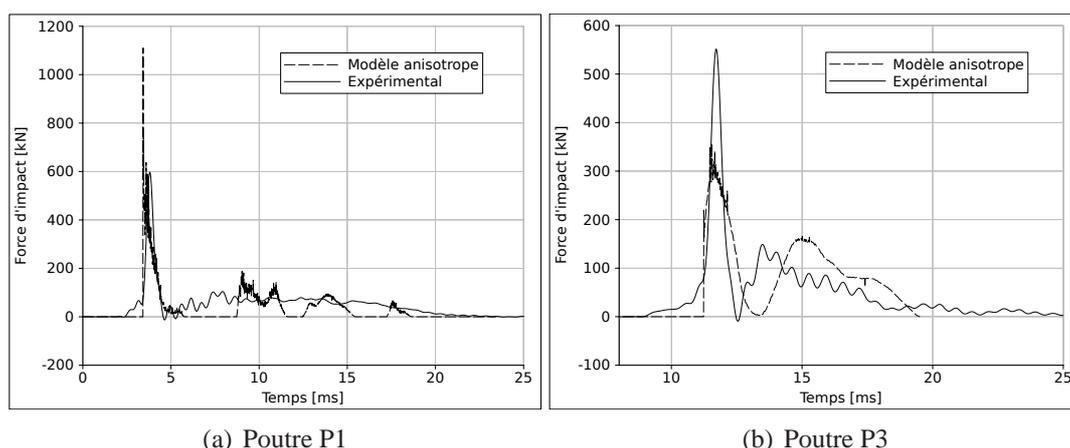
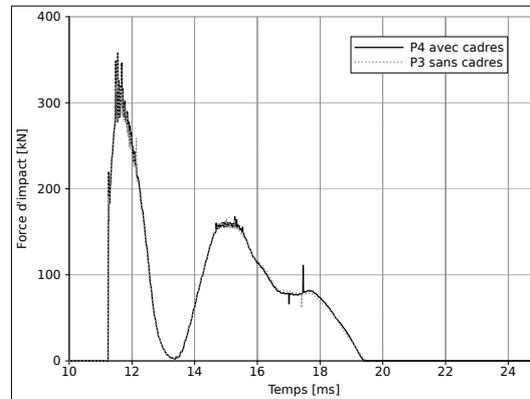


FIG. 6.7: Evolution de la force d'impact

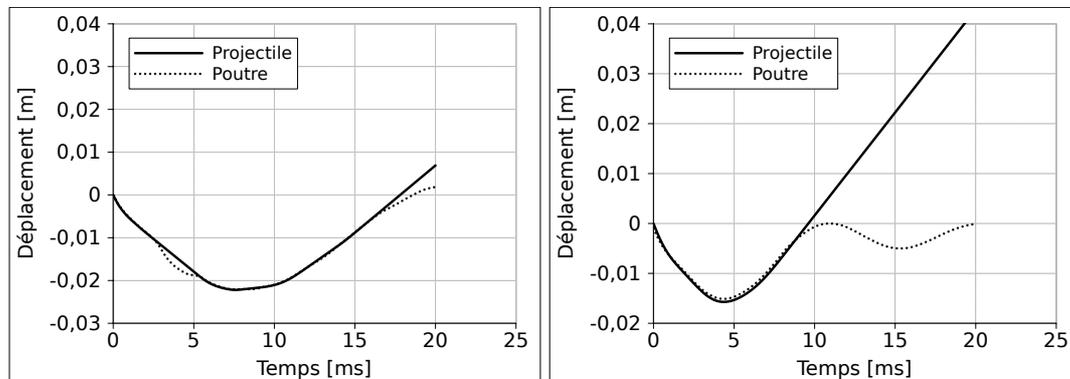
La figure 6.8 représente les évolutions des forces d'impact pour les 2 poutres courtes qui ne diffèrent entre elles que par la présence ou non de cadres d'effort tranchant. Les différences sont tellement minimes qu'elles peuvent être considérées comme négligeables. Pourtant l'analyse

des contraintes dans les armatures montrent qu'elles sont sollicitées et qu'elles reprennent un effort (de l'ordre de 3kN). Les essais ont cependant montré que la présence de cadres avait une influence primordiale puisqu'ils permettaient le passage d'un mode de rupture à l'autre.



**FIG. 6.8:** Influence des cadres dans le calcul numérique, comparaison des forces d'impact pour les poutres courtes P3 (sans cadres) et P4 (avec cadres)

## 2.2.2 Cinématique de l'impact



(a) Poutre P1, longue avec cadres

(b) Poutre P3, courte sans cadres

**FIG. 6.9:** Evolution des déplacements de la poutre et du projectile

La figure 6.9 compare pour les poutres P1 et P3 les déplacements de la poutre et du projectile (déplacement vertical du point au centre de la surface d'impact du projectile et son opposé au niveau de la poutre). Pour P3, la poutre (courte) et le projectile restent en contact jusqu'au rebond (les deux courbes se superposent), puis lorsque le projectile décolle, la poutre se met à vibrer. Pour la poutre longue (P1), l'impact est plus long, si bien que pour une même durée de simulation, on n'atteint pas la phase vibratoire. On constate que numériquement il existe une phase où les deux solides ne sont plus en contact, ce qui s'observe également sur la force d'impact puisqu'elle passe par une phase nulle.

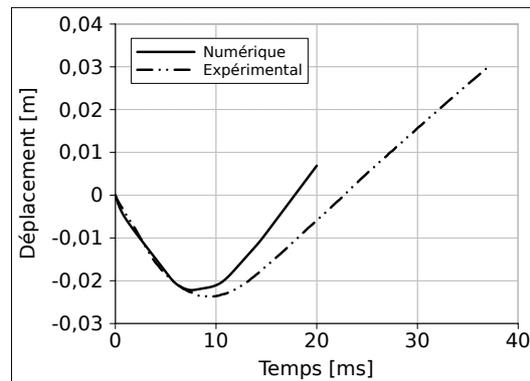


FIG. 6.10: Déplacement du projectile, Poutre P1

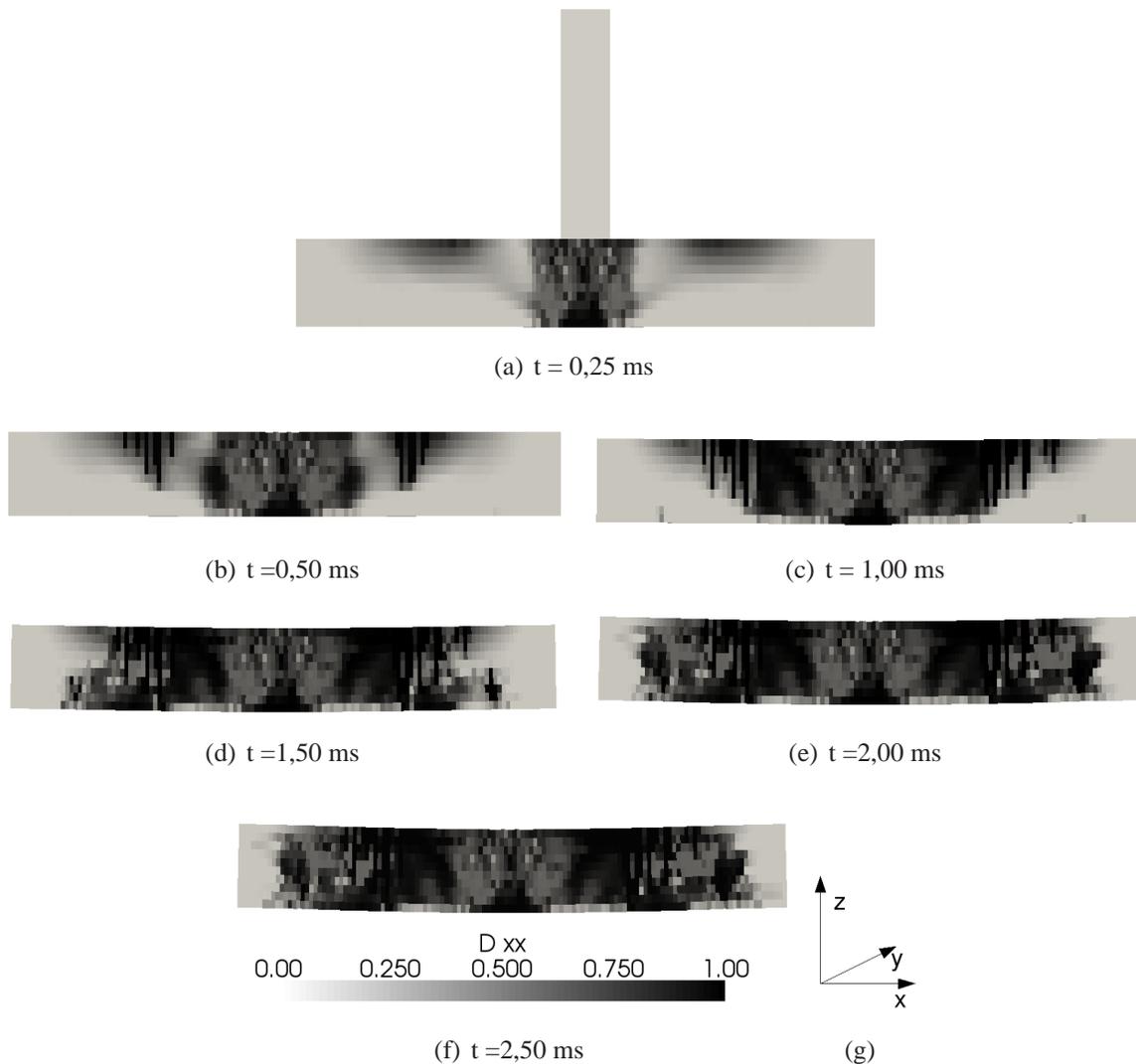
La comparaison avec les résultats expérimentaux (fig. 6.10) montre une bonne corrélation durant tout le début de l'impact, cependant la durée calculée de l'impact est plus courte donc moins dissipant ce qui conduit à une vitesse de rebond plus importante.

### 2.2.3 Cartes d'endommagement et d'endommagement effectif

La figure 6.11 représente l'évolution de l'endommagement pour les poutres P1 et P3 qui rompent respectivement en flexion et par cône de cisaillement. Pour la poutre P3, on observe la succession de différents phénomènes :

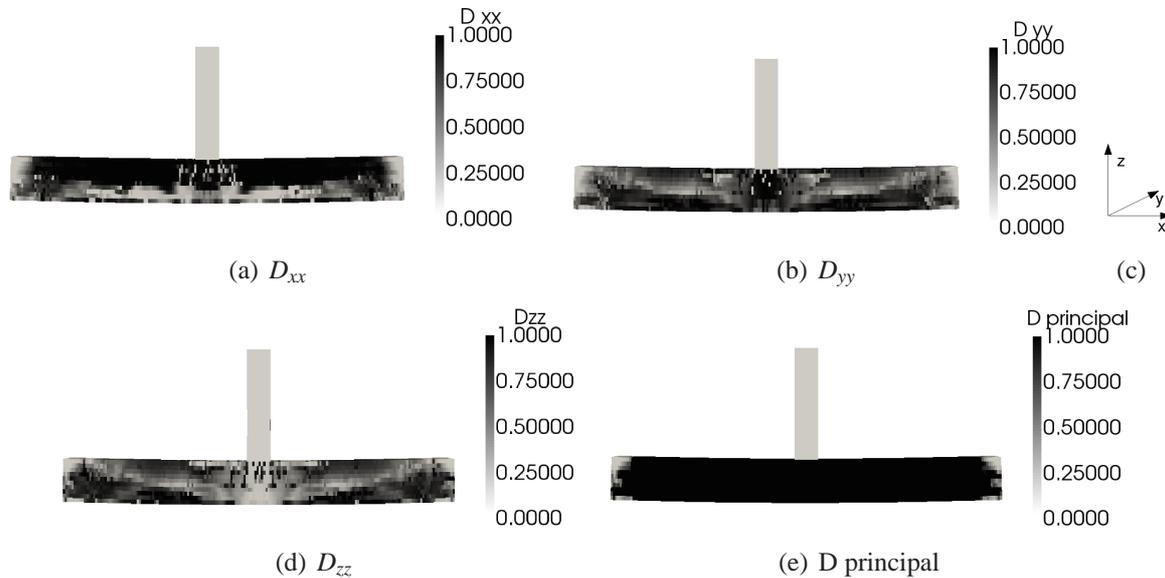
- endommagement de flexion en fibre inférieure ( $t = 0,2$  ms),
- fissures verticales en fibre supérieure ( $t = 1$  ms),
- développement d'une large zone endommagée délimitant un cône à la base de la zone d'impact.

L'évolution de l'endommagement représente assez bien dans le cas de la rupture par cône de cisaillement les différents phénomènes observés au cours de l'essai. Comme pour la force d'impact, la présence ou non de cadres d'effort tranchant ne modifie pas la réponse.



**FIG. 6.11:** Carte d'endommagement avec le modèle anisotrope pour la poutre courte sans cadres P3

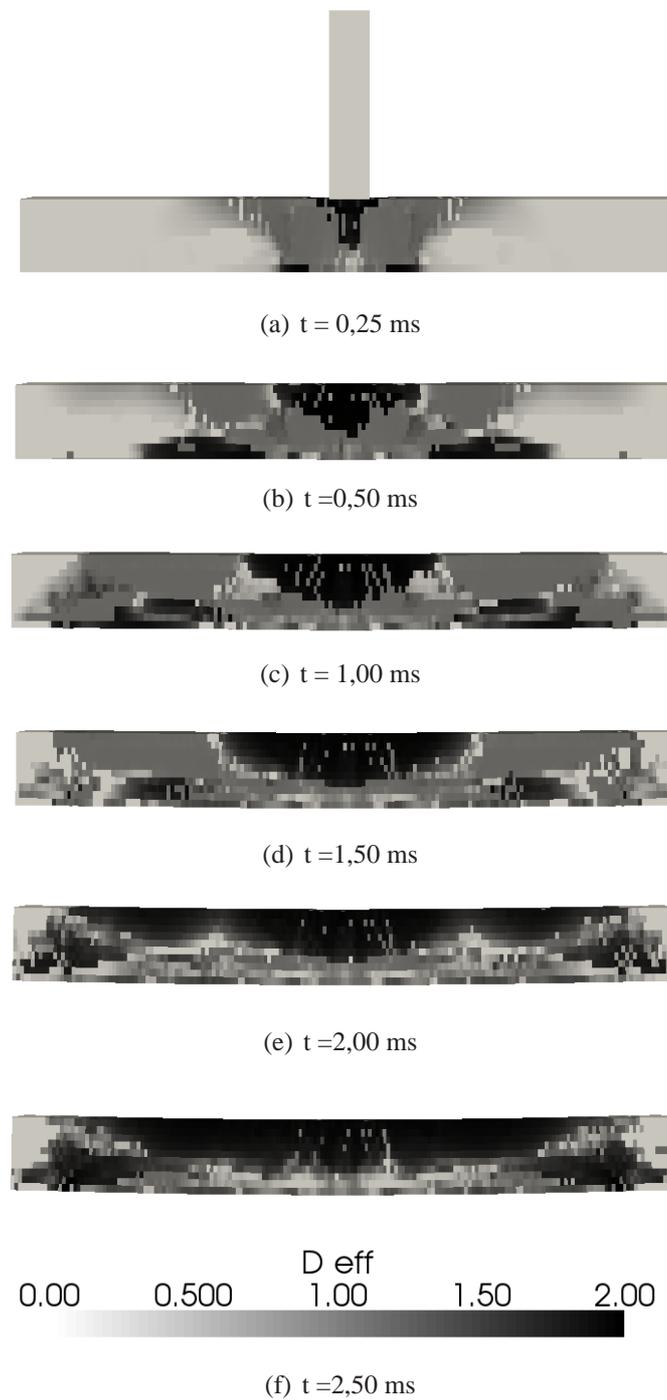
Pour la poutre P1 les résultats sont plus difficiles à analyser dans la mesure où des zones sont successivement sollicitées en traction puis en compression (ou l'inverse) si bien que des fissures s'ouvrent puis se referment. Au début de l'impact, la fibre supérieure est tendue et la fibre inférieure (à l'exception du milieu de la poutre) est comprimée. Par la suite on retrouve un état de flexion "quasi-statique", où les fissures s'ouvrent en fibre inférieure. Si l'on représente simplement la fissuration par l'endommagement comme pour la poutre P3, les fissures développées en début d'impact sembleraient ouvertes en même temps que celles de la fin, ce qui n'est pas réaliste puisque les premières sont refermées quand les secondes s'ouvrent (fig 6.12). Si l'on regarde la première composante principale d'endommagement, le résultat est encore moins clair, car les différents états d'endommagement se superposent (dans différentes directions) et la structure paraît complètement endommagée alors que ce n'est pas le cas.



**FIG. 6.12:** Carte d'endommagement avec le modèle anisotrope pour la poutre longue avec cadres P1 à  $t = 2,5$ ms

On propose donc de représenter l'endommagement effectif, défini au chapitre 1 par  $d_{eff} = \frac{\mathbf{D}:\langle \boldsymbol{\epsilon} \rangle}{\max(\epsilon_I)}$  (cf. fig. 6.13). Cette valeur scalaire ne donne pas d'informations sur la direction de l'endommagement. Sa valeur est comprise entre 0 (état sain) et  $\text{tr } \mathbf{D}$  pour un élément complètement endommagé. On peut faire l'analyse (simplifiée) suivante des cartes d'endommagement effectif à rupture. Les zones où l'endommagement vaut 1 sont plutôt endommagées en traction, et les fissures sont ouvertes. Les zones où l'endommagement vaut 2 sont en compression (à rupture). Les fissures de traction préalablement ouvertes dans cette zone sont alors refermées.

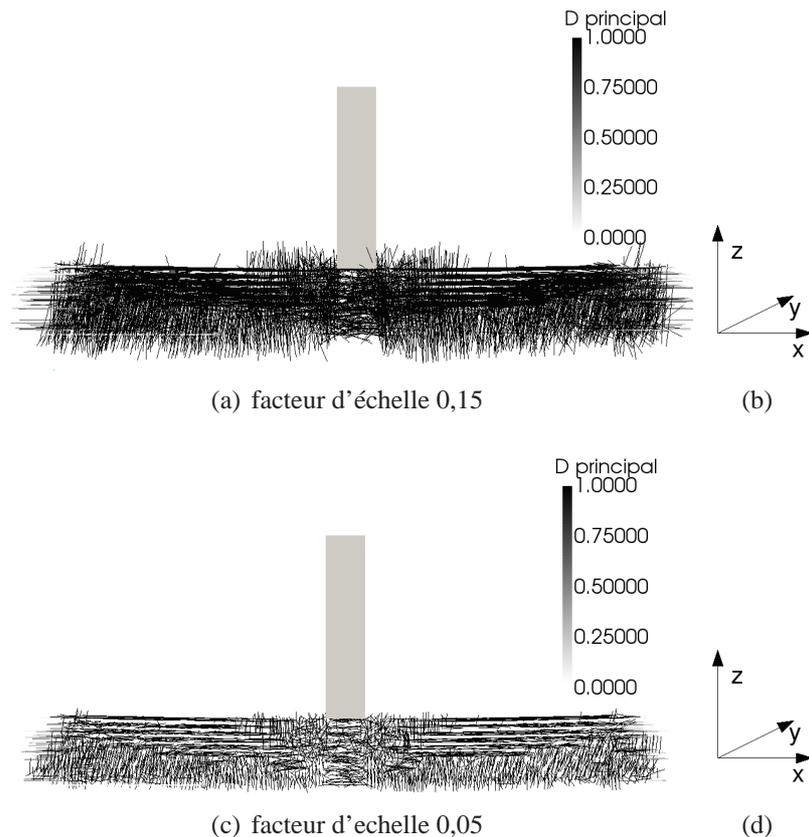
A  $t = 0,25$  ms, la zone sous l'impact est comprimée et la fibre supérieure autour de la zone d'impact est tendue, les fissures s'ouvrent. Progressivement, la zone tendue autour l'impact se déplace vers les bords ouvrant progressivement des fissures en fibre supérieure et dans le même temps, la fibre inférieure s'endommage en compression. Finalement ( $t = 2,0$ ms et  $t = 2,5$  ms) le schéma s'inverse, la fibre supérieure est comprimée et les fissures sont refermée et la fibre inférieure est tendue, les fissures sont ouvertes.



**FIG. 6.13:** Carte d'endommagement effectif avec le modèle anisotrope pour la poutre longue avec cadre P1

Une dernière possibilité de représentation consiste à ne plus tracer des cartes d'isovaleurs mais des vecteurs d'endommagement  $D\vec{n}_I = D_I\vec{n}_I$ . Ces vecteurs ont pour direction celle du

vecteur propre  $\vec{n}_I$  associé à la plus grande des valeurs propres et pour norme la valeur propre associée,  $D_I$ . On étudie deux facteurs d'échelle différents (0,15 et 0,05). Les résultats sont présentés sur la figure 6.14.



**FIG. 6.14:** Représentation du plus grand vecteur propre d'endommagement,  $t = 2,5$  ms

Sur ces cartes, surtout pour le plus petit des facteurs d'échelle, la direction de l'endommagement est plus simple à interpréter. On voit qu'en fibre inférieure et en dessous du projectile, les fissures sont plutôt verticales alors qu'en fibre supérieure, l'endommagement est plutôt parallèle à la longueur de la poutre (axe  $x$ ). Néanmoins comme le nombre de vecteurs représentés est important, on a une impression de "fouillis" si le facteur d'échelle est grand, et si on le réduit, on a davantage de mal à lire la direction.

La représentation de l'endommagement tensoriel est une grande difficulté rencontrée, surtout dans les cas où, comme ici, les directions principales tournent et les sollicitations sont alternées.

### 3 Essai de souffle sur dalles armées

#### 3.1 Description des essais

Ces essais, réalisés au Centre d'Études de Gramat (CEG) dans le cadre de la thèse de Pontiroli [Pon95], consistent à étudier le comportement mécanique de dalles circulaires en béton armé soumises à une onde de souffle générée par une explosion proche. Une description générale du dispositif expérimental (tube à choc) est donnée sur la figure 6.15. L'onde de choc se crée par la brusque libération, au travers d'un système convergent-divergent, d'un volume d'air initialement comprimé (stocké) dans un réservoir.

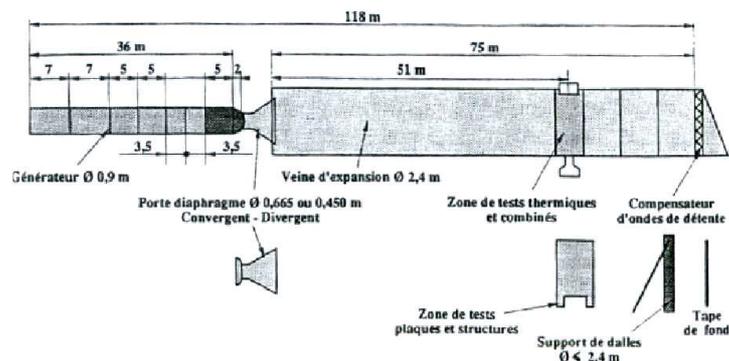
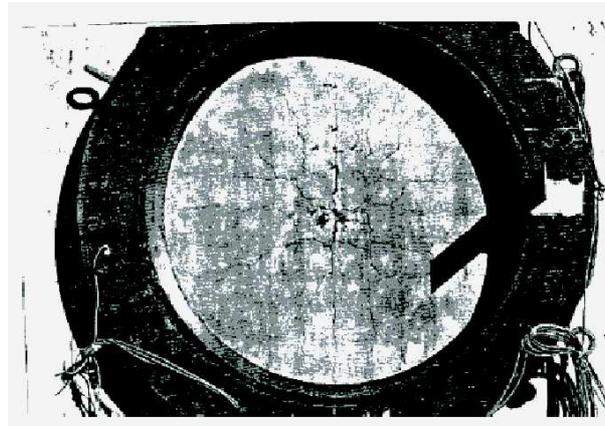
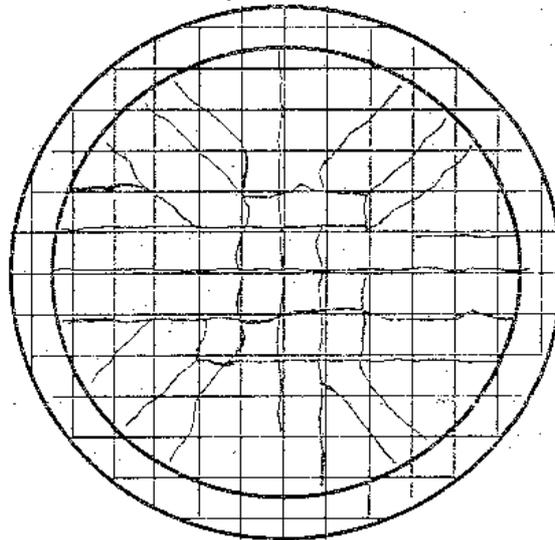


FIG. 6.15: Dispositif expérimental pour les essais de souffle sur dalles, d'après [Pon95]

Dans le but d'observer différents modes de ruine, 3 dalles qui se distinguent par leur épaisseur, leur ferrailage, leurs conditions aux limites ainsi que par les caractéristiques de leur béton sont testées. La première est faiblement endommagée, la seconde rompt en cisaillement et la troisième en flexion (fig. 6.16). C'est à cette dernière, la troisième, que l'on s'intéresse ici. La modélisation a été menée en collaboration avec S. Moulin et S. Potapov du département AMA (EDF-R&D, Clamart).



(a) Photographie de la face tendue



(b) Relevé de fissures et ferrailage

**FIG. 6.16:** Faciès de fissuration de la face tendue pour une rupture en flexion

### 3.2 Paramètres de la modélisation

La dalle a un diamètre de 1,30 m et une épaisseur de 10 cm. Elle est renforcée par deux nappes d'armatures (treillis soudés) de diamètre 6 mm à mailles carrés de côté 10 cm symétriquement réparties par rapport à la fibre moyenne. La pression maximale atteinte expérimentalement est de  $P_{max} = 0,325$  MPa en 0,05 ms. La pression  $P(t)$  redescend ensuite progressivement pour redevenir nulle aux alentours de 300 ms.

Dans cet essai, la dalle n'est pas maintenue sur ses parties latérales afin de lui permettre de fléchir sur les bords. Elle est simplement appuyée entre deux couronnes métalliques relativement peu épaisses qui peuvent donc se déformer en cours d'essai (figure 6.17). Leur rigidité n'étant pas connue, elles ne sont pas modélisées.

On ne modélise qu'un quart de la dalle, et on impose des conditions de symétrie. Les armatures sont des éléments de type barre 1D, connectés aux éléments 3D du maillage béton. Elles sont modélisées par le modèle de von Mises avec les paramètres suivants :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 207,77 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$  et  $\sigma_y$ , la limite d'élasticité égale à 450 MPa. Les paramètres du modèle d'endommagement anisotrope (avec effet de vitesse) sont les mêmes que pour les deux calculs précédents (tableau 3.4), à l'exception du module d'Young et de la masse volumique qui sont pris égaux à ceux de l'expérience,  $E = 31 \text{ GPa}$  et  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ .

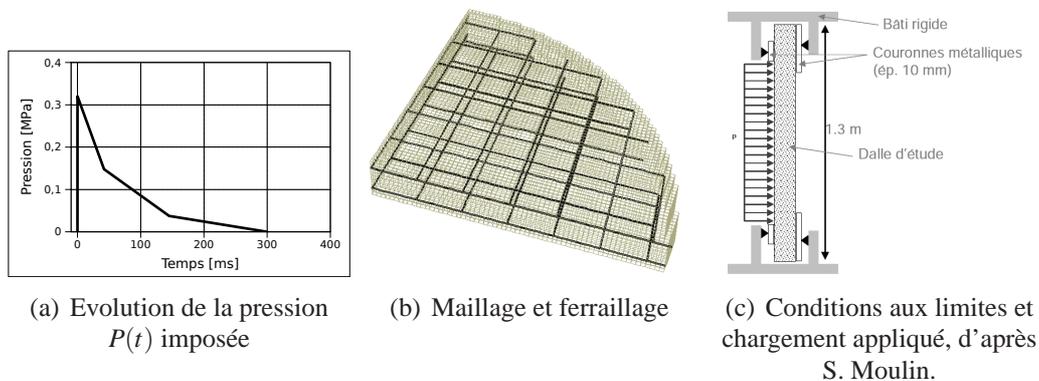
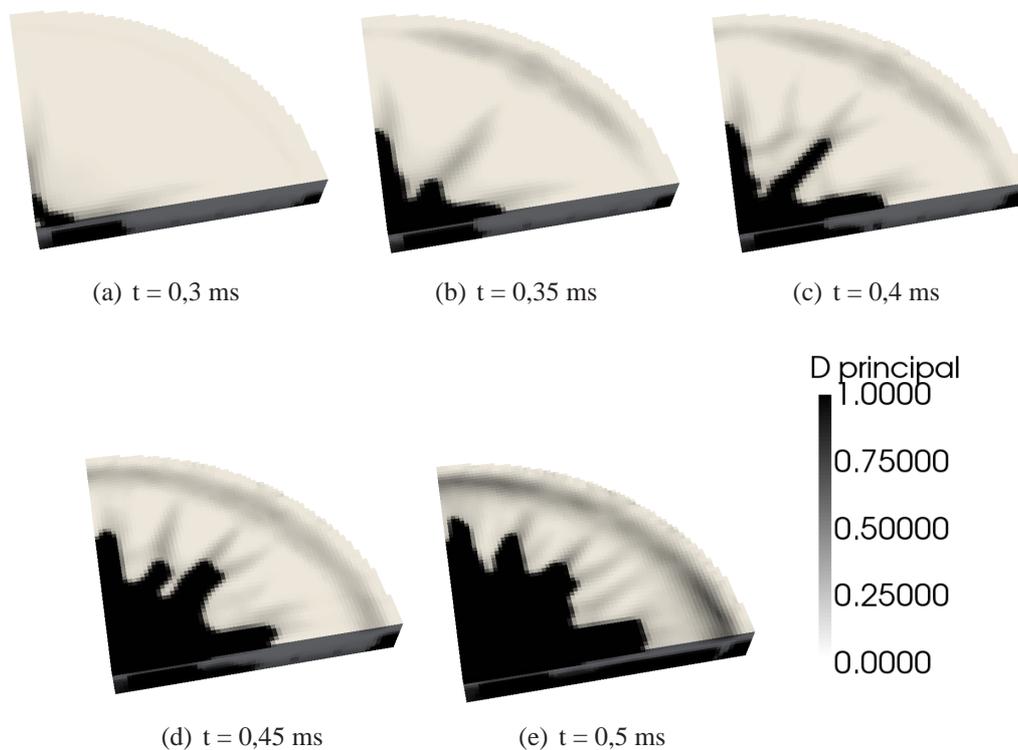


FIG. 6.17: Paramètres de la modélisation

### 3.3 Résultats de simulation

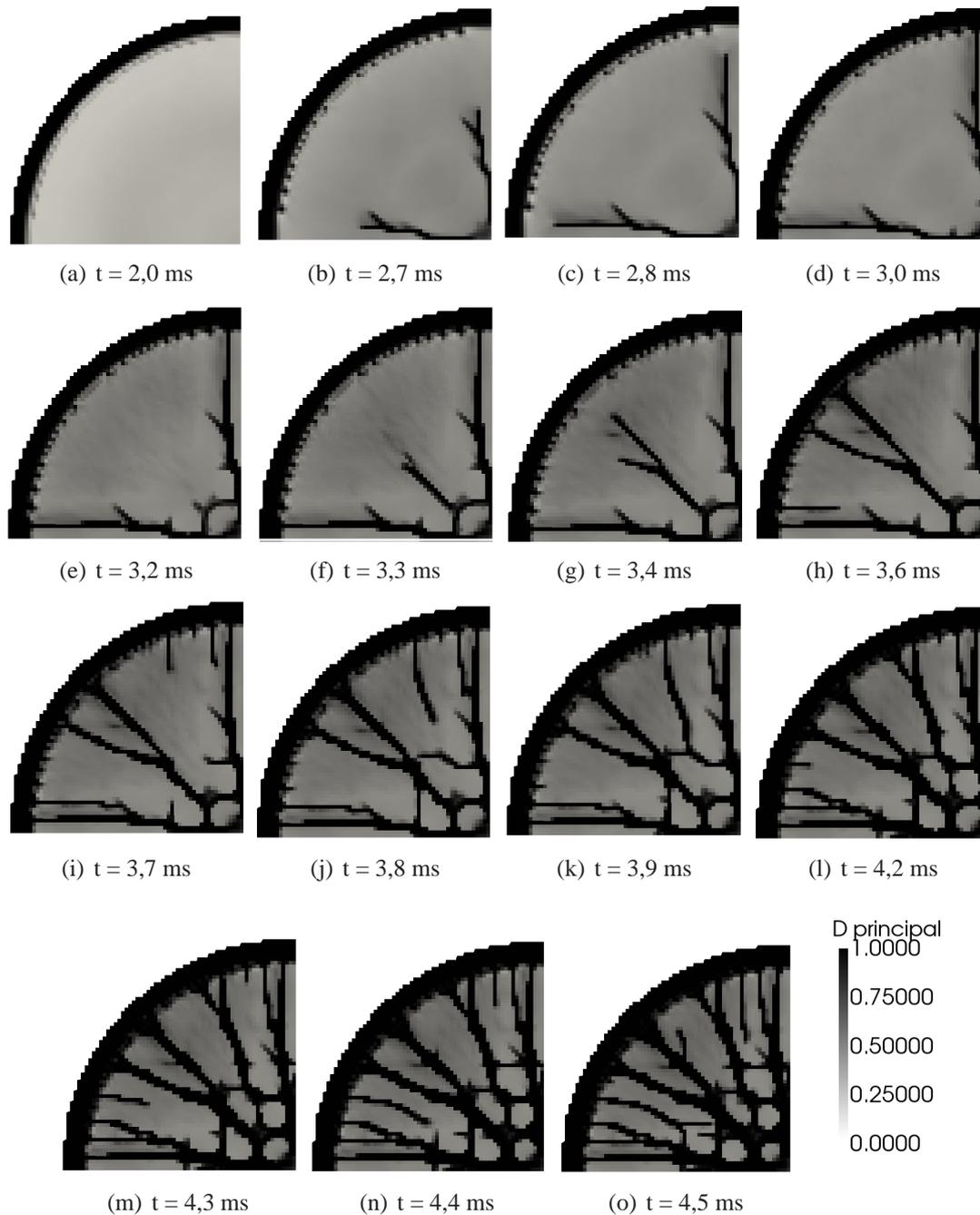
#### 3.3.1 Amorçage et propagation des fissures

Les calculs ont été menés avec le code de calcul explicite Europlexus.



**FIG. 6.18:** Endommagement maximum principal - Vue de la face chargée et tranche

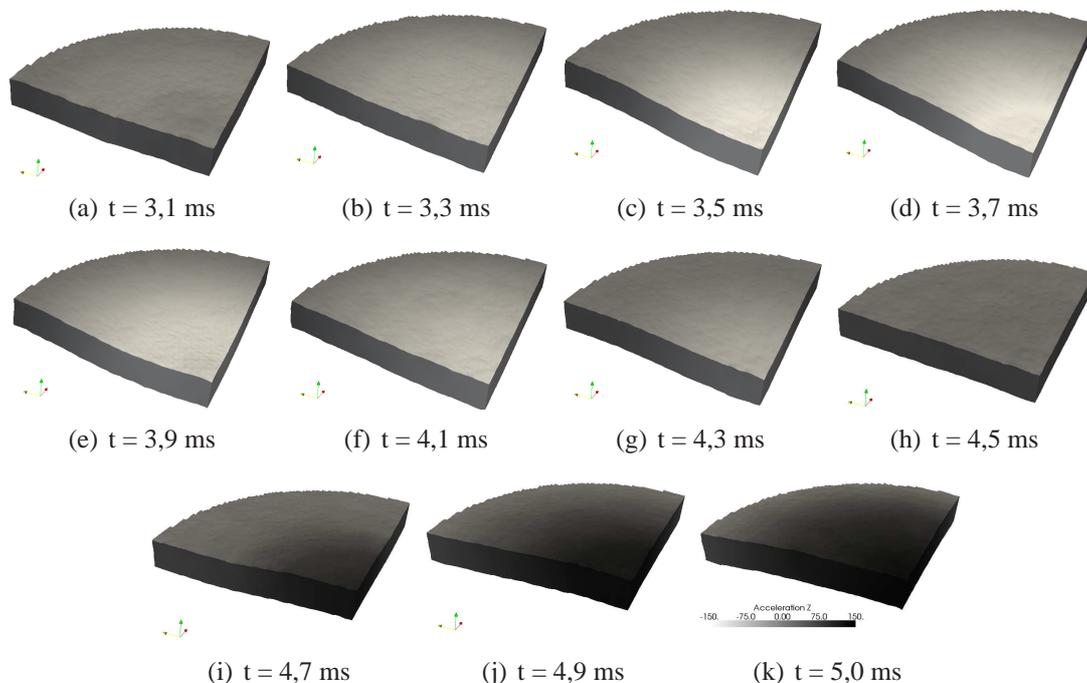
La figure 6.18 montre que l'endommagement se développe d'abord en face arrière libre ce qui s'apparente tout à fait au phénomène d'écaillage, l'onde de compression se propage puis change de signe lors de sa réflexion sur la face libre. La faible épaisseur endommagée en face avant (celle chargée par la pression  $P(t)$ ), est principalement portée par la direction  $z$  (celle de l'épaisseur de la dalle), ce qui correspond donc à une sorte de "calote" qui serait éjectée s'il n'y avait pas de pression sur cette face. On ne peut malheureusement comparer cette observation aux résultats expérimentaux car on dispose uniquement de photos de la face arrière (face libre). Cependant sur un chargement légèrement plus important (qui correspond à un autre des essais de Pontiroli, sur la même dalle, mais avec une pression maximale de 0,380 MPa), il a été constaté que la dalle en son centre est complètement dégradée (on voit au travers) : on a donc bien un endommagement sur les deux faces.



**FIG. 6.19:** Endommagement maximum principal - Vue de la face libre (arrière)

La carte d'endommagement de la face arrière (libre) (fig. 6.19) présente un aspect très proche du profil de fissuration expérimental (fig. 6.16). La dalle s'endommage tout d'abord au niveau de la couronne d'appui (fig. a), cet endommagement est dû aux efforts de compression qui se développent dans cette zone. On voit ensuite s'amorcer (fig. 6.19(b)) et se propager (fig. 6.19(c) et 6.19(d)) deux fissures symétriques, le long des axe transversaux  $x$  et  $y$  (cf. figure 6.21

pour le repère). On verra par la suite que l'on peut estimer la vitesse de propagation de ces deux fissures. La figure (e) montre la coalescence de deux fissures perpendiculaires (et superposées au ferrailage, cf. fig 6.21 (b)) qui se propagent ensuite à  $45^\circ$  (6.19(f), 6.19(g) et 6.19(h)). Cette fissure se sépare en deux, et donne naissance à une nouvelle fissure qui bifurque par rapport à la direction de propagation initiale (fig. 6.19(g) et 6.19(h)). Les fissures suivantes (6.19(i), 6.19(j), 6.19(k), 6.19(l), etc) montrent l'amorçage de nouvelles fissures, mais cette fois non plus au centre de la dalle, mais au niveau des appuis. Ces fissures se propagent vers le centre et coalescent avec les fissures déjà existantes. Notons enfin que deux fissures se créent à partir des deux premières fissures (fig. 6.19(i)) et se propagent perpendiculairement à celles-ci en suivant la disposition du ferrailage (fig. 6.21) Le faciès final d'endommagement calculé numériquement présente dans ce cas une très bonne corrélation avec les résultats expérimentaux, on reproduit bien le réseau de fissures, avec d'une part au centre des fissures qui se superposent au ferrailage et plus loin des fissures orientées à  $45^\circ$  par rapport aux armatures.

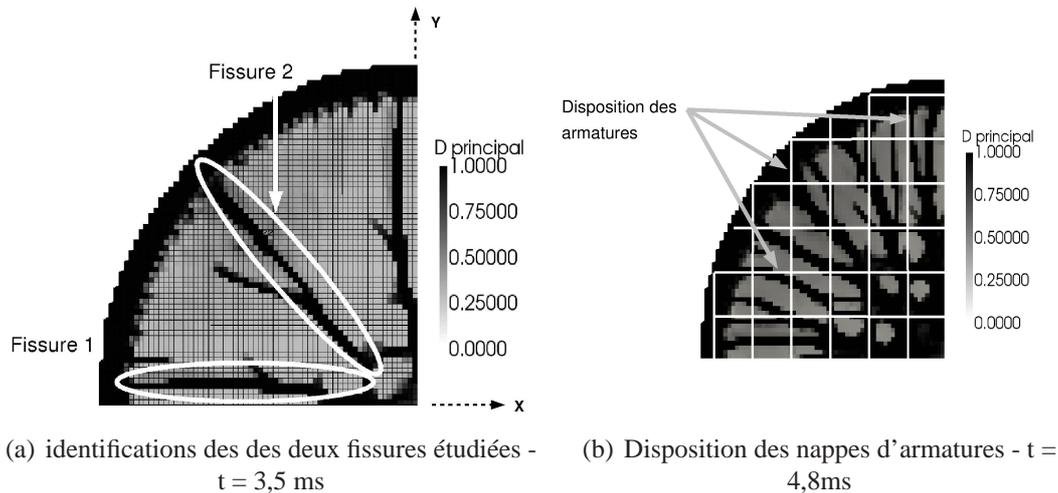


**FIG. 6.20:** Accélération verticale (la déformée est tracée à partir des vecteurs d'accélération avec une amplification de 0,0005)

La figure 6.20 représente l'évolution de l'accélération verticale dans la dalle pour un calcul en élasticité. Le cycle complet de propagation et réflexion de l'onde dure environ 2ms, on ne trace ici qu'un seul cycle, celui qui correspond à une période de propagation des fissures. Pendant la phase où l'onde se déplace du centre vers le bord (de  $t = 3,1$  ms à  $t = 3,7$  ms) les fissures se propagent majoritairement vers les bords. La fissuration ralentit ensuite pendant la phase de réflexion et reprend finalement des bords vers le centre quand la direction de propagation de l'onde de chargement s'inverse.

### 3.3.2 Vitesse de propagation des fissures

On s'intéresse ici à l'étude de la vitesse de propagation des fissures. On étudie le cas de deux fissures repérées sur la figure 6.21.



**FIG. 6.21:** Amorçage, propagation, bifurcation et coalescence des fissures

La vitesse moyenne calculée durant la phase de propagation est de 1410 m/s pour la fissure 1 et de 1620 m/s pour la fissure 2. Cette vitesse est calculée sur un nombre limité de pas de temps (entre 3 et 4, soit une moyenne de 2 ou 3 valeurs), ce qui peut sembler a priori un peu faible pour une bonne précision. Néanmoins cette vitesse est à comparer aux vitesses théoriques de propagation des ondes dans le béton (Pour les descriptions des ondes et l'expression de leur vitesse de propagation, se reporter à [RD96]). On calcule pour  $E = 31 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 0,2$ , les paramètres de modèle anisotrope les vitesses suivantes (tableau 6.1) :

Ondes	Vitesse
Compression $V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	3671 m/s
Longitudinales $V_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$	3870 m/s
Cisaillement $V_{cis} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)}}$	3351 m/s
Rayleigh	2310 m/s

**TAB. 6.1:** Vitesse théorique des ondes dans le béton,  $E = 31 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$ ,  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$

Les deux fissures étudiées présentent la particularité, parmi les différentes fissures observées, de se propager à une vitesse constante. Les autres fissures, elles, bifurquent, coalescent

ou s'arrêtent puis repartent, il est donc plus délicat pour celles-ci d'évaluer une vitesse de propagation. Cette vitesse reste inférieure à toutes les vitesses théoriques calculées. Ce phénomène est lié à la dispersion importante des ondes de Rayleigh.

### 3.3.3 Flèche de la dalle

La figure 6.22 représente l'évolution de la flèche mesurée au centre de la dalle.

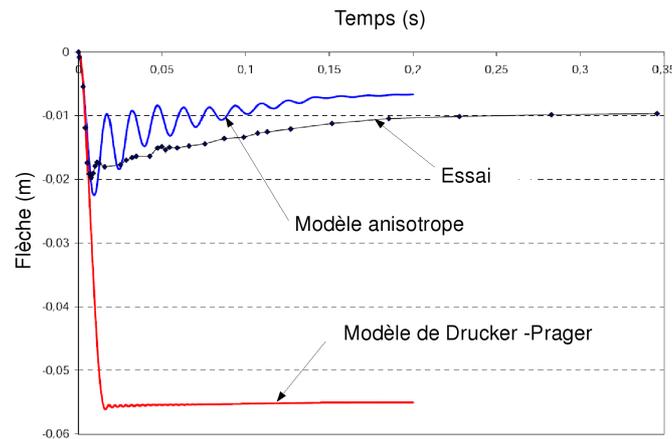


FIG. 6.22: Evolution de la flèche au centre de la dalle

La valeur maximale expérimentale et celle calculée par le modèle d'endommagement présente une assez bonne correspondance, aussi bien en valeur qu'en évolution. Le déplacement maximal mesuré est de l'ordre de 2 cm contre 2,2 cm pour celui calculé. Le résultat du modèle de plasticité de Drucker-Prager est également comparé sur cette figure. On présente le résultat obtenu avec ce modèle car celui-ci est couramment utilisé dans l'industrie et notamment chez EDF. Les paramètres numériques dans le code Europlexus de ce modèle sont la résistance en traction  $f_t = 3\text{ MPa}$  et la résistance en compression  $f_c = 30\text{ MPa}$ . Les paramètres classiques du critère de Drucker-Prager (la cohésion  $c$  et l'angle de frottement  $\phi$ ) sont calculé par Europlexus à partir des valeurs de résistance en traction et en compression. Le module d'Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson ont les mêmes valeurs que pour le modèle anisotrope, c'est à dire  $E = 31\text{ GPa}$ ,  $\rho = 2300\text{ kg/m}^3$  et  $\nu = 0,2$ . Ce modèle, quant à lui, conduit à surestimer très largement le déplacement au premier pic ainsi que les déformations résiduelles car le modèle de Drucker-Prager est parfaitement plastique (pas d'érouissage).

Les parties post-pic diffèrent d'avantage. On observe tout d'abord des oscillations importantes sur la réponse numérique, ce qui traduit une réponse vibratoire importante avec une prédominance du premier mode de flexion. Expérimentalement, ce premier mode est quasiment entièrement amorti, le comportement de la dalle est alors quasi-statique. Numériquement, aucun amortissement autre que celui, faible, lié à la dissipation par l'endommagement n'est introduit, ni numérique, ni au niveau de l'adhérence acier-béton.

D'autre part la flèche résiduelle calculée est d'environ 0,6 cm contre 1 cm pour l'essai. La déformation résiduelle est la conséquence des déformations anélastiques du béton et des

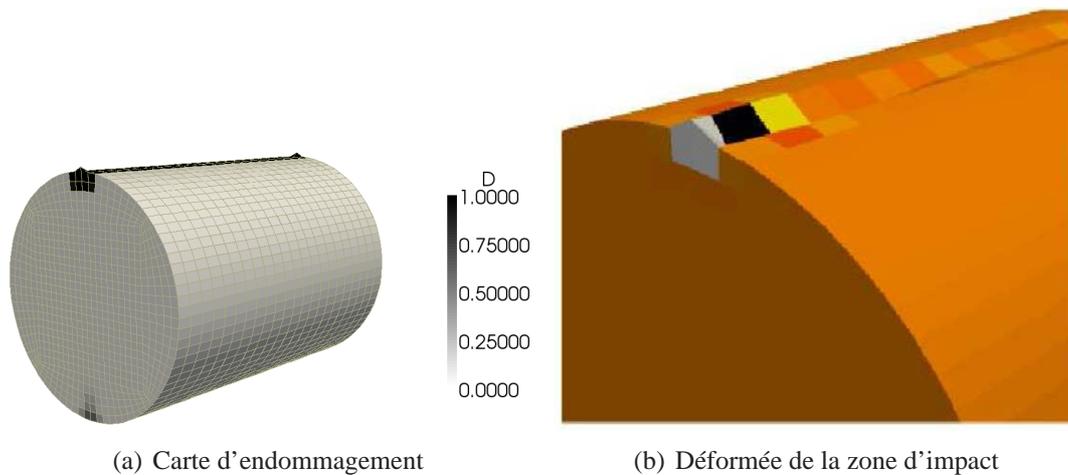
armatures. Le modèle de comportement des aciers est un modèle elasto-plastique parfait qui peut donc reproduire un comportement anélastique, mais peut-être de manière insuffisamment précise. Le modèle de comportement élastique-endommageable considéré ici pour le béton, lui, ne peut modéliser l'existence de déformations permanentes. L'introduction des déformations permanentes est en cours pour le modèle sans effet de vitesse pour des applications sismiques (Thèse de G. Lebon) où elles jouent un rôle plus important que pour les ruptures en dynamiques. Cet exemple semble cependant signifier qu'il pourrait être utile pour certaines de nos applications de ne pas négliger le comportement irréversible du béton.

## 4 Difficultés numériques liées à l'endommagement isotrope

Les 3 mêmes cas test sont simulés avec le modèle visco-plastique visco-endommageable isotrope introduit au chapitre 3 [Gat99] et disponible dans le code de calcul Europlexus. Par la suite pour simplifier l'écriture on appelle "modèle isotrope" ce modèle et "modèle anisotrope" le modèle avec effet de vitesse développé lors cette thèse. Les paramètres du modèle isotrope sont ceux du tableau 3.1, avec comme module d'Young, celui du modèle anisotrope, soit 42 GPa.

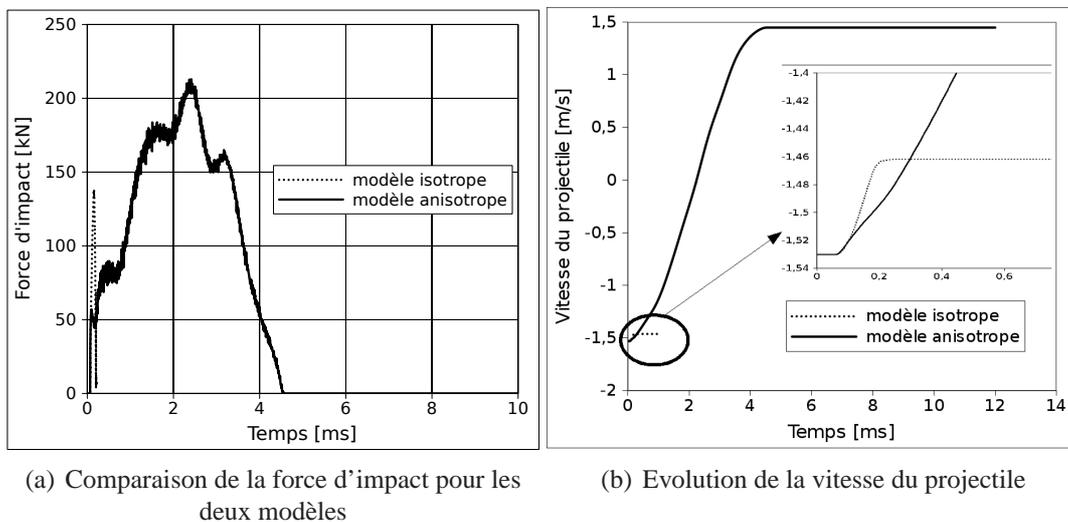
### 4.1 Essai brésilien dynamique

La simulation numérique de l'essai brésilien dynamique s'arrête au bout de 0,1 ms alors que l'on avait pu calculer jusqu'au bout le même cas test avec le modèle anisotrope. L'arrêt du calcul vient de l'existence d'éléments distordus (croisés) dans le maillage. La figure 6.23 permet de comprendre ce phénomène. Les éléments directement sous l'impact s'endommagent très rapidement du fait des contraintes de compression importantes qui se développent dans cette zone. On y atteint l'endommagement critique  $D_c = 0,999$  très rapidement si bien que la raideur endommagée n'est plus égale qu'à 0,1 % de la raideur saine initiale. Comme on continue d'appliquer un chargement sur ces éléments, ils se déforment de manière importante, jusqu'à ce que les noeuds se croisent.



**FIG. 6.23:** Modèle d'endommagement isotrope,  $t=0,04\text{ms}$

Sur la figure 6.24 on compare la force d'impact et la vitesse moyenne du projectile calculées avec les deux modèles. Le résultat numérique de ce même essai est présenté au chapitre 5 (fig. 5.13). Rappelons que le modèle anisotrope estimait de manière satisfaisante la force maximale et la durée de l'impact.

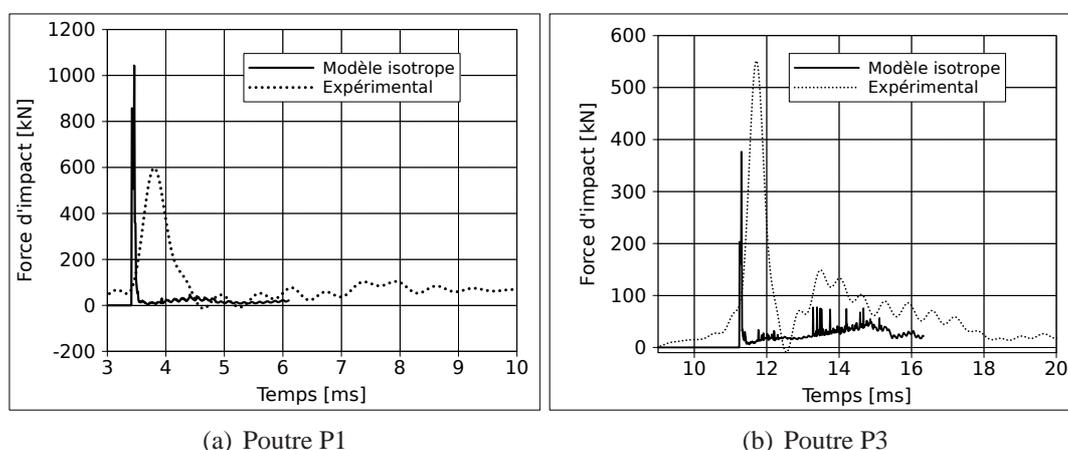


**FIG. 6.24:** Comparaison de la force d'impact et de la vitesse du projectile

La force d'impact calculée avec le modèle isotrope coïncide au tout début avec celle du modèle anisotrope. Cependant elle atteint son maximum et surtout chute beaucoup plus tôt. Cette chute correspond à nouveau au moment où les éléments sont totalement endommagés et ne peuvent alors plus reprendre d'effort. Il en va de même avec la vitesse moyenne, dont l'évolution s'arrête pour une vitesse de  $-1,46\text{ m/s}$  alors que la vitesse d'impact est de  $-1,53\text{ m/s}$ . Cela signifie que l'impact n'arrête pas le projectile et que si le calcul pouvait continuer (en utilisant de l'érosion par exemple) le projectile traverserait l'éprouvette.

## 4.2 Impact sur poutre

Comme précédemment les 3 poutres, P1, P3 et P4 sont simulées sous impact avec le modèle isotrope (paramètres du tableau 3.1 et  $E = 42$  GPa).



**FIG. 6.25:** Evolution de la force d'impact

La figure 6.25 représente la comparaison entre la force d'impact calculée et celle mesurée. Comme avec le modèle anisotrope (résultats présentés à la figure 6.7) la force maximale d'impact est surestimée pour la poutre longue et sous-estimée pour la courte, mais les valeurs extrêmes calculées avec les deux modèles correspondent bien. En revanche la force calculée en isotrope s'effondre juste après le pic. Comme pour la simulations précédente, l'endommagement se localise au niveau de la zone d'impact, provoquant la perte de raideur totale des éléments et empêchant ainsi toute transmission de l'effort.

Le calcul s'arrête lorsque les éléments sont trop déformés, soit aux alentours de 3 ms pour la poutre P1 et de 7 pour P3. Comme avec le modèle anisotrope les différences observées entre les deux poutres courtes P3 (sans cadres) et P4 (avec cadres) sont minimales en dehors du fait que le calcul stoppe légèrement plus tard (0,5 ms d'écart).

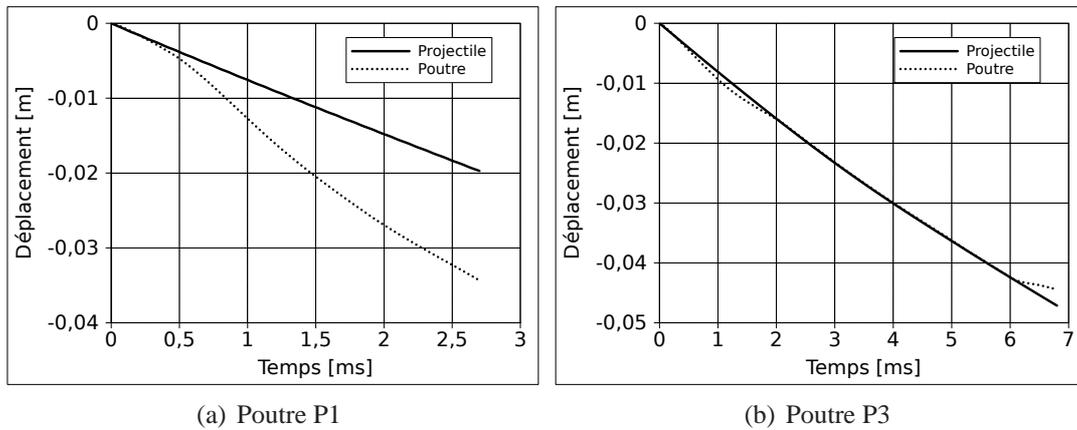


FIG. 6.26: Evolution des déplacements de la poutre et du projectile

Si l'on compare le déplacement du projectile et de la poutre, on constate tout d'abord que le projectile a un déplacement quasi-linéaire, c'est à dire que le contact avec la poutre ne ralentit pas sa chute (figure 6.26). D'autre part les deux courbes ne se superposent pas, si ce n'est au tout début. Le déplacement de la poutre est supérieur à celui du projectile ce qui signifie que l'impact confère aux éléments (totalement endommagés) de la poutre une vitesse supérieure à celle du projectile. Quand le projectile revient au contact du béton, les deux courbes se superposent à nouveau, il pénètre alors complètement la poutre.

C'est ce que l'on observe également sur les cartes d'endommagement (figures 6.27 et 6.28), où l'on voit la zone sous impact se déformer totalement au contact du projectile. Pour le modèle anisotrope, les cartes d'endommagement de ces mêmes essais sont données sur les figures 6.11 et 6.12.

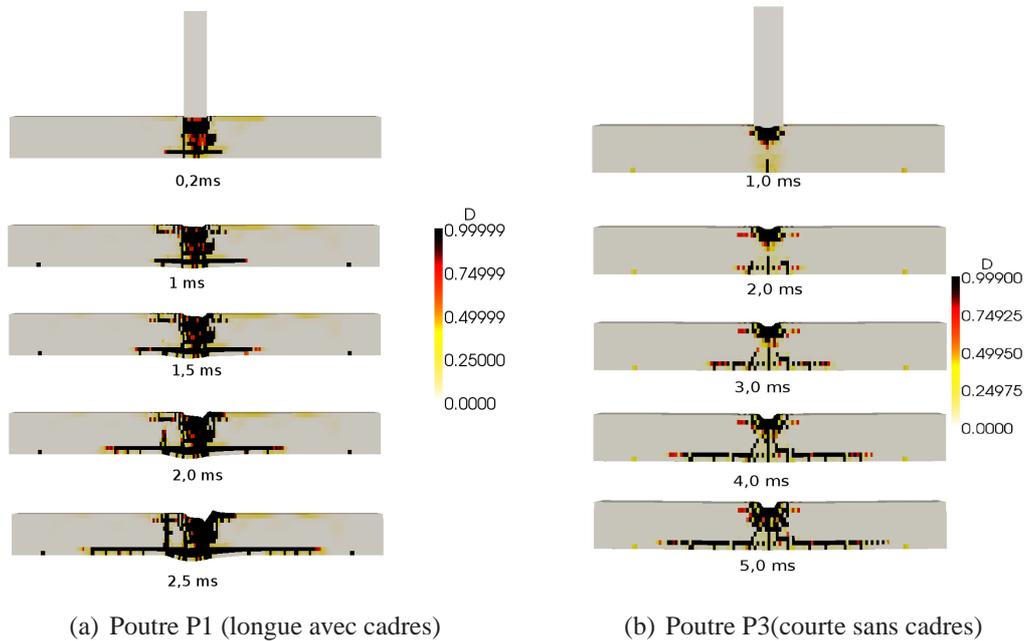


FIG. 6.27: Evolution de l'endommagement (modèle isotrope)

En dehors de la zone d'impact, les cartes d'endommagement des deux poutres présentent des faciès très différents. On reconnaît sur la poutre courte le cône de cisaillement et la fissure centrale en flexion qui se propagent du bas vers le haut. Sur la poutre longue, on perd rapidement la symétrie du problème, mais on remarque néanmoins une forte déformation en flexion en fibre inférieure.

Dans les deux cas, des fissures verticales de flexion s'initient en fibre inférieure à distance régulière. Ces fissures s'arrêtent au niveau des armatures que l'on repère facilement du fait de l'endommagement localisé qu'elles génèrent. Ce phénomène ne correspond pas à un phénomène physique observé, et traduit la difficulté pour un modèle isotrope de traiter les sollicitations de cisaillement qui se développent autour des armatures.

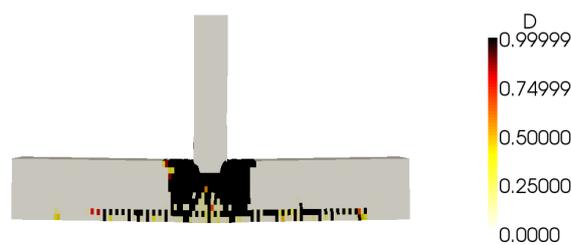


FIG. 6.28: Carte d'endommagement poutre P4

### 4.3 Essai de souffle

La simulation numérique de l'essai de souffle menée avec le modèle isotrope présente la même pathologie que l'essai brésilien et les essais sur poutres : l'endommagement est localisé dans la zone où la dégradation apparaît en premier (ici la couronne d'appui) et l'effort n'est pas transmis au reste de la structure (fig. 6.29).



FIG. 6.29: Carte d'endommagement, modèle visco-plastique visco-endommageable -  $t = 0,5\text{ms}$

### 4.4 Discussion sur l'endommagement isotrope pour des calculs de structures en dynamique

Ces trois exemples ont permis de mettre en évidence les grandes difficultés liées à la considération d'un endommagement isotrope. Nous concluons à la nécessité de représenter l'anisotropie de l'endommagement pour calculer des structures en dynamique où l'application et la propagation du chargement a un rôle important dans le mécanisme de dégradation (sous l'impacteur, proche d'appuis). En effet l'anisotropie induite de l'endommagement lui confère un caractère directionnel ce qui permet de conserver une raideur non nulle dans les directions non endommagées et ainsi de transmettre les efforts sans déformer de manière excessive les éléments. L'endommagement isotrope au contraire tend à localiser l'endommagement dans les zones où les conditions limites s'appliquent (impact, appuis) et de ce fait ne permet pas de représenter correctement la ruine des structures.

## 5 Conclusion

Ce dernier chapitre était consacré à l'application du modèle d'endommagement avec effet de vitesse à des cas réels de calculs de structures. Trois cas, de complexité croissante ont été étudiés : l'essai brésilien dynamique sur tour de chute, l'essai d'impact sur poutres renforcées et un essai de souffle sur une dalle en béton armé. Pour les deux premiers cas les données expérimentales provenaient des essais sur tour de chute réalisés lors de cette, pour l'essai de souffle les données sont issues de la thèse de C. Pontiroli [Pon95].

Pour l'essai brésilien, les résultats obtenus sont satisfaisants pour le faciès de fissuration et

le maximum de la force d'impact malgré une identification très grossière des paramètres du modèle. L'évolution de la force d'impact et la vitesse du rebond du projectile restent des points à améliorer.

Pour la poutre sous impact, les résultats sont plus mitigés. Pour la poutre qui rompt en cisaillement, les cartes d'endommagement correspondent assez bien aux observations, et la comparaison des forces d'impact donne des bons résultats. En revanche, pour les poutres qui rompent en flexion l'interprétation des résultats est plus délicate. En effet l'aspect vibratoire du chargement provoque une alternance des sollicitations. Or ces sollicitations sont importantes et endommagent la structure successivement en traction et en compression. Représenter l'endommagement directement n'est pas réaliste puisqu'une partie des fissures ouvertes en traction sont refermées, ce qui n'est pas représenté lorsque l'on trace l'endommagement. La poutre a alors un aspect beaucoup plus endommagé que ce qu'elle l'est réellement. Si l'on trace l'endommagement effectif, on se trouve confronté à un problème d'échelle, puisque l'endommagement effectif est borné par 2 en compression simple et par 1 en traction simple. La solution de situe peut être dans la définition d'un nouvel endommagement effectif tensoriel et directionnel.

La dernière simulation, celle de la dalle soumise à une rapide augmentation de pression est celle qui donne les résultats les plus intéressants. D'une part la flèche maximale de la dalle est assez bien représentée, mais surtout, l'état d'endommagement est fidèle au résultat expérimental. La difficulté de ce cas test vient du fait que, en plus de l'amorçage et de la propagation des fissures, il nécessite de reproduire la coalescence, l'embranchement et la bifurcation des fissures, ce que fait bien le modèle développé lors de cette thèse. On constate également qu'il est capable de reproduire une propagation non continue des fissures (avec des temps d'arrêt dus aux réflexions d'ondes).

Un des points faibles de cette modélisation et qui a été mis en évidence sur tous les cas traités est la dissipation trop faible d'énergie au cours du calcul. Cela se constate au niveau de la vitesse du rebond du projectile pour les essais d'impact et de la flèche résiduelle pour l'essai sur dalle. C'est la conséquence des choix initiaux de modélisation. En choisissant de ne pas modéliser les déformations anélastiques et en considérant une adhérence parfaite entre le béton et les armatures, on s'impose d'obtenir in fine une dissipation d'énergie plus faible que dans la réalité.

Enfin, la comparaison avec un modèle visco-plastique visco-endommageable isotrope a mis en évidence la nécessité de considérer un endommagement anisotrope pour calculer ce type de structures jusqu'à la ruine où l'aspect directionnel de l'endommagement est primordial.



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Au cours de cette thèse un modèle d'endommagement anisotrope a été développé pour le béton sous sollicitations dynamiques. Cependant, pour des chargements quasi-statiques ou lents, dans le cas de sollicitations monotones ou alternées, le modèle redonne le comportement du modèle d'endommagement anisotrope écrit sans dépendance à la vitesse de sollicitation. Ce modèle est donc capable de traiter toute la gamme des vitesses de sollicitation généralement envisagées pour des structures en béton. Une limitation concerne les vitesses de sollicitation très élevées où les forces d'inertie engendrées par l'accélération sont importantes et conduisent à un état de contraintes fortement confiné. Dans ce cas où toutes les déformations sont négatives, la raideur du matériau n'est pas dégradée, et le comportement reste élastique. L'expérience montre que dans de telles conditions, le béton a plutôt tendance à augmenter sa raideur du fait de la refermeture de la porosité interne et la rupture est ductile. Le phénomène de dilatance a lieu également. Il ne peut être modéliser que par l'introduction des déformations permanentes.

Dans le modèle présenté, l'endommagement est représenté par une unique variable  $\mathbf{D}$ , un tenseur du second ordre. A l'état sain (quand l'endommagement est nul), le matériau présente un comportement élastique isotrope. L'anisotropie est induite par le chargement. Le fait d'introduire une variable tensorielle pour l'endommagement confère à l'élasticité un caractère directionnel : le matériau endommagé a un comportement élastique anisotrope. On a montré que cette propriété était essentielle pour mener à terme la majorité des calculs de structures. En effet, un endommagement isotrope, qui dégrade de manière uniforme l'élasticité dans toutes les directions conduit à des difficultés très importantes dans les zones de concentration d'efforts comme les appuis ou les points d'applications des efforts extérieurs (exemples des essais brésiliens, impacts sur poutres ou dalles soumises au souffle aux chapitres 2 et 6).

Ce modèle reproduit naturellement (i.e. avec une unique variable d'endommagement et une unique fonction seuil) la dissymétrie du comportement traction-compression. Pour cela le seuil d'endommagement est lui-même dissymétrique (on atteint plus tôt le seuil d'endommagement en traction qu'en compression) et cela grâce à son écriture en fonction de la déformation équivalente de Mazars (écrite en fonction des déformations positives). La loi dévolution de l'endommagement est une loi tensorielle pilotée par les déformations positives. L'endommage-

ment évolue donc naturellement de manière différente en traction et en compression.

Dans le cas de sollicitations alternées (par exemple traction puis compression), la fonction seuil telle qu'elle est écrite dans le modèle initial pour les chargements monotones conduit à une limite d'élasticité initiale quand le signe de la sollicitation s'inverse (en compression dans le cas mentionné) beaucoup plus importante que sous un chargement monotone. Le domaine d'élasticité est comme écroui de manière isotrope et le matériau est beaucoup plus résistant dans toutes les directions de l'espace. Pour ce type de sollicitations on utilise donc une autre expression du seuil d'endommagement où les dommages sont désactivés. Une autre variable intervient dans l'expression du seuil, l'endommagement actif qui est la projection du tenseur d'endommagement sur les déformations positives [Sou08, SDRD09]. A partir de ce concept, on a développé un indicateur de l'ouverture de fissures. On estime l'ouverture d'une fissure dans la direction perpendiculaire à l'axe de la fissure comme étant égale à l'intégrale sur ce chemin du produit de l'endommagement et de la déformation positive dans cette direction. Ainsi si l'élément est endommagé dans cette direction et que la déformation est positive, on obtient une valeur de l'ouverture, si la déformation est négative, la fissure est considérée comme refermée et l'ouverture est nulle (chapitre 2).

Dans l'expression du potentiel d'état, pris comme étant l'enthalpie libre de Gibbs, on sépare les parties hydrostatiques et déviatoriques. Ainsi, on peut écrire la relation de comportement qui lie les contraintes aux déformations comme étant la dérivée du potentiel. Ce potentiel étant continûment différentiable et la relation de comportement étant continue, le modèle est in fine robuste. La loi d'évolution de l'endommagement ne dérive pas d'un potentiel d'évolution (ou d'un pseudo-potentiel) par une règle de normalité. Ce modèle ne s'inscrit donc pas de ce fait dans le cadre des matériaux standards et la positivité de la dissipation n'est pas a priori assurée. Cependant elle a été prouvée pour le quasi-statique [Des06] et on a pu montrer qu'en dynamique, la condition pour assurer la positivité de la dissipation ( $\dot{D} \geq 0$ ) était conservée et toujours vérifiée.

On a pu établir deux expressions équivalentes de la dissipation intrinsèque due à l'endommagement (chapitre 2). En discrétisant ces expressions on peut calculer l'évolution de la dissipation au cours du temps. On montre ainsi dans le cas de sollicitations uniaxiales que le modèle présenté dissipe par endommagement environ  $1000 \text{ J/m}^3$  au moment de la rupture en traction et environ  $25000 \text{ J/m}^3$  en compression (résultats obtenus en quasi-statique). La dissipation d'énergie est donc elle aussi dissymétrique entre la traction et la compression. Elle est calculée par le code de calcul au moment où l'on intègre la loi de comportement. On connaît ainsi la dissipation intrinsèque volumique en chacun des points de Gauss et on peut tracer des cartes de dissipation de la même manière que l'on peut tracer des cartes de déformations ou d'endommagement.

L'extension du modèle à la dynamique consiste à considérer une dépendance de la résistance du béton à la vitesse de déformation (chapitre 3). L'effet de cette vitesse est beaucoup plus important en traction qu'en compression, et pour les vitesses de déformation élevées (i.e.

supérieure à  $10 \text{ s}^{-1}$ ) l'effet de la vitesse en compression est essentiellement lié à des considérations inertielles. Les forces internes d'inertie confinent le béton et le rendent plus résistant. Pour cette raison on décide de ne pas introduire d'effet de vitesse en compression au niveau de la loi de comportement. La faible augmentation de la résistance pour des chargements lents, liée par exemple à la viscosité de l'eau dans les pores du béton, est donc négligée. Ainsi, seul l'effet de vitesse en traction est introduit dans le modèle. Le modèle est modifié pour introduire une loi de visco-endommagement (ou endommagement à effet retard). Plus la vitesse de sollicitation est importante et plus l'endommagement est ralenti, et ainsi plus on augmente la résistance du matériau. On reproduit ainsi l'effet de vitesse expérimental en traction. Cette loi de viscosité fait intervenir un paramètre  $\dot{D}_\infty$  qui borne la vitesse d'évolution de l'endommagement. Cette vitesse est l'inverse d'un temps caractéristique..

La loi de viscosité est une loi isotrope, ce qui s'avère suffisant dans notre cas où l'on ne considère qu'un effet de vitesse en traction. Dans le cas de sollicitations alternées en dynamique, on utilise, comme en quasi-statique, le concept d'endommagement actif pour la désactivation des dommages. Ainsi, l'effet de vitesse en traction après un chargement endommageant en compression est le même que pour un chargement en traction dynamique monotone.

La dissipation intrinsèque en dynamique dépend fortement de la vitesse de déformation et des paramètres de la loi de viscosité, mais pour les paramètres choisis, on multiplie par 3 la dissipation à  $\dot{\epsilon} = 10 \text{ s}^{-1}$  et par environ 50 à  $\dot{\epsilon} = 100 \text{ s}^{-1}$ .

La dépendance au maillage a également été étudiée et deux limiteurs de localisation classiques ont été comparés, le non-local intégral d'une part et l'effet retard d'autre part (chapitre 4). L'effet retard est directement introduit dans le modèle par la loi de viscosité puisque que le temps caractéristique de la régularisation (déterminé à partir de la vitesse des ondes et de la longueur caractéristique liée à la micro-structure) et le même que le temps caractéristique du visco-endommagement (identifié à partir des résultats d'essais reliant la résistance en traction à la vitesse de déformation). Le non-local est lui introduit de manière classique (de type [PCB87]) en choisissant comme variable non-locale la déformation équivalente de Mazars. On a pu montrer que pour les calculs où la vitesse de déformation avait peu d'influence, seule la régularisation non-locale était efficace, alors que dans le cas contraire, l'effet retard est meilleur d'une part parce que le temps de calcul est beaucoup plus court et d'autre part parce que la rupture reste localisée alors que le non-local a tendance à élargir à outrance la zone de rupture. La combinaison des deux régularisations conduit à une moins bonne régularisation et à des difficultés au niveau des bords.

Une nouvelle instabilité a été mise en évidence et son existence a pu être prouvée (chapitre 4). Elle est due au caractère induit de l'anisotropie de l'endommagement qui est instable dans le sens où l'on propage les erreurs, numériques par exemple, dues à des perturbations. Cette instabilité apparaît dans le cas en compression simple. Dans ce cas une différence même minime entre les deux valeurs d'endommagement transverses, orthogonales au chargement, conduit à un comportement rapidement et violemment instable (il n'y a plus alors qu'un seul des deux

endommagements qui évolue). La loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit a été modifiée de manière à ne plus écrire l'endommagement comme une fonction des déformations positives (fonctions de l'endommagement à travers le coefficient de Poisson apparent) mais comme une fonction des déformations effectives positives (uniquement fonctions des paramètres matériaux initiaux). En dynamique cette instabilité n'existe pas puisque ce sont les forces d'inertie qui contrôlent les déformations latérales non imposées plutôt que les coefficients de Poisson apparents.

Les deux derniers chapitres de cette thèse (5 et 6) sont consacrés à la validation dans le cadre de calculs de structures du modèle développé. Le premier (chapitre 5) traite principalement des essais réalisés sur tour de chute de manière à obtenir des résultats d'essais fiables. Ces essais (essais brésiliens en dynamique sur des éprouvettes de béton et impact sur poutres en béton armé) étaient instrumentés de manière à fournir une base de données pour la validation numérique du modèle. Pour les essais brésiliens, la force d'impact, l'accélération du projectile ainsi que son déplacement ont été mesurés. Pour les poutres, en plus des mesures précédentes, furent également mesurées les réactions d'appuis et les accélérations verticales en trois points de la poutre. De plus une caméra rapide a été utilisée pour filmer les essais et analyser le processus de dégradation. Cependant la vitesse d'acquisition de la caméra utilisée n'est pas suffisamment rapide (entre 6000 et 30000 images par secondes) pour observer la propagation des fissures. La corrélation d'images sur les films des essais a cependant permis d'observer les déplacements globaux de la poutre et de l'éprouvette avant la fissuration. Le nombre d'essais réalisés étant relativement faible (4 essais brésiliens et 4 poutres), peu de paramètres ont pu être étudiés. Pour les essais brésiliens on a pu montrer que le paramètre le plus déterminant sur la valeur de la force d'impact était la longueur de l'éprouvette (longueur de contact), plus que vitesse d'impact. Lors des essais sur poutres pour la vitesse d'impact imposée (8,43 m/s), on passe d'un mode de rupture en flexion à une rupture par cône de cisaillement lorsque l'on supprimait les armatures d'effort tranchant. L'influence de la vitesse d'impact n'a pas été étudiée.

Les simulations numériques (essais brésiliens quasi-statique et dynamiques, impacts sur poutres renforcées et essai de souffle sur dalle renforcée) ont montré que le modèle anisotrope permettait de mener le calcul jusqu'à un état de dégradation très avancé, contrairement au modèle d'endommagement isotrope auquel on l'a comparé. Avec le code implicite Cast3M (essai brésilien quasi-statique, chapitre 2), le calcul converge jusqu'à la ruine. Avec le code explicite Europlexus, l'anisotropie de l'endommagement permet de conserver une raideur dans la direction du chargement et des réactions d'appui même si les éléments sont endommagés dans les autres directions. Ainsi, on ne se retrouve pas confronté à des problèmes de distorsion d'éléments comme c'est le cas avec le modèle isotrope. On peut donc qualifier le modèle de robuste, ce qui était l'un des objectifs de cette thèse.

Le modèle anisotrope reproduit bien (tout du moins pour les essais brésiliens et pour l'essai d'impact sur poutre) le faciès de fissuration. Pour les essais sur poutres, le résultat est moins satisfaisant, notamment à cause des difficultés de visualisation d'un endommagement tensoriel. Dans le cas de l'essai brésilien, les directions principales d'endommagement coïncident avec

les directions du maillage, et ces directions sont à peu près les mêmes pour tout le maillage et ne tournent pas au cours du calcul. On a choisi dans ce cas de tracer l'endommagement suivant les axes du maillage et le résultat est facilement interprétable. Pour la dalle soumise au souffle, la représentation est également assez simple et compréhensible puisque là aussi les directions ne tournent pas et que les fissures ouvertes ne se referment pas. On représente ici la plus grande composante principale du tenseur d'endommagement, on n'a donc pas d'informations sur la direction mais l'aspect localisé de l'endommagement et le fait de pouvoir suivre sa propagation nous permet de comprendre néanmoins facilement les cartes tracées. En revanche pour les poutres la représentation est beaucoup plus compliquée : les directions principales ne sont pas les mêmes sur tout le maillage de la poutre, ces directions tournent au cours du calcul et les fissures s'ouvrent et se referment. Si l'on représente l'endommagement principal, différents phénomènes se superposent et s'accumulent si bien que la poutre a vite un aspect très endommagée où l'on ne peut plus discerner les différents phénomènes. De plus on n'a pas d'informations sur l'ouverture et la refermeture des fissures. Si l'on représente l'endommagement actif, le résultat est plus facile à analyser mais on n'a pas là non plus d'informations sur la direction de l'endommagement. De plus il peut être difficile d'interpréter des cartes d'endommagement où les valeurs sont comprises entre 0 et 3. Un travail important doit être entrepris sur la représentation de l'endommagement anisotrope pour rendre les résultats lisibles.

La simulation d'essais de souffle sur une dalle en béton armé a permis d'illustrer certaines des possibilités du modèle d'endommagement anisotrope. Sur cette simulation, en plus de l'amorçage et la propagation des fissures, on montre que le modèle est capable de gérer sans aucunes modifications :

- la bifurcation d'une fissure,
- le branchement (une fissure qui se sépare en deux) ,
- la coalescence de fissures (deux fissures se rejoignent pour donner naissance à une nouvelle fissure, dans une direction différente),
- l'arrêt et le redémarrage d'une fissure.

On peut estimer à partir de la simulation la vitesse de propagation qui est assez largement inférieure à la vitesse des ondes de Rayleigh, qui borne théoriquement la vitesse de propagation.

Enfin, toutes les simulations ont mis en évidence (soit au niveau de la vitesse de rebond du projectile, soit au niveau de la flèche résiduelle pour l'essai de souffle), une dissipation d'énergie trop faible par rapport à la réalité (les résultats d'essai). Diverses explications sont envisageables (adhérence acier-béton, absence de déformations permanentes) qui seront plus largement abordées dans les perspectives.

## Perspectives

Les résultats obtenus lors de cette thèse montrent que les choix initiaux, celui de la modélisation par éléments finis de structures en béton armé en dynamique et celui du modèle

d'endommagement anisotrope à effet retard se justifient, même si bien entendu, ces choix ne doivent pas être considérés comme les seuls choix ou comme les seules stratégies possibles. Cependant, on a pu mettre en évidence certains points qui mériteraient d'être davantage étudiés et améliorés.

D'un point de vue expérimental, ce travail ouvre des perspectives. Un des objectifs de ces essais était de mettre au point un dispositif expérimental pour l'impact sur tour de chute. Les derniers essais restent à analyser mais l'objectif sur ce point a été atteint. Une campagne expérimentale plus vaste, où l'on pourrait étudier plus de paramètres (l'influence de la vitesse d'impact, de la masse, du ferrailage de manière plus complète) et évaluer la répétabilité des résultats peut être lancée au vu des résultats obtenus.

La visualisation des résultats est aussi un point qui a été soulevé. Il est indispensable de trouver une représentation facilement compréhensible de l'endommagement anisotrope et de la refermeture des fissures dans les cas complexes où les sollicitations sont alternées et où les directions tournent.

On a régulièrement évoqué le fait que l'on ne dissipait pas suffisamment d'énergie en ne considérant que l'endommagement du béton et la plastification des aciers comme phénomènes dissipatifs. L'introduction de déformations anélastiques est en cours (thèse de G. Lebon) pour le modèle d'endommagement "quasi-statique" dans le cadre de sollicitations sismiques. Cette modélisation pourrait par la suite être étendue au modèle dynamique développé lors de cette thèse. Le second processus dissipatif que l'on pourrait prendre en compte est la dégradation des propriétés d'adhérence entre l'acier et le béton. Une solution proposée par Vincent Faucher de l'équipe de développement d'Europlexus permettrait de le faire d'une manière simple. Plutôt que de considérer une adhérence parfaite entre l'acier et le béton en fusionnant les noeuds des éléments de barre des armatures et ceux des éléments tridimensionnels du béton, il propose de découpler les deux maillages. La liaison entre les deux maillages pourrait être faite par pénalisation, ce qui permettrait de l'affaiblir progressivement, suivant une loi d'endommagement et ainsi d'introduire une nouvelle source de dissipation d'énergie.

Pour mener les calculs réellement jusqu'à la ruine, il faut également se poser la question de l'introduction de discontinuités. Au niveau des armatures, cela peut être fait de manière relativement simple, en introduisant un critère d'érosion qui permettrait de supprimer les éléments de barre considérés comme rompus. Cela peut être fait relativement rapidement puisque l'érosion est déjà programmée dans Europlexus. Pour les éléments de béton les développements à apporter sont plus importants, des méthodes numériques existent pour représenter des discontinuités (X-FEM, embedded discontinuities, éléments cohésifs ...), reste à savoir laquelle serait la mieux adaptée dans le cadre d'un modèle d'endommagement anisotrope et de sollicitations dynamiques. On pourrait alors modéliser la perte et l'éjection de fragments et ainsi modéliser la perte de masse que l'on observe au cours des essais.

Enfin la loi de viscosité proposée pour ce modèle est inspirée de celle proposée pour les matériaux composites, qui n'est certainement pas la mieux adaptée au matériau béton. Une nouvelle analyse des essais expérimentaux permet d'identifier directement la loi de viscosité du matériau. Nous en dressons les grandes lignes.

### Une nouvelle analyse des essais expérimentaux pour l'identification de la loi de viscosité du béton

L'idée est de partir des essais expérimentaux pour identifier la forme et les paramètres de la loi de viscosité. On décide de garder l'écriture usuelle de la loi de viscosité comme une fonction de la fonction seuil  $f = g(\hat{\epsilon}) - \text{tr}\mathbf{D}$  (ou  $f = g(\hat{\epsilon}) - d_{act}$  pour les chargements alternés) et d'identifier la loi à partir des résultats expérimentaux obtenus en traction dynamique.

Une synthèse des résultats expérimentaux se révèle nécessaire. On reprend d'une part les résultats d'une synthèse déjà existante [BP91] et régulièrement utilisée par différents auteurs à laquelle nous adjoignons des résultats plus récents, obtenus pour des vitesses de sollicitation plus élevées [BKK97, BCKM01, KB01, BK06]. On décide délibérément d'utiliser des résultats obtenus de manières différentes (barres de Hopkinson, presse hydraulique ...) sur des bétons différents, humides et secs, de manière à dégager une forme de loi de viscosité la plus générale possible. Cette synthèse est loin d'être exhaustive mais elle recouvre une large gamme de vitesses, ce qui nous intéresse particulièrement. On choisit de représenter en ordonnée l'augmentation relative de résistance et non la résistance de pic puisque pour les différents bétons la résistance quasi-statique n'est pas la même au départ. D'autre part pour l'axe des abscisses (vitesse de sollicitation) on utilise une échelle logarithmique (fig. 6.30).

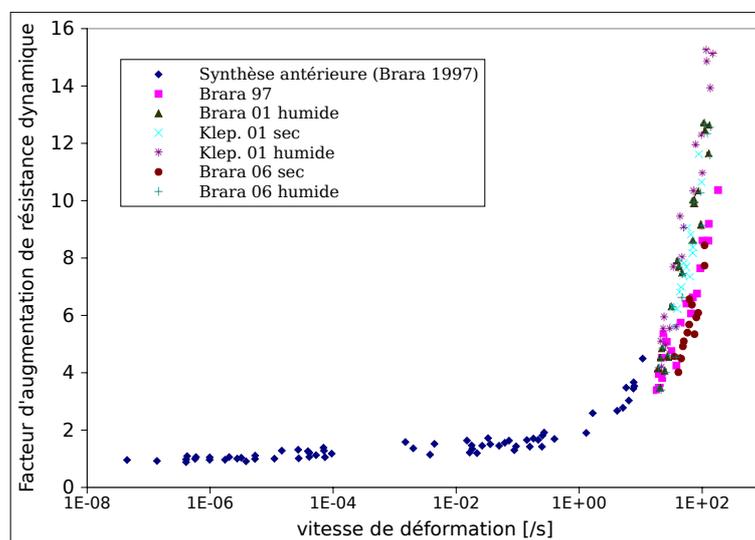


FIG. 6.30: Synthèse de différents résultats d'essais de traction dynamique

On va maintenant chercher à tracer directement la vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  comme une fonction de  $f$ , la fonction seuil.

*Principe de l'identification : cas de l'endommagement isotrope*

Un modèle d'endommagement isotrope simple pour les matériaux quasi-fragiles s'écrit comme :

$$\sigma = E(1 - D)\varepsilon \quad (6.1)$$

où  $D$  est la variable scalaire d'endommagement La résistance maximale, au pic correspond à :

$$\dot{\sigma} = 0 \Leftrightarrow E(1 - D)\dot{\varepsilon} - E\varepsilon\dot{D} = 0 \quad (6.2)$$

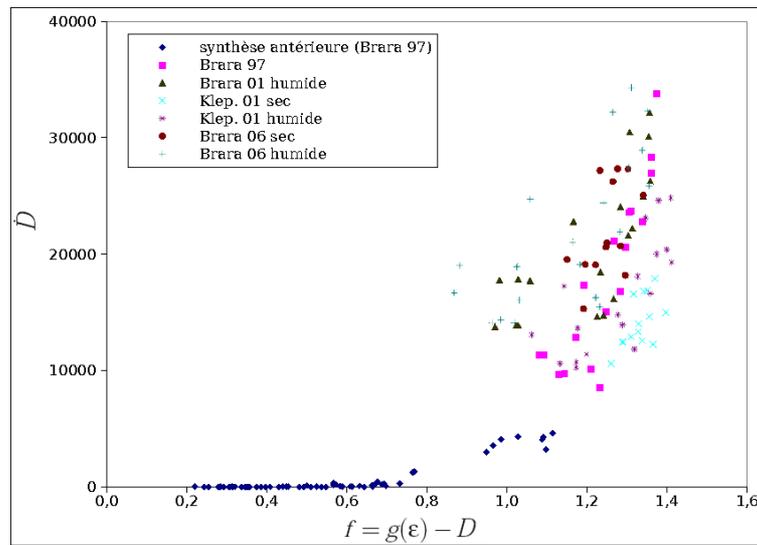
Le modèle d'endommagement isotrope comme le modèle d'endommagement anisotrope que l'on a décrit, présente une phase adoucissante pratiquement symétrique (par rapport à  $\varepsilon = \varepsilon_{pic}$ ) à la phase de chargement. Dans ce cas on peut faire l'hypothèse, sans commettre d'erreur importante, que le pic de résistance est obtenu pour la valeur  $D \approx 0,5$ . Grâce à cette hypothèse et à l'équation ci-dessous on peut exprimer la vitesse d'endommagement proche du pic :

$$\dot{D} = \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon_{pic}} \quad (6.3)$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante en utilisant le fait que  $\sigma_{pic} = \sigma_R = E(1 - 0.5)\varepsilon_{pic}$  :

$$\dot{D} = \frac{E\dot{\varepsilon}}{4\sigma_R} \quad (6.4)$$

On a maintenant une expression de la vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  en fonction de  $\dot{\varepsilon}$  et  $\sigma_R$  qui sont les deux informations que l'on connaît des résultats expérimentaux. Il reste à calculer la valeur  $f$  par  $f = g(\varepsilon) - D \approx g\left(\frac{2\sigma_R}{E}\right) - \frac{1}{2}$ , et vérifier si l'on peut identifier un courbe intrinsèque au matériau. C'est ce qui est fait sur la figure 6.31.



**FIG. 6.31:** Identification d'un loi de viscosité pour le béton avec un modèle d'endommagement isotrope ( $\dot{D}$  Vs  $f=g(\hat{\epsilon})-D$ )

Cette figure montre trois choses intéressantes :

- Le premier point c'est qu'une courbe "matériau" semble se dessiner mais avec une dispersion relativement importante. Il faut néanmoins noter que l'on a cherché à placer sur ce graphique un grand nombre d'essais expérimentaux. On a donc là des essais réalisés de manières différentes sur des béton différents, avec des conditions de séchage différentes (ce qui joue, rappelons-le, un rôle important en dynamique). Le module d'Young des bétons, qui est un paramètre utilisé pour tracer cette courbe, n'est pas connu avec précision pour tous les bétons testés. Les résultats d'essais de traction dynamique, qui sont la base de cette démarche, présentent une dispersion beaucoup moins grande.

- Malgré cette dispersion une allure générale se dégage et ne va pas dans le sens de la loi de viscosité exponentielle présentée au chapitre 3. La tendance ici est plutôt celle d'une loi puissance. Le fait que l'on puisse observer la forme de la loi de viscosité justifie bien notre démarche.

- Enfin, dans la gamme de vitesse étudiée ( $\dot{\epsilon}_{max} = 180 s^{-1}$ ) on n'observe pas la saturation de la vitesse d'endommagement.

#### *Extension au modèle anisotrope*

On peut tracer la même courbe avec le modèle anisotrope avec  $\sigma = \tilde{E}_1 \epsilon$ , 1 désigne la direction du chargement, en utilisant la loi d'élasticité (eq. 1.32 du chapitre 1) avec un tenseur d'endommagement diagonal  $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, 0, 0)$ , représentatif d'un endommagement généré en traction.

#### *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des ouvrages en béton armé jusqu'à la ruine*

$$\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1(D_1) = \frac{9E(1 - D_1)}{4(1 + \nu) + (5 - 4\nu)(1 - D_1)} \quad (6.5)$$

L'hypothèse  $D_1 \approx 0,5$  au pic de contrainte reste valable pour le modèle anisotrope comme on le montre sur la figure 6.32. Sur cette figure, on représente les courbes contraintes-déformations pour différentes valeurs de vitesse de sollicitation  $\dot{\varepsilon}$ . Sur cette même courbe, on trace la droite de pente  $\frac{E}{2}$  (qui correspond à  $D=0,5$ ), pour constater que cette droite coupe les courbes contraintes-déformations à proximité de leur maximum.

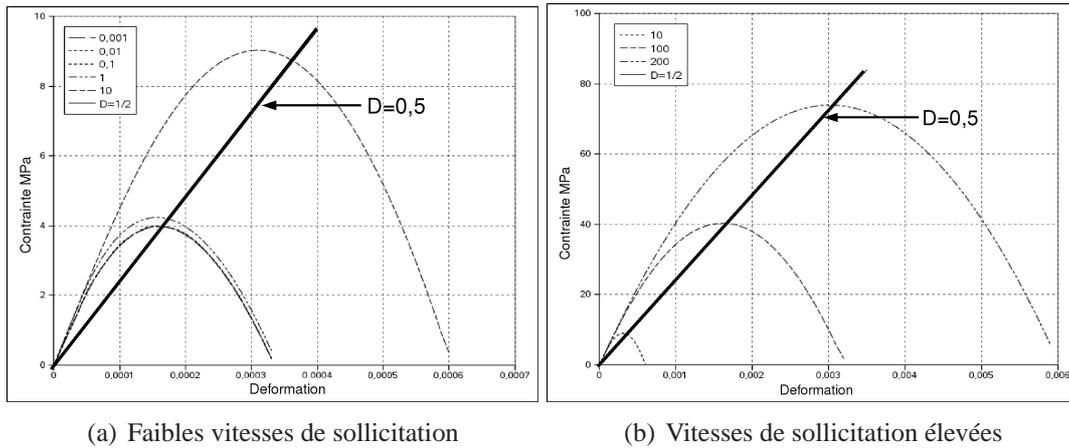


FIG. 6.32: Courbes contraintes-déformations comparées à  $\sigma = \frac{1}{2}E\varepsilon$

Sous cette hypothèse ( $D = 0,5$  au pic), on obtient :

$$\tilde{E}_1(0,5) = \frac{9E}{13 + 4\nu} \quad (6.6)$$

On peut également calculer la dérivée :

$$\tilde{E}'_1 = \tilde{E}'_1(D_1) = -\frac{36E(1 + \nu)}{[4(1 + \nu) + (5 - 4\nu)(1 - D_1)]^2} \quad (6.7)$$

soit :

$$\tilde{E}'_1(0,5) = \frac{144E(1 + \nu)}{[13 + 4\nu]^2} \quad (6.8)$$

A partir de ces deux expressions on peut écrire la vitesse d'endommagement proche du pic :

$$\dot{D}_1 = \text{tr} \dot{\mathbf{D}} = -\frac{\tilde{E}_1(0,5)}{\tilde{E}'_1(0,5)} \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_{pic}} = \frac{81E\dot{\varepsilon}}{144(1 + \nu)\sigma_R} \quad (6.9)$$

et tracer  $\text{tr}(\dot{\mathbf{D}})$  en fonction de  $f = g(\hat{\varepsilon}) - \text{tr} \mathbf{D}$ , la fonction seuil (équivalent en traction monotone à tracer  $\dot{d}_{act}$  en fonction de  $f = g(\hat{\varepsilon}) - d_{act}$ ) :

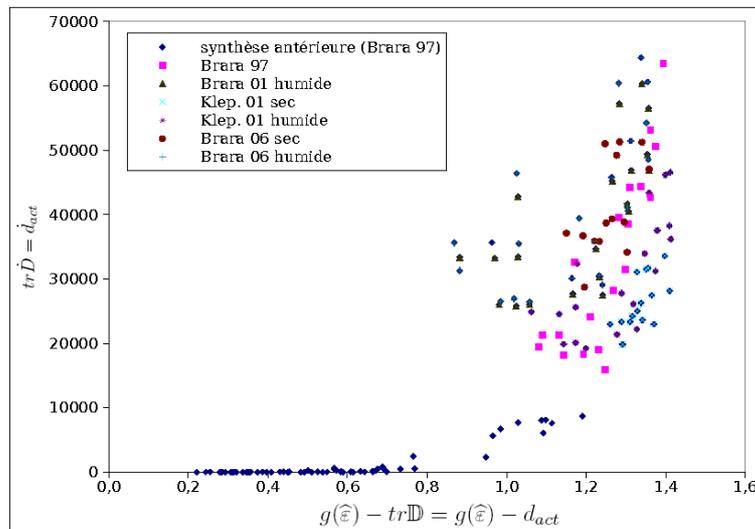


FIG. 6.33: Identification d’une loi de viscosité avec le modèle anisotrope ( $\text{tr} \dot{\mathbf{D}}$  vs  $f$ )

De la même manière que pour l’endommagement isotrope, la loi de viscosité qui se dégage de cette identification est plutôt une loi de type puissance. Néanmoins, lorsque l’on passe du diagramme  $\sigma^R = f(\dot{\epsilon})$  à un diagramme  $\text{tr} \dot{\mathbf{D}} = \mathcal{F}(f)$ , on observe une plus grande dispersion des résultats au point que l’on peut se demander si la courbe tracée est bien une courbe caractéristique du matériau.

Puisque l’une des méthodes pour prendre en compte la dissymétrie de l’effet de vitesse entre la compression et la traction est d’introduire la partie positive de la trace des déformations dans la loi de viscosité, on peut essayer de voir l’effet de cette modification sur la dispersion des résultats. On va donc cette fois-ci tracer  $\text{tr} \epsilon \times \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}) = \mathcal{F}(f)$  (fig. 6.34).

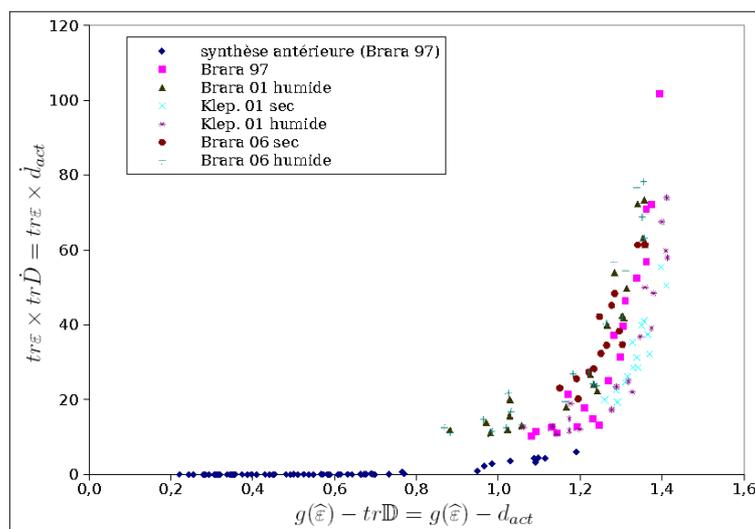


FIG. 6.34: Identification d’une loi de viscosité avec le modèle anisotrope ( $\text{tr} \epsilon \times \text{tr}(\dot{\mathbf{D}})$  vs  $f$ )

Le résultat est similaire à celui de la figure 6.33, mais la dispersion est réduite. Elle peut l'être encore davantage (fig. 6.35) en traçant  $(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 \times \text{tr}\dot{\mathbf{D}} = \mathcal{F}(f)$ .

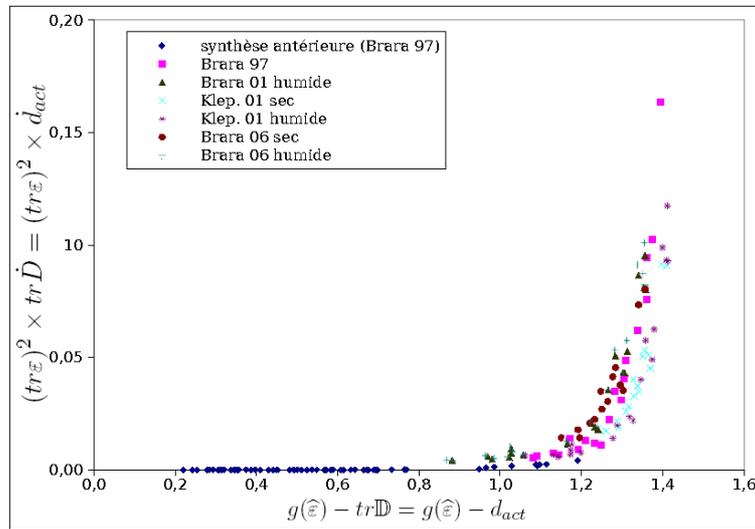


FIG. 6.35: Identification d'une loi de viscosité avec le modèle anisotrope ( $\langle \text{tr}\boldsymbol{\epsilon} \rangle^2 \times \text{tr}(\dot{\mathbf{D}})$  vs  $f$ )

Rappelons qu'un terme de Heavyside a été introduit au paragraphe 3.1 du chapitre 3 pour tenir compte de la dissymétrie de l'effet de vitesse entre la traction et la compression. On considère de même  $\mathcal{H}(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 \text{tr}\dot{\mathbf{D}} = \langle \text{tr}\boldsymbol{\epsilon} \rangle^2 \text{tr}\dot{\mathbf{D}}$  comme ordonnée et donc comme valeur à identifier.

La loi de viscosité s'écrit alors de manière générale (dans le cas monotone) :

$$\langle \text{tr}\boldsymbol{\epsilon} \rangle^2 \text{tr}\dot{\mathbf{D}} = \mathcal{F}(f) \quad (6.10)$$

et dans le cas de sollicitations alternées (avec la notion d'endommagement actif du chapitre 1) :

$$\langle \text{tr}\boldsymbol{\epsilon} \rangle^2 \dot{d}_{act} = \mathcal{F}(f) \quad (6.11)$$

La fonction  $\mathcal{F}(f)$  qui correspond le mieux à la courbe tracée (fig. 6.35) est une fonction puissance, c'est à dire :

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{m} f^m \quad (6.12)$$

Néanmoins, pour conserver les propriétés de saturation de la vitesse d'endommagement on préférera utiliser une loi de type :

$$\mathcal{F}(f) = \dot{D}_\infty (1 - \exp(-b f^m)) \quad (6.13)$$

similaire à la loi de Weibull en rupture fragile.

Ainsi on propose la fonction pour la loi de viscosité :

$$tr\dot{\mathbf{D}} = \dot{D}_\infty(1 - \exp(-b(g(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - tr\mathbf{D})^n)) \quad (6.14)$$

ou dans le cas des sollicitations alternées :

$$\dot{d}_{act} = \dot{D}_\infty(1 - \exp(-b(g(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - d_{act})^n)) \quad (6.15)$$

On a dans cette loi les trois paramètres de viscosité suivants :

-  $\dot{D}_\infty$  qui est à la vitesse maximale de propagation de l'endommagement que l'on peut relier au temps caractéristique par  $\dot{D}_\infty = \frac{1}{\tau_b}$

-  $b$  un paramètre qui sera identifié à partir des résultats expérimentaux

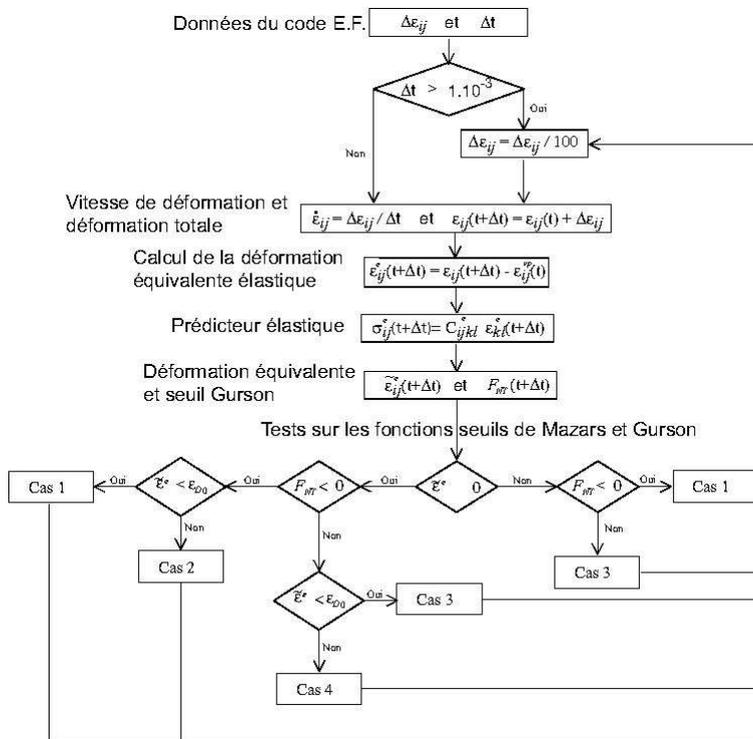
-  $n$  appelé "exposant de Weibull".

Il faudra identifier les paramètres de cette nouvelle loi, la programmer (dans les deux codes de calculs utilisés, Cast3M et Europlexus) et étudier sa pertinence pour le calcul de structures.



# Annexe A

Schéma numérique d'intégration dans un code de calcul du modèle visco-plastique, visco-endommageable d'après [Gat99]





# Annexe B

## Caractérisation mécanique des armatures des poutres sollicitées par impact

### FICHE DE SUIVI ACIER 18/10/2007

Réf Acier	Essai Date	Fichier	Rm Reh	Rm/Reh	Longueurs Base avant essai Longueur après essai	Agt%	Observations
référer de trouver son emplacement dans les logiciels		référer de trouver son emplacement dans les logiciels	SECTION 2, 087 mm <sup>2</sup> Rm = 500,050 MPa Reh = 350,000 MPa Φ = 15,00 mm	Rm calculé multiplié par 1,05 à la traction	Préparé pour base de 300 mm ou 230 mm	Peux être multiplié par 1,10	Vitesse 0,5 mm/min Avec toute observation. Exemples de la striction par rapport au capteur et à la base
HA 12 1 pt	18/10	HA 12 1pt 6b.x1s	670,7 MPa 579,6 MPa	1,116	300 mm 350 mm Rupture à 10%	> 4,96 %	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
HA 12 bis 1pt	18/10	HA 12 bis 1pt.x1s	679,9 MPa 594,2 MPa	1,144	300 mm 352 mm Rupture à 10,4%	> 5,05%	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
HA 12 2pt	18/10	HA 12 2pt.x1s	677,4 MPa 588,6 MPa	1,132	300 mm 352,5 mm Rupture 10,5 %	> 4,98%	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
HA 12 3pt	18/10	HA 12 3pt.x1s	678,0 MPa 597,6 MPa	1,135	300 mm 350 mm Rupture à 10 %	> 5,06%	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
HA 8 1pt	18/10	HA 8 1pt.x1s	658,7 MPa 586,93 MPa	1,103	300 mm 352 mm Rupture à 10,4%	> 5,01%	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
HA 8 2pt	18/10	HA 8 2pt.x1s	667,2 MPa 607,5 MPa	1,098	300 mm 349 mm Rupture à 9,8%	> 5,05%	DISTANCE ENTRE MORS 350 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
Lisse 6a	18/10	Lisse 6a.x1s	592,6 MPa 450,9 MPa	1,314	250 mm 289 mm Rupture à 15,6 %	> 4,91%	DISTANCE ENTRE MORS 320 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm et hors base du capteur de 100 mm
Lisse 6b	18/10	Lisse 6b.x1s	593,1 MPa 462,7 MPa	1,281	250 mm 279 mm Rupture à 11,6 %	> 5,11%	DISTANCE ENTRE MORS 320 mm ENZITON Rupture dans la base de mesure 500 mm, la striction n'est donc pas fracturée.

2007/CEA/Suivi Acier.doc



# Annexe C

## Résultats complémentaires pour les essais brésiliens dynamiques



**FIG. 36:** Après impact

## Force d'impact

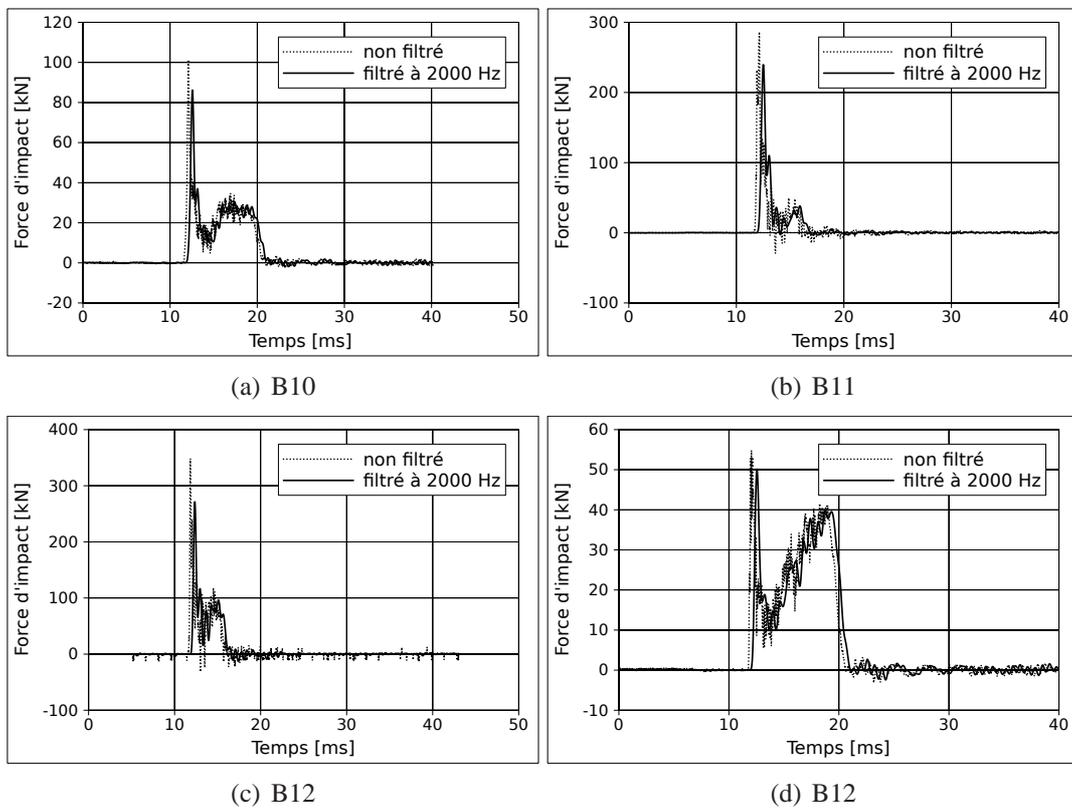
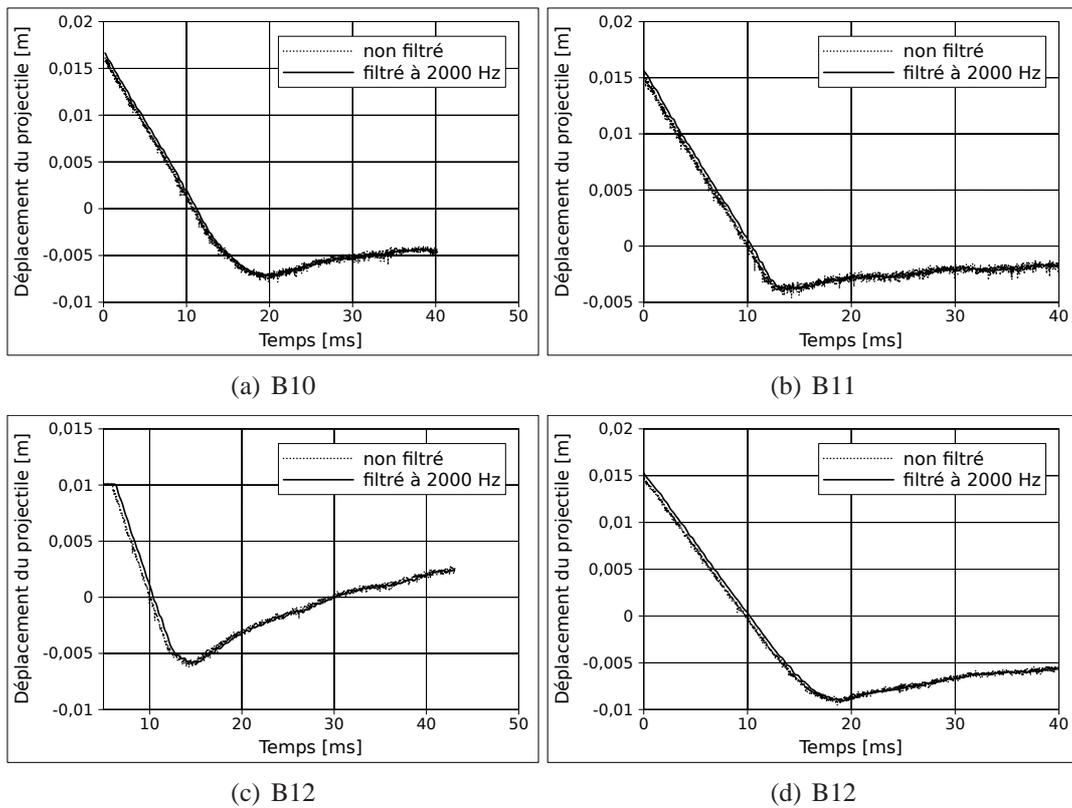
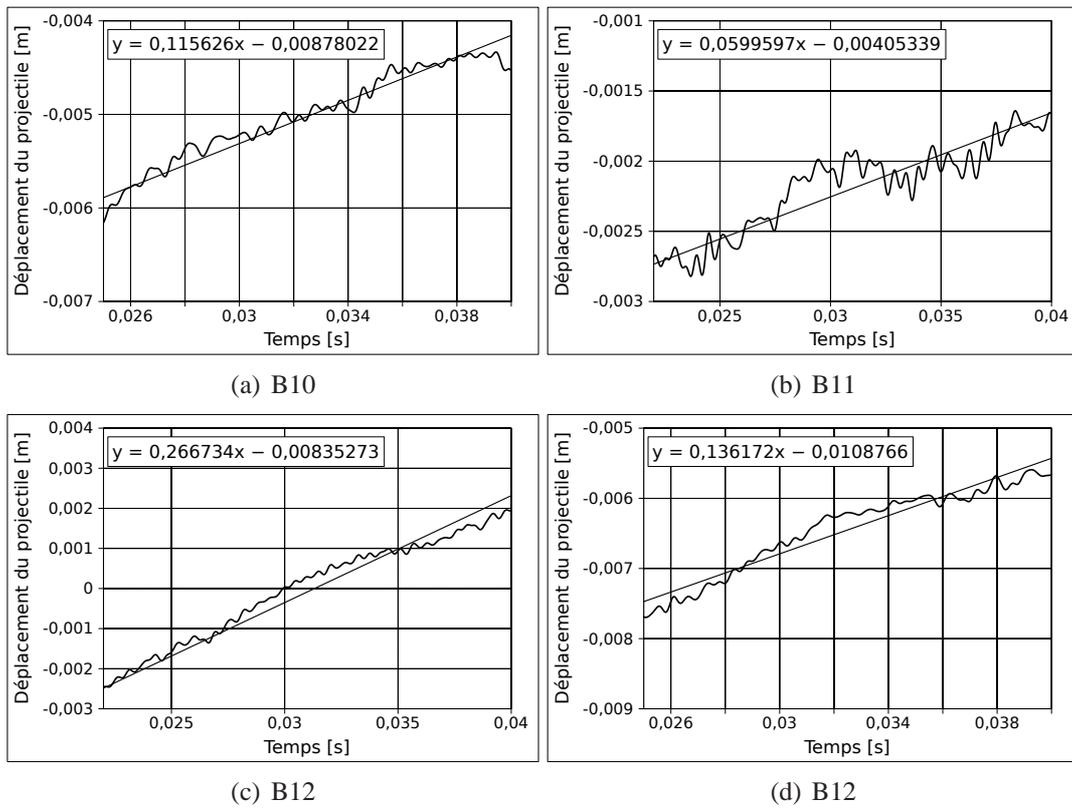


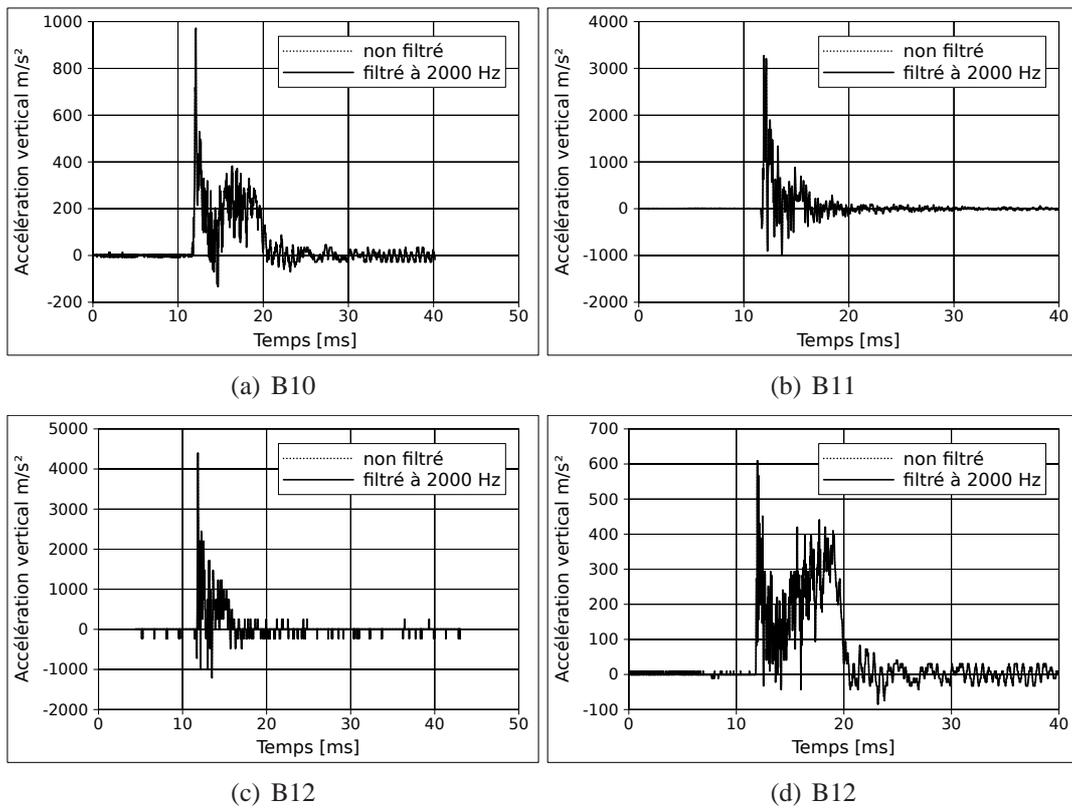
FIG. 37: Force d'impact mesurée

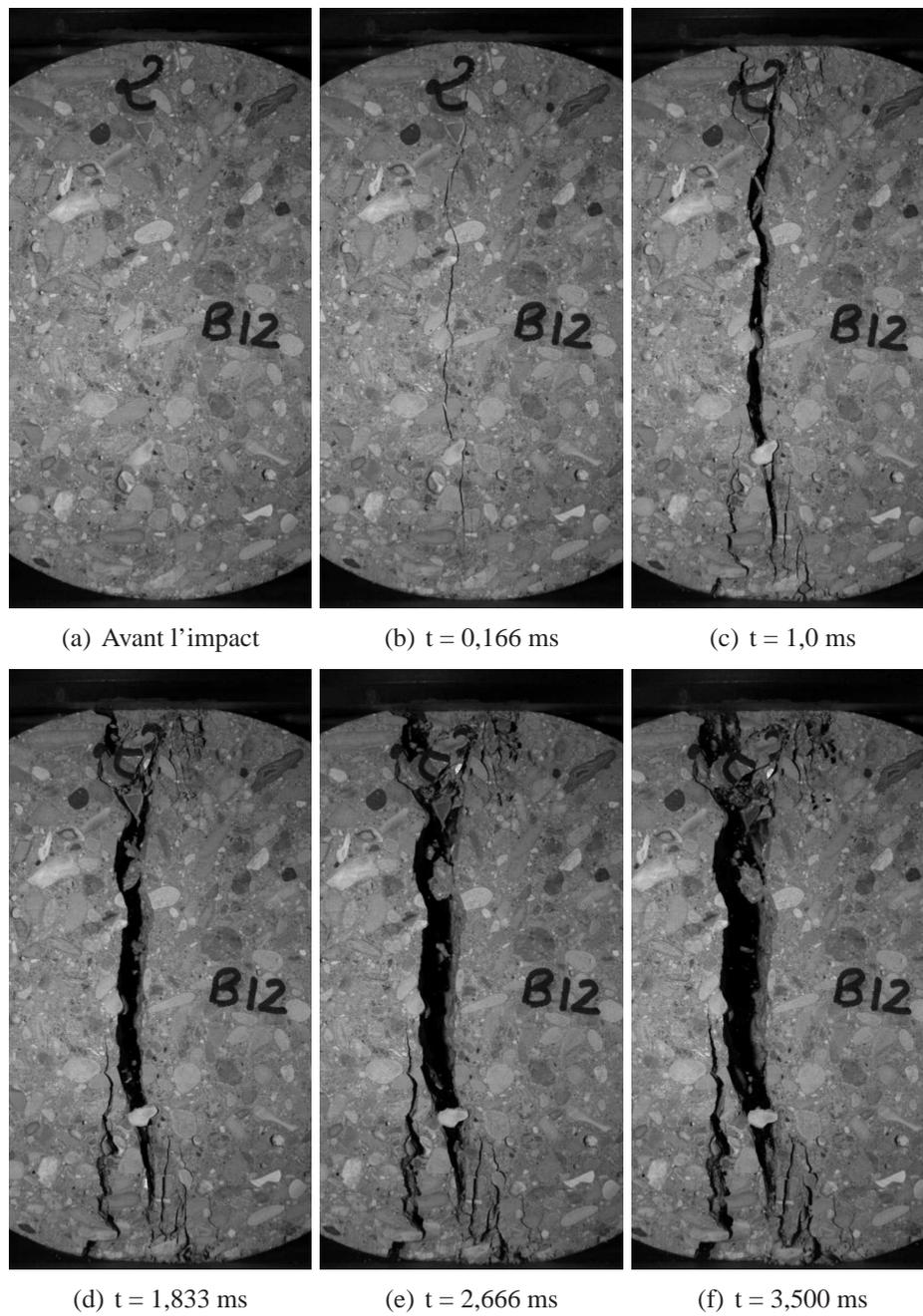
## Cinématique de l'impact

**FIG. 38:** Déplacement du projectile



**FIG. 39:** Détermination de la vitesse du rebond

**FIG. 40:** Accélération du projectile



**FIG. 41:** Evolution de la fissuration, essai brésilien B12

# Bibliographie

- [AD97] O. ALLIX et J.-F. DEÛ : Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions Vol.45*, 1997.
- [Aif87] A. AIFANTIS : The physics of plastic deformation. *Int. J. PLasticity* 3., 1987.
- [All01] O. ALLIX : A composite damage meso-model for impact problems. *Composites Science and Technology*, 61:2193–2205, 2001.
- [APGN95] H. ABBAS, D. K. PAUL, P. N. GODBOLE et G. C. NAYAK : Reaction-time response of aircraft crash. *Computers and Structures*, 55:809–817, 1995.
- [Auv03] J.M. AUVRAY : *Elaboration et caractérisation à haute température de bétons réfractaires à base d'alumine à spinelle*. Thèse de doctorat, Université de Limoges, 2003.
- [Bar82] P. BARR : Replica scaling studies of hard missile impacts on reinforced concret. *Proceedings of the Interassociation Symposium of Concrete Structures Under Impact and Impulsive loadings*, BAM Berlin:329–344, 1982.
- [Baz76] Z.P. BAZANT : Instability, ductibility and size effects in strain softening. *J. Engineering Mechanics Vol 102*, 1976.
- [BBC84] Z.P. BAZANT, T. BETYTSCHKO et T.-P. CHANG : Continuum theory for strain-softening. *ASCE Journal of engineering mechanics*, 110:1666–1692, 1984.
- [BBG91] A. BENALLAL, R. BILLARDON et G. GEYMONAT : Localization phenomena at the boundaries and interfaces of solids. *In Third Int. Conf. Constitutive laws for Engineering Materials : Theory and Application*, pages 387–390. Ed. C.S. DesayTucson, Arizona, 1991.
- [BCKM01] A. BRARA, F. CAMBORDE, J. R. KLEPACZKO et C. MARIOTTI : Experimental and numerical study of concrete at high strain rates in tension. *Mechanics of Materials Vol 33 n°1*, 2001.
- [BDB88] A. BENALLAL, D. DOGHRI et R. BILLARDON : An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Applied Numerical Methods* 4, 1988.
- [BDDE05] Gabi BEN-DOR, Anatoly DUBINSKY et Tov ELPERIN : Ballistic impact : Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics. *Applied Mechanics Reviews*, 58:355–372, 2005.

- [BGL07] P. BADEL, V. GODARD et J.-B. LEBLOND : Application of some anisotropic damage to the prediction of the failure of some complex industrial concrete structure. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5848–5874, 2007.
- [BHR06] G. BESNARD, F. HILD et S. ROUX : Finite-element displacement fields analysis from digital images : application to portevin-le châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46:789–804, 2006.
- [BJ71] W. F. BRACE et A.H. JONES : Comparison of uniaxial deformation in shock and static loading of three rocks. *Journal of Geophysical Research*, 76:4913–4921, 1971.
- [BK06] A. BRARA et J.R. KLEPACZKO : Experimental characterization of concrete in dynamic tension. *Mechanics of Materials Vol. 38 n°3*, 2006.
- [BKK97] A. BRARA, J.R. KLEPACZKO et L. KRUSZKA : Tensile testing and modeling of concrete under high loading rates. In *Brandt, Li and Marshall (Eds.), Brittle Matrix Composites 5 (BMC5), Warsaw, Poland, 1997*.
- [BMB86] A. BENTUR, S. MINDESS et N. BANTHIA : The behaviour of concrete under impact loading : Experimental procedures and method of analysis. *Materials and Structures*, 19:371–378, 1986.
- [BMBP89] N. BANTHIA, S. MINDESS, A. BENTUR et M. PIGEON : Impact testing of concrete using a drop-weight impact machine. *Experimental Mechanics*, 29: 63–69, 1989.
- [BMPS93] R. De BOORST, H.B. MULAHAUS, J. PAMI et L.J. SLUYS : Fundamental issues in finite elements analysis of strain localisation. *Engineering Computing*, 10:99–121, 1993.
- [BO83] Z.P. BAZANT et B. OH : Crack band theory for fracture in concrete. *RILEM Mat. Structures*, 16:155–177, 1983.
- [BO90] Z.P. BAZANT et J. OZBOLT : Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 116:2485–2505, 1990.
- [BP91] P.H. BISCHOFF et S.H. PERRY : Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and Structures Vol. 24 n°6*, 1991.
- [BPCD01] N. BURLION, G. PIJAUDIER-CABOT et N. DAHAN : Experimental analysis of compaction of concrete and mortar. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25:1467–1486, 2001.
- [BPD<sup>+</sup>09] C. BOULAY, S. DAL PONT, A. DELAPLACE, H. DELAHOUSSE et J.-L. TAILHAN : An experimental test for cracking concrete under controlled conditions. In *Proceedings of 12th International Conference on Fracture, Ottawa, 2009*.
- [BRTDM03] P. BERTHET-RAMBAUD, Y. TIMSAH, L. DAUDEVILLE et J. MAZARS : Finite element modelling of concrete protection structures submitted to rock impact. In *16th ASCE Engineering mechanics conference, University of Washington, Seattle, 2003*.

- [BSG<sup>+</sup>78] C. BERRIAUD, A. SOKOLOVSKY, R. GUERRAUD, J. DULAC et R. LABROT : Local behaviour of reinforced concrete walls under missile impact. *Nuclear Engineering Design*, 45:457–469, 1978.
- [Bur97] N. BURLION : *Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- [BV92] F.B.A. BESHARA et K.S. VIRDI : Prediction of dynamic response of blast-loaded reinforced concrete structures. *Computers and Structures*, 44:297–313, 1992.
- [CDD<sup>+</sup>09] M. CHAMBART, A. DELAPLACE, R. DESMORAT, F. GATUINGT, G. LEBON, T.T.H NGUYEN et F. RAGUENEAU : Caractérisation de la fissuration des structures endommagées. *In 19eme Congrès Français de Mécanique - Marseille*, 2009.
- [CEA09] CEA : <http://www-cast3m.cea.fr>. *Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques*, CEA Saclay, 2009.
- [CEB88] CEB : Concrete structures under impact and impulsive loading. *Synthesis report CEB Bulletin n°187*, 1988.
- [CEO] CEOS.FR : <http://www.ceosfr.org>.
- [Cha79] J.L. CHABOCHE : The continuous damage mechanics. a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering Design*, 1979.
- [CHMM03] A. CIMETIERRE, D. HALM, J.-J. MARIGO et E. MOLINES : Modèles standards généralisés à convexe fixe en endommagement. *Compte-rendus de mécanique*, 331:291–294, 2003.
- [CLC05] N. CHALLAMEL, C. LANOS et C. CASADJIAN : Strain-based anisotropic damage modelling and unilateral effects. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47:459–473, 2005.
- [CLN<sup>+</sup>09] M. CHAMBART, G. LEBON, T.T.H. NGUYEN, F. RAGUENEAU, A. DELAPLACE, R. DESMORAT et F. GATUINGT : *Rapport CEOS.FR*. LMT-Cachan, 2009.
- [CM09] Y. CHEN et I. M. MAY : Reinforced concrete members under drop-weight impacts. *Structures and Buildings*, 162:45–56, 2009.
- [CMCO08] Y. CHUZEL-MARMOT, A. COMBESCURE et R. ORTIZ : Explicit dynamics sph-finite element coupling using the arlequin method. simulation of projectile's impacts on concrete slabs. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17:737 – 748, 2008.
- [Cor75] I.C. CORMEAU : Numerical stability in quasi-static and elasto/visco-plasticity. *International journal of numerical methods in engineering*, 9:109–107, 1975.
- [Cou73] C.A. COULOMB : Essais sur une application des règles des maximis et minimis à l'architecture. *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sciences*, 7:343–382, 1773.

- [CS79] P.A. CUNDALL et O.D.L. STRACK : A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65, 1979.
- [CS82] J.-P. CORDEBOIS et J.P. SIDOROFF : Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J.M.T.A. - Numéro Spécial*, 45-60, 1982.
- [CS96] L. COLANTONIO et L. STEINER : Numerical integration of viscoplastic constitutive equations for porous materials. *Num. Meth. in Engineering*, 1996.
- [CW82] C.L. CHOW et J. WANG : An anisotropic theory for continuum damage mechanics. *International Journal of Fracture*, 33:3–16, 1982.
- [dBm92] R. de BORST et H.-B. MULHAUS : Gradient dependent plasticity. *International journal of numerical methods in engineering*, 35:521–539, 1992.
- [DD03] S. HENTZ et L. DAUDEVILLE et F.V. DONZE : Modeling of reinforced concrete structures subjected to impacts by the discrete elements method. *In 16th ASCE Engineering mechanics conference, University of Washington, Seattle*, 2003.
- [Des04] R. DESMORAT : Modèle d'endommagement anisotrope avec forte dissymétrie traction/compression. *In (RF)2B - 5es Journées Scientifiques du Regroupement Francophone pour la Recherche et la Formation sur le Béton*, 2004.
- [Des06] R. DESMORAT : Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotrope non standards. *Compte-rendus de mécanique*, 334:587–592, 2006.
- [DGR07] Rodrigue DESMORAT, Fabrice GATUINGT et Frédéric RAGUENEAU : Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspect for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics. Vol 74. Num 10.*, 2007.
- [DH00a] C. DENOVAL et F. HILD : A damage model for the dynamic fragmentation of brittle solids. *Computer Methods in Applied Mech. and Eng. Vol. 183 n°3-4*, 2000.
- [DH00b] C. DENOVAL et F. HILD : A damage model for the dynamic fragmentation of brittle solids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183:247–258, 2000.
- [DL72] G. DUVAUT et J.L. LIONS : *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [DMMP05] F. DELHOMME, M. MOMMESSIN, J.P. MOUGIN et P. PERROTIN : Behaviour of structurally dissipating rock-shed : experimental analysis and study of punching effects. *International Journal of Solids and Structures*, 42:4204–4219, 2005.
- [DP52] D. DRUCKER et W. PRAGER : Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quart. Appl. Math. Vol 10*, 1952.
- [DPCCH08] F. DUFOUR, G. PIJAUDIER-CABOT, M. CHOINSKA et A. HUERTA : Extraction of a crack opening from a continuous approach using regularized damage models. *Journal of Computers and Concrete*, 5:375–388, 2008.

- [DPCL96a] J.-F. DUBÉ, G. PIJAUDIER-CABOT et C. LABORDERIE : Rate dependant damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineerings Mechanics Vol. 122 n°10*, 1996.
- [DPCL96b] J.F. DUBE, G. PIJAUDIER-CABOT et C. LABORDERIE : A rate-dependent damage model for concrete in dynamics. *J Eng Mech Div, ASCE*, 122:939–947, 1996.
- [dVBvG95] J.H.P. de VREE, W.A.M. BREKELMANS et M.A.J. van GILS : Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers and Structures*, 55:581–588, 1995.
- [FD87] G. FRANTZISKONIS et C.S. DESAY : Constitutive models with strain softening. *Int. J. Solids Structures* 23, N.6, 1987.
- [FG02] G. Pijaudier-Cabot F. GATUINGT : Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26:1–24, 2002.
- [FGG08] P. FORQUIN, G. GARY et F. GATUINGT : A testing technique for concrete under confinement at high rates of strains. *International Journal of Impact Engineering*, 35:425–446, 2008.
- [Fic96] S. FICHANT : *Endommagement et anisotropie induite du béton de structure. Modélisations approchées*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Juin 1996.
- [FLPC99] S. FICHANT, C. LABORDERIE et G. PIJAUDIER-CABOT : Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Mechanics of Cohesive-Frictional Material*, 4:339–359, 1999.
- [FN96] M. FREMOND et B. NEDJAR : Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33:1083–1103, 1996.
- [FPCL97] S. FICHANT, G. PIJAUDIER-CABOT et C. LABORDERIE : Continuum damage modelling : approximation of crack induced anisotropy. *Mechanics Research Communications*, 24:109–114, 1997.
- [Gat99] F. GATUINGT : *Prévision de la rupture d'ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, dec 1999.
- [Gat07] F. GATUINGT : *Implantation du modèle DYNAR LMT dans les codes de calcul Cast3m et Europlexus*. Rapport interne CEA, 2007.
- [GaZ01] D. L. GROTE et S. W. Park and M. ZHOU : Dynamic behavior of concrete at high strain rates and pressures : I. experimental characterization. *International Journal of Impact Engineering*, 25:869–886, 2001.
- [GCD03] S. GHAVAMIAN, I. CAROL et A. DELAPLACE : Discussions over meca project results. *Revue Française de Génie Civil*, 7:543–582, 2003.

- [GD06] F. GATUINGT et R. DESMORAT : Dynamic anisotropic damage computations of concrete structures. *1st Euro-mediterranean Symposium on Advances in Geomaterials and Structures*, 2006.
- [GDC<sup>+</sup>08] F. GATUINGT, R. DESMORAT, M. CHAMBART, D. COMBESURE et D. GUILBAUD : Anisotropic 3d delay-damage model to simulate concrete structures. *Revue européenne de mécanique numérique*, 17:740–760, 2008.
- [GJP92] G.V. GUINEA et J. and M. Elices J. PLANAS : Measurement of the fracture energy using three-point bend tests : Part 1 influence of experimental procedures. *Materials and Structures*, 25:212–218, 1992.
- [GM77] RA GINGOLD et JJ MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics- Theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 181:375–389, 1977.
- [GMD08] Thomas GABET, Yann MALÉCOT et Laurent DAUDEVILLE : Triaxial behaviour of concrete under high stresses : Influence of the loading path on compaction and limit states. *Cement and Concrete Research*, 38:403–412, 2008.
- [GPC03] F. GATUINGT et G. PIAUDIER-CABOT : Gurson's plasticity coupled to damage as a cap model for concrete compaction in dynamics. *Constitutive Modelling of Geomaterials,- Selected Contributions from the Frank L. DiMaggio Symposium CRC Press*, 2003.
- [GPP94] J. GUEDES, P. PEGON et AV PINTO : A fibre/Timoshenko beam element in CASTEM 2000. *Special Publication Nr. 1*, 94, 1994.
- [GR03] J. F. GEORGIN et J. M. REYNOUARD : Modeling of structures subjected to impact : concrete behaviour under high strain rate. *Cement and Concrete Composites*, 25:131–143, 2003.
- [GS79] Y.M. GUPTA et L. SEAMAN : Local response of reinforced concrete slabs to missile impact. *SRI report*, NP-1217., 1979.
- [Gur77] A.L. GURSON : Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Engrg. Materials and Technology*, 99:2–15, 1977.
- [HD96] D. HALM et A. DRAGON : A model of anisotropic damage model by mesocracks growth; unilateral effects. *International Journal of Damage Mechanics*, 5:384–402, 1996.
- [HD00] D. HALM et A DRAGON : An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 183:331–352, 2000.
- [HDD04] S. HENTZ, L. DAUDEVILLE et F. DONZE : Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates. *Computers and Structures*, 82:2509–2524, 2004.

- [HGI05] G. HERVE, F. GATUINGT et A. IBRAHIMBEGOVIC : On numerical implementation of a coupled rate-dependent damage-plasticity constitutive model for concrete in application to high-rate dynamics. *Engineering Computations*, 22, 2005.
- [Hil50] R. HILL : *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press Oxford, 1950.
- [Hil58] R. HILL : A general theory of uniqueness and stability inelastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6:236–249, 1958.
- [HMP76] A. HILLERBORG, M. MODEER et P.-E. PETERSSON : Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *cement and concrete research*, 1976.
- [HN75] B. HALPHEN et Q.S. NGUYEN : Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de la mécanique*, 14:39–63, 1975.
- [Hop14] B. HOPKINSON : A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by impact of bullet. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London*, Serie A.213:437–452, 1914.
- [HRB<sup>+</sup>02] François HILD, Bumedijen RAKA, Maud BAUDEQUIN, Stéphane ROUX et Florence CANTELAUBE : Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 41:6815–6828, 2002.
- [HTC82] S.S. HSIEH, E.C. TING et W.F. CHEN : A plastic fracture model for concrete. *Int. J. Solids structure Vol 18 n°3*, 1982.
- [HWS93] D. HUANG, T.L. WANG et M. SHAHAWY : Impact studies of multigirder concrete bridges. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No. 8, August 1993, 119:2387–2402, 1993.
- [ID03] A. IBRAHIMBEGOVIC et A. DELAPLACE : Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material. *Computers and Structures*, 81:1255–1265, 2003.
- [IML<sup>+</sup>09] C. IZATT, I. M. MAY, J. LYLE, Y. CHEN et W. ALGAARD : Perforation owing to impacts on reinforced concrete slabs. *Structures and Buildings*, 162:37–44, 2009.
- [JHPCG06] Ludovic JASON, Antonio HUERTA, Gilles PIJAUDIER-CABOT et Shahrokh GHAVAMIAN : An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:7077–7092, 2006.
- [JI09] JRC-ISPRA : <http://europlexus.jrc.ec.europa.eu>. *Joint Research Center, ISPRA, Italie*, 2009.
- [Jir97] Milan JIRASEK : Nonlocal models for damage and fracture : comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35:4133–4145, 1997.

- [JMRR79] W. JONAS, R. MESCHKAT, H. RIECH et E. RUDIGER : Experimental investigations to determine the kinetic ultimate bearing capacity of reinforced concrete slabs subject to deformable missiles. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> SMiRT*, Berlin, 1979.
- [JS86] R. JOHN et S.P. SHAH : Fracture of concrete subjected to impact loading. *Cement, concrete and aggregates*, 8:24–32, 1986.
- [Ju89] J.W. JU : On energy-based coupled elastoplastic damage theories : constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids structure Vol 25 n°7*, 1989.
- [Kac58] L.M. KACHANOV : Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSA Otd. Tekh.*, 1958.
- [KB01] J.R. KLEPACZKO et A. BRARA : An experimental method for dynamic tensile testing of concrete by spalling. *Int. j. of Impact Engineering Vol. 25 n°4*, 2001.
- [KHR69] H.B. KUPFER, H.K. HILSDORF et H. RUSCH : Behavior of concrete under biaxial stresses. *American Concrete Institute Journal*, 66:656–666, 1969.
- [KM95] D. KRAJICINOVIC et S. MASTILOVIC : Some fundamental issues of damage mechanics. *Mechanics of materials*, 21:217–230, 1995.
- [Koe07] P. KOECHLIN : *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007.
- [Kol53] H. KOLSKI : *Stess Waves in solids*. Clarenton Press, Oxford, 1953.
- [KP09] P. KOECHLIN et S. POTAPOV : Classification of soft and hard impacts - application to aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 239:613–618, 2009.
- [Kra85] D. KRAJICINOVIC : Continuous damage mechanics revisited : basic concepts and definitions. *J. Applied Mech.* 52 829-834, 1985.
- [LaABD09] J. LEMAITRE, J.-L. Chaboche and. A. BENALLAL et R. DESMORAT : *Mécanique des matériaux solides, nouvelle édition*. Dunod, 2009.
- [LaB91] C. LABORDERIE : *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structure en béton*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1991.
- [Lad83] P. LADEVEZE : On an anisotropic damage theory. *In Proc. CNRS Int. Coll 351 Villars-de-Lans, Failure criteria of structured media*, 1983.
- [Lad91] P. LADEVEZE : On a damage mechanics approach. *In Mechanics and mechanisms of damage in composites and multi-materials*, 1991.
- [Lad92] P. LADEVEZE : A damage computational method for composite structures. *Computational Structures*, 45:29–46, 1992.
- [LB88] D. LASRY et T. BELYTCHKO : Localization limiters in transient problems. *Int. J. Solids and Structures*, 24:581–597, 1988.

- [LC85] J. LEMAITRE et J.-L. CHABOCHE : *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [LD05] J. LEMAITRE et R. DESMORAT : *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep Fatigue and Brittle Failures*. Springer, 2005.
- [LDS00] J. LEMAITRE, R. DESMORAT et M. SAUZAY : Anisotropic damage law of evolution. *Eur J Mech, A/Solids*, 19:187–208, 2000.
- [Lem71] J. LEMAITRE : Evaluation of dissipation and damage in metals. *In Proceedings of ICM Kyoto*, 1971.
- [Lep04] Joosef LEPPANEN : Experiments and numerical analysis of blast and fragment impact on concrete. *International Journal of Impact Engineering*, 31:834–860, 2004.
- [Lie89] C. LIENARD : *Plasticité couplée à l'endommagement en conditions quasi-unilatérales pour la prévision de l'amorçage de fissures*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1989.
- [LL84] P. LADEVÈZE et J. LEMAITRE : Damage effective stress in quasi unilateral conditions. *In 16th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Lyngby, Denmark*, 1984.
- [LM03] Q.M. LI et H. MENG : About the dynamic strength enhancement of concrete-like materials in a split hopkinson pressure bar test. *International Journal of solids and structures*, 40:343–360, 2003.
- [LO81] F.A. LECKIE et E.T. ONAT : *Tensorial nature of damage measuring internal variables*. J. Hult and J. Lemaitre, Editors, Physical non-linearities in structural analysis, Springer, Berlin, 1981.
- [LOD96] LUCCIONI, OLLER et DANESI : Couple plastic-damage model. *Computer methods in applied sciences*, 1996.
- [LRWT05] Q.M. LI, S.R. REID, H.M. WEN et A.R. TELFORD : Local impact effects of hard missiles on concrete targets. *International Journal of impact engineering*, 32:224–284, 2005.
- [MA91] H.-B. MULHAUS et E.C. AIFANTIS : A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28:845–858, 1991.
- [Mar81] J.-J. MARIGO : Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *Compte-rendus de l'académie des Sciences, Série II*, 292:1309–1312, 1981.
- [Maz84] J. MAZARS : *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1984.
- [MB89] J. MAZARS et Y. BERTHAUD : Une rupture expérimentale appliquée au béton pour créer un endommagement diffus et mettre en évidence son caractère unilatéral. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 308:579–584, 1989.

- [MBR90] J. MAZARS, Y. BERTHAUD et S. RAMTANI : The unilateral behaviour of damage concrete. *Engng Fract Mech*, 35:629–635, 1990.
- [MCO<sup>+</sup>05] I.M. MAY, Y. CHEN, D.R.J. OWEN, Y.T. FENG et A.T. BERE : Behaviour of reinforced concrete beams and slabs under drop weight impact loads. *In Proc. 6<sup>th</sup> Asia-Pacific conference on Shock and Impact loads on Structures*, 2005.
- [MCWS95] L.J. MALVAR, J. E. CRAWFORD, J.W. WESEVICH et D. SIMONS : A plasticity concrete material model for dyna3d. *International Journal of Impact Engineering*, 19:847–873, 1995.
- [MD99] S.A. MAGNIER et F.V. DONZE : Numerical simulation of impact using discrete elements methods. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3:257–276, 1999.
- [MDB99] N. MOES, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO : A finite element method without remeshing. *International journal of numerical methods in engineering*, 46: 131–150, 1999.
- [MK96] S. MURAKAMI et K. KAMIYA : Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on thermodynamics. *International Journal Mechanical Sciences*, 39:459–473, 1996.
- [ML06] M. MATALLAH et C. LABORDERIE : Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton. *In 24<sup>eme</sup> rencontre Univeristaires de Génie Civil*, 2006.
- [MLM98] G. MESHKE, R. LACKNER et H.A. MANG : An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International journal for numerical methods in engineering*, 42:703–727, 1998.
- [Mro67] Z. MROZ : On the description of anisotropic workhardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 15:163–175, 1967.
- [Mro69] Z. MROZ : An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general work hardening model. *Acta Mech*, 7:199–212, 1969.
- [Nee88] A. NEEDLEMAN : Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 67:69–85, 1988.
- [NRD46] National Defense Research Committee NRDC : Effects of impact and explosion. *Summary technical report of division 2*, 1, 1946.
- [NT84] A. NEEDLEMAN et V. TVERGAARD : An analysis of ductile rupture in notched bars. *J. Mech. Phys. Solids*, 32:461–490, 1984.
- [OD82] D.R.J. OWEN et F. DAMJANIC : Viscoplastic analysis of solids : stability considerations. *Recent advances in non-linear computational mechanics*, Eds E. Hinton:225–53, 1982.
- [Ort85] M. ORTIZ : A constitutive theory for inelastic behaviour of concrete. *Mechanics of Materials*, 4:67–93, 1985.

- [Ott77] N. S. OTTOSEN : A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 103:527–535, 1977.
- [PCB87] G. PIJAUDIER-CABOT et Z.P. BAZANT : Nonlocal damage theory. *ASCE Journal of engineering mechanics*, 113:1512–1533, 1987.
- [PCB88] G. PIJAUDIER-CABOT et Z.P. BAZANT : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of applied mechanics Vol 55 n°2*, 1988.
- [PdBrBdV96a] R.J.H. PEERLINGS, R. de BORST, r. BREKELMANS et W.A.M. de VREE : Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International journal of numerical methods in engineering*, 39:3391–3403, 1996.
- [PdBrBdV96b] R.J.H. PEERLINGS, R. de BORST, r. BREKELMANS et W.A.M. de VREE : Some observations on localisation in non-local and gradient-damage models. *European journal of Mechanics A/ Solids*, 15:937–953, 1996.
- [Pee99] R. PEERLINGS : *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*. Thèse de doctorat, TU Eindhoven - The Netherlands, 1999.
- [Per66] P. PERZYNA : Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mech. and Eng. Vol. 9*, 1966.
- [Pon95] C. PONTIROLI : *Comportement au souffle des structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1995.
- [PSS08] R.R. PEDERSEN, A. SIMONE et L.J. SLUYS : An analysis of dynamic fracture in concrete with a continuum visco-elastic visco-plastic damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:3782–3805, 2008.
- [PT96] E. PAPA et A. TALIERCIO : Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 163–179, 1996.
- [PT05] E. PAPA et A. TALIERCO : A visco-damage model for brittle materials under monotonic and sustained stresses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27:287–310, 2005.
- [Rab69] Y.N. RABOTNOV : Creep problems in structure members. *North Holland, Amsterdam*, 1969.
- [RD96] D. ROYER et E. DIEULESAINT : *Ondes élastiques dans les solides, Tome 1*. Masson, Paris, 1996.
- [Rei82] H.W. REINHARDT : Concrete under impact loading : Tensile strength and bond. *Heron*, 27, 1982.
- [RES04] Timo RABCZUK, Josef EIBL et Lothar STEMPIEWSKI : Numerical analysis of high speed concrete fragmentation using a meshfree lagrangian method. *Engineering fracture mechanics*, 71:547–556, 2004.
- [RG03] F. RAGUENEAU et F. GATUINGT : Inelastic behavior modelling of concrete in low and high strain rate dynamics. *Computers and Structures*, 81:1287–1300, 2003.

- [RGC08] RGPU : *Benchmark CEOS.fr Fissuration sous chargement statique monotone*. 2008.
- [RH08] S. ROUX et F. HILD : Digital image mechanical identification (dimi). *Experimental Mechanics*, 48:495–508, 2008.
- [Rie68] J.D. RIERA : Stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces. *Nucl. Eng. Design*, 8:415–426, 1968.
- [RMT<sup>+</sup>94] P. ROSSI, J.G.M. Van MIER, F. TOUTLEMONDE, F. Le MAOU et C. BOULAY : Effect of loading rate on the strength of concrete subjected to uniaxial tension. *Materials and Structures*, 27:260–264, 1994.
- [Ros91] P. ROSSI : A physical phenomenon that can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates. *Materials and Structures Vol. 24 n°6*, 1991.
- [RR84] H. RIECH et E. RUDIGER : Meppener versuche ii. *Technischer Bericht*, 1500408 (RS467), 1984.
- [RTK95] A. ROSS, J.W. TEDESCO et S.T. KUENNEN : Effects of strain rate on concrete strength. *American Concrete Institute Material*, 92:37–47, 1995.
- [SdB94] L.J. SLUYS et R. de BORST : Dispersive properties of gradient-dependent and rate-dependent media. *Mechanics of materials*, 18:131–149, 1994.
- [SDRD09] A. SOUID, A. DELAPLACE, F. RAGUENEAU et R. DESMORAT : Pseudo-dynamic testing and nonlinear substructuring of damaging structures under earthquake loading. *Engineering structures*, 31:1102–1110, 2009.
- [Ser97] J. SERCOMBE : *Modélisation du comportement du béton en dynamique rapide, application au calcul de conteneurs à haute intégrité*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, dec 1997.
- [SH98] J.C. SIMO et T.J.R. HUGHES : *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [SKG88] J.C. SIMO, J.G. KENNEDY et S. GOVINDJEE : Non-smooth multi-surface plasticity and visco-plasticity - loading/unloading conditions and numerical algorithms. *International journal of numerical methods in engineering*, 26: 2161–2185, 1988.
- [Slu92] L.J. SLUYS : *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Thèse de doctorat, TU Delft - The Netherlands, 1992.
- [Sou08] A. SOUID : *Sous-structuration combinée Expérimentale/Numérique pour chargements pseudo-dynamiques endommageants*. Thèse de doctorat, Ecole Normale supérieure de Cachan, 2008.
- [SS84] W. SUARIS et S.P. SHAH : Test methods for impact resistance of fiber reinforced concrete. *American Concrete Institute*, SP-81:247–266, 1984.
- [STK<sup>+</sup>93] T. SUGANO, H. TSUBOTA, Y. KASAI, N. KOSHIKA, W.A. RISEMAN, Bickel D.C. et Park R.B. : Full-scale aircraft impact test for evaluation of impact force. *Nuclear Engineering and Design*, 140:373–385, 1993.

- [Suf04] A. SUFFIS : *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste des structures sous impact*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [TB93] J.M. TORRENTI et C. BOULAY : Résultats récent concernant l'essai de compression du béton. *Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics*, 513, 1993.
- [Ter80] M. TERRIEN : Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison du LCPC*, 105, 1980.
- [Tou95] F. TOUTLEMONDE : Résistance au choc des structures en béton. du comportement du matériau au calcul des ouvrages. *Rapport de recherche hors serie LCPC Paris*, 1995.
- [TRK93] J.W. TEDESCO, CA ROSS et S.T. KUENNEN : Experimental and numerical analysis of high strain ratesplitting tests. *ACI Materials journal*, 90:162–169, 1993.
- [Ulm96] F.J. ULM : *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, Université de Paris 6, 1996.
- [VAL94] G. VOYIADJIS et T. ABU-LEBDEH : Plasticity model for concrete using the bounding surface model. *Int. J. Plasticity*, 10:1–21, 1994.
- [VS88] F.J. VECCHIO et J.A. SATO : Drop, fire and thermal testing of a concrete nuclear fuel container. *ACI Structural journal*, juillet-août 1988:374–383, 1988.
- [War75] K.W.E. WARNKE : Constitutive model for triaxial behaviour of concrete. *In Concrete Struc. Subjected to Triaxial Stresses, Int. Ass. for Bridge and Structural Engineering*, pages 1–30, 1975.
- [Wee91] J. WEERHEIJM : Properties of concrete underdynamic loading 4, the uniaxial impact tensile test. *PLM report nr 91, Rijswijk*, 1991.
- [WM06] P. WRIGGERS et S.O. MOFTAH : Mesoscale models for concrete : Homogenisation and damage behaviour. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:623–636, 2006.
- [WR89] J. WEERHEIJM et H.W. REINHARDF : Concrete in impact tensile test. *In Int. Conf. on Struct. under Shock and Impact, Cambridge, Massachussets*, pages 29–40, 1989.
- [WSH92] T.L. WANG, M. SHAHAWAMY et D.Z. HUANG : Impact in highway prestressed concrete bridges. *Computers and structures*, 44:525–534, 1992.
- [WW75] K.J. WILLAM et E.P. WARNKE : Constitutive model of the triaxial behavior of concrete. *In IASBE Proceedings*, 1975.
- [Yan97] D. Z. YANKELEVSKY : Local response of concrete slabs to low velocity impact. *International Journal of Impact Engineering*, 19:331–343, 1997.

- [ZG96] H. ZHAO et G. GARY : Stress-strain behaviour of concrete and mortar at high rates of tensile loading. *International Journal of Solids and Structures*, 33: 3363–3375, 1996.
- [ZK07] M. ZINEDDIN et T. KRAUTHAMMER : Dynamic response and behaviour of reinforced concrete slabs under impact loadings. *International Journal of Impact Engineering*, 34:1517–1534, 2007.
- [ZRY08] X. X. ZHANG, G. RUIZ et R. C. YU : A new drop-weight impact machine for studying fracture processes in structural concrete. *Strain*, 2008.
- [ZTLH08] Y. ZHANG, F. TOUTLEMONDE, P. LUSSOU et P. HUMBERT : Analyse, dimensionnement et optimisation d'ouvrages de protection contre les chutes de blocs. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 12:1041–1061, 2008.