



HAL
open science

Modélisation du comportement dynamique d'un agent de contraste ultrasonore

Marie-Christine Pausin

► **To cite this version:**

Marie-Christine Pausin. Modélisation du comportement dynamique d'un agent de contraste ultrasonore. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2009. Français. NNT: . tel-00430076

HAL Id: tel-00430076

<https://theses.hal.science/tel-00430076>

Submitted on 5 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I

THÈSE

présentée par

Marie-Christine PAUZIN

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I

Discipline : MÉCANIQUE

Spécialité : ACOUSTIQUE

Soutenance prévue le 3 Novembre 2009

**Modélisation du comportement dynamique
d'un agent de contraste ultrasonore**

Directeurs de thèse : M. Jean-Pierre LEFEBVRE et M. Serge MENSAH

JURY

Ayache BOUAKAZ	Rapporteur
Christian CACHARD	Examineur
Frédéric LEBON	Examineur
Jean-Pierre LEFEBVRE	Directeur de thèse
Philippe MARMOTTANT	Rapporteur
Serge MENSAH	Directeur de thèse

Table des matières

Notations	7
Introduction	9
1 Comportement d'une bulle de gaz dans un liquide	13
1.1 Equations du mouvement en régime radial	14
1.1.1 Equation de Rayleigh-Plesset	14
1.1.2 Prise en compte de la tension de surface	15
1.1.3 Prise en compte de la viscosité du fluide externe - Modèle RPNNP	16
1.1.4 Comparaison des différentes fréquences d'oscillations	17
1.1.5 Cas d'un liquide compressible	18
1.2 Oscillations radiales de faible amplitude	19
1.2.1 Développement au premier ordre : modèle équivalent d'oscillateur harmonique amorti	19
1.2.2 Sections efficaces	22
1.2.3 Développement au second ordre	24
2 Comportement d'un agent de contraste	29
2.1 Modèle de N. de Jong	29
2.2 Modèle de Church	31
2.2.1 Oscillations de faible amplitude	33
2.2.2 Etude de sensibilité	36
2.2.3 Intérêt des sections efficaces pour la caractérisation des agents de contraste	41
2.3 Agents de contraste à coque peu épaisse : modèle de Hoff	42
2.4 Prise en compte de la compressibilité du liquide environnant : modèle de Morgan	45
2.5 Prise en compte des phénomènes de flambage et de rupture de la coque : modèle de Marmottant	47
3 Formulation lagrangienne	49
3.1 Oscillations radiales d'une bulle de gaz dans un liquide	50
3.1.1 Cas d'un liquide incompressible	50
3.1.2 Cas d'un liquide compressible	53
3.2 Oscillations radiales d'un agent de contraste dans un liquide	54
3.2.1 Calcul de l'énergie cinétique du système	54
3.2.2 Calcul de l'énergie potentielle du système	55
3.2.3 Calcul de la fonction de dissipation du système	56
3.2.4 Obtention de l'équation du mouvement	57
3.2.5 Oscillations de faible amplitude - Développement au premier ordre	58
3.3 Prise en compte d'un mouvement de translation	60

4	Régime non linéaire : méthode de l'équilibrage harmonique	63
4.1	Etude analytique pour une bulle de gaz (modèle RPNNP)	63
4.1.1	Recherche des solutions sous la forme $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos\psi$	64
4.1.2	Recherche des solutions sous la forme $x = A_0 + A_1 \cos\psi$	64
4.1.3	Recherche des solutions sous la forme $x = A_0 + A_1 \cos\psi + A_2 \cos 2\psi$	65
4.2	L'outil MANLAB	66
4.3	Bulle de gaz (modèle RPNNP)	68
4.3.1	Mise sous forme quadratique	68
4.3.2	Résultats MANLAB	69
4.4	Agent de contraste à coque peu épaisse - Modèle de Hoff	72
4.4.1	Mise sous forme quadratique	72
4.4.2	Résultats MANLAB	73
4.5	Agent de contraste - Modèle de Marmottant	75
4.5.1	Mise sous forme quadratique	75
4.5.2	Résultats MANLAB	76
5	Modélisation éléments finis d'une bulle d'air en régime linéaire	79
5.1	Formulation acoustique	79
5.2	Choix du mode d'application	82
5.3	Définition de la géométrie	82
5.4	Définition de la physique du problème	83
5.4.1	Dans les sous-domaines	83
5.4.2	Sur les frontières	83
5.5	Maillage	84
5.6	Résolution et post-traitement	85
5.7	Etudes paramétriques	86
5.7.1	Influence de l'amplitude de l'onde incidente	86
5.7.2	Influence de la taille du maillage	86
5.7.3	Influence du degré d'interpolation	87
5.7.4	Influence de la taille du domaine de simulation	87
5.7.5	Influence du rayon de la bulle d'air	88
6	Modélisation éléments finis d'un agent de contraste en régime linéaire	89
6.1	Définition du modèle élastique	89
6.2	Résultats	91
6.2.1	Fréquence de résonance	91
6.2.2	Influence du module d'Young E_s	92
6.2.3	Influence de l'épaisseur de la coque e_S	92
6.2.4	Influence de la tension de surface	93
6.2.5	Influence d'un amortissement visqueux	95
7	Présence d'une paroi rigide	97
7.1	Cas d'une bulle d'air	97
7.1.1	Présentation du modèle éléments finis	97
7.1.2	Influence de la distance à la paroi	98
7.1.3	Bulle en contact : résultats dans le cas $d = 0$	99
7.2	Cas d'un agent de contraste	99
7.3	Modèle équivalent d'oscillateur harmonique	100
7.3.1	Rappel du modèle dans le cas sans paroi	100
7.3.2	Obtention du modèle dans le cas avec paroi	100

7.3.3	Comparaison avec le modèle COMSOL dans le cas d'un agent de contraste . . .	103
Conclusion		105
Annexe - Prise en compte d'une paroi rigide infinie		107
A.1	Oscillations radiales	107
A.1.1	En milieu infini	107
A.1.2	En présence d'une paroi rigide	108
A.2	Mouvement de translation	109
A.2.1	Milieu infini	109
A.2.2	En présence d'une paroi rigide	110
A.3	Superposition des solutions	110
Bibliographie		112

Notations

Les vecteurs et les tenseurs sont représentés en gras.

χ_S	module élastique de la couche lipidique
δ_{viscL}	constante d'amortissement traduisant les pertes d'origine visqueuse dans le liquide
δ_{viscS}	constante d'amortissement traduisant les pertes d'origine visqueuse dans l'enveloppe solide
ϵ	tenseur des déformations
ϕ	potentiel des vitesses
γ	rapport des capacités calorifiques du gaz
η_L	coefficient de viscosité dynamique du liquide
η_S	coefficient de viscosité dynamique de l'enveloppe solide
λ_L	longueur d'onde dans le liquide
μ_S	2 nd module de cisaillement
ν_S	coefficient de Poisson
Π_s	puissance totale diffractée
ρ_a	masse volumique de l'air
ρ_e	masse volumique de l'eau
ρ_G	masse volumique du gaz
ρ_L	masse volumique du liquide
ρ_S	masse volumique de l'enveloppe solide
σ	tension de surface de l'interface gaz/liquide
σ_1	tension de surface de l'interface 1 (gaz/solide)
σ_2	tension de surface de l'interface 2 (solide/liquide)
σ_a	section efficace d'absorption
σ_e	section efficace d'extinction
σ_s	section efficace de diffusion (scattering cross-section)
Σ_{TA}	section efficace totale d'absorption
Σ_{TE}	section efficace totale d'extinction
Σ_{TS}	section efficace totale de diffusion
σ_G	tenseur des contraintes dans le gaz
σ_L	tenseur des contraintes dans le liquide
σ_S	tenseur des contraintes dans l'enveloppe solide
ς	exposant polytropique
ω	pulsation de l'onde incidente
ω_0	pulsation de propre (terme générique)
ω_{res}	pulsation de résonance (terme générique)
ω_J	pulsation de de Jong
ω_M	pulsation de Minnaert

TAB. 1 – *Alphabet grec*

b	coefficient d'amortissement
c_a	célérité de l'onde acoustique dans l'air
c_e	célérité de l'onde acoustique dans l'eau
c_G	célérité de l'onde acoustique dans le gaz
c_L	célérité de l'onde acoustique dans le liquide
d	constante d'amortissement
d_{fri}	constante d'amortissement traduisant les pertes d'origine visqueuse dans l'enveloppe solide
d_{ray}	constante d'amortissement traduisant les pertes par rayonnement acoustique
d_{th}	constante d'amortissement traduisant les pertes d'origine thermique
d_{visc}	constante d'amortissement traduisant les pertes d'origine visqueuse dans le liquide
\mathbf{D}	tenseur des taux de déformations
e_S	épaisseur de l'enveloppe solide
E_S	module d'Young
f_0	fréquence propre (terme générique)
f_{res}	fréquence de résonance (terme générique)
f_D	fréquence de Devin
f_H	fréquence de Houghthon
f_M	fréquence de Minnaert
f_R	fréquence de Richardson
f_S	fréquence de Smith
F	fonction de dissipation
I_0	intensité de l'onde incidente
\mathbf{I}	tenseur identité
k	constante de raideur effective du système bulle de gaz/liquide
k_L	nombre d'onde dans le liquide
L	Lagrangien
m	masse effective du système bulle de gaz/liquide
p_G	pression dans le gaz
p_L	pression dans le liquide
p_∞	superposition de $P(t)$ et P_0
$P(t)$	onde acoustique incidente d'amplitude P et de pulsation Ω
P_0	pression hydrostatique
r	coordonnée radiale (origine au centre de la bulle de gaz)
$R(t)$	rayon instantané de la bulle de gaz (interface gaz/liquide)
R_0	rayon de la bulle de gaz à l'équilibre
$R_1(t)$	rayon instantané de l'interface 1 (gaz/solide)
$R_2(t)$	rayon instantané de l'interface 2 (solide/liquide)
R_{res}	rayon de la bulle associé à la fréquence de résonance f_{res}
S_e	paramètre lié à l'élasticité de l'enveloppe solide
S_f	paramètre lié à la viscosité de l'enveloppe solide
T	énergie cinétique
\mathbf{u}	vecteur déplacement
U	énergie potentielle
$v(r,t)$	composante radiale du vecteur vitesse
\mathbf{v}	vecteur vitesse
V_S	volume de l'enveloppe solide (au facteur $4\pi/3$ près)

TAB. 2 – *Alphabet latin*

Introduction

Les techniques ultrasonores sont largement employées dans le milieu médical, tant pour le diagnostic (échographie du coeur, du foie, du sein...) que pour la thérapie (destruction des calculs rénaux, traitement par HIFU...). L'amélioration des performances, en termes de résolution spatiale ou d'imagerie en temps réel, des méthodes et des appareils associés requiert la compréhension fine des phénomènes physiques mis en jeu lors de l'interaction de l'onde ultrasonore avec le corps humain. Une des voies faisant l'objet de nombreuses recherches sur le plan international est l'utilisation d'agents de contraste.

En effet, dès 1968, Gramiak et Shah ont observé un contraste échographique rehaussé lorsque des solutions, telles le vert d'indocyanine, le sérum physiologique ou le sérum alcalin, étaient injectées rapidement dans le système vasculaire ou agitées avant l'injection [GRA 68]. Les bulles d'air ainsi créées dans la solution injectée étaient à l'origine du rehaussement de contraste observé lors de la phase d'imagerie ultrasonore. En effet, les bulles de gaz sont d'excellents réflecteurs car leur densité et leur compressibilité sont très différentes de celles du sang, ce qui provoque une importante rupture d'impédance à l'interface bulle/sang. De plus, les bulles interagissent avec le faisceau ultrasonore et peuvent entrer en résonance, leur section efficace de diffusion devenant cent à mille fois plus grande que leur section géométrique. Les limitations relatives à ces premiers produits de contraste étaient d'une part la durée de vie très courte des bulles (inférieure à la seconde), qui limitait la durée du rehaussement de contraste, et d'autre part leur taille élevée, qui empêchait leur passage à travers les capillaires pulmonaires.

Durant deux décennies, les efforts ont porté sur le développement de microbulles de gaz entourées d'une enveloppe composée de matériaux biocompatibles, permettant l'obtention de solutions plus stables et capables de transiter à travers le poumon afin de produire un rehaussement du contraste dans les ventricules. Echovist® (Shering) [ECH 99] a été le premier agent de contraste introduit en Europe (1991). Ce produit était constitué de microbulles d'air adsorbées sur des microparticules de galactose. Il restait stable dans le système veineux et le ventricule droit mais se dissolvait lors du passage dans les capillaires pulmonaires. Le premier produit commercialisé permettant le rehaussement dans le ventricule gauche a été l'Albunex® (Mallinckrodt Medical) [BLE 90], introduit aux Etats-Unis en 1994. Il était constitué de microbulles d'albumine humaine remplie d'air, de diamètre moyen 3 à 5 μm . Malgré la présence de cette enveloppe "protectrice", la durée de vie des agents de contraste dans le corps humain (inférieure à cinq minutes) restait un facteur limitant du point de vue de leur utilisation clinique. La nouvelle génération repose sur l'utilisation de gaz moins diffusibles que l'air (famille des perfluorocarbones), ce qui permet d'augmenter le temps de persistance du contraste : Optison® (GE Healthcare) [OPT 03] est une suspension de microsphères d'albumine humaine remplie d'octofluoropropane ; Sonovue® (Bracco) [SON 04] est constitué de microbulles d'hexafluorure de soufre entourées par une membrane de phospholipides. Ces nouveaux produits permettent une opacification du ventricule gauche ainsi qu'une délimitation des frontières endocardiques.

Parallèlement, des modèles analytiques ont été développés afin de décrire le comportement d'un agent de contraste soumis à une excitation acoustique. Ils dérivent tous de l'équation de Rayleigh-Plesset, équation fondamentale lorsque l'on s'intéresse aux oscillations radiales d'une bulle de gaz soumise à une onde acoustique [PLE 49]. Le matériau constituant la coque modifie de façon significative la réponse de l'agent de contraste. Les comportements observés pouvant être très différents selon sa nature (élastique [JON 92], viscoélastique [JON 93] [CHU 95], fluide [ALL 02]...). L'adéquation entre

théorie et expérience a été initialement vérifiée à partir de mesures acoustiques réalisées sur des suspensions d'agents de contraste [JON 93] [HOF 96] [BOU 96-1] [HOF 00]. L'évaluation, à partir des mesures expérimentales, des paramètres physiques des modèles nécessite la connaissance de la distribution de taille des agents de contraste présents dans l'échantillon testé et repose sur des hypothèses fortes : le phénomène de diffusion multiple est négligé et les propriétés physiques du matériau constituant la coque sont supposées identiques d'un agent de contraste à l'autre. A la fin des années 1990, l'utilisation de caméras ultra-rapides a permis l'observation des oscillations radiales d'agent de contraste isolé. La validation des modèles théoriques est alors principalement effectuée à partir des observations optiques donnant directement accès à la variation temporelle du rayon de l'agent de contraste [DAY 99] [JON 00-b]. Les modèles ont ainsi pu être améliorés afin de mieux rendre compte du comportement des agents de contraste [MOR 00] [MAR 05].

Initialement utilisés en échocardiologie, le champ d'application des agents de contraste ultrasonore dans le domaine médical n'a cessé de croître et témoigne de l'étendue de leur potentiel clinique, tant sur le plan diagnostique (imagerie harmonique, imagerie spécifique...) que sur le plan thérapeutique (suivi de l'efficacité d'un traitement, vectorisation de substances thérapeutiques, HIFU...) [JON 96] [BLO 01] [FEI 04]. Dans le cadre du développement du prototype ANAÏS (Anatomical Imaging and Interventional System), basé sur la tomographie ultrasonore [LEF 85] [MEN 97] et spécifiquement dédié à la détection et au traitement du cancer du sein [FER 03] [FRA 06], l'équipe "Propagation et Imagerie" du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique souhaite inclure dans le protocole clinique l'utilisation des agents de contraste ultrasonore. En effet, l'imagerie moléculaire consiste à ancrer à la surface de l'agent de contraste des ligands spécifiques ciblant certaines protéines. Par exemple, dans le cas du cancer du sein, les intégrines $\alpha_v\beta_3$ et $\alpha_v\beta_5$ sont actives dans l'angiogénèse alors que la protéine *erbB2* évoque généralement une forte agressivité tumorale [BRE 07]. Une forte concentration d'agents de contraste au sein des tissus révélera à l'échographie (ou à la tomographie ultrasonore) la présence de zones suspectes. Ce ciblage pourrait permettre à terme un diagnostic plus précis (détection précoce et localisée) et donnerait la possibilité d'effectuer une délivrance locale de substances thérapeutiques lors de la destruction d'agents de contraste chargés [DAY 02-a].

L'objet de la présente thèse est de proposer un état de l'art des connaissances sur le comportement mécanique des agents de contraste ultrasonore puis de dégager des critères pertinents permettant de distinguer, lors de la phase d'imagerie, les agents de contraste libres des agents de contraste liés aux cellules cibles. L'aspect thérapeutique (destruction des agents de contraste) n'est pas abordé.

Les travaux récents dans le domaine des agents de contraste visent à développer l'imagerie et la thérapie spécifiques : les agents de contraste sont conçus pour se lier de manière préférentielle à un certain type de tissus ou de cellules [KLI 06] [FER 07]. Les modèles théoriques doivent donc être adaptés aux configurations expérimentales. Un des objectifs de cette thèse est de proposer un modèle permettant d'évaluer l'influence d'une paroi (considérée rigide pour cette première approche) sur la réponse acoustique d'un agent de contraste, en particulier sa fréquence de résonance.

La fréquence de résonance est en effet un paramètre déterminant dans la mise au point de nouvelles techniques d'imagerie exploitant le caractère non linéaire des agents de contraste. L'imagerie harmonique, par exemple, consiste à émettre à la fréquence f et à recevoir à la fréquence $2f$ afin de ne visualiser que les cibles présentant une réponse non linéaire (les nuages de bulles et les tissus imprégnés de bulles en particulier) [JON 00-a] [JON 02]. Il nous a donc paru intéressant d'étudier l'influence de l'amplitude de l'excitation acoustique sur la réponse harmonique d'un agent de contraste.

Ce mémoire se compose de plusieurs chapitres organisés comme suit. Les deux premiers correspondent à une étude bibliographique approfondie des modèles théoriques permettant de décrire le comportement d'une bulle de gaz (chapitre 1) puis d'un agent de contraste (chapitre 2). Il est en effet important de revenir à l'équation originale de Rayleigh-Plesset avant d'aborder les équations proposées dans la littérature dans le cas d'un agent de contraste. Le lecteur averti pourra accéder directement aux chapitres suivants.

Le chapitre 3 présente la modélisation du comportement d'une bulle de gaz puis d'un agent de contraste dans le cadre du formalisme lagrangien, formalisme usuel pour les mécaniciens. Les principales équations introduites lors de l'étude bibliographique sont obtenues pas à pas en fonction du degré de complexification du modèle. Ce chapitre, basé essentiellement sur les travaux de Doinikov [DOI 02] [DOI 05] [DOI 06], permet de mettre en exergue l'influence des différents phénomènes physiques pris en compte en identifiant la contribution de chacun dans les termes d'énergie cinétique, d'énergie potentielle et de dissipation. Il donne une vision unifiée, adoptant le point de vue des mécaniciens, des divers modèles théoriques proposés dans la littérature.

L'aspect non linéaire des équations décrivant le comportement d'une bulle de gaz ou d'un agent de contraste est ensuite abordé dans le chapitre 4 à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique. Après un bref rappel du principe de cette méthode, celle-ci est appliquée à l'équation de Rayleigh-Plesset, tout d'abord en menant les calculs de façon analytique puis à l'aide du logiciel MANLAB développé sous MATLAB® par Rémi Arquier au cours de sa thèse au LMA [ARQ 07]. Dans le cas d'un agent de contraste, l'étude des modèles de Hoff et de Marmottant (cf. chapitre 2) a été réalisée directement avec MANLAB.

La suite de la thèse est consacrée à la modélisation par éléments finis du comportement acoustique d'une bulle d'air et d'un agent de contraste, en espace infini puis en présence d'une paroi rigide. Cette modélisation est effectuée sous COMSOL Multiphysics™ (version 3.3 a, février 2007), environnement dédié à la simulation numérique et permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles prédéfinies dans le logiciel ou définies par l'utilisateur.

Les développements menés sous COMSOL s'appuient sur la formulation acoustique du problème d'une bulle d'air dans l'eau proposée par Leroy [LER 04] et présentée au début du chapitre 5. Cette formulation permet en effet de mettre en évidence le phénomène de résonance d'une bulle d'air à partir de l'équation de Helmholtz, ce qui requiert l'utilisation du Module Acoustique de COMSOL dans les chapitres 5, 6 et 7.

Les principales étapes de modélisation à partir de l'interface graphique du logiciel sont détaillées à travers l'exemple de la bulle d'air traité dans le chapitre 5. Le phénomène de résonance est clairement identifié et la fréquence de résonance obtenue est comparée aux valeurs trouvées dans la littérature.

La modélisation est étendue au cas d'un agent de contraste à coque solide élastique puis viscoélastique au chapitre 6. Une étude paramétrique est menée afin de dégager les paramètres physiques influents. Des comparaisons avec les modèles analytiques présentés au chapitre 2 sont systématiquement effectuées.

Une paroi rigide est ensuite ajoutée à proximité d'une bulle d'air tout d'abord, puis à proximité d'un agent de contraste à coque viscoélastique (chapitre 7). Les résultats issus de cette modélisation numérique sous COMSOL sont comparés avec ceux, expérimentaux ou théoriques, trouvés dans la littérature. Nous proposons également un modèle équivalent d'oscillateur harmonique amorti permettant de prendre en compte la présence d'une paroi rigide.

Chapitre 1

Comportement d'une bulle de gaz dans un liquide

Ce chapitre recense les principaux modèles décrivant le comportement d'une bulle de gaz isolée dans un milieu liquide. Il permet de poser les bases nécessaires à la compréhension des différents phénomènes physiques à considérer lors de l'étude du comportement d'un agent de contraste menée au chapitre 2.

Les premières études datent de 1917, lorsque Lord Rayleigh [RAY 17] avait été mandaté par la Royal Navy pour étudier les dommages causés par les bulles de cavitation sur les hélices de sous-marins rapides. Lord Rayleigh s'est intéressé au comportement oscillatoire d'une cavité sphérique vide créée dans un fluide homogène incompressible, non visqueux, d'étendue infinie et initialement au repos. A partir de considérations énergétiques, il a évalué les variations temporelles du rayon de la bulle, le temps de collapse de la bulle ainsi que la pression générée au sein du fluide à proximité de la paroi de la bulle pendant le phénomène de collapse, montrant que les très fortes surpressions obtenues pouvaient expliquer les dommages observés.

Une toute autre motivation a conduit Minnaert, dans les années trente, à considérer le cas de bulles d'air oscillant radialement dans un fluide également homogène incompressible [MIN 33], non visqueux, d'étendue infinie et initialement au repos. En effet, il s'intéressait à l'origine physique du "murmure du ruisseau" et supposait que le son produit était dû à des bulles d'air qui oscillaient périodiquement dans l'eau. Le rayon de la bulle est noté $R(t)$, avec R_0 le rayon à l'équilibre ; P_0 est la pression statique dans le liquide très loin de la bulle et ρ_L est la masse volumique du liquide. Le comportement du gaz à l'intérieur de la bulle étant supposé adiabatique, des considérations énergétiques l'ont conduit à exprimer la fréquence propre des oscillations en fonction du rayon à l'équilibre selon l'expression, appelée fréquence de Minnaert,

$$f_M = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_L}} \quad (1.1)$$

avec γ le rapport des capacités calorifiques du gaz. Afin de vérifier la validité de l'équation (1.1), Minnaert avait conçu un dispositif permettant de faire échapper de l'air par un orifice immergé dans un fluide et déterminait à l'oreille et à l'aide de diapasons la fréquence de bulles de diamètre compris entre 3 et 6 mm ainsi créées. Minnaert a réalisé une étude de l'influence de divers paramètres sur la hauteur du son perçu comme le volume des bulles, la température, la nature du gaz (air, hydrogène, butane) et du liquide (eau, éthanol, solution de nitrate mercurique dans de l'acide nitrique), ce qui lui a permis de vérifier expérimentalement la validité de l'expression (1.1). Une conséquence importante de la formule

de Minnaert est de montrer que les bulles résonnent à très basse fréquence eu égard à leur taille. Un calcul rapide montre en effet que le produit $R_0 k_L$ du rayon par le nombre d'onde dans le liquide à la fréquence de résonance est

$$R_0 k_L = R_0 \frac{\omega_M}{c_L} = \frac{2\pi R_0}{c_L} f_M = \frac{1}{c_L} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_L}} = \frac{c_G}{c_L} \sqrt{\frac{3\rho_G}{\rho_L}} \approx 7.10^{-3} \quad (1.2)$$

pour une bulle d'air dans l'eau. En termes de longueur d'onde, $R_0 k_L = 2\pi R_0 / \lambda_L$ donc

$$\frac{R_0}{\lambda_L} = \frac{R_0 k_L}{2\pi} \approx 1,1.10^{-3}. \quad (1.3)$$

Les bulles d'air résonnent donc à des fréquences dont la longueur d'onde (dans l'eau) est mille fois plus grande que leur rayon.

Smith a par la suite effectué un raisonnement énergétique similaire en prenant en compte la tension de surface σ au niveau de la paroi des bulles négligée par Minnaert [SMI 35]

$$f_S = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0})}{\rho_L}}. \quad (1.4)$$

On retrouve la fréquence propre de Minnaert dans la limite $\frac{2\sigma}{R_0} \ll P_0$, soit $R_0 \gg \frac{2\sigma}{P_0}$: plus les bulles sont petites, moins l'effet de la tension de surface sera négligeable.

Ces études ont posé les bases du comportement d'une bulle de gaz dans un liquide et ont été par la suite complétées afin de prendre en compte des phénomènes physiques supplémentaires comme, par exemple, la viscosité du liquide, la compressibilité du liquide ou les échanges thermiques entre le gaz et le liquide.

1.1 Equations du mouvement en régime radial

1.1.1 Equation de Rayleigh-Plesset

La compressibilité des gaz étant plusieurs milliers de fois plus importante que celle des liquides (16000 dans le cas air/eau), le liquide est supposé incompressible. Sa densité est donc constante et la vitesse de propagation du son est infinie. On travaille en coordonnées sphériques, l'origine du repère étant le centre de la bulle. La distance d'un point quelconque du liquide au centre de la bulle est r et le rayon de la bulle est décrit par $R(t)$. La bulle est initialement au repos dans le liquide supposé d'étendue infinie. Un champ acoustique $P(t)$ est imposé à l'instant $t = 0$ dans le liquide très loin de la bulle, la pression P_∞ dans le liquide vaut alors

$$p_\infty(t) = P_0 + P(t) \quad (1.5)$$

où P_0 est la pression statique. La bulle de gaz, modélisée par une cavité sphérique, commence alors à osciller radialement, provoquant la mise en mouvement, supposé à symétrie sphérique, du liquide environnant. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie sphérique du système étudié, la vitesse se met sous la forme $\mathbf{v} = v(r, t)\mathbf{e}_r$. Le liquide étant supposé incompressible, l'équation de conservation de la masse conduit à $\text{div } \mathbf{v} = 0$, soit

$$v(r, t) = \frac{dr}{dt} = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \text{ pour } r \geq R. \quad (1.6)$$

Dans la suite, la dérivation par rapport au temps sera notée $\frac{dX}{dt} = \dot{X}$. Le potentiel des vitesses ϕ s'écrit alors

$$\phi = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad (1.7)$$

en choisissant $\phi(r \rightarrow +\infty) = 0$. Par ailleurs, l'équation de Bernoulli dans le cas d'un écoulement instationnaire, irrotationnel et non visqueux dans un liquide incompressible peut s'écrire

$$\dot{\phi} + \frac{1}{2}(\mathbf{grad}\phi)^2 + \frac{p_L(r)}{\rho_L} = \frac{p_\infty(t)}{\rho_L}. \quad (1.8)$$

L'équation, dite de Rayleigh-Plesset [PLE 49], décrivant l'évolution du rayon $R(t)$ de la bulle s'obtient en écrivant l'équation (1.8) en $r = R$

$$\boxed{R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L}(p_L(R) - p_\infty(t))} \quad (1.9)$$

avec $p_L(R)$ la pression dans le liquide en $r = R$, i.e. au niveau de la surface de la bulle.

En l'absence de tension de surface, $p_L(R) = p_G(R)$ où $p_G(R)$ est la pression du gaz dans la bulle. Si le comportement du gaz est supposé polytropique, l'équation d'état s'écrit

$$p_G(R) = p_G(R_0) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\varsigma} \quad (1.10)$$

avec $p_G(R_0) = p_L(R_0) = P_0$ à l'instant $t = 0$ et ς l'exposant polytropique. $\varsigma = 1$ lorsque le gaz a un comportement isotherme, $\varsigma = \gamma$ lorsque le gaz a un comportement adiabatique.

En remplaçant dans l'équation (1.9), on obtient

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(P_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\varsigma} - P_0 - P(t) \right). \quad (1.11)$$

Dans le cas des oscillations libres (i.e. $P(t) = 0$) de faibles amplitudes, la linéarisation de l'équation (1.11) autour du rayon R_0 conduit à l'équation différentielle linéaire

$$\ddot{\xi} + \frac{3\varsigma P_0}{\rho_L R_0^2} \xi = 0 \quad (1.12)$$

en posant $R(t) = R_0 + \xi(t)$ avec $\xi \ll R_0$. La bulle d'air dans l'eau se comporte alors comme un oscillateur harmonique non amorti de fréquence propre

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\varsigma P_0}{\rho_L}} \quad (1.13)$$

correspondant, dans le cas adiabatique ($\varsigma = \gamma$), à l'expression obtenue par Minnaert (cf. équation (1.1)).

1.1.2 Prise en compte de la tension de surface

Noltingk et Neppiras [NOL 50] ont pris en compte la tension de surface au niveau de l'interface liquide/gaz à l'aide de la formule de Laplace

$$p_G(R) - p_L(R) = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1.14)$$

L'utilisation des équations (1.10) et (1.14) pour expliciter le second membre de l'équation de Rayleigh-Plesset conduit finalement à l'équation dite de Noltingk et Neppiras [NOL 50] [FLY 64]

$$\rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\varsigma} - \frac{2\sigma}{R} - P(t) - P_0. \quad (1.15)$$

Le cas des oscillations libres d'une bulle (i.e. $P(t) = 0$) a été traité par Robinson et Buchanan [ROB 56]. Ils ont montré qu'en se limitant aux oscillations de faibles amplitudes, la linéarisation de l'équation (1.15) autour du rayon R_0 conduisait à l'équation différentielle linéaire

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{\rho_L R_0^2} \left[3\varsigma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0} \right] \xi = 0. \quad (1.16)$$

La bulle d'air dans l'eau se comporte encore comme un oscillateur harmonique non amorti, mais de fréquence propre

$$f_R = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\varsigma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0}}{\rho_L}}. \quad (1.17)$$

Robinson et Buchanan ont ainsi confirmé le propos de Richardson [BRI 47] qui suggérait qu'une prise en compte correcte de la tension de surface étaient obtenue en remplaçant dans l'équation (1.1) P_0 par $P_0 + \left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right) \frac{2\sigma}{R_0}$ plutôt que par $P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}$, comme le proposait Smith (cf. équation (1.4)), d'où la dénomination de fréquence de Richardson f_R donnée à l'expression (1.17).

1.1.3 Prise en compte de la viscosité du fluide externe - Modèle RPNNP

La condition de continuité de la contrainte normale au niveau de la surface de la bulle en $r = R$ s'écrit [LAN 71]

$$(\sigma_L - \sigma_G) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{2\sigma}{R} \cdot \mathbf{e}_r, \quad (1.18)$$

Pour un fluide newtonien incompressible, le tenseur des contraintes s'écrit [GER 73]

$$\sigma_L = -p_L \mathbf{I} + 2\eta_L \mathbf{D} \quad (1.19)$$

avec η_L la viscosité dynamique du fluide et $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{grad}^T \mathbf{v})$ le tenseur des taux de déformations. Le tenseur des contraintes du gaz se réduit à $-p_G \mathbf{I}$. On obtient ainsi

$$p_G(R) = p_L(R) + \frac{2\sigma}{R} - 2\eta_L \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} + \frac{2}{3} \eta_L (div \mathbf{v})_{r=R}, \quad (1.20)$$

avec $v = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$ la composante radiale de la vitesse. En utilisant alors les équations (1.9), (1.10) et (1.20), l'équation de Rayleigh-Plesset devient

$$\rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\varsigma} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} + P(t) - P_0. \quad (1.21)$$

Lauterborn, qui a résolu numériquement cette équation en prenant $\varsigma = 1.33$ et $P(t) = -P \sin(\omega t)$ [LAU 76], a suggéré l'appellation "modèle RPNNP" pour cette équation, du nom des différentes personnes ayant contribué à ce modèle : Rayleigh, Plesset, Noltingk et Neppiras, et enfin Poritsky qui a inclus la viscosité [POR 52].

Houghton a considéré le cas d'oscillations libres ($P = 0$) de faible amplitude, le comportement du gaz étant supposé adiabatique ($\varsigma = \gamma$) [HOU 63]. La linéarisation de l'équation (1.21) aboutit à l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{\xi} + \frac{4\eta_L}{\rho_L R_0^2} \dot{\xi} + \frac{1}{\rho_L R_0^2} \left[3\gamma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0} \right] \xi = 0. \quad (1.22)$$

La bulle se comporte alors comme un oscillateur harmonique amorti de fréquence [HOU 63]

$$f_H = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0}}{\rho_L} - \frac{4\eta_L^2}{\rho_L^2 R_0^2}}, \quad (1.23)$$

appelée fréquence de Houghton.

NB : L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti est du type $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$. La pulsation propre ω_0 est la pulsation des oscillations libres non amorties. On lui associe la fréquence propre $f_0 = \omega_0/2\pi$. En présence d'amortissement ($\lambda \neq 0$), l'équation de l'oscillateur harmonique devient $\ddot{\xi} + 2\lambda\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$. Le régime dit pseudopériodique ($\lambda^2 < \omega_0^2$) correspond aux oscillations libres amorties de pulsation $\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, dite pseudopulsation, à laquelle est associée la pseudofréquence $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Si l'amortissement est faible (typiquement $\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{100}$), la pseudopulsation est très proche de la pulsation propre (écart relatif de l'ordre de 0,5%). Dans le modèle RPNNP présenté ci-dessus, la tension de surface apparaît dans la pulsation propre alors que la viscosité du liquide apparaît dans le terme d'amortissement ($\lambda = \frac{2\eta_L}{\rho_L R_0^2}$). La fréquence de Richardson correspond à la fréquence propre et la fréquence de Houghton correspond à la pseudofréquence.

1.1.4 Comparaison des différentes fréquences d'oscillations

La comparaison dans le cas adiabatique des fréquences d'oscillations f_M , f_R et f_H pour différents rayons R_0 permet d'évaluer l'erreur commise lorsque la tension de surface et la viscosité sont négligées.

L'équation de Minnaert (1.1) prédit que le produit $f_M R_0$ est indépendant du rayon R_0 de la bulle. Pour des bulles d'air dans l'eau à la pression atmosphérique, on obtient $f_M R_0 \approx 3,29 \text{ Hz.m}$ avec $\gamma = 1,4$, $\rho_L = 998 \text{ kg.m}^{-3}$ et $P_0 = 1,013 \text{ bar}$. Plus le rayon de la bulle est petit, plus la fréquence des oscillations est élevée. Pour les autres équations, les produits $f_R R_0$ et $f_H R_0$ dépendent de R_0 .

Le tableau 1.1 donne les fréquences obtenues pour différents rayons en utilisant les formules de Minnaert (1.1), de Richardson (1.17) et de Houghton (1.23) dans le cas d'une bulle d'air dans l'eau. Les valeurs utilisées sont $\gamma = 1,4$, $P_0 = 1,013 \text{ bar}$, $\rho_L = 998 \text{ kg.m}^{-3}$, $\sigma = 72,75.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ et $\eta_L = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ [AND 80].

Si l'on considère que la tension de surface est négligeable tant que $\frac{2\sigma}{R_0} \ll P_0$, alors le rayon de la bulle doit vérifier $R_0 \gg \frac{2\sigma}{P_0}$, soit $R_0 \gg R_{lim} = 1,32.10^{-6} \text{ m}$ avec les valeurs de σ et P_0 ci-dessus. Le choix du critère $R_0 \geq 100 R_{lim}$, soit $R_0 \geq 1,32.10^{-4} \text{ m}$ est cohérent avec les résultats répertoriés dans le tableau : lorsque $R_0 \geq 1.10^{-4} \text{ m}$ (en bleu), l'erreur commise en utilisant la fréquence de Minnaert au lieu de celle de Richardson est inférieure à 1%. Pour des bulles de rayons inférieurs à 1.10^{-4} m , les effets de la tension de surface ne sont plus négligeables et il est nécessaire de travailler avec l'expression de Richardson (1.17) au lieu de celle de Minnaert (1.1).

La prise en compte de la viscosité n'est pas nécessaire pour le calcul de la fréquence d'oscillation des bulles de rayon supérieur à 1.10^{-6} m (erreur relative inférieure à 0,1%). Pour des bulles de rayon

Rayon R_0 (m)	f_M (Hz)	f_R (Hz)	f_H (Hz)
5.10^{-3}	$6,5723.10^2$	$6,5730.10^2$	$6,5730.10^2$
1.10^{-3}	$3,2861.10^3$	$3,2879.10^3$	$3,2879.10^3$
5.10^{-4}	$6,5723.10^3$	$6,5794.10^3$	$6,5794.10^3$
1.10^{-4}	$3,2861.10^4$	$3,3041.10^4$	$3,3041.10^4$
5.10^{-5}	$6,5723.10^4$	$6,6438.10^4$	$6,6438.10^4$
1.10^{-5}	$3,2861.10^5$	$3,4613.10^5$	$3,4611.10^5$
5.10^{-6}	$6,5723.10^5$	$7,2559.10^5$	$7,2548.10^5$
1.10^{-6}	$3,2861.10^6$	$4,7556.10^6$	$4,7449.10^6$
5.10^{-7}	$6,5723.10^6$	$1,1736.10^7$	$1,1666.10^7$
1.10^{-7}	$3,2861.10^7$	$1,1357.10^8$	$1,0900.10^8$

TAB. 1.1 – Comparaison des fréquences d'oscillations de Minnaert, Richardson et Houghton

inférieur à 1.10^{-6} m (en rouge), il est nécessaire de travailler avec l'expression de Houghton (1.23) au lieu de celle de Richardson (1.17). L'erreur commise si l'on omet la viscosité augmente lorsque le rayon diminue mais reste cependant faible, de l'ordre de 4% pour une bulle de rayon 1.10^{-7} m.

1.1.5 Cas d'un liquide compressible

L'utilisation de l'hypothèse d'incompressibilité du liquide ne permet pas de prendre en compte l'aspect propagatif de l'onde acoustique car la vitesse de propagation du son dans le liquide est supposée infinie. De même, la dissipation d'une partie de l'énergie lors de l'émission d'une onde acoustique par la bulle n'apparaît pas directement dans l'équation différentielle mais sera introduite "artificiellement" dans le modèle linéaire à travers le coefficient d'amortissement d_{ray} (cf. paragraphe suivant). Lorsque la compressibilité du liquide est prise en compte, l'équation de propagation d'une onde acoustique dans le liquide doit être couplée à l'équation de la quantité de mouvement [TRI 52]. L'équation du mouvement alors obtenue, l'équation de conservation de la masse et les équations de continuité de la pression et de la vitesse à l'interface gaz/liquide conduisent à l'équation dite de Herring [TRI 52] [FLY 64]

$$\left(1 - \frac{2\dot{R}}{c_L}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4\dot{R}}{3c_L}\right) \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left[p_L(R, t) - p_\infty(t) + \frac{R}{c_L} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_L}\right) \dot{p}_L \right]. \quad (1.24)$$

Par rapport à l'équation de Rayleigh-Plesset, les termes supplémentaires sont tous proportionnels à \dot{R}/c_L et découlent de la prise en compte de l'onde acoustique émise par la bulle. Une analyse dimensionnelle du paramètre \dot{R}/c_L conduit à

$$[\dot{R}]/c_L = \frac{\omega R}{c_L} = k_L R \quad (1.25)$$

très petit à la résonance (cf. équation (1.2)).

Vokurka a comparé les modèles de Rayleigh-Plesset (cf. équation (1.9)) et de Herring (cf. équation (1.24)) dans le cas où les phénomènes de tension de surface et de viscosité sont négligés [VOK 86]. Pour des bulles de gaz de taille moyenne ($3 \text{ mm} \ll R_{max} \ll 0,3 \text{ m}$), le modèle de Rayleigh-Plesset reste valable pour des oscillations de faibles amplitudes ($A \leq 2$) alors que le modèle de Herring reste valable pour des oscillations d'amplitudes modérées ($A \leq 4,5$), A étant défini comme le rapport entre le rayon maximum R_{max} et le rayon à l'équilibre R_0 de la bulle [VOK 86].

Suite aux progrès réalisés dans le domaine des caméras vidéos rapides, la confrontation entre théorie et expérience dans le cas d'oscillations de grande amplitude (allant parfois jusqu'à l'éclatement des bulles), a mis en évidence la nécessité de prendre en compte la compressibilité. De nombreux auteurs ont travaillé sur le sujet et beaucoup d'équations sont apparues dans la littérature [KEL 56] [KEL 80] [LAS 81]. Prosperetti et Lezzi ont unifié ces différentes équations en montrant qu'elles sont toutes mathématiquement équivalentes [PRO 86], ces équations pouvant s'écrire sous la forme générale [PRO 87]

$$\begin{aligned} \left(1 + (\lambda + 1) \frac{\dot{R}}{c_L}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{(3\lambda + 1) \dot{R}}{3 c_L}\right) \dot{R}^2 \\ = \frac{1}{\rho_L} \left(1 + (\lambda - 1) \frac{\dot{R}}{c_L} + \frac{R}{c_L} \frac{d}{dt}\right) (p_L(R, t) - p_\infty(t)), \end{aligned} \quad (1.26)$$

λ étant le paramètre permettant de décrire la famille d'équations. En particulier, pour $\lambda = 0$, l'équation (1.26) correspond à l'équation proposée par Keller [KEL 56] [KEL 80], et pour $\lambda = 1$, elle prend la forme suggérée par Herring [TRI 52] [FLY 64]. Prosperetti a également montré que l'indétermination, due à la présence du paramètre λ dans l'équation (1.26), pouvait être levée en appliquant l'opérateur $(\lambda - 1) \frac{\dot{R}}{c_L} + \frac{R}{c_L} \frac{d}{dt}$ à l'équation (1.9) puis en soustrayant le résultat à l'équation (1.26); l'équation obtenue s'écrit alors [PRO 87]

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 - \frac{1}{c_L} \left(R^2 \ddot{R} + 6R\dot{R}\ddot{R} + 2\dot{R}^3\right) = \frac{1}{\rho_L} (p_L(R) - p_\infty(t)). \quad (1.27)$$

On retrouve l'équation de Rayleigh-Plesset lorsque $c_L \rightarrow \infty$, i.e. dans le cas d'un liquide incompressible.

1.2 Oscillations radiales de faible amplitude

1.2.1 Développement au premier ordre : modèle équivalent d'oscillateur harmonique amorti

Dans le cas d'oscillations purement radiales de faible amplitude ($R(t) = R_0 + \xi(t)$ avec $\xi \ll R_0$), l'équation linéarisée décrivant le comportement d'une bulle de gaz modélisée par une cavité sphérique dans un liquide incompressible se ramène à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants [DEV 59] [COA 78]

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + k\xi = -4\pi R_0^2 P \sin \omega t \quad (1.28)$$

avec m masse effective, k raideur effective et b coefficient d'amortissement du système bulle/fluide. En régime forcé (pulsation d'excitation ω), la réponse de l'oscillateur harmonique présente un phénomène

de résonance lorsque $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{m}\right)^2}$. La pulsation ω est alors appelée pulsation de résonance

et notée ω_{res} . Elle est d'autant plus proche de la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ que l'amortissement est faible. On notera $f_{res} = \omega_{res}/2\pi$ la fréquence de résonance

Fréquence propre

Lorsque le comportement du gaz est supposé adiabatique, $k = k_{ad} = 12\pi\gamma R_0 P_0$ et $m = 4\pi R_0^3 \rho_L$ [DEV 59] [MED 77]; la fréquence propre des oscillations libres non amorties a pour expression $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{ad}}{m}}$, ce qui correspond à la fréquence de Minnaert (cf. équation(1.1)).

Dans son étude des pertes d'origine thermique [DEV 59], Devin a montré que le comportement du gaz était polytropique, évoluant entre les cas isotherme et adiabatique. L'exposant polytropique, noté ς , doit être utilisé dans l'expression de la raideur et donc de la fréquence propre à la place de γ , soit $k = k_{ad} \frac{\varsigma}{\gamma}$. Cet exposant ς varie entre 1 si le gaz a un comportement isotherme et γ si le gaz a un comportement adiabatique.

Devin a également considéré l'effet de la tension de surface en introduisant un terme correctif supplémentaire g dans la raideur, soit $k = k_{ad} \frac{\varsigma}{\gamma} g$ avec $g = 1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_0} - \frac{2\sigma}{3\varsigma P_0 R_0}$ (cela correspond à l'intuition de Richardson [BRI 47]).

Finalement, l'expression de la fréquence propre dans le modèle développé par Devin est [MED 77]

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{ad}}{m}} \left(\frac{\varsigma}{\gamma} g \right)^{1/2} = f_M \left(\frac{\varsigma}{\gamma} g \right)^{1/2} \quad (1.29)$$

soit,

$$f_D = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\varsigma(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}) - \frac{2\sigma}{R_0}}{\rho_L}}, \quad (1.30)$$

appelée fréquence de Devin. Cette fréquence propre correspond à la fréquence de Richardson obtenue par Robinson et Buchanan (cf. équation (1.17)), mais Devin a obtenu une expression explicite de l'exposant polytropique ς en fonction de la fréquence (cf. équation (1.35) pour l'expression de X en fonction de la fréquence)

$$\varsigma = \frac{\gamma}{1 + d_{th}^2} \left[1 + 3 \frac{\gamma - 1}{X} \left(\frac{\sinh X - \sin X}{\cosh X - \cos X} \right) \right]^{-1} \quad (1.31)$$

où d_{th} représente les pertes d'origine thermique (son expression ainsi que celle de X seront données dans le paragraphe suivant).

La fréquence propre f_D d'une bulle de rayon R_0 donné est obtenue en résolvant l'équation (1.32) avec MATLAB® par exemple (la résolution est du type "chercher x tel que $f(x) = 0$ " car ς dépend de la fréquence à travers X [ELL 70])

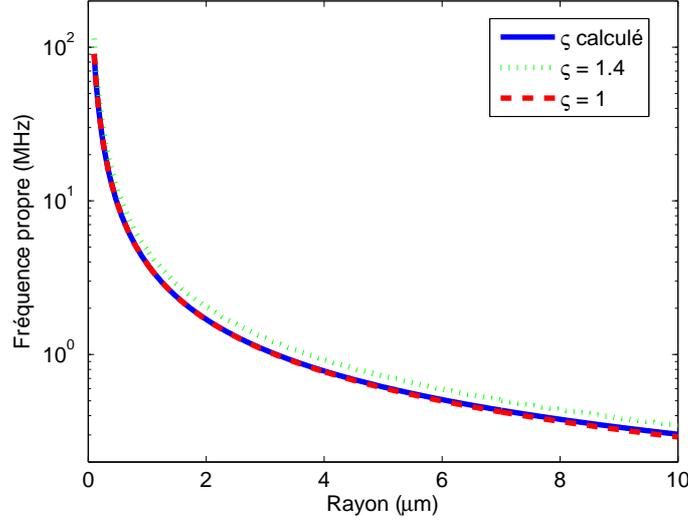
$$\frac{\rho_L (2\pi f_D R_0)^2}{3\varsigma(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}) - \frac{2\sigma}{R_0}} = 1 \quad (1.32)$$

Le tableau 1.2 présente les résultats obtenus pour $P = 1,013 \text{ bar}$, $\rho_L = 998 \text{ kg.m}^{-3}$, $c_L = 1500 \text{ m.s}^{-1}$, $\eta_L = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $\sigma = 72,75.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$, $\gamma = 1,4$ et $D_G = 0,2.10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ [AND 80].

R_0 (μm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_D (MHz)	3,891	1,695	1,071	0,781	0,616	0,509	0,434	0,379	0,337	0,303

TAB. 1.2 – Fréquences propres de Devin

L'exposant polytropique ς , donné par l'équation (1.31), peut varier entre 1 (comportement isotherme) et 1,4 (comportement adiabatique pour un gaz diatomique). Afin de simplifier le calcul de la fréquence propre, il est intéressant de voir si une hypothèse de comportement isotherme ou adiabatique est valide pour des bulles de rayon compris entre 1 et 10 μm . La figure 1.1 représente l'évolution de la fréquence propre en fonction du rayon pour trois expressions de l'exposant polytropique : en trait plein, ς donné par l'équation (1.31) ; en traits discontinus, $\varsigma = 1$ et en pointillés, $\varsigma = 1,4$. Le comportement du gaz est très proche d'un comportement isotherme pour la gamme de rayons qui nous intéresse. L'écart maximal entre la fréquence de propre réelle, i.e. calculée avec l'expression (1.31), et la fréquence propre isotherme est


 FIG. 1.1 – Evolution de la fréquence propre calculée avec trois expressions différentes de ζ

obtenu pour une bulle de rayon $10 \mu m$ et vaut $1,2177 \cdot 10^4 Hz$, soit un écart relatif de 4,02%. Ainsi, pour des bulles dont le rayon est compris entre 0,1 et $10 \mu m$, la fréquence propre est obtenue avec une erreur relative inférieure à 4% si l'on fait l'hypothèse que le gaz a un comportement isotherme (1,62% à $5 \mu m$, 0,13% à $1 \mu m$).

Amortissement - Etude des différentes contributions

La quantité sans dimensions d , appelée constante d'amortissement, est reliée au coefficient d'amortissement b par

$$d = \frac{\omega b}{k} = \frac{b}{m\omega}. \quad (1.33)$$

Elle est définie par Devin comme étant la somme de trois contributions [DEV 59] [ELL 70] [MED 77] :

- les pertes d'origine thermique d_{th} dues à la conduction thermique entre le gaz et le liquide,

$$d_{th} = 3(\gamma - 1) \left[\frac{X (\sinh X + \sin X) - 2 (\cosh X - \cos X)}{X^2 (\cosh X - \cos X) + 3(\gamma - 1) X (\sinh X - \sin X)} \right] \left(\frac{f_D}{f} \right)^2 \quad (1.34)$$

avec

$$X = R_0 \left(\frac{2\omega}{D_G} \right)^{1/2} \quad (1.35)$$

et

$$D_G = \frac{\kappa_G}{\rho_G c_{pG}}. \quad (1.36)$$

D_G , κ_G , ρ_G et c_{pG} sont respectivement la diffusivité thermique, la conductivité thermique, la masse volumique et la capacité calorifique volumique à pression constante du gaz ;

- les pertes par rayonnement d_{ray} , i.e. la bulle de gaz, en oscillant, génère une onde qui se propage dans le liquide à la vitesse c_L ,

$$d_{ray} = \frac{\omega R_0}{c_L}; \quad (1.37)$$

- les pertes d'origine visqueuse d_{visc} dues aux forces de viscosité à l'interface liquide/gaz,

$$d_{visc} = \frac{4\eta_L}{\rho_L \omega R_0^2}. \quad (1.38)$$

La constante d'amortissement d et ses différentes contributions d_{th} , d_{rad} et d_{visc} peuvent être calculées en suivant la procédure proposée par Eller [ELL 70] :

- fixer la valeur des paramètres physiques P_0 , ρ_L , c_L , η_L , γ et D_G ,
- choisir la valeur du rayon de la bulle R_0 et de la fréquence de l'onde acoustique f ,
- calculer successivement X , d_{th} , ς , d_{rad} , d_{visc} et d .

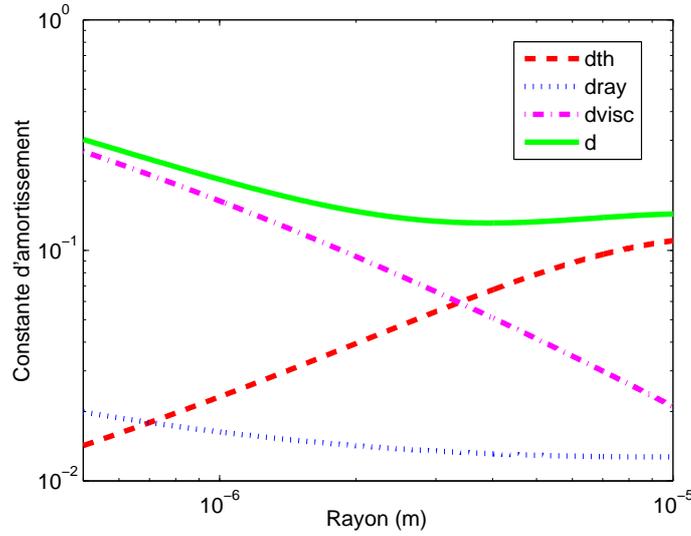


FIG. 1.2 – Evolution des constantes d'amortissement en fonction du rayon

Le figure 1.2 représente l'évolution de la constante d'amortissement et de ses différentes contributions en fonction du rayon $R_0 \in [0,5 - 10 \mu m]$. Les constantes d'amortissement sont calculées avec $f = f_D$ pour chaque rayon, ce qui nécessite la résolution de l'équation (1.32) sur l'intervalle $[0,5 - 10 \mu m]$. La contribution des pertes visqueuses diminue lorsque le rayon de la bulle augmente ; inversement celle des pertes d'origine thermique augmente. L'amortissement dû au rayonnement est faible et reste relativement constant sur l'intervalle étudié. Ainsi pour des bulles de rayon inférieur à $3,5 \mu m$, les pertes d'origine visqueuse sont la principale cause d'amortissement alors que l'amortissement thermique est prépondérant pour des bulles de rayon supérieur à $3,5 \mu m$. Compte tenu de la faible valeur de la constante d'amortissement d (comprise entre 0,1 et 0,2 (sans unité) sur la plage $1 - 10 \mu m$), la fréquence de résonance peut être considérée comme égale à la fréquence propre f_D .

1.2.2 Sections efficaces

Lorsqu'une bulle de gaz entourée d'un fluide est soumise à un champ acoustique incident, elle se met à osciller et se comporte alors comme une source secondaire, i.e. elle produit un champ acoustique qui se superpose au champ incident. Quand la fréquence de ce dernier est proche de la fréquence de résonance de la bulle, l'absorption et la diffraction par la bulle sont très importantes. L'efficacité de l'interaction entre le champ acoustique incident et la bulle peut être décrite en termes de sections efficaces [MED 77] :

- la section efficace de diffusion σ_s (scattering cross-section) correspond au rapport de la puissance

totale diffractée par la bulle Π_s à l'intensité de l'onde incidente I_0 ,

$$\sigma_s = \frac{\Pi_s}{I_0} = \frac{4\pi R^2}{\left[\left(\frac{f_{res}}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + d^2}; \quad (1.39)$$

– la section efficace d'absorption σ_a (absorption cross-section) décrit la portion d'énergie qui est convertie en chaleur,

$$\sigma_a = \sigma_s \left(\frac{d}{d_{ray}} - 1\right) = 4\pi R^2 \frac{\frac{d}{d_{ray}} - 1}{\left[\left(\frac{f_{res}}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + d^2}; \quad (1.40)$$

– la section efficace d'extinction σ_e (extinction cross-section) représente l'énergie totale perdue par un faisceau ultrasonore à travers les phénomènes de diffraction et d'absorption,

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a = 4\pi R^2 \frac{\frac{d}{d_{ray}}}{\left[\left(\frac{f_{res}}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + d^2}. \quad (1.41)$$

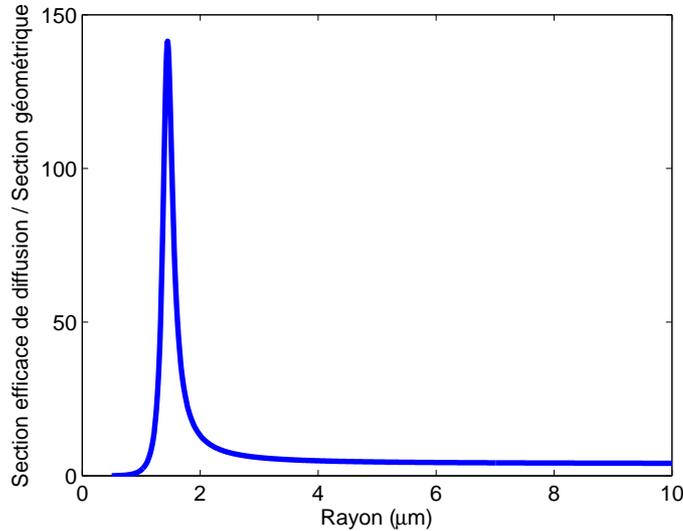


FIG. 1.3 – Evolution de la section efficace de diffusion normalisée par la section géométrique en fonction du rayon pour une fréquence incidente de 2,5 MHz

La figure 1.3 donne l'évolution du rapport de la section efficace de diffusion σ_s à 2,5 MHz à la section géométrique de la bulle, soit πR^2 , en fonction du rayon. La fréquence de l'onde incidente est 2,5 MHz, ce qui correspond à la résonance d'une bulle de rayon $R_{res} = 1,44 \mu m$. La section efficace de diffusion vaut plus de cent fois la section géométrique de la bulle à la résonance ce qui signifie que le phénomène de diffraction est très important quand la bulle résonne. Pour des rayons supérieurs à R_{res} , le rapport devient constant, i.e. la section efficace de diffusion devient proportionnelle à la section géométrique de la bulle (le facteur de proportionnalité vaut quatre). Ainsi, en dehors du phénomène de

résonance, plus la bulle est grosse, plus sa section efficace de diffusion est importante (comme c'est le cas pour tout matériau rigide).

Sur la figure 1.4 est présentée l'évolution des sections efficaces d'extinction, d'absorption et de

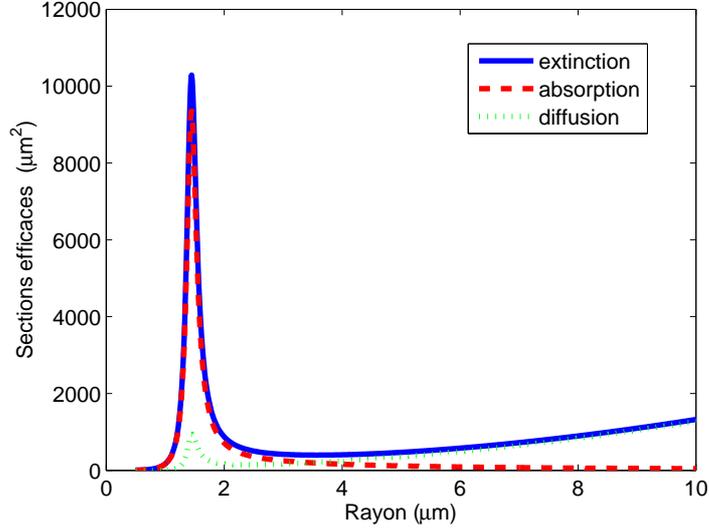


FIG. 1.4 – Evolution des sections efficaces d'extinction, d'absorption et de diffusion en fonction du rayon pour une fréquence incidente de 2,5 MHz

diffusion en fonction du rayon. La fréquence incidente est encore 2,5 MHz. Dans le cas de la section efficace d'absorption σ_a , on observe uniquement le phénomène de résonance : il y a une très forte absorption lorsqu'une bulle est excitée par une onde incidente de fréquence proche ou égale à sa fréquence de résonance. Pour la section efficace de diffusion σ_s , on retrouve ce phénomène de résonance, moins marqué, mais on observe également que la section efficace de diffusion augmente ensuite pour des rayons supérieurs au rayon correspondant à la résonance.

La figure 1.5 correspond à l'évolution de la section efficace de diffusion d'une bulle d'air dans l'eau en fonction du rayon de la bulle. Les courbes ont été tracées pour trois fréquences différentes 2,5 MHz, 3 MHz et 5 MHz correspondant aux fréquences de résonance f_{res} de bulles de rayon R_{res} respectifs 1,44 μm , 1,24 μm et 0,82 μm . On retrouve ce phénomène de résonance et on observe également que pour des bulles de rayon très supérieur à R_{res} , les valeurs de σ_s deviennent très importantes, voire plus importantes que la valeur à la résonance : par exemple pour $f_{res} = 5$ MHz, $\sigma_s(R \geq 4 \mu m) > \sigma_s(R_{res} = 0,82 \mu m)$.

L'évolution des sections efficaces de diffusion en fonction de la fréquence pour trois bulles de taille différente est représentée sur la figure 1.6. Les rayons des trois bulles sont 2 μm , 3 μm et 5 μm et leurs fréquences de résonance respectives sont 1,697 MHz, 1,072 MHz et 0,617 MHz. On s'aperçoit que le pic de résonance s'élargit quand le rayon diminue. On peut également observer sur les figures 1.5 et 1.6 que plus le rayon de la bulle est grand, ou de manière équivalente plus la fréquence de résonance de la bulle est faible, plus la valeur de la section efficace de diffusion à la résonance est élevée, traduisant un important phénomène de diffraction de l'onde acoustique par la bulle.

1.2.3 Développement au second ordre

Afin de détecter les microbulles par imagerie harmonique (émission à ω et réception à 2ω , méthode permettant de n'imager que les cibles présentant une réponse non linéaire, les nuages de bulles et les tissus imprégnés de bulles en particulier), Miller a obtenu une expression analytique des composantes

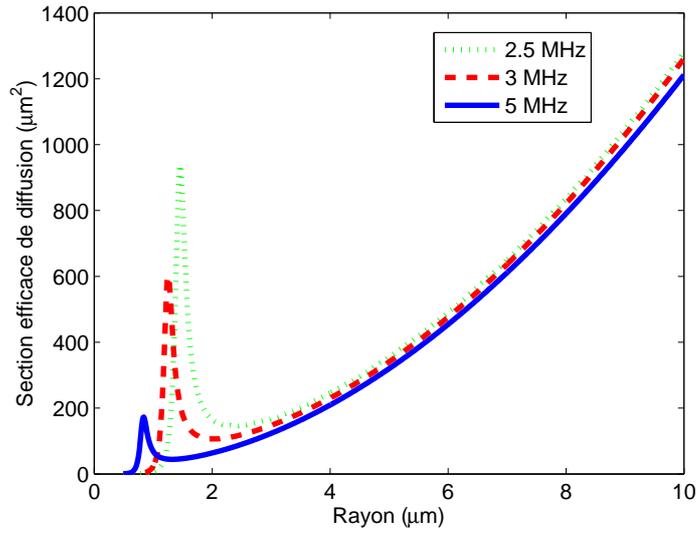


FIG. 1.5 – Evolution de la section efficace de diffusion en fonction du rayon pour diverses fréquences

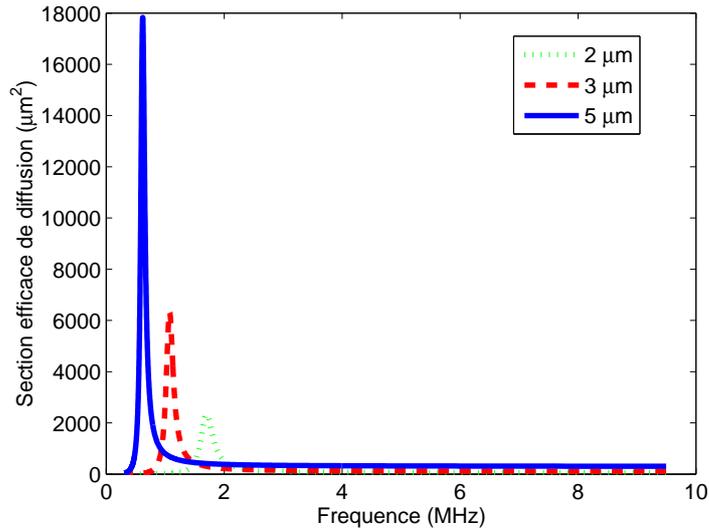


FIG. 1.6 – Evolution de la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence pour divers rayons

à ω et à 2ω de la réponse d'une microbulle soumise à une excitation à ω [MIL 81]. Le point de départ est le développement à l'ordre deux de l'équation (1.21) incluant la tension de surface et la viscosité en écrivant le rayon d'une microbulle sous la forme $R = R_0(1 + x)$ avec $x \ll 1$. On obtient alors l'équation suivante en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à deux en x

$$\begin{aligned}
 \rho_L R_0^2 (1+x) \ddot{x} + \frac{3}{2} \rho_L R_0^2 \dot{x}^2 &= \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left[1 - 3\zeta x + \frac{3\zeta(3\zeta+1)}{2} x^2 \right] \\
 &- \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} (1-x+x^2) \right) \\
 &- 4\eta_L (\dot{x} - \dot{x}x) + P \sin(\omega t),
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

ou encore

$$(1+x)\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{4\eta_L}{\rho_L R_0^2}(1-x)\dot{x} + \frac{1}{\rho_L R_0^2} \left(3\zeta \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0} \right) x - \frac{1}{\rho_L R_0^2} \left(\frac{3\zeta(3\zeta+1)}{2} \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{R_0} \right) x^2 = \frac{P}{\rho_L R_0^2} \sin(\omega t). \quad (1.43)$$

Une solution explicite est recherchée sous la forme $x = X_0 + X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + X_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$. Afin de calculer les amplitudes X_0 , X_1 et X_2 , x est remplacé par l'expression ci-dessus dans l'équation (1.42) et on fait l'hypothèse que $1 > X_1 > X_0, X_2$. Le calcul est mené en ne conservant que les termes faisant apparaître X_1, X_1^2, X_0 et X_2 (termes d'ordre deux au maximum). On obtient ainsi

$$X_0 = \frac{1}{2} X_1^2 \frac{\rho R_0^2 \left(\frac{1}{2} \omega^2 - \omega_0^2 \right) + \left(3\zeta - \frac{3\zeta(3\zeta+1)}{2} \right) \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right)}{\frac{2\sigma}{R_0} - 3\gamma \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right)}, \quad (1.44)$$

$$X_1 = \frac{P}{\rho_L \omega_0^2 R_0^2} \chi_1, \quad (1.45)$$

$$X_2 = \frac{1}{2} X_1^2 Y \chi_2, \quad (1.46)$$

avec

$$\Omega = \omega / \omega_0, \quad (1.47)$$

$$\omega_0^2 = \frac{3\zeta(P_0 + 2\sigma/R_0) - 2\sigma/R_0}{\rho_L R_0^2}, \quad (1.48)$$

$$\chi_1 = \left[(1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 d_{visc}^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.49)$$

$$\chi_2 = \left[(1 - 4\Omega^2)^2 + 4\Omega^2 d_{visc}^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.50)$$

$$Y = \left[\left(\frac{5}{2} \Omega^2 + \frac{3\zeta(3\zeta+1)(P_0 + 2\sigma/R_0) - 4\sigma/R_0}{2\rho_L \omega_0^2 R_0^2} \right)^2 + \Omega^2 d_{visc}^2 \right]^{1/2}. \quad (1.51)$$

ω_0 est la pulsation propre associée à la fréquence f_D donnée par l'équation (1.30). Compte tenu des travaux de Devin, Eller et Medwin, il est préférable d'ajouter les termes d'amortissement d_{th} et d_{rad} et donc de remplacer d_{visc} par d dans les équations (1.49), (1.50) et (1.51).

La pression émise par une sphère pulsante de rayon a , très inférieure à la longueur d'onde, à la distance r de la sphère est donnée par $p \approx \frac{\rho}{4\pi r} S'(t - r/c)$ [MOR 68] avec (ρ, c) les caractéristiques du milieu de propagation et $S'(t)$ la dérivée du débit de fluide S mis en mouvement par le déplacement de la surface de la sphère, soit $S(t) = 4\pi a^2 \dot{R}$, \dot{R} étant la vitesse de déplacement de la surface de la sphère. La sphère pulsante de rayon a correspond ici à une microbulle de rayon initial R_0 ; le milieu étant supposé incompressible, le terme de retard r/c n'est pas pris en compte et l'amplitude de la pression diffractée à la distance r par la microbulle s'écrit alors par analogie $P_s = \rho_L R_0^3 \frac{\ddot{x}}{r}$. En prenant $\ddot{x} = \omega^2 X_1$ puis $\ddot{x} = 4\omega^2 X_2$, on obtient l'expression de la réponse de la bulle à ω puis à 2ω

$$P_{s1} = \Omega^2 P \chi_1 \frac{R_0}{r}, \quad (1.52)$$

$$P_{s2} = \frac{2P^2}{\rho_L \omega_0^2 R_0^2} \Omega^2 \chi_1^2 Y \chi_2 \frac{R_0}{r}. \quad (1.53)$$

La figure 1.7 montre un exemple de l'évolution de P_{s1} et P_{s2} en fonction du rayon de la bulle R_0 pour une distance $r = 6,3 \text{ mm}$. La fréquence de l'onde incidente est $f = 1,64 \text{ MHz}$ et son amplitude

vaut $P = 0,2 \text{ bar}$. La pression diffractée par la bulle à la fréquence fondamentale $f = 1,64 \text{ MHz}$ est représentée en trait plein et la pression diffractée au premier harmonique, soit $2f = 3,28 \text{ MHz}$, en traits pointillés. Il y a dans les deux cas une résonance marquée pour $R_0 \approx 2 \mu\text{m}$, ce qui est cohérent avec l'équation (1.30) qui donne une fréquence propre de $f = 1,64 \text{ MHz}$ pour une bulle de rayon $2,058 \mu\text{m}$. L'amplitude de la pression diffractée à la résonance est diminuée de moitié quand on passe de f à $2f$. Pour des bulles de rayons supérieurs à la résonance, soit $\Omega \gg 1$, P_{s1} évolue comme $P \frac{R_0}{r}$ alors que P_{s2} se comporte comme $\frac{P^2}{\rho \omega^2} \frac{1}{R_0 r}$.

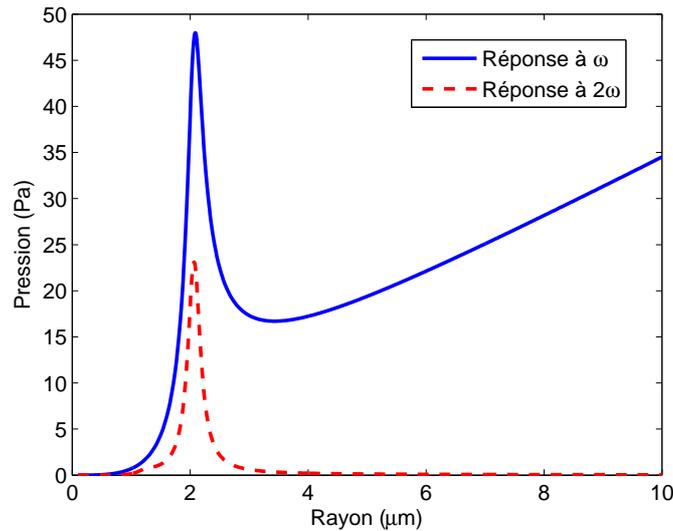


FIG. 1.7 – Amplitude de la pression diffractée aux fréquences f et $2f$ pour une onde incidente de fréquence $f = 1,64 \text{ MHz}$

Cette première partie de l'étude bibliographique permet de poser les bases théoriques (équation de Rayleigh-Plesset, modèle équivalent d'oscillateur harmonique) et d'introduire les grandeurs acoustiques utilisées pour décrire le comportement d'une bulle de gaz isolée dans un milieu liquide. Le recensement de ces modèles peut servir de base dans le cadre du programme de recherche en cours entre le LMA et une PME innovante, lié à la détection et à la caractérisation par voie ultrasonore de noyaux gazeux pour la prévention des accidents de désaturation survenant lors de la remontée des plongeurs.

Dans la suite, nous nous référerons à ce chapitre afin de comparer les résultats obtenus avec MANLAB (chapitre 4) et COMSOL (chapitre 5) dans le cas d'une bulle de gaz immergée dans un liquide.

Chapitre 2

Comportement d'un agent de contraste

L'utilisation de bulles de gaz comme agents de contraste en imagerie médicale ultrasonore impose une limitation de la taille des bulles injectées dans le corps humain via le système circulatoire sanguin : le diamètre des bulles ne doit pas excéder celui des capillaires pulmonaires, soit environ $8 \mu\text{m}$, pour que les agents de contraste puissent circuler librement dans les vaisseaux sanguins et atteindre la zone d'intérêt pour l'imagerie. Cependant, la durée de vie d'une bulle de gaz est limitée par le temps de dissolution du gaz dans le sang : la dissolution d'une bulle d'air de rayon inférieur à $10 \mu\text{m}$ s'effectue en moins d'une seconde [JON 91]. Ainsi une bulle de gaz suffisamment petite pour traverser les capillaires pulmonaires n'existera pas assez longtemps pour être détectée par le système d'imagerie. La solution technologique envisagée pour résoudre ce problème est l'encapsulation des bulles de gaz : les agents de contraste se présentent alors comme des cavités sphériques remplies de gaz et isolées du milieu liquide environnant par une coque réalisée à l'aide de matériaux biocompatibles (protéines, lipides, polymères...). Cette enveloppe agit comme une barrière qui limite la diffusion du gaz vers l'extérieur de la microbulle et diminue la tension de surface. La microbulle est stabilisée mais sa compressibilité, et par conséquent sa réponse acoustique, est modifiée notablement. Ce chapitre présente les principaux modèles proposés dans la littérature afin de rendre compte du comportement d'un agent de contraste soumis à une excitation acoustique.

2.1 Modèle de N. de Jong

N. de Jong s'est appuyé sur les travaux de Medwin présentés au paragraphe 1.2 pour développer son modèle. Intuitivement, la présence d'une couche protectrice autour de la bulle de gaz s'interprète comme une augmentation de la rigidité du système. Ainsi, des considérations énergétiques ont conduit de Jong à traduire l'ajout de cette couche par un terme supplémentaire dans l'expression de la pulsation propre [JON 92]

$$\omega_J^2 = \omega_D^2 + \frac{8\pi S_e}{m} \quad (2.1)$$

avec $\omega_D = 2\pi f_D$ la pulsation propre d'une bulle nue selon Devin (cf. équation (1.30)), $m = 4\pi R_0^3 \rho_L$ la masse effective du système bulle nue - liquide environnant donnée par Medwin et S_e un coefficient traduisant la rigidité du système due à la présence de la coque. Ce coefficient est relié au module d'Young E_S et au coefficient de Poisson ν_S du matériau constituant la coque par [JON 92]

$$S_e = \frac{e_s E_S}{1 - \nu_S} \quad (2.2)$$

où e_S est l'épaisseur de la coque. Dans ce modèle, le carré de la pulsation propre varie linéairement avec le produit $e_S E_S$ de l'épaisseur par le module d'Young de la coque

$$\omega_J^2 = \omega_D^2 + ae_S E_S, \quad (2.3)$$

$$\text{où } a = \frac{8\pi}{(1 - \nu_S)m}.$$

N. de Jong a également introduit un terme d'amortissement supplémentaire pour tenir compte des frottements visqueux au sein de la coque ("frictional force", viscosité interne) [JON 93]

$$d_{fri} = \frac{S_f}{m\omega} \quad (2.4)$$

où S_f est le coefficient d'amortissement due à la dissipation visqueuse au sein de la coque. L'amortissement total est donc décrit par $d = d_{th} + d_{rad} + d_{visc} + d_{fri}$.

La coque est donc considérée comme un matériau solide viscoélastique et les deux paramètres du modèle de N. de Jong sont S_e (lié à l'élasticité de la coque) et S_f (lié à la viscosité de la coque). Suite aux modifications des expressions de la pulsation propre et de la constante d'amortissement, les sections efficaces de diffusion, d'absorption et d'extinction vont permettre de décrire le comportement d'un agent de contraste soumis à une onde acoustique incidente. S_e et S_f ont été déterminés par ajustement entre courbes théoriques et mesures expérimentales dans le cas de l'Albunex® [JON 93]: $S_e = 8 \text{ N.m}^{-1}$ et $S_f = 4.10^{-6} \text{ N.s.m}^{-1}$. L'Albunex® est produit par sonification d'une solution aqueuse d'albumine humaine. Les microbulles d'air encapsulées par de l'albumine ainsi créées ont un diamètre moyen de $3,8 \mu\text{m}$ (95% des microbulles ont un diamètre inférieur à $10 \mu\text{m}$) et l'épaisseur de l'enveloppe constituée d'albumine est de l'ordre de 20 nm .

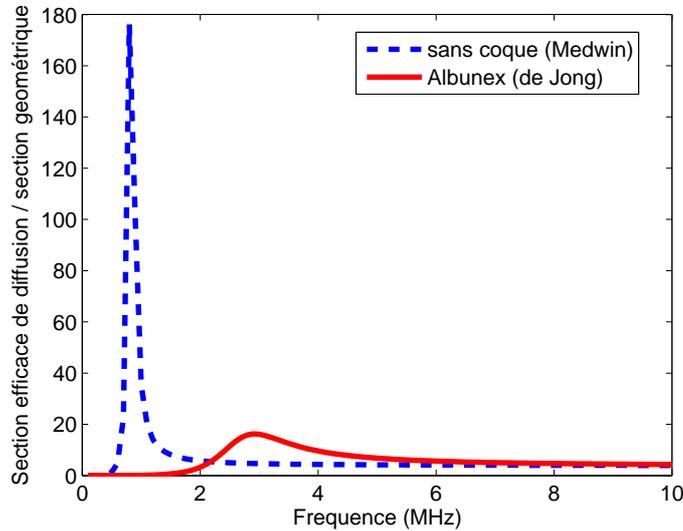


FIG. 2.1 – Section efficace de diffusion rapportée à la section géométrique pour une bulle d'air et une bulle type Albunex de même rayon $R_0 = 3,8 \mu\text{m}$

Sur la figure 2.1 est représentée l'évolution de la section efficace de diffusion normalisée par la section géométrique, soit le rapport $\frac{\sigma_s}{\pi R_0^2}$, en fonction de la fréquence pour deux microbulles. Le rayon des bulles est identique et vaut $R_0 = 3,8 \mu\text{m}$ (rayon moyen de l'Albunex®). La première bulle est une bulle d'air de fréquence de résonance $0,826 \text{ MHz}$ (équation (1.30)); la deuxième bulle est une bulle d'Albunex® de fréquence de résonance $2,72 \text{ MHz}$ (équation (2.1)). Dans le cas de l'Albunex, la

présence de la coque modifie les propriétés acoustiques de la bulle : la fréquence de résonance est décalée vers les hautes fréquences ; l'amplitude de la section efficace de diffusion à la résonance est nettement réduite et le pic de résonance s'élargit. Par ailleurs, l'épaisseur de la coque d'albumine restant constante quel que soit le rayon de la microbulle, la modification des propriétés acoustiques dépend fortement du rayon de la bulle. Comme le montre la figure 2.2, plus la microbulle est petite, plus l'influence de la coque est significative : on tend vers le comportement d'une sphère rigide.

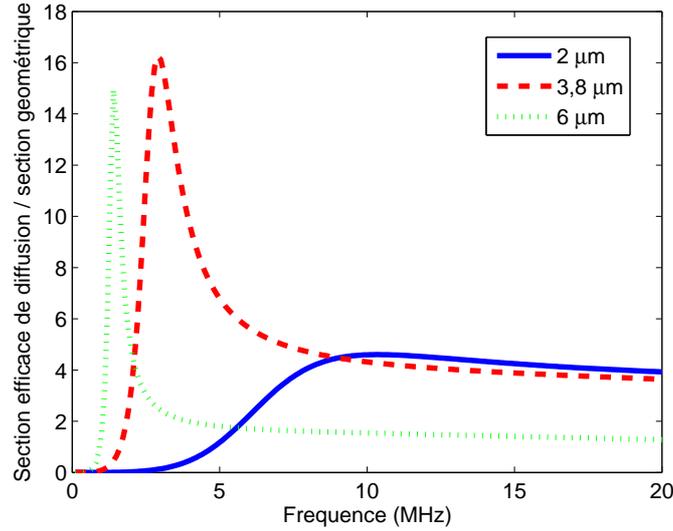


FIG. 2.2 – Section efficace de diffusion rapportée à la section géométrique pour des microbulles d'Albunex de rayons différents

2.2 Modèle de Church

La figure 2.3 représente le système étudié par Church dans le but de modéliser l'Albunex [CHU 95] : il s'agit d'une cavité sphérique contenant un gaz (noté G) entourée par une enveloppe solide (notée S), le tout étant immergé dans un fluide (noté L) homogène d'étendue infinie. L'interface gaz/solide est notée 1 et l'interface solide/fluide 2. $R_1(t)$ (respectivement $R_2(t)$) est le rayon de l'interface 1 (respectivement interface 2), $\dot{R}_1 = \frac{dR_1}{dt}$ (respectivement $\dot{R}_2(t) = \frac{dR_2}{dt}$) est la vitesse de déplacement de l'interface 1 (respectivement interface 2). Le comportement du gaz est supposé polytropique (exposant polytropique ς), le milieu fluide L est supposé newtonien incompressible (masse volumique ρ_L , viscosité dynamique η_L) et le matériau solide constituant l'enveloppe S est supposé incompressible (masse volumique ρ_S) et viscoélastique (modèle de Kelvin-Voigt). Le comportement du matériau peut être décrit par [CHU 95]

$$\tau_{s,rr} = 2\mu_s \frac{\partial u}{\partial r} + 2\eta_s \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (2.5)$$

où $\tau_{s,rr}$ est la composante radiale du tenseur des contraintes de cisaillement, u le déplacement radial et v la vitesse radiale dans l'enveloppe solide, $\mu_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$ le module de cisaillement et η_s le coefficient de viscosité du matériau. Les coefficients de tension de surface aux interfaces sont notés σ_1 pour l'interface gaz/solide et σ_2 pour l'interface solide/fluide.

Church a obtenu l'équation du mouvement d'un agent de contraste en écrivant la conservation globale de la composante radiale de la quantité de mouvement, l'hypothèse de symétrie sphérique du système

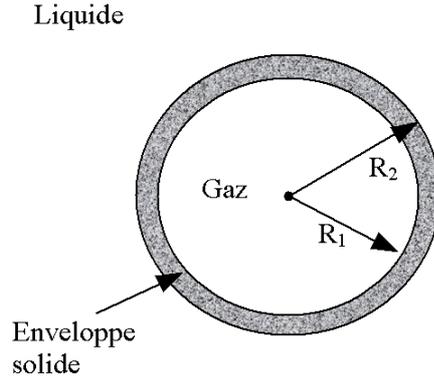


FIG. 2.3 – Schéma d'un agent de contraste

permettant de se restreindre aux oscillations radiales de l'agent de contraste. Les mouvements de la bulle (variations de R_1) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \rho_S R_1 \ddot{R}_1 \left[1 + \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \frac{R_1}{R_2} \right] &+ \rho_S \dot{R}_1^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \frac{4R_2^3 - R_1^3}{2R_2^3} \frac{R_1}{R_2} \right] \\
 &= p_G(R_{10}) \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3\kappa} - p_\infty(t) - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} \\
 &- 4 \frac{\dot{R}_1}{R_1} \left(\frac{V_S \eta_S + R_1^3 \eta_L}{R_2^3} \right) - 4 \frac{V_S \mu_S}{R_2^3} \left(1 - \frac{R_{e1}}{R_1} \right), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

avec R_{10} le rayon de l'interface 1 à l'instant $t = 0$, $p_G(R_{10})$ la pression du gaz à l'interface 1 à $t = 0$, $p_\infty(t)$ la pression dans le liquide à l'infini, $V_S = R_2^3 - R_1^3$ et R_{e1} la position d'équilibre de l'interface 1.

Il a été observé dans le cas de l'Albunex® [CHU 95] que l'enveloppe solide constituée d'albumine est perméable au gaz et par conséquent $p_G(R_{10}) = P_0$, où P_0 est la pression dans le liquide à l'infini à $t = 0$.

La pression $p_\infty(t)$ dans le liquide à l'infini est la somme de la pression hydrostatique P_0 et de la pression acoustique $P_{ac}(t)$.

L'incompressibilité de l'enveloppe solide S se traduit par la conservation de son volume. Or le volume de S à l'instant t correspond à $\frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$, on peut donc écrire

$$R_2^3 - R_1^3 = R_{02}^3 - R_{01}^3 = \text{constante} \quad (2.7)$$

avec R_{10} et R_{20} les rayons à $t = 0$ des interfaces 1 et 2.

Lorsque les conditions initiales $R_1 = R_{10}$, $\dot{R}_1 = 0$, $\ddot{R}_1 = 0$ et $R_2 = R_{20}$ sont injectées dans l'équation (2.6), on obtient

$$R_{e1} = R_{10} \left(1 + \left(\frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right) \frac{R_{02}^3}{4\mu_S V_S} \right) = R_{10} (1 + Z) \quad (2.8)$$

L'équation (2.6) est l'équation de Rayleigh-Plesset pour une bulle de gaz séparée du fluide par une enveloppe solide viscoélastique. Par rapport à l'équation (1.21) décrivant une bulle de gaz sans coque, il apparaît des termes supplémentaires en facteur des termes en \ddot{R}_1 et \dot{R}_1^2 . Ces termes supplémentaires sont proportionnels à la différence entre les masses volumiques des milieux liquide L et solide S : si $\rho_S > \rho_L$, l'accélération \ddot{R}_1 est réduite et la non linéarité introduite par le terme \dot{R}_1^2 diminue (et inversement si $\rho_S < \rho_L$). Le poids de la non linéarité est également influencé par le rapport du volume de l'enveloppe solide sur le volume total de l'agent de contraste.

Le modèle de Church a été adapté par Allen et al. [ALL 02] pour des agents de contraste à coque fluide : le milieu constituant la coque est considéré comme un fluide visqueux newtonien, ce qui revient à poser $\mu_S = 0$ dans l'équation (2.6). Les résultats théoriques issus de la résolution numérique de cette équation ont été comparés avec les observations expérimentales optiques et acoustiques d'agents de contraste à coque fluide développés par ImaRx Corporation [ALL 02] [MAY 02]. Ces agents sont constitués de perfluorocarbone entouré par une couche lipidique (triacétine) d'épaisseur 500 nm (observation au microscope électronique à balayage [MAY 02]) assimilée à une coque fluide de masse volumique $\rho_S = 1,15.10^3 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité $\eta_S = 28.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ (triacétine). Le modèle a permis de prédire de manière satisfaisante l'expansion radiale maximale de ces agents de contraste.

2.2.1 Oscillations de faible amplitude

En s'inspirant du travail de Miller [MIL 81], Church a obtenu une expression analytique des rayons R_1 et R_2 lorsque le système est soumis à une onde acoustique [CHU 95]. En considérant que la longueur d'onde de l'onde acoustique est très supérieure au rayon moyen de l'agent de contraste (une bulle résonne en effet à des fréquences correspondant à une longueur d'onde dans le liquide 500 à 1000 fois plus importantes que leur rayon) et que les oscillations de l'agent de contraste sont de faible amplitude, on pose $p_\infty(t) = P_0 - P \sin(\omega t)$, $R_1 = R_{10}(1 + x)$ et $R_2 = R_{20}(1 + y)$ où P est l'amplitude de l'onde acoustique et $x, y \ll 1$.

Développement au premier ordre

L'hypothèse d'incompressibilité de l'enveloppe solide S permet de relier x et y . L'équation (2.7) permet d'écrire le rayon de l'interface 2 sous la forme

$$R_2 = (R_1^3 + R_{02}^3 - R_{01}^3)^{1/3}. \quad (2.9)$$

En remplaçant R_1 et R_2 respectivement par $R_{10}(1 + x)$ et $R_{20}(1 + y)$ et en réalisant le développement au premier ordre de l'expression ci-dessus, on obtient

$$y = \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} x. \quad (2.10)$$

La linéarisation de l'équation (2.6) conduit à l'équation d'un oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{x} + \delta_v \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P}{\rho_S R_{10}^2 \alpha} \sin(\omega t), \quad (2.11)$$

avec

$$\alpha = \left[1 + \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \frac{R_{10}}{R_{20}} \right], \quad (2.12)$$

$$\delta_v = \frac{4}{\rho_S R_{10}^2 \alpha} \left[\frac{V_S \eta_S + R_{01}^3 \eta_L}{R_{02}^3} \right], \quad (2.13)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho_S R_{10}^2 \alpha} \left\{ 3\zeta P_0 - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{01}^3}{R_{02}^4} + 4 \frac{V_S \mu_S}{R_{02}^3} \left[1 + Z \left(1 + 3 \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} \right) \right] \right\}, \quad (2.14)$$

Le module de cisaillement μ_S apparaît dans l'expression de la pulsation propre ω_0 alors que le coefficient de viscosité η_S intervient dans le terme d'amortissement, au côté de la viscosité du liquide η_L . Cela confirme l'intuition de de Jong qui, à partir du modèle d'oscillateur harmonique amorti de Devin pour une bulle de gaz, a ajouté le terme S_e lié à l'élasticité de la coque dans l'expression de la pulsation propre et le terme S_f lié à la viscosité de la coque dans l'expression de la constante d'amortissement.

La pulsation de résonance a pour expression

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta_v^2}{2}}. \quad (2.15)$$

Elle est d'autant plus proche de la pulsation propre que l'amortissement est faible.

Développement au deuxième ordre

En réalisant le développement à l'ordre deux de l'expression (2.9), on obtient

$$y = \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} \left[x + \left(1 - \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} \right) x^2 \right]. \quad (2.16)$$

Le développement de Taylor à l'ordre deux de l'équation (2.6) conduit à l'équation (2.17) pour une bulle encapsulée, homologue de l'équation (1.43) obtenue dans le cas de la même bulle sans coque,

$$[1 + (1 + \alpha_{NL})x] \ddot{x} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\alpha_{NL}}{3} \right) \dot{x}^2 + (\delta_v - \delta_{vNL}x)\dot{x} + \omega_0^2 x - \tau_{NL}^2 x^2 = \frac{P}{\rho_S R_{10}^2 \alpha} \sin(\omega t), \quad (2.17)$$

avec

$$\alpha_{NL} = \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \frac{V_S R_{10}}{\alpha R_{02}^4}, \quad (2.18)$$

$$\delta_{vNL} = \delta_v \left(1 + 3 \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} \right) - \frac{12 R_{10} \eta_L}{\rho_S R_{02}^3 \alpha}, \quad (2.19)$$

et

$$\tau_{NL}^2 = \frac{\frac{3\zeta(3\zeta+1)}{2} P_0 - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{01}^3 (R_{01}^3 - V_S)}{R_{02}^7} + 4 \frac{V_S \mu_S}{R_{02}^3} \left[1 + 3 \frac{R_{01}^3}{R_{02}^3} + Z \left(1 + 9 \frac{R_{01}^6}{R_{02}^6} \right) \right]}{\rho_S R_{10}^2 \alpha}. \quad (2.20)$$

La solution est recherchée sous la forme

$$x = X_0 + X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + X_2 \sin(2\omega t + \varphi_2). \quad (2.21)$$

Les amplitudes X_0 , X_1 et X_2 et les phases φ_1 et φ_2 (représentant le déphasage par rapport à l'onde incidente) sont obtenues en remplaçant x par l'expression ci-dessus dans l'équation linéarisée (2.17). Le calcul est mené en considérant que le fondamental est prépondérant (régime forcé), i.e. $1 > X_1 > X_0 \approx X_2$. On ne conserve donc que les termes faisant apparaître X_1 , X_1^2 , X_0 et X_2 (termes d'ordre deux au maximum). On obtient alors [CHU 95]

$$X_0 = \frac{X_1^2}{2\omega_0^2} \left(\tau_{NL}^2 - \omega^2 \frac{1 - \alpha_{NL}}{2} \right) \quad (2.22)$$

$$X_1 = \frac{P \chi_1}{\rho_S \omega_0^2 R_{10}^2 \alpha} \quad (2.23)$$

$$X_2 = X_1^2 Y \chi_2 \frac{\tau_{NL}^2}{2\omega_0^2} \quad (2.24)$$

$$\varphi_1 = \arctan \left(\frac{\delta \Omega}{\Omega^2 - 1} \right) \quad (2.25)$$

$$\varphi_2 = \arctan \left(\frac{B_r \sin(2\varphi_1) - B_i \cos(2\varphi_1)}{B_r \cos(2\varphi_1) + B_i \sin(2\varphi_1)} \right) \quad (2.26)$$

où

$$\chi_1 = \left[(1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 \delta^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.27)$$

$$\chi_2 = \left[(1 - 4\Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \delta^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.28)$$

$$Y = \left\{ \left[1 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\alpha_{NL}}{2} \right) \Omega_{NL}^2 \right]^2 + \delta_{NL}^2 \Omega_{NL}^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.29)$$

$$B_r = \delta_{NL} \Omega_{NL} (1 - 4\Omega^2) - 2\delta \Omega \left[1 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\alpha_{NL}}{2} \right) \Omega_{NL}^2 \right], \quad (2.30)$$

$$B_i = (1 - 4\Omega^2) \left[1 + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\alpha_{NL}}{2} \right) \Omega_{NL}^2 \right] + 2\delta \delta_{NL} \Omega \Omega_{NL}, \quad (2.31)$$

avec

$$\Omega = \omega / \omega_0, \quad (2.32)$$

$$\Omega_{NL} = \omega / \tau_{NL}, \quad (2.33)$$

$$\delta = \frac{\delta_v}{\omega_0}, \quad (2.34)$$

$$\delta_{NL} = \frac{\delta_{vNL}}{\tau_{NL}}. \quad (2.35)$$

La section efficace de diffusion a été introduite au paragraphe 1.2.2 comme le rapport de la puissance totale diffractée par l'agent de contraste Π_s à l'intensité de l'onde incidente I_0

$$\sigma_s = \frac{\Pi_s}{I_0} \quad (2.36)$$

avec $I_0 = \frac{P^2}{\rho_L c_L}$ et $\Pi_s = 4\pi r^2 I_s$, I_s étant l'intensité de l'onde diffractée par l'agent de contraste. Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, l'agent de contraste peut être considéré comme une source simple (longueur d'onde très supérieure au rayon de la bulle assimilée à une sphère pulsante). Par analogie, la pression diffractée à la distance r par la bulle encapsulée de rayon extérieur R_{20} est [MOR 68]

$$p_s \approx \frac{\rho_L}{4\pi r} S'(t - r/c) \quad (2.37)$$

où $S'(t)$ est la dérivée du débit de fluide mis en mouvement par le déplacement de la surface de la sphère, soit $S(t) = 4\pi R_2^2(t) \dot{R}_2(t)$ ou encore $S(t) = 4\pi R_1^2(t) \dot{R}_1(t)$ (incompressibilité). Dans le cas des oscillations de faible amplitude et en régime harmonique, on peut alors écrire [MOR 68]

$$p_s \approx \frac{\rho_L}{r} R_{10}^3 \ddot{x} \quad (2.38)$$

et

$$I_s = \frac{|p_s|^2}{\rho_L c_L}. \quad (2.39)$$

La section efficace de diffusion s'écrit alors

$$\sigma_s = \frac{4\pi \rho_L^2 R_{10}^6 |\ddot{x}|^2}{P^2}. \quad (2.40)$$

Si l'on considère uniquement la réponse à la fréquence d'excitation f , on obtient

$$\sigma_{s1} = \frac{4\pi \rho_L^2 R_{10}^2 \Omega^4 \chi_1^2}{\alpha^2 \rho_S^2}, \quad (2.41)$$

et si l'on s'intéresse à la réponse à $2f$

$$\sigma_{s2} = \frac{16\pi \rho_L^2 R_{10}^2 \Omega^8 \chi_1^4 \chi_2^2 Y^2 P^2}{(\alpha \rho_S R_{10} \omega_0 \Omega_n)^4}. \quad (2.42)$$

2.2.2 Etude de sensibilité

Les équations du modèle de Church linéarisé ont été implémentées sous MATLAB® afin d'évaluer l'influence des divers paramètres du modèle, en particulier ceux associés à l'enveloppe solide entourant le gaz. Le tableau 2.1 présente les valeurs choisies pour les différents paramètres dans le cas de bulles d'air encapsulées placées dans de l'eau, les mêmes que celles choisies par Church pour modéliser le comportement de l'Albunex [CHU 95].

pression statique	P_0	$1,013.10^5 Pa$
masse volumique du liquide	ρ_L	$998 kg.m^{-3}$
viscosité du liquide	η_L	$10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$
masse volumique du solide	ρ_S	$1100 kg.m^{-3}$
viscosité du solide	η_S	$0,05/1,77/8,00 kg.m^{-1}.s^{-1}$
module de cisaillement	μ_S	$15/88,8/150 MPa$
tension de surface interface gaz/solide	σ_1	$40.10^{-3} N.m^{-1}$
tension de surface interface solide/liquide	σ_2	$5.10^{-3} N.m^{-1}$
tension de surface interface gaz/liquide	σ	$72,75.10^{-3} N.m^{-1}$

TAB. 2.1 – Valeurs des paramètres pour les simulations sous Matlab®

Fréquence propre

La figure 2.4 représente l'évolution de la fréquence propre en fonction du rayon R_1 pour différentes valeurs du module de cisaillement μ_S (15 MPa, 88,8 MPa, 150 MPa). On a utilisé l'équation (2.14) [CHU 95] pour un agent de contraste et l'équation (1.30) [ELL 70] pour une bulle de gaz sans coque en supposant que le gaz se comporte de manière isotherme dans les deux cas, soit $\zeta = 1$. On considère que l'enveloppe solide a une épaisseur constante $e_S = 15 nm$ quel que soit le rayon de la bulle (cas de l'Albunex®). Le rayon R_1 varie entre 0,1 et 20 μm et le rayon R_2 vaut $R_1 + e_S$. On observe que la fréquence propre d'un agent de contraste augmente fortement avec le module de cisaillement de l'enveloppe solide.

Le tableau 2.2 précise quelques valeurs montrant que les modifications induites par la coque sur la fréquence propre sont notables. Ces valeurs ont été obtenues en supposant que le comportement du gaz est isotherme, i.e. $\zeta = 1$. La première ligne du tableau 2.2 correspond aux fréquences propres d'une bulle de gaz sans coque, obtenues à partir de l'équation (1.29) (cf. paragraphe 1.2.1). Il me semble en effet incorrect de prendre l'expression de la fréquence de résonance obtenue par Church, i.e. l'équation (2.14), pour l'appliquer au cas d'une bulle de gaz sans coque. En considérant que $e_S = 0$, $V_S = 0$, $R_{10} = R_{20}$, $\eta_S = 0$, $\mu_S = 0$, $\sigma_1 = \sigma = 72,75.10^{-3} N.m^{-1}$, $\sigma_2 = 0$ et $\rho_S = \rho_L = 998 kg.m^{-3}$, on obtient alors $\omega_0^2 = \frac{1}{\rho_S R_{10}^2 \alpha} \left(3\zeta P_0 - \frac{2\sigma}{R_{10}} \right)$. Cette expression prend en compte de manière incomplète la tension de surface (cf. équations (1.4), (1.17) et (1.30)).

R_1 (μm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sans coque (f_D)	3,891	1,695	1,071	0,781	0,616	0,509	0,434	0,379	0,337	0,303
$\mu_S = 15 MPa$	9,008	3,355	1,907	1,288	0,955	0,751	0,614	0,518	0,446	0,391
$\mu_S = 88,8 MPa$	20,20	7,263	3,999	2,624	1,895	1,455	1,165	0,961	0,812	0,699
$\mu_S = 150 MPa$	26,06	9,336	5,123	3,345	2,411	1,845	1,472	1,212	1,021	0,876

TAB. 2.2 – Fréquences propre en MHz pour différentes valeurs du module de cisaillement

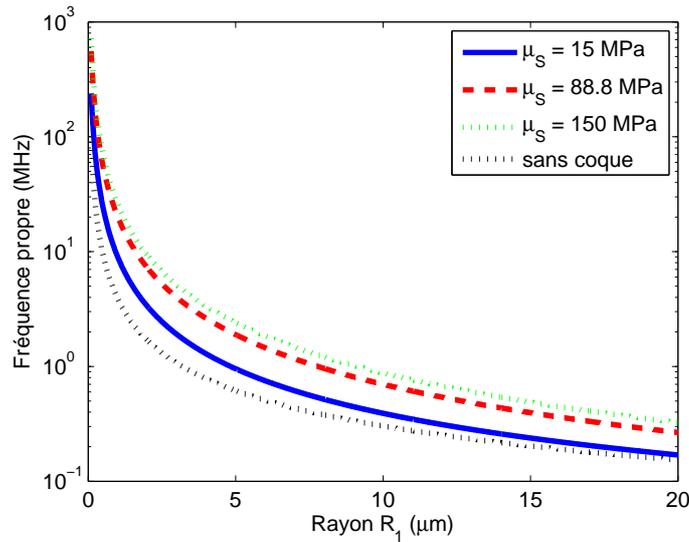


FIG. 2.4 – Evolution de la fréquence propre pour différentes valeurs du module de cisaillement

Fréquence de résonance

La pulsation de résonance ω_{res} est liée à la pulsation propre ω_0 par l'équation $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\delta_v^2}{2}}$, où δ_v représente les pertes d'origine visqueuse dans le liquide et la coque (cf. équation (2.13)). Le tableau 2.3 donne les valeurs de la fréquence de résonance $f_{res} = \omega_{res}/2\pi$ pour différentes valeurs du coefficient de viscosité de la coque η_S , le module de cisaillement de la coque étant fixé à $\mu_S = 88,8 \text{ MPa}$ et la viscosité du liquide à $\eta_L = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ (eau). L'enveloppe solide a une épaisseur constante $e_S = 15 \text{ nm}$.

Le cas $\eta_S = 0 \text{ Pa.s}$ correspond au cas où seule la viscosité de l'eau est prise en compte. Il y a très peu de différence entre la fréquence de résonance et la fréquence propre : l'écart relatif maximal vaut 0,025 % (pour $R_1 = 1 \mu\text{m}$). Cela est cohérent avec les résultats obtenus dans le cas des bulles de gaz sans coque pour lesquelles l'influence de la viscosité de l'eau sur la fréquence propre était négligeable pour des bulles de rayon supérieur à $1 \mu\text{m}$. Lorsque la viscosité de la coque est non nulle ($\eta_S \neq 0 \text{ Pa.s}$), plus la valeur de η_S est grande, plus la fréquence de résonance s'écarte de la fréquence propre, d'autant plus que le rayon est faible : on atteint un écart relatif de 60 % pour une bulle de $1 \mu\text{m}$ lorsque $\eta_S = 8 \text{ Pa.s}$.

Le terme d'amortissement δ_v^2 ne fait pas intervenir le module de cisaillement μ_S alors que la pulsation propre ω_0^2 en dépend de façon linéaire. Pour une valeur donnée de η_S , l'écart entre la pulsation propre et la pulsation de résonance est par conséquent d'autant plus grand que la valeur de μ_S , et donc de ω_0^2 , est faible. Le tableau 2.4 donne l'écart relatif maximal, obtenu lorsque $R_1 = 1 \mu\text{m}$, entre la fréquence de résonance et la fréquence propre, pour l'ensemble des combinaisons μ_S / η_S envisagées.

$R_1 (\mu\text{m})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\eta_S = 0 \text{ Pa.s}$	20,19	7,259	3,997	2,622	1,894	1,454	1,164	0,961	0,812	0,699
$\eta_S = 0,05 \text{ Pa.s}$	20,18	7,257	3,996	2,622	1,894	1,454	1,164	0,961	0,812	0,699
$\eta_S = 1,77 \text{ Pa.s}$	19,69	7,173	3,966	2,608	1,886	1,449	1,160	0,958	0,810	0,697
$\eta_S = 8,00 \text{ Pa.s}$	8,102	5,594	3,427	2,353	1,743	1,360	1,101	0,916	0,779	0,674

TAB. 2.3 – Fréquences de résonance en MHz pour différentes valeurs du coefficient de viscosité

μ_S	$\eta_S = 0 \text{ Pa.s}$	$\eta_S = 0,05 \text{ Pa.s}$	$\eta_S = 1,77 \text{ Pa.s}$	$\eta_S = 8 \text{ Pa.s}$
15 MPa	0,12 %	0,20 %	13,1 %	pas de résonance
88,8 MPa	0,03 %	0,04 %	2,45 %	59,9 %
15 MPa	0,01 %	0,02 %	1,46 %	29,6 %

TAB. 2.4 – *Ecart relatif entre pulsation propre et pulsation de résonance pour un agent de contraste de rayon $R_1 = 1 \mu\text{m}$*

Sections efficaces de diffusion

On s'intéresse maintenant à l'influence de la fréquence incidente f (figures 2.5 et 2.6), du module de cisaillement μ_S (figure 2.7) et de la viscosité η_S (figure 2.8) sur la section efficace de diffusion d'un agent de contraste. Les figures 2.5, 2.7 et 2.8 correspondent à la section efficace à la fréquence f donnée par l'équation (2.41) ; la figure 2.6 correspond à la section efficace à la fréquence $2f$ donnée par l'équation (2.42). La section efficace de diffusion est toujours normalisée par la section géométrique de la microbulle : le rapport $\sigma_s/\pi R_1^2$ est représenté en fonction du rayon R_1 variant entre 0,1 et 20 μm . L'amplitude de l'onde acoustique incidente vaut $P = 30 \text{ kPa}$ (valeur typique en échographie) dans tous les cas et l'épaisseur de l'enveloppe solide est fixée à $e_S = 15 \text{ nm}$ (cas de l'Albunex®).

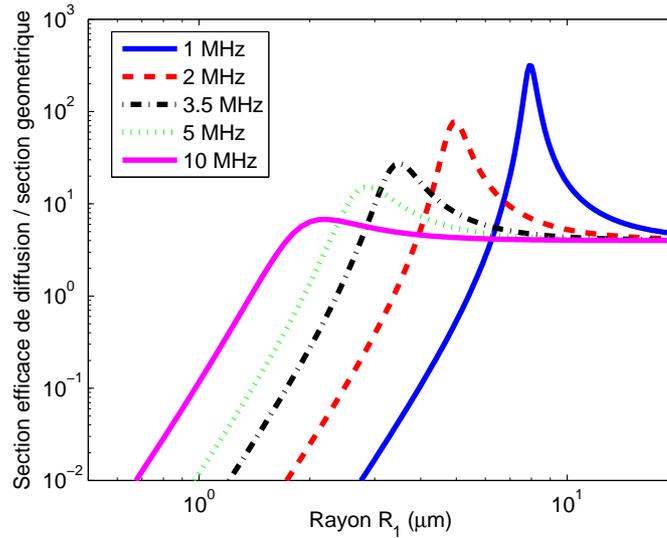
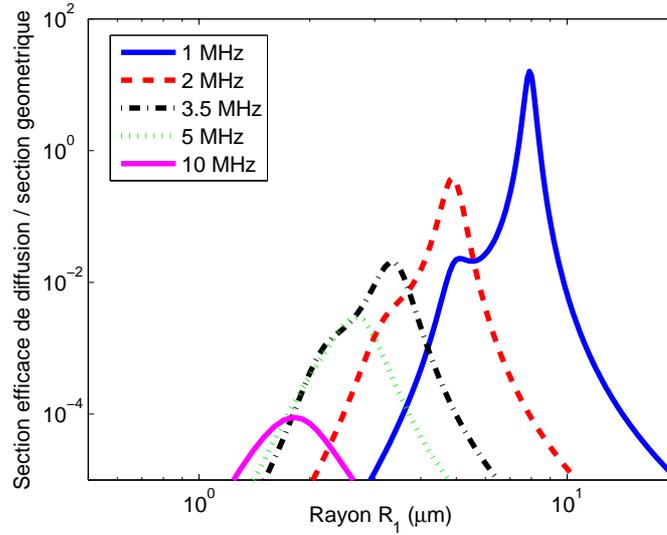


FIG. 2.5 – *Influence de la fréquence f de l'onde incidente sur la réponse à la fréquence f*

Pour les figures 2.5 et 2.6, l'enveloppe solide est caractérisée par les valeurs $\mu_S = 88,8 \text{ MPa}$ et $\eta_S = 1,77 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Church a obtenu ces valeurs à partir des paramètres S_e et S_f estimés par de Jong dans le cas de l'Albunex® [JON 93]. On a choisi pour la fréquence de l'onde incidente $f = 1/2/3,5/5/10 \text{ MHz}$. On peut observer un phénomène de résonance lorsque la fréquence de l'onde incidente correspond à la fréquence de résonance de la bulle. Le tableau 2.5 donne la correspondance fréquence/rayon à la résonance ainsi que le rapport des amplitudes σ_{s2}/σ_{s1} à la résonance.

$f \text{ (MHz)}$	1	2	3,5	5	10
$R_{res} \text{ (}\mu\text{m)}$	7,79	4,82	3,29	2,58	1,61
σ_{s2}/σ_{s1}	5.10^{-2}	5.10^{-3}	7.10^{-4}	2.10^{-5}	1.10^{-5}

TAB. 2.5 – *Rayon et rapport des sections efficaces de diffusion à la résonance*


 FIG. 2.6 – Influence de la fréquence f de l'onde incidente sur la réponse à la fréquence $2f$

Plus la fréquence de résonance est élevée, plus le rayon associé est petit et moins la résonance est marquée (diminution de l'amplitude et élargissement du pic). Dans le modèle de Church, l'épaisseur de l'enveloppe solide est constante et ne varie pas en fonction du rayon de la bulle. En conséquence, plus le rayon de la bulle est petit, plus le rapport entre le volume occupé par l'enveloppe solide et le volume total de la bulle est important : pour $R_{res} = 7,79 \mu m$, l'enveloppe solide occupe 0,58% du volume total alors que pour $R_{res} = 1,61 \mu m$, elle occupe 2,74% du volume total. La proportion reste certes faible mais traduit la rigidification de la bulle, d'où la diminution du phénomène de résonance.

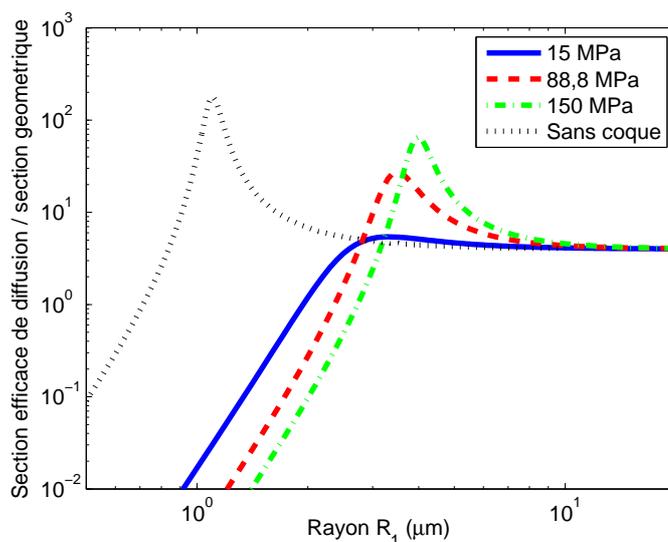
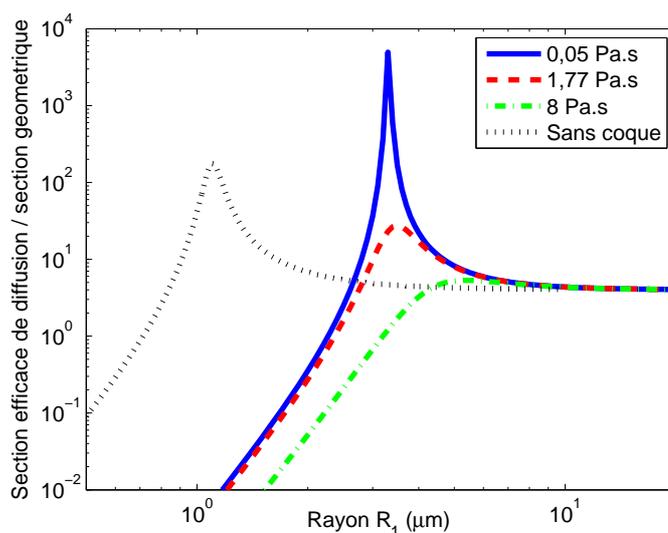
Lorsque la fréquence d'excitation f est fixée, la section efficace de diffusion présente un maximum pour des agents de contraste de rayon R pour lesquels f est la fréquence de résonance. Cette résonance, dite principale, est visible dans la réponse à la fréquence f mais également dans la réponse à la fréquence $2f$. Par ailleurs, un phénomène de résonance secondaire apparaît dans la réponse à la fréquence $2f$: il s'agit de la contribution des agents de contraste pour lesquels $2f$ est la fréquence de résonance (cf. figure 2.6).

Pour les figures 2.7 et 2.8, la fréquence de l'onde incidente est $f = 3,5 \text{ MHz}$. Sur ces figures ont été ajoutées, à titre de comparaison, les courbes obtenues pour une bulle de gaz sans coque, en s'appuyant sur la théorie développée par Miller présentée au paragraphe 1.2.3. A partir des expressions de la pression diffractée par la bulle à la fréquence f (équation (1.52)) et à la fréquence $2f$ (équation (1.53)), on peut obtenir les sections efficaces de diffusion correspondantes (en conservant les notations utilisées au paragraphe 1.2.3)

$$\sigma_{s1} = 4\pi R_0^2 \Omega^4 \chi_1^2, \quad (2.43)$$

$$\sigma_{s2} = \frac{4\pi \Omega^4 \chi_1^4 \chi_2^2 Y^2 P^2}{\rho_L^2 R_0^2 \omega_0^4}. \quad (2.44)$$

L'influence du module de cisaillement est illustrée sur la figure 2.7 pour laquelle la viscosité de l'enveloppe solide vaut $\eta_S = 1,77 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. $f = 3,5 \text{ MHz}$ correspond à la fréquence de résonance d'une bulle de gaz sans coque de rayon $1,09 \mu m$ ou d'un agent de contraste de rayon $1,94 \mu m$ (soit quasiment le double) pour $\mu_S = 15 \text{ MPa}$, $3,29 \mu m$ pour $\mu_S = 88,8 \text{ MPa}$, $3,88 \mu m$ (soit quasiment le quadruple) pour $\mu_S = 150 \text{ MPa}$. L'évolution de la position du pic de résonance est cohérente : à fréquence incidente fixée, le rayon de la bulle qui résonne augmente avec le module de cisaillement. Par

FIG. 2.7 – Influence du module de cisaillement μ_S sur la réponse à la fréquence f FIG. 2.8 – Influence de la viscosité η_S sur la réponse à la fréquence f

contre, il semble qu'il y ait compétition entre deux phénomènes pour l'amplitude du pic de résonance. Si le module de cisaillement augmente, la bulle se rigidifie, donc on s'attend à ce que le phénomène de résonance soit moins marqué. Mais le rapport entre le volume de l'enveloppe solide et le volume total de la bulle joue également un rôle dans la rigidité de la bulle : plus le rayon est petit, plus la proportion du volume de l'enveloppe solide est importante, ce qui entraîne une rigidification de la bulle et une diminution de la résonance. Il semblerait que cela soit ce phénomène qui l'emporte.

Pour la figure 2.8, le module de cisaillement vaut $\mu_S = 88,8 \text{ MPa}$ et on fait varier la viscosité de l'enveloppe solide $\eta_S = 0,05/1,77/8,00 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. La viscosité de l'enveloppe solide a une nette influence sur le phénomène de résonance : lorsque la viscosité augmente, l'amplitude à la résonance diminue et le rayon pour lequel il y a résonance augmente.

2.2.3 Intérêt des sections efficaces pour la caractérisation des agents de contraste

Afin de quantifier l'efficacité des agents de contraste, Bouakaz et al. ont introduit un nouveau paramètre appelé STAR, acronyme de "Scattering-To-Absorption Ratio" [BOU 96-2]. Ce paramètre est défini comme le rapport de la section efficace totale de diffusion sur la section efficace totale d'extinction sur la bande de fréquence considérée

$$STAR(f) = \frac{\Sigma_{TS}(f)}{\Sigma_{TE}(f)}. \quad (2.45)$$

Les sections efficaces totales de diffusion Σ_{TS} et d'extinction Σ_{TE} peuvent être déduites de mesures expérimentales en réflexion et en transmission [JON 92] [JON 93] [BOU 98] [FRI 98] sans connaissance préalable des caractéristiques des agents de contraste (nombre de microbulles, distribution de la taille des microbulles...). Deux mécanismes sont à l'origine du phénomène d'atténuation : la diffraction par les hétérogénéités du milieu et l'absorption due aux processus dissipatifs. La section efficace totale d'extinction fait donc intervenir les sections efficaces totales de diffusion et d'absorption [MED 77]

$$\Sigma_{TE}(f) = \Sigma_{TS}(f) + \Sigma_{TA}(f), \quad (2.46)$$

d'où

$$STAR(f) = \frac{1}{1 + \Sigma_{TA}(f)/\Sigma_{TS}(f)}. \quad (2.47)$$

Les agents de contraste, de part leur nature (gaz), permettent d'augmenter le signal rétrodiffusé lors de la phase d'imagerie mais absorbent en contrepartie une partie de l'onde acoustique. Cela peut se traduire par une zone d'ombre sur l'image et empêcher la visualisation des tissus et organes situés derrière (par rapport à l'émetteur ultrasonore) les agents de contraste. Il est donc intéressant de caractériser simultanément la diffusion et l'atténuation par les agents de contraste afin d'évaluer leur efficacité quant à l'amélioration réelle de la qualité de l'image (amélioration du contraste mais pas au détriment de la résolution au sens du nombre d'interfaces visibles). Le paramètre STAR a été défini de manière à prendre sa valeur maximale (valant 1) lorsque l'absorption par l'agent de contraste est nulle. Une forte diffusion et une absorption faible conduisent à une valeur élevée du paramètre STAR. Bouakaz et al. ont travaillé avec le Levovist® [LEV 03], dont le rayon moyen des agents de contraste est $1,25 \mu m$. La section efficace de diffusion présente un phénomène de résonance autour de $3 MHz$. A cette fréquence, le STAR vaut $5,5\%$; la valeur maximale du STAR pour le Levovist® est obtenue à $1 MHz$ et vaut 8% [BOU 98]. Du point de vue du rehaussement du contraste, le Levovist® présente donc un comportement optimal à $1 MHz$. Le STAR peut être un critère pour le choix du produit de contraste le plus adapté selon le type d'application envisagée (fréquence d'émission en particulier).

Si l'on suppose que les agents de contraste sont répartis de manière homogène et que la diffusion multiple est négligeable (ie. faible densité volumique pour que les agents soient suffisamment éloignés les uns des autres), la section efficace totale de diffusion d'une solution peu concentrée en agents de contraste peut s'écrire comme la somme des sections efficaces de diffusion de chaque agent de contraste, soit

$$\Sigma_{TS}(f) = \int_{R_{min}}^{R_{max}} n(R)\sigma_S(R,f)dR \quad (2.48)$$

où $\sigma_S(R,f)$ est la section efficace de diffusion à la fréquence f d'un agent de contraste de rayon R , $n(R)$ la concentration en agents de contraste de rayon R , R_{min} et R_{max} les rayons minimum et maximum des agents en solution. Les expériences menées par Marsh et al. avec l'Albunex® ont permis de valider l'hypothèse de non diffusion multiple pour des concentrations inférieures à 5.10^6 microbulles par mL sur la bande de fréquence $1 - 20 MHz$ [MAR 97]. Le rayon moyen étant $1,9 \mu m$ pour l'Albunex, une microbulle d'Albunex occupe un volume moyen de $2,9.10^{-17} m^3$. 5.10^6 microbulles occupent donc $1,5.10^{-10} m^3$, ce qui représente $0,015 \%$ d'un mL . Les produits de contraste commercialisés contiennent

généralement 10^8 à 10^9 microbulles par mL et la dose à injecter au patient est de l'ordre du mL . En supposant une répartition homogène des microbulles dans le sang (environ 5 litres de sang circulent dans un corps humain à l'âge adulte), le facteur de dilution dans le sang est alors de l'ordre de $1/5000$, voire $1/500$ pour des doses importantes. La concentration maximale obtenue pour une concentration initiale de 10^9 microbulles/ mL et une dose injectée de $10 mL$ est de $2 \cdot 10^6$ microbulles par millilitre de sang, concentration pour laquelle la diffusion multiple peut être négligée d'après les travaux de Marsh et al. [MAR 97].

2.3 Agents de contraste à coque peu épaisse : modèle de Hoff

Hoff et al. ont utilisé une version simplifiée du modèle de Church pour déterminer les paramètres viscoélastiques de la coque d'un agent de contraste préparé par Nycomed [HOF 00]. Ces microbulles sont constituées d'air entouré par une fine couche de polymères ; leur rayon moyen est de l'ordre de $3 - 4 \mu m$ et la couche polymérique a une épaisseur de $150 - 200 nm$. La préparation et la caractérisation physico-chimique de ces microbulles est détaillée dans [BJE 97]. Le processus de fabrication est tel que le rapport entre l'épaisseur de la coque et le rayon de la microbulle est constant, de l'ordre de 5% [HOF 00]. En considérant que l'épaisseur e_S de la coque est très inférieure au rayon extérieur R_2 de la microbulle et en négligeant la tension de surface, Hoff et al. ont simplifié l'équation (2.6) en réalisant un développement au premier ordre en $\frac{e_S}{R_2}$ [HOF 00]

$$\begin{aligned} \rho_L \left[R_2 \ddot{R}_2 + \frac{3}{2} \dot{R}_2^2 \right] &= p_{Ge} \left(\frac{R_{2e}}{R_2} \right)^{3\zeta} - p_\infty(t) - 4\eta_L \frac{\dot{R}_2}{R_2} \\ &- 12\eta_S \frac{R_{2e}^2 e_{Se}}{R_2^3} \frac{\dot{R}_2}{R_2} \\ &- 12\mu_S \frac{R_{2e}^2 e_{Se}}{R_2^3} \left(1 - \frac{R_{2e}}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

\dot{R}_2 est la vitesse de déplacement de l'interface solide/liquide notée 2, i.e. de la surface extérieure de la microbulle. $p_\infty(t)$ est la somme de la pression hydrostatique P_0 et de la pression acoustique incidente $P(t)$. Hoff et al. ne prennent pas en compte la tension de surface, $p_{Ge} = P_0$. La lettre e en indice indique les grandeurs à l'équilibre.

L'équation (2.49) est l'équation de Church adaptée au cas d'agents de contraste possédant une coque de faible épaisseur par rapport à leur rayon. Les termes de la première ligne correspondent à l'équation (1.21) d'une bulle de gaz sans coque (mis à part le terme de tension de surface qui n'est pas considéré par Hoff et al.) ; les deux derniers termes représentent les contributions visqueuse et élastique de la coque.

Les paramètres η_S et μ_S décrivant le comportement viscoélastique de la coque de l'agent de contraste fourni par Nycomed ont été estimés dans le cas de faibles oscillations [HOF 00]. Afin d'ajuster les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux, l'équation (2.49) a été développée au premier ordre en x en écrivant le rayon extérieur de la particule sous la forme $R_2 = R_{2e}(1 + x)$ avec $x \ll 1$. Hoff et al. [HOF 00] ont écrit l'équation linéarisée sous la même forme que l'équation (1.28) obtenue dans le cas d'une microbulle de gaz sans coque

$$m R_{2e} \ddot{x} + b R_{2e} \dot{x} + k R_{2e} x = -4\pi R_{2e}^2 P(t), \quad (2.50)$$

avec

$$m = 4\pi \rho_L R_{2e}^3, \quad (2.51)$$

$$b = 4\pi R_{2e} \left(4\eta_L + 12\eta_S \frac{e_{Se}}{R_{2e}} \right), \quad (2.52)$$

$$k = 4\pi R_{2e} \left(3\zeta P_0 + 12\mu_S \frac{e_{Se}}{R_{2e}} \right). \quad (2.53)$$

La pulsation propre est donnée par le rapport $\frac{k}{m}$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho_L R_{2e}^2} \left(3\zeta P_0 + 12\mu_S \frac{e_{Se}}{R_{2e}} \right). \quad (2.54)$$

Le coefficient d'amortissement b met en évidence les contributions respectives du fluide et de la coque aux pertes d'origine visqueuse.

La réponse à une excitation harmonique de la forme $P \exp i\omega t$ s'écrit alors

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 - 1 + i\Omega\delta} \frac{P}{\rho_L \omega_0^2 R_{2e}^2}, \quad (2.55)$$

en notant

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.56)$$

$$\delta = \frac{b}{m\omega_0} = \Omega d. \quad (2.57)$$

δ correspond à la constante d'amortissement. Son expression diffère d'un facteur $\frac{\omega}{\omega_0}$ de celle donnée par Medwin (notée d , cf. équation (1.33)). L'équation différentielle régissant l'évolution temporelle du rayon ne comprend pas les phénomènes d'amortissement thermique et par rayonnement. Ceux-ci peuvent être pris en compte dans l'expression de la constante d'amortissement δ en remplaçant R_0 par R_{2e} dans les expressions de X , d_{th} et d_{ray} (équations (1.35), (1.34) et (1.37) respectivement), soit

$$\delta = \delta_{viscL} + \delta_{viscS} + \delta_{th} + \delta_{rad}, \quad (2.58)$$

avec [HOF 00]

$$\delta_{viscL} = \frac{4\eta_L}{\rho_L \omega_0 R_{2e}^2}, \quad (2.59)$$

$$\delta_{viscS} = \frac{12\eta_S e_{Se} / R_{2e}}{\rho_L \omega_0 R_{2e}^2}, \quad (2.60)$$

$$\delta_{th} = \frac{\omega}{\omega_0} d_{th}, \quad (2.61)$$

$$\delta_{ray} = \frac{\omega}{\omega_0} d_{ray}. \quad (2.62)$$

δ_{viscL} correspond également à $\frac{\omega}{\omega_0} d_{visc}$ (R_0 devenant R_{2e} dans l'équation (1.38)). Prendre la même expression pour les pertes d'origine thermique dans le cas d'une bulle nue et d'un agent de contraste revient à considérer la coque et le liquide comme un seul corps de température constante constituant un "réservoir" : cela suppose que la coque est à la même température que le liquide et qu'il n'y a pas création de chaleur dans la coque. Hoff et al. justifient ce choix par l'ordre de grandeur des capacités thermiques volumiques des différents corps : celles de l'eau et de la coque sont du même ordre de grandeur et environ trois fois plus grandes que celle de l'air [HOF 00].

L'utilisation des relations $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\delta = \Omega d$ dans les équations (1.39) et (1.41) permet d'obtenir les sections efficaces de diffusion et d'extinction dans le cas d'agents de contraste possédant une coque de faible épaisseur

$$\sigma_s(R_{2e}, \omega) = 4\pi R_{2e}^2 \frac{\Omega^4}{(\Omega^2 - 1)^2 + \Omega^2 \delta^2}, \quad (2.63)$$

$$\sigma_e(R_{2e}, \omega) = 4\pi R_{2e}^2 \frac{\delta c_L}{\omega_0 R_{2e}} \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - 1)^2 + \Omega^2 \delta^2}. \quad (2.64)$$

Hoff et al. ont obtenu à partir de mesures expérimentales en transmission l'évolution de l'atténuation du signal acoustique sur la bande de fréquence $1,5 - 8 \text{ MHz}$ pour différents échantillons (élimination par flottaison des microbulles les plus grandes). Au fur et à mesure que les microbulles de rayon élevé sont éliminées, l'atténuation du signal diminue et la fréquence de résonance augmente. Les paramètres viscoélastiques η_S et μ_S de la coque (agents de contraste fournis par Nycomed) sont estimés par ajustement des courbes théoriques et expérimentales de l'atténuation : $\eta_S = 0,48 \pm 0,05 \text{ Pa.s}$ et $\mu_S = 11,6 \pm 1,2 \text{ MPa}$ [HOF 00]. Pour établir les courbes théoriques, Hoff et al. ont considéré que les paramètres physiques et le rapport $\frac{e_S}{R_{2e}}$ étaient les mêmes pour tous les agents de contraste (quelle que soit leur taille) et n'ont pas pris en compte le phénomène de diffusion multiple. L'atténuation est alors reliée à la section efficace d'extinction par la relation

$$\alpha(\omega) = \int_{R_{min}}^{R_{max}} \sigma_e(R, \omega) n(R) dR \quad (2.65)$$

où $n(R)$ est la concentration en microbulles de rayon extérieur R , R_{min} et R_{max} les rayons minimum et maximum des agents de contraste en solution dans l'échantillon considéré (utilisation d'un "Coulter Multisizer" pour connaître la distribution de taille). L'épaisseur de la coque a été évaluée à 5% du rayon à partir des processus de fabrication et d'observations au microscope électronique [BJE 97].

L'estimation des paramètres viscoélastiques de la coque permet de calculer la fréquence propre ainsi que les différents termes d'amortissement et la section efficace de diffusion. La figure 2.9 a été obtenue en calculant la fréquence propre selon les équations (2.54) [HOF 00] et (2.14) [CHU 95] avec $e_{Se} = 0.05R_{2e}$, $R_{2e} \in [0,1 - 10 \text{ } \mu\text{m}]$, $\mu_S = 11,6 \text{ MPa}$. La fréquence propre pour une bulle sans coque est également représentée à titre de comparaison et comme référence (calcul selon l'équation (1.32) [ELL 70]). On constate ainsi que la non prise en compte de la tension de surface aux interfaces gaz/coque et coque/liquide et la linéarisation du modèle pour des coques de faible épaisseur engendre peu de différence entre les modèles de Church et de Hoff : l'écart relatif entre les fréquences de résonance est inférieur à 4% pour des microbulles de rayon compris entre 1 et $10 \text{ } \mu\text{m}$.

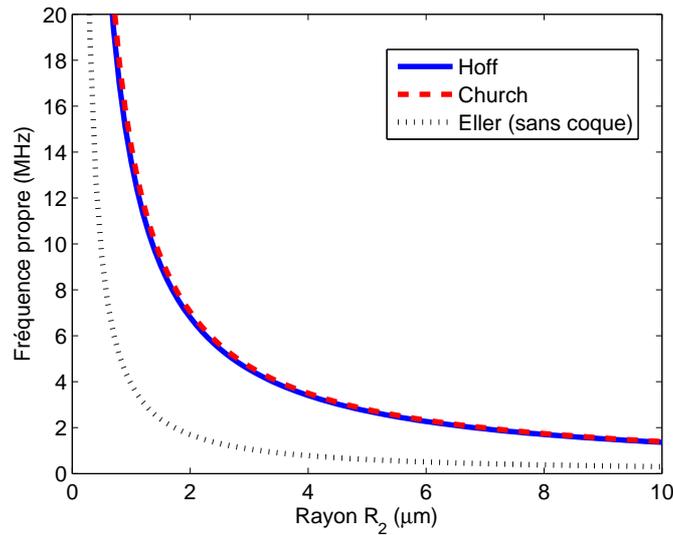


FIG. 2.9 – Fréquence propre : modèles de Hoff, Church et Eller

La contribution des différents termes d'amortissement est représentée sur la figure 2.10 pour une microbulle de rayon extérieur $2 \text{ } \mu\text{m}$ et de caractéristiques viscoélastiques $\eta_S = 0,48 \text{ Pa.s}$ et $\mu_S = 11,6 \text{ MPa}$. Les pertes visqueuses δ_{viscS} au sein de la coque constituent le mécanisme d'amortissement

prépondérant en dessous de 10 MHz ; au delà, c'est la réémission d'une onde acoustique δ_{ray} qui domine.

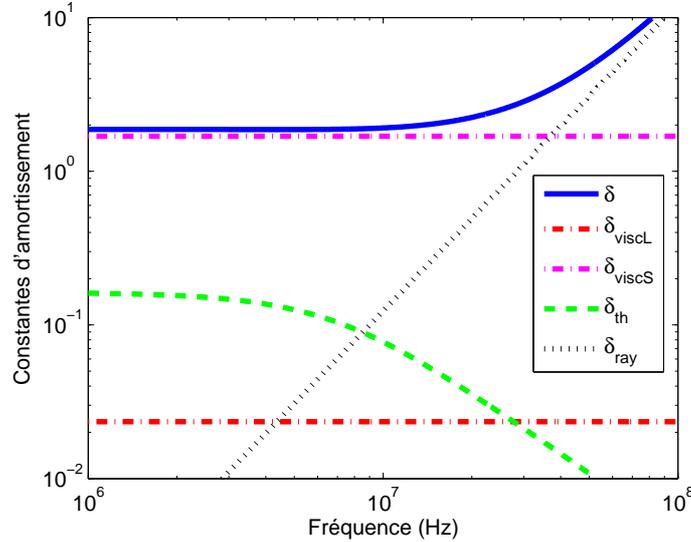


FIG. 2.10 – Evolution des constantes d'amortissement pour une microbulle de rayon 2 μm

2.4 Prise en compte de la compressibilité du liquide environnant : modèle de Morgan

En s'inspirant des travaux de Church [CHU 95] et de Hoff [HOF 00], Morgan et al. ont adapté l'équation de Herring "modifiée" proposée par Vokurka [VOK 86] au cas d'agents de contraste à coque fine [MOR 00]. L'équation de Herring "modifiée" est obtenue à partir de l'équation de Herring (cf. équation (1.24)) en omettant les termes correctifs en \dot{R}/c_L , soit

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left[p_L(R) - p_\infty(t) + \frac{R}{c_L} \frac{dp_L}{dt} \right]. \quad (2.66)$$

R correspond au rayon de l'interface solide/liquide (précédemment noté R_2). L'épaisseur de la coque, notée e_S , est considérée comme très petite devant le rayon R de la bulle.

La continuité des contraintes aux différentes interfaces permet de relier la pression dans le liquide et la pression du gaz selon l'équation [MOR 00]

$$p_L(R) = p_G(R) - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2\chi_S}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 12\eta_S e_S \frac{\dot{R}}{R(R - e_S)}. \quad (2.67)$$

Compte tenu de l'hypothèse $e_S \ll R$, les phénomènes de tension de surface aux interfaces gaz/solide et solide/liquide sont pris en compte dans le seul terme $2\sigma/R$, σ étant la somme des deux coefficients σ_1 et σ_2 . Les termes traduisant la viscosité du liquide (η_L) et du solide (η_S) ont été obtenus à partir de l'expression classique du tenseur des contraintes visqueuses ($2\eta\mathbf{D}$), en utilisant les hypothèses d'incompressibilité de la coque ($R_1^2 \dot{R}_1 = R^2 \dot{r}$) et de coque fine ($e_S = R - R_1 \ll R$). La prise en compte de l'élasticité de la coque diffère de la formulation de Church. Le terme $\frac{2\chi_S}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2$ a été introduit par Glazman [GLA 83] pour prendre en compte la présence d'un film organique se formant à la surface

d'une bulle de gaz immergée dans un liquide, χ_S étant le module élastique du film organique (de la coque lipidique dans le cas des agents de contraste).

Le comportement du gaz est supposé polytropique, soit

$$p_G(R,t) = p_G(R_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta}, \quad (2.68)$$

la pression dans l'état initial étant $p_G(R_0) = P_0 + 2\sigma/R_0 + 2\chi_S/R_0$ d'après les équations (2.66) et (2.67) écrites à $t = 0$ avec $R(t = 0) = R_0$ et $dR/dt(t = 0) = 0$.

L'expression de la pression $p_L(R)$ est finalement

$$p_L(R) = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2\chi_S}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2\chi_S}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 12\eta_S e_S \frac{\dot{R}}{R(R - e_S)}, \quad (2.69)$$

d'où l'équation proposée par Morgan et al. pour décrire le comportement d'un agent de contraste dont la coque a une très faible épaisseur [MOR 00]

$$\begin{aligned} \rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] &= \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2\chi_S}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} \left(1 - 3\zeta \frac{\dot{R}}{c_L} \right) \\ &- \frac{2\sigma}{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_L} \right) - \frac{2\chi_S}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left(1 - 3\frac{\dot{R}}{c_L} \right) \\ &- 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 12\eta_S e_S \frac{\dot{R}}{R(R - e_S)} - p_\infty(t). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Ce modèle a été testé dans le cas d'un agent de contraste expérimental, le MP1950 (Mallinckrodt, USA), constitué d'un coeur de décafluorobutane et d'une coque de phospholipides. Le diamètre moyen est de l'ordre de $1,5 \mu m$ et l'épaisseur de la coque de l'ordre du nanomètre [MOR 00]. Des observations optiques à l'aide d'un microscope et d'une caméra ultra rapide à balayage (jusqu'à 100 millions d'images par seconde) ont permis d'enregistrer les variations temporelles des rayons, les microbulles étant soumises à des excitations acoustiques variées (différentes durées et amplitudes de l'impulsion, répétition ou non des impulsions). La comparaison des observations optiques et des courbes théoriques issues de la résolution de l'équation (2.70) a permis de valider le modèle et de déterminer les valeurs des paramètres viscoélastiques de la coque pour les échantillons de MP1950 utilisés : χ_S est compris entre 0 et $4 N/m$ et $e_S \eta_S$ entre 0 et $8 nm.Pa.s$ [MOR 00]. Par ailleurs, il a été observé que $e_S \eta_S$ dépendait linéairement du rayon initial R_0 . La comparaison de signaux acoustiques expérimentaux et théoriques (dans les domaines temporel et fréquentiel) a également permis de valider le modèle.

Ce modèle a aussi été utilisé pour décrire le comportement du MP1950 lorsque les agents de contraste ont été phagocytés (capturés et ingérés) par des neutrophiles issus de prélèvements de sang humain [DAY 01]. Les oscillations radiales des agents de contraste phagocytés (observation optiques) ont pu être précisément prédites par l'équation (2.70). Dans ce cas, le coefficient η_L est remplacé par η_N et le terme $\frac{4\eta_N}{R} \frac{dR}{dt}$ représente la viscosité interne du neutrophile. La comparaison des courbes théoriques et des observations optiques a permis d'estimer cette viscosité apparente du neutrophile par ajustement entre les courbes : $\eta_N = 12.10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$ [DAY 01]. La réponse d'un agent de contraste phagocyté exhibe un amortissement plus important ainsi qu'un décalage du barycentre spectral (fréquence moyenne du spectre du signal acoustique) par rapport à la réponse d'un agent de contraste libre. Il a été observé par ailleurs qu'une impulsion acoustique de grande amplitude pouvait induire des oscillations importantes de l'agent de contraste phagocyté, oscillations provoquant la rupture de la membrane du neutrophile puis sa lyse (destruction d'une cellule avec libération de son contenu dans le milieu environnant).

Le comportement de l'OptisonTM (GE Healthcare, USA) a également été modélisé à l'aide de l'équation (2.70) par Ammi, l'accent ayant été mis dans son travail sur la détection et la caractérisation

expérimentale (observations optiques et acoustiques) de la destruction des agents de contraste [AMM 06]. Pour traduire la rupture de la coque lors de simulations numériques, les valeurs des paramètres de la coque χ_S et η_S ont été mis à zéro dès que le rayon de l'agent de contraste excédait une valeur seuil ($3 \mu m$). Les résultats théoriques ainsi obtenus reflétaient de façon satisfaisante les signatures acoustiques observées expérimentalement [AMM 06].

2.5 Prise en compte des phénomènes de flambage et de rupture de la coque : modèle de Marmottant

Jusqu'ici, le terme $2\sigma/R$ traduisait les effets de la tension de surface, le coefficient σ prenant une valeur constante caractérisant l'interface considérée ($\sigma_W = 72 \text{ mN/m}$ pour l'interface air/eau pure). Dans le cas d'une monocouche de phospholipides adsorbés à l'interface air/eau, il a été observé que la tension de surface variait au cours des oscillations radiales de la bulle de gaz. En effet, durant la phase de compression, le rayon diminuant, la surface disponible par molécule diminue et la tension de surface décroît [MAR 05]. La variation de la tension de surface avec la surface de la bulle $A = 4\pi R^2$ s'exprime dans le régime linéaire à l'aide du module élastique χ_S défini par $\chi_S = A(d\sigma/dA)$. En dessous d'une valeur seuil $A_{flambage}$ de la surface de la bulle, on observe le flambage de la couche de molécules (la bulle ne peut rester sphérique), la tension de surface tendant alors vers zéro. Inversement, lors de l'expansion de la bulle, la surface disponible par molécule augmente et la tension de surface augmente. Marmottant et al. ont proposé un modèle permettant de prendre en compte l'évolution de la tension de surface effective $\sigma(R)$ de la couche lipidique en fonction de la surface de la bulle A [MAR 05]. La surface de la bulle dans l'état d'équilibre initial est A_0 . Le modèle distingue trois états (cf. figure 2.11) :

- Flambage, $\sigma = 0$ pour $A \leq A_{flambage}$,
- Comportement élastique, $\sigma = \chi_S \left(\frac{A}{A_{flambage}} - 1 \right)$ pour $A_{flambage} \leq A \leq A_{rupture}$, la surface $A_{rupture}$ étant associée à la tension de surface critique $\sigma_{rupture}$,
- Rupture, $\sigma = \sigma_W$ pour $A \geq A_{rupture}$.

L'évolution dynamique du rayon de la bulle est alors régie par l'équation [MAR 05]

$$\begin{aligned} \rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] &= \left(P_0 + \frac{2\sigma(R_0)}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} \left(1 - 3\zeta \frac{\dot{R}}{c_L} \right) - \frac{2\sigma(R)}{R} \\ &- 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 4\kappa_S \frac{\dot{R}}{R^2} - p_\infty(t) \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec

$$\sigma(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R \leq R_{flambage} \\ \chi_S \left(\frac{R^2}{R_{flambage}^2} - 1 \right) & \text{si } R_{flambage} \leq R \leq R_{rupture} \\ \sigma_W & \text{si } R \geq R_{rupture} \end{cases} \quad (2.72)$$

Dans ce modèle, la coque est modélisée par une interface sans épaisseur. Le terme $4\kappa_S \frac{\dot{R}}{R^2}$ est à rapprocher du terme $12\eta_S e_S \frac{\dot{R}}{R(R - e_S)}$ apparaissant dans l'équation (2.70), ie. $\kappa_S \equiv 3\eta_S e_S$.

Ce modèle a été validé par comparaison avec des observations optiques menées sur des échantillons de Sonovue (Bracco). L'ajustement entre les courbes théoriques et expérimentales a conduit aux valeurs suivantes des paramètres : $R_{flambage} = 0,975 \mu m$, $\chi_S = 1 \text{ N/m}$, $\kappa_S = 15.10^{-9} \text{ N}$, $\sigma_{rupture} > 1 \text{ N/m}$ [MAR 05].

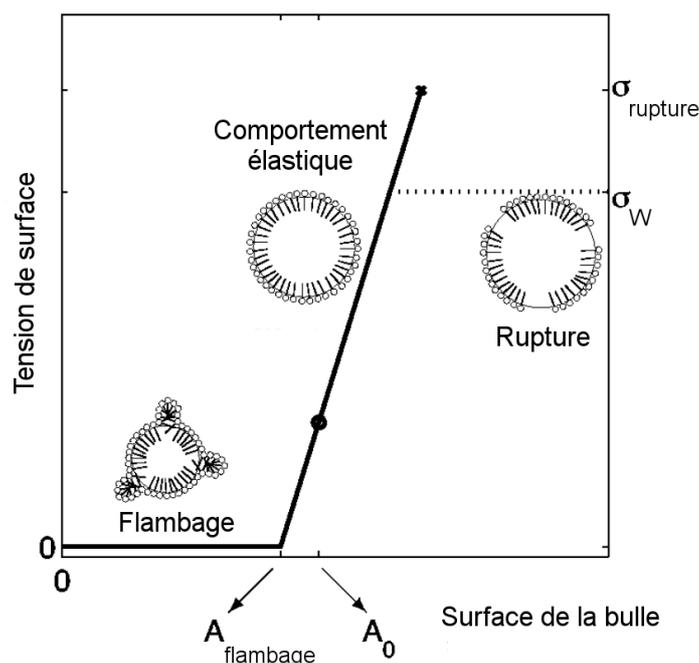


FIG. 2.11 – Modélisation de la tension de surface effective d'une couche monomoléculaire entourant la bulle de gaz (figure issue de [MAR 05])

Le développement de nouveaux agents de contraste et la diversité de leur composition (cf. tableau 2.6) vont de pair avec l'apparition de nouveaux modèles, tous découlant de l'équation de Rayleigh-Plesset, essayant de décrire au mieux les comportements des agents de contraste observés expérimentalement. La principale différence entre ces modèles théoriques réside dans le choix de la loi de comportement du matériau constituant la coque de l'agent de contraste (fluide [ALL 02], élastique [JON 92], viscoélastique [CHU 95], hyperélastique [ALL 04]...). Nous avons présenté dans ce chapitre les deux modèles historiques (de Jong et Church) ainsi que deux modèles (Hoff et Marmottant) adaptés pour des agents de contraste à coque fine à partir du modèle de Church. Ces modèles constitueront nos "cas test" lors de la modélisation par éléments finis d'un agent de contraste (chapitre 6).

Nom	Laboratoire	Gaz	Coque	Situation
AI-700®	Acusphere	Décafluorocarbone	Polymère	Phase clinique
Albunex®	Mallinckrodt	Air	Albumine	Arrêté
Echovist®	Schering	Air	/	Disponible
Levovist®	Schering	Air	Acide palmitique	Disponible
Imagent®	Alliance	Perfluorohexane	Lipide	Phase clinique
Optison®	Mallinckrodt	Octafluoropropane	Albumine	Disponible
Quantison™	Quadrant	Air	Albumine	Arrêté
Sonavist®	Schering	Air	Polymère	Phase clinique
Sonovue®	Bracco	Hexafluorure de soufre	Phopholipide	Disponible

TAB. 2.6 – Composition d'agents de contraste commercialisés ou en cours de développement [LAF 00] [ULT 01] (liste non exhaustive)

Chapitre 3

Formulation lagrangienne

Ce chapitre présente la modélisation du comportement d'une bulle de gaz puis d'un agent de contraste dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Cette approche permet de retrouver l'équation régissant les oscillations radiales d'une bulle de gaz ou d'un agent de contraste mais également d'établir les équations couplées du mouvement lors de la prise en compte d'un mouvement supplémentaire de translation de l'agent de contraste. Il a en effet été observé que les agents de contraste pouvaient se déplacer de façon significative sous l'effet de la pression de radiation [DAY 02-b]. Lors de l'interaction d'un agent de contraste avec une paroi [MAR 06] (resp. avec un autre agent de contraste [GAR 07-a]), il a également été observé que les oscillations radiales de l'agent de contraste étaient combinées à un mouvement de translation dans la direction perpendiculaire à la paroi (resp. le long de l'axe passant par les centres).

Mécanique analytique : formalisme lagrangien

On appelle coordonnées généralisées les N grandeurs, notées $\{q_i\}_{i=1..N}$, caractérisant complètement la position d'un système mécanique à N degrés de liberté, et vitesses généralisées les dérivées associées $\{\dot{q}_i = dq_i/dt\}_{i=1..N}$.

Selon le principe dit "de moindre action", tout système mécanique à N degrés de liberté est caractérisé par une fonction $L(\{q_i\}_{i=1..N}, \{\dot{q}_i\}_{i=1..N}, t)$ et le mouvement du système entre les instants t_1 et t_2 est tel que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}_{i=1..N}, \{\dot{q}_i\}_{i=1..N}, t) dt \quad (3.1)$$

ait la plus petite valeur [LAN 69]. La fonction L est appelée fonction de Lagrange (ou Lagrangien) et l'intégrale (3.1) l'action. Le principe de moindre action peut également s'écrire [LAN 69]

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(\{q_i\}_{i=1..N}, \{\dot{q}_i\}_{i=1..N}, t) dt \right) = 0 \quad (3.2)$$

et conduit aux équations différentielles du mouvement, appelées équations de Lagrange [LAN 69]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ pour } i = 1..N. \quad (3.3)$$

La fonction de Lagrange d'un système mécanique est de la forme $L = T(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) - U(\{q_i\})$ avec T l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle du système [LAN 69]. L'énergie potentielle comprend des termes liés aux interactions internes au système (énergie interne) mais également des termes liés aux interactions du système avec l'extérieur.

Pour un système dissipatif, les équations de Lagrange s'écrivent [LAN 69]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \text{ pour } i = 1..N. \quad (3.4)$$

où F , appelée fonction de dissipation, prend en compte les phénomènes dissipatifs (viscosité, frottement solide...).

3.1 Oscillations radiales d'une bulle de gaz dans un liquide

3.1.1 Cas d'un liquide incompressible

On travaille en coordonnées sphériques, l'origine du repère étant le centre de la bulle. La distance d'un point quelconque du liquide au centre de la bulle est r ; le rayon de la bulle est décrit par $R(t)$. La bulle de gaz (G) est initialement au repos dans le liquide (L) homogène supposé d'étendue infinie. Un champ acoustique $P(t)$ est imposé à l'instant $t = 0$ dans le liquide très loin de la bulle, la pression p_∞ dans le liquide vaut alors

$$p_\infty(t) = P_0 + P(t) \quad (3.5)$$

où P_0 est la pression statique. La bulle de gaz, modélisée par une cavité sphérique, commence alors à osciller, provoquant la mise en mouvement, supposé à symétrie sphérique, du liquide environnant. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie sphérique du système étudié (on ne considère que les mouvements radiaux de la bulle), la vitesse se met sous la forme $\mathbf{v} = v(r, t)\mathbf{e}_r$. Le liquide étant supposé incompressible, l'équation de conservation de la masse conduit à $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ et \mathbf{v} peut donc s'écrire sous la forme $\mathbf{grad}(\phi)$, ϕ étant le potentiel des vitesses. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie sphérique, ϕ ne dépend que de r et t . L'incompressibilité du liquide implique que le potentiel des vitesses doit vérifier l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$, soit

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \text{ pour } r \geq R. \quad (3.6)$$

La solution de l'équation (3.6) est

$$\phi(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (3.7)$$

avec A et B constantes à déterminer. En choisissant $\phi(r \rightarrow +\infty) = 0$, on obtient $B = 0$. La condition $v(R, t) = \dot{R}(t)$ doit être vérifiée en $r = R$, soit

$$v(R, t) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{A}{R^2} = \dot{R}. \quad (3.8)$$

Le potentiel des vitesses ϕ s'écrit alors

$$\phi(r, t) = -\frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad (3.9)$$

et la vitesse

$$v(r, t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}. \quad (3.10)$$

L'énergie cinétique d'un système s'écrit

$$T = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 d\Omega. \quad (3.11)$$

Compte tenu de la faible masse volumique du gaz par rapport à la masse volumique du liquide, l'énergie cinétique du gaz est négligeable devant celle du liquide et l'énergie cinétique totale du système gaz/liquide étudié ici se réduit à

$$T = \int_{\Omega_L} \frac{1}{2} \rho_L (\mathbf{grad}\phi)^2 d\Omega, \quad (3.12)$$

soit

$$T = \frac{1}{2} \rho_L \int_R^{+\infty} \left(\frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (3.13)$$

L'énergie cinétique du système est donc $\boxed{T = 2\pi\rho_L R^3 \dot{R}^2}$.

L'énergie potentielle du système peut être définie par $U = U_{int} - W_{ext}$ où U_{int} est l'énergie interne du système et W_{ext} le travail des forces extérieures. L'énergie interne du système est la somme de l'énergie interne du gaz U_G et de l'énergie interne du liquide U_L . Le travail des forces extérieures correspond au travail des forces de pression s'exerçant à la surface du liquide à l'infini W_∞ . L'énergie potentielle du système est donc $U = U_G + U_L - W_\infty$.

L'énergie interne d'un gaz parfait est $U_G = p_G V_G / (\gamma - 1)$, avec p_G la pression du gaz, V_G le volume occupé par le gaz et γ le rapport des capacités calorifiques. Le comportement du gaz étant supposé adiabatique et réversible, on a par ailleurs la relation $p_G V_G^\gamma = \text{Constante}$, soit $p_G = p_G(R_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}$ où R_0 est le rayon et $p_G(R_0) = P_0$ est la pression du gaz dans l'état d'équilibre initial. L'énergie interne du gaz s'écrit donc [EME 04]

$$U_G = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)}, \quad (3.14)$$

$V_0 = 4/3\pi R_0^3$ étant le volume initial de la bulle de gaz.

L'énergie interne d'un fluide parfait incompressible est nulle, soit $U_L = 0$. Le travail élémentaire de la force de pression qui s'exerce sur le liquide à l'infini est $dW_\infty = -p_\infty dV_\infty$ où dV_∞ est la variation du volume occupé par le système. Le liquide étant incompressible, la variation du volume total occupé par le système correspond à la variation du volume occupé par le gaz, par conséquent [EME 04]

$$W_\infty = -p_\infty (V_G - V_0) = -p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 \right). \quad (3.15)$$

L'énergie potentielle du système est donc

$$\boxed{U = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} + p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 \right)}. \quad (3.16)$$

La fonction de Lagrange du système s'écrit alors

$$\boxed{L = 2\pi\rho_L R^3 \dot{R}^2 - \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} - p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 \right)}. \quad (3.17)$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 4\pi\rho_L R^3 \ddot{R} + 6\pi\rho_L R^2 \dot{R}^2 - 4\pi P_0 \frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3(\gamma-1)+1}} + 4\pi R^2 p_\infty = 0. \quad (3.18)$$

On retrouve ainsi l'équation de Rayleigh-Plesset [PLE 49] (cf. équation (1.11))

$$\boxed{R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(P_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) \right)}. \quad (3.19)$$

Prise en compte de la tension de surface et de la viscosité du liquide

L'énergie surfacique due à la tension de surface à l'interface entre le gaz et le liquide vaut

$$U_\sigma = 4\pi R^2 \sigma, \quad (3.20)$$

σ étant la tension superficielle [LAN 71]. Cette énergie surfacique doit être ajoutée à l'énergie potentielle du système calculée précédemment. Par ailleurs, la prise en compte de la tension de surface modifie la valeur de la pression dans le gaz lorsque le système est au repos : $p_G(R_0) = P_0 + 2\sigma/R_0$. Il faut donc remplacer P_0 par $P_0 + 2\sigma/R_0$ dans l'expression de l'énergie interne du gaz. On obtient alors le lagrangien du système sous la forme [ZAB 05]

$$L = 2\pi\rho_L R^3 \dot{R}^2 - \frac{(P_0 + 2\sigma/R_0)V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(\gamma-1)} - p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1\right) - 4\pi R^2 \sigma, \quad (3.21)$$

et l'équation du mouvement correspond à l'équation de Noltingk et Neppiras (cf. équation (1.15))

$$\boxed{R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) - \frac{2\sigma}{R} \right)}. \quad (3.22)$$

La fonction de dissipation du système peut s'écrire

$$F = \int_\Omega f d\Omega \quad (3.23)$$

où f est la fonction de dissipation volumique. Le seul phénomène dissipatif pris en compte est la viscosité du liquide. La fonction de dissipation volumique associée s'écrit [LAN 67] [LAN 71]

$$f_L = \eta_L (D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}D_{kk})^2 + \frac{1}{2}\zeta_L D_{kk}^2, \quad (3.24)$$

avec η_L et ζ_L les coefficients de viscosité et $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ le tenseur des taux de déformations.

Le liquide étant incompressible, $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ et donc $\text{tr}(\mathbf{D}) = D_{kk} = 0$. La fonction de dissipation volumique associée à la viscosité du liquide se réduit donc à $f_L = \eta_L D_{ij}^2$. L'hypothèse de symétrie sphérique imposant $\mathbf{v} = v(r, t)\mathbf{e}_r$, seuls les termes diagonaux du tenseur \mathbf{D} sont non nuls. La fonction de dissipation volumique s'écrit donc

$$f_L = \eta_L (D_{rr}^2 + D_{\theta\theta}^2 + D_{\varphi\varphi}^2) = \eta_L \left(\left(\frac{\partial v(r, t)}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v(r, t)}{r} \right)^2 \right). \quad (3.25)$$

L'expression de la vitesse radiale étant donnée par l'équation (3.10), on obtient finalement

$$f_L = 6\eta_L \frac{R^4 \dot{R}^2}{r^6} \quad (3.26)$$

et

$$F_L = 4\pi \int_R^{+\infty} f_L r^2 dr = 8\pi\eta_L R \dot{R}^2. \quad (3.27)$$

L'équation de Lagrange du système dissipatif s'écrit alors [ZAB 05]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial L}{\partial R} = -16\pi\eta_L R \dot{R} \quad (3.28)$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement

$$\boxed{R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} \right)}. \quad (3.29)$$

On retrouve le "modèle RPNNP" (Rayleigh, Plesset, Noltingk, Neppiras et Poritsky) étudié par Lauterborn [LAU 76] (cf. équation (1.21)).

3.1.2 Cas d'un liquide compressible

Lorsque les oscillations radiales de la bulle sont de grandes amplitudes et/ou qu'elles sont rapides, la compressibilité du liquide ne peut plus être négligée. Le potentiel des vitesses doit alors vérifier l'équation de propagation

$$\Delta\phi + \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.30)$$

Le mouvement étant toujours supposé à symétrie sphérique, le potentiel des vitesses vérifiant l'équation de propagation ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$\phi = \frac{h(t - r/c_L)}{r} \quad (3.31)$$

où f est une fonction qui va être déterminée à l'aide de la condition cinématique $v(R, t) = \dot{R}(t)$, soit

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{h(t - R/c_L)}{R^2} - \frac{h'(t - R/c_L)}{Rc_L} = \dot{R}. \quad (3.32)$$

On peut négliger h'/Rc_L devant h/R^2 car

$$\frac{[h'/Rc_L]}{[h/R^2]} = \frac{\omega R}{c_L} \approx 7.10^{-3} \quad (3.33)$$

pour une bulle d'air dans l'eau (cf. équation (1.2)). On trouve alors que $h(t) = -\dot{R}(t)R^2(t)$.

L'énergie cinétique du système est définie par l'équation (3.12) et le potentiel des vitesses vérifie les équations (3.30) et (3.31). En s'inspirant des travaux de Prosperetti [PRO 87], Doinikov a montré que dans ce cas l'énergie cinétique se met sous la forme [DOI 05]

$$T = 2\pi\rho_L \left(R^3 \dot{R}^2 + \frac{2}{c_L} R^2 \dot{R} \dot{h}(t) + \frac{1}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau \right). \quad (3.34)$$

Si on remplace $\dot{h}(t)$ par son expression explicite, un terme en $\ddot{R}(t)$ apparait dans l'énergie cinétique, ce qui est incorrect si l'on veut appliquer ensuite le formalisme lagrangien. Pour éviter ce problème, $h(t)$ doit être traitée comme une fonction du temps et son expression explicite ne sera utilisée que dans l'équation finale, une fois les dérivations $\frac{\partial L}{\partial R}$ et $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right)$ effectuées [DOI 06].

L'énergie interne du liquide compressible due à une perturbation acoustique est quant à elle définie par [FIL 94]

$$U_L = \frac{1}{2\rho_L c_L^2} \int_{\Omega_L} (p_L - p_0)^2 d\Omega, \quad (3.35)$$

ce qui donne dans le cas étudié [DOI 05]

$$U_L = \frac{2\pi\rho_L}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau. \quad (3.36)$$

L'énergie interne du gaz U_G et le travail des forces de pression s'exerçant à la surface du liquide à l'infini W_∞ sont les mêmes que dans le cas incompressible. L'énergie potentielle est donc dans le cas d'un liquide compressible

$$U = \frac{p_G(R_0)V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} + p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 \right) + \frac{2\pi\rho_L}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau. \quad (3.37)$$

La fonction de Lagrange s'écrit donc

$$L = 2\pi\rho_L \left(R^3 \dot{R}^2 + \frac{2}{c_L} R^2 \dot{R} \dot{h}(t) \right) - \frac{p_G(R_0)V_0}{\gamma-1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} - p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right). \quad (3.38)$$

L'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 4\pi\rho_L R^3 \ddot{R} + 6\pi\rho_L R^2 \dot{R}^2 + \frac{4\pi\rho_L R^2}{c_L} \dot{h}(t) - 4\pi p_G(R_0) \frac{R_0^{3\gamma}}{R^{3(\gamma-1)+1}} + 4\pi R^2 p_\infty = 0. \quad (3.39)$$

En explicitant le terme \ddot{f} , on obtient finalement l'équation

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{c_L} \left(R^2 \ddot{R} + 6R\dot{R}\ddot{R} + 2\dot{R}^3 \right) = \frac{1}{\rho_L} \left(p_G(R_0) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) \right) \quad (3.40)$$

qui a été introduite par Prosperetti en 1987 comme une généralisation de toutes les autres équations établies dans le cas d'un liquide compressible [PRO 87].

La prise en compte de la tension de surface à l'interface gaz/liquide et de la viscosité du liquide se traduit par l'ajout de termes supplémentaires dans l'équation (3.40) (raisonnement analogue au cas incompressible), soit

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{1}{c_L} \left(R^2 \ddot{R} + 6R\dot{R}\ddot{R} + 2\dot{R}^3 \right) = \frac{1}{\rho_L} \left(\left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (3.41)$$

3.2 Oscillations radiales d'un agent de contraste dans un liquide

On considère une bulle de gaz (G) séparée du liquide environnant par une coque solide (S). Le rayon de l'interface gaz/coque est noté $R_1(t)$, celui de l'interface coque/liquide $R_2(t)$. Le liquide (L) est supposé compressible, visqueux et d'étendue infinie. Le comportement de la coque est supposé viscoélastique et incompressible. R_{10} et R_{20} sont les rayons intérieur et extérieur de la coque dans l'état initial. L'hypothèse d'incompressibilité de la coque se traduit par la conservation du volume de la coque, soit $R_2^3 - R_1^3 = R_{20}^3 - R_{10}^3$ et $R_1^2 \dot{R}_1 = R_2^2 \dot{R}_2$.

3.2.1 Calcul de l'énergie cinétique du système

L'énergie cinétique du système gaz/coque/liquide peut être décomposée comme la somme des énergies cinétiques du gaz, de la coque et du solide.

Compte tenu de la faible masse volumique du gaz par rapport aux masses volumiques du liquide et de la coque, l'énergie cinétique du gaz est négligée devant celles du liquide et de la coque.

Par analogie avec l'équation (3.34), l'énergie cinétique du liquide est [DOI 06]

$$T_L = 2\pi\rho_L \left(R_2^3 \dot{R}_2^2 + \frac{2}{c_L} R_2^2 \dot{R}_2 \dot{h}(t) + \frac{1}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau \right), \quad (3.42)$$

où $h(t) = -R_2^2(t)\dot{R}_2(t)$.

L'énergie cinétique de la coque est définie par

$$T_S = \int_{\Omega_S} \frac{1}{2} \rho_S v_S^2 d\Omega, \quad (3.43)$$

v_S étant la vitesse dans la coque. Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité de la coque et de la symétrie sphérique du problème, la vitesse dans la coque s'écrit $v_S = v_S(r, t)e_r = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2} e_r$. Le calcul de l'énergie cinétique de la coque conduit alors à

$$T_S = 2\pi\rho_S R_1^3 \dot{R}_1^2 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (3.44)$$

L'énergie cinétique du système est donc

$$T = 2\pi\rho_L \left(R_2^3 \dot{R}_2^2 + \frac{2}{c_L} R_2^2 \dot{R}_2 \dot{h}(t) + \frac{1}{c_L} \int_0^t [f'(\tau)]^2 d\tau \right) + 2\pi\rho_S R_1^3 \dot{R}_1^2 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (3.45)$$

3.2.2 Calcul de l'énergie potentielle du système

L'énergie potentielle du système gaz/coque/liquide peut être décomposée comme la somme de l'énergie potentielle du gaz U_G , de l'énergie surfacique aux interfaces gaz/coque et coque/liquide U_σ , de l'énergie élastique de la coque U_S , de l'énergie potentielle du liquide U_L et de la contribution due aux forces de pression à l'infini $-W_\infty$.

L'énergie potentielle du gaz, dont le comportement est supposé adiabatique, est donnée par (cf. équation (3.14))

$$U_G = \frac{p_G(R_{10})V_{10}}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3(\gamma-1)}. \quad (3.46)$$

La contribution de la tension de surface à l'énergie potentielle du système est

$$U_\sigma = 4\pi R_1^2 \sigma_1 + 4\pi R_2^2 \sigma_2, \quad (3.47)$$

σ_1 (σ_2) étant la tension de surface à l'interface gaz/coque (à l'interface coque/liquide).

L'énergie interne du liquide s'écrit (cf. équations (3.35) et (3.36))

$$U_L = \frac{2\pi\rho_L}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau. \quad (3.48)$$

Par analogie avec l'équation (3.15), le travail des forces de pression s'exerçant à la surface du liquide à l'infini est

$$W_\infty = -p_\infty V_{20} \left(\left(\frac{R_2}{R_{20}} \right)^3 - 1 \right), \quad (3.49)$$

V_{20} étant le volume initial de la bulle de gaz encapsulée.

L'énergie élastique de la coque est définie par

$$U_S = \int_\Omega \varepsilon d\Omega \quad (3.50)$$

où ε est la densité d'énergie élastique qui s'écrit [LAN 67]

$$\varepsilon = \mu_S (\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk})^2 + \frac{1}{2} K_S \epsilon_{kk}^2, \quad (3.51)$$

avec μ_S et K_S les modules de cisaillement et de compression de la coque et $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ le tenseur des déformations dans le cas des petites déformations (\mathbf{u} est le déplacement). La coque étant supposée incompressible, $div(\mathbf{u}) = 0$ et donc $tr(\epsilon) = \epsilon_{kk} = 0$. La densité d'énergie élastique de la coque se réduit donc à $\varepsilon = \mu_S \epsilon_{ij}^2$. Les oscillations étant supposées radiales, seule la composante radiale

$u(r, t)$ du déplacement est non nulle et seuls les termes diagonaux du tenseur ϵ sont non nuls. La densité d'énergie élastique s'écrit donc [DOI 06]

$$\varepsilon = \mu_S(\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + \epsilon_{\varphi\varphi}^2) = \mu_S \left(\left(\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u(r,t)}{r} \right)^2 \right). \quad (3.52)$$

L'hypothèse d'incompressibilité de la coque implique qu'un petit déplacement $R_1 - R_{1e}$ de l'interface gaz/coque induit un déplacement $u(r,t)$ dans la coque au point r tel que $4\pi R_1^2(R_1 - R_{1e}) = 4\pi r^2 u(r,t)$, R_{1e} étant la position d'équilibre de l'interface gaz/coque pour laquelle la coque n'est pas déformée (aucune contrainte interne dans la coque). Le déplacement radial en un point r de la coque peut donc s'écrire

$$u(r,t) = (R_1 - R_{1e}) \frac{R_1^2}{r^2}, \quad (3.53)$$

d'où la densité d'énergie élastique de la coque

$$\varepsilon = 6\mu_S \frac{R_1^4 (R_1 - R_{1e})^2}{r^6}. \quad (3.54)$$

L'énergie potentielle de la coque est finalement

$$U_S = 24\pi\mu_S R_1^4 (R_1 - R_{1e})^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^4} = 8\pi\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 (R_1 - R_{1e})^2}{R_2^3}. \quad (3.55)$$

L'énergie potentielle du système est donc

$$U = \frac{p_G(R_{10})V_{10}}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3(\gamma-1)} + p_\infty V_{20} \left(\left(\frac{R_2}{R_{20}} \right)^3 - 1 \right) + 4\pi R_1^2 \sigma_1 + 4\pi R_2^2 \sigma_2 + 8\pi\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 (R_1 - R_{1e})^2}{R_2^3} + \frac{2\pi\rho_L}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau. \quad (3.56)$$

3.2.3 Calcul de la fonction de dissipation du système

La fonction de dissipation du système peut être décomposée comme la somme des fonctions de dissipation de la coque et du liquide, soit

$$F = F_S + F_L = \int_{\Omega_S} f_S d\Omega + \int_{\Omega_L} f_L d\Omega. \quad (3.57)$$

Les phénomènes dissipatifs sont d'origine visqueuse dans les deux milieux et les fonctions de dissipation volumique ont des expressions similaires [LAN 67] [DOI 06]

$$f_S = \eta_S \left(\left(\frac{\partial v_S}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_S}{r} \right)^2 \right) \text{ et } f_L = \eta_L \left(\left(\frac{\partial v_L}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_L}{r} \right)^2 \right), \quad (3.58)$$

v_S et v_L étant les composantes radiales de la vitesse dans la coque et le liquide.

On a vu au paragraphe 3.2.1 que $v_S = \frac{R_1^2 \dot{R}_1}{r^2}$, d'où $f_S = 6\eta_S \frac{R_1^4 \dot{R}_1^2}{r^6}$. La fonction de dissipation de la coque est donc

$$F_S = 24\pi\eta_S R_1^4 \dot{R}_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^4} = 8\pi\eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 \dot{R}_1^2}{R_2^3}. \quad (3.59)$$

On a vu au paragraphe 3.1.2 que le potentiel des vitesses est donné par

$$\phi = \frac{h(t - r/c)}{r} \quad (3.60)$$

avec $h(t) = -\dot{R}_2(t)R_2^2(t)$. La vitesse radiale s'écrit alors

$$v_L = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{h(t-r/c_L)}{r^2} - \frac{h'(t-r/c_L)}{rc_L}. \quad (3.61)$$

En négligeant h'/rc_L devant h/r^2 (cf. paragraphe 3.1.2), on obtient

$$v_L = -\frac{h(t)}{r^2} = \frac{R_2^2(t)\dot{R}_2(t)}{r^2}. \quad (3.62)$$

La fonction de dissipation du liquide est donc

$$F_L = 24\pi\eta_L R_2^4 \dot{R}_2^2 \int_{R_2}^{+\infty} \frac{dr}{r^4} = 8\pi\eta_L R_2 \dot{R}_2^2. \quad (3.63)$$

La fonction de dissipation du système s'écrit finalement

$$F = 8\pi\eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 \dot{R}_1^2}{R_2^3} + 8\pi\eta_L R_2 \dot{R}_2^2. \quad (3.64)$$

3.2.4 Obtention de l'équation du mouvement

La fonction de Lagrange du système est $L = T - U$, l'énergie cinétique T étant donnée par l'équation (3.45) et l'énergie potentielle U par l'équation (3.56). L'équation du mouvement est obtenue en appliquant l'équation (3.4), la fonction de dissipation étant donnée par l'équation (3.64). On a choisi R_1 comme coordonnée généralisée. Compte tenu des relations entre R_1 , \dot{R}_1 , R_2 et \dot{R}_2 , la fonction de Lagrange peut s'écrire

$$L = 2\pi\rho_S R_1^3 \dot{R}_1^2 + 2\pi(\rho_L - \rho_S) \frac{R_1^4 \dot{R}_1^2}{R_2} + \frac{4\pi\rho_L}{c_L} R_1^2 \dot{R}_1 \dot{h} - \frac{p_G(R_{10})V_{10}}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3(\gamma-1)} - 4\pi\sigma_1 R_1^2 - 4\pi\sigma_2 R_2^2 - \frac{4}{3}\pi p_\infty (R_1^3 - R_{10}^3) - 8\pi\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 (R_1 - R_{1e})^2}{R_2^3}, \quad (3.65)$$

et la fonction de dissipation

$$F = 8\pi\eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 \dot{R}_1^2}{R_2^3} + 8\pi\eta_L \frac{R_1^4 \dot{R}_1^2}{R_2^3}. \quad (3.66)$$

Dans ces deux expressions apparaissent des termes qui ne dépendent que de R_1 et \dot{R}_1 car on peut voir R_2 comme une fonction de R_1 : $R_2^3 = R_1^3 + R_{20}^3 - R_{10}^3$ et $dR_2/dR_1 = R_1^2/R_2^3$. Lors du calcul de $\partial L/\partial R_1$, les termes dans lesquels R_2 intervient sont calculés en appliquant $\frac{\partial}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dR_1}$. L'équation du mouvement ainsi obtenue est [DOI 06]

$$\begin{aligned} & R_1 \ddot{R}_1 \left[1 + \left(\frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \right) \frac{R_1}{R_2} \right] + \dot{R}_1^2 \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \right) \left(\frac{4R_2^3 - R_1^3}{2R_2^3} \right) \frac{R_1}{R_2} \right] \\ & - \frac{1}{c_L} \frac{\rho_L}{\rho_S} \left(R_2^2 \ddot{R}_2 + 6R_2 \dot{R}_2 \ddot{R}_2 + 2\dot{R}_2^3 \right) = \frac{1}{\rho_S} \left(p_G(R_{10}) \left(\frac{R_{10}}{R_1} \right)^{3\gamma} - p_\infty(t) \right) \\ & - \frac{2\sigma_1}{\rho_S R_1} - \frac{2\sigma_2}{\rho_S R_2} - \frac{4\dot{R}_1}{\rho_S R_1 R_2^3} \left[\eta_L R_1^3 + \eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) \right] \\ & - \frac{4\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3)}{\rho_S R_2^3} \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_1} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_1} \right) \left(1 - \frac{3R_1^3}{R_2^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Cette équation correspond à une extension des travaux de Church (cf. équation (2.6)) au cas d'un liquide compressible (terme supplémentaire en $1/c_L$ dans le membre de gauche). Par ailleurs, l'équation de Church ne contient pas le facteur entre crochets dans le terme dû à l'élasticité de la coque dans le membre de droite.

L'expression de la pression du gaz dans l'état initial est tirée de l'équation (3.67) écrite à $t = 0$, soit

$$p_G(R_{10}) = P_0 + \frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} + 4\mu_S \left(1 - \frac{R_{10}^3}{R_{20}^3} \right) \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_{10}} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_{10}} \right) \left(1 - \frac{3R_{10}^3}{R_{20}^3} \right) \right]. \quad (3.68)$$

A partir d'observations expérimentales sur l'Albunex, Church avait considéré que $p_G(R_{10}) = P_0$ et avait tiré de l'équation (3.68) (en omettant le terme entre crochets) l'expression de R_{1e}

$$R_{1e \text{ Church}} = R_{10} \left[1 + \frac{1}{4\mu_S} \left(\frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right) \frac{R_{20}^3}{R_{20}^3 - R_{10}^3} \right]. \quad (3.69)$$

Le raisonnement de Church n'est valable que pour des coques perméables au gaz, ce qui n'est pas le cas avec des agents de contraste à coque épaisse comme le Quantison [DOI 06].

Le rayon R_{1e} correspond à l'état non déformé de la coque par rapport auquel on définit le champ de déformation u dans la coque. La déformation d'une sphère creuse, de rayons intérieur R_i et extérieur R_e , soumise aux pressions p_i à l'intérieur et p_e à l'extérieur est purement radiale et a pour expression $u = ar + b/r^2$ avec [LAN 67]

$$a = \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{3K_S(R_e^3 - R_i^3)} \quad \text{et} \quad b = \frac{R_i^3 R_e^3 (p_i - p_e)}{4\mu_S(R_e^3 - R_i^3)}. \quad (3.70)$$

Par analogie, la déformation de la coque à l'état initial (rayons R_{10} et R_{20} , pressions $p_G(R_{10}) - 2\sigma_1/R_{10}$ et $P_0 + 2\sigma_2/R_{20}$) est $u = ar + b/r^2$ avec

$$a = \frac{R_{10}^3 \left(p_G(R_{10}) - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} \right) - R_{20}^3 \left(P_0 + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right)}{3K_S(R_{20}^3 - R_{10}^3)}, \quad (3.71)$$

$$b = \frac{R_{10}^3 R_{20}^3 \left(p_G(R_{10}) - P_0 - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right)}{4\mu_S(R_{20}^3 - R_{10}^3)}. \quad (3.72)$$

Par définition, la déformation en $r = R_{10}$ est $u_{10} = R_{10} - R_{1e}$; on en déduit l'expression de R_{1e} [DOI 06]

$$R_{1e} = R_{10} \left[1 - \frac{1}{4\mu_S} \left(P_0 + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right) \frac{R_{20}^3}{R_{10}^3} \right]. \quad (3.73)$$

3.2.5 Oscillations de faible amplitude - Développement au premier ordre

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude ($R_1(t) = R_{10} + \xi(t)$ avec $\xi \ll R_{10}$), le développement au premier ordre en ξ de l'équation (3.67) conduit à l'équation d'un oscillateur harmonique amorti [DOI 06]

$$\ddot{\xi} + \delta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\frac{P(t)}{\alpha \rho_S R_{10}}, \quad (3.74)$$

avec

$$\alpha = \left[1 + \frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S} \frac{R_{10}}{R_{20}} \right], \quad (3.75)$$

$$\delta = \delta_v + \delta_r, \quad (3.76)$$

$$\delta_v = \frac{4}{\alpha \rho_S R_{10}^2 R_{20}^3} [\eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3) + R_{10}^3 \eta_L], \quad (3.77)$$

$$\delta_r = \frac{\rho_L R_{10} \omega^2}{\alpha \rho_S c_L}, \quad (3.78)$$

$$P(t) = P \sin(\omega t), \quad (3.79)$$

et

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\alpha \rho_S R_{10}^2} \left\{ 3\zeta_{PG}(R_{10}) - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} + \frac{4\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3)}{R_{20}^3} \left[1 - D \left(1 + \frac{3R_{10}^3}{R_{20}^3} \right) \right] \right\}, \quad (3.80)$$

en posant $D = \frac{1}{4\mu_S} \left(P_0 + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right) \frac{R_{20}^3}{R_{10}^3}$.

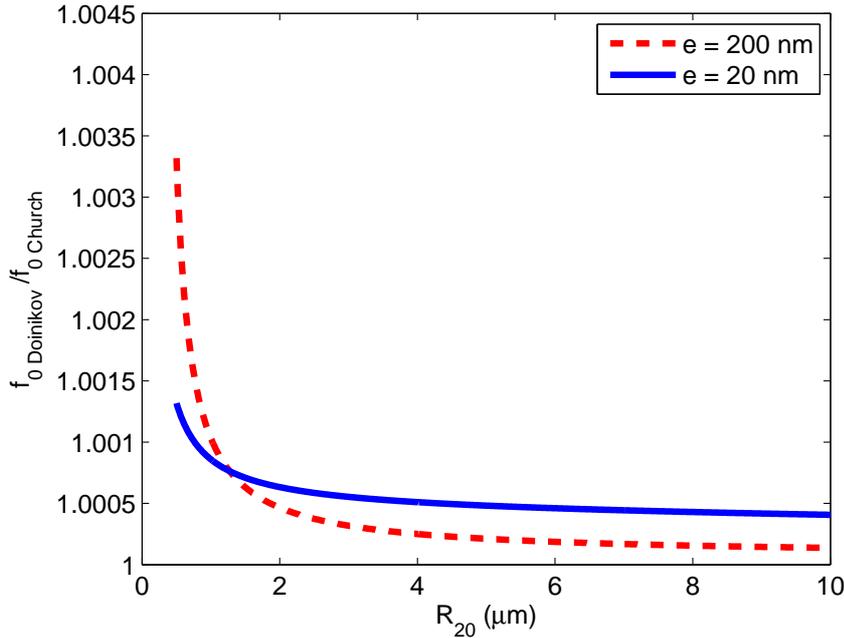


FIG. 3.1 – Evolution de $f_{0 \text{ Doinikov}} / f_{0 \text{ Church}}$ en fonction du rayon R_{20} pour deux épaisseurs de la coque

Les courbes de la figure 3.1 ont été obtenues avec les valeurs des paramètres répertoriées dans le tableau 3.1. Le comportement du gaz est supposé adiabatique, soit $\gamma = 1,4$. Les épaisseurs ($e = R_{20} - R_{10}$) choisies correspondent à deux agents de contraste commercialisés, l'Albunex ($e = 20 \text{ nm}$) et le Quantison ($e = 200 \text{ nm}$) [DOI 06].

L'écart relatif entre les fréquences propre de Doinikov (cf. équation (3.80)) et de Church (cf. équation (2.14)) est inférieur à 0,1% pour $R_{20} > 1 \mu\text{m}$. Il augmente lorsque le rayon diminue et l'épaisseur augmente, tout en restant inférieur à 1% pour la plage de rayon étudiée.

pression statique	P_0	$1,013.10^5 Pa$
masse volumique du liquide	ρ_L	$998 kg.m^{-3}$
viscosité du liquide	η_L	$10^{-3} kg.m^{-1}.s^{-1}$
masse volumique du solide	ρ_S	$1100 kg.m^{-3}$
viscosité du solide	η_S	$1,77 kg.m^{-1}.s^{-1}$
module de cisaillement	μ_S	$88,8 MPa$
tension de surface interface gaz/solide	σ_1	$40.10^{-3} N.m^{-1}$
tension de surface interface solide/liquide	σ_2	$5.10^{-3} N.m^{-1}$

TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres pour les simulations sous Matlab® [CHU 95] [DOI 06]

3.3 Prise en compte d'un mouvement de translation

On souhaite maintenant prendre en compte un mouvement de translation le long de l'axe Oz (cf. figure 3.2). Ce mouvement peut être engendré par la pression de radiation de l'onde acoustique incidente. Il est également observé lors de l'interaction de l'agent de contraste avec une interface ou un autre agent de contraste. Le mouvement de translation du centre de l'agent de contraste est décrit par le vecteur $OC = z(t)e_z$, O étant l'origine du repère fixe ($Oxyz$). Les coordonnées du point M appartenant à l'interface 1 (gaz/coque) sont $(R_1(t), \theta, \varphi)$ dans le repère local, soit dans le repère fixe

$$OM = \begin{cases} R_1(t) \sin \theta \cos \varphi \\ R_1(t) \sin \theta \sin \varphi \\ R_1(t) \cos \theta + z(t) \end{cases} \quad (3.81)$$

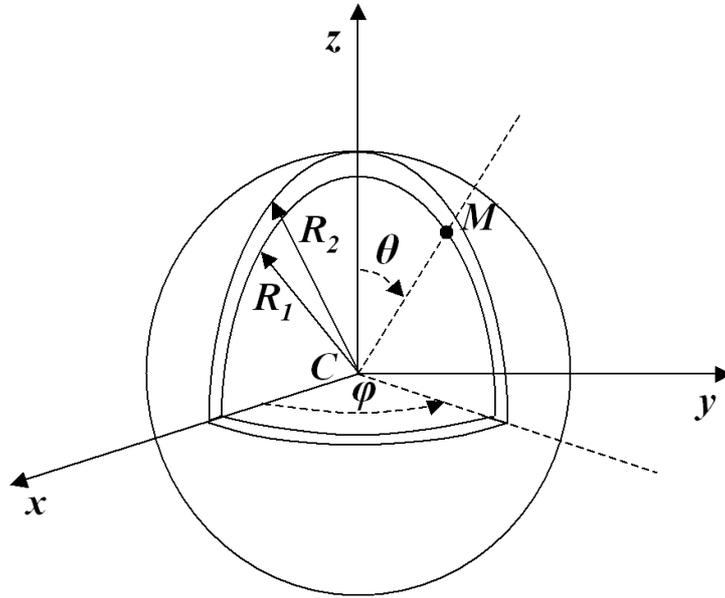


FIG. 3.2 – Systèmes de coordonnées associés à l'agent de contraste

Afin d'obtenir les équations du mouvement permettant de décrire ce mouvement de translation ainsi que les oscillations radiales de l'agent de contraste, on utilise le formalisme lagrangien avec le couple de coordonnées généralisées (R_1, z) .

L'énergie cinétique du système s'écrit [DOI 06]

$$T = \frac{1}{2}m_b\dot{z}^2 + T_L + T_S, \quad (3.82)$$

avec m_b la masse de l'agent de contraste, $z(t)$ la position du centre de l'agent de contraste, T_L l'énergie cinétique du liquide et T_S l'énergie cinétique de la coque.

L'énergie cinétique du liquide peut s'exprimer sous la forme (3.12), le potentiel des vitesses ϕ vérifiant l'équation de propagation (3.30) et la condition aux limites à la surface de la coque

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r)_{r=R_2(t)} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R_2(t)}. \quad (3.83)$$

Le potentiel des vitesses peut se mettre sous la forme [DOI 05]

$$\phi = \frac{h(t - r/c)}{r} + \left(\frac{g(t - r/c)}{r^2} + \frac{g'(t - r/c)}{rc} \right) \cos \theta \quad (3.84)$$

avec $h(t) = -R_2^2(t)\dot{R}_2(t)$ et $g(t) = -\frac{1}{2}R_2^3(t)\dot{z}(t)$. L'expression du potentiel des vitesses faisant intervenir des termes supplémentaires par rapport au cas des seules oscillations radiales (comparer les équations (3.31) et (3.84)), l'expression finale de l'énergie cinétique du liquide correspond donc à l'équation (3.42) auquel doit s'ajouter les termes dus au mouvement de translation. Les termes d'ordre supérieur à deux en $\frac{1}{c_L}$ étant négligés, Doinikov a montré que la contribution du mouvement de translation se réduisait à $\frac{1}{3}\pi\rho_L R_2^3 \dot{z}^2$ [DOI 05]. D'où l'expression de l'énergie cinétique du liquide dans le cas des mouvements simultanés d'oscillations radiales et de translation [DOI 05]

$$T_L = 2\pi\rho_L \left(R_2^3 \dot{R}_2^2 + \frac{1}{6}R_2^3 \dot{z}^2 + \frac{2}{c_L} R_2^2 \dot{R}_2 \dot{z} + \frac{1}{c_L} \int_0^t [h'(\tau)]^2 d\tau \right). \quad (3.85)$$

L'énergie cinétique de la coque n'est pas modifiée par le mouvement de translation [DOI 06].

Le mouvement de translation n'a pas d'influence sur le calcul de l'énergie potentielle du système dont l'expression est donnée par l'équation (3.56). Il faut cependant préciser que la pression acoustique P apparaissant dans l'expression de p_∞ (cf. équation(3.5)) peut dépendre de la position de l'agent de contraste, on notera donc $P(z,t)$ au lieu de $P(t)$.

La fonction de dissipation associée à la viscosité du liquide faisant intervenir les composantes du tenseur des taux de déformations \mathbf{D} , il faut connaître les composantes du vecteur vitesse \mathbf{v} dans le liquide. Doinikov et al. ont montré que la vitesse en tout point du liquide s'écrit [DOI 06]

$$\mathbf{v} = \left[\frac{R_2^2 \dot{R}_2}{r^2} + \frac{\dot{z}}{2} \left(\frac{3R_2}{r} - \frac{R_2^3}{r^3} \right) \cos \theta \right] \mathbf{e}_r + \left[-\frac{\dot{z}}{4} \left(\frac{3R_2}{r} + \frac{R_2^3}{r^3} \right) \sin \theta \right] \mathbf{e}_\theta, \quad (3.86)$$

ce qui conduit à l'expression de la fonction de dissipation du liquide [DOI 06]

$$F_L = 8\pi\eta_L R_2 \dot{R}_2^2 + 3\pi\eta_L R_2 \dot{z}^2. \quad (3.87)$$

La fonction de dissipation de la coque est donnée par l'équation (3.59), en considérant que le champ de vitesse dans la coque n'est pas modifié par la prise en compte d'un mouvement global de translation.

La fonction de Lagrange du système s'écrit finalement (les termes dus au mouvement de translation sont en gras, les autres termes sont les mêmes que dans le cas des seules oscillations radiales)

$$L = \frac{1}{3}\pi\rho_L R_2^3 \dot{z}^2 + 2\pi\rho_S R_1^3 \dot{R}_1^2 + 2\pi(\rho_L - \rho_S) \frac{R_1^4 \dot{R}_1^2}{R_2} + \frac{4\pi\rho_L}{c_L} R_1^2 \dot{R}_1 \dot{f} - \frac{p_G(R_{10})V_{10}}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3(\gamma-1)} - \frac{4}{3}\pi(P_0 + \mathbf{P}(z,t))(R_1^3 - R_{10}^3) - 4\pi\sigma_1 R_1^2 - 4\pi\sigma_2 R_2^2 - 8\pi\mu_S(R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1(R_1 - R_{1e})^2}{R_2^3}, \quad (3.88)$$

et la fonction de dissipation du système

$$F = 8\pi\eta_S(R_{20}^3 - R_{10}^3) \frac{R_1 \dot{R}_1^2}{R_2^3} + 8\pi\eta_L R_2 \dot{R}_2^2 + \mathbf{3}\pi\eta_L R_2 \dot{z}^2. \quad (3.89)$$

Les équations du mouvement sont donc, en appliquant la formule (3.4) avec le couple de coordonnées généralisées (R_1, z) [DOI 06]

$$R_1 \ddot{R}_1 \left[1 + \left(\frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S}\right) \frac{R_1}{R_2}\right] + \dot{R}_1^2 \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{\rho_L - \rho_S}{\rho_S}\right) \left(\frac{4R_2^3 - R_1^3}{2R_2^3}\right) \frac{R_1}{R_2}\right] - \frac{1}{c_L} \frac{\rho_L}{\rho_S} \left(R_2^2 \ddot{R}_2 + 6R_2 \dot{R}_2 \ddot{R}_2 + 2\dot{R}_2^3\right) = \frac{1}{\rho_S} \left(p_G(R_{10}) \left(\frac{R_{10}}{R_1}\right)^{3\gamma} - P_0 - \mathbf{P}(z,t)\right) + \frac{\rho_L}{\rho_S} \frac{\dot{z}^2}{4} - \frac{2\sigma_1}{\rho_S R_1} - \frac{2\sigma_2}{\rho_S R_2} - \frac{4\dot{R}_1}{\rho_S R_1 R_2^3} [\eta_L R_1^3 + \eta_S (R_{20}^3 - R_{10}^3)] - \frac{4\mu_S (R_{20}^3 - R_{10}^3)}{\rho_S R_2^3} \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_1}\right) \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{1e}}{R_1}\right) \left(1 - \frac{3R_1^3}{R_2^3}\right)\right] \quad (3.90)$$

et

$$m_b \ddot{z} + \frac{2}{3}\pi\rho_L \frac{d}{dt} (R_2^3 \dot{z}) = -\frac{4}{3}\pi R_2^3 \frac{\partial}{\partial z} (P(z,t)) - \mathbf{6}\pi\eta_L R_2 \dot{z}. \quad (3.91)$$

Ce travail a permis d'établir, dans le cadre de la mécanique lagrangienne, une synthèse des principales équations introduites lors de l'étude bibliographique, ainsi que les équations couplées décrivant à la fois les oscillations radiales et le mouvement de translation de l'agent de contraste.

L'utilisation de caméras ultra-rapides a en effet permis de visualiser les variations de rayon mais également de mettre en évidence les mouvements de translation dus à la pression de radiation [ZHE 07]. Des expériences ont montré que la pression de radiation pouvait être utilisée pour diriger des agents de contraste spécifiques vers la zone d'intérêt et pour augmenter de façon significative le nombre de liaisons entre agents de contraste et cellules cibles. Cet effet pourrait être mis à profit en imagerie (augmenter le contraste dans la zone d'intérêt) mais également en thérapie (délivrer les substances thérapeutiques au plus près des cellules cibles).

Les équations couplées s'avèrent également être indispensables pour décrire le mouvement d'un agent de contraste situé à proximité d'une paroi [MAR 06] [GAR 07-b] ou celui de deux agents de contraste placés à proximité l'un de l'autre à l'aide de pinces optiques spécifiquement dédiées à la manipulation des agents de contraste [GAR 06] [GAR 07-a].

Chapitre 4

Régime non linéaire : méthode de l'équilibrage harmonique

Lorsque les sollicitations deviennent importantes (typiquement 50 – 100 kPa), le comportement des agents de contraste présente des non linéarités non négligeables pouvant être exploitées pour l'imagerie et la thérapie [JON 00-a] [JON 02]. L'aspect non linéaire des équations décrivant le comportement d'une bulle de gaz ou d'un agent de contraste est abordé dans ce chapitre à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique. Après un bref rappel du principe de cette méthode, elle est appliquée à une bulle de gaz (équation de Rayleigh-Plesset), tout d'abord en menant les calculs de façon analytique puis à l'aide de MANLAB, programme développé sous MATLAB® par Rémi Arquier au cours de sa thèse [ARQ 07] [MAN 09]. Dans le cas d'un agent de contraste, l'étude des modèles de Hoff et de Marmottant est réalisée directement avec MANLAB.

Soit un système physique dont le comportement est gouverné par l'équation non linéaire

$$\ddot{x} + f_{NL}(x, \dot{x}) = 0. \quad (4.1)$$

La **méthode de l'équilibrage harmonique** consiste à rechercher les solutions périodiques de l'équation (4.1) sous la forme d'une série de Fourier tronquée

$$x(t) = \sum_{k=0}^H (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t), \quad (4.2)$$

en équilibrant les termes relatifs aux différentes composantes fréquentielles ($0 \leq k \leq H$), tout en négligeant les composantes supérieures ($k > H$) [NAY 79].

4.1 Etude analytique pour une bulle de gaz (modèle RPNNP)

Le comportement d'une bulle de gaz dans un liquide incompressible est régi par l'équation

$$\rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - P_0 + P \cos \omega t, \quad (4.3)$$

R étant le rayon de la bulle et R_0 son rayon à l'équilibre (modèle "RPNNP" décrit au paragraphe 1.1.3). Pour cette étude analytique, on se limite aux oscillations libres d'une bulle de gaz sans prendre en compte la tension de surface ni la viscosité (i.e. $P = \sigma = \eta = 0$), soit

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{P_0}{\rho_L} \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Afin d'appliquer analytiquement la méthode de l'équilibrage harmonique, on se place dans le cas d'oscillations de faible amplitude pour lesquelles le rayon de la bulle s'écrit $R = R_0(1 + x)$ avec $x \ll 1$ et on développe l'équation à l'ordre 3 en x . L'équation (4.4) devient alors

$$\ddot{x} + x\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 + ax - bx^2 + cx^3 = 0, \quad (4.5)$$

$$\text{avec } a = \frac{3\zeta P_0}{\rho_L R_0^2}, b = \frac{3\zeta(3\zeta + 1)P_0}{2\rho_L R_0^2} \text{ et } c = \frac{3\zeta(3\zeta + 1)(3\zeta + 2)P_0}{6\rho_L R_0^2}.$$

4.1.1 Recherche des solutions sous la forme $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos \psi$

Les solutions périodiques de l'équation (4.5) sont recherchées dans un premier temps sous la forme $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos \psi$. En injectant cette solution, on obtient

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A_1 \cos \psi - \frac{1}{2}\omega^2 A_1^2 (1 + \cos 2\psi) + \frac{3}{4}\omega^2 A_1^2 (1 - \cos 2\psi) \\ & + a A_1 \cos \psi - \frac{1}{2}b A_1^2 (1 + \cos 2\psi) + \frac{1}{4}c A_1^3 (\cos 3\psi + 3 \cos \psi) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

On équilibre ensuite les termes en $\cos \psi$ en négligeant tous les autres termes, soit

$$\omega^2 = a + \frac{3}{4}c A_1^2. \quad (4.7)$$

La relation amplitude-fréquence s'écrit donc

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{(3\zeta + 1)(3\zeta + 2)}{8} A_1^2 \right), \quad (4.8)$$

avec $\omega_0^2 = a = \frac{3\zeta P_0}{\rho_L R_0^2}$ pulsation associée à la fréquence de Minnaert. La figure 4.1 représente la courbe

obtenue dans le cas isotherme ($\zeta = 1$), soit $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{5}{2} A_1^2 \right)$, avec $P_0 = 1,013.10^5 \text{ Pa}$, $\rho_L = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $R_0 = 2.10^{-6} \text{ m}$ et $\omega_0 = 8,72.10^6 \text{ rad/s}$. Le système est a priori raidissant vu que la fréquence propre des oscillations augmente avec leur amplitude.

On ne peut cependant pas se satisfaire de ce résultat. En effet, le raisonnement mené ici avec une solution de la forme $A_1 \cos \psi$ revient à approximer l'équation (4.5) par une équation de type Duffing $\ddot{x} + ax + cx^3 = 0$ car les autres termes ($x\ddot{x}$, \dot{x}^2 et x^2) sont en $(\cos \psi)^2$ ou $(\sin \psi)^2$. Ils ne font donc pas apparaître de terme en $\cos \psi$ et ne sont pas pris en compte lors de l'étape d'équilibrage.

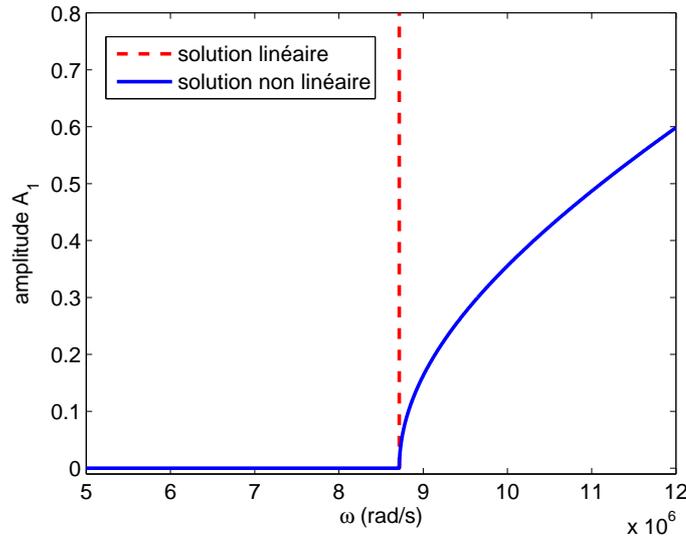
4.1.2 Recherche des solutions sous la forme $x = A_0 + A_1 \cos \psi$

Afin d'améliorer la prise en compte des termes non linéaires, un terme constant A_0 est inclus dans l'expression de la solution et on reprend la démarche d'équilibrage harmonique en équilibrant d'une part les termes constants et d'autre part les termes en $\cos \psi$. On fait par ailleurs l'hypothèse que le terme en $\cos \psi$ est le terme prépondérant, soit $A_0 \ll A_1$. Seuls les termes faisant intervenir A_1 , A_1^2 et A_0 sont donc conservés, ce qui conduit au système

$$\begin{cases} A_0 = \frac{b}{2a} A_1^2 - \frac{1}{4a} \omega^2 A_1^2, \\ (1 + A_0)\omega^2 = a - 2bA_0 + \frac{3c}{4} A_1^2. \end{cases} \quad (4.9)$$

En reportant l'expression de A_0 dans la deuxième équation, on obtient une équation bicarrée en ω

$$\frac{A_1^2}{4a} \omega^4 - \omega^2 + a \left[1 + \left(\frac{3c}{4a} - \frac{b^2}{a^2} \right) A_1^2 \right] = 0, \quad (4.10)$$

FIG. 4.1 – Relation amplitude-fréquence pour une solution de la forme $A_1 \cos \psi$

dont la solution est dans le cas isotherme ($\zeta = 1$)

$$\omega^2 = \frac{2\omega_0^2}{A_1^2} \left(1 + \sqrt{1 - A_1^2 + \frac{3}{2}A_1^4} \right). \quad (4.11)$$

En travaillant avec l'expression $x = A_0 + A_1 \cos \psi$, on trouve maintenant que le système est mollissant, comme le montre la figure 4.2 représentant la courbe amplitude-fréquence obtenue à partir de l'équation (4.11), alors que le système était a priori raidissant d'après l'étude menée au paragraphe précédent avec l'expression $x = A_1 \cos \psi$. Le choix du nombre de termes retenus dans le développement en série de Fourier est donc un élément déterminant dans l'utilisation de la méthode de l'équilibrage harmonique. La prise en compte d'un nombre suffisant d'harmoniques est nécessaire pour obtenir l'essentiel du comportement du système : il est d'usage de choisir H supérieur ou égal à l'ordre des non linéarités présentes dans l'équation, typiquement $H \geq 2$ (resp. $H \geq 3$) pour des non linéarités quadratiques (resp. cubiques).

La prise en compte des termes non linéaires de l'équation (4.4) reste encore insuffisante car ils ont une contribution en $\cos 2\psi$ qui a été négligée ici.

4.1.3 Recherche des solutions sous la forme $x = A_0 + A_1 \cos \psi + A_2 \cos 2\psi$

L'étape suivante est donc l'ajout du terme $A_2 \cos 2\psi$ dans l'expression de la solution. L'équilibrage du terme constant et des termes en $\cos \psi$ et $\cos 2\psi$ conduit, en ne conservant que les termes en A_1 , A_1^2 , A_0 et A_2 , au système

$$\begin{cases} A_0 = \frac{b}{2a}A_1^2 - \frac{1}{4a}\omega^2 A_1^2 - \frac{3}{a}\omega^2 A_2, \\ (1 + A_0 - \frac{1}{2}A_2)\omega^2 = a - 2bA_0 + \frac{3c}{4}A_1^2 - bA_2, \\ (a - 4\omega^2)A_2 = \frac{b}{2}A_1^2 + \frac{5}{4}\omega^2 A_1^2, \end{cases} \quad (4.12)$$

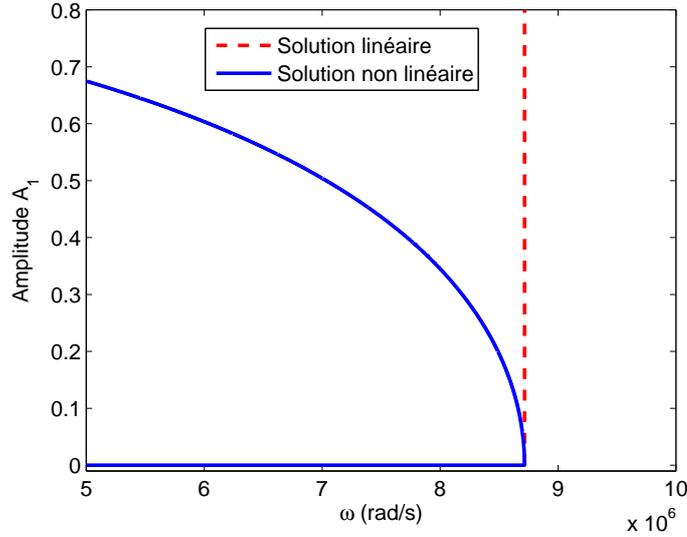


FIG. 4.2 – Relation amplitude-fréquence pour une solution de la forme $A_0 + A_1 \cos \psi$

duquel on peut tirer l'expression des coefficients A_2 puis A_0 en fonction de ω et A_1

$$\begin{cases} A_2 = \left(\frac{b}{2} + \frac{5}{4}\omega^2 \right) \frac{A_1^2}{a - 4\omega^2}, \\ A_0 = \left[\frac{b}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{7b}{2a} \right) \omega^2 - \frac{11}{4a}\omega^4 \right] \frac{A_1^2}{a - 4\omega^2}. \end{cases} \quad (4.13)$$

On obtient alors une équation d'ordre 6 en ω

$$\frac{11A_1^2}{4a}\omega^6 + \left[4 + \left(\frac{7}{8} + \frac{14b}{a} \right) A_1^2 \right] \omega^4 - \left[5a + \left(3c - \frac{b}{2} - \frac{7b^2}{a} \right) A_1^2 \right] \omega^2 + a^2 \left[1 + \left(\frac{3c}{4a} - \frac{3b^2}{2a^2} \right) A_1^2 \right] = 0, \quad (4.14)$$

qui, même dans le cas isotherme et avec l'aide de MapleTM, s'avère difficilement exploitable. A ce stade, on ne peut pas conclure quant au caractère mollissant ou raidissant du comportement de la bulle de gaz. Il semblerait qu'il soit mollissant mais il faudrait le confirmer en représentant les solutions de l'équation (4.14).

Compte tenu de la forte non linéarité de l'équation étudiée, la méthode de l'équilibrage harmonique devient très vite fastidieuse lorsque les développements sont effectués de façon analytique. C'est pourquoi nous avons utilisé un outil numérique dédié au traitement des équations non linéaires et développé au sein de l'équipe "Méthodes numériques" du LMA.

4.2 L'outil MANLAB

On considère un système de n équations différentielles du premier ordre

$$\dot{Y} = f(Y, \lambda), \quad (4.15)$$

où Y est le vecteur contenant les n inconnues et λ un paramètre (la fréquence d'excitation par exemple). MANLAB permet de suivre les solutions périodiques en fonction de λ en combinant la méthode d'équilibrage harmonique (EH) avec une technique de continuation, la méthode asymptotique numérique (MAN).

F. Pérignon a introduit dans sa thèse la dénomination EHMAN pour cette technique [PER 04]. L'originalité de MANLAB réside dans l' "automatisation" de l'équilibrage harmonique, quel que soit le nombre H d'harmoniques considérés et quel que soit le système à étudier, sous réserve que le système d'équations décrivant le système puisse se mettre sous une forme au plus quadratique.

Dans un premier temps, il est nécessaire de modifier le système initial (4.15) pour le mettre sous une forme au plus quadratique nettement plus propice à l'application de l'équilibrage harmonique. Le système d'équations est donc remanié, en définissant si besoin de nouvelles inconnues, afin d'obtenir un nouveau système de N équations différentielles du premier ordre de la forme

$$m(\dot{Z}) = c(t) + l(Z) + q(Z, Z), \quad (4.16)$$

où Z est le nouveau vecteur des inconnues, c est un vecteur indépendant de Z , $l(\cdot)$ et $m(\cdot)$ sont des opérateurs linéaires et $q(\cdot, \cdot)$ est un opérateur bilinéaire. Le vecteur Z est de dimension $N > n$ s'il est nécessaire de définir une (des) nouvelle(s) variable(s) pour passer du système initial (4.15) à la forme quadratique (4.16) et de dimension $N = n$ dans le cas contraire. L'obtention de la forme quadratique pour des cas classiques (oscillateur de Van der Pol, système de Rössler, oscillateur de Duffing forcé) est largement illustrée dans [COC 09].

On applique alors la méthode de l'équilibrage harmonique en décomposant le vecteur Z sous la forme

$$Z(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^H (Z_{ck} \cos k\omega t + Z_{sk} \sin k\omega t) \quad (4.17)$$

et en injectant cette expression dans (4.16). L'équilibrage des termes relatifs aux différentes composantes fréquentielles ($0 \leq k \leq H$), tout en négligeant les composantes supérieures ($k > H$), conduit à un système de $(2H + 1) \times N$ équations qui peut s'écrire sous la forme

$$\omega M(U) = C + L(U) + Q(U, U), \quad (4.18)$$

avec $U = [Z_0^t, Z_{1c}^t, Z_{1s}^t \dots Z_{Nc}^t, Z_{Ns}^t]^t$ vecteur de dimension $(2H + 1) \times N$. Les opérateurs $M(\cdot)$, C , $L(\cdot)$ et $Q(\cdot, \cdot)$ ne dépendent que des opérateurs $m(\cdot)$, c , $l(\cdot)$ et $q(\cdot, \cdot)$ et du nombre H d'harmoniques considérés. Le passage de c à C , de $l(\cdot)$ à $L(\cdot)$ et de $m(\cdot)$ à $M(\cdot)$ ne présente pas de difficulté. L'obtention de l'expression de l'opérateur $Q(\cdot, \cdot)$ à partir de $q(\cdot, \cdot)$ est détaillée dans [COC 09].

On dispose à ce stade d'un système de $(2H + 1) \times N$ équations algébriques à $(2H + 1) \times N + 2$ inconnues : les composantes du vecteur U , le paramètre λ et la pulsation ω . Dans la suite on se limite à l'étude de systèmes forcés pour lesquels on identifie le paramètre λ à la pulsation ω . On a donc un système de $(2H + 1) \times N$ équations à $(2H + 1) \times N + 1$ inconnues.

Dans un deuxième temps, la méthode asymptotique numérique (MAN) est utilisée pour résoudre le système (4.18) obtenu après application de l'équilibrage harmonique. La MAN permet de résoudre des systèmes algébriques non linéaire du type

$$R(U, \lambda) = 0, \quad (4.19)$$

où R et U sont de même dimension et λ est un paramètre. Le système a donc plus d'inconnues que d'équations et est résolu par une méthode de continuation afin de suivre les branches de solution U en fonction de λ . Le principe de la MAN [COC 07] consiste à développer les inconnues et le paramètre sous forme de séries entières d'un paramètre de chemin, ce qui permet de décomposer le système (4.19) en une série de problèmes linéaires. La MAN et son implémentation dans MANLAB sont décrites en détail dans [PER 04] et [ARQ 07]. Une notice et de nombreux exemples sont accessibles sur un site web dédié au logiciel [MAN 09].

D'un point de vue pratique, l'utilisation de MANLAB requiert la connaissance des opérateurs $m(\cdot)$, c , $l(\cdot)$ et $q(\cdot, \cdot)$ dont les expressions découlent de la réécriture de l'équation étudiée en un système d'équations différentielles du premier ordre. L'application de l'équilibrage harmonique (obtention des opérateurs $M(\cdot)$, C , $L(\cdot)$ et $Q(\cdot, \cdot)$ et du système d'équations algébriques) est réalisée automatiquement par MANLAB. On construit alors les courbes amplitude-fréquence pas à pas à partir du point de départ (U_0, λ_0) choisi.

Dans la suite du chapitre sont présentés les résultats obtenus en utilisant MANLAB pour étudier les solutions des équations décrivant le comportement d'une bulle de gaz ou d'un agent de contraste dans un liquide. Les systèmes d'équations différentielles du premier ordre et les opérateurs $m(\cdot)$, c , $l(\cdot)$ et $q(\cdot, \cdot)$ sont systématiquement précisés.

4.3 Bulle de gaz (modèle RPNNP)

MANLAB a tout d'abord été utilisé pour étudier les solutions périodiques de l'équation (4.3). On s'est limité au cas du comportement **isotherme** du gaz ($\zeta = 1$) afin de ne travailler qu'avec des puissances entières de la variable R . L'équation doit être remaniée pour se mettre sous la forme quadratique utilisée sous MANLAB.

4.3.1 Mise sous forme quadratique

On pose $\tau = \Omega t$, avec $\Omega = 10^6 \text{ rad/s}$, et on note $\frac{dX}{d\tau} = X'$, donc $\dot{X} = \Omega X'$ et $\ddot{X} = \Omega^2 X''$. On définit les variables $u = R/R_0$, $v = R'/R_0$, $x = 1/u$, $y = x^2$, $z = v^2$ et $f = P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega}\tau\right)$. L'équation (4.3) devient alors

$$v' = -\frac{P_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2} x - \frac{2\sigma/R_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2} y + \frac{P_0 + 2\sigma/R_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2} y^2 - \frac{4\eta_L}{\rho_L \Omega R_0^2} yv - \frac{3}{2}xz + \frac{1}{\rho_L \Omega^2 R_0^2} xf. \quad (4.20)$$

On définit les constantes suivantes

$$A = \frac{P_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2}, B = \frac{2\sigma/R_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2}, C = \frac{4\eta_L}{\rho_L \Omega R_0^2} \text{ et } D = \frac{1}{\rho_L \Omega^2 R_0^2}. \quad (4.21)$$

L'équation (4.3) peut donc s'écrire sous la forme du système du premier ordre

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -Ax - By + (A+B)y^2 - Cvy - \frac{3}{2}xz + Dxf \\ 0 = 1 - xu \\ 0 = y - x^2 \\ 0 = z - v^2 \\ 0 = -P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega}\tau\right) + f \end{cases} \quad (4.22)$$

En posant $Z = [u, v, x, y, z, f]^t$, on peut aisément identifier les opérateurs permettant d'utiliser le formalisme $m(Z') = c(t) + l(Z) + q(Z, Z)$, à savoir

$$m(V) = \begin{pmatrix} V[1] \\ V[2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega}\tau\right) \end{pmatrix} l(V) = \begin{pmatrix} V[2] \\ -AV[3] - BV[4] \\ 0 \\ V[4] \\ V[5] \\ V[6] \end{pmatrix}$$

$$q(V,W) = \begin{pmatrix} 0 \\ (A+B)V[4]W[4] - CV[2]W[4] - \frac{3}{2}V[3]W[5] + DV[3]W[6] \\ -V[1]W[3] \\ -V[3]W[3] \\ -V[2]W[2] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

avec V et W deux vecteurs quelconques de dimension $N = 6$ et $V[i]$ ième élément du vecteur V .

4.3.2 Résultats MANLAB

On rappelle que le vecteur Z est décomposé sous la forme (4.17) et donc que

$$u = \frac{R}{R_0} = u_0 + \sum_{k=1}^H (u_{ck} \cos k\omega t + u_{sk} \sin k\omega t). \quad (4.24)$$

Dans la suite la grandeur définie par $A_k = \sqrt{u_{ck}^2 + u_{sk}^2}$ est appelée amplitude du k ème harmonique. L'excitation du système ayant lieu à ω , A_1 représente l'amplitude du fondamental, appelé premier harmonique dans la suite.

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus avec $P_0 = 1,013.10^5 \text{ Pa}$, $\rho_L = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 72.10^{-3} \text{ N/m}$, $\eta_L = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\Omega = 10^6 \text{ rad/s}$, $R_0 = 2.10^{-6} \text{ m}$ (sauf indication contraire).

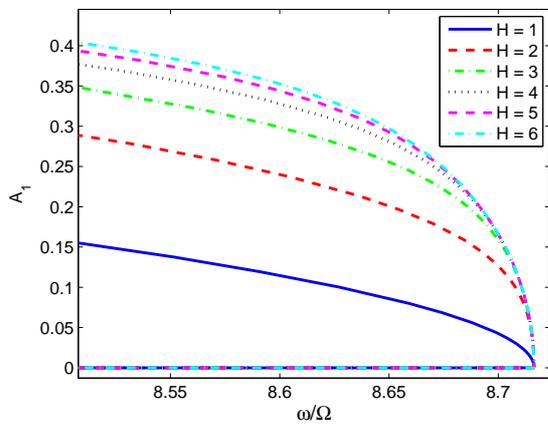


FIG. 4.3 – Influence du nombre d'harmoniques considérés

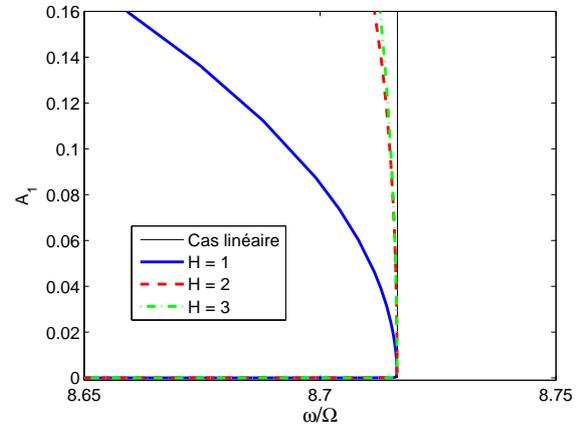


FIG. 4.4 – Zoom au voisinage du cas linéaire (amplitude faible)

L'évolution de l'amplitude A_1 du premier harmonique en fonction de la pulsation adimensionnée ω/Ω est représentée sur les figures 4.3 et 4.4 (zoom) dans le cas où $\sigma = 0$, $\eta_L = 0$, $P = 0,01 \text{ Pa}$ et pour différentes valeurs de H . Ces courbes représentent la réponse libre du système non amorti (l'amplitude du terme forçant est très faible comparée aux autres termes de l'équation). Il s'agit de la relation entre l'amplitude des oscillations et la pulsation de ces oscillations en l'absence d'excitation. Cette courbe amplitude-fréquence reste tangente au mode linéaire puis s'incline vers la gauche : il y a un mollissement du système. Pour des amplitudes faibles ($< 0,1$), les réponses linéaires et non linéaires sont très proches (cf. figure 4.4, les cas $H = 4, 5, 6$ n'ont pas été représentés car confondus avec le cas $H = 3$ à cette échelle) : le régime non linéaire apparaît donc bien comme un prolongement du régime linéaire.

Ces figures montrent que le choix du nombre d'harmoniques est déterminant pour la prise en compte des non linéarités du système étudié. Tous les résultats qui seront présentés par la suite ont été obtenus en choisissant $\mathbf{H} = \mathbf{5}$, sauf mention contraire. Il aurait difficilement été envisageable d'aller jusqu'à cette valeur là dans l'étude analytique.

Changer la valeur du rayon R_0 de la bulle de gaz ou prendre en compte la tension de surface ($\sigma = 72.10^{-3} \text{ N/m}$) ne modifie pas l'allure de la courbe amplitude-fréquence comme on peut l'observer sur les figures 4.5 et 4.6. Seule la valeur de ω pour laquelle l'amplitude devient non nulle change. Cette valeur correspond à la pulsation propre du système linéaire associé à l'équation (4.3) : pulsation associée à la fréquence de Minnaert lorsque $\sigma = 0$ (figure 4.5) et pulsation associée à la fréquence de Richardson dans le cas où la tension de surface est prise en compte (figure 4.6). Le tableau 4.1 donne les valeurs correspondantes à partir des équations (1.1) (Minnaert) et (1.17) (Richardson). L'accord avec les résultats obtenus avec MANLAB est excellent : on trouve systématiquement $\omega_{MANLAB} = \omega_{Minnaert}$ (respectivement $\omega_{MANLAB} = \omega_{Richardson}$) lorsque $A_1 = 10^{-3}$, en petites oscillations donc. L'intérêt de MANLAB est évidemment de sortir du cadre des petites oscillations afin d'évaluer la pulsation de résonance lorsque l'amplitude des oscillations devient du même ordre de grandeur que le rayon initial de la bulle.

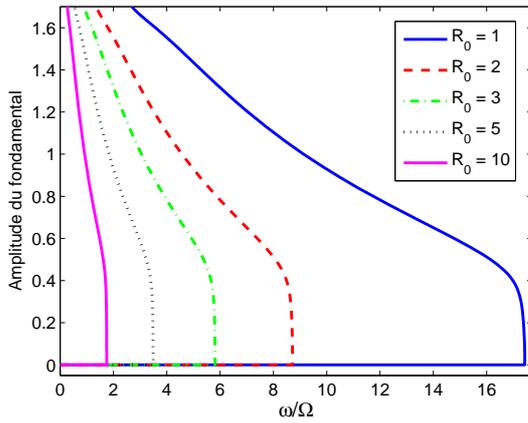


FIG. 4.5 – Influence du rayon R_0 de la bulle de gaz (sans tension de surface)

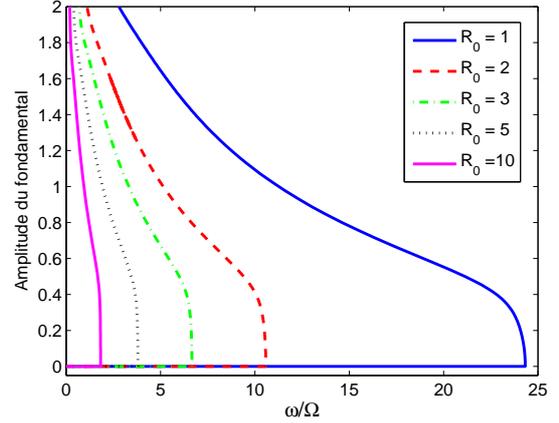


FIG. 4.6 – Influence du rayon R_0 de la bulle de gaz (avec tension de surface)

Rayon R_0 (μm)	1	2	3	5	10
$\omega_{Minnaert}$ (10^6 rad/s)	17,43	8,72	5,81	3,49	1,74
$\omega_{Richardson}$ (10^6 rad/s)	24,33	10,58	6,66	3,80	1,82

TAB. 4.1 – Pulsation propre dans le cas linéaire sans (Minnaert) et avec (Robinson) tension de surface

La prise en compte de la viscosité du liquide (cas de l'eau, $\eta_L = 10^{-3} \text{ Pa.s}$) conduit à l'obtention d'un pic de résonance (figure 4.7). Il a été nécessaire d'augmenter l'amplitude P du terme forçant pour illustrer ce phénomène de manière satisfaisante. On observe en fait la résonance principale du système forcé qui a lieu lorsque le système est soumis à une excitation monoharmonique de pulsation Ω proche de la pulsation propre du système libre (pas d'excitation extérieure, pas d'amortissement) qui vaut ici $\omega_{Richardson} = 10,58.10^6 \text{ rad/s}$. La viscosité de l'eau étant faible, l'écart relatif entre la pulsation propre et la pulsation de résonance, que l'on notera ω_{res} dans la suite, est de l'ordre de 0,1%. La résonance a lieu pour $\omega_{res} = 10,57.10^6 \text{ rad/s}$, valeur correspondant exactement à la pulsation associée à la fréquence de Houghton (cf. équation (1.23)). Plus P augmente, plus la réponse du système s'écarte du cas linéaire

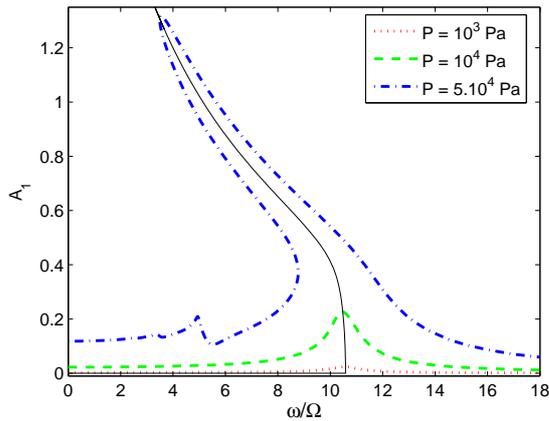


FIG. 4.7 – Réponse forcée du système amorti (traits discontinus) et réponse libre du système non amorti (trait plein)

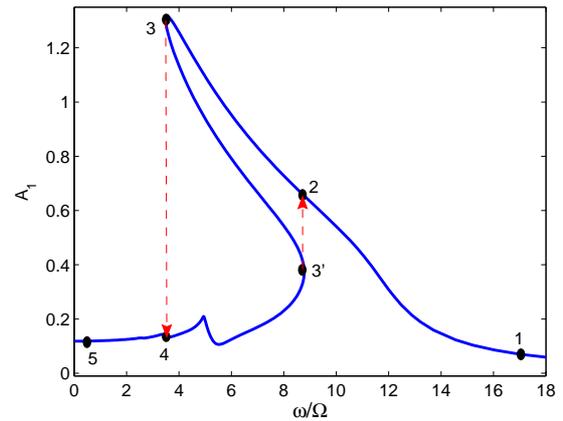


FIG. 4.8 – Réponse forcée (amplitude A_1) du système amorti pour $P = 5.10^4 Pa$ - Illustration des phénomènes de sauts

en s'incurvant vers la gauche et plus la fréquence à laquelle l'amplitude maximale est atteinte diminué. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par Nayfeh et al. (utilisation de la méthode des échelles multiples pour étudier le comportement non linéaire d'une bulle de gaz dans un liquide légèrement compressible, sans tension de surface ni viscosité) [NAY 73].

Si un balayage en fréquence est effectué, un phénomène de saut peut être observé (figure 4.8). Lorsque la fréquence diminue à partir du point 1, on décrit la courbe jusqu'au point 3 en passant par le point 2. Le saut a lieu du point 3 au point 4 ("jump-down"), puis on se déplace à nouveau sur la courbe du point 4 au point 5. Si le balayage est effectué à partir du point 5 en augmentant progressivement la fréquence, on décrit la courbe jusqu'au point 3' en passant par le point 4. Le saut a lieu cette fois entre le point 3' et le point 2 ("jump-up"), puis on se déplace à nouveau sur le courbe jusqu'au point 1. La portion de courbe comprise entre les points 3 et 3' est instable.

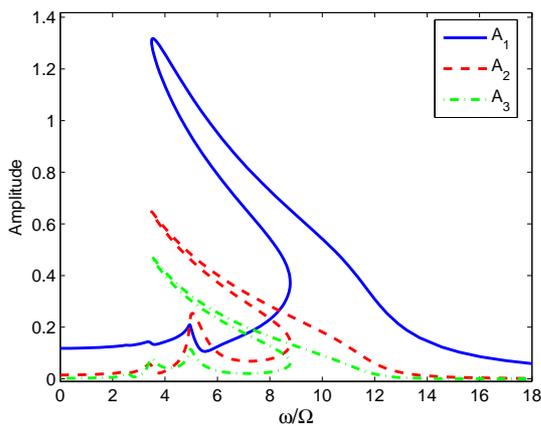


FIG. 4.9 – Amplitude des premier, deuxième et troisième harmoniques - $P = 5.10^4 Pa$

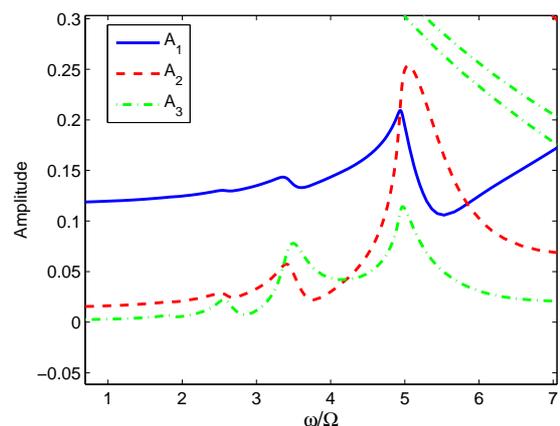


FIG. 4.10 – Zoom sur les résonances secondaires - $P = 5.10^4 Pa$

La figure 4.9 montre l'évolution de l'amplitude des premier, deuxième et troisième harmoniques lorsque l'amplitude du terme forçant est $P = 5.10^4 Pa$ (soit $0,5 atm$). La résonance principale apparaît pour $\omega = \omega_{res}$ mais il y a également des résonances secondaires, dites super-harmoniques, lorsque

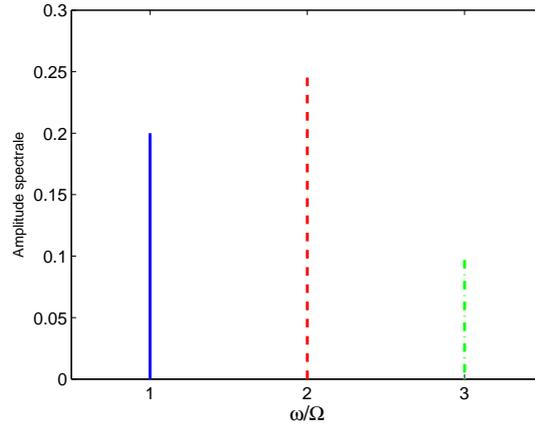


FIG. 4.11 – Spectre de la réponse du système à la résonance super-harmonique $\omega = \omega_{res}/2$

la pulsation d'excitation ω vaut $\omega_{res}/2$, $\omega_{res}/3$ ou $\omega_{res}/4$ (cf. figure 4.10). L'amplitude du deuxième harmonique devient plus grande que celle du premier harmonique lorsque l'on excite à la résonance secondaire $\omega = \omega_{res}/2$. Le spectre correspondant est représenté sur la figure 4.11 : l'harmonique dominante caractérisant la réponse du système vibre à la fréquence double de la fréquence d'excitation. Il serait intéressant de mettre en évidence expérimentalement ce phénomène. S'il s'avérait vérifié, une imagerie non linéaire de bulles de gaz dans l'eau pourrait être réalisée en émettant une onde acoustique à la pulsation $\omega = \omega_{res}/2$ avec une amplitude suffisante ($P \geq 50 kPa$). En revanche, si l'amplitude du terme forçant est inférieure à $10 kPa$, la prise en compte de la viscosité de l'eau "gomme" le caractère non linéaire du système et un modèle d'oscillateur linéaire harmonique amorti (cf. paragraphe 1.2) suffit pour décrire le comportement de la bulle de gaz dans l'eau.

4.4 Agent de contraste à coque peu épaisse - Modèle de Hoff

On considère maintenant un agent de contraste dont la coque a une épaisseur faible devant les rayons intérieur et extérieur, i.e. $e_S \ll R_1, R_2$, ce qui permet de simplifier l'équation du mouvement (cf. paragraphe 2.3). Le rayon extérieur de l'agent de contraste est noté R (donc $R = R_2$). L'équation s'écrit (cf. équation (2.49) corrigée pour prendre en compte la tension de surface)

$$\begin{aligned} \rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] &= \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - P_0 + P \cos \omega t \\ &\quad - 12\eta_S R_0^2 e_S \frac{\dot{R}}{R^4} - 12\mu_S \frac{R_0^2 e_S}{R^3} \left(1 - \frac{R_0}{R} \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec e_S l'épaisseur de la coque, μ_S et η_S les paramètres viscoélastiques du matériau constituant la coque. Le comportement du gaz est toujours supposé isotherme ($\zeta = 1$).

Hoff a utilisé ce modèle pour caractériser un agent de contraste constitué d'une coque en polymère et d'un noyau d'air. La comparaison des mesures expérimentales avec les prédictions théoriques lui a permis d'évaluer les valeurs des paramètres viscoélastiques de la coque $\mu_S = 11,6 MPa$ et $\eta_S = 0,48 Pa.s$, en considérant que l'épaisseur de la coque vaut 5% du rayon R_0 de l'agent de contraste [HOF 00].

4.4.1 Mise sous forme quadratique

Les équations de la bulle de gaz (4.3) et de l'agent de contraste (4.25) ne diffèrent que par les deux derniers termes du membre de droite qui correspondent à la contribution de la coque. Afin d'obtenir la

forme quadratique associée à l'équation (4.25), on utilise les variables et constantes définies au paragraphe 4.3.1 et on définit deux variables supplémentaires $\alpha = y^2$ et $\beta = \alpha x$ ainsi que deux constantes $E = \frac{12\mu_S e_S}{\rho_L \Omega^2 R_0^3}$ et $F = \frac{12\eta_S e_S}{\rho_L \Omega R_0^3}$. L'équation (4.25) est alors équivalente au système suivant

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -Ax - By + (A + B - E)\alpha + E\beta - Cvy - \frac{3}{2}xz + Dxf - F\beta v \\ 0 = 1 - xu \\ 0 = y - x^2 \\ 0 = z - v^2 \\ 0 = 0 - P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega}\tau\right) + f \\ 0 = \alpha - y^2 \\ 0 = \beta - \alpha x \end{cases} \quad (4.26)$$

En posant $Z = [u, v, x, y, z, f, \alpha, \beta]^t$, on peut aisément identifier les opérateurs permettant d'utiliser le formalisme $m(Z') = c(t) + l(Z) + q(Z, Z)$, à savoir

$$m(V) = \begin{pmatrix} V[1] \\ V[2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega}\tau\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} l(V) = \begin{pmatrix} V[2] \\ -AV[3] - BV[4] + (A + B - E)V[7] + EV[8] \\ 0 \\ V[4] \\ V[5] \\ V[6] \\ V[7] \\ V[8] \end{pmatrix}$$

$$q(V, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -CV[2]W[4] - \frac{3}{2}V[3]W[5] + DV[3]W[6] - FV[2]W[8] \\ -V[1]W[3] \\ -V[3]W[3] \\ -V[2]W[2] \\ 0 \\ -V[4]W[4] \\ -V[3]W[7] \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

avec V et W deux vecteurs quelconques de dimension $N = 8$ et $V[i]$ ième élément du vecteur V .

4.4.2 Résultats MANLAB

On s'intéresse tout d'abord à l'influence du module de cisaillement μ_S de la coque, la viscosité $\eta_S = 0$ étant supposée nulle. La figure 4.12 montre l'évolution de l'amplitude A_1 pour un agent de contraste de rayon $R_0 = 3 \mu\text{m}$ de module de cisaillement μ_S valant 11,6 (travaux de Hoff), 50, 88 et 150 MPa (valeurs issues de [CHU 95]), l'amplitude du terme forçant valant $P = 5.10^4 \text{ Pa}$ (soit 0,5 atm). L'augmentation de μ_S entraîne une augmentation de la rigidité de la coque, ce qui limite l'amplitude des oscillations et réduit par conséquent le comportement non linéaire. Les valeurs de ω pour lesquelles l'amplitude devient non nulle sont en accord avec les formules analytiques issues de la linéarisation de l'équation (4.25) (cf. paragraphe 2.3). Le régime non linéaire est bien à nouveau le prolongement du régime linéaire.

L'évolution de l'amplitude des premier et deuxième harmoniques est représentée sur les figures 4.13 et 4.14 (zoom) pour deux valeurs de l'amplitude P du terme forçant ($P = 5.10^4 \text{ Pa}$ en bleu et

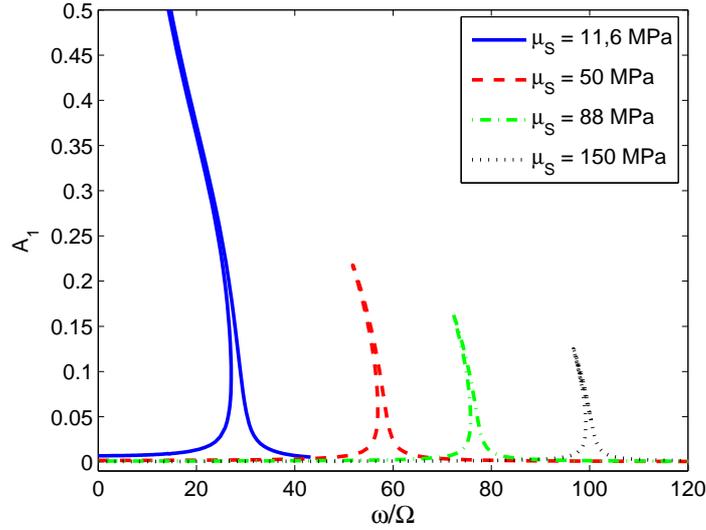
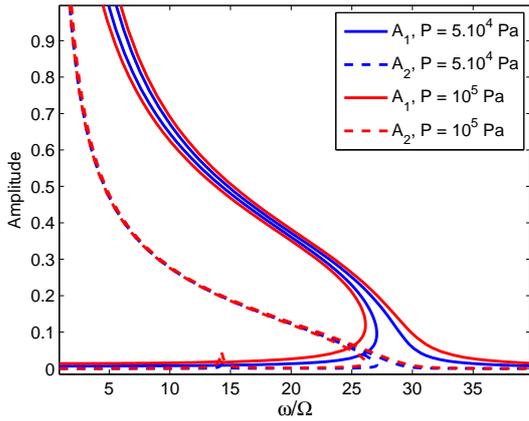
FIG. 4.12 – Influence du module de cisaillement sur l'amplitude A_1 - $P = 5.10^4 Pa$ 

FIG. 4.13 – Amplitude des premier (trait plein) et deuxième (pointillés) harmoniques

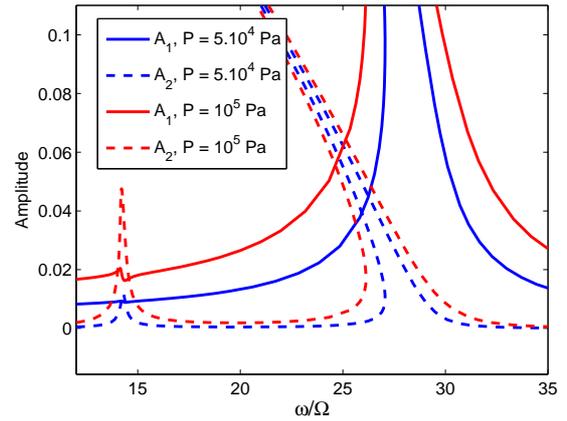


FIG. 4.14 – Amplitude des premier (trait plein) et deuxième (pointillés) harmoniques - Zoom

$P = 10^5 Pa$ en rouge), pour $R_0 = 3 \mu m$, $\mu_S = 11,6 MPa$ et $\eta_S = 0$. La résonance principale est largement prépondérante devant la résonance secondaire à $\omega = \omega_{res}/2$. Si l'amplitude P du terme forçant est suffisamment grande (de l'ordre de $100 kPa$), la résonance secondaire présente cependant un intérêt pour l'imagerie non linéaire des tissus en présence d'agents de contraste car l'amplitude du deuxième harmonique est bien supérieure à celle du premier harmonique (plus du double à $100 kPa$).

Lorsque le module de cisaillement est fixé ($\mu_S = 11,6 MPa$), la prise en compte de la viscosité dans la coque conduit à une forte réduction de l'amplitude des oscillations comme on peut l'observer sur les figures 4.15 et 4.16. La pulsation de résonance s'écarte de plus en plus de la pulsation propre du système libre non amorti. Le phénomène de résonance est quasiment inexistant pour $\eta_S = 0,48 Pa.s$, ce qui est en accord avec les résultats de Hoff et al [HOF 00]. Mais les mesures expérimentales ayant été effectuées sur un échantillon contenant une population polydisperse d'agents de contraste, la non prise en compte des phénomènes de diffusion multiple ainsi que l'hypothèse de non variabilité des propriétés de la coque peuvent laisser penser que la viscosité de la coque a très certainement été surestimée par Hoff et al. Si

cette valeur de la viscosité est réelle, seuls de très hauts niveaux d'excitation (bien supérieur à $5.10^4 Pa$) pourraient conduire à un comportement non linéaire.

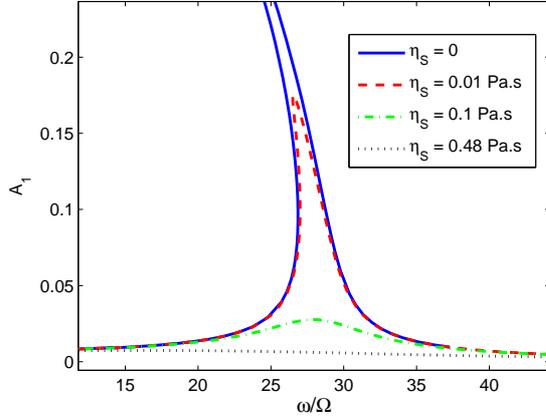


FIG. 4.15 – Influence de la viscosité sur l'amplitude A_1 - $P = 5.10^4 Pa$

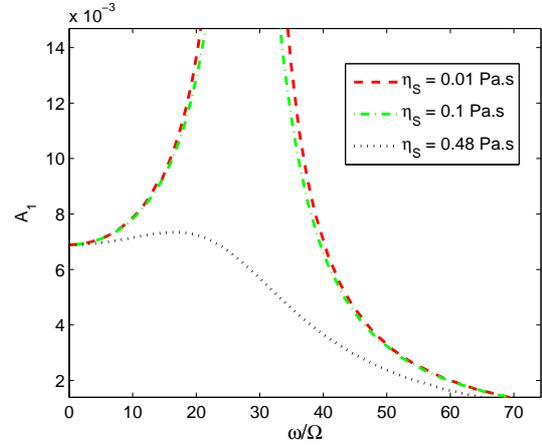


FIG. 4.16 – Influence de la viscosité sur l'amplitude A_1 - Zoom (faibles amplitudes)

4.5 Agent de contraste - Modèle de Marmottant

On s'intéresse maintenant à un agent de contraste dont le comportement peut être décrit par l'équation proposée par Marmottant (modèle décrit au paragraphe 2.5)

$$\begin{aligned} \rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] &= \left(P_0 + \frac{2\sigma(R_0)}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\zeta} - \frac{2\sigma(R)}{R} \\ &- 4\eta_L \frac{\dot{R}}{R} - 4\kappa_S \frac{\dot{R}}{R^2} - P_0 + P \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Bien que le modèle de Marmottant soit prévu pour prendre en compte les phénomènes de flambage et de rupture de la coque, on se limite ici au cas du comportement élastique de l'interface pour lequel la tension de surface a pour expression (cf. équation 2.72)

$$\sigma(R) = \chi_S \left(\frac{R^2}{R_f^2} - 1 \right). \quad (4.29)$$

4.5.1 Mise sous forme quadratique

En posant $g = xy$ et $Z = [u, v, x, y, z, f, g]^t$ (les variables u, v, x, y, z et f restent inchangées) et en définissant les constantes

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{2\chi_S}{\rho_L \Omega^2 R_0 R_f^2}, B_M = \frac{P_0}{\rho_L \Omega^2 R_0^2}, C_M = \frac{2\chi_S}{\rho_L \Omega^2 R_0^3}, D_M = \frac{R_0^2}{R_f^2} - 1, \\ E_M &= \frac{4\eta_L}{\rho_L \Omega R_0^2}, F_M = \frac{4\kappa_S}{\rho_L \Omega R_0^3}, G_M = \frac{1}{\rho_L \Omega^2 R_0^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

le système peut être réécrit sous la forme quadratique utilisée sous MANLAB

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = v \\ v' = -A_M - B_M x + C_M y - \frac{3}{2} x z + (B_M + C_M D_M) y^2 - E_M v y - F_M g v + G_M x f \\ 0 = 1 - x u \\ 0 = y - x^2 \\ 0 = z - v^2 \\ 0 = -P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right) + f \\ 0 = g - x y \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Les opérateurs permettant d'utiliser le formalisme $m(Z') = c(t) + l(Z) + q(Z, Z)$ ont alors les expressions suivantes

$$m(V) = \begin{pmatrix} V[1] \\ V[2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -A_M \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \cos\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right) \\ 0 \end{pmatrix} l(V) = \begin{pmatrix} V[2] \\ -B_M V[3] + C_M V[4] \\ 0 \\ V[4] \\ V[5] \\ V[6] \\ V[7] \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

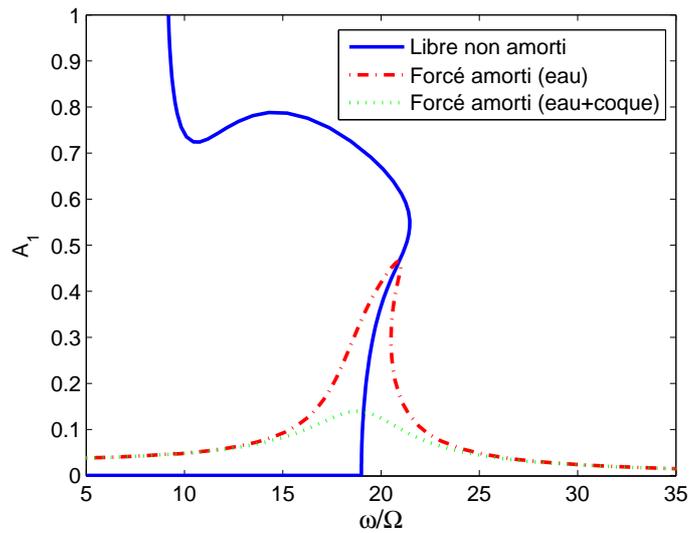
$$q(V, W) = \begin{pmatrix} 0 \\ (B_M + C_M D_M) V[4] W[4] - E_M V[2] W[4] - \frac{3}{2} V[3] W[5] - F_M V[2] W[7] + G_M V[3] W[6] \\ -V[1] W[3] \\ -V[3] W[3] \\ -V[2] W[2] \\ 0 \\ -V[3] W[4] \end{pmatrix}$$

avec V et W deux vecteurs quelconques de dimension $N = 7$ et $V[i]$ ième élément du vecteur V .

4.5.2 Résultats MANLAB

La figure 4.17 montre la réponse libre ($P = 10^{-2} Pa$, en bleu) du système non amorti ($R_0 = R_f = 1,98 \mu m$, $\chi_S = 0,55 N/m$ et $\eta_L = \kappa_S = 0$) ainsi que la réponse forcée ($P = 5.10^4 Pa$) du système amorti lorsque l'on prend seulement en compte la viscosité du liquide ($\eta_L = 10^3 Pa.s$, en rouge) puis lorsque l'on prend en compte également la viscosité de l'interface ($\kappa_S = 7,2.10^{-9} N$, en vert). Les valeurs des différents paramètres du modèle sont issues de [MAR 05] et [MEE 07]. Le système non amorti est raidissant au début puis mollissant à partir d'une certaine amplitude (de l'ordre de 0,6). Mais la prise en compte de la viscosité diminue considérablement l'amplitude des oscillations et "gomme" le caractère non linéaire du système. Ce résultat est en accord avec les travaux de Van der Meer et al. qui ont montré qu'un modèle d'oscillateur harmonique amorti, obtenu par linéarisation du modèle de Marmottant, suffit pour décrire les oscillations radiales d'un agent de contraste soumis à une excitation acoustique d'amplitude $40 kPa$ (observations expérimentales réalisées avec la caméra ultra-rapide Brandaris) [MEE 07].

L'évolution des amplitudes du premier et deuxième harmoniques en fonction de ω/Ω est représentée sur la figure 4.18 pour différentes valeurs de l'amplitude P du terme forçant ($P = 5.10^4 Pa$ en bleu, $P = 10^5 Pa$ en rouge et $P = 5.10^5 Pa$ en vert). On identifie clairement la résonance principale à $\omega = \omega_{res}$, très amortie et présentant un faible caractère non linéaire. Les résonances secondaires à $\omega = \omega_{res}/2$


 FIG. 4.17 – Influence de l'amortissement sur l'amplitude A_1

et $\omega = \omega_{res}/3$ n'apparaissent distinctement que lorsque l'amplitude P du terme forçant est supérieure à $10^5 Pa$. Contrairement aux deux exemples précédents (pour des valeurs de P similaires), l'amplitude du deuxième harmonique n'est jamais supérieure à celle du premier harmonique à la résonance super-harmonique $\omega = \omega_{res}/2$. Par contre, à partir de $P = 5 \cdot 10^5 Pa$, l'amplitude du deuxième harmonique devient plus grande à la résonance secondaire à $\omega = \omega_{res}/2$ qu'à la résonance principale à $\omega = \omega_{res}$, ce qui n'a pas été observé dans le cas précédent. Reste à savoir si un tel régime peut être atteint sans que la bulle ne flambe ni n'explose.

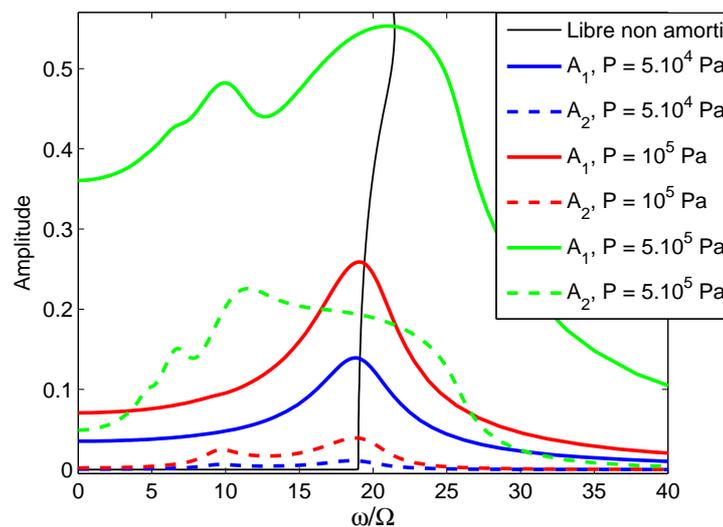


FIG. 4.18 – Influence du terme forçant sur l'amplitude des premier et deuxième harmoniques

On note dans la littérature un intérêt grandissant pour les aspects non linéaires du comportement des agents de contraste. Une récente étude expérimentale [DOI 09-b] suggère le caractère mollissant d'un agent de contraste constitué de décafluorobutane entouré par une monocouche lipidique. Du point de vue théorique [TSI 08], le choix de la loi de comportement du matériau constituant la coque détermine le caractère raidissant (Skalak) ou mollissant (Mooney-Rivlin) de l'agent de contraste.

A l'aide de MANLAB nous avons mis en évidence le caractère mollissant d'une bulle de gaz (modèle RPNNP) et d'un agent de contraste à coque solide viscoélastique de faible épaisseur (modèle de Hoff). Lorsque la coque est modélisée par une interface sans épaisseur, le comportement est légèrement raidissant puis mollissant (modèle de Marmottant). Cependant, les pertes d'origine visqueuses dans la coque (ou l'interface) peuvent gommer le comportement non linéaire de l'agent de contraste, même à forte amplitude (50 – 500 kPa).

Compte tenu des résultats obtenus, MANLAB s'avère être un outil très utile pour étudier les équations non linéaires du type Rayleigh-Plesset sous réserve que le système d'équations puisse se mettre sous une forme au plus quadratique. Il permet ainsi de prédire le comportement raidissant ou mollissant d'un agent de contraste. Par ailleurs l'influence des différents paramètres des modèles sur le degré de non linéarité peut être étudiée de manière systématique sans temps de calcul excessif.

Chapitre 5

Modélisation éléments finis d'une bulle d'air en régime linéaire

Sauf dans quelques cas spécifiques, il est particulièrement difficile de mettre en oeuvre des modélisations analytiques lorsque des phénomènes d'interaction doivent être pris en compte, tels que les interactions entre bulles ou agents de contraste ou les interactions avec des parois (vaisseaux sanguins) ou des cellules (cellules tumorales par exemple). Il faut alors avoir recours à des modélisations numériques.

Dans ce chapitre nous présentons l'utilisation du logiciel COMSOL MultiphysicsTM (version 3.3 a) pour la modélisation par éléments finis du comportement acoustique d'une bulle d'air dans l'eau en espace infini. La formulation acoustique, sur laquelle repose la modélisation sous COMSOL, est tout d'abord exposée, puis les différentes étapes de la construction du modèle éléments finis sont détaillées. Cet exposé, qui se veut pédagogique, s'adresse aux néophytes du logiciel COMSOL.

5.1 Formulation acoustique

On considère une bulle d'air (masse volumique ρ_a , vitesse du son c_a) de rayon R dans un volume infini d'eau (ρ_e , c_e). On note P_0 la pression à l'équilibre, $p(\mathbf{r}, t)$ la surpression en \mathbf{r} à l'instant t et $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ le déplacement associé. On suppose que les deux milieux subissent des transformations adiabatiques réversibles. Tous les phénomènes dissipatifs comme la tension de surface ou la viscosité sont négligés. Le modèle théorique correspondant est donc celui de Minnaert (ou celui de Rayleigh-Plesset linéarisé dans le cas adiabatique, cf. équation (1.13)). L'équation de d'Alembert décrivant l'acoustique linéaire d'un fluide parfait s'écrit

$$\begin{cases} \Delta p - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 & \text{pour } r \leq R, \\ \Delta p - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 & \text{pour } r \geq R. \end{cases} \quad (5.1)$$

Seules les oscillations harmoniques radiales de la bulle sont considérées. La surpression et le déplacement sont recherchés sous la forme $p(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{p}(r) e^{i\omega t} \}$ et $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{u}(r) e^{i\omega t} \} \mathbf{e}_r$, soit

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} \right] r \hat{p}(r) = 0 & \text{pour } r \leq R, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c_e^2} \right] r \hat{p}(r) = 0 & \text{pour } r \geq R. \end{cases} \quad (5.2)$$

La solution peut se mettre sous la forme [LER 04]

$$\begin{cases} \hat{p}(r) = \frac{C_a}{r} \sin(k_a r) & \text{pour } r \leq R, \\ \hat{p}(r) = \frac{C_e}{r} \sin(k_e(r - R) + \phi_e) & \text{pour } r \geq R. \end{cases} \quad (5.3)$$

avec $k_a = \frac{\omega}{c_a}$, $k_e = \frac{\omega}{c_e}$, C_e constante fixée par l'amplitude de l'onde incidente, C_a et ϕ_e restant à déterminer. On déduit alors du système d'équations (5.3) l'expression du déplacement ($\hat{u} = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}$)

$$\begin{cases} \hat{u}(r) = \frac{C_a}{\rho_a \omega^2 r} \left(k_a \cos(k_a r) - \frac{\sin(k_a r)}{r} \right) & \text{pour } r \leq R, \\ \hat{u}(r) = \frac{C_e}{\rho_e \omega^2 r} \left(k_e \cos(k_e(r - R) + \phi_e) - \frac{\sin(k_e(r - R) + \phi_e)}{r} \right) & \text{pour } r \geq R. \end{cases} \quad (5.4)$$

L'écriture des conditions de continuité de la pression et du déplacement à la surface de la bulle permet alors de fixer les deux constantes C_a et ϕ_e [LER 04]

$$C_a = C_e \frac{\sin(\phi_e)}{\sin(k_a R)}, \quad (5.5)$$

$$\sin(\phi_e) = \left(1 + \left(\frac{1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (k_a R \cotan(k_a R) - 1)}{k_e R} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Pour déterminer les résonances, on s'intéresse au maximum de la pression à la surface de la bulle qui s'écrit $\hat{p}(R) = \frac{C_e}{R} \sin(\phi_e)$. On cherche donc les valeurs de ω pour lesquelles $\sin(\phi_e)$ est maximal, ce qui revient à chercher les valeurs de ω pour lesquelles la quantité $1 + \frac{\rho_e}{\rho_a} (k_a R \cotan(k_a R) - 1)$ s'annule. Il y aura donc résonance pour les fréquences f telles que

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{\rho_a}{\rho_e}} \quad \text{avec } x = k_a R = \frac{2\pi f R}{c_a}. \quad (5.7)$$

A l'aide d'une résolution graphique (cf. figure 5.1 issue de [LER 04]), on peut voir que le premier point d'intersection, correspondant à la résonance fondamentale, est proche de l'origine et que les points d'intersection suivants sont situés un peu avant chaque asymptote verticale $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ (avec $n \geq 1$). La fréquence de la résonance fondamentale peut être obtenue par résolution de l'équation (5.7) avec MATLAB® (par exemple) ou à l'aide d'un développement limité au deuxième ordre en $x = k_a R$

$$\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_e} \right) \tan x = x \approx \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_e} \right) \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) = 1, \quad (5.8)$$

soit

$$x = \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e - \rho_a}} \quad (5.9)$$

d'où

$$f_{app} = \frac{c_a}{2\pi R} \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e - \rho_a}}. \quad (5.10)$$

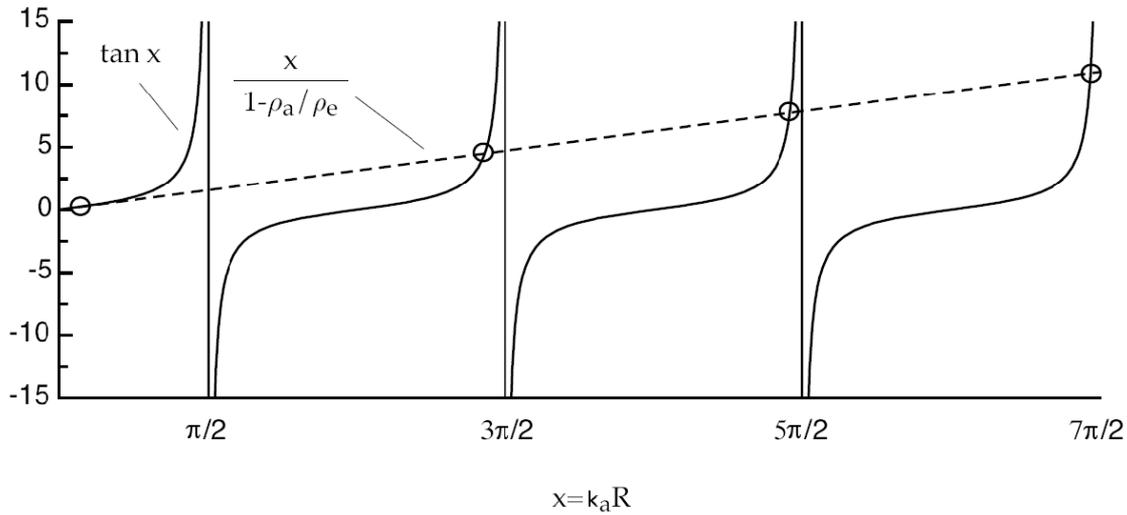


FIG. 5.1 – Résolution graphique de l'équation (5.7). En trait plein, la fonction $\tan x$ et ses asymptotes verticales ; en pointillés, la droite $\frac{x}{1 - \rho_a/\rho_e}$. Leurs intersections (O) donnent les solutions. [LER 04]

L'expression de la fréquence de résonance peut encore être simplifiée en négligeant la masse volumique de l'air devant celle de l'eau. De plus, si l'on considère l'air comme un gaz parfait, la vitesse du son dans l'air peut s'exprimer comme $c_a = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_a}}$, avec γ le rapport des capacités calorifiques du gaz et P_0 la pression hydrostatique. L'équation (5.10) devient alors

$$f_{app} \approx \frac{c_a}{2\pi R} \sqrt{\frac{3\rho_a}{\rho_e}} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_e}}, \quad (5.11)$$

expression correspondant à la fréquence de Minnaert (cf. équation (1.1)). Le tableau 5.1 donne les valeurs de la fréquence de résonance pour une bulle de rayon R_0 à l'équilibre. f_{num} est la valeur obtenue par résolution numérique (avec MATLAB®), f_{app} est la valeur obtenue avec l'expression approchée donnée par l'équation (5.10) et f_M est la fréquence de Minnaert donnée par l'équation (5.11). Les valeurs utilisées pour les applications numériques sont : $\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $c_a = 340 \text{ m/s}$, $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1,4$, $P_0 = 1 \text{ atm}$. L'erreur relative commise lorsque l'on utilise la fréquence de Minnaert pour calculer la fréquence de résonance est inférieure à 0,1 %.

R_0 (μm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_{num} (MHz)	3,2800	1,640	1,0933	0,8200	0,6560	0,5467	0,4686	0,4100	0,3644	0,3280
f_{app} (MHz)	3,2824	1,6412	1,0941	0,8206	0,6565	0,5471	0,4689	0,4103	0,3647	0,3282
f_M (MHz)	3,2832	1,6416	1,0944	0,8208	0,6566	0,5472	0,4690	0,4104	0,3648	0,3283

TAB. 5.1 – Comparaison des fréquences de résonance

Cette formulation du problème nous a servi de point de départ pour l'élaboration du modèle éléments finis avec COMSOL Multiphysics™ et, nous intéressant aux aspects acoustiques du problème, nous avons choisi de travailler avec le Module Acoustique du logiciel (ce qui limite les applications au domaine linéaire).

5.2 Choix du mode d'application

Tout nouveau modèle commence par le choix de la dimension géométrique et d'un (ou plusieurs) mode d'application dans la fenêtre *Model Navigator* qui s'ouvre lorsqu'on lance le logiciel COMSOL Multiphysics™. Pour traiter le problème d'une bulle d'air dans l'eau soumise à une onde acoustique incidente, nous avons choisi de travailler en trois dimensions et d'utiliser le mode d'application prédéfini *Acoustics Module > Pressure Acoustics > Time-Harmonic Analysis*. Dans ce mode, on travaille en régime harmonique et la pression au point \mathbf{x} à l'instant t s'écrit

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{i\omega t} \quad (5.12)$$

avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation associée à la fréquence f . L'équation mathématique prédéfinie dans ce mode est

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - \mathbf{q}) \right) - \frac{\omega^2 p}{\rho_0 c_s^2} = Q \quad (5.13)$$

où ρ_0 est la masse volumique (kg/m^3), c_s est la vitesse du son (m/s), \mathbf{q} et Q sont des termes sources (dipole (N/m^3) et monopole ($1/s^2$) respectivement).

5.3 Définition de la géométrie

Une fois le mode choisi, l'interface graphique s'ouvre. On doit alors commencer par dessiner la géométrie du problème qui définit concrètement l'espace où sont résolues les équations. Pour l'exemple traité, deux sphères de rayons respectifs $2 \mu m$ (bulle) et $10 \mu m$ (eau) et centrées à l'origine $(0, 0, 0)$ du repère (x, y, z) ont été définies (cf. figure 5.2). Un point a également été placé en $(-5 \mu m, 0, 0)$, il servira de point de mesure par la suite. Le logiciel nomme automatiquement les objets géométriques qui ont été créés : SPH1 pour la sphère de rayon $2 \mu m$, SPH2 pour la sphère de rayon $10 \mu m$ et PT1 pour le point (cf. figure 5.3).

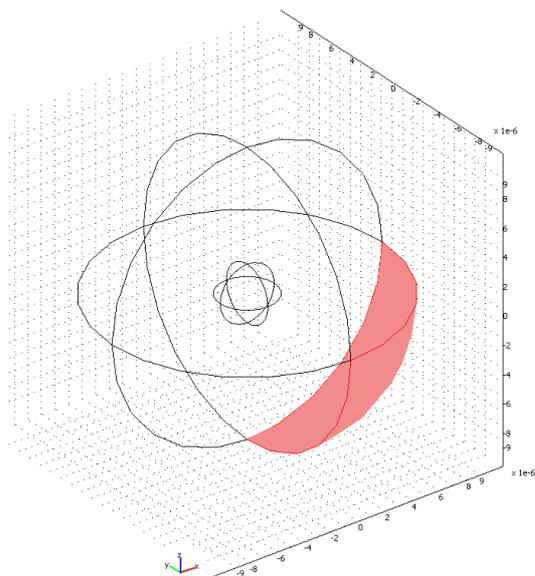


FIG. 5.2 – Géométrie : vue 3D

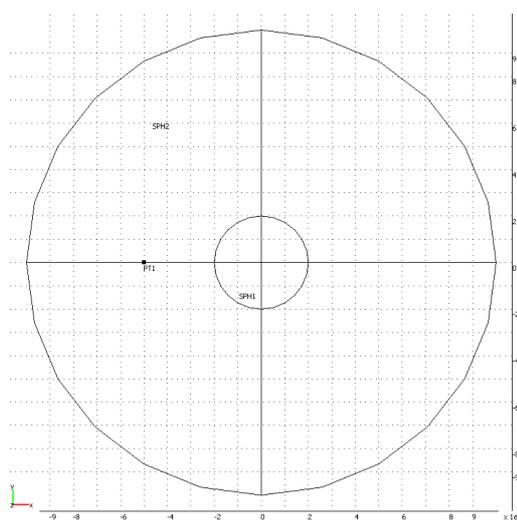


FIG. 5.3 – Géométrie : coupe dans le plan (xy)

Dans Comsol, un objet géométrique est constitué d'un nombre de points, arêtes et faces prédéfini pour chaque type d'objet : une sphère est constituée de six points, douze arêtes et huit faces. Une face (en rouge sur la figure 5.2) correspond à une portion de la surface de la sphère limitée par trois arêtes (l'intersection de deux arêtes correspond à un point). Il existe différents modes de visualisation d'un objet géométrique :

le mode point, le mode arête et le mode face qui permettent de visualiser respectivement les points, arêtes ou faces de la géométrie globale ainsi que les numéros que le logiciel leur a automatiquement attribués (numérotation indépendante pour chaque catégorie).

Une fois la géométrie créée, il existe pour le logiciel des sous-domaines (*Subdomain*) qui correspondent à des portions de l'espace initial. Dans l'exemple traité, l'espace initial est de dimension trois et les sous-domaines définis par la géométrie sont l'espace compris entre la surface de la sphère de rayon $2 \mu m$ et la surface de la sphère de rayon $10 \mu m$ (sous-domaine 1) et l'intérieur de la sphère de rayon $2 \mu m$ (sous-domaine 2). Les surfaces des sphères, découpées en huit faces chacune, constituent ce que le logiciel appelle des frontières (*Boundary*). Les équations et conditions initiales sont définies sur les sous-domaines de la géométrie, tandis que les conditions aux limites sont appliquées sur les frontières.

5.4 Définition de la physique du problème

5.4.1 Dans les sous-domaines

Il faut maintenant indiquer les propriétés physiques des milieux dans lesquels on souhaite résoudre l'équation (5.13) sélectionnée lorsque l'on a choisi le mode d'application dans la fenêtre *Model Navigator*. On utilise pour cela la fenêtre *Subdomain settings* du menu *Physics* dans laquelle on peut préciser les valeurs de ρ_0 , c_s , \mathbf{q} et Q pour chaque sous-domaine de la géométrie. Les propriétés du sous-domaine 1 (eau) sont $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_s = 1500 \text{ m/s}$, $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$ et $Q = 0$; celles du sous-domaine 2 (air) $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $c_s = 343 \text{ m/s}$, $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$ et $Q = 0$. On a ainsi défini une bulle d'air (sous-domaine 2) dans de l'eau (sous-domaine 1). Afin de faciliter d'éventuelles modifications du modèle existant, il est préférable de regrouper toutes les paramètres constants dans le tableau *Constants* accessible à partir du menu *Options*. Lorsque l'on remplit les différents champs (par exemple dans *Subdomain settings*), on utilise alors les noms des paramètres au lieu de leurs valeurs. Cela permet, lorsque l'on souhaite changer la valeur d'un paramètre, de faire une seule fois la modification dans le tableau *Constants* au lieu de modifier la valeur dans chaque fenêtre où le paramètre apparaît, au risque d'en oublier.

5.4.2 Sur les frontières

Il reste à préciser les conditions aux limites à l'aide de la fenêtre *Boundary settings* du menu *Physics*. Dans le menu déroulant situé sur la partie gauche de cette fenêtre, on sélectionne les frontières (qui apparaissent alors en rouge dans l'espace de dessin) auxquelles on souhaite appliquer la condition choisie dans la partie droite de la fenêtre. La condition prédéfinie *Continuity* est appliquée à l'interface eau/air (cf. figure 5.4); elle correspond à la continuité du gradient de la pression.

On souhaite dans cet exemple simuler un volume d'eau infini. On utilise pour cela une condition aux limites appelée *Radiation boundary condition* qui permet à une onde acoustique divergente de "sortir" du domaine de travail borné par la surface de la sphère de rayon $10 \mu m$ en minimisant les réflexions au niveau de cette surface. Dans notre cas, nous avons choisi une *Radiation boundary condition* de type *Spherical wave* qui permet à une onde sphérique diffractée (ou émise) par un objet centré au point de coordonnées $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ de se propager comme si le domaine était infini. La condition prédéfinie dans COMSOL correspond à l'implémentation au second ordre de la condition de Bayliss, Gunzburger et Turkel [COM 06].

L'expression de l'onde incidente doit être précisée dans le champ p_i du tableau *Scalar variables* du menu *Physics*. Dans l'exemple présenté ici, il s'agit d'une onde plane d'amplitude $p_0 = 1000 \text{ Pa}$ (valeur donnée dans le tableau *Constants*) se dirigeant dans la direction des x croissants ($p_i = p_0 e^{-ikx}$).

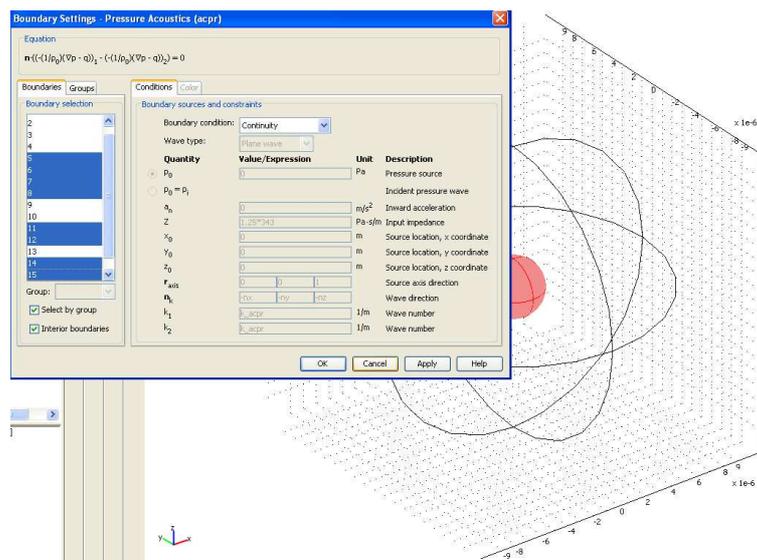


FIG. 5.4 – Définition de la condition aux limites à l'interface eau/air

5.5 Maillage

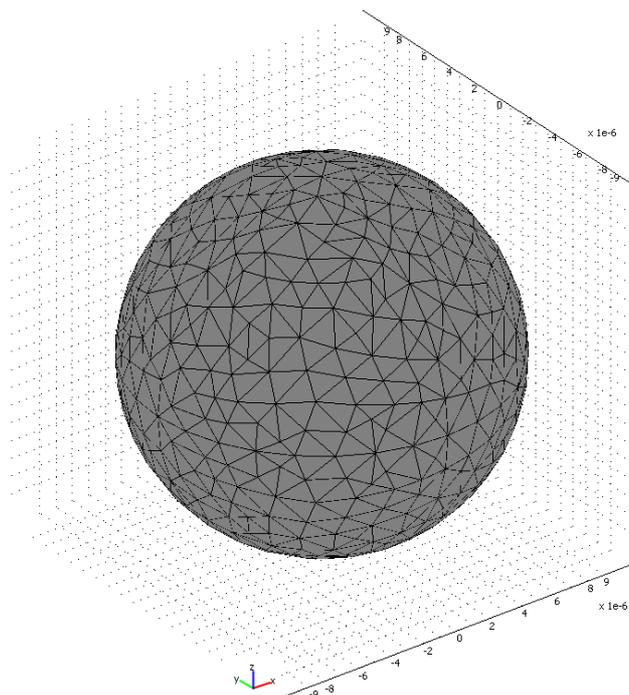
Le maillage correspond à la discrétisation spatiale de la géométrie en volumes élémentaires (appelés mailles) définis par des points (appelés noeuds). Ces noeuds constituent les connexions entre les mailles. En 3D, le volume est divisé par exemple en tétraèdres (*mesh element*) dont les faces, les arêtes et les sommets sont appelés respectivement *mesh faces*, *mesh edges* et *mesh vertices*. Les surfaces de la géométrie 3D sont donc divisées en éléments triangulaires correspondant aux faces des tétraèdres tangentes aux surfaces.

Le maillage est réalisé automatiquement par le logiciel. L'algorithme prend pour point de départ les éléments de la géométrie et crée des noeuds supplémentaires jusqu'à satisfaire des critères prédéfinis comme le nombre de mailles ou la taille maximale des mailles. On peut utiliser les tailles prédéfinies (*extra coarse*, *coarse*, *normal*, *fine*, *extra fine*...) par le logiciel ou agir sur les paramètres de génération du maillage, soit au niveau global, soit sur chaque élément de la géométrie, dans la fenêtre *Free Mesh Parameters* du menu *Mesh*.

Dans la méthode des éléments finis, le calcul de la solution intervient sur les noeuds du maillage et les noeuds supplémentaires, liés à l'ordre des fonctions d'interpolation. En 1D par exemple, une fonction d'interpolation quadratique nécessite d'ajouter un noeud supplémentaire entre les deux noeuds limitant une maille. Le nombre de noeuds que comporte le maillage, ajouté au nombre d'inconnues et à l'ordre des fonctions d'interpolations, détermine le nombre de degrés de liberté (DDL ou DOF en anglais pour *degrees of freedom*) du problème à résoudre. Plus le nombre de noeuds est important, plus la taille du problème augmente ainsi que la mémoire vive nécessaire à la résolution du problème.

Dans notre exemple, le maillage *normal* est constitué de 10002 éléments tétraédriques. La figure 5.5 montre le maillage de la surface de la sphère de rayon $10 \mu m$ qui est constitué de 1236 éléments triangulaires (*mesh faces*). Les informations sur le maillage (nature et nombre d'éléments en particulier) se trouvent dans la fenêtre *Mesh Statistics* accessible à partir du menu *Mesh*. Lorsque l'on utilise des fonctions d'interpolation quadratiques (fonction de Lagrange d'ordre 2), le nombre de degrés de liberté associé à ce maillage est 14637.

La fréquence de l'onde incidente étant de l'ordre du mégahertz ($1 - 10 MHz$), les longueurs d'onde dans l'eau ($\lambda_e \approx 150 - 1500 \mu m$) et dans l'air ($\lambda_a \approx 34 - 340 \mu m$) sont bien supérieures aux dimensions de la bulle d'air d'une part, et de la zone de simulation d'autre part. Il y a donc suffisamment d'éléments par longueur d'onde pour décrire de façon satisfaisante la propagation et la diffraction de

FIG. 5.5 – Sphère de rayon $10 \mu m$ - 1236 éléments triangulaires

l'onde acoustique incidente.

5.6 Résolution et post-traitement

La fenêtre *Solver Parameters* permet de préciser le type d'analyse (temporelle, stationnaire, modale, paramétrée...) et l'algorithme de résolution (appelé solveur). Nous avons choisi de faire une résolution paramétrique : la fréquence varie entre $0,5 MHz$ et $10 MHz$ par pas de $0,5 MHz$ (premier balayage grossier de la plage fréquentielle d'intérêt). L'évolution du calcul peut être suivie grâce à la fenêtre *Progress - Solve Problem* qui s'affiche automatiquement dès que la résolution commence. Le temps de calcul pour la résolution paramétrique mentionnée ci-dessus est de l'ordre de $460 s$ sur un PC Pentium 4 ($3,2 GHz$, $2 Go$ de RAM).

Le traitement et l'affichage des résultats s'effectuent à l'aide du menu *Postprocessing*. Il y a beaucoup de possibilités, tant au niveau du type de représentation des résultats que des grandeurs prédéfinies accessibles après résolution (pression, intensité, accélération, vitesse...). La figure 5.6 représente le module de la pression totale à la fréquence $1,5 MHz$ dans le plan $z = 0$. La figure 5.7 correspond à l'évolution du module de la pression en fonction de la fréquence (résolution paramétrique par pas de $0,1 MHz$ entre $0,5 MHz$ et $5 MHz$). La pression est évaluée en deux points : le point de coordonnées $(-2 \mu m, 0, 0)$ à la surface de la bulle d'air (en rouge) et le point de coordonnées $(-5 \mu m, 0, 0)$ situé dans l'eau (en bleu). Le phénomène de résonance apparaît nettement autour de $1,6 MHz$. Le même critère que Leroy a été utilisé pour déterminer la fréquence de résonance, à savoir le passage de la pression à la surface de la bulle par un maximum [LER 04]. Des résolutions paramétriques successives ont été réalisées pour évaluer précisément la fréquence de résonance. Dans la configuration décrite ci-dessus (maillage *normal*, fonction d'interpolation d'ordre deux), on a trouvé $f_{COMSOL} = 1,6415 MHz$. Le tableau 5.1 montre que le résultat donné par COMSOL est cohérent avec la formulation acoustique du problème développé par Leroy [LER 04] et les considérations énergétiques menées par Minnaert [MIN 33]. Nous avons observé que la fréquence de résonance ne dépend pas du point de mesure et qu'il y a isotropie de la

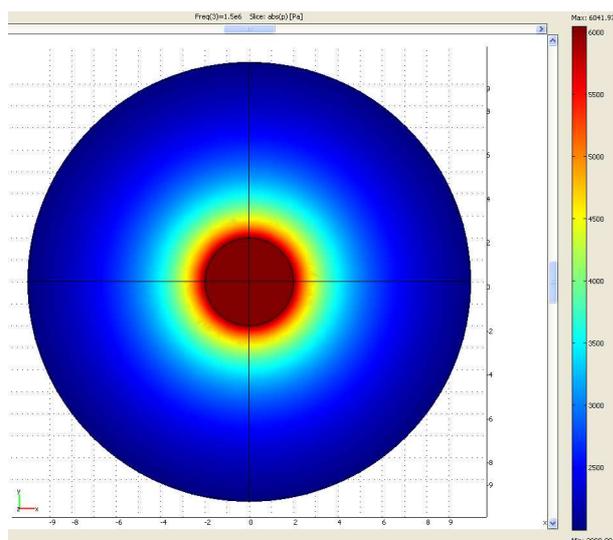


FIG. 5.6 – Module de la pression dans le plan xOy à la fréquence 1,5 MHz

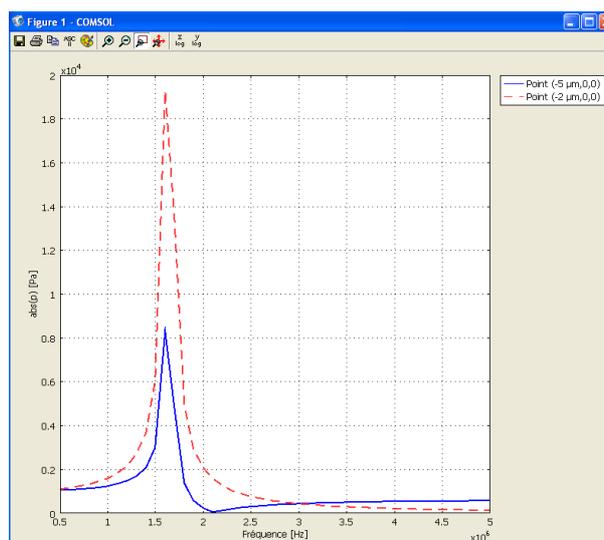


FIG. 5.7 – Evolution du module de la pression en fonction de la fréquence de l'onde incidente

pression : l'amplitude est la même en différents points positionnés sur une sphère entourant la bulle d'air, de rayon $3 \mu m$ par exemple. A la résonance, la longueur d'onde dans l'air ($207 \mu m$) est bien supérieure à la taille caractéristique de la bulle d'air ($\varnothing = 4 \mu m$). Cela implique que l'air présent dans la bulle subit des compressions et des dilatations uniformes, phénomène qui est bien vérifié avec la modélisation sous COMSOL (variation maximale de 0,06 % entre le centre de la bulle $r = 0$ et le bord $r = R_0$).

5.7 Etudes paramétriques

5.7.1 Influence de l'amplitude de l'onde incidente

Seule l'amplitude p_0 de l'onde plane incidente a été modifiée ($p_0 = 1, 10^3, 10^5 Pa$), les caractéristiques physiques et les dimensions du problème, le maillage et le niveau d'interpolation restant identiques. La fréquence de résonance obtenue est la même dans les trois cas et les réponses fréquentielles évaluées en un même point et normalisées par p_0 se superposent. Cela laisse présager d'une bonne fiabilité des résultats dans le domaine de l'acoustique linéaire.

5.7.2 Influence de la taille du maillage

L'influence du nombre d'éléments du maillage sur la valeur de la fréquence de résonance a été étudiée en utilisant les tailles (niveaux de raffinement) de maillage prédéfinies dans le logiciel. Les éléments tétraédriques sont utilisés pour mailler les sous-domaines (volumes) de la géométrie alors que les éléments triangulaires sont utilisés pour les frontières (surfaces). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 5.2.

Plus le maillage est précis, plus l'estimation de la fréquence de résonance se rapproche de la valeur "théorique" issue de la formulation acoustique : les erreurs relatives sont inférieures à 0,1 % pour les maillages *Normal*, *Fine* et *Finer* (valeur attendue 1,640 MHz, cf. tableau 5.1).

La taille du maillage a également une influence sur le temps de calcul. La tableau 5.3 précise le nombre de degrés de liberté et le temps de calcul associés à chaque maillage pour une résolution paramétrique sur la plage 1,6 MHz – 1,7 MHz par pas de 0,01 MHz (utilisation d'un PC Pentium 4, 3,2 GHz, 2 Go de RAM). La résolution du problème n'a pu aboutir pour des maillages plus raffinés (*Extra Fine*, 214332 éléments tétraédriques ; *Extremely Fine*, 1142969 éléments tétraédriques) par manque

Taille prédéfinie	Nombre d'éléments tétraédriques	Nombre d'élément triangulaires	Fréquence de résonance (MHz)	Erreur relative %
<i>Extremely coarse</i>	477	128	1,70596	4,02
<i>Extra coarse</i>	751	216	1,65191	0,73
<i>Coarser</i>	1573	384	1,64802	0,49
<i>Coarse</i>	3710	712	1,64224	0,14
<i>Normal</i>	10002	1388	1,64153	0,09
<i>Fine</i>	18516	2046	1,64061	0,04
<i>Finer</i>	55825	2046	1,64032	0,02

TAB. 5.2 – Comparaison de la fréquence de résonance pour différentes tailles du maillage

de mémoire (message d'erreur : “out of memory”). Il y a donc un compromis à trouver entre précision du résultat, temps de calcul et mémoire nécessaire. Dans l'exemple traité, les maillages Normal et Fine permettent d'obtenir des résultats précis avec un temps de calcul acceptable.

Taille	Degrés de liberté	Temps (s)
<i>Extremely coarse</i>	718	6,3
<i>Extra coarse</i>	1178	8,5
<i>Coarser</i>	2448	16
<i>Coarse</i>	5581	49
<i>Normal</i>	14637	254
<i>Fine</i>	26570	1001
<i>Finer</i>	78414	4321

TAB. 5.3 – Comparaison du temps de calcul pour différentes tailles du maillage - Elements de Lagrange d'ordre deux

5.7.3 Influence du degré d'interpolation

Les études précédentes ont été réalisées avec des éléments de Lagrange d'ordre deux. On travaille maintenant avec des éléments de Lagrange d'ordre un (polynôme de degré inférieur ou égal à un). Des simulations identiques aux précédentes ont été réalisées pour voir l'influence du degré d'interpolation sur le temps de calcul et la fréquence de résonance (cf. tableau 5.4). Pour une taille de maillage donnée, ce n'est pas le nombre d'éléments mais le nombre de points d'interpolation par élément qui change, et par conséquent le nombre de degrés de liberté. Ainsi, lorsque l'on utilise des éléments de Lagrange d'ordre un, le nombre de degrés de liberté diminue ce qui se répercute en une diminution du temps de calcul. La réduction du nombre de degrés de liberté a permis la résolution du problème dans le cas du maillage *Extra Fine*, ce qui n'était pas le cas avec des éléments de Lagrange d'ordre deux. L'évaluation de la fréquence de résonance est par contre moins précise que précédemment (cf. tableaux 5.3 et 5.4). Nous utiliserons donc par la suite des éléments de Lagrange d'ordre deux.

5.7.4 Influence de la taille du domaine de simulation

L'utilisation de la condition aux limites *Radiation condition* permet de borner le domaine de travail tout en simulant un espace infini. Nous avons fait varier le rayon de la sphère sur laquelle est appliquée cette condition aux limites afin d'évaluer l'influence de la position de cette condition aux limites sur la réponse de la bulle d'air de rayon de $2 \mu m$. Plus la condition aux limites est appliquée loin de l'objet diffractant, plus elle est efficace, i.e. moins elle perturbe la solution. En effet, plus on s'éloigne de l'objet, plus le champ est proche d'une onde sphérique pour laquelle la condition aux limites *Radiation condition*

Taille	Degrés de liberté	Temps (s)	Fréquence de résonance (MHz)	Erreur relative (%)
<i>Extremely coarse</i>	105	3,8	2,223	35,5
<i>Extra coarse</i>	176	4,1	1,940	18,3
<i>Coarser</i>	358	5	1,904	16,1
<i>Coarse</i>	788	7,3	1,763	7,5
<i>Normal</i>	2009	14,5	1,739	6,0
<i>Fine</i>	3576	26	1,704	3,9
<i>Finer</i>	10331	137	1,683	2,6
<i>Extra Fine</i>	38138	303	1,661	1,3

TAB. 5.4 – Temps de calcul et fréquences de résonance pour différentes tailles du maillage - Elements de Lagrange d'ordre un

a été programmée. Un bon compromis entre temps de calcul et précision de la fréquence de résonance a été obtenu avec $R_{ext} = 10 \mu m$ et un maillage *Fine*.

5.7.5 Influence du rayon de la bulle d'air

La figure 5.8 compare les fréquences de résonance obtenues avec Comsol et avec l'expression de Minnaert (cf. équation (1.1)) pour des bulles d'air de différents rayons. L'erreur relative est inférieure à 0,05 % dans tous les cas.

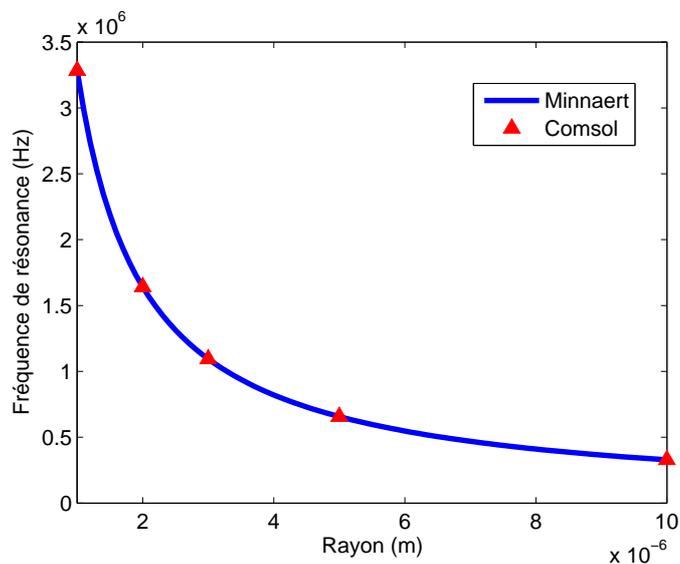


FIG. 5.8 – Influence du rayon de la bulle sur la fréquence de résonance

Le modèle éléments finis qui a été présenté dans ce chapitre permet donc de simuler la réponse fréquentielle d'une bulle d'air soumise à une onde acoustique incidente. Les résultats obtenus sont en accord avec le modèle théorique développé par Minnaert. A travers la construction pas à pas de ce modèle, nous avons pu nous familiariser avec le logiciel COMSOL et choisir les caractéristiques essentielles de notre modèle (maillage, degré d'interpolation, taille du domaine de simulation).

Chapitre 6

Modélisation éléments finis d'un agent de contraste en régime linéaire

Nous présentons maintenant l'extension du modèle éléments finis d'une bulle d'air dans l'eau au cas d'un agent de contraste dont la coque est modélisée tout d'abord par un solide élastique, puis par un solide viscoélastique. Les aspects non linéaires ne sont pas abordés.

6.1 Définition du modèle élastique

La première étape en vue de l'obtention d'un modèle d'agent de contraste ultrasonore est d'ajouter un troisième milieu au modèle de la bulle d'air immergée dans de l'eau présenté dans le chapitre précédent. Ce milieu supplémentaire représente la coque isolant le gaz de l'eau. Il peut être modélisé par un milieu solide viscoélastique (cf. chapitre 2), nous avons donc choisi de travailler avec le mode "Solid, Stress-Strain" proposé par COMSOL pour créer la coque, en réalisant tout d'abord un modèle d'agent de contraste à coque solide élastique. Dans ce mode, les variables sont les déplacements u , v et w dans les trois directions x , y et z . La loi de comportement du solide élastique est $\sigma = D\epsilon$ où D est la matrice d'élasticité (6×6), σ et ϵ les tenseurs des contraintes et des déformations représentés sous la forme d'un vecteur colonne. Le solide est caractérisé par trois paramètres : le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et la masse volumique ρ . Ces grandeurs seront indicées avec la lettre S par la suite.

On travaille donc en trois dimensions et on utilise deux modes d'application prédéfinis : *Acoustics Module > Pressure Acoustics > Time-Harmonic Analysis* pour l'eau et l'air et *Acoustics Module > Solid, Stress-Strain > Frequency Response Analysis* pour le solide. Les variables propres à chaque mode sont différenciées par un indice : *acpr* pour la partie acoustique ou *acsld* pour la partie solide.

La géométrie du problème (cf. figure 6.1) est définie par trois sphères concentriques centrées en $(0, 0, 0)$ de rayons respectifs $R_1 = 1,8 \mu\text{m}$, $R_2 = 2 \mu\text{m}$ et $R_{ext} = 10 \mu\text{m}$. Il y a donc trois sous-domaines dans ce modèle : le volume intérieur de la sphère de rayon R_1 (sous-domaine 3), le volume compris entre les sphères de rayon R_1 et R_2 (sous-domaine 2) et le volume compris entre les sphères de rayon R_2 et R_{ext} (sous-domaine 1). Le mode *Acoustics Module > Pressure Acoustics > Time-Harmonic Analysis*, qui est appelé par la suite "mode *acpr*", est associé aux sous-domaines 1 et 3 dans lesquels l'équation de Helmholtz (5.13) sera résolue. Le mode *Acoustics Module > Solid, Stress-Strain > Frequency Response Analysis*, qui est appelé par la suite "mode *acsld*", est associé au sous-domaine 2 dans lequel la réponse harmonique du solide (déplacements et contraintes) sera calculée. Les propriétés physiques des trois sous-domaines sont précisées dans le tableau 6.1. L'agent de contraste

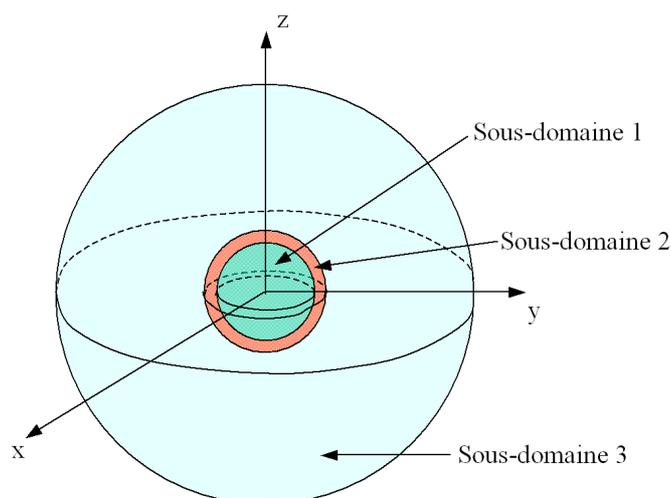


FIG. 6.1 – Géométrie du problème

Sous-domaine	1	2	3
Mode	<i>acpr</i>	<i>acsld</i>	<i>acpr</i>
Milieu	eau	coque	air
Propriétés	$\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$ $c_e = 1500 \text{ m/s}$ $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$ $Q = 0$	$E_s = 10 \text{ MPa}$ $\nu_s = 0,48$ $\rho_s = 1100 \text{ kg/m}^3$	$\rho_a = 1,225 \text{ kg/m}^3$ $c_a = 343 \text{ m/s}$ $\mathbf{q} = (0, 0, 0)$ $Q = 0$

TAB. 6.1 – Caractéristiques des sous-domaines eau/coque/air

modélisé a un rayon extérieur de $2 \mu\text{m}$, une coque d'épaisseur 200 nm et un coeur gazeux de rayon $1,8 \mu\text{m}$. Les valeurs des coefficients d'élasticité de la coque ont été choisies à partir des travaux de de Jong et al. sur l'Albunex (constitué d'air et d'albumine humaine) [JON 92] [JON 93], elles correspondent à un matériau très souple.

Comme dans l'exemple de la bulle d'air, la condition aux limites *Radiation boundary condition* est appliquée à la surface de la sphère de rayon R_{ext} pour simuler un domaine de propagation infini. L'onde incidente est une onde plane harmonique de fréquence f et d'amplitude $p_0 = 1000 \text{ Pa}$ se dirigeant dans la direction des x croissants ($p_i = p_0 e^{-ikx}$).

L'onde acoustique, présente dans l'eau et l'air, exerce une pression sur les surfaces extérieures et intérieures de la coque, ce que l'on traduit par la condition aux limites *Boundary Settings>Load* dans le mode *acsld* : la force surfacique qui s'exerce sur la surface de la coque est $\mathbf{F} = -p_{acpr} \mathbf{n}_{acsld}$ où \mathbf{n}_{acsld} est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur du solide, automatiquement défini par le logiciel.

Réciproquement, les déplacements de la coque influent sur l'onde acoustique présente dans les milieux fluides, ce que l'on traduit par la condition aux limites *Boundary Settings>Normal acceleration* dans le mode *acpr* : la pression acoustique (mode *acpr*) est liée à l'accélération normale calculée dans le solide (mode *acsld*), soit

$$-\mathbf{n}_{acpr} \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p_{acpr} - \mathbf{q}) \right) = \mathbf{a}_{acsld} \cdot \mathbf{n}_{acsld}. \quad (6.1)$$

\mathbf{n}_{acpr} est le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur des sous-domaines associés au mode *acpr*.

On a ainsi réalisé le couplage des deux modes d'application utilisés.

Le maillage *Normal* associé à la géométrie qui vient d'être définie est constitué de 15708 éléments tétraédriques ; 30946 degrés de liberté sont associés à ce maillage lorsque l'on utilise des fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre deux. Le détail du nombre d'éléments pour les différentes parties de la géométrie est donné dans le tableau 6.2. Dans cette configuration (maillage *Normal*, fonctions d'interpolation de Lagrange d'ordre deux, $R_{ext} = 10 \mu m$), la résolution paramétrique sur la plage 1 – 6 MHz par pas de 0,1 MHz dure 2h10 (utilisation d'un PC Pentium 4, 3,2 GHz, 2 Go de RAM).

Sous-domaine	Eau	Coque	Air
Tétraèdres	12906	1645	1157
Frontière	Extérieure	Eau/Coque	Coque/Air
Triangles	1234	604	468

TAB. 6.2 – Détails du nombre d'éléments du maillage *Normal*

6.2 Résultats

6.2.1 Fréquence de résonance

Ce modèle d'agent de contraste permet d'obtenir la réponse du système eau/coque/air à la fréquence f de l'onde incidente. L'utilisation du solveur paramétrique permet de faire varier la fréquence f sur une plage de fréquence avec un pas défini et d'obtenir la réponse du système à chaque pas (résolution de 1 à 10 MHz par pas de 0,1 MHz par exemple). La figure 6.2 représente l'évolution du module de la pression au point $(-2 \mu m, 0, 0)$ en fonction de la fréquence f ainsi que la réponse d'une bulle d'air sans coque de même rayon (modèle défini au chapitre précédent). La présence de la coque entraîne une diminution de l'amplitude à la résonance ainsi qu'un décalage vers les hautes fréquences de la fréquence de résonance, estimée à $f = 5,441 MHz$ (rappel : $f = 1,6415 MHz$ pour une bulle d'air de rayon $2 \mu m$). Cette valeur est comparée à celles prédites par les modèles théoriques de de Jong et al. [JON 92], Church [CHU 95] et Doinikov et al. [DOI 06] dans le tableau 6.3. Les résultats obtenus avec ce modèle éléments finis d'agent de contraste sont satisfaisants : l'écart relatif est inférieur à 2 % par rapport aux modèles de Church et de Doinikov.

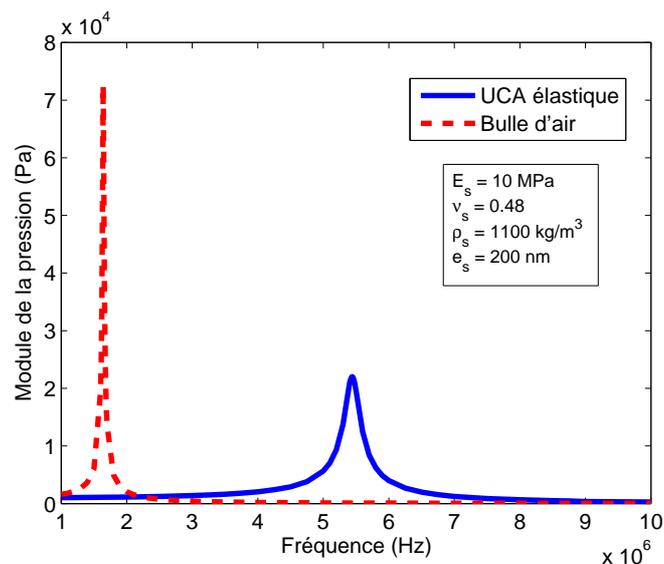


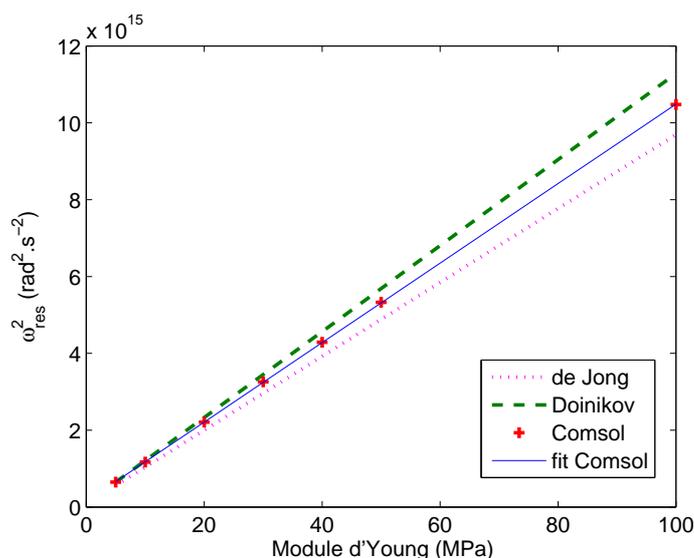
FIG. 6.2 – Réponse de l'agent de contraste

Modèle	COMSOL	de Jong	Church	Doinikov
f_{res} (MHz)	5,441	5,126	5,541	5,535
Ecart relatif (%)	/	5,8	1,8	1,7

TAB. 6.3 – Fréquence de résonance obtenue avec les différents modèles

6.2.2 Influence du module d'Young E_s

Les simulations ont été réalisées avec le modèle introduit ci-dessus, le module d'Young E_s de la coque étant le seul paramètre modifié. La fréquence de résonance f_{res} a été déterminée pour différentes valeurs du module d'Young. La figure 6.3 représente l'évolution de la pulsation de résonance au carré ω_{res}^2 en fonction de E_s ($\omega_{res} = 2\pi f_{res}$). Sur cette figure ont été ajoutées les valeurs calculées en utilisant les formules analytiques obtenues par de Jong (cf. équation (2.1)) et Doinikov (cf. équation (3.80)) ; NB : à l'échelle de la figure, les modèles de Church et Doinikov se superposent, un seul est donc représenté). Une régression linéaire a été effectuée sur les résultats obtenus avec COMSOL. Elle confirme que, comme prévu par les modèles théoriques (cf. équations (2.3), (2.14) et (3.80)), les résultats obtenus avec COMSOL sont de la forme $\omega_{res}^2 = aE_s + b$, i.e. le carré de la pulsation de résonance croît linéairement avec le module d'Young (ou le module de cisaillement).

FIG. 6.3 – $\omega_{res}^2 = f(E_s)$

La figure 6.4 montre que le phénomène de résonance est de moins en moins marqué lorsque le module d'Young augmente, i.e. lorsque la coque devient de plus en plus rigide : on observe une diminution de l'amplitude à la résonance et un élargissement du pic, associés à une augmentation de la fréquence de résonance. Ce comportement est en accord avec les théories analytiques. Les valeurs répertoriées dans le tableau 6.4 illustrent ce phénomène. σ est l'intervalle des fréquences pour lesquelles le module de la pression est supérieur à la valeur maximale $|p|_{max}$ divisée par $\sqrt{2}$ (bande passante à -3 dB).

6.2.3 Influence de l'épaisseur de la coque e_s

Le tableau 6.5 montre les fréquences de résonance obtenues pour trois agents de contraste ayant les mêmes propriétés physiques (cf. tableau 6.1) mais des coques d'épaisseurs différentes (rayon extérieur identique $R_2 = 2 \mu m$).

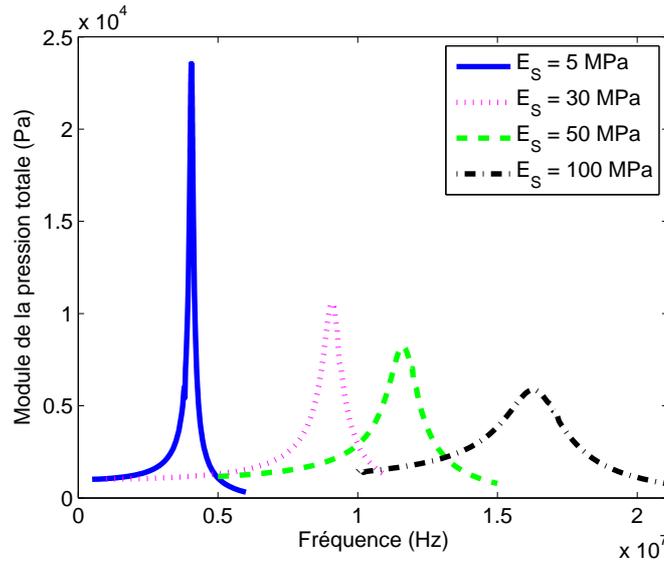


FIG. 6.4 – Influence du module d'Young

E (MPa)	5	30	50	100
$ p _{max}$ (10^4 Pa)	2.35	1.05	0.82	0.58
f_{res} (10^7 Hz)	0.41	0.91	1.2	1.6
σ (10^7 Hz)	0.01	0.06	0.1	0.2

TAB. 6.4 – Caractéristiques des courbes de résonance de la figure 6.4

R_1 (μm)	1.95	1.9	1.8
e_S (nm)	50	100	200
f_C (MHz)	3,002	3,949	5,441

TAB. 6.5 – Fréquence de résonance pour différentes épaisseurs de coque

La figure 6.5 montre les courbes de résonance obtenues pour ces agents de contraste. On observe un comportement similaire lorsque l'épaisseur de la coque augmente (cf. figure 6.5) et lorsque le module d'Young augmente (cf. figure 6.4). En effet, augmenter le module d'Young en gardant l'épaisseur constante ou augmenter l'épaisseur en gardant le module d'Young constant revient à augmenter la rigidité de la coque et entraîne donc un décalage de la fréquence de résonance vers les hautes fréquences, une diminution de l'amplitude à la résonance et un élargissement du pic de résonance. Le produit $e_S E_S$ joue donc un rôle important lorsque l'on s'intéresse à la rigidité d'un agent de contraste et par conséquent à sa fréquence de résonance. La figure 6.6 montre que la pulsation de résonance au carré ω_{res}^2 dépend linéairement du facteur $e_S E_S$, comme prédit par les modèles théoriques (cf. équation (2.3) par exemple).

6.2.4 Influence de la tension de surface

Le phénomène de tension de surface peut être pris en compte au niveau des interfaces eau/coque et coque/air en modifiant dans la fenêtre *Boundary Settings*>*Load* du mode *acsl*d l'expression de la force qui s'exerce sur la surface de la coque (utilisation de la formule de Laplace). A la surface de la sphère de rayon R_2 constituant l'interface entre l'eau et la coque, l'expression devient $\mathbf{F} = -(p_{acpr} + 2\sigma_2/R)\mathbf{n}_{acsl}$; à la surface de la sphère de rayon R_1 constituant l'interface entre l'air et la coque, l'ex-

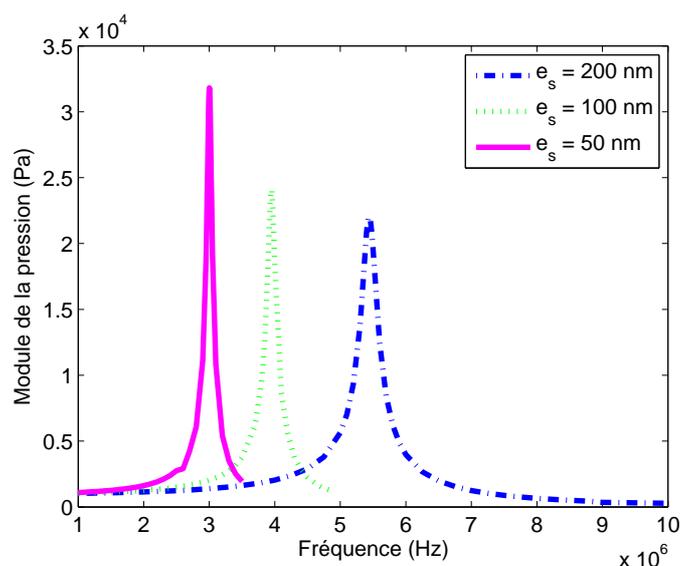
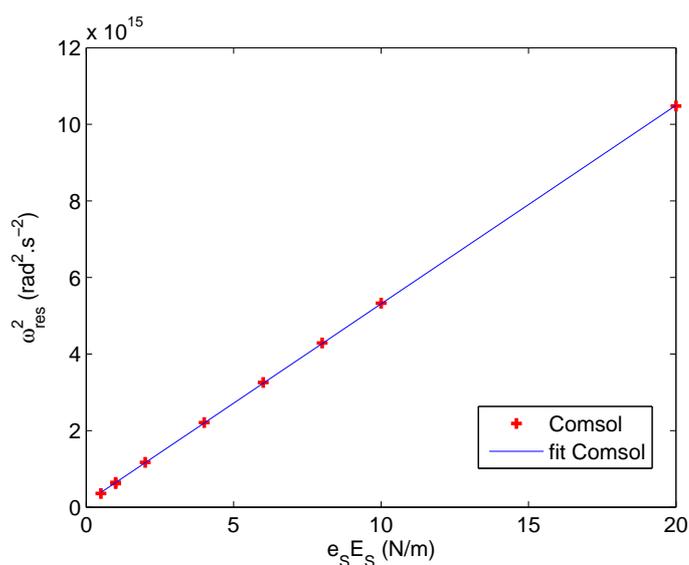


FIG. 6.5 – Influence de l'épaisseur de la coque

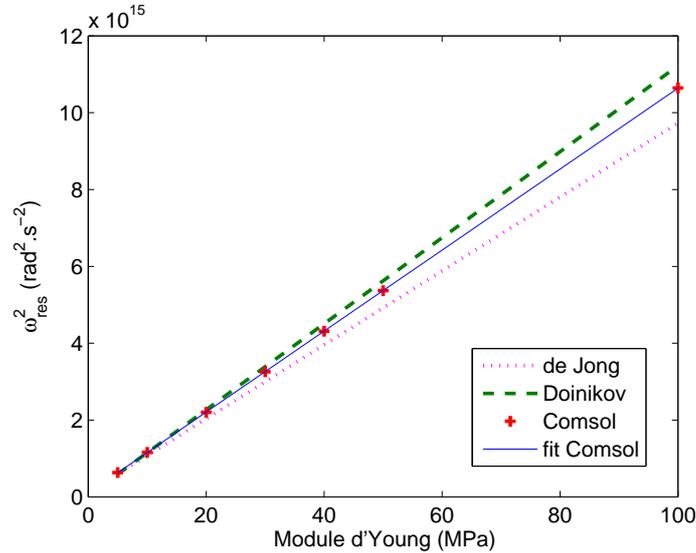
FIG. 6.6 – ω_{res}^2 vue comme une fonction de $e_s E_s$

pression devient $\mathbf{F} = -(p_{acpr} - 2\sigma_1/R)\mathbf{n}_{acsld}$. R est la distance d'un point de la coque au centre de l'agent de contraste définie par l'expression $R = \sqrt{(x+u)^2 + (y+v)^2 + (z+w)^2}$, où (x, y, z) sont les coordonnées initiales du point considéré et (u, v, w) les déplacements associés à ce point. Les valeurs des coefficients de tension de surface sont $\sigma_1 = 0,04$ N/m et $\sigma_2 = 0,005$ N/m [CHU 95] [DOI 06]. Le tableau 6.6 compare la fréquence de résonance obtenue avec les prédictions théoriques pour l'agent de contraste présenté au paragraphe 6.1.

La figure 6.7 représente l'évolution de la pulsation de résonance au carré ω_{res}^2 en fonction de E_s . Comme dans le cas précédent où la tension de surface n'était pas pris en compte, les résultats de COMSOL sont de la forme $\omega_{res}^2 = aE_s + b$, i.e. le carré de la pulsation de résonance croît linéairement avec le module d'Young. La prise en compte de la tension de surface entraîne une modification des coefficients a et b estimée à 2% pour a et à plus de 30% pour b . Les modèles théoriques prédisent une modification

Modèle	COMSOL	de Jong	Church	Doinikov
f_{res} (MHz)	5,415	5,212	5,617	5,605
Ecart relatif (%)	/	3,8	3,7	3,5

TAB. 6.6 – Fréquence de résonance obtenue avec les différents modèles


 FIG. 6.7 – $\omega_{res}^2 = f(E_s)$

du paramètre b uniquement (cf. équations (2.3), (2.14) et (3.80)), les résultats obtenus avec COMSOL sont donc très satisfaisants.

6.2.5 Influence d'un amortissement visqueux

Lorsque l'on travaille dans le domaine fréquentiel avec COMSOL, le comportement d'un matériau solide viscoélastique est décrit par la loi

$$\boldsymbol{\sigma} = D(1 + i\eta_{Comsol}) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (6.2)$$

où η_{Comsol} , appelé facteur de perte, est défini comme le rapport entre le module de perte G'' et le module de conservation G' . Les modules G' et G'' sont les parties réelle et imaginaire du module dynamique G ; G' traduit la capacité du matériau à restituer l'énergie mécanique qui l'a déformé alors que G'' traduit la capacité du matériau à dissiper l'énergie mécanique sous forme de chaleur.

La comparaison avec les modèles analytiques traitant la coque comme un solide viscoélastique (modèle de Kelvin-Voigt, cf. équation (2.5) [CHU 95] [DOI 06]) permet de dégager une relation entre le facteur de perte η_{Comsol} et le coefficient de viscosité du solide η_s utilisé dans les modèles analytiques

$$\eta_{Comsol} = \frac{\omega \eta_s}{\mu_s}. \quad (6.3)$$

Afin de comparer les résultats issus du modèle éléments finis avec ceux obtenus à partir des modèles analytiques, on utilise donc la relation (6.3) pour le paramètre facteur de perte η_{Comsol} qui présente ainsi une dépendance fréquentielle. Par la suite, seules les valeurs du coefficient de viscosité du solide η_s sont données.

Les simulations ont été réalisées pour plusieurs valeurs de η_s , les autres paramètres étant constants (cf. tableau 6.1). La figure 6.8 représente l'évolution de la pression lorsque le coefficient de viscosité

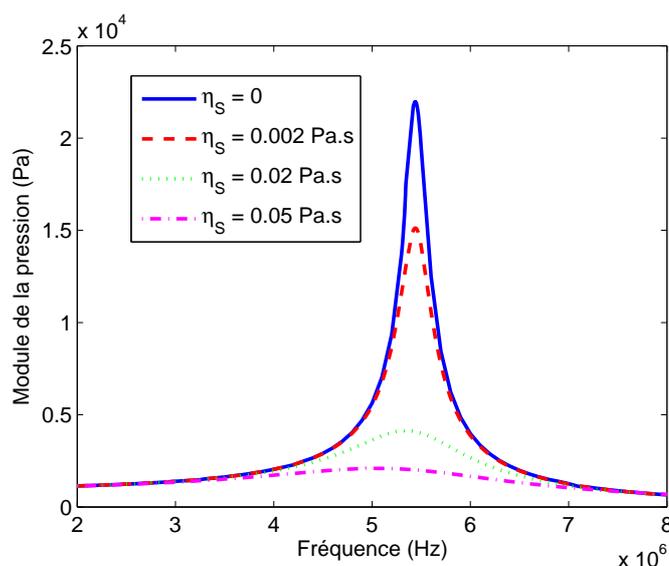


FIG. 6.8 – Influence de l'amortissement visqueux

η_S (Pa.s)	0.002	0.02	0.05
f_{Comsol} (MHz)	5.435	5.315	4.965
f_{Church} (MHz)	5.526	5.434	5.099
$f_{Doïnikov}$ (MHz)	5.523	5.436	5.107

TAB. 6.7 – Fréquence de résonance d'un agent de contraste à coque solide viscoélastique

augmente : l'amplitude maximale diminue, la bande passante augmente et on observe un léger décalage de la fréquence de résonance vers les basses fréquences. Le phénomène de résonance disparaît pour les valeurs de η_S trop élevées. Les fréquences de résonance obtenues avec COMSOL et les modèles analytiques sont indiquées dans le tableau 6.7. L'erreur relative est inférieure à 3% dans tous les cas.

Le modèle éléments finis d'une bulle d'air a été étendu au cas d'un agent de contraste par l'ajout d'un milieu solide à l'interface gaz/liquide. Le comportement du matériau constituant le solide a été choisi tout d'abord élastique puis viscoélastique. A chaque étape de la construction du modèle, les résultats obtenus avec COMSOL ont été comparés à ceux issus des modèles analytiques présentés au chapitre 2, ce qui nous a permis de valider, dans le cadre linéaire, le modèle éléments finis d'un agent de contraste isolé dans un milieu fluide d'étendue infinie.

Chapitre 7

Présence d'une paroi rigide

Nous proposons dans ce chapitre une modification du modèle éléments finis afin d'inclure une paroi rigide à proximité d'une bulle d'air ou d'un agent de contraste (première étape en vue de la modélisation d'une paroi compliant). Les résultats obtenus avec COMSOL sont comparés avec un modèle équivalent d'oscillateur harmonique développé en collaboration avec Bernard Molin (IRPHE / Ecole Centrale Marseille).

7.1 Cas d'une bulle d'air

7.1.1 Présentation du modèle éléments finis

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'une bulle d'air située à proximité d'une paroi rigide supposée infinie. La figure 7.1 présente la configuration envisagée.

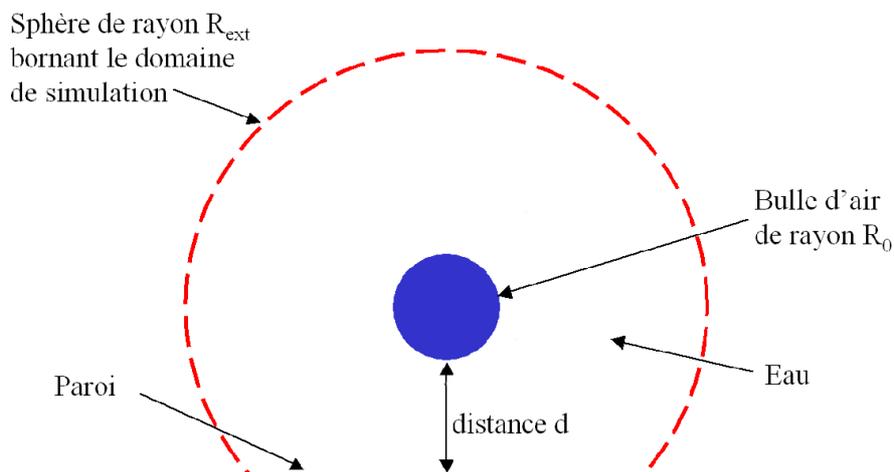


FIG. 7.1 – Schéma de l'exemple traité

Comme pour l'exemple de la bulle d'air isolée, on travaille en trois dimensions avec le mode d'application prédéfini *Acoustics Module > Pressure Acoustics > Time-Harmonic Analysis*. L'équation (5.13) est résolue dans le domaine de simulation constitué d'un sous-domaine eau ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $c_s = 1500 \text{ m/s}$) et d'un sous-domaine air ($\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$, $c_s = 343 \text{ m/s}$). Le rayon de la bulle d'air est $R_0 = 2 \text{ }\mu\text{m}$. A l'interface eau/air, on applique la condition prédéfinie *Continuity*. Le domaine de

simulation est borné par une sphère de rayon R_{ext} tronquée à la côte $z = -(R_0 + d)$. Sur le disque ainsi constitué est appliquée la condition prédéfinie *Sound Hard Boundary* correspondant à la condition de Neumann de paroi rigide ($\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$), la condition aux limites *Radiation boundary condition* étant appliquée sur le reste de la sphère. L'onde incidente est une onde plane harmonique de pulsation $\omega = 2\pi f$. On fait varier la fréquence f sur la plage 1 – 3 MHz afin de trouver la fréquence, dite de résonance, pour laquelle le module de la pression totale, évalué à la surface de la bulle d'air, est le plus grand (critère proposé par Leroy [LER 04]).

7.1.2 Influence de la distance à la paroi

Le tableau 7.1 donne les fréquences de résonance obtenues avec le modèle éléments finis COMSOL pour différentes valeurs de la distance d .

Distance d (μm)	0	0,5	1	2	5	sans paroi
Fréquence de résonance (MHz)	1,367	1,400	1,430	1,470	1,537	1,641

TAB. 7.1 – Fréquences de résonance obtenues pour différentes valeurs de d - Cas d'une bulle de gaz

Ces valeurs ont été obtenues avec $R_{ext} = 50 \mu m$. Il faut en effet que la condition aux limites soit appliquée suffisamment loin de l'objet (bulle d'air et paroi) pour être efficace. Une étude paramétrique nous a permis de vérifier la stabilité de la réponse pour des rayons R_{ext} supérieurs à $40 \mu m$. La figure 7.2 illustre ce phénomène et permet de comparer les résultats de COMSOL à ceux obtenus par Strasberg [STR 53]. Par analogie avec le calcul de capacité d'un conducteur en électrostatique, Strasberg a proposé la relation (7.1) pour décrire l'influence d'une paroi rigide infinie sur la fréquence de résonance d'une bulle de gaz [STR 53]

$$\frac{f_{paroi}}{f_M} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{R_0}{R_0 + d} - \left(\frac{1}{2} \frac{R_0}{R_0 + d}\right)^4}}, \quad (7.1)$$

où f_M est la fréquence de Minnaert, valant 1,642 MHz pour une bulle d'air de rayon $2 \mu m$.

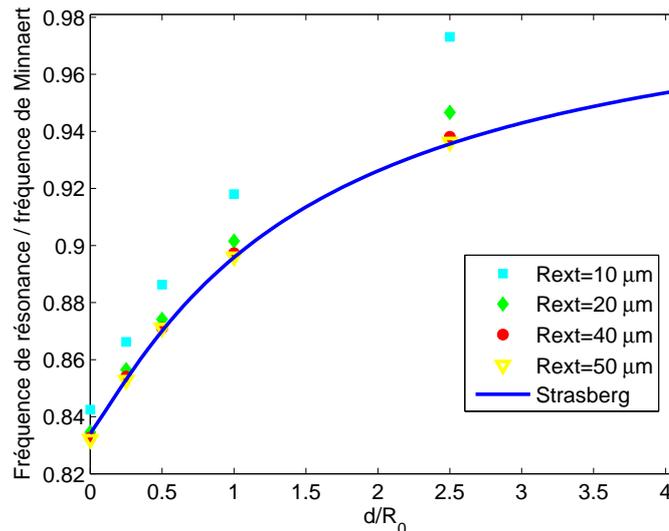


FIG. 7.2 – Evolution de la fréquence de résonance en fonction de la distance à la paroi

Lorsque R_{ext} augmente, les valeurs obtenues avec COMSOL se stabilisent et se rapprochent de la solution proposée par Strasberg (écart relatif inférieur à 0,2 % pour $R_{ext} \geq 40 \mu m$). Le tableau 7.1 et

la figure 7.2 montrent que plus la paroi est proche de la bulle de gaz, plus la fréquence de résonance diminue.

7.1.3 Bulle en contact : résultats dans le cas $d = 0$

Dans la majorité des études expérimentales étudiant des agents de contraste isolés, une solution diluée d'agents de contraste circule dans un tube en cellulose de $200 \mu m$ de diamètre [JON 00-b] [MOR 00] [AMM 06]. Il a été observé que les agents de contraste se retrouvent "collés" à la paroi supérieure du tube à cause de la poussée d'Archimède. Le cas où la paroi est tangente à la bulle ($d = 0$) revêt donc une importance particulière. Le tableau 7.2 récapitule les résultats trouvés dans la littérature sous la forme du rapport entre $f_{d=0}$ et f_M , où $f_{d=0}$ est la fréquence de résonance pour une bulle tangente à la paroi ($d = 0$) et f_M est la fréquence de résonance en l'absence de paroi (fréquence de Minnaert). Les résultats, légèrement différents les uns des autres, ne dépendent pas du rayon de la bulle. Les valeurs correspondantes de la fréquence de résonance $f_{d=0}$ ont été calculées pour une bulle d'air, de rayon $R_0 = 2 \mu m$, dans l'eau.

Auteurs	Strasberg [STR 53]	Maksimov [MAK 05]	Garbin [GAR 06]
$f_{d=0}/f_M$	$1/\sqrt{1 + 1/2 - (1/2)^4}$	$\sqrt{\ln 2}$	$1/\sqrt{1 + 1/2}$
$f_{d=0}/f_M$ (%)	83,4	83,3	81,7
$f_{d=0}$ (MHz)	1,3692	1,3667	1,3404

TAB. 7.2 – Valeurs proposées dans la littérature dans le cas $d = 0$

Les calculs réalisés avec COMSOL montrent également que le rapport $f_{d=0}/f_M$ est indépendant du rayon R_0 de la bulle d'air. Il vaut 83,3 %. On note un très bon accord entre ce résultat et les théories développées par Strasberg et Maksimov (cf. tableau 7.2).

Le modèle développé sous COMSOL permet donc de prendre en compte de manière satisfaisante la présence d'une paroi rigide infinie et de quantifier son influence sur le comportement d'une bulle d'air soumise à une onde acoustique incidente.

7.2 Cas d'un agent de contraste

Dans le modèle avec paroi présenté ci-dessus, la bulle d'air est remplacée par l'agent de contraste décrit dans le paragraphe 6.1 (le rayon externe vaut toujours $2 \mu m$). Un amortissement visqueux est pris en compte dans le comportement du matériau constituant la coque de l'agent de contraste, comme indiqué dans le paragraphe 6.2.5 avec $\eta_S = 0,002 m.s^{-1}$.

Le tableau 7.3 donne les fréquences de résonance obtenues avec le modèle éléments finis COMSOL pour différentes valeurs de la distance d .

Distance d (μm)	0	0,5	1	2	5	10	20	sans paroi
Fréquence de résonance (MHz)	4,570	4,687	4,778	4,912	5,112	5,242	5,347	5,435

TAB. 7.3 – Fréquences de résonance obtenues pour différentes valeurs de d - Cas d'un agent de contraste

Dans le cas où l'agent de contraste est tangent à la paroi ($d = 0$), on observe une diminution de l'ordre de 16 % de la fréquence de résonance par rapport à sa valeur en l'absence de paroi, soit $f_{\text{avec paroi Comsol}}/f_{\text{sans paroi Comsol}} = 84$ %. En faisant varier le module d'Young E_s (les autres caractéristiques physiques et géométriques de l'agent de contraste étant identiques), on a constaté que ce rapport $f_{\text{avec paroi Comsol}}/f_{\text{sans paroi Comsol}}$ restait constant, indépendamment de la valeur du module d'Young de la coque.

La récente mise au point des pinces optiques, spécifiquement dédiées à la manipulation des agents de contraste [GAR 06] et couplées à une caméra ultra-rapide, a permis l'étude précise et systématique de l'influence d'une paroi à proximité d'un agent de contraste [GAR 07-a] [OVE 07] [DOL 08] [VOS 08]. Les observations expérimentales confirment la diminution, de l'ordre de 20% selon les auteurs, de la fréquence de résonance lorsque un agent de contraste se trouve à proximité d'une paroi rigide.

7.3 Modèle équivalent d'oscillateur harmonique

Dans la suite, les grandeurs indicées par ∞ se rapportent au cas sans paroi, celles indicées par *paroi* au cas avec paroi.

7.3.1 Rappel du modèle dans le cas sans paroi

Dans le cas d'oscillations radiales de faible amplitude ($R = R_0 + \xi$, $\xi \ll R_0$), la fréquence propre d'une bulle de gaz dans un liquide incompressible, sans tension de surface ni viscosité, est aisément obtenue par analogie avec un oscillateur harmonique de masse m et de raideur k pour lequel $f_{OH} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (cf. équation (1.28)).

En effet, le système composé d'une bulle de gaz dans un liquide présente, nous l'avons vu, les deux caractéristiques physiques d'un système mécanique oscillant : la raideur et l'inertie. La raideur est celle du volume de gaz enfermé dans la bulle qui agit comme un ressort quand le rayon de la bulle s'éloigne de sa position d'équilibre. L'inertie est principalement due à la masse de liquide qui entoure la bulle et qui est mise en mouvement au contact de la bulle.

Nous avons vu au paragraphe 3.1, lors de la formulation lagrangienne, que l'énergie cinétique du liquide s'écrit $T_\infty = 2\pi\rho_L R^3 \dot{R}^2$, soit $T_\infty = 2\pi\rho_L R_0^3 \dot{\xi}^2$ dans le cas d'oscillations radiales de faible amplitude et donc $m_\infty = 4\pi\rho_L R_0^3$ par identification avec la forme classique $T_\infty = \frac{1}{2}mv^2$.

L'énergie potentielle a été obtenue sous la forme (cf. équation 3.16)

$$U_\infty = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} + p_\infty V_0 \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 1 \right). \quad (7.2)$$

Le développement limité à l'ordre deux en ξ conduit à l'expression

$$U_\infty = P_0 V_0 \left(\frac{1}{\gamma - 1} - 3 \frac{\xi}{R_0} + \frac{3(3\gamma - 2)}{2} \left(\frac{\xi}{R_0} \right)^2 \right) + p_\infty V_0 \left(3 \frac{\xi}{R_0} + 3 \left(\frac{\xi}{R_0} \right)^2 \right). \quad (7.3)$$

On s'intéresse uniquement aux oscillations libres afin de trouver la fréquence propre, donc $p_\infty = P_0$ et ainsi $U_\infty = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} + 6\pi\gamma P_0 R_0 \xi^2$. L'énergie potentielle étant définie à une constante près, on peut considérer que $U_\infty = 6\pi\gamma P_0 R_0 \xi^2$ et on obtient finalement $k_\infty = 12\pi\gamma P_0 R_0$ par identification avec la forme classique $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

Le rapport $f_\infty = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\infty}{m_\infty}}$ conduit alors à $f_\infty = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_L}}$, ce qui correspond bien à la fréquence de Minnaert (cf. équation (1.1)). En régime forcé, le phénomène de résonance aura lieu lorsque la fréquence d'excitation sera égale à la fréquence propre f_∞ (amortissement non pris en compte ici).

7.3.2 Obtention du modèle dans le cas avec paroi

Nous supposons que la fréquence propre d'une bulle de gaz situé à proximité d'une paroi peut être obtenue de façon analogue en identifiant les coefficients k_{paroi} et m_{paroi} à partir des énergies cinétique

et potentielle. Notre hypothèse de travail est que la présence de la paroi modifie uniquement le champ de vitesse dans le liquide et donc que seul le calcul de l'énergie cinétique doit être repris (équations (3.6) à (3.13)) afin de déterminer m_{paroi} . Nous considérons donc qu'il n'y a pas de modification de l'énergie potentielle, soit $k_{paroi} = k_{\infty}$.

Le travail effectué par B. Molin (IRPHE/ECM), détaillé en annexe (communication personnelle), montre que le rapport des énergies cinétiques T_{paroi}/T_{∞} ne dépend que de la distance d entre la bulle d'air et la paroi. On peut donc écrire $T_{paroi} = \alpha(d)T_{\infty}$ où $\alpha(d)$ est issu des calculs menés par Bernard Molin. On en déduit donc que $m_{paroi} = \alpha(d)m_{\infty}$, soit

$$\omega_{paroi}^2 = \frac{k_{paroi}}{m_{paroi}} = \frac{k_{\infty}}{\alpha(d)m_{\infty}} = \frac{\omega_{\infty}^2}{\alpha(d)}, \quad (7.4)$$

ou encore

$$\frac{f_{paroi}}{f_{\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(d)}}. \quad (7.5)$$

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 7.3 (énergie cinétique) et 7.4 (fréquence propre). Ils varient, pour des faibles distances d , selon que l'on prend en compte ou non le mouvement de translation de la bulle en plus des oscillations radiales. La présence de la paroi tend à diminuer la fréquence de propre : plus la bulle d'air est proche de la paroi, plus la fréquence propre est basse.

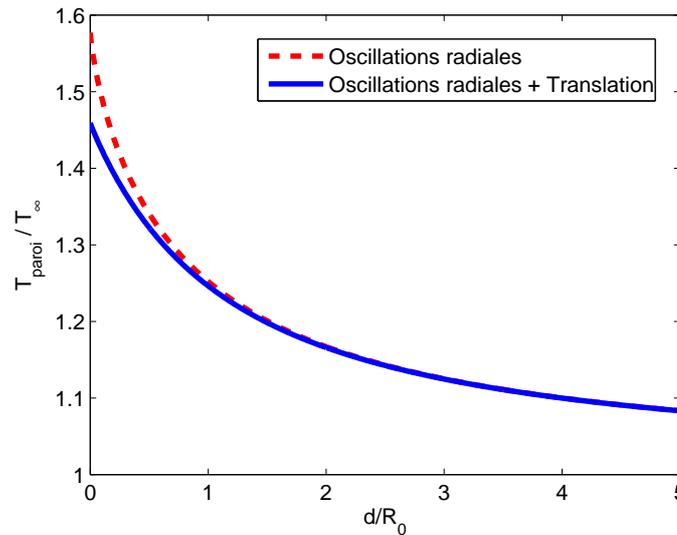


FIG. 7.3 – Rapport des énergies cinétiques avec et sans paroi (B. Molin, communication personnelle)

Le tableau 7.4 donne les valeurs de la fréquence propre obtenues pour différentes distances entre une bulle d'air de rayon $2 \mu m$ et la paroi ($f_{\infty} = 1.641 \text{ MHz}$) en utilisant la relation proposée par Strasberg (équation (7.1)) et le modèle de B. Molin (équation (7.5)).

$d (\mu m)$	0	1	2	5	10
Molin (osc. radiales)	1,307	1,418	1,467	1,536	1,577
Molin (osc. radiales + translation)	1,359	1,427	1,470	1,536	1,577
Strasberg	1,369	1,428	1,471	1,536	1,577

TAB. 7.4 – Fréquences propres (MHz) d'une bulle de rayon $R_0 = 2 \mu m$ à proximité d'une paroi

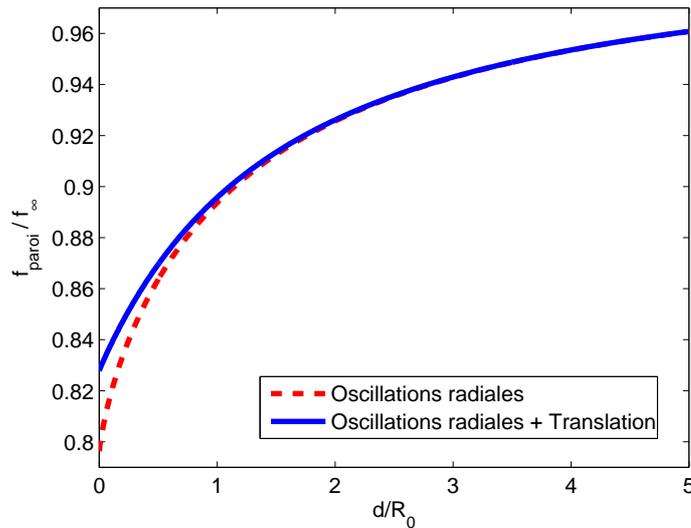


FIG. 7.4 – Rapport des fréquences propres avec et sans paroi (B. Molin, communication personnelle)

Dans le cas “oscillations radiales + translation”, l’écart relatif entre le modèle équivalent d’oscillateur harmonique et celui de Strasberg est inférieur à 1%, et même inférieur à 0,1% lorsque la distance entre la bulle d’air et la paroi est supérieure à $1 \mu m$. Il semble donc préférable de prendre en compte le mouvement de translation de la bulle dans la direction perpendiculaire à la paroi en plus des oscillations radiales de la bulle.

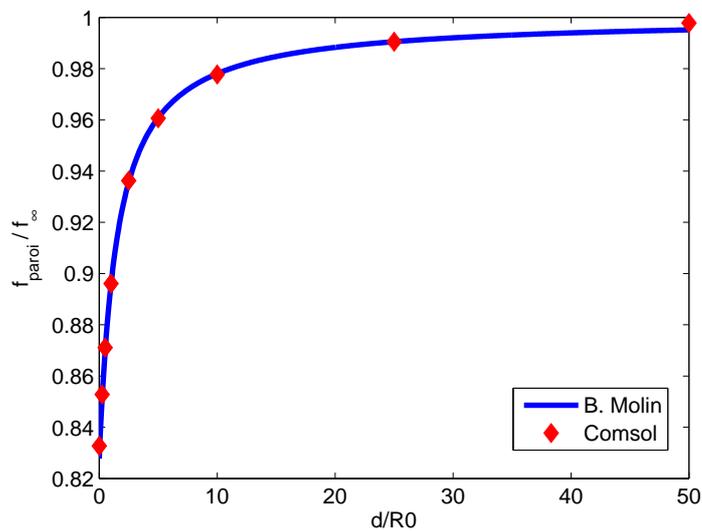


FIG. 7.5 – Evolution de la fréquence propre en fonction de la distance à la paroi - Comparaison COMSOL/Molin

La figure 7.5 montre la comparaison entre les résultats obtenus avec COMSOL et ceux découlant des travaux de B. Molin dans le cas “oscillations radiales + translation”. Pour les différentes valeurs de d testées sous COMSOL avec une bulle d’air de rayon $R_0 = 2 \mu m$, l’erreur relative est inférieure à 0,6%. Lorsque la distance à la paroi augmente, on tend vers le cas d’un milieu non borné. Pour des distances

d supérieures à $50 \mu\text{m}$, correspondant à $d \leq 25R_0$, on peut considérer que l'influence de la paroi est négligeable, i.e. $f \approx f_\infty$ (erreur relative inférieure à 1%).

Ces résultats montrent qu'il est raisonnable de considérer que la présence de la paroi influe uniquement sur le champ de vitesse au sein du liquide. L'obtention de l'énergie cinétique en présence de la paroi et du coefficient m_{paroi} suffit à estimer de manière satisfaisante la fréquence propre d'une bulle de gaz située à proximité d'une paroi, à condition de considérer les mouvements d'expansion radiale et de translation.

7.3.3 Comparaison avec le modèle COMSOL dans le cas d'un agent de contraste

Nous tenons à rappeler que le raisonnement a été effectué dans le cas le plus simple d'une bulle de gaz dans un liquide, sans considérer la tension de surface, la viscosité ou la compressibilité du liquide. La prise en compte de la tension de surface est immédiate vu qu'elle ne fait pas intervenir le champ de vitesse au sein du liquide (cf. équations (3.20) à (3.22)). Il suffit donc de choisir, non plus la fréquence de Minnaert, mais la fréquence donnée par Richardson f_R (cf. équation (1.17)) comme fréquence de référence sans paroi f_∞ . En revanche, pour prendre en compte la viscosité et la compressibilité du liquide ainsi que la coque de l'agent de contraste, il faudrait reprendre les calculs (énergie cinétique et énergie potentielle) en ayant l'expression réelle du champ de vitesse au sein du liquide, afin d'en déduire les nouvelles expressions de m_{paroi} et k_{paroi} .

Nous envisageons cependant de comparer les résultats obtenus avec le modèle éléments finis développé sous COMSOL avec l'approche présentée ici, i.e. en se limitant à la seule modification de l'énergie cinétique du liquide due à la présence de la paroi. La fréquence de résonance d'un agent de contraste à proximité d'une paroi s'écrit alors $f_{\text{paroi Molin}} = f_{\text{sans paroi Comsol}} / \sqrt{\alpha(d)}$, la fréquence de résonance $f_{\text{sans paroi Comsol}}$ obtenue avec le modèle éléments finis présenté au chapitre 6 étant choisie comme fréquence de référence sans paroi (donc $f_\infty = f_{\text{sans paroi Comsol}}$ dans le cas d'un agent de contraste). Cela devrait nous permettre de quantifier l'importance du terme d'énergie cinétique du liquide par rapport aux autres termes que l'on a choisi de ne pas modifier, en particulier l'énergie cinétique et l'énergie élastique de la coque.

La figure 7.6 présente les résultats obtenus avec COMSOL pour différentes valeurs de la distance d entre l'agent de contraste et la paroi, ainsi que la fréquence $f_{\text{paroi Molin}}$ issue de notre modèle équivalent d'oscillateur harmonique.

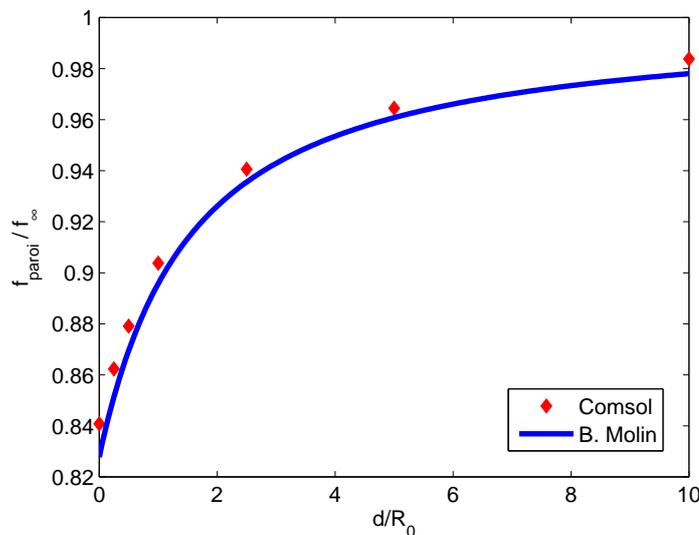


FIG. 7.6 – Evolution de la fréquence de résonance en fonction de la distance à la paroi d

Les résultats obtenus avec COMSOL suivent bien la tendance donnée par la courbe $f_{\text{paroi Molin}}$. Cela confirme donc que la modification, due à la présence de la paroi, de l'énergie cinétique du liquide est bien le principal phénomène à prendre en compte, même dans le cas d'un agent de contraste. On note cependant une légère surestimation de la diminution de la fréquence de résonance (écart relatif inférieur à 1,6%), qui pourrait éventuellement être corrigée en prenant en compte l'énergie cinétique et l'énergie élastique de la coque dans les coefficients m_{paroi} et k_{paroi} .

Les modèles éléments finis d'une bulle d'air et d'un agent de contraste présentés aux chapitres précédents ont été modifiés pour étudier l'influence d'une paroi rigide sur leur réponse acoustique. Une diminution significative de la fréquence de résonance a été observée dans les deux cas.

Le modèle équivalent d'oscillateur harmonique est satisfaisant dans le cas de la bulle d'air lorsque l'on prend en compte à la fois les oscillations radiales et le mouvement de translation dans la direction orthogonale à la paroi, comme le suggéraient les travaux de Marmottant et al. [MAR 06].

Compte tenu des hypothèses fortes formulées, ce modèle équivalent ne peut être satisfaisant dans le cas de l'agent de contraste mais permet cependant de retrouver l'allure générale des résultats obtenus avec COMSOL. Les résultats disponibles dans la littérature portent sur des expériences réalisées in vitro avec des agents de contraste dans des tubes de cellulose (de diamètre 200 μm) pour lesquelles la modélisation par une paroi rigide semble tout à fait convenir. Nos résultats sont en effet cohérents avec l'ordre de grandeur de la diminution de la fréquence de résonance observée expérimentalement [GAR 07-a] [OVE 07].

Afin de se rapprocher au mieux de la réalité (vaisseaux sanguins), la prochaine étape dans la modélisation éléments finis sera de travailler avec une paroi compliant. D'après les simulations numériques de Qin et al. [QIN 07], il semble alors qu'il faille s'attendre au comportement inverse, i.e. à une augmentation de la fréquence de résonance lorsque l'agent de contraste se trouve à proximité de la paroi compliant.

Conclusion

De part leur fort pouvoir réflecteur, les agents de contraste ultrasonore sont largement utilisés en échographie. Dans le cadre du développement du prototype ANAÏS, basé sur la tomographie ultrasonore, l'équipe "Propagation et Imagerie" souhaite mettre à profit à la fois leur pouvoir réflecteur (tomographie en réflexion) mais également leur forte atténuation (tomographie en transmission). Afin de permettre un diagnostic plus précis (détection précoce et localisée) et une délivrance locale de substances thérapeutiques, nous envisageons d'utiliser des agents de contraste spécifiques. Il est alors nécessaire de savoir distinguer, lors de la phase d'imagerie, ceux qui sont libres de ceux qui sont liés aux cellules cibles. La mise au point de cette méthode requiert la connaissance fine du comportement des agents de contraste.

L'étude bibliographique a permis de se familiariser avec la physique des agents de contraste et de faire le point sur les travaux réalisés dans ce domaine. Les principaux modèles décrivant les oscillations radiales d'une bulle de gaz et d'un agent de contraste ont été présentés de façon chronologique dans les chapitres 1 et 2. La mise en équation dans le cadre du formalisme lagrangien a été rappelée dans le chapitre 3. Cet examen approfondi de la littérature a révélé l'importance du caractère non linéaire du comportement des agents de contraste ainsi que l'inadéquation de la modélisation en milieu infini avec les conditions expérimentales réelles. Ces constatations ont été le point de départ des travaux exposés dans ce mémoire, visant à évaluer la fréquence de résonance d'un agent de contraste, soit soumis à une sollicitation de grande amplitude (chapitre 4), soit placé à proximité d'une paroi (chapitres 5, 6 et 7). Le choix de ces deux axes de recherche a été conforté par de récentes publications [DOI 09-a] [DOI 09-b] [CHE 09] [MAR 09] [OVE 09].

Nous avons présenté tout d'abord une étude du comportement en régime non linéaire d'une bulle de gaz puis d'un agent de contraste (chapitre 4). Les équations régissant les oscillations radiales d'une bulle de gaz (modèle RPNNP) et d'un agent de contraste (modèles de Hoff et de Marmottant) ont été mises sous forme quadratique afin de pouvoir utiliser le logiciel MANLAB, développé par l'équipe Méthodes Numériques du LMA. Nous avons ainsi obtenu les courbes amplitude-fréquence associées à ces trois modèles. Le caractère mollissant a été mis en évidence dans les cas RPNNP et Hoff, alors que dans le cas Marmottant le comportement de l'agent de contraste est d'abord légèrement raidissant puis devient mollissant. Nous avons étudié l'influence des différents paramètres des modèles théoriques (tension de surface, viscosité du liquide, module de cisaillement...): le coefficient de viscosité de la coque a une influence notable puisqu'il peut complètement gommer le caractère non linéaire de l'agent de contraste (obtention de la courbe classique d'un oscillateur harmonique amorti). Les propriétés viscoélastiques de la coque ont donc un rôle déterminant dans la linéarité, ou non, de la réponse de l'agent de contraste. Récemment Overvelde et al. [OVE 09] ont observé expérimentalement le caractère mollissant du BR-14 (perfluorobutane entourée par une monocouche phospholipidique, Bracco Research), et ce pour des sollicitations relativement faibles (dès 10 kPa).

Dans l'optique de proposer une modélisation plus proche des conditions expérimentales réelles, nous avons ensuite développé un modèle éléments finis (COMSOL MultiphysicsTM) d'un agent de contraste à coque solide viscoélastique placé à proximité d'une paroi rigide. La construction pas à pas de ce

modèle a été détaillée dans les chapitres 5, 6 et 7. Les travaux théoriques et expérimentaux présents dans la littérature nous ont servi de point de comparaison pour valider notre travail à chaque étape de la construction du modèle éléments finis. Nous avons observé que plus l'agent de contraste était proche de la paroi rigide, plus sa fréquence de résonance diminuait. Cette nette variation de la fréquence de résonance pourrait être mise à profit pour discriminer les agents de contraste, dits "libres" ou "circulants", des agents de contraste attachés à une paroi.

Comprendre l'interaction entre un agent de contraste et une paroi est devenue une prérogative incontournable dans la mise au point de nouvelles techniques d'imagerie ou de protocoles thérapeutiques. Chen et al. ont réalisé des observations *ex vivo* de microbulles dans des artères, veines et capillaires de rats [CHE 09]. Ces travaux viennent combler une lacune importante dans la base de données expérimentales disponibles pour valider les modèles théoriques et numériques en cours de développement [DOI 09-a] [MAN 09] [MAR 09].

Le modèle que nous avons développé est une première étape puisqu'il ne rend pas compte de la nature compliant des vaisseaux sanguins (ou cellules cibles) et des phénomènes d'adhésion entre les molécules situées à la surface de l'agent de contraste et des vaisseaux (ou cellules cibles). Alors que nous avons adopté le point de vue "acoustique", Qin et al. ont adopté le point de vue "mécanique des fluides" pour traiter le problème des oscillations d'une microbulle de gaz dans un vaisseau [QIN 06] [QIN 07]. Leur modèle, également développé sous COMSOL, n'inclut pas de coque autour de la bulle de gaz mais prend en compte la compliance des vaisseaux.

Une première perspective de travail pourrait donc être la fusion de ces deux modèles sous COMSOL et l'intégration des phénomènes d'adhésion, largement mis en évidence expérimentalement [VIL 98] [ELL 03] [DAY 04] [TAK 04] [LAN 06], afin de se rapprocher de la réalité expérimentale. Il serait également intéressant d'utiliser la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), disponible sous COMSOL, afin d'étudier le comportement dynamique en grande déformation d'un agent de contraste en contact avec une paroi : de récents travaux expérimentaux ont en effet mis en évidence des oscillations non sphériques de grandes amplitudes [VOS 08]. Le logiciel COMSOL pourrait ainsi s'avérer fort utile pour aller au-delà de l'hypothèse de symétrie sphérique inhérente à l'ensemble des modèles théoriques et prédire l'influence du comportement en grande déformation de l'agent de contraste sur ses caractéristiques acoustiques (fréquence de résonance, sections efficaces de diffusion et d'absorption).

Une deuxième perspective de travail pourrait être de faire le lien entre nos deux axes de recherche, i.e. étudier le comportement en régime non linéaire d'un agent de contraste, non plus en milieu infini, mais à proximité d'une paroi. Les travaux de Doinikov et al. [DOI 09-a] montrent en effet que la prise en compte d'une paroi rigide à proximité d'un agent de contraste conduit à l'apparition d'un terme supplémentaire dans l'équation gouvernant les oscillations radiales de l'agent de contraste. Ce terme ne semble pas présenter de difficulté particulière et doit pouvoir être transposé facilement dans la forme quadratique utilisée sous MANLAB. On pourrait ainsi quantifier l'influence de la paroi rigide sur la réponse non linéaire d'un agent de contraste.

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre des développements en cours dans plusieurs laboratoires français (Institut Langevin, LOA, LIP, LMA...), en liaison avec les orientations actuelles de la recherche médicale, portant sur la mise au point de plates-formes multi-modalité pour le dépistage, le diagnostic et la thérapie de pathologies très spécifiques comme le cancer du sein. Le choix du logiciel COMSOL MultiphysicsTM, plutôt qu'un logiciel uniquement dédié à l'acoustique, s'avère ainsi être un réel avantage dans la phase de conception de ces plates-formes. Il est en effet envisageable de mener une approche de type couplage multiphysique pour la simulation de système d'imagerie multimodale du type acousto-optique (EPOM / LOP, ESPCI) ou combinant la tomographie par émission de positons aux ultrasons (ClearPEM-Sonic, CERIMED).

Annexe A

Prise en compte d'une paroi rigide infinie

Avec l'aimable autorisation de B. Molin (IRPHE / Ecole Centrale Marseille).

On cherche à calculer l'énergie cinétique T_{paroi} du système bulle de gaz + liquide lorsque la bulle de gaz se trouve à proximité d'une paroi rigide supposée infinie (cf. figure A.1). Intuitivement, lorsque la bulle de gaz est proche de la paroi, on pressent que les oscillations radiales de la bulle entraînent un mouvement de translation dans la direction perpendiculaire au mur. Ce problème peut être vu comme la superposition de deux cas :

- une bulle dont le centre est supposé fixe ($\dot{z} = 0$) mais dont le rayon varie ($\dot{R} \neq 0$), traité dans la paragraphe A.1,
- une bulle dont la position varie ($\dot{z} \neq 0$) mais dont le rayon reste constant ($\dot{R} = 0$), traité dans la paragraphe A.2,

la bulle étant à proximité de la paroi dans les deux cas.

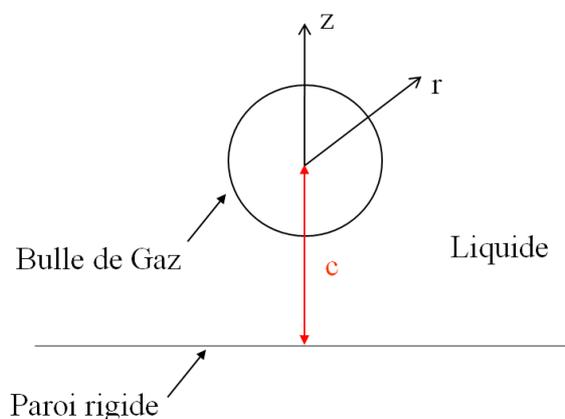


FIG. A.1 – Bulle de gaz à proximité d'une paroi

A.1 Oscillations radiales

A.1.1 En milieu infini

La bulle de gaz, de rayon $R(t)$, est immergée dans un liquide homogène incompressible supposé d'étendue infinie. Cette bulle a un mouvement radial oscillant, caractérisé par la vitesse $\dot{R}(t)$ de l'interface gaz/liquide, et provoque la mise en mouvement, supposé à symétrie sphérique, du liquide environnant. Le problème à résoudre peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 = 0 & \text{dans le domaine liquide} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \dot{R} & \text{sur la sphère de rayon } R(t) \\ \mathbf{grad}(\phi_1) \rightarrow \mathbf{0} & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Le potentiel des vitesses ϕ_1 , solution de ce système d'équations, a pour expression (cf. chapitre 3)

$$\phi_1 = -\frac{R^2\dot{R}}{r}. \quad (\text{A.2})$$

L'énergie cinétique du système s'écrit (cf. chapitre 3)

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho_L (\mathbf{grad}\phi_1)^2 dV, \quad (\text{A.3})$$

soit $T_\infty = 2\pi\rho_L R^3\dot{R}^2$.

A.1.2 En présence d'une paroi rigide

L'espace occupé par le liquide est maintenant limité par une paroi rigide située à la distance c du centre de la bulle de gaz (cf. figure A.1). Le problème à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta\phi_2 = 0 & \text{dans le domaine liquide} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial r} = \dot{R} & \text{sur la sphère de rayon } R(t) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = 0 & \text{sur le plan de côte } z = -c \\ \mathbf{grad}(\phi_2) \rightarrow \mathbf{0} & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Il est équivalent de rester en fluide illimité et d'introduire une sphère image, de même rayon $R(t)$, centrée en $z = -2c$ (cf. figure A.2). On utilise alors deux systèmes de coordonnées sphériques : un premier (r_1, θ_1, φ) centré à la sphère physique et un deuxième (r_2, θ_2, φ) centré à la sphère image, où φ est l'angle polaire dans le plan xy .

Le potentiel des vitesses est recherché sous la forme

$$\phi_2 = -\dot{R} \left\{ \frac{R^2}{r_1} + \frac{R^2}{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{P_n(\cos\theta_1)}{r_1^{n+1}} + (-1)^n \frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}} \right] \right\}, \quad (\text{A.5})$$

où $P_n(X)$ sont les polynômes de Legendre caractérisés par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et pour $n \geq 2$ $nP_n(X) = (2n-1)XP_{n-1}(X) - (n-1)P_{n-2}(X)$. Les termes de la forme $\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$ sont en effet des solutions particulières de $\Delta\phi = 0$ lorsque le problème est indépendant de l'angle polaire φ .

L'expression (A.5) vérifie, par construction, l'équation de Laplace et la condition de disparition à l'infini. On assure aussi que sur le plan de côte $z = -c$, défini par $r_1 = r_2$ et $\theta_2 = \pi - \theta_1$, $\frac{\partial\phi_2}{\partial z}$ est nul. Il reste à satisfaire la condition $\frac{\partial\phi_2}{\partial r} = \dot{R}$, dite de glissement, sur la sphère $r_1 = R$, ce qui fournira les coefficients α_n .

Pour cela on utilise une méthode de collocation : on discrétise l'intervalle $[0..\pi]$ en N points θ_{1i} où l'on écrit la condition de glissement, soit

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{R^2}{r_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{P_n(\cos\theta_1)}{r_1^{n+1}} + (-1)^n \frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}} \right] \right\} = 0. \quad (\text{A.6})$$

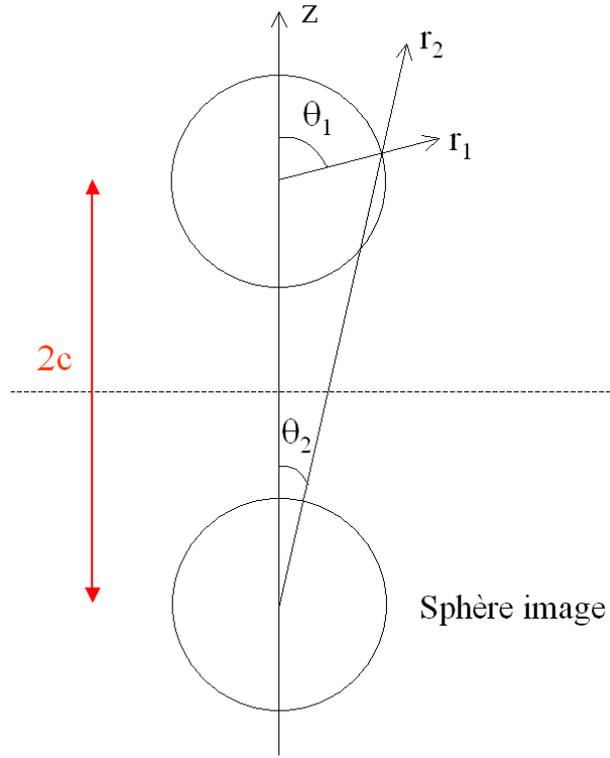


FIG. A.2 – Méthodes des images

La série est tronquée à l'ordre N afin d'obtenir un système linéaire de rang N résolu par une méthode de Gauss. Une fois les coefficients α_n obtenus, l'énergie cinétique correspondante, notée T_2 , peut être calculée selon l'équation (théorème de Green)

$$T_2 = \int_V \frac{1}{2} \rho_L (\mathbf{grad} \phi_2)^2 dV = \int_S -\frac{1}{2} \rho_L \left(\phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r_1} \right) dS, \quad (\text{A.7})$$

S étant la surface de la sphère réelle ($r_1 = R$).

A.2 Mouvement de translation

A.2.1 Milieu infini

On considère une sphère de rayon R constant en mouvement de translation selon l'axe z à la vitesse \dot{z} . Le problème à résoudre s'écrit alors

$$\begin{cases} \Delta \phi_3 = 0 & \text{dans le domaine liquide} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial r} = \dot{z} \cos \theta & \text{sur la sphère de rayon } R \\ \mathbf{grad}(\phi_3) \rightarrow \mathbf{0} & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

On cherche la solution sous la forme $\phi_3 = \alpha_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$. La condition de glissement en $r = R$ conduit nécessairement à $n = 1$, soit

$$\phi_3 = -\frac{\dot{z} R^3 \cos \theta}{2r^2}. \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 En présence d'une paroi rigide

L'espace occupé par le liquide est limité par une paroi rigide située à la distance c du centre de la sphère. Comme précédemment, on utilise la méthode des images et on cherche le potentiel des vitesses sous la forme

$$\phi_4 = -\dot{z} \left(\frac{R^3 \cos\theta_1}{2r_1^2} + \frac{R^3 \cos\theta_2}{2r_2^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \left[\frac{P_n(\cos\theta_1)}{r_1^{n+1}} + (-1)^n \frac{P_n(\cos\theta_2)}{r_2^{n+1}} \right] \right). \quad (\text{A.10})$$

La condition de glissement $\left(\frac{\partial \phi_4}{\partial r_1} \right)_{r_1=R} = \dot{z} \cos\theta$ est écrite en chaque point de discrétisation θ_{1i} pour obtenir un système linéaire de rang N qui est résolu par une méthode de Gauss. Les coefficients α_n étant connus, on peut calculer l'énergie cinétique T_4 correspondante (formule similaire à l'équation (A.7)).

A.3 Superposition des solutions

Le problème global, prenant en compte à la fois les oscillations radiales et le mouvement de translation, s'écrit

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans le domaine liquide} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} = \dot{R} + \dot{z}\cos\theta & \text{sur la sphère de rayon } R \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 & \text{sur le plan } z = -c \\ \mathbf{grad}(\phi) \rightarrow \mathbf{0} & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

et la solution peut se mettre sous la forme $\phi = \phi_2 + \phi_4 = \dot{R}\tilde{\phi}_2 + \dot{z}\tilde{\phi}_4$, avec $\tilde{\phi}_2$ (respectivement $\tilde{\phi}_4$) la solution pour une vitesse radiale (respectivement vitesse de translation) unitaire.

L'énergie cinétique est alors calculée selon

$$T_{paroi} = \int_V \frac{1}{2} \rho_L (\mathbf{grad}\phi)^2 dV = \int_S -\frac{1}{2} \rho_L \left(\phi \frac{\partial\phi}{\partial r_1} \right) dS \quad (\text{A.12})$$

avec $\phi = \dot{R}\tilde{\phi}_2 + \dot{z}\tilde{\phi}_4$ et $\frac{\partial\phi}{\partial r_1} = \dot{R} \frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial r_1} + \dot{z} \frac{\partial\tilde{\phi}_4}{\partial r_1}$. On obtient

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 M_{22} + \dot{z}^2 M_{44} + 2\dot{R}\dot{z} M_{24} \right) \quad (\text{A.13})$$

en posant

$$M_{ij} = -\frac{1}{2} \rho_L \int_S \left(\tilde{\phi}_i \frac{\partial\tilde{\phi}_j}{\partial r_1} \right) dS \quad (\text{A.14})$$

avec $\{i, j\} \in \{2, 4\}$ et $M_{24} = M_{42}$ (théorème de Green).

Afin de pouvoir comparer T_{paroi} avec T_∞ , on impose la vitesse \dot{R} des oscillations radiales. La vitesse \dot{z} de translation associée doit minimiser l'énergie cinétique. On en déduit $\dot{z} = -\frac{M_{24}}{M_{44}} \dot{R}$ et l'expression de l'énergie cinétique

$$T_{paroi} = \frac{1}{2} \dot{R} \frac{M_{22} M_{44} - M_{24}^2}{M_{44}}. \quad (\text{A.15})$$

La figure A.3 représente l'évolution du rapport T_{paroi}/T_∞ (en bleu) en fonction de d/R_0 , où d est la distance entre la paroi et l'interface liquide/gaz, R_0 est le rayon de la bulle au repos (le même dans les deux configurations avec et sans paroi). Les distances c et d sont liées par la relation $c = d + R_0$ (cf. figures 7.1 et A.2). Sur cette figure est également représentée l'évolution du rapport T_2/T_∞ (en rouge) correspondant au cas où seules les oscillations radiales ont été prises en compte. L'influence du mouvement de translation est sensible lorsque la distance entre la sphère et la paroi est inférieure au diamètre de la sphère ($d \leq 2R_0$).

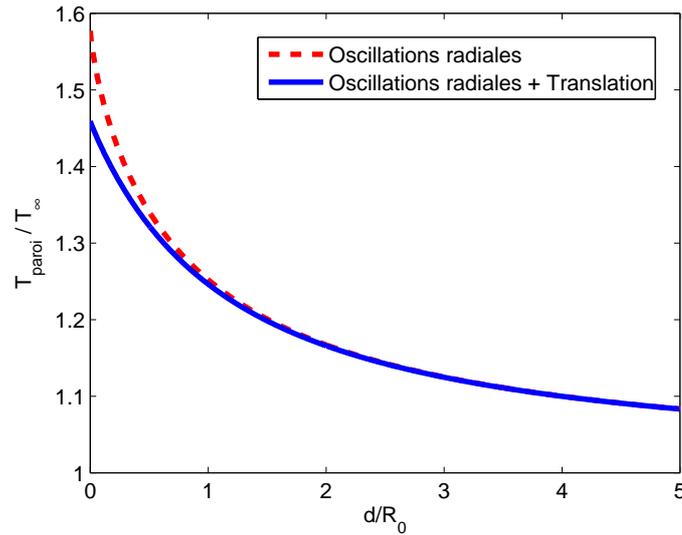


FIG. A.3 – Rapport des énergies cinétiques avec et sans paroi (B. Molin, communication personnelle)

Pour une bulle donnée, le rapport T_{paroi}/T_∞ ne dépend que de la distance d de la bulle à la paroi. On peut donc écrire $T_{paroi} = \alpha(d)T_\infty$ avec $\alpha(d)$ le coefficient issu des calculs réalisés par B. Molin.

Bibliographie

- [ALL 02] Allen J. S., May D. J., Ferrara K. W., *Dynamics of therapeutic ultrasound contrast agents*, *Ultrasound in Medicine and Biology*, vol. 28, no. 6, p. 805-816, June 2002.
- [ALL 04] Allen J. S., Rashid M. M., *Dynamics of a hyperelastic gas-filled spherical shell in a viscous fluid*, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 71, no. 2, p. 195-200, March 2004.
- [AMM 06] Ammi A. Y., *Détection et caractérisation de la destruction de microbulles de produit de contraste ultrasonore*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris IV, Mars 2006.
- [AND 80] Anderson A. L., Hampton L. D., *Acoustics of gas-bearing sediments I. Background*, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 67, no. 6, p. 1865-1889, June 1980.
- [ARQ 07] Arquier R., *Une méthode de calcul des modes de vibrations non linéaires de structures*, Thèse de l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), Mai 2007.
- [BJE 97] Bjerknæs K., Sontum P. C., Smistad G., Agerkvist I., *Preparation of polymeric microbubbles: formulaion studies and product characterisation*, *International Journal of Pharmaceutics*, vol. 158, no. 2, p. 129-136, December 1997.
- [BLE 90] Bleeker H. J., Shung K. K., Barnhart J. L., *Ultrasonic characterization of Albunex®*, a new contrast agent, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, no. 4, pp. 1792-1797, April 1990.
- [BLO 01] Blomley M. J. K., Cooke J. C., Unger E. C., Monaghan M. J., Cosgrove D. O. *Microbubble contrast agents: a new era in ultrasound*, *British Medical Journal*, vol. 322, no. 7296, p. 1222-1225, May 2001.
- [BOU 96-1] Bouakaz A., *Produits de contraste ultrasonore : évaluation acoustique in vitro et application*, Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Juin 1996.
- [BOU 96-2] Bouakaz A., de Jong N., Gerfault L., Cachard C., *In vitro standard acoustic parameters of ultrasound contrast agents: definitions and calculations*, 1996 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, San Antonio, USA, vol. 2, p. 1445-1448, November 1996.
- [BOU 98] Bouakaz A., de Jong N., Cachard C., *Standard properties of ultrasound contrast agents*, *Ultrasound in Medicine and Biology*, vol. 24, no. 3, p. 469-472, March 1998.
- [BRE 07] Brettes J. P., Mathelin C., Gairard B., Bellocq J. P., *Cancer du sein*, Masson, 2007.
- [BRI 47] Briggs H. B., Jonhson J. B., Mason W. P., *Properties of liquids at high sound pressure*, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 19, no. 4, p. 664-677, July 1947.
- [CHE 09] Chen H., Brayman A. A., Bailey M. R., Matula T. J., *Direct observation of microbubble interactions with ex vivo microvessels*, Proceedings of the 157th Meeting of the Acoustical Society of America, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 125, no. 4, p. 2680, April 2009.
- [CHU 95] Church C. C., *The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles*, *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 97, no. 3, p. 1510-1521, March 1995.
- [COA 78] Coakley W. T., Nyborg W. L., *Chapter II: Cavitation; Dynamics of gas bubbles; Applications*, *Ultrasound: its applications in medicine and biology*, Elsevier Scientific Publishing Compagny, 1978.

- [COC 07] Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., *Méthode asymptotique numérique*, Collection Méthodes Numériques, Hermès Sciences Lavoisier, 2007.
- [COC 09] Cochelin B., Vergez C., *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions*, Journal of Sound and Vibration, vol. 324, no. 1-2, p. 243-262, July 2009.
- [COM 06] Documentation COMSOL Multiphysics version 3.3, *Acoustics Module User's Guide*, August 2006.
- [DAY 99] Dayton P. A., Morgan K. E., Klibanov A. L., Brandenburger G. H., Ferrara K.W., *Optical and acoustical observations of the effects of ultrasound on contrast agents*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 46, no. 1, p. 220-232, January 1999.
- [DAY 01] Dayton P. A., Chomas J. E., Lum A. F. H., Allen J. S., Lindner J. R., Simon S. I., Ferrara K. W., *Optical and acoustical dynamics of microbubble contrast agents inside neutrophils*, Biophysical Journal, vol. 80, no. 3, p. 1547-1556, March 2001.
- [DAY 02-a] Dayton P. A., Ferrara K. W., *Targeted imaging using ultrasound*, Journal of magnetic resonance imaging, vol. 16, no. 4, pp. 362-377, October 2002.
- [DAY 02-b] Dayton P. A., Allen J. S., Ferrara K. W., *The magnitude of radiation force on ultrasound contrast agents*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 112, no. 5, p. 2183-2192, November 2002.
- [DAY 04] Dayton P. A., Pearson D., Clark J., Simon S., Schumann P. A., Zutshi R., Matsunaga T. O., Ferrara K. W., *Ultrasonic analysis of peptide- and antibody-targeted microbubble contrast agents for molecular imaging of $\alpha_V\beta_3$ -expressing cells*, Molecular imaging, vol. 3, no. 2, pp. 125-134, April 2004.
- [DEV 59] Devin C. Jr., *Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 31, no. 12, p. 1654-1667, December 1959.
- [DOI 02] Doinikov A. A., *Translational motion of a spherical bubble in an acoustic standing wave of high intensity*, Physics of Fluids, vol. 14, no. 4, p. 1420-1425, April 2002.
- [DOI 05] Doinikov A. A., *Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid*, Physics of Fluids, vol. 17, no. 12, p. 128101-128104, December 2005.
- [DOI 06] Doinikov A. A., Dayton P. A., *Spatio-temporal dynamics of an encapsulated gas bubble in an ultrasound field*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 120, no. 2, p. 661-669, August 2006.
- [DOL 08] Dollet B., van Wijngaarden L., de Jong N., Versluis M., *Modeling of the effect of boundaries on ultrasound contrast agent microbubbles response*, Proceedings of Acoustics'08, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 123, no. 5, p. 3560, May 2008.
- [DOI 09-a] Doinikov A. A., Zhao S., Dayton P. A., *Modeling of the acoustic response from contrast agent microbubbles near a rigid wall*, Ultrasonics, vol. 49, no. 2, p. 195-201, February 2009.
- [DOI 09-b] Doinikov A. A., Haac J. F., Dayton P. A., *Resonance frequencies of lipid-shelled microbubbles in the regime of nonlinear oscillations*, Ultrasonics, vol. 49, no. 2, p. 263-268, February 2009.
- [ECH 99] Echovist®, Schering, Detailed product information, August 2002.
- [ELL 03] Ellegala D. B., Leong-Poi H., Carpenter J. E., Klibanov A. L., Kaul S., Shaffrey M. E., Sklenar J., Lindner J. R., *Imaging tumor angiogenesis with contrast ultrasound and microbubbles targeted to $\alpha_v\beta_3$* , Circulation, vol. 108, p. 336-341, July 2003.
- [ELL 70] Eller A. I., *Damping constants of pulsating bubbles*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 47, no. 5, part. 2, p. 1469-1470, May 1970.

- [EME 04] Emelianov S. Y., Hamilton M. F., Illinskii Y. A., Zabolotskaya E. A., *Nonlinear dynamics of a gas bubble in an incompressible elastic medium*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 115, no. 2, p. 581-588, February 2004.
- [FEI 04] Feinstein S. B., *The powerful microbubble: from bench to bedside, from intravascular indicator to therapeutic delivery system, and beyond*, American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology, vol. 287, no. 2, p. 450-457, August 2004.
- [FER 07] Ferrara K., Pollard R., Borden M., *Ultrasound microbubble contrast agents: fundamentals and application to gene and drug delivery*, Annual Review of Biomedical Engineering, vol. 9, p. 415-447, August 2007.
- [FER 03] Ferrière R., Mensah S., Lefebvre J.-P., *Weakly inhomogeneous media tomography*, Ultrasonics Imaging, vol. 25, no. 2, p. 122-133, April 2003.
- [FIL 94] Filippi P. (coord.), Bergassoli A., Guyader J.-L., Habault D., Lefebvre J.-P., Lesueur C., *Acoustique générale*, les Editions de Physique, Les Ulis, 1994.
- [FLY 64] Flynn H. G., *Physics of acoustic cavitation in liquids*, Physical Acoustics, vol. 1, part. B, p. 57-172, W. P. Mason, Ed. New York Academic, 1964.
- [FRA 06] Franceschini E., *Tomographie ultrasonore dédiée à la détection du cancer du sein*, Thèse de l'Université de Provence (Aix-Marseille I), Novembre 2006.
- [FRI 98] Frinking P. J. A., de Jong N., *Acoustic modeling of shell-encapsulated gas bubbles*, Ultrasound in Medicine and Biology, vol. 24, no. 4, p. 523-533, May 1998.
- [GAR 06] Garbin V., *Optical tweezers for the study of microbubble dynamics in ultrasound*, Thèse de l'Université de Trieste, Italie, 2006.
- [GAR 07-a] Garbin V., Cojoc D., Ferrari E., Di Fabrizio E., Overvelde M. L. J., van der Meer S. M., de Jong N., Lohse D., Versluis M., *Coupled dynamics of an isolated UCA microbubble pair*, Applied Physics Letters, vol 90, no. 11, article 114103, 3 pages, March 2007.
- [GAR 07-b] Garbin V., Dollet B., Overvelde M. L. J., de Jong N., Lohse D., Versluis M., Cojoc D., Ferrari E., Di Fabrizio E., *Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging*, 2007 IEEE International Ultrasonics Symposium, New-York, USA, October 2007.
- [GER 73] Germain P., *Cours de mécanique des milieux continus - Tome 1 : Théorie générale*, Masson et cie, Paris, 1973.
- [GLA 83] Glazman R. E., *Effects of adsorbed films on gas bubble radial oscillations*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 74, no. 3, p. 980-986, September 1983.
- [GRA 68] Gramiak R., Shah P. M., *Echocardiography of the Aortic Root*, Investigative Radiology, vol. 3, no. 5, p. 356-366, September/October 1968.
- [HOF 96] Hoff L., *Acoustic properties of ultrasonic contrast agents*, Proceedings of Ultrasonics International 1995, Ultrasonics, vol. 34, no. 2-5, p. 591-593, June 1996.
- [HOF 00] Hoff L., Sontum P. C., Hovem J. M., *Oscillations of polymeric microbubbles: effects of the encapsulating shell*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 107, no. 4, p. 2272-2280, April 2000.
- [HOU 63] Houghton G., *Theory of bubble pulsation and cavitation*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 35, no. 9, p. 1387-1393, September 1963.
- [JON 91] de Jong N., Ten Cate F. J., Lancee C. T., Roelandt J. R. T. C., Bom N., *Principles and recent developments in ultrasound contrast agents*, Ultrasonics, vol. 29, no. 4, p. 324-330, July 1991.
- [JON 92] de Jong N., Hoff L., Skotland T., Bom N., *Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres: theoretical considerations and some measurements*, Ultrasonics, vol. 30, no. 2, p. 95-103, March 1992.

- [JON 93] de Jong N., Hoff L., *Ultrasound scattering properties of Albunex microspheres*, Ultrasonics, vol. 31, no. 3, p. 175-181, May 1993.
- [JON 96] de Jong N., Ten Cate F. J., *New ultrasound contrast agents and technological innovations*, Proceedings of Ultrasonics International 1995, Ultrasonics, vol. 34, no. 2-5, p. 587-590, June 1996.
- [JON 00-a] de Jong N., Frinking P. J. A., Bouakaz A., Ten Cate F. J., *Detection procedure of ultrasound contrast agents*, Proceedings of Ultrasonics International 1999, Ultrasonics, vol. 38, no. 1-8, p. 87-92, March 2000.
- [JON 00-b] de Jong N., Frinking P. J. A., Bouakaz A., Goorden M., Schourmans T., Jingping X., Mastik F., *Optical imaging of contrast agent microbubbles in an ultrasound field with a 100-MHz camera*, Ultrasound in Medicine and Biology, vol. 26, no. 3, p. 487-492, March 2000.
- [JON 02] de Jong N., Bouakaz A., Ten Cate F. J., *Contrast harmonic imaging*, Proceedings of Ultrasonics International 2001, Ultrasonics, vol. 38, no. 1-8, p. 567-573, May 2002.
- [KEL 56] Keller J. B., Kolodner I. I., *Damping of underwater explosion bubble oscillations*, Journal of applied physics, vol. 27, no. 10, p. 1152-1161, October 1956.
- [KEL 80] Keller J. B., Miksis M., *Bubble oscillations of large amplitude*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 68, no. 2, p. 628-633, August 1980.
- [KLI 06] Klibanov A. L., *Microbubble contrast agents: targeted ultrasound imaging and ultrasound-assisted drug-delivery applications*, Investigative Radiology, vol. 41, no. 3, p. 354-362, March 2006.
- [LAF 00] Lafitte S., Roudaut R., *Echocardiographie de contraste diagnostique*, Cardiologie pratique, no. 537, Septembre 2000.
- [LAN 67] Landau L., Lifchitz E., *Physique théorique. Tome VII : Théorie de l'élasticité*, Editions Mir, Moscou, 1967.
- [LAN 69] Landau L., Lifchitz E., *Physique théorique. Tome I : Mécanique*, Editions Mir, Moscou, 1969.
- [LAN 71] Landau L., Lifchitz E., *Physique théorique. Tome VI : Mécanique des fluides*, Editions Mir, Moscou, 1971.
- [LAN 06] Lankford M., Behm C. Z., Yeh J., Klibanov A. L., Robinson P., Lindner J. R., *Effect of microbubble ligation to cells on ultrasound signal enhancement - Implications for targeted imaging*, Investigative Radiology, vol. 41, no. 10, p. 721-728, October 2006.
- [LAU 76] Lauterborn W., *Numerical investigation of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 59, no. 2, p. 283-293, February 1976.
- [LAS 81] Lastman G. J., Wentzell R. A., *Comparison of five models of spherical bubble response in an inviscid compressible liquid*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 69, no. 3, p.638-642, March 1981.
- [LEF 85] Lefebvre J.-P., *La tomographie d'impédance acoustique*, Traitement du Signal, vol. 2, no. 2, p. 103-110, 1985.
- [LER 04] Leroy V., *Bulles d'air dans l'eau : couplage d'oscillateurs harmoniques et excitation paramétrique*, Thèse de l'Université Paris VII - Denis Diderot, Octobre 2004.
- [LEV 03] Levovist®, Schering, Detailed product information, February 2003.
- [MAK 05] Maksimov A. O., *On the volume oscillation of a tethered bubble*, Journal of sound and vibration, vol. 283, no. 3-5, p. 915-926, May 2005.
- [MAN 09] Manasseh R., Ooi A., *The frequencies of acoustically interacting bubbles*, Buuble Science engineering and Technology, vol. 1, no. 1-2, p. 58-74, June 2009.
- [MAN 09] *Manlab, an interactive path-following software*, disponible sur <<http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/>> (consulté le 15/07/2009).

- [MAR 05] Marmottant P., van der Leer S., Emmer M., Versluis M., de Jong N., Hilgenfeldt S., Lohse D., *A model for large amplitude oscillations of coated bubbles accounting for buckling and rupture*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 118, no. 6, p. 3499-3505, December 2005.
- [MAR 06] Marmottant P., Versluis M., de Jong N., Hilgenfeldt S., Lohse D., *High-speed imaging of an ultrasound-driven bubble in contact with a wall: "Narcissus" effect and resolved acoustic streaming*, Experiments in fluids, vol. 41, no. 2, p. 147-153, August 2006.
- [MAR 97] Marsh J. N., Hall C. S., Hughes M. S., Mobley J., Miller J. G., Brandenburger G. H., *Broadband through-transmission signal loss measurements of Alunex® suspensions at concentrations approaching in vivo doses*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 101, no. 2, p. 1155-1161, February 1997.
- [MAR 09] Martynov S., Stride E., Saffari N., *Modeling of oscillations of a microbubble in an elastic vessel*, Proceedings of the 157th Meeting of the Acoustical Society of America, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 125, no. 4, p. 2713, April 2009.
- [MAY 02] May D. J., Allen J. S., Ferrara K. W., *Dynamics and fragmentation of thick-shelled microbubbles*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 49, no. 10, p. 1400-1410, October 2002.
- [MED 77] Medwin H., *Counting bubbles acoustically: a review*, Ultrasonics, vol. 15, no. 1, p. 7-13, January 1977.
- [MEE 07] van der Meer S. M., Dollet B., Voormolen M. M., Chin C. T., Bouakaz A., de Jong N., Versluis M., Lohse D., *Microbubble spectroscopy of ultrasound contrast agents*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 121, no. 1, p. 648-656, January 2007.
- [MEN 97] Mensah S., Lefebvre J.-P., *Enhanced compressibility tomography*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 44, no. 6, p. 1245-1252, November 1997.
- [MIL 81] Miller D. L., *Ultrasonic detection of resonant cavitation bubbles in a flow tube by their second-harmonic emissions*, Ultrasonics, vol. 19, no. 5, p. 217-224, September 1981.
- [MIN 33] Minnaert M., *On musical air-bubbles and the sound of running water*, Philosophical Magazine, vol. 16, p. 235-248, 1933.
- [MOR 00] Morgan K. E., Allen J. S., Dayton P. A., Chomas J. E., Klibanov A. L., Ferrara K. W., *Experimental and theoretical evaluation of microbubble behavior: effect of transmitted phase and bubble size*, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, vol. 47, no. 6, p. 1494-1509, November 2000.
- [MOR 68] Morse P. M., Ingard K. U., *Chapter 7: The radiation of sound*, Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, 1968.
- [NAY 73] Nayfeh A. H., Saric W. S., *Nonlinear acoustic response of a spherical bubble*, Journal of Sound and Vibration, vol. 30, no. 4, p. 445-453, October 1973.
- [NAY 79] Nayfeh A. H., Mook D. T., *Nonlinear oscillations*, Wiley Series in Nonlinear Science, 1979.
- [NOL 50] Noltingk B. E., Neppiras E. A., *Cavitation produced by ultrasonics*, Proceedings of the Physical Society, Section B, vol. 63, no. 9, p. 674-685, September 1950.
- [OPT 03] Optison™, Amersham Health, Documentation technique, June 2003.
- [OVE 07] Overvelde M., Garbin V., Dollet B., Cojoc D., Ferrari E., de Jong N., di Fabrizio E., Lohse D., Versluis M., *3D optical micromanipulation of ultrasound contrast agents : bubble-wall and bubble-bubble interactions*, Proceedings of the 19th International Congress on Acoustics, Madrid, Spain, September 2007.
- [OVE 09] Overvelde M., Dollet B., Garbin V., de Jong N., Lohse D., Versluis M., *Shell buckling increases the nonlinear dynamics of ultrasound contrast agents at low acoustic pressure*, Proceedings of the 157th Meeting of the Acoustical Society of America, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 125, no. 4, p. 2680, April 2009.

- [PER 04] Pérignon F., *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*, Thèse de l'Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II), Juillet 2004.
- [PLE 49] Plesset M. S., *The dynamics of cavitation bubbles*, Journal of Applied Mechanics, vol. 16, p. 277-282, September 1949.
- [POR 52] Poritsky H., *The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid*, Proceedings of the First U. S. National Congress on Applied Mechanics, p. 813-821, 1952.
- [PRO 86] Prosperetti A., Lezzi A., *Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First order theory*, Journal of Fluid Mechanics, vol. 168, p. 457-478, July 1986.
- [PRO 87] Prosperetti A., *The equation of bubble dynamics in a compressible liquid*, Physics of Fluids, vol. 30, no. 11, p. 3626-3628, November 1987.
- [QIN 06] Qin S., Ferrara W., *Acoustic response of compliant microvessels containing ultrasound contrast agents*, Physics in medicine and biology, vol. 51, no. 20, p. 5065-5088, October 2006.
- [QIN 07] Qin S., Ferrara W., *The natural frequency of nonlinear oscillation of ultrasound contrast agents in microvessels*, Ultrasound in Medicine and Biology, vol. 33, no. 7, p. 1140-1148, July 2007.
- [RAY 17] Lord Rayleigh, *On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity*, Philosophical Magazine, vol. 34, no. 200, p. 94-98, August 1917.
- [ROB 56] Robinson R. B., Buchanan R. H., *Undamped free pulsations of an ideal bubble*, Proceedings of the Physical Society, Section B, vol. 69, no. 9, p. 893-900, September 1956.
- [SMI 35] Smith F. D., *On the destructive mechanical effects of the gas-bubbles liberated by the passage of intense sound through a liquid*, Philosophical Magazine, vol. 19, p. 1147-1151, 1935.
- [SON 04] Sonovue®[®], Bracco International, Documentation technique, September 2004.
- [STR 53] Strasberg M., *The pulsation frequency of non spherical gas bubbles in liquids*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 25, no. 3, p. 536-537, May 1953.
- [TAK 04] Takalkar A. M., Klibanov A. L., Rychak J. J., Lindner J. R., Ley K., *Binding and detachment dynamics of microbubbles targeted to P-selectin under controlled shear flow*, Journal of Controlled Release, vol. 96, no. 3, p. 473-482, May 2004.
- [TSI 08] Tsigliffis K., Pelekasis N. A., *Nonlinear radial oscillations of encapsulated microbubbles subject to ultrasound: the effect of constitutive law*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 123, no. 6, p. 4059-4070, June 2008.
- [TRI 52] Trilling L., *The collapse and rebound of a gas bubble*, Journal of Applied Physics, vol. 23, no. 1, p. 14-17, January 1952.
- [ULT 01] *Ultrasound in WG2 Final Report: Image generation and capture*, Medical Imaging Technology Roadmap, March 2001.
- [VIL 98] Villanueva F. S. et al., *Microbubbles targeted to intercellular adhesion molecule-1 bind to activated coronary artery endothelial cells*, Circulation, vol. 98, no. 1, pp. 1-5, July 1998.
- [VOK 86] Vokurka K., *Comparison of Rayleigh's, Herring's, and Gilmore's models of gas bubbles*, Acustica, vol. 59, no. 3, p. 214-219, 1986.
- [VOS 08] Vos H. J., Dollet B., Bosch J. G., Versluis M., de Jong N., *Nonspherical vibrations of microbubbles in contact with a wall - A pilot study at low mechanical index*, Ultrasound in Medicine and Biology, vol. 34, no. 4, p. 685-688, April 2008.
- [ZAB 05] Zabolotskaya E. A., Illinskii Y. A., Meegan G. D., Hamilton M. F., *Modifications of the equation for gas bubble in a soft elastic medium*, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 118, no. 4, p. 2173-2181, October 2005.
- [ZHE 07] Zhen H., Dayton P. A., Caskey C., Zhao S., Qin S., Ferrara K. W., *Ultrasound-driven microbubble oscillation and translation within small phantom vessels*, Ultrasound in Medicine and Biology, vol. 33, no. 12, p. 1978-1987, December 2007.

Modélisation du comportement dynamique d'un agent de contraste ultrasonore

Les agents de contraste ultrasonore (ACU) sont des microbulles de gaz contenues dans une enveloppe biocompatible. Injectés par voie intraveineuse, ils permettent d'améliorer le contraste échographique. La mise au point de nouvelles techniques d'imagerie utilisant les ACU nécessite une connaissance fine de leur comportement dynamique.

Un état de l'art comparatif des modèles théoriques, illustrés de résultats numériques, a motivé une étude du caractère non linéaire des équations de Rayleigh-Plesset, Hoff, et Marmottant. Les courbes amplitude-fréquence, obtenues à l'aide du logiciel MANLAB suite à la mise sous forme quadratique des équations, révèlent le caractère mollissant d'un ACU et permettent de quantifier l'influence de l'amortissement visqueux et de l'amplitude de l'excitation acoustique sur la réponse d'un ACU.

Un modèle éléments finis (COMSOL MultiphysicsTM) est ensuite proposé pour évaluer la fréquence de résonance d'un ACU (dont l'enveloppe est modélisée par un corps viscoélastique) placé soit dans un milieu fluide infini, soit dans un milieu fluide semi-infini (présence d'une paroi rigide). Les résultats obtenus en milieu infini sont en accord avec ceux issus des modèles théoriques, validant ainsi le modèle numérique. Des études paramétriques ont été effectuées afin d'étudier l'influence du rayon de l'objet et des paramètres de l'enveloppe sur la fréquence de résonance. En présence d'une paroi, il a été mis en évidence que plus l'ACU est proche de celle-ci, plus sa fréquence de résonance diminue. Ce comportement est confirmé par les résultats expérimentaux parus récemment dans la littérature.

Modeling the dynamics of an ultrasound contrast agent

Ultrasound contrast agents (UCA) are microbubbles of gas encapsulated within a biomaterial shell. Injected intravenously, UCA enhance the diagnostic capabilities of ultrasonic imaging. For diagnostic or therapeutic applications new developments require a better knowledge of their dynamics.

After a comparative literature review of theoretical models (including some numerical results), we propose a study of the Rayleigh-Plesset, Hoff and Marmottant models in the regime of nonlinear oscillations. The frequency response curves, obtained with the MANLAB software using the quadratic form of the models, show the softening behaviour of the UCA. The influence of viscous damping and acoustic pressure amplitude is examined.

A finite element model (FEM) using COMSOL MultiphysicsTM is also developed in order to evaluate the resonance frequency of an UCA (air core within a viscoelastic shell) close to a rigid wall. We investigate first the case of an UCA immersed in an unbounded liquid. The results obtained with the FEM are coherent with theoretical models. The FEM has been used to perform parametrical studies (UCA radius, shell parameter...). A rigid wall is then added in the FEM: the closer the UCA gets to the boundary, the lower is the resonance frequency. This behaviour is in good agreement with recent experimental results found in literature.