Les pavages en géométrie projective de dimension 2 et 3

Ludovic Marquis

Thèse sous la direction d'Yves Benoist

Université de Paris-Sud 11

Exemple cocompact

Exemple de covolume fini

Structure projective proprement convexe

- Un difféomorphisme local *dev* : $\widetilde{M} \to \mathbb{P}^n$

Structure projective proprement convexe

- Un difféomorphisme local *dev* : $\widetilde{M} \to \mathbb{P}^n$
- Une représentation *hol* : $\pi_1(M) \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$

Structure projective proprement convexe

- Un difféomorphisme local *dev* : $\widetilde{M} \to \mathbb{P}^n$
- Une représentation *hol* : $\pi_1(M) \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$
- La développante est $\pi_1(M)$-équivariante

Structure projective proprement convexe

- Un difféomorphisme local *dev* : $\widetilde{M} \to \mathbb{P}^n$
- Une représentation *hol* : $\pi_1(M) \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$
- La développante est $\pi_1(M)$-équivariante

Proprement convexe = la développante est un difféo sur un ouvert Ω proprement convexe.

Structure projective proprement convexe

- Un difféomorphisme local *dev* : $\widetilde{M} \to \mathbb{P}^n$
- Une représentation *hol* : $\pi_1(M) \to \mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$
- La développante est $\pi_1(M)$-équivariante

Proprement convexe = la développante est un difféo sur un ouvert Ω proprement convexe.
$\Omega \subset \mathbb{P}^n$ est proprement convexe lorsque $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset A$ une carte affine et Ω est convexe dans A au sens usuel.

2 objets

Espace métrique Ω	Groupe discret Γ
Distance, Métrique Finslérienne Une mesure Invariant par Γ	$\Gamma \leqslant \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ Discret

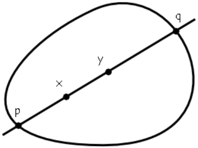

Figure: $d_\Omega(x,y) = \ln([p:x:y:q])$

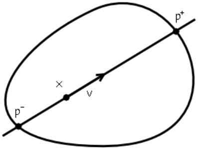

Figure: $\| v \|_x = \left(\frac{1}{\|x-p^+\|} + \frac{1}{\|x-p^-\|} \right) \| v \|$

Convexes Divisibles

Définition

Un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ est dit divisible lorsque il existe Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL_{n+1}}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ soit compact.

Résultat d'Existence I

- <u>Ω est homogène et non strictement convexe:</u>

Résultat d'Existence I

- Ω est homogène et non strictement convexe:
  - Ils correspondent aux espaces symétriques associés aux groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ (pour $n \geqslant 3$) et à $E_{6(-26)}$.

Résultat d'Existence I

- Ω est homogène et non strictement convexe:
  - Ils correspondent aux espaces symétriques associés aux groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ (pour $n \geqslant 3$) et à $E_{6(-26)}$.

- Ω est homogène et strictement convexe:

Résultat d'Existence I

- Ω est homogène et non strictement convexe:
  - Ils correspondent aux espaces symétriques associés aux groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ (pour $n \geqslant 3$) et à $E_{6(-26)}$.

- Ω est homogène et strictement convexe:
  - Ils correspondent aux espaces hyperboliques.

Résultat d'Existence II

- <u>Ω est non homogène et strictement convexe:</u>

Résultat d'Existence II

- Ω est non homogène et strictement convexe:
  - Existence en toute dimension.
  - Les espaces de modules correspondants sont complètement compris en dimension 2.

Résultat d'Existence II

- Ω est non homogène et strictement convexe:
  - Existence en toute dimension.
  - Les espaces de modules correspondants sont complètement compris en dimension 2.

- Ω est non homogène et non strictement convexe:

Résultat d'Existence II

- Ω est non homogène et strictement convexe:
  - Existence en toute dimension.
  - Les espaces de modules correspondants sont complètement compris en dimension 2.

- Ω est non homogène et non strictement convexe:
  - Il n'y en a pas en dimension 2.
  - On sait construire des exemples en dimension 3,4,5,6.
  - En dimension supérieure, le problème est ouvert.

Résultat d'Existence II

- Ω est non homogène et strictement convexe:
  - Existence en toute dimension.
  - Les espaces de modules correspondants sont complètement compris en dimension 2.

- Ω est non homogène et non strictement convexe:
  - Il n'y en a pas en dimension 2.
  - On sait construire des exemples en dimension 3,4,5,6.
  - En dimension supérieure, le problème est ouvert.

On va s'intéresser à leurs espaces de modules en dimension 3 à l'aide des groupes de Coxeter.

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

- Un polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$,

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

- Un polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$,
- Pour chaque face s de P, une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ qui fixe s,

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

- Un polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$,
- Pour chaque face s de P, une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ qui fixe s,
- avec les conventions suivantes:
  - $P = p(\{x \in V - \{0\} \,|\, \alpha_s(x) \leqslant 0,\ s \in S\})$

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

- Un polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$,
- Pour chaque face s de P, une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ qui fixe s,
- avec les conventions suivantes:
  - $P = p(\{x \in V - \{0\} \mid \alpha_s(x) \leqslant 0,\ s \in S\})$
  - $\alpha_s(v_s) = 2$

Définition de la notion de polyèdre miroir

Définition

Un polyèdre projectif miroir est la donnée:

- Un polyèdre projectif P de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$,
- Pour chaque face s de P, une réflexion $\sigma_s = Id - \alpha_s \otimes v_s$ qui fixe s,
- avec les conventions suivantes:
  - $P = p(\{x \in V - \{0\} \mid \alpha_s(x) \leqslant 0,\ s \in S\})$
  - $\alpha_s(v_s) = 2$
  - Pour toute face s, t adjacentes, on a: $$\begin{cases} 1) & -\alpha_s(v_t) \geqslant 0 \\ 2) & \alpha_s(v_t) = 0 \Leftrightarrow \alpha_t(v_s) = 0 \\ 3) & \alpha_s(v_t)\alpha_t(v_s) = 4\cos^2(\theta_{st}), \quad \text{avec } 0 < \theta_{st} \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

- *Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma \in \Gamma}$ pavent un convexe Ω de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$.*

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

- *Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma \in \Gamma}$ pavent un convexe Ω de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$.*
- *Le morphisme $\sigma : W_S \to \Gamma$ défini par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.*

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

- *Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma \in \Gamma}$ pavent un convexe Ω de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$.*
- *Le morphisme $\sigma : W_S \to \Gamma$ défini par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.*
- *Le groupe Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$.*

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s\in S}$. Alors,

- *Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma\in\Gamma}$ pavent un convexe Ω de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$.*
- *Le morphisme $\sigma : W_S \to \Gamma$ défini par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.*
- *Le groupe Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$.*
- *Le groupe Γ agit proprement sur $\mathring{\Omega}$, l'intérieur de Ω.*

Le théorème de Vinberg

Théorème (Vinberg)

Soit P un polyèdre projectif miroir dont les angles dièdres sont des sous-multiples de π. Soient (S, M) le système de Coxeter associé à P, W_S le groupe de Coxeter associé et Γ le groupe engendré par les $(\sigma_s)_{s \in S}$. Alors,

- *Les polyèdres $\gamma(P)_{\gamma \in \Gamma}$ pavent un convexe Ω de $\mathbb{P}^3_+(\mathbb{R})$.*
- *Le morphisme $\sigma : W_S \to \Gamma$ défini par $\sigma(s) = \sigma_s$ est un isomorphisme.*
- *Le groupe Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$.*
- *Le groupe Γ agit proprement sur $\mathring{\Omega}$, l'intérieur de Ω.*
- *L'ensemble Ω est ouvert si et seulement si pour tout sommet v de P, W_{S_v} est fini, où $S_v = \{s \in S \mid v \subset s\}$.*

Présentation du Problème

Soit $\mathcal{G}$ un graphe de polyèdre étiqueté (i.e les arêtes portent des angles) marqué, on introduit l'espace suivant:

$$Y_{\mathcal{G}} = \{P \text{ polyèdre projectif miroir marqué tel que } P \text{ réalise } \mathcal{G}\}.$$

Présentation du Problème

Soit $\mathcal{G}$ un graphe de polyèdre étiqueté (i.e les arêtes portent des angles) marqué, on introduit l'espace suivant:

$$Y_{\mathcal{G}} = \{P \text{ polyèdre projectif miroir marqué tel que } P \text{ réalise } \mathcal{G}\}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $Y_{\mathcal{G}}$.

Présentation du Problème

Soit $\mathcal{G}$ un graphe de polyèdre étiqueté (i.e les arêtes portent des angles) marqué, on introduit l'espace suivant:

$$Y_{\mathcal{G}} = \{P \text{ polyèdre projectif miroir marqué tel que } P \text{ réalise } \mathcal{G}\}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})$ agit naturellement sur $Y_{\mathcal{G}}$.

On souhaite comprendre l'espace quotient $X_{\mathcal{G}} = Y_{\mathcal{G}}/_{\mathrm{SL}_4^{\pm}(\mathbb{R})}$.

Le théorème d'Andreev

Théorème (Andreev)

Soit $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté qui n'est pas le graphe d'un tétraèdre. Alors, il existe un polyèdre compact hyperbolique P qui réalise $\mathcal{G}$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

Le théorème d'Andreev

Théorème (Andreev)

Soit $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté qui n'est pas le graphe d'un tétraèdre. Alors, il existe un polyèdre compact hyperbolique P qui réalise $\mathcal{G}$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

- *Tout 3-circuit non prismatique de $\mathcal{G}$ est sphérique.*
- *Tout 3-circuit prismatique de $\mathcal{G}$ est hyperbolique.*
- *Tout 4-circuit prismatique de $\mathcal{G}$ est hyperbolique.*
- *$\mathcal{G}$ n'est pas un prisme exceptionnel.*

Le théorème d'Andreev

Théorème (Andreev)

Soit $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté qui n'est pas le graphe d'un tétraèdre. Alors, il existe un polyèdre compact hyperbolique P qui réalise $\mathcal{G}$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

- *Tout 3-circuit non prismatique de $\mathcal{G}$ est sphérique.*
- *Tout 3-circuit prismatique de $\mathcal{G}$ est hyperbolique.*
- *Tout 4-circuit prismatique de $\mathcal{G}$ est hyperbolique.*
- *$\mathcal{G}$ n'est pas un prisme exceptionnel.*

De plus, ce polyèdre est unique à isométrie près.

Notion d'écimage

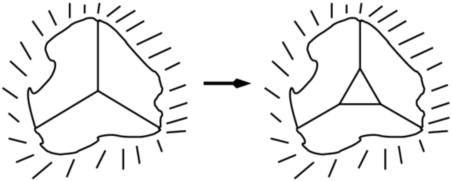

Figure: Ecimage

Définition

Un graphe $\mathcal{G}$ est un *écimaèdre combinatoire* lorsqu'on peut l'obtenir à partir du graphe du tétraèdre combinatoire et d'un nombre fini d'écimages. Un polyèdre P est un *écimaèdre* si son graphe $\mathcal{G}_P$ est un écimaèdre combinatoire.

Le Tétraèdre

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un tétraèdre combinatoire étiqueté marqué.
On suppose que $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.
Alors

Le Tétraèdre

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un tétraèdre combinatoire étiqueté marqué.
On suppose que $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.
Alors
$X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$

Les blocs fondamentaux

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un bloc fondamental combinatoire étiqueté marqué. On suppose que le tétraèdre sous-jacent à $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.

Les blocs fondamentaux

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un bloc fondamental combinatoire étiqueté marqué.
On suppose que le tétraèdre sous-jacent à $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.
On introduit la quantité $n(\mathcal{G})$ le nombre de 3-circuit prismatique affine ou sphérique de $\mathcal{G}$.
Alors

Les blocs fondamentaux

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un bloc fondamental combinatoire étiqueté marqué.
On suppose que le tétraèdre sous-jacent à $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.
On introduit la quantité $n(\mathcal{G})$ le nombre de 3-circuit prismatique affine ou sphérique de $\mathcal{G}$.
Alors
Si $n(\mathcal{G}) \leqslant 3$ alors $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $2^{n(\mathcal{G})}$ copies de $\mathbb{R}^3$.

Les blocs fondamentaux

Proposition

Soit $\mathcal{G}$ un bloc fondamental combinatoire étiqueté marqué.
On suppose que le tétraèdre sous-jacent à $\mathcal{G}$ ne possède pas d'arête étiquetée $\frac{\pi}{2}$.
On introduit la quantité $n(\mathcal{G})$ le nombre de 3-circuit prismatique affine ou sphérique de $\mathcal{G}$.
Alors
Si $n(\mathcal{G}) \leqslant 3$ alors $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à $2^{n(\mathcal{G})}$ copies de $\mathbb{R}^3$.
Si $n(\mathcal{G}) = 4$ alors $X_{\mathcal{G}}$ est difféomorphe à 14 copies de $\mathbb{R}^3$.

Le recollement

Proposition

Soient $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté et Γ un 3-circuit prismatique essentiel de $\mathcal{G}$.

Le recollement

Proposition

Soient $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté et Γ un 3-circuit prismatique essentiel de $\mathcal{G}$.
On note $\mathcal{G}_\Gamma^d$ et $\mathcal{G}_\Gamma^g$ les coupes droite et gauche de $\mathcal{G}$ par rapport à Γ.

Le recollement

Proposition

Soient $\mathcal{G}$ un graphe étiqueté et Γ un 3-circuit prismatique essentiel de $\mathcal{G}$.
On note $\mathcal{G}_\Gamma^d$ et $\mathcal{G}_\Gamma^g$ les coupes droite et gauche de $\mathcal{G}$ par rapport à Γ.
L'application $\phi : P \in X_{\mathcal{G}} \mapsto (P_\Gamma^g, P_\Gamma^d) \in X_{\mathcal{G}_\Gamma^g} \times X_{\mathcal{G}_\Gamma^d}$ est une fibration dont les fibres sont difféomorphes à $\mathbb{R}$.

Conclusion

Théorème (M.)

Soient $\mathcal{G}$ un écimaèdre étiqueté.

Conclusion

Théorème (M.)

Soient $\mathcal{G}$ un écimaèdre étiqueté. On suppose que

- *$\mathcal{G}$ ne contient pas de 3-circuit prismatique avec angle droit, affine ou sphérique.*
- *$\mathcal{G}$ possède plus de 3 arêtes étiquetées par un angle différent de $\frac{\pi}{2}$.*
- *$\mathcal{G}$ n'est pas un prisme exceptionnel.*

Conclusion

Théorème (M.)

Soient $\mathcal{G}$ un écimaèdre étiqueté. On suppose que

- *$\mathcal{G}$ ne contient pas de 3-circuit prismatique avec angle droit, affine ou sphérique.*
- *$\mathcal{G}$ possède plus de 3 arêtes étiquetées par un angle différent de $\frac{\pi}{2}$.*
- *$\mathcal{G}$ n'est pas un prisme exceptionnel.*

On pose $n(\mathcal{G}) =$ le nombre de 3-circuit prismatique sans angle droit, affine ou sphérique.
Alors

Conclusion

Théorème (M.)

Soient $\mathcal{G}$ un écimaèdre étiqueté. On suppose que

- *$\mathcal{G}$ ne contient pas de 3-circuit prismatique avec angle droit, affine ou sphérique.*
- *$\mathcal{G}$ possède plus de 3 arêtes étiquetées par un angle différent de $\frac{\pi}{2}$.*
- *$\mathcal{G}$ n'est pas un prisme exceptionnel.*

On pose $n(\mathcal{G}) =$ le nombre de 3-circuit prismatique sans angle droit, affine ou sphérique.
Alors $X_{\mathcal{G}}$ est homéomorphe à $\kappa(\mathcal{G})$ copies de $\mathbb{R}^{e^+-3}$, où $\kappa(\mathcal{G})$ est un entier pair ou égal à 1, qui vérifie $1 \leqslant \kappa(\mathcal{G}) \leqslant 2^{n(\mathcal{G})}$.

Volume fini

On s'est intéressé au problème de l'existence d'ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}^n$ tel qu'il existe un sous-groupe discret Γ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ soit compact.

Volume fini

On s'est intéressé au problème de l'existence d'ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}^n$ tel qu'il existe un sous-groupe discret Γ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ soit <u>compact</u>.

On va s'intéresser à un problème analogue: l'existence d'ouvert proprement convexe $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ tel qu'il existe un sous-groupe discret Γ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ soit de <u>volume fini</u>.

2 objets

Espace métrique Ω	Groupe discret Γ
Distance, Métrique Finslérienne Une mesure Invariant par Γ	$\Gamma \leqslant \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ Discret

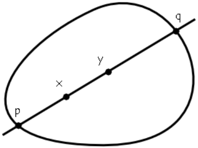

Figure: $d_\Omega(x,y) = \ln([p : x : y : q])$

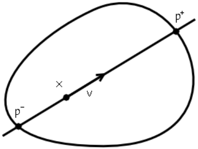

Figure: $\| v \|_x = \left(\frac{1}{\|x-p^+\|} + \frac{1}{\|x-p^-\|} \right) \| v \|$

Volume fini implique type fini

Théorème (M.)

Si une surface S admet une structure projective de volume fini alors S est de type fini.

Volume fini implique type fini

Théorème (M.)

Si une surface S admet une structure projective de volume fini alors S est de type fini.

Idée:

Théorème (Colbois Vernicos Verovic)

$$\underset{\Omega}{Inf} \ \underset{T ideal}{Inf} \ \mu_{\Omega}(T) = C_{\mathbb{P}^2} > 0$$

Les bouts sont paraboliques

Théorème (M.)

Soit S une surface projective proprement convexe.
La surface S est de volume fini si et seulement si

Les bouts sont paraboliques

Théorème (M.)

Soit S une surface projective proprement convexe.
La surface S est de volume fini si et seulement si

- *S est de type fini*
- *L'holonomie de tous les lacets qui font le tour d'un bout est parabolique.*

Dualité

Théorème (M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

Dualité

Théorème (M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

- *L'action de Γ sur Ω est de covolume fini*

si et seulement si

- *L'action de ${}^t\Gamma$ sur Ω^* est de covolume fini*

Strict-convexité et bord C^1

Théorème (Benzécri, M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

Strict-convexité et bord C^1

Théorème (Benzécri, M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

On suppose que:

- *L'action de Γ sur Ω est de covolume fini*
- *Ω n'est pas un triangle*

Alors

Strict-convexité et bord C^1

Théorème (Benzécri, M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

On suppose que:

- *L'action de Γ sur Ω est de covolume fini*
- *Ω n'est pas un triangle*

Alors

- *Ω est strictement convexe*
- *Le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1.*

Ensemble Limite

Théorème (M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

Ensemble Limite

Théorème (M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

On suppose que:

- Γ *n'est pas virtuellement abélien*

Alors

Ensemble Limite

Théorème (M.)

Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω.

On suppose que:

- *Γ n'est pas virtuellement abélien*

Alors
L'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si

- *Γ est de type fini*
- *L'ensemble limite Λ_Γ de Γ vérifie $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.*

Adhérence de Zariski

Théorème (M.)

Soient Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *et* Ω *un ouvert proprement convexe tel que* $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$.

Adhérence de Zariski

Théorème (M.)

Soient Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *et* Ω *un ouvert proprement convexe tel que* $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$.
On suppose que Ω *n'est pas un triangle. Alors,*

Adhérence de Zariski

Théorème (M.)

Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et Ω un ouvert proprement convexe tel que $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$.
On suppose que Ω n'est pas un triangle. Alors, on a l'alternative <u>exclusive</u> suivante:

- $$\begin{cases} \textit{L'adhérence de Zariski } \overline{\Gamma}^Z \textit{ de } \Gamma \\ \textit{ est conjuguée au groupe } \mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \Omega \textit{ est un ellipsoïde} \\ Aut(\Omega) = \overline{\Gamma}^Z \end{cases}$$

Adhérence de Zariski

Théorème (M.)

Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et Ω un ouvert proprement convexe tel que $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$.
On suppose que Ω n'est pas un triangle. Alors, on a l'alternative exclusive suivante:

- $\begin{cases} L'adhérence\ de\ Zariski\ \overline{\Gamma}^Z\ de\ \Gamma \\ \ est\ conjuguée\ au\ groupe\ \mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \Omega\ est\ un\ ellipsoïde \\ Aut(\Omega) = \overline{\Gamma}^Z \end{cases}$
- $\begin{cases} Le\ groupe\ \Gamma\ est\ Zariski\ dense\ dans\ \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \\ Aut(\Omega)\ est\ un\ sous\text{-}groupe\ discret\ de\ \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}). \end{cases}$

Espace de modules

Théorème (Goldman, M.)

Soit $\Sigma_{g,p}$ une surface de caractéristique d'Euler strictement négative

Espace de modules

Théorème (Goldman, M.)

Soit $\Sigma_{g,p}$ une surface de caractéristique d'Euler strictement négative alors l'espace des modules des structures projectives marquées proprement convexes de volume fini sur la surface $\Sigma_{g,p}$ est homéomorphe à une boule de dimension $16g - 16 + 6p$.

Composante connexe d'espace de représentations

Théorème (Koszul-Choi-Goldman)

L'espace des modules des structures projectives proprement convexes sur une surface compacte S est une composante connexe de l'espace des représentations (à conjugaison près) du groupe fondamental de S dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Composante connexe d'espace de représentations paraboliques

Théorème

L'ensemble $\beta_{g,p}$ est une composante connexe de R_P^{irr}.

Merci.

Exemple cocompact

Exemple de covolume fini