



HAL
open science

Etude de la dynamique autour des points de Lagrange

Grégory Archambeau

► **To cite this version:**

Grégory Archambeau. Etude de la dynamique autour des points de Lagrange. Mathématiques [math].
Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT : . tel-00422422

HAL Id: tel-00422422

<https://theses.hal.science/tel-00422422>

Submitted on 6 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-SUD XI
FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Thèse présentée par

Grégory Archambeau

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES
SPECIALITE MATHEMATIQUES**

Sujet de la thèse:

Etude de la dynamique autour des points de Lagrange

Soutenue le 26 Septembre 2008 devant le jury composé de :

M. Jean-Claude Saut	Président
M. Philippe Augros	Directeur de thèse
M. Emmanuel Trélat	Directeur de thèse
M. Frédéric Bonnans	Rapporteur
M. Jean-Baptiste Caillau	Rapporteur
M. François Dubois	Examineur

(Résumés, mots clés)

Remerciements :

Table des matières

1	Introduction et résultats	1
1.1	Introduction	1
1.1.1	Motivations	1
1.1.2	Modalités de la thèse	2
1.1.3	Rappel des travaux antérieurs	2
1.2	Description du manuscrit de thèse	2
1.2.1	Description du problème restreint des trois corps	2
1.2.2	Calcul de missions autour des points de Lagrange	3
1.2.3	Orbites de Lissajous en huit	5
1.2.4	Interface graphique sous MATLAB	6
2	Etude du problème restreint des trois corps	7
2.1	Modèle mathématique	7
2.1.1	Définition du problème restreint des trois corps	7
2.1.2	Systèmes de coordonnées	7
2.1.3	Équations du mouvement	10
2.1.4	Surface d'énergie et région de Hill	11
2.1.5	Intégration numérique des équations du mouvement	12
2.2	Points de Lagrange	13
2.2.1	Définition	13
2.2.2	Calcul des points de Lagrange	13
2.2.3	Stabilité des points de Lagrange	16
2.2.4	Flot autour des points L_1 et L_2	18
2.3	Orbites périodiques	21
2.3.1	Définition et existence	21
2.3.2	Étude locale des orbites de halo	22
2.3.3	Calcul numérique des orbites périodiques	23
2.4	Variétés invariantes	28
2.4.1	Définition	28
2.4.2	Les variétés invariantes en tant que séparatrices	28
2.4.3	Calcul numérique des variétés	29
3	Exemples de missions au voisinage des points de Lagrange	31
3.1	Introduction	31
3.2	Calcul d'un transfert Terre-halo	32

3.2.1	Principe	33
3.2.2	Simulation numérique	33
3.2.3	En pratique	35
3.3	Construction de trajectoires hétéroclines	36
3.3.1	Définition	36
3.3.2	Contraintes énergétiques	36
3.3.3	Intersection de variétés	37
3.3.4	Calcul numérique de la trajectoire hétérocline	38
3.4	Transfert Terre-Lune dans le système Terre-Lune	40
3.4.1	Le problème de Lambert	41
3.4.2	Quel point de départ pour la méthode de tir ?	41
3.4.3	Méthode de continuation.	42
3.4.4	Mise en oeuvre de la continuation pour le problème de Lambert	43
3.4.5	Capture par la Lune.	45
3.5	Transfert Terre-Lune dans le système Soleil-Terre-Lune	47
3.5.1	Deux systèmes à trois corps couplés	47
3.5.2	Où recoller les variétés des deux systèmes à trois corps ?	48
3.5.3	Portion de capture balistique lunaire.	49
3.5.4	Portion de départ de la Terre : "twisting" des orbites.	49
3.5.5	Jonction des deux portions.	53
4	Orbites de Lissajous en huit	55
4.1	Introduction	55
4.2	Approximation au troisième ordre des orbites de Lissajous en huit	55
4.2.1	Réécriture des équations du mouvement	55
4.2.2	Solutions périodiques des équations linéarisées	56
4.2.3	La méthode de Lindstedt Poincaré	58
4.3	Variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit	62
4.3.1	Calcul numérique de familles d'orbites de Lissajous en huit	62
4.3.2	Stabilité des variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit	65
4.3.3	Région lunaire accessible depuis une orbite de Lissajous en huit	70
5	Conclusion	75
A	Note technique sur l'interface graphique mise en oeuvre	79
A.1	Installation	79
A.1.1	Configuration requise	79
A.1.2	Procédure	79
A.1.3	Plusieurs remarques	80
A.2	Création d'une interface utilisateur sous matlab	81
A.2.1	Création d'une fenêtre graphique	81
A.2.2	Création d'objets de contrôle d'interface utilisateur	83
A.2.3	Création de menus	86
A.3	Exemple Tutoriel	87
A.3.1	Calcul d'orbite périodique	88
A.3.2	Calcul de variété invariante	89

A.3.3	Calcul de section de Poincaré	92
A.3.4	Etude de stabilité	96
A.3.5	Extension du logiciel	98
B	Détails de la procédure de Lindstedt Poincaré	99
	Liste des notations	105
	Valeurs des constantes	107
	Bibliographie	109

Chapitre 1

Introduction et résultats

1.1 Introduction

1.1.1 Motivations

On a constaté, au cours de ces dernières années, un intérêt grandissant de la communauté scientifique pour le modèle du problème circulaire restreint des trois corps (Circular Restricted Three-body Problem, ou CR3BP) et pour les points de Lagrange en vue d'applications spatiales. Cet intérêt s'explique premièrement par le fait que les points de Lagrange, points d'équilibre du CR3BP, offrent la possibilité d'avoir une configuration fixe relativement à deux corps célestes, appelés primaires. Cette propriété est remarquable et permet notamment d'envisager des missions d'observations spatiales intéressantes. Le plus bel exemple est celui de la sonde d'observation solaire SOHO, en orbite autour du point de Lagrange L_1 du système Soleil-Terre depuis 1995. De même, depuis 2001, le voisinage du point L_2 est occupé par le satellite WMAP, chargé d'étudier le fond diffus cosmologique. Le James Webb Space Telescope (JWST), anciennement appelé le *Next Generation Space Telescope* (NGST), le rejoindra en juin 2013 au voisinage de L_2 (Soleil-Terre) pour prendre la succession du télescope spatial *Hubble*. Dans un autre registre, plusieurs centaines d'astéroïdes, appelés astéroïdes Troyens, s'agglutinent autour des points de Lagrange L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter du fait de leur stabilité. Le point de Lagrange L_3 (Soleil-Terre) est finalement l'objet de nombreux fantasmes d'auteurs de science-fiction qui auraient aimé y placer une sorte d'*Anti-Terre* du fait de sa position opposée à la Terre par rapport au Soleil.

L'autre grand avantage qu'apportent les missions autour des points de Lagrange repose sur la diminution des contraintes énergétiques. Les trajectoires élaborées dans le CR3BP sont peu coûteuses en termes de consommation énergétique par rapport aux orbites keplériennes classiques du problème des deux corps (Two-body problem, ou 2BP). Le modèle à trois corps se rapprochant davantage de la réalité que celui à deux corps, il permet notamment des économies de combustibles pour le contrôle d'orbite et d'attitude. Du coup, cela rend possible l'élaboration de certaines missions spatiales jusqu'ici techniquement inconcevables en utilisant une approche classique, du type transfert de Hohmann dans un problème à deux corps. De plus, en exploitant des tubes de transport, connus sous le nom de variétés invariantes, on peut réaliser des transferts et des captures balistiques à très faible coût. L'action des forces gravitationnelles crée des sortes d'"autoroutes" tubulaires dans l'espace. Si une sonde pénètre une de ces autoroutes, elle peut y transiter sans nécessité d'une grande énergie. Les concepteurs de la mission GENESIS ont ainsi

utilisé de telles autoroutes pour propulser la sonde vers sa destination, en utilisant un minimum de carburant.

1.1.2 Modalités de la thèse

Cette thèse est le résultat d'une collaboration avec la société EADS Astrium Space Transportation qui a soutenu financièrement ce projet. Le travail proposé était premièrement de comprendre et expliquer la théorie du problème restreint des trois corps. Ensuite, pour répondre aux exigences industrielles, il s'agissait de fournir des éléments techniques et numériques précis et efficaces permettant de simuler des missions spatiales autour des points de Lagrange. La vérification numérique de certains résultats nous a notamment été demandée. Enfin, nous avons également bénéficié d'une grande liberté pour approfondir les points qui nous semblaient peu explorés, tels que les orbites de Lissajous en huit et la stabilité de leurs variétés invariantes.

1.1.3 Rappel des travaux antérieurs

De nombreux travaux ont eu pour sujet d'intérêt le problème restreint des trois corps et les trajectoires autour des points de Lagrange. En premier lieu, il convient de citer les travaux de Lagrange et Euler qui ont mis en évidence l'existence de cinq points d'équilibre dans le problème restreint des trois corps, depuis connus sous le nom de points de Lagrange, points d'Euler ou points de libration. Ensuite, les travaux d'Henri Poincaré doivent évidemment être cités dans le cadre d'étude de systèmes dynamiques. Il a ouvert de nouvelles voies dans ses *Nouvelles méthodes de la dynamique céleste*[47] en proposant d'étudier un système dynamique par les propriétés géométriques qualitatives de ses trajectoires. Enfin, plus récemment, et dans le cadre spécifique du problème restreint des trois corps et du design de missions spatiales autour des points de Lagrange, les principales références sont les nombreux travaux et articles de l'équipe américaine Koon, Lo, Marsden, Ross, [31] [39] [34] [50], ainsi que ceux de l'équipe espagnole Gómez, Jorba, Llibre, Masdemont, Simó [20] [21] [22] [29] [53]. On réfère notamment le lecteur au livre [30], qui décrit qualitativement le problème des trois corps restreint et donne de nombreux exemples de missions utilisant les trajectoires autour des points de Lagrange.

D'autre part, dans le cadre de ce travail, il convient de citer les travaux de deux anciens stagiaires de P. Augros, Sébastien Trilles (2003) et Arnaud De Hustler (2005). Ils ont fait un important travail de bibliographie afin de comprendre et rapporter les principales propriétés du CR3BP, et ont mis en place des outils logiciels dans le cadre de leurs simulations numériques. Les rapports de ces deux stagiaires, leurs principaux éléments bibliographiques, ainsi que les outils logiciels élaborés par A. De Hustler ont été mis à notre disposition afin que nous puissions les reprendre, les assimiler, avant d'y apporter nos contributions.

1.2 Description du manuscrit de thèse

1.2.1 Description du problème restreint des trois corps

Dans le chapitre 2, on présente une description qualitative du problème restreint des trois corps. On sait depuis les travaux de Poincaré [48] que le problème des trois corps n'est pas intégrable, d'où l'intérêt d'une étude qualitative pour mettre en évidence ses propriétés.

Dans une première section, on définit le problème circulaire restreint des trois corps en introduisant le vocabulaire et les différentes notations. On rappelle les équations du mouvement et on définit la région de mouvement possible des solutions en fonction de leur énergie. Les différents portraits de cette région, connue sous le nom de région de Hill, sont présentés.

Dans la deuxième section, on s'intéresse aux points d'équilibre du CR3BP, les points de Lagrange. En utilisant les travaux de Szebehely [55], on rappelle leurs expressions, on étudie leur stabilité et le flot dans leur voisinage.

Dans la section suivante, on se focalise sur les orbites périodiques autour des points de Lagrange. On distingue principalement trois familles d'orbites : les orbites de Lyapunov (coplanaires aux primaires), les orbites de halo (difféomorphes à des cercles) et les orbites de Lissajous (orbites en trois dimensions aux formes plus compliquées). La preuve de l'existence de ces familles d'orbites périodiques, qui utilise de classiques arguments et résultats de la théorie des systèmes dynamiques, tel que le théorème de Lyapunov-Poincaré, est présentée. On étudie ensuite qualitativement la dynamique de notre problème au voisinage des orbites périodiques. Cette étude locale met en lumière la matrice de monodromie (résolvante du système linéarisé le long de l'orbite périodique) qui joue un rôle primordial dans le portrait de phase des trajectoires au voisinage d'une orbite périodique. Finalement, en utilisant une propriété de symétrie du problème des trois corps, on rappelle une méthode numérique de type Newton (méthode de tir) permettant de calculer numériquement les orbites de halo et de Lyapunov avec une grande précision. Pour initialiser la méthode de tir, on utilise une approximation analytique des orbites de halo obtenue par Richardson [49].

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, on s'intéresse aux variétés invariantes des orbites périodiques situées autour des points de Lagrange. Ces objets globaux sont la réunion des trajectoires qui s'éloignent ou se rapprochent asymptotiquement d'une orbite périodique. Généralement visualisées sous la forme de tubes, les variétés invariantes jouent un rôle primordial dans le calcul de trajectoires dans le problème des trois corps. A cet égard, on explique le rôle de séparatrices que jouent ces tubes stables et instables dans les régions d'équilibre. Elles séparent les trajectoires d'énergie en trois familles d'orbites aux propriétés bien distinctes. Les trajectoires situées sur les variétés convergent vers l'orbite périodique en temps $\pm\infty$. Les trajectoires situées à l'extérieur des tubes invariants reviennent à leur région d'origine au bout d'un certain temps. Enfin, les trajectoires d'énergie situées à l'intérieur des variétés transitent d'une région de l'espace à une autre. Les tubes invariants créent donc dans l'espace un réseau de transport entre différentes régions de capture. En étudiant leur agencement dans l'espace, il est possible de se doter d'une structure très intéressante à exploiter pour concevoir des missions spatiales économiques. On rappelle finalement une approximation linéaire bien connue des variétés invariantes. Cette approximation qui met en jeu la matrice de monodromie nous permet ensuite de calculer numériquement les variétés.

1.2.2 Calcul de missions autour des points de Lagrange

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à des exemples de missions utilisant les points de Lagrange.

En s'inspirant des missions GENESIS et SOHO, on simule, dans une première section, un transfert entre un proche voisinage de la Terre et une orbite de halo située autour du point de Lagrange L_1 du système Soleil-Terre. Ce premier exemple de mission permet de se familiariser avec les éléments caractéristiques du CR3BP et de voir comment les mettre au service d'une mission spatiale.

Dans la deuxième section de ce chapitre, on imagine la simulation d'une trajectoire hétérocline dans le système Soleil-Terre. Plus précisément, on calcule une trajectoire joignant asymptotiquement une orbite de Lyapunov autour de L_2 (Soleil-Terre) (L_2 (ST)) à une orbite de Lyapunov autour de L_1 (Soleil-Terre) (L_1 (ST)). Pour cela, on étudie l'agencement des variétés invariantes de ces orbites périodiques. En trouvant leurs intersections dans l'espace des phases, on met en oeuvre une mission de plusieurs millions de kilomètres pratiquement gratuite au niveau énergétique.

Enfin, dans les deux dernières sections de ce chapitre, on s'intéresse au calcul de transferts Terre-Lune, selon deux approches différentes.

Dans un premier temps, on étudie ce transfert dans le système à trois corps Terre - Lune - engin spatial. L'idée naturelle est d'utiliser les tubes de transport que représentent les variétés invariantes. Une trajectoire convenablement choisie à l'intérieur de la variété stable d'une orbite de halo autour de L_2 (TL), par exemple, transite vers la région d'équilibre et est naturellement capturée par la Lune. Néanmoins, dans le cadre d'un transfert entre la Terre et la Lune, le problème est qu'aucune variété invariante de ce système ne passe dans un proche voisinage de la Terre. Les variétés ne peuvent donc pas être utilisées pour quitter la Terre. Ceci nous amène alors à résoudre le problème de Lambert dans le problème restreint des trois corps. Le problème de Lambert consiste à trouver une trajectoire partant d'une position donnée et arrivant à une position voulue. En le résolvant, on résout le problème d'un transfert Terre-Lune puisqu'on est alors capable de viser un point situé à l'intérieur de la variété stable de l'orbite de halo à partir du voisinage de la Terre. Pour résoudre numériquement le problème de Lambert dans un système à trois corps, on met en oeuvre une méthode de continuation paramétrée par la masse de la Lune. Le problème de Lambert et sa résolution sont précisément décrits dans cette section.

Dans la dernière section de ce chapitre consacré à des exemples de missions autour des points de Lagrange, on s'intéresse à un transfert Terre-Lune étudié par Marsden, Koon, Lo et Ross. Dans leur article [39], ils proposent de calculer une trajectoire Terre-Lune prenant en compte l'influence du Soleil. Pour cela, ils considèrent un problème à quatre corps Soleil - Terre - Lune - engin spatial, vu comme deux problèmes à trois corps patchés (Soleil - Terre - engin spatial, et Terre - Lune - engin spatial). Pour calculer un transfert Terre - Lune très peu énergétique, ils se servent alors de la propriété de "twisting" des orbites de non-transit situées à l'extérieur des variétés d'une part, et des possibilités de capture balistique lunaire offertes par les variétés d'autre part. Afin de fournir à EADS les outils numériques permettant de réaliser ce type de transfert potentiellement très intéressant, nous avons décidé de reprendre leurs travaux et de les mettre en oeuvre. Nous avons donc de nouveau constaté la possibilité de capture balistique lunaire au travers d'une variété stable du système Terre-Lune. Puis, nous avons étudié le phénomène de "twisting" des orbites de non-transit autour d'une variété instable du système Soleil-Terre. Ceci nous a permis de voir que la sensibilité de la dynamique par rapport aux conditions initiales permet de viser des points très éloignés en ne changeant que très peu la vitesse initiale. En effet, par un léger changement de condition initiale, par exemple un changement de vitesse à un point fixe, on peut totalement changer la destination finale de l'orbite résultante. Dans le système Soleil-Terre, les variétés invariantes des orbites de halo des points L_1 et L_2 passant relativement près de la surface terrestre, on peut utiliser cette sensibilité aux conditions initiales pour viser une orbite de parking à 200 km de la Terre depuis une section de Poincaré intersectant la Terre. Enfin, nous avons cherché à opérer une jonction entre les variétés invariantes des deux systèmes à trois corps couplés, et avons obtenu des résultats qui diffèrent de ceux présentés par Marsden, Koon, Lo et Ross. Ces différents points sont discutés dans cette section.

1.2.3 Orbites de Lissajous en huit

Dans le chapitre 4, on étudie un type d'orbites périodiques situées autour des points de Lagrange, de type Lissajous et ayant la forme d'un huit, présentant des propriétés très intéressantes. On les appelle orbites de Lissajous en huit.

Dans une première section, en nous inspirant des travaux de Richardson [49] sur les orbites de halo, on établit une approximation analytique de ces orbites périodiques. Pour cela, on rappelle la méthode de Linstedt-Poincaré, qu'on applique à notre cas d'étude pour obtenir une approximation d'ordre 3 des orbites en huit.

Dans la section suivante, on explique comment calculer numériquement une famille d'orbites de Lissajous en huit. L'approximation analytique obtenue précédemment n'étant pas suffisamment précise, on utilise une méthode de continuation paramétrée par l'excursion de ces orbites, couplée à une méthode de Newton.

Enfin, dans les deux dernières sections de ce chapitre, on se penche sur deux propriétés spécifiques aux orbites de Lissajous en huit qui pourraient être très utiles dans la conception de trajectoires peu énergétiques.

La première et principale propriété observée et étudiée est une propriété de stabilité globale présentée par les variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit. Une première observation des variétés invariantes de ces orbites montre qu'elles gardent, en temps long, un aspect régulier de huit propagé (un huit tubulaire), à l'inverse des orbites de halo dont les variétés invariantes deviennent chaotiques en temps long et donc ne conservent pas globalement leur aspect tubulaire. Cette propriété des orbites en huit, intéressante pour la conception de missions, a d'abord été constatée numériquement. Ensuite, pour mesurer cette propriété de stabilité, on a mis en oeuvre des calculs numériques d'exposants de Lyapunov locaux, qui permettent de caractériser la convergence ou divergence exponentielle de trajectoires voisines dans un système dynamique. L'étude de stabilité des orbites de Lissajous en huit et de leurs variétés par les exposants locaux de Lyapunov a confirmé notre première constatation. Les orbites en huit et leurs variétés invariantes présentent des propriétés de stabilité, contrairement aux orbites de halo qui sont les trajectoires périodiques les plus connues du problème restreint des trois corps. Ceci rend par conséquent les orbites en huit et leurs variétés invariantes potentiellement très intéressantes dans le cadre d'élaboration de missions spatiales puisqu'une plus grande stabilité implique un moindre coût énergétique en terme de contrôle par exemple. De plus, si on met cette propriété de stabilité en parallèle avec le rôle d'autoroute interplanétaire que peuvent jouer les tubes invariants, on voit immédiatement les bénéfices que l'on peut en tirer. En effet, plus nous savons comment se comportent les variétés invariantes, plus nous pouvons prédire le comportement des trajectoires qui transitent dans ces tubes de transport. Quand ces tubes deviennent rapidement chaotiques, comme dans le cas des variétés invariantes des orbites de halo, il est difficile de prédire le comportement d'une trajectoire partant de leur intérieur. Au contraire, dans le cas des variétés des orbites de Lissajous en huit, si ceux-ci gardent un aspect régulier en temps long, on peut plus facilement prédire le comportement des trajectoires qui se déplacent à leur intérieur, et du coup, envisager d'autant plus de possibilités de transfert et de missions spatiales. Un exemple de mission est finalement suggéré dans la dernière section de ce chapitre.

En plus de la propriété de stabilité des variétés des orbites de Lissajous en huit, nous avons constaté numériquement que, dans le système Terre-Lune, les variétés de la région lunaire étaient totalement capturées par la Lune, et opéraient d'incessantes rotations autour de la Lune. Ceci laisse la possibilité de planifier une visite de presque toute la surface lunaire. On a alors étudié

le problème d'accessibilité à la Lune depuis une orbite de Lissajous en huit, établissant numériquement qu'il est possible de viser tout point d'une large bande de la surface de la Lune située de part et d'autre de son équateur à partir d'une orbite de Lissajous en huit. En choisissant une orbite de Lissajous en huit d'excursion verticale suffisamment importante, on peut réaliser un transfert de l'orbite périodique jusqu'à presque tout point de la Lune en utilisant sa variété instable, et ceci pour un coût limité et à tout moment.

1.2.4 Interface graphique sous MATLAB

Pour répondre aux spécificités et exigences du contrat liant cette thèse à la compagnie EADS qui supporte financièrement ce travail, un intérêt a été particulièrement accordé à l'aspect numérique, et à la simulation de missions dans le problème des trois corps. En plus, des programmes mis en oeuvre pour obtenir les résultats numériques et figures de ce document, on a développé un logiciel interactif avec interface graphique, remis à EADS. Celui-ci permet de calculer à travers une interface graphique ergonomique tous les éléments caractéristiques du problème restreint des trois corps, tels que les orbites périodiques autour des points de Lagrange et leurs caractéristiques (période, énergie, amplitudes,...) ou les variétés invariantes et leurs intersections. L'interface graphique développée sous MATLAB est présentée sous forme de fenêtres comprenant des textes, boutons, menus déroulants et champs de saisie, afin de rendre son utilisation la plus intuitive et naturelle possible.

En annexe A, on présente dans un premier temps les outils ayant permis de développer cette interface graphique sous MATLAB. Dans un second temps, on explique comment utiliser ce logiciel sur les principaux cas d'étude. Des captures d'écran de l'interface graphique illustrent les différents exemples.

Le logiciel permet déjà de calculer les éléments clés de mise en oeuvre de missions spatiales puis de les exporter pour les mettre au service de calcul de missions spatiales. A court terme, il devrait permettre de simuler entièrement le type de mission (transfert entre une planète et un point de Lagrange, trajectoires hétéroclines, itinéraires entre différentes régions de l'espace prédéfinies,...) que l'utilisateur aura choisi de calculer.

Chapitre 2

Etude du problème restreint des trois corps

2.1 Modèle mathématique

2.1.1 Définition du problème restreint des trois corps

Dans le problème des trois corps, on cherche à caractériser le mouvement d'un corps P de masse m dans le champ gravitationnel de deux masses m_1 et m_2 , avec m négligeable devant m_1 et m_2 . Les masses m_1 et m_2 sont appelées les "primaires" et on suppose qu'elles ont des orbites circulaires de même période autour de leur centre de masse commun (m_1 et m_2 peuvent, par exemple, représenter respectivement le Soleil et la Terre, tandis que le troisième corps P peut être un satellite, une sonde ou une comète). Enfin, dans ce problème, on néglige l'influence de tout autre corps, telle que les forces gravitationnelles exercées par les autres planètes. On distingue deux cas différents :

- le PCR3BP (Planar Circular Restricted 3-Body Problem) : la particule P est libre de se déplacer dans le plan défini par les orbites circulaires des deux primaires.
- le CR3BP (Spatial Circular Restricted 3-Body Problem) : la particule P est libre de se déplacer dans l'espace à trois dimensions tout entier.

Les livres de Szebehely [55] et Marchal [38] fournissent une couverture complète sur le sujet et font autorité. Pour d'autres introduction au problème des trois corps, voir les ouvrages d'Abraham et Marsden [2], Mayer et Hall [43], Holmes [24] et Simó [54].

2.1.2 Systèmes de coordonnées

Dans un repère inertiel, les positions des primaires et les équations du mouvement de P dépendent du temps. Il est donc standard de dériver les équations du mouvement de P dans un repère tournant à la vitesse de rotation des primaires autour de leur centre de masse, et dont l'origine est située dans le plan orbital des deux primaires. On distingue, à cet égard, deux principaux systèmes de coordonnées : le système de coordonnées de Cross et celui de Richardson.

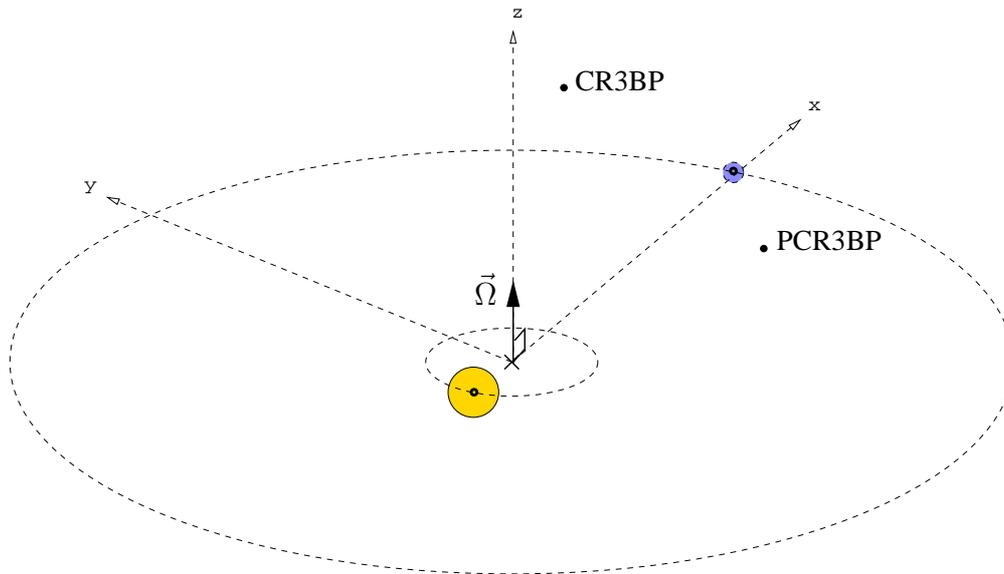


FIGURE 2.1 – Problème restreint des trois corps circulaire.

Système de coordonnées de Cross

Dans le premier, qu'on nomme système de Cross, on prend le centre de masse des primaires pour origine. L'axe des x est l'axe joignant m_1 et m_2 . L'axe des y est choisi perpendiculaire à l'axe des x dans le plan orbital des primaires. Et l'axe des z est choisi perpendiculaire à ce plan. Quant au système d'unité, il est pris sans dimension :

- la distance entre m_1 et m_2 vaut 1 ;
- la somme des masses de m_1 et m_2 vaut 1 ;
- la vitesse angulaire des primaires vaut 1.

Système de coordonnées de Richardson

Le second système de coordonnées est le système de coordonnées de Richardson. C'est un système de coordonnées qui permet de se concentrer davantage sur le mouvement autour d'un des points de Lagrange L_1 et L_2 , deux des points d'équilibre du problème des trois corps (voir la section 2.2). De ce fait, on indexe la notation du système de coordonnées de Richardson par le point de Lagrange autour duquel il se place. Dans le système de Richardson(L_i), l'origine est le point de Lagrange L_i . Les axes x , y et z sont définis de la même façon que pour le système de Cross. Quant au système d'unité, seule l'unité de longueur change. C'est la distance entre le point L_i et la primaire m_2 qu'on normalise à 1.

Dans la suite, sauf précision contraire, on se placera dans le système de coordonnées de Cross.

Formules de changement de système de coordonnées

Selon les études et opérations que l'on cherche à effectuer dans le problème restreint des trois corps, il est parfois plus intéressant de se placer dans un système de coordonnées plutôt que dans un autre. C'est le cas par exemple pour le calcul d'orbites périodiques autour des points de Lagrange, où il est plus pratique de se placer dans le système de coordonnées de

Richardson du point de Lagrange en question. Il semble donc intéressant d'établir les formules de changement de repère entre ces différents systèmes de coordonnées.

On note D la distance entre les 2 primaires du système et D_i la distance entre la plus petite des 2 primaires m_2 et le point de Lagrange L_i considéré (L_1 ou L_2).

Entre Cross et Richardson. Pour passer du système de coordonnées de Cross au système de coordonnées de Richardson du même système, il suffit de faire une translation pour changer d'origine, puis une homothétie pour changer d'unité de longueur.

Les coordonnées d'un point $(x_R, y_R, z_R, \dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{z}_R)$ dans le système de Richardson du point L_i s'expriment donc en fonction de ses coordonnées $(x_C, y_C, z_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C)$ dans le système de Cross de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_R = \frac{(x_C D \pm D_i - (1 - \mu)D)}{D_i} \\ y_R = y_C \frac{D}{D_i}, \quad z_R = z_C \frac{D}{D_i}, \quad \dot{x}_R = \dot{x}_C \frac{D}{D_i}, \quad \dot{y}_R = \dot{y}_C \frac{D}{D_i}, \quad \dot{z}_R = \dot{z}_C \frac{D}{D_i} \end{cases}$$

(+ pour L_1 , - pour L_2).

Et réciproquement, on a :

$$\begin{cases} x_C = \frac{(x_R D_i \mp D_i + (1 - \mu)D)}{D} \\ y_C = y_R \frac{D_i}{D}, \quad z_C = z_R \frac{D_i}{D}, \quad \dot{x}_C = \dot{x}_R \frac{D_i}{D}, \quad \dot{y}_C = \dot{y}_R \frac{D_i}{D}, \quad \dot{z}_C = \dot{z}_R \frac{D_i}{D} \end{cases}$$

(- pour L_1 , + pour L_2).

Entre Richardson(L_1) et Richardson(L_2) Pour passer du système de coordonnées de Richardson(L_1) au système de coordonnées de Richardson(L_2) du même système, il suffit de faire une translation pour changer d'origine, puis une homothétie pour changer d'unité de longueur.

Les coordonnées d'un point $(x_{R1}, y_{R1}, z_{R1}, \dot{x}_{R1}, \dot{y}_{R1}, \dot{z}_{R1})$ dans le système de Richardson(L_1) s'expriment donc en fonction de ses coordonnées $(x_{R2}, y_{R2}, z_{R2}, \dot{x}_{R2}, \dot{y}_{R2}, \dot{z}_{R2})$ dans le système de Richardson(L_2) de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{R1} = \frac{(x_{R2} D_2 + D_1 + D_2)}{D_1} \\ y_{R1} = y_{R2} \frac{D_2}{D_1}, \quad z_{R1} = z_{R2} \frac{D_2}{D_1}, \quad \dot{x}_{R1} = \dot{x}_{R2} \frac{D_2}{D_1}, \quad \dot{y}_{R1} = \dot{y}_{R2} \frac{D_2}{D_1}, \quad \dot{z}_{R1} = \dot{z}_{R2} \frac{D_2}{D_1} \end{cases}$$

Et réciproquement, on a :

$$\begin{cases} x_{R2} = \frac{(x_{R1} D_1 - (D_1 + D_2))}{D_2} \\ y_{R2} = y_{R1} \frac{D_1}{D_2}, \quad z_{R2} = z_{R1} \frac{D_1}{D_2}, \quad \dot{x}_{R2} = \dot{x}_{R1} \frac{D_1}{D_2}, \quad \dot{y}_{R2} = \dot{y}_{R1} \frac{D_1}{D_2}, \quad \dot{z}_{R2} = \dot{z}_{R1} \frac{D_1}{D_2} \end{cases}$$

(- pour L_1 , + pour L_2).

2.1.3 Équations du mouvement

Soit

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

la masse réduite (masse de m_2 dans un des systèmes de coordonnées normalisées). Il s'agit généralement du paramètre utilisé pour caractériser le système à trois corps considéré. Dans le système de Cross,

- les abscisses de m_1 et m_2 sont respectivement

$$x_1^0 = -\mu \text{ et } x_2^0 = 1 - \mu ;$$

- les masses de m_1 et m_2 sont respectivement

$$\mu_1 = 1 - \mu \text{ et } \mu_2 = \mu.$$

Le corps P est soumis aux forces d'attraction gravitationnelle exercées par les deux primaires, à la force de Coriolis et à la force centrifuge. Ainsi, en notant

$$X = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T,$$

le vecteur des positions et des vitesses de P dans le repère tournant, les équations du mouvement de P s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_4, \\ \dot{x}_2 = x_5, \\ \dot{x}_3 = x_6, \\ \dot{x}_4 = 2x_5 + x_1 - (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} - \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3}, \\ \dot{x}_5 = -2x_4 + x_2 - (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} - \mu \frac{x_2}{r_2^3}, \\ \dot{x}_6 = -(1 - \mu) \frac{x_3}{r_1^3} - \mu \frac{x_3}{r_2^3}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

et

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - x_2^0)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

sont respectivement les distances entre P et les masses m_1 et m_2 .

Le système peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 = f_1(X), \\ \dot{x}_2 = x_5 = f_2(X), \\ \dot{x}_3 = x_6 = f_3(X), \\ \dot{x}_4 = 2x_5 - \frac{\partial U}{\partial x_1} = f_4(X), \\ \dot{x}_5 = -2x_4 - \frac{\partial U}{\partial x_2} = f_5(X), \\ \dot{x}_6 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = f_6(X) \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu) \quad (2.3)$$

est le potentiel du système et $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est le champ de vecteurs du système.

Depuis les travaux de Poincaré [48], on sait que les équations du mouvement dans le problème des trois corps ne sont pas intégrables analytiquement. On dispose uniquement de méthodes d'intégration numérique nous permettant de calculer numériquement la solution associée à une condition initiale donnée. Une étude qualitative du problème restreint des trois corps est nécessaire pour en savoir davantage et espérer mettre en avant d'éventuelles propriétés.

2.1.4 Surface d'énergie et région de Hill

Comme les équations du mouvement du problème des trois corps sont hamiltoniennes et autonomes, elles possèdent une énergie intégrale du mouvement,

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z). \quad (2.4)$$

En mécanique céleste ou en astronomie, on fait généralement référence à l'intégrale de Jacobi,

$$J = -2E = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x^2 + y^2) - 2\frac{1-\mu}{r_1} - 2\frac{\mu}{r_2} - \mu(1-\mu),$$

qui est également une intégrale du mouvement. Le long des trajectoires du système, l'énergie intégrale est constante. Ceci implique que, pour une valeur fixée de l'énergie e , les solutions vivent sur une surface d'énergie (variété de dimension 5 dans l'espace des phases de dimension 6) :

$$M(\mu, e) = \{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mid E(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = e\}.$$

On définit la région de Hill comme la projection sur l'espace des positions de la surface d'énergie $M(\mu, e)$:

$$H(\mu, e) = \{(x, y, z) \mid U(x, y, z) \leq e\}.$$

Elle correspond à la région de mouvement possible. Pour une valeur fixée de μ , il existe cinq portraits possibles de la région de Hill. Notons E_i la valeur de l'énergie intégrale au point de Lagrange L_i (voir la section 2.2). On a $E_1 < E_2 < E_3 < E_4 = E_5$. Selon de la valeur E de son énergie, le corps P ne pourra se déplacer que dans certaines régions de l'espace, la région de Hill correspondante :

- si $E < E_1$, P ne peut se déplacer qu'autour de m_1 et de m_2 ;
- si $E_1 < E < E_2$, un passage entre les régions autour de m_1 et m_2 s'ouvre et P peut se déplacer entre les deux régions ;
- si $E_2 < E < E_3$, P peut bouger dans la région autour de m_1 et m_2 , et passer dans la région extérieure via un passage autour de L_2 .
- si $E_3 < E < E_4 = E_5$, P peut passer directement de la région autour de m_1 à la région extérieure via un passage autour de L_3 .
- si $E > E_5$, P peut se déplacer librement dans l'espace.

La Figure 2.2 illustre les différents portraits de la région de Hill.

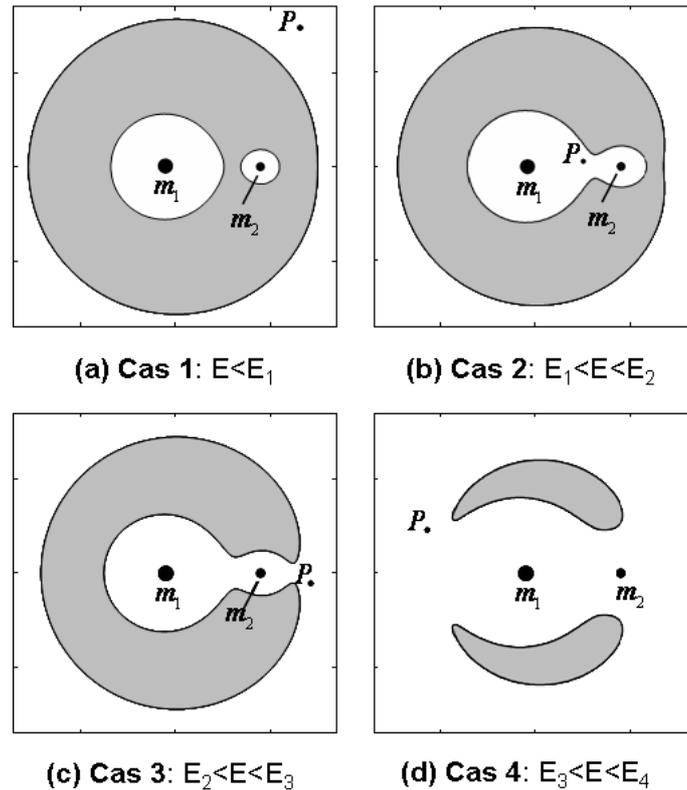


FIGURE 2.2 – Région de Hill.

2.1.5 Intégration numérique des équations du mouvement

Numériquement, pour intégrer les équations du mouvement, nous utilisons la méthode d'intégration d'ordre 8 RK78, de type Runge-Kutta. La fonction correspondante, qui a été produite et distribuée librement pour matlab par MATDS-program, est la fonction *ode87.m*, de syntaxe :

[T,Y]=ode87(@fct,[t0 tf],Y0)

Entrées :

fct : fonction du système $y'=fct(t,y)$

t0 : temps initial d'intégration

tf : temps final d'intégration

Y0 : condition initiale

Sorties :

T : temps d'intégration discrétisé

Y : solution discrétisée

Cet intégrateur est très largement utilisé en dynamique spatiale. C'est un intégrateur à pas variable qui donne des résultats très fiables et très précis. Voir [9], [41] et [52].

Les fonctions à intégrer sont les champs de vecteurs du système dynamique, exprimés dans les différents systèmes de coordonnées, en temps croissant et décroissant.

2.2 Points de Lagrange

2.2.1 Définition

Les points de Lagrange sont les points d'équilibre du problème des trois corps, c'est-à-dire les zéros de f . Il s'agit également des extrema du potentiel U .

Euler [16], dans *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, et Lagrange [32], dans son *Essai sur le problème des trois corps*, ont montré qu'il existait exactement cinq points d'équilibre :

- trois points colinéaires situés sur l'axe reliant les centres des deux primaires. On note généralement L_1 le point de Lagrange situé entre m_1 et m_2 , L_2 celui situé derrière la plus petite des deux masses, m_2 , et L_3 celui situé derrière la plus grosse.
- deux points situés, dans le plan orbital des primaires formant avec les centres des primaires deux triangles équilatéraux, et sont notés L_4 et L_5 .

Voir la Figure 2.3.

2.2.2 Calcul des points de Lagrange

Pour le calcul détaillé et approfondi des coordonnées des points de Lagrange, le lecteur pourra se référer aux travaux de Szebehely, notamment à son livre *Theory of orbits : the restricted problem of three bodies* [55].

Les points de Lagrange sont les points d'équilibre du problème restreint des trois corps. Donc pour les localiser, il suffit de résoudre l'équation $f(X) = 0$, c'est-à-dire trouver $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

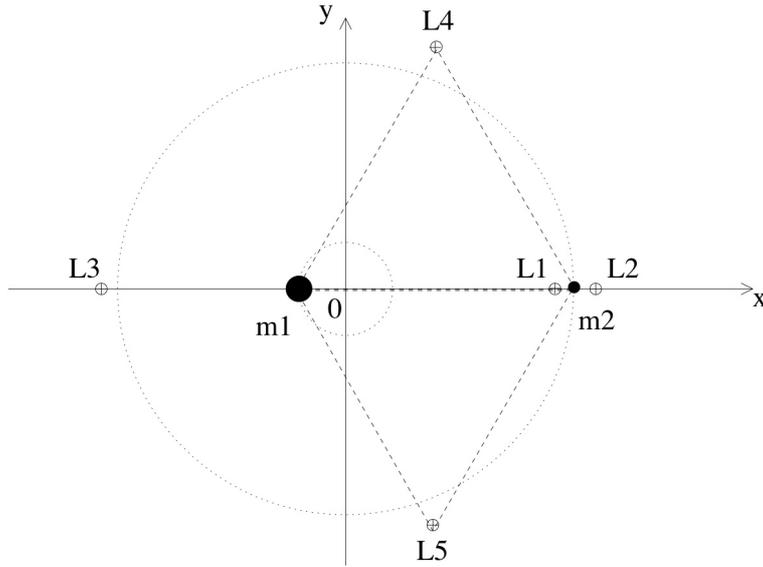


FIGURE 2.3 – Localisation des points de Lagrange.

tel que :

$$\begin{cases} x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 \\ 2x_5 - x_1 + (1 - \mu) \frac{x_1 - x_1^0}{r_1^3} + \mu \frac{x_1 - x_2^0}{r_2^3} = 0 \\ -2x_4 - x_2 + (1 - \mu) \frac{x_2}{r_1^3} + \mu \frac{x_2}{r_2^3} = 0 \\ (1 - \mu) \frac{x_3}{r_1^3} + \mu \frac{x_3}{r_2^3} = 0 \end{cases}$$

On constate de manière immédiate qu'on a forcément :

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0.$$

On cherche donc finalement (x_e, y_e) tel que :

$$\begin{cases} -x_e + (1 - \mu) \frac{x_e - x_1^0}{r_1^3} + \mu \frac{x_e - x_2^0}{r_2^3} = 0 \\ -y_e + (1 - \mu) \frac{y_e}{r_1^3} + \mu \frac{y_e}{r_2^3} = 0 \end{cases}$$

Localisation des points colinéaires.

Comme $y_e = 0$ annule la deuxième équation de notre système, on peut dans un premier temps chercher les abscisses des points d'équilibre situés sur l'axe x , c'est-à-dire de L_1 , L_2 et

L_3 . Il suffit de trouver les solutions x_e de l'équation :

$$x_e - (1 - \mu) \frac{x_e - x_1^0}{(x_e - x_1^0)^3} - \mu \frac{x_e - x_2^0}{(x_e - x_2^0)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_e - \frac{1 - \mu}{(x_e + \mu)^2} - \frac{\mu}{(x_e - 1 + \mu)^2} = 0$$

Soient γ_1 et γ_2 les distances respectives de L_1 et L_2 à la plus petite des primaires m_2 . Avec ces notations, les abscisses des points L_1 et L_2 sont

$$x_{L_1} = 1 - \mu - \gamma_1 \text{ et } x_{L_2} = 1 - \mu + \gamma_2,$$

et γ_1 et γ_2 vérifient les équations :

$$\begin{cases} 1 + \gamma_2 - \mu - \frac{1 - \mu}{(1 + \gamma_2)^2} - \frac{\mu}{\gamma_2^2} = 0 \\ 1 - \gamma_1 - \mu - \frac{1 - \mu}{(1 - \gamma_1)^2} - \frac{\mu}{\gamma_1^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1^5 - (3 - \mu)\gamma_1^4 + (3 - 2\mu)\gamma_1^3 + \mu\gamma_1^2 - 2\mu\gamma_1 + \mu = 0 \\ \gamma_2^5 + (3 - \mu)\gamma_2^4 + (3 - 2\mu)\gamma_2^3 - \mu\gamma_2^2 - 2\mu\gamma_2 - \mu = 0 \end{cases}$$

γ_1 et γ_2 sont donc les zéros de deux polynômes de degré 5. Et en considérant la distance de L_3 à la plus grosse des primaires, on peut trouver une équation similaire pour L_3 . Historiquement, beaucoup de travaux ont été faits pour trouver une expression des solutions de ces polynômes. Szebehely [55] nous fournit les développements en série suivants des solutions γ_1 et γ_2 :

$$\gamma_1 = r_h \left(1 - \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right) \quad (2.5)$$

$$\gamma_2 = r_h \left(1 + \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right) \quad (2.6)$$

où $r_h = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}$ est connu sous le nom de rayon de Hill.

Localisation des points équilatéraux.

Pour localiser les points de Lagrange L_4 et L_5 (où $y \neq 0$), on note

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -x + (1 - \mu) \frac{x - x_1^0}{r_1^3} + \mu \frac{x - x_2^0}{r_2^3} \\ -y + (1 - \mu) \frac{y}{r_1^3} + \mu \frac{y}{r_2^3} \end{pmatrix}$$

et on projette l'équation $\tilde{f}(x, y) = 0$ sur les axes parallèle et perpendiculaire au vecteur position (x, y) , respectivement grâce au vecteur $u_{\parallel} = (x, y)$ et $u_{\perp} = (y, -x)$.

Dans la direction perpendiculaire, cela donne tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(x_e, y_e) \cdot u_{\perp} = 0 \\
\Leftrightarrow & (1 - \mu) \frac{(x_e + \mu)y_e - x_e y_e}{r_1^3} + \mu \frac{(x_e - 1 + \mu)y_e - x_e y_e}{r_2^3} = 0 \\
\Leftrightarrow & (1 - \mu) \frac{\mu y_e}{r_1^3} - \mu \frac{(1 - \mu)y_e}{r_2^3} = 0 \\
\Leftrightarrow & \mu(1 - \mu)y_e \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow & r_1 = r_2
\end{aligned}$$

Puis dans la direction parallèle, en se servant du résultat $r_1 = r_2$, on a :

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}(x_e, y_e) \cdot u_{\parallel} = 0 \\
\Leftrightarrow & -x_e^2 - y_e^2 + (1 - \mu) \frac{(x_e + \mu)x_e + y_e^2}{r_1^3} + \mu \frac{(x_e - 1 + \mu)x_e - y_e^2}{r_2^3} = 0 \\
\Leftrightarrow & -(x_e^2 + y_e^2) + (1 - \mu) \frac{(1 - \mu)(x_e^2 + y_e^2 + \mu x_e) + \mu(x_e^2 + y_e^2 - (1 - \mu)x_e)}{r_1^3} = 0 \\
\Leftrightarrow & (x_e^2 + y_e^2) \left(-1 + \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow & r_1 = r_2 = 1
\end{aligned}$$

Donc, on obtient finalement des points qui sont équidistants de m_1 et m_2 et situés à la distance 1 de ces deux masses. Dans notre système d'unité, l'unité de longueur est la distance entre les deux masses m_1 et m_2 . Par conséquent, les points d'équilibre L_4 et L_5 sont tels qu'ils forment avec les masses m_1 et m_2 deux triangles équilatéraux symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe x .

En terme de coordonnées dans notre système d'unité, on note L_4 le point de Lagrange de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et L_5 le point de Lagrange de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.2.3 Stabilité des points de Lagrange

La stabilité des points de Lagrange a également été discutée par Szebehely [55]. Pour étudier la stabilité des points de Lagrange, on linéarise les équations du mouvement autour de chacun d'eux.

Dans le cas planaire.

Dans le cas planaire, les équations du mouvement linéarisées autour du point de Lagrange L_i s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\ddot{x} \\ \delta\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(X_i) & 0 & 2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(X_i) & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Quand on évalue la matrice linéarisée aux points de Lagrange colinéaires L_1 , L_2 et L_3 , on trouve qu'elle a deux valeurs propres réelles dont une est positive, et une paire de valeurs propres imaginaires pures. Par conséquent, cela prouve l'instabilité des points de Lagrange colinéaires.

Quand on évalue la matrice linéarisée aux points équilatéraux L_4 et L_5 , on trouve qu'elle possède des valeurs propres imaginaires pures si $\mu < \mu_1$, où

$$\mu_1 = 1/2(1 - \sqrt{69}/9) = 0.03851.$$

Si $\mu = \mu_1$, la matrice du linéarisé a des valeurs propres multiples $\pm i\sqrt{2}/2$ avec des blocs de Jordan non triviaux. Pour $\mu > \mu_1$, les valeurs propres sont $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$, où λ n'est pas imaginaire pur. Dans ce dernier cas, les points de Lagrange sont clairement instables. En utilisant des résultats sur la théorie des systèmes dynamiques (voir [43]), on peut prouver que les points L_4 et L_5 sont stables quand $\mu < \mu_1$. En plus des travaux de Szebehely [55], le lecteur pourra se référer au chapitre 3 du livre de B. Bonnard, L. Faubourg et E. Trélat [11] pour une étude détaillée du cas planaire.

Dans le cas spatial.

Dans le cas spatial, les équations du mouvement linéarisées autour du point de Lagrange L_i s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}(X_i) & 0 & 2 & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}(X_i) & -2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}(X_i) & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(X_i) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

- En L_1 , L_2 et L_3 , le spectre du linéarisé est du type $(\pm\lambda, \pm i\omega_p, \pm i\omega_v)$, avec $\lambda > 0$, $\omega_p > 0$, $\omega_v > 0$. Comme une des valeurs propres est strictement positive, les points colinéaires sont instables.
- En L_4 et L_5 , le spectre du linéarisé est du type $(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3)$, où $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$. L'étude est alors beaucoup plus délicate et dépend explicitement des relations entre les valeurs propres ω_i . On invite le lecteur à se référer à la section 2.3 qui présente une étude

locale du flot autour des points d'équilibre, et prouve la stabilité des points L_4 et L_5 sous certaines conditions.

2.2.4 Flot autour des points L_1 et L_2

L'étude qualitative du mouvement de notre système dynamique au voisinage des points de libration colinéaires, L_1 et L_2 , fournit les éléments essentiels à la compréhension des propriétés du problème restreints des trois corps. Par l'étude du linéarisé autour des points d'équilibre, cette étude permet d'introduire l'existence d'orbites périodiques et de trajectoires asymptotiques. Le lecteur pourra se référer à la section 2.7 du livre de Koon *et al.* [30] qui décrit la géométrie des solutions autour des équilibres.

Introduction d'un nouveau système de coordonnées.

Dans le cas planaire, les valeurs propres du système linéarisé autour des point L_1 et L_2 sont de la forme $\pm\lambda$ et $\pm i\nu$, où λ et ν sont des constantes positives. On peut même montrer (voir [30] Chap. 2.7) que les vecteurs propres associés sont de la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, -\sigma, \lambda, -\lambda\sigma), \\ u_2 &= (1, \sigma, -\lambda, -\lambda\sigma), \\ w_1 &= (1, -i\tau, i\nu, \nu\tau), \\ w_2 &= (1, i\tau, -i\nu, \nu\tau), \end{aligned}$$

où σ et τ sont des constantes vérifiant $\sigma > 0$ et $\tau < 0$. Par un changement linéaire de coordonnées avec les vecteurs propres u_1, u_2, w_1 et w_2 comme nouveaux axes, et (ξ, η, ζ) les coordonnées correspondantes, on obtient une nouvelle équation différentielle linéarisée, de forme simplifiée :

$$\dot{\xi} = \lambda\xi, \tag{2.9a}$$

$$\dot{\eta} = -\lambda\eta, \tag{2.9b}$$

$$\dot{\zeta}_1 = \nu\zeta_2, \tag{2.9c}$$

$$\dot{\zeta}_2 = -\nu\zeta_1, \tag{2.9d}$$

et l'énergie intégrale devient

$$E_l = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2). \tag{2.10}$$

Les solutions de l'équation s'écrivent

$$\xi(t) = \xi^0 e^{\lambda t} \tag{2.11a}$$

$$\eta(t) = \eta^0 e^{-\lambda t} \tag{2.11b}$$

$$\zeta(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t) = \zeta^0 e^{-i\nu t}, \tag{2.11c}$$

où les constantes ξ^0, η^0 et $\zeta^0 = \zeta_1^0 + i\zeta_2^0$ sont les conditions initiales. De plus, on constate facilement que les équations linéarisées obtenues admettent deux nouvelles intégrales du mouvement, en plus de l'énergie. Il s'agit des fonctions $\eta\xi$ et $\|\zeta\|^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$, qui sont donc toutes deux constantes le long des solutions du système linéarisé.

Région d'équilibre.

Pour une valeur fixée de l'énergie $E > E_2$, la région de mouvement possible contient une encolure, c'est-à-dire une zone, autour de chaque point d'équilibre. Un voisinage d'un des points de Lagrange L_1 ou L_2 , dont la projection dans l'espace des positions est l'encolure décrite précédemment est connu sous le nom de région d'équilibre, notée R . La région d'équilibre R , déterminée par

$$E_l = \epsilon, \text{ et } \|\eta - \xi\| \leq c,$$

avec ϵ et c deux constantes positives, est homéomorphe au produit d'une sphère et d'un intervalle. En utilisant la relation

$$\eta\xi = \frac{1}{4}\left((\eta + \xi)^2 - (\eta - \xi)^2\right),$$

on en déduit que pour toute valeur de $\eta - \xi$ dans l'intervalle $I = [-c, c]$, l'équation

$$E_l = \lambda\xi\eta + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \epsilon \text{ détermine la sphère}$$

$$\frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 + \frac{\nu}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \epsilon + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2. \quad (2.12)$$

La sphère frontière de R pour laquelle $\eta - \xi = -c$ sera notée n_1 et celle pour laquelle $\eta - \xi = c$, n_2 . Par ailleurs, on appellera *équateur* l'ensemble des points $\eta + \xi = 0$, et *hémisphères nord* et *sud* les ensembles de points $\eta + \xi > 0$ et $\eta + \xi < 0$.

Flot dans la région d'équilibre.

Pour analyser le flot du linéarisé dans la région d'équilibre R , on considère les projections sur les plans (η, ξ) et (ζ_1, ζ_2) . Dans le plan (η, ξ) , on a le schéma principal d'un point critique de type point col. Dans le (ζ_1, ζ_2) , on a le portrait de phase d'un centre. On schématise le flot dans le plan (η, ξ) sur la Figure 2.4. La région d'équilibre est un ensemble limité par les hyperboles $\eta\xi = \epsilon/\lambda$ (correspondant à $\|\zeta\|^2 = 0$) et par les ligne $\eta - \xi = \pm c$ (correspondant aux sphères frontières n_1 et n_2).

Dans la région d'équilibre, la fonction $\eta\xi$ est une intégrale du mouvement. Par conséquent, les projections des orbites de la région d'équilibre dans le plan $(\eta\xi)$ se déplacent sur des branches d'hyperboles d'équation $\eta\xi = \text{constante}$, excepté le cas où $\eta\xi = 0$. Si $\eta\xi > 0$, les branches d'hyperbole connectent les segments frontières $\eta - \xi = c$ et $\eta - \xi = -c$. Si $\eta\xi < 0$, les branches d'hyperbole ont leurs deux extrémités sur le même segment. Le sens de parcours des orbites dans la région d'équilibre est indiqué sur la Figure 2.4(b). Pour finalement avoir une idée du flot du linéarisé dans la région d'équilibre R à partir de la Figure 2.4(b), il suffit d'imaginer que chaque point de la projection sur le plan (η, ξ) correspond à un cercle dans R de rayon $\rho = \|\zeta\|^2 = \text{constante}$, puisque d'après l'équation 2.12, on a $\|\zeta\|^2 = \frac{2}{\nu}(\epsilon - \lambda\eta\xi)$.

Ainsi, dans la région d'équilibre, on distingue neuf classes d'orbites regroupées dans les quatre catégories suivantes :

1. Le point à l'origine de la Figure 2.4(b), $\eta = \xi = 0$ correspond à une orbite périodique dans R , connue sous le nom d'orbite de Lyapunov instable.

2. Les quatre segments semi-ouverts définis par $\eta\xi = 0$ (équivalents à $\|\zeta\|^2 = \rho^*$ où $\rho^* = 2\epsilon/\nu$), correspondent à quatre cylindres formés d'orbites qui convergent asymptotiquement vers l'orbite périodique en temps $\pm\infty$.
3. Les segments hyperboliques déterminés par $\eta\xi = \text{constante} > 0$ (équivalents à $\|\zeta\|^2 < \rho^*$) correspondent à deux cylindres qui traversent R d'une sphère frontière à l'autre, en restant dans le même hémisphère, à savoir l'hémisphère nord si les cylindres vont de n_2 à n_1 , et l'hémisphère sud dans l'autre cas. Comme les orbites correspondantes se déplacent d'une région à une autre, on les appelle orbites de transit. Sur la Figure 2.4(b), les deux trajectoires notées T_{12} et T_{21} sont des exemples d'orbites de transit.
4. Enfin, les segments hyperboliques déterminés par $\eta\xi = \text{constante} < 0$ (équivalents à $\|\zeta\|^2 > \rho^*$) correspondent à deux cylindres d'orbites qui se déplacent d'un hémisphère à l'autre en retournant à leur sphère frontière d'origine, n_1 ou n_2 . Si $\eta > 0$, la sphère frontière est n_1 et les orbites se déplacent de l'hémisphère sud ($\eta + \xi < 0$) à l'hémisphère nord ($\eta + \xi > 0$). Inversement, si $\eta < 0$, la sphère frontière est n_2 et les orbites se déplacent de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud. Comme les orbites correspondantes retournent vers leur région d'origine après un certain temps, on appelle ces orbites des orbites de non-transit. Sur la Figure 2.4(b), les trajectoires T_{11} et T_{22} sont des exemples d'orbites de non-transit.

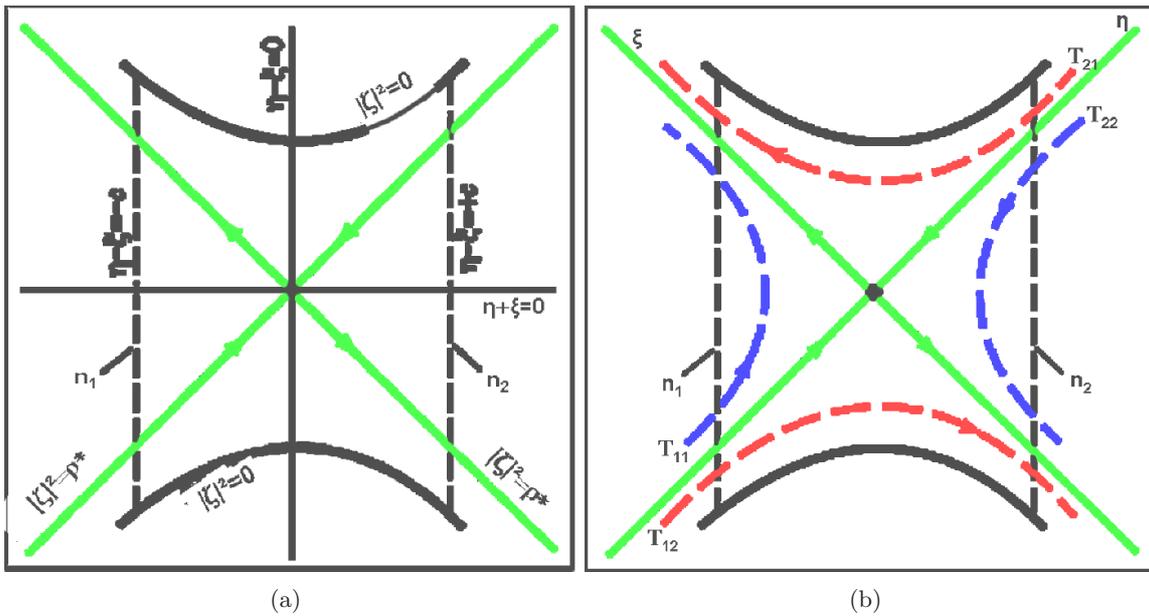


FIGURE 2.4 – Flot dans la région d'équilibre.

Ces résultats s'étendent finalement au système non linéaire. En effet, en vertu de la généralisation de Moser d'un théorème de Lyapunov [45], on peut prouver que tous les résultats qualitatifs obtenus par l'étude du linéarisé s'étendent aux équations non linéarisées. Conley [13] a également établi un résultat dans ce sens en adaptant spécialement le théorème de Moser au PCR3BP.

2.3 Orbites périodiques

2.3.1 Définition et existence

Il existe des orbites périodiques autour des points de Lagrange, dont l'existence est assurée par le théorème de Lyapunov-Poincaré dans le cas Hamiltonien (voir le chapitre 4 du livre de B. Bonnans, L. Faubourg et E. Trélat [11]). Les plus connues sont les orbites de Lyapunov et les orbites de halo.

Theorem 2.3.1 (Théorème de Lyapunov-Poincaré) *Soit $\dot{x} = H(x)$ un système Hamiltonien de \mathbb{R}^{2n} , x_0 une position d'équilibre identifiée à 0, $A = \frac{\partial H}{\partial x}(0)$ la matrice du système linéarisé. On suppose que le spectre de A est de la forme $\sigma(A) = \{\pm i\omega, \lambda_3, \dots, \lambda_{2n}\}$, où $\omega > 0$. Si $\lambda_j/i\omega \notin \mathbb{Z}$ pour $j = 3, \dots, 2n$, alors il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques issues de 0.*

Dans le cas planaire.

En appliquant ce théorème aux points de Lagrange dans le cas planaire, on aboutit aux résultats suivants :

- Aux points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 , le système linéarisé admet une paire de valeurs propres imaginaires pures et deux valeurs propres réelles non nulles. Le théorème de Lyapunov-Poincaré permet donc de montrer l'existence d'une famille à un paramètre de trajectoires périodiques émanant de chacune de ces positions d'équilibre.
- Aux points de Lagrange L_4 et L_5 , le système linéarisé admet deux paires de valeurs propres imaginaires pures conjuguées. Le théorème de Lyapunov-Poincaré appliqué deux fois permet donc de montrer l'existence d'une famille à deux paramètres de trajectoires périodiques émanant de chacune de ces positions d'équilibre (on peut également voir cette famille à deux paramètres comme deux familles à un paramètre de trajectoires périodiques).

Ces orbites périodiques planaires sont généralement appelées les orbites de Lyapunov.

Dans le cas spatial.

Dans le cas spatial, la preuve de l'existence d'orbites périodiques autour des points de Lagrange est proche de celle du cas planaire.

Le spectre du linéarisé en L_1 , L_2 ou L_3 est du type

$$\left(\pm\lambda, \pm i\omega_p, \pm i\omega_v\right)$$

avec $\lambda > 0, \omega_p > 0, \omega_v > 0$.

Si on applique le théorème de Lyapunov-Poincaré, on obtient les résultats suivants :

- $\pm\lambda/i\omega_v \notin \mathbb{Z}$, donc il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques.
- De plus, si $\pm\omega_p/\omega_v \notin \mathbb{Z}$, on peut appliquer une seconde fois le théorème de Lyapunov-Poincaré et obtenir une autre famille à un paramètre.

D'après les résultats obtenus dans [30], en L_1 et L_2 , on a :

$$\omega_v = \sqrt{c_2}, \quad \omega_p = \left(1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}\sqrt{9c_2^2 - 8c_2}\right)^{1/2} \quad \text{où} \quad c_2 = \frac{1}{\gamma^3} \left(\mu + \frac{(1-\mu)\gamma^3}{(1\pm\gamma)^3}\right)$$

Si, comme dans le cas du système Soleil-Terre, on a $c_2 > 1$, alors :

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_v^2} = \frac{2 - c_2}{2c_2} + \frac{1}{2} \sqrt{9 - \frac{8}{c_2}} < 2$$

Or, $\omega_v^2 = \omega_p^2$ si et seulement si $c_2 = 1$. Ainsi, dans le cas $c_2 > 1$, on a $\frac{\omega_p^2}{\omega_v^2} \neq 1$ et donc $\frac{\omega_p}{\omega_v} \notin \mathbb{Z}$. En conclusion, dans le cas $c_2 > 1$, il existe une famille à 2 paramètres d'orbites périodiques autour des points colinéaires L_1 et L_2 .

Dans le cas des points de Lagrange L_4 et L_5 , le spectre est du type

$$\left(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3 \right), \text{ où } 0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$$

et sous réserve d'estimer $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, il faut faire le raisonnement suivant :

- si $\frac{\omega_2}{\omega_3} < 1$, il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques autour des points L_4 et L_5 ;
- si $\frac{\omega_1}{\omega_3} < 1$, il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques autour des points L_4 et L_5 ;
- si $\frac{\omega_3}{\omega_2} \notin \mathbb{N}$ (ou $\frac{\omega_3}{\omega_1} \notin \mathbb{N}$), il existe une famille à un paramètre d'orbites périodiques autour des points L_4 et L_5 ;

Si toutes ces conditions sont réalisées, on obtient une famille à trois paramètres d'orbites périodiques autour de ces points.

Que ce soit autour des points colinéaires ou équilatéraux, les orbites périodiques non planaires, isomorphes à des ellipses, du problème restreint des trois corps sont appelées les orbites de halo. Leur intérêt dans le cadre de design de mission a été souligné pour la première fois par Farquhar (voir [17, 18]). D'autres familles d'orbites périodiques, appelées orbite de Lissajous, ont été mises en évidence et calculées par Gómez *et al.* dans [20], de même que des orbites quasi-périodiques (voir [21]). Les orbites de halo peuvent d'ailleurs être considérées comme les orbites de Lissajous de premier ordre. On s'intéressera dans le chapitre 4 aux orbites de Lissajous de deuxième ordre qui sont topologiquement équivalentes à des courbes en forme de huit.

2.3.2 Étude locale des orbites de halo

L'étude du comportement des trajectoires solutions du problème des trois corps au voisinage des orbites de halo va nous permettre d'introduire le concept très important de matrice de monodromie. Pour cela, on linéarise les équations du mouvement. Soit $t \mapsto \bar{x}(t)$ une trajectoire nominale correspondant à une orbite de halo. Les équations du mouvement linéarisées autour de cette trajectoire nominale s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta \dot{\bar{x}}(t) &= Df(\bar{x})\delta \bar{x} \\ &= A(t)\delta \bar{x} \end{aligned}$$

où $A(t)$ est la matrice Jacobienne périodique de f évaluée le long de l'orbite périodique $\bar{x}(t)$. Une étude qualitative du comportement des trajectoires du système non linéarisé au voisinage de l'orbite de halo s'obtient grâce à la matrice de monodromie M , définie comme la matrice de

transition d'état, ou résolvante du système linéarisée, évaluée après une période T de l'orbite de halo. M vérifie donc

$$\Phi(T, x_0) = R(T)x_0 = Mx_0,$$

où $\Phi(t, x_0)$ est le flot du système linéarisé (2.3.2), ou encore

$$M = \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial x_0}$$

où ϕ est le flot du système non linéarisé.

Les valeurs propres (λ_i) de M permettent d'étudier la stabilité de l'orbite périodique. Des résultats de stabilité dans le cas de systèmes Hamiltoniens autonomes (voir Meyer et Hall [43]) permettent de montrer que les valeurs propres de la matrice de monodromie vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 < 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \\ \lambda_5 = \overline{\lambda_6} \text{ avec } |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1, \end{aligned}$$

où λ_1 et λ_2 sont réels et λ_5 et λ_6 sont complexes conjugués.

L'outil classique pour étudier un flot au voisinage d'une orbite périodique est généralement l'application de premier retour de Poincaré (voir [5, 47]). En étudiant les valeurs propres du linéarisé de cette application autour d'un point fixe, on est capable d'analyser la stabilité de l'orbite périodique. Or, dans une base bien choisie, la matrice de monodromie possède les mêmes valeurs propres que le linéarisé de l'application premier retour de Poincaré (voir le chapitre 7 de [30]). Ceci nous permet donc de déduire le comportement des trajectoires au voisinage des orbites périodiques.

- Les valeurs propres λ_1 et λ_2 engendrent respectivement les sous-espaces instable et stable E^i et E^s ; E^i et E^s donnent, au point \bar{x} de l'orbite de halo, les directions répulsives et attractives du champ. Lorsqu'on fait évoluer le point \bar{x} sur l'orbite de halo, les droites E^s et E^i décrivent des tubes stables et instables, qu'on note W^s et W^i .
- La valeur propre double 1 est associée aux modes non instables. Il n'y a en fait qu'un seul vecteur propre associé à la valeur propre 1 (l'espace propre de la valeur propre double 1 est de dimension 1). Ce vecteur est de manière évidente le vecteur tangent à l'orbite de halo au point \bar{x} . L'autre valeur propre, $\lambda_4 = 1$, est associée à la variation de l'énergie.
- La paire de valeurs propres conjuguées de module 1 est associée au mouvement de rotation des trajectoires près de l'orbite de halo.

2.3.3 Calcul numérique des orbites périodiques

Principe.

Dans le système de coordonnées de Richardson (centré au point de Lagrange), les équations du mouvement vérifient une propriété de symétrie : si $(x(t), y(t), z(t))$ est solution du système, alors $(x(-t), -y(-t), z(-t))$ est aussi solution. Ceci signifie que, pour toute trajectoire située d'un côté du plan $y = 0$, il existe une trajectoire miroir, située de l'autre côté du plan $y = 0$, qui se propage en temps inverse.

Cette propriété de symétrie peut être utilisée pour construire des trajectoires périodiques. En effet, si une trajectoire qui commence sur le plan $y = 0$ avec un vecteur vitesse perpendiculaire à

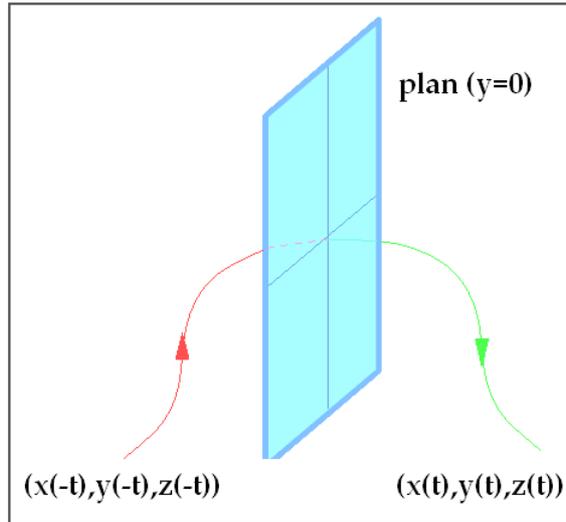


FIGURE 2.5 – Symétrie du problème restreint des trois corps.

ce plan intersecte à nouveau le plan $y = 0$ orthogonalement, alors cette trajectoire et son image miroir se raccorderont tant en position qu'en vitesse au niveau du plan $y = 0$ et formeront donc une seule et unique orbite périodique.

Considérons une condition initiale X_0 appartenant au plan $y = 0$ et avec un vecteur vitesse orthogonal au plan $y = 0$,

$$X_0 = (x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0).$$

Pour que l'orbite partant de X_0 soit périodique, il faut et il suffit qu'au temps t_1 où l'on recoupe le plan $y = 0$ on obtienne un point de coordonnées

$$X(t_1) = (x, 0, z, 0, \dot{y}, 0)$$

(vecteur vitesse orthogonal au plan ($y = 0$)). Si cette condition est remplie, l'orbite construite sera alors périodique de période $T = 2t_1$.

Pour calculer numériquement une orbite périodique, on se donne une condition initiale X_0 de la forme précédente. On intègre numériquement les équations du mouvement à partir de X_0 , et on corrige cette condition initiale jusqu'à ce que les composantes en x et z de la vitesse soient nulles au moment où la trajectoire intersecte le plan $y = 0$. Numériquement, on résout ce problème en utilisant une méthode de Newton.

Correction des conditions initiales par une méthode de Newton.

On cherche $X_0 = (x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0)$ et t_1 tels que

$$\begin{pmatrix} y(t_1) \\ \dot{x}(t_1) \\ \dot{z}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2(X_0, t_1) \\ \phi_4(X_0, t_1) \\ \phi_6(X_0, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas spatial, les orbites de halo autour des points de Lagrange colinéaires forment deux familles d'orbites périodiques à un paramètre. En général, la valeur de l'excursion en z (i.e. l'amplitude de l'orbite dans la direction z) est choisie comme paramètre, ce qui signifie qu'on fixe $z_0 = z_{0f}$. Notre but est alors d'annuler la fonction

$$G_{z_{0f}} : (x_0, \dot{y}_0, t_1) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0, t_1) \\ \Phi_4(X_0, t_1) \\ \Phi_6(X_0, t_1) \end{pmatrix},$$

où $X_0 = (x_0, 0, z_{0f}, 0, \dot{y}_0, 0)$.

Pour cela, on utilise une méthode de type Newton ($Y^{n+1} = Y^n - DG(Y^n)^{-1} \cdot G(Y^n)$), la difficulté étant de calculer la différentielle de la fonction G .

Pour calculer DG , il suffit de calculer la différentielle du flot Φ ,

$$D\Phi(X_0, t_1) \cdot (\Delta X_0, \Delta t_1) = \begin{pmatrix} R(t_1) & f(\Phi(X_0, t_1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta t_1 \end{pmatrix}$$

Par définition de G ,

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{y}_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(X_0, t_1) \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_4}{\partial \dot{y}_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_4}{\partial t}(X_0, t_1) \\ \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_6}{\partial \dot{y}_0}(X_0, t_1) & \frac{\partial \Phi_6}{\partial t}(X_0, t_1) \end{pmatrix}$$

Donc, on obtient finalement la différentielle de G en en prenant l'intersection des deuxième, quatrième et sixième ligne avec les première, cinquième et septième colonne de la différentielle du flot. Et en notant $R_{i,j}(\cdot)$ les coefficients de la résolvante $R(\cdot)$, on aboutit finalement à l'algorithme :

$$\begin{pmatrix} x_{0,n+1} \\ \dot{y}_{0,n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,n} \\ \dot{y}_{0,n} \\ t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{2,1}(t_n) & R_{2,5}(t_n) & f_2(\Phi(X_0^n, t_n)) \\ R_{4,1}(t_n) & R_{4,5}(t_n) & f_4(\Phi(X_0^n, t_n)) \\ R_{6,1}(t_n) & R_{6,5}(t_n) & f_6(\Phi(X_0^n, t_n)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0^n, t_n) \\ \Phi_4(X_0^n, t_n) \\ \Phi_6(X_0^n, t_n) \end{pmatrix}$$

où $X_0^n = (x_{0,n}, 0, z_{0f}, 0, \dot{y}_{0,n}, 0)$.

Il est bien connu qu'il faut partir d'un point de départ suffisamment proche de la solution recherché pour que la méthode de tir converge. Dans notre cas, il est nécessaire d'avoir à notre disposition des conditions initiales et une demi-période suffisamment proches des conditions initiales et demi-période aboutissant effectivement à l'orbite périodique. A cet égard, nous nous sommes référés aux travaux de Richardson [49]. En utilisant la méthode de Lindstedt-Poincaré, que l'on détaille et ré-utilise à la section 4.2.3, Richardson a obtenu l'approximation analytique des orbites périodiques de type halo suivante :

$$\begin{cases} x = a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos \tau_1 + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos 2\tau_1 + (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_xA_z^2) \cos 3\tau_1, \\ y = \kappa A_x \sin \tau_1 + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin 2\tau_1 + (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_xA_z^2) \sin 3\tau_1, \\ z = \delta_m A_z \cos \tau_1 + \delta_m d_{21} A_x A_z (\cos 2\tau_1 - 3) + \delta_m (d_{32} A_z A_x^2 - d_{31} A_z^3) \cos 3\tau_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Cette approximation analytique du troisième ordre des orbites de halo offre le point de départ idéal de l'algorithme de la méthode de tir. La Figure 2.6 représente une famille d'orbites de halo autour des points L_1 et L_2 .

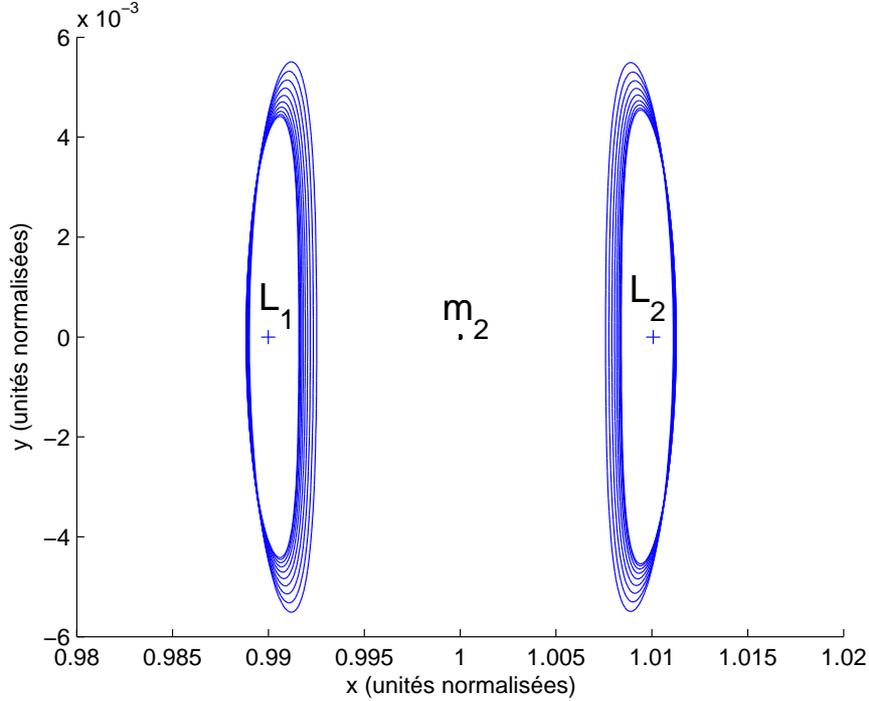


FIGURE 2.6 – Familles d'orbites de halo calculées autour des points L_1 et L_2 .

Dans le cas planaire, pour calculer numériquement une orbite de Lyapunov, on utilise également une méthode de tir. L'excursion en x , A_x , fait désormais office de paramètre. La fonction à annuler est

$$G_{x_{0f}} : (\dot{y}_0, t_1) \mapsto \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0, t_1) \\ \Phi_3(X_0, t_1) \end{pmatrix},$$

où $X_0 = (x_{0f}, 0, 0, \dot{y}_0)$, et l'algorithme de la méthode de tir est le suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_{0,n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{0,n} \\ t_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{2,4}(t_n) & f_2(\Phi(X_0^n, t_n)) \\ R_{3,4}(t_n) & f_3(\Phi(X_0^n, t_n)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2(X_0^n, t_n) \\ \Phi_3(X_0^n, t_n) \end{pmatrix}.$$

Reste à résoudre le problème de l'initialisation de la méthode de tir. L'étude du linéarisé autour des points d'équilibre (voir la section 2.2.3) fournit une approximation au premier ordre des orbites de Lyapunov mais celle-ci n'est pas assez précise. La solution proposée et élaborée pour calculer une orbite de Lyapunov d'amplitude A_x donnée est la suivante. Dans un premier temps, on calcule une orbite de halo d'excursion en z nulle, en utilisant la méthode décrite précédemment. Cette orbite de halo d'excursion en z nulle est une orbite de Lyapunov. On calcule

ensuite une famille d'orbites de Lyapunov à partir de cette première solution par une méthode de continuation paramétrée par l'excursion en x (Une description de la méthode de continuation est fournie à la section 3.4.1). Finalement, pour calculer une orbite de Lyapunov d'excursion en x , A_{x0} , donnée, on se sert de l'orbite de la famille dont l'excursion est la plus proche de A_{x0} pour initialiser la méthode de tir. La Figure 2.7 représente une famille d'orbites de Lyapunov autour des points L_1 et L_2 .

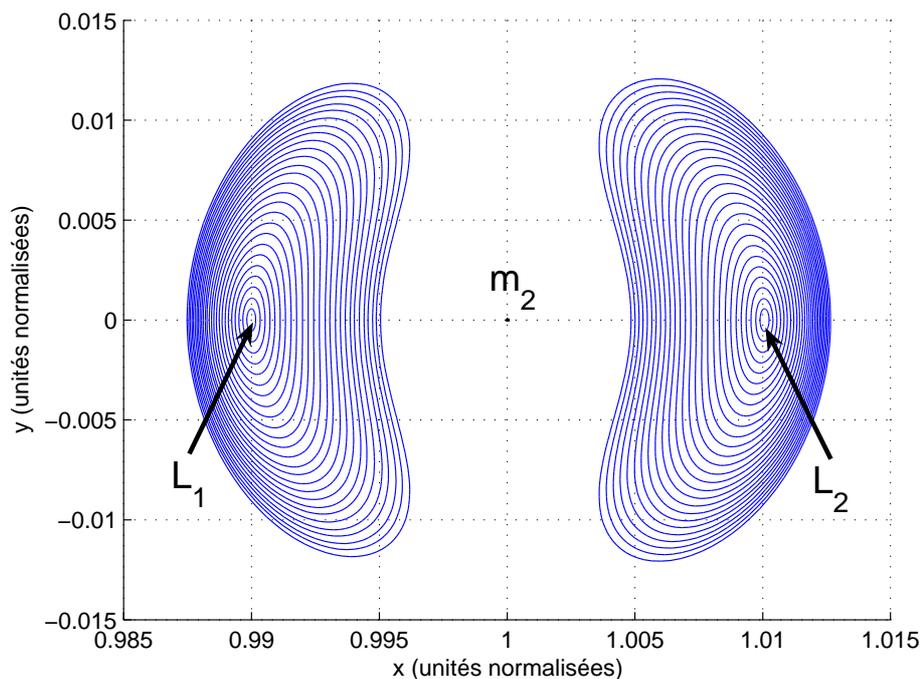


FIGURE 2.7 – Familles d'orbites de Lyapunov calculées autour des points L_1 et L_2 .

Par ailleurs, il est à noter que dans les simulations numériques, les coefficients de la matrice de transition d'état R , qui interviennent dans la mise en oeuvre de la méthode de tir, sont calculés simultanément à l'intégration du système différentiel. Koon *et al.* (voir la section 6.8 de [30]) proposent de la calculer le long de l'orbite de référence $\bar{x}(t)$ en intégrant le système de 42 équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}) \\ \dot{R}(t, t_0) &= Df(\bar{x})R(t, t_0)\end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}\bar{x}(t_0) &= \bar{x}_0 \\ R(t_0, t_0) &= I_6.\end{aligned}$$

2.4 Variétés invariantes

2.4.1 Définition

Considérons une orbite périodique autour d'un point d'équilibre colinéaire L_1 , L_2 ou L_3 . La variété stable (resp. instable) de cette orbite périodique est le sous-ensemble de l'espace des phases formé par tous les points dont la demi-orbite future (resp. passée) converge vers l'orbite périodique.

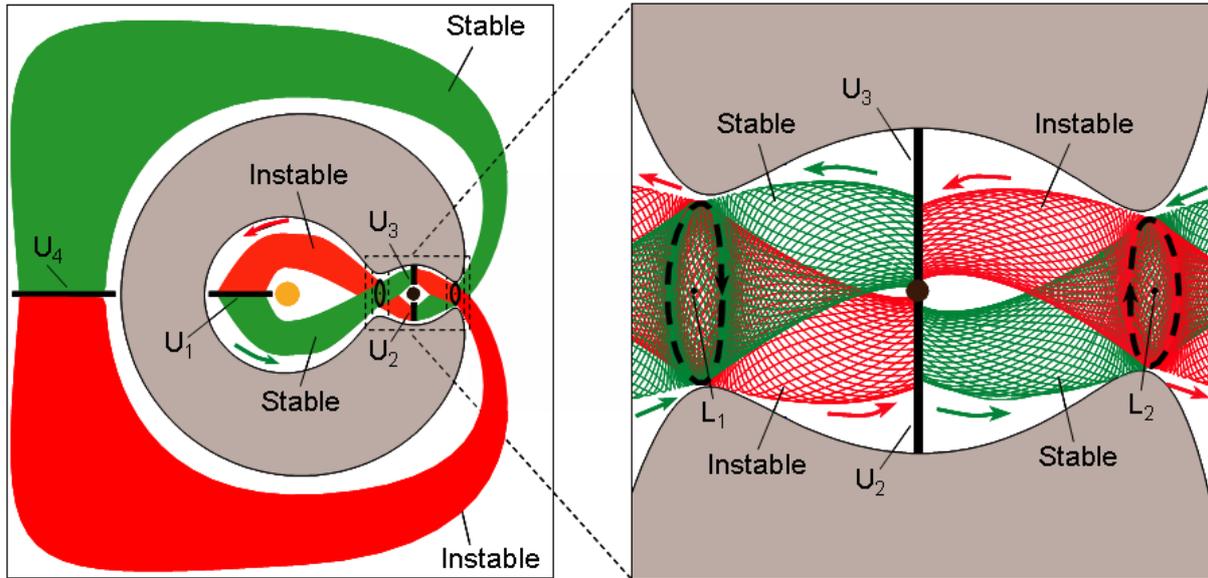


FIGURE 2.8 – Variétés invariantes dans le système Soleil-Terre.

On peut montrer l'existence des variétés invariantes d'une orbite périodique par une étude qualitative de la dynamique à son voisinage. L'approche classique consiste à utiliser l'application de premier retour de Poincaré. Cette application permet de reconstruire la dynamique du champ au voisinage de l'orbite périodique (voir [30]). Par l'étude des valeurs propres et vecteurs propres de la Jacobienne de l'application de premier retour, on détermine les directions stable et instable du flot au voisinage de l'orbite périodique. Or, la Jacobienne de l'application premier retour, connue sous le nom de matrice de Monodromie, est équivalente à la résolvante du système linéarisé le long de l'orbite périodique calculée sur une période T de l'orbite, qu'on a déjà étudiée dans la section 2.3.2. Dans notre problème, deux des valeurs propres de la matrice de monodromie, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, vérifient $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 = 1/\lambda_1 < 1$. Les sous-espaces E^i et E^s engendrés respectivement par λ_1 et λ_2 donnent alors, à chaque point de l'orbite périodique, les directions répulsives et attractives du champ. Ils décrivent le long de l'orbite périodique des tubes instables et stables, qu'on note W^i et W^s . Ces tubes instables et stables sont les approximations linéaires des variétés invariantes de l'orbite périodique.

2.4.2 Les variétés invariantes en tant que séparatrices

Les variétés invariantes sont des objets globaux qui se propagent au-delà des voisinages de L_1 et L_2 . Dans la région d'équilibre, elles agissent comme des séparatrices pour le flot (voir [23]).

Les variétés invariantes sont des sortes de tubes de dimension 4, topologiquement équivalents à $S^3 \times \mathbb{R}$, dans la surface d'énergie de dimension 5 mentionnée à la section 2.1.4. Compte tenu de cette dimension, il se trouve que les variétés invariantes séparent deux types d'orbites, appelées orbites de transit et orbites de non transit.

Les orbites de transit sont des orbites qui passent d'une région à une autre de l'espace dans la région d'équilibre à l'intérieur des tubes de dimension 4. Les orbites de non transit se déplacent à l'extérieur des tubes. En référence à l'étude du flot dans la région d'équilibre réalisée dans la section 2.2.4, les variétés invariantes correspondent au quatre segments semi-ouverts $\eta\xi = 0$. La Figure 2.4 illustre alors parfaitement ce rôle de séparatrices qu'occupent les variétés invariantes, puisqu'on voit bien que les quatre demi-segments correspondant aux variétés découpent la région d'équilibre en quatre sous-régions, séparant ainsi distinctement les orbites de transit et de non-transit.

Dans le système Terre-Lune, la capture d'une navette par la Lune en dehors de l'orbite lunaire n'est possible qu'en passant au travers des tubes invariants d'une orbite périodique autour de L_2 . Les variétés invariantes sont ainsi un outil pertinent pour réaliser des captures balistiques. De plus, en étudiant l'agencement des variétés invariantes d'un même système, voire de systèmes différents, on peut réaliser des explorations interplanétaires très peu énergétiques, en utilisant les orbites de transit se déplaçant à l'intérieur des tubes invariants.

2.4.3 Calcul numérique des variétés

Approximation linéaire des variétés.

Les tubes du champ linéarisé, W^s et W^i , sont des approximations locales des variétés stable et instable. Pour calculer les tubes W^s et W^i d'une orbite périodique Σ , il suffit, en chaque point a de Σ , de calculer les vecteurs propres $V^s(a)$ et $V^i(a)$ associés aux valeurs propres réelles de la matrice de monodromie en a inférieure et supérieure à 1. On a

$$W^s = \bigcup_{a \in \Sigma} E^s(a), \text{ et } W^i = \bigcup_{a \in \Sigma} E^i(a),$$

où

$$E^s(a) = \text{Vect}(V^s(a)), \text{ and } E^i(a) = \text{Vect}(V^i(a)).$$

Une bonne approximation des variétés stable et instable est obtenue en propageant les solutions des équations du mouvement à partir des conditions initiales de la forme

$$X_0 = a + \epsilon V(a),$$

où a balaye l'orbite périodique, $V(a)$ est un vecteur propre stable ou instable de la matrice de monodromie en a et ϵ un paramètre réel. Pour garantir la validité de l'approximation linéaire, ϵ doit être suffisamment "petit". Ceci étant, les orbites situées sur les variétés oscillent fortement à l'approche de l'orbite périodique. La matrice de monodromie possède deux valeurs propres complexes conjuguées, donc les orbites des variétés convergent vers l'orbite périodique en oscillant de plus en plus. C'est pourquoi il est préférable que ϵ ne soit pas être trop petit non plus. En prenant ϵ trop petit, l'intégration numérique des conditions initiales conduisant aux variétés sera très longue et le gain de précision, très limité. Gomez, Jorba, Masdemont and Simo [22] suggèrent des valeurs comprises entre 200 et 250 km dans le système Soleil-Terre. Ceci permet d'avoir une représentation globale des variétés invariantes avec une bonne précision.

Chapitre 3

Exemples de missions au voisinage des points de Lagrange

3.1 Introduction

Les missions utilisant les points de Lagrange sont potentiellement très nombreuses. La diminution des dépenses et besoins énergétiques engendrée par l'utilisation des variétés invariantes pour le voyage interplanétaire permet d'envisager des missions jusqu'alors irréalisables techniquement. De même, les orbites de halo se trouvent être d'excellents sites de relais, d'observation voire d'accueil pour une future station orbitale. Par conséquent, de nombreux travaux ont été faits à ce sujet, et bon nombre de missions imaginées et simulées numériquement. On présente dans ce chapitre trois types de missions envisageables autour des points de Lagrange : un transfert entre le voisinage de la Terre et une orbite de halo dans le système Soleil-Terre, le calcul d'une trajectoire hétérocline entre deux orbites de Lyapunov dans le système Soleil-Terre et la simulation d'un transfert Terre-Lune selon trois approches différentes.

L'idée d'une trajectoire entre la Terre et une orbite de halo dans le système Soleil-Terre est directement inspirée des propriétés énoncées des variétés invariantes. Les trajectoires situées sur les variétés invariantes d'une orbite de halo convergent naturellement vers l'orbite périodique en temps $+\infty$ ou $-\infty$. De plus, dans le système Soleil-Terre, les variétés de la région de la Terre approchent suffisamment près de la Terre pour envisager un départ du voisinage de la Terre en utilisant directement ces variétés. La simulation numérique d'un tel transfert est présentée dans la première partie de ce chapitre.

L'objet de la deuxième partie de ce chapitre est le calcul d'une trajectoire hétérocline. Là encore, l'idée de concevoir ce type de trajectoire s'inspire des propriétés de convergence des variétés invariantes vers leurs orbites périodiques. Pour joindre asymptotiquement deux orbites périodiques différentes, il suffit alors de trouver, si elles existent, les intersections de leurs variétés. La trajectoire simulée est une trajectoire qui joint asymptotiquement une orbite de Lyapunov autour de L_2 (Soleil-Terre) (noté L_2 (ST)) à une orbite de Lyapunov autour de L_1 (ST) (noté L_1 (ST)), avec un coût de transfert quasi-nul.

Finalement, l'idée d'un transfert Terre-Lune n'est pas nouvelle. L'approche traditionnelle pour calculer le transfert d'une navette depuis une orbite parking de la Terre jusqu'à la Lune consiste à utiliser un transfert de Hohmann [42]. Ce type de transfert est basé sur la considération d'un problème à deux corps (Two-Body Problem ou 2BP). Dans ce problème à deux

corps, on sait que toutes les trajectoires sont des orbites elliptiques, et on est capable de calculer précisément la solution de ce problème partant d'un point donné et arrivant à un point voulu. Cependant, ce type de transfert a un coût énergétique très important, ce qui rend certaines missions potentiellement irréalisables. C'est pourquoi de nombreuses recherches et travaux ont été faits pour envisager le transfert d'une navette à la Lune sans transfert de Hohmann. La plupart de ces recherches se sont naturellement tournées vers la théorie et les résultats du problème restreint des trois corps, connu pour permettre l'élaboration de trajectoires peu énergétiques (voir [7, 34, 39, 44]). Dans la dernière partie de ce chapitre, on présentera l'approche la plus naturelle qui consiste à considérer le système à trois corps Terre-Lune-navette. Puis, on verra s'il est possible de réaliser un transfert jusqu'à la Lune prenant en compte les perturbations dues au Soleil, en considérant le problème à quatre corps Soleil-Terre-Lune-navette, vu comme deux problèmes à trois corps patchés (les systèmes Soleil-Terre-navette et Terre-Lune-navette).

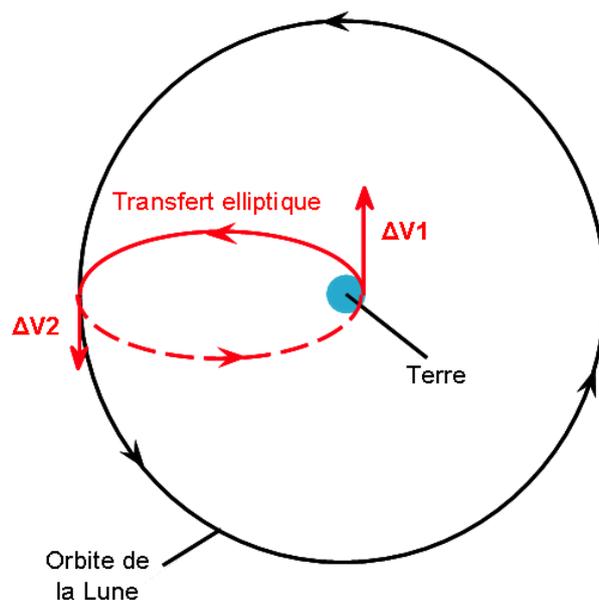


FIGURE 3.1 – Transfert elliptique de la Terre à la Lune basé sur l'étude du problème des deux corps. Ce type de transfert est très coûteux en matière d'énergie. On parle de transfert de Hohmann.

3.2 Calcul d'un transfert Terre-halo

De nombreuses missions ont récemment été envisagées pour se servir des propriétés des trajectoires du problème restreint des trois corps au voisinage des points de libration du système Soleil-Terre. Parmi ces missions, nombre d'entre elles exploitent les orbites périodiques autour des points de Lagrange, telles que les orbites de halo. La mission Genesis en est la parfaite illustration. La navette Genesis a collecté pendant deux ans des échantillons de vents solaires à partir d'une orbite de halo autour du point de Lagrange L_1 Soleil-Terre avant de les renvoyer sur Terre en 2004 pour de plus profondes analyses. Certaines techniques mises en oeuvre pour cette mission ont représenté, à l'époque, de réelles innovations dans le calcul de trajectoires spatiales.

La mission Genesis fut en effet la première mission à être élaborée en utilisant la théorie des systèmes dynamiques moderne. Les travaux d'Howell, Barden et Wilson [26, 27, 6] sur la mission Genesis Discovery en attestent. Dans cette section, en nous inspirant de la mission Genesis, nous présentons un transfert de la Terre à une orbite de halo autour d'un des points de libration du système Soleil-Terre.

3.2.1 Principe

Dans notre étude, nous avons voulu simuler une trajectoire joignant un proche voisinage de la Terre à une orbite de halo située autour du point de Lagrange L_1 du système Soleil-Terre. Pour calculer une telle trajectoire, l'utilisation de la variété stable de l'orbite de halo est pertinente. Par définition des variétés stables, une trajectoire de cette variété stable convergera naturellement vers l'orbite de halo et réalisera donc un transfert entre le voisinage de la Terre et l'orbite périodique. Plus précisément, on utilise donc la variété stable de l'orbite de halo qui se propage dans la région de la Terre. La réalisation d'un transfert Terre-halo est alors rendue possible, et d'autant plus pertinente, du fait que la variété stable d'une orbite de halo peut s'approcher très près de la surface terrestre si l'orbite de halo est de suffisamment grande amplitude.

3.2.2 Simulation numérique

Pour simuler une trajectoire Terre-halo, on calcule dans un premier temps une orbite de halo Σ . On choisit son excursion en z égale à 290000 km pour que la distance d'approche minimale à la Terre de la variété stable de Σ soit de l'ordre de 200 km. L'orbite de halo et sa variété stable sont représentées sur la Figure 3.2(a). La Figure 3.2(b) illustre le passage de la variété stable dans un très proche voisinage de la Terre. Pour calculer numériquement cette orbite de halo, on se sert de l'approximation au troisième ordre fournie par Richardson comme initialisation de la méthode de tir décrite à la section 2.3.3. Ensuite, pour calculer la variété stable de cette orbite périodique, on utilise la matrice de monodromie M présentée en (1.4.3). La matrice de monodromie étant égale à la matrice de transition d'état (résolvante du linéarisé le long de l'orbite de halo) évaluée après une période de l'orbite périodique, on la calcule, à chaque point \bar{x}_0 de Σ par différenciation de la relation :

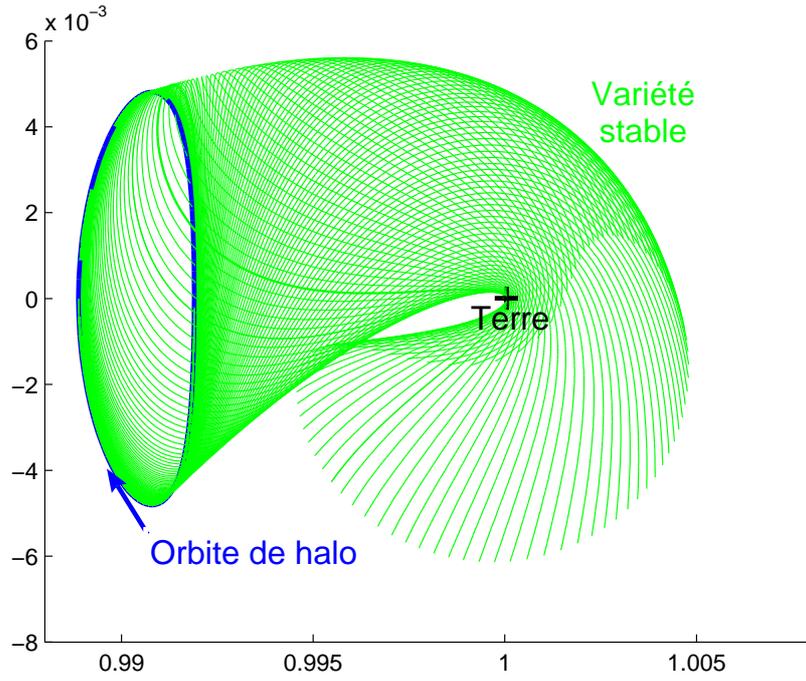
$$M = \frac{\partial \phi(T; \bar{x}_0)}{\partial x_0},$$

ϕ étant le flot du problème non linéarisé. On approxime alors la matrice de monodromie par

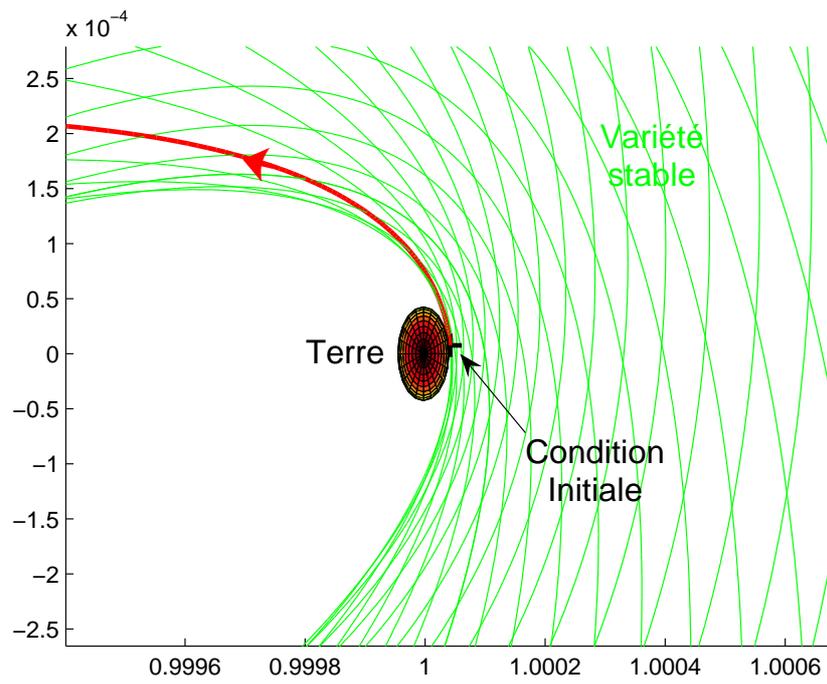
$$M(:, j) \approx \frac{\phi(T, \bar{x}_0 + ke_i) - \phi(T, \bar{x}_0 - ke_i)}{2k},$$

avec $M(:, j)$ la j ème colonne de la matrice de monodromie, k un réel positif vérifiant $k \ll 1$ et e_j le j ème vecteur de la base canonique. Cela permet ensuite d'identifier à chaque point de l'orbite de halo le vecteur propre de la matrice de monodromie associé à la valeur propre réelle inférieure à 1. L'ensemble de ces vecteurs propres stables $\{Y^s(\bar{x}_0), \bar{x}_0 \in \Sigma\}$ permet de définir l'approximation linéaire de la variété stable de l'orbite de halo. Celle-ci est finalement calculée numériquement en intégrant numériquement l'ensemble des conditions initiales de la forme suivante :

$$X^s(\bar{x}_0) = \bar{x}_0 + \epsilon Y^s(\bar{x}_0), \bar{x}_0 \in \Sigma.$$



(a)



(b)

FIGURE 3.2 – (a) Variété stable d’une orbite de halo, dans la région de la Terre. (b) Trajectoire Terre-halo au voisinage de la Terre.

Il semble clair que plus le paramètre ϵ est petit, meilleure est l'approximation au premier ordre de la variété. Dans notre cas, nous situant dans le système Soleil-Terre, nous l'avons pris de l'ordre de 200 km, sur la suggestion de Gómez, Jorba, Masdemont et Simó [22].

Pour réaliser un transfert Terre-halo, on choisit finalement une des trajectoires situées sur la variété stable. On choisit la trajectoire qui s'approche le plus de la Terre. Il suffit alors d'intégrer la condition initiale de l'espace des phases correspondant au point d'approche minimale de la variété pour obtenir une trajectoire qui, se déplaçant sur la variété stable de l'orbite de halo, convergera vers cette dernière. La trajectoire obtenue est représentée sur la Figure 3.3.

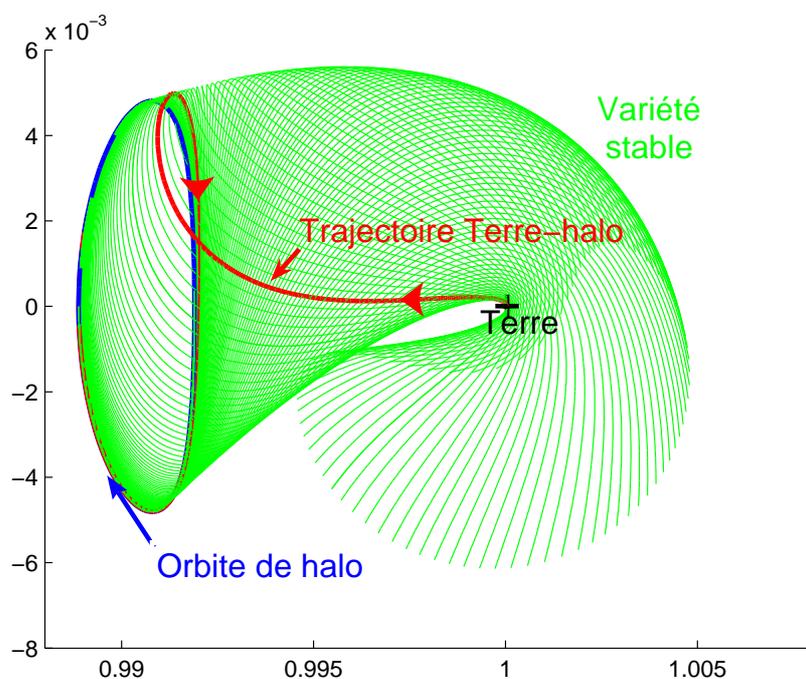


FIGURE 3.3 – Trajectoire réalisant un transfert Terre-halo en utilisant la variété stable de l'orbite de halo.

3.2.3 En pratique

La trajectoire proposée précédemment n'est qu'un exemple parmi tant d'autres de possibles trajectoires Terre-halo. Dans la pratique, les trajectoires mises en oeuvre doivent répondre à certains critères orbitaux. En plus d'une certaine distance à la Terre, on peut par exemple exiger que la trajectoire parte d'une position spécifique au voisinage de la Terre, dans un certain plan, avec une vitesse d'une certaine amplitude. Des efforts supplémentaires doivent donc être fournis pour obtenir une trajectoire optimale répondant aux exigences d'une mission réelle. La trajectoire calculée précédemment est alors le point de départ idéal d'une correction différentielle aboutissant à la trajectoire optimale recherchée.

L'idée de départ d'une telle méthode corrective est la suivante. Etant donné une trajectoire de référence $\bar{X}(t)$ allant de \bar{X}_0 à \bar{X}_1 suivant une dynamique naturelle $\dot{X} = f(X)$, on veut faire

de petits ajustements $\delta\bar{X}_0$ sur la condition initiale \bar{X}_0 pour que la nouvelle trajectoire finisse à l'état final désiré X_d . Pour cela, on étudie la sensibilité de l'état final \bar{X}_1 à de petits changements initiaux $\delta\bar{X}_0$. Ceci met une nouvelle fois en avant la matrice de transition d'état évaluée le long de la trajectoire de référence $\bar{X}(t)$, $\frac{\partial\phi(t_1, t_0, \bar{X}_0)}{\partial\bar{X}_0}$. Cette matrice étant définie, on est alors capable de déterminer les corrections à apporter à la trajectoire de référence pour répondre aux critères d'optimisation fixés.

Dans notre cas, la trajectoire de référence est naturellement la trajectoire Terre-halo de la Figure 3.3. La méthode de correction aboutissant à la trajectoire optimale dépend alors des critères d'optimisation qu'on se fixe. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Mains [37], Barden [6] et d'Howell, Mains, et Barden [25].

3.3 Construction de trajectoires hétéroclines

3.3.1 Définition

Une trajectoire hétérocline est une trajectoire qui joint asymptotiquement deux points d'équilibre distincts. Par extension, on appellera également trajectoire hétérocline une trajectoire joignant asymptotiquement deux orbites périodiques distinctes.

L'intérêt de telles trajectoires réside dans le fait que, comme leur définition l'indique, ce sont des trajectoires naturelles du problème restreint des trois corps, c'est-à-dire gratuites. En les utilisant, on pourrait par exemple transférer une navette ou un satellite depuis une orbite de halo autour de L_2 à une orbite de halo autour de L_1 , et ceci presque gratuitement. Les seules manoeuvres à effectuer se situeraient au niveau du départ de la première orbite périodique et au niveau du raccordement à l'autre orbite, puisque la trajectoire hétérocline ne joint qu'asymptotiquement les orbites périodiques. On détaille par la suite la construction d'une trajectoire qui joint asymptotiquement une orbite de Lyapunov autour de $L_2(\text{ST})$ à une orbite de Lyapunov autour de $L_1(\text{ST})$. On se place donc dans le cas planaire du problème circulaire restreint des trois corps.

3.3.2 Contraintes énergétiques

Pour pouvoir calculer une trajectoire qui joint asymptotiquement une orbite de Lyapunov autour de L_2 à une orbite de Lyapunov autour de L_1 , il faut que les deux orbites de Lyapunov aient la même énergie E car l'énergie est une intégrale première du mouvement. De plus, il faut que l'énergie E soit suffisamment grande pour permettre le voyage de la navette de la région de L_2 à la région de L_1 . Au vu des différents portraits de la région de Hill en fonction de la valeur de l'énergie, ceci signifie qu'il faut une énergie $E > E_2$. Par ailleurs, cette contrainte au niveau de l'énergie des orbites de Lyapunov nécessite d'être capable de calculer numériquement une orbite de Lyapunov d'énergie donnée. Etant donné qu'on a déjà à notre disposition une méthode numérique permettant de construire une orbite de Lyapunov d'amplitude en x donnée et que l'énergie des orbites de Lyapunov varient de manière continue et croissante avec l'amplitude, une méthode numérique du type "point milieu" est tout à fait satisfaisante.

3.3.3 Intersection de variétés

Pour calculer une trajectoire joignant asymptotiquement une orbite de Lyapunov autour de L_2 à une orbite de Lyapunov autour de L_1 , il faut et suffit de trouver l'intersection d'une variété instable de L_2 et d'une variété stable de L_1 . En effet, si une telle intersection existe, elle convergera naturellement vers l'orbite de Lyapunov autour de L_1 si on l'intègre vers les temps croissant (forward) du fait de son appartenance à la variété stable de l'orbite de Lyapunov autour de L_1 , et elle convergera naturellement vers l'orbite de Lyapunov autour de L_2 si on l'intègre vers les temps décroissants (backward) du fait de son appartenance à la variété instable de l'orbite de Lyapunov autour de L_2 . L'existence d'intersection entre variétés n'est a priori pas évidente mais on trouve numériquement qu'elles existent au niveau des surfaces de Poincaré qui s'expriment de la façon suivante dans le cas planaire :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, \dot{x}) \mid y = 0, x < 0, \dot{y}(x, \dot{x}, E) < 0\} \\ U_2 &= \{(y, \dot{y}) \mid x = 1 - \mu, y < 0, \dot{x}(y, \dot{y}, E) > 0\} \\ U_3 &= \{(y, \dot{y}) \mid x = 1 - \mu, y > 0, \dot{x}(y, \dot{y}, E) < 0\} \\ U_4 &= \{(x, \dot{x}) \mid y = 0, x < -1, \dot{y}(x, \dot{x}, E) > 0\} \end{aligned}$$

où $\dot{y}(x, \dot{x}, E)$ (resp. $\dot{x}(y, \dot{y}, E)$) signifie que \dot{y} (resp. \dot{x}) est déduit de l'équation d'énergie planaire

$$E(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) = E.$$

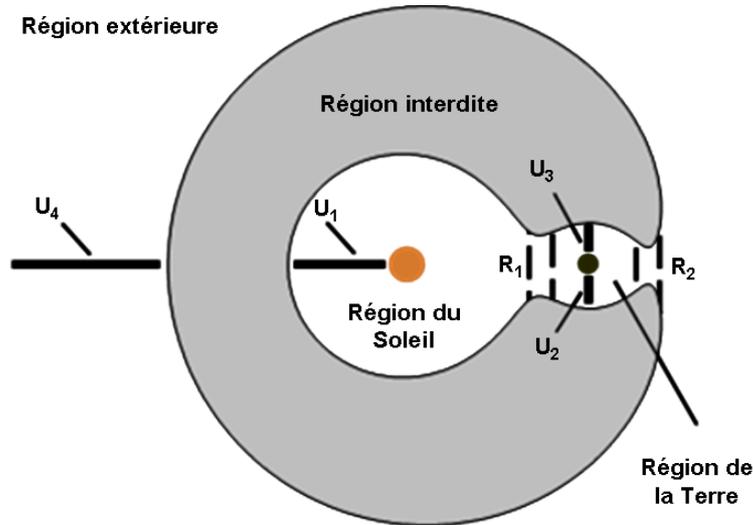


FIGURE 3.4 – Localisation des sections de Poincaré dans le système Soleil-Terre.

Les U_i sont des surfaces stratégiquement placées qui nous permettent d'obtenir des sections du flot dans la surface d'énergie $M(\mu, E)$ (voir [30] Chap. 4.1). Et dans notre cas, ce sont plus particulièrement les sections du flot avec U_3 qui nous intéressent, car c'est à ce niveau-là qu'on va chercher l'intersection des variétés.

Pour calculer le temps nécessaire à une trajectoire d'une variété pour atteindre une des surfaces de Poincaré, ainsi que le point d'intersection de cette trajectoire avec la même surface de Poincaré, une méthode de type Newton permet d'obtenir une précision très satisfaisante.

3.3.4 Calcul numérique de la trajectoire hétérocline

Bien que la surface de Poincaré U_3 soit le lieu le plus approprié pour trouver une intersection entre la variété stable de l'orbite de Lyapunov autour de L_1 et la variété instable de l'orbite de Lyapunov autour de L_2 , on ne l'obtient pas toujours à la première intersection des variétés avec U_3 . On définit $\Gamma_{L_i,j}^{u,E}$ (resp. $\Gamma_{L_i,j}^{s,E}$) la $j^{\text{ième}}$ coupe de Poincaré de la variété instable (resp. stable) de l'orbite de Lyapunov autour de L_i (l'indice E (Earth) informant que la surface de Poincaré considérée se trouve au niveau de la Terre : donc U_2 ou U_3). On cherche donc j et k tels que

$$\Gamma_{L_2,j}^{u,E} \cap \Gamma_{L_1,k}^{s,E} \neq \emptyset$$

On représente les variétés de la région terrestre propagées jusqu'à leur deuxième intersection avec les surfaces de Poincaré U_2 et U_3 sur la Figure 3.5.

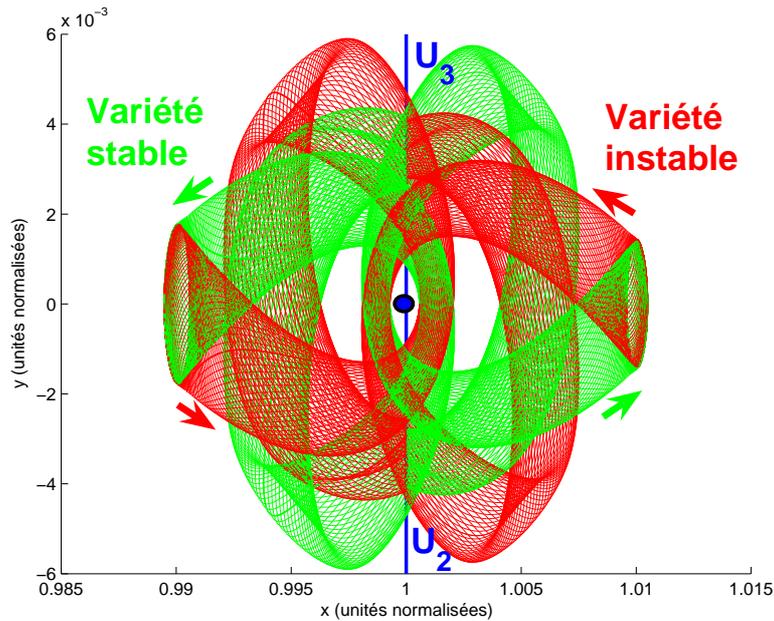


FIGURE 3.5 – Variétés invariantes, dans l'espace des positions, propagées jusqu'à leur deuxième intersection avec les surfaces de Poincaré de la Terre U_2 et U_3 .

La Figure 3.6 montre, quant à elle, les coupes de Poincaré des variétés dans le plan (y, \dot{y}) et permettent de déterminer les intersections entre les différentes variétés.

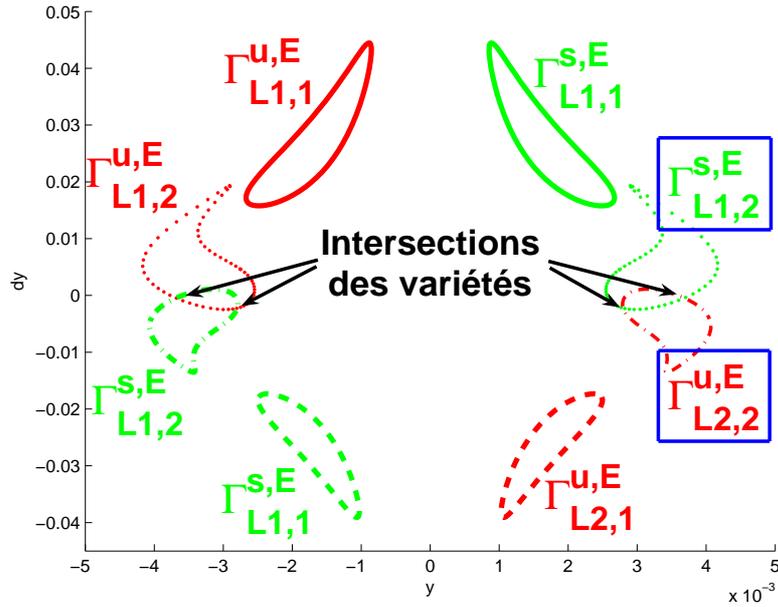


FIGURE 3.6 – Les deux premières coupes de Poincaré U_2 et U_3 des variétés invariantes de la région terrestre.

Dans le plan (y, \dot{y}) , on trouve deux intersections entre $\Gamma_{L2,2}^{u,E}$ et $\Gamma_{L1,2}^{s,E}$. Pour obtenir une trajectoire hétérocline, il suffit alors de propager backward et forward une condition initiale $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$, où

- $x_0 = 1 - \mu$ par définition de U_3 ;
- (y_0, \dot{y}_0) sont les coordonnées d'un des points d'intersection trouvés ;
- \dot{x}_0 se déduit de l'équation d'énergie intégrale : $\dot{x}_0 = -\sqrt{-\dot{y}_0^2 + 2(E + U(x_0, y_0))}$, avec $\dot{x}_0 < 0$ par définition de U_3

L'idée de connections hétéroclines n'est pas nouvelle. Dans les chapitres 3 et 9 de leur livre [30], Koon *et al.* détaillent la construction de trajectoires hétéroclines dans le cas planaire, puis ouvrent la voie à des calculs de trajectoires hétéroclines dans le cas spatial par le calcul de trajectoires à itinéraire prédéfini. Ils y expliquent notamment la nécessité de fixer d'autres paramètres pour permettre l'existence d'intersections entre les variétés invariantes en raison des dimensions des variétés dans le cas spatial. Leurs travaux succèdent à ceux de Mc Gehee [40] qui a travaillé et montré l'existence de connections homoclines, c'est-à-dire de trajectoires qui convergent en temps $\pm\infty$ vers une même orbite périodique, dans le PCR3BP. Ces types de trajectoires sont, de manière incontestable, une parfaite illustration de la pertinence des variétés invariantes dans le design de missions spatiales. Dans notre exemple, il permet de joindre presque gratuitement deux régions de l'espace pourtant distantes de 3 millions de km.

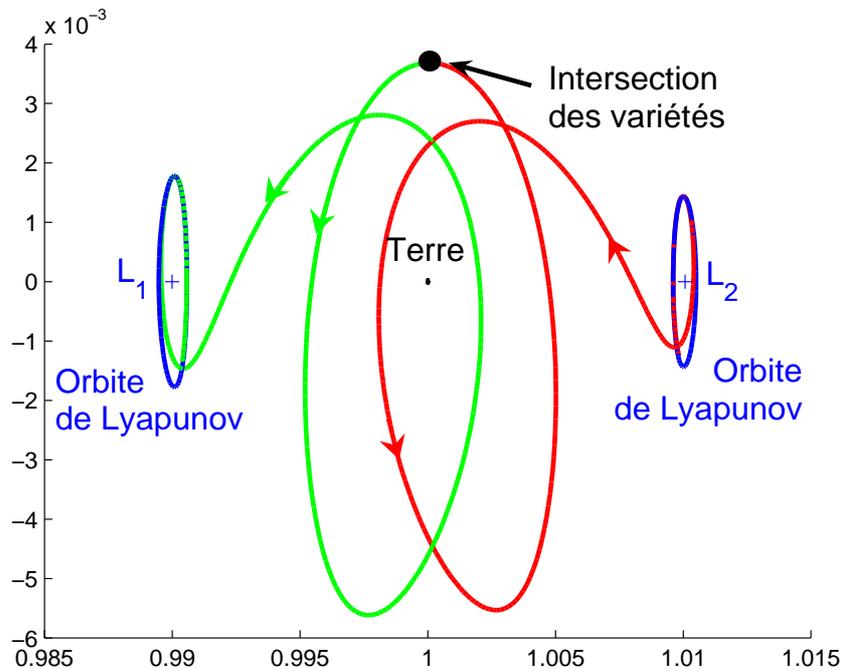


FIGURE 3.7 – Trajectoire hétérocline dans le système Soleil-Terre

Du point de vue de l'implémentation numérique, une excellente précision a été obtenue dans le calcul des coupes de Poincaré et des intersections de variétés. Pour calculer le temps nécessaire aux trajectoires des variétés pour couper les surfaces de Poincaré, une méthode de tir a été implémentée. Etant donné que les trajectoires des variétés qui passent dans un proche voisinage de la Terre s'enroulent fortement autour de cette dernière, il a fallu adapter les initialisations de la méthode. C'est ainsi qu'en cas de divergence de la méthode de tir, on choisissait des initialisations de plus en plus proches de la surface de Poincaré. De même, pour obtenir une grande précision dans le calcul de l'intersection des variétés et ainsi exhiber une véritable orbite de notre système (sans manoeuvre au niveau de la surface de Poincaré), plusieurs rediscrétisations des orbites de Lyapunov (et par conséquent des variétés) ont été effectuées.

3.4 Transfert Terre-Lune dans le système Terre-Lune

Pour envisager le transfert d'une navette depuis une orbite parking de la Terre jusqu'à la Lune sans utiliser un transfert de Hohmann [42], le modèle à trois corps Terre-Lune-navette semble être le parfait candidat. Le problème restreint des trois corps a été largement étudié, avec pour principal résultat l'existence de variétés invariantes à l'intérieur desquelles on a des trajectoires quasi-gratuites. Cependant, la configuration des variétés invariantes dans le système Terre-Lune ne présente pas les avantages qu'ils peuvent présenter dans le système Soleil-Terre. Dans le système Soleil-Terre, la Terre est la plus petite des primaires et les points de Lagrange sont proches d'elle. Du coup, les variétés invariantes des orbites de halo autour de ces points passent dans un voisinage proche de la Terre et permettent un départ d'une orbite parking de la Terre peu coûteux. Au contraire, dans le système Terre-Lune, la Terre se trouve être, cette

fois-ci, la plus grosse des primaires. Les points de Lagrange L_1 et L_2 sont proches de la Lune. Les variétés invariantes de ces points restent éloignées de la Terre. Elles ne permettent donc pas de départ de la Terre aussi peu énergétique. C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles très peu de missions ont jusqu'à présent utilisé les points de Lagrange du système Terre-Lune.

Pour calculer une trajectoire Terre-Lune dans le système Terre-Lune-navette, il faut être capable de calculer le transfert d'une orbite basse de la Terre à une variété invariante. Plusieurs travaux ont été faits à ce sujet. On présente ici la résolution numérique d'un transfert de Lambert (voir [58], Chap. 2).

3.4.1 Le problème de Lambert

Le problème de Lambert est la recherche d'une trajectoire du problème des trois corps entre deux points donnés $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en un temps de vol donné Δt .

Le problème requiert donc sept conditions $(r_1, r_2, \Delta t)$ pour être résolu. Si le temps de vol n'est pas fixé, il y a une infinité de solutions.

Si dans le problème à deux corps, on peut résoudre ce problème de manière analytique, il n'en est rien dans le modèle des trois corps, celui-ci n'étant pas intégrable analytiquement. On va uniquement être capable de résoudre ce problème avec des techniques numériques. On met ici en place une méthode de tir. Les paramètres sur lesquels on joue sont les composantes de la vitesse initiale. On cherche $v_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ tel que la trajectoire issue de la condition initiale $X_0 = (r_1, v_1)$ soit à la position r_2 au temps Δt . La fonction à annuler est donc :

$$G : (v_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)) \mapsto \begin{pmatrix} \phi_1((r_1, v_1), \Delta t) - x_2 \\ \phi_2((r_1, v_1), \Delta t) - y_2 \\ \phi_3((r_1, v_1), \Delta t) - z_2 \end{pmatrix}$$

où $\Phi(X_0, t)$ est le flot de notre système évalué au temps t à partir de la condition initiale X_0 .

On résout ce problème par une méthode de Newton. Soit $v_1^n = ((\dot{x}_1^n, \dot{y}_1^n, \dot{z}_1^n)^n)$ le vecteur des composantes de la vitesse initiale à l'itération n de l'algorithme. La méthode de Newton s'écrit finalement :

$$v_1^{n+1} = v_1^n - DG(v_1^n)^{-1} \cdot G(v_1^n)$$

où

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{z}_1} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{z}_1} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \dot{y}_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \dot{z}_1} \end{pmatrix}$$

3.4.2 Quel point de départ pour la méthode de tir ?

Pour que la méthode de Newton utilisée dans le problème de Lambert converge, il faut une vitesse de départ pour l'algorithme, v_1^0 , suffisamment proche de la solution recherchée.

Dans le système à deux corps Terre-navette, le problème de Lambert est résolu. On sait déterminer de manière analytique les solutions de ce problème. Donc, si r_1 , r_2 et Δt sont données, on est capable de trouver la vitesse initiale $v_{1,g}^0$ qui permet le transfert de la navette entre les positions r_1 et r_2 en un temps Δt .

Or, considérer le système à deux corps Terre-navette n'est rien d'autre que de considérer que la masse de la Lune est nulle dans le problème à trois corps Terre-Lune-navette. La méthode proposée pour avoir la vitesse initiale de notre algorithme dans le problème des trois corps consiste à utiliser la vitesse trouvée dans le problème des deux corps Terre-navette, puis de nous ramener au problème des trois corps Terre-Lune-navette par une méthode de continuation sur la masse de la Lune.

3.4.3 Méthode de continuation.

Le principe de la méthode.

Une introduction aux méthodes numériques de continuation est fournie par Allgower et Georg [4]. Il s'agit de construire une famille de problèmes $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ dépendant d'un paramètre $\alpha \in [0, 1]$, où le problème initial (celui qu'on veut résoudre au final) correspond à \mathcal{P}_1 . On doit s'arranger pour que le problème \mathcal{P}_0 soit plus facile à résoudre que \mathcal{P}_1 .

Supposons avoir résolu numériquement le problème \mathcal{P}_0 , et considérons une subdivision $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. La solution \mathcal{P}_0 peut alors être utilisée comme point de départ de la méthode de tir appliquée au problème \mathcal{P}_{α_1} . Puis, par une procédure inductive finie, la solution du problème \mathcal{P}_{α_i} constitue une condition initiale pour appliquer la méthode de tir au problème $\mathcal{P}_{\alpha_{i+1}}$. Bien entendu, il faut choisir judicieusement la subdivision (α_i) , et éventuellement la raffiner.

Pour faciliter l'intuition, il est important que le paramètre α soit un paramètre naturel du problème. Et mathématiquement, pour pouvoir espérer la convergence de la méthode de passant d'un pas à l'autre, il faut que la chaîne de problèmes dépende continûment du paramètre α .

Validité de la méthode.

La justification de la méthode repose sur le résultat suivant. Voir [11] (Chap. 9) et [56].

Theorem 3.4.1 *Soit B la boule unité de \mathbb{R}^n , et soit $F : B \rightarrow B$ une application de classe \mathcal{C}^2 . Pour $a \in B$ et $\alpha \in [0, 1]$, on pose $p_a(\alpha, x) = \alpha(x - F(x)) + (1 - \alpha)(x - a)$. Supposons que pour chaque point fixe de F , la matrice Jacobienne de l'application $x \mapsto x - F(x)$ est non singulière. Alors pour presque tout point a appartenant à l'intérieur de B , l'ensemble des zéros de p_a consiste en un nombre fini de courbes \mathcal{C}^1 , disjointes et de longueur finie, de la forme :*

1. une courbe fermée de $[0, 1] \times B$;
2. un arc d'extrémités appartenant à $\{1\} \times B$;
3. une courbe joignant $(0, a)$ à $(1, \bar{x})$, où $\bar{x} \in B$ est un point fixe de F (voir figure).

L'algorithme de continuation consiste donc à suivre la courbe de zéros de p_a , en appliquant une méthode de Newton.

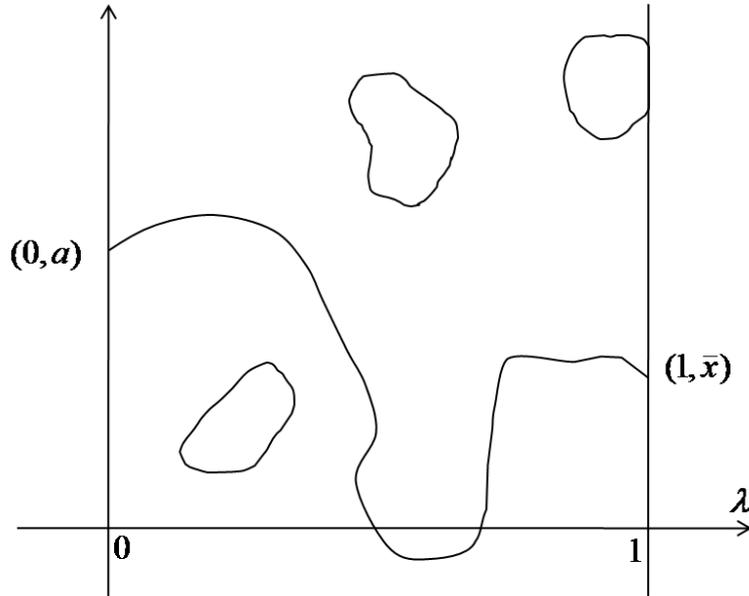


FIGURE 3.8 – Portrait des courbes zéros de p_α .

Description algorithmique.

Considérons la famille de problème \mathcal{P}_α , $\alpha \in [0, 1]$,

$$\dot{y} = f(t, y, \alpha), \quad r(y(a), y(b), \alpha) = 0.$$

Le problème consiste à déterminer la solution $y(\alpha, t)$, pour $\alpha = 1$, en supposant que la solution pour $\alpha = 0$ soit simple à déterminer.

Considérons une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1,$$

et notons $y(\alpha_i, x)$ la solution obtenue pour chaque α_i . Au rang i , la solution $y(\alpha_i, x)$ sert de donnée initiale dans la méthode de Newton pour déterminer au rang $i + 1$ la solution $y(\alpha_{i+1}, x)$ (voir le tableau 4.1).

3.4.4 Mise en oeuvre de la méthode de continuation pour le problème de Lambert

Dans le cadre du problème de Lambert, le paramètre de continuation est M , la masse de la plus petite des primaires, vue par conséquent comme un paramètre non fixé. La méthode de continuation proposée consiste à faire varier M de 0 à M_L , la masse de la Lune, suivant une subdivision prédéfinie (M_i), et à résoudre à chaque itération le problème de Lambert, avec pour vitesse initiale de l'algorithme la vitesse solution trouvée à l'itération précédente.

Le problème (\mathcal{P}_0) est le problème de Lambert dans le 2BP. Ce problème est résolu. On connaît la vitesse initiale solution $v_{1,g}^0$ permettant le transfert de la navette entre les positions r_1 et r_2 en un temps Δt dans le 2BP, c'est-à-dire quand $M = 0$. Cette solution est le point de départ

Donnée initiale	Méthode → de Newton	Résultat numérique
$y_0(t)$	→	$y(\alpha_0, t)$
$y(\alpha_0, t)$	↙	
	→	$y(\alpha_1, t)$
	↙	
\vdots	\vdots	\vdots
	↙	
$y(\alpha_{n-2}, t)$	→	$y(\alpha_{n-1}, t)$
	↙	
$y(\alpha_{n-1}, t)$	→	$y(\alpha_n, t)$

TABLE 3.1 – Description algorithmique d’une méthode de continuation.

de la méthode de continuation qui nous permet finalement de résoudre le problème (\mathcal{P}_1) de Lambert dans le R3BP, correspondant au cas $M = M_L$. La Figure 3.9 illustre les différentes étapes de la résolution d’un problème de Lambert dans le système Terre-Lune. On se donne une position initiale et une position finale dans le voisinage de la Terre et on veut calculer une trajectoire du problème restreint des trois corps Terre-Lune-navette joignant ces deux points. Dans un premier temps, on détermine la vitesse initiale permettant de joindre ces deux points dans le problème à deux corps Terre-navette. La trajectoire résultant de la condition initiale correspondante, intégrée dans le problème à trois corps Terre-Lune-navette, est représentée sur la Figure 3.9. On constate que la trajectoire obtenue n’arrive logiquement pas à la position finale souhaitée, du fait de l’influence de la Lune, ignorée dans le problème des deux corps. On se sert néanmoins de cette condition initiale comme point de départ de notre méthode de continuation. On calcule, pour différentes masses fictives de la Lune, la trajectoire du problème des trois corps correspondant arrivant à la position finale souhaitée. Les trajectoires obtenues pour les différentes masses de la Lune sont également représentées sur la Figure 3.9. Finalement, la mise en oeuvre de la méthode de continuation se conclut par l’obtention de la trajectoire du problème à trois corps Terre-Lune-navette - avec la masse réelle de la Lune - qui joint la position initiale à la position finale.

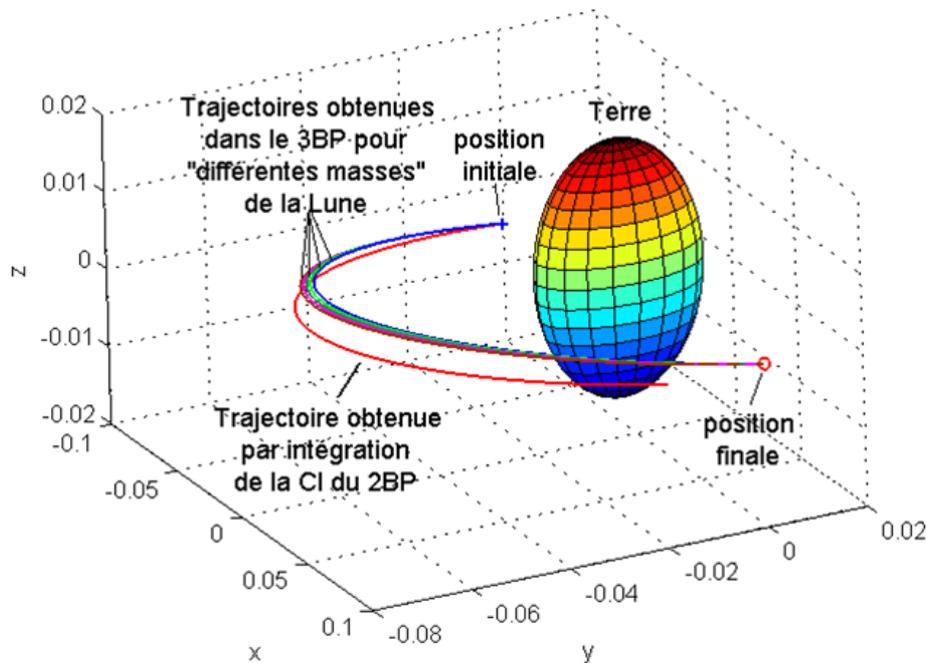


FIGURE 3.9 – Illustration de la résolution d’un problème de Lambert par une méthode de continuation dans le système Terre-Lune-navette.

3.4.5 Capture par la Lune.

Le problème de Lambert résolu, l’application pour calculer une trajectoire capturée est immédiate. Il suffit en effet de viser, depuis une orbite parking de la Terre, la variété stable d’une orbite de halo autour du point L_2 (Terre-Lune) (noté L_2 (TL)) ou L_1 (Terre-Lune) (noté L_1 (TL)). En reprenant les notations précédentes, on prend donc r_1 sur une orbite parking de la Terre et r_2 à l’intérieur de la projection dans l’espace des positions de la variété stable d’une orbite de halo autour de L_1 (TL) ou L_2 (TL). Cependant, pour que dans la phase de capture, la trajectoire reste à l’intérieur de la variété, la vitesse initiale de cette phase, v_f , doit également être à l’intérieur de la projection de la variété dans l’espace des vitesses. De même, dans la phase de capture, la trajectoire doit avoir la même énergie que les trajectoires de la variété et de l’orbite périodique. Or, dans le problème de Lambert, la vitesse finale v_2 n’est pas maîtrisée. Une manoeuvre $\Delta V = \|v_f - v_2\|$ est donc nécessaire au moment où la navette atteint la position r_2 , de sorte que la navette voyage à l’intérieur de la variété stable jusqu’à être capturée par la Lune. Le choix de la vitesse après manoeuvre se fait selon les critères énoncés précédemment mais n’est pas unique. Il peut aboutir à des trajectoires très diverses, dont certaines ne font que transiter. A ce propos, un bon critère assurant qu’en fonction de la vitesse choisie la trajectoire finale opérera bien une, voire plusieurs, rotation(s) autour de la Lune est difficile à trouver. La méthode utilisée ici est une méthode d’essais-erreurs. On pourra néanmoins se référer aux travaux de Koon [30] pour voir une autre manière de résoudre ce problème.

La Figure 3.10 montre une trajectoire partant du voisinage de la Terre puis capturée par la Lune. La trajectoire est découpée en deux portions. Dans un premier temps, on réalise un transfert de Lambert entre le voisinage de la Terre et un point final situé à l’intérieur de la variété stable d’une orbite de halo autour de L_2 (TL). Dans un deuxième temps, une manoeuvre

est effectuée en ce point afin que la trajectoire transite naturellement vers la région d'équilibre à l'intérieur de la variété stable. La trajectoire est finalement capturée par la Lune. Il est à noter qu'en terme de coût (δV), la manoeuvre n'a pas été optimisée. Ceci étant, la trajectoire obtenue est un excellent point de départ à une méthode d'optimisation pour réduire ce coût.

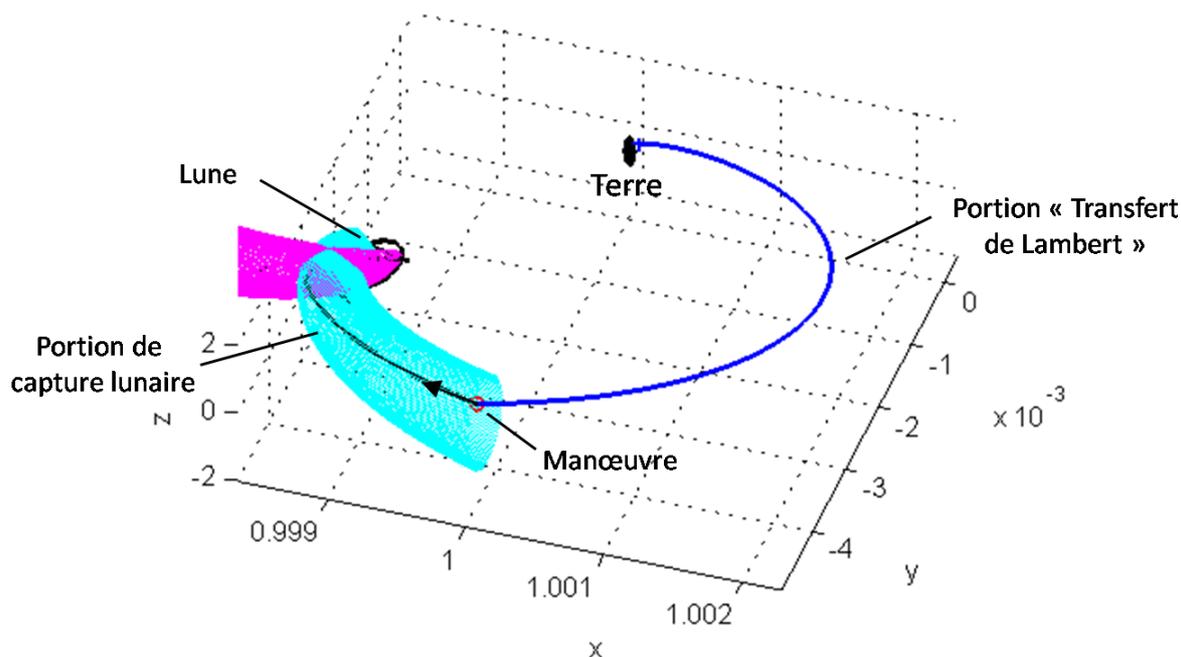


FIGURE 3.10 – Trajectoire Terre-Lune découpées en deux phases. La première phase correspond à un transfert de Lambert entre un point situé dans proche voisinage de la Terre et un point situé à l'intérieur de la variété stable d'une orbite de halo autour de $L_2(TL)$. Après manoeuvre, la seconde phase correspond à un transit de la trajectoire vers la région d'équilibre, puis à une capture balistique autour de la Lune.

3.5 Transfert Terre-Lune dans le système Soleil-Terre-Lune

Pour calculer une trajectoire Terre-Lune à faible coût, n'utilisant pas un traditionnel transfert de Hohmann, une autre approche a été avancée par l'équipe américaine emmenée par Marsden, Ross, Koon et Lo [39]. Elle a notamment été mise en avant pour expliquer le transfert économique de la sonde Hiten vers la Lune, calculée en prenant en compte les perturbations dues au Soleil. Dans leur approche et leurs explications, ils considèrent le système à quatre corps Soleil-Terre-Lune-navette, vu comme deux systèmes à trois corps couplés : les systèmes Soleil-Terre-navette et Terre-Lune-navette.

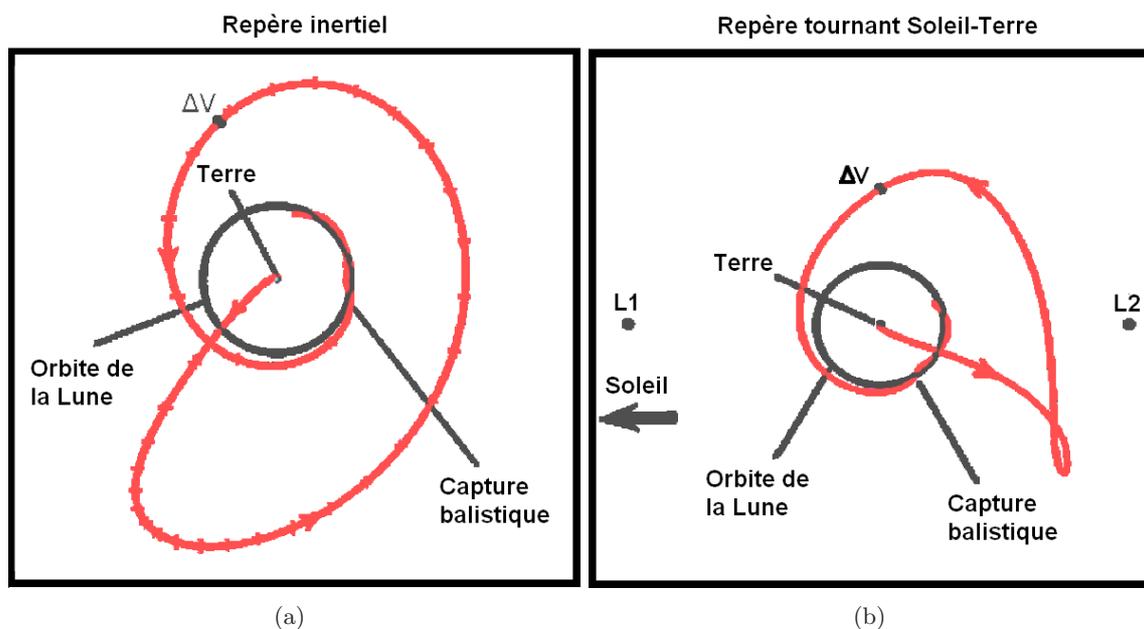


FIGURE 3.11 – Trajectoires Terre-Lune calculée dans le système à 4 corps Soleil-Terre-Lune-navette vu comme deux systèmes à trois corps patchés, représentée dans un repère inertiel en (a), et dans un repère tournant en (b).

3.5.1 Deux systèmes à trois corps couplés

En prenant en compte les perturbations dues au Soleil, on se place dans un problème à quatre corps Soleil-Terre-Lune-navette. Ce type de problème a déjà été étudié mais la structure de l'espace des phases du système des 4 corps n'est encore que très peu comprise jusqu'à maintenant. C'est pourquoi ce problème est ici étudié comme deux problèmes à trois corps couplés. Ceci nous permet d'utiliser les propriétés bien connues des trajectoires autour des points de Lagrange, en particulier les orbites de halo et leurs variétés invariantes.

On suppose que la Terre et la Lune ont des orbites circulaires autour des centres de masse de leur système respectif, et que les deux systèmes sont coplanaires. Dans la réalité, l'excentricité de l'orbite de la Lune est de 0.055, celle de la Terre est de 0.017 et l'orbite de la Lune est inclinée par rapport à celle de la Terre de 5 degrés. Ces valeurs étant petites, le fait de coupler les deux systèmes à 3 corps peut être considéré comme un bon point de départ. C'est un procédé

régulièrement utilisé dans la pratique. Dans un premier temps, on calcule la solution dans un système approché de la réalité. Puis, dans un deuxième temps, on affine le modèle en prenant en compte les excentricités, les inclinaisons, les autres planètes, le vent solaire pour calculer la mission finale.

3.5.2 A la recherche d'une intersection entre les variétés des deux systèmes à trois corps

Le succès de cette approche pour calculer une trajectoire Terre-Lune dépend grandement de l'agencement des 4 corps qui nous intéressent, et surtout de l'agencement des variétés de chaque système. Pour réaliser une telle trajectoire, on recherche une intersection entre les variétés invariantes des deux systèmes à trois corps qu'on a couplés.

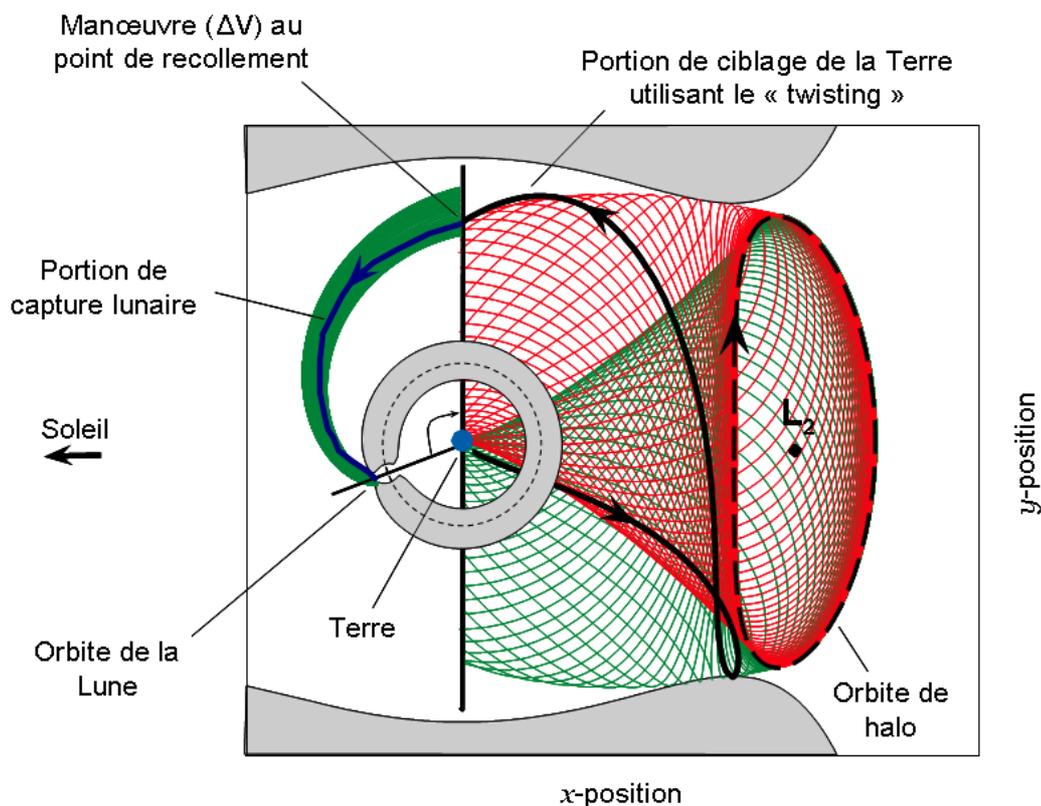


FIGURE 3.12 – Conception d'une trajectoire Terre-Lune dans le problème à quatre corps Soleil-Terre-lune-navette vu comme deux systèmes à trois corps patchés. Le départ de la Terre se fait, dans le système Soleil-Terre, grâce au phénomène de "twisting" des trajectoires à l'extérieur d'une variété instable. La capture balistique par la Lune se fait dans le système Terre-Lune, au travers de la variété stable externe d'une orbite de halo autour de $L_2(TL)$. Le recollement entre les deux portions est fait, avec manoeuvre, au niveau de la surface de Poincaré de la Terre $\{x = 1 - \mu_{ST}\}$.

Plus précisément, on recherche l'intersection entre une variété stable d'une orbite de halo autour du point de Lagrange $L_2(TL)$, avec une variété instable d'une orbite de halo autour de

$L_1(\text{ST})$ ou $L_2(\text{ST})$.

On construit ce transfert en utilisant, dans le repère tournant du système Soleil-Terre, la section de Poincaré Σ de la Terre $\{x = 1 - \mu_{ST}\}$, qui permet de faire le lien entre les deux systèmes en temps raisonnable, μ_{ST} étant la masse réduite du système Soleil-Terre. La stratégie employée est de trouver une condition initiale au niveau de la section de Poincaré Σ telle qu'intégrée en temps croissant (forward), la navette sera naturellement guidée vers la région de $L_2(\text{TL})$ du système Terre-Lune puis capturée balistiquement par la Lune, et qu'intégrée en temps décroissant (backward), la navette embrassera les variétés du système Soleil-Terre autour de $L_2(\text{ST})$ (ou $L_1(\text{ST})$) pour "retourner" sur Terre.

On utilise donc deux propriétés fondamentales des trajectoires autour des points de Lagrange. D'une part, les propriétés relatives aux variétés invariantes qui permettent de construire des trajectoires transitant naturellement d'une région à l'autre de l'espace. D'autre part, le phénomène de "twisting" des orbites dans la région d'équilibre d'un système à trois corps.

3.5.3 Portion de capture balistique lunaire.

En visant la région encerclée par la variété stable d'une orbite de halo autour $L_2(\text{TL})$, dans le système Terre-Lune, on peut calculer une trajectoire qui sera capturée balistiquement par la Lune. Par "trajectoire capturée balistiquement par la Lune", on entend une trajectoire rentrant dans la sphère d'influence de la Lune (soit à moins de 20000 km de la Lune) et qui effectue au moins une rotation autour de la Lune. Pour calculer une telle trajectoire, on calcule l'intersection de la variété stable avec une section de Poincaré, celle de la Terre ici. Tant dans le système Terre-Lune que dans le système Soleil-Terre, cette coupe de Poincaré est une courbe fermée.

Un point à l'intérieur de cette courbe fermée, représentée sur la Figure 3.13 se rapprochera de la Lune, si on l'intègre en temps croissant. Si l'influence du Soleil sur le système à trois corps Terre-Lune-navette se trouve être négligeable, toute navette avec une condition initiale à l'intérieur de la courbe fermée transitera vers la Lune et pourra être capturée balistiquement par la Lune. On pourra éventuellement effectuer une légère manoeuvre afin d'obtenir une capture stable, c'est-à-dire une trajectoire restant dans la région située entre les points L_1 et L_2 . Mieux encore, en jouant sur la condition initiale dans la courbe fermée et en surveillant l'intersection de cette trajectoire avec les variétés de la zone intérieure du système Terre-Lune, on pourra obtenir une capture stable sans aucune manoeuvre, donc sans coût supplémentaire. La Figure 3.14 représente une telle capture stable autour de la Lune.

3.5.4 Portion de départ de la Terre : "twisting" des orbites.

Le phénomène de "twisting" des orbites dans le problème des trois a été précisément énoncé par Koon, Lo, Marsden et Ross dans [39]. Il décrit le mouvement de torsion, ou d'entortillement, de certaines orbites autour des orbites de halo dans la région d'équilibre. Les orbites en question sont des orbites de non transit qui se propagent en dehors des variétés invariantes. Le degré de torsion de ces orbites varie avec leur distance par rapport aux variétés. Plus une orbite commence près d'une variété à l'approche de la région d'équilibre, plus la torsion sera importante. Par un léger changement de condition initiale, par exemple un changement de vitesse à un point fixe, on peut totalement changer la destination finale de l'orbite résultante.

Dans le système Soleil-Terre, comme les variétés des points L_1 et L_2 passent relativement près de la surface terrestre, on peut utiliser cette sensibilité aux conditions initiales pour viser

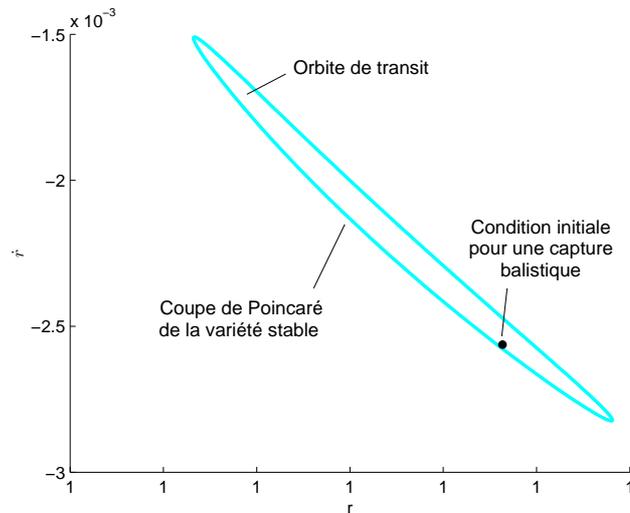


FIGURE 3.13 – Coupe de Poincaré de la variété stable. On choisit une condition initiale dans la courbe fermée obtenue de sorte que la trajectoire induite soit capturée balistiquement par la Lune.

une orbite de parking à 200 km de la Terre depuis la section de Poincaré de la Terre Σ . La Figure 3.15 illustre cette sensibilité aux conditions initiales.

En prenant des conditions initiales de position identique à l'extérieur de la variété instable du point $L_2(ST)$, mais avec des vitesses légèrement différentes, on obtient des pré-images très éloignées au niveau de la section de Poincaré de la Terre. On est ainsi capable de toucher un large éventail de position au niveau de cette section. Pour obtenir une orbite partant d'une orbite de parking à 200 km de la Terre, il suffit de calculer la variété instable d'une orbite de halo autour de $L_2(ST)$, d'énergie légèrement supérieure à E_2 pour permettre des déplacements dans toute la région d'équilibre. On calcule ensuite l'intersection de la variété avec la surface de Poincaré de la Terre. Dans le plan (r, \dot{r}) , on obtient la courbe fermée de la Figure 3.16. En prenant une condition initiale appropriée, légèrement à l'extérieur de cette courbe fermée, on obtient finalement une trajectoire "partant" de l'orbite de parking de la Terre en intégrant cette condition initiale "en arrière". Sur la Figure 3.16, la condition initiale est non seulement choisie à l'extérieur de la variété instable de $L_2(ST)$ mais également à l'intérieur de la variété stable de $L_2(TL)$ (en position) afin d'envisager une possible capture par la Lune. La Figure 3.17 représente finalement une trajectoire partant d'une basse altitude de la Terre puis rejoignant la surface de Poincaré de la Terre en "twistant" autour de la variété instable de $L_2(ST)$.

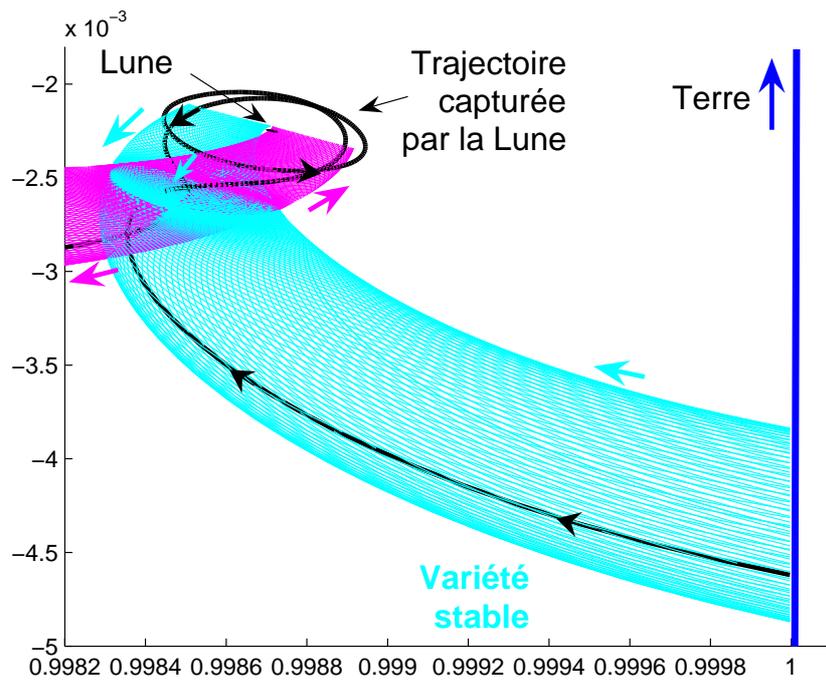


FIGURE 3.14 – Trajectoire capturée par la Lune depuis la section de Poincaré de la Terre. La trajectoire commence à l’intérieur de la variété stable d’une orbite de halo autour de $L_2(TL)$, puis est capturée par la Lune via la variété instable de la région lunaire.

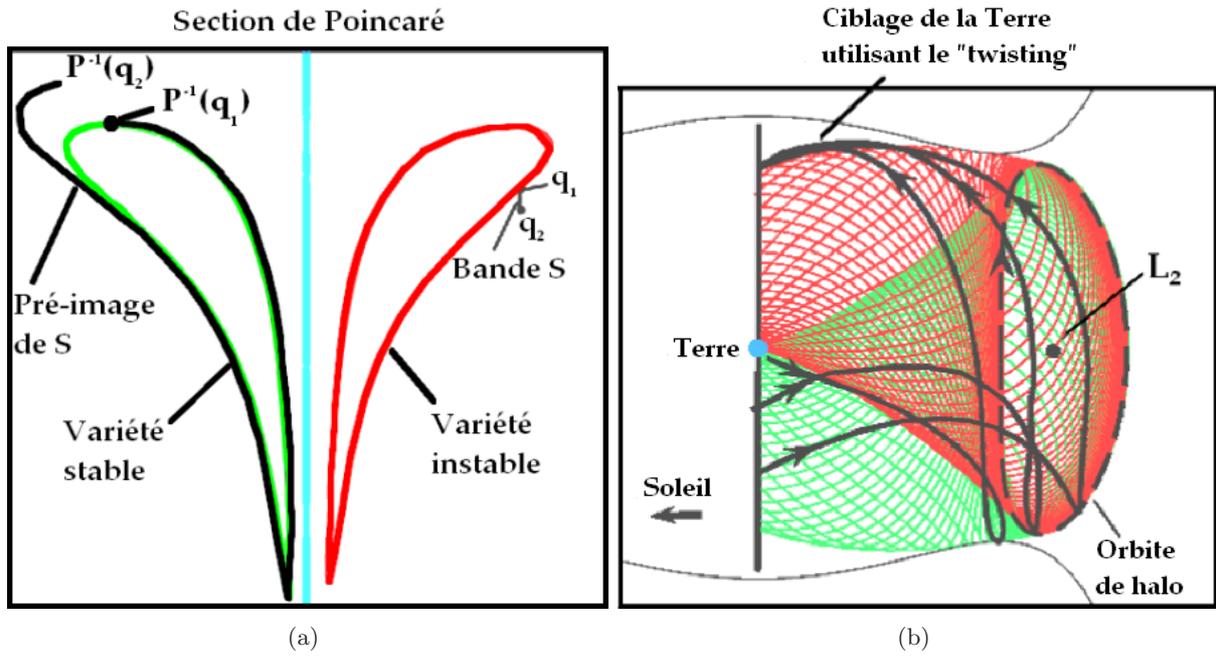


FIGURE 3.15 – (a) La ligne q_1q_2 à l'extérieur de la coupe de la variété instable s'étire en une longue ligne $P^{-1}(q_1)P^{-1}(q_2)$ qui enveloppe la coupe de la variété stable. (b) Avec un changement infinitésimal de vitesse, tout point proche de la section du tube inférieur peut être atteint.

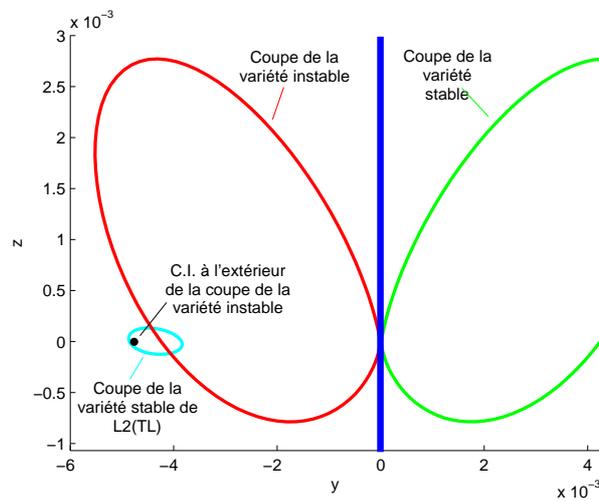


FIGURE 3.16 – Coupe de la variété instable de l'orbite de halo autour de $L_1(ST)$ avec la section de Poincaré de la Terre.

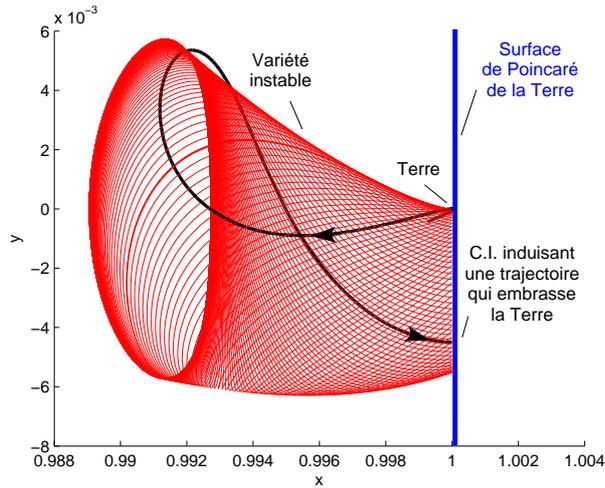


FIGURE 3.17 – Un point choisi à l’extérieur de coupe de la variété instable permet d’aboutir à une trajectoire partant d’une altitude d’environ 200 km de la Terre.

3.5.5 Jonction des deux portions.

Le calcul de la trajectoire Terre-Lune qu’on essaye de construire se découpe en deux portions. Les deux portions ont chacune montré séparément leur pertinence, que ce soit l’utilisation du phénomène de "twisting" des orbites autour de la variété instable de $L_2(ST)$ pour le départ depuis la Terre, ou l’utilisation de la variété stable de $L_2(TL)$ pour la capture de la navette par la Lune. Il faut néanmoins qu’on puisse recouper ces deux portions de manière intelligente et constructive. Dans chaque portion, on a mis en avant une coupe de Poincaré calculée au niveau de la section de Poincaré de la Terre. D’une part, l’intersection de la variété stable de $L_2(TL)$ avec la section de Poincaré. Et d’autre part, les intersections des variétés instables de $L_1(ST)$ et $L_2(ST)$ avec la section de Poincaré. Ce sont ces coupes de Poincaré qu’on considère pour recoller les deux portions. On fait varier l’angle de phase de la Lune et on recherche une intersection entre ces coupes de Poincaré. On trouve des intersections en position. Cependant, a contrario de ce que trouvent Koon, Marsden, Lo et Ross, dans leur article *Low energy transfer to the Moon*[39], on ne peut pas espérer d’intersection raisonnable en terme de vitesse. Même en faisant varier l’angle de phase de la Lune, on n’arrivera jamais à un sens de propagation commun des variétés : le signe de \dot{x} reste constamment opposé d’une variété à l’autre. La Figure 3.18 illustre ce constat numérique pour deux valeurs de l’angle de phase de la Lune. On pourrait envisager un transfert en considérant une intersection en position. Ceci étant, ceci impliquerait un "retournement" complet de la navette, donc un coût très élevé, et on perdrait alors l’utilité d’une telle conception de trajectoire.

Etant donné l’efficacité observée des transferts utilisant les phénomènes de "twisting" et de capture balistique, on peut néanmoins imaginer leur utilité dans le cadre d’autres missions spatiales.

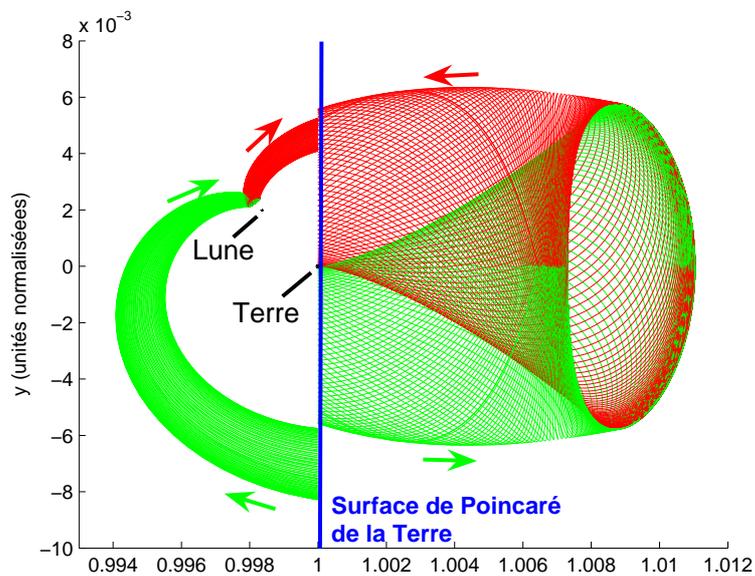


FIGURE 3.18 –
la Lune propagée
de 130 degrés.

de la Terre et de
l'axe de la Lune

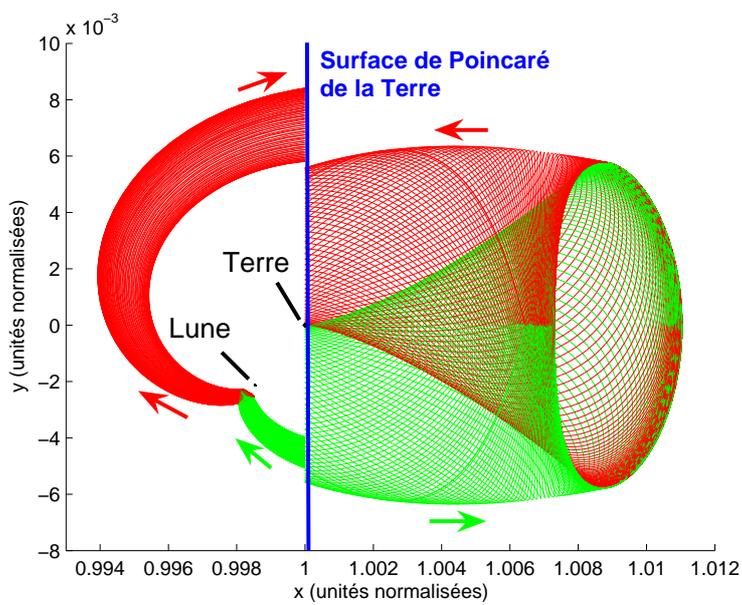


FIGURE 3.19 – Variétés d'orbites de halo autour de $L_2(ST)$ et $L_2(TL)$ autour de la Terre et de la Lune propagées jusqu'à la section de Poincaré de la Terre, avec un angle de phase de la Lune de 235 degrés.

Chapitre 4

Orbites de Lissajous en huit

4.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents l'existence de différents types d'orbites périodiques au voisinage des points de Lagrange, les orbites de Lyapunov et les orbites de halo principalement. On a ainsi pu constater que les orbites de Lyapunov sont assez facile à calculer numériquement, et que le travail de Richardson [49] fournit une approximation au troisième ordre des classiques orbites de halo qui permet de calculer numériquement des familles d'orbites de halo au travers d'une méthode de tir. En plus des orbites de Lyapunov et de halo, il existe d'autres types d'orbites périodiques autour des points de Lagrange dont, en particulier les orbites de Lissajous, précédemment étudiées par Simó *et al.* [53]. Parmi les orbites de Lissajous nous allons plus particulièrement nous intéresser aux orbites de Lissajous qui peuvent être considérées comme les orbites de Lissajous du premier type (les plus "simples"), les orbites de Lissajous en huit, qui sont presque verticales et qui ont une forme de huit. Dans un premier temps, nous verrons comment obtenir une approximation au troisième ordre des orbites de Lissajous en huit en utilisant la méthode de Lindstedt Poincaré, ce qui prouvera par la même occasion leur existence. Ensuite, les propriétés de stabilité des variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit seront étudiées et comparées à celles des orbites de halo. En utilisant les exposants locaux de Lyapunov, on montrera que les variétés invariantes des orbites de Lissajous en "huit" présentent des propriétés de stabilité globales qui les rendent vraiment très intéressantes dans le cadre d'élaboration de mission spatiale. Enfin, pour illustrer l'intérêt de telles propriétés dans le cadre d'une application, nous nous intéresserons à l'accessibilité de la surface lunaire à partir des variétés invariantes d'orbites de Lissajous en huit.

4.2 Approximation au troisième ordre des orbites de Lissajous en huit

4.2.1 Réécriture des équations du mouvement

Pour calculer une approximation au troisième ordre d'une orbite de Lissajous en huit autour d'un point de Lagrange donné, nous récrivons dans un premier temps, les équations du mouvement dans un repère centré au point de Lagrange considéré. L'unité de longueur est également normalisée à la longueur entre le point de Lagrange et la primaire la plus proche. Dans ce

système de coordonnées, dit de Richardson (voir 2.1.2), les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} + \left(\frac{1-\mu}{\gamma} - 1\right) - \frac{1}{\gamma^3} \left[(1-\mu) \frac{x-x_1}{r_1^3} + \mu \frac{x-x_2}{r_2^3} \right] \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{1}{\gamma^3} \left[(1-\mu) \frac{y}{r_1^3} + \mu \frac{y}{r_2^3} \right] \\ \ddot{z} = -\frac{1}{\gamma^3} \left[(1-\mu) \frac{z}{r_1^3} + \mu \frac{z}{r_2^3} \right] \end{cases} \quad (4.1)$$

où x_1 et x_2 sont les abscisses des primaires m_1 et m_2 ;

γ est le rapport de la distance entre le point de Lagrange et la plus proche primaire, avec la distance entre m_1 et m_2 ;

r_1 et r_2 sont respectivement les distances du point (x, y, z) par rapport m_1 et m_2 .

Les termes non linéaires $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ peuvent être développés en série grâce aux polynômes de Legendre, en utilisant la formule

$$\frac{1}{\sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2}} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{Ax + By + Cz}{D\rho}\right)$$

où $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ et $\rho = x^2 + y^2 + z^2$. Voir [14] et [33].

Après calculs, les équations du mouvement autour du point de libration L_i se réécrivent finalement

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)x = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{z} + c_2 z = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\text{où } c_n = \frac{1}{\gamma^{(n+1)}} \left(\mu + \frac{(1-\mu)\gamma^{(n+1)}}{(1-\gamma)^{(n+1)}} \right).$$

4.2.2 Solutions périodiques des équations linéarisées

Avant d'étudier le comportement des solutions du système non linéaire, il est standard de regarder le comportement des solutions du système linéaire. Par conséquent, nous allons d'abord nous intéresser aux équations du mouvement linéarisées. Elles s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)x = 0 \\ \ddot{z} + c_2 z = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

On observe immédiatement que l'équation en z est découplée des équations en x et y , alors que les équations dans le plan (x, y) sont, elles, couplées. La solution de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle selon l'axe des z a clairement deux racines imaginaires pures,

$(\pm i\sqrt{c_2})$, tandis que la solution de l'équation caractéristique associée au mouvement dans le plan (x, y) a deux racines réelles et deux racines imaginaires pures, $(\pm\lambda, \pm i\omega_p)$.

$$\lambda^4 + (2 - c_2)\lambda^2 - (1 + 2c_2)(c_2 - 1) = 0$$

Ainsi, le comportement linéaire autour des points de libration est du type **col** \times **centre** \times **centre**, avec les valeurs propres $(\pm\lambda, \pm i\omega_p, \pm i\omega_v)$ où $\lambda^2 = \frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}$, $\omega_p^2 = -\frac{c_2 - 2 - \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}$ et $\omega_v^2 = c_2$.

Si les conditions initiales sont restreintes aux modes non divergents, alors on obtient les solutions bornées du système linéaire suivantes

$$\begin{cases} x &= -A_x \cos(\omega_p t + \phi) \\ y &= \kappa A_y \sin(\omega_p t + \phi) \\ z &= A_z \cos(\omega_v t + \psi) \end{cases} \quad (4.4)$$

où $\kappa = \frac{\omega_p^2 + 1 + c_2}{2\omega_p} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1 - c_2}$, et A_x , A_y et A_z sont généralement appelées excursion en x , excursion en y et excursion en z .

On peut immédiatement constater que les solutions bornées du système linéaire sont périodiques si les fréquences propres dans le plan et hors plan, ω_p et ω_v , sont telles que leur rapport est rationnel.

Etant donné que quatre valeurs propres du système linéarisé sont imaginaires pures, les résultats classiques d'équivalence locale entre le système non linéaire et le système linéarisé ne s'appliquent pas.

Néanmoins une généralisation du théorème de Lyapunov, due à Moser (voir [45]), montre que, pour une valeur de l'intégrale de Jacobi (liée à l'énergie intégrale, voir [30]) légèrement inférieure à celle des points de Lagrange, les solutions du système non linéaire ont le même comportement qualitatif que les solutions du système linéarisé au voisinage des points de Lagrange. Par conséquent, le théorème de Moser implique que l'on peut également trouver des trajectoires périodiques dans le système non linéaire. Elles sont des perturbations des trajectoires bornées du système linéaire, les termes non linéaires agissant sur les amplitudes et les fréquences. Ce changement de fréquences induit par les non linéarités a été utilisé par Richardson pour calculer une approximation des orbites de halo. Nous allons également l'utiliser pour notre étude afin de calculer une approximation des orbites de Lissajous en huit.

Dans l'expression des solutions bornées du système linéaire, les valeurs des fréquences ω_p et ω_v sont naturellement fixées par les données du système et le point de Lagrange considéré. Mais, comme nous l'avons expliqué précédemment, les valeurs de ces fréquences propres changent pour le système non linéaire. Si les non linéarités induisent des fréquences propres égales, $\omega_p = \omega_v$, alors on obtient des orbites de halo. C'est ce que Richardson utilisa pour calculer une approximation des orbites de halo. De la même manière, si le rapport entre les deux fréquences propres est rationnel mais différent de un, d'autres types de fonctions bornées périodiques peuvent être obtenus, parmi lesquels les orbites de Lissajous en huit.

Intéressons nous à la représentation de l'orbite paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x = A_x \cos(2t + \phi) \\ y = A_y \sin(2t + \phi) \\ z = A_z \cos(t + \psi) \end{cases} \quad (4.5)$$

représentée sur la Figure 4.1. Les équations paramétrées de cette orbite ont exactement la même forme que celles des solutions du système linéarisé, avec notamment $\omega_p = 2$ et $\omega_v = 1$. De plus, la représentation de cette orbite paramétrée a exactement la forme des orbites périodiques que l'on cherche à calculer. Elle a la forme d'une huitre, et aurait la forme d'un huit presque vertical si l'excursion en z était beaucoup plus grande que les excursions en x et y . Tout ceci laisse donc à penser, en suivant les mêmes arguments que Richardson, que si les non linéarités sont telles qu'elles produisent des fréquences propres avec un rapport égal à $\frac{1}{2}$, on pourra obtenir une approximation des orbites de Lissajous en huit. C'est le point de départ du calcul de l'approximation analytique des orbites périodiques verticales autour des points de Lagrange.

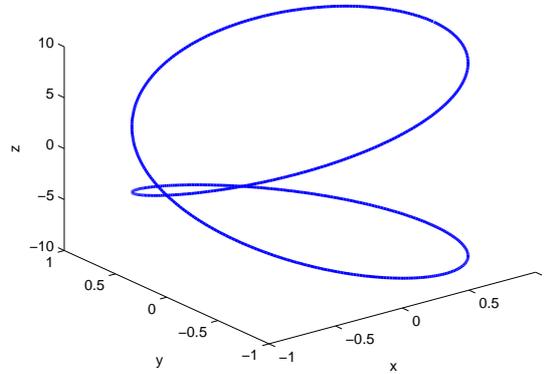


FIGURE 4.1 – Représentation de la fonction paramétrée $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$, $z = \cos(t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

4.2.3 La méthode de Lindstedt Poincaré

Pour calculer des approximations d'orbites périodiques autour des points de libration, on utilise la méthode de Lindstedt-Poincaré. Elle est basée sur la vision que les non linéarités changent les solutions du système linéarisé en changeant leurs fréquences propres. Etant donné que nous voulons obtenir une orbite de Lissajous en huit, on choisit de prendre comme orbite de référence une orbite en forme de huit, avec des fréquences ω_p et ω_v vérifiant $\omega_v = \frac{\omega_p}{2}$, comme le résultat précédent nous incite à le faire. Avec de telles valeurs, les équations linéarisées s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2c_2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0 \\ \ddot{z} + \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 z = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

et - le plus important - admettent comme solutions les orbites périodiques paramétrées suivantes

$$\begin{cases} x &= -A_x \cos(\omega_p t + \phi) \\ y &= \kappa A_y \sin(\omega_p t + \phi) \\ x &= A_z \cos\left(\frac{\omega_p}{2} t + \psi\right) \end{cases} \quad (4.7)$$

qui ont une représentation en forme de huit, diffeomorphe à la solution représentée sur la Figure 4.1.

La première idée, préalable à la mise en oeuvre de la méthode de Lindstedt-Poincaré, consiste ainsi à réécrire les équations du mouvement en forçant la relation $\omega_v = \frac{\omega_p}{2}$.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + (1 + 2c_2)x = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{z} + \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 z = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + \Delta z \end{cases} \quad (4.8)$$

où $\Delta = \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 - \omega_v^2$. De cette manière, on force l'orbite de référence de la méthode de Lindstedt-Poincaré (c'est-à-dire la solution du système linéarisé) à être une orbite en forme de huit.

Ensuite, pour prendre en compte le fait que les non linéarités affectent les fréquences propres, la méthode de Lindstedt-Poincaré consiste à considérer des fréquences, variables, dépendantes du temps de la manière suivante. On définit

$$\tau = \nu t,$$

et la fréquence de correction

$$\nu = 1 + \sum_{n \geq 1} \nu_n, \quad \nu_n < 1.$$

La méthode consiste alors à ajuster itérativement les paramètres ν_n afin d'éliminer les termes séculaires qui peuvent apparaître dans le développement des approximations successives de la solution et qui causent, le cas échéant, une explosion de la solution. Commençons par introduire quelques notations et suppositions.

Tout d'abord, pour tout entier p et tous éléments v et w de \mathbb{R}^p , de coordonnées dans une base canonique de \mathbb{R}^p , $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$, on définit $v \cdot * w \in \mathbb{R}^p$ le vecteur $v \cdot * w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 \\ v_2 w_2 \\ \vdots \\ v_p w_p \end{pmatrix}$.

Avec cette notation, la solution de référence s'écrit

$$q_{ref}(\tau) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_x \\ A_z \end{pmatrix} \cdot * \begin{pmatrix} -\cos(\omega_p \tau + \phi) \\ \kappa \sin(\omega_p \tau + \phi) \\ \sin\left(\frac{\omega_p}{2} \tau + \psi\right) \end{pmatrix} \triangleq A \cdot * q_0.$$

De plus, la solution de référence étant généralement considérée comme le premier terme d'un développement en série, il semble naturel de chercher, dans notre cas, une solution périodique sous la forme d'une série en A

$$\begin{cases} x &= Ax_0(\tau) + A^2x_1(\tau) + A^3x_2(\tau) + \dots \\ y &= Ay_0(\tau) + A^2y_1(\tau) + A^3y_2(\tau) + \dots \\ z &= Az_0(\tau) + A^2z_1(\tau) + A^3z_2(\tau) + \dots \end{cases} \quad (4.9)$$

où A^n définit un polynôme à deux variables de degré n , $A^n = \sum_{\substack{l,p=1 \\ l+p=n}}^n \lambda_{l,p} A_x^l A_z^p$.

Notons que considérer une approximation à l'ordre n de la solution revient alors à tronquer ce développement en série à l'ordre n . Enfin, les ν_n sont supposés avoir le même ordre que A^n .

Nous pouvons dès lors réécrire les équations du mouvement en fonction de ces nouvelles variables. A l'ordre 3, on obtient

$$\begin{cases} \nu^2 \ddot{x} - 2\nu \dot{y} - (1 + 2c_2)x &= \frac{3}{2}(2x^2 - y^2 - z^2) + 2c_4x(2x^2 - 3y^2 - 3z^2) + O(4) \\ \nu^2 \ddot{y} + 2\nu \dot{x} + (c_2 - 1)y &= -3c_3xz - \frac{3}{2}c_4y(4x^2 - y^2 - z^2) + O(4) \\ \nu^2 \ddot{z} + (\frac{\omega_p}{2})^2 z &= -3c_3xz - \frac{3}{2}c_4z(4x^2 - y^2 - z^2) + \Delta z + O(4) \end{cases} \quad (4.10)$$

où $O(4)$ définit les termes d'ordre supérieur ou égal à 4.

Ensuite, en insérant les développements en série (4.9) dans (4.10), on a :

– Au premier ordre en A :

$$\begin{cases} A_x \ddot{x}_0 - 2A_x \dot{y}_0 - (1 + 2c_2)A_x x_0 &= 0 \\ A_x \dot{y}_0 + 2A_x \dot{x}_0 + (c_2 - 1)A_x y_0 &= 0 \\ A_z \ddot{z}_0 + A_z (\frac{\omega_p}{2})^2 z_0 &= 0 \end{cases}$$

– A l'ordre 2 en A :

$$\begin{cases} A^2 \ddot{x}_1 - 2A^2 \dot{y}_1 - (1 + 2c_2)A^2 x_1 &= -2\nu_1 A_x \ddot{x}_0 + 2\nu_1 A_x \dot{y}_0 + \frac{3}{2}(2A_x^2 x_0^2 - A_x^2 y_0^2 - A_z^2 z_0^2) \\ A^2 \dot{y}_1 + 2A^2 \dot{x}_1 + (c_2 - 1)A^2 y_1 &= -2\nu_1 A_x \dot{y}_0 - 2\nu_1 A_x \dot{x}_0 - 3c_3 A_x^2 x_0 y_0 \\ A^2 \ddot{z}_1 + (\frac{\omega_p}{2})^2 A^2 z_1 &= -2\nu_1 A_z \ddot{z}_0 - 3c_3 A_x A_z x_0 z_0 \end{cases}$$

– A l'ordre 3 en A :

$$\begin{cases} A^3 \ddot{x}_2 - 2A^3 \dot{y}_2 - (1 + 2c_2)A^3 x_2 &= -2\nu_1 A^2 \ddot{x}_1 - (\nu_1 + 2\nu_2)A_x \ddot{x}_0 + 2\nu_1 A^2 \dot{y}_1 + 2A^3 \dot{y}_2 + 2\nu_2 A_x \dot{y}_0 \\ A^3 \dot{y}_2 + 2A^3 \dot{x}_2 + (c_2 - 1)A^3 y_2 &= -2\nu_1 A^2 \dot{y}_1 - 2\nu_1 A^2 \dot{x}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_x \dot{y}_2 - 2\nu_2 A_x \dot{x}_0 \\ &\quad - 3c_3(A_x A^2 x_0 y_1 + A_x A^2 y_0 x_1) \\ &\quad - \frac{3}{2}c_4 A_x y_0(4A_x^2 x_0^2 - A_x^2 y_0^2 - A_z^2 z_0^2) \\ A^3 \ddot{z}_2 + (\frac{\omega_p}{2})^2 A^3 z_2 &= -2\nu_1 A^2 \ddot{z}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_z \ddot{z}_0 \\ &\quad - 3c_3(A_x A^2 x_0 z_1 + A_z A^2 x_1 z_0) + \Delta A_z z_0 \end{cases}$$

Désormais, la méthode de Lindstedt Poincaré consiste à ajuster les coefficients ν_n en fonction de A_x et A_z pour éliminer les termes séculaires qui peuvent apparaître dans le développement de la solution. La présence de termes séculaires cause la divergence de la série et une explosion de la solution tronquée, et anéantit par conséquent les chances d'aboutir à une solution bornée.

Au premier ordre en A , nous retrouvons la solution de référence voulue

$$\begin{pmatrix} x_0(\tau) \\ y_0(\tau) \\ z_0(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\omega_p\tau + \phi) \\ \kappa \sin(\omega_p\tau + \phi) \\ \sin(\frac{\omega_p}{2}\tau + \psi) \end{pmatrix}$$

C'est ce à quoi nous nous attendions. Tout avait été fait dans ce but.

A l'ordre 2 en A , les équations dans le plan (x, y) sont découplées de l'équation en z , et il est possible de choisir ν_1 afin d'éliminer les possibles termes séculaires qui peuvent apparaître si les modes du second membre de l'équation différentielle coïncident avec les modes du premier membre. Dans notre cas, les modes de l'équation sans second membre resteront toujours les mêmes, c'est-à-dire $(\pm\lambda, \pm i\omega_p)$. Par conséquent, dans le second membre, les termes de fréquence égale à ω_p doivent être évités. Les termes en x_0^2, y_0^2, z_0^2 et x_0z_0 ne posent pas de problèmes étant donné qu'ils se linéarisent en $1, \cos(2\omega_p\tau), \sin(2\omega_p\tau)$. Par contre, les termes $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \dot{x}_0$ et \dot{y}_0 se linéarisent en $\cos(\omega_p\tau)$ et $\sin(\omega_p\tau)$ et peuvent générer des termes séculaires. Ils doivent donc être éliminés. Etant donné que ν_1 apparaît en facteur commun de ces termes, il suffit de choisir $\nu_1 = 0$ pour éliminer les termes séculaires. Avec ce choix de ν_1 , l'équation différentielle résultante s'écrit

$$\begin{cases} A^2\ddot{x}_1 - 2A^2\dot{y}_1 - (1 + 2c_2)A^2x_1 = \frac{3}{2}(2A_x^2x_0^2 - A_x^2y_0^2 - A_z^2z_0^2) \\ A^2\ddot{y}_1 + 2A^2\dot{x}_1 + (c_2 - 1)A^2y_1 = -3c_3A_x^2x_0y_0 \end{cases}$$

et peut être résolue explicitement.

Ensuite, l'étape suivante de la méthode consiste à remplacer les expressions de x_1, y_1 obtenues dans les équations du (x, y) au troisième ordre, et à choisir le paramètre ν_2 qui éliminera les possibles termes séculaires. Et ainsi de suite, le procédé étant itératif. La mise en place et les calculs sont relativement simples mais trop longs pour être reportés ici (voir l'appendice).

Tous les termes séculaires ne peuvent être éliminés par le choix des coefficients ν_i . Il est nécessaire de spécifier des contraintes au niveau des amplitudes et des angles de phase pour éliminer les termes séculaires qui apparaissent dans l'équation du troisième ordre en z . La contrainte au niveau des amplitudes est la relation

$$l_1A_x^2 + l_2A_z^2 + \Delta = 0,$$

et la contrainte au niveau des angles de phase est la relation

$$\Psi = \phi + \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3.$$

Sous ces différentes contraintes, on arrive finalement à l'approximation au troisième ordre des

orbites de Lissajous en huit suivante :

$$\begin{cases} x &= a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos(\tau_1) + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos(2\tau_1) + (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_xA_z^2) \cos(3\tau_1), \\ y &= kA_x \sin(\tau_1) + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin(2\tau_1) + (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_xA_z^2) \sin(3\tau_1), \\ z &= \delta_n A_z \cos(\tau_2) + \delta_n d_{21} A_x A_z (\cos(2\tau_2) - 3) + \delta_n (d_{32} A_z A_x^2 - d_{31} A_z^3) \cos(3\tau_2) \end{cases} \quad (4.11)$$

où $\tau_1 = \omega_p \tau + \phi$, $\tau_2 = \frac{\omega_p}{2} \tau + \psi$, et $\delta_n = 2 - n$, n désignant la classe de l'orbite, c'est-à-dire essentiellement son sens de rotation ($n = 1$ pour une orbite de première classe et $n = 3$ pour une orbite de seconde classe).

Les formules définissant les coefficients $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $d_{i,j}$ sont les mêmes que celles obtenues par Richardson dans [49] pour déterminer une approximation au troisième ordre des orbites de halo. Les coefficients et une description plus détaillée de la procédure sont donnés en appendice.

4.3 Variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit

4.3.1 Calcul numérique de familles d'orbites de Lissajous en huit

Précision de l'approximation

Dans la section 4.2.3, une approximation au troisième ordre des orbites de Lissajous en huit a été calculée analytiquement. Dans cette section, nous allons voir comment calculer numériquement une famille d'orbites de Lissajous en huit, paramétrée par leur excursion en z , A_z . L'approximation au troisième ordre de ces orbites pourrait être utilisée comme condition initiale d'une méthode de type Newton pour calculer numériquement cette famille d'orbites périodiques. Mais malheureusement, elle n'est pas assez précise pour permettre à la méthode numérique de converger, notamment pour les orbites de large excursion en z . Une solution serait de dériver l'approximation à des ordres plus élevés afin de gagner en précision, avec l'espoir que cela suffira pour que la méthode de Newton converge. Néanmoins, ce n'est pas nécessaire. A la place, nous proposons, dans un premier temps, de ne calculer numériquement qu'une seule orbite de Lissajous en huit d'excursion en z suffisamment petite pour que l'approximation au troisième ordre soit très précise. Et ensuite, dans un deuxième temps, à partir de cette première orbite de Lissajous en huit, nous proposons d'utiliser une méthode de continuation paramétrée par l'excursion en z de l'orbite, A_z , afin de générer toute une famille d'orbites de Lissajous en huit. La procédure est détaillée ci-après.

La méthode de continuation

Dans un premier temps, on calcule une première orbite de Lissajous en huit, d'excursion en z suffisamment petite pour que l'approximation au troisième ordre calculée dans la section 4.2.3 soit précise, et qu'une méthode de tir converge avec cette approximation pour condition initiale. La méthode de tir est la même que celle utilisée pour le calcul des orbites de halo (voir la section 2.3.3) et c'est également cette méthode de tir qui est utilisée à chaque itération de la méthode de continuation dont voici la description.

Soit A_z l'excursion en z de l'orbite de Lissajous qu'on veut calculer, et X_0 la condition initiale correspondante à déterminer. Si A_{z0} est l'excursion en z de la première orbite de Lissajous en huit

calculée grâce à l'approximation au troisième ordre, la méthode de continuation consiste à faire varier l'excursion en z de A_{z_0} à A_z , selon une subdivision appropriée, et résoudre à chaque itération la méthode de Newton initialisée avec la condition initiale au pas précédent de la méthode.

Plus précisément, soit A_z^n la n -ième excursion en z de la subdivision. Supposons que chaque orbite de Lissajous en huit a déjà été calculée pour A_z^p , $p \in 1, \dots, n$, la condition initiale résultant étant notée X_0^p . Afin de calculer l'orbite de Lissajous en huit d'excursion en z , A_z^{n+1} , la méthode de continuation consiste à se servir de la condition initiale X_0^n comme point de départ de la méthode de Newton. Si la subdivision est suffisamment bien choisie, alors la méthode de Newton converge vers un point qui est alors choisi comme condition initiale X_0^{n+1} . Ce dernier est alors utilisé pour calculer l'orbite de Lissajous d'excursion en z , A_z^{n+1} , et la procédure continue par itération, jusqu'à ce que l'orbite de Lissajous en huit d'excursion en z , A_z , soit calculée. Le tableau 4.1 schématise la procédure de continuation dans ce cas précis.

Information initiale	Méthode → de Newton	Résultats numériques
A_z^0, X_0^0	→	X_0^1
A_z^1, X_0^1	↙	X_0^2
\vdots	\vdots	\vdots
A_z^{n-1}, X_0^{n-1}	↙	X_0^n
A_z, X_0^n	→	X_0

TABLE 4.1 – Algorithme de la méthode de continuation.

Une orbite de Lissajous en huit autour du point de Lagrange L_1 dans le système Terre-Lune est représentée sur la Figure 4.2 dans l'espace des positions et des vitesses. La Figure 4.3 représente les projections d'une famille d'orbites de Lissajous en huit sur les plans (x, y) , (y, z) et (x, z) calculées en utilisant la méthode de continuation.

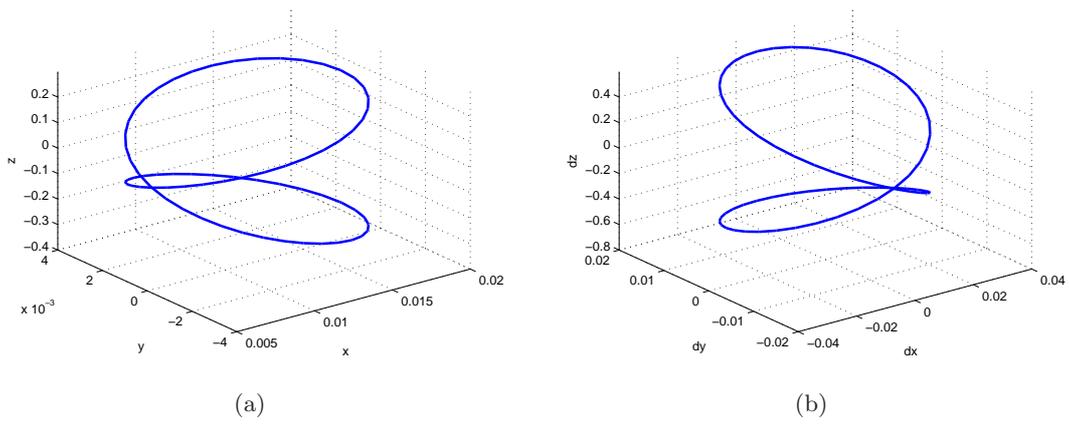


FIGURE 4.2 – (a) Orbite de Lissajous en huit autour du point L_1 Terre-Lune dans l'espace des positions. (b) Orbite de Lissajous en huit autour du point L_1 Terre-Lune dans l'espace des vitesses.

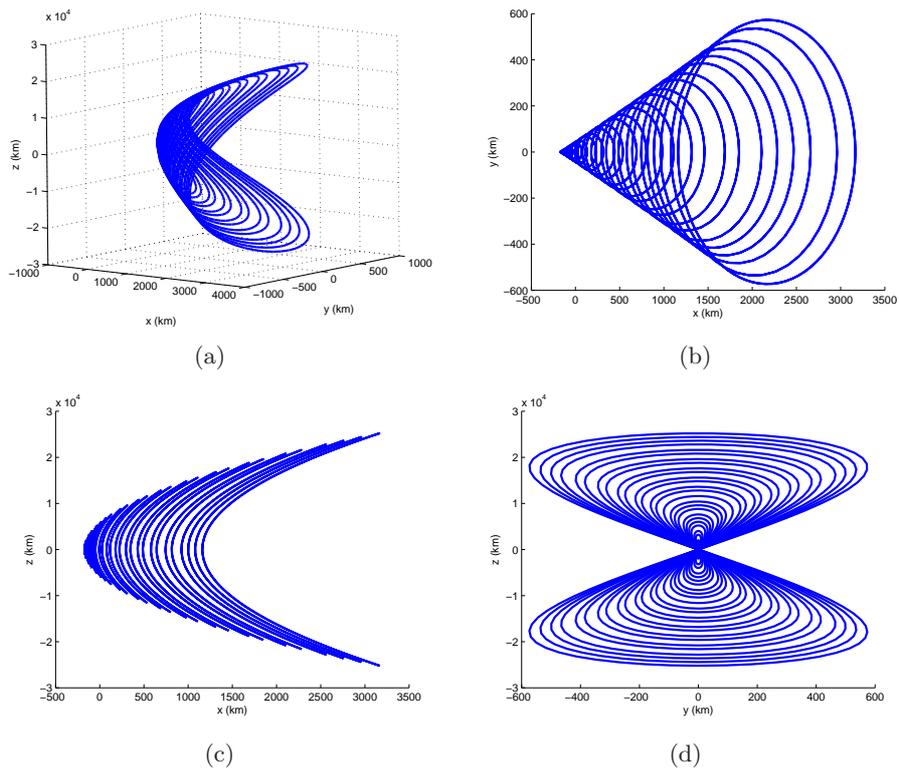


FIGURE 4.3 – Famille d'orbites de Lissajous en huit projetées sur les plans (x, y) , (y, z) et (x, z) .

4.3.2 Stabilité des variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit

Stabilité empirique

L'intérêt des orbites de Lissajous en huit réside essentiellement sur deux propriétés présentées par leurs variétés invariantes. Pour les calculer numériquement, on utilise la même méthode que pour calculer les variétés invariantes des orbites de halo ou de Lyapunov, basée sur le calcul des vecteurs propres stables et instables des matrices de monodromie (voir section 2.4.3). La figure 4.4 représente les variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit et d'une orbite de halo situées autour de $L_1(TL)$, intégrées en temps long.

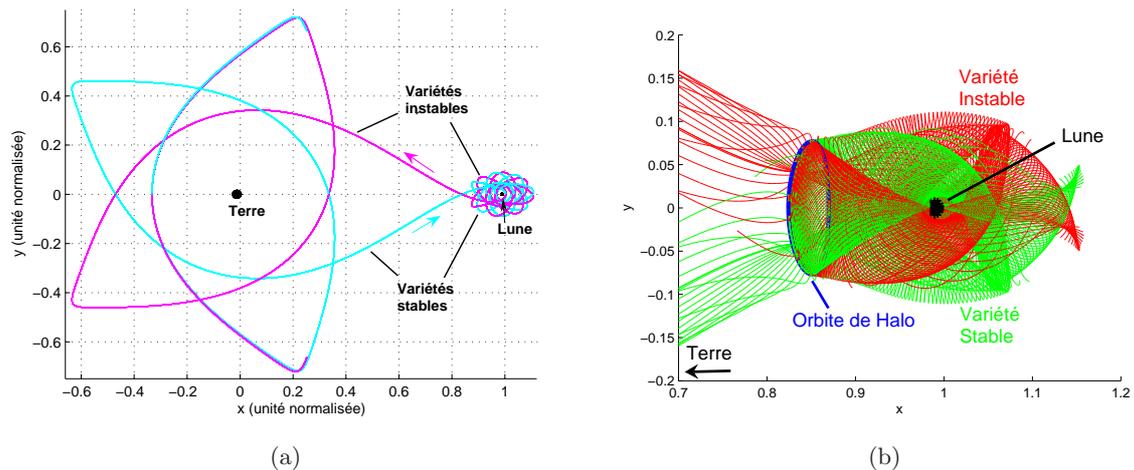
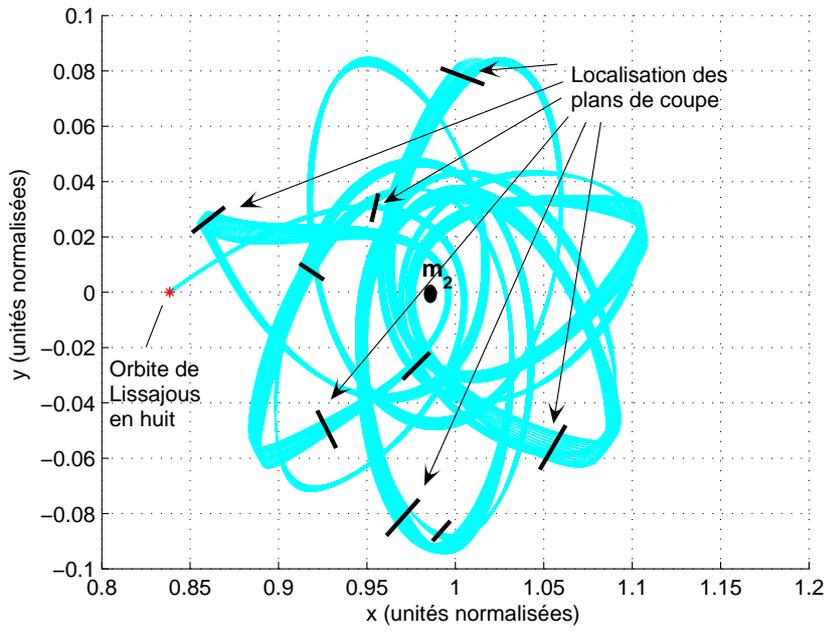


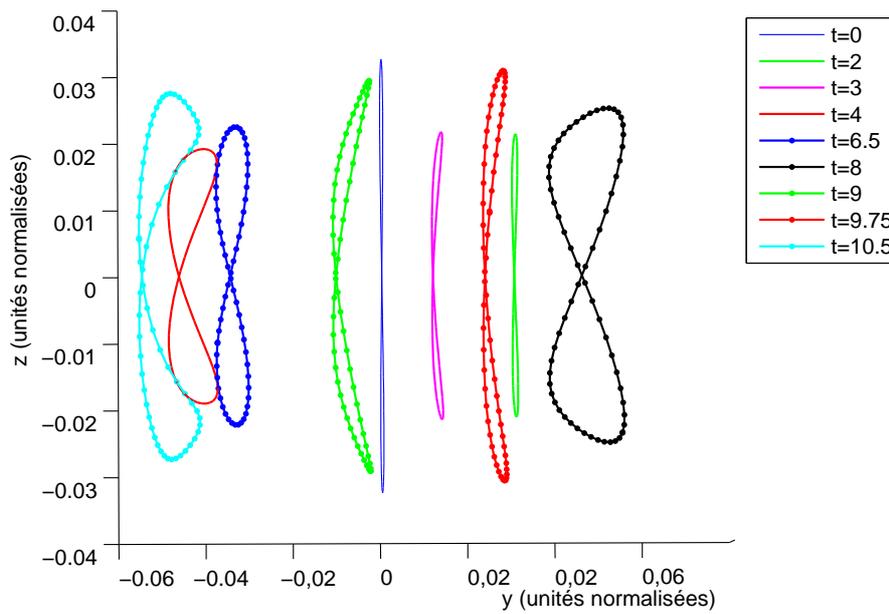
FIGURE 4.4 – (a) Variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit dans le système Terre-Lune. (b) Variétés invariantes d'une orbite de halo dans le système Terre-Lune (au voisinage de la Lune).

Une première propriété importante qu'on observe sur les simulations numériques est que les variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit semblent garder la même structure, et ceci même temps long. Cette propriété globale qui est observée numériquement est également illustrée sur la Figure 4.5 où différentes coupes des variétés invariantes sont représentées.

Cette propriété est particulièrement intéressante quand on garde à l'esprit que ces variétés invariantes peuvent être utilisées dans le design de trajectoires spatiales. Notons également que cette propriété de stabilité n'est pas présentée par les orbites de halo. En effet, les variétés invariantes des classiques orbites de halo ont l'aspect d'un tube régulier au voisinage des orbites de halo mais cet aspect régulier ne persiste pas quand on s'éloigne de l'orbite de halo ou après un long temps d'intégration; en particulier, ces tubes se comportent de manière totalement chaotique après un certain temps comme le montre la Figure 4.4. Au contraire, dans le cas des orbites de Lissajous en huit, l'aspect régulier de leurs variétés invariantes est conservé même après un très long temps d'intégration. Par conséquent, cette propriété de stabilité globale se trouve être très intéressante pour le design de mission, étant donné que cela permet de prévoir le comportement des trajectoires qui se propagent sur et à l'intérieur de ces variétés invariantes pour un très long temps de transport. Dans la section suivante, nous étudions plus en détails ces propriétés de stabilité des variétés invariantes des orbites de halo et de Lissajous en huit, en



(a)



(b)

FIGURE 4.5 – (a) Variétés invariantes d’une orbite de Lissajous en huit avec la localisation des différents plans de coupes représentés en (b). (b) Images de l’orbite de Lissajous en huit après différents temps de propagation.

utilisant le calcul de leurs exposants de Lyapunov.

Exposants Locaux de Lyapunov

Le concept d'exposants de Lyapunov a été introduit par Lyapunov dans [36]. Plus tard, Abarbanel [1] a défini et calculé les exposants locaux de Lyapunov dans plusieurs types de mouvement en utilisant le théorème d'Osedelec [46]. Wolf [57] a présenté des algorithmes permettant d'estimer les exposants de Lyapunov à partir de séries temporelles expérimentales. Anderson [3] a ensuite appliqué une technique de stabilité basé sur les exposants locaux de Lyapunov pour le calcul de manoeuvre et de navigation dans le problème restreint des trois corps.

Les exposants de Lyapunov mesurent la convergence ou la divergence exponentielle de trajectoires voisines dans un système dynamique. Ils caractérisent un système dynamique entier, et sont utilisés pour révéler comment des perturbations infinitésimales se comportent après une longue période. Ainsi, les exposants de Lyapunov mesurent le degré de stabilité d'un système dynamique. Des exposants de Lyapunov positifs indiquent que des trajectoires voisines divergent tandis que des exposants Lyapunov négatifs caractérisent un système stable. Plus précisément, des exposants locaux de Lyapunov sont utilisés pour déterminer le comportement de trajectoires voisines aussi, mais sur un temps fini. Ils donnent une indication des effets que des perturbations ou des manoeuvres auront sur les trajectoires sur un temps spécifié. De fait, ils peuvent être utilisés pour caractériser la stabilité de trajectoires particulières d'un système dynamique donné. Dans le cas du problème restreint des trois corps, qui est connu pour être chaotique, des exposants locaux de Lyapunov négatifs ne peuvent être espérés. Ceci étant, il semble tout de même intéressant d'utiliser les exposants locaux de Lyapunov dans notre étude, pour mesurer la stabilité des orbites de Lissajous en huit et de leurs variétés invariantes, et surtout de les comparer avec la stabilité des classiques orbites de halo et de leurs variétés.

Rappelons la manière de calculer les exposants locaux de Lyapunov. Soit

$$\dot{x} = f(x, t)$$

les équations du mouvement et $x(\cdot)$ une trajectoire de référence, supposée être définie sur $[0, +\infty)$. Soit $t \geq 0$. Considérons un terme de perturbation $\delta x(t)$; la solution des équations linéarisées autour de $x(\cdot)$, partant de t , est donnée par

$$\delta x(\cdot) = \Phi(\cdot, t)\delta x(t)$$

où $\Phi(\cdot, t)$ est la matrice de transition d'état. Pour $\Delta > 0$, l'exposant local de Lyapunov (Local Lyapunov Exponent, noté LLE) $\lambda(t, \Delta)$ est défini par

$$\lambda(t, \Delta) = \frac{1}{\Delta} \ln \left(\text{maximal eigenvalue of } \sqrt{\Phi(t + \Delta, t)\Phi^T(t + \Delta, t)} \right). \quad (4.12)$$

Notons que si Δ tend vers $+\infty$, on retrouve l'exposant de Lyapunov usuel. Le paramètre Δ donne la durée positive pendant laquelle l'effet de perturbation est testée. En d'autres termes, le LLE $\lambda(t, \Delta)$ fournit une indication sur l'effet qu'aurait une perturbation au temps t après une durée Δ .

Quand Δ est grand, les vecteurs propres de la matrice $\sqrt{\Phi(t + \Delta, t)\Phi^T(t + \Delta, t)}$ s'alignent le long de l'espace propre associé à la plus grande valeur propre. Une procédure de réduction de

type Gram Schmidt peut être utilisée pour le calcul des exposants de Lyapunov afin d'identifier l'ensemble des éléments propres. Ceci étant, vu que nous sommes seulement intéressés par la plus grande valeur propre de $\sqrt{\Phi(t + \Delta, t)\Phi^T(t + \Delta, t)}$, cette procédure n'est pas nécessaire.

Pour ce qui est des unités, étant donné que les exposants de Lyapunov mesurent le taux avec lequel un système crée ou perd de l'information, les exposants sont généralement exprimés en information/s.

Dans notre étude, les exposants locaux de Lyapunov ont été calculés numériquement à 0.1 jour d'intervalle de temps sur les trajectoires sélectionnées, avec $\Delta = 1$ jour (voir Figure 4.6). Notons que des résultats similaires sont obtenus pour d'autres valeurs de Δ (par exemple, $\Delta = 20$ jours) et ne sont donc pas reportés ici.

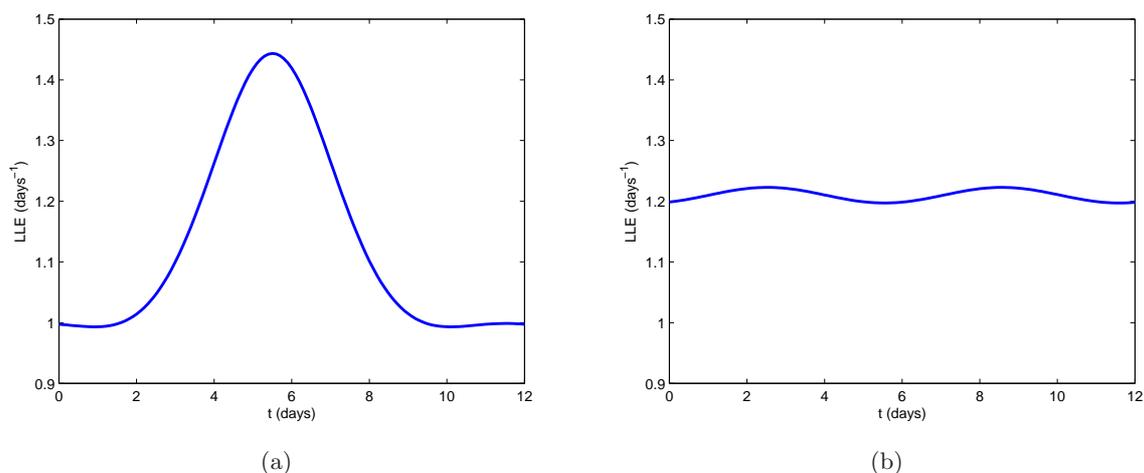


FIGURE 4.6 – (a) Exposant local de Lyapunov d'une orbite de halo. (b) Exposant local de Lyapunov d'une orbite de Lissajous en huit.

Sur la Figure 4.6, les exposants locaux de Lyapunov (Local Lyapunov Exponents, LLE) sont calculés le long d'une orbite de halo et d'une orbite de Lissajous en huit d'énergie similaire. La première observation que l'on peut faire est que dans les deux cas, les LLE sont positifs. Comme nous l'avons dit précédemment, cela vient du caractère chaotique du système entier. Cela signifie que dans les deux cas, les trajectoires voisines de l'orbite périodique divergent après une certaine période. Néanmoins, si cela est possible, il serait intéressant d'établir autour de quelle orbite périodique les trajectoires divergent le plus vite. Malheureusement, on peut difficilement répondre à cette question. D'un côté, la valeur maximale du LLE de l'orbite de halo est plus grande que les valeurs prise par le LLE de l'orbite de Lissajous en huit, qui reste presque constant. Mais d'un autre côté, les valeurs minimale et maximale du LLE de l'orbite de halo encadre le LLE de l'orbite de Lissajous en huit, et les valeurs moyennes des LLE des deux orbites sont quasiment identiques.

Ceci peut être expliqué par le fait suivant : plus une trajectoire du système est proche d'une des primaires (la Lune dans ce cas), plus son LLE sera grand. Etant donné que l'orbite de Lissajous en huit est presque verticale, sa distance aux primaires, et à la Lune notamment,

reste presque constante durant toute sa période. Par conséquent, son LLE reste lui aussi quasi constant. Au contraire, pour une énergie similaire, l'excursion en x de l'orbite de halo est importante (plusieurs milliers de kilomètres ici) et fait que certains points de l'orbite sont plus proches de la Lune. Par conséquent, son LLE varie d'une valeur minimale correspondant au point de l'orbite le plus éloigné de la Lune, à une valeur maximale correspondant au point de l'orbite le plus proche de la Lune. Et comme l'orbite de halo se rapproche davantage de la Lune que l'orbite de Lissajous, la valeur maximale du LLE de l'orbite de halo est logiquement plus élevée que celle de l'orbite de Lissajous en huit. Finalement, les propriétés de stabilité de ces orbites périodiques sont liées à leur situation géographique. Leurs spécificités font que la représentation de leur LLE sont différentes, mais leur situation géographique autour du même point de Lagrange fait qu'aucune est significativement plus stable que l'autre. La situation est différente pour leurs variétés invariantes.

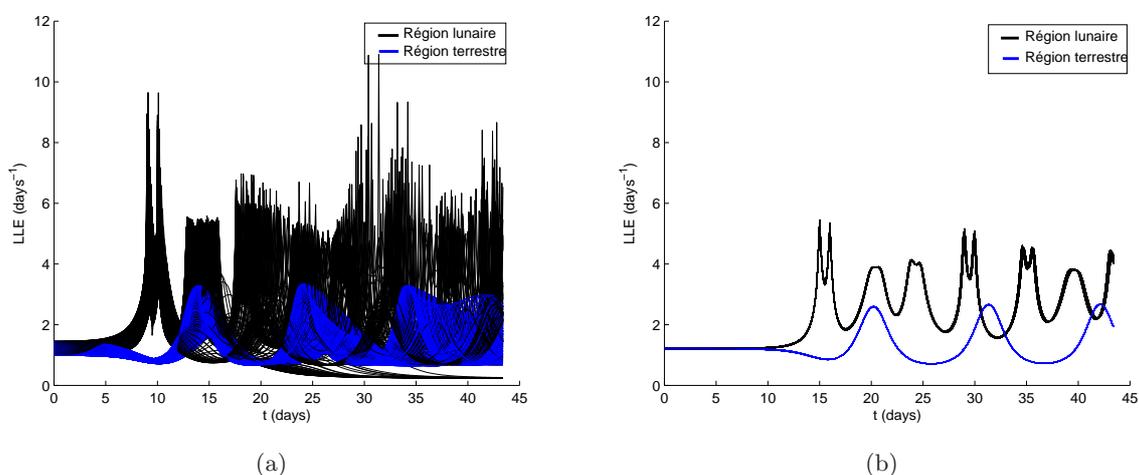


FIGURE 4.7 – (a) Exposant local de Lyapunov des variétés invariantes d'une orbite de halo. (b) Exposant local de Lyapunov des variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit.

Sur la Figure 4.7, nous calculons numériquement les exposants locaux de Lyapunov le long des variétés invariantes des orbites de halo et de Lissajous en huit précédentes. Si la différence de stabilité n'était pas évidente au niveau des orbites périodiques elle-même, il n'en est pas de même pour leurs variétés invariantes. Dans la région de la Terre (en bleu sur la figure), le LLE des variétés invariantes sont proches l'une de l'autre pour les deux orbites périodiques (en regardant de plus près, on peut montrer que le LLE des variétés de l'orbite de Lissajous en huit sont plus petites mais la différence n'est pas significative). Au contraire, la différence de stabilité dans la région de la Lune n'est pas discutable. Le LLE des variétés de l'orbite de halo atteint $11 \text{ jours}^{(-1)}$ alors que le LLE des variétés de l'orbite de Lissajous en huit reste inférieur à $5 \text{ jours}^{(-1)}$ et la différence est la même au niveau des valeurs moyennes. Cela confirme que des trajectoires des variétés de l'orbite de halo - et les variétés elles-mêmes - sont très instables. Par conséquent, prédire le comportement de telles trajectoires peut s'avérer être très difficile et, en pratique, cela peut impliquer de dépense beaucoup d'énergie de contrôle. Les choses sont

totallement différentes pour les trajectoires des variétés de l'orbite de Lissajous en huit. Leurs LLE font également d'elles des trajectoires instables. Mais malgré leur faible distance à la Lune, qui, selon les résultats précédents, crée de l'instabilité, les valeurs de leur LLE restent raisonnables. De plus, on peut observer que la représentation du LLE des variétés de l'orbite de Lissajous en huit a un aspect très régulier. Ceci contraste avec l'aspect totalement chaotique du LLE des variétés de l'orbite de halo et cela confirme le fait que les variétés de l'orbite de Lissajous en huit garde leur aspect régulier de double tube même après un long temps d'intégration. En conclusion de cette étude de stabilité, on peut dire que la plus grande stabilité des variétés de l'orbite de Lissajous en huit par rapport aux variétés de l'orbite de halo pourrait les rendre très utiles pour le calcul de mission spatiale, notamment dans le but de réduire la consommation d'énergie de contrôle. Et même si on constate que l'instabilité des variétés croît avec l'énergie ou l'amplitude de l'orbite de Lissajous en huit, à énergies ou excursions en z égales, les variétés invariantes de l'orbite de Lissajous en huit restent plus stables que celles de l'orbite de halo.

4.3.3 Région accessible avec les variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit dans le système Terre-Lune

La seconde propriété intéressante présentée par les variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit est basée sur la large région lunaire accessible qu'elles couvrent après un long temps d'intégration. En propageant les variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit, nous observons un comportement de constante oscillation autour des deux primaires. Les variétés invariantes qui oscillent autour de la plus grande des primaires restent assez éloignées de cette dernière, mais les variétés invariantes autour de la plus petite des primaires s'approchent au contraire très près d'elle. Dans notre application, c'est-à-dire dans le système Terre-Lune, les variétés invariantes de la région terrestre restent trop éloignés de la Terre pour envisager une mission les utilisant pour un départ direct depuis la Terre. Par contre, les variétés invariantes qui sont en rotation autour de la plus petite des primaires, la Lune, oscillent à une distance suffisamment proche d'elle pour être utilisées dans le cadre d'un départ ou d'une capture lunaire. L'oscillation de ces variétés invariantes n'est pas nouvelle comparée à ce qu'on observe dans le cas classique des orbites de halo et de leurs variétés. Néanmoins, l'oscillation constante des variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit dans la région lunaire d'une part, et leur structure globale stable et régulière en forme de huit d'autre part, sont des propriétés très intéressantes pour le design de missions spatiales. De telles variétés peuvent être utilisées pour visiter presque toute la surface de la Lune, à tout moment, comme le montre la suite.

Bande lunaire couverte par les variétés invariantes

Dans cette section, nous calculons la surface de la Lune qui peut être atteinte par les variétés invariantes d'une orbite de Lissajous en huit. Une simple représentation des variétés invariantes de la région lunaire et leur régulière oscillation autour de la Lune sur une très longue période montrent qu'une large surface de la Lune pourrait être atteinte en les utilisant. Pour établir exactement quelle région de la Lune on peut survoler par les variétés invariantes, une projection des variétés sur la surface de la Lune a été calculée. Les projection des variétés en rotation autour de la Lune (à l'intérieur de sa sphère d'influence) est représentée sur les Figures 4.8 et 4.9 pour plusieurs valeurs d'excursion en z de l'orbite de Lissajous en huit.

Tout d'abord, sur les Figures 4.8 et 4.9, nous observons que pour, pour les différents valeurs de l'excursion en z de l'orbite de Lissajous en huit choisies, toutes les longitudes peuvent être

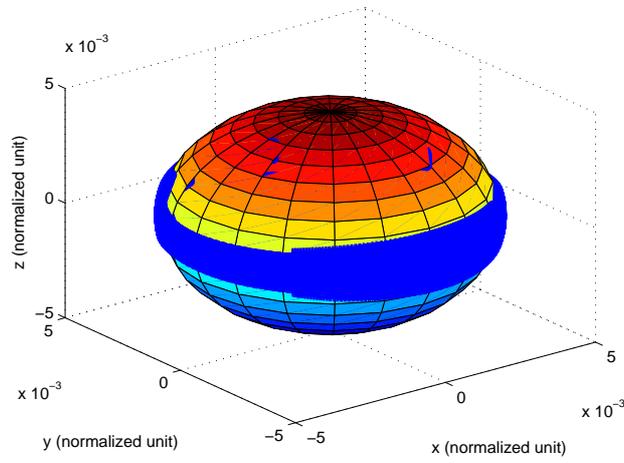


FIGURE 4.8 – Bande lunaire couverte par les variétés invariantes pour $Az=10000$ km

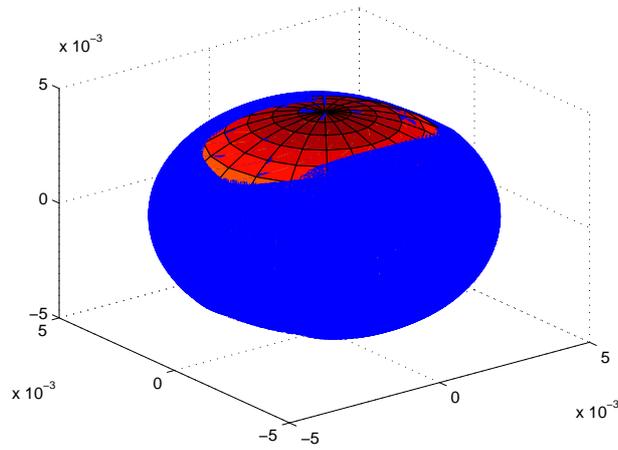


FIGURE 4.9 – Bande lunaire couverte par les variétés invariantes pour $Az=50000$ km

atteintes. Ceci est en accord avec la propriété d'oscillation constante observée précédemment. Cependant, cette oscillation restant au niveau de l'équateur, les latitudes survolées par les variétés dépendent de l'excursion en z de l'orbite de Lissajous en huit. Si l'excursion en z est petite, les latitudes atteintes sont également petites. Mais, si l'excursion en z est plus grande, de plus grandes latitudes peuvent être atteintes. On peut l'observer pour une excursion en z de valeur égale à 50000 km. Dans ce cas et pour de plus grandes valeurs de l'excursion en z , presque toute la surface lunaire peut être atteinte à partir des variétés invariantes. Seuls les pôles ne peuvent être directement atteints. Il faudrait, pour se rendre aux pôles, procéder à une manoeuvre. Quoiqu'il en soit, ces résultats montrent l'intérêt évident des variétés invariantes d'orbites de Lissajous en huit pour visiter presque toute la surface de la Lune, et ceci à faible coût énergétique.

La représentation (périgée-inclinaison)

Une représentation classique des trajectoires autour d'un corps peut confirmer et compléter les résultats précédents. Il s'agit de la représentation des variétés invariantes dans le plan (périgée, inclinaison). Pour chaque trajectoire des variétés invariantes, sa distance d'approche minimale à la Lune (périgée) et la latitude correspondant à ce point d'approche minimale (inclinaison) sont calculées.

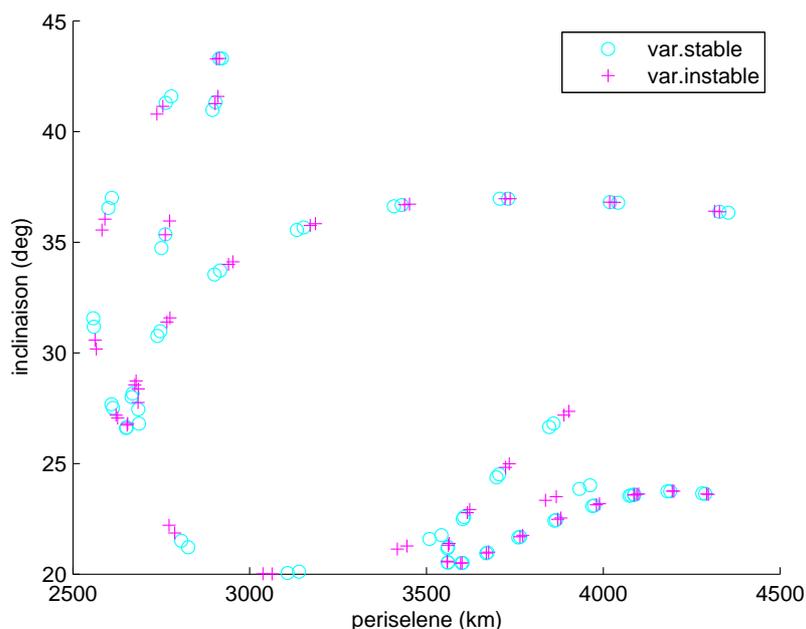


FIGURE 4.10 – Variétés invariantes d'orbites de Lissajous en huit dans le plan (périgée, angle)

Sur la Figure 4.10, on peut observer que les angles des périgées varient entre 20 et 45 degrés. Le fait que cet éventail d'angles dans cette représentation soit plus petit que la tranche d'angles couverte par les variétés n'est pas contradictoire. Cela signifie simplement que les trajectoires des variétés de la région lunaire atteignent leur point d'approche minimale à la Lune pour des inclinaisons comprises entre 20 et 45 degrés. Notons que ces points d'approche minimale

correspondent à des positions du côté de la face cachée de la Lune et se présentent généralement à la première oscillation de la variété autour de la Lune, c'est-à-dire après un temps relativement court, de l'ordre de 9 jours.

La Figure 4.10 montre que la distance minimale des variétés à la Lune varient entre 1500 et 5000 kilomètres, en fonction de l'excursion en z de l'orbite de Lissajous en huit. On observe que ces distances minimales sont atteintes après un temps de transport compris entre 9 et 50 jours à partir de l'orbite périodique. Mais pour chaque trajectoire, il est clair que 9 jours sont suffisants pour s'approcher suffisamment de la Lune afin d'être capturé.

Les résultats concernant les variétés invariantes en rotation autour de la Terre ne sont pas fournis ici. Ils ne se trouvent pas être aussi pertinents que ceux concernant celles autour de la Lune. A titre d'indication, la distance minimale entre les variétés de la région terrestre et la Terre est comprise entre 115000 et 125000 km, en fonction de la valeur de l'excursion en z de l'orbite de Lissajous en huit, et avec un temps de transport d'environ 40 jours à partir de l'orbite périodique. Ce temps de transport peut être réduit de moitié vu que des distances d'approche d'ordre similaire peuvent être atteintes après un séjour de seulement 20 jours. Dans les deux cas, les inclinaisons correspondantes n'ont pas vraiment de signification étant donnée la distance importante entre les variétés et la surface de la Terre. On observe logiquement que les variétés invariantes de la région terrestre sont en rotation autour de la Terre au niveau de son équateur.

Finalement tous ces résultats confirment de manière manifeste l'intérêt des orbites de Lissajous en huit et de leurs variétés invariantes. En les utilisant, tout point d'une bande encerclant l'équateur de la Lune peut être atteint à partir de l'orbite périodique. Mieux encore, à l'exception des pôles, presque tout point de la surface lunaire pourrait être survolé à partir d'une orbite de Lissajous en huit de large excursion en z . Et en plus, ceci pourrait être fait à tout moment étant donné que les éphémérides ne sont pas considérés dans le problème restreint des trois corps.

Chapitre 5

Conclusion

Ce travail est le résultat de trois années de collaboration avec EADS, avec l'intention de mettre à disposition non seulement une description approfondie du problème restreint des trois corps et de ses propriétés, mais aussi une bibliothèque logicielle pour la simulation numérique de diverses missions autour des points de Lagrange. Les résultats théoriques énoncés et les méthodes numériques présentées sont bien connus (voir [30]). Néanmoins, à travers ce travail, on a pu se rendre compte et mettre en avant le potentiel encore très peu exploité des trajectoires autour des points de Lagrange.

Le monde aérospatial s'est déjà rendu compte de l'intérêt des orbites périodiques situées autour des points de Lagrange. Celles-ci, les orbites de halo notamment, se révèlent être d'excellents sites d'observation. La sonde d'observation du Soleil, SOHO, située sur une orbite de halo autour de $L_1(ST)$, en est la plus belle illustration. Le télescope successeur de Hubble sera, lui, lancé prochainement en direction d'une orbite de halo autour de L_2 .

Les variétés invariantes se présentent, quant à elles, comme des sortes d'autoroutes interplanétaires à bas coût énergétique. Le calcul de la trajectoire hétérocline entre deux orbites de Lyapunov dans le système Soleil-Terre illustre parfaitement l'intérêt des variétés invariantes. Cette simulation fournit l'exemple d'une trajectoire quasiment gratuite entre deux régions de l'espace pourtant distantes de trois millions de kilomètres. Le travail accompli pour le calcul d'un transfert Terre-halo, inspiré de la mission GENESIS, en est un autre exemple.

Des travaux numériques avaient précédemment été réalisés à ce sujet, notamment par d'anciens stagiaires EADS, mais nous les avons adaptés et optimisés en termes de clarté et de précision.

L'étude des transferts Terre-Lune a également été pleine d'enseignements. Bien que la mise en oeuvre d'une trajectoire Terre-Lune dans le problème à quatre corps Soleil-Terre-Lune-navette vu comme deux problèmes à trois corps patchés n'ait pas eu les résultats escomptés, on a pu en tirer certaines propriétés à exploiter. On pense notamment à l'utilisation des variétés stables du système Terre-Lune pour le calcul de captures balistiques lunaires. On pense également à l'utilisation de la propriété de twisting des trajectoires autour des variétés instables du système Soleil-Terre pour calculer des trajectoires partant à 200 km d'altitude de la Terre et arrivant,

par exemple, à la surface de Poincaré de la Terre, à près de 1.5 millions de km de la Terre.

L'étude des transferts Terre-Lune dans le système à trois corps Terre-Lune-navette nous a apporté de nombreux résultats intéressants. L'agencement des variétés invariantes dans le système Terre-Lune ne permettant pas un départ direct de la Terre en les utilisant, nous avons été amenés à résoudre le problème de Lambert dans un système à trois corps. Nous y sommes parvenus par une méthode de continuation sur la masse de la Lune. L'efficacité de cette méthode a permis d'envisager des captures lunaires à coût réduit en visant la variété stable d'une orbite de halo autour de $L_1(TL)$ ou $L_2(TL)$ depuis un proche voisinage de la Terre. Une méthode de continuation similaire, paramétrée par la masse d'un corps céleste, pourrait être mise en oeuvre pour calculer numériquement des trajectoires dans des problèmes à quatre corps ou plus.

Ensuite, un intérêt particulier a été porté sur un type d'orbites périodiques aux propriétés inédites dans le problème restreint des trois corps. Il s'agit d'orbites presque verticales à la forme de huit, que nous avons appelé orbites de Lissajous en huit. Une approximation au troisième ordre de ces orbites a été établie en utilisant la méthode de Lindstedt-Poincaré. Des familles d'orbites de Lissajous en huit ont été calculés en utilisant une méthode de continuation paramétrée par leur excursion verticale. Puis, une comparaison de ces orbites avec les classiques orbites de halo a permis de mettre en avant des propriétés intéressantes et spécifiques. Leurs variétés invariantes gardent une structure en forme de huit globalement stable dans le temps, contrairement à celles des orbites de halo. Une étude basée sur le calcul d'exposants locaux de Lyapunov a permis de confirmer cette propriété de stabilité. De plus, dans le système Terre-Lune, les variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit permettent de visiter presque toute la surface de la Lune, selon la valeur de l'excursion en z de l'orbite périodique. On imagine facilement l'intérêt de telles propriétés dans le cadre de missions spatiales à bas coût énergétique autour de la Lune. La stabilité des variétés invariantes des orbites de Lissajous en huit et l'accessibilité à la surface lunaire qu'elles offrent, donnent de très intéressantes perspectives de missions. On peut penser à une communication facile et économique entre des navettes explorant la Lune et une station orbital basée sur une orbite de Lissajous autour du point de Lagrange $L_1(TL)$, ou $L_2(TL)$. A partir d'une telle station orbitale, presque tous les points de la Lune pourraient être visités, à tout moment, et en ne dépensant presque aucune énergie.

Enfin, les spécificités de cette thèse, supportée financièrement par la compagnie spatiale EADS Astrium, nous a amenés à porter un intérêt particulier à l'aspect numérique. Cet intérêt s'est finalisé dans la réalisation d'un logiciel interactif avec interface graphique permettant de rendre fonctionnels les différents programmes qu'on a développés sous MATLAB. Présentée sous la forme de fenêtres logicielles interactives, cette interface graphique permet d'exploiter facilement les fonctions codées sous MATLAB dans le cadre de ce travail et ainsi de calculer différentes trajectoires et missions grâce à des manipulations simples et intuitives. Une note technique sur cette interface graphique est disponible en annexe.

Le modèle du problème des trois corps étant un modèle simplifié de la réalité, il convient néanmoins de nuancer les résultats obtenus. Les trajectoires obtenues dans ce problème sont d'excellentes et précises estimations de missions réelles mais demandent à être transposées dans

un modèle plus affiné, prenant en compte les perturbations des autres corps, les excentricités et le vent solaire principalement, et répondant à des contraintes orbitales spécifiques. Des méthodes de différenciation sont généralement utilisées pour obtenir des trajectoires dans un modèle affiné et sous ces contraintes orbitales. Une méthode de continuation similaire à celle mise en oeuvre pour passer d'un modèle à deux corps à un modèle à trois corps peut également être envisagée.

Par ailleurs, les trajectoires du problème restreint des trois corps peuvent requérir de long temps de transfert, dans le système Soleil-Terre par exemple. Un compromis doit être trouvé entre la consommation d'énergie et le temps de transfert pour répondre à la demande de missions spatiales à court et moyen terme. La dynamique autour des variétés invariantes étant comprise, des méthodes d'optimisation peuvent être envisagées pour trouver ce compromis.

Les travaux réalisés sur l'étude de la dynamique autour des points de Lagrange permettent de se rendre compte et de comprendre l'intérêt évident du monde aérospatial pour ces trajectoires complexes peu énergétiques. Nombre de missions sont dorénavant et déjà prévues autour des points de Lagrange. On peut finalement espérer que l'une d'elles exploitera les propriétés spécifiques et inédites des orbites de Lissajous en huit et de leurs variétés invariantes.

Annexe A

Note technique sur l'interface graphique mise en oeuvre

Afin de rendre fonctionnels les programmes que j'ai développés, j'ai mis en oeuvre une interface graphique utilisateur sous MATLAB. Présentée sous la forme de fenêtres logicielles interactives, cette interface graphique permet d'exploiter facilement les fonctions codées sous matlab dans le cadre de mon travail et ainsi de calculer différentes trajectoires et missions grâce à des manipulations simples et intuitives. Une spécification de ce logiciel interactif est proposée dans cette annexe.

A.1 Installation

A.1.1 Configuration requise

L'équipement logiciel nécessaire à l'utilisation de l'interface graphique utilisateur mise en oeuvre se restreint à une version suffisamment récente (6 ou plus) de MATLAB. L'interface a été développée et testée sous *Windows* mais il n'y a a priori aucune restriction au niveau du système d'exploitation.

A.1.2 Procédure

La procédure d'installation de l'interface graphique se déroule en trois étapes.

- Etape 1. Téléchargez et décompressez l'archive *CR3BP_Graphic_Interface.zip*.
- Etape 2. Déplacez le dossier parent *CR3BP_Graphic_Interface* où vous le souhaitez.
- Etape 3. Ouvrez le fichier *startup.m*, situé à la racine du dossier *CR3BP_Graphic_Interface*. Copier le chemin entier d'accès au dossier *CR3BP_Graphic_Interface* (ex : D :\Mon_Travail\CR3BP_Graphic_Interface). Collez ce chemin d'accès entre apostrophes dans la définition de la variable globale ROOT du fichier *startup.m* (ex : ROOT='D :\Mon_Travail\CR3BP_Graphic_Interface';). Sauvegardez le fichier *startup.m*.

- Etape 4. Faire la même manipulation dans le fichier *PeriodicOrbitInterface.m* : copiez la définition de la variable globale *ROOT* établie dans *startup.m* et collez-la dans le fichier *PeriodicOrbitInterface.m*.
- Etape 5. Exécutez le fichier *startup.m* : F5 à partir du fichier ou tapez *startup* dans la fenêtre de commandes de MATLAB.

L'interface graphique utilisateur se lance et est prête à fonctionner.

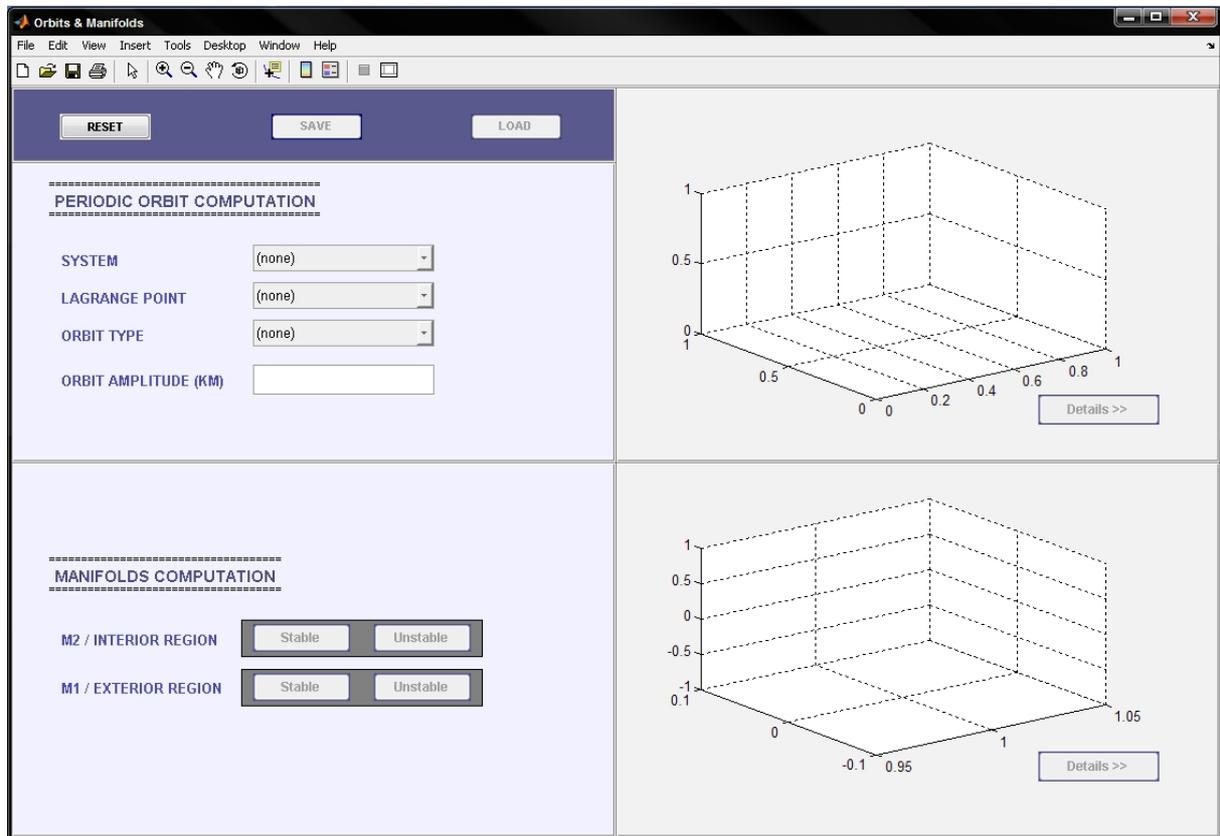


FIGURE A.1 – Fenêtre principale de l'interface graphique. Elle permet de calculer des orbites périodiques et leurs variétés invariantes.

A.1.3 Plusieurs remarques

- Tout déplacement du dossier parent nécessitera bien entendu une modification de la variable *ROOT* et une sauvegarde du fichier *startup.m*.
- Pour lancer l'interface graphique au-delà de l'installation, plusieurs possibilités s'offrent à vous.
 1. La première solution est de se placer dans le dossier *CR3BP_Graphic_Interface* dans le navigateur de MATLAB et de taper *startup* dans la fenêtre de commandes.

2. La deuxième solution est de créer un raccourci MATLAB sur le bureau, par exemple, et d'éditer ses propriétés. Pour créer le raccourci, faites cliquer droit sur le fichier *MATLAB.exe*, situé dans le dossier `\bin\win32` du dossier d'installation de MATLAB, et choisissez soit "envoyer vers le bureau" pour créer un raccourci sur le bureau, soit "créer un raccourci" pour pouvoir ensuite placer le raccourci où vous le souhaitez. Une fois le raccourci créé, pour éditer ses propriétés, faites cliquer droit dessus et choisissez propriétés. La fenêtre des propriétés s'ouvre. Il suffit alors de coller le chemin d'accès au dossier *CR3BP_Graphic_Interface* dans la propriété emplacement et de cliquer sur "OK". Ceci étant fait, pour lancer l'interface graphique, vous aurez simplement à exécuter le raccourci que vous avez créé.
- L'ajout de dossiers et de fichiers est possible. Si vous voulez le faire, faites-le à l'intérieur du dossier *CR3BP_Graphic_Interface* ou de ses sous-dossiers. Une exécution du fichier *startup.m* sera nécessaire pour que ces changements soient pris en compte.

A.2 Création d'une interface utilisateur sous matlab

Dans cette partie, on liste et décrit les fonctions permettant de mettre en oeuvre une interface graphique utilisateur sous matlab.

A.2.1 Création d'une fenêtre graphique

La fonction *figure*

La première étape indispensable à la réalisation d'une interface graphique utilisateur est la création de la ou des fenêtre(s) qui accueille(nt) les textes, objets et figures que l'on veut mettre en place. Pour cela, on utilise la fonction matlab *figure* et ses propriétés. Le tableau A.1 décrit les principales propriétés d'une figure matlab utilisées pour l'interface utilisateur :

Taille de la fenêtre

La gestion de la taille de la fenêtre se fait au travers de la propriété 'position', qui gère la position et la taille de la figure. Pour que la taille de fenêtre qu'on définit s'adapte à la taille de l'écran de travail, la commande "scrsz=get(0,'ScreenSize')" s'avère très utile. Elle renvoie la taille de votre écran, ce qui permet d'évaluer plus facilement la taille que l'on veut donner à ses fenêtres.

Exemple :

```
figure('Position',[scrsz(3)/5 scrsz(4)/5 scrsz(3)/1.5 scrsz(4)/1.5]);
```

crée une fenêtre positionnée au 1/5 de la largeur et au 1/5 de la hauteur de l'écran, large des 2/3 de la largeur de l'écran, et longue des 2/3 de la longueur de l'écran.

Fenêtres avec *figure(s)*

Pour créer des fenêtres comprenant une ou plusieurs figure(s), il est recommandé de définir la propriété 'windowstyle' égale à 'normal' et la propriété 'toolbar' égale à 'figure'. Avec un style de fenêtre 'normal', l'utilisateur aura le loisir de réduire, sauvegarder la fenêtre, ajouter d'autres barres d'outils à la fenêtre, etc... Et avec une barre d'outil 'figure' apparente, l'utilisateur pourra facilement naviguer, zoomer, dézoomer sur la figure de son choix.

Nom de la Propriété	Description de la Propriété	Valeurs de la Propriété
Position	Position et taille de la figure	Valeurs : vecteur à 4 éléments [gauche,bas,largeur,hauteur] Défaut : dépend de l’affichage
Units	Unité utilisée pour la propriété position	Valeurs : inches, centimeters, normalized, points, pixels, characters Défaut : pixels
WindowStyle	Style de la fenêtre	Valeurs : normal, modal Défaut : modal
Toolbar	Contrôle l’affichage de la barre d’outils de la figure	Valeurs : none, auto, figure Défaut : auto
Name	Titre de la fenêtre figure	Valeurs : chaîne de caractères Défaut : ”(vide)
Nextplot	Gère l’affichage de graphiques additionnels	Valeurs : new, add, replace, children Défaut : add
Tag	Label référence pour l’utilisateur	Valeurs : chaîne de caractères Défaut : ” (vide)

TABLE A.1 – Liste des propriétés de la fonction figure.

Pour contrôler le positionnement de la ou des figure(s) dans la fenêtre, plusieurs possibilités s’offrent au développeur. Pour placer plusieurs figures dans une même fenêtre, la commande ‘subplot’ semble la mieux indiquée :

subplot(m,n,p) crée des axes dans la $p^{i\text{ème}}$ case d’une fenêtre divisée en matrice $m \times n$ de cases rectangulaires, ces nouveaux axes devenant les axes courant. Si p est un vecteur, alors les axes de la figure correspondante recouvrent toutes les cases listées dans p .

L’autre manière de gérer la position d’une figure, c’est-à-dire de ses axes, dans une fenêtre est de se servir de la commande *axes* et de sa propriété ‘position’ :

axes('position',[left bottom width height]) positionne et dimensionne les axes dans la fenêtre en unités normalisées. *left* et *bottom* positionne le coin inférieur gauche de la figure. *width* et *height* définissent la largeur et la hauteur de la figure.

Fenêtres sans figure

Les fenêtres ne comprenant pas de figure peuvent s’avérer fort utiles, pour saisir des données au clavier par exemple. Pour créer de telles fenêtres, c’est le style de fenêtre (‘windowstyle’) ‘modal’ qui est le mieux adapté. Cela permet de supprimer les menus d’une fenêtre matlab par défaut. Une barre d’outil est également inutile dans ce type de fenêtres. La propriété ‘toolbar’ conseillée est alors ‘none’.

Fenêtres de message d'erreur

Les fenêtres d'erreur permettant de signifier à l'utilisateur qu'il a fait quelque chose d'inattendu par le logiciel interactif sont indispensables à ce type d'interface graphique. MATLAB a prévu des commandes spécifiques à cet effet. Dans le développement de cette interface graphique, on utilise les fonctions de référence *uiwait* et *warndlg*. La fonction de référence *uiwait* permet de bloquer l'exécution d'une fonction MATLAB. La fonction de référence *warndlg* affiche une fenêtre de dialogue d'avertissement. La commande `uiwait(warndlg('Please enter a value for EPS', 'Warning'))` affiche ainsi la fenêtre représentée sur la Figure A.2, qui interrompt l'exécution de la fonction en cours en affichant le message d'erreur saisi dans *warndlg*. La fenêtre d'erreur disparaît dès que l'utilisateur clique sur le bouton 'OK' et l'utilisateur peut corriger son erreur.



FIGURE A.2 – Exemple de fenêtre de message d'erreur.

A.2.2 Création d'objets de contrôle d'interface utilisateur

Dans leur utilisation courante, les fenêtres MATLAB servent essentiellement comme toiles de fond à la représentation de figures mais ceci est loin d'être leur unique utilité. Elles permettent également de disposer du texte et des objets d'interaction avec l'utilisateur. Cet outil indispensable à la création d'une interface graphique est fourni par la fonction de référence *uicontrol*. Cette fonction permet de créer des objets de contrôle d'interface utilisateur, qui peuvent être de simples zones de texte informatif, tout comme des objets d'interaction avec l'utilisateur, tels que des boutons, des curseurs, ou des menus déroulants.

L'*uicontrol* par défaut est un bouton (*pushbutton*). Le parent par défaut est la figure courante. Les propriétés de l'*uicontrol* permettent de le personnaliser.

Parmi toutes les propriétés d'un *uicontrol*, la plus importante est sans nul doute son style. Il définit sa nature et sa fonctionnalité. On décrit ci-dessous tous les styles possibles d'un *uicontrol* et leurs spécificités.

Nom de la Propriété	Description de la Propriété	Valeur de la Propriété
Style	Type de l'objet uicontrol	Valeurs : pushbutton, togglebutton, radiobutton, checkbox, edit, text, slider, listbox, popupmenu Défaut : pushbutton
Position	Position et taille de l'objet	Valeur : vecteur à 4 éléments [gauche,bas,largeur,hauteur] Défaut : dépend de l'affichage
Units	Unité utilisée pour la propriété position	Valeurs : inches, centimeters, normalized, points, pixels, characters Défaut : pixels
BackgroundColor	Couleur du fond de l'objet	Valeur : valeur RGB Défaut : dépend du système
ForegroundColor	Couleur du texte	Valeur : valeur RGB Défaut : [0 0 0]
String	Label du uicontrol, éléments des listbox et popupmenu	Valeur : chaîne de caractères Défaut : ""(vide)
Tag	Label référence pour l'utilisateur	Valeur : chaîne de caractères Défaut : "" (vide)
Enable	Active ou désactive le uicontrol	Valeurs : on, inactive, off Défaut : on
Interruptible	Callback routine interruption mode	Value : on, off Défaut : on
Callback	Action du control	Valeur : chaîne de caractères ou fonction

TABLE A.2 – Liste des propriétés de la fonction uicontrol.

'text'

Le style 'text' permet de saisir des lignes de texte statique dans une boîte. Du texte statique est typiquement utilisé pour nommer un autre objet de contrôle, informer ou donner une instruction à l'utilisateur, ou encore associer des valeurs à un 'slider'. L'utilisateur ne peut pas changer le texte statique de manière interactive. Aucune fonction de rappel ('callback') ne peut lui être associée.

'pushbutton'

Le style 'pushbutton' crée un bouton de contrôle. Un tel bouton génère une action quand il est pressé. Pour activer un 'pushbutton', il suffit de cliquer sur le bouton avec la souris (clique gauche). L'action enclenchée est définie par la fonction 'callback' de l'*uicontrol*.

'togglebutton'

Le style 'togglebutton' crée un bouton d'aspect similaire au 'pushbutton'. Quand on clique dessus, la fonction 'callback' associée s'exécute et son état (on ou off) s'affiche. Les 'togglebuttons' peuvent s'avérer utiles dans la construction d'une barre d'outils.

'checkbox'

Le style 'checkbox' crée une case à cocher. Lorsque celle-ci est cochée, une action s'exécute. C'est notamment utile lorsque l'on veut fournir à l'utilisateur un nombre de choix indépendants. Pour activer (cocher) un 'checkbox', il suffit de cliquer avec la souris sur la case. Un tique apparaît à l'intérieur de la case lorsqu'elle est cochée. Le nom associé à la case est défini par la valeur de la propriété 'string'.

'radiobutton'

Le style 'radiobutton' crée une case à cocher similaire à celle du style 'checkbox', si ce n'est qu'elle est circulaire. Son utilisation est identique. Il gagne en intérêt lorsqu'il est regroupé avec d'autres 'radiobuttons' dans un *uibuttongroup* commun. On définit les différents 'radiobutton' comme enfants d'un même *uibuttongroup* en utilisant la propriété 'parent'. Un seul d'entre eux peut alors être coché à un instant donné. Exemple :

```
h = uibuttongroup('visible','off','position',[0 0 0.2 1]);  
u0 = uicontrol('Style','radiobutton','String','Option 1',... 'position',[10 350 100 30],'parent',h);  
u1 = uicontrol('Style','radiobutton','String','Option 2',... 'position',[10 250 100 30],'parent',h);  
u2 = uicontrol('Style','radiobutton','String','Option 3',... 'position',[10 150 100 30],'parent',h);
```

'popupmenu'

Le style 'popupmenu' crée un menu déroulant. On ouvre ce menu déroulant en cliquant dessus avec la souris. Il affiche alors une liste de choix exclusifs préalablement définis dans la propriété 'string'. Quand il n'est pas ouvert, le 'popupmenu' affiche le choix courant. Ces menus déroulants sont particulièrement utiles pour fournir à l'utilisateur un certain nombre de choix

exclusifs tout en économisant l'espace. L'action enclenchée suite au choix dans le menu déroulant est commandée par la fonction 'callback' du *uicontrol*. Un accès à la valeur du 'popupmenu' peut s'avérer fort utile dans le codage de la fonction 'callback'. Il se fait en utilisant la fonction matlab *get*.

La commande *get(h, 'PropertyName')* permet d'obtenir la valeur de la propriété 'PropertyName' de l'objet h. Ainsi, si on définit le 'popupmenu', OrbitTypePopup, OrbitTypePopup=*uicontrol('Style','popupmenu','String','(aucun)|Lyapunov|Halo|Lissajous en huit')*, alors le choix courant sélectionné parmi les 4 choix possibles par l'utilisateur s'obtient par la commande :

```
val=get(OrbitTypePopup,'Value').
```

La variable 'val' vaut 1 si l'utilisateur a choisi '(aucun)', 2 s'il a choisi 'Lyapunov', etc...

'listbox'

Le style 'listbox' permet de créer une liste d'entrées définies dans la propriété 'string' de l'objet de contrôle. L'utilisateur peut saisir un ou plusieurs éléments de la liste. Les propriétés 'Min' et 'Max' contrôlent le mode de sélection :

Si $\text{Max}-\text{Min}>1$, alors une sélection multiple est autorisée.

Si $\text{Max}-\text{Min}\leq 1$, alors seule une sélection unique est autorisée.

La propriété 'Values' indique l'entrée sélectionnée par l'utilisateur. S'il s'agit d'une liste de chaînes de caractères, la propriété 'Value' contient l'indice numérique correspondant. Et s'il y a un choix multiple, c'est un vecteur qui indique les multiples sélections. MATLAB exécute la fonction 'callback' associée à un élément dès qu'on clique dessus. Par conséquent, il est conseillé d'ajouter un bouton 'OK', par exemple, pour retarder l'action provoquée par des clics multiples. Une différenciation entre simple et double clic est possible via la propriété 'SelectionType'.

'edit'

Le style 'edit' crée une zone de saisie qui permet à l'utilisateur d'entrer ou de modifier un texte. Cet objet de contrôle est utile lorsqu'on veut du texte saisi par l'utilisateur en entrée d'une fonction. Si $\text{Max}-\text{Min}>1$, alors plusieurs lignes sont autorisées. La commande *get(h, 'String')* permet d'accéder au texte saisi dans l'objet h par l'utilisateur.

'slider'

Le style 'slider' permet de créer un curseur. Les entrées sont numériques et comprises dans un certain intervalle dont les bornes sont spécifiées par les propriétés 'min' et 'max' de l'objet. L'utilisateur bouge le curseur en cliquant dessus et en le déplaçant la long de la barre, ou cliquant directement sur la barre. L'emplacement du curseur indique une valeur numérique, qui est sélectionnée à partir du moment où l'utilisateur relache le bouton de la souris.

A.2.3 Création de menus

Dans le processus de création d'un logiciel interactif utilisateur, il peut être utile de gérer les menus des fenêtres de l'interface utilisateur. La fonction *figure* permet de choisir parmi les menus par défaut ceux que l'on veut afficher ou supprimer. Mais il existe aussi une fonction MATLAB qui permet de créer soi-même ses menus et sous-menus dans la barre de menus d'une

fenêtre. Cette fonction est la fonction *uimenu*. La syntaxe de la fonction *uimenu* est similaire à celle des *uicontrol*. On liste dans le tableau A.3 une liste non-exhaustive des propriétés de cette fonction.

Nom de la Propriété	Description de la Propriété	Valeur de la Propriété
Checked	Indicateur de choix du menu	Valeurs : on, off Défaut : off
Separator	Mode avec ligne séparatrice des autres menus	Valeurs : on, off Défaut : off
Label	Label du menu	Valeurs : chaîne de caractères
Position	Position relative du uimenu	Valeur : scalaire Défaut : [1]
Children	références (handles) des sous-menus	Valeur : vecteur de handles
Parent	Parent de l'uimenu	Valeur : handle
Enable	Active ou désactive le uimenu	Valeurs : on, off Défaut : on
Accelerator	Raccourci clavier	Valeur : caractère
Callback	Action du control	Valeur : chaîne de caractères ou fonction

TABLE A.3 – Liste des propriétés de la fonction *uimenu*.

L'exemple suivant crée un menu 'Fichier' dans la barre des menus de la fenêtre, avec comme choix proposés à l'utilisateur la possibilité de créer une nouvelle figure, sauvegarder la figure et de quitter MATLAB. Un séparateur et un raccourci clavier sont ajoutés pour l'option 'Quitter'.

```
f = uimenu('Label','Fichier');
uimenu('Parent',f,'Label','Nouvelle Figure','Callback','figure');
uimenu('Parent',f,'Label','Sauvegarder Figure','Callback','save');
uimenu('Parent',f,'Label','Quitter','Callback','exit',... 'Separator','on','Accelerator','Q');
```

A.3 Exemple Tutoriel

Après avoir décrit les outils utilisés pour la conception d'une interface graphique utilisateur MATLAB dans la section précédente, nous proposons un tutoriel du logiciel interactif mis en oeuvre afin de calculer des trajectoires (orbites périodiques, variétés, missions) dans le problème restreint des trois corps et étudier leurs propriétés (énergie, stabilité, accessibilité).

A.3.1 Calcul d'orbite périodique

Le logiciel interactif développé permet de simuler des trajectoires dans un problème restreint à trois corps, à commencer par des orbites périodiques situées autour des points de Lagrange. Trois types d'orbite périodique sont disponibles : Lyapunov, halo et Lissajous en huit.

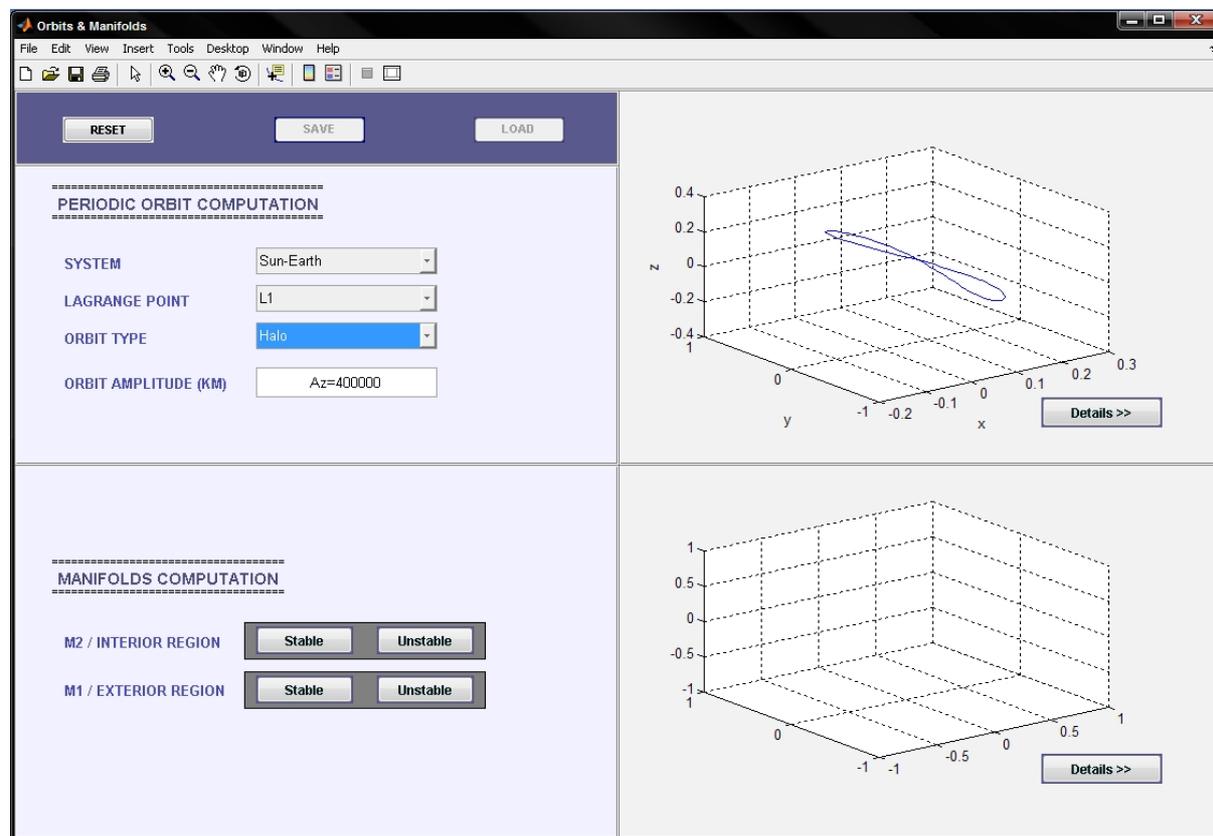


FIGURE A.3 – Calcul d'une orbite de halo dans le système Soleil-Terre.

Pour calculer une de ces orbites, il convient d'abord de choisir le système dans lequel on veut la calculer et autour de quel point de Lagrange de ce système on veut travailler. Ceci se fait simplement dans les menus déroulants respectivement intitulés "SYSTEM" et "LAGRANGE POINT". Une fois ces deux choix effectués, il suffit de choisir dans le menu déroulant "ORBIT TYPE" le type d'orbite que l'on veut calculer.

Si le système ou le point de Lagrange n'ont pas été préalablement choisis par l'utilisateur, un message d'erreur apparaît pour le lui stipuler. Sinon, une orbite périodique du type choisi est calculée et représentée dans la fenêtre du haut.

L'excursion en x ou en z par défaut de l'orbite périodique calculée est indiquée dans le champ de saisie de texte "EXCURSION". L'utilisateur est libre de changer cette valeur pour calculer l'orbite de son choix. Il doit par contre respecter la syntaxe "Ax=..." ou "Az=..." pour obtenir le résultat escompté. Si la saisie est erronée (modification de la syntaxe, caractère, symbole) ou incompatible (excursion négative ou trop grande) un message d'erreur est envoyé à l'utilisateur et le calcul interrompu.

Une fois l'orbite choisie représentée, il est offert à l'utilisateur la possibilité d'obtenir davantage de détails sur l'orbite. Pour cela, il suffit de cliquer sur le bouton "Détails" situé en bas à droite de la figure où l'orbite est dessinée.

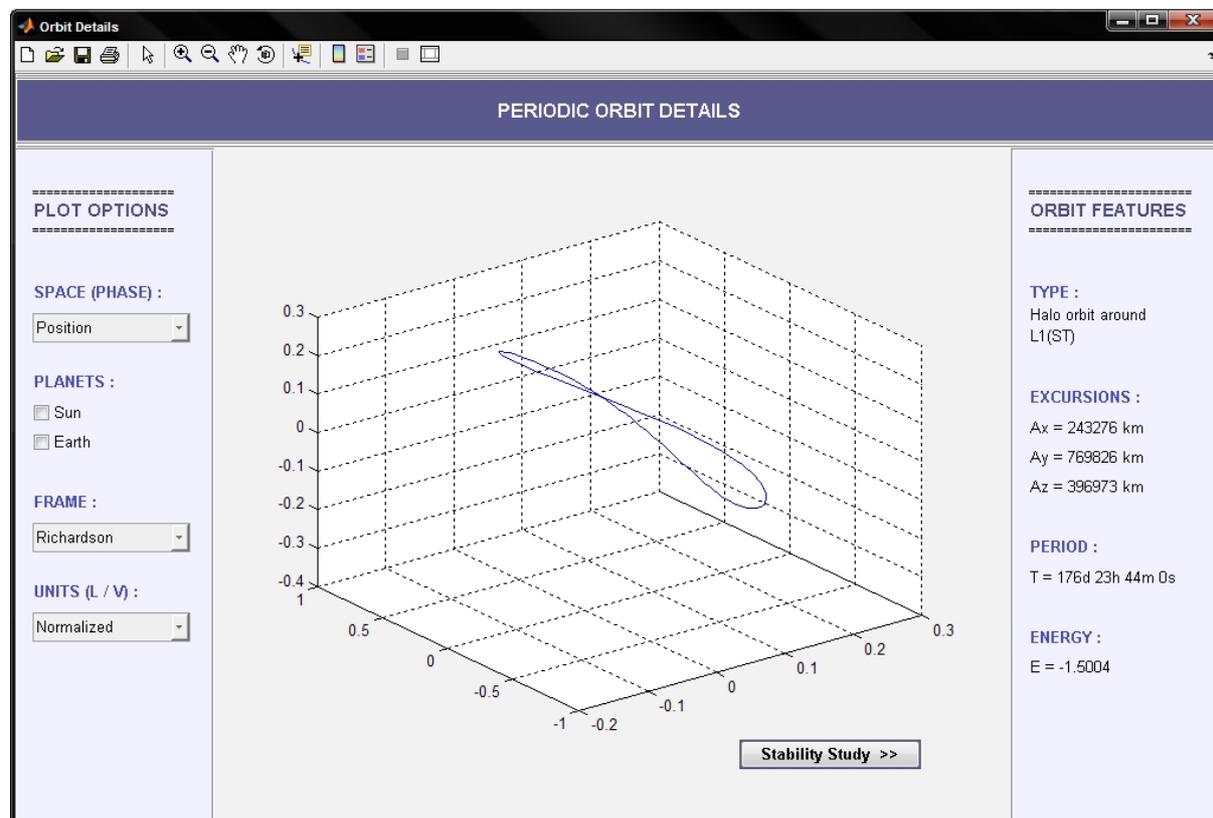


FIGURE A.4 – Orbite de halo du système Soleil-Terre en détails. L'orbite périodique est représentée dans l'espace des positions, dans le repère de Richardson centré en L_1 , en unités normalisées.

Ceci ouvre une nouvelle fenêtre (OrbitDetails), représentée sur la Figure A.4, qui représente de nouveau l'orbite périodique calculée et renseigne l'utilisateur sur de nombreuses propriétés de l'orbite périodique telles que ses différentes excursions, sa période et son énergie. Cette fenêtre offre également à l'utilisateur des options de représentation pour l'orbite périodique. L'utilisateur peut en effet choisir l'espace de représentation de l'orbite (espace des positions ou espace des vitesses), le repère, les unités de longueur et vitesse, ainsi que la représentation ou non des primaires du système.

A.3.2 Calcul de variété invariante

Dès qu'une orbite périodique est calculée et représentée, l'utilisateur peut calculer une ou plusieurs de ses variétés invariantes. Pour ce faire, il lui faut simplement cliquer sur les boutons associés aux variétés qu'il veut calculer. Ces boutons sont au nombre de quatre. Deux correspondent aux variétés stable et instable de l'orbite périodique situées dans la région de la plus petite primaire. Les deux autres correspondent aux variétés situées dans la région de la plus

grande primaire si l'orbite périodique se trouve autour de L_1 , dans la région extérieure si l'orbite périodique se trouve autour de L_2 .

Le clic de l'utilisateur sur le bouton de la variété de son choix ouvre une fenêtre de saisie (ManifoldsParameters), représentée sur la Figure A.5.

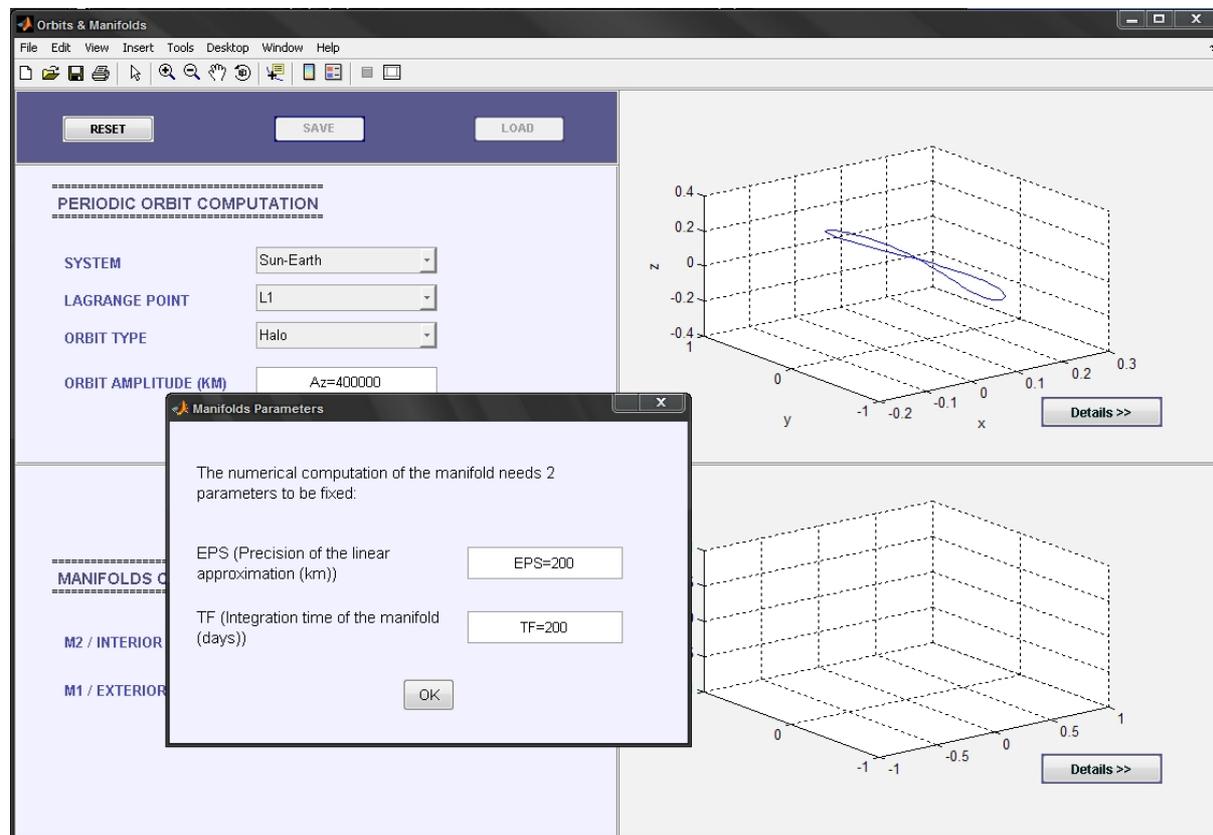


FIGURE A.5 – Fenêtre de saisie de paramètres pour le calcul des variétés invariantes.

Les données à saisir sont des paramètres de calcul de la variété : la précision de l'approximation linéaire et le temps de propagation de la variété. La précision de l'approximation linéaire, exprimée en km, correspond au ϵ (voir la section 2.4.3) utilisé dans le calcul numérique des variétés pour définir les conditions initiales X_0 conduisant aux variétés :

$$X_0 = a + \epsilon V(a),$$

où a balaye l'orbite périodique, $V(a)$ est un vecteur propre stable ou instable de la matrice de monodromie en a . Le temps de propagation correspond alors au temps d'intégration de ces conditions initiales. Un message d'erreur apparaît si la saisie de l'utilisateur n'est pas conforme. Sinon, la fenêtre des paramètres se ferme, le calcul numérique de la variété se lance et la variété est représentée dans la figure inférieure droite de la fenêtre principale.

De la même manière que pour l'orbite périodique, il est possible d'observer plus en détails les variétés calculées. Pour cela, il suffit de cliquer sur le bouton "Détails" situé à côté de la figure où les variétés sont représentées. Une nouvelle fenêtre s'ouvre (ManifoldsDetails) et offre

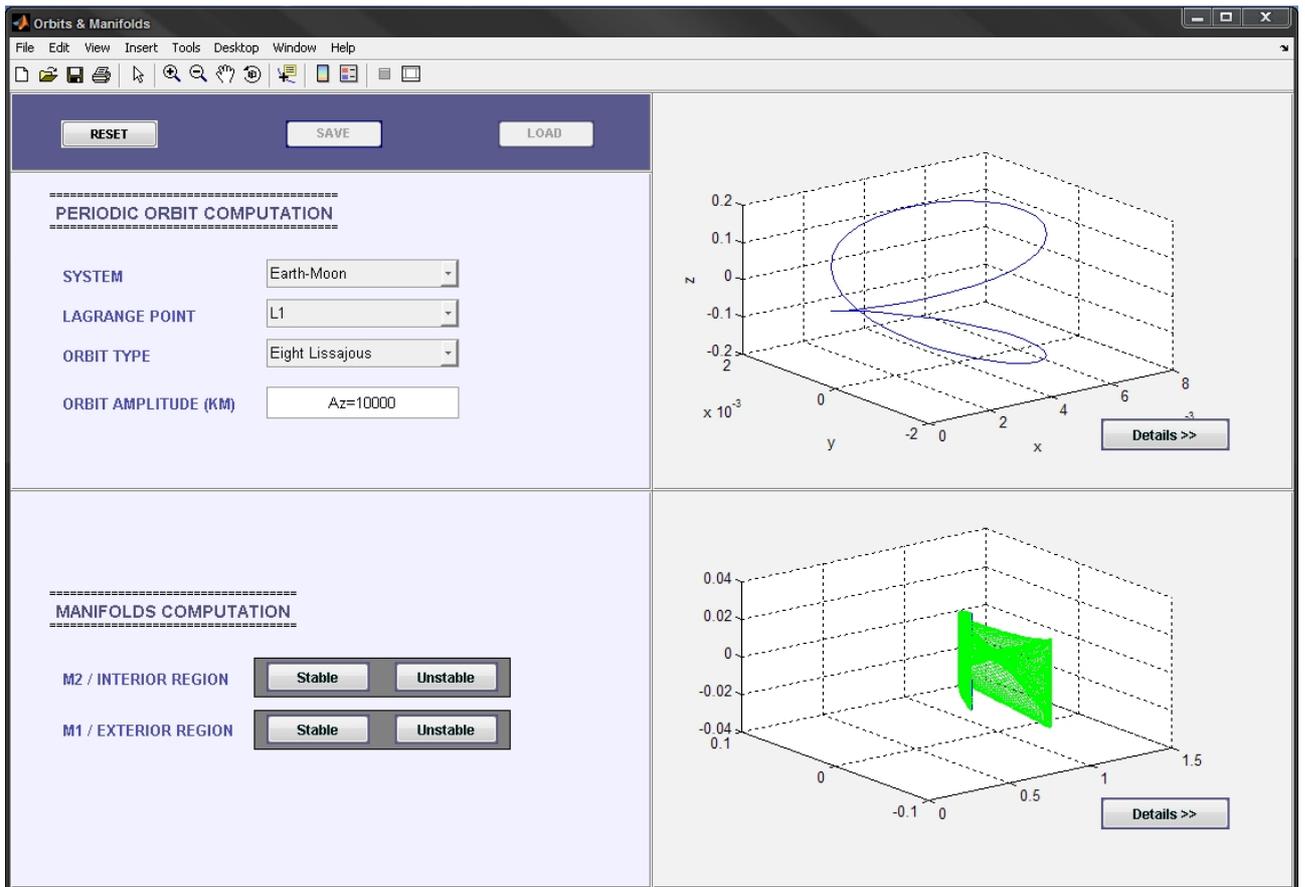


FIGURE A.6 – Calcul d'une variété stable d'une orbite de halo dans le système Soleil-Terre.

la possibilité à l'utilisateur choisir l'espace de représentation des variétés (espace des positions ou des vitesses), le repère, les unités de longueur et de vitesse, ainsi que la représentation ou non des primaires du système.

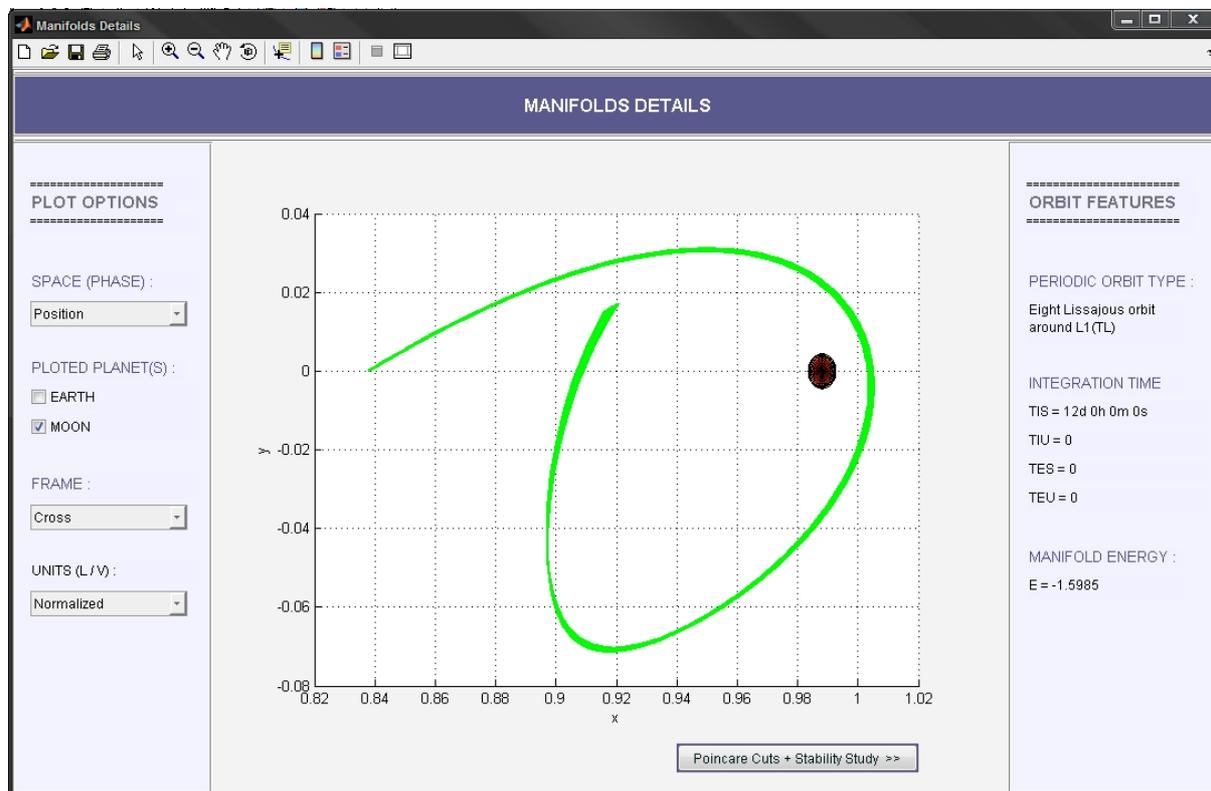


FIGURE A.7 – Variété stable d’une orbite de Lissajous en huit du système Terre-Lune en détails. La variété est représentée dans le repère de Cross. La Lune est également représentée du fait du cochage de la case correspondante.

A.3.3 Calcul de section de Poincaré

Le calcul d’une section de Poincaré est accessible à partir de la fenêtre de détails des variétés (ManifoldsDetails). On rappelle qu’une section de Poincaré de variété est l’intersection d’une variété avec une surface de l’espace des phases, dites de Poincaré. Les surfaces de Poincaré d’un système à trois corps sont au nombre de quatre, généralement notées U_1, \dots, U_4 . La section de Poincaré U_1 est située dans la région de la plus grande des primaires. Les surfaces de Poincaré U_2 et U_3 sont situées dans la région de la plus petite des primaires. Enfin, la surface de Poincaré est située dans la région extérieure. Cette dispersion des surfaces de Poincaré implique que chaque variété n’a pas d’intersection avec toutes les surfaces de Poincaré. Bien au contraire, on n’associe généralement à chaque variété qu’une surface de Poincaré. Autour de L_1 , les variétés de la région de la plus grosse des primaires sont associées à la surface U_1 , tandis que celles de la région de la plus petite des primaires sont associées aux surfaces de Poincaré U_2 et U_3 . Autour de L_2 , les

variétés de la région de la plus petite des primaires sont associées aux surfaces de Poincaré U_2 et U_3 , tandis que celles de la région extérieure sont associées à la surface U_4 .

Pour calculer une section de Poincaré d'une variété via le logiciel interactif, il faut avoir au préalable calculer au moins une variété. Ceci étant fait, il suffit d'ouvrir la fenêtre "Manifold-sDetails", puis de cliquer sur le bouton "Poincare Cuts + Stability Study ». Ceci provoque l'ouverture d'une nouvelle fenêtre (Poincare Cuts Computation + Stability Study) qui comprend dans sa partie supérieure, quatre boutons, correspondant aux quatre sections de Poincaré calculables autour du point de Lagrange considéré.

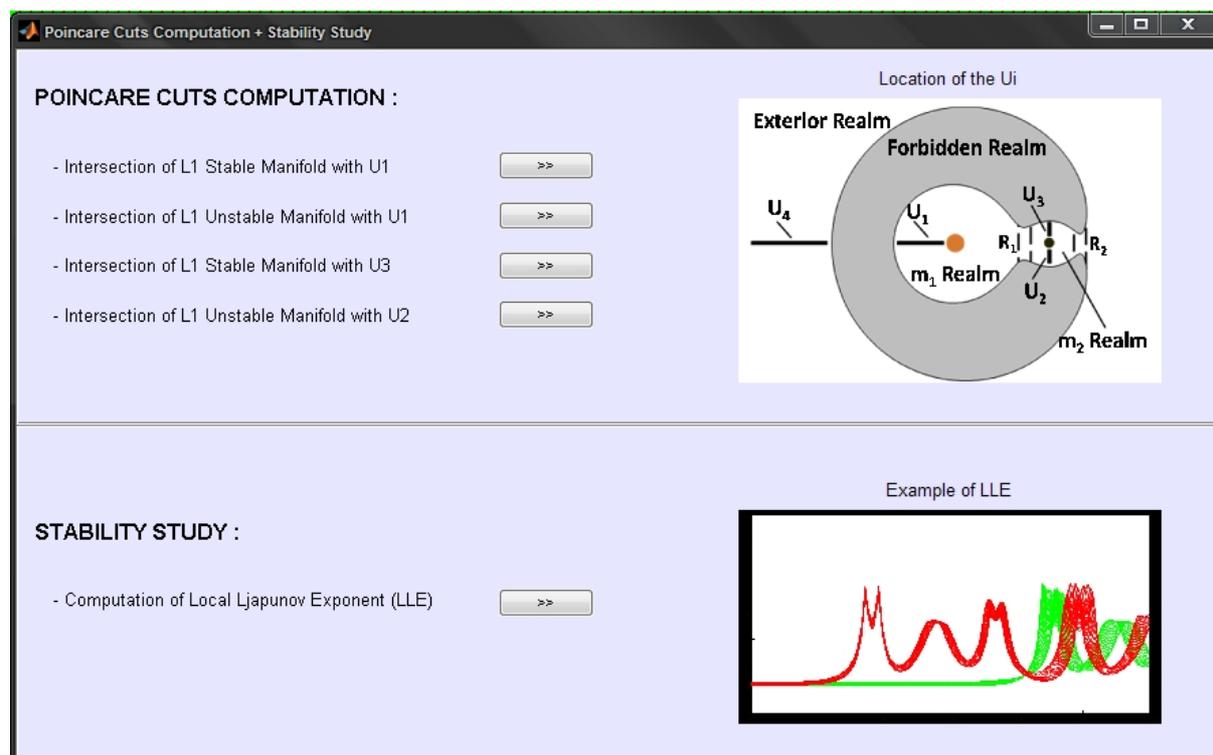


FIGURE A.8 – Fenêtre intermédiaire pour le calcul de section de Poincaré. Cette fenêtre intermédiaire sert également à calculer l'exposant de Lyapunov des variétés invariantes.

Un simple clic sur un de ces boutons permet de lancer le calcul de la section de Poincaré choisie. Cependant, il est nécessaire que la variété correspondant à la section qu'on veut calculer ait été préalablement calculée. Un message d'erreur s'affiche dans le cas contraire. Si tout est en ordre, le calcul se lance, et une fois terminée, la section de Poincaré est représentée dans une nouvelle figure (Poincare Cuts). Cette dernière figure représente la ou les variété(s) propagée(s) jusqu'à leur surface de Poincaré sur la moitié gauche de la fenêtre. Au moyen d'un menu déroulant, l'utilisateur peut choisir de représenter la variété soit dans l'espace des positions, soit dans l'espace des vitesses. Sur la moitié gauche de la fenêtre, est représentée la coupe de Poincaré à proprement parler (c'est-à-dire l'intersection de la variété avec la surface de Poincaré), dans un plan choisi par l'utilisateur au moyen d'un autre menu déroulant.

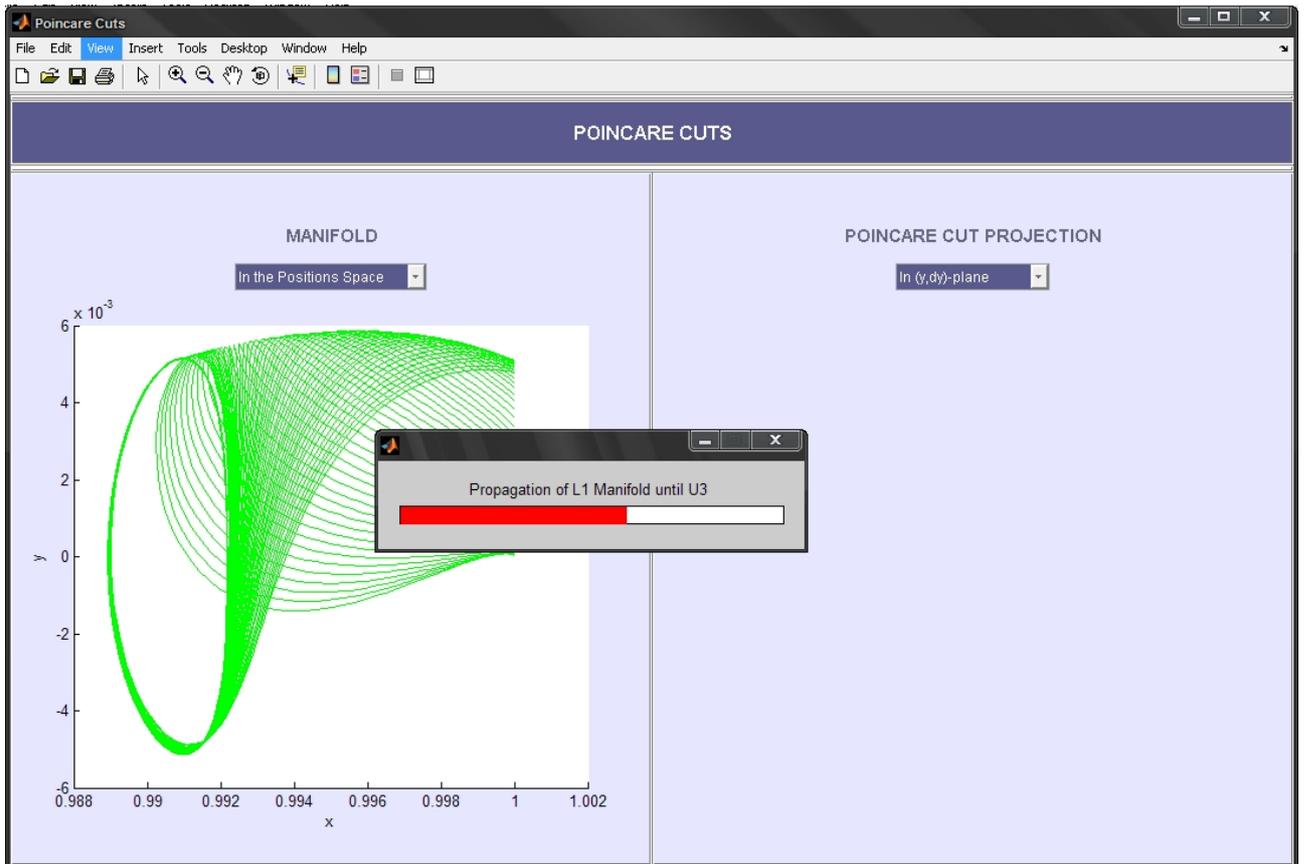


FIGURE A.9 – Waitbar pour le calcul des coupes de Poincaré : pendant le calcul des coupes de Poincaré, qui peut être assez long, l'utilisateur est tenu au courant de l'avancement du calcul par une barre de progression.

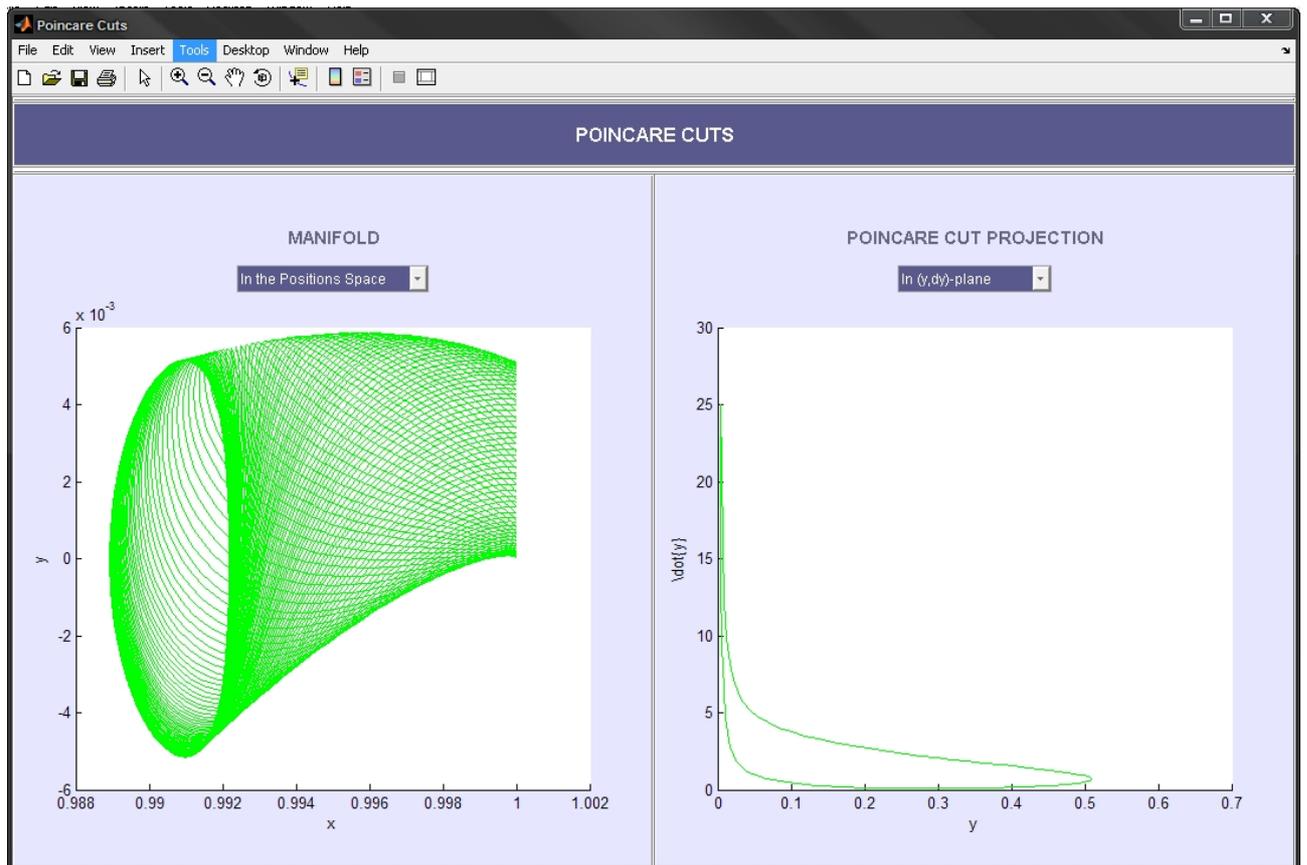


FIGURE A.10 – Une variété stable propagée jusqu’à la surface de Poincaré U_3 sur la gauche. Coupe de Poincaré de la variété représentée dans le plan (y, \dot{y}) .

A.3.4 Etude de stabilité

Pour étudier la stabilité d'une orbite ou d'une variété, on calcule des exposants locaux de Lyapunov. Cette fonctionnalité est accessible à partir des fenêtres "OrbitDetails" et "ManifoldDetails". Selon le cas, il faut donc avoir au préalable calculé soit une orbite périodique, soit une variété invariante. Ceci étant fait, il faut ouvrir la fenêtre des détails correspondante et cliquer sur le bouton "Stability Study" dans le cas de l'orbite périodique, "Poincare Cuts + Stability Study »" dans le cas des variétés. Dans le cas de l'orbite périodique, une fenêtre de saisie apparaît et demande à l'utilisateur de saisir deux paramètres pour le calcul numérique des exposants locaux de Lyapunov (un paramètre de discrétisation de la trajectoire et le temps d'intégration correspondant au Δ de la section 4.3.2). Une fois ces paramètres fixés, le calcul de l'exposant local de Lyapunov se lance, et l'exposant local de Lyapunov est représenté dans une nouvelle figure. Dans le cas des variétés invariantes, le clic de l'utilisateur sur le bouton "Poincare Cuts + Stability Study »" ouvre la fenêtre intermédiaire (Poincare Cuts Computation + Stability Study). L'ouverture de la fenêtre de saisie des paramètres se fait en cliquant sur le bouton "»" situé tout en bas de la fenêtre.

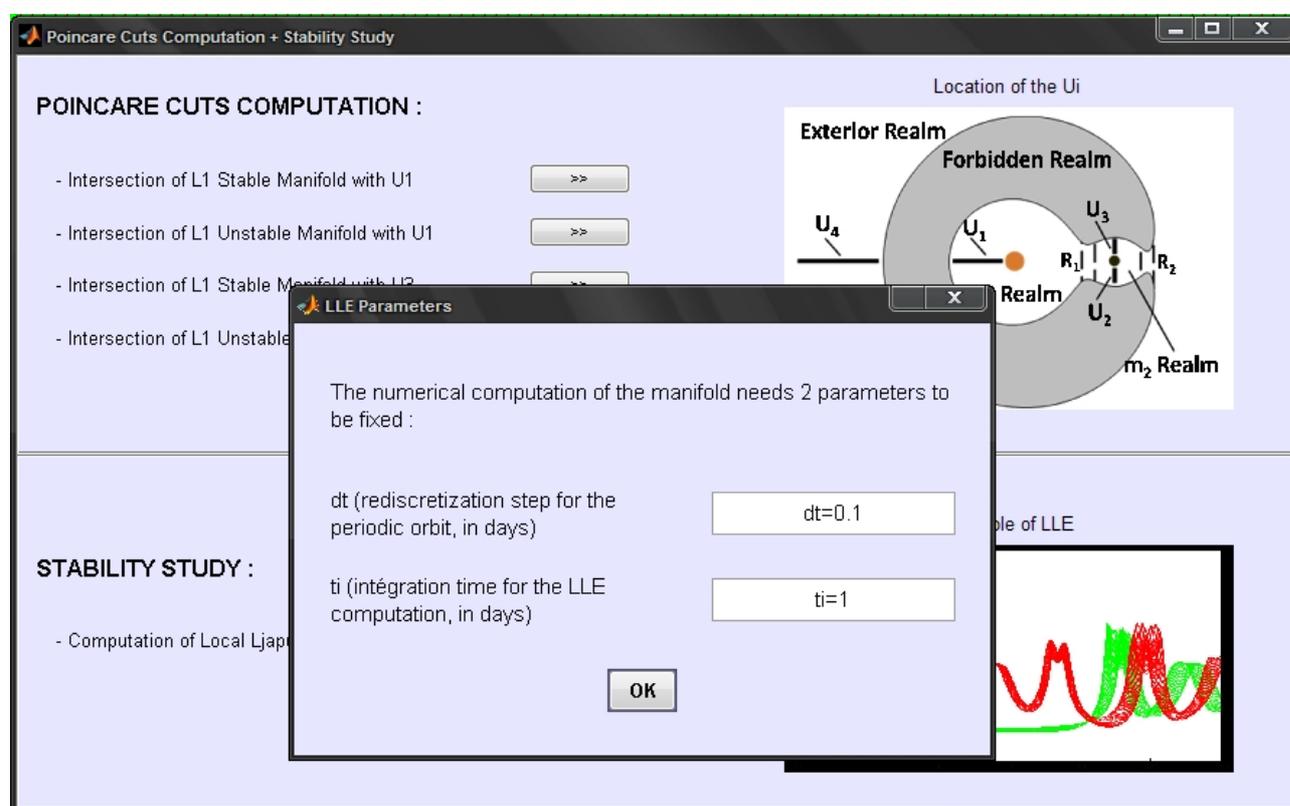


FIGURE A.11 – Fenêtre de saisie des paramètres nécessaires au calcul numérique des Exposants Locaux de Lyapunov.

Et ensuite, la démarche de saisie des paramètres et la présentation du résultat sont similaires au cas de l'orbite périodique.

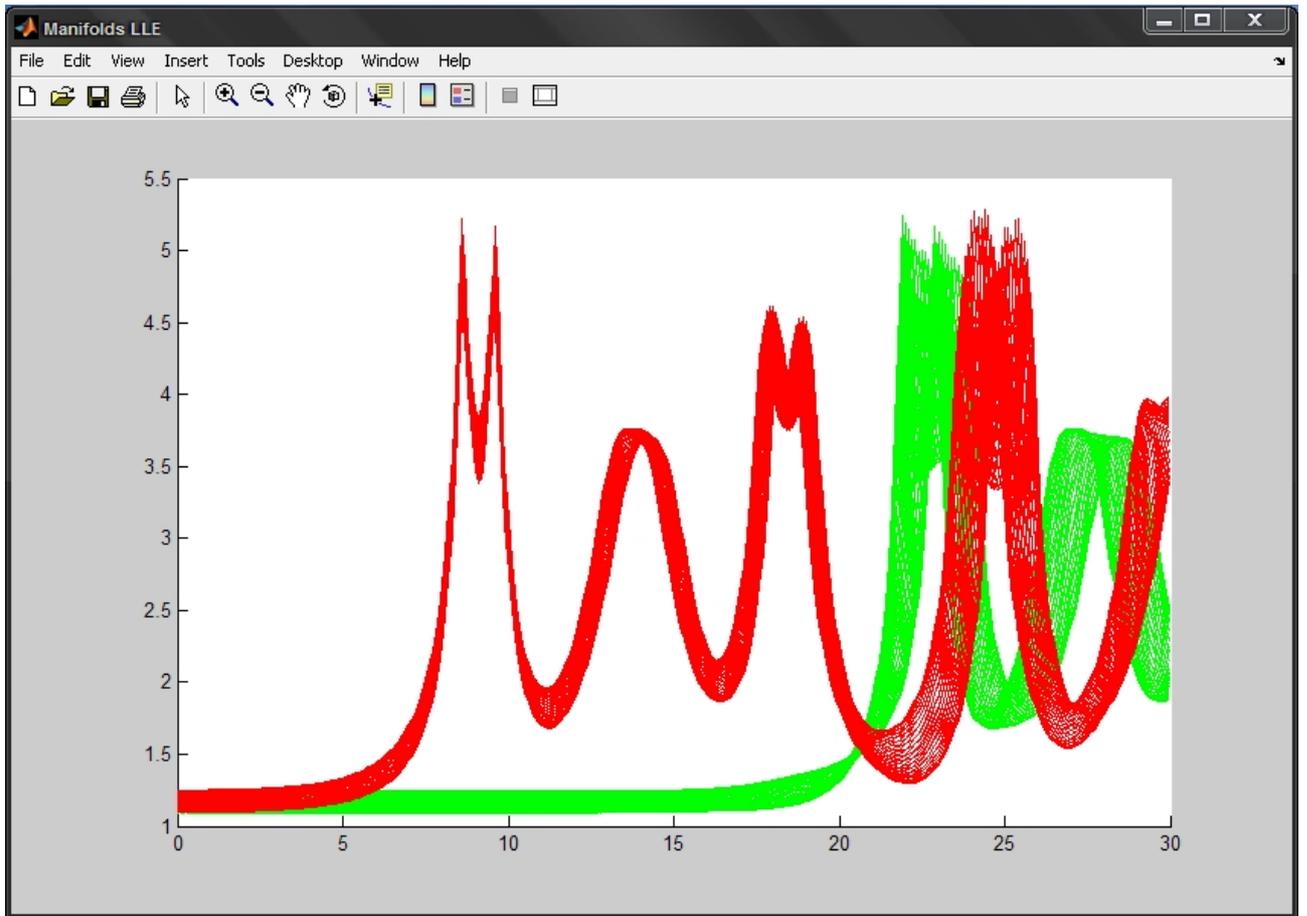


FIGURE A.12 – Exposants Locaux de Lyapunov de variétés invariantes.

A.3.5 Extension du logiciel

Ce logiciel avec interface graphique est un préliminaire à un service de simulation de missions spatiales. Le calcul d'un transfert entre une des primaires et une orbite périodique est envisagé. Il pourrait également permettre de calculer des orbites hétéroclines et des trajectoires de transit permettant de visiter de nombreuses régions de l'espace. Tous les éléments nécessaires à la réalisation de telles missions sont dès à présent disponibles sur le logiciel. En effet, pour calculer un transfert Terre-halo, par exemple, il suffit de calculer, avec le logiciel, l'orbite de halo du système Soleil-Terre de son choix, puis de propager sa variété stable jusqu'au voisinage de la Terre. De même, pour calculer une trajectoire transittant entre différentes régions de l'espace, il suffit de calculer les intersections entre variétés et surfaces de Poincaré, ce que le logiciel permet déjà de faire avec grande précision. L'utilisateur peut donc dès à présent exporter les calculs de ces différents éléments caractéristiques et les mettre à la contribution de la mission de son choix. A court terme, l'utilisateur pourra même passer directement par le logiciel pour arriver à ses fins, le même soin étant pris au niveau ergonomique pour cette extension du logiciel, afin de rendre son utilisation toujours intuitive.

Annexe B

Détails de la procédure de Lindstedt Poincaré

Dans cet appendice, on détaille les étapes de calcul de la méthode de Lindstedt Poincaré utilisée pour obtenir une approximation analytique au troisième ordre des orbites de Lissajous en huit.

On rappelle tout d'abord les équations différentielles à résoudre, et les principes de la méthode de Lindstedt Poincaré.

- Au premier ordre en A , on résout l'équation différentielle :

$$\begin{cases} A_x \ddot{x}_0 - 2A_x \dot{y}_0 - (1 + 2c_2)A_x x_0 = 0 \\ A_x \ddot{y}_0 + 2A_x \dot{x}_0 + (c_2 - 1)A_x y_0 = 0 \\ A_z \ddot{z}_0 + A_z \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 z_0 = 0 \end{cases}$$

- A l'ordre 2 en A , on cherche à déterminer la valeur de ν_1 permettant d'éliminer les termes séculaires, puis on résout l'équation différentielle résultante :

$$\begin{cases} A^2 \ddot{x}_1 - 2A^2 \dot{y}_1 - (1 + 2c_2)A^2 x_1 = -2\nu_1 A_x \ddot{x}_0 + 2\nu_1 A_x \dot{y}_0 + \frac{3}{2}(2A_x^2 x_0^2 - A_x^2 y_0^2 - A_z^2 z_0^2) \\ A^2 \ddot{y}_1 + 2A^2 \dot{x}_1 + (c_2 - 1)A^2 y_1 = -2\nu_1 A_x \ddot{y}_0 - 2\nu_1 A_x \dot{x}_0 - 3c_3 A_x^2 x_0 y_0 \\ A^2 \ddot{z}_1 + \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 A^2 z_1 = -2\nu_1 A_z \ddot{z}_0 - 3c_3 A_x A_z x_0 z_0 \end{cases}$$

- A l'ordre 3 en A , on cherche à déterminer la valeur de ν_2 permettant d'éliminer les termes séculaires, puis on résout l'équation différentielle résultante :

$$\begin{cases} A^3 \ddot{x}_2 - 2A^3 \dot{y}_2 - (1 + 2c_2)A^3 x_2 = -2\nu_1 A^2 \ddot{x}_1 - (\nu_1 + 2\nu_2)A_x \ddot{x}_0 + 2\nu_1 A^2 \dot{y}_1 + 2A^3 \dot{y}_2 + 2\nu_2 A_x \dot{y}_0 \\ A^3 \ddot{y}_2 + 2A^3 \dot{x}_2 + (c_2 - 1)A^3 y_2 = -2\nu_1 A^2 \ddot{y}_1 - 2\nu_1 A^2 \dot{x}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_x \ddot{y}_0 - 2\nu_2 A_x \dot{x}_0 \\ \quad - 3c_3(A_x A^2 x_0 y_1 + A_x A^2 y_0 x_1) \\ \quad - \frac{3}{2}c_4 A_x y_0 (4A_x^2 x_0^2 - A_x^2 y_0^2 - A_z^2 z_0^2) \\ A^3 \ddot{z}_2 + \left(\frac{\omega_p}{2}\right)^2 A^3 z_2 = -2\nu_1 A^2 \ddot{z}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_z \ddot{z}_0 \\ \quad - 3c_3(A_x A^2 x_0 z_1 + A_z A^2 x_1 z_0) + \Delta A_z z_0 \end{cases}$$

Au premier ordre en A , on trouve la solution de référence voulue

$$\begin{pmatrix} x_0(\tau) \\ y_0(\tau) \\ z_0(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\omega_p\tau + \phi) \\ \kappa \sin(\omega_p\tau + \phi) \\ \sin(\frac{\omega_p}{2}\tau + \psi) \end{pmatrix}$$

C'est ce à quoi nous nous attendions. Tout avait été fait dans ce but.

A l'ordre 2 en A , on trouve qu'il suffit de choisir $\nu_1 = 0$ pour éliminer les termes séculaires. Avec ce choix de ν_1 , l'équation différentielle résultante s'écrit :

$$\begin{cases} A^2\ddot{x}_1 - 2A^2\dot{y}_1 - (1 + 2c_2)A^2x_1 = \frac{3}{2}(2A_x^2x_0^2 - A_x^2y_0^2 - A_z^2z_0^2) \\ A^2\dot{y}_1 + 2A^2\dot{x}_1 + (c_2 - 1)A^2y_1 = -3c_3A_x^2x_0y_0 \\ A^2\ddot{z}_1 + (\frac{\omega_p}{2})^2A^2z_1 = -3c_3A_xA_zx_0z_0 \end{cases}$$

Cette équation différentielle se résout typiquement en utilisant le logiciel MAPLE. On trouve

$$A^2 \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ y_1(\tau) \\ z_1(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos(2\omega_p\tau + \phi) \\ (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin(2\omega_p\tau + \phi) \\ \delta_n d_{21}A_xA_z(\cos(2\frac{\omega_p}{2}\tau + \psi) - 3) \end{pmatrix}$$

Ensuite, (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) étant déterminés, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle à l'ordre 3 en A :

$$\begin{cases} A^3\ddot{x}_2 - 2A^3\dot{y}_2 - (1 + 2c_2)A^3x_2 = -2\nu_1A^2\ddot{x}_1 - (\nu_1 + 2\nu_2)A_x\ddot{x}_0 + 2\nu_1A^2\dot{y}_1 + 2A^3\dot{y}_2 + 2\nu_2A_x\dot{y}_0 \\ A^3\ddot{y}_2 + 2A^3\dot{x}_2 + (c_2 - 1)A^3y_2 = -2\nu_1A^2\ddot{y}_1 - 2\nu_1A^2\dot{x}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_x\ddot{y}_2 - 2\nu_2A_x\dot{x}_0 \\ \quad - 3c_3(A_xA^2x_0y_1 + A_xA^2y_0x_1) \\ \quad - \frac{3}{2}c_4A_xy_0(4A_x^2x_0^2 - A_x^2y_0^2 - A_z^2z_0^2) \\ A^3\ddot{z}_2 + (\frac{\omega_p}{2})^2A^3z_2 = -2\nu_1A^2\ddot{z}_1 - (\nu_1^2 + 2\nu_2)A_z\ddot{z}_0 \\ \quad - 3c_3(A_xA^2x_0z_1 + A_zA^2x_1z_0) + \Delta A_zz_0 \end{cases}$$

où les seconds membres de l'équation différentielle sont désormais déterminés. On trouve que la suppression des termes séculaires dans les équations au troisième ordre en x et y s'obtient en prenant :

$$\nu_2 = s_1A_x^2 + s_2A_z^2$$

où

$$s_1 = \frac{1}{2\lambda[\lambda(1 + \kappa^2) - 2\kappa]} \left(\frac{3}{2}c_3[2a_{21}(\kappa^2 - 2) - a_{23}(\kappa^2 + 2) - 2\kappa b_{21}] - \frac{3}{8}(3\kappa^4 - 8\kappa^2 + 8) \right)$$

$$s_2 = \frac{1}{2\lambda[\lambda(1 + \kappa^2) - 2\kappa]} \left(\frac{3}{2}c_3[2a_{22}(\kappa^2 - 2) - a_{24}(\kappa^2 + 2) + 2\kappa b_{22} + 5d_{21}] + \frac{3}{8}c_4(12 - \kappa^2) \right)$$

avec

$$\kappa = \frac{1}{2\lambda}(\lambda^2 + 1 + 2c_2)$$

et λ s'obtient de la résolution de l'équation suivante :

$$\lambda^4 - (c_2 - 2)\lambda^2 - (c_2 - 1)(1 + 2c_2) = 0.$$

Les expressions des coefficients a_{ij} , b_{ij} et d_{ij} sont données à la fin de cette appendice.

Les termes séculaires qui apparaissent dans l'équation en z du troisième ordre ne peuvent, quant à eux, pas être éliminés de la manière usuelle de la méthode de Lindstedt Poincaré, comme ν_1 et ν_2 . Par conséquent, il est nécessaire de spécifier une contrainte au niveau des amplitudes et des angles de phase pour éliminer les termes séculaires qui restent. La relation de contrainte au niveau des amplitudes est la suivante :

$$l_1 A_x^2 + l_2 A_z^2 + \Delta = 0,$$

où

$$\begin{aligned} l_1 &= a_1 + 2l^2 s_1, \\ l_2 &= a_2 + 2l^2 s_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{3}{2}c_3(2a_{21} + a_{23} + 5d_{21}) - \frac{3}{8}c_4(12 - k^2), \\ a_2 &= \frac{3}{2}(a_{24} - 2a_{22}) + \frac{9}{8}c_4. \end{aligned}$$

La contrainte au niveau des angles de phase est :

$$\psi = \phi + \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3.$$

En fixant ces contraintes et la valeur de ν_2 pour éliminer les termes séculaires en (x, y) , il reste à résoudre l'équation différentielle du troisième ordre afin d'obtenir les expressions de (x_2, y_2, z_2) . On trouve :

$$A^3 \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ y_2(\tau) \\ z_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_xA_z^2) \cos(3\omega_p\tau + \phi) \\ (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_xA_z^2) \sin(3\omega_p\tau + \phi) \\ \delta_n(d_{32}A_zA_x^2 - d_{31}A_z^3) \cos(3\frac{\omega_p}{2}\tau + \psi) \end{pmatrix}$$

Finalement, une approximation analytique du troisième ordre des orbites de Lissajous en huit s'écrit :

$$\begin{cases} x &= a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos(\tau_1) + (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos(2\tau_1) + (a_{31}A_x^3 - a_{32}A_xA_z^2) \cos(3\tau_1), \\ y &= kA_x \sin(\tau_1) + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin(2\tau_1) + (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_xA_z^2) \sin(3\tau_1), \\ z &= \delta_n A_z \cos(\tau_2) + \delta_n d_{21} A_x A_z (\cos(2\tau_2) - 3) + \delta_n (d_{32} A_z A_x^2 - d_{31} A_z^3) \cos(3\tau_2) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $\tau_1 = \omega_p \tau + \phi$, $\tau_2 = \frac{\omega_p}{2} \tau + \psi$, $\delta_n = 2 - n$ et les coefficients a_{ij} , b_{ij} et d_{ij} sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{3c_3(\kappa^2 - 2)}{4(1 + 2c_2)} \\
a_{22} &= \frac{3c_3}{4(1 + 2c_2)} \\
a_{23} &= -\frac{3c_3\lambda}{4\kappa d_1} [3\kappa^3\lambda - 6\kappa(\kappa - \lambda) + 4] \\
a_{24} &= -\frac{3c_3\lambda}{4\kappa d_1} (2 + 3\kappa\lambda) \\
a_{31} &= -\frac{9\lambda}{4d_2} [4c_3(\kappa a_{23} - b_{21}) + \kappa c_4(4 + \kappa^2)] \\
&\quad + \left(\frac{9\lambda^2 + 1 - c_2}{2d_2} \right) [3c_3(2a_{23} - \kappa b_{21}) + c_4(2 + 3\kappa^2)] \\
a_{32} &= -\frac{1}{d_2} \left\{ \frac{9\lambda}{4} [4c_3(\kappa a_{24} - b_{22}) + \kappa c_4] \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2}(9\lambda^2 + 1 - c_2)[c_3(\kappa b_{22} + d_{21} - 2a_{24}) - c_4] \right\} \\
b_{21} &= -\frac{3c_3\lambda}{2d_1} (3\kappa\lambda - 4) \\
b_{22} &= \frac{3c_3\lambda}{d_1} \\
b_{31} &= \frac{3}{8d_2} \{ 8\lambda[3c_3(\kappa b_{21} - 2a_{23}) - c_4(2 + 3\kappa^2)] \\
&\quad + (9\lambda^2 + 1 + 2c_2)[4c_3(\kappa a_{23} - b_{21}) + \kappa c_4(4 + \kappa^2)] \} \\
b_{32} &= \frac{1}{d_2} \{ 9\lambda[3c_3(\kappa b_{22} + d_{21} - 2a_{24}) - c_4] \\
&\quad + \frac{3}{8}(9\lambda^2 + 1 + 2c_2)[4c_3(\kappa a_{24} - b_{22}) + \kappa c_4] \} \\
d_{21} &= -\frac{c_3}{3\lambda^2} \\
d_{31} &= \frac{3}{64\lambda^2} (4c_3 a_{24} + c_4) \\
d_{32} &= \frac{3}{64\lambda^2} [(4c_3 a_{23} - d_{21}) + c_4(4 + \kappa^2)]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{3\lambda^2}{\kappa} [\kappa(6\lambda^2 - 1) - 2\lambda] \\
d_2 &= \frac{8\lambda^2}{\kappa} [\kappa(11\lambda^2 - 1) - 2\lambda]
\end{aligned}$$

Liste des notations

- PCR3BP : Planar Circular Restricted Three-Body Problem
- CR3BP : Circular Restricted Three-Body Problem
- 2BP : Two-Body Problem
- m_1 : masse de la plus grosse primaire (parfois assimilée à la primaire elle-même)
- m_2 : masse de la plus petite primaire (parfois assimilée à la primaire elle-même)
- μ : masse normalisée de m_2 (masse réduite), $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$
- L_i ($i \in \{1, 2, \dots, 5\}$) : i -ème point de Lagrange
- $L_i(\text{ST})$: point de Lagrange L_i dans le système Soleil-Terre
- $L_i(\text{TL})$: point de Lagrange L_i dans le système Terre-Lune
- G : constante universelle de gravité
- M : matrice de monodromie
- E^s : direction attractive du champ
- E^i : direction répulsive du champ
- W^s : linéarisé de la variété stable d'une orbite périodique
- W^i : linéarisé de la variété instable d'une orbite périodique
- A_x, A_y, A_z : excursions en x, y, z d'une orbite périodique

Valeurs des constantes

Système Soleil-Terre

- Masse du Soleil : 1.9889210^{30} kg
- Masse de la Terre : 5.97210^{24} kg
- $\mu = 3.0403610^{-6}$
- Distance Soleil-Terre : 149.59787 millions de km
- Distance Terre- L_1 : environ 1.498 millions de km
- Distance Terre- L_2 : environ 1.507 millions de km
- Distance Terre- L_3 : environ 300 millions de km

Système Terre-Lune

- Masse de la Terre : 5.97210^{24} kg
- Masse de la Lune : 7.34910^{22} kg
- $\mu = 1.21529310^{-2}$
- Distance Terre-Lune : 384403 km
- Distance Lune- L_1 : 57854 km
- Distance Lune- L_2 : 64367 km
- Distance Lune- L_3 : 766080 km

Bibliographie

- [1] Abarbanel, H.D.I., R. Brown, and M.B. Kennel, *Variation of Lyapunov Exponents on a Strange Attractor*, Journal of Nonlinear Science, Vol.1, 1991, pp. 175-199.
- [2] Abraham R. et J. E. Marsden, *Foundation of Mechanics*. Addison-Wesley, New-York, 2nd edition, 1978.
- [3] Anderson Rodney L. , M. W. Lo and G. H. Born, *Application of Local Lyapunov Exponents to Maneuver Design and Navigation in the Three-Body Problem*. AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 03-544, Big Sky, Montana, August 3-7, 2003.
- [4] Allgower E. L. et K. Georg, *Introduction to numerical continuation methods*, Classics in Applied Math. 45, SIAM Philadelphia, 2003.
- [5] Arnold V. I., *Equations différentielles ordinaires*, Editions Mir, Moscou, traduction française 1974.
- [6] Barden B.T., *Using stable manifolds to generate transfers in the circular restricted problem of three bodies*, M.S. Thesis, Purdue University, 1994.
- [7] Belbruno Edward A. and Carrico John P., *Calculation of Weak Stability Boundary Ballistic Lunar Transfer Trajectories*. AIAA 2000-4142, 2000.
- [8] Benettin Giancarlo, Galgani Luigi, Giorgilli Antonio and Strelcyn Jean-Marie, *Lyapunov Characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems ; a method for computing all of them. Part 1 : Theory, and Part 2 : Numerical Application*. Meccanica, March 1980.
- [9] Budd C.J., A. Iserles, *Geometric Integration*, Phil. Trans. Roy. Soc. 357 A, pp. 943-1133, 1999.
- [10] Benettin Giancarlo, Galgani Luigi and Strelcyn Jean-Marie, *Kolmogorov entropy and numerical experiments*. Physical Review A, Vol. 14, Num. 6, 1976.

- [11] Bonnard B., Faubourg L. and Trélat E., *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. Mathématiques et Applications 51 (2005).
- [12] Breakwell John V. et Brown John V., *The halo family of 3-dimensional of periodic orbits in the Earth-Moon restricted 3-body problem*. Celestial Mechanics 20, pp. 389-404, 1979.
- [13] Conley, *On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point. I. Oscillating, asymptotic, and capture orbits*, J. Differential Equations, 5, 136-158.
- [14] De Nockere *Tables numériques des polynômes de Legendre*. ARB (8e édition - 1949) Académie Royale des Sciences des Lettres des Beaux Arts de Belgique, 1949.
- [15] Dunham David W. and Farquhar Robert W., *Libration Points Missions*. International Conference on Libration Points and Applications (Girona, Spain, 10-14 June, 2002), 1978-2002.
- [16] Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. Novi commenttarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **11**, 144–151. In Oeuvres, Seria Secunda tome XXv Commentationes Astronomicae (page 286), 1767.
- [17] Farquhar Robert W., *Station-keeping in the vicinity of collinear libration points with an application to a Lunar communications problem*. Space Flight Mechanics, Science and Technology Series **11**, 519–535, 1966.
- [18] Farquhar Robert W., *A Halo-Orbit Lunar Station*. Astronautics & Aeronautics, Vol. 10, No. 6, 59-63, 1972.
- [19] Gómez, G., W. S. Koon, M. Lo, J. E. Marsden, J. Masdemont, and S. D. Ross, *Invariant manifolds, the spatial three-body problem and space mission design*. Adv. Astronaut. Sci. **109**, 3–22, 2001.
- [20] G. Gómez, J. Masdemont, and C. Simó, *Lissajous orbits around halo orbits*. Adv. Astronaut. Sci. **95**, 117–34, 1997.
- [21] G. Gómez, J. Masdemont, and C. Simó, *Quasihalo orbits associated with libration points*. J. Astronaut. Sci. **46**, 135–76, 1998.
- [22] Gómez G., Jorba A., Masdemont J., and Simó C., *Study refinement of semi-analytical halo orbit theory*, Final Report, ESOC Contract No.8625/89/D/MD(SC), 1991a.
- [23] Gómez, G., W. S. Koon, M. Lo, J. E. Marsden, J. Masdemont, and S. D. Ross, *Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial three-body problem*, Nonlinearity, **17**, pp. 1571-1606, 2004.

- [24] Holmes P., *Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and "chaos"*, Physics Reports, 193, pp. 137-163, 1990.
- [25] Howell K. C., Mains D.L., and Barden B.T., *Transfers trajectories from Earth parking orbits to Sun-Earth halo orbits*, in AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Cocoa Beach, Florida, Paper No. AAS 94-160, 1994.
- [26] Howell K., B. Barden and M. Lo., *Application of dynamical systems theory to trajectory design for a libration point mission*. The Journal of the Astrodynamical Sciences, 45, 161-178, 1997.
- [27] Howell K., B. Barden R.S. Wilson and M.W. Lo., *Trajectory design using a dynamical systems approach with application to Genesis*, in AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Sun Valley, Idaho, Paper No. AAS 97-709, 1997.
- [28] K.C. Howell, H.J. Pernicka, *Numerical determination of Lissajous orbits in the restricted three-body problem*. Celestial Mechanics **41**, 107–124, 1988.
- [29] A. Jorba, J. Masdemont, *Dynamics in the center manifold of the collinear points of the restricted three-body problem*. Physica D **132**, 189–213, 1999.
- [30] Koon W. S., Lo M. W., Marsden J. E., Ross S. D., *Dynamical systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. Marsden Books. ISBN 978-0-615-24095-4, 2008.
- [31] Koon W. S., Lo M. W., Marsden J. E., Ross S. D., *Dynamical systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. Proc. Equadiff99, Berlin, Germany, 1999.
- [32] Lagrange, J.-L., *Essai sur le problème des trois corps*, 1772. Prix de l'académie royale des Sciences de paris, tome IX, in vol. 6 of Oeuvres de Lagrange (Gauthier-Villars, Paris, 1873), 272–282.
- [33] Adrien Marie Legendre, *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures : sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures*, Courcier (Paris, 1811-1819).
- [34] Lo, M. W. and Ross, S. D., *The Lunar L1 Gateway : Portal to the Stars and Beyond*. AIAA Space 2001 Conference (Albuquerque, New Mexico, August 28-30), 2001.
- [35] Lo, M. W. and Chung, M. J., *Lunar Samplar Return via the Interplanetary Highway*. Paper AIAA 2002-4718, AIAA/AAS Astrodunamics Specialist Conference and Exhibit (Monterey, California, August 5-8), 2002.

- [36] Lyapunov A. M., *The General Problem of the Stability of Motion*, Comm. Soc. Math. Khar-kow (in Russian, reprinted in English, Taylor & Francis, London, 1992), 1892.
- [37] Mains D. L., *Transfer Trajectories from Earth Parking orbits to L_1 Halo Orbits*, M.S. Thesis, Purdue University (1993).
- [38] Marchal, C., *The Three-Body Problem*. Elsevier, Amsterdam (1990).
- [39] Marsden J. E., Koon W. S., Lo M. W., Ross S. D., *Low energy transfer to the Moon*, Celestial Mechanics Dyn. Astron., **81**, 27-38, 2001.
- [40] Mc Gehee R., *Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem*, PhD Thesis, University of Wisconsin, Madison (1969).
- [41] McLachlan R.I., G.R.W. Quispel, *Six Lectures on the Geometric Integration of ODEs*, to appear in *Foundations of Computational Mathematics*, Oxford 1999, eds. R.A. De Vore et. al., Cambridge University Press., Cambridge.
- [42] McLaughlin W. I., *Walter Hohmann's roads in space*, Journal of Space Mission Architecture, Issue 2 : pp.1-14 (2000).
- [43] Meyer, K. R., Hall, G.R., *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Applied Mathematical Sciences 90, Springer-Verlag, New-York (1992).
- [44] Miller J.K. and Belbruno E.A., *Sun-Perturbated Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 4, 770-775, 1993.
- [45] Moser J., *On the generalization of a theorem of A. Lyapunov*. Commun. Pure Appl. Math. **11**, 257-271, 1958.
- [46] Osedelec, V.I., *A Multiplicative Ergodic Theorem Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems*, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 19, Transaction of the Moscow Mathematical Society, Vol. 19, pp. 197-231, 1968.
- [47] Poincaré H., *New methods of Celestial Mechanics*, American Institute of Physics, 1993.
- [48] Poincaré H., *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica 13, 1-270, 1890.
- [49] Richardson David L., *Analytic Construction of periodic orbits about the collinear points*, Celestial mechanics 22, 241-253, 1980.

- [50] Ross, S. D., W. S. Koon, M. W. Lo, and J. E. Marsden, *Design of dynamical systems theory to a very low energy transfer*, in the 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Maui, Hawaii, Paper No. AAS 04-289, 2004.
- [51] Ross Shane David, *Cylindrical Manifolds and Tubes Dynamics in the Restricted Three-Body Problem* (Ross Thesis), California Institute of Technology, Pasadena, California, 2004.
- [52] J.M., M.-P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman Hall, 1994.
- [53] Simó C., G. Gómez, J. Masdemont, *Lissajous orbits around halo orbits*, AAS 97-106, 1997.
- [54] Simó C., *Dynamical systems methods for space missions on a vicinity of colinear libration points*, in Simó C., editor, *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom* (S'Agaró, 1995), volume 533 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., pages 223-241, Dordrecht. Kluwer Acad. Publ., 1999.
- [55] Szebehely, V. G., *Theory of orbits : the restricted problem of three bodies*, Academic Press, New-York (1967).
- [56] Watson, L.T., *A globally convergent algorithm for computing fixed points of C^2 maps*. Applied Math. Comput. 5, 297-311 (1979).
- [57] Wolf Alan, Jack B. Swift, Harry L. Swinney and John A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica, North-Holland, Amsterdam (1985).
- [58] Zazzera F. Bernelli, F. Topputo, M. Massari, *Assessment of mission design including utilization of libration points and weak stability boundaries*. (2004).

Web Sites

- [59] *Genesis Mission* - <http://genesismission.jpl.nasa.gov>

- [60] *Halo Orbits of the Circular Restricted Three Body Problem* -
http://www.geom.umm.edu/megraw/CR3BP_html/cr3bp_halo.html

- [61] *Hiten Mission* - http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/nmc_sc/hiten.html

- [62] *ISEE-3 Mission* - <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/isee.html>

- [63] *SOHO Mission* - http://www.esa.int/esaSC/120373_index_0_m.html