



**HAL**  
open science

## Etude de diffusions à valeurs dans des variétés lorentziennes.

Jürgen Angst

► **To cite this version:**

Jürgen Angst. Etude de diffusions à valeurs dans des variétés lorentziennes.. Mathématiques [math].  
Université de Strasbourg, 2009. Français. NNT : 2009STRA6121 . tel-00418842

**HAL Id: tel-00418842**

**<https://theses.hal.science/tel-00418842>**

Submitted on 21 Sep 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG  
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

THÈSE

*en vue d'obtenir le grade de docteur de l'Université de Strasbourg,  
École doctorale de mathématiques, sciences de l'information et de  
l'ingénieur; présentée et soutenue publiquement le 25.09.09 par*

Jürgen Angst

---

Étude de diffusions à valeurs  
dans des variétés lorentziennes

---

*Thèse encadrée par* M. Jacques FRANCHI  
M. Yves LE JAN

*soutenue après avis de* M. Marc ARNAUDON  
M. Jean PICARD

*devant la commission d'examen formée par*

M. Marc ARNAUDON	<i>rapporteur</i>
M. Michel ÉMERY	<i>examineur</i>
M. Jacques FRANCHI	<i>directeur</i>
M. Yves LE JAN	<i>co-directeur</i>
M. Jean PICARD	<i>rapporteur</i>
M. Anton THALMAIER	<i>examineur</i>



---

# Remerciements

---

---

En premier lieu, je tiens à remercier Jacques Franchi et Yves Le Jan pour avoir encadré cette thèse et ainsi accompagné mes premiers pas dans la recherche. Merci en particulier à Jacques pour sa disponibilité et sa patience, à Yves pour sa clairvoyance et ses bons conseils.

Marc Arnaudon et Jean Picard m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche ingrate de rapporter cette thèse, qu'ils en soient vivement remerciés. Un grand merci également à Anton Thalmaier et Michel Émery d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Tout comme Marc et Jean, leur curiosité pour mon travail a été très encourageante et leur bienveillance exemplaire.

Merci à Ismaël Bailleul pour m'avoir fait profiter de son expérience min-kowskienne, ainsi qu'à Fabrice Debbasch pour m'avoir apporté son expertise concernant l'interprétation physique des processus étudiés dans ce manuscrit.

Mon aventure mathématique se poursuit à l'université de Genève, merci à Stanislav Smirnov, Yvan Velenik et Vincent Beffara pour leur accueil. Pour de basses raisons administratives, cette nouvelle étape helvétique n'aurait pu se faire sans l'intervention bienvenue de Marie-Claude David et Pierre Pansu, un grand merci à eux.

Mon goût pour les aléas et la géométrie s'est forgé à Orsay où j'ai eu la chance d'avoir d'excellents professeurs. Il serait injuste de ne pas les remercier ici. Merci donc à Raphaël Cerf, Guy David, Olivier Raimond, Alano Ancona, Jean-Michel Bismut, Pascal Massart et un double merci à Wendelin Werner à qui ma venue à Strasbourg doit beaucoup.

Je garderai un excellent souvenir de ces quatre années passées en Alsace. Parmi les membres de l'IRMA, je tiens à remercier Yvonne Borell, Sandrine Cerdan, Claudine Bonnin pour leur gentillesse et leur professionnalisme. Merci également à Vincent Vigon pour sa bonne humeur et son écoute, à Claudine Mitschi et Christian Kassel pour leur bienveillance et les balades dans les Vosges. Merci à Scoum, gentil organisateur (entre autre) du séminaire des doctorants, à Adrien et mes anciens co-bureau. Merci à tous mes collègues doctorants, en particulier à Florian, Anne-Laure, Hélène, Audrey, Kees, Rémi, Vincent.

Plus personnellement, merci à mes (dés)alter ego Martin, Jehan, Loïc, Gaston, Antoine, Polo etc. pour leur amitié fidèle et précieuse qui mériterait que nous nous voyions plus souvent.

Merci à mes parents et ma soeur pour leur amour, leur confiance et pour m'avoir toujours soutenu lors des choix décisifs.

Enfin merci Agnès pour ta présence inestimable à mes côtés.

À Eva



---

# Table des matières

---

---

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
Problématique et motivations . . . . .	ix
Présentation de la première partie . . . . .	xiii
Présentation de la deuxième partie . . . . .	xv

## Un théorème limite central pour une classe de diffusions minkowskiennes

<b>I</b>	<b>Une classe de diffusions minkowskiennes</b>	<b>3</b>
1	Notations, rappels et historique . . . . .	4
2	Les diffusions minkowskiennes dans la littérature . . . . .	9
3	Une classe de diffusions minkowskiennes . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Preuve du théorème limite central principal</b>	<b>21</b>
1	Ergodicité de la diffusion euclidienne . . . . .	22
2	Utilisation de la méthode des martingales . . . . .	31
3	Asymptotique de la martingale $\mathbf{M}$ . . . . .	41
4	Deux corollaires du théorème limite central . . . . .	48
<b>III</b>	<b>Conséquences du théorème limite central</b>	<b>51</b>
1	Comportement asymptotique du ROUP . . . . .	52
2	Asymptotique de la diffusion de Dunkel-Hänggi . . . . .	55
3	Simulations numériques . . . . .	64

# Étude d'un mouvement brownien relativiste dans les espaces de Robertson-Walker

<b>I</b>	<b>Construction d'un mouvement brownien relativiste</b>	<b>73</b>
1	La diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski . . . . .	74
2	La construction de Franchi et Le Jan . . . . .	78
3	Les exemples précédemment étudiés . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Géométrie des espaces de Robertson-Walker</b>	<b>97</b>
1	Les espaces de Robertson-Walker . . . . .	98
2	Éléments de physique relativiste . . . . .	106
3	Géométrie des espaces de Robertson-Walker . . . . .	118
4	Hypothèses sur le facteur d'expansion . . . . .	122
<b>III</b>	<b>Étude des géodésiques dans les espaces RW</b>	<b>129</b>
1	Connexité et complétude des géodésiques . . . . .	130
2	Intégration des géodésiques de genre temps . . . . .	132
3	Intégration des géodésiques de lumière . . . . .	136
4	Asymptotique et prolongement des géodésiques . . . . .	139
<b>IV</b>	<b>La diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces RW</b>	<b>153</b>
1	Systèmes d'équations satisfaits par la diffusion . . . . .	154
2	Mise en évidence de sous-diffusions naturelles . . . . .	163
3	Existence, unicité, temps de vie des solutions . . . . .	169
4	Loi d'entrée de la diffusion en l'origine des temps . . . . .	173
<b>V</b>	<b>Étude de la diffusion temporelle</b>	<b>181</b>
1	Asymptotique dans un univers éternel . . . . .	182
2	Asymptotique dans un univers mortel . . . . .	201
<b>VI</b>	<b>Étude des composantes spatiales de la diffusion</b>	<b>211</b>
1	La diffusion radiale en courbure négative . . . . .	212
2	Asymptotique lorsque la fibre est euclidienne . . . . .	233
3	Asymptotique lorsque la fibre est hyperbolique . . . . .	250
4	Asymptotique lorsque la fibre est sphérique . . . . .	262
5	Récapitulatif de nos résultats . . . . .	267

---

<b>VII</b>	<b>La diffusion régénérée dans un univers mortel</b>	<b>273</b>
1	Prolongement de la diffusion . . . . .	274
2	Asymptotique de la diffusion régénérée . . . . .	277
<b>VIII</b>	<b>Frontière de Poisson de la diffusion</b>	<b>281</b>
1	Un théorème de Liouville . . . . .	282
2	Lorsque la fibre est euclidienne . . . . .	286
3	Quelques remarques . . . . .	289
	<b>Bibliographie</b>	<b>291</b>



---

# Introduction

---

---

## PROBLÉMATIQUE ET MOTIVATIONS

L'objet de ce mémoire est l'étude de processus stochastiques à valeurs dans des variétés lorentziennes. En particulier, on s'intéresse au comportement asymptotique en temps long de ces processus et on souhaite voir en quoi celui-ci reflète la géométrie des variétés sous-jacentes. Nous limitons notre étude à celle de diffusions, c'est-à-dire de processus markoviens continus, à valeurs dans le fibré tangent unitaire de variétés lorentziennes fortement symétriques. L'introduction et l'étude de tels processus ont des motivations purement mathématiques mais aussi physiques, que nous décrivons dans les deux prochains paragraphes.

### Des motivations physiques

Les théories physiques du mouvement brownien et de la relativité remontent toutes deux au début du vingtième siècle. Elles remontent précisément à l'année 1905, *Annus mirabilis*<sup>1</sup> où Einstein publiait les quatre articles [Ein05a, Ein05b, Ein05c, Ein05d] dans *Annalen der Physik*. Ces deux théories ont eu chacune un retentissement extraordinaire. Les travaux d'Einstein sur le mouvement brownien ont en particulier permis de mettre en place un protocole expérimental pour mesurer avec précision la constante d'Avogadro, et ainsi justifier la nature discrète de la matière qui n'était jusqu'alors qu'hypothétique. Il n'est pas utile d'insister sur la véritable révolution scientifique et philosophique consécutive à l'introduction du principe de relativité. Pourtant, ces deux théories sont incompatibles comme il ressort clairement du fait que le flux de la chaleur se propage instantanément à l'infini. Face à cette incompatibilité, on aurait pu s'attendre à voir fleurir dès le début du vingtième siècle les travaux cherchant à concilier mouvement brownien et principe de relativité. Il a fallu pourtant attendre une soixantaine d'années avant de voir émerger des travaux concernant l'étude de processus stochastiques dans le cadre de la

---

1. Cette thèse a débuté en 2005 où l'on fêtait à l'IHP le centenaire des travaux d'Einstein. Le lecteur curieux pourra consulter les excellents articles [Dup05] et [Dar05] du séminaire Poincaré organisé pour l'occasion, téléchargeables (vorsicht Hadopi) à l'adresse <http://www.bourbaphy.fr>

relativité restreinte. C'est en effet au milieu des années 1960 qu'apparaissent les premiers travaux concernant des processus de Markov à valeurs dans l'espace de Minkowski. Dans [Dud66], Dudley a ainsi introduit une diffusion à valeurs dans l'espace tangent unitaire de l'espace de Minkowski, diffusion qui possède l'invariance lorentzienne. À la même époque, motivés par la modélisation de plasmas relativistes dans l'optique d'une fusion nucléaire, les travaux concernant la mécanique statistique relativiste non quantique se multiplient dans la littérature physique. On peut citer par exemple les travaux pionniers de Hakim [Hak65, Hak67a, Hak67b, Hak68a, Hak68b] et les références de ces articles.

Cependant, de façon assez surprenante, il faut à nouveau attendre une trentaine d'années pour trouver de réelles avancées par rapport aux travaux de Dudley et Hakim. Dans [DMR97], Debbasch, Mallick et Rivet ont ainsi introduit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP) pour décrire le mouvement aléatoire d'une particule ponctuelle baignant dans un fluide relativiste. Ce processus a été étudié dans [DR98, BDR01a, BDR01b, BDR01c] puis généralisé au cas courbe par Debbasch dans [Deb04]. Poursuivant le même objectif, dans [DH05a, DH05b] Dunkel et Hänggi ont à leur tour introduit une diffusion dans l'espace de Minkowski et étudié son comportement via des simulations numériques. D'autres diffusions relativistes sont apparues récemment dans la littérature physique, citons par exemple [Pav01, VB06, Hab09, Her09]. Bien que certains de ces processus aient été largement étudiés, des questions concernant leur comportement asymptotique restaient sans réponse. Par ailleurs, certaines affirmations couramment admises les concernant n'avaient pas de justification mathématique rigoureuse.

### **Des motivations mathématiques**

L'introduction de processus et de méthodes stochastiques dans le cadre riemannien remonte aux années 1960 et aux travaux de Kiyosi Itô sur le transport parallèle stochastique [Itô63]. Depuis ces travaux pionniers, les interactions entre théorie des probabilités et géométrie différentielle sont devenues un champ de recherche fructueux et en constante expansion. Parmi les nombreux résultats marquants obtenus via ces méthodes, on peut citer par exemple la preuve probabiliste du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer par Bismut dans [Bis84], la détermination d'applications harmoniques entre variétés riemanniennes via l'étude de semi-martingales [Ken98], ou encore l'étude de la frontière de Poisson sur les variétés de Cartan-Hadamard [HK92, ATU09]. Tous ces travaux font apparaître des liens très profonds entre le comportement local et asymptotique du mouvement brownien et plus généralement des semi-martingales sur une variété riemannienne et la géométrie

---

de cette variété. Une question très naturelle consiste alors à se demander si de tels liens perdurent lorsque la variété sous-jacente n'est plus riemannienne mais pseudo-riemannienne, en particulier lorsqu'elle est lorentzienne. Autrement dit, l'étude du mouvement brownien et plus généralement de processus stochastiques sur une variété lorentzienne nous apprend-elle quelque chose sur la géométrie de cette variété? Pour répondre à cette question, il faut bien entendu d'abord s'entendre ce qu'est un mouvement brownien sur une variété lorentzienne.

Comme nous l'avons déjà brièvement indiqué au paragraphe précédent, les premiers travaux concernant l'étude de processus stochastiques dans le cadre lorentzien sont ceux de Dudley dans les années 1960. Dans l'article [Dud66], Dudley a établi une classification des processus markoviens à valeurs dans le fibré tangent unitaire de l'espace de Minkowski qui possèdent l'invariance lorentzienne, c'est-à-dire dont la loi est invariante sur l'action du groupe de Lorentz, le groupe des isométries de l'espace de Minkowski. Il a ainsi montré que parmi ces processus, il en existe un et un seul dont les trajectoires sont continues, et donc qu'il existe un unique candidat naturel pour être qualifié de mouvement brownien dans l'espace de Minkowski. Dans un second article [Dud73], Dudley a ensuite étudié les propriétés asymptotiques de cette diffusion montrant en particulier que le processus est transitoire : il diverge vers l'infini dans une direction privilégiée, à l'image du mouvement brownien hyperbolique. Récemment, dans [Bai06, Bai08a], Bailleul a complété la description de Dudley en montrant que non seulement les trajectoires du mouvement brownien dans l'espace de Minkowski s'en vont à l'infini dans une direction privilégiée aléatoire, mais qu'elles convergent également vers un hyperplan asymptotique aléatoire.

De façon assez surprenante, hormis les récents travaux de Bailleul, les résultats de Dudley ont eu relativement peu d'écho. En particulier, la notion de mouvement brownien sur une variété lorentzienne générale est longtemps restée floue. Récemment, dans [FLJ07], Franchi et Le Jan ont étendu la construction de Dudley au cadre géométrique de la relativité générale. Ils ont en effet construit une diffusion à valeurs dans le fibré tangent unitaire d'une variété lorentzienne générale, diffusion dont la loi possède l'invariance lorentzienne. Leur construction est une adaptation au cadre lorentzien de la méthode du relèvement horizontal qui permet de construire une semimartingale sur une variété riemannienne en passant par le fibré des repères. Cette diffusion apparaît in fine comme le développement stochastique de la diffusion de Dudley. Son générateur infinitésimal est une perturbation du flot géodésique par le laplacien vertical sur le fibré tangent unitaire.

La diffusion de Franchi et Le Jan a déjà été étudiée dans quelques exemples : essentiellement l'espace de Minkowski où elle coïncide avec la diffusion de Dudley, l'espace de Schwarzschild qui est un des principaux modèles utilisés par les physiciens pour décrire le complémentaire d'un trou noir dans la théorie de la relativité générale, et enfin l'univers de Gödel, qui possède la propriété intéressante d'être à la fois une solution des équations d'Einstein et de contenir des courbes de genre temps fermées. Les espaces de Minkowski, Schwarzschild et Gödel sont tous les trois de courbure nulle. De l'étude de ces exemples, il ressort le fait que les trajectoires de la diffusion de Franchi et Le Jan semblent converger presque sûrement vers des géodésiques de lumière aléatoires de la variété sous-jacente. Dans [FLJ07], les auteurs conjecturent même la nature de la frontière de Poisson associée à la diffusion : celle-ci serait en bijection avec un ensemble de classes d'équivalence de géodésiques de lumière.

Le nombre d'exemples où la diffusion de Franchi et Le Jan a déjà été étudiée étant assez restreint, il est raisonnable, avant de chercher à confirmer ou à infirmer leurs prédictions, de décrire son comportement asymptotique sur d'autres exemples de variétés lorentziennes, en particulier des variétés de courbure non nulle. Par ailleurs, parmi les trois exemples ci-dessus, il en est un seul où l'on soit parvenu à décrire la frontière de Poisson de la diffusion. Seul Bailleul dans [Bai08a] a en effet déterminé explicitement la frontière de Poisson de la diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski. La détermination de la frontière de Poisson de la diffusion de Franchi et Le Jan sur un premier exemple de variété lorentzienne courbe est donc une question naturelle et motivante.

Ce mémoire est composé de deux parties largement indépendantes, de longueur et de nature inégales. La première partie du manuscrit est consacrée à la preuve d'un unique résultat, à savoir un théorème limite central pour une classe de diffusions à valeurs dans l'espace de Minkowski. Elle est motivée par les questions ouvertes de la littérature physique évoquées plus haut. Ce travail a fait l'objet de la publication [AF07]. La seconde partie du manuscrit, bien plus importante en volume, est consacrée à l'étude détaillée de la diffusion de Franchi et Le Jan sur une large classe d'exemples de variétés lorentziennes courbes : les espaces de Robertson-Walker. La rédaction de cette seconde partie est linéaire au sens où l'on progresse au fur et à mesure vers la détermination du comportement asymptotique de la diffusion. En particulier, pour une certaine classe d'espaces de Robertson-Walker, nous parvenons à déterminer explicitement la frontière de Poisson de la diffusion relativiste.

---

## PRÉSENTATION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Dans la première partie du manuscrit, nous montrons un théorème limite central pour une classe de diffusions minkowskiennes, plus précisément pour une classe de diffusions à valeurs dans le fibré tangent unitaire de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ . À l'origine de ce travail se trouvent deux questions issues des articles [DR98] et [DH05a, DH05b] respectivement, concernant le comportement asymptotique des processus introduits dans ces mêmes articles par leur auteurs. Les deux processus en question sont de la forme

$$(x(t), p(t))_{t \geq 0} = (t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d,$$

en particulier, ils sont caractérisés par la seule donnée du couple  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  qui se trouve être dans les deux cas une diffusion dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Les questions soulevées dans [DR98] et [DH05a] portent respectivement sur la limite hydrodynamique et la variance asymptotique des processus  $(\mathbf{x}_t)_{t \geq 0}$ . Sans rentrer dans les détails techniques et physiques, considérer la limite hydrodynamique du processus  $(\mathbf{x}_t)_{t \geq 0}$  revient en fait à déterminer la loi du processus  $(\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{x}_{at})_{a \geq 0}$  indexé par  $a$  lorsque le paramètre  $t$  tend vers l'infini. En se basant sur un développement de Chapman-Enskog, les auteurs de [DR98] affirment que la limite hydrodynamique du processus  $(\mathbf{x}_t)_{t \geq 0}$  se comporte de manière brownienne. Plus précisément, ils donnent une démonstration heuristique du fait la densité  $n(\tau, \mathbf{x})$  du processus limite satisfait une l'équation du type

$$\partial_\tau n = \Delta n,$$

qui est bien sûr l'équation de la chaleur vérifiée par la densité d'un mouvement brownien. Ces mêmes auteurs insistent sur le fait que leur démonstration n'est qu'heuristique et appellent les bonnes volontés à justifier rigoureusement leur conclusion. Les auteurs de [DH05a, DH05b] cherchent quant à eux à montrer une relation de fluctuation-dissipation pour le processus  $(\mathbf{x}_t)_{t \geq 0}$ , ce qui revient à dire que lorsque  $t$  tend vers l'infini, la variance normalisée  $\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]/t$  converge vers une constante  $\Sigma^2 > 0$  à préciser. À partir de simulations numériques, ils affirment qu'une telle convergence a bien lieu et prédisent une valeur pour la variance limite, sans pour autant parvenir à justifier leurs affirmations. Le théorème limite central que nous établissons permet de répondre rigoureusement à ces deux questions. Il répond en fait à une question de portée bien plus générale puisque nous établissons la convergence en loi vers un mouvement brownien du processus  $(\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{x}_{at})_{a \geq 0}$ , et ce pour toute une classe  $\mathcal{C}$  de diffusions  $(t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$ , classe qui englobe la plupart des exemples de diffusions minkowskiennes de la littérature physique.

Notre résultat principal s'énonce sous la forme suivante :

**Théorème (théorème I.1)** — Soient  $(t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  une diffusion de la classe  $\mathcal{C}$  et  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  la diffusion euclidienne associée. Alors, le processus  $\mathbf{p}_t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  admet une probabilité invariante  $\pi$  et la loi du processus

$$(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0} := \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{x}_{at} \right)_{a \geq 0} = \frac{1}{\sqrt{t}} (x_{at}^1, \dots, x_{at}^d)_{a \geq 0}$$

converge, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers la loi de  $(\Sigma \times \mathcal{B}_a)_{a \geq 0}$ , où le processus  $\mathcal{B}$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d$  et  $\Sigma$  est une constante strictement positive explicite. La convergence en loi a lieu dans l'espace  $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ , pour  $\pi$ -presque tout  $\mathbf{p}_0$ , ou si la loi initiale est la loi invariante.

Du théorème limite central, on déduit aisément que, pour toutes les diffusions minkowskiennes de la classe  $\mathcal{C}$ , la variance normalisée  $\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]/t$  converge effectivement lorsque  $t$  tend vers l'infini.

**Corollaire (corollaire II.2)** — Soient  $(t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  une diffusion de la classe  $\mathcal{C}$  et  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  la diffusion euclidienne associée. Alors pour tout point initial, la variance normalisée vérifie la convergence suivante, lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\frac{\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]}{t} \longrightarrow d \times \Sigma^2,$$

où  $\Sigma$  est la constante strictement positive du théorème ci-dessus.

L'introduction de la classe  $\mathcal{C}$  de diffusions minkowskiennes pour lesquelles nos résultats sont valables fait l'objet du premier chapitre où nous fixons également les notations, faisons quelques rappels historiques, et rappelons les principaux exemples de diffusions minkowskiennes de la littérature physique. Le chapitre II est consacré à la preuve du théorème limite principal. Elle est basée sur la méthode des martingales qui consiste à décomposer le processus  $\mathbf{x}_t$  est la somme d'une martingale et d'un terme de reste qu'on montre être asymptotiquement négligeable. La décomposition repose sur la résolution délicate d'une équation différentielle ordinaire d'ordre deux avec des pôles d'ordre eux. Enfin, dans le chapitre III, nous appliquons nos résultats aux diffusions introduites dans [DR98] et [DH05a, DH05b]. Nous justifions ainsi la conjecture de [DR98], la convergence annoncée par les auteurs de [DH05a, DH05b] et nous infirmons et corrigeons leur prédiction concernant la variance limite  $\Sigma^2$ .

## PRÉSENTATION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Nous décrivons à présent le contenu de la seconde partie du manuscrit consacrée à l'étude de la diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker. Ces variétés lorentziennes sont fréquemment utilisées en cosmologie pour modéliser un univers en expansion dans les théories du Big-Bang ou du Big-Crunch. Les deux premiers chapitres de cette seconde partie contiennent essentiellement des rappels. Dans le premier chapitre, on évoque tout d'abord la construction d'un mouvement brownien sur une variété lorentzienne. On rappelle ainsi les résultats de Dudley dans l'espace de Minkowski, puis la construction par Franchi et Le Jan d'une diffusion relativiste sur le fibré tangent unitaire d'une variété lorentzienne générale. Nous revenons alors brièvement sur les exemples de variétés où la diffusion a déjà été étudiée.

Dans le chapitre II, nous introduisons les espaces de Robertson-Walker comme des exemples de produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes. Ce sont des variétés du type  $I \times M$  où  $I = ]0, T[$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $M$  est une variété riemannienne de courbure constante, typiquement  $M = \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ , ou  $\mathbb{S}^3$ . On munit ces variétés d'une métrique de la forme  $ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t)g^M$  où  $t$  est une paramétrisation de  $I$ ,  $\alpha$  une fonction strictement positive sur  $I$  que l'on appelle le facteur d'expansion, et  $g^M$  est la métrique riemannienne usuelle sur  $M$ . On note  $\mathcal{M} := I \times_{\alpha} M$  les espaces ainsi définis. Dans les sections 2 et 3 du chapitre II, nous rappelons certaines propriétés physique et géométrique de ces espaces et nous en déduisons des hypothèses raisonnables concernant leur facteur d'expansion  $\alpha$ . En particulier, on suppose que la dérivée logarithmique  $H := \alpha'/\alpha$ , que les physiciens connaissent sous le nom de fonction de Hubble, est une fonction décroissante sur  $I$ . Pour alléger les énoncés, on introduit le vocabulaire suivant, qui prend tout son sens si l'on on pense aux espaces de Robertson-Walker comme des modèles d'univers en expansion dans la théorie du Big-Bang ou Big-Crunch. Lorsque  $T < +\infty$ , nous dirons que l'espace (ou univers)  $\mathcal{M}$  est *mortel*. Lorsque  $T = +\infty$ , nous dirons que l'univers est *éternel*. Dans un univers éternel, nous dirons que l'expansion est

$$\textit{rapide} \text{ si } \int_{\cdot}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty, \text{ et } \textit{lente} \text{ si } \int_{\cdot}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} = +\infty.$$

De la même façon, dans un univers mortel, nous dirons que l'effondrement est

$$\textit{lent} \text{ si } \int_{\cdot}^T \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty, \text{ } \textit{rapide} \text{ si } \int_{\cdot}^T \frac{dt}{\alpha(t)} = +\infty.$$

Le chapitre III est consacré à l'étude des géodésiques dans les espaces de Robertson-Walker. Après avoir rappelé des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces espaces soient géodésiquement connexes et complets, nous y résolvons explicitement les équations des géodésiques de genre temps et des géodésiques de lumière. Nous simplifions notablement le traitement qui en est fait usuellement dans la littérature physique. Nous déterminons en particulier le comportement asymptotique des géodésiques de lumière, qui si l'on a foi en la conjecture de Franchi et Le Jan, s'avérera être le modèle pour le comportement asymptotique des trajectoires de la diffusion. Nous montrons également que sous des hypothèses adhoc les géodésiques de lumière d'un espace  $\mathcal{M} := ]0, T[ \times_{\alpha} M$  où  $T$  est fini, qui sont a priori incomplètes, peuvent être prolongées en des trajectoires bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans une extension naturelle  $\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace  $\mathcal{M}$ .

Dans le chapitre IV, nous explicitons le système d'équations différentielles stochastiques satisfait par la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  de Franchi et Le Jan à valeurs dans le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$ . Dans le fibré tangent d'un espace-temps de dimension quatre, ce système d'équations est de dimension sept. Nous exhibons alors plusieurs sous-diffusions naturelles de la diffusion initiale, en particulier nous montrons que le processus  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une sous-diffusion de dimension deux de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ . Nous la désignons dans la suite par diffusion "temporelle" :

**Proposition IV.1** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker. Si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est la diffusion de Franchi et Le Jan à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , alors le couple  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une diffusion de dimension deux à valeurs dans  $]0, T[ \times [1, +\infty[$ .*

L'étude de ces sous-diffusions permet de mieux appréhender le comportement asymptotique de la diffusion globale. Nous établissons également dans le chapitre IV l'existence, l'unicité, et le temps d'explosion des solutions du système évoqué plus haut.

**Proposition IV.4** — *Soient  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker et  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable. Alors, le système d'équations différentielles stochastiques qui définit la diffusion de Franchi et Le Jan admet une solution forte  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  et définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}$ .*

Dans le chapitre V, nous étudions le comportement asymptotique de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ . On montre en particulier que lorsque  $T = +\infty$ , la vitesse de divergence du facteur d'expansion donne lieu à une dichotomie récurrence / transience pour le processus  $\dot{t}_s$  :

**Théorème VI.2** (Propositions V.1, V.2 et V.5) — Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker. On considère des conditions initiales raisonnables  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers le temps d'atteinte  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , on a les comportements asymptotiques suivants :

- i) si  $T = +\infty$  et l'expansion est exponentielle,  $\dot{t}_s$  est récurrent dans  $]1, +\infty[$ ;
- ii) si  $T = +\infty$  et l'expansion est polynomiale,  $\dot{t}_s$  est transitoire;
- iii) si  $T < +\infty$ ,  $\dot{t}_s$  est transitoire.

Le chapitre VI est celui où nous explicitons le comportement asymptotique des composantes  $(x_s, \dot{x}_s)$  à valeurs dans  $TM$  de la diffusion de Franchi et Le Jan, et par suite le comportement asymptotique de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ . Dans tous les cas d'espaces de Robertson-Walker envisageables, qu'ils soient mortels ou éternels, que l'expansion ou l'effondrement soit rapide ou lent(e) et que la fibre soit euclidienne, hyperbolique ou sphérique, on montre ainsi que le comportement asymptotique des trajectoires du processus  $\xi_s$  de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est semblable à celui des géodésiques de lumière décrit au chapitre III. Notre étude vient donc conforter, sur une large classe d'exemples de variétés lorentziennes, de courbure non nulle en général, la prédiction de Franchi et Le Jan, à savoir que sur une variété lorentzienne générale, la diffusion décrit asymptotiquement une géodésique de lumière aléatoire. Les différents résultats obtenus au cours du chapitre VI sont résumés dans sa dernière section, où nous faisons également une remarque d'ordre général qui permet à notre sens de mieux appréhender la convergence des trajectoires de la diffusion vers des géodésiques de lumière.

Le comportement asymptotique du processus  $\xi_s$  apparaît intimement lié à la notion de frontière causale introduite par Geroch, Kronheimer, et Penrose dans [GKP72]. Cette notion très robuste a été largement étudiée dans la littérature physique ainsi que mathématique. La frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  d'une variété lorentzienne  $\mathcal{M}$  est définie comme une classe d'équivalence de courbes causales (*i.e.* de genre temps ou de lumière) orientées vers le futur sur  $\mathcal{M}$ . Dans le cas des espaces de Robertson-Walker, cette frontière a été complètement décrite dans [AnF07]. Les résultats obtenus tout au long du chapitre VI peuvent alors s'exprimer de façon concise sous la forme suivante :

**Théorème VI.1** — Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $\xi_s$  converge vers un point aléatoire de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  de  $\mathcal{M}$ .

Par ailleurs, on peut décrire explicitement le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  à valeurs dans  $T^1M$ . En particulier, dans le cas d'un espace de Robertson-Walker éternel, on montre que le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement lorsque l'expansion est polynomiale et diverge lorsque l'expansion est exponentielle. Dans le cas divergent, on montre que  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit en fait asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans l'espace tangent limite :

**Théorème VI.3** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $x_s$  converge vers un point aléatoire  $x_{\infty}$  de la fibre  $M$  et le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  vérifie les assertions suivantes :*

- i) si  $T < \infty$  ou si  $T = +\infty$  et l'expansion est polynomiale, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $\Theta_{\infty}$  de  $T^1_{x_{\infty}}M$  ;*
- ii) si  $T = +\infty$  et l'expansion est exponentielle, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T^1_{x_{\infty}}M \approx \mathbb{S}^2$ .*

On parvient aussi à décrire le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  dans des espaces où l'expansion est lente ou l'effondrement est rapide.

**Théorème VI.4** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion (polynomiale) est lente ou l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $x_s$  est divergent et le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  vérifie les assertions suivantes :*

- i) si  $M = \mathbb{R}^3$ , alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $\Theta_{\infty}$  de  $\mathbb{S}^2$  ;*
- ii) si  $M = \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$ , alors  $|x_s^0|^{-1} \times \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $(1, \Theta_{\infty})$  ;*
- iii) si  $M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit asymptotiquement un grand cercle aléatoire dans  $\mathbb{S}^3$ .*

Dans l'avant dernier chapitre VII, nous montrons que comme les géodésiques de lumière, dans un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M}$  où l'effondrement est lent, les trajectoires de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ , a priori seulement définies jusqu'au temps  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$  qui est fini presque sûrement, peuvent en fait être prolongées en des trajectoires bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans une extension naturelle  $\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace  $\mathcal{M}$ . Nous explicitons

alors le comportement asymptotique des trajectoires prolongées dans  $\widehat{\mathcal{M}}$  et montrons qu'il est tout à fait semblable à celui de la diffusion de Franchi et Le Jan dans un univers éternel où l'expansion est lente.

Nous concluons la seconde partie du manuscrit en explicitant, pour certains espaces de Robertson-Walker, la frontière de Poisson de la diffusion de Franchi et Le Jan. Par une méthode de couplage, nous commençons par montrer un théorème de Liouville pour la diffusion temporelle dans un espace de Robertson-Walker éternel :

**Proposition VIII.1** — *Les seules fonctions harmoniques bornées pour le générateur infinitésimal  $L$  de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  sont les fonctions constantes.*

Nous nous concentrons alors sur le cas d'un espace de Robertson-Walker éternel  $\mathcal{M}$  de fibre euclidienne, où l'expansion est exponentielle. Parmi les espaces de Robertson-Walker fréquemment utilisés en cosmologie, l'espace de de Sitter vérifie ces conditions. Dans ce type d'espaces, on montre que le processus  $x_s$  de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau = +\infty$  vers un point  $x_\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ . On montre alors le résultat suivant :

**Théorème VIII.1** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_\alpha \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est exponentielle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, la tribu asymptotique pour le processus  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  coïncide avec la tribu  $\sigma(x_\infty)$  engendrée par la variable  $x_\infty$ .*



# Première partie



Un théorème limite central pour  
une classe de diffusions  
minkowskiennes



# Une classe de diffusions minkowskiennes

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Notations, rappels et historique . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1	Quelques notations et rappels . . . . .	4
1.2	Mouvement brownien et relativité restreinte . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Les diffusions minkowskiennes dans la littérature</b>	<b>9</b>
2.1	Le processus d’Ornstein-Uhlenbeck relativiste . . . . .	9
2.2	La diffusion de Dunkel et Hänggi . . . . .	10
2.3	Deux questions naturelles concernant ces diffusions	12
<b>3</b>	<b>Une classe de diffusions minkowskiennes . . . . .</b>	<b>13</b>
3.1	Une classe de diffusions minkowskiennes . . . . .	13
3.2	Énoncé des résultats principaux . . . . .	16
3.3	Plan de la preuve du théorème limite central . . . . .	17

---

Dans ce premier chapitre, nous introduisons une classe de diffusions à valeurs le fibré tangent unitaire de l’espace de Minkowski. Le théorème limite central qui fait l’objet de cette partie sera valable pour toutes les diffusions de cette classe. Après avoir introduit les notations utilisées dans la suite, nous rappelons les deux principaux exemples de diffusions minkowskiennes de la littérature physique, ainsi que les questions les concernant qui ont motivé ce travail. Les deux diffusions en question sont d’une part le processus d’Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP) introduit par Debbasch, Mallik et Rivet dans [DMR97], et d’autre part le “mouvement brownien relativiste”, que nous désignerons ici par diffusion de Dunkel et Hänggi, introduit par ces deux auteurs dans [DH05a, DH05b]. Nous explicitons ensuite la classe de diffusions minkowskienne évoquée ci-dessus, classe à laquelle appartiennent naturellement le ROUP et la diffusion de Dunkel et Hänggi. Nous énonçons enfin les principaux résultats de cette partie, ainsi que la méthode et le plan de la preuve du théorème limite central.

# 1 NOTATIONS, RAPPELS ET HISTORIQUE

## 1.1 Quelques notations et rappels

Fixons un entier  $d$  supérieur ou égal à 1. Dans toute la suite,  $\mathbb{R}^{1,d}$  désignera l'espace de Minkowski de la relativité restreinte, c'est-à-dire, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{d+1}$  muni de la pseudo-métrie minkowskienne :

$$ds^2 = -|dx^0|^2 + \sum_{i=1}^d |dx^i|^2.$$

Dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{1,d}$ , nous noterons  $x = (x^\mu) = (x^0, x^i) = (x^0, \mathbf{x})$  les coordonnées d'un point générique, les indices grecs parcourant  $0, \dots, d$ , et les indices latins parcourant  $1, \dots, d$ . Rappelons que sur une variété lorentzienne  $(\mathcal{M}, g)$ , les vecteurs tangents sont répartis en trois classes, selon le signe de leur pseudo-norme. Ainsi, on dit qu'un vecteur  $v = v^\mu \in T\mathcal{M}$  est :

- de genre temps si  $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu < 0$  ;
- de lumière si  $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0$  ;
- de genre espace si  $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu > 0$ .

Dans l'espace de Minkowski, les vecteurs de lumière forment un cône, le cône de lumière. Les vecteurs de genre temps sont ceux qui se trouvent à l'intérieur du cône de lumière, et les vecteurs de genre espace ceux qui se trouvent à l'extérieur du cône. La distinction entre vecteur de genre temps, espace ou de lumière s'étend naturellement aux courbes paramétrées tracées sur  $\mathcal{M}$  (voir figure 1 ci-après). Ainsi, on dira qu'une courbe  $(x_u)_{u \geq 0}$  dans  $\mathcal{M}$  est de genre temps si pour toute valeur du paramètre  $u$ , le vecteur dérivé  $\dot{x}_u := dx_u/du$  est de genre temps ; on dira que la courbe est une courbe de lumière si pour toute valeur de  $u$ ,  $\dot{x}_u$  est un vecteur de lumière etc. Dans la théorie de la relativité restreinte, la ligne d'univers d'une particule de masse nulle, c'est-à-dire la trajectoire d'un photon dans l'espace de Minkowski, est une courbe de lumière. La ligne d'univers d'une particule de masse  $m$  strictement positive est une courbe de genre temps. Une telle trajectoire peut toujours être paramétrée par la longueur d'arc ou temps propre  $s$ . Aussi, la ligne d'univers d'une particule de masse strictement positive est une courbe  $s \mapsto x_s^\mu$  dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ , dont le moment  $p_s = (p_s^\mu) = (p_s^0, p_s^i) = (p_s^0, \mathbf{p}_s)$ , que l'on définit comme  $p_s^\mu := m \times dx_s^\mu/ds$  satisfait l'équation

$$|p^0|^2 - \sum_{i=1}^d |p^i|^2 = m^2.$$

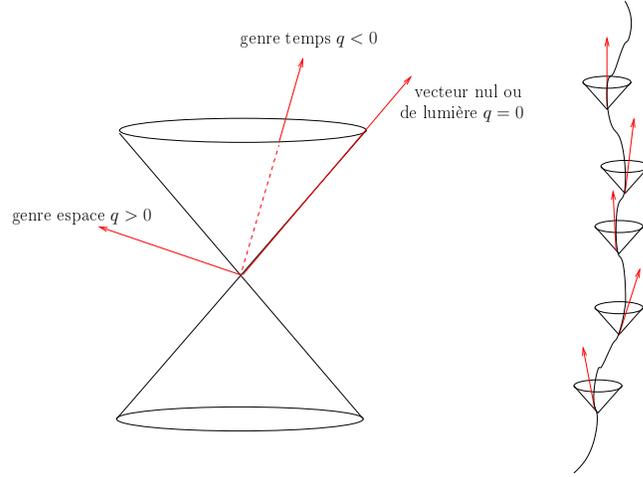


FIGURE 1: Vecteurs et courbes de genre temps dans l'espace de Minkowski.

Afin de simplifier les expressions, nous supposons dans toute la suite que  $m = 1$  et nous choisissons  $p^0 > 0$ , de sorte que la trajectoire  $s \mapsto (x_s^\mu, p_s^\mu)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , où  $\mathbb{H}^d$  désigne la partie positive de la pseudo-sphère de l'espace de Minkowski :

$$\mathbb{H}^d := \left\{ (p^0, p^1, \dots, p^d) \in \mathbb{R}^{d+1}, p^0 > 0, |p^0|^2 - \sum_{i=1}^d |p^i|^2 = 1 \right\}.$$

La notation  $\mathbb{H}$  n'est bien entendue pas innocente. L'espace  $\mathbb{H}^d$  muni de la pseudo-métrique minkowskienne est une variété riemannienne de courbure constante égale à  $-1$ , ce qui fait de  $\mathbb{H}^d$  un modèle pour l'espace hyperbolique de dimension  $d$ . Dans le cas particulier de lignes d'univers du type  $(x^\mu(t))_{t \geq 0} = (t, \mathbf{x}(t))_{t \geq 0}$ , en fonction de la vitesse  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^d)$  et du rayon  $r$  définis par :

$$v^i(t) := \frac{dx^i(t)}{dt} \quad \text{et} \quad r(t) := |\mathbf{p}(t)| = \left( \sum_{i=1}^d |p^i(t)|^2 \right)^{1/2},$$

les composantes du moment  $p(t)$  s'expriment comme

$$p(t) = \left( \sqrt{1 + r^2(t)}, \sqrt{1 + r^2(t)} \mathbf{v}(t) \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}(t)|^2}}, \frac{\mathbf{v}(t)}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}(t)|^2}} \right).$$

Ainsi, dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , une trajectoire du type

$$(x(t), p(t))_{t \geq 0} = (t, \mathbf{x}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t))_{t \geq 0} \quad (\text{I.1})$$

est caractérisée par ses seules composantes spatiales  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ .

**Définition I.1** — Etant donnée une trajectoire  $(x(t), p(t))_{t \geq 0}$  de type (I.1) dans l'espace des phases, on appellera trajectoire euclidienne associée la projection :

$$t \mapsto (\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

## 1.2 Mouvement brownien et relativité restreinte

Avant de décrire précisément la classe de diffusions minkowskiennes que nous considérerons dans la suite, rappelons brièvement les différentes étapes qui ont menées à l'introduction de processus stochastiques dans l'espace de Minkowski afin de rendre compatible les théorie du mouvement brownien et de la relativité restreinte.

### 1.2.1 Le mouvement brownien des physiciens

Le mouvement brownien doit son nom au botaniste Robert Brown qui fut l'un des premiers en 1827 à observer à l'aide d'un microscope, le mouvement irrégulier de grains de pollen dans l'eau. Il y fait référence dans un article paru en 1828 au *Edinburgh Journal of Science*, au titre un peu long *A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*. Comme l'indique le titre de l'article de Brown, les scientifiques ont longtemps cru que le mouvement observé au microscope était celui de particules animées, une idée proche de la théorie de la génération spontanée à la mode au début du dix-neuvième siècle. Grâce à de nombreuses expériences, modifiant tour à tour la nature des particules en suspension, et la nature du fluide, Brown a eu le mérite de s'affranchir de cette hypothèse. Cependant, lui comme ses contemporains n'ont pu expliquer le mouvement qui porte son nom.

Le pas décisif dans la compréhension du mouvement brownien physique est dû à Einstein, en 1905 puis en 1906, dans les deux articles [Ein05b, Ein06] parus dans *Annalen der Physik*, le premier intitulé *Mouvement des particules en suspension dans un fluide au repos, comme conséquence de la théorie cinétique moléculaire de la chaleur* et le second *Sur la théorie du mouvement brownien*. Einstein y explicite en particulier le déplacement moyen d'une particule brownienne en fonction de la nature du fluide. Précisément, si  $x_t$  désigne la position au temps  $t$  d'une particule sphérique de rayon  $a$ , issue de  $x_0 = 0$ , baignant dans un fluide de viscosité  $\eta$ , il établit la relation de *fluctuation-dissipation* :

$$\mathbb{E}|x_t|^2 = 2Dt = \frac{RT}{\mathcal{N}} \frac{1}{3\pi\eta a} t, \quad (I.2)$$

où  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $T$  la température du fluide, et  $\mathcal{N}$  est le nombre d'Avogadro. Pour comprendre l'importance de cette formule à cette époque, il faut garder à l'esprit le fait qu'au début du vingtième siècle, la nature atomique de la matière était encore hypothétique. En particulier, le nombre d'Avogadro était inconnu. Comme les données  $t$ ,  $\mathbb{E}|x_t|^2$ ,  $a$  et  $\eta$  sont mesurables, la relation (I.2) a permis de mettre en place un protocole expérimental pour mesurer avec précision cette constante. Jean Perrin a mené à bien cette expérience en 1908. Celle-ci a montré un accord parfait entre théorie et données expérimentales, et a ainsi permis de justifier la nature discrète de la matière.

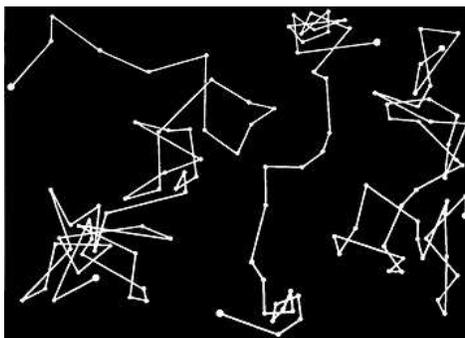


FIGURE 2: Interpolation linéaire de la trajectoire de trois particules de rayon  $0.53\mu\text{m}$ , observées toutes les 30 secondes. Image (libre de droits) issue du livre *Les Atomes* [Per27] de Perrin.

L'année 1905 est souvent qualifiée d'*Annus mirabilis* pour la physique moderne : outre l'article [Ein05c] déjà mentionné, Einstein publie en effet trois autres articles dans *Annalen der Physik* [Ein05a, Ein05c, Ein05d], qui ont eu chacun une postérité extraordinaire. Parmi ces articles, le plus célèbre est sans doute celui intitulé *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* [Ein05d], où Einstein introduit la théorie de la relativité restreinte. Cette théorie sera complétée en 1915 pour aboutir à la théorie de la relativité générale. Il serait trop long ici d'expliquer comment Einstein a été amené à formuler le principe de relativité. Le lecteur curieux trouvera cependant dans l'article [Dar05] au séminaire Poincaré un éclairage historique sur la genèse de cette théorie.

### 1.2.2 Vers un mouvement brownien relativiste

Au cours du vingtième siècle, la théorie des probabilités et en particulier le calcul stochastique ont connu des développements considérables. De la même façon, la théorie de la relativité et la géométrie lorentzienne ont été, et continuent d'être, des domaines de recherche très actifs. Par ailleurs, comme nous

l'avons déjà indiqué dans l'introduction, la théorie classique du mouvement brownien est incompatible avec la théorie de la relativité comme il ressort clairement du fait que le flux de la chaleur se propage instantanément à l'infini. Face à cette incompatibilité, on aurait pu s'attendre à voir fleurir dès le début du vingtième siècle les travaux cherchant à concilier mouvement brownien et principe de relativité.

Il a fallu pourtant attendre une soixantaine d'années avant de voir émerger des travaux concernant l'étude de processus stochastiques dans le cadre de la relativité restreinte. C'est en effet au milieu des années 1960 qu'apparaissent les premiers travaux concernant des processus de Markov à valeurs dans l'espace de Minkowski. Dans [Dud66], Dudley a ainsi montré qu'il n'existe pas de diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  qui possède l'invariance lorentzienne. En revanche, Dudley a montré qu'il existe, et a exhibé, une diffusion à valeurs dans l'espace tangent unitaire de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , qui elle possède l'invariance lorentzienne, ce qui en fait un candidat raisonnable pour être qualifié de mouvement brownien relativiste. En outre, Dudley a montré qu'il n'y a pas d'autre définition possible que la sienne. À la même époque, motivés par la modélisation de plasmas relativistes dans l'optique d'une fusion nucléaire, les travaux concernant la mécanique statistique relativiste non quantique se multiplient dans la littérature physique. On peut citer par exemple les travaux pionniers de Hakim [Hak65, Hak67a, Hak67b, Hak68a, Hak68b] et les références de ces articles.

Cependant, de façon assez surprenante, il faut à nouveau attendre une trentaine d'années pour voir émerger des travaux vraiment innovants sur le sujet. Dans [DMR97], Debbasch, Mallick et Rivet ont ainsi introduit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste (ROUP) pour décrire le mouvement d'une particule baignant dans un fluide relativiste. Ce processus a été étudié dans [DR98, BDR01a, BDR01b, BDR01c] puis généralisé au cas courbe par Debbasch dans [Deb04]. Poursuivant le même objectif, dans [DH05a, DH05b] Dunkel et Hänggi ont à leur tour introduit une diffusion dans l'espace de Minkowski et étudié son comportement via des simulations numériques. D'autres diffusions relativistes sont apparues récemment dans la littérature physique, citons par exemple [Pav01, VB06, Hab09, Her09]. La plupart de ces processus sont des réécritures, ou des variations minimales autour du ROUP et de la diffusion de Dunkel et Hänggi.

## 2 LES DIFFUSIONS MINKOWSKIENNES DANS LA LITTÉRATURE PHYSIQUE

À l'aide des notations introduites au paragraphe précédent, nous rappelons maintenant les définitions du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste et de la diffusion de Dunkel et Hänggi. Ces processus et leur variantes constituent les principaux exemples de diffusions minkowskiennes présents à notre connaissance dans la littérature physique.

### 2.1 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste

Commençons par rappeler la définition du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste introduit par Debbasch, Mallik et Rivet dans [DMR97] et dont l'étude fait l'objet des articles [DR98, BDR01a, BDR01b, BDR01c]. Pour simplifier les expressions, nous supposons ici que le coefficient de friction  $\nu$  de l'article [DMR97] est égal à 1. Cela revient simplement à effectuer un changement d'unité physique, et on ne perd donc pas en généralité. Nous introduisons aussi le paramètre  $\beta$  qui est égal à l'inverse du coefficient de diffusion  $D$  dans [DMR97], et qui physiquement, joue donc le rôle de l'inverse d'une température.

À l'origine, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste a été introduit par ses auteurs comme un modèle très simple d'hydrodynamique relativiste. Il s'agit d'une tentative de généralisation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck euclidien (dit aussi classique), version idéale du mouvement brownien physique, qui décrit l'évolution d'une particule massive dans un fluide visqueux. Dans le modèle classique ( $d = 3$ ), si le couple  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) = (x_t^i, v_t^i)_{1 \leq i \leq d}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  désigne la position et la vitesse de la particule qui baigne dans le fluide, alors  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{cases} dx_t = v_t^i dt, \\ dv_t^i = -v_t^i dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_t^i, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^d)$  un mouvement brownien standard de dimension  $d$ . Dans la seconde équation, le coefficient de dérive modélise une force de friction linéaire en la vitesse et le mouvement brownien modélise l'agitation thermique du fluide. Si  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t)$  désigne la solution de l'équation (I.3) issue d'un point quelconque de  $\mathbb{R}^d$ , on vérifie facilement que lorsque  $t$  tend vers l'infini, le déplacement moyen  $\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]$  vérifie la relation de fluctuation-dissipation

asymptotique :

$$\frac{\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]}{t} \longrightarrow \frac{2d}{\beta} = 2d \times D. \quad (\text{I.4})$$

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique n'est bien entendu pas compatible avec la théorie de la relativité restreinte, puisque la vitesse  $\mathbf{v}_t$  n'est pas bornée. Dans [DMR97], les auteurs choisissent de modéliser l'évolution d'une particule baignant dans un fluide relativiste de la façon suivante. Ils supposent que dans le référentiel dans lequel le fluide est au repos, la ligne d'univers de la particule est une trajectoire du type (I.1). Par ailleurs, ils supposent que la trajectoire euclidienne associée  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = (x_t^i, p_t^i)_{1 \leq i \leq d}$  est une diffusion, solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt, \\ dp_t^i = -\frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_t^i, \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

où  $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^d)$  est à nouveau un mouvement brownien standard de dimension  $d$ . Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste diffère donc très peu de son analogue classique : seul le terme de dérive est modifié de sorte que le moment  $p_t$  est bien de pseudo-norme égale à  $-1$ .

## 2.2 La diffusion de Dunkel et Hänggi

Rappelons à présent la définition de la diffusion de Dunkel et Hänggi, introduite tout d'abord dans [DH05a] dans le cas de la dimension  $1 + 1$ , puis dans [DH05b] dans le cas de la dimension  $1 + 3$ . Les objectifs et la méthode employés par Dunkel et Hänggi sont très voisins de ceux de [DMR97]. Ici aussi, il s'agit de modéliser la trajectoire d'une particule baignant dans un fluide relativiste. Les auteurs considèrent aussi le référentiel privilégié dans lequel le fluide est au repos. À nouveau, ils font l'hypothèse que dans ce référentiel, la trajectoire de la particule est du type (I.1) introduit dans la section précédente, et il supposent que les composantes spatiales  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$  sont solutions d'un système d'équations différentielles stochastiques.

Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste, on a vu que la seule différence avec le cas euclidien se trouve dans le terme de dérive dans l'équation qui régit l'évolution du moment  $p_t$ . Au contraire dans [DH05a, DH05b], les auteurs choisissent de modifier le coefficient de diffusion en facteur du mouvement brownien dans le système d'équation (I.3). Le coefficient

de diffusion n'étant plus constant égal à  $2/\beta$ , il importe de préciser la méthode d'intégration stochastique choisie : l'intégrale d'Itô *i.e.* la méthode d'intégration rectangle à gauche, l'intégrale de Stratonovich *i.e.* la méthode d'intégration du point milieu, ou l'intégrale stochastique backward qui correspond à la méthode d'intégration rectangle à droite. Nous exprimons ici les trois systèmes d'équations différentielles stochastiques satisfaits par la trajectoire euclidienne  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$  sous la forme d'intégrales d'Itô. Le choix d'une méthode d'intégration dans [DH05a, DH05b] revient donc ici à modifier la dérive des processus envisagés. Ainsi, les diffusions euclidiennes associées à la diffusion de Dunkel et Hänggi, lorsque les intégrales stochastiques sont prises au sens d'Itô, de Stratonovitch, et au sens backward, sont alors respectivement solutions des systèmes, pour  $1 \leq i \leq d$  :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt, \\ dp_t^i = -p_t^i dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dN_t^i, \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt, \\ dp_t^i = -p_t^i \left( 1 - \frac{d}{2\beta\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} \right) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dN_t^i, \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt, \\ dp_t^i = -p_t^i \left( 1 - \frac{d}{\beta\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} \right) dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dN_t^i. \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

Ici,  $\mathbf{N} := (N^1, \dots, N^d)$  est une martingale dont la matrice de variation quadratique est donnée par :

$$K_t^{ij} := \frac{d\langle N^i, N^j \rangle_t}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} \times (\delta_{ij} + p_t^i p_t^j), \quad (\text{I.9})$$

$\delta_{ij}$  désignant le symbole de Kronecker :  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  sinon.

## 2.3 Deux questions naturelles concernant ces diffusions

Nous rappelons maintenant les questions concernant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste et la diffusion de Hänggi qui ont motivé la démonstration d'un théorème limite central. Elles concernent d'une part la limite hydrodynamique des processus ainsi que les relations de fluctuation-dissipation asymptotiques du type (I.4) qui leur sont associées.

### 2.3.1 Limite hydrodynamique

Sans rentrer dans les détails concernant sa signification physique, la limite hydrodynamique du processus  $\mathbf{x}_t$  qui décrit la position de la particule dans  $\mathbb{R}^d$  dans les modèles évoqués au paragraphe précédent, est la limite (lorsque que celle-ci existe) du processus  $(\mathbf{x}_{at}/\sqrt{t})_{a \geq 0}$  indexé par  $a$ , lorsque le paramètre  $t$  tend vers l'infini. Dans [DR98], en se basant sur un développement de Chapman-Enskog, Debbasch et Rivet affirment que la limite hydrodynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste se comporte de manière brownienne. Plus précisément, ils donnent une démonstration heuristique du fait la densité  $n(\tau, \mathbf{x})$  du processus limite satisfait l'équation

$$\partial_\tau n = \beta^{-1} \Delta n,$$

qui est bien sûr l'équation de la chaleur vérifiée par la densité d'un mouvement brownien. Les auteurs insistent naturellement sur le fait que leur démonstration n'est qu'heuristique et appellent les bonnes volontés à justifier rigoureusement leur conclusion.

### 2.3.2 Relation de fluctuation-dissipation asymptotique

Dans [DH05a] et [DH05b], les auteurs affirment sans justification que leur diffusion vérifie une relation fluctuation-dissipation asymptotique du type (I.4). À partir de simulations numériques, ils évaluent le coefficient de diffusion en fonction de  $\beta$  et conjecturent la convergence suivante, lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\Sigma^2(t) := \mathbb{E} \left[ |\mathbf{x}_t|^2 / t \right] \longrightarrow \Sigma^2 := \frac{2d}{2d + \beta}.$$

Lorsque  $\beta$  est grand, *i.e.* dans un régime non relativiste, la limite est en accord avec le cas classique (I.4). En revanche, lorsque  $\beta$  tend vers zéro, le coefficient de diffusion limite tend vers 1, ce qui est contre-intuitif. À la fin de [DH05a], Dunkel et Hänggi laissent comme un problème ouvert la justification analytique de leur formule empirique.

### 3 INTRODUCTION D'UNE CLASSE DE DIFFUSIONS MINKOWSKIENNES

L'objet de la première partie de ce manuscrit est de répondre aux deux questions mentionnées dans le paragraphe précédent, et en fait de répondre à une question plus générale. Nous établissons en effet un théorème limite central pour une large classe de diffusions minkowskiennes, classe à laquelle appartiennent le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste et la diffusion de Dunkel et Hänggi. Dans les sections 1 et 2 du chapitre III, nous verrons en quoi le théorème limite central permet de justifier l'affirmation de [DR98] et de justifier/corriger les résultats de [DH05a, DH05b].

#### 3.1 Une classe de diffusions minkowskiennes

Nous décrivons ici la classe  $\mathcal{C}$  des diffusions minkowskiennes pour lesquelles les résultats du prochain chapitre seront valables. Ces diffusions seront du type (I.1) introduit dans la section 1.1 :

$$(x_t, p_t)_{t \geq 0} = (t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0},$$

en particuliers elles seront à valeurs dans le fibré tangent unitaire de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ . Nous ferons l'hypothèse que les trajectoires euclidiennes associées  $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t) = (x_t^i, p_t^i)_{1 \leq i \leq d}$  sont des diffusions euclidiennes, solutions de systèmes d'équations différentielles stochastiques du type, pour  $1 \leq i \leq d$  :

$$(\star) \begin{cases} dx_t^i = f(r_t) p_t^i dt, \\ dp_t^i = -b(r_t) p_t^i dt + \sigma(r_t) \left( \beta [1 + \eta(r_t)^2] \right)^{-1/2} [dW_t^i + \eta(r_t) \theta_t^i dw_t], \end{cases}$$

où

- $\mathbf{W} := (W^1, \dots, W^d)$  est un mouvement brownien de dimension  $d$  ;
- $w$  est un mouvement brownien standard réel, indépendant de  $\mathbf{W}$  ;
- le paramètre  $\beta$  est strictement positif ;
- les fonctions réelles  $f, b, \sigma, \eta$  sont continues sur  $\mathbb{R}_+$  ;
- $(r_t, \Theta_t)$  est la décomposition polaire du processus  $\mathbf{p}_t$  :

$$r_t := |\mathbf{p}_t| \in \mathbb{R}_+, \quad \Theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d) := \frac{\mathbf{p}_t}{r_t} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Nous précisons maintenant les hypothèses que vérifieront les fonctions  $f, b, \sigma, \eta$  qui interviennent dans le système  $(\star)$ . Nous dirons que ces fonctions

satisfont les hypothèses  $(\mathcal{H})$  si, pour un  $\varepsilon > 0$  fixé :

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \geq \varepsilon \text{ sur } \mathbb{R}_+, \\ g(r) := \frac{2r b(r)}{\sigma^2(r)} \geq \varepsilon \text{ pour } r \text{ assez grand,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon' r} f(r) = 0 \text{ pour un } \varepsilon' < \frac{\beta\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Pour résumer, la définition de la classe  $\mathcal{C}$  des diffusions minkowskiennes pour lesquelles les résultats du prochain chapitre seront valables est la suivante :

**Définition I.2** — Nous désignerons par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des diffusions minkowskiennes de type (I.1) dans l'espace des phases :

$$(x(t), p(t))_{t \geq 0} = (t, \mathbf{x}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t))_{t \geq 0},$$

associées à des diffusions euclidiennes  $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$  solutions de systèmes d'équations différentielles stochastiques du type  $(\star)$ , où les fonctions continues  $f$ ,  $b$  et  $\sigma$  vérifient les hypothèses  $(\mathcal{H})$ .

Remarque I.1 — Dans le cas particulier où les fonctions  $f$ ,  $b$ ,  $\sigma$  et  $\eta = 0$  sont constantes, le processus  $\mathbf{x}_t$  n'est autre que l'intégrale d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck euclidien solution du système (I.3). La classe  $\mathcal{C}$  englobe donc le cas classique. D'autre part, la diffusion euclidienne  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$  solution du système  $(\star)$  est isotrope précisément lorsque  $\eta \equiv 0$  (pour  $d \geq 2$ ; lorsque  $d = 1$ ,  $\eta$  n'a aucune incidence). Comme nous le verrons dans la remarque II.1, en dimension  $d \geq 2$ , le facteur d'anisotropie  $\eta$  affecte la dérive radiale du moment  $\mathbf{p}_t$ .

Remarque I.2 — Bien entendu, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste de Debbasch, Mallick et Rivet, ainsi que la diffusion de Dunkel et Hänggi, sont deux cas particuliers de diffusions minkowskiennes appartenant à la classe  $\mathcal{C}$ . Les choix de fonctions  $f$ ,  $b$ ,  $\sigma$  et  $\eta$  correspondant sont résumés sous forme synthétique dans le tableau de la page suivante.

	$f(r)$	$b(r)$	$\sigma(r)$	$\eta(r)$	$g(r)$
ROUP	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$
DH Itô	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	1	$\sqrt{2\sqrt{1+r^2}}$	$r$	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$
DH Strato.	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	$1 - \frac{d}{2\beta\sqrt{1+r^2}}$	$\sqrt{2\sqrt{1+r^2}}$	$r$	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{d \times r}{2\beta(1+r^2)}$
DH backward	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$	$1 - \frac{d}{\beta\sqrt{1+r^2}}$	$\sqrt{2\sqrt{1+r^2}}$	$r$	$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} - \frac{d \times r}{2\beta(1+r^2)}$

### 3.2 Énoncé des résultats principaux

Nous résumons ici nos résultats principaux concernant les diffusions minkowskienne de la classe  $\mathcal{C}$ . Commençons par énoncer le théorème limite central dont la preuve fait l'objet du prochain chapitre :

**Théorème I.1** — *Soient  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  une diffusion de la classe  $\mathcal{C}$  et  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  la diffusion euclidienne associée. Alors, le processus  $\mathbf{p}_t$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  admet une probabilité invariante  $\pi$  et la loi du processus*

$$(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0} := (t^{-1/2} \mathbf{x}_{at})_{a \geq 0} = t^{-1/2} (x_{at}^1, \dots, x_{at}^d)_{a \geq 0}$$

*converge, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers la loi de  $(\Sigma_\beta \mathcal{B}_a)_{a \geq 0}$ , où le processus  $\mathcal{B}$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d$  et  $\Sigma_\beta$  est une constante positive explicitée dans la proposition II.4. La convergence en loi a lieu dans l'espace  $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ , pour  $\pi$ -presque tout  $\mathbf{p}_0$ , ou si la loi initiale est la loi invariante.*

Du théorème limite central, on déduit aisément que, pour toutes les diffusions de la classe  $\mathcal{C}$ , le déplacement moyen  $\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]$  vérifie d'une relation de fluctuation-dissipation asymptotique semblable à celle du cas classique (I.4). Précisément, on a le corollaire :

**Corollaire principal (corollaire II.2)** — *Soient  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  une diffusion de la classe  $\mathcal{C}$  et  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  la diffusion euclidienne associée. Alors pour tout point initial, la variance normalisée (ou le déplacement moyen renormalisé)  $t^{-1} \mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]$  converge lorsque  $t$  tend vers l'infini :*

$$\frac{\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]}{t} \longrightarrow d \times \Sigma_\beta^2$$

*où  $\Sigma_\beta$  est la constante positive explicitée dans la proposition II.4*

Dans les sections 1 et 2 du chapitre III, le théorème limite central et le corollaire ci-dessus nous permettront de justifier à la fois la nature brownienne de limite hydrodynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste, et de justifier/corriger la relation de fluctuation-dissipation asymptotique conjecturée dans [DH05a, DH05b]. En effet, nous verrons que lorsque  $d = 1$ , la constante  $\Sigma_\beta$  est toujours explicite. En étudiant son comportement asymptotique lorsque  $\beta$  tend vers zéro et vers l'infini, nous infirmerons et corrigerons la conjecture de Dunkel et Hänggi sur l'expression du coefficient de diffusion limite.

### 3.3 Plan de la preuve du théorème limite central

Pour clore ce chapitre, nous esquissons la méthode et le plan de la preuve du théorème I.1. Ce théorème affirme deux choses : d'une part, que le processus  $\mathbf{p}_t$  admet une probabilité invariante et qu'il est donc ergodique, et d'autre part que la fonctionnelle

$$(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0} = \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{at} \tilde{f}(\mathbf{p}_s) ds \right)_{a \geq 0}, \quad \text{où } \tilde{f}(\mathbf{p}) := \mathbf{p} \times f(|\mathbf{p}|),$$

converge en loi, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers le produit d'un mouvement brownien de dimension  $d$  par un scalaire. Le théorème I.1 est donc un théorème limite central fonctionnel associé à un processus de Markov ergodique. Il existe de nombreuses méthodes pour étudier les fonctionnelles additives de processus ergodiques. Parmi celles-ci, une méthode particulièrement élégante et efficace est la méthode dite des martingales dont nous rappelons le principe dans le prochain paragraphe.

#### 3.3.1 Méthode des martingales

L'application de la méthode des martingales à l'étude des fonctionnelles additives de processus récurrents remonte aux années 1970, on pourra par exemple consulter les articles [Mai78, Reb79, Tou83]. Cette méthode consiste à décomposer, lorsque cela est possible, la fonctionnelle additive en la somme d'une martingale et d'un terme de reste que l'on montre être asymptotiquement négligeable. À titre d'exemple, nous esquissons la preuve du résultat principal de [Tou83]. Oublions momentanément les diffusions relativistes et considérons un processus de Markov  $X_s$  à valeurs dans un espace mesuré localement compact à base dénombrable  $(E, \mathcal{E})$ . On suppose que  $X_s$  est ergodique, de probabilité invariante  $\pi$  et on note  $L$  son générateur infinitésimal.

**Théorème I.2** (théorème 1 de [Tou83]) — *Soit  $f \in \mathbb{L}^2(E, \pi)$  telle que  $\pi(f) = 0$ . On suppose qu'il existe  $g \in \mathbb{L}^2(E, \pi)$  telle que  $Lg = f$ , alors lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a la convergence en loi*

$$(Y_a^t)_{a \geq 0} := \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{at} f(X_s) ds \right)_{a \geq 0} \xrightarrow{d} \Sigma \times (\mathcal{B}_a)_{a \geq 0},$$

où la constante  $\Sigma^2$  est donnée par :

$$\Sigma^2 := -2 \int_E fg d\pi$$

et  $\mathcal{B}$  est un mouvement brownien standard. La convergence a lieu pour  $\pi$ -presque tout  $X_0$  ou si la loi initiale est la loi invariante.

*Démonstration.* (les grandes lignes) Supposons pour simplifier que la fonction  $f$  est de classe  $C^2$  et soit  $g$  tel que  $Lg = f$ . On sait que

$$M_t^g := g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t f(X_s) ds$$

est une martingale pour toute loi d'entrée. Comme  $g \in \mathbb{L}^2$ , on vérifie facilement que, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $|g(X_{at})| = o(\sqrt{t})$  uniformément en  $a$  dans tout compact de  $\mathbb{R}_+$ . Le comportement du processus  $(Y_a^t)_{a \geq 0}$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini, est donc celui de la martingale  $M_a^t := t^{-1/2} M_{at}^g$ . Le crochet de  $M^g$  est donné par

$$\langle M^g, M^g \rangle_t = \int_0^t \Gamma(g, g)(X_s) ds,$$

où  $\Gamma$  est l'opérateur carré du champ :  $\Gamma(gh) := L(gh) - gLf - hLg$ . D'après le théorème ergodique, lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a la convergence presque sûre :

$$\frac{1}{t} \int_0^t \Gamma(g, g)(X_s) ds \xrightarrow{p.s.} \int \Gamma(g, g) d\pi,$$

avec

$$\int \Gamma(g, g) d\pi = \int (L(g^2) - 2gLg) d\pi = -2 \int gLg d\pi = -2 \int fg d\pi = \Sigma^2.$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a donc pour tout  $a \geq 0$  :

$$\langle M^t, M^t \rangle_a \xrightarrow{p.s.} a \times \Sigma^2.$$

On peut alors conclure en utilisant les résultats classiques de la théorie des martingales (voir par ex. [Reb79]).  $\square$

D'après le théorème de Touati, l'existence d'un théorème limite central fonctionnel pour le processus  $(Y_a^t)$  est assurée dès lors que la fonction  $f \in \mathbb{L}^2$  appartient à l'image  $Im(L)$  du générateur infinitésimal  $L$ . Dans le cas général,  $Im(L)$  est incluse dans  $\mathbb{L}_0^2(\pi) := \{f \in \mathbb{L}^2(\pi), \int f d\pi = 0\}$ . Touati montre que  $Im(L)$  est dense dans  $\mathbb{L}_0^2(\pi)$  et suivant [Mai78], qu'une condition suffisante pour que  $Im(L) = \mathbb{L}_0^2(\pi)$  est que la résolvante  $R_1$  du processus  $X_s$  est un opérateur quasi-compact ou de manière équivalente qu'elle vérifie la condition de Doeblin. Dans le cadre qui nous intéresse ici, à savoir l'étude du processus  $(\mathbf{x}_a^t, a \geq 0)$  lorsque  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  est une solution du système d'équations différentielles  $(\star)$ , et où les fonctions  $(f, b, \sigma, \eta)$  vérifient les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , la quasi-compactité de la résolvante du processus  $\mathbf{p}_t$  s'avère être au moins aussi difficile à établir que la résolution directe de l'équation différentielle d'ordre deux  $Lg = f$ . Nous nous affranchissons ici de l'hypothèse de quasi-compactité en construisant un antécédant explicite à la fonction  $\tilde{f}$ .

### 3.3.2 Plan de la preuve du théorème limite central

*i)* La première étape de la preuve consiste à montrer que sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , le processus  $\mathbf{p}_t$  est ergodique dans  $\mathbb{R}^d$ . Cette question fait l'objet de la section 1 du prochain chapitre. On écrit la décomposition polaire de  $\mathbf{p}_t$  et on montre que le rayon  $r_t = |\mathbf{p}_t|$  est ergodique dans  $\mathbb{R}^+$  puis que la partie angulaire  $\Theta_t = \mathbf{p}_t/r_t$  est un mouvement brownien sphérique changé de temps.

*ii)* Dans la section 2 du prochain chapitre, on construit ensuite une fonction  $F = (F^1, \dots, F^d)$  de  $\mathbb{R}^d$  dans lui-même, de classe  $C^2$ , telle que pour  $1 \leq i \leq d$ , on ait :

$$dF^i(\mathbf{p}_t) + dx_t^i - dM_t^i = 0, \quad (\text{I.10})$$

où  $\mathbf{M}_t = (M_t^1, \dots, M_t^d)$  est une martingale. Pour toutes conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ , en intégrant et en renormalisant, on obtient alors :

$$\mathbf{x}_a^t = t^{-1/2} \mathbf{x}_{at} = t^{-1/2} \mathbf{M}_{at} - t^{-1/2} F(\mathbf{p}_{at}) + \mathcal{O}(t^{-1/2}).$$

Dans le cas unidimensionnel, la fonction  $F := F^1$  est explicite; en dimension supérieure, les fonctions  $F^i$  n'admettent pas en général d'expression explicite, elles sont obtenues comme solution d'une équation différentielle. La résolution de cette équation, qui fait l'objet du paragraphe 2.2, est le point le plus délicat de la preuve du théorème.

*iii)* On montre alors que le processus  $t^{-1/2} F(\mathbf{p}_{at})$  tend vers zéro dans  $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$  (donc en probabilité), uniformément pour  $a$  variant dans tout compact de  $\mathbb{R}^+$ .

*iv)* Enfin, grâce au théorème de Knight asymptotique et au théorème de couplage de Skorokhod, on montre que  $(t^{-1/2} \mathbf{M}_{at}, a \geq 0)$  converge en loi vers le produit d'un mouvement brownien standard de dimension  $d$  et d'un scalaire dépendant explicitement des fonctions  $f, b, \sigma$  et  $\eta$ .



# Preuve du théorème limite central principal

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Ergodicité de la diffusion euclidienne . . . . .</b>	<b>22</b>
1.1	Décomposition polaire de la diffusion euclidienne . . . . .	22
1.2	Ergodicité du processus radial . . . . .	22
1.3	Ergodicité du processus angulaire . . . . .	23
1.4	Comportement asymptotique de l'horloge $C_t$ . . . . .	24
1.5	Convergence $\mathbb{L}^1$ dans le théorème ergodique . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Utilisation de la méthode des martingales . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1	Existence de la décomposition . . . . .	31
2.2	Preuve de la proposition II.3 . . . . .	33
2.3	Négligeabilité du terme de reste . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Asymptotique de la martingale <math>\mathbf{M}</math> . . . . .</b>	<b>41</b>
3.1	Indépendance asymptotique des composantes . . . . .	41
3.2	Convergence des marginales de dimension finie . . . . .	45
3.3	Vérification d'un critère de tension . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Deux corollaires du théorème limite central . . . . .</b>	<b>48</b>
4.1	Complément en dimension $d = 1$ . . . . .	48
4.2	Comportement asymptotique de la variance . . . . .	50

---

L'objet de ce deuxième chapitre est de donner la preuve du théorème limite central I.1 en suivant le plan énoncé au chapitre précédent. L'ergodicité du processus  $\mathbf{p}_t$  est établie en étudiant sa décomposition polaire. On exhibe ensuite une fonction  $F$  vérifiant la relation de décomposition (I.10), comme solution d'une équation différentielle d'ordre 2. La preuve délicate de l'existence de cette solution est détaillée dans la section 2.2. Nous déduisons ensuite la négligeabilité du terme de reste ; enfin grâce au théorème de Knight asymptotique et au théorème de Skorokod, nous déterminons le comportement asymptotique de la martingale  $\mathbf{M}$ .

# 1 ERGODICITÉ DE LA DIFFUSION EUCLIDIENNE

Nous montrons dans cette section que sous les hypothèses du théorème I.1, le moment  $\mathbf{p}_t$  est un processus ergodique et nous explicitons sa probabilité invariante.

## 1.1 Décomposition polaire de la diffusion euclidienne

Soit  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  une diffusion de la classe  $\mathcal{C}$  et  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  la diffusion euclidienne associée. Un calcul direct montre que le processus radial  $r_t = |\mathbf{p}_t|$  vérifie alors l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = \left( \frac{(d-1)\sigma^2(r_t)}{2\beta[1+\eta(r_t)^2]} - r_t b(r_t) \right) dt + \sigma(r_t) \beta^{-1/2} dB_t, \quad (\text{II.1})$$

$$\text{avec } dB_t := (1 + \eta(r_t)^2)^{-1/2} \left[ \sum_{i=1}^d \theta_t^i dW_t^i + \eta(r_t) dw_t \right].$$

Par ailleurs, le processus angulaire  $\Theta_t = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d)$  à valeurs dans la sphère euclidienne de dimension  $d-1$ , défini par  $\theta_t^i := p_t^i / r_t$  pour  $1 \leq i \leq d$ , est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$d\theta_t^i = \left( \frac{1-d}{2} \right) \theta_t^i \frac{\sigma^2(r_t)}{\beta r_t^2} dt + \frac{\sigma(r_t)}{\sqrt{\beta} r_t} \times \sum_{j=1}^d (\delta_{ij} - \theta_t^i \theta_t^j) dW_t^j.$$

## 1.2 Ergodicité du processus radial

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au processus radial  $r_t$ . On montre que ce processus est ergodique et on exhibe sa mesure invariante.

**Lemme II.1** — *Le processus  $r_t$  est ergodique dans  $\mathbb{R}_+$ .*

*Démonstration.* Comme  $\langle B, B \rangle_t = t$ ,  $B$  est un mouvement brownien standard. Le processus  $r_t$  admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur :

$$\mathcal{L}_r := \frac{\sigma^2(r)}{2\beta} \left( \partial_r^2 + \left[ \frac{d-1}{[1+\eta(r)^2]} - \beta g(r) \right] \partial_r \right). \quad (\text{II.2})$$

Pour  $r \in \mathbb{R}_+$ , posons

$$\mu(r) := \exp \left[ \int_1^r \frac{ds}{s[1+\eta(s)^2]} \right] \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad G(r) := \int_0^r g(\rho) d\rho. \quad (\text{II.3})$$

Le processus  $r_t$  admet pour mesure invariante la mesure  $\nu(r)dr$ , de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\nu(r) := \sigma^{-2}(r) \mu(r)^{d-1} e^{-\beta G(r)}. \quad (\text{II.4})$$

On vérifie aisément que  $\min\{r, 1\} \leq \mu(r) \leq \max\{r, 1\}$ ; les hypothèses  $(\mathcal{H})$  assurent alors que  $\nu$  est finie, de sorte que le processus radial  $r_t$  est bien ergodique.  $\square$

D'après la formule d'Itô appliquée à la fonction  $r \mapsto \log(r)$ , on a :

$$\log(r_t/r_0) = - \int_0^t b(r_s) ds - \left( \frac{d-1}{2} \right) \int_0^t \frac{\eta^2(r_s)}{1+\eta^2(r_s)} dC_s + \left( \frac{d-2}{2} \right) C_t + B_{C_t},$$

où l'horloge  $C_t$  et son inverse  $C_t^{-1}$  sont donnés par :

$$C_t := \int_0^t \frac{\sigma^2(r_s)}{\beta r_s^2} \text{ et } C_t^{-1} = \inf\{s > 0, C_s > t\}. \quad (\text{II.5})$$

Le processus  $r_t$  étant ergodique, on montre que l'horloge  $C_t$  tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la preuve du théorème I.1, dans le prochain paragraphe 1.4, nous déterminons précisément la vitesse de divergence de  $C_t$  en fonction de  $t$ . Celle est de l'ordre de  $t^2$  en dimension deux, et de l'ordre de  $t$  en dimension supérieure ou égale à trois.

### 1.3 Ergodicité du processus angulaire

On s'intéresse à présent au processus angulaire  $\Theta_t$ . Ce dernier est un mouvement brownien sphérique changé de temps. En effet, si l'on définit le processus  $\tilde{\Theta}_s = (\tilde{\theta}_s^1, \dots, \tilde{\theta}_s^d) \in \mathbb{S}^{d-1}$  par

$$\tilde{\Theta}_s := \Theta_{C_s^{-1}}, \quad \text{i.e.,} \quad \mathbf{p}_t = r_t \times \tilde{\Theta}_{C_t},$$

alors  $\tilde{\Theta}_s$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$d\tilde{\theta}_s^i = \left( \frac{1-d}{2} \right) \tilde{\theta}_s^i ds + \sum_{j=1}^d \left( \delta_{ij} - \tilde{\theta}_s^i \tilde{\theta}_s^j \right) d\tilde{W}_s^j,$$

pour un mouvement brownien standard  $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \dots, \tilde{W}^d) \in \mathbb{R}^d$ . On reconnaît en  $\tilde{\Theta}$  un mouvement brownien sphérique sur la sphère euclidienne de dimension  $d-1$ . On en déduit alors directement l'ergodicité du processus  $\mathbf{p}_t$  dans  $\mathbb{R}^d$ , ou de manière équivalente celle du processus  $(r_t, \Theta_t)$  dans l'espace produit  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ .

**Lemme II.2** — *Le processus  $(r_t, \Theta_t) = (r_t, \tilde{\Theta}_{C_t})$  est ergodique dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme II.1 et le calcul ci-dessus, le générateur infinitésimal de la diffusion  $(r_t, \Theta_t) = (r_t, \tilde{\Theta}_{C_t})$  est

$$\mathcal{A} := \mathcal{L}_r + \frac{\sigma^2(r)}{2\beta r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}, \quad (\text{II.6})$$

où  $\mathcal{L}_r$  est le générateur du processus radial donné en (II.2) et  $\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}$  est le laplacien sphérique. Notons  $d\Theta$  la probabilité uniforme sur la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  et  $\bar{\nu} := (\int_0^\infty \nu)$ . Alors, on vérifie facilement que mesure de probabilité

$$\pi(dr, d\Theta) := \bar{\nu}^{-1} \times \nu(r) dr d\Theta, \quad (\text{II.7})$$

est invariante pour le processus  $(r_t, \Theta_t)$ , d'où le résultat.  $\square$

Remarque II.1 — D'après l'expression du générateur infinitésimal  $\mathcal{A}$ , lorsqu'il est non nul, le facteur d'anisotropie  $\eta$  n'influe que sur la dérive radiale du processus  $(\mathbf{p}_t)$ .

## 1.4 Comportement asymptotique de l'horloge $C_t$

Comme annoncé à la fin du paragraphe 1.2, nous précisons ici la vitesse de divergence de l'horloge  $C_t$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. On rappelle que l'on a posé

$$\mu(r) = \exp \left[ \int_1^r \frac{ds}{s(1+\eta(s)^2)} \right] = r \times \exp \left[ - \int_1^r \frac{\eta(s)^2 ds}{s(1+\eta(s)^2)} \right].$$

A la fonction continue  $\eta$ , associons l'intégrale

$$\kappa_\eta := \exp \left( \int_0^1 \frac{\eta^2(s) ds}{s(1+\eta(s)^2)} \right) = \limsup_{r \rightarrow 0} \mu(r)/r \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Pour  $r > 0$ , considérons enfin la fonction

$$u(r) = u_d(r) := b(r) + \frac{d-1}{2\beta} \frac{\sigma^2(r)\eta(r)^2}{r^2(1+\eta(r)^2)}.$$

A l'aide de  $u$ , le logarithme de  $r_t$  s'exprime comme :

$$\log(r_t/r_0) = - \int_0^t u(r_s) ds + \left( \frac{d-2}{2} \right) C_t + B_{C_t}. \quad (\text{II.8})$$

### 1.4.1 Intégrabilité de la fonction $u$

Sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned} u(r)\nu(r) &= \frac{r^{d-2}}{2\beta} \left( \beta g(r) e^{-\beta G(r)} \left( \frac{\mu(r)}{r} \right)^{d-1} + \left[ \left( \frac{\mu(r)}{r} \right)^{d-1} \right]' e^{-\beta G(r)} \right) \\ &= -\frac{r^{d-2}}{2\beta} \left( e^{-\beta G(r)} \left( \frac{\mu(r)}{r} \right)^{d-1} \right)'. \end{aligned}$$

Nous travaillons ici sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$  ; en dimension  $d \geq 3$ , la fonction  $u$  est donc intégrable contre  $\nu$  sur  $]0, +\infty[$  et une intégration par parties donne

$$\nu(u) = \int_{\mathbb{R}_+} u(r)\nu(r)dr = \frac{d-2}{2\beta} \int_0^\infty r^{-2} \mu^{d-1}(r) e^{-\beta G(r)} dr.$$

Lorsque  $d = 2$ , la fonction  $u$  est intégrable contre  $\nu$  sur  $]0, +\infty[$  ssi  $\kappa_\eta < +\infty$ , auquel cas :

$$\nu(u) = \int_{\mathbb{R}_+} u(r)\nu(r)dr = \frac{\kappa_\eta}{2\beta}.$$

Lorsque  $\nu(u) < +\infty$ , nous posons  $\ell_u := 2\bar{\nu}^{-1}\nu(u)$ .

### 1.4.2 Comportement asymptotique de $C_t$

Nous pouvons maintenant expliciter le comportement asymptotique de l'horloge  $C_t$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. Nous montrons en effet la proposition suivante

**Proposition II.1** — *Lorsque  $d = 2$ , si  $\kappa_\eta < +\infty$ , le processus  $t^{-2}C_t$  converge en loi :*

$$t^{-2}C_t \xrightarrow{d} \inf \left\{ s > 0, \beta_s = \frac{\ell_u}{2} \right\},$$

où  $\beta$  est un mouvement brownien standard. En dimension  $d \geq 3$ , le processus  $t^{-1}C_t$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1$  :

$$t^{-1}C_t \xrightarrow{p.s., \mathbb{L}^1} \frac{\ell_u}{d-2}.$$

*Démonstration.* D'après le paragraphe 1.1, en toute dimension  $d \geq 1$ , le processus radial  $r_t$  est ergodique. D'autre part, les fonctions  $x \mapsto \log(x)$  et  $x \mapsto \log \sigma(x)$  étant intégrables contre la mesure invariante  $\nu$ , on montre que lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\log(r_t/r_0) = \mathcal{O}_{\mathbb{L}^2}(1) \quad \text{et} \quad \log(\sigma(r_t)/\sigma(r_0)) = \mathcal{O}_{\mathbb{L}^2}(1),$$

d'où

$$\log(r_t^2/r_0^2) = o(t) \text{ et } \log(\sigma^2(r_t)/\sigma^2(r_0)) = o(t). \quad (\text{II.9})$$

Lorsque  $d \geq 3$ , des équations (II.8), (II.9) et du théorème ergodique, on déduit alors que presque sûrement :

$$\begin{aligned} t^{-1}C_t &= \left(\frac{2}{d-2}\right) t^{-1} \int_0^t u(r_s) ds + o(1) + o(t^{-1}C_t) \\ &= \frac{\ell_u}{d-2} + o(1) = \frac{1}{\beta\bar{\nu}} \int_0^\infty r^{-2} \mu^{d-1}(r) e^{-\beta G(r)} dr + o(1). \end{aligned}$$

On retrouve bien sûr le résultat obtenu en appliquant directement la théorème ergodique, la fonction  $r \mapsto \sigma^2(r)/r^2$  étant intégrable contre  $\nu$  lorsque  $d \geq 3$  :

$$\begin{aligned} t^{-1}C_t &= t^{-1} \int_0^t \frac{\sigma^2(r_s)}{\beta r_s^2} ds \longrightarrow \frac{1}{\beta\bar{\nu}} \int_0^\infty r^{-2} \sigma^2(r) \nu(r) dr \\ &= \frac{1}{\beta\bar{\nu}} \int_0^\infty r^{-2} \mu^{d-1}(r) e^{-\beta G(r)} dr. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Étudions maintenant le cas de la dimension  $d = 2$  lorsque  $\kappa_\eta < +\infty$ . L'équation (II.8) s'écrit alors :

$$\log(r_t/r_0) = - \int_0^t u(r_s) ds + B_{C_t}. \quad (\text{II.11})$$

D'après le théorème ergodique, presque sûrement, lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\int_0^t u(r_s) ds = \frac{\ell_u}{2} t + o(t). \quad (\text{II.12})$$

D'après (II.9), (II.11) et (II.12), on a donc :

$$\log(\sigma^2(r_t)/r_t^2) - \log(\sigma^2(r_0)/r_0^2) = \ell_u t - 2B_{C_t} + o(t) = o(t).$$

On écrit alors

$$\frac{1}{\ell_u} (e^{\ell_u t} - 1) = \int_0^t e^{\ell_u s} ds = \int_0^t e^{\ell_u s} \times \frac{r_s^2}{\sigma^2(r_s)} dC_s = \int_0^t \exp(2B_{C_s} - o(s)) dC_s.$$

En majorant, il vient

$$\frac{1}{\ell_u} (e^{\ell_u t} - 1) = e^{-o(t)} \int_0^t \exp(2B_{C_s}) dC_s = e^{-o(t)} \int_0^{C_t} e^{2B_s} ds.$$

Comme l'intégrande est positive, on obtient

$$C_t = \inf \left\{ u > 0, \quad \int_0^u e^{2B_s} ds > e^{o(t)} \times \frac{1}{\ell_u} (e^{\ell_u t} - 1) \right\},$$

donc

$$t^{-2} C_t = \inf \left\{ u > 0, \quad \int_0^u e^{2B_{t^2 s}} ds > t^{-2} \times e^{o(t)} \times \frac{1}{\ell_u} (e^{\ell_u t} - 1) \right\},$$

en utilisant l'invariance d'échelle  $B_{t^2 s} \stackrel{d}{=} t B_s$ , puis en passant au log

$$t^{-2} C_t \stackrel{d}{=} \inf \left\{ u > 0, \quad \frac{1}{2t} \log \left( \int_0^u e^{2t B_s} ds \right) > \frac{\ell_u}{2} + o(1) \right\}.$$

En utilisant à nouveau l'invariance d'échelle, on montre que

$$\frac{1}{2t} \log \left( \int_0^u e^{2t B_s} ds \right) \xrightarrow{d} S_t \quad \text{où} \quad S_t = \sup_{s \in [0, t]} B_s,$$

on en déduit finalement

$$t^{-2} C_t \xrightarrow{d} \inf \left\{ s > 0, \quad B_s = \frac{\ell_u}{2} \right\}.$$

On a donc montré que, lorsque  $t$  tend vers l'infini :

– lorsque  $d = 2$ , le processus  $t^{-2} C_t$  converge en loi :

$$t^{-2} C_t \xrightarrow{d} \inf \left\{ s > 0, \quad B_s = \frac{\ell_u}{2} \right\}.$$

– lorsque  $d \geq 3$ , le processus  $t^{-1} C_t$  converge presque sûrement :

$$t^{-1} C_t \xrightarrow{p.s.} \frac{\ell_u}{d-2}.$$

□

**Remarque II.2** — Dans le cas isotrope *i.e.*, lorsque  $\eta = 0$ , on a  $\mu \equiv Id$  et  $u \equiv b$ , la constante  $\ell_u$  est alors donnée par :

$$\ell_u = 1/\beta\bar{\nu} \quad \text{lorsque } d = 2 \quad \text{et} \quad \ell_u = (1/\beta\bar{\nu}) \int_{\mathbb{R}^+} r^{d-3} e^{-\beta G(r)} dr \quad \text{si } d \geq 3.$$

## 1.5 Convergence $\mathbb{L}^1$ dans le théorème ergodique

Dans la suite de la preuve du théorème limite central, nous utiliserons à plusieurs reprises le fait que la convergence dans le théorème ergodique est valable en espérance mais aussi en norme  $\mathbb{L}^1$ . Oublions momentanément les diffusions relativistes et considérons une diffusion ergodique  $X = (X_s)_{s \geq 0}$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et de probabilité invariante  $\pi$ . Le théorème ergodique est le plus souvent énoncé en terme de convergence presque sûre :

**Théorème II.1** (Théorème ergodique) — *Soit  $f$  une fonction positive, intégrable contre  $\pi$ , alors lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a la convergence presque sûre*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \longrightarrow \int_I f d\pi.$$

*Démonstration.* Pour une preuve de ce résultat, on pourra consulter [RY99] théorème (3.12) p. 427 ou encore [Kal01] théorème 23.14 p. 464.  $\square$

Nous rappelons ici que la convergence a en fait lieu dans  $\mathbb{L}^1$ . Introduisons tout d'abord quelques notations. A tout réel  $a > 0$ , nous associons l'opérateur de décalage  $\theta_a$  :

$$X_s \circ \theta_a(\omega) = X_{s+a}(\omega), \text{ on a alors bien sûr } X \circ \theta_a^n = X \circ \theta_{na}.$$

Si  $X_0$  a pour loi  $\mu$ , nous noterons  $P_\mu$  la loi du processus  $(X_s)_{s \geq 0}$ ,  $P_\mu \circ \theta_t^{-1}$  la loi du processus  $X$  au temps  $t$  et  $\|\mu\|$  la variation totale de la mesure  $\mu$ . Rappelons enfin que lorsque une suite de variables aléatoires converge en probabilité, la convergence en norme  $\mathbb{L}^p$  est équivalente à la convergence des normes  $\mathbb{L}^p$  :

**Proposition II.2** (convergence  $\mathbb{L}^p$ ) — *Soient  $p > 0$  et  $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots \in \mathbb{L}^p$  tels que la suite  $(\xi_n)$  converge en probabilité vers  $\xi$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\xi_n \longrightarrow \xi$  dans  $\mathbb{L}^p$  ;
- $\|\xi_n\|_p \longrightarrow \|\xi\|_p$  ;
- Les variables  $|\xi_n|^p$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  sont uniformément intégrables.

*Démonstration.* Voir par exemple [Kal01] proposition 4.12 p. 68.  $\square$

Soit  $f$  une fonction positive, intégrable contre  $\pi$ , et  $x \in I$ . D'après la proposition II.2, on a

$$\mathbb{E}_x \left[ \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds - \int_I f d\pi \right| \right] \longrightarrow 0 \iff \mathbb{E}_x \left[ \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \right] \longrightarrow \int_I f d\pi.$$

Dans l'exercice (3.18) p. 429 de [RY99], les auteurs proposent une démonstration de la dernière convergence basée sur le théorème de Chacon-Ornstein.

**Théorème II.2** (Chacon-Ornstein, cas ergodique) — *Soit  $(E, \mathcal{E}, m)$  un espace mesuré, où la mesure  $m$  est  $\sigma$ -finie. Soit  $T$  une contraction positive de  $\mathbb{L}^1(m)$ , conservative et ergodique. Si  $g$  est un élément de  $\mathbb{L}_+^1(m)$  tel que  $m(g) > 0$ , alors pour toute fonction  $f \in \mathbb{L}^1(m)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_0^n T^k f}{\sum_0^n T^k g} = \frac{m(f)}{m(g)}, \quad m\text{-presque partout.}$$

*Démonstration.* Voir par exemple [RY99]. □

Posons pour alléger les expressions

$$C_a = C_a(X) := \int_0^a f(X_s) ds \quad \text{et} \quad \tilde{C}_a(x) := \mathbb{E}_x [C_a] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^a f(X_s) ds \right].$$

Comme  $\pi$  est invariante pour le processus  $(X_s)$ , la mesure  $P_\pi$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est invariante par  $\theta_a$ , de sorte que  $Z \mapsto Z \circ \theta_a$  est une contraction positive de  $\mathbb{L}^1(P_\pi)$  et l'opérateur

$$T_a : \mathbb{L}^1(\pi) \rightarrow \mathbb{L}^1(\pi) \quad \text{défini par} \quad T_a(g)(x) = \mathbb{E}_x [g(X_0 \circ \theta_a)]$$

est une contraction positive de  $\mathbb{L}^1(\pi)$ . Comme la diffusion  $(X_s)$  est ergodique, pour tout  $y \in I$  et pour toute fonction non nulle  $g \in \mathbb{L}_+^1(\pi)$ , on a

$$\sum_{n=0}^N T_a^n(g)(y) = \sum_{n=0}^N E_y [g(X_{na})] \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui montre que  $T_a$  est conservatif et ergodique. D'autre part, en appliquant la propriété de Markov au temps  $na$ , on obtient

$$\mathbb{E}_x [C_a \circ \theta_{na}] = \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_{X_{na}} [C_a]] = E_x [\tilde{C}_a(X_{na})] := T_a^n (\tilde{C}_a) (x).$$

On en déduit que pour tout entier  $N \geq 0$

$$E_x [C_{Na}] = \sum_{n=0}^N \mathbb{E}_x [C_a \circ \theta_{na}] = \sum_{n=0}^N T_a^n (\tilde{C}_a) (x).$$

En choisissant  $g \equiv 1$ , d'après le théorème de Chacon-Ornstein, on peut alors affirmer que pour  $\pi$ -presque tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x \left[ N^{-1} \int_0^{Na} f(X_s) ds \right] &= \lim_{N \rightarrow +\infty} E_x [N^{-1} C_{Na}] \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-1} \sum_0^N \mathbb{E}_x [C_a \circ \theta_{na}] \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-1} \sum_0^N T_a^n (\tilde{C}_a) \\
&= \int_I \tilde{C}_a(x) \pi(dx) \\
&= \int_I \mathbb{E}_x \left[ \int_0^a f(X_s) ds \right] \pi(dx) \\
&= \int_0^a \left( \int_I \mathbb{E}_x [f(X_s)] \pi(dx) \right) ds \\
&= a \times \int_I f d\pi.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout  $a > 0$  :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x \left[ (Na)^{-1} \int_0^{Na} f(X_s) ds \right] = \int_I f d\pi,$$

d'où le résultat.

## 2 UTILISATION DE LA MÉTHODE DES MARTINGALES

Nous cherchons maintenant à appliquer la méthode des martingales au processus  $\mathbf{x}_t$ , autrement dit, on cherche à le décomposer en la somme d'un martingale  $\mathbf{M}$  et d'une terme de reste que l'on espère asymptotiquement négligeable. Nous montrons ici que, de par la symétrie du système d'équation ( $\star$ ), la décomposition (I.10) se ramène à un problème unidimensionnel : la résolution d'une équation différentielle ordinaire de dimension un, mais qui possède un pôle d'ordre deux en zéro et un pôle simple en l'infini, de sorte que les méthodes de résolution usuelles ne s'appliquent pas. Dans la proposition II.3, nous parvenons cependant à construire une solution de cette équation par une méthode de point fixe, solution dont on parvient à contrôler le comportement au voisinage des pôles.

### 2.1 Existence de la décomposition

On rappelle que l'on cherche ici à exhiber une fonction  $F = (F^1, \dots, F^d)$  de  $\mathbb{R}^d$  dans lui-même, de classe  $C^2$ , et vérifiant la relation (I.10), c'est-à-dire :

$$dF^i(\mathbf{p}_t) + dx_t^i - dM_t^i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d,$$

pour une martingale  $\mathbf{M}_t = (M_t^1, \dots, M_t^d)$ . D'après la formule d'Itô, si  $F$  est une telle fonction, on a alors

$$\begin{aligned} dF^i(\mathbf{p}_t) = & + \frac{\sigma^2(r_t)}{2\beta[1 + \eta(r_t)^2]} \left( \delta^{jk} + \eta(r_t)^2 \theta_t^j \theta_t^k \right) \partial_{jk}^2 F^i(\mathbf{p}_t) dt \\ & - \partial_j F^i(\mathbf{p}_t) p_t^j b(r_t) dt + dM_t^i, \end{aligned}$$

où la martingale  $M^i$  est donnée par :

$$dM_t^i = \left( \beta [1 + \eta(r_t)^2] \right)^{-1/2} \sigma(r_t) \partial_j F^i(\mathbf{p}_t) [dW_t^j + \eta(r_t) \theta_t^j dw_t].$$

De manière équivalente, le générateur infinitésimal de la diffusion  $\mathbf{p}_t$  s'écrit :

$$\frac{\sigma^2(r)}{2\beta[1 + \eta(r)^2]} \left( \Delta + \eta(r)^2 \sum_{1 \leq j, k \leq d} \theta^j \theta^k \frac{\partial^2}{\partial p^j \partial p^k} \right) - b(r) \sum_{j=1}^d p^j \frac{\partial}{\partial p^j},$$

où  $\Delta$  désigne le laplacien usuel dans  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi, une fonction  $F$  satisfaisant (I.10) doit vérifier l'équation :

$$\frac{\sigma^2(r)}{2\beta} \times \frac{\delta^{jk} + \eta(r)^2 \theta^j \theta^k}{[1 + \eta(r)^2]} \times \partial_{jk}^2 F^i(\mathbf{p}) - b(r) p^j \partial_j F^i(\mathbf{p}) = -p^i \times f(r). \quad (\text{II.13})$$

L'équation (II.13) invite à chercher les fonctions  $F^i$  de la forme :

$$F^i(\mathbf{p}) = \theta^i \times \psi_\beta(r) = p^i \times \psi_\beta(r)/r, \quad i.e. \quad F(\mathbf{p}) = \Theta \times \psi_\beta(r) = \mathbf{p} \times \psi_\beta(r)/r.$$

Rappelons que pour  $r \in \mathbb{R}_+$  :

$$g(r) = \frac{2r b(r)}{\sigma^2(r)}, \quad G(r) = \int_0^r g(\rho) d\rho \quad \text{et posons} \quad h(r) := \frac{2r f(r)}{\sigma^2(r)}.$$

Un calcul direct montre alors que l'équation (II.13) est équivalente à

$$\psi''_\beta(r) - \left( \beta g(r) - \frac{d-1}{r[1+\eta(r)^2]} \right) \psi'_\beta(r) - \frac{d-1}{r^2[1+\eta(r)^2]} \psi_\beta(r) = -\beta h(r). \quad (\text{II.14})$$

D'autre part, les coordonnées de la martingale  $\mathbf{M}$  sont alors données par :

$$dM_t^i = \frac{\sigma}{\sqrt{\beta[1+\eta^2]}} \left[ \psi'_\beta dW_t^i + \left[ \frac{\psi_\beta}{r_t} - \psi'_\beta \right] \sum_{j=1}^d [\delta_{ij} - \theta_t^i \theta_t^j] dW_t^j + \eta \psi'_\beta \theta_t^i dw_t \right].$$

Lorsque  $d = 1$ , l'équation (II.14) est une équation différentielle linéaire du premier ordre en  $\psi'_\beta$  dont une solution est donnée par la fonction  $\psi_\beta$  :

$$\psi_\beta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi'_\beta(r) = \beta e^{\beta G(r)} \int_r^\infty h(\rho) e^{-\beta G(\rho)} d\rho.$$

Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , il existe alors  $\varepsilon' < \frac{\varepsilon\beta}{2}$  tel que, lorsque  $r$  tend vers l'infini :

$$|\psi_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}) \quad \text{et} \quad |\psi'_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}).$$

**Remarque II.3** — En toute dimension, lorsque  $b \equiv f$ , c'est à dire lorsque  $g \equiv h$ , l'équation (II.14) admet pour solution triviale la fonction  $\psi_\beta(r) = r$ . C'est le cas par exemple pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste de Debbasch, Mallick et Rivet.

Lorsque  $d \geq 2$ , l'équation (II.14) possède un pôle d'ordre 2 en zéro et un pôle simple à l'infini. En dehors du cas exceptionnel de la remarque II.3, elle n'admet pas a priori de solution explicite et les techniques usuelles ne suffisent pas à décrire le comportement des solutions éventuelles près des pôles. Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , il est toutefois possible de montrer l'existence d'une solution  $\psi_\beta$  à l'équation (II.14) et d'obtenir un contrôle équivalent à celui énoncé plus haut.

**Proposition II.3** — *Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , l'équation (II.14) admet une solution  $\psi_\beta \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  vérifiant  $\psi_\beta(0) = 0$  et telle que, lorsque  $r$  tend vers l'infini :*

$$|\psi_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon' r}) \quad \text{et} \quad |\psi'_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon' r}) \quad \text{pour un } \varepsilon' < \frac{\varepsilon \beta}{2}.$$

De plus, si  $0 \leq f \leq b$ , on a l'encadrement  $0 \leq \psi_\beta \leq Id$ .

Nous remercions vivement Reinhard Schäfke de nous avoir indiqué la méthode à suivre pour montrer à la fois l'existence et le contrôle de la solution  $\psi_\beta$ . La preuve délicate et technique de cette proposition est détaillée dans le prochain paragraphe.

## 2.2 Preuve de la proposition II.3

Donnons tout d'abord le plan de la démonstration. Nous nous intéressons dans un premier temps à l'équation homogène associée à (II.14) :

$$\zeta''(r) + \left( \frac{d-1}{r[1+\eta(r)^2]} - \beta g(r) \right) \zeta'(r) - \frac{d-1}{r^2[1+\eta(r)^2]} \zeta(r) = 0. \quad (\text{II.15})$$

Cette dernière équation a un pôle d'ordre deux en zéro et un pôle à l'infini. À l'aide de la méthode du point fixe, nous construisons dans un premier temps deux solutions  $\zeta_1$  (resp.  $\zeta_2$ ) de l'équation (II.15) dont on contrôle le comportement en l'infini (resp. en zéro). À partir de ces deux solutions, on construit une solution  $\psi_\beta$  de (II.14) sur  $\mathbb{R}^+$ . Enfin, on étudie le comportement asymptotique de la solution et de sa dérivée. Rappelons que nous avons posé :

$$\mu(r) = \exp \left[ \int_1^r \frac{ds}{s[1+\eta(s)^2]} \right],$$

de sorte que  $\mu$  est croissante et que l'on a :

$$\min\{r, 1\} \leq \mu(r) \leq \max\{r, 1\} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq s \Rightarrow 1 \leq \frac{\mu(s)}{\mu(r)} \leq \frac{s}{r}.$$

### 2.2.1 Construction d'une solution $\zeta_1$ de (II.15) bornée en $+\infty$

D'après les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $r_0 > 0$  tel que  $g \geq \varepsilon$  sur  $[r_0, +\infty)$ . Pour  $r \geq r_0$ , considérons alors la fonction

$$\lambda(r) := \int_r^\infty \mu(\rho)^{1-d} e^{\beta G(\rho)} \left[ \int_\rho^\infty e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d-1} \frac{ds}{s^2(1+\eta(s)^2)} \right] d\rho.$$

Un calcul direct montre la majoration :

$$\begin{aligned}\lambda(r) &\leq \int_r^\infty \left[ \int_\rho^\infty e^{-\beta\varepsilon(s-\rho)} \left[ \frac{s}{\rho} \right]^{d-1} s^{-2} ds \right] d\rho \\ &= \int_r^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon s} (1+s/\rho)^{d-3} ds \right] \rho^{-2} d\rho \\ &\leq \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon s} \max\{1, (1+s/r_0)^{d-3}\} ds = \mathcal{O}(1/r).\end{aligned}$$

Lorsque  $r$  tend vers l'infini,  $\lambda(r)$  décroît vers zéro, on peut par conséquent (quitte à augmenter  $r_0$ ) supposer que  $\lambda(r_0) \leq 1/2d$ . Sur l'intervalle  $[r_0, +\infty)$ , on définit alors les fonctions  $\varphi_n$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \varphi_0 \equiv 1, \\ \varphi_{n+1}(r) := 1 + (d-1) \int_r^\infty \mu(\rho)^{1-d} e^{\beta G(\rho)} \left[ \int_\rho^\infty \varphi_n(s) \frac{e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d-1}}{s^2(1+\eta(s)^2)} ds \right] d\rho. \end{cases}$$

Pour tout  $r \geq r_0$ , on a l'encadrement :

$$1 \leq \varphi_{n+1}(r) \leq 1 + (d-1) \|\varphi_n\|_{L^\infty[r_0, +\infty[} \times \lambda(r) < +\infty$$

et donc

$$1 \leq \varphi_n \leq \|\varphi_n\|_{L^\infty[r_0, \infty[} < 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On montre de même que

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\|_{L^\infty[r_0, \infty[} \leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_{L^\infty[r_0, \infty[} \times (d-1)\lambda(r_0).$$

La méthode du point fixe s'applique donc :  $\zeta_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  vérifie  $\zeta_1 \geq 1$  et

$$\zeta_1(r) = 1 + (d-1) \int_r^\infty \mu(\rho)^{1-d} e^{\beta G(\rho)} \left[ \int_\rho^\infty \zeta_1(s) \frac{e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d-1}}{s^2(1+\eta(s)^2)} ds \right] d\rho. \quad (\text{II.16})$$

En particulier, lorsque  $r$  tend vers l'infini

$$\zeta_1(r) \leq 1 + (d-1) \|\zeta_1\|_{L^\infty[r_0, \infty[} \lambda(r) \longrightarrow 1.$$

On a donc  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \zeta_1(r) = 1$  et

$$\zeta_1'(r) = (1-d) \mu(r)^{1-d} e^{\beta G(r)} \int_r^\infty e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d-1} \zeta_1(s) \frac{ds}{s^2(1+\eta(s)^2)} < 0,$$

puis

$$\zeta_1''(r) + \left( \frac{d-1}{r[1+\eta(r)^2]} - \beta g(r) \right) \zeta_1'(r) - \frac{d-1}{r^2[1+\eta(r)^2]} \zeta_1(r) = 0.$$

Cette solution se prolonge sur tout  $\mathbb{R}^{+*}$  en une fonction que l'on note encore  $\zeta_1$  et qui vérifie toujours (II.15), (II.16) et  $\lim_{r \rightarrow 0} \zeta_1 = +\infty$ .

### 2.2.2 Construction d'une solution $\zeta_2$ de (II.15) bornée en 0

Pour  $r \in [0, 1]$ , on définit la fonction  $\Lambda$  :

$$\Lambda(r) := \beta \int_0^r \mu(\rho)^{-d-1} \rho^{-2} e^{\beta G(\rho)} \left[ \int_0^\rho e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d+1} |g(s)| s ds \right] d\rho.$$

D'après les hypothèses ( $\mathcal{H}$ ),

$$0 \leq \Lambda'(r) \leq e^{G(r)} \int_0^1 s^d |g(rs)| ds \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0.$$

On peut donc fixer  $r_1 \in ]0, 1]$  tel que  $\Lambda(r_1) \leq 1/2$ . Sur l'intervalle  $]0, r_1]$ , on définit par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  les fonctions  $\phi_n$  :

$$\begin{cases} \phi_0 \equiv 1 \\ \phi_{n+1}(r) := 1 + \beta \int_0^r \frac{e^{\beta G(\rho)}}{\mu(\rho)^{d+1} \rho^2} \left[ \int_0^\rho e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d+1} g(s) \phi_n(s) s ds \right] d\rho. \end{cases}$$

Les fonctions  $\phi_n$  sont de classe  $C^2$  sur  $]0, r_1]$ , elles sont minorées par 1 et

$$\|\phi_{n+1}\|_{L^\infty]0, r_1]} \leq 1 + \Lambda(r_1) \|\phi_n\|_{L^\infty]0, r_1]},$$

de sorte que

$$\|\phi_n\|_{L^\infty]0, r_1]} < 2 \quad \text{et} \quad \|\phi_{n+1} - \phi_n\|_{L^\infty]0, r_1]} \leq \|\phi_n - \phi_{n-1}\|_{L^\infty]0, r_1]} \times \Lambda(r_1).$$

Par la méthode du point fixe, la fonction  $\tilde{\phi} := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ L^\infty]0, r_1]}} \phi_n$  satisfait :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(r) &= 1 + \beta \int_0^r \mu(\rho)^{-d-1} \rho^{-2} e^{\beta G(\rho)} \left[ \int_0^\rho e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d+1} g(s) \tilde{\phi}(s) s ds \right] d\rho \\ &= 1 + \mathcal{O}[\Lambda(r)], \end{aligned}$$

et lorsque  $r$  tend vers zéro :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}'(r) &= \beta \mu(r)^{-d-1} r^{-2} e^{\beta G(r)} \int_0^r e^{-\beta G(s)} \mu(s)^{d+1} g(s) \tilde{\phi}(s) s ds \\ &= \mathcal{O}[\Lambda'(r)] \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On a donc  $\tilde{\phi}(0) = 1$ ,  $\tilde{\phi}'(0) = 0$  et en dérivant à nouveau, pour tout  $r$  dans l'intervalle  $\in ]0, r_1]$  :

$$\tilde{\phi}''(r) + \left[ \frac{d+1}{r [1 + \eta(r)^2]} + \frac{2}{r} - \beta g(r) \right] \tilde{\phi}'(r) - \beta \frac{g(r)}{r} \tilde{\phi}(r) = 0. \quad (\text{II.17})$$

La fonction  $\tilde{\phi}$  peut être prolongée sur  $\mathbb{R}_+$  en une fonction  $\tilde{\phi}$  satisfaisant toujours les équations (2.2.2) et (II.17). Le prolongement vérifie  $\tilde{\phi}' \geq 0$  et  $\tilde{\phi} \geq 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Posons alors  $\zeta_2(r) := r \tilde{\phi}(r)$ ; on vérifie facilement que

$$\zeta_2(0) = 0, \quad \zeta_2'(0) = 1$$

et que  $\zeta_2$  est solution de l'équation (II.15) sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 2.2.3 Le wronskien des solutions $\zeta_1$ et $\zeta_2$

Considérons le wronskien :  $w_\beta := \zeta_1 \zeta_2' - \zeta_1' \zeta_2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Un calcul immédiat donne

$$w_\beta' = \zeta_1 \zeta_2'' - \zeta_1'' \zeta_2 = \left( \beta g - \frac{d-1}{[1+\eta^2] Id} \right) \times w_\beta,$$

de sorte qu'il existe une constante  $a_\beta \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $r > 0$  :

$$w_\beta(r) = a_\beta \mu(r)^{1-d} e^{\beta G(r)}.$$

Comme  $\zeta_1 \geq 1$ ,  $\zeta_2' > 0$ ,  $\zeta_1' < 0$ ,  $\zeta_2 > 0$  au voisinage de 0, on a nécessairement  $a_\beta > 0$ .

### 2.2.4 Construction d'une solution $\psi_\beta$ de l'équation (2.9) sur $\mathbb{R}^+$

Pour toute fonction continue  $k$  sur  $\mathbb{R}_+$ , telle qu'il existe un réel  $\varepsilon'$  strictement inférieur à  $\beta \varepsilon / 2$  tel que  $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon' r} k(r) = 0$  pour tout  $0 < r < \infty$ , posons :

$$\Psi(k)(r) := \zeta_1(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho + \zeta_2(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho.$$

La fonction  $\Psi(k)$  est bien définie; en effet, comme  $g \geq \varepsilon$  sur  $[r_0, \infty[$  :

$$\int_{r_0}^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} |k(\rho)| d\rho = \mathcal{O}(1) \int_{r_0}^\infty \mu(\rho)^{1-d} e^{-\beta G(\rho)} e^{\beta \varepsilon \rho / 2} d\rho < \infty.$$

De plus, pour  $0 < r < \infty$ , on a :

$$\begin{aligned} \Psi(k)'(r) &= \zeta_1'(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho + \zeta_2'(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho, \\ \Psi(k)''(r) &= -k(r) + \zeta_1''(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho \\ &\quad + \zeta_2''(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho \end{aligned}$$

de sorte que  $\Psi(k)$  vérifie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  l'équation (II.14) avec  $k$  au lieu de  $\beta h$ . Au voisinage de zéro, on a

$$\zeta_2(r) \sim r.$$

D'autre part, comme  $(\zeta_1/\zeta_2)' = -w_\beta/\zeta_2^2$ , on a pour  $r > 0$  :

$$\int_r^1 \frac{w_\beta}{\zeta_2^2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}(r) - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}(1), \quad \text{i.e.,} \quad \zeta_1(r) = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}(1) \zeta_2(r) + \zeta_2(r) \int_r^1 \frac{w_\beta}{\zeta_2^2}.$$

Au voisinage de zéro, on a alors

$$\zeta_1(r) \sim r a_\beta \int_r^1 \mu(s)^{1-d} s^{-2} ds \leq a_\beta \mu(r)^{1-d},$$

dont on déduit le contrôle  $\Psi(k)(r) = \mathcal{O}(r)$  et en particulier,  $\Psi(k)(0) = 0$ . Par ailleurs, comme  $\zeta_1(s) = \mathcal{O}(\mu(s)^{1-d})$ , on a aussi  $|\zeta_1'(r)| = \mathcal{O}(\mu(r)^{1-d}/r)$ . On en déduit que

$$|\zeta_1'(r)| \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho = \mathcal{O}\left(\mu(r)^{1-d}/r\right) \int_0^r \mu(\rho)^{d-1} \rho d\rho = \mathcal{O}(r),$$

puis

$$\zeta_2'(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho = \mathcal{O}(1).$$

Finalement, la dérivée de  $\Psi(k)'$  en zéro est finie

$$\Psi(k)'(0) = \int_0^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} k(\rho) d\rho \in \mathbb{R},$$

et d'après l'équation (II.14), on a alors aussi  $\psi_\beta''(0) \in \mathbb{R}$ . Posons  $\psi_\beta := \beta \Psi(h)$ , on a montré que :

- $\psi_\beta \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  ;
- $\psi_\beta(0) = 0$  ;
- $\psi_\beta$  est solution de l'équation (II.14) sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 2.2.5 Contrôle asymptotique de $\psi_\beta$ et $\psi_\beta'$

Rappelons que d'après la section 2.2.4

$$\begin{aligned} \psi_\beta(r) &= \beta \zeta_1(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho + \beta \zeta_2(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho \\ \psi_\beta'(r) &= \beta \zeta_1'(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho + \beta \zeta_2'(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Au voisinage de l'infini, on a  $\zeta_1 \sim 1$  et

$$\begin{aligned} |\zeta_1'(r)| &= \mathcal{O}\left(\mu(r)^{1-d}\right) \int_r^\infty e^{-\beta \varepsilon(s-r)} \mu(s)^{d-1} s^{-2} ds \\ &= \mathcal{O}(r^{-2}) \int_0^\infty e^{-\beta \varepsilon s} (1 + s/r)^{d-1} ds = \mathcal{O}(r^{-2}). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , on a aussi :

$$w_\beta(r) - \frac{2}{\beta\varepsilon} w'_\beta(r) = \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} g(r) + \frac{2(d-1)}{\beta\varepsilon[1+\eta(r)^2]r}\right) w_\beta(r) < 0,$$

de sorte que

$$\int_{r_0}^r w_\beta \leq \frac{2}{\beta\varepsilon} (w_\beta(r) - w_\beta(r_0)) = \mathcal{O}(w_\beta(r)).$$

En remarquant que  $(\zeta_2/\zeta_1)' = w_\beta/\zeta_1^2$ , pour tout  $r > 0$ ,  $\zeta_2$  s'écrit comme :

$$\zeta_2(r) = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}(1) \zeta_1(r) + \zeta_1(r) \int_1^r \frac{w_\beta}{\zeta_1^2}.$$

On a donc  $\zeta_2(r) = \mathcal{O}(w_\beta(r))$  au voisinage de l'infini. et d'après  $(\mathcal{H})$  il existe  $\varepsilon' < \varepsilon\beta/2$  tel que :

$$\int_0^r \zeta_2(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho = \int_0^r \mathcal{O}(e^{\varepsilon'\rho}) d\rho = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}).$$

Pour contrôler le second terme dans le membre de droite des expressions de  $\psi_\beta$  et  $\psi'_\beta$ , on note que, par définition de  $w_\beta$  :

$$\zeta_2' = \frac{w_\beta}{\zeta_1} + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \zeta_1',$$

de sorte que  $\zeta_2' \sim w_\beta$  au voisinage de l'infini. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} w_\beta(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) w_\beta(\rho)^{-1} h(\rho) d\rho &= \mu(r)^{1-d} \int_r^\infty e^{-\beta[G(\rho)-G(r)]} \mu(\rho)^{d-1} \mathcal{O}(e^{\varepsilon'\rho}) d\rho \\ &= \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}) \mu(r)^{1-d} \int_r^\infty e^{-\varepsilon\beta(\rho-r)/2} \mu(\rho)^{d-1} d\rho \\ &= \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}) \int_0^\infty e^{-\varepsilon\beta\rho/2} (1+\rho/r)^{d-1} d\rho = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que pour un  $\varepsilon' < \varepsilon\beta/2$ , lorsque  $r$  tend vers l'infini :

$$|\psi_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}) \quad \text{et} \quad |\psi'_\beta(r)| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon'r}).$$

Pour conclure, il reste maintenant simplement à montrer que  $\beta\Psi(g) = Id$  et que lorsque la fonction  $f$  vérifie l'encadrement  $0 \leq f \leq b$ , alors la fonction  $\psi_\beta$  vérifie elle l'encadrement  $0 \leq \psi_\beta \leq Id$ .

### 2.2.6 Encadrement des solutions lorsque $0 \leq f \leq b$

Posons  $\tilde{\psi}_\beta := \beta \Psi(g)$  et remarquons que l'identité est solution de l'équation (II.14) si  $g = h$ . Par conséquent, la fonction  $\tilde{\psi} - Id$  est solution de l'équation homogène (II.15), de sorte que, pour deux constantes  $c$  et  $c'$  et pour tout  $r > 0$  :

$$\tilde{\psi}_\beta(r) - r = c \zeta_2(r) + c' \zeta_1(r)$$

Comme  $\tilde{\psi}_\beta(0) = 0$ , on a nécessairement  $c' = 0$ . D'autre part, d'après le paragraphe précédent :

$$\zeta_2(r) \sim \int_1^r w_\beta \gg e^{\beta G(r)/2}, \quad \text{lorsque } r \text{ tend vers l'infini.}$$

Ceci implique que  $c \geq 0$ . Si  $c > 0$ , on obtient alors

$$\tilde{\psi}(r) = r + c \zeta_2(r) \gg ce^{\beta G(r)/2}.$$

D'autre part, une intégration par parties montre qu'au voisinage de l'infini :

$$\beta \int_r^\infty \mu(\rho)^{d-1} e^{-\beta G(\rho)} g(\rho) d\rho \sim \mu(r)^{d-1} e^{-\beta G(r)},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \beta \int_r^\infty \zeta_1(\rho) \mu(\rho)^{d-1} e^{-\beta G(\rho)} g(\rho) d\rho &\sim \beta \int_r^\infty \mu(\rho)^{d-1} e^{-\beta G(\rho)} g(\rho) d\rho \\ &\sim \mu(r)^{d-1} e^{-\beta G(r)}. \end{aligned}$$

Lorsque  $r$  tend vers l'infini, on a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\beta(r) &= \beta \left[ \zeta_1(r) \int_0^r \zeta_2(\rho) \frac{h(\rho)}{w_\beta(\rho)} d\rho + \zeta_2(r) \int_r^\infty \zeta_1(\rho) \frac{h(\rho)}{w_\beta(\rho)} d\rho \right] \\ &= \mathcal{O}(1) \int_0^r g(\rho) d\rho + \mathcal{O}(w_\beta(r)) \mu(r)^{d-1} e^{-\beta G(r)} \\ &= \mathcal{O}(G(r) + 1) = o(e^{\beta G(r)/2}). \end{aligned}$$

Ceci contredit  $\tilde{\psi}(r) \gg ce^{\beta G(r)/2}$ , on a donc  $c = 0$  et  $\tilde{\psi}_\beta = Id$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Enfin, si  $0 \leq f \leq b$  i.e.,  $0 \leq h \leq g$ , la positivité de  $\Psi$  assure que  $\Psi(h) \geq 0$  et  $\Psi(g - h) \geq 0$ . On en déduit l'encadrement  $0 \leq \psi_\beta \leq Id$  par linéarité.

### 2.3 Négligeabilité du terme de reste

Grâce au contrôle de la fonction  $\psi_\beta$ , nous sommes maintenant en mesure de montrer que le terme de reste  $t^{-1/2}|F(\mathbf{p}_{at})|$  est asymptotiquement négligeable, lorsque  $t$  tend vers l'infini, uniformément en  $a$  dans tout compact de  $\mathbb{R}_+$  :

**Lemme II.3** — *Pour tout point initial  $\mathbf{p}_0 = r_0\Theta_0$ , uniformément par rapport à  $a$  dans tout compact de  $\mathbb{R}_+$ , on a :*

$$t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbf{p}_0} [|F(\mathbf{p}_{at})|^2] = t^{-1} \sum_{i=1}^d \mathbb{E}_{\mathbf{p}_0} [|F^i(\mathbf{p}_{at})|^2] \longrightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

*Démonstration.* Par définition, des fonctions  $\psi_\beta$  et  $F$ , on a

$$|F(\mathbf{p})|^2 = \sum_{i=1}^d |F^i(\mathbf{p})|^2 = |\psi_\beta(r)|^2 \times \sum_{i=1}^d |\theta^i|^2 = |\psi_\beta(r)|^2,$$

donc

$$t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbf{p}_0} [|F(\mathbf{p}_{at})|^2] = t^{-1} \mathbb{E}_{r_0} [|\psi_\beta(r_{at})|^2].$$

D'autre part, d'après la proposition II.3, la fonction  $\psi_\beta$  est de classe  $C^2$ . La formule d'Itô donne alors :

$$d|\psi_\beta(r_t)|^2 = 2\psi_\beta(r_t)\psi'_\beta(r_t)dr_t + [\psi_\beta(r_t)\psi''_\beta(r_t) + |\psi'_\beta(r_t)|^2] d\langle r \rangle_t,$$

soit

$$d|\psi_\beta(r_t)|^2 = \Psi_\beta(r_t)dt + 2\sigma(r_t)\psi_\beta(r_t)\psi'_\beta(r_t)dB_t,$$

où l'on a posé

$$\Psi_\beta(r) := \sigma^2(r) \left[ \psi_\beta(r)\psi'_\beta(r) \left( \frac{d-1}{\beta(1+\eta^2(r))r} - g(r) \right) + \psi_\beta(r)\psi'_\beta(r) + |\psi_\beta(r)|^2 \right]$$

Sous les hypothèses  $(\mathcal{H})$ , d'après la proposition II.3, la fonction  $\Psi_\beta$  est intégrable contre la mesure  $\nu$ , invariante pour le processus radial  $(r_s)$ . En intégrant

$$\int_{\mathbb{R}_+} \sigma^2(r)\psi_\beta(r)\psi'_\beta(r)\nu(r)dr$$

par parties, on obtient facilement

$$\int_{\mathbb{R}_+} \Psi_\beta(r)\nu(r)dr = 0.$$

Fixons  $\mathbf{p}_0 = r_0 \Theta_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $K$  un compact de  $\mathbb{R}_+$  et  $a \in K$ ; d'après ci-dessus, on a pour tout  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} t^{-1} \mathbb{E}_{\mathbf{p}_0} [ |F(\mathbf{p}_{at})|^2 ] &= t^{-1} \mathbb{E}_{r_0} [ |\psi_\beta(r_{at})|^2 ] \\ &= t^{-1} \psi_\beta(r_0) + t^{-1} \mathbb{E}_{r_0} \left[ \int_0^{at} \Psi_\beta(r_s) ds \right]. \end{aligned}$$

D'après le théorème ergodique dans sa version  $\mathbb{L}^1$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$t^{-1} \mathbb{E}_{r_0} \left[ \int_0^{at} \Psi_\beta(r_s) ds \right] \longrightarrow \bar{\nu}^{-1} \int_{\mathbb{R}_+} \Psi_\beta(r) \nu(r) dr = 0,$$

la convergence étant uniforme en  $a \in K$ , d'où le résultat.  $\square$

### 3 ASYMPTOTIQUE DE LA MARTINGALE $\mathbf{M}$

D'après la formule de décomposition (I.10) et le lemme II.3, le comportement asymptotique du processus  $(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0}$  est celui de la martingale  $(t^{-1/2} \mathbf{M}_{at})_{a \geq 0}$ . On rappelle que les coordonnées  $M^i$  de la martingale  $\mathbf{M}$  sont données par :

$$dM_t^i = \frac{\sigma}{\sqrt{\beta[1+\eta^2]}} \left[ \psi'_\beta dW_t^i + \left[ \frac{\psi_\beta}{r_t} - \psi'_\beta \right] \sum_{j=1}^d [\delta_{ij} - \theta_t^i \theta_t^j] dW_t^j + \eta \psi'_\beta \theta_t^i dw_t \right].$$

#### 3.1 Indépendance asymptotique des composantes

Grâce au théorème de Knight asymptotique, nous montrons que les martingales  $M^i$  sont asymptotiquement indépendantes.

**Lemme II.4** — *Pour  $1 \leq i, l \leq d$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a presque sûrement :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M^i, M^l \rangle_t}{t} = \delta_{il} \Sigma_\beta^2,$$

$$\text{avec } \Sigma_\beta^2 := \frac{1}{\beta d} \left[ \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\pi + (d-1) \int \psi_\beta^2 (1+\eta^2)^{-1} I d^{-2} \sigma^2 d\pi \right].$$

En particulier, pour  $i \neq l$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M^i, M^l \rangle_t}{\langle M^i, M^i \rangle_t} = 0.$$

*Démonstration.* Le calcul des crochets donne :

$$\beta \langle M^i, M^l \rangle_t = \delta_{il} S_t^i - (1 - \delta_{il}) T_t^{i,l}, \quad \text{où}$$

$$S_t^i := \int_0^t \sigma^2(r_s) \psi'_\beta(r_s)^2 |\theta_s^i|^2 ds + \int_0^t \frac{\sigma^2(r_s) \psi_\beta^2(r_s)}{r_s^2(1 + \eta(r_s)^2)} (1 - |\theta_s^i|^2) ds,$$

$$T_t^{i,l} := \int_0^t \sigma^2(r_s) \left[ \psi_\beta^2(r_s) [1 + \eta(r_s)^2]^{-1} r_s^{-2} - \psi'_\beta(r_s)^2 \right] \theta_s^i \theta_s^l ds.$$

Posons

$$k^i(r, \Theta) := \sigma^2(r) \psi'_\beta(r)^2 |\theta^i|^2 + [1 + \eta(r)^2]^{-1} r^{-2} \sigma^2(r) \psi_\beta^2(r) (1 - |\theta^i|^2),$$

$$\ell^{i,l}(r, \Theta) := \sigma^2(r) \left[ \psi_\beta^2(r) [1 + \eta(r)^2]^{-1} r^{-2} - \psi'_\beta(r)^2 \right] \theta^i \theta^l$$

et remarquons que d'après la proposition II.3, ces fonctions sont intégrables contre la mesure probabilité  $\pi$ , mesure invariante du processus  $\mathbf{p}_t$ . D'après le théorème ergodique, on a alors les convergences presque sûres :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t^i/t = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} k^i d\pi \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_t^{i,l}/t = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} \ell^{i,l} d\pi.$$

Or, la symétrie sphérique par rapport à  $\Theta$  implique que, pour  $1 \leq i \neq l \leq d$  :

$$\int k^i d\pi = d^{-1} \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\pi + (1 - d^{-1}) \int \frac{\sigma^2 \psi_\beta^2}{Id^2(1 + \eta^2)} d\pi =: \beta \Sigma_\beta^2,$$

$$\int \ell^{i,l} d\pi = 0.$$

Ainsi, on a montré que :

$$\frac{\langle M^i, M^l \rangle_t}{t} \xrightarrow{p.s.} \delta_{il} \times \Sigma_\beta^2$$

où

$$\Sigma_\beta^2 := \frac{\delta_{il}}{\beta d} \left[ \pi \left( \sigma^2 |\psi'_\beta|^2 \right) + (d-1) \pi \left( \frac{\sigma^2 \psi_\beta^2}{[(1 + \eta^2) Id^2]} \right) \right].$$

Lorsque  $i \neq l$ , en prenant le quotient, on obtient naturellement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M^i, M^l \rangle_t}{\langle M^i, M^i \rangle_t} = 0.$$

□

Considérons à présent la martingale  $\mathbf{M}^t$  définie par :

$$\mathbf{M}_a^t := (M_a^{1,t}, \dots, M_a^{d,t}) := t^{-1/2} \mathbf{M}_{at}$$

et les mouvements browniens de Dambis-Dubins-Schwarz  $B^{i,t}$  tels que

$$M_a^{i,t} = B^{i,t}(\langle M^{i,t}, M^{i,t} \rangle_a) = B^{i,t}(t^{-1} \langle M^i, M^i \rangle_{at}).$$

En appliquant le théorème de Knight asymptotique<sup>1</sup>, on déduit du lemme II.4 l'indépendance asymptotique des martingales  $M^i$  et  $M^l$ , pour  $1 \leq i \neq l \leq d$ , au sens suivant :

**Corollaire II.1** — *Le processus  $(B^{1,t}, \dots, B^{d,t})$  converge en loi, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers un mouvement brownien standard  $\mathcal{B}$  de dimension  $d$ .*

Grâce au corollaire II.1, nous allons voir dans le prochain paragraphe que le processus  $\mathbf{M}_a^t$  converge au sens des marginales de dimension finie. Pour conclure, il restera à vérifier un critère de tension. Avons cela, nous énonçons le lemme suivant qui fournit un expression simplifiée de la variance limite  $\Sigma_\beta^2$ . On rappelle que  $\psi_\beta$  est la solution de la proposition II.3 et que

$$G(r) = \int_0^r g(\rho) d\rho, \quad h(r) = \frac{2r f(r)}{\sigma^2(r)}, \quad \mu(r) = \exp \left[ \int_1^r \frac{ds}{s [1 + \eta(s)^2]} \right].$$

**Lemme II.5** — *Lorsque  $d = 1$ , l'expression de la constante  $\Sigma_\beta^2$  du lemme II.4 se simplifie en :*

$$\Sigma_\beta^2 = \frac{1}{\beta} \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\pi = \left[ \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \sigma(r)^{-2} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty \psi'_\beta(r)^2 e^{-\beta G(r)} dr,$$

ou encore, en utilisant l'expression explicite de  $\psi'_\beta$  du paragraphe 2 :

$$\Sigma_\beta^2 = \beta \left[ \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \sigma(r)^{-2} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty \left( \int_r^\infty h(\rho) e^{-\beta G(\rho)} d\rho \right)^2 e^{\beta G(r)} dr.$$

En toute dimension, la constante  $\Sigma_\beta^2$  s'écrit sous la forme plus compacte :

$$\Sigma_\beta^2 = \left[ d \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \sigma(r)^{-2} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty \psi_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} h(r) dr.$$

---

1. Voir [RY99], Théorème (2.3), Corollaire (2.4) p. 524-525.

*Démonstration.* les fonctions  $\psi_\beta$ ,  $\psi'_\beta$ ,  $\sigma$  et  $\eta$  sont des fonctions du rayon  $r$ , aussi

$$\Sigma_\beta^2 := \frac{1}{\beta d} \left[ \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\pi + (d-1) \int \psi_\beta^2 (1+\eta^2)^{-1} Id^{-2} \sigma^2 d\pi \right]$$

s'écrit encore

$$\Sigma_\beta^2 = \frac{1}{\beta d \left( \int_0^\infty d\nu \right)} \left[ \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\nu + (d-1) \int \psi_\beta^2 (1+\eta^2)^{-1} Id^{-2} \sigma^2 d\nu \right].$$

Par définition, on a

$$\bar{\nu} = \int_0^\infty \nu(r) dr = \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \sigma(r)^{-2} dr,$$

d'où l'expression de  $\Sigma_\beta^2$  dans la remarque II.5. Pour la remarque II.5, il suffit montrer que

$$\beta \int_0^\infty \psi_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} h(r) dr = \int |\psi'_\beta|^2 \sigma^2 d\nu + (d-1) \int \frac{\sigma^2 \psi_\beta^2}{(1+\eta^2) Id^2} d\nu.$$

Or, d'après la proposition II.3, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \psi_\beta(r) \psi'_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \right] = 0,$$

en intégrant  $I := \int_0^\infty \psi'_\beta(r)^2 \nu(r) dr$  par partie et en utilisant l'équation (II.14), il vient

$$\begin{aligned} I &= \left[ \psi_\beta(r) \psi'_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \psi_\beta(r) \frac{d}{dr} \left[ \psi'_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \right] dr \\ &= - \int_0^\infty \psi_\beta(r) \left[ \psi''_\beta(r) - \left( \beta g(r) - \frac{d-1}{r(1+\eta^2(r))} \right) \psi'_\beta(r) \right] e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} dr \\ &= \int_0^\infty \psi_\beta(r) \left[ \beta h(r) - \frac{d-1}{r^2(1+\eta(r)^2)} \psi_\beta(r) \right] e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} dr \\ &= \beta \int_0^\infty \psi_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} h(r) dr \\ &\quad - (d-1) \int_0^\infty \frac{\psi_\beta(r)^2}{r^2(1+\eta(r)^2)} e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} dr, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

### 3.2 Convergence des marginales de dimension finie

Comme annoncé, avant de vérifier un critère de tension, nous montrons que les marginales de dimension finie du processus  $\mathbf{M}^t$  convergent, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers celles d'un mouvement brownien.

**Proposition II.4** — *Les marginales de dimension finie de la martingale  $\mathbf{M}^t$  convergent, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers celles d'un mouvement brownien  $\Sigma_\beta \times \mathcal{B}$ , où  $\Sigma_\beta$  est donnée par :*

$$\Sigma_\beta^2 = \left[ d \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} \sigma(r)^{-2} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty \psi_\beta(r) e^{-\beta G(r)} \mu(r)^{d-1} h(r) dr.$$

*Démonstration.* Soient  $N \geq 1$  un entier,  $0 < a_1 < \dots < a_N$  des réels positifs et les processus

$$X^t := \left( \langle M^{i,t}, M^{i,t} \rangle_{a_k}, B_s^{j,t} \right)_{\substack{1 \leq i,j \leq d \\ 1 \leq k \leq N \\ s \geq 0}}, \quad X^\infty := \left( \Sigma_\beta^2 a_k, \mathcal{B}_s^j \right)_{\substack{1 \leq i,j \leq d \\ 1 \leq k \leq N \\ s \geq 0}}.$$

D'après le lemme II.4 et le corollaire II.1,  $X^t$  converge en loi, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers  $X^\infty$ . De manière équivalente, pour toute suite croissante  $(t_n)$  tendant vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini, la suite  $X^{t_n}$  converge en loi vers  $X^\infty$ . Si  $(t_n)$  est une telle suite, d'après le théorème de couplage de Skorokhod<sup>2</sup>, on peut construire des vecteurs aléatoires  $(\tilde{X}^{t_n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $(\tilde{X}^\infty)$  vérifiant les égalités en loi :

$$(\tilde{X}^{t_n}) \stackrel{d}{=} X^{t_n}, \quad \tilde{X}^\infty \stackrel{d}{=} X^\infty$$

et tels que la suite  $(\tilde{X}^{t_n})$  converge presque sûrement vers  $\tilde{X}^\infty$ . En composant les convergences presque sûres, puis en utilisant les égalités en loi, on obtient

$$\left( B^{i,t_n}(\langle M^{i,t_n}, M^{i,t_n} \rangle_{a_k}) \right)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq N} \xrightarrow{d} \left( \mathcal{B}^i(\Sigma_\beta^2 a_k) \right)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq N}$$

ou de manière équivalente :

$$\left( M_{a_k}^{i,t_n} \right)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq N} \xrightarrow{d} \Sigma_\beta \times \left( \mathcal{B}_{a_k}^i \right)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq k \leq N},$$

ce qui prouve la convergence des marginales de dimension finie. L'expression plus compacte de  $\Sigma_\beta$  est bien entendu celle obtenue dans de la remarque II.5.  $\square$

2. Voir [Kal01], Théorème (4.30) p. 78.

### 3.3 Vérification d'un critère de tension

Pour pouvoir conclure à la convergence en loi du processus  $(\mathbf{M}_a^t)_{a \geq 0}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, il reste à montrer un critère de tension pour la famille  $(\mathbf{M}^t)$ , c'est l'objet de la proposition suivante :

**Proposition II.5** — *La famille des martingales  $\mathbf{M}^t$  est tendue, dans l'espace  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ .*

Pour établir la proposition, il suffit de montrer que pour tout réel  $T > 0$ , la famille de processus  $(t^{-1/2}\mathbf{M}_{at}, a \in [0, T])$  est relativement compacte dans l'espace  $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ . A cette fin, nous utilisons le critère d'Arzelà-Ascoli<sup>3</sup> qui s'énonce comme suit :

**Proposition II.6** — *La famille de processus  $(t^{-1/2}\mathbf{M}_{at}, a \in [0, T])_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $C([0, T], \mathbb{R})$  est relativement compacte si et seulement si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ t^{-1/2} \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |\mathbf{M}_{at} - \mathbf{M}_{bt}| \right] = 0.$$

*Démonstration.* (de la proposition II.5) Fixons  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $T > 0$ ,  $h > 0$  et posons  $n := \lfloor T/h \rfloor$ . Il existe un mouvement brownien standard  $\widetilde{W}^i$  tel que

$$\frac{1}{\sqrt{ht}} \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |M_{at}^i - M_{bt}^i| = \frac{1}{\sqrt{ht}} \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |\widetilde{W}^i(S_{bt}^i - S_{at}^i)|.$$

Si  $\widetilde{W}^{i*}(u) = \sup_{0 \leq s \leq u} |\widetilde{W}_s^i|$ , on a d'autre part :

$$\frac{1}{\sqrt{ht}} \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |\widetilde{W}^i(S_{bt}^i - S_{at}^i)| = \widetilde{W}^{i*} \left( \sup_{0 \leq a \leq T-h} \frac{1}{ht} (S_{a+ht}^i - S_a^i) \right) \leq \widetilde{W}^{i*}(A_{ht}^i),$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} A_{ht}^i &= \sup_{0 \leq j \leq n} A_{ht}^{i,j}, \\ A_{ht}^{i,j} &= \frac{1}{ht} (S_{(j+2)ht}^i - S_{jht}^i). \end{aligned}$$

3. Voir [Kal01], Théorème (16.5) p. 311.

D'après le théorème ergodique,  $A_{ht}^{i,j}$  converge presque sûrement et dans  $\mathbb{L}^1$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers  $2 \times \Sigma_\infty^2$ . La convergence ayant lieu dans  $\mathbb{L}^1$ , la famille  $\{A_{ht}^{i,j}, ht \geq 1\}$  est uniformément intégrable. D'autre part, d'après l'inégalité de Doob, appliquée à la martingale

$$\int_0^s 1_{u \leq A_{ht}^i} d\widetilde{W}_u^i,$$

on a

$$\mathbb{E} \left[ \widetilde{W}^{i*} (A_{ht}^i) \right] \leq \| \widetilde{W}^{i*} (A_{ht}^i) \|_2 \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[A_{ht}^i]},$$

d'où

$$\mathbb{E} \left[ t^{-1/2} \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |M_{at}^i - M_{bt}^i| \right] \leq 2\sqrt{h \times \mathbb{E}[A_{ht}^i]}.$$

Pour  $h$  fixé et  $\lambda > 2\Sigma_\beta^2$ , comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A_{ht}^i] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(A_{ht}^i \geq s) ds \leq \lambda + \int_\lambda^\infty \mathbb{P}(A_{ht}^i \geq s) ds \\ &\leq \lambda + \sum_{j=0}^n \int_\lambda^\infty \mathbb{P}(A_{ht}^{i,j} \geq s) ds, \end{aligned}$$

on a donc, en utilisant l'uniforme intégrabilité :

$$\mathbb{E}[A_{ht}^i] \leq \lambda + \sum_{j=0}^n \mathbb{E} \left[ A_{ht}^{i,j} \times 1_{\{A_{ht}^{i,j} \geq \lambda\}} \right] \longrightarrow \lambda, \quad \text{lorsque } t \text{ tend vers l'infini.}$$

On en déduit que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[A_{ht}^i] \leq 2\Sigma_\beta^2$  et on conclut que pour  $1 \leq i \leq d$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1/2} \mathbb{E} \left[ \sup_{\substack{0 \leq a \leq b \leq T \\ b-a \leq h}} |M_{at}^i - M_{bt}^i| \right] = 0,$$

d'où le résultat. □

Le théorème limite central I.1 découle alors de la relation de décomposition (I.10), du lemme II.3, et des propositions II.4 et II.5. Dans la prochaine section, nous énonçons des résultats qui sont des conséquences directes du théorème I.1, en particulier le corollaire II.2 évoqué dans l'introduction qui assure que les diffusions de la classe  $\mathcal{C}$  vérifient une relation de fluctuation-dissipation semblable à celle du cas classique (I.4).

## 4 DEUX COROLLAIRES DU THÉORÈME LIMITE CENTRAL

Avant de donner la preuve du corollaire II.2 concernant le comportement asymptotique de la variance renormalisée, nous complétons dans une certaine mesure le théorème I.1 lorsque la dimension  $d$  est égale à un.

### 4.1 Complément en dimension $d = 1$

Dans le cas de la dimension 1, on a vu au paragraphe 2 que la solution  $\psi'_\beta$  de l'équation (II.14) est explicite. Nous avons déduit une expression explicite pour la variance limite  $\Sigma_\beta^2$  dans le lemme II.5 :

$$\Sigma_\beta^2 = \left[ \int_0^\infty e^{-\beta G(r)} \sigma(r)^{-2} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty \left( \int_r^\infty h(\rho) e^{-\beta G(\rho)} d\rho \right)^2 e^{\beta G(r)} dr.$$

Lorsque  $d = 1$ , le théorème I.1 est en fait valable pour des diffusions  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  solutions de systèmes d'équations différentielles plus généraux que le système  $(\star)$ . Soit en effet  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  une diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  solution d'un système du type

$$(\star\star) \quad \begin{cases} dx_t = f(p_t) dt \\ dp_t = -b(p_t) dt + \sigma(p_t) dW_t, \end{cases}$$

où les fonctions  $(b, f, \sigma)$  sont continues. On suppose que le processus  $p_t$  est ergodique sur  $\mathbb{R}$  de probabilité invariante  $\nu$  admettant une densité  $\nu(x)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Par les mêmes méthodes que celles utilisées dans la preuve du théorème I.1, on montre alors le résultat suivant.

**Théorème II.3** — *Soit  $(x_t, p_t)_{t \geq 0}$  une solution du système  $(\star\star)$ . On suppose que la fonction  $f$  est intégrable contre  $\nu$  avec*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\nu = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma := 4 \int \sigma(x)^{-2} \nu(x)^{-1} \left( \int_x^\infty f d\nu \right)^2 dx < +\infty.$$

*Alors, la loi du processus  $(x_a^t)_{a \geq 0} = (x_{at}/\sqrt{t})_{a \geq 0}$  converge, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers la loi de  $(\Sigma \mathcal{B}_a)_{a \geq 0}$ , où  $\mathcal{B}$  est un mouvement brownien réel standard. La convergence en loi a lieu dans l'espace  $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}_+$ . Elle a lieu pour tout point initial  $(x_0, p_0)$ , ou si la loi initiale est la loi invariante  $\nu$ .*

*Démonstration.* Considérons la fonction

$$F'(x) := 2\sigma(x)^{-2}\nu(x)^{-1} \int_x^{+\infty} f d\nu$$

et  $F$  une primitive de  $F'$ . La fonction  $F$  est de classe  $C^2$ , d'après la formule d'Itô, on a alors

$$dF(p_t) = F'(p_t)dt + \frac{1}{2}F''(p_t)d\langle p \rangle_t, \quad i.e.,$$

$$dF(p_t) = f(p_t)dt + \sigma(p_t)F'(p_t)dB_t, \quad \text{ou encore}$$

$$F(p_t) = F(p_0) + x_t - x_0 + \int_0^t \sigma(p_s)F'(p_s)dB_s.$$

On fixe  $p_0 \in \mathbb{R}$ . Comme dans la preuve du lemme II.3, en appliquant la formule d'Itô à la fonction  $p \mapsto F^2(p)$ , on montre que lorsque  $t$  tend vers l'infini, uniformément en  $a$  dans tout compact de  $\mathbb{R}_+$  :

$$\mathbb{E}_{p_0}[F^2(p_{at})] = o(t^{-1})$$

et donc qu'uniformément en  $a$  dans tout compact de  $\mathbb{R}_+$  :

$$t^{-1/2} x_{at} = t^{-1/2} \int_0^{at} \sigma(p_s)F'(p_s)dB_s + o(1).$$

D'autre part, il existe un mouvement brownien  $\mathcal{B}$  tel que

$$t^{-1/2} \int_0^{at} \sigma(p_s)F'(p_s)dB_s = \mathcal{B} \left( t^{-1} \int_0^{at} \sigma^2(p_s)F'(p_s)^2 ds \right).$$

D'après le théorème ergodique, on a la convergence presque sûre

$$t^{-1} \int_0^{at} \sigma^2(p_s)F'(p_s)^2 ds \xrightarrow{p.s.} a \times \int_{\mathbb{R}} \sigma^2(x)F'(x)^2 \nu(dx) = a \times \Sigma^2.$$

En utilisant le théorème de couplage de Skorokhod comme dans la preuve de la proposition II.4, puis un critère de tension, on conclut que

$$(t^{-1/2} x_{at})_{a \geq 0} \xrightarrow{p.s.} \Sigma \times (\mathcal{B}_a)_{a \geq 0},$$

la convergence en loi ayant lieu dans  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.  $\square$

## 4.2 Comportement asymptotique de la variance

Nous concluons ce chapitre par la preuve du corollaire II.2 énoncé dans l'introduction. Ce résultat est une conséquence directe du théorème limite central et de la version  $\mathbb{L}^1$  du théorème ergodique que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises dans la preuve du théorème I.1.

**Corollaire II.2** — *Soit  $(t, \mathbf{x}_t, p_t^0, \mathbf{p}_t)$  une diffusion minkowskienne de la classe  $\mathcal{C}$ , alors, lorsque  $t$  tend vers l'infini :*

$$t^{-1} \mathbb{E} [|\mathbf{x}_t|^2] \longrightarrow d \times \Sigma_\beta^2.$$

*L'espérance est ici prise pour tout point initial  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_0)$  ou sous la loi invariante.*

*Démonstration.* D'après le théorème I.1, la variable  $t^{-1}|\mathbf{x}_t|^2$  converge en loi, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers  $\Sigma_\beta^2 \times |\mathcal{B}_1|^2$ , *i.e.*, vers le produit de  $\Sigma_\beta^2$  et d'une variable suivant une loi du chi-deux à  $d$  degrés de liberté. D'après la formule de décomposition (I.10) et le lemme II.3, il suffit alors de montrer que pour  $1 \leq i \leq d$  :

$$t^{-1} \mathbb{E} [M_t^i] = (\beta t)^{-1} \mathbb{E} [S_t^i] \longrightarrow \Sigma_\beta^2.$$

Dans la preuve du lemme II.4, on a déjà vu que d'après le théorème ergodique :

$$t^{-1} S_t^i \xrightarrow{p.s.} \int k^i d\pi = \beta \Sigma_\beta^2.$$

Le corollaire découle alors directement de la version  $\mathbb{L}^1$  du théorème ergodique.  $\square$

# Conséquences du théorème limite central

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Comportement asymptotique du ROUP . . . . .</b>	<b>52</b>
1.1	Limite hydrodynamique du processus . . . . .	52
1.2	Une preuve directe des résultats asymptotiques . . .	53
<b>2</b>	<b>Asymptotique de la diffusion de Dunkel-Hänggi . . . . .</b>	<b>55</b>
2.1	Convergence de la variance normalisée . . . . .	55
2.2	Preuve des résultats asymptotiques . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Simulations numériques . . . . .</b>	<b>64</b>
3.1	Convergence de la variance normalisée . . . . .	64
3.2	Évolution de la variance limite en fonction de $\beta$ . .	65
3.3	Les codes utilisés pour les simulations . . . . .	67

---

Dans ce dernier chapitre, nous appliquons les résultats du chapitre II aux deux principaux exemples de diffusions minkowskiennes évoqués dans l'introduction : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste de Debbasch, Mallick, Rivet et la diffusion de Dunkel et Hänggi. Grâce au théorème I.1 nous justifions l'affirmation de [DR98] concernant la limite hydrodynamique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste. Nous notons par ailleurs que pour cette diffusion, l'arsenal développé au chapitre précédent est quelque peu disproportionné, les résultats asymptotiques pouvant être obtenus par des méthodes élémentaires. Grâce au corollaire II.2, nous confirmons la conjecture de Dunkel et Hänggi en ce qui concerne la convergence de la variance normalisée de leur diffusion. En revanche, nous infirmons la validité de l'expression proposée pour la variance limite dans le cas de la dimension  $d = 1$ . Nos illustrons également nos résultats concernant la diffusion de Dunkel et Hänggi par des simulations numériques.

# 1 ASYMPTOTIQUE DU PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK RELATIVISTE

Le théorème I.1 permet de justifier rigoureusement le passage à la limite hydrodynamique pour le processus d'Orstein-Uhlenbeck relativiste. Cependant, pour le processus de Debbasch, Mallik et Rivet, l'arsenal développé dans le chapitre II apparaît démesuré. En effet, nous montrons dans la section 1.2, que les résultats asymptotiques concernant le ROUP peuvent être obtenus par des méthodes élémentaires.

## 1.1 Limite hydrodynamique du processus

Comme nous l'avons indiqué dans le premier chapitre, dans l'article [DR98], en se basant sur un développement de Chapman-Enskog, Debbasch et Rivet affirment que la limite hydrodynamique du ROUP se comporte de manière brownienne. Rappelons que le processus d'Orstein-Uhlenbeck relativiste est un cas particulier de diffusion de la classe  $\mathcal{C}$ , la diffusion euclidienne associée  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$  étant solution du système d'équations différentielles stochastiques (I.5), à savoir, pour  $1 \leq i \leq d$  :

$$\begin{cases} dx_t^i = \frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt, \\ dp_t^i = -\frac{p_t^i}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}_t|^2}} dt + \sqrt{2\beta^{-1}} dW_t^i, \end{cases}$$

où  $\mathbf{W} = (W^1, \dots, W^d)$  est un mouvement brownien standard de dimension  $d$ . Plus précisément, l'affirmation de Debbasch et Rivet porte sur la densité  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  du processus d'Orstein-Uhlenbeck relativiste, solution de l'équation de Kolmogorov forward associée au générateur infinitésimal du ROUP :

$$\partial_t \Pi + \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2}} \Pi \right) - \nabla_{\mathbf{p}} \left( \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2}} \Pi \right) = \beta^{-1} \Delta_{\mathbf{p}} \Pi.$$

Les auteurs supposent que la densité  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  est homogène (ne dépend pas de  $\mathbf{x}$  pour tout  $(t, \mathbf{p})$ ) et qu'elle est proche de la mesure invariante pour tout  $(t, \mathbf{x})$ . Dans le cas unidimensionnel et sous certaines hypothèses<sup>1</sup>, en calculant un développement de Chapman-Enskog (dont ils ne prouvent pas

---

1. principalement que  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$  ainsi que ses dérivées par rapport à  $\mathbf{p}$  admettent des moments de tout ordre, à décroissance rapide.

la convergence), Debbasch et Rivet arrivent à la conclusion qu'à la limite hydrodynamique, la densité  $n(t, \mathbf{x})$ , densité marginale de  $\Pi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , satisfait l'équation

$$\partial_t n = \beta^{-1} \Delta n.$$

On reconnaît bien sûr l'équation de la chaleur vérifiée par la densité d'un mouvement brownien. Le théorème I.1 permet de justifier rigoureusement l'affirmation de Debbasch et Rivet puisqu'il établit la convergence en loi du processus  $(\mathbf{x}_a^t)_{a \geq 0}$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers le produit d'un mouvement brownien de dimension  $d$  et de la constante positive  $\Sigma_\beta$ . Pour conclure, il suffit de montrer que  $\Sigma_\beta = 2/\beta$ . On a déjà noté dans la remarque II.3 que dans le cas du ROUP, les fonctions  $b$  et  $f$  sont égales :

$$b(r) = f(r) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}.$$

La fonction  $\psi_\beta = Id$  est donc solution de l'équation (II.14) et d'après le lemme II.5, on a

$$\Sigma_\beta^2 = \frac{2}{\beta} \left[ d \int_0^\infty e^{-\beta \sqrt{1+r^2}} r^{d-1} dr \right]^{-1} \times \int_0^\infty r^d \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} e^{-\beta \sqrt{1+r^2}} dr = \frac{2}{\beta}.$$

Le corollaire II.2 assure en outre que lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$t^{-1} \mathbb{E} [|\mathbf{x}_t|^2] \longrightarrow \frac{2d}{\beta}.$$

Le comportement asymptotique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck dans le cadre relativiste est donc identique à celui du processus d'Ornstein-Uhlenbeck dans le cadre euclidien étudié dans l'introduction.

## 1.2 Une preuve directe des résultats asymptotiques

Voyons à présent comment les résultats asymptotiques du paragraphe précédent concernant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck relativiste peuvent être directement obtenus par des méthodes élémentaires. Sous forme vectorielle, l'équation différentielle stochastique qui régit l'évolution du moment  $\mathbf{p}_t$  dans (I.5) s'écrit :

$$d\mathbf{p}_t = -\frac{\mathbf{p}_t}{\sqrt{1+|\mathbf{p}_t|^2}} dt + \sqrt{\frac{2}{\beta}} d\mathbf{W}_t.$$

Comme  $\mathbf{p}_t / \sqrt{1+|\mathbf{p}_t|^2}$  est la dérivée de  $\mathbf{x}_t$ , on intégrant cette équation, il vient :

$$\mathbf{x}_t + \mathbf{p}_t - \sqrt{\frac{2}{\beta}} \mathbf{W}_t + \mathcal{O}(1) = 0,$$

ou encore, pour tout  $a$  et  $t$  strictement positifs :

$$t^{-1/2} \mathbf{x}_{at} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \times t^{-1/2} \mathbf{W}_{at} - t^{-1/2} \mathbf{p}_{at} + o(1)$$

Or, le processus  $\mathbf{p}_t$  est ergodique dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . Sa mesure invariante est la distribution de Jüttner  $\pi$  de densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\pi(p^1, \dots, p^d) = C(d, \beta) \times \exp \left[ -\beta \left( \sqrt{1 + |\mathbf{p}|^2} \right) \right],$$

où  $C(d, \beta)$  est la constante de normalisation. Elle généralise la distribution gaussienne de Maxwell au cadre relativiste. On montre alors facilement que, lorsque  $t$  tend vers l'infini, uniformément en  $a$  variant dans un compact, le terme  $t^{-1/2} \mathbf{p}_{at}$  tend vers zéro en probabilité, de sorte que

$$t^{-1/2} \mathbf{x}_{at} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \times t^{-1/2} \mathbf{W}_{at} + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Grâce à l'invariance d'échelle  $t^{-1/2} \times \mathbf{W}_{at} \stackrel{d}{=} \mathbf{W}_a$ , on obtient alors que, lorsque  $t$  tend vers l'infini, le processus  $(\mathbf{x}_a^t, a \geq 0) := (t^{-1/2} \mathbf{x}_{at}, a \geq 0)$  converge en loi vers le produit de la constante  $\sqrt{2/\beta}$  et d'un mouvement brownien standard de dimension  $d$ .

## 2 ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION DE DUNKEL ET HÄNGGI

Montrons à présent comment les résultats chapitre II permettent de confirmer la conjecture de Dunkel et Hänggi en ce qui concerne la convergence de la variance normalisée de leur diffusion et d'infirmar la validité de l'expression proposée pour la variance limite dans le cas de la dimension  $d = 1$ .

### 2.1 Convergence de la variance normalisée

Dans le premier chapitre, on a vu que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck euclidien, qui constitue un modèle classique pour le mouvement brownien physique, vérifie la relation de fluctation-dissipation asymptotique (I.4) :

$$\frac{\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]}{t} \longrightarrow \frac{2d}{\beta} = 2d \times D.$$

Dans [DH05a, DH05b], Dunkel et Hänggi affirme sans le prouver que leur version relativiste du processus d'Ornstein-Uhlenbeck vérifie elle aussi une telle relation. Précisément, à partir de simulations numériques de leur processus dans le cas d'une intégration stochastique à la Itô, ils conjecturent la convergence, lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\Sigma^2(t) := \mathbb{E} \left[ \frac{|\mathbf{x}_t|^2}{t} \right] \longrightarrow \Sigma^2 := \frac{2d}{2d + \beta}. \quad (\text{III.1})$$

D'après le corollaire II.2, comme la diffusion de Dunkel et Hänggi appartient à la classe  $\mathcal{C}$ , la variance renormalisée, ou déplacement moyen renormalisé  $t^{-1}\mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]$  converge effectivement, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers la constante  $\Sigma_\beta^2$  de la proposition II.4 :

$$d \times \Sigma_\beta^2 = 2 \times \frac{\int_0^\infty \psi_\beta(r) e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} (1+r^2)^{-(d+1)/2} r^d dr}{\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} (1+r^2)^{-d/2} r^{d-1} dr}, \quad (\text{III.2})$$

où  $\psi_\beta$  est la solution de l'équation différentielle (II.14) fournie par la proposition II.3. Cependant, on montre ici qu'il n'a pas égalité entre la constante  $\Sigma_\beta^2$  et l'expression conjecturée par Dunkel et Hänggi :

$$\Sigma_\beta^2 \neq \frac{2d}{2d + \beta}.$$

En effet, dans le cas où  $d = 1$ , on a vu que la fonction  $\psi_\beta$  est explicite. On peut alors déterminer le comportement asymptotique de la constante  $\Sigma_\beta$  dans le régime classique *i.e.* lorsque  $\beta$  tend vers l'infini, ou dans le régime relativiste *i.e.* lorsque  $\beta$  tend vers zéro, et le comparer avec la valeur prédite par les auteurs de [DH05a, DH05b].

**Proposition III.1** — *Soit  $(x_t, p_t)$  la diffusion de Dunkel et Hänggi lorsque  $d = 1$ , c'est-à-dire la diffusion introduite dans l'article [DH05a]. Pour les trois méthodes d'intégration (Itô, Stratonovich, backward), lorsque le paramètre  $\beta$  tend vers l'infini, on a :*

$$\Sigma_\beta^2 \sim 2/\beta.$$

*Lorsque  $\beta$  tend vers zéro, il existe des constantes explicites  $A$  et  $C$  strictement positives telles que, selon la méthode d'intégration choisie, on ait les équivalents asymptotiques :*

<i>Itô</i>	<i>Stratonovich</i>	<i>backward</i>
$\Sigma_\beta^2 \sim \frac{A}{\log(1/\beta)}$	$\Sigma_\beta^2 \rightarrow C$	$\Sigma_\beta^2 \sim 2 \log(1/\beta)$

Remarque III.1 — Dans le cas général, et en particulier dans le cas de la diffusion de Dunkel et Hänggi, le fait que la fonction  $\psi_\beta$  ne soit pas explicite lorsque la dimension  $d$  est supérieure ou égale à deux, rend très difficile l'estimation du comportement asymptotique de la variance limite (III.2) lorsque  $\beta$  tend vers zéro ou l'infini. Cependant, au vu de diverses simulations numériques réalisées pour différentes valeurs de  $d \geq 2$ , il semble que la conjecture de Dunkel et Hänggi sur l'expression de  $\Sigma_\beta$  soit également mise en défaut.

*Démonstration.* Les preuves des équivalents ci-dessus sont essentiellement techniques, elles sont données dans le prochain paragraphe.  $\square$

## 2.2 Preuve des résultats asymptotiques

Dans le cas de la dimension  $d = 1$ , la solution de l'équation (II.14) vérifiant  $\psi_\beta(0) = 0$  est donnée par :

$$\psi_\beta(r) = \beta \int_0^r \left( \int_\rho^{+\infty} h(v) e^{-\beta G(v)} dv \right) e^{\beta G(\rho)} d\rho.$$

En vertu du lemme II.5, la variance limite est alors donnée par :

$$\Sigma_{\beta}^2 = \beta \frac{\int_0^{\infty} \left( \int_r^{\infty} h(\rho) e^{-\beta G(\rho)} d\rho \right)^2 e^{\beta G(r)} dr}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta G(r)}}{\sigma(r)^2} dr},$$

ou encore

$$\Sigma_{\beta}^2 = \beta \frac{\int_0^{\infty} \left( \int_0^r \left[ \int_{\rho}^{\infty} e^{-\beta G} h \right] e^{\beta G(\rho)} d\rho \right) e^{-\beta G(r)} h(r) dr}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta G(r)}}{\sigma(r)^2} dr}.$$

Ainsi, selon que les intégrales stochastiques sont prises au sens d'Itô, de Stratonovich ou au sens backward, les variances limite sont respectivement données par

$$\Sigma_{\beta}^2 = 2\beta \times \frac{\int_{\mathbb{R}_+} \left[ \int_x^{\infty} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} e^{\beta(1-\sqrt{1+y^2})} dy \right]^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx}{\left( \int_{\mathbb{R}_+} (1+x^2)^{-1/2} e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})} dx \right)} \quad (\text{III.3})$$

$$\Sigma_{\beta}^2 = \frac{2}{\beta} \times \frac{\int_0^{+\infty} \left( \beta \int_r^{+\infty} \frac{x e^{-\beta(\sqrt{1+x^2}-1)}}{(1+x^2)^{3/4}} dx \right)^2 \frac{e^{\beta(\sqrt{1+r^2}-1)}}{(1+r^2)^{1/4}} dr}{\int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-1/4} e^{-\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx} \quad (\text{III.4})$$

$$\Sigma_{\beta}^2 = \frac{2}{\beta} \times \frac{\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} (1+r^2)^{-1/2} dr}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} dr} \quad (\text{III.5})$$

Dans les prochains paragraphes, nous détaillons les preuves de résultats asymptotiques de la proposition III.1, en distinguant les cas selon que les intégrales stochastiques sont prises au sens d'Itô, de Stratonovich ou au sens des intégrales backward. On rappelle que les expressions des fonctions  $f$ ,  $b$ ,  $\sigma$  et  $\eta$  dans ces différents cas sont données dans le tableau récapitulatif au paragraphe 3.1 du chapitre I

### 2.2.1 Intégration à la Itô

Nous montrons ici les équivalents asymptotiques

$$\Sigma_\beta^2 \sim \frac{2}{\beta}, \text{ lorsque } \beta \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \Sigma_\beta^2 \sim \frac{A}{\log(1/\beta)}, \text{ lorsque } \beta \rightarrow 0,$$

où la constante  $A$  est donnée par

$$A := 2 \int_0^\infty \left( \int_x^\infty \frac{e^{-u} du}{u} \right)^2 e^x dx \approx 3.2048.$$

Lorsque l'intégrale stochastique est prise au sens d'Itô, la fonction  $g$  et sa primitive  $G$  sont simplement données par

$$g = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \quad \text{et} \quad G(r) = \sqrt{1+r^2} - 1.$$

La variance limite s'exprime alors comme :

$$\Sigma_\beta^2 = 2\beta \frac{\int_{\mathbb{R}_+} \left[ \int_x^\infty \frac{y e^{\beta(1-\sqrt{1+y^2})}}{1+y^2} dy \right]^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx}{\left( \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})}}{\sqrt{1+x^2}} dx \right)}.$$

ou encore sous forme plus compacte  $\Sigma_\beta^2 = J_\beta^{-1} K_\beta$  où l'on a posé :

$$I_\beta(x) := \int_x^\infty \frac{y e^{\beta(1-\sqrt{1+y^2})}}{1+y^2} dy, \quad J_\beta := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+z^2})}}{\sqrt{1+z^2}} dz,$$

$$K_\beta := 2\beta \int_{\mathbb{R}_+} I_\beta(x)^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx.$$

Déterminons tout d'abord le comportement de  $\Sigma_\beta^2$  lorsque  $\beta$  tend vers l'infini.

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  :**

En primitivant la fonction  $y/\sqrt{1+y^2}$ , une intégration par parties donne :

$$I_\beta(x) = \frac{e^{-\beta(\sqrt{1+x^2}-1)}}{\beta\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\beta} \int_x^\infty \frac{y \times e^{-\beta(\sqrt{1+y^2}-1)}}{(1+y^2)^{3/2}} dy.$$

En majorant  $(1+x^2)$  par  $(1+y^2)$  lorsque  $y \geq x$ , on a

$$\begin{aligned} & \left( \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})}}{1+x^2} \right)^{-1} \int_x^\infty \frac{y e^{\beta(1-\sqrt{1+y^2})}}{(1+y^2)^{3/2}} dy \leq \int_x^\infty e^{-\beta(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2})} \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} \\ & = e^{\beta\sqrt{1+x^2}} \int_x^\infty e^{-\beta\sqrt{1+y^2}} \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$I_\beta(x)^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} = \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})}}{\beta^2(1+x^2)} \times [1 + \mathcal{O}(1/\beta)], \quad i.e.,$$

$$K_\beta = 2\beta \int_{\mathbb{R}_+} I_\beta(x)^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx = \frac{2}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})}}{1+x^2} dx \times [1 + \mathcal{O}(1/\beta)].$$

Posons  $u = \beta(\sqrt{1+x^2} - 1)$ , par le théorème de convergence dominée, lorsque  $\beta \rightarrow \infty$ , on a :

$$\frac{2}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+x^2})}}{1+x^2} dx = 2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-u} du}{(u+\beta)\sqrt{u(u+2\beta)}} \sim \frac{2}{\beta} \times \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}},$$

et de même :

$$J_\beta = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\beta(1-\sqrt{1+z^2})}}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u(u+2\beta)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}},$$

d'où

$$\Sigma_\beta^2 = J_\beta^{-1} K_\beta \sim 2/\beta.$$

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow 0$  :**

En décomposant l'intégrale  $J_\beta$ , on a

$$\begin{aligned} J_\beta &= \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x(x+2\beta)}} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\beta u^2} du}{\sqrt{u^2+2}} \\ &= 2 \left[ \int_0^1 \frac{e^{-\beta u^2} du}{\sqrt{u^2+2}} + \int_0^{1/\sqrt{\beta}} \frac{e^{-1/t^2} dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où l'on a fait le changement de variables  $\beta u^2 = 1/t^2$ . Ainsi, lorsque  $\beta$  tend vers zéro, on a :

$$\begin{aligned} J_\beta &= 2 \left[ \int_0^1 \frac{e^{-\beta u^2} du}{\sqrt{u^2+2}} + \int_0^1 \frac{e^{-1/t^2} dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} \right] \\ &\quad + 2 \left[ \int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} + \int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{(e^{-1/t^2} - 1) dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} \right] \\ &= 2 \int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} + C_1 + o(1), \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

pour une constante  $C_1$ . Une intégration par parties donne alors :

$$\int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} = \left[ \frac{\log t}{\sqrt{1+2\beta t^2}} \right]_1^{1/\sqrt{\beta}} + 2\beta \int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{t \log t dt}{(1+2\beta t^2)^{3/2}}.$$

En posant  $u = \sqrt{\beta} t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) + 2 \int_{\sqrt{\beta}}^1 \frac{u \log(u/\sqrt{\beta}) du}{(1+2u^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) + 2 \log \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) \int_{\sqrt{\beta}}^1 \frac{u du}{(1+2u^2)^{3/2}} + 2 \int_{\sqrt{\beta}}^1 \frac{u \log u du}{(1+2u^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Lorsque  $\beta$  tend vers zéro, on a alors

$$\int_{\sqrt{\beta}}^1 \frac{u du}{(1+2u^2)^{3/2}} = \left[ \frac{-1}{2\sqrt{1+2u^2}} \right]_{\sqrt{\beta}}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

et

$$2 \int_{\sqrt{\beta}}^1 \frac{u \log u du}{(1+2u^2)^{3/2}} \rightarrow C_2 := 2 \int_0^1 \frac{u \log u du}{(1+2u^2)^{3/2}} \in \mathbb{R}_-.$$

Ainsi,

$$\int_1^{1/\sqrt{\beta}} \frac{dt}{t\sqrt{1+2\beta t^2}} = \log \left( 1/\sqrt{\beta} \right) \times [1 + o(1)] + C_2 \quad \text{et} \quad J_\beta \sim \log(1/\beta).$$

Déterminons maintenant le comportement asymptotique de  $K_\beta$ . On a

$$\frac{K_\beta}{2\beta} = \int_{\mathbb{R}_+} I_\beta(x)^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_{\sqrt{1+x^2}}^\infty e^{\beta(1-u)} \frac{du}{u} \right)^2 e^{\beta(\sqrt{1+x^2}-1)} dx$$

$$= \int_1^\infty \left( \int_y^\infty e^{\beta(1-u)} \frac{du}{u} \right)^2 \frac{y e^{\beta(y-1)}}{\sqrt{y^2-1}} dy = e^\beta \int_1^\infty \left( \int_y^\infty e^{-\beta u} \frac{du}{u} \right)^2 \frac{y e^{\beta y}}{\sqrt{y^2-1}} dy.$$

D'autre part, on a la majoration suivante

$$\left| \left[ \int_y^\infty e^{-\beta u} \frac{du}{u} \right]^2 - \left[ \int_y^{y/\beta} e^{-\beta u} \frac{du}{u} \right]^2 \right| \leq 2 \log\left(\frac{1}{\beta}\right) \times \frac{e^{-y}}{y} + \frac{e^{-2y}}{y^2}.$$

En remplaçant l'intégrale entre  $y$  et l'infini par celle entre  $y$  et  $y/\beta$ , on obtient alors

$$\int_1^\infty \left[ \int_y^\infty e^{-\beta u} \frac{du}{u} \right]^2 \frac{y e^{\beta y}}{\sqrt{y^2-1}} dy = \int_1^\infty \left[ \int_y^{y/\beta} e^{-\beta u} \frac{du}{u} \right]^2 \frac{y e^{\beta y}}{\sqrt{y^2-1}} dy + \mathcal{O}\left(\log\frac{1}{\beta}\right),$$

puis

$$\left(\log\frac{1}{\beta}\right)^{-1} K_\beta = e^\beta \left(\log\frac{1}{\beta}\right)^{-1} A_\beta + \mathcal{O}(\beta),$$

$$\text{où } A_\beta := 2 \int_\beta^\infty \left( \int_y^{y/\beta} e^{-u} \frac{du}{u} \right)^2 \frac{y e^y}{\sqrt{y^2-\beta^2}} dy.$$

Finalement, en posant  $x = \sqrt{y^2-\beta^2}$ , d'après le théorème de convergence dominée :

$$A_\beta = 2 \int_0^\infty \left( \int_{\sqrt{x^2+\beta^2}}^{\sqrt{1+x^2/\beta^2}} \frac{e^{-u} du}{u} \right)^2 e^{\sqrt{x^2+\beta^2}} dx \longrightarrow A$$

où

$$A := 2 \int_0^\infty \left( \int_x^\infty \frac{e^{-u} du}{u} \right)^2 e^x dx,$$

d'où

$$\Sigma_\beta^2 = J_\beta^{-1} K_\beta \sim A / \log(1/\beta).$$

Le logiciel matlab permet une évaluation numérique de  $A$ , on trouve ainsi  $A \approx 3.2048$

### 2.2.2 Intégration à la Stratonovich

Nous traitons à présent le cas où l'intégrale stochastique est prise au sens de Stratonovich. Nous montrons les comportements asymptotiques suivants :

$$\Sigma_\beta^2 \sim \frac{2}{\beta}, \text{ lorsque } \beta \rightarrow +\infty, \quad \Sigma_\beta^2 \longrightarrow C, \text{ lorsque } \beta \rightarrow 0,$$

où la constante  $C$  est donnée par

$$C := 16\pi^{-1/2} \int_0^{+\infty} \left( \int_y^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 e^{y^2} dy \approx 2.7719.$$

La variance limite s'exprime ici comme

$$\Sigma_\beta^2 = \frac{2}{\beta} \times \frac{\int_0^{+\infty} \left( \beta \int_r^{+\infty} \frac{x e^{-\beta(\sqrt{1+x^2}-1)}}{(1+x^2)^{3/4}} dx \right)^2 \frac{e^{\beta(\sqrt{1+r^2}-1)}}{(1+r^2)^{1/4}} dr}{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta(\sqrt{1+x^2}-1)}}{(1+x^2)^{1/4}} dx}.$$

En faisant le changement de variable  $u = \beta(\sqrt{1+x^2}-1)$  au numérateur et au dénominateur, puis à nouveau le changement de variable  $v = \beta(\sqrt{1+r^2}-1)$  au numérateur, on obtient

$$\Sigma_\beta^2 = 2 \times \frac{\int_0^{+\infty} \left( \int_v^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(u+\beta)^{1/2}} du \right)^2 \left( \frac{v+\beta}{v(v+2\beta)} \right)^{-1/2} e^v dv}{\int_0^{+\infty} \frac{(u+\beta)^{1/2}}{[u(u+2\beta)]^{1/2}} e^{-u} du} =: 2 \frac{N_\beta}{D_\beta}.$$

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  :**

D'après le théorème de convergence dominée, lorsque  $\beta$  tend vers l'infini, on a

$$N_\beta \sim \frac{1}{\beta} \times \int_0^{+\infty} (2u)^{-1/2} e^{-u} du \quad \text{et} \quad D_\beta \sim \int_0^{+\infty} (2u)^{-1/2} e^{-u} du.$$

On en déduit bien sûr que  $\Sigma_\beta^2 \sim \frac{2}{\beta}$ .

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow 0$  :**

Toujours d'après le théorème de convergence dominée, cette fois lorsque  $\beta$  tend zéro, on a

$$N_\beta \rightarrow \int_0^{+\infty} \left( \int_v^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du \right)^2 v^{-1/2} e^v dv = 8 \int_0^{+\infty} \left( \int_y^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 e^{y^2} dy$$

$$D_\beta \rightarrow \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit alors que

$$\Sigma_\beta^2 \longrightarrow 16\pi^{-1/2} \int_0^{+\infty} \left( \int_y^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 e^{y^2} dy \approx 2.7719$$

### 2.2.3 Méthode d'intégration backward

Nous traitons enfin le cas où l'intégrale stochastique est prise au sens backward. Nous montrons les équivalents asymptotiques :

$$\Sigma_\beta^2 \sim \frac{2}{\beta}, \text{ lorsque } \beta \rightarrow +\infty, \quad \Sigma_\beta^2 \sim 2 \log(1/\beta) \text{ lorsque } \beta \rightarrow 0$$

On vérifie facilement qu'une solution  $\psi'_\beta$  de l'équation (II.14) est donnée par

$$\psi'_\beta(\rho) = \left[ \int_\rho^\infty e^{-\beta G} h \right] e^{\beta G(\rho)} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}.$$

La variance limite s'écrit alors

$$\Sigma_\beta^2 = \frac{2}{\beta} \times \frac{\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} (1+r^2)^{-1/2} dr}{\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{1+r^2}} dr} =: \frac{2}{\beta} \times \frac{J_\beta}{L_\beta},$$

où

$$L_\beta := \int_0^\infty e^{-\beta(\sqrt{1+r^2}-1)} dr, \quad J_\beta := \int_0^\infty e^{-\beta(\sqrt{1+r^2}-1)} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}.$$

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow \infty$  :**

En posant  $x = \beta(\sqrt{1+r^2}-1)$ , d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$L_\beta = \beta^{-1/2} \int_0^\infty e^{-x} \left( \frac{x}{\beta} + 1 \right) \frac{dx}{\sqrt{(2+x/\beta)x}} \sim \beta^{-1/2} \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}.$$

On a vu dans le cas d'une intégration "à la Itô" que  $J_\beta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}$ . On en déduit  $\Sigma_\beta^2 \sim 2/\beta$ .

**Comportement lorsque  $\beta \rightarrow 0$  :**

D'après le théorème de convergence dominée, on a d'une part :

$$L_\beta = \beta^{-1} \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{\frac{x}{x+2\beta}} dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x(x+2\beta)}} = \beta^{-1} [1 + o(1)] + J_\beta.$$

D'autre part, d'après la section 2.2.1, on a  $J_\beta \sim \log(1/\beta)$ , on en déduit alors que lorsque  $\beta$  tend vers zéro :

$$\Sigma_\beta^2 \sim 2 \log(1/\beta).$$

### 3 SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Afin de mettre en évidence la non validité de l'expression conjecturée dans [DH05a] pour la variance limite et la validité des expressions trouvées ici, nous avons réalisé à notre tour des simulations numériques de la diffusion de Dunkel et Hänggi à l'aide du logiciel matlab. Pour les différentes méthodes d'intégration et pour différentes valeurs de  $\beta$ , nous avons ainsi simulé  $N$  réalisations de la diffusion sur un intervalle de temps  $[0, T]$  avec un pas  $dt$ . Dans la suite, sauf mention contraire, les valeurs choisies pour  $(N, T, dt)$  sont  $N = 5000$ ,  $T = 100$ ,  $dt = 0.0001$ .

#### 3.1 Convergence de la variance normalisée

Si  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  sont les composantes euclidiennes de la diffusion de Dunkel et Hänggi, d'après le corollaire II.2, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $t^{-1} \mathbb{E}[|\mathbf{x}_t|^2]$  converge vers la limite  $d \times \Sigma_\beta^2$ . À partir des  $N$  simulations de la diffusion sur l'intervalle  $[0, T] : (\mathbf{x}_i(t), \mathbf{p}_i(t))$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $t \in [0 : dt : T]$ , nous avons ici calculé la variance normalisée empirique :

$$t^{-1} \overline{\mathbf{x}^2}(t) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t^{-1} \mathbf{x}_i^2(t).$$

On s'attend naturellement à ce que cette variance empirique converge vers la même limite  $d \times \Sigma_\beta^2$ . Les graphiques ci-après mettent en évidence la convergence de la variance normalisée, pour les trois méthodes d'intégration stochastique et pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ . Sur chaque graphique, la variance  $t^{-1} \overline{\mathbf{x}^2}(t)$  est représentée en ordonnée en fonction du temps  $t \in [0 : dt : T]$ .

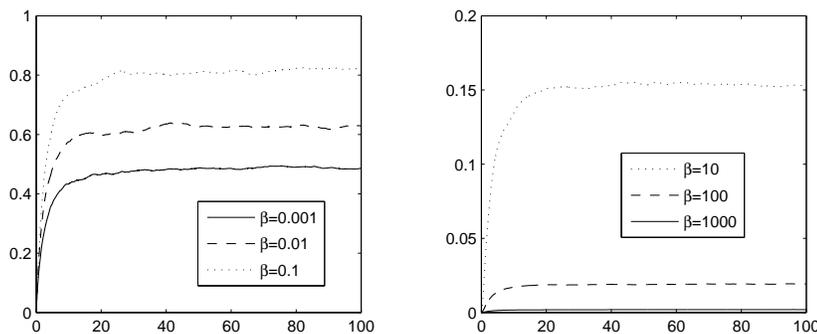


FIGURE 3: Convergence de la variance normalisée empirique (intégration à la Itô).

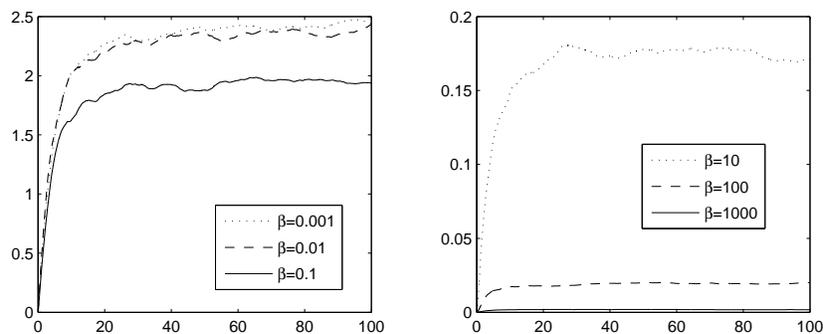


FIGURE 4: Convergence de la variance normalisée empirique (Stratonovich).

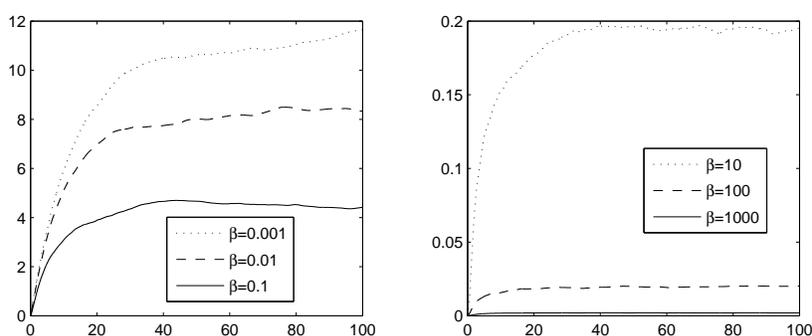


FIGURE 5: Convergence de la variance normalisée empirique (backward).

**Remarque III.2** — Pour obtenir ces tracés, il est nécessaire de stocker toutes les valeurs  $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{p}_i(t))$  pour  $i = 1 \dots N$  et  $t = 0, dt, 2dt, \dots, T$ . Les capacités de stockage du logiciel matlab utilisé ici pour générer les graphiques étant limitées, nous avons augmenté la valeur du pas à  $dt = 0.001$ . Ceci explique que les valeurs limites que l'on peut lire sur les courbes ci-dessus sont légèrement différentes de celles représentées sur les graphes de la page suivante obtenus avec un pas plus fin  $dt = 0.0001$ .

### 3.2 Évolution de la variance limite en fonction de $\beta$

Pour mettre en évidence la dépendance de la variance limite  $\Sigma_\beta^2$  par rapport au paramètre  $\beta$ , nous avons tracé ci-dessous, en coordonnées logarithmiques, l'évolution de la limite de la variance normalisée empirique en fonction de  $\beta$  pour les trois méthodes d'intégration. Les points  $*$  représentent ainsi les valeurs simulées  $\log(\overline{\mathbf{x}^2}(T)/T)$  en fonction de l'abscisse  $\log(1/\beta)$ . Sur chaque graphique, nous avons également fait figurer la courbe pleine correspondant

à la conjecture (III.1) de [DH05a], *i.e.* à la fonction  $\beta \rightarrow 2/(\beta + 2)$ , la droite correspondant au cas euclidien et une portion de courbe en pointillé correspondant à nos estimés asymptotiques lorsque  $\beta$  tend vers zéro.

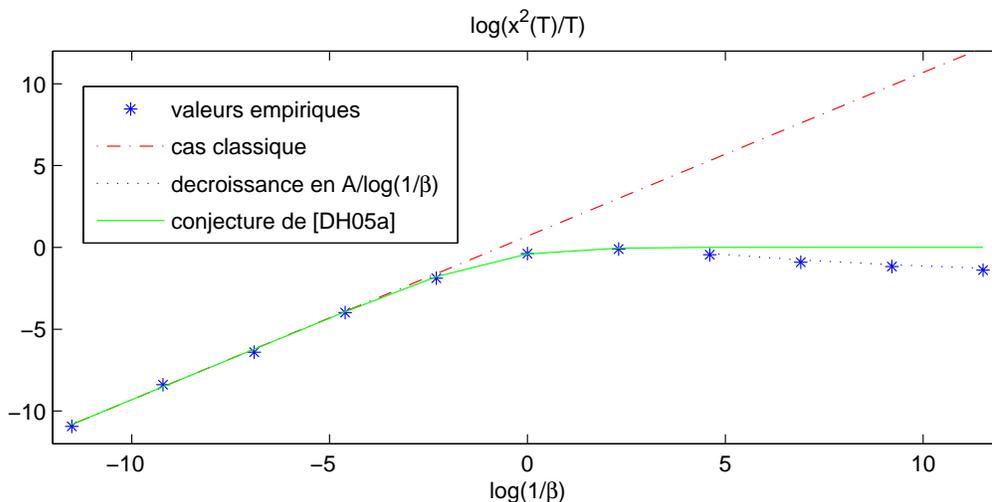


FIGURE 6: Évolution de la variance limite en fonction de  $\beta$  (méthode Itô).

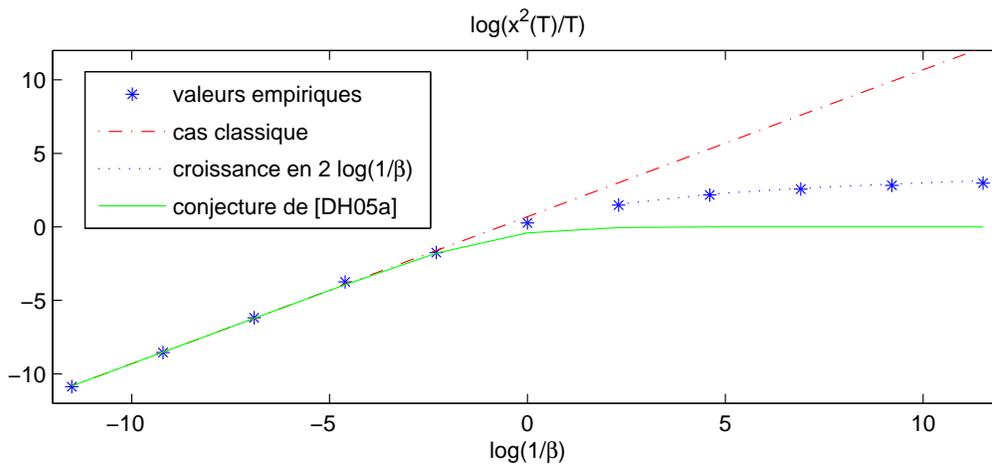


FIGURE 7: Évolution de la variance limite en fonction de  $\beta$  (méthode Stratonovich).

Les simulations confirment le comportement euclidien de la diffusion de Dunkel et Hänggi lorsque  $\beta \gg 1$ . Pour  $\beta$  plus petit, dans le cas d'une intégration à la Itô, l'expression conjecturée dans [DH05a] est une bonne approximation de la limite tant que  $\beta \geq 10^{-1}$ ; cependant pour  $\beta$  plus petit encore, les limites empiriques et conjecturées sont clairement distinctes; la décroissance observée pour  $\beta < 10^{-2}$  tend à confirmer un comportement en  $A/\log(1/\beta)$  de la

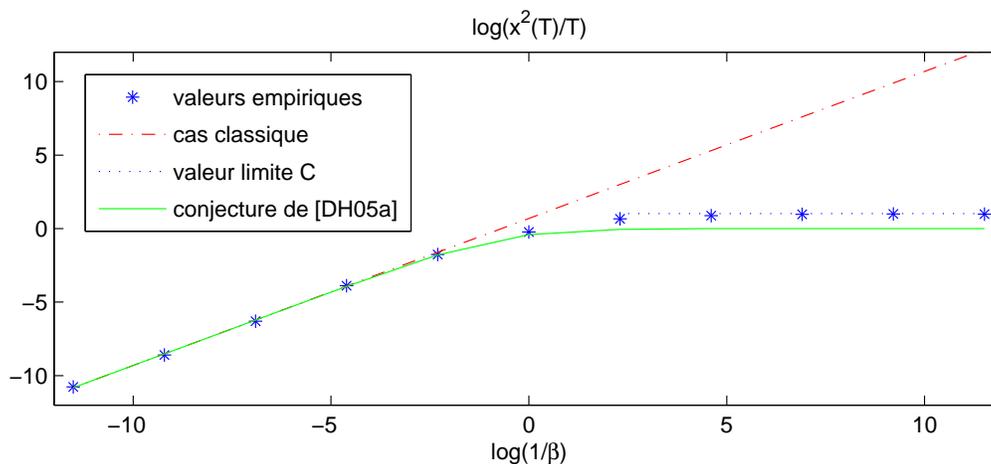


FIGURE 8: Évolution de la variance limite en fonction de  $\beta$  (méthode backward).

limite. Pour les deux autres méthodes d'intégration, lorsque  $\beta$  tend vers zéro, la conjecture de Dunkel et Hännigi est clairement infirmée, nos estimations étant au contraire confirmées.

### 3.3 Les codes utilisés pour les simulations

On donne ici le code matlab utilisé pour générer  $(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{p}_i(t))$  pour lorsque  $i$  parcourt  $\{1, \dots, N\}$  et  $t$  parcourt  $[0 : dt : T]$ . On précise tout d'abord à quoi se réfère les variables :

- $N$  est le nombre de simulations ;
- $dt$  le pas de la discrétisation ;
- $\beta$  le paramètre de bruit ;
- $T$  la borne supérieure de l'intervalle de simulation ;
- Le paramètre  $M$  vaut 0, 1 ou 2 selon la méthode d'intégration. Le choix  $M = 0$  correspond à une intégration "à la Itô",  $M = 1$  à une intégration au sens de Stratonovich, enfin  $M = 2$  correspond à une intégration au sens "backward".

```
function diffusionDH1(N,dt,beta,T,M)
```

À la fin de la boucle, les tableaux  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{x}$  contiennent les valeurs  $\mathbf{p}_i(t)$  et  $\mathbf{x}_i(t)$  du processus pour  $i$  dans  $\{1, \dots, N\}$  et  $t$  dans  $[0 : dt : T]$  :

```
n=T*floor(1./dt);
p=zeros(N,n);
x=zeros(N,n);
```

Simulation du mouvement brownien :

```
dW=sqrt(dt).*randn(N,n);
```

Simulation des processus  $\mathbf{p}_i(t)$  puis  $\mathbf{x}_i(t)$  par intégration :

```
for j=1 :1 :n-1
    gam=sqrt(1+p(:,j).*p(:,j));
    sigma=sqrt((2./beta).*gam);
    p(:,j+1)=p(:,j)-p(:,j).*(1-M./(2.*beta.*gam)).*dt
        +sigma.*dW(:,j);
    x(:,j+1)=x(:,j)+(p(:,j)./gam).*dt;
end
```

Les tableaux  $\mathbf{var}$  (resp.  $\mathbf{varnorm}$ ) contiennent les valeurs de la variance  $|\mathbf{x}_i|^2(t)$  (resp. de la variance normalisée  $|\mathbf{x}_i|^2(t)/t$ ), pour  $i = 1 \dots N, t \in [0, T]$  :

```
var=mean(x.*x);
t=dt.*(1 :1 :n);
varnorm=var./t;
```





## Deuxième partie

---

# Étude d'un mouvement brownien relativiste dans les espaces de Robertson-Walker



# Construction d'un mouvement brownien relativiste

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>La diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski</b>	<b>74</b>
1.1	Primitive du mouvement brownien hyperbolique . . .	75
1.2	Un théorème de classification . . . . .	76
1.3	La diffusion de Dudley vue comme une projection . . .	77
<b>2</b>	<b>La construction de Franchi et Le Jan</b> . . . . .	<b>78</b>
2.1	Développement stochastique lorentzien . . . . .	78
2.2	Le générateur infinitésimal de la diffusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Les exemples précédemment étudiés</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	La diffusion de Dudley . . . . .	85
3.2	Le cas de l'espace de Schwarzschild . . . . .	90
3.3	Le cas de l'univers de Gödel . . . . .	94

---

Les premiers travaux mathématiques concernant l'étude de processus stochastiques à valeurs dans des variétés lorentziennes remontent aux années 1960 et aux travaux pionniers de Dudley [Dud66, Dud67, Dud73] concernant l'étude et la classification des processus markoviens à valeurs dans l'espace de Minkowski qui possèdent l'invariance lorentzienne. De façon assez surprenante, ces travaux ont eu relativement peu d'écho et ce n'est que récemment que Franchi et Le Jan dans [FLJ07] les ont étendus au cas d'une variété lorentzienne générale. Franchi et Le Jan ont en effet construit une diffusion à valeurs dans le fibré tangent unitaire d'une variété lorentzienne générale, diffusion dont la loi possède l'invariance lorentzienne et en fait un candidat naturel pour être qualifiée de mouvement brownien relativiste. Dans ce premier chapitre, après avoir brièvement rappelé les travaux de Dudley, nous détaillons la construction de la diffusion de [FLJ07], que nous désignerons par la suite par "diffusion (relativiste) de Franchi et Le Jan". Nous rappelons ensuite rapidement les exemples de variétés lorentziennes dans lesquels cette diffusion a déjà été étudiée.

# 1 LA DIFFUSION DE DUDLEY DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI

Bien que les théories du mouvement brownien et de la relativité (restreinte) aient été introduites / légitimées dès le début du 20ème siècle dans les travaux d'Albert Einstein [Ein05c, Ein05a], il a fallu attendre une soixantaine d'années pour voir émerger les premiers travaux concernant l'étude de phénomènes dynamiques aléatoires dans le cadre de la relativité, c'est à dire l'étude de processus stochastiques à valeurs dans des variétés lorentziennes.

Parmi les motivations mathématiques pour l'introduction de tels processus, il en est une très naturelle, celle de construire un analogue du mouvement brownien euclidien dans l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d}$  de la relativité restreinte, puis dans le cadre de la relativité générale. Précisons ce que l'on entend par "analogue". Une caractérisation possible du mouvement brownien dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  est la suivante : il s'agit de l'unique processus markovien continu dont la loi est invariante sous l'action des isométries affines de l'espace euclidien. Par "mouvement brownien" dans l'espace de Minkowski, on entend alors un processus markovien continu dont la loi est invariante sous l'action du groupe des isométries affines de l'espace de Minkowski, c'est-à-dire le groupe de Lorentz. Par ailleurs, on cherche à construire un processus qui est en quelque sorte compatible avec la théorie de la relativité restreinte, au sens l'où on requiert que les trajectoires du processus soient de classe  $C^1$  et de genre temps (voir la section 1.1 du chapitre I de la première partie du manuscrit). Pour cette raison, on considère des trajectoires (paramétrées par le temps propre) non pas seulement à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  mais dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , où comme précédemment,  $\mathbb{H}^d$  désigne la partie positive de la pseudo-sphère de l'espace de Minkowski.

Dans l'article [Dud66], Dudley a établi une classification des processus markoviens à valeurs dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  et qui possèdent l'invariance lorentzienne. Dudley a ainsi montré que parmi ces processus, il en existe un et un seul dont les trajectoires sont continues, et donc qu'il existe un unique candidat naturel pour être qualifié de mouvement brownien dans l'espace de Minkowski. Dans la suite, nous ferons référence à ce processus sous le nom de "diffusion (relativiste) de Dudley". Nous explicitons ce processus dans le prochain paragraphe, puis nous énonçons le théorème de classification de Dudley. Enfin, suivant [FLJ07], nous montrons que la diffusion de Dudley peut-être vue comme la projection d'un mouvement brownien avec dérive à valeurs dans le groupe de Poincaré.

## 1.1 Primitive du mouvement brownien hyperbolique

Nous explicitons ici la diffusion introduite par Dudley, qui à la lumière du théorème I.1 du prochain paragraphe peut être considérée comme la définition du mouvement brownien relativiste dans l'espace de Minkowski. Rappelons que l'espace  $\mathbb{H}^d$  muni de la pseudo-métrique minkowskienne est une variété riemannienne de courbure constante égale à  $-1$ , ce qui fait de  $\mathbb{H}^d$  un modèle de l'espace hyperbolique de dimension  $d$ . Désignons par  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$  l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $\mathbb{H}^d$  et par  $\square$  le d'Alembertien :

$$\square := \partial_{x^0}^2 - \sum_{i=1}^d \partial_{x^i}^2.$$

Les fonctions sur  $\mathbb{H}^d$  peuvent être étendues en des fonctions sur  $\mathbb{R}^{1,d}$  de façon radiale en posant  $\bar{f}(rx) := f(x)$  pour tout  $r > 0$ , auquel cas

$$\Delta_{\mathbb{H}^d} f(x) = \square \bar{f}(x).$$

Comme le d'Alembertien est invariant sous l'action des isométries de  $\mathbb{R}^{1,d}$ , c'est aussi le cas du laplacien  $\Delta_{\mathbb{H}^d}$ . Autrement dit, la loi du processus stochastique dont  $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^d}$  est le générateur infinitésimal, c'est à dire la loi du mouvement brownien hyperbolique, est invariante sous l'action du groupe des isométries de  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Fixons un réel strictement positif  $\sigma$  et considérons alors sur  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  l'opérateur différentiel d'ordre deux suivant :

$$\mathcal{L}^\sigma := \langle \dot{\xi}, \nabla_{\xi} \rangle + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\mathbb{H}^d}.$$

C'est un opérateur hypoelliptique. Pour tout  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , il existe un unique (en loi) processus de diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ , solution du problème de martingale relatif à  $\mathcal{L}^\sigma$ , c'est-à-dire tel que, pour toute fonction à support compact  $f \in C^2(\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d)$ ,

$$f(\xi_s, \dot{\xi}_s) - f(\xi_0, \dot{\xi}_0) - \int_0^s \mathcal{L}^\sigma f(\xi_u, \dot{\xi}_u) du$$

est une martingale. Le processus  $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  est alors un mouvement brownien hyperbolique, et

$$\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$$

Le couple  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  est bien une diffusion à valeurs dans le produit  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , en particulier  $(\xi_s)_{s \geq 0}$  est une trajectoire de genre temps. De plus, sa loi est naturellement invariante sous l'action du groupe des isométries affines de  $\mathbb{R}^{1,d}$ , *i.e.* le groupe de Lorentz.

**Définition I.1** — Nous désignerons dans la suite par diffusion de Dudley, la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  à valeurs dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , dont le générateur infinitésimal est l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$ .

## 1.2 Un théorème de classification

Le théorème suivant, qui est le théorème 8.2 et le résultat principal de [Dud66], détermine tous les processus de Markov à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  dont la loi est invariante sous l'action du groupe du Lorentz. Nous l'énonçons ici de manière informelle et renvoyons le lecteur à [Dud66, Dud67] ou le chapitre 4 de [Bai06] pour un énoncé plus précis.

**Théorème I.1** (Dudley) — *Les processus markoviens  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  et dont la loi est invariante sous l'action des isométries affines sont tels que :*

- $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  est un processus de Markov dans  $\mathbb{H}^d$  dont la loi est invariante sous l'action des isométries de  $\mathbb{H}^d$  ;
- $(\xi_s)_{s \geq 0}$  est une primitive de  $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  :  $\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du$ .

Le processus  $\dot{\xi}_s$  peut être :

- continu :  $\dot{\xi}_s$  est alors nécessairement un mouvement brownien dans  $\mathbb{H}^d$  ;
- un processus de saut :  $\dot{\xi}_s$  processus de Poisson dans  $\mathbb{H}^d$  ;
- une superposition de trajectoires continues et de sauts.

Ce théorème est en fait une conséquence d'un résultat de Karpelevich, Schur et Tutubalin [KTS59] qui ont donné une caractérisation de l'ensemble des probabilités radiales et infiniment divisibles sur  $\mathbb{H}^d$ , analogue au théorème de Lévy-Khinchin pour les lois des processus de Lévy réels. Via la formule de Lévy-Khinchin, un processus de Lévy réel peut être vu comme la superposition d'une trajectoire continue et d'un processus de sauts, c'est dans un sens tout à fait analogue que les trajectoires du processus  $\dot{\xi}_s$  dans  $\mathbb{H}^d$  peuvent être vues comme "une superposition de trajectoires continues et de sauts".

**Remarque I.1** — Le théorème ci-dessus affirme en particulier qu'il existe un unique processus de Markov continu à valeurs dans l'espace des phases  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  et dont la loi est invariante sous l'action du groupe de Lorentz. Il s'agit du couple  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  où  $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  est un mouvement brownien hyperbolique dans  $\mathbb{H}^d$  et  $(\xi_s)_{s \geq 0}$  est une primitive de  $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ . Autrement dit, il s'agit de la diffusion de Dudley, objet de la définition I.1, et qui apparaît de fait comme un candidat naturel et canonique pour être qualifiée de mouvement brownien dans l'espace de Minkowski.

### 1.3 La diffusion de Dudley vue comme une projection

Avant de voir comment Franchi et Le Jan ont étendu les travaux de Dudley au cadre de la relativité générale, nous montrons en suivant [FLJ07] comment la diffusion de Dudley peut être interprétée comme la projection d'un mouvement brownien avec dérive dans le groupe de Poincaré. Désignons par  $G$  la composante connexe de l'identité dans  $O(1, d)$ . Le groupe  $G$  agit isométriquement sur  $\mathbb{R}^{1,d}$  ainsi que sur la pseudo-sphère unité  $\mathbb{H}^d$ . Si l'on désigne par  $(e_0, e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{1,d}$ , et par  $(e_0^*, e_1^*, \dots, e_d^*)$  sa base duale, les matrices  $E_j := e_0 \otimes e_j^* + e_j \otimes e_0^*$  où  $1 \leq j \leq d$ , appartiennent à l'algèbre de Lie de  $G$ , et engendrent les rotations hyperboliques, appelées encore boost lorentziens. Étant donné  $d$  mouvements browniens réels standards indépendants  $w_s^j$ , le vecteur dérivé  $\dot{\xi}_s = (\dot{\xi}_s^0, \dot{\xi}_s^j)$  de la diffusion de Dudley, qui est mouvement brownien hyperbolique, peut alors être vu comme la projection  $\dot{\xi}_s := \mathbb{L}_s e_0$ , où la matrice  $\mathbb{L}_s \in G$  est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\mathbb{L}_s = \mathbb{L}_0 + \sigma \sum_{j=1}^d \int_0^s \mathbb{L}_u E_j \circ dw_u^j.$$

Le couple  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est alors lui aussi la projection d'un processus à accroissements indépendants, précisément un mouvement brownien avec dérive, à valeurs dans le groupe de Poincaré. Dans le formalisme minkowskien, le groupe de Poincaré est l'analogie de celui des mouvements du solide et peut être vu comme le groupe des matrices réelles de taille  $(d+2, d+2)$  de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbb{L} & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec  $\mathbb{L} \in G$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{1,d}$  (en colonne), et  $0 \in \mathbb{R}^{1+d}$  (en ligne). Son algèbre de Lie est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} \beta & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\beta \in so(1, d)$  et  $x \in \mathbb{R}^{1,d}$ . Le mouvement brownien avec dérive à valeurs dans le groupe de Poincaré envisagé plus haut est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$d \begin{pmatrix} \mathbb{L}_s & \xi_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_s & \xi_s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ d \begin{pmatrix} \beta_s & e_0 s \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $\beta_s = \sigma \sum_{j=1}^d E_j w_s^j$  est un mouvement brownien sur  $so(1, d)$ . Cette dernière équation est équivalente aux deux équations suivantes :

$$d \xi_s = \mathbb{L}_s e_0 ds = \dot{\xi}_s ds \quad \text{et} \quad d \mathbb{L}_s = \mathbb{L}_s \circ d \beta_s.$$

Le processus  $\mathbb{L}_s$  est un donc mouvement brownien sur  $G$ . Son générateur infinitésimal s'écrit  $\sigma^2/2 \times \sum_{j=1}^d (\mathcal{L}_{E_j})^2$ , où  $\mathcal{L}_{E_j}$  est la dérivée de Lie dans la direction  $E_j$ . Sur les fonctions de la seule variable  $\dot{\xi} = \mathbb{L}e_0$ , il induit le laplacien hyperbolique sur  $\mathbb{H}^d$ ; le processus  $\dot{\xi}_s = \mathbb{L}_s e_0$  est donc bien un mouvement brownien hyperbolique. Autrement dit, la diffusion de Dudley à valeurs dans le fibré tangent unitaire de l'espace de Minkowski, peut être interprétée comme la projection d'une diffusion dans le groupe des mouvements du solide, ou encore dans le fibré de repères au-dessus  $\mathbb{R}^{1,d}$ .

## 2 LA CONSTRUCTION DE FRANCHI ET LE JAN

Nous décrivons à présent la construction par Franchi et Le Jan d'une diffusion, à valeurs dans le fibré tangent unitaire d'une variété lorentzienne générale, et qui comme la diffusion de Dudley dans le cas minkowskien, possède l'invariance lorentzienne. Leur construction s'inspire de la remarque du dernier paragraphe concernant la diffusion de Dudley, ainsi que de la méthode du relèvement horizontal qui permet de construire une semi-martingale sur une variété riemannienne en passant par le fibré des repères. Dans le prochain paragraphe 2.1, nous expliquons tout d'abord la construction de Franchi et Le Jan de manière assez informelle, puis nous la précisons au paragraphe 2.2 en explicitant les générateurs infinitésimaux des différents processus considérés.

### 2.1 Développement stochastique lorentzien

L'objectif ici est de construire un processus stochastique sur une variété lorentzienne générale  $\mathcal{M}$ , dont les trajectoires sont des courbes de genre temps et dont la loi est invariante sous l'action des isométries. Sans perdre en généralité, on supposera dans la suite que les trajectoires sont paramétrées par le temps propre  $s$ . Comme dans le cas de la diffusion de Dudley, le fait d'exiger que les trajectoires soient de genre temps nous indique que le processus envisagé doit être à valeurs non pas seulement dans la variété  $\mathcal{M}$  mais dans son fibré tangent unitaire, que l'on note  $T^1\mathcal{M}$ . Une première remarque est la suivante : étant donné un point  $\xi_0$  dans  $\mathcal{M}$ , l'espace tangent unitaire  $T_{\xi_0}^1\mathcal{M}$  au point  $\xi_0$  est une copie de  $\mathbb{H}^d$ . La diffusion de Dudley étant l'unique processus markovien continu dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  possédant la propriété d'invariance lorentzienne, on s'attend à ce "localement", le processus recherché "ressemble" à celui de la définition I.1. Il reste alors à comprendre comment passer de la structure linéaire locale de chaque espace tangent unitaire  $T_{\xi_0}^1\mathcal{M}$ , à celle du fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$ .

Étant donnée une variété riemannienne  $M$  munie d'une connexion, les notions de développement stochastique et de relèvement horizontal permettent de construire de façon efficace des semi-martingales à valeurs dans  $M$  à partir de semi-martingales euclidiennes. Pour une introduction à ces méthodes on pourra consulter par exemple ou [Eme90] ou [Hsu00]. Ainsi, au lieu de chercher à construire directement une semi-martingale à valeurs dans  $M$ , il s'avère souvent fructueux de construire dans un premier temps une semi-martingale à valeurs dans le fibré des repères orthonormés  $G(M)$  au-dessus de  $M$ , et ensuite de la projeter sur  $M$  via la méthode dite de "rouler sans glisser" illustrée ci-dessous.

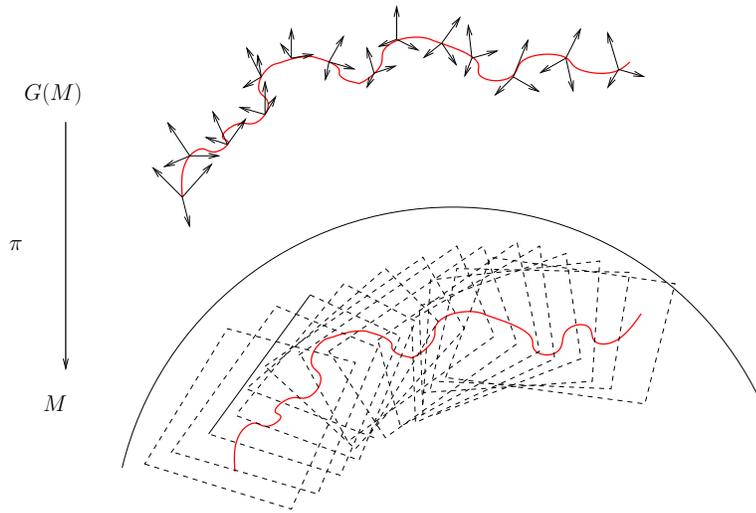


FIGURE 9: Le principe du relèvement horizontal dans le cas riemannien

La méthode développée par Franchi et Le Jan est une variante de la méthode du relèvement horizontal. Pour l'expliquer, commençons par préciser le cadre géométrique de la construction. On se donne ainsi une variété  $(\mathcal{M}, g)$  de dimension  $(d + 1)$ , où  $g$  est une métrique pseudo-riemannienne de signature  $(-, +, \dots, +)$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  est munie d'une orientation, d'une direction temporelle, et de sa connexion de Levi-Cevita. Comme dans le cas minkowskien où l'on a privilégié une des deux nappes de l'hyperboloïde de l'espace tangent unitaire, on choisit de travailler ici dans la partie positive du fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$ , que l'on note abusivement encore par  $T^1\mathcal{M}$ . Autrement dit, on ne considère que les vecteurs tangents orientés vers le futur. On note  $G(\mathcal{M})$  le fibré des repères pseudo-orthonormés directs au dessus de  $\mathcal{M}$ , dont le premier élément vit dans  $T^1\mathcal{M}$ , et dont les fibres sont homéomorphes au groupe de Lorentz  $G$ . On désigne par  $\pi_1$  la projection de  $G(\mathcal{M})$  sur  $T^1\mathcal{M}$  qui à un repère  $\Psi = (\xi, \dots)$  associe son premier élément  $\dot{\xi}$ .

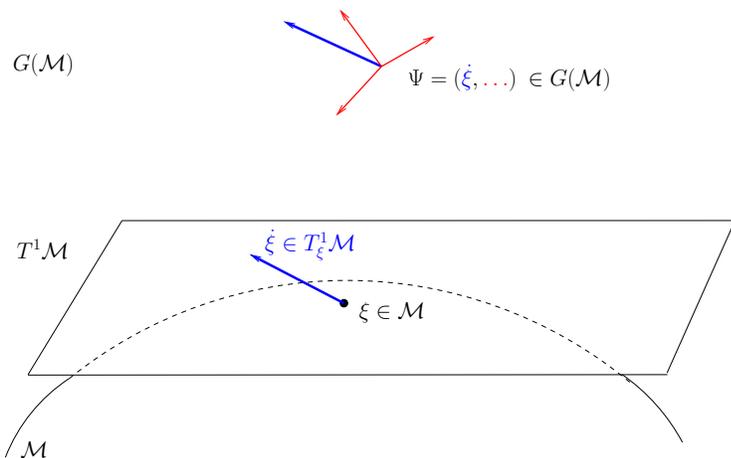


FIGURE 10: Le cadre géométrique de la construction de Franchi et Le Jan

Comme dans le cas riemannien, la construction de Franchi et Le Jan d'une diffusion sur  $T^1\mathcal{M}$  passe par la définition préalable d'une semi-martingale à valeurs dans le fibré des repères  $G(\mathcal{M})$ . Il existe cependant deux différences notables avec la méthode classique du relèvement horizontal : d'une part, dans leur construction la semi-martingale définie sur  $G(\mathcal{M})$  est projetée sur le fibré  $T^1\mathcal{M}$  et non pas sur la variété  $\mathcal{M}$  elle-même ; d'autre part, le terme de bruit dans la définition de la semi-martingale dans le fibré des repères est dirigé selon les champs de vecteurs verticaux et non pas horizontaux comme dans le cas riemannien. Autrement dit, on perturbe ici les accélérations des trajectoires et non pas les vitesses comme le cas d'un relèvement horizontal.

Néanmoins, le principe de la construction reste très proche de celui du développement stochastique dans le cas riemannien puisque in fine, la diffusion de Franchi et Le Jan apparaît comme un développement stochastique de la diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski. En effet, nous verrons dans le théorème I.2 ci-après que si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est la diffusion de Franchi et Le Jan à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  et si  $//_s^{-1} : T_{\xi_s}\mathcal{M} \rightarrow T_{\xi_0}\mathcal{M}$  désigne le transport parallèle inverse le long des courbes  $C^1(\xi_{s'} | 0 \leq s' \leq s)$ , alors le processus  $\zeta_s := //_s^{-1} \dot{\xi}_s$  est un mouvement brownien hyperbolique dans l'espace tangent  $T_{\xi_0}\mathcal{M}$  au point initial  $\xi_0$ . Autrement dit, le processus  $\xi_s$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$ , primitive du processus  $\dot{\xi}_s$ , peut être interprété comme le développement d'une diffusion relativiste à valeurs dans l'espace  $T_{\xi_0}\mathcal{M} \approx \mathbb{H}^d$ . Géométriquement, la diffusion de Franchi et Le Jan est donc obtenue en faisant "rouler sans glisser" la diffusion de Dudley définie dans l'espace tangent au point initial comme l'illustre la figure suivante.

- - - Diffusion de Dudley dans  $T^1_{\xi_0}\mathcal{M} \approx \mathbb{H}^d$   
 — Diffusion de Franchi et Le Jan

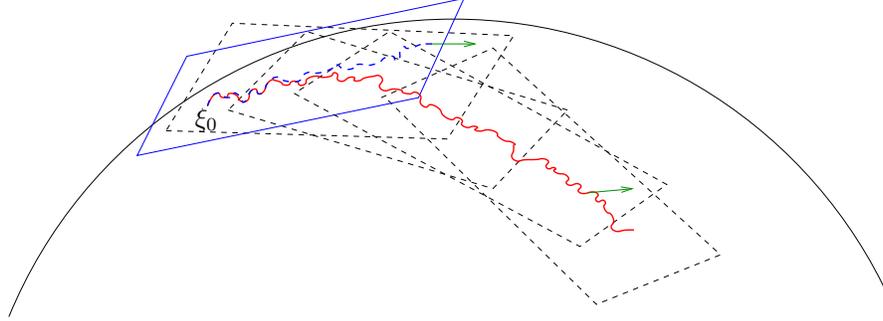


FIGURE 11: Anti-développement de la diffusion de Franchi et Le Jan

## 2.2 Le générateur infinitésimal de la diffusion

Nous précisons ici le générateur infinitésimal de la diffusion définie par Franchi et Le Jan sur le fibré des repères  $G(\mathcal{M})$ , ainsi que celui de sa projection sur le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$ . Le théorème I.2 ci-après fait le lien entre ces générateurs et la notion de développement stochastique évoquée plus haut.

### 2.2.1 Description du générateur infinitésimal sur $G(\mathcal{M})$

Dans la construction de la diffusion de Dudley à valeurs  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , nous avons introduit les matrices  $E_j = e_0 \otimes e_j^* + e_j \otimes e_0^*$  où  $1 \leq j \leq d$ , qui appartiennent à l'algèbre de Lie  $so(1, d)$ . Introduisons à présent les rotations infinitésimales  $E_{k,l} := e_k \otimes e_l^* - e_l \otimes e_k^* \in so(1, d)$ , pour  $1 \leq k < l \leq d$ . Remarquons que les matrices  $\{E_j, E_{k,l} ; 1 \leq j \leq d, 1 \leq k < l \leq d\}$  forment alors une base pseudo-orthonormée de  $so(1, d)$  muni de sa forme de Killing. Rappelons que la variété lorentzienne  $\mathcal{M}$  est munie de sa connexion de Levi-Cevita. On désigne alors par  $V_j$  et  $V_{k,l}$  les champs de vecteurs verticaux canoniquement associés aux matrices  $E_j$  et  $E_{k,l}$ , et par  $H_0$  le premier champ de vecteur horizontal canonique. Les champs de vecteurs verticaux  $V_{kl}$  engendrent une action de  $SO_d$  sur  $G(\mathcal{M})$ , qui laisse le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  invariant, et permettent donc de l'identifier au quotient  $G(\mathcal{M})/SO_d$ . En fonction de ces différents champs de vecteurs, le générateur infinitésimal de la diffusion introduite par Franchi et Le Jan sur le fibré des repères pseudo-orthonormés est donné par

$$\mathcal{G}^\sigma := H_0 + \frac{\sigma^2}{2} \mathcal{V}^2, \quad \text{où } \mathcal{V}^2 := \sum_{j=1}^d V_j^2, \quad (\text{I.1})$$

et où  $\sigma$  est paramètre réel strictement positif.

**Remarque I.2** — Dans la construction classique d'un mouvement brownien sur une variété riemannienne à l'aide du relèvement horizontal, le générateur infinitésimal du processus à valeurs dans le fibré des repères orthonormés s'exprime aussi comme une somme de carrés : la somme des carrés des champs de vecteurs horizontaux canoniques  $H_j$ . La différence principale entre la construction classique et la construction de Franchi et Le Jan consiste donc en l'emploi des champs de vecteurs verticaux au lieu des champs horizontaux.

Le lemme suivant précise l'action de l'opérateur différentiel  $\mathcal{G}^\sigma$  sur le fibré  $T^1\mathcal{M}$ , c'est à dire sur des fonctions qui ne dépendent que de la première coordonnée :

**Lemme I.1** (Lemme 3.1 de [FLJ07]) — *Les opérateurs différentiels  $H_0$ ,  $\mathcal{V}^2$  et  $\mathcal{G}^\sigma$  agissent sur les éléments de  $C^2(T^1\mathcal{M})$  et induisent respectivement : le champ de vecteur  $\mathcal{L}_0$  qui engendre le flot géodésique sur  $T^1\mathcal{M}$ , le laplacien vertical  $\Delta_{\mathcal{V}}$ , et enfin l'opérateur*

$$\mathcal{L}^\sigma := \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\mathcal{V}}. \quad (\text{I.2})$$

Plus précisément, pour toute fonction test  $F$  sur  $T^1\mathcal{M}$ , on a sur  $G(\mathcal{M})$  :

$$(\mathcal{L}_0 F) \circ \pi_1 = H_0(F \circ \pi_1), \quad (\Delta_{\mathcal{V}} F) \circ \pi_1 = \mathcal{V}^2(F \circ \pi_1).$$

De plus, dans un système de coordonnées locales  $(\xi^i, e_j^k)$ , avec

$$e_j = e_j^k \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \quad V_j = e_j^k \frac{\partial}{\partial e_0^k} + e_0^k \frac{\partial}{\partial e_j^k},$$

le laplacien vertical s'exprime comme

$$(\Delta_{\mathcal{V}} F) \circ \pi_1 = \sum_{j=1}^d V_j^2(F \circ \pi_1) = \left( (e_0^k e_0^l + g^{kl}) \frac{\partial^2}{\partial e_0^k \partial e_0^l} + d \times e_0^k \frac{\partial}{\partial e_0^k} \right) F \circ \pi_1,$$

où  $g^{\mu\nu}$  désigne l'inverse de  $g_{\mu\nu}$  sur  $\mathcal{M}$  dans cette même carte.

**Remarque I.3** — Sur le fibré  $G(\mathcal{M})$ , l'opérateur de Casimir  $\mathcal{C}$  est défini comme

$$\mathcal{C} := \sum_{j=1}^d V_j^2 - \sum_{1 \leq k < l \leq d} V_{kl}^2.$$

L'action de sa restriction au fibré tangent  $T^1\mathcal{M}$  coïncide avec celle de  $\mathcal{V}^2$ . Ainsi, l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  peut aussi être interprété comme l'opérateur induit sur le fibré tangent par  $H_0 + \sigma^2/2 \times \mathcal{C}$ .

### 2.2.2 Description du générateur infinitésimal sur $T^1\mathcal{M}$

L'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  défini par l'équation (I.2), restriction de  $\mathcal{G}^\sigma$  au fibré tangent unitaire, est précisément le générateur infinitésimal de la diffusion introduite par Franchi et Le Jan sur  $T^1\mathcal{M}$ . Il apparaît ici comme une perturbation, par le laplacien vertical, du flot géodésique sur le fibré tangent unitaire de  $\mathcal{M}$ .

Remarque I.4 — Bien entendu, lorsque la variété  $\mathcal{M}$  est l'espace de Minkowski et le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  s'identifie au produit  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  du lemme I.1 n'est autre que le générateur infinitésimal de la diffusion de Dudley de la définition I.1. La construction de Franchi et Le Jan est donc bien une généralisation au cas courbe de la construction de Dudley.

Pour compléter la construction de Franchi et Le Jan, il reste à montrer d'une part que l'opérateur  $\mathcal{G}^\sigma$  définit bien une diffusion sur le fibré des repères  $G(\mathcal{M})$ , d'autre part que la projection de ce processus sur  $T^1\mathcal{M}$  est elle aussi une diffusion, dont le générateur infinitésimal est l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$ . Enfin, il faut faire le lien entre ces opérateurs différentiels et la notion de développement stochastique évoquée dans la section 2.1. Pour cela, fixons un élément  $\Psi_0$  de  $G(\mathcal{M})$ , un mouvement brownien standard  $w = (w_s^j)$  de dimension  $d$  et considérons l'équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich :

$$\Psi_s = \Psi_0 + \int_0^s H_0(\Psi_t) dt + \sigma \int_0^s \sum_{j=1}^d V_j(\Psi_t) \circ dw_t^j. \quad (\text{I.3})$$

D'après le lemme I.1, le flot stochastique défini par (I.3) commute avec l'action de  $SO_d$  sur  $G(\mathcal{M})$ . De fait, la projection  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) := (\xi_s, e_0(s)) = \pi_1(\Psi_s)$  définit une diffusion sur  $T^1\mathcal{M}$  et l'on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème I.2** (Théorème 3.2 de [FLJ07]) — *L'équation différentielle stochastique (I.3) définit une diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) := \pi_1(\Psi_s)$  sur le fibré tangent  $T^1\mathcal{M}$ , dont le générateur infinitésimal est l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  du lemme I.1 :*

$$\mathcal{L}^\sigma = \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\mathcal{V}}.$$

*Si  $//_s^{-1} : T_{\xi_s}\mathcal{M} \rightarrow T_{\xi_0}\mathcal{M}$  désigne le transport parallèle inverse le long des courbes  $C^1$   $(\xi_{s'} \mid 0 \leq s' \leq s)$ , alors  $\zeta_s := //_s^{-1} \dot{\xi}_s$  est un mouvement brownien hyperbolique sur  $T_{\xi_0}\mathcal{M}$ . Ainsi  $\xi_s$  peut être vu comme le développement d'une diffusion relativiste sur l'espace de Minkowski  $T_{\xi_0}\mathcal{M}$ .*

*Démonstration.* Nous renvoyons le lecteur à [FLJ07] pour des preuves détaillées du lemme I.1 et du théorème I.2.  $\square$

Avec les mêmes notations que dans le lemme I.1, si  $(\xi^i, e_j^k)$  est un système de coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  et si  $\Gamma_{il}^k$  désignent les symboles de Christoffel usuels, l'équation (I.3) satisfaite par  $\Psi_s = (\xi_s, e_0(s), \dots, e_d(s)) \in G(\mathcal{M})$  s'écrit, pour  $0 \leq i \leq d$ ,  $j \geq 1$ ,  $0 \leq k \leq d$  :

$$\begin{cases} d\xi_s^k = e_0^k(s) ds, \\ de_0^k(s) = -\Gamma_{il}^k(\xi_s) e_j^l(s) e_0^i(s) ds + \sigma \sum_{i=1}^d e_i^k(s) \circ dw_s^i, \\ de_j^k(s) = -\Gamma_{il}^k(\xi_s) e_j^l(s) e_0^i(s) ds + \sigma e_0^k(s) \circ dw_s^j, \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

où de manière équivalente sous la forme d'Itô :

$$\begin{cases} d\xi_s^k = e_0^k(s) ds, \\ de_0^k(s) = -\Gamma_{il}^k(\xi_s) e_0^l(s) e_0^i(s) ds + \sigma \sum_{i=1}^d e_i^k(s) dw_s^i + d \times \frac{\sigma^2}{2} e_0^k(s) ds, \\ de_j^k(s) = -\Gamma_{il}^k(\xi_s) e_j^l(s) e_0^i(s) ds + \sigma e_0^k(s) dw_s^j + \frac{\sigma^2}{2} e_j^k(s) ds. \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Remarque I.5 — Dans les équations régissant l'évolution de  $e_0(s) = \dot{\xi}_s$ , la matrice de covariation quadratique  $K_s$  des martingales

$$dM_s^k := \sigma \sum_{i=1}^d e_i^k(s) dw_s^i, \quad 0 \leq k \leq d,$$

est donnée par

$$K_s^{kl} := \frac{\langle dM_s^k, dM_s^l \rangle}{ds} = \sigma^2 \sum_{i=1}^d e_i^k(s) e_i^l(s) = \sigma^2 (e_0^k(s) e_0^l(s) + g^{kl}(\xi_s)).$$

En accord avec le lemme I.1, on a donc  $K_s = \sigma^2 (e_0(s) {}^t e_0(s) + g^{-1}(\xi_s))$ , où  ${}^t e_0$  désigne la transposée du vecteur colonne  $e_0$ , et  $g^{-1}$  désigne la matrice inverse de la pseudo-métrique. La matrice  $K$  est de rang  $d$  : on a en effet  $Kg e_0 = (e_0 {}^t e_0 + g^{-1}) g e_0 = 0$ , puisque  ${}^t e_0 g e_0 = -1$ . D'autre part, la matrice  $K_s$  ne dépend pas des vecteurs  $e_j$  ( $j \geq 1$ ) : la projection  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est bien une diffusion sur le fibré tangent  $T^1\mathcal{M}$  comme l'affirme le théorème I.2.

**Définition I.2** — Étant donnée une variété lorentzienne  $\mathcal{M}$  satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 2.1, nous désignerons dans toute la suite par diffusion de Franchi et Le Jan, ou plus simplement diffusion relativiste, la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$  à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , dont le générateur infinitésimal est l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  du lemme I.1.

Remarque I.6 — En faisant  $\sigma = 0$  dans les équations ci-dessus, on retombe naturellement sur les équations des géodésiques. Dans la suite, lorsque nous serons amenés à étudier des équations différentielles stochastiques obtenues à partir des systèmes (I.4) ou (I.5), on pourra ainsi discriminer les termes provenant des équations géodésiques ou de la perturbation stochastique verticale, en fonction de la présence ou non du paramètre  $\sigma$  en facteur de ces termes.

### 3 LES EXEMPLES PRÉCÉDEMMENT ÉTUDIÉS

Dans cette dernière section, nous décrivons brièvement les cadres géométriques dans lesquels la diffusion de Franchi et Le Jan a déjà été étudiée et ce que l'on peut en dire dans ces différents cadres. Il s'agit essentiellement de l'espace de Minkowski où la diffusion de Franchi et Le Jan coïncide avec celle de Dudley, l'espace de Schwarzschild qui est un des principaux modèles utilisés par les physiciens pour décrire le complémentaire d'un trou noir dans la théorie de la relativité générale, et enfin l'univers de Gödel, qui possède la propriété intéressante d'être à la fois une solution des équations d'Einstein et de contenir des courbes de genre temps fermées.

#### 3.1 La diffusion de Dudley

Le cadre géométrique le plus simple que l'on puisse imaginer pour l'étude de la diffusion de Franchi et Le Jan est bien sûr l'espace de Minkowski où celle-ci coïncide avec la diffusion de Dudley. L'étude des propriétés asymptotiques de cette diffusion remonte aux travaux de Dudley, en particulier à l'article [Dud73], où l'auteur montre que le processus est transitoire, divergeant vers l'infini dans une direction privilégiée, à l'image du mouvement brownien hyperbolique. Pour autant, même dans ce cadre très simple, la détermination complète du comportement asymptotique de la diffusion n'est pas triviale. En particulier la description de la tribu asymptotique et de la frontière de Poisson du processus est récente. Elle est due à Bailleul dans [Bai06, Bai08a]. Dans les deux prochains paragraphes, nous résumons les travaux de Dudley,

ainsi que ceux de Bailleul concernant le comportement asymptotique de la diffusion.

### 3.1.1 Les résultats de Dudley

Décrivons tout d'abord les résultats obtenus par Dudley dans l'article [Dud73] concernant le comportement asymptotique de la diffusion qui porte son nom. Considérons un point  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  du produit  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  et désignons par  $\mathbb{P}_0$  la loi de la diffusion de Dudley  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On note  $\xi = (t, x)$  les coordonnées dans l'espace de Minkowski. D'après la définition I.1, le processus  $\dot{\xi}_s = (\dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est alors un mouvement brownien dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^d$ . En particulier, le temps de vie de la diffusion est  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement infini. Dans [Dud73], Dudley montre que le processus  $\dot{\xi}_s$  et donc le processus  $\xi_s$  sont presque sûrement transitoires. Plus précisément, il montre que  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement, le processus  $\dot{\xi}_s$  tend vers l'infini avec  $s$  dans une direction privilégiée au sens suivant :

**Proposition I.1** ([Dud73]) — *Pour toute donnée initiale  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ , si  $\mathbb{P}_0$  désigne la loi de la diffusion de Dudley  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ , alors lorsque  $s$  tend vers l'infini :*

- i)  $|\dot{x}_s|$  tend  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement vers l'infini;*
- ii)  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement vers un point de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .*

Pour se convaincre de ces deux points, on peut observer tout d'abord l'équation différentielle stochastique vérifiée par le processus  $\dot{t}_s$ . D'après le système d'équations (I.5), cette dernière s'écrit ici :

$$d\dot{t}_s = d \times \frac{\sigma^2}{2} \times \dot{t}_s ds + dM_s^t, \quad \text{avec } d\langle M^t \rangle_s = \sigma^2(\dot{t}_s^2 - 1)ds.$$

On vérifie alors facilement que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\dot{t}_s$  vérifie  $\dot{t}_s = \exp\left(\frac{d-1}{2} \times \sigma^2 \times s + o(s)\right)$ . En particulier, lorsque  $s$  tend vers l'infini, les processus  $\dot{t}_s$  et sa primitive  $t_s$  tendent presque sûrement vers l'infini. Comme  $s$  est le temps propre, on a par ailleurs la relation de pseudo-norme  $\dot{t}_s^2 - |\dot{x}_s|^2 = 1$ . On en déduit naturellement que  $|\dot{x}_s|$  tend presque sûrement vers l'infini lorsque  $s$  tend vers l'infini. Pour le point *ii*), on peut remarquer que le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  à valeurs dans la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  n'est autre qu'un mouvement brownien sphérique changé de temps. Pour simplifier, supposons que  $\dot{t}_0 \neq 1$ . Dans ce cas, il existe en effet un mouvement brownien sphérique  $\Theta_s$  à valeurs dans  $\mathbb{S}^2$ , issue de  $\Theta_0 = \dot{x}_0/|\dot{x}_0|$  tel que :

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \Theta \left( \sigma^2 \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right).$$

L'estimé asymptotique pour le processus  $\dot{t}_s$  montre que l'intégrale ci-dessus converge  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini et l'angle  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge donc effectivement vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

En suivant [FLJ07], on peut compléter la description de Dudley en précisant le comportement asymptotique de la primitive  $x_s$  du processus  $\dot{x}_s$ . D'après la relation de pseudo-norme, on a  $\dot{t}_s \geq 1$  pour tout  $s \geq 0$  puisqu'on considère des trajectoires orientées vers le futur. En particulier, le processus  $t_s$  est strictement croissant. Désignons par  $s(t)$  son inverse et posons  $Z(t) := x_{s(t)}$ . Un calcul direct montre que :

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \Theta_{s(t)} \times \tanh(\operatorname{acosh}(\dot{t}_{s(t)})).$$

Comme  $s(t)$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $t$ , on en déduit que lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $dZ(t)/dt$  tend presque sûrement vers  $\Theta_\infty$  et ainsi que  $Z(t)/t$ .

### 3.1.2 Tribu asymptotique et frontière de Poisson

Récemment, dans [Bai06, Bai08a], Bailleul a complété la description de Dudley (lorsque  $\sigma = 1$  et  $d = 3$ ) en montrant que non seulement les trajectoires de la diffusion s'en vont à l'infini dans une direction privilégiée aléatoire  $\Theta_\infty$ , mais qu'elles convergent vers un hyperplan asymptotique aléatoire. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $q$  la forme bilinéaire minkowskienne, et  $(e_0, e_1, \dots, e_d)$  la base canonique dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ , Bailleul a en effet montré que le processus

$$\delta_s := q(\xi_s, e_0 + \Theta_\infty) = t_s - \langle x_s, \Theta_\infty \rangle$$

converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $\delta_\infty \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, lorsque  $s$  tend vers l'infini, la diffusion de Dudley converge presque sûrement vers l'hyperplan  $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$  parallèle à l'hyperplan  $\Pi(\Theta_\infty, 0)$  tangent au cône de lumière en  $\Theta_\infty$  :

$$\Pi(\Theta_\infty, 0) := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d}, q(\xi, e_0 + \Theta_\infty) = 0\},$$

$$\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty) := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d}, q(\xi, e_0 + \Theta_\infty) = \delta_\infty\}.$$

La figure de la page suivante illustre la convergence de  $\xi_s$  vers  $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ . Pour se convaincre de la convergence du processus  $\delta_s$  lorsque  $s$  tend vers l'infini, on peut décomposer  $x_s$  en

$$\begin{aligned} x_s &= x_0 + \int_0^s \dot{x}_u du = x_0 + \int_0^s \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \times |\dot{x}_u| du \\ &= x_0 + \Theta_\infty \times \int_0^s |\dot{x}_u| du + \int_0^s \left( \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} - \Theta_\infty \right) \times |\dot{x}_u| du. \end{aligned}$$

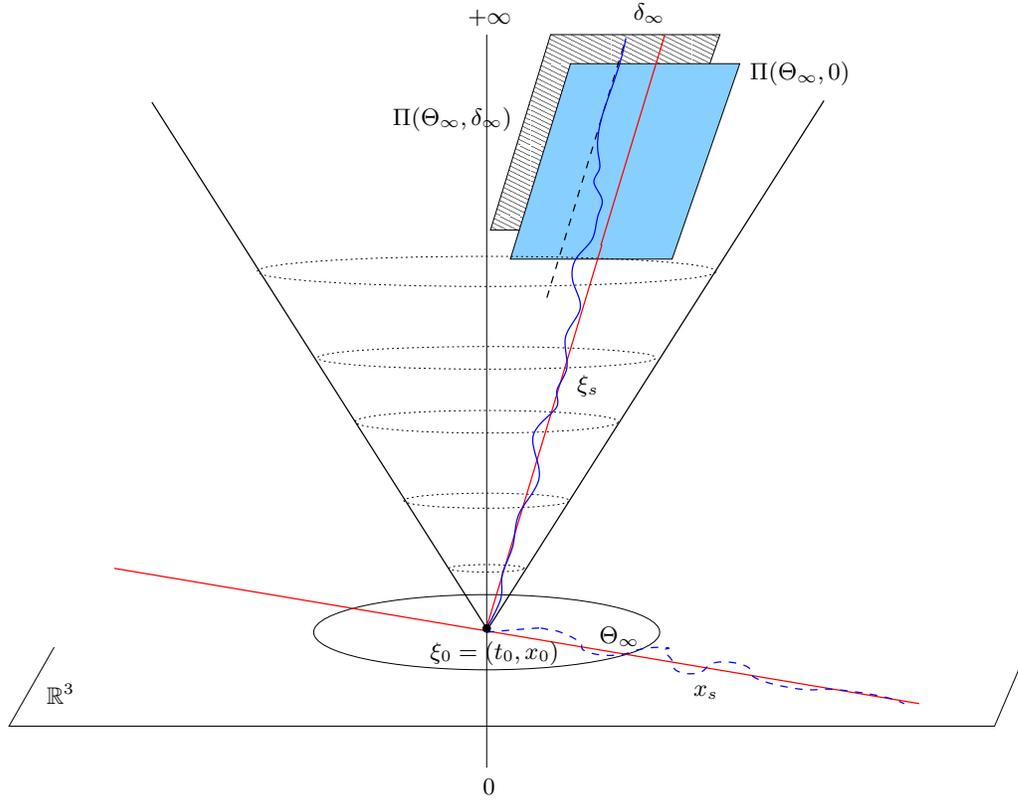


FIGURE 12: Comportement asymptotique de la diffusion de Dudley.

En faisant le produit scalaire avec l'angle limite  $\Theta_\infty$ , il vient alors :

$$\langle x_s, \Theta_\infty \rangle = \langle x_0, \Theta_\infty \rangle + \int_0^s |\dot{x}_u| du + \int_0^s \left\langle \left( \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} - \Theta_\infty \right), \Theta_\infty \right\rangle \times |\dot{x}_u| du. \quad (\text{I.6})$$

D'après la relation de pseudo-norme  $\dot{t}_s^2 - |\dot{x}_s|^2 = 1$ , on a par ailleurs

$$\int_0^s |\dot{x}_u| du = \int_0^s \sqrt{\dot{t}_u^2 - 1} du = t_s - t_0 - \int_0^s \frac{du}{\sqrt{\dot{t}_u^2 - 1} + \dot{t}_u}.$$

Comme  $\dot{t}_s = \exp\left(\frac{d-1}{2} \times \sigma^2 \times s + o(s)\right)$  lorsque  $s$  tend vers l'infini, l'intégrale dans le membre de droite de la dernière équation est presque sûrement convergente. De même, cet estimé pour la vitesse de divergence de  $\dot{t}_s$  permet de montrer que le dernier terme de l'équation (I.6) converge aussi presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini, en effet on a :

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} - \Theta_\infty = \Theta \left( \sigma^2 \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right) - \Theta \left( \sigma^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right).$$

En admettant cette dernière convergence presque sûre, on déduit alors celle du processus  $\delta_s$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta_s &= t_s - \langle x_s, \Theta_\infty \rangle = t_0 - \langle x_0, \Theta_\infty \rangle \\ &+ \int_0^s \frac{du}{\sqrt{\dot{t}_u^2 - 1} + \dot{t}_u} + \int_0^s \left\langle \left( \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} - \Theta_\infty \right), \Theta_\infty \right\rangle \times |\dot{x}_u| du. \end{aligned}$$

Dans [Bai08a], Bailleul montre en fait bien plus que la convergence du processus  $\xi_s$  vers l'hyperplan  $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ . En effet, il y démontre que la tribu invariante de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ , composée des événements de la tribu asymptotique

$$\bigcap_{s>0} \sigma(\xi_{s'}, \dot{\xi}_{s'}, s' \geq s),$$

invariants par décalage, est engendrée par les seules variables  $\Theta_\infty$  et  $\delta_\infty$ .

**Théorème I.3** (Théorème 1 de [Bai08a]) — *Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  un point  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  et  $\mathbb{P}_0$  la loi de la diffusion de Dudley  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors,*

*i) les limites suivantes existent  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement :*

$$\Theta_\infty := \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, \quad \delta_\infty := \lim_{s \rightarrow +\infty} q(\xi_s, e_0 + \Theta_\infty).$$

*ii) La tribu invariante de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  coïncide  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement avec la tribu  $\sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$  engendrée par les deux variables  $\Theta_\infty$  et  $\delta_\infty$ .*

Par la même, Bailleul obtient une description complète de la frontière de Poisson de la diffusion de Dudley, ou de manière équivalente de l'ensemble des fonctions harmoniques bornées pour l'opérateur  $\mathcal{L}^1$  dans  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ . La preuve de Bailleul est relativement complexe et il n'est pas possible ici d'en donner tous les détails. On peut cependant en donner les grandes lignes. Celle-ci contient deux ingrédients essentiels : le premier est que dans le cadre géométrique simple qu'est l'espace de Minkowski, les lois des variables limites  $\Theta_\infty$  et  $\delta_\infty$  sont explicites. Précisément, la loi du couple  $(\Theta_\infty, \delta_\infty)$  admet une densité par rapport à la mesure produit  $\mu \times \nu$  sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , où  $\mu$  désigne la mesure uniforme sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  et  $\nu$  est mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  :

**Théorème I.4** (Théorème 18 de [Bai08a]) — *Sous la probabilité  $\mathbb{P}_0$ , la loi du couple  $(\Theta_\infty, \delta_\infty)$  admet une densité par rapport à la mesure produit  $\mu \times \nu$  sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  de la forme*

$$h^\Theta(\xi_0, \dot{\xi}_0) h_\delta^\Theta(\xi_0, \dot{\xi}_0)$$

*pour des fonctions explicites  $h^\Theta(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ ,  $h_\delta^\Theta(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  dépendant régulièrement des arguments  $\Theta$ ,  $\delta$  et  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ .*

Les densités des variables limites étant connues, Bailleul utilise alors la notion de transformée de Doob pour prescrire les points de sortie  $\Theta_\infty$  et  $\delta_\infty$  de la diffusion. Le second ingrédient de la preuve consiste alors en la réalisation de deux (quasi)-couplages successifs des trajectoires conditionnées. Bailleul montre ainsi que les fonctions harmoniques bornées correspondant au générateur de la diffusion conditionnée sont uniformément continues en leurs arguments, puis qu'elles sont constantes. En établissant une inégalité de Harnack et en utilisant un théorème de représentation de Choquet, Bailleul aboutit finalement au théorème de représentation des fonctions harmoniques bornées suivant :

**Théorème I.5** (Théorème 23 de [Bai08a]) — *Toute fonction harmonique bornée pour l'opérateur  $\mathcal{L}^1$  sur  $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$  est de la forme*

$$\int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}} F(\Theta, \delta) h^\Theta(\cdot) h_\delta^\Theta(\cdot) d\mu(\Theta) d\nu(\delta) = \mathbb{E}. [F(\Theta_\infty, \delta_\infty)],$$

où  $F$  est une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Inversement, une telle formule détermine une fonction harmonique bornée.

Grâce aux résultats de [Bai08a], le comportement asymptotique de la diffusion de Dudley est maintenant assez bien compris. Cependant, nombre des méthodes utilisées par Bailleul sont spécifiques à l'espace de Minkowski et semblent difficilement applicables, comme nous allons le voir plus loin, au cas où la variété  $\mathcal{M}$  est plus générale et l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  est celui de la diffusion de Franchi et Le Jan.

### 3.2 Le cas de l'espace de Schwarzschild

Dans [FLJ07], Franchi et Le Jan ont réalisé une étude détaillée du comportement asymptotique de leur diffusion dans le cas où la variété  $\mathcal{M}$  est l'espace-temps de Schwarzschild. Cet espace est une solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein, il est fréquemment utilisé en cosmologie pour modéliser le complémentaire d'une étoile massive ou d'un trou noir. Il s'agit de la variété lorentzienne  $\mathcal{M}_0 := \{\xi = (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times [R, +\infty[ \times \mathbb{S}^2\}$ , où  $R$  est un paramètre réel strictement positif, munie de la pseudo-métrique :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 |d\theta|^2, \quad (\text{I.7})$$

où  $|d\theta|^2$  représente la métrique riemannienne usuelle sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Le cas limite  $R = 0$  correspond à l'espace de Minkowski de la relativité restreinte. D'un point de vue ensembliste, on peut penser à l'espace  $\mathcal{M}_0$  comme le

produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  amputé du “trou”  $\mathcal{H} := \{\xi = (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, R] \times \mathbb{S}^2\}$ . Le tenseur de Ricci est nul sur  $\mathcal{M}_0$  ; physiquement, cet espace-temps ne contient donc pas de matière. La résolution des équations des géodésiques dans  $\mathcal{M}_0$  est assez fastidieuse, de nombreux cas étant envisageables ; elle est détaillée en appendice dans [FLJ07]. Le comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan dans  $\mathcal{M}_0$  est en un sens plus simple. En effet, la diffusion ne peut présenter que les deux comportements asymptotiques illustrés ci-dessous, à savoir : être bien définie pour tous les temps  $s \geq 0$  et s’en aller à l’infini avec  $s$  dans une direction privilégiée, ou atteindre le trou  $\mathcal{H}$  en un temps fini presque sûrement.

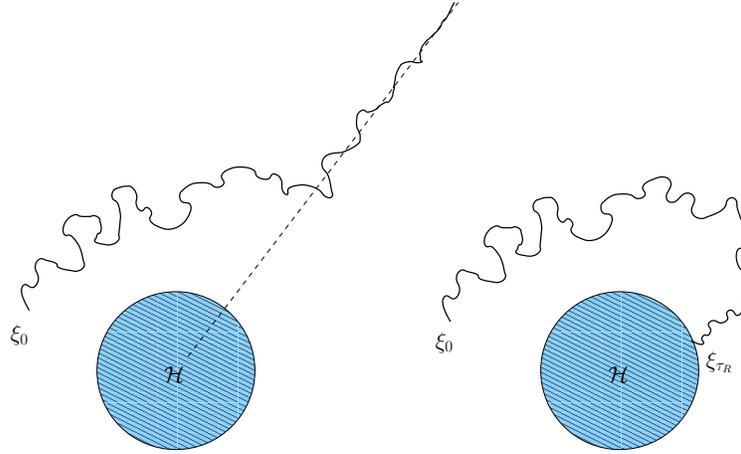


FIGURE 13: Les deux comportements asymptotiques de la diffusion dans  $\mathcal{M}_0$ .

Précisément, Franchi et Le Jan montrent le théorème suivant :

**Théorème I.6** (Théorème 4.4 de [FLJ07]) — Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  un point de  $T^1\mathcal{M}_0$  et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, r_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{r}_s, \dot{\theta}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors, le processus  $r_s$  vérifie l’alternative suivante, chacun des deux évènements ayant lieu avec une probabilité strictement positive :

- (i) soit  $r_s$  tend presque sûrement vers l’infini lorsque  $s$  tend vers l’infini ;
- (ii) soit  $r_s$  atteint la valeur  $R$  en un temps  $\tau_R$  fini presque sûrement.

Conditionnellement à l’évènement  $\{\tau_R = +\infty\}$ , la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  diverge vers l’infini dans une direction privilégiée, avec une vitesse qui tend vers celle de la lumière.

Dans le cas où  $\tau_R$  est fini, il est naturel de vouloir prolonger la diffusion après qu’elle ait atteint le trou  $\mathcal{H}$ . Ceci est effectivement possible. En effet, la singularité de la métrique (I.7) en  $r = R$  est effaçable et en introduisant un

nouveau système de coordonnées, l'espace de Schwarzschild peut être complété en un espace dit de Kruskal-Szekeres où les trajectoires sont autorisées à entrer (resp. sortir) dans le (resp. du) trou  $\mathcal{H}$ . Concernant ce prolongement, le lecteur curieux pourra consulter par exemple [TMW73]. Dans ce nouvel espace-temps, que l'on note  $\mathcal{M}$ , il existe une unique singularité, non effaçable, qui correspond au centre du trou  $r = 0$ . Dans la section 5 de [FLJ07], Franchi et Le Jan montrent que leur diffusion est bien définie dans ce nouvel espace complété et précisent son comportement asymptotique.

**Théorème I.7** (Théorème 5.1 et corollaire 5.5 de [FLJ07]) — *Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  un point de  $T^1\mathcal{M}$  et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors on a l'alternative suivante, chacun des deux évènements ayant lieu avec une probabilité strictement positive :*

- (i) *la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  diverge vers l'infini lorsque  $s$  tend vers l'infini dans une direction privilégiée ;*
- (ii) *la diffusion entre dans  $\mathcal{H}$  en un temps  $\tau_R$  fini presque sûrement puis atteint la singularité  $r = 0$  en un temps  $\tau_0$ , lui aussi fini presque sûrement. Auquel cas, la trajectoire admet une demi-tangente au centre du trou.*

Le résultat de Franchi et Le Jan est en fait un peu plus précis puisque qu'ils montrent qu'après le temps  $\tau_R$ , c'est-à-dire après être entré dans le trou  $\mathcal{H}$ , le processus  $r_s$  est décroissant, atteignant zéro en un temps fini presque sûrement, avec une vitesse explicite. Par ailleurs, le vecteur dérivé normalisé  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  converge aussi presque sûrement vers un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

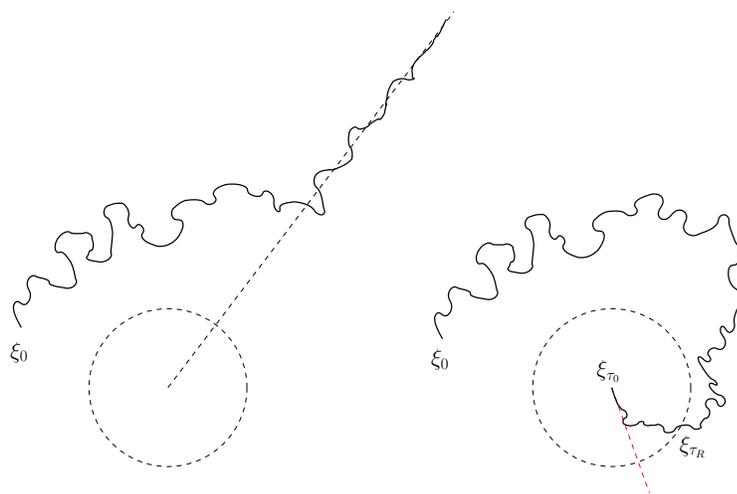


FIGURE 14: Les deux comportements asymptotiques de la diffusion dans  $\mathcal{M}$ .

À nouveau, dans le cas où la diffusion atteint le centre du trou le long d'une demi-tangente, il est tentant de la prolonger après le temps d'atteinte  $\tau_0$ . Pour cela, Franchi et Le Jan adjoignent une frontière  $\partial\mathcal{M}$  à l'espace de Kruskal-Szerekes  $\mathcal{M}$  et montrent que l'on peut définir une diffusion sur le fibré tangent  $T^1\widehat{\mathcal{M}}$ , où  $\widehat{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$ . La nouvelle diffusion, dont le temps de vie est infini presque sûrement, est obtenue en concaténant des excursions de la diffusion du théorème I.7 sur le fibré tangent  $T^1\mathcal{M}$ , en faisant en sorte que le processus  $r_s\theta_s$  reste régulier au différents temps d'atteinte de la singularité, c'est à dire le centre du trou. Franchi et Le Jan montrent alors qu'à nouveau la diffusion peut exhiber deux comportements asymptotiques : s'en aller à l'infini dans une direction privilégiée, ou rester confiner dans un voisinage du trou, en décrivant une trajectoire asymptotiquement plane.

**Théorème I.8** (Théorème 6.4 [FLJ07]) — *Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  un point de  $T^1\widehat{\mathcal{M}}$  et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, on a l'alternative suivante, chacun des deux évènements ayant lieu avec une probabilité strictement positive :*

- (i) *le processus radial  $r_s$  tend vers l'infini avec  $s$  et l'angle  $\theta_s$  converge ;*
- (ii) *le processus radial  $r_s$  vérifie :*

$$0 = \liminf_{s \rightarrow +\infty} r_s < \rho := \limsup_{s \rightarrow +\infty} r_s \in [R, 3R/2],$$

*et le moment angulaire  $\theta_s \wedge \dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  converge.*

La figure suivante illustre les deux comportements asymptotiques possibles pour la diffusion dans  $\widehat{\mathcal{M}}$ .

D'un point de vue géométrique, les différents résultats de [FLJ07] donnent une image assez précise du comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan dans l'espace-temps de Schwarzschild et ses extensions. Bien que ne faisant intervenir que les outils et méthodes usuels du calcul stochastique, les preuves de ces différents résultats sont assez délicates et techniques. En particulier, dans ce cadre géométrique plus riche que celui de l'espace de Minkowski, Franchi et Le Jan ne sont pas parvenus à pousser leur étude aussi loin que celle de Bailleul dans [Bai08a], en déterminant la tribu asymptotique et la frontière de Poisson de la diffusion. En effet, certaines méthodes utilisées par Bailleul sont spécifiques à l'espace de Minkowski et leur généralisation au cadre d'une variété lorentzienne plus générale n'est pas évidente. Pour autant, l'étude de Franchi et Le Jan dans [FLJ07] est assez détaillée pour permettre aux auteurs de formuler une conjecture raisonnable sur le comportement asymptotique des trajectoires de la diffusion sur une variété lorentzienne générale et sur la frontière de Poisson de la diffusion.

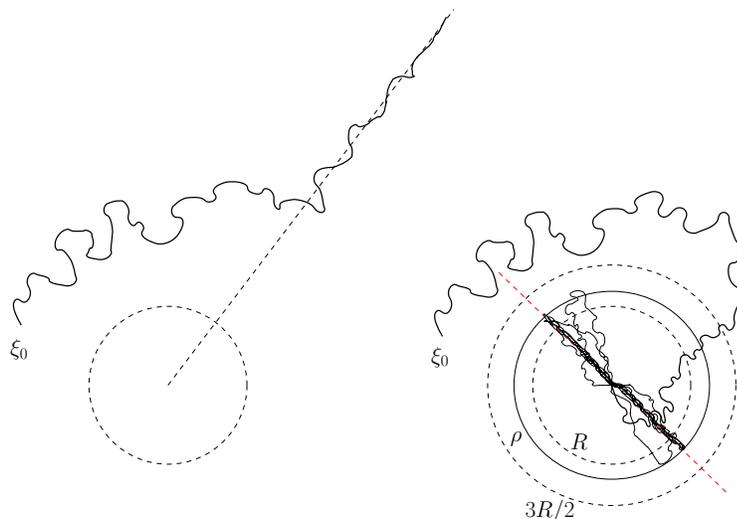


FIGURE 15: Les deux comportements asymptotiques de la diffusion dans  $\widehat{\mathcal{M}}$ .

**Conjecture** ([FLJ07]) — *Sur une variété lorentzienne générale  $\mathcal{M}$ , la diffusion relativiste décrit asymptotiquement une géodésique de lumière aléatoire. L'ensemble des fonctions harmoniques bornées pour l'opérateur  $\mathcal{L}^\sigma$  sur le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  est en bijection avec un ensemble de classes d'équivalence de géodésiques de lumière.*

En effet, dans l'espace de Minkowski comme dans l'espace de Schwarzschild, le comportement asymptotique des trajectoires de la diffusion est “semblable” à celui de géodésiques de lumière. Par exemple, dans le cas l'espace de Minkowski, comme on l'a vu dans le théorème I.3, la diffusion décrit asymptotiquement une droite sur un cône dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Dans le cas minkowskien, les géodésiques de lumière sont précisément des droites sur le cône de lumière  $\{q = 0\}$ . Dans l'espace de Schwarzschild  $\mathcal{M}_0$ , une droite d'équation  $\theta \equiv cste$  parcourue à une vitesse ad hoc est un exemple de géodésique de lumière qui apparaît naturellement comme trajectoire limite pour la diffusion de Franchi et Le Jan (premier cas de la figure 13).

### 3.3 Le cas de l'univers de Gödel

Pour conclure ce chapitre introductif, nous mentionnons brièvement les résultats de [Fra07] concernant le comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan dans l'espace-temps ou univers de Gödel. Comme son nom l'indique, cet espace-temps a été introduit par K. Gödel en 1949. Il fait partie des rares solutions connues des équations d'Einstein qui ne possèdent pas de singularité, et il jouit de plus la propriété intéressante de contenir des

courbes de genre temps fermées. Pour cette raison, et même si son interprétation physique est peu claire, il a été largement étudié par les physiciens. On pourra par exemple consulter [Kun56, HE73]. L'univers de Gödel est défini comme la variété  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ , munie du système de coordonnées global et canonique  $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$  et d'une pseudo-métrique qui dans cette carte s'écrit :

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{2}\omega x} dy^2 - 2e^{\sqrt{2}\omega x} dt dy + dz^2, \quad (\text{I.8})$$

où  $\omega$  est une constante strictement positive. Comme dans l'espace de Minkowski et l'espace de Schwarzschild, le tenseur de Ricci est nul sur l'espace de Gödel.

La diffusion de Franchi et Le Jan étant une perturbation du flot géodésique, le début de l'article [Fra07] est naturellement consacré à l'étude des géodésiques (de genre temps et de lumière) dans  $\mathcal{M}$ . En particulier, Franchi montre qu'à toute géodésique de lumière dans l'espace de Gödel peut être associé un *paramètre d'impact* tridimensionnel. Il définit ensuite une notion de *rayon de lumière*, comme classe d'équivalence de géodésiques de lumière possédant le même paramètre d'impact. Franchi adjoint ainsi une frontière naturelle  $\partial\mathcal{M}$  de dimension trois à l'espace de Gödel  $\mathcal{M}$ . Il introduit enfin la notion de convergence d'une trajectoire dans  $\mathcal{M}$  vers un rayon de lumière, celle-ci s'exprimant naturellement en terme de la notion de paramètre d'impact évoquée précédemment. Les résultats de [Fra07] concernant le comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan dans l'espace de Gödel peuvent alors être résumés de la façon suivante :

**Théorème I.9** ([Fra07]) — Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  un point de  $T^1\mathcal{M}$  et  $\mathbb{P}_0$  la loi de la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors,

- (i) le processus  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est irréductible dans l'espace des phases  $T^1\mathcal{M}$  ;
- (ii)  $\mathbb{P}_0$ -presque sûrement, la diffusion possède une variable aléatoire limite de dimension trois et converge vers un rayon de lumière ;
- (iii) l'ensemble des rayons de lumière vers lesquels la diffusion peut converger est l'ensemble des rayons de lumière tout entier.

Remarque I.7 — Au regard de ce théorème, l'étude de la diffusion relativiste dans l'espace de Gödel vient renforcer la conjecture formulée au paragraphe précédent. Le comportement asymptotique de la diffusion semble intimement lié à celui des géodésiques de lumière.

Nous renvoyons le lecteur à [Fra07] pour les définitions précises des notions de paramètre d'impact, rayons de lumière etc. ainsi que les énoncés précis

des résultats résumés dans le théorème ci-dessus. Comme dans le cas de l'espace de Schwarzschild, la description géométrique du comportement asymptotique des trajectoires de la diffusion relativiste dans l'espace de Gödel est assez complète. Malheureusement, comme dans [FLJ07], il semble ici difficile d'obtenir une description totale de la tribu asymptotique et de la frontière de Poisson de la diffusion.

Les exemples de l'espace de Schwarzschild et de l'espace de Gödel montrent que, dès que l'on sort du cas minkowskien, même en considérant des variétés relativement simples et de courbure nulle, la détermination complète du comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan est largement non triviale. La suite de la seconde partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude de la diffusion relativiste dans le cas où  $\mathcal{M}$  appartient à une famille de variétés lorentziennes bien connue des physiciens cosmologistes : les espaces de Robertson-Walker. Les deux prochains chapitres sont consacrés à des rappels concernant la géométrie de ces variétés lorentziennes, en particulier nous y résolvons les équations géodésiques. Les chapitres suivants sont eux consacrés à l'étude détaillée du comportement asymptotique de la diffusion relativiste dans ces espaces. En particulier, au chapitre VIII, nous parvenons à déterminer la frontière de Poisson de la diffusion pour une classe d'espaces de Robertson-Walker.

# Géométrie des espaces de Robertson-Walker

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Les espaces de Robertson-Walker . . . . .</b>	<b>98</b>
1.1	Produit tordu de variétés pseudo-riemanniennes . .	98
1.2	Les espaces de Robertson-Walker . . . . .	101
<b>2</b>	<b>Éléments de physique relativiste . . . . .</b>	<b>106</b>
2.1	Le tenseur et les équations d'Einstein . . . . .	106
2.2	Espaces de Robertson-Walker et fluides parfaits . .	109
2.3	Quelques modèles cosmologiques usuels . . . . .	111
<b>3</b>	<b>Géométrie des espaces de Robertson-Walker . . .</b>	<b>118</b>
3.1	Espaces de Robertson-Walker et variétés d'Einstein	118
3.2	Hypersurfaces remarquables . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Hypothèses sur le facteur d'expansion . . . . .</b>	<b>122</b>
4.1	Formulation des hypothèses . . . . .	122
4.2	Résumé schématique . . . . .	126
4.3	Retour sur les exemples . . . . .	127

---

Dans ce deuxième chapitre, nous introduisons le cadre géométrique dans lequel nous allons étudier la diffusion de Franchi et Le Jan : les espaces de Robertson-Walker. Notre objectif ici est double : d'une part, il s'agit de se familiariser avec le cadre géométrique que constituent les espaces de Robertson-Walker ; d'autre part, on souhaite dégager clairement des hypothèses raisonnables les concernant, hypothèses sous lesquelles nous nous placerons dans toute la suite de ce manuscrit. Après avoir défini dans une première section les espaces de Robertson-Walker comme produits tordus de deux variétés pseudo-riemanniennes, nous rappelons dans les sections 2 et 3 certaines de leurs propriétés physique et géométrique. Nous déduisons alors des hypothèses raisonnables concernant le facteur d'expansion de ces espaces dans la section 4.

# 1 LES ESPACES DE ROBERTSON-WALKER

Dans cette section, nous rappelons tout d'abord la notion de produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes ainsi que quelques propriétés géométriques qui lui sont liées. Nous introduisons ensuite les espaces de Robertson-Walker, et y explicitons différents systèmes de coordonnées avec lesquels nous serons amenés à travailler par la suite.

## 1.1 Produit tordu de variétés pseudo-riemanniennes

### 1.1.1 Définition du produit tordu

Le produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes est une notion qui généralise la notion de produit direct de deux variétés, il est défini de la manière suivante :

**Définition II.1** (voir par ex. [Zeg99]) — Considérons  $(L, g^L)$  et  $(M, g^M)$  deux variétés pseudo-riemanniennes et  $\alpha$  une fonction régulière de  $L$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On appelle *produit tordu* de  $L$  par  $M$  selon  $\alpha$ , et on note  $L \times_\alpha M$ , le produit topologique  $L \times M$  muni de la métrique  $g := g^L \oplus \alpha^2 g^M$ , c'est-à-dire

$$g = g^L \circ \pi_L + \alpha^2 \circ \pi_L \times g^M \circ \pi_M,$$

où  $\pi_L$  et  $\pi_M$  désignent les projections canoniques sur  $L$  et  $M$  respectivement. La fonction  $\alpha$  est appelée fonction de torsion, ou encore facteur d'expansion.

Un produit tordu  $L \times_\alpha M$  peut être vu comme un fibré sur  $L$  (la base) de fibre  $M$ . Ainsi, ce type de variétés possède deux feuilletages orthogonaux naturels, un feuilletage par les bases  $L_x := L \times \{x\}$ , pour  $x$  dans  $M$ , et un feuilletage par les fibres  $M_t := \{t\} \times M$  pour  $t$  dans  $L$ .

**Exemple II.1** (Les coordonnées polaires) — Un premier exemple familier de produit tordu est l'espace euclidien usuel privé de l'origine,  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , muni des coordonnées polaires. En effet, en coordonnées polaires, la métrique euclidienne s'écrit  $g = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , où  $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$  désigne la métrique sphérique usuelle. L'espace  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  peut ainsi être vu comme le produit tordu  $\mathbb{R}_+^* \times_{\text{Id}} \mathbb{S}^{n-1}$ .

Remarque II.1 (Singularité effaçable) — Dans ce premier exemple, la métrique  $g = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$  semble avoir une singularité au point  $r = 0$ . Cette singularité est artificielle, elle est due à l'utilisation des coordonnées polaires dans l'espace euclidien. La métrique  $g$  s'étend naturellement au point  $r = 0$  comme la métrique euclidienne. De manière générale, dans un système de coordonnées sur un produit tordu, la métrique peut apparaître irrégulière, sans pour autant que la variété produit ne possède de singularité.

**Exemple II.2** (L'espace hyperbolique) — Soient  $L = (\mathbb{R}, dt)$ ,  $M = (\mathbb{R}, dx)$  et la fonction de torsion  $\alpha(t) = e^t$ . Le produit tordu  $L \times_\alpha M$  est isométrique au plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . En effet, dans le demi plan de Poincaré, la métrique hyperbolique s'écrit  $g_{\mathbb{H}^2} = (dx^2 + dy^2)/y^2$ . Si l'on pose  $t = -\log(y)$  i.e.  $dt^2 = dy^2/y^2$ , on a  $g_{\mathbb{H}^2} = dt^2 + e^{2t}dx^2$ . De la même façon, en toute dimension, l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  est isométrique au produit tordu  $(\mathbb{R}, dt) \times_{e^t} (\mathbb{R}^{n-1}, dx)$ .

**Exemple II.3** (Conformité et produit tordu) — Considérons l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique  $g = f^2(x^1) (|dx^1|^2 + \dots |dx^n|^2)$  où  $f$  est une fonction régulière strictement positive. Si l'on pose  $dt^2 := f^2(x^1)|dx^1|^2$ , et si  $\alpha(t) := f(F^{-1}(t))$  où  $F^{-1}$  désigne l'inverse d'une primitive de  $f$ , alors la métrique  $g$  s'écrit :  $g = dt^2 + \alpha^2(t) (|dx^2|^2 + \dots |dx^n|^2)$  i.e.  $(\mathbb{R}^n, g) \approx \mathbb{R} \times_\alpha \mathbb{R}^{n-1}$ .

Comme le montre les exemples ci-dessus, la notion de produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes est sous-jacente dans de nombreuses situations géométriques usuelles. Par ailleurs, d'un point de vue pratique, elle permet de contruire des variétés pseudo-riemanniennes "sophistiquées" à partir de variétés particulièrement simples. Enfin, la notion de produit tordu est intimement liée à des structures géométriques possédant un "gros" groupe de symétrie. Ainsi, au paragraphe 1.2.1, nous verrons que les espaces de Robertson-Walker, dont la structure est celle d'un produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes, apparaissent naturellement comme des espace-temps solutions des équations d'Einstein, lorsque l'on impose à ces solutions d'être invariantes sous l'action des isométries de l'espace.

### 1.1.2 Deux notions conservées par produit tordu

Étant données  $(L, g^L)$ ,  $(M, g^M)$  deux variétés pseudo-riemanniennes et  $\alpha$  une fonction de torsion, il est naturel de se demander si d'éventuelles propriétés géométriques de la fibre  $M$  sont conservées par le produit tordu. Autrement dit, la variété  $L \times_\alpha M$  hérite-t-elle de certaines propriétés géométriques de  $M$ ? Les deux résultats suivants vont dans ce sens.

**Lemme II.1** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de  $M$ , et  $\tilde{f}$  son extension triviale à  $L \times_\alpha M$  i.e.  $\tilde{f} : (t, x) \in L \times M \longrightarrow (t, f(x)) \in L \times M$ . Alors  $\tilde{f}$  est une isométrie de  $L \times_\alpha M$  si et seulement si  $f$  est une isométrie de  $M$ .*

*Démonstration.* Avec les notations de la définition II.1, en posant  $f^*h = h \circ f$ , l'action de  $\tilde{f}$  sur  $g$  s'écrit simplement

$$\tilde{f}^*g = \tilde{f}^*(g^L \oplus \alpha^2 g^M) = g^L \oplus \alpha^2 f^*g^M,$$

d'où le résultat. □

Avant d'énoncer la proposition suivante et son corollaire qui sera important dans la suite, nous rappelons les notions de sous-variété géodésique et totalement géodésique.

**Définition II.2** (voir par ex. [Ber03] p. 260) — Soient  $M$  une variété pseudo-riemannienne,  $S$  une sous-variété de  $M$  et  $x_0$  dans  $S$ . On dit que  $S$  est *géodésique* dans  $M$  en  $x_0$  si toute courbe géodésique de  $M$  tangente à  $S$  en  $x_0$  possède un contact d'ordre supérieur à deux avec  $S$ . Si cette condition est satisfaite pour tout  $x_0$  dans  $S$ , on dit que  $S$  est géodésique dans  $M$ .

En particulier, cette condition est remplie si toutes les géodésiques de  $S$  sont des géodésiques dans  $M$ , auquel cas on dit que  $S$  est *totalement géodésique* dans  $M$ .

**Proposition II.1** (Fait 2.2 de [Zeg99]) — Soient  $(L, g^L)$  et  $(M, g^M)$  deux variétés pseudo-riemanniennes,  $\alpha : L \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction de torsion et  $S$  une sous-variété de  $M$ . Alors  $S$  est géodésique dans  $M$  si et seulement si  $L \times_\alpha S$  est géodésique dans  $L \times_\alpha M$ .

*Démonstration.* Pour une preuve détaillée de ce résultat, on pourra consulter l'article [Zeg99], qui contient une section consacrée à la géométrie des produits tordus.  $\square$

En appliquant la proposition II.1 à une sous-variété géodésique  $S$  de  $M$  de dimension 1, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire II.1** — Soient deux variétés pseudo-riemanniennes  $(L, g^L)$  et  $(M, g^M)$ , et  $\alpha : L \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction de torsion. Si  $(t_s, x_s)$  est une courbe géodésique dans  $L \times_\alpha M$ , alors  $x_s$  décrit une courbe géodésique dans  $M$ .

*Démonstration.* Soient  $(\xi_s)_{s \in I} := (t_s, x_s)_{s \in I}$  une géodésique de  $L \times_\alpha M$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $S$  une sous-variété géodésique de dimension 1 de  $M$ , telle que  $\xi$  est tangente à  $L \times S$  en un point  $s_0$  de  $I$ . La proposition II.1 implique que le produit  $L \times_\alpha S$  est géodésique dans  $L \times_\alpha M$ , et donc contient toute la courbe  $(\xi_s)_{s \in I}$ . La projection  $(x_s)_{s \in I} = \pi_M((\xi_s)_{s \in I})$  est donc incluse dans un ouvert de  $S$ , d'où le corollaire.  $\square$

Autrement dit, si l'on sait décrire explicitement les géodésiques de la fibre  $(M, g^M)$ , on sait décrire les géodésiques  $(\xi_s) := (t_s, x_s)$  du produit  $L \times_\alpha M$  dès lors que l'on sait intégrer la composante de base  $t_s$  dans  $L$  et que l'on parvient à déterminer un paramétrage de la courbe  $(x_s)_{s \in I}$  dans  $M$ . Aux paragraphes 2 et 3, nous verrons que cela est possible lorsque  $L$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Les espaces de Robertson-Walker

Les espaces de Robertson-Walker sont des variétés lorentziennes dont la structure est celle d'un produit tordu de deux variétés pseudo-riemanniennes. Avant de donner la définition précise de ces espaces au paragraphe 1.2.2, nous rappelons comment ils sont naturellement apparus dans les littératures mathématique et physique dans la recherche de solutions des équations d'Einstein, sous l'hypothèse appelée "principe cosmologique".

### 1.2.1 Principe cosmologique et recherche de symétrie

Dans la théorie de la gravitation d'Einstein, notre univers ou espace-temps est modélisé par une variété lorentzienne  $(\mathcal{M}, g)$  de dimension  $4 = 1 + 3$  et les interactions gravitationnelles de l'univers sont entièrement codées par une équation tensorielle (on parle d'équations d'Einstein) vérifiée par la métrique  $g$ . Depuis la publication des travaux d'Einstein, mathématiciens et physiciens ont cherché à exhiber des couples  $(\mathcal{M}, g)$  telle que la métrique  $g$  est solution (exacte ou approchée) de ces équations.

Les espaces de Robertson-Walker doivent leur nom à H. P. Robertson [Rob35] et A. G. Walker [Wal37] après leur travaux dans les années 1930 sur les solutions des équations d'Einstein, sous l'hypothèse que l'univers vérifie le "principe cosmologique". Grossièrement, ce principe exprime le fait que tous les points dans l'univers sont "équivalents". Plus précisément, il affirme que l'univers est spatialement *homogène et isotrope*<sup>1</sup> en tout point. Le terme "spatialement" a une importance non négligeable : si l'on admet le principe cosmologique, implicitement, on fait l'hypothèse de l'existence d'une coordonnée privilégiée unidimensionnelle  $t$  dans l'espace-temps  $(\mathcal{M}, g)$ , telle que les hypersurfaces correspondant à  $t = \text{constante}$  sont des variétés homogènes et isotropes.

Les notions d'homogénéité et d'isotropie sur une variété pseudo-riemannienne  $(M, g^M)$  sont des propriétés géométriques qui peuvent être interprétées en termes de vecteurs de Killing associés à la métrique  $g^M$ . Faire l'hypothèse que la variété est homogène et isotrope en tout point revient à dire que  $(M, g^M)$  est à symétrie maximale, c'est-à-dire que l'espace vectoriel des vecteurs de Killing de  $g^M$  est de dimension maximale  $(n(n+1))/2$  si  $M$  est de dimension  $n$ . Le résultat suivant est classique.

**Proposition II.2** ([Wei72] p. 381) — *Si  $(M, g^M)$  est une variété pseudo-riemannienne à symétrie maximale, alors  $M$  est à courbure constante.*

---

1. Voir [Wei72] p. 378-379 pour des définitions précises de l'homogénéité et de l'isotropie.

La proposition II.2 permet d'établir une classification des variétés pseudo-riemanniennes à symétrie maximale : celles-ci sont classées selon leur courbure et la signature de leur métrique. De la même façon, il est possible de classer les variétés pseudo-riemanniennes admettant des sous-variétés à symétrie maximale. On montre ainsi le résultat suivant :

**Proposition II.3** ([Wei72] p. 395-404) — Soit  $(\mathcal{M}, g)$  est une variété lorentzienne de dimension  $n+1$ . S'il existe une coordonnée  $t$  à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , telle que les hypersurfaces  $t = \text{constante}$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$  à symétrie maximale de courbure  $k_t$ , alors  $\mathcal{M}$  est nécessairement de la forme  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M^n$  où

- l'intervalle  $I$  est muni de la métrique  $-dt^2$  ;
- $(M^n, g^{M^n})$  est variété riemannienne de courbure constante  $k$  ;
- la fonction  $\alpha(t)$  est donnée par  $k_t = k/\alpha^2(t)$ .

Autrement dit, si l'on se place sous l'hypothèse du "principe cosmologique", l'espace-temps a nécessairement une structure de produit tordu dont la base est une variété unidimensionnelle (un intervalle ouvert) et la fibre est une variété riemannienne de dimension trois à courbure constante.

### 1.2.2 Définition des espaces de Robertson-Walker

Les résultats obtenus par H. P. Robertson et A. G. Walker rappelés dans le paragraphe précédent, qui ont eu un retentissement important au moment de l'avènement de la théorie du Big-Bang, ont motivé la définition suivante :

**Définition II.3** (voir par ex. [Zeg99]) — On appelle espace de Robertson-Walker une variété lorentzienne  $\mathcal{M}$  du type  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $(I, -dt^2)$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $(M, g^M)$  est une variété riemannienne de courbure constante, et la fonction  $\alpha$  est une fonction régulière de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Remarque II.2 — Les hypothèses précises de régularité et d'intégrabilité de la fonction de torsion  $\alpha$  seront explicitées dans la section 4 de ce chapitre. D'ici là, nous supposons que toutes les expressions faisant intervenir la fonction  $\alpha$  sont bien définies sur  $I$ . Dans toute la suite, sauf mention du contraire, nous supposons que les espaces de Robertson-Walker sont de dimension  $4 = 1 + 3$ , *i.e.*, que la variété riemannienne  $(M, g^M)$  est de dimension trois.

Remarque II.3 — Une variété riemannienne  $(M, g^M)$  complète, simplement connexe, de dimension trois et de courbure constante  $k$  est isométrique à

- l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  si  $k = 0$  ;
- la sphère  $\mathbb{S}^3$  si  $k > 0$  ;
- l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  si  $k < 0$ .

Sans perdre en généralité (cf. remarque II.5 ci-après), nous nous limiterons dans toute la suite aux espaces de Robertson-Walker du type  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$ , et  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{H}^3$ , selon que  $k = 0$ ,  $k = 1$  ou  $k = -1$ .

**Remarque II.4** — Dans la littérature, le terme “espace de Robertson-Walker généralisé” désigne le plus souvent une variété lorentzienne  $\mathcal{M}$  du type  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $(I, -dt^2)$  est toujours un intervalle de  $\mathbb{R}$ , mais où l’on ne suppose pas forcément que la variété riemannienne  $(M, g^M)$  est de courbure constante.

### 1.2.3 Différents systèmes de coordonnées

De part leur structure de produit tordu, les espaces de Robertson-Walker peuvent être munis de systèmes de coordonnées naturels en précisant un choix de coordonnées sur la base  $I$  et un choix de coordonnées sur la fibre riemannienne  $M$ .

#### Coordonnée sur la base

Sans perdre en généralité, on peut supposer que l’intervalle  $I$  est du type  $I = ]0, T[$  avec  $T \leq +\infty$ . Dans toute la suite, nous désignerons par  $t \in ]0, T[$  la paramétrisation canonique de la base.

#### Coordonnées sur une fibre euclidienne

Lorsque  $M = \mathbb{R}^3$ , *i.e.* lorsque  $k = 0$ , nous considérerons selon les cas les coordonnées cartésiennes  $(x^i) = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ , ou encore les coordonnées polaires usuelles  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$ , où

$$\theta = (\sin(\phi) \cos(\psi), \sin(\phi) \sin(\psi), \cos(\phi)), \quad \phi \in [0, \pi], \quad \psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}. \quad (\text{II.1})$$

#### Coordonnées sur une fibre hyperbolique

Il existe deux nombreux modèles pour l’espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ . Nous adopterons dans la suite le modèle de la partie positive de la pseudo-sphère unité de l’espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  :

$$\mathbb{H}^3 = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^{1,3}, x^0 > 0, |x^0|^2 - |x^1|^2 - |x^2|^2 - |x^3|^2 = 1\}.$$

Ainsi, lorsque la fibre  $M$  sera égale à l’espace hyperbolique de dimension trois, nous la munirons des coordonnées “cartésiennes”  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  héritées de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , ou encore des coordonnées polaires  $(\chi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  telles que

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\cosh(\chi), \sinh(\chi)\theta) = (\sqrt{1+r^2}, r \times \theta).$$

avec  $\theta \in \mathbb{S}^2$  donné par (II.1).

### Coordonnées sur une fibre sphérique

Lorsque la fibre est  $M$  sera égale à  $\mathbb{S}^3$ , c'est-à-dire lorsque  $k = 1$ , nous la munirons soit des coordonnées cartésiennes héritées de l'espace euclidien de dimension quatre :

$$\mathbb{S}^3 = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4, |x^0|^2 + |x^1|^2 + |x^2|^2 + |x^3|^2 = 1\},$$

soit des coordonnées sphériques usuelles :

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\cos(\chi), \sin(\chi)\theta), \text{ avec } \chi \in [0, \pi] \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^2 \text{ donné par (II.1).}$$

Afin de rassembler les trois modèles de fibres envisagés (euclidienne, sphérique, hyperbolique) dans un même formalisme, il est commode d'introduire la fonction  $f = \text{Id}, \sin, \sinh$  selon que  $k = 0, 1$  ou  $-1$ . Auquel cas, si l'on pose  $r = \chi$  dans le cas euclidien, dans le système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, \chi, \phi, \psi)$  sur  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$ , la pseudo-métrique  $g = -dt^2 \oplus \alpha^2(t)g^M$  s'écrit :

$$g = -dt^2 + \alpha^2(t) (d\chi^2 + f^2(\chi)(d\phi^2 + \sin^2(\phi)d\psi^2)). \quad (\text{II.2})$$

Déterminons à présent les symboles de Cristoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  associés à la pseudo-métrique  $g$  dans le système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, \chi, \phi, \psi)$  sur  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  :

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu := \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial \xi^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial \xi^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial \xi^\sigma} \right).$$

Par définition, le lagrangien associé à la métrique (II.2) est donné par :

$$L(\xi, \dot{\xi}) := \frac{1}{2} \left[ -\dot{t}^2 + \alpha^2(t) \left( \dot{\chi}^2 + f^2(\chi) \left( \dot{\phi}^2 + \sin^2(\phi) \dot{\psi}^2 \right) \right) \right].$$

Si  $\xi_s := (t_s, r_s, \phi_s, \psi_s)$  est une géodésique dans  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$ , alors  $\xi_s$  est solution du système d'équations différentielles :

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\xi^\nu}{ds} \frac{d\xi^\rho}{ds} = 0.$$

Ce système est équivalent aux équations d'Euler-Lagrange<sup>2</sup> :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}^j} (s) \right) = \frac{\partial L(\xi, \dot{\xi})}{\partial \xi^j}. \quad (\text{II.3})$$

---

2. Voir par exemple [FN], p. 60.

Par identification, on en déduit que les symboles de Christoffel non nuls dans le système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, \chi, \phi, \psi)$  sont :

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \alpha \alpha', & \Gamma_{22}^0 &= \alpha \alpha' f^2(\chi), & \Gamma_{33}^0 &= \alpha \alpha' f^2(\chi) \sin^2(\phi), \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{\alpha'}{\alpha}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{df}{d\chi}(\chi) \times f(\chi), & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{df}{d\chi}(\chi) \times f(\chi) \times \sin^2(\phi), \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\alpha'}{\alpha}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{df}{d\chi}(\chi) \times f(\chi)^{-1}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\phi) \cos(\phi), \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\alpha'}{\alpha}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{df}{d\chi}(\chi) \times f(\chi)^{-1}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot(\phi),\end{aligned}$$

où  $\alpha'$  désigne la dérivée de  $\alpha$  par rapport à la variable  $t$ .

Remarque II.5 — Concernant la courbure constante  $k$  de la fibre d'un espace de Robertson-Walker, la raison pour laquelle on peut se limiter sans perdre en généralité aux valeurs  $k = 0, 1, -1$ , est que si  $k \neq 0$ , la pseudo-métrique (II.2) est invariante par le changement de coordonnées

$$k \rightarrow \frac{k}{|k|}, \quad f(\chi) \rightarrow \sqrt{|k|} f(\chi), \quad \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{|k|}}.$$

Remarque II.6 — Les espaces de Robertson-Walker sont conformément plats. En effet, si l'on pose  $f(\chi) = \varrho/(1 + \frac{1}{4}k\varrho^2)$ , dans la carte  $\xi^\mu = (t, \varrho, \phi, \psi)$ , la pseudo-métrique (II.2) devient :

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\alpha^2(t)}{(1 + \frac{1}{4}k\varrho^2)^2} dz^2, \quad (\text{II.4})$$

où  $dz^2$  est la métrique euclidienne  $dz^2 := (d\varrho^2 + \varrho^2(d\phi^2 + \sin^2(\phi)d\psi^2))$ . Si l'on introduit la nouvelle coordonnée  $\tau$  :

$$d\tau := \left(1 + \frac{1}{4}k\varrho^2\right)^2 \alpha(t)^{-2} dt,$$

la pseudo-métrique (II.2) est alors conforme à la pseudo-métrique de Minkowski, puisque de la forme

$$ds^2 = \beta^2(\tau) \times (d\tau^2 - |dz|^2), \quad (\text{II.5})$$

pour une fonction régulière  $\beta$ .

## 2 ÉLÉMENTS DE PHYSIQUE RELATIVISTE

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.2.1, les espaces de Robertson-Walker trouvent leur origine dans la recherche de solutions des équations d'Einstein, sous l'hypothèse du principe cosmologique. Depuis la découverte quelque peu fortuite du fond diffus cosmologique par Penzias et Wilson en 1965 et l'avènement de la théorie du Big-Bang (esquissée par Friedmann et Lemaître au milieu des années 1920), ces espaces ont été utilisés par les physiciens pour modéliser un univers en expansion. Aujourd'hui encore, les espaces de Robertson-Walker constituent les principaux modèles pour décrire l'évolution de notre univers à grande échelle.

Cette section a essentiellement deux objectifs. Le premier est de fournir quelques exemples "concrets" d'espaces de Robertson-Walker. Au paragraphe 2.3, nous donnons ainsi une liste des principaux espaces fréquemment utilisés en cosmologie, en précisant quel type d'univers ces espaces cherchent à modéliser. Le second objectif de cette section est de se faire une première idée de l'influence du facteur d'expansion  $\alpha$  sur la géométrie et la physique des espaces de Robertson-Walker. Cette question fait l'objet des paragraphes 2.1 et 2.2. Après quelques rappels concernant les équations d'Einstein, nous expliquons brièvement en quoi, d'un point de vue physique, la modélisation de notre univers par un espace de Robertson-Walker confère à la matière qui nous entoure une structure de fluide parfait, dont les densités d'énergie et de pression sont directement reliées au choix de la fonction de torsion  $\alpha$ . À travers ce lien, certaines hypothèses naturelles pour le physicien se traduisent par des hypothèses géométriques sur le facteur d'expansion. Aussi, le point de vue du physicien apporte un éclairage sur l'influence de la fonction de torsion sur la géométrie des espaces de Robertson-Walker. Cet éclairage, associé aux résultats des paragraphes 3.1 et 3.2, va nous permettre de formuler des hypothèses raisonnables sur la fonction de torsion dans la section 4.

### 2.1 Le tenseur et les équations d'Einstein

L'idée qui se trouve à la base de la théorie de la relativité générale consiste à remplacer un espace-temps plat muni d'un champ gravitationnel par un espace-temps courbe sans champ gravitationnel. Autrement dit, dans la théorie de la relativité générale, une distribution de matière ne crée plus de champ gravitationnel comme de la théorie newtonienne de la gravitation, mais elle "courbe" l'espace-temps. Le cadre mathématique qui permet de rendre compte de cet idée est celui de la géométrie différentielle. Ainsi, dans

la théorie de la gravitation d'Einstein, l'espace-temps est modélisé par une variété lorentzienne de dimension quatre  $(\mathcal{M}, g)$ . La distribution de matière et d'énergie dans l'univers est décrite par un champ de forme bilinéaires symétriques de divergence nulle, noté  $T_{\mu\nu}$  et appelé *tenseur énergie-impulsion*. La géométrie de l'espace-temps est quant à elle codée par un second tenseur, appelé *tenseur d'Einstein*, noté  $G_{\mu\nu}$  :

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}, \quad (\text{II.6})$$

lui-même défini à partir du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  :

$$R_{\mu\nu} := \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial \xi^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}}{\partial \xi^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma}, \quad (\text{II.7})$$

et de la courbure scalaire  $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . La façon dont la matière “courbe” l'espace-temps est décrite par les équations d'Einstein qui relient le tenseur énergie-impulsion au tenseur d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (\text{II.8})$$

ou plus simplement, lorsque  $\Lambda = 0$  :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (\text{II.9})$$

Remarque II.7 — Dans l'équation (II.8), le terme  $\Lambda$  est un scalaire arbitraire : c'est la fameuse constante cosmologique. Cette constante a une histoire remarquable : Einstein l'a ajoutée en février 1917 à l'équation (II.9) établie en 1915, dans le but de rendre sa théorie compatible avec l'idée qu'il avait alors d'un univers statique. Après la découverte en 1929 du décalage vers le rouge par Edwin Hubble impliquant un univers en expansion, Einstein est revenu sur l'introduction cette constante, la qualifiant de “plus grande bêtise de sa vie”. Néanmoins des découvertes et observations récentes ont provoqué un regain d'intérêt pour ce paramètre, qui est par ailleurs compatible avec l'ensemble de la théorie de la relativité générale.

Si  $T$  désigne la contraction du tenseur  $T_{\mu\nu}$ , l'équation (II.8) s'écrit encore :

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right).$$

Les physiciens affirment que, dans les modèles classiques, le tenseur  $T_{\mu\nu}$  vérifie la condition de suivante<sup>3</sup> : pour tout vecteur  $X$  de genre temps,

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) X^{\mu} X^{\nu} \geq 0.$$

---

3. voir [HE73] p. ?

Pour cette raison, il est généralement admis que les espaces-temps physiques satisfont l'hypothèse suivante, baptisée condition forte sur l'énergie<sup>4</sup> (“strong energy condition”) :

$$R_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0, \quad \text{pour tout vecteur } X \text{ de genre temps.}$$

Cette condition joue un rôle déterminant dans la preuve de certains théorèmes d'existence de singularités<sup>5</sup>, citons par exemple le théorème de Penrose :

**Théorème II.1** ([Pen65]) — *Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété lorentzienne telle que :*

- $\mathcal{M}$  satisfait la condition forte sur l'énergie ;
- il existe une surface piégée dans  $\mathcal{M}$  ;
- $\mathcal{M}$  admet une hypersurface de Cauchy non compacte.

*Alors,  $\mathcal{M}$  possède une géodésique de lumière incomplète.*

Remarque II.8 — La condition forte sur l'énergie peut être vue comme une traduction du fait que la gravitation est “attractive”. En effet, si  $X$  est un vecteur tangent à une géodésique  $\xi$  de genre temps dans  $\mathcal{M}$ , la positivité du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \geq 0$  implique que les géodésiques au voisinage de  $\xi$  ont tendance, en moyenne, à se rapprocher de  $\xi$ .

Explicitons les composantes non nulles du tenseur de Ricci dans un espace de Robertson-Walker, ce sont les composantes diagonales :

$$R_{00} = -\frac{3\alpha''}{\alpha}, \quad R_{11} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k),$$

$$R_{22} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k)f^2(\chi), \quad R_{33} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k)f^2(\chi)\sin^2(\phi).$$

Un calcul direct montre que la courbure scalaire  $R$  est alors donnée par :

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -6 \left( \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right).$$

On voit ici que la courbure scalaire d'un espace de Robertson-Walker s'exprime simplement comme une fonction du facteur d'expansion et de la courbure  $k$  de sa fibre. En particulier, les propriétés géométriques de la fonction  $\alpha$  se traduisent directement sur la courbure de l'espace-temps. Par exemple, un espace de Robertson Walker de fibre euclidienne, associé à un facteur d'expansion strictement convexe est nécessairement de courbure scalaire négative. Autre exemple : à un facteur d'expansion polynomial sur  $\mathbb{R}^+$  est associé un espace-temps dont la courbure tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

4. Il y a toujours des exceptions : l'espace de de Sitter ne vérifie pas cette condition.

5. Le terme singularité est ici à prendre au sens d'incomplétude géodésique.

Par ailleurs, les hypothèses physiques naturelles portant sur le tenseur de Ricci comme la condition forte sur l'énergie introduite ci-dessus, induisent des contraintes sur le facteur d'expansion. Par exemple, en regardant simplement la composante  $R_{00}$  du tenseur de Ricci, on voit que si un espace de Robertson-Walker satisfait cette condition, nécessairement, le facteur d'expansion qui lui est associé est une fonction concave :  $\alpha'' \leq 0$ .

## 2.2 Espaces de Robertson-Walker et fluides parfaits

Dans l'interprétation physique des espaces de Robertson-Walker, la coordonnée  $t \in I$  joue le rôle d'un temps absolu, appelé *temps cosmique*, qui mesure l'âge de l'univers. L'origine des temps  $t = 0$  correspond au Big-Bang dans la théorie du même nom. La fibre  $M$  décrit quant à elle la géométrie spatiale de notre univers. Celui-ci peut être infini : lorsque  $T = +\infty$ ,  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$  par exemple, ou clos lorsque  $T < +\infty$  et  $M = \mathbb{S}^3$ . La fonction de torsion permet de modéliser l'expansion/contraction de l'univers lorsque celui "vieillit". Par exemple, une fonction de torsion  $\alpha(t)$  définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ , qui croît avec  $t$  modélise un univers éternel en expansion. Une fonction de type sinusoïdal sur une demi période, issue de zéro, qui croît vers un maximum puis décroît vers zéro décrit un univers qui croît puis s'effondre sur lui-même (Big-Crunch).

Remarque II.9 — Si  $\xi = (t, x) \in \mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  est un point d'un espace de Robertson-Walker, selon qu'on adopte un point de vu plutôt géométrique ou physique, la coordonnée  $t = \pi_I(\xi)$  est appelée plus volontier composante de base ou composante temporelle de  $\xi$ . De même, la coordonnée  $x = \pi_M(\xi)$  est désignée par composante de la fibre ou composante spatiale. Dans la suite, nous adopterons l'un ou l'autre des points de vue selon le contexte.

Nous rappelons ici que dans un espace de Robertson-Walker, le tenseur énergie-impulsion défini de facto par les équations d'Einstein, est naturellement associé à un fluide parfait dont les densités de pression et d'énergie s'expriment simplement comme des fonctions du facteur d'expansion  $\alpha$ .

**Définition II.4** — Soit  $\mathcal{M}$  une variété lorentzienne et soit  $T_{\mu\nu}$  le tenseur énergie-impulsion défini par les équations d'Einstein (II.8) sur  $\mathcal{M}$ . On dit que  $T_{\mu\nu}$  est associé à un fluide parfait s'il existe un triplet  $(U, \mathfrak{p}, \mathfrak{q})$  tel que

$$T_{\mu\nu} := (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})U_{\mu}U_{\nu} + \mathfrak{p}g_{\mu\nu},$$

où

- $U$  est un champ de vecteurs unitaires orientés vers le futur sur  $\mathcal{M}$  ;
- les fonctions  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  sont des fonctions scalaires sur  $\mathcal{M}$ .

Physiquement, le champ de vecteurs  $U^\mu$  représente la quadri-vitesse du fluide. Les fonctions  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$  représentent quant à elles les densités d'énergie et de pression du fluide respectivement. Dans le référentiel où le fluide est au repos, le champ  $U^\mu$  s'écrit  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$  et le tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{p} g_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

**Proposition II.4** ([O'N83]) — Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker et  $U = \partial_t$  le champ de vecteur associé au temps cosmique  $t$ . Considérons les fonctions de densité d'énergie et de pression définies par

$$8\pi\mathbf{q}/3 := \left( \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right), \quad -8\pi\mathbf{p} := \left( \frac{2\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right), \quad (\text{II.10})$$

alors le tenseur  $T_{\mu\nu}$  défini par les équations d'Einstein (II.9) s'écrit

$$T_{\mu\nu} = (\mathbf{p} + \mathbf{q})U_\mu U_\nu + \mathbf{p} g_{\mu\nu}.$$

*Démonstration.* Dans la carte  $\xi^\mu = (t, \chi, \phi, \psi)$  introduite au paragraphe 1.2.3, les seules composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont les composantes diagonales :

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right), \quad G_{11} = -(2\alpha\alpha'' + \alpha'^2 + k),$$

$$G_{22} = -(2\alpha\alpha'' + \alpha'^2 + k)f^2(\chi), \quad G_{33} = -(2\alpha\alpha'' + \alpha'^2 + k)f^2(\chi) \sin^2(\phi).$$

Un calcul direct permet de conclure.  $\square$

En fonction des densités de pression et d'énergie  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , dans un espace de Robertson-Walker, le tenseur de Ricci s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{00} &= T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} + 3\mathbf{p}), \\ R_{11} &= T_{11} - \frac{1}{2}Tg_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \\ R_{22} &= T_{22} - \frac{1}{2}Tg_{22} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p})f^2(\chi), \\ R_{33} &= T_{33} - \frac{1}{2}Tg_{33} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p})f^2(\chi) \sin^2(\phi). \end{aligned}$$

Lorsque les physiciens modélisent l'univers, ils cherchent bien entendu à rendre compte des propriétés de la matière, et émettent naturellement des hypothèses sur sa densité d'énergie et de pression. Ces densités s'expriment

en fonction du facteur d'expansion  $\alpha$ , implicitement, ils font donc des hypothèses sur celui-ci. Par exemple, si l'on suppose que la géométrie spatiale de l'univers est hyperbolique ( $k = -1$ ) et que la densité d'énergie est positive  $\mathfrak{q} \geq 0$ , implicitement on suppose que le facteur d'expansion vérifie  $\alpha' \geq 1$ , *i.e.*  $\alpha$  est surlinéaire.

Une hypothèse couramment admise est la positivité des densités d'énergie et de pression :  $\mathfrak{q} \geq 0$  et  $\mathfrak{p} \geq 0$ . Quelque soit la nature de la fibre  $M$ , si l'on suppose que les densités d'énergie et de pression sont toutes deux positives, alors on a  $R_{00} = 1/2(\mathfrak{q} + 3\mathfrak{p}) \geq 0$ . D'après l'expression de  $R_{00}$ , on a donc nécessairement  $\alpha'' \leq 0$ , *i.e.* la facteur d'expansion est une fonction concave. On retrouve ainsi la même condition de convexité que celle liée à la condition forte sur l'énergie.

## 2.3 Quelques modèles cosmologiques usuels

Dans ce paragraphe, en précisant les équations d'état couplant les densités d'énergie et de pression dans le fluide dans différents régimes, nous exhibons les solutions exactes des équations d'Einstein (II.8) et (II.9) les plus fréquemment utilisées en cosmologie. La première équation de (II.10) et l'équation  $R_{00} = 1/2(\mathfrak{q} + 3\mathfrak{p})$  sont connues sous le nom d'équations de Friedmann. Pour obtenir des solutions explicites aux équations d'Einstein, il faut préciser une équation d'état couplant les densités d'énergie et de pression. La plupart des modèles utilisés en cosmologie sont gouvernés par des équations d'état du type  $\mathfrak{p} = w \times \mathfrak{q}$ , où  $w$  est une constante indépendante du temps  $t$ .

### 2.3.1 Modèles sans constante cosmologique

Lorsque  $w = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathfrak{p} = 0$ , le modèle cosmologique décrit un espace que l'on dit *dominé par la matière*. On vérifie facilement que dans ce cas, la densité d'énergie  $\mathfrak{q}$  est proportionnelle à  $\alpha(t)^{-3}$ . Si l'on pose  $C := (8\pi/3) \times \mathfrak{q} \alpha^3 \equiv cste$ , lorsque la fibre  $M$  est euclidienne, le facteur d'expansion solution des équations d'Einstein est  $\alpha(t) = (9C/4)^{1/3} t^{2/3}$ . Dans les cas hyperbolique et sphérique, les graphes  $(t, \alpha(t))$  sont des cycloïdes qui s'expriment facilement comme des courbes paramétrées par un scalaire  $\lambda$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{C}{2} (\cosh \lambda - 1) \\ t = \frac{C}{2} (\sinh \lambda - \lambda) \end{array} \right. \quad \text{lorsque } k = -1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{C}{2} (1 - \cos \lambda) \\ t = \frac{C}{2} (\lambda - \sin \lambda) \end{array} \right. \quad \text{lorsque } k = 1.$$

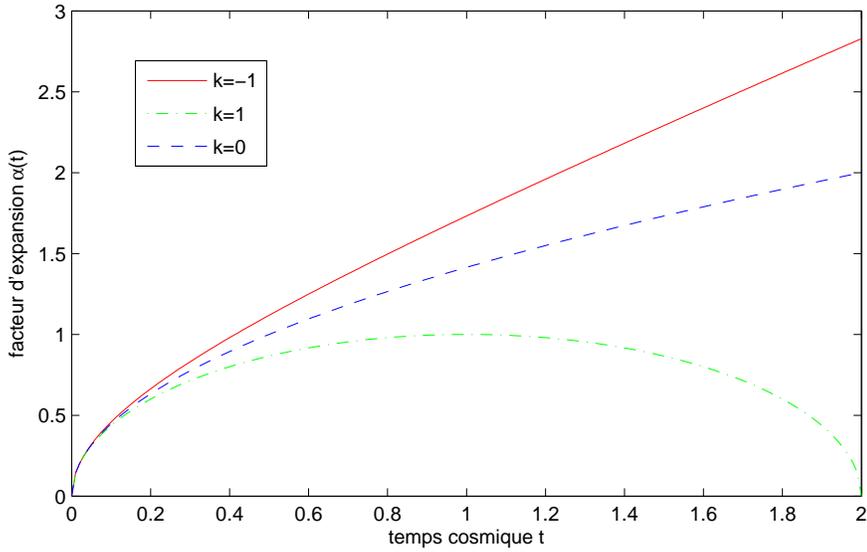


FIGURE 16: Expansion dans les modèles dominés par la matière.

Parmi ces trois premiers exemples, les fonctions de torsion correspondant aux fibres euclidiennes et hyperboliques décrivent un univers éternel en expansion, la fonction de torsion associée à une fibre sphérique décrit quant à elle un phénomène de Big-Crunch, *i.e.* un univers qui s'effondre sur lui-même en un temps fini. On vérifie facilement que dans ces trois exemples, le facteur d'expansion est une fonction concave.

Dans le cas où la constante  $w$  vaut  $1/3$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{p} = \mathbf{q}/3$ , le modèle cosmologique décrit un univers dit *dominé par les radiations*. Cette fois, la densité d'énergie  $\mathbf{q}$  est proportionnelle à  $\alpha(t)^{-4}$ . On pose maintenant  $C := (8\pi/3) \times \mathbf{q} \alpha^4 \equiv cste$ . Dans le cas d'un fibre euclidienne, le facteur d'expansion solution des équations d'Einstein est donné par :

$$\alpha(t) = (4C)^{1/4} t^{1/2}.$$

Dans le cas hyperbolique, on montre que  $\alpha$  s'écrit :

$$\alpha(t) = \sqrt{C} \left( \left(1 + t/\sqrt{C}\right)^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

Enfin, dans le cas sphérique, on trouve

$$\alpha(t) = \sqrt{C} \left( 1 - \left(1 - t/\sqrt{C}\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Dans ces trois nouveaux exemples, le facteur d'expansion est toujours une fonction concave.

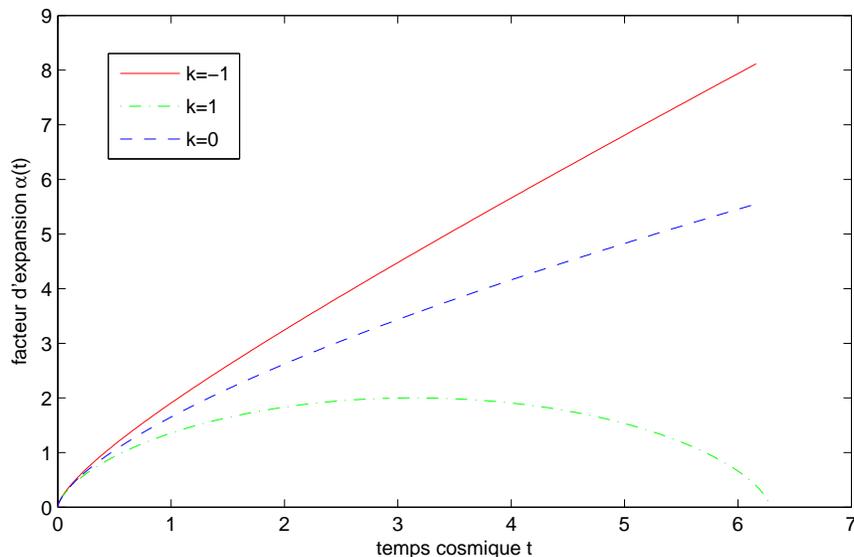


FIGURE 17: Expansion dans les modèles dominés par les radiations.

### 2.3.2 Modèles avec constante cosmologique

Nous nous intéressons maintenant aux modèles cosmologiques les plus célèbres, solutions des équations d'Einstein avec constante cosmologique. Le fait d'ajouter une constante cosmologique aux équations d'Einstein est équivalent à attribuer de l'énergie au vide. En effet, si l'on pose

$$T_{\mu\nu}^{(v)} := -\frac{\Lambda}{8\pi}g_{\mu\nu},$$

les équations (II.8) se réécrivent :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^{(v)}).$$

Les deux modèles envisagés ici ne contiennent pas de matière en dehors de celle "cachée" dans la constante cosmologique, ils sont dits *dominés par le vide*; le tenseur  $T_{\mu\nu}^{(v)}$  est alors naturellement associé à un fluide parfait où les densités d'énergie et de pression vérifient

$$\mathbf{q} = -\mathbf{p} = -\frac{\Lambda}{8\pi}.$$

L'équation d'état couplant énergie et pression est donc à nouveau de la forme  $\mathbf{p} = w \times \mathbf{q}$  avec  $w = -1$ . Là encore, on peut déterminer les facteurs d'expansion solutions des équations de Friedmann. Si  $\Lambda < 0$ , la seule valeur possible pour la courbure est  $k = -1$  et le facteur d'expansion est donné par

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sin \left( \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t \right). \quad (\text{II.11})$$

Lorsque  $\Lambda > 0$ , les solutions sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(t) = cste \times \exp \left( \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) & \text{lorsque } k = 0, \\ \alpha(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) & \text{lorsque } k = -1, \\ \alpha(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) & \text{lorsque } k = 1. \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

L'espace-temps obtenu lorsque le facteur d'expansion est donné par l'équation (II.11) est connu sous le nom d'espace anti de Sitter. Les différents choix de facteurs d'expansion du système (II.12) conduisent tous au même espace-temps, appelé l'espace de de Sitter, vu dans différents systèmes de coordonnées. A titre d'exemple, nous donnons plus bas les changements de coordonnées permettant de passer du facteur d'expansion obtenu lorsque  $k = 0$  à celui obtenu avec  $k = 1$ .

Remarque II.10 — Parmi les espaces de Robertson-Walker que nous présentons ici à titre d'exemples et qui sont les espaces les plus fréquemment utilisés en cosmologie, l'espace de de Sitter est le seul dont le facteur d'expansion n'est pas une fonction concave. En revanche, c'est une fonction *log*-concave au sens large puisque  $\log(\alpha)'' = 0$  lorsque  $\alpha(t) = e^t$ .

L'espace-temps de de Sitter de dimension  $d$ , noté  $dS_d$ , est défini comme une hypersurface de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d}$  de dimension  $d+1$ . Son équation est la suivante :

$$dS_d = \{x \in \mathbb{R}^{1,d}, \quad |x^0|^2 - |x^1|^2 - |x^2|^2 - \dots - |x^d|^2 = -1\}.$$

On munit cette surface de la pseudo-métrique induite par celle de  $\mathbb{R}^{1,d}$ .

$$ds^2 = [|dx^0|^2 - |dx^1|^2 - |dx^2|^2 - \dots - |dx^d|^2] |_{dS_d}.$$

Dans le système de coordonnées global  $x^0 = \sinh(t)$ ,  $x^i = \cosh(t)\omega^i$  pour  $i = 1, 2, \dots, d$ , avec  $|\omega^1|^2 + |\omega^2|^2 + \dots + |\omega^d|^2 = 1$ , les hypersurfaces de temps constant, *i.e.*, les intersections de la variété avec les plans d'équation  $x^0 = \sinh(t)$  sont des sphères homéomorphes à  $\mathbb{S}^{d-1}$  et la pseudo-métrique est donnée par la formule  $ds^2 = dt^2 - \cosh(t)^2 d\omega^2$ . Lemaître a introduit un autre système de coordonnées, dites horocycliques, sur  $dS_d$  :  $y^0 = \sinh(t) + \frac{1}{2} e^t \mathbf{x}^2$ ,  $y^i = e^t x^i$ ,  $y_d = \cosh(t) - \frac{1}{2} e^t \mathbf{x}^2$  avec  $\mathbf{x}^2 = |x^1|^2 + \dots + |x^{d-1}|^2$ . Dans cette carte, les hypersurfaces de temps constant sont les intersections de la variété avec les plans d'équation  $y^0 + y^d = e^t$ , la carte n'est donc valable que sur le domaine  $y^0 + y^d > 0$ . D'autre part, on vérifie facilement que l'élément de longueur est donné par  $ds^2 = dt^2 - e^{2t} d\mathbf{x}^2$ . Les facteurs d'expansion  $\alpha(t) = \cosh(t)$  lorsque  $k = 1$  et  $\alpha(t) = \exp(t)$  lorsque  $k = 0$  sont donc bien tous les deux associés à l'espace de de Sitter.

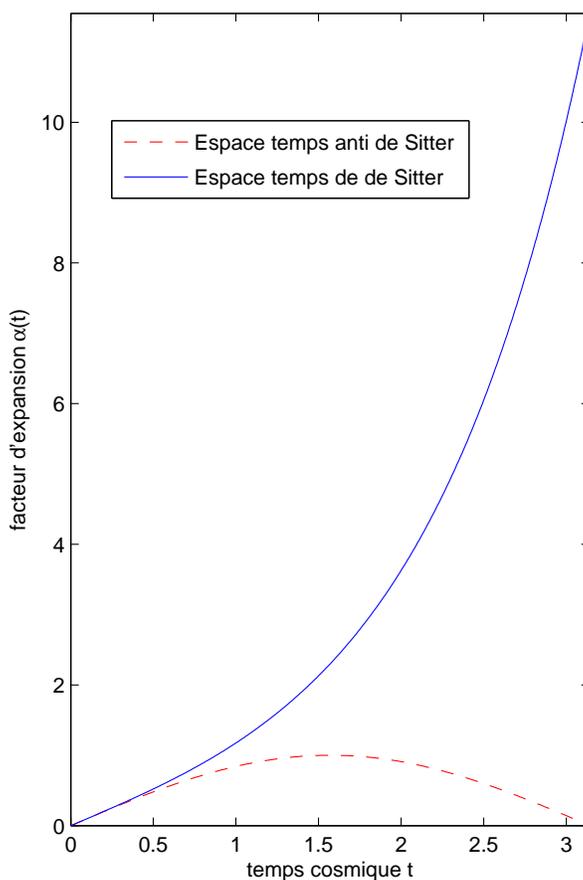


FIGURE 18: Expansion dans les modèles dominés par le vide.

### 2.3.3 Une remarque concernant l'espace anti de Sitter

On souhaite ici mettre en évidence le fait que l'espace anti de Sitter ne possède que localement une structure d'espace de Robertson-Walker. Considérons l'espace  $\mathbb{R}^{2,n-1} = \{(x_0, x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ , muni de la métrique

$$ds^2 = -|dx^0|^2 - |dx^n|^2 + |dx^1|^2 + \dots + |dx^{n-1}|^2.$$

On rappelle que l'espace anti de Sitter  $AdS_n$  de dimension  $n$  est défini comme l'hypersurface dans  $\mathbb{R}^{2,n-1}$  d'équation

$$-|x^0|^2 - |x^n|^2 + |x^1|^2 + \dots + |x^{n-1}|^2 = -1,$$

et munie de la métrique induite. On peut munir  $AdS_n$  d'un système de coordonnées globales, en posant :

$$x^0 = \cosh(r) \cos(t), \quad x^n = \cosh(r) \sin(t), \quad x^i = \sinh(r) \times \theta,$$

pour  $1 \leq i \leq n-1$ , où  $r \geq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $\theta$  décrit la sphère  $\mathbb{S}^{n-2}$ . Dans ce système de coordonnées, la métrique de l'espace  $AdS_n$  est donnée par :  $ds^2 = -\cosh^2(r)dt^2 + dr^2 + \sinh^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-2}}$ . La figure suivante permet de se faire une idée géométrique de l'espace anti de Sitter, ainsi que de l'allure des géodésiques radiales, c'est-à-dire telles que  $\theta = cste$ , qui sont données par

$$t = t_0 \pm 2 \left( \arctan \left( \frac{\cosh(r) - 1}{\cosh(r) + 1} \right) - \arctan \left( \frac{\cosh(r_0) - 1}{\cosh(r_0) + 1} \right) \right).$$

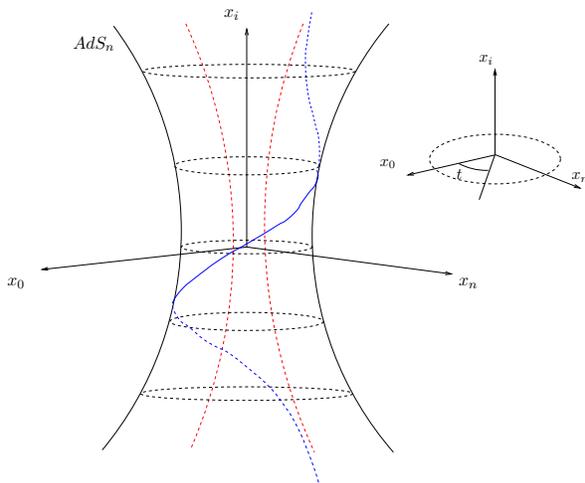


FIGURE 19: Géodésiques radiales dans l'espace anti de Sitter.

Dans une carte privilégiée, non globale, la métrique de l'espace anti de Sitter  $AdS_n$  est celle d'un espace de Robertson-Walker. En effet, si l'on restreint  $x_0$  à l'intervalle  $[-1, 1]$  et si l'on pose

$$\begin{aligned} x^0 &= \cos(T), \\ x^n &= \sin(T)X^n, \\ x^i &= \sin(T) \times X^i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

où  $|X^n|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} |X^i|^2 = 1$ , la métrique de l'espace anti de Sitter est bien celle d'un espace de Robertson-Walker puisqu'elle s'écrit alors :

$$ds^2 = -dT^2 + \sin^2(T)g_{\mathbb{H}^3}.$$

En revanche la structure globale de l'espace anti de Sitter n'est pas celle d'un produit tordu.

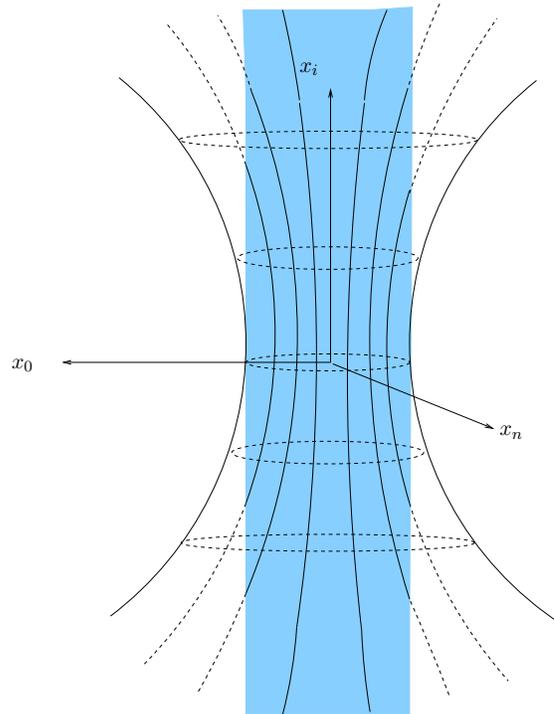


FIGURE 20: Un domaine de  $AdS_n$  vu comme un espace de Robertson-Walker.

### 3 ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE ROBERTSON-WALKER

Nous donnons ici quelques éléments de géométrie des espaces de Robertson-Walker. Du fait de leur structure de produit tordu, de l'homogénéité et de l'isotropie de leurs fibres, ces espaces possèdent de nombreuses symétries et leur géométrie est en un sens relativement simple. Par exemple, on peut y intégrer explicitement les équations géodésiques, ce qui fait l'objet du prochain chapitre. Cependant la liberté laissée dans le choix de la fonction de torsion  $\alpha$  permet d'envisager une très grande variété de situations, de sorte que la géométrie des espaces de Robertson-Walker est tout à fait non triviale en toute généralité.

Nous mentionnons dans les deux prochains paragraphes quelques résultats concernant les espaces de courbure constante, puis les hypersurfaces remarquables des espaces de Robertson-Walker. Outre l'intérêt propre de ces résultats, ils ont le mérite de mettre en évidence le rôle joué par la fonction de torsion  $\alpha$  dans la géométrie de l'espace produit. Les résultats des paragraphes 3.1 et 3.2, ainsi que les considérations physiques de la section 2, nous permettront dans la section 4 de formuler des hypothèses raisonnables sur le facteur d'expansion  $\alpha$ , hypothèses que nous adopterons aux chapitres III et suivants.

#### 3.1 Espaces de Robertson-Walker et variétés d'Einstein

Parmi les espaces de Robertson-Walker  $(\mathcal{M}, g) = (I \times M, -dt^2 \oplus \alpha^2 g^M)$  se distinguent ceux qui sont des variétés d'*Einstein*, c'est-à-dire ceux dont le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique. Nous avons déjà vu que dans le système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, \chi, \phi, \psi)$  introduit au paragraphe 1.2.3, les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont

$$R_{00} = -3\alpha''/\alpha, \quad R_{11} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k),$$

$$R_{22} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k)f^2(\chi), \quad R_{33} = (\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k)f^2(\chi)\sin^2(\phi).$$

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante sur le facteur d'expansion d'un espace de Robertson-Walker pour qu'il soit une variété d'Einstein.

**Proposition II.5** ([Sán99]) — *Un espace de Robertson-Walker  $I \times_\alpha M$  dont la fibre  $M$  est de courbure constante  $k \in \{0, -1, 1\}$  est une variété d'Einstein si et seulement si la fonction de torsion  $\alpha$  vérifie :*

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} \equiv c \quad \text{et} \quad \alpha(t)\alpha''(t) - \alpha'^2(t) \equiv k. \quad (\text{II.13})$$

*Démonstration.* Par définition, une variété pseudo-riemannienne est une variété d'Einstein s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $R_{\mu\nu} = c \times g_{\mu\nu}$ . Dans le cas d'un espace de Robertson Walker  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$ , la métrique et le tenseur de Ricci sont diagonaux. La condition de proportionnalité se traduit alors simplement en la conjonction des équations :

$$3\frac{\alpha''}{\alpha} = c, \quad \text{et} \quad \alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k = -c \times \alpha^2.$$

La seconde équation du système, en remplaçant  $\alpha''$  par  $c \times \alpha/3$ , s'écrit encore  $-2\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + 2k = 0$ , *i.e.*  $\alpha(t)\alpha''(t) - \alpha'^2(t) = k$ , d'où l'énoncé.  $\square$

Suivant les valeurs de la constante  $c$  et de la courbure  $k$ , les deux équations (II.13) se résolvent par les méthodes élémentaires d'intégration des équations différentielles ordinaires. Dans le tableau suivant, on donne la liste des différentes solutions possibles de l'équation (II.13) selon le signe de  $c$ . Le paramètre  $b$  qui apparaît dans le tableau est une constante arbitraire.

$c = a^2 > 0$	$k = 1$	$\alpha(t) = a^{-1} \times \cosh(at + b)$
$c = a^2 > 0$	$k = 0$	$\alpha(t) = \exp(at + b)$
$c = a^2 > 0$	$k = -1$	$\alpha(t) = a^{-1} \times \sinh(at + b)$
$c = 0$	$k = 0$	$\alpha(t) = \exp(b)$
$c = 0$	$k = -1$	$\alpha(t) = t + b$
$c = -a^2 < 0$	$k = -1$	$\alpha(t) = a^{-1} \times \cos(at + b)$

FIGURE 21: Les différentes solutions de l'équation (II.13) selon le signe de  $c$

## 3.2 Hypersurfaces remarquables

Une métrique pseudo-riemannienne  $g$  sur une variété  $\mathcal{M}$  n'induit pas, en général, une métrique pseudo-riemannienne sur une sous-variété de  $\mathcal{M}$ , mais possède des singularités. La métrique induite peut parfois être totalement dégénérée, c'est le cas par exemple de la métrique induite par la métrique usuelle sur le cône de lumière dans l'espace de Minkowski. Comprendre la structure des sous-variétés d'une variété lorentzienne, en particulier celles de genre espace, permet de mieux appréhender sa géométrie, d'autre part ces d'hypersurfaces jouent un rôle primordial en relativité (voir [Pen65, HP70]).

### 3.2.1 Sous-variétés lorentziennes

Commençons par donner le résultat suivant, très proche de la proposition II.1, qui dit en particulier que les sous-variétés lorentziennes totalement géodésiques d'un espace de Robertson-Walker ont elles aussi une structure de produit tordu.

**Théorème II.2** (théorème 5.2 de [CdV07]) — *Soit  $\mathcal{M} = L \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker qui ne contient aucun ouvert de courbure constante. Si  $N$  est une sous-variété lorentzienne totalement géodésique de  $\mathcal{M}$ , alors on est dans un des cas suivants :*

- *Si  $N$  est de dimension deux, alors  $N$  est un ouvert d'un produit  $L \times_{\alpha} C$  où  $C$  est une courbe géodésique dans  $M$  ;*
- *Si  $N$  est de dimension trois, alors  $N$  est un ouvert d'un produit  $L \times_{\alpha} S$  où  $S$  est une surface totalement géodésique dans  $M$ .*

### 3.2.2 Sous-variétés de genre espace

La théorème suivant relie l'existence d'hypersurfaces totalement géodésiques de genre espace dans un espace de Robertson-Walker à l'existence de point critique de la fonction de torsion.

**Théorème II.3** (théorème 5.1 de [CdV07]) — *Soit  $\mathcal{M} = L \times_{\alpha} M$  est espace de Robertson-Walker qui ne contient aucun ouvert de courbure constante. Alors  $\mathcal{M}$  admet une sous-variété de genre espace totalement géodésique de dimension supérieure ou égale à deux si et seulement si  $\alpha$  possède un point critique, i.e.*

$$\exists t_0 \in I, \quad \alpha'(t_0) = 0.$$

*De plus, les seules sous-variétés de genre espace totalement géodésiques de dimension supérieure ou égale à deux sont les fibres  $M_{t_0} = \{t_0\} \times M$  telles que  $\alpha'(t_0) = 0$  et les surfaces totalement géodésiques de ces fibres.*

Le prochain résultat concerne les hypersurfaces de genre espace de courbure moyenne constante dans les espace de Robertson-Walker (généralisés). Soit  $\Sigma$  une hypersurface de dimension  $n$  d'une variété pseudo-riemannienne de dimension  $n + 1$ . L'endomorphisme de Weingarten en un point  $p \in \Sigma$ ,  $A : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ , *i.e.* la différentielle de l'application de Gauss au point  $p$ , est un opérateur auto-adjoint dont les valeurs propres sont les courbures principales  $(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p))$ . La courbure moyenne de  $\Sigma$  au point  $p$  est alors définie par

$$K(p) = K_1(p) := -\frac{1}{n} \times \text{trace}(A) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i(p).$$

A l'aide des fonctions symétriques élémentaires

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

on définit  $K_\ell$  la courbure moyenne d'ordre  $\ell$  comme

$$C_n^\ell \times K_\ell(p) := \sigma_\ell(-\kappa_1(p), \dots, -\kappa_n(p)).$$

Considérons  $(\mathcal{M}, g) = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker (généralisé) dont la fibre  $M$  est compacte. On montre alors (cf. [AC07]) que les fibres spatiales  $M_t = \{t\} \times M$  forment un feuilletage de  $\mathcal{M}$  dont les feuilles ont une courbure moyenne d'ordre  $\ell$  constante, donnée par  $K_\ell = (\alpha'(t)/\alpha(t))^\ell$ . Il est naturel de se demander si, sous certaines conditions, ce résultat admet une réciproque. Autrement dit sous quelles conditions une hypersurface spatiale compacte de genre espace de  $\mathcal{M}$  et de courbure moyenne (de plus haut rang) constante est-elle du type  $M_t = \{t\} \times M$ ? La proposition suivante, dont on trouvera un énoncé plus général dans [AC07], apporte une réponse particulièrement élégante à cette question en terme de convexité du facteur d'expansion.

**Proposition II.6** (corollaire 5.2 de [AC07]) — *Soit  $\mathcal{M} = L \times_\alpha M^n$  espace de Robertson-Walker (généralisé) tel que*

$$\alpha\alpha'' - \alpha'^2 \leq 0$$

*i.e. la fonction  $\alpha$  est log-concave. Les seules hypersurfaces compactes de genre espace incluses dans  $\mathcal{M}$  telles que  $K_2 > 0$  et telles que le rapport  $K_2/K_1$  est constant sont les fibres  $M_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$  où  $\alpha'(t_0) \neq 0$ .*

D'autres résultats de [AC07], "suffisamment" géométriques ou techniques pour ne pas avoir leur place ici, montrent que la condition de log-concavité de la fonction de torsion est une hypothèse naturelle pour assurer que les fibres  $M_{t_0} = \{t_0\} \times M^n$  sont les seules hypersurfaces spatiales dans les espaces de Robertson-Walker (Texas-Ranger).

## 4 HYPOTHÈSES SUR LE FACTEUR D'EXPANSION

Dans cette section, nous mettons en évidence les hypothèses concernant la fonction de torsion  $\alpha$  que nous adopterons dans toute la suite. Ces hypothèses sont assez peu restrictives et sont de plusieurs natures : régularité, intégrabilité, convexité, etc. En particulier, elles sont satisfaites dans tous les exemples d'espaces de Robertson-Walker évoqués dans ce chapitre.

### 4.1 Formulation des hypothèses

#### 4.1.1 Régularité

En explicitant les tenseurs usuels dans les espaces de Robertson-Walker, on a vu apparaître naturellement les dérivées première et seconde du facteur d'expansion. Pour éviter que ces tenseurs ne présentent d'éventuelles singularités, on impose la régularité  $C^2$  au facteur d'expansion :

**Hypothèse 1** — Le facteur d'expansion  $\alpha$  appartient à  $C^2(]0, T[, \mathbb{R}_+^*)$ .

La fonction  $\alpha$  étant de classe  $C^2$ , on peut introduire sa dérivée logarithmique, dont on verra plus loin qu'elle joue un rôle important dans le comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker.

**Définition II.5** — On appelle *fonction de Hubble* la dérivée logarithmique du facteur d'expansion  $\alpha$  :

$$H : ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t) := \frac{d \log(\alpha(t))}{dt} = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}.$$

Remarque II.11 — Physiquement, la fonction de Hubble décrit le taux d'expansion d'un univers modélisé par un espace de Robertson-Walker. On appelle généralement *constante de Hubble* la valeur de cette fonction au temps cosmique  $t_0$  qui est l'âge actuel présumé de notre univers.

#### 4.1.2 Convexité

Dans la section 2, on a vu que la plupart des espaces de Robertson-Walker utilisés en cosmologie pour décrire un univers en expansion sont associés à des fonctions de torsion concaves. On a vu d'autre part que la concavité du facteur d'expansion est une condition nécessaire si l'on suppose que les espaces en question vérifient la condition forte sur l'énergie, ou encore la positivité des densités d'énergie et de pression. Seul un seul exemple donné dans ce chapitre échappe à cette condition : l'espace de de Sitter, où le

facteur d'expansion est une fonction simplement log-concave. Par ailleurs, nous avons vu dans le paragraphe 3.2 que la condition de log-concavité de la fonction de torsion est une condition géométrique naturelle : elle permet d'assurer que les fibres  $M_t = \{t\} \times M$  sont les seules hypersurfaces de courbure moyenne constante. Nous formulons donc l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 2** — La fonction  $\alpha$  est log-concave sur  $]0, T[$ , ou de manière équivalente, la fonction de Hubble  $H$  est décroissante sur  $]0, T[$ .

La fonction  $H$  étant décroissante, elle converge dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  lorsque  $t$  tend vers  $T$ . Afin de garder une intuition “physique” des espaces de Robertson-Walker, nous allons nous limiter aux deux larges classes d'espace-temps utilisés en cosmologie, à savoir ceux qui décrivent un univers éternel en expansion, et ceux qui décrivent un univers dans lequel un Big-Crunch succède au Big-Bang.

**Hypothèse 3** — Les espaces de Robertson-Walker considérés dans la suite appartiennent à l'un des deux types suivants

- $T = +\infty$  et  $H$  est positive ou nulle sur  $]0, +\infty[$  (expansion éternelle) ;
- $T < +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow T} \alpha(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow T} H(t) = -\infty$  (Big-Crunch).

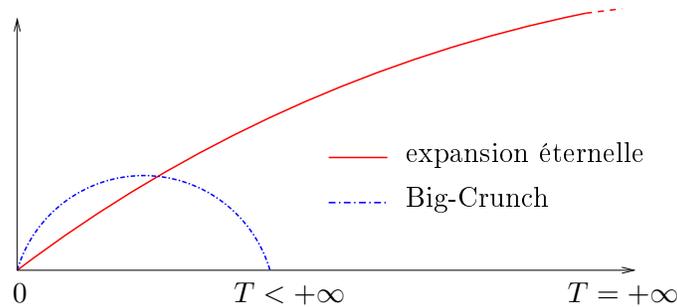


FIGURE 22: Les deux types de facteur d'expansion envisagés.

Comme les espaces de Robertson-Walker sont fréquemment utilisés en cosmologie, nous les désignerons souvent par le terme *univers*, bien que la pertinence physique de la suite du manuscrit soit tout à fait discutable. Par ailleurs, afin d'éviter certaines lourdeurs dans les énoncés de nos résultats, et afin de les rendre un peu plus fleuris, nous introduisons les deux notions suivantes.

**Définition II.6** — Lorsque  $T < +\infty$ , nous dirons que l'univers est *mortel*. Lorsque  $T = +\infty$ , nous dirons que l'univers est *éternel*.

### 4.1.3 Intégrabilité

Dans l'étude des géodésiques des espaces de Robertson-Walker au prochain chapitre, nous verrons que les composantes spatiales des géodésiques sont des courbes géodésiques de la fibre  $M$ , paramétrées par une primitive de l'inverse de la fonction de torsion  $\alpha$ . La diffusion de Franchi et Le Jan étant une perturbation du flot géodésique, une hypothèse minimale pour pouvoir travailler sereinement dans la suite est d'imposer l'intégrabilité locale de l'inverse du facteur d'expansion.

**Hypothèse 4** — L'inverse du facteur d'expansion est localement intégrable sur l'intervalle  $]0, T[$  :

$$\int_a^b \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty, \quad \forall a, b \in ]0, T[.$$

### 4.1.4 Comportement asymptotique

Nous verrons dans la suite que les comportements asymptotiques au voisinage de  $T$  du facteur d'expansion et de la fonction de Hubble jouent un rôle déterminant dans l'asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan. En particulier, la vitesse de divergence du facteur d'expansion dans un univers éternel ou sa vitesse de convergence vers zéro dans un univers mortel sont déterminantes. Pour quantifier cette vitesse de divergence / convergence, nous introduisons le vocabulaire suivant.

**Définition II.7** — Dans un univers éternel, *i.e.* lorsque  $T = +\infty$ , nous dirons que l'expansion est

$$\textit{rapide} \text{ si } \int_{\cdot}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty, \quad \text{et } \textit{lente} \text{ si } \int_{\cdot}^{+\infty} \frac{dt}{\alpha(t)} = +\infty.$$

De la même façon, dans un univers mortel, *i.e.* lorsque  $T < +\infty$ , nous dirons que l'effondrement est

$$\textit{lent} \text{ si } \int_{\cdot}^T \frac{dt}{\alpha(t)} < +\infty, \quad \textit{rapide} \text{ si } \int_{\cdot}^T \frac{dt}{\alpha(t)} = +\infty.$$

**Définition II.8** — Dans un univers éternel *i.e.* lorsque  $T = +\infty$ , nous dirons que l'expansion est *exponentielle* ou que le facteur d'expansion est à croissance exponentielle si la fonction de Hubble admet une limite strictement positive au voisinage de l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) > 0.$$

Nous dirons que l'expansion est *polynomiale* ou que le facteur d'expansion est à croissance polynomiale s'il existe une constante  $0 \leq c < +\infty$ , telle que lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$H(t) \times t \longrightarrow c.$$

De manière analogue, dans un univers mortel *i.e.* lorsque  $T < +\infty$ , nous dirons que l'effondrement est *polynomial* ou que le facteur d'expansion est à décroissance polynomiale s'il existe une constante  $0 \leq c < +\infty$ , telle que lorsque  $t$  tend vers  $T$  :

$$-H(t) \times (T - t) \longrightarrow c.$$

Si  $-H(t) \times (T - t)$  croît vers l'infini lorsque  $t$  tend vers  $T$ , nous dirons que l'effondrement est exponentiel ou que  $\alpha$  est à décroissance exponentielle.

Remarque II.12 — Naturellement, si  $\alpha$  est un polynôme de degré  $c$ , alors  $H(t) \times t$  tend vers  $c$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Cependant, un facteur d'expansion de type polynomial n'est bien entendu pas forcément un polynôme, par exemple la fonction  $\alpha(t) = t^2 \log(t)$  est polynomiale avec  $c = 2$ . De la même façon, la fonction  $\alpha(t) = \exp(t)$  est bien sûr à croissance exponentielle, tout comme la fonction  $\alpha(t) = t \exp(t)$ .

**Hypothèse 5** — Les facteurs d'expansion considérés sont soit à croissance ou décroissance polynomiale, soit croissance ou décroissance exponentielle.

4.2 Résumé des hypothèses concernant le facteur d'expansion  $\alpha$ 

Facteur d'expansion	Fonction de Hubble	univers	expansion / effondrement
$\alpha \in C^2(]0, T[, \mathbb{R}_+^*)$	$H = \frac{\alpha'}{\alpha}$	<u>éternel</u> , $T = +\infty$	<u>rapide</u> : $\int^{+\infty} 1/\alpha < +\infty$
$1/\alpha \in \mathbb{L}_{loc}^1(]0, T[)$	décroissante	$H_\infty := \lim_{+\infty} H \geq 0$	<u>lente</u> : $\int^{+\infty} 1/\alpha = +\infty$
croissance/décroissance polynomiale ou exp.		<u>mortel</u> , $T < +\infty$ ,	<u>rapide</u> : $\int^T 1/\alpha = +\infty$
		$\lim_T \alpha = 0, \lim_T H = -\infty$	<u>lent</u> : $\int^T 1/\alpha < +\infty$

### 4.3 Retour sur les exemples

Modèle	facteur d'expansion	type d'exp./eff.	fonction de Hubble	$\lim H(t) \times t$ ?
$w = 0, k = 0$	$\alpha(t) = t^{2/3}$	exp. lente	$H(t) = 2/3t$	$H(t) \times t \rightarrow 2/3$
$w = 0, k = 1$	$\alpha = 1 - \cos(\lambda)$ $t = \lambda - \sin(\lambda)$	eff. lent	$H = \frac{\sin(\lambda)}{(1 - \cos(\lambda))^2}$	$H(t) \times (2\pi - t) \rightarrow -2/3$
$w = 0, k = -1$	$\alpha = \cosh(\lambda) - 1$ $t = \sinh(\lambda) - \lambda$	exp. lente	$H = \frac{\sinh(\lambda)}{(\cosh(\lambda) - 1)^2}$	$H(t) \times t \rightarrow 1$
$w = 1/3, k = 0$	$\alpha(t) = t^{1/2}$	exp. lente	$H(t) = 1/2t$	$H(t) \times t \rightarrow 1/2$
$w = 1/3, k = 1$	$\alpha(t) = \sqrt{1 - (1 - t)^2}$	eff. lent	$H(t) = \frac{(1-t)}{t(2-t)}$	$H(t) \times (2 - t) \rightarrow -1/2$
$w = 1/3, k = -1$	$\alpha(t) = ((1 + t)^2 - 1)^{1/2}$	exp. lente	$H(t) = \frac{(1+t)}{t(2+t)}$	$H(t) \times t \rightarrow 1$
$w = -1, k = -1$	$\alpha(t) = \sin(t)$	eff. rapide	$H(t) = \cot(t)$	$H(t) \times (2\pi - t) \rightarrow -1$
$w = -1, k = 1$	$\alpha(t) = \cosh(t)$	exp. rapide	$H(t) = \coth(t)$	$H(t) \times t \rightarrow +\infty$



# Étude des géodésiques dans les espaces de Robertson-Walker

---

---

### Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Connexité et complétude des géodésiques . . . . .</b>	<b>130</b>
1.1	Connexité de géodésiques . . . . .	130
1.2	Complétude des géodésiques . . . . .	131
<b>2</b>	<b>Intégration des géodésiques de genre temps . . . . .</b>	<b>132</b>
2.1	Intégrales premières des géodésiques . . . . .	132
2.2	Intégration des équations géodésiques . . . . .	133
<b>3</b>	<b>Intégration des géodésiques de lumière . . . . .</b>	<b>136</b>
3.1	Intégrales premières des géodésiques . . . . .	136
3.2	Intégration des équations géodésiques . . . . .	137
<b>4</b>	<b>Asymptotique et prolongement des géodésiques . . . . .</b>	<b>139</b>
4.1	Asymptotique des géodésiques de lumière . . . . .	139
4.2	La notion de frontière causale . . . . .	141
4.3	Prolongement lorsque l'effondrement est lent . . . . .	145
4.4	Et lorsque l'effondrement est rapide ? . . . . .	150

---

L'étude des géodésiques dans les espaces de Robertson-Walker aurait tout à fait sa place dans le chapitre précédent consacré à leur géométrie. Pour plusieurs raisons, nous choisissons ici de mettre en évidence cette étude en lui consacrant un chapitre particulier. Parmi ces raisons, la première est que, comme on l'a vu au chapitre I, le générateur de la diffusion relativiste est une perturbation du flot géodésique. Une bonne compréhension du comportement asymptotique de la diffusion passe naturellement par une bonne compréhension préalable du comportement asymptotique des géodésiques. Par ailleurs, au regard de la conjecture de Franchi et Le Jan énoncée précédemment, on s'attend à voir apparaître un lien entre le comportement asymptotique de la diffusion et celui des géodésiques de lumière, d'où l'importance de mettre ce dernier en évidence.

# 1 CONNEXITÉ, COMPLÉTUDE DES GÉODÉSIIQUES DANS LES ESPACES DE ROBERTSON-WALKER

Dans cette première section, nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes portant sur le facteur d'expansion  $\alpha$  d'un espace de Robertson-Walker afin que celui-ci soit géodésiquement connexe ou complet.

## 1.1 Connexité de géodésiques

Rappelons que l'on dit qu'une variété pseudo-riemannienne est *géodésiquement connexe* si deux points quelconques de la variété peuvent être joints par un chemin géodésique.

**Théorème III.1** (théorème 3.2 de [Sán98]) — *Un espace de Robertson-Walker (généralisé)  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $I = ]0, T[$  est géodésiquement connexe si et seulement*

$$\int_0^{\cdot} \frac{1}{\alpha} = \int_{\cdot}^T \frac{1}{\alpha} = +\infty,$$

*Démonstration.* On trouvera une preuve détaillée de ce résultat dans l'article [Sán98], consacré à l'étude des géodésiques dans les espaces de Robertson-Walker généralisés. Afin de comprendre en quoi la condition d'intégrabilité de l'inverse du facteur d'expansion intervient ici, mentionnons simplement le résultat suivant, qui sera démontré dans les sections 2 et 3 : lorsque les intégrales dans le théorème ci-dessus sont finies, la projection  $x_s$  sur la fibre  $M$  d'une géodésique  $\xi_s = (t_s, x_s) \in I \times_{\alpha} M$  issue d'un point  $(t_0, x_0)$ , converge vers un point  $x_{\infty}$  de la fibre  $M$ . De plus la distance entre  $x_0$  et  $x_{\infty}$  est bornée par la constante  $d_{max} := \int_0^T 1/\alpha$ . De fait, tout point  $(t'_0, x'_0)$  de  $I \times_{\alpha} M$  tel que  $x'_0$  est situé à une distance strictement supérieure à  $d_{max}$  du point  $x_0$  ne peut être relié à  $(t_0, x_0)$  par une géodésique.  $\square$

Remarque III.1 — Pour la première fois intervient ici la condition d'intégrabilité de l'inverse du facteur d'expansion. Nous verrons dans la suite que cette condition joue un rôle primordial dans la géométrie des espaces de Robertson-Walker, ainsi que dans le comportement asymptotique de la diffusion de Franchi et Le Jan sur ces espaces. Comme la courbure des espaces de Robertson-Walker est directement liée à la fonction de torsion via l'équation

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 \left( \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right),$$

le théorème III.1 met en évidence l'influence de la courbure sur la nature des géodésiques des espaces de Robertson-Walker.

## 1.2 Complétude des géodésiques

Nous nous intéressons à présent à la complétude des géodésiques dans les espaces de Robertson-Walker. Rappelons tout d'abord ce que signifie cette notion :

**Définition III.1** — Une variété pseudo-riemannienne  $\mathcal{M}$  est dite géodésiquement complète si les géodésiques de  $\mathcal{M}$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes sur la complétude de la fibre et la fonction de torsion afin qu'un espace de Robertson-Walker soit géodésiquement complet.

**Proposition III.1** (proposition 4.1 de [Sán98]) — Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker (généralisé) où  $I = ]0, T[$ . Si la fibre  $(M, g^M)$  de  $\mathcal{M}$  est géodésiquement incomplète, alors l'espace  $\mathcal{M}$  est lui-même géodésiquement incomplet. Si la fibre  $(M, g^M)$  est géodésiquement complète, alors

– les géodésiques de genre temps de  $\mathcal{M}$  sont complètes si et seulement si

$$\int_0^{\cdot} \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \int^T \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} = +\infty ; \quad (\text{III.1})$$

– les géodésiques de lumière de  $\mathcal{M}$  sont complètes si et seulement si

$$\int_0^{\cdot} \alpha = \int^T \alpha = +\infty ; \quad (\text{III.2})$$

– les géodésiques de genre espace de  $\mathcal{M}$  sont complètes si et seulement si la fonction  $\alpha$  vérifie (III.2) ou est non bornée.

*Démonstration.* On trouvera une preuve de ce résultat dans l'article [RS94] où les auteurs font une étude systématique de la complétude des géodésiques dans les variétés pseudo-riemanniennes qui possèdent une structure de produit tordu.  $\square$

**Remarque III.2** — D'après la proposition III.1, lorsque l'intervalle  $I$  est borné est que la fonction  $\alpha$  est continue bornée sur  $I$ , les géodésiques de genre temps ainsi que les géodésiques de lumière d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  sont incomplètes. Lorsque le facteur d'expansion  $\alpha$  s'annule au bord de l'intervalle, on peut cependant le prolonger en une fonction  $\hat{\alpha}$  périodique de période  $|I| = T$  sur  $\mathbb{R}$ . Auquel cas, on pourra considérer le produit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  comme un sous-espace d'un espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  dans lequel les géodésiques sont complètes. La construction de  $\widehat{\mathcal{M}}$  et l'étude des géodésiques dans cet espace fait l'objet de la section 4.

## 2 INTÉGRATION DES ÉQUATIONS GÉODÉSIQUES DE GENRE TEMPS

Nous explicitons ici les solutions des équations géodésiques pour des trajectoires de genre temps  $\xi_s = (t_s, x_s) \in I \times_\alpha M$  paramétrées par le temps propre. D'après le corollaire II.1, on sait que si  $\xi_s = (t_s, x_s)$  est une géodésique dans  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$ , alors  $x_s$  décrit une courbe géodésique dans  $M$ . Lorsque le paramètre  $s$  varie,  $x_s$  décrit donc une droite lorsque  $M = \mathbb{R}^3$ , une "droite hyperbolique" lorsque  $M = \mathbb{H}^3$ , ou un "grand cercle" lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ . Dans le prochain paragraphe, nous exhibons des intégrales premières des géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre, ce qui nous permettra de donner un paramétrage des courbes  $x_s \in M$  au paragraphe 2.2.

### 2.1 Intégrales premières des géodésiques de genre temps

Par définition, si  $\xi_s = (t_s, x_s) \in I \times_\alpha M$  est une géodésique de genre temps paramétrée par le temps propre, alors  $\xi_s$  est solution du système :

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\xi^\nu}{ds} \frac{d\xi^\rho}{ds} = 0, \quad (\text{III.3})$$

et vérifie de plus la relation de pseudo-norme :

$$|\dot{t}_s|^2 - \alpha^2(t_s)g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) = 1. \quad (\text{III.4})$$

En particulier, on a toujours  $|\dot{t}_s|^2 \geq 1$ . Dans la suite, nous concentrerons notre attention sur les trajectoires orientées vers le futur.

**Définition III.2** — Nous dirons qu'un point  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  dans  $T^1\mathcal{M}$  est une condition initiale raisonnable s'il vérifie la relation (III.4) et si  $\dot{t}_0 \geq 1$ .

**Remarque III.3** — Sur l'ensemble de définition d'une géodésique de genre temps paramétrée par le temps propre, on aura donc toujours  $\dot{t}_s \geq 1$ . En particulier, la composante  $t_s$  de la base  $I = ]0, T[$  sera une toujours une fonction strictement croissante du temps propre  $s$ .

**Proposition III.2** — *Les fonctions suivantes sont des intégrales premières des géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre, i.e., sont constantes le long de celles-ci :*

$$\begin{aligned} a &= \alpha(t_s) \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}, \\ \vec{b} &:= \alpha^2(t_s) x_s \wedge \dot{x}_s \text{ lorsque } M = \mathbb{R}^3, \\ \vec{b}^I &:= \alpha^2(t_s) x_s^I \wedge \dot{x}_s^I \text{ lorsque } M = \mathbb{S}^3 \text{ ou } \mathbb{H}^3, \end{aligned}$$

où  $I = (i_1, i_2, i_3)$  avec les  $i_j \in \{0, 1, 2, 3\}$  distincts et  $x^I := (x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3})$ .

*Démonstration.* Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  une solution des systèmes d'équations (III.3) et (III.4) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ , définie sur un intervalle  $I_0 \subset \mathbb{R}^+$ . En fonction de la métrique  $g^M$  sur la fibre  $M$ , l'équation du système (III.3) correspondant à  $\mu = 0$  s'écrit :

$$\ddot{t}_s = -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s),$$

ou encore en utilisant la relation de pseudo-norme (III.4) :

$$\ddot{t}_s = -\frac{\alpha'(t_s)}{\alpha(t_s)} (t_s^2 - 1), \quad i.e., \quad d \log |\alpha^2(t_s)(t_s^2 - 1)| = 0,$$

dont on déduit :

$$a := \alpha(t_s) \sqrt{t_s^2 - 1} \equiv \text{constante}.$$

Par ailleurs, en fonction de la courbure  $k \in \{0, 1, -1\}$  et en coordonnées cartésiennes, les équations du système (III.3) correspondant à  $\mu = 1, 2, 3$  s'écrivent sous forme vectorielle :

$$d\dot{x}_s = -2 \frac{\alpha'(t_s)}{\alpha(t_s)} \dot{t}_s \dot{x}_s ds - k g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) x_s ds,$$

ou encore

$$d\alpha^2(t_s) \dot{x}_s = -k \times \alpha^2(t_s) g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) x_s ds, \quad (\text{III.5})$$

dont on déduit naturellement que  $\vec{b}^I = \alpha^2(t_s) x_s^I \wedge \dot{x}_s^I \equiv \text{constante}$ .  $\square$

Remarque III.4 — Dans les cas où  $M = \mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$  et lorsque  $I = (1, 2, 3)$ , on notera simplement  $\vec{b}^I = \vec{b}$  par analogie avec le cas euclidien. Dans le système de coordonnées  $(\chi, \phi, \psi) = (\chi, \theta)$ , on a alors

$$\vec{b} = \alpha^2(t_s) f^2(\chi_s) \theta_s \wedge \dot{\theta}_s.$$

Le fait que le moment angulaire  $\vec{b}$  soit constant assure en particulier que, la composante angulaire  $\theta_s$  d'une géodésique de genre temps, vue comme trajectoire sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , est incluse dans un plan passant par l'origine.

## 2.2 Intégration des équations géodésiques

### 2.2.1 Intégration des composantes temporelles

Le fait que la fonction  $a$  est une intégrale première des géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre permet d'exprimer simplement la composante temporelle  $t_s$  comme fonction du temps propre  $s$ .

**Corollaire III.1** — Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  une solution des systèmes d'équations (III.3) et (III.4) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors

$$\int_{t_0}^{t_s} \frac{\alpha(u)du}{\sqrt{\alpha^2(u) + a^2}} = s, \quad \text{i.e. } t_s = \inf \left\{ u > t_0, \int_{t_0}^u \frac{\alpha(u)du}{\sqrt{\alpha^2(u) + a^2}} > s \right\}.$$

En particulier,  $t_s$  est défini pour tout  $s \geq 0$  si et seulement si

$$\int_{t_0}^T \frac{\alpha(u)du}{\sqrt{\alpha^2(u) + a^2}} = +\infty.$$

**Remarque III.5** — On retrouve ici naturellement la condition nécessaire et suffisante de complétude (III.1). Seul importe ici l'intégrabilité au voisinage de  $T$  puisque l'on s'intéresse à des trajectoires orientées vers le futur.

**Définition III.3** — Dans la suite, étant donnée une trajectoire  $\xi_s = (t_s, x_s)$  orientée vers le futur dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , on désignera par  $\tau$  le temps d'atteinte de  $T$  par la composante temporelle  $t_s = \pi_I(\xi_s)$  :

$$\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}.$$

### 2.2.2 Intégration des composantes spatiales

Nous explicitons à présent un paramétrage, en fonction de  $t_s$ , des composantes spatiales des géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre. Remarquons tout d'abord que si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est une telle trajectoire, et que l'intégrale première  $a$  est nulle, d'après la relation de pseudo-norme (III.4), on a nécessairement  $g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) = 0$  pour tout  $s$  dans  $[0, \tau[$ . Dans ce cas, les composantes temporelles et spatiales de  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  sont simplement données par

$$t_s = t_0 + s, \quad \dot{t}_s \equiv 1, \quad x_s \equiv x_0, \quad \dot{x}_s \equiv 0.$$

Dans la suite, nous supposons donc que  $a > 0$ . Auquel cas, pour tout  $s$  dans  $[0, \tau[$ , on a

$$|\dot{x}_s|^2 = g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) = a^2/\alpha^4(t_s) > 0,$$

et la donnée de  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est équivalente à la donnée de  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ . La proposition suivante montre que les composantes spatiales  $x_s$  et  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  sont naturellement paramétrées par la fonctionnelle de  $t_s$  :

$$\int_0^s \frac{a du}{\alpha^2(t_u)} = \int_{t_0}^{t_s} \frac{1}{\alpha(u)} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2(u)}} du.$$

**Proposition III.3** — Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  une solution des systèmes d'équations (III.3) et (III.4) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors, pour  $s$  dans  $[0, \tau[$ , selon la courbure de la fibre  $M$ , les composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  sont données par les équations suivantes :

– dans le cas euclidien, i.e. lorsque  $k = 0$  :

$$x_s = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|} \times \int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du, \quad \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \equiv \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|};$$

– dans le cas sphérique i.e. lorsque  $k = 1$  :

$$x_s = \cos\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) x_0 + \sin\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -\sin\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) x_0 + \cos\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|};$$

– dans le cas hyperbolique i.e. lorsque  $k = -1$  :

$$x_s = \cosh\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) x_0 + \sinh\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \sinh\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) x_0 + \cosh\left(\int_0^s \frac{a}{\alpha^2(t_u)} du\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}.$$

*Démonstration.* En coordonnées cartésiennes, les équations géodésiques du système (III.3) concernant les composantes spatiales  $x_s$  et  $\dot{x}_s$  s'écrivent :

$$dx_s = \dot{x}_s ds, \quad d\dot{x}_s = -2 \frac{\alpha'(t_s)}{\alpha(t_s)} \dot{x}_s ds - k \times x_s \times |\dot{x}_s|^2 ds.$$

Ce système d'équations est équivalent au système suivant :

$$dx_s = \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \times \frac{a}{\alpha^2(t_s)} ds, \quad d\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -k \times x_s \times \frac{a}{\alpha^2(t_s)} ds.$$

En effectuant le changement de temps  $ds' = a/\alpha^2(t_s) \times ds$  et en posant  $x_s := y_{s'}$ , on obtient alors que  $(y_{s'}, \dot{y}_{s'})$  est solution du système

$$dy_{s'} = \dot{y}_{s'} ds', \quad d\dot{y}_{s'} = -k \times y_{s'} ds',$$

dont on déduit aisément les expressions de la proposition.  $\square$

### 3 INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES GÉODÉSQUES DE LUMIÈRE

Contrairement au cas des géodésiques de genre temps, le temps propre  $s$  ne peut pas paramétrer les géodésiques de lumière. Aussi considère-t-on un paramétrage affine  $u$ . Les trajectoires qui nous intéressent ici sont alors les solutions du système :

$$\frac{d^2 \xi^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{d\xi^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0, \quad (\text{III.6})$$

et qui vérifient de plus la relation de pseudo-norme :

$$\dot{t}_u^2 - \alpha^2(t_u) g^M(\dot{x}_u, \dot{x}_u) = 0. \quad (\text{III.7})$$

Comme précédemment, nous concentrons ici notre attention sur les géodésiques orientées vers le futur, c'est-à-dire telles que  $\dot{t}_u \geq 0$  et on pose

$$\tau := \inf\{u > 0, t_u = T\}.$$

Dans le prochain paragraphe, nous intégrons les équations (III.6) et (III.7), puis au paragraphe 4.1, nous déterminons le comportement asymptotique de leurs solutions. Celui-ci diffère radicalement selon que l'inverse de la fonction de torsion  $\alpha$  est intégrable au voisinage de  $T$ , c'est-à-dire selon que l'expansion / effondrement est rapide / lent.

#### 3.1 Intégrales premières des géodésiques

Comme pour les géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre, on exhibe tout d'abord des intégrales premières des géodésiques de lumière.

**Proposition III.4** — *Les fonctions suivantes sont des intégrales premières des géodésiques de lumière, i.e., sont constantes le long de celles-ci :*

$$\begin{aligned} a &= \alpha(t_u) \dot{t}_u, \\ \vec{b} &:= \alpha^2(t_u) x_u \wedge \dot{x}_u \text{ lorsque } M = \mathbb{R}^3, \\ \vec{b}^I &:= \alpha^2(t_u) x_u^I \wedge \dot{x}_u^I \text{ lorsque } M = \mathbb{S}^3 \text{ ou } \mathbb{H}^3, \end{aligned}$$

où  $I = (i_1, i_2, i_3)$  avec les  $i_j \in \{0, 1, 2, 3\}$  distincts et  $x^I = (x^{i_1}, x^{i_2}, x^{i_3})$ .

*Démonstration.* Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1 \mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ ,

définie sur un intervalle  $I_0 \subset \mathbb{R}^+$ . Comme dans le cas des géodésiques de genre temps, l'équation du système (III.6) correspondant à  $\mu = 0$  s'écrit :

$$\ddot{t}_u = -\alpha(t_u) \alpha'(t_u) g^M(\dot{x}_u, \dot{x}_u),$$

ou encore en utilisant cette fois la relation de pseudo-norme (III.7) :

$$\ddot{t}_u = -\frac{\alpha'(t_u)}{\alpha(t_u)} \dot{t}_u^2, \quad \text{i.e.,} \quad d \log |\alpha^2(t_u) \dot{t}_u^2| = 0,$$

dont on déduit :

$$a := \alpha(t_u) \dot{t}_u \equiv \text{constante.}$$

Par ailleurs, comme précédemment, en fonction de la courbure  $k \in \{0, 1, -1\}$ , les équations du système (III.6) correspondant à  $\mu = 1, 2, 3$  s'écrivent sous forme vectorielle :

$$d\alpha^2(t_u) \dot{x}_u = -k \times \alpha^2(t_u) g^M(\dot{x}_u, \dot{x}_u) x_u du,$$

dont on déduit naturellement que  $\vec{b}^I = \alpha^2(t_u) x_u^I \wedge \dot{x}_u^I \equiv \text{constante}$ .  $\square$

Remarque III.6 — Les constantes  $a$  et  $\vec{b}^I$ , dépendent du paramétrage affine. En revanche les paramètres d'impact  $\vec{\rho}^I := \vec{b}^I/a$  sont invariants par changement de paramètre affine.

### 3.2 Intégration des équations géodésiques

Du fait que les fonctions  $a$  et  $\vec{b}$  sont des intégrales premières des trajectoires de lumières, on déduit l'expression de la composante temporelle  $t_u$  comme fonction du paramètre affine  $u$ , puis de  $x_u$  en fonction de  $t_u$ .

**Corollaire III.2** — Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$ , tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors

$$\int_{t_0}^{t_u} \alpha(v) dv = a \times u, \quad \text{i.e.} \quad t_u = \inf \left\{ v > t_0, \int_{t_0}^v \alpha(r) dr > a \times u \right\}.$$

En particulier, lorsque  $a > 0$ ,  $t_u$  est défini pour tout  $u \geq 0$  si et seulement si

$$\int_{t_0}^T \alpha(v) dv = +\infty.$$

Remarque III.7 — Comme dans la remarque III.5, on retrouve ici naturellement la condition nécessaire et suffisante de complétude (III.2). Là encore, seule importe l'intégrabilité au voisinage de  $T$  puisque l'on s'intéresse à des trajectoires orientées vers le futur.

Lorsque l'intégrale première  $a$  est nulle, on a naturellement  $t_u \equiv t_0$ ,  $\dot{t}_u \equiv 0$ ,  $x_u \equiv x_0$  et  $\dot{x}_u \equiv 0$ . Dans la suite, on supposera que  $a$  est strictement positive, auquel cas, pour tout  $u$  dans  $[0, \tau[$ , on a  $|\dot{x}_u|^2 = g^M(\dot{x}_u, \dot{x}_u) = a^2/\alpha^4(t_u) > 0$ .

**Proposition III.5** — Soit  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 > 0$  i.e.  $a > 0$ , et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors, pour  $u$  dans  $[0, \tau[$ , selon la courbure de la fibre  $M$ , les composantes spatiales  $(x_u, \dot{x}_u/|\dot{x}_u|)$  sont données par les équations suivantes :

– dans le cas euclidien, i.e. lorsque  $k = 0$  :

$$x_u = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|} \times \int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}, \quad \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \equiv \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|};$$

– dans le cas sphérique i.e. lorsque  $k = 1$  :

$$x_u = \cos\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) x_0 + \sin\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} = -\sin\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) x_0 + \cos\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|};$$

– dans le cas hyperbolique i.e. lorsque  $k = -1$  :

$$x_u = \cosh\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) x_0 + \sinh\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} = \sinh\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) x_0 + \cosh\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}.$$

*Démonstration.* La preuve est la même que dans le cas des géodésiques de genre temps à la différence près que dans le cas des géodésiques de lumière, le changement de temps est donné par :

$$\int_0^u \frac{a}{\alpha^2(t_v)} dv = \int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}.$$

□

## 4 ASYMPTOTIQUE ET PROLONGEMENT DES GÉODÉSQUES DE LUMIÈRE

Des expressions des composantes spatiales des géodésiques de lumière obtenues dans la proposition III.5, on déduit aisément leur comportement asymptotique lorsque le paramètre affine  $u$  tend vers  $\tau$ , c'est-à-dire lorsque  $t_u$  tend vers  $T$ . Dans le paragraphe 4.1, nous explicitons ainsi ces comportements en fonction de la nature de la fibre et de la nature du facteur d'expansion de l'espace considéré. Nous montrons ensuite au paragraphe 4.2 que les géodésiques de lumière d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$  convergent en fait vers des points d'un bord  $\partial\mathcal{M}$  à l'espace  $\mathcal{M}$ , que nous précisons. Au paragraphe 4.3, nous montrons que dans un univers mortel où l'effondrement est lent, il est possible de prolonger les géodésiques de lumière a priori incomplètes, en des trajectoires bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans une extension raisonnable  $\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace  $\mathcal{M}$ . Enfin, dans le paragraphe 4.4, nous montrons que ceci n'est pas possible dans le cas d'un univers mortel où l'effondrement est rapide.

### 4.1 Asymptotique des géodésiques de lumière

Commençons par décrire le comportement asymptotique des géodésiques de lumière. Nous distinguons les cas selon que l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T$  ou non.

**Proposition III.6** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est rapide, ou un espace mortel où l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $a = \alpha(t_0)\dot{t}_0 > 0$ . Alors, lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ , la composante spatiale  $x_u = \pi_M(\xi_u)$  converge vers un point  $x_{\infty} \in M$  et  $\dot{x}_u/|\dot{x}_u|$  converge vers un point de  $T^1_{x_{\infty}}M$ .*

**Remarque III.8** — Ces convergences peuvent sembler paradoxales a priori. En effet, quelle interprétation physique peut-on donner au fait qu'un photon converge vers un point de  $M$ ? Pour lever toute ambiguïté, il faut ici garder à l'esprit qu'à tout instant  $t$ , les distances mesurées dans la fibre  $M$  d'un espace de Robertson-Walker, sont multipliées par le facteur  $\alpha(t)$ . Aussi, la convergence dans  $M$  n'implique pas la convergence dans le produit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ . À titre d'exemple, on peut penser à deux photons "au repos", c'est-à-dire statiques dans  $M$ , mais qui du point de vue d'un observateur lui-même statique dans  $M$ , s'éloignent l'un de l'autre dans le produit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , du fait de l'expansion de l'univers.

Nous décrivons maintenant le comportement asymptotique des géodésiques de lumière lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . Nous distinguons les cas euclidien, hyperbolique et sphérique. Dans les cas où la fibre  $M$  de l'espace  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  est de courbure négative ou nulle, les composantes spatiales des géodésiques de lumière "s'en vont à l'infini" dans une direction privilégiée :

**Corollaire III.3** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est lente, ou un espace mortel où l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $a = \alpha(t_0)\dot{t}_0 > 0$ . Alors, lorsque  $u$  tend vers  $\tau$  :*

- i)  $r_u = |x_u|$  tend vers l'infini ;
- ii)  $\frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}$  est constant égal à  $\Theta := \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}$ ,  $\theta_u = \frac{x_u}{|x_u|}$  converge vers  $\Theta$  ;
- iii)  $\delta_u := -\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)} + \langle x_u, \Theta \rangle$  est constant égal à  $\langle x_0, \Theta \rangle$ .

Dans le cas hyperbolique, on a le résultat analogue :

**Corollaire III.4** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{H}^3$  un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est lente, ou un espace mortel où l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $a = \alpha(t_0)\dot{t}_0 > 0$ . Alors, lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ , :*

- i)  $x_u^0 = \cosh(\chi_u)$  tend vers l'infini ;
- ii)  $\theta_u = \frac{(x_u^1, x_u^2, x_u^3)}{\sqrt{|x_u^0|^2 - 1}}$  converge vers un point  $\theta_{\infty} \in \mathbb{S}^2$  ;
- iii)  $\frac{1}{x_u^0} \times \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}$  converge vers  $(1, \theta_{\infty})$ .
- iv)  $-\sinh\left(\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}\right) + q\left(x_u, \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}\right)$  est nul, ou de manière équivalente
 
$$-\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)} + \operatorname{argsh}\left(q\left(x_u, \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}\right)\right) = 0.$$

Enfin dans le cas sphérique où la fibre  $M$  est compacte, les composantes spatiales des géodésiques de lumière sont aussi divergentes, l'explosion étant cette fois de nature oscillatoire :

**Corollaire III.5** — Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est lente, ou un espace mortel où l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $a = \alpha(t_0)\dot{t}_0 > 0$ . Alors, lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ , les composantes spatiales  $x_u \in \mathbb{S}^3$  et  $\dot{x}_u/|\dot{x}_u| \in \mathbb{S}^3$  divergent, au sens où elles décrivent un grand cercle dans un plan  $\Pi$  déterminé par  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ , et paramétré par la phase divergente  $\int_{t_0}^{t_u} \frac{dv}{\alpha(v)}$ .

## 4.2 La notion de frontière causale

Nous montrons ici que les comportements asymptotiques décrits au paragraphe précédent peuvent être reformulés de façon concise, si l'on adjoint à l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$  une frontière naturelle  $\partial\mathcal{M}$  bien choisie. Le fait d'adjointre une frontière à une variété lorentzienne causale de sorte que toutes les courbes causales, en particulier les géodésiques de lumière, convergent vers des points de cette frontière est justement l'objet de la compactification causale introduite par Geroch, Kronheimer, et Penrose dans [GKP72]. Cette méthode très robuste a été largement étudiée dans la littérature physique ainsi que mathématique. On pourra par exemple consulter la synthèse [Har04]. Sur une variété lorentzienne générale  $\mathcal{M}$ , la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c$  est composée de deux ensembles  $\partial\mathcal{M}_c^-$  et  $\partial\mathcal{M}_c^+$ , chacun de ses ensembles étant lui-même composé de classes d'équivalence de trajectoires causales dans  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire des courbes de genre temps ou de lumière. L'ensemble  $\partial\mathcal{M}_c^-$  correspond à des courbes causales orientées vers le passé, l'ensemble  $\partial\mathcal{M}_c^+$  à des courbes causales orientées vers le futur. La robustesse de la notion de frontière causale réside en partie dans le fait que cette notion ne dépend que de la structure conforme de la variété que l'on cherche à compactifier.

Par exemple, dans le cas le plus simple où cette variété est l'espace de Minkowski  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,3}$ , la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c$  s'identifie avec un sous-ensemble  $\mathcal{C}$  de l'espace statique d'Einstein  $\mathbb{E}_3 := \mathbb{S}^1 \times_{Id} \mathbb{S}^3$ . On montre que la frontière causale coïncide en fait dans ce cas avec la frontière conforme obtenue en plongeant l'espace  $\mathbb{R}^{1,3}$  dans  $\mathbb{E}_3$  (voir [Bai06]). L'ensemble frontière  $\mathcal{C}$  est composé de deux cônes  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  de base  $\mathbb{S}^2$ , un pour le passé, un pour le futur, chacun pouvant être paramétré par un couple  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Une courbe  $(t_u, x_u) \in \mathbb{R}^{1,3}$  orientée vers le futur converge vers un point  $(\delta_\infty, \Theta_\infty)$  de  $\mathcal{C}^+$  si et seulement si  $t_u \rightarrow +\infty$ ,  $|x_u| \rightarrow +\infty$ ,  $x_u/|x_u| \rightarrow \Theta_\infty$  et  $-t_u + |x_u| \rightarrow \delta_\infty$ . Par exemple, la courbe  $(t_u, x_u)$  d'équation  $t_u = \Theta_\infty |x_u|$  dans  $\mathbb{R}^{1,3}$ , qui est la géodésique de lumière issue de  $(t_0, x_0) = (0, 0)$  avec  $\dot{x}_0/|\dot{x}_0| := \Theta_\infty$ , converge lorsque  $u \rightarrow +\infty$  vers le point  $(0, \Theta_\infty)$  de  $\mathcal{C}^+$ .

Dans le cas des espaces de Robertson-Walker qui sont des variétés conformément plates (cf. remarque II.6), la frontière causale a été complètement décrite dans l'article récent [AnF07] d'Alaña et Flores. La proposition suivante explicite cette frontière selon que l'inverse du facteur d'expansion  $\alpha$  est intégrable ou non en zéro et en  $T$ , et selon que la fibre  $M$  est euclidienne, hyperbolique ou sphérique.

**Proposition III.7** ([AnF07]) — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $I = ]0, T[$  un espace de Robertson-Walker. Selon la nature de la fibre  $M$  et la nature du facteur d'expansion, la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c = \partial\mathcal{M}_c^- \cup \partial\mathcal{M}_c^+$  de l'espace  $\mathcal{M}$  est décrite de la façon suivante :*

- i) lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en zéro et en  $T$ , les frontières  $\partial\mathcal{M}_c^-$  et  $\partial\mathcal{M}_c^+$  s'identifient respectivement à  $\{0\} \times M^-$  et  $\{T\} \times M^+$ , où  $M^-$  et  $M^+$  sont deux copies de la fibre  $M$  que l'on peut identifier à  $M$  ;*
- ii) lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en zéro mais pas en  $T$ , la frontière entrante  $\partial\mathcal{M}_c^-$  s'identifie à  $\{0\} \times M^-$  où  $M^-$  est une copie de la fibre  $M$  que l'on peut identifier à  $M$ . Lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , la frontière de sortie  $\partial\mathcal{M}_c^+$  s'identifie à  $\{T\} \times \mathcal{C}^+$  où  $\mathcal{C}^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ , la frontière de sortie  $\partial\mathcal{M}_c^+$  est triviale, réduite à un point  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \{\partial\}$  ;*
- iii) lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en  $T$  mais pas en zéro, dans les cas où  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , la frontière entrante  $\partial\mathcal{M}_c^-$  s'identifie à un cône  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \mathcal{C}^-$  avec  $\mathcal{C}^- = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Dans le cas où  $M = \mathbb{S}^3$ , la frontière entrante est triviale :  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \{\partial\}$ . La frontière sortante  $\partial\mathcal{M}_c^+$  s'identifie à  $\{T\} \times M^+$ , où  $M^+$  une copie de la fibre  $M$  que l'on peut identifier à  $M$ .*
- iv) enfin, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est ni intégrable en  $T$  ni en zéro, dans les cas où  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , les frontières entrantes et sortantes s'identifient à deux cônes :  $\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \mathcal{C}^+$  où  $\mathcal{C}^-$  et  $\mathcal{C}^+$  sont deux copies de  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Dans le cas où  $M = \mathbb{S}^3$ , les frontières d'entrée et de sortie sont triviales :  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \{\partial\}$  et  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \{\partial\}$ .*

Dans le cas où l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en  $T$ , quelque soit la nature de la fibre  $M$ , une courbe causale orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  converge vers le point  $(T, x_{\infty})$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times M$  si  $t_u \rightarrow T$  et  $x_u \rightarrow x_{\infty} \in M$ . De la même façon, dans le cas où  $\int_0^{\cdot} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$ , une courbe causale orientée vers le passé  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  converge vers le point  $(0, x_{\infty})$  de  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times M$  si  $t_u \rightarrow 0$ ,  $x_u \rightarrow x_{\infty} \in M$ .

Dans le cas l'inverse du facteur d'expansion n'est pas est intégrable en  $T$  et la fibre est euclidienne, *i.e.*  $M = \mathbb{R}^3$ , une courbe causale orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  converge vers le point  $(T, \delta, \Theta)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \mathcal{C}^+$  si  $t_u \rightarrow T$ ,  $x_u/|x_u| \rightarrow \Theta$  et

$$- \int_{t_0}^{t_u} \frac{du}{\alpha(u)} + |x_u| \rightarrow \delta.$$

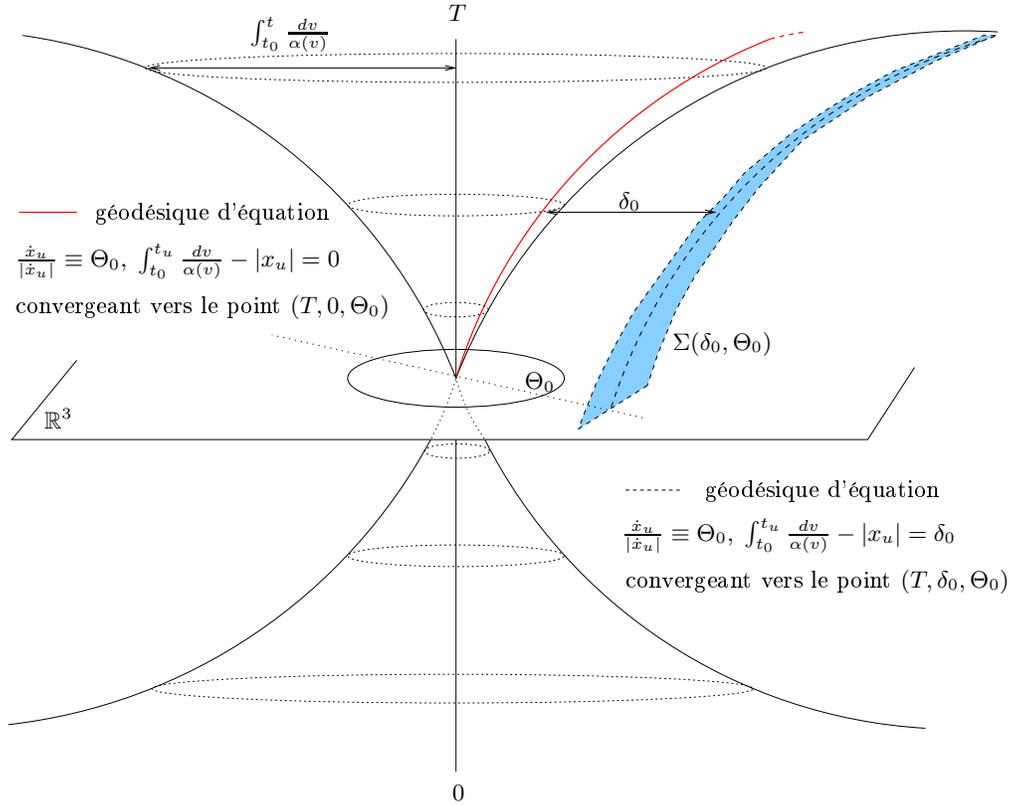


FIGURE 23: Convergence des géodésiques de lumière de  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  vers des points du bord  $\partial\mathcal{M}_c^+$  lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable en  $T$ .

De la même façon, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable en zéro et la fibre est euclidienne, *i.e.*  $M = \mathbb{R}^3$ , une courbe causale orientée vers le passé  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  converge vers le point  $(0, \delta, \Theta)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \mathcal{C}^+$  si  $t_u \rightarrow 0$ ,  $x_u/|x_u| \rightarrow \Theta$  et

$$\int_{t_0}^{t_u} \frac{du}{\alpha(u)} + |x_u| \rightarrow \delta.$$

**Remarque III.9** — La convergence d'une courbe causale orientée vers le futur vers un point  $(T, \delta_0, \Theta_0)$  de la frontière  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \mathcal{C}^+$  se traduit géométriquement par la convergence de la trajectoire  $(t_u, x_u)$  vers une hypersurface asymptotique, l'hypersurface d'équation

$$\Sigma(\delta_0, \Theta_0) = \left\{ (t, x) \in \mathcal{M}, \int_{t_0}^{t_u} \frac{du}{\alpha(u)} + \langle x_u, \Theta_0 \rangle = \delta_0 \right\}.$$

Dans le cas où l'inverse du facteur d'expansion n'est pas est intégrable en  $T$  et la fibre  $M$  est hyperbolique, une courbe causale orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$ , où  $x_u = (x_u^0, x_u^1, x_u^2, x_u^3) \in \mathbb{H}^3$ , converge vers le point  $(T, \delta, \Theta)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \mathcal{C}^+$  si  $t_u \rightarrow T$ ,  $(x_u^1, x_u^2, x_u^3)/x_u^0 \rightarrow \Theta$  et

$$- \int_{t_0}^{t_u} \frac{du}{\alpha(u)} + \operatorname{argsh}(|x_u|) \rightarrow \delta.$$

Dans la même façon, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable en zéro et la fibre  $M$  est hyperbolique, une courbe causale orientée vers le passé  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  converge vers le point  $(0, \delta, \Theta)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^- = \{0\} \times \mathcal{C}^+$  si  $t_u \rightarrow T$ ,  $(x_u^1, x_u^2, x_u^3)/x_u^0 \rightarrow \Theta$  et

$$\int_{t_0}^{t_u} \frac{du}{\alpha(u)} + \operatorname{argsh}(|x_u|) \rightarrow \delta.$$

Enfin, dans le cas sphérique, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ , une courbe causale orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  converge vers le point  $(T, \partial)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+ = \{T\} \times \{\partial\}$  si  $t_u \rightarrow T$  et si  $x_u$  diverge dans la fibre compacte  $\mathbb{S}^3$ . La notion de convergence vers  $\{0, \} \times \{\partial\}$  pour des trajectoires orientées vers le passé est symétrique.

On peut alors résumer les résultats obtenus dans la proposition III.6 et les corollaires III.3, III.4 et III.5 dans l'énoncé suivant :

**Proposition III.8** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  tel que  $\dot{t}_0 \geq 0$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  une solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7) issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $a = \alpha(t_0)\dot{t}_0 > 0$ . Alors, lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ , la trajectoire  $\xi_u$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  converge vers un point de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .*

### 4.3 Prolongement lorsque l'effondrement est lent

Nous avons déjà noté dans la remarque III.2 que lorsque  $I = ]0, T[$  est borné et que la fonction  $\alpha$  est continue bornée sur  $I$ , les géodésiques de genre temps ainsi que les géodésiques de lumière d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  sont incomplètes. Comme le montre la figure 24 ci-après, lorsque le facteur d'expansion  $\alpha$  s'annule au bord de l'intervalle, on peut cependant le prolonger de façon naturelle en une fonction continue  $\hat{\alpha}$  périodique de période  $|I| = T$  sur  $\mathbb{R}$ , en posant pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\hat{\alpha} := \alpha(t [T]), \text{ où } t [T] \text{ désigne } t \text{ modulo } T.$$

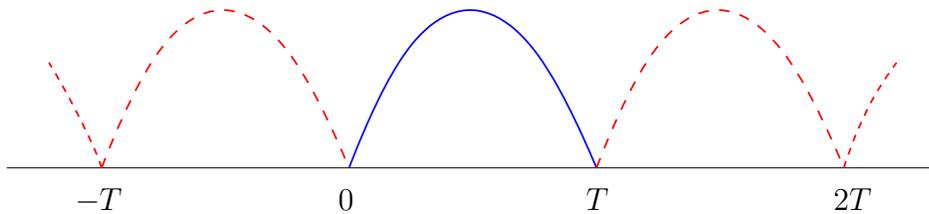


FIGURE 24: Prolongement de  $\alpha$  en une fonction périodique  $\hat{\alpha}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Le facteur d'expansion étant prolongé en une fonction périodique sur  $\mathbb{R}$ , nous montrons dans ce paragraphe comment, lorsque l'effondrement est lent, les géodésiques de lumière peuvent être elles aussi prolongées en des trajectoires définies sur la droite réelle<sup>1</sup>, à valeurs dans une extension naturelle  $\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace de  $\mathcal{M}$ . Pour toute la suite de ce paragraphe, on se donne ainsi un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $I = ]0, T[$  avec  $T$  borné. On suppose que le facteur d'expansion  $\alpha$  s'annule au bord de  $I$  et que son inverse est intégrable en zéro et en  $T$  :

$$\int_0^{T/2} \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty \text{ et } \int_{T/2}^T \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty.$$

Le prolongement des trajectoires se fait en deux temps, on prolonge tout d'abord les composantes temporelles des géodésiques, puis leur composantes spatiales. L'extension  $\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace  $\mathcal{M}$  est décrite dans le prochain paragraphe. La construction du prolongement des composantes temporelles  $(t_u, a)$  fait l'objet du paragraphe 4.3.2 et celle des composantes spatiales celui du paragraphe 4.3.3.

1. En fait sur  $\mathbb{R}^+$  puisque que l'on se restreint ici aux géodésiques orientées vers le futur.

### 4.3.1 Un chapelet d'espaces de Robertson-Walker

On cherche ici à définir un espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  contenant  $\mathcal{M}$ , dans lequel les géodésiques de lumière prolongent celles de  $\mathcal{M}$  et sont complètes. Notons les deux points suivants :

- i) nous allons voir dans le prochain paragraphe que la composante temporelle  $t_u$  d'une géodésique de lumière  $\xi_u = (t_u, x_u)$  se prolonge naturellement en une trajectoire bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  ;
- ii) par ailleurs, d'après la proposition III.6, lorsque  $u$  tend vers le temps d'atteinte  $\tau = \inf\{u, t_u = T\}$ , la projection  $x_u$  converge vers un point  $x_\infty$  de  $M$ . Autrement dit, au cours de son évolution, la trajectoire  $x_u$  "reste" dans  $M$ .

Au regard de ces deux points, il semble naturel de chercher à prolonger les géodésiques de lumière de l'espace  $\mathcal{M}$  en des trajectoires à valeurs dans le produit  $[0, +\infty[ \times M$ . La fonction  $\hat{\alpha}$  prolongeant naturellement le facteur d'expansion à la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ , une première idée naïve consisterait à choisir pour l'espace complété  $\widehat{\mathcal{M}}$  le produit tordu  $[0, +\infty[ \times_{\hat{\alpha}} M$ . Malheureusement, la fonction périodique  $\hat{\alpha}$  n'est pas une fonction de torsion licite : elle s'annule et n'est pas régulière en les points  $nT$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant, le prolongement  $\hat{\alpha}$  est bien une fonction de torsion licite sur chaque période  $]nT, (n+1)T[$ , où  $n$  parcourt les entiers naturels. On construit alors l'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  de la façon suivante. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on considère l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}_n := ]nT, (n+1)T[ \times_{\hat{\alpha}} M_n$ , où la variété  $M_n$  est une copie de la fibre  $M$  de l'espace initial  $\mathcal{M}$  que l'on identifie ici à  $\mathcal{M}_0$ . On adjoint alors à chaque espace  $\mathcal{M}_n$  sa frontière causale  $\partial\mathcal{M}_n$  composée d'un ensemble d'entrée et d'un ensemble de sortie :

$$\partial\mathcal{M}_n := \partial\mathcal{M}_n^- \cup \partial\mathcal{M}_n^+, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \partial\mathcal{M}_n^- := \{nT\} \times M_n, \\ \partial\mathcal{M}_n^+ := \{(n+1)T\} \times M_n. \end{cases}$$

On pose enfin :

$$\widehat{\mathcal{M}}_n := \mathcal{M}_n \cup \partial\mathcal{M}_n.$$

L'espace complété  $\widehat{\mathcal{M}}$  est finalement obtenu en considérant la réunion des espaces  $\widehat{\mathcal{M}}_n$ , en identifiant d'une part pour chaque entier  $n$  la frontière sortante  $\partial\mathcal{M}_n^+$  avec la frontière entrante  $\partial\mathcal{M}_{n+1}^-$ , et en identifiant d'autre part toutes les fibres  $M_n$  entre elles :

$$\widehat{\mathcal{M}} := \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_n \right) / \left( \forall n \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} \partial\mathcal{M}_n^+ \equiv \partial\mathcal{M}_{n+1}^- \\ M_n \equiv M_{n+1} \end{array} \right).$$

L'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  apparaît donc comme un chapelet d'espaces de Robertson-Walker, où la frontière sortante du  $n$ -ième espace est identifiée à la frontière entrante du  $(n + 1)$ -ième comme l'illustre la figure ci-dessous.

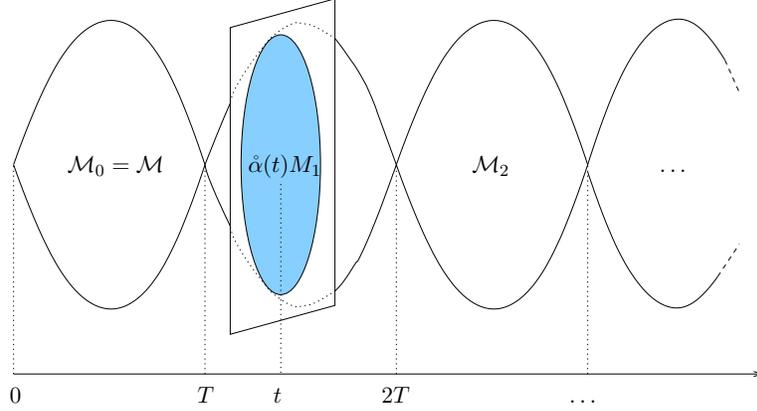


FIGURE 25: L'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  vu comme un "chapelet" d'espaces de Robertson-Walker.

Ayant introduit l'espace complété  $\widehat{\mathcal{M}}$ , nous pouvons à présent décrire le prolongement d'une géodésique de lumière  $\xi_u = (t_u, x_u)$  de  $\mathcal{M}$  au delà du temps d'atteinte  $\tau$ .

#### 4.3.2 Prolongement des composantes temporelles

Considérons une géodésique de lumière  $(\xi_u, \dot{\xi}_u) = (t_u, x_u, \dot{t}_u, \dot{x}_u)$  issue d'un point  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  de  $T^1\mathcal{M}$ . La donnée du couple  $(t_u, \dot{t}_u)$  sur l'intervalle  $[0, \tau[$  est naturellement équivalente à celle du couple  $(t_u, a_u)$  où  $a_u = \alpha(t_u)\dot{t}_u$ . D'après la proposition III.4, la fonction  $a_u$  est constante égale à  $a$  le long de la trajectoire et d'après le corollaire III.2,  $t_u$  est alors donné par l'expression

$$\int_{t_0}^{t_u} \alpha(v)dv = a \times u. \quad (\text{III.8})$$

Remarquons tout d'abord que cette formule permet de définir sans ambiguïté la fonction  $t_u$  lorsque  $t_0 \in ]0, T[$ , mais aussi lorsque  $t_0 = 0$ . Dans ce dernier cas, le fait de supposer que  $a$  est strictement positif et fini revient à supposer qu'à l'origine  $\dot{t}_0 = +\infty$ . Par ailleurs, l'expression (III.8) fait sens au delà du temps d'atteinte  $\tau$  si l'on remplace  $\alpha$  par son prolongement périodique  $\hat{\alpha}$ . Aussi, la trajectoire  $(t_u, a_u)$  admet un prolongement naturel  $(\hat{t}_u, \hat{a}_u)$  bien défini pour tout  $u \geq 0$  par  $\hat{a}_u \equiv a$  et

$$\int_{t_0}^{\hat{t}_u} \hat{\alpha}(v)dv := a \times u, \quad \text{i.e.} \quad \hat{t}_u := \inf \left\{ v > t_0, \int_{t_0}^v \hat{\alpha}(r)dr > a \times u \right\}. \quad (\text{III.9})$$

La fonction  $u \mapsto \overset{\circ}{t}_u$  ainsi définie sur  $\mathbb{R}^+$  est naturellement continue, strictement croissante et tend vers l'infini lorsque le paramètre affine  $u$  tend vers l'infini. Posons  $\tau_0 := 0$ ,  $\tau_1 := \tau$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , définissons le temps  $\tau_n$  comme le temps d'atteinte du point  $nT$  par la fonction  $\overset{\circ}{t}_u$  :

$$\tau_n := \inf\{u > 0, \overset{\circ}{t}_u = nT\}.$$

Le couple  $(\overset{\circ}{t}_u, \overset{\circ}{a}_u)$  défini ci-dessus est bien un prolongement de la trajectoire initiale  $(t_u, a_u)$ , au sens où c'est une fonction régulière de  $u$ , bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ , qui coïncide avec  $(t_u, a_u)$  sur  $[0, \tau[$  et qui sur chaque intervalle  $]\tau_n, \tau_{n+1}[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est solution des équations géodésiques dans l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}_n \subset \widehat{\mathcal{M}}_n \subset \widehat{\mathcal{M}}$ .

**Remarque III.10** — Étant donnée une condition initiale  $(t_0, a_0)$ , le système d'équations qui régit l'évolution des composantes temporelles des géodésiques de lumière admet une unique solution issue  $(t_0, a_0)$ . Aussi, on peut préciser que la trajectoire  $(\overset{\circ}{t}_u, \overset{\circ}{a}_u)$  est l'unique trajectoire continue sur  $\mathbb{R}^+$  dont la restriction aux intervalles  $]\tau_n, \tau_{n+1}[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est solution des équations géodésiques dans l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}_n$ .

### 4.3.3 Prolongement des composantes spatiales

Nous explicitons à présent le prolongement des composantes spatiales des géodésiques de lumière. On rappelle que la donnée des composantes  $(t_u, x_u, \dot{t}_u, \dot{x}_u)$  d'une géodésique de lumière  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  définie sur l'intervalle  $[0, \tau[$  est équivalente à la donnée des composantes  $(t_u, x_u, a_u, \dot{x}_u/|\dot{x}_u|)$ .

**Proposition III.9** — Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker satisfaisant aux hypothèses du préambule de la section 4.3. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  dans  $T^1\mathcal{M}$  et  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  la géodésique de lumière i.e. la solution des systèmes d'équations (III.6) et (III.7), issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors la trajectoire  $(x_u, \dot{x}_u/|\dot{x}_u|)$  admet un unique prolongement continu  $(\overset{\circ}{x}_u, \overset{\circ}{\dot{x}}_u/|\overset{\circ}{\dot{x}}_u|)$  bien défini sur tout  $\mathbb{R}^+$ , et dont la restriction aux intervalles  $]\tau_n, \tau_{n+1}[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est solution des systèmes équations (III.6) et (III.7) dans  $\mathcal{M}_n \subset \widehat{\mathcal{M}}$ .

Les trajectoires prolongées  $(\overset{\circ}{x}_u, \overset{\circ}{\dot{x}}_u/|\overset{\circ}{\dot{x}}_u|)$  s'expriment de la façon suivante :

– dans le cas euclidien, i.e. lorsque  $k = 0$  :

$$\overset{\circ}{x}_u := x_0 + \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|} \times \int_{\overset{\circ}{t}_0}^{\overset{\circ}{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)}, \quad \frac{\overset{\circ}{\dot{x}}_u}{|\overset{\circ}{\dot{x}}_u|} := \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|} ;$$

– dans le cas sphérique *i.e.* lorsque  $k = 1$  :

$$\dot{x}_u := \cos \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) x_0 + \sin \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} := -\sin \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) x_0 + \cos \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|};$$

– dans le cas hyperbolique *i.e.* lorsque  $k = -1$  :

$$\dot{x}_u := \cosh \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) x_0 + \sinh \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|},$$

$$\frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} := \sinh \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) x_0 + \cosh \left( \int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}_u} \frac{dv}{\alpha(v)} \right) \frac{\dot{x}_0}{|\dot{x}_0|}.$$

*Démonstration.* Le prolongement des composantes temporelles étant déterminé de façon unique (cf remarque III.10), les expressions des composantes spatiales sont obtenues comme dans les preuves des propositions III.3 et III.5 en intégrant directement les équations géodésiques (III.6) et (III.7) sur chaque intervalle  $]\tau_n, \tau_{n+1}[$ .  $\square$

Remarque III.11 — Géométriquement, comme l'illustre la figure suivante, les trajectoires prolongées dans la fibre sont simplement obtenues en concaténant les excursions géodésiques entre les temps d'atteinte successifs des temps  $T, 2T, 3T$  etc. par la fonction  $\dot{t}_u$ .

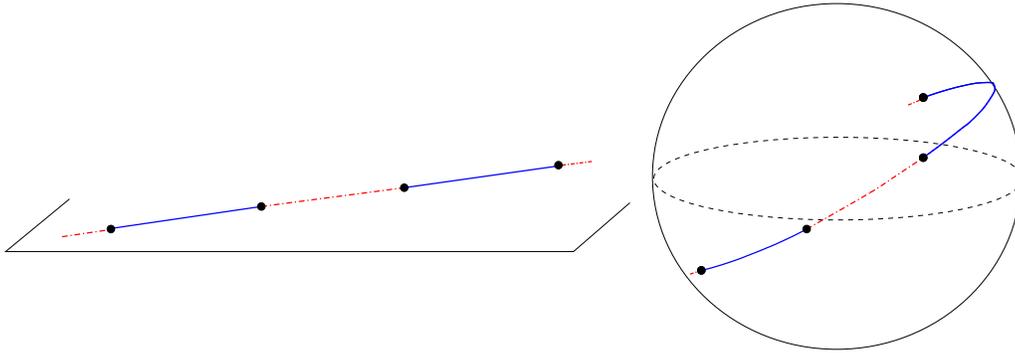


FIGURE 26: Prolongement des géodésiques par concaténation dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{S}^3$ .

**Remarque III.12** — Par construction, le comportement asymptotique lorsque  $u$  tend vers l'infini, des trajectoires prolongées  $(\dot{x}_u, \dot{x}_u/|\dot{x}_u|)$  est similaire à celui des trajectoires  $(x_u, \dot{x}_u/|\dot{x}_u|)$  décrit dans les corollaires III.3, III.4 et III.5 lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ , c'est-à-dire lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . En effet, lorsque  $u$  tend vers l'infini, on a naturellement :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{i_0}^{i_u} \frac{dv}{\alpha(v)} = \int_{i_0}^{+\infty} \frac{dv}{\alpha(v)} = +\infty.$$

## 4.4 Et lorsque l'effondrement est rapide ?

Nous expliquons à présent pourquoi il n'existe pas de prolongement naturel et canonique des géodésiques de lumière dans un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M}$  où l'effondrement est rapide. En dehors du cas sphérique, ce point n'est pas évident a priori puisque, bien que les composantes spatiales des géodésiques de lumière soient divergentes au voisinage du temps d'atteinte  $\tau$ , il se pourrait que l'on puisse les prolonger en adaptant la construction précédente d'un "chapelet" d'espace de Robertson-Walker à la nouvelle situation géométrique.

### 4.4.1 Explosion oscillatoire dans le cas sphérique

Commençons par écarter le cas d'un espace de Robertson-Walker mortel à fibre sphérique où l'effondrement est rapide, c'est-à-dire un espace du type  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$ , où  $T$  est fini et où l'inverse de  $\alpha$  n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . Dans ce cas, on sait d'après le corollaire III.5 que les composantes spatiales d'une géodésique de lumière  $(\xi_u, \dot{\xi}_u)$  sont divergentes au voisinage du temps d'atteinte  $\tau$ . En effet,  $x_u$  et  $\dot{x}_u/|\dot{x}_u|$  décrivent un grand cercle paramétré par  $\int_{t_0}^{t_u} dv/\alpha(v)$ . L'explosion étant de nature oscillatoire, il n'y a pas d'espoir de définir une limite à la trajectoire  $\xi_u = (t_u, x_u)$ , et donc d'autant moins de pouvoir la prolonger au delà du temps  $\tau$ .

### 4.4.2 Le cas où la fibre est de courbure négative ou nulle

Passons maintenant au cas a priori plus favorable d'un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  où  $M$  est de courbure négative ou nulle, *i.e.*  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . Pour simplifier, on suppose ici que la fibre  $M$  est euclidienne, le cas hyperbolique se traitant de façon similaire. On suppose de plus que

$$\int_0^{T/2} \frac{du}{\alpha(u)} = \int_{T/2}^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty. \quad (\text{III.10})$$

D'après le corollaire III.3, les composantes spatiales  $x_u$  des géodésiques de lumière dans  $\mathcal{M}$  s'en vont à l'infini dans une direction privilégiée lorsque  $u$  tend vers  $\tau$ . Elles convergent précisément vers des points de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ . Comme dans le cas d'un espace de Robertson-Walker où l'effondrement est lent, on est donc ici en mesure de munir l'espace  $\mathcal{M}$  d'une frontière naturelle et intrinsèque  $\partial\mathcal{M}_c$ . En considérant la suite d'espaces de Robertson-Walker  $\mathcal{M}^n := ]nT, (n+1)T[ \times_{\hat{\alpha}} M_n$ , chaque espace étant complété par sa frontière causale en un espace  $\widehat{\mathcal{M}}_c^n$ , la construction d'un "chapelet" d'espaces de Robertson-Walker analogue à celui du paragraphe 4.3.1 est à portée de main. Malheureusement, étant donné un point du bord  $\partial\mathcal{M}_c^-$  de  $\widehat{\mathcal{M}}_c$ , il est ici impossible de définir de façon univoque une trajectoire dans  $\widehat{\mathcal{M}}_c$  issue de ce point et dont la restriction à  $\mathcal{M}$  soit solution des équations géodésiques. La seule donnée d'un point  $(T, \delta_0, \Theta_0)$  du cône  $\partial\mathcal{M}_c^-$  ne permet en effet pas de caractériser une géodésique dans  $\mathcal{M}$ , en particulier une droite dans  $M = \mathbb{R}^3$  et une paramétrisation de cette droite. Précisément, la donnée d'un point  $(\delta_0, \Theta_0)$  du cône détermine seulement une hypersurface dans  $\mathcal{M}$  du même type que celle illustrée dans la figure 23.

À moins de faire un choix arbitraire parmi les géodésiques incluses dans cette hypersurface et les paramétrisations de ces courbes, il est donc impossible de "faire partir" une géodésique de lumière du bord causal  $\partial\mathcal{M}_c$  de l'espace  $\mathcal{M}$ . La situation est bien sûr analogue pour chaque espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}^n$  et par suite, il est impossible de concaténer des excursions géodésiques successives dans les différents espaces  $\mathcal{M}^n$ . Dans le cadre lorentzien, la notion de frontière causale étant la "bonne" notion de frontière lorsque l'on souhaite faire converger les géodésiques de lumière, et plus généralement les courbes causales, on conclut qu'il est impossible de prolonger ces géodésiques dans un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M}$  où l'effondrement est rapide, au delà du temps  $\tau$  où celles-ci atteignent la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .

Remarque III.13 — Comme on vient de le voir, un point  $(\delta_0, \Theta_0)$  du cône frontière  $\partial\mathcal{M}_c^-$  ne détermine pas de façon unique une géodésique dans  $\mathcal{M}$ . Cependant, c'est le cas si l'on prescrit un point de passage dans l'espace temps à cette géodésique. Par exemple, la trajectoire issue de  $(\delta_0, \Theta_0)$  au temps  $t_0 = 0$  et passant par le point  $(T/2, \mathbf{x})$  (où  $\langle \mathbf{x}, \Theta_0 \rangle = \delta_0$ ) est donnée par

$$x_u := \mathbf{x} + \Theta_0 \times \int_{t_u}^{T/2} \frac{dv}{\alpha(v)}, \quad \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \equiv \Theta_0.$$

Le choix du point de passage étant totalement arbitraire, nous nous pousserons pas plus loin l'étude du prolongement des géodésiques de lumière dans un univers mortel où l'effondrement est rapide.

### 4.4.3 Lorsque le facteur d'expansion est asymétrique

Avant de passer à l'étude de la diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker, nous montrons enfin que le prolongement des géodésiques de lumière est impossible dans les cas où le facteur d'expansion  $\alpha$  est asymétrique, c'est-à-dire les cas où

$$\int_0^{T/2} \frac{dv}{\alpha(v)} = +\infty, \quad \text{et} \quad \int_{T/2}^T \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty,$$

ou encore

$$\int_0^{T/2} \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty, \quad \text{et} \quad \int_{T/2}^T \frac{dv}{\alpha(v)} = +\infty.$$

La difficulté est ici la même que dans le paragraphe précédent. Plaçons nous par exemple dans le premier cas où l'inverse de  $\alpha$  est intégrable en  $T$  mais pas en zéro. Dans ce cas, la frontière de sortie  $\partial\mathcal{M}^+$  de l'espace  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  s'identifie à  $\{T\} \times M$ . La frontière d'entrée  $\partial\mathcal{M}^-$  est un cône de base  $\mathbb{S}^2$  comme dans le paragraphe précédent. Comme précédemment, la seule donnée d'un point dans la frontière d'entrée ne permet pas définir de façon unique une géodésique de lumière dans  $\mathcal{M}$ . Ici aussi il n'est donc pas possible de prolonger les trajectoires géodésiques dans  $\mathcal{M}$  au delà du temps d'atteinte de  $T$  même si dans le cas considéré, les composantes spatiales des trajectoires convergent dans la fibre  $M$  lorsque  $t_u$  tend vers  $T$ .

# La diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Systèmes d'équations satisfaits par la diffusion . . .</b>	<b>154</b>
1.1	Lorsque la fibre est euclidienne . . . . .	154
1.2	Lorsque la fibre est hyperbolique . . . . .	158
1.3	Lorsque la fibre est sphérique . . . . .	161
<b>2</b>	<b>Mise en évidence de sous-diffusions naturelles . . .</b>	<b>163</b>
2.1	La sous-diffusion temporelle . . . . .	163
2.2	Les sous-diffusions de dimension quatre . . . . .	165
<b>3</b>	<b>Existence, unicité, temps de vie des solutions . . .</b>	<b>169</b>
3.1	Existence et unicité de la diffusion temporelle . . .	169
3.2	Existence et unicité des composantes spatiales . . .	172
<b>4</b>	<b>Loi d'entrée de la diffusion en l'origine des temps</b>	<b>173</b>
4.1	Loi d'entrée de la diffusion temporelle . . . . .	173
4.2	Loi d'entrée de la diffusion globale . . . . .	178

---

Dans ce chapitre, nous explicitons les systèmes d'équations différentielles stochastiques satisfaits par la diffusion de Franchi et Le Jan dans les différents systèmes de coordonnées introduits au chapitre II sur les espaces de Robertson-Walker. Dans le fibré tangent d'un espace-temps de dimension quatre, ces systèmes d'équations sont de dimension sept. Nous exhibons ensuite plusieurs sous-diffusions naturelles de la diffusion initiale. L'étude de ces dernières, en particulier l'étude de la sous-diffusion temporelle au prochain chapitre, permettra de mieux appréhender le comportement asymptotique de la diffusion globale. Nous établissons l'existence et l'unicité des solutions des systèmes évoqués plus haut et montrons que ces solutions sont bien définies jusqu'à un temps d'explosion que nous précisons.

# 1 LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SATISFAITS PAR LA DIFFUSION DE FRANCHI ET LE JAN

Afin de pouvoir y faire référence dans la suite, nous explicitons dans cette section les systèmes d'équations différentielles satisfait par la diffusion relativiste dans les cartes introduites au paragraphe 1.2.3 du chapitre II. Rappelons que si  $\xi^\mu$  est un système de coordonnées sur une variété lorentzienne générale  $\mathcal{M}$  de dimension  $m + 1$ , et si  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  désignent les symboles de Christoffel usuels, alors la diffusion relativiste est un processus  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  à valeurs dans le fibré tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$ , solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} d\xi_s^\mu = \dot{\xi}_s^\mu ds, \\ d\dot{\xi}_s^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(\xi_s) \dot{\xi}_s^\rho \dot{\xi}_s^\nu ds + \frac{m \sigma^2}{2} \dot{\xi}_s^\mu ds + \sigma dM_s^\mu, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où la matrice de covariation quadratique des martingales  $M_s^\mu$  est donnée par

$$d\langle M^\mu, M^\nu \rangle_s = \left( \dot{\xi}_s^\mu \dot{\xi}_s^\nu + g^{\mu\nu}(\xi_s) \right) ds. \quad (\text{IV.2})$$

De plus, la diffusion est paramétrée par le temps propre  $s$ , *i.e.* la longueur d'arc. Elle vérifie donc la relation de pseudo-norme :

$$g_{\mu\nu}(\xi_s) \dot{\xi}_s^\mu \dot{\xi}_s^\nu = -1. \quad (\text{IV.3})$$

## 1.1 Lorsque la fibre est euclidienne

Nous nous intéressons tout d'abord au cas où la fibre  $M$  de l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  est euclidienne. On explicite le système (IV.1) en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.

### 1.1.1 En coordonnées cartésiennes

Lorsque l'on munit la fibre  $M = \mathbb{R}^3$  des coordonnées cartésiennes  $x = x^i = (x^1, x^2, x^3)$  la métrique  $g_{\mu\nu}$  du produit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$  est donnée par :

$$g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu = -dt^2 + \alpha^2(t) (|dx^1|^2 + |dx^2|^2 + |dx^3|^2).$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont alors :

$$\Gamma_{ii}^0 = \alpha(t)\alpha'(t), \quad \text{et} \quad \Gamma_{0i}^i = H(t) = \alpha'(t)/\alpha(t), \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

**Lemme IV.1** — Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^i = (x^1, x^2, x^3)$  désignent les coordonnées cartésiennes sur  $\mathbb{R}^3$ , la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^i = \dot{x}_s^i ds, \\ d\dot{t}_s = -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 ds + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s ds + dM_s^t, \\ d\dot{x}_s^i = \left( -2H(t_s) \dot{t}_s + \frac{3\sigma^2}{2} \right) \dot{x}_s^i ds + dM_s^{x^i}, \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \text{(IV.4)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \\ d\langle M^t, M^{x^i} \rangle_s = \sigma^2 \dot{t}_s \dot{x}_s^i ds, \\ d\langle M^{x^i}, M^{x^j} \rangle_s = \sigma^2 \left( \dot{x}_s^i \dot{x}_s^j + \frac{\delta_{ij}}{\alpha^2(t_s)} \right) ds. \end{array} \right.$$

De plus, la trajectoire  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  vérifie la relation de pseudo-norme :

$$\dot{t}_s^2 - 1 = \alpha^2(t_s) \times |\dot{x}_s|^2. \quad \text{(IV.5)}$$

Remarque IV.1 — Dans la relation de pseudo-norme (IV.5),  $|\dot{x}_s|$  désigne la norme euclidienne usuelle :

$$|\dot{x}_s|^2 = |\dot{x}_s^1|^2 + |\dot{x}_s^2|^2 + |\dot{x}_s^3|^2.$$

Cette norme ne dépend que des composantes  $(t_s, \dot{t}_s)$  du processus  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ . Autrement dit, l'équation sur la dérivée de  $\dot{t}_s$  dans le système (IV.4) ne fait intervenir que  $t_s$  et  $\dot{t}_s$  et le couple  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une sous diffusion de dimension deux du processus  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ . Nous verrons dans la prochaine section que ce fait est général, au sens où il a lieu que la fibre soit euclidienne, hyperbolique ou sphérique.

Remarque IV.2 — Par ailleurs, le fait que  $|\dot{x}_s|$  ne dépend que des composantes  $(t_s, \dot{t}_s)$  implique que la donnée du processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est équivalente à celle du processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ . Le corollaire suivant explicite le système d'équations vérifié par ce dernier.

**Corollaire IV.1** — Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times \mathbb{R}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, x)$  où  $x = x^i = (x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes sur  $\mathbb{R}^3$ , si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  désigne la diffusion relativiste, alors le processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s / |\dot{x}_s|)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^i = \dot{x}_s^i ds, \\ \\ dt_s = -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 ds + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s ds + dM_s^t, \\ \\ d \frac{\dot{x}_s^i}{|\dot{x}_s|} = -\frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \times \frac{\dot{x}_s^i}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}^i/|\dot{x}|}, \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \text{(IV.6)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^i, M^i \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \\ \\ d\langle M^i, M^{\dot{x}^i/|\dot{x}|} \rangle_s = 0, \\ \\ d\langle M^{\dot{x}^i/|\dot{x}|}, M^{\dot{x}^j/|\dot{x}|} \rangle_s = \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \left( \delta_{ij} - \frac{\dot{x}_s^i \dot{x}_s^j}{|\dot{x}_s|^2} \right) ds. \end{array} \right.$$

**Remarque IV.3** — Si l'on considère le processus  $\Theta_s = (\Theta_s^1, \Theta_s^2, \Theta_s^3)$  défini par le changement de temps :

$$\Theta_{C_s}^i := \frac{\dot{x}_s^i}{|\dot{x}_s|}, \quad \text{où} \quad C_s := \sigma^2 \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} du,$$

alors  $\Theta_s$  vérifie le système d'équations différentielles stochastiques :

$$d\Theta_s^i = -\Theta_s^i ds + dM_s^{\Theta^i}, \quad \text{avec} \quad d\langle M^{\Theta^i}, M^{\Theta^j} \rangle_s = (\delta_{ij} - \Theta_s^i \Theta_s^j) ds.$$

Le processus  $\Theta_s$  est donc un mouvement brownien sphérique sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Autrement dit,  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est mouvement brownien sphérique changé de temps. Ce résultat, bien connu pour la diffusion de Dudley qui correspond au cas où  $\alpha \equiv 1$  (voir par ex. [Bai08a]), est donc vérifié de façon générale dans un espace de Robertson-Walker dès lors que sa fibre est euclidienne.

### 1.1.2 En coordonnées polaires

Nous explicitons à présent le système d'équations différentielles stochastiques (IV.1) lorsque la fibre euclidienne d'un espace de Robertson-Walker est munie des coordonnées polaires  $(r, \theta) = (r, \phi, \psi)$ .

**Lemme IV.2** — *Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, r, \theta)$  où  $(r, \theta) = (r, \phi, \psi)$  sont les coordonnées polaires sur  $\mathbb{R}^3$ , la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :*

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dr_s = \dot{r}_s ds, \quad d\phi_s = \dot{\phi}_s ds, \quad d\psi_s = \dot{\psi}_s ds, \\ \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) \left( \dot{r}_s^2 + r_s^2 |\dot{\theta}_s|^2 \right) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d\dot{r}_s = \left[ -2H(t_s) \dot{t}_s \dot{r}_s + r_s |\dot{\theta}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{r}_s \right] ds + dM_s^r, \\ \\ d\dot{\phi}_s = \left[ -2 \left[ H(t_s) \dot{t}_s + \frac{\dot{r}_s}{r_s} \right] \dot{\phi}_s + \sin(\phi_s) \cos(\phi_s) \dot{\psi}_s^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{\phi}_s \right] ds + dM_s^{\phi}, \\ \\ d\dot{\psi}_s = \left[ -2 \left[ H(t_s) \dot{t}_s + \frac{\dot{r}_s}{r_s} \right] \dot{\psi}_s - 2 \cot(\phi_s) \dot{\phi}_s \dot{\psi}_s + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{\psi}_s \right] ds + dM_s^{\psi}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.7})$$

La matrice de covariation quadratique des martingales  $M_s^t$ ,  $M_s^r$ ,  $M_s^{\phi}$  et  $M_s^{\psi}$  est donnée par :

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} \dot{t}_s^2 - 1 & \dot{t}_s \dot{r}_s & \dot{t}_s \dot{\phi}_s & \dot{t}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{r}_s & \dot{r}_s^2 + \frac{1}{\alpha^2(t_s)} & \dot{r}_s \dot{\phi}_s & \dot{r}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{\phi}_s & \dot{r}_s \dot{\phi}_s & \dot{\phi}_s^2 + \frac{1}{\alpha^2(t_s) r_s^2} & \dot{\phi}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{\psi}_s & \dot{r}_s \dot{\psi}_s & \dot{\phi}_s \dot{\psi}_s & \dot{\psi}_s^2 + \frac{1}{\alpha^2(t_s) r_s^2 \sin^2(\phi_s)} \end{pmatrix}.$$

D'autre part,  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  vérifie la relation de pseudo-norme :

$$\dot{t}_s^2 - \alpha^2(t_s) \left( \dot{r}_s^2 + r_s^2 \left( \dot{\phi}_s^2 + \sin^2(\phi_s) \dot{\psi}_s^2 \right) \right) = 1.$$

## 1.2 Lorsque la fibre est hyperbolique

Nous explicitons maintenant le système (IV.1) qui définit la diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker dont la fibre est hyperbolique.

### 1.2.1 En coordonnées cartésiennes

On considère ici un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{H}^3$  et on réalise la fibre  $\mathbb{H}^3$  comme la partie positive de la pseudo-sphère de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ . On munit l'espace produit des coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes héritées de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . La relation de pseudo-norme (IV.3) s'écrit alors :

$$t_s^2 - 1 = \alpha^2(t_s) \left( -|\dot{x}_s^0|^2 + |\dot{x}_s^1|^2 + |\dot{x}_s^2|^2 + |\dot{x}_s^3|^2 \right).$$

**Lemme IV.3** — *Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times \mathbb{H}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^{1,3}$ , la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :*

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^{\mu} = \dot{x}_s^{\mu} ds, \\ \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d\alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} = \frac{3\sigma^2}{2} \alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} ds + x_s^{\mu} \times (t_s^2 - 1) ds + dM_s^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}}, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (t_s^2 - 1) ds, \\ \\ d\langle M^t, M^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}} \rangle_s = \alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} \dot{t}_s, \\ \\ d\langle M^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}}, M^{\alpha^2 \dot{x}^{\nu}} \rangle_s = \sigma^2 \left( \alpha^4(t_s) \dot{x}_s^{\mu} \dot{x}_s^{\nu} + \alpha^2(t_s) (\delta_{\mu}^{\nu} - 2\delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 + x_s^{\mu} x_s^{\nu}) \right) ds. \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

Comme dans les cas euclidien et sphérique, la donnée du système d'équations vérifié par la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est équivalente à la donnée du système d'équation vérifié par  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ .

**Corollaire IV.2** — Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times \mathbb{H}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, x)$  où  $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^{1,3}$ , si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  désigne la diffusion relativiste, alors le processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^\mu = \dot{x}_s^\mu ds, \\ \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} = x_s^\mu \times \frac{\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}}{\alpha(t_s)} ds - \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \times \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \\ \\ d\langle M^t, M^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = 0, \\ \\ d\langle M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, M^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \left[ \delta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + x_s^\mu x_s^\nu - \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} \frac{\dot{x}_s^\nu}{|\dot{x}_s|} \right] ds. \end{array} \right. \quad (\text{IV.9})$$

Remarque IV.4 — La situation est ici plus complexe que dans le cas euclidien. En effet, dans le cas hyperbolique, le processus  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  n'est pas une diffusion contrairement au cas euclidien. D'autre part, le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  n'est pas ici un mouvement brownien changé de temps.

### 1.2.2 En coordonnées polaires

On considère à présent un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_a \mathbb{H}^3$  que l'on munit des coordonnées  $\xi^\mu = (t, x)$  où  $x = (\chi, \phi, \psi)$  désignent les coordonnées polaires sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , c'est-à-dire :

$$x = (\cosh(\chi), \sinh(\chi) \sin(\phi) \cos(\psi), \sinh(\chi) \sin(\phi) \sin(\psi), \sinh(\chi) \cos(\phi)).$$

Le lemme suivant explicite le système d'équations différentielles stochastiques satisfait par la diffusion de Franchi et Le Jan dans cette carte.

**Lemme IV.4** — *Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{H}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = (\chi, \phi, \psi)$  sont les coordonnées polaires sur  $\mathbb{H}^3$ , la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :*

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad d\chi_s = \dot{\chi}_s ds, \quad d\phi_s = \dot{\phi}_s ds, \quad d\psi_s = \dot{\psi}_s ds \\ \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) \left( \dot{\chi}_s^2 + \sinh^2(\chi_s) |\dot{\theta}_s|^2 \right) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d\dot{\chi}_s = \left[ -2H(t_s) \dot{t}_s \dot{\chi}_s + \sinh(\chi_s) \cosh(\chi_s) |\dot{\theta}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{\chi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\chi}}, \\ \\ d\dot{\phi}_s = \left[ -2 \left[ H(t_s) \dot{t}_s + \coth(\chi_s) \dot{\chi}_s \right] \dot{\phi}_s + \sin(\phi_s) \cos(\phi_s) \dot{\psi}_s^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{\phi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\phi}}, \\ \\ d\dot{\psi}_s = \left[ -2 \left[ H(t_s) \dot{t}_s + \coth(\chi_s) \dot{\chi}_s + \cot(\phi_s) \dot{\phi}_s \right] \dot{\psi}_s + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{\psi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\psi}}. \end{array} \right. \quad (\text{IV.10})$$

La matrice de covariation quadratique des martingales  $M_s^t$ ,  $M_s^{\dot{\chi}}$ ,  $M_s^{\dot{\phi}}$  et  $M_s^{\dot{\psi}}$  est donnée par :

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} \dot{t}_s^2 - 1 & \dot{t}_s \dot{\chi}_s & \dot{t}_s \dot{\phi}_s & \dot{t}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{\chi}_s & \dot{\chi}_s^2 + \frac{1}{\alpha^2(t_s)} & \dot{\chi}_s \dot{\phi}_s & \dot{\chi}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{\phi}_s & \dot{\chi}_s \dot{\phi}_s & \dot{\phi}_s^2 + \frac{\alpha^{-2}(t_s)}{\sinh^2(\chi_s)} & \dot{\phi}_s \dot{\psi}_s \\ \dot{t}_s \dot{\psi}_s & \dot{\chi}_s \dot{\psi}_s & \dot{\phi}_s \dot{\psi}_s & \dot{\psi}_s^2 + \frac{\alpha^{-2}(t_s)}{\sinh^2(\chi_s) \sin^2(\phi_s)} \end{pmatrix}.$$

De plus, la trajectoire  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  vérifie la relation de pseudo-norme

$$\dot{t}_s^2 - 1 = \alpha^2(t_s) \left( \dot{\chi}_s^2 + \sinh^2(\chi_s) \left( \dot{\phi}_s^2 + \sin^2(\phi_s) \dot{\psi}_s^2 \right) \right).$$

### 1.3 Lorsque la fibre est sphérique

Nous traitons enfin le cas des espaces de Robertson-Walker dont la fibre est sphérique. Nous explicitons le système d'équation (IV.1) en coordonnées cartésiennes.

#### 1.3.1 En coordonnées cartésiennes

On considère ici un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$  dont la fibre est sphérique. On munit cet espace des coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes héritées de l'espace euclidien ambiant  $\mathbb{R}^4$ . La relation de pseudo-norme (IV.3) s'écrit alors

$$\dot{t}_s^2 - 1 = \alpha^2(t_s) \times |\dot{x}_s|^2, \quad \text{où} \quad |\dot{x}_s|^2 = |\dot{x}^0|^2 + |\dot{x}^1|^2 + |\dot{x}^2|^2 + |\dot{x}^3|^2.$$

**Lemme IV.5** — *Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times \mathbb{S}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^4$ , la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :*

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^{\mu} = \dot{x}_s^{\mu} ds, \\ \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d\alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} = \frac{3\sigma^2}{2} \alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} ds - x_s^{\mu} \times (\dot{t}_s^2 - 1) ds + dM_s^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}}, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \\ \\ d\langle M^t, M^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}} \rangle_s = \alpha^2(t_s) \dot{x}_s^{\mu} \dot{t}_s, \\ \\ d\langle M^{\alpha^2 \dot{x}^{\mu}}, M^{\alpha^2 \dot{x}^{\nu}} \rangle_s = \sigma^2 (\alpha^4(t_s) \dot{x}_s^{\mu} \dot{x}_s^{\nu} + \alpha^2(t_s) (\delta_{\mu\nu} - x_s^{\mu} x_s^{\nu})) ds. \end{array} \right. \quad (\text{IV.11})$$

Comme dans la remarque IV.2, la norme  $|\dot{x}_s|$  étant déterminée par le couple  $(t_s, \dot{t}_s)$ , la donnée du système d'équations vérifié par la diffusion de Franchi et Le Jan  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est équivalente à la donnée du système d'équation vérifié par  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ .

**Corollaire IV.3** — Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times \mathbb{S}^3$ , muni du système de coordonnées  $\xi^\mu = (t, x)$  où  $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^4$ , si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  désigne la diffusion relativiste, alors le processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^\mu = \dot{x}_s^\mu ds, \\ dt_s = \left[ -\alpha(t_s) \alpha'(t_s) |\dot{x}_s|^2 + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ d \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} = -x_s^\mu \times \frac{\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}}{\alpha(t_s)} ds - \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \times \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \\ d\langle M^t, M^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = 0, \\ d\langle M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, M^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \left( \delta_{\mu\nu} - x_s^\mu x_s^\nu - \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} \frac{\dot{x}_s^\nu}{|\dot{x}_s|} \right) ds. \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

Remarque IV.5 — Comme dans le cas hyperbolique, la situation est ici plus complexe que dans le cas euclidien au sens où le processus  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  n'est pas une diffusion et le vecteur dérivé renormalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  n'est pas un mouvement brownien changé de temps.

## 2 MISE EN ÉVIDENCE DE SOUS-DIFFUSIONS NATURELLES DE LA DIFFUSION GLOBALE

Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  de dimension quatre, la diffusion de Franchi et Le Jan est de dimension sept. Quelque soit la nature de la fibre  $M$ , les différents systèmes d'équations différentielles stochastiques vérifiées par le processus sont suffisamment complexes pour que le comportement local ou asymptotique de la diffusion soit difficile à appréhender directement. Par ailleurs, les résultats classiques qui permettent d'analyser les trajectoires des processus stochastiques, par ex. les théorèmes de comparaisons, sont essentiellement unidimensionnels. Aussi, il semble irraisonnable de s'attaquer directement à l'étude de la diffusion de dimension sept et préférable, dans un premier temps, de chercher à en exhiber des sous-diffusions. La symétrie des espaces de Robertson-Walker et leur structure de produit tordu vont nous aider dans cette tâche. En effet, nous avons déjà noté dans la remarque IV.1 que le couple  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une sous-diffusion de dimension deux de la diffusion globale. En utilisant la symétrie de la fibre des espace-temps ainsi que les intégrales premières obtenues au chapitre précédent dans l'étude des géodésiques, nous allons exhiber d'autres sous-diffusions de dimension quatre.

### 2.1 La sous-diffusion temporelle

Étant donné un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  et la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , nous montrons dans ce paragraphe que les composantes de la diffusion à valeurs dans l'espace tangent à la base  $I$  constituent une sous-diffusion de dimension deux de la diffusion globale.

#### 2.1.1 La sous-diffusion temporelle $(t_s, \dot{t}_s)$

Par définition, la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) \in T^1\mathcal{M}$  est paramétrée par le temps propre  $s$ . Elle vérifie donc la relation de pseudo-norme  $g_{\mu\nu}(\xi_s)\dot{\xi}_s^{\mu}\dot{\xi}_s^{\nu} = -1$ . Dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , cette équation s'écrit simplement

$$\dot{t}_s^2 - 1 = \alpha^2(t_s)g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s),$$

où  $g^M$  désigne la métrique riemannienne sur la fibre  $M$ . Par ailleurs, l'équation vérifiée par la différentielle de  $t_s$  est

$$d\dot{t}_s = -\alpha(t_s)\alpha'(t_s)g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s)ds + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + dM_s^t,$$

où le crochet de  $M^t$  ne dépend que de  $\dot{t}_s$  :  $d\langle M^t \rangle_s = \sigma^2(\dot{t}_s^2 - 1)ds$ . En utilisant la relation de pseudo-norme, cette équation se réécrit :

$$d\dot{t}_s = -H(t_s)(\dot{t}_s^2 - 1)ds + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + dM_s^t.$$

Quelque soit la fibre d'un espace de Robertson-Walker, on a donc le résultat suivant :

**Proposition IV.1** — Soient  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker et  $\xi^\mu = (t, x)$  un système de coordonnées sur  $\mathcal{M}$ . Si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , alors le couple  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une diffusion de dimension deux qui vérifie le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dt_s = \dot{t}_s ds, & d\dot{t}_s = \left[ -H(t_s)(\dot{t}_s^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \text{où } d\langle M^t \rangle_s = \sigma^2(\dot{t}_s^2 - 1) ds. \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Remarque IV.6 — Le rôle de la fonction de Hubble  $H$  apparaît clairement dans l'équation (IV.13). Si l'on pense à un univers éternel en expansion où  $H$  est décroissante et positive, cette fonction joue le rôle d'une force de rappel pour le processus  $\dot{t}_s$ . Nous verrons en particulier dans le prochain chapitre que si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) > 0$  alors ce processus est récurrent au sens de Harris. Au contraire, nous verrons que si  $H$  tend "assez" vite vers zéro, alors  $\dot{t}_s$  est transitoire.

### 2.1.2 Réécriture de la sous-diffusion temporelle

Dans l'étude des géodésiques de genre temps paramétrées par le temps propre menée au paragraphe 2.2 du chapitre précédent, nous avons vu que le fait que  $a = \alpha(t_s)\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}$  est une intégrale première des géodésiques permet d'intégrer les composantes temporelles de celles-ci. Le générateur infinitésimal de la diffusion de Franchi et Le Jan étant une perturbation du générateur du flot géodésique sur  $T^1\mathcal{M}$ , on s'attend à ce que le processus

$$a_s := \alpha(t_s)\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}$$

joue un rôle important dans l'étude de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ . La proposition suivante précise le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par le couple  $(t_s, a_s)$ .

**Corollaire IV.4** — Soient  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker et  $\xi^{\mu} = (t, x)$  un système de coordonnées sur  $\mathcal{M}$ . Si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , alors le couple  $(t_s, a_s)$  est une diffusion dégénérée qui vérifie le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dt_s = \sqrt{1 + \frac{a_s^2}{\alpha^2(t_s)}} ds, \\ da_s = \frac{3\sigma^2}{2} a_s ds + \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s} ds + dM_s^a, \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

avec

$$d\langle M^a \rangle_s = \sigma^2 (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) ds.$$

Remarque IV.7 — Dans la suite, nous ferons référence aux diffusions  $(t_s, \dot{t}_s)$  ou  $(t_s, a_s)$  sous le même nom de *diffusion temporelle*. Dans la section 3.1 de ce chapitre, nous montrons que pour toute condition initiale raisonnable, les systèmes (IV.13) et (IV.14) admettent une unique solution définie jusqu'à un temps d'explosion que nous précisons. L'étude du comportement asymptotique de la diffusion temporelle est l'objet du prochain chapitre.

## 2.2 Les sous-diffusions de dimension quatre

Nous exhibons à présent des sous-diffusions de dimension quatre de la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ . Tout comme dans le cas de la sous-diffusion temporelle, l'existence de ces sous-diffusions est due à la structure de produit tordu des espaces de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , mais aussi symétrie maximale de leur fibre. Nous distinguons ici les cas où la fibre  $M$  est munie d'un système de coordonnées cartésiennes ou polaires/sphériques.

### 2.2.1 Sous-diffusions en coordonnées cartésiennes

On considère ici un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , muni du système de coordonnées  $\xi^{\mu} = (t, x)$  où  $x = x^{\mu} = (x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes lorsque la fibre  $M$  est euclidienne et  $x = x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  sont les coordonnées cartésiennes héritées de  $\mathbb{R}^4$  ou  $\mathbb{R}^{1,3}$  lorsque  $M = \mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . En observant les trois systèmes d'équations (IV.6), (IV.12) et (IV.9), on remarque que, quelque soit la nature de la fibre  $M$ , l'équation satisfaite par les processus  $\dot{x}_s^{\mu}/|\dot{x}_s|$  ne fait intervenir que les composantes  $t_s, \dot{t}_s, x_s^{\mu}$  et  $\dot{x}_s^{\mu}/|\dot{x}_s|$  de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ . Aussi, on a l'énoncé suivant :

**Corollaire IV.5** — Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker où  $M$  est munie de coordonnées cartésiennes. Si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  désigne la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ , et si  $\mu \in \{1, 2, 3\}$  lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$  lorsque  $M = \mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , alors le processus  $(t_s, x_s^\mu, \dot{t}_s, \dot{x}_s^\mu/|\dot{x}_s|)$  est une sous-diffusion de dimension quatre de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ , et vérifie le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \dot{t}_s ds, \quad dx_s^\mu = \dot{x}_s^\mu ds, \\ \\ dt_s = \left[ -H(t_s) (\dot{t}_s^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \\ d \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} = -k \times x_s^\mu \times \frac{\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}}{\alpha(t_s)} ds - \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \times \frac{\dot{x}_s^i}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d\langle M^t, M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \quad d\langle M^t, M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|} \rangle_s = 0, \\ \\ d\langle M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|} \rangle_s = \frac{\sigma^2}{\dot{t}_s^2 - 1} \left[ 1 - 2\delta_\mu^0 \delta_k^{-1} - k |x_s^\mu|^2 - \frac{|\dot{x}_s^\mu|^2}{|\dot{x}_s|^2} \right] ds. \end{array} \right. \quad (\text{IV.15})$$

### 2.2.2 La sous-diffusion radiale en coordonnées polaires

Dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre euclidienne est munie des coordonnées polaires ( $r \equiv \chi, \theta$ ), on s'attend naturellement pour des raisons de symétrie à ce que les composantes "radiales"  $(t_s, \dot{t}_s, \chi_s, \dot{\chi}_s)$  de la diffusion de Franchi et Le Jan  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, \chi_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{\chi}_s, \dot{\theta}_s)$  constituent une sous-diffusion de dimension 4. Le corollaire suivant, qui est une conséquence directe des lemmes IV.2, IV.4 et de la relation de pseudo-norme, montre que c'est effectivement le cas lorsque la fibre est euclidienne, mais aussi lorsque celle-ci est hyperbolique et sphérique. Rappelons que selon la nature de la fibre  $M$ , les systèmes de coordonnées polaires et sphériques sont donnés par :

- $x = (x^1, x^2, x^3) = (r = \chi, \theta)$ , lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ;
- $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (\cosh(\chi), \sinh(\chi)\theta)$ , lorsque  $M = \mathbb{H}^3$  ;
- $s = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (\cos(\chi), \sin(\chi)\theta)$ , lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ .

Par ailleurs, on rappelle que la fonction  $f$  désigne la fonction l'identité lorsque  $M = \mathbb{H}^3$ , la fonction sinus hyperbolique lorsque  $M = \mathbb{H}^3$ , et la fonction sinus lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ .

**Corollaire IV.6** — Soit  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, \chi_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{\chi}_s, \dot{\theta}_s)$  la diffusion relativiste sur un espace de Robertson-Walker dont la fibre  $M$  est munie des coordonnées polaires ou sphériques. Alors le processus  $(t_s, \chi_s, \dot{t}_s, \dot{\chi}_s)$  est une sous-diffusion de dimension 4 de la diffusion globale et vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} dt_s = \dot{t}_s ds, & d\chi_s = \dot{\chi}_s ds, \\ dt_s = \left[ -H(t_s)(\dot{t}_s^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ d\dot{\chi}_s = \left[ -2H(t_s)\dot{t}_s\dot{\chi}_s + \frac{df}{d\chi}(\chi_s) \left[ \frac{\dot{t}_s^2 - 1}{\alpha^2(t_s)} - \dot{\chi}_s^2 \right] + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{\chi}_s \right] ds + dM_s^{\dot{\chi}}. \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

La matrice de covariation quadratique de  $M_s^t$ ,  $M_s^{\dot{\chi}}$  est donnée par :

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} \dot{t}_s^2 - 1 & \dot{t}_s\dot{\chi}_s \\ \dot{t}_s\dot{\chi}_s & \dot{\chi}_s^2 + \frac{1}{\alpha^2(t_s)} \end{pmatrix}.$$

**Remarque IV.8** — Dans la suite, en référence au cas euclidien, nous désignerons le processus  $(t_s, \chi_s, \dot{t}_s, \dot{\chi}_s)$  par *diffusion radiale*. La détermination de son comportement asymptotique au chapitre IV, en particulier dans les cas d'une expansion lente ou d'un effondrement rapide lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , sera décisive pour la compréhension du comportement asymptotique de la diffusion globale.

### 2.2.3 Réécriture de la sous-diffusion radiale

Comme pour le cas de la sous-diffusion temporelle, il est utile traduire le système (IV.16) satisfait par la diffusion radiale en terme des intégrales premières des géodésiques de genre temps. Introduisons donc les processus

$$\begin{aligned} \vec{b}_s &:= \alpha^2(t_s) f^2(\chi_s) \theta_s \wedge \dot{\theta}_s, & c_s &:= \alpha^2(t_s) \dot{\chi}_s, \\ b_s &:= |\vec{b}_s| = \alpha^2(t_s) f^2(\chi_s) |\dot{\theta}_s|, & \rho_s &:= b_s/a_s. \end{aligned}$$

En fonction de  $(\chi_s, a_s, b_s, c_s)$ , la relation de pseudo-norme (IV.3) s'écrit :

$$a_s^2 = \frac{b_s^2}{f^2(\chi_s)} + c_s^2. \quad (\text{IV.17})$$

ou encore

$$f^2(\chi_s) \left(1 - \frac{c_s^2}{a_s^2}\right) = \rho_s^2. \quad (\text{IV.18})$$

**Proposition IV.2** — Soit  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, \chi_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{\chi}_s, \dot{\theta}_s)$  la diffusion relativiste sur un espace de Robertson-Walker dont la fibre  $M$  est munie des coordonnées polaires ou sphériques. Alors, le processus  $(t_s, \chi_s, a_s, b_s, c_s)$  est une diffusion dégénérée vérifiant le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} dt_s = \sqrt{1 + \frac{a_s^2}{\alpha^2(t_s)}} ds, \quad da_s = \frac{3\sigma^2}{2} a_s ds + \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s} ds + dM_s^a, \\ d\chi_s = \frac{c_s}{\alpha^2(t_s)} ds, \quad dc_s = \frac{3\sigma^2}{2} c_s ds + \frac{\frac{df}{d\chi}(\chi_s) \times b_s^2}{\alpha^2(t_s) f^3(\chi_s)} ds + dM_s^c, \\ db_s = \frac{3\sigma^2}{2} b_s ds + \frac{\sigma^2 \alpha^2(t_s) f^2(\chi_s)}{2b_s} ds + dM_s^b. \end{array} \right. \quad (\text{IV.19})$$

La matrice de variation quadratique des martingales  $M^a$ ,  $M^b$ ,  $M^c$  est :

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} a_s^2 + \alpha^2(t_s) & (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) \frac{b_s}{a_s} & (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) \frac{c_s}{a_s} \\ (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) \frac{b_s}{a_s} & b_s^2 + \alpha^2(t_s) f^2(\chi_s) & b_s c_s \\ (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) \frac{c_s}{a_s} & b_s c_s & c_s^2 + \alpha^2(t_s) \end{pmatrix}.$$

**Remarque IV.9** — En vertu de la relation de pseudo-norme (IV.17), le processus  $(t_s, \chi_s, a_s, b_s, c_s, r_s)$  est une diffusion de dimension quatre. Elle ne fait intervenir que les composantes  $t_s$ ,  $\dot{t}_s$ ,  $\chi_s$  et  $\dot{\chi}_s$  de la diffusion initiale. Dans la suite, nous ferons aussi référence à cette diffusion sous le nom de *diffusion radiale*.

### 3 EXISTENCE, UNICITÉ, TEMPS DE VIE DES SOLUTIONS

Dans cette section, nous montrons que dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$ , le système d'équations différentielles stochastiques (IV.1) qui définit la diffusion de Franchi et Le Jan admet une solution forte  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$ , solution bien définie jusqu'au temps d'atteinte de la borne supérieure  $T$  de l'intervalle  $I$  par le processus croissant  $t_s$ . Dans un premier paragraphe, nous établissons l'existence et l'unicité des solutions pour le système (IV.13) satisfait par la sous-diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ . Nous montrons ensuite dans le paragraphe 3.2 l'existence et l'unicité des composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s)$  de la diffusion.

#### 3.1 Existence et unicité de la diffusion temporelle

Nous montrons ici que le système d'équations différentielles stochastiques (IV.13) qui régit l'évolution de la sous-diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  admet une solution forte, bien définie jusqu'au temps d'atteinte de  $T$  par le processus croissant  $t_s$ .

**Proposition IV.3** — *Soient  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker et  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  une condition initiale raisonnable dans  $T^1\mathcal{M}$ . Si l'espace  $\mathcal{M}$  est éternel, alors le système (IV.13) admet une unique solution forte  $(t_s, \dot{t}_s)$  issue de  $(t_0, \dot{t}_0)$ , définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ . Presque sûrement, pour tout temps propre  $0 < s < +\infty$ , cette solution vérifie de plus  $\dot{t}_s > 1$ . Si  $\mathcal{M}$  est un univers mortel, le système (IV.13) admet une unique solution forte  $(t_s, \dot{t}_s)$  issue de  $(t_0, \dot{t}_0)$ , définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau = \sup\{s, t_s \leq T\}$ , qui est fini presque sûrement. Là encore, presque sûrement, on a  $\dot{t}_s > 1$  pour tout  $0 < s < \tau$ .*

*Démonstration.* On fixe  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  une condition initiale raisonnable dans  $T^1\mathcal{M}$ . Les coefficients du système (IV.13) étant des fonctions continues des variables  $(t, \dot{t})$ , d'après les théorèmes d'existence usuels (par ex. théorème (2.3) p. 173 de [IW89]), il admet une solution définie jusqu'à un temps d'explosion éventuel. D'après la relation de pseudo-norme (IV.3), si  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une telle solution, tant que celle-ci est bien définie, on a  $\dot{t}_s \geq 1$  et le processus  $t_s$  est donc strictement croissant. Le coefficient de diffusion dans l'équation du système (IV.13) vérifiée par  $\dot{t}_s$  étant seulement une fonction hölderienne au voisinage de  $\dot{t} = 1$  (d'exposant  $1/2$ ), on ne peut pas affirmer directement par les théorèmes d'unicité usuels (sous régularité lipschitzienne) que la solution est unique. On peut passer outre cette difficulté par un changement de coordonnées adapté. Rappelons en effet que la donnée du couple  $(t_s, \dot{t}_s)$

est équivalente à celle du couple  $(t_s, a_s)$  où  $a_s = \alpha(t_s)\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}$ . Par la formule d'Itô, on montre que le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par le couple  $(t_s, a_s^2)$  est

$$\begin{cases} dt_s = \sqrt{1 + \frac{a_s^2}{\alpha^2(t_s)}} ds, \\ da_s^2 = 4\sigma^2 a_s^2 ds + 3\sigma^2 \alpha^2(t_s) ds + dM_s^{a^2}, \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

où  $d\langle M^{a^2} \rangle_s = 4\sigma^2 a_s^2 (a_s^2 + \alpha^2(t_s)) ds$ . Naturellement, établir la proposition revient à montrer que ce dernier système admet une solution forte, bien définie jusqu'au temps d'atteinte de  $T$  par le processus croissant  $t_s$ . Or les coefficients du système (IV.20) sont maintenant des fonctions continues et localement lipschitziennes du couple  $(t, a^2)$  sur l'ensemble  $]0, T[ \times ]0, +\infty[$ . D'après les théorèmes d'existence et d'unicité usuels sous régularité lipschitzienne (par ex. théorème 1.1.9 de [Hsu00]), ce système admet une solution forte bien définie jusqu'au temps  $\tau \wedge \tau'$ , où

$$\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}, \quad \text{et} \quad \tau' := \inf\{s > 0, a_s = +\infty\}.$$

En fait, le processus  $a_s$  n'explose pas avant le temps  $\tau : \tau \leq \tau'$  presque sûrement. En effet, fixons un entier  $n_0$  tel que  $t_0 \leq T - 1/n_0$  et introduisons les temps  $\tau_n := \inf\{s > 0, t_s \geq n \wedge (T - 1/n)\}$  pour tout entier  $n \geq n_0$ . Les coefficients de l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $a_s^2$  sont des fonctions à croissance au plus linéaire de la variable  $a^2$  sur chaque intervalle  $[0, \tau_n[$ . Cette condition de croissance est suffisante pour assurer que, presque sûrement, le processus  $a_s^2$  n'explose pas avant le temps  $\tau_n$  (proposition 1.1.11 de [Hsu00]). Autrement dit on a  $\tau_n \leq \tau'$  *p.s.* pour tout entier  $n \geq n_0$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient bien  $\tau \leq \tau'$ . Bien entendu, dans le cas d'un univers mortel où  $T < +\infty$ , comme  $t_s \geq t_0 + s$ , le temps d'atteinte  $\tau$  est fini presque sûrement. Dans le cas d'un univers éternel où  $T = +\infty$ , on a  $\tau = +\infty$  presque sûrement. En effet, d'après le système (IV.13), il existe un mouvement brownien réel standard  $B$  tel que le processus  $\dot{t}_s$  vérifie l'équation :

$$d\dot{t}_s = \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s ds - H(t_s) (\dot{t}_s^2 - 1) ds + \sigma \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1} dB_s. \quad (\text{IV.21})$$

On rappelle que dans un univers éternel, la fonction de Hubble  $H$  est positive ou nulle. Par ailleurs, on a toujours  $\dot{t}_s \geq 1$ . On montre alors (cas particulier

du lemme V.4 du prochain chapitre) que le processus  $\dot{t}_s$  est presque sûrement majoré par la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$du_s = \frac{3\sigma^2}{2}u_s ds + \sigma\sqrt{u_s^2 - 1}dB_s.$$

Les coefficients de cette dernière équation étant à croissance au plus linéaire, d'après la proposition 1.1.11 de [Hsu00], sa solution  $u_s$  est bien définie pour tous les temps  $s \geq 0$ . Comme  $1 \leq \dot{t}_s \leq u_s$ , on obtient bien que dans le cas d'un univers éternel, le temps d'explosion de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  est infini presque sûrement.

Il reste à montrer que presque sûrement  $\dot{t}_s > 1$  sur l'intervalle  $]0, \tau[$  ou de manière équivalente  $a_s > 0$ . Distinguons les cas  $\dot{t}_0 = 1$  et  $\dot{t}_0 > 1$ . Supposons tout d'abord que  $\dot{t}_0 = 1$  et introduisons le temps  $\tau'' = \inf\{s > 0, \dot{t}_s > 1\}$ . Presque sûrement, on a alors  $\tau'' = 0$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\tau''$  est strictement positif avec une probabilité non nulle. Comme  $t_s$  est strictement croissant, en intégrant l'équation (IV.21) entre 0 et  $\tau''/2$ , on aurait alors la contradiction

$$0 = \dot{t}_{\frac{\tau''}{2}} - 1 + \int_0^{\frac{\tau''}{2}} \left[ H(t_u) (\dot{t}_u^2 - 1) du - \sigma\sqrt{\dot{t}_u^2 - 1}dB_u \right] = \frac{3\sigma^2}{2} (t_{\frac{\tau''}{2}} - t_0) > 0.$$

On peut donc toujours se ramener au cas où  $\dot{t}_0 > 0$  *i.e.*  $a_0 > 0$ . Dans ce cas, on a naturellement  $\tau''' := \inf\{s > 0, \dot{t}_s = 1\} = \inf\{s > 0, a_s = 0\} > 0$  presque sûrement. D'après le corollaire IV.4, le crochet du processus  $a_s$  est donné par  $d\langle a \rangle_s = \sigma^2(a_s^2 + \alpha^2(t_s))ds$ . Il existe donc deux mouvements brownien réels standard indépendants  $B$  et  $B'$  tel que

$$da_s = \frac{3\sigma^2}{2}a_s ds + \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s} ds + \sigma a_s dB_s + \sigma \alpha(t_s) dB'_s.$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction logarithme, on obtient alors que pour un nouveau mouvement brownien standard  $B''$  et pour tout  $0 \leq s < \tau'''$  :

$$a_s = a_0 \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} \int_0^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du + B'' \left(\sigma^2 \int_0^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du\right)\right).$$

D'après le début de la preuve, le processus  $a_s$  est bien défini pour tous les temps  $s < \tau$ . D'autre part, pour tout  $s < \tau$ , l'exponentielle  $\exp(\sigma^2 s + \sigma B_s)$  est finie presque sûrement et strictement positive. L'intégrale  $\int_0^s \alpha^2(t_u) du / a_u^2 du$  est donc finie presque sûrement, pour tout  $s < \tau$ . On en déduit que, presque sûrement, pour tout  $s < \tau$ , le processus  $a_s$  est strictement positif, c'est-à-dire  $\tau''' = +\infty$  *p.s.*

□

### 3.2 Existence et unicité des composantes spatiales

Nous établissons à présent l'existence et l'unicité des composantes spatiales de la diffusion relativiste dans les espaces de Robertson-Walker. On montre ainsi la proposition suivante.

**Proposition IV.4** — *Soient  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker et  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  une condition initiale raisonnable. Alors, le système (IV.1) qui définit la diffusion relativiste admet une unique solution forte  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  et qui est définie jusqu'au temps d'explosion de la diffusion temporelle  $\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}$ .*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité des solutions des composantes temporelles  $(t_s, \dot{t}_s)$  de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est assurée par la proposition IV.3. Il reste à montrer l'existence et l'unicité des composantes spatiales de la diffusion. Nous choisissons ici de travailler en coordonnées cartésiennes. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que les systèmes d'équations (IV.6), (IV.8) et (IV.11) qui décrivent l'évolution du processus  $(t_s, x_s, \dot{t}_s, \alpha^2(t_s)\dot{x}_s)$  selon la nature de la fibre  $M$ , admettent une unique solution issue de  $(t_0, x_0, \dot{t}_0, \alpha^2(t_0)\dot{x}_0)$ . En fonction de la courbure  $k \in \{0, 1, -1\}$  de la fibre, les trois systèmes d'équations (IV.6), (IV.8) et (IV.11) s'écrivent sous la forme compacte :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_s^{\mu} = \alpha^2(t_s)\dot{x}_s^{\mu} \times \frac{1}{\alpha^2(t_s)} ds, \\ d\alpha^2(t_s)\dot{x}_s^{\mu} = \frac{3\sigma^2}{2}\alpha^2(t_s)\dot{x}_s^{\mu} ds - k \times x_s^{\mu} (\dot{t}_s^2 - 1) ds + dM_s^{\alpha^2\dot{x}^{\mu}}, \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

où

$$d\langle M^{\alpha^2\dot{x}^{\mu}}, M^{\alpha^2\dot{x}^{\mu}} \rangle_s = \sigma^2 (|\alpha^2(t_s)\dot{x}_s^{\mu}|^2 + \alpha^2(t_s) (1 - 2\delta_{\mu}^0\delta_k^{-1} - k|x_s^{\mu}|^2)) ds.$$

Les coefficients du système (IV.22) sont continus, il admet donc une solution  $(x_s, \alpha^2(t_s)\dot{x}_s)$  issue de  $(x_0, \alpha^2(t_0)\dot{x}_0)$ , définie jusqu'à un temps d'explosion éventuel. Par ailleurs, d'après la proposition IV.3 et la relation de pseudo-norme (IV.3), on sait que  $0 < a_s = \alpha^2(t_s)|\dot{x}_s| < +\infty$  pour  $0 < s < \tau$ . On en déduit alors que le couple  $(x_s, \alpha^2(t_s)\dot{x}_s)$  est bien défini jusqu'au temps d'explosion  $\tau$  car  $\alpha^2(t_s)$  est strictement positif sur  $]0, \tau[$  et donc  $|\dot{x}_s| < +\infty$  en tout point de cet intervalle. Par ailleurs la solution du système (IV.22) est unique car ses coefficients sont des fonctions localement lipschitziennes de  $(t, x, \dot{t})$  et  $\alpha^2\dot{x}$  pour  $(t, x, \dot{t}) \in ]0, T[ \times M \times [1, +\infty[$  et  $\alpha^2|\dot{x}| \neq 0$ .  $\square$

## 4 LOI D'ENTRÉE DE LA DIFFUSION EN L'ORIGINE DES TEMPS

Dans le cas d'un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  où l'effondrement est lent, nous avons vu dans la section 4 du chapitre III que les géodésiques de lumière peuvent être prolongées au delà du temps d'atteinte de  $T$  par  $t_u$ , en des trajectoires bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans une extension  $\widehat{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$ . Nous verrons aux chapitres V et VII qu'il en est de même pour les trajectoires de la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$ . Afin de pouvoir "concaténer" différentes excursions de la diffusion comme on l'a fait dans le cas des géodésiques de lumière, nous montrons ici que la diffusion relativiste admet une unique solution issue d'un point de la frontière causale entrante  $\partial\mathcal{M}_c^-$  de l'espace  $\mathcal{M}$ .

On se place ici dans l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$ , celui-ci peut-être mortel ou éternel, on suppose simplement que l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en zéro. On rappelle que dans ce cas, la frontière causale entrante  $\partial\mathcal{M}_c^-$  de l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$  est de la forme :

$$\partial\mathcal{M}_c^- := \{0\} \times M_0,$$

où la variété  $M_0$  est une copie de la fibre  $M$  que l'on identifie précisément à  $M$ . Dans le prochain paragraphe, on montre que la diffusion temporelle  $(t_s, a_s)$  peut bien être définie à partir d'un point  $(t_0, a_0)$  tel que  $t_0 = 0$ , puis dans le paragraphe 4.2, on traite le cas du prolongement des composantes spatiales de la diffusion lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en zéro.

### 4.1 Loi d'entrée de la diffusion temporelle

Commençons par montrer que la diffusion temporelle  $(t_s, a_s)$  dont les conditions initiales autorisées sont a priori les points  $(t_0, a_0)$  avec  $0 < t_0 < T$  et  $a_0 \geq 0$  peut être lancée à partir d'un point  $(t_0, a_0)$  avec  $t_0 = 0$  et  $a_0 > 0$ .

**Proposition IV.5** — *Presque sûrement, le système (IV.14) qui régit l'évolution du processus  $(t_s, a_s)$  admet une unique solution issue de tout point  $(t_0, a_0)$  tel que  $t_0 \in [0, T[$  et  $a_0 > 0$ . Cette solution est bien définie jusqu'au temps  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$  qui est fini presque sûrement. Pour tout  $s$  dans  $]0, \tau[$ , on a de plus  $a_s > 0$ .*

*Démonstration.* En vertu de la proposition IV.3, le seul cas à traiter pour établir la proposition IV.5 est celui où l'on a  $t_0 = 0$  et  $a_0 > 0$ . La primitive  $A(t) := \int_0^t \alpha(u) du$  de  $\alpha$  réalise un homéomorphisme de l'intervalle  $[0, T]$  dans

un nouvel intervalle  $[0, T']$ . On désigne par  $A^{-1}$  la réciproque de la fonction  $A$  et on pose  $A_s := A(t_s)$ . Le système (IV.14) qui régit l'évolution du processus  $(t_s, a_s)$  est alors équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} dA_s = \sqrt{a_s^2 + (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s)} ds, \\ da_s^2 = 4\sigma^2 a_s^2 ds + 3\sigma^2 (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s) ds + dM_s^{a^2}, \end{cases}$$

avec  $d\langle M^{a^2} \rangle_s = 4\sigma^2 a_s^2 (a_s^2 + (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s)) ds$ . Les coefficients de ce dernier système sont des fonctions continues de  $(A, a^2)$  sur l'ensemble  $[0, T'] \times [0, +\infty[$ . D'après les théorèmes d'existence usuels (par ex. théorème (2.3) p. 173 de [IW89]), ce système admet donc une solution a priori bien définie jusqu'au temps  $\tau \wedge \tau'$  où comme précédemment on a posé

$$\begin{aligned} \tau &:= \inf\{s > 0, A_s = T'\} = \inf\{s > 0, t_s = T\}, \\ \tau' &:= \inf\{s > 0, a_s^2 = +\infty\}. \end{aligned}$$

La donnée du couple  $(A_s, a_s^2)$  étant équivalente à celle du couple  $(t_s, a_s)$ , le système d'équations (IV.14) admet bien une solution issue de  $(t_0 = 0, a_0 > 0)$ . Les mêmes raisonnements que dans la preuve de la proposition IV.3 (ici  $\alpha$  est borné) montrent en fait que  $\tau \leq \tau'$  presque sûrement et que  $a_s > 0$  pour tout  $0 \leq s < \tau$ . Par ailleurs, on a  $t_s > 0$  p.s. pour  $0 < s < \tau$ . On montre à présent l'unicité de la solution. Remarquons tout d'abord que l'argument de la preuve de la proposition IV.3, à savoir la régularité lipschitzienne des coefficients du système, ne s'applique pas ici car a priori, on a aucune condition de régularité concernant la fonction  $\alpha$  au voisinage de zéro. L'hypothèse 2 de décroissance de la fonction de Hubble  $H$  permet d'outrepasser cette difficulté. Rappelons que d'après l'hypothèse 3, dans un univers mortel, la fonction  $\alpha$  est croissante jusqu'au temps  $t^* := \inf\{t > 0, H(t) \leq 0\} > 0$ . Sous l'hypothèse de décroissance de  $H$ , on montre alors le résultat de comparaison suivant :

**Lemme IV.6** — *Soient  $(t_s^1, a_s^1)$  et  $(t_s^2, a_s^2)$  deux solutions du système (IV.14) issues de points  $(t_0^i, a_0^i) \in [0, T[ \times ]0, +\infty[$ ,  $i = 1, 2$  et tels que  $t_0^1 \geq t_0^2$  et  $a_0^1 \geq a_0^2$ . Pour  $i = 1, 2$ , on désigne par  $\tau_i$  les temps de vie de ces solutions et par  $\tau_i^* < \tau_i$  les temps d'atteinte de  $t^*$  par les processus croissants  $t_s^i$ . Alors presque sûrement, pour tout  $0 < s < \tau_1^* \wedge \tau_2^*$ , on a l'inégalité suivante :*

$$(t_s^1 - t_s^2) \left( \frac{a_s^1}{\alpha(t_s^1)} - \frac{a_s^2}{\alpha(t_s^2)} \right) \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad (t_s^1 - t_s^2)(\dot{t}_s^1 - \dot{t}_s^2) \geq 0.$$

Remarque IV.10 — Le lemme est aussi valable dans un espace éternel. Dans ce cas, on a  $t^* := \inf\{t > 0, H(t) \leq 0\} = +\infty$  et l'inégalité du lemme est valable pour les temps  $s \geq 0$ .

Admettons momentanément le lemme IV.6 et revenons à la preuve de l'unicité de la solution du système (IV.14) lorsque  $t_0 = 0$  et  $a_0 > 0$ . Comme d'après la proposition IV.3, on sait que le système d'équations (IV.14) admet une unique solution issue de tout point de  $]0, T[ \times ]0, +\infty[$  et que d'autre part le processus  $t_s$  est strictement croissant, pour établir l'unicité de la solution sur l'intervalle  $[0, \tau[$  lorsque  $t_0 = 0$ , il suffit de l'établir sur l'intervalle  $[0, \tau^*[$  où  $\tau^* := \inf\{s > 0, t_s = t^*\}$ . Considérons alors  $(t_s^1, a_s^1)$  et  $(t_s^2, a_s^2)$  deux solutions du système (IV.14) issues de  $(0, a_0 > 0)$ , de temps d'explosion respectifs  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , où pour  $i = 1, 2$ , les martingales  $M^{a^i}$  sont représentées par deux mouvements browniens indépendants  $B$  et  $B'$  :  $dM_s^{a^i} = a_s^i dB_s + \alpha(t_s^i) dB'_s$ . Fixons un entier  $n_0$  tel que  $a_0 = a_0^1 = a_0^2$  soit compris entre  $1/n_0$  et  $n_0$  et pour tout entier  $n > n_0$  définissons les temps d'arrêt

$$\begin{aligned}\tau_n^1 &:= \inf\{0 < s < \tau^1, a_s^1 \notin [1/n, n]\} \wedge \tau_1^*, \\ \tau_n^2 &:= \inf\{0 < s < \tau^2, a_s^2 \notin [1/n, n]\} \wedge \tau_2^*,\end{aligned}$$

où comme dans l'énoncé du lemme IV.6 :  $\tau_i^* := \inf\{0 < s < \tau^1, t_s^i = t^*\}$  pour  $i = 1, 2$ . Le crochet de la différence entre  $a_s^1$  et  $a_s^2$  est alors donné par :

$$d\langle a^1 - a^2 \rangle_s = \sigma^2 [(a_s^1 - a_s^2)^2 + (\alpha(t_s^1) - \alpha(t_s^2))^2] ds.$$

Par ailleurs, la différence  $a_s^1 - a_s^2$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$a_s^1 - a_s^2 = \frac{a_s^1}{\alpha(t_s^1)} [\alpha(t_s^1) - \alpha(t_s^2)] + \alpha(t_s^2) \left[ \frac{a_s^1}{\alpha(t_s^1)} - \frac{a_s^2}{\alpha(t_s^2)} \right].$$

D'après le lemme IV.6, comme la fonction  $\alpha$  est croissante sur l'intervalle  $[0, t^*]$ , pour tout  $s$  dans  $]0, \tau_n^1 \wedge \tau_n^2[$ , on a :

$$(\alpha(t_s^1) - \alpha(t_s^2))^+ \leq \frac{\alpha(t_s^1)}{a_s^1} \times (a_s^1 - a_s^2)^+ \leq \alpha^* \times n \times (a_s^1 - a_s^2)^+,$$

où on a posé  $\alpha^* := \sup_{]0, t^*]} \alpha(t)$ . Par symétrie, on déduit la majoration

$$|\alpha(t_s^1) - \alpha(t_s^2)| \leq \left| \frac{\alpha(t_s^1)}{a_s^1} + \frac{\alpha(t_s^2)}{a_s^2} \right| \times |a_s^1 - a_s^2| \leq 2n\alpha^* |a_s^1 - a_s^2|.$$

Pour tout  $s$  dans  $]0, \tau_n^1 \wedge \tau_n^2[$ , on a donc

$$\frac{d\langle a^1 - a^2 \rangle_s}{|a_s^1 - a_s^2|} \leq \sigma^2 [|a_s^1 - a_s^2| + 4n^2 |\alpha^*|^2 |a_s^1 - a_s^2|] ds \leq \sigma^2 [2n + 8n^3 |\alpha^*|^2] ds.$$

En intégrant ce rapport entre zéro et  $\tau_n^1 \wedge \tau_n^2$ , on obtient

$$\int_0^{\tau_n^1 \wedge \tau_n^2} \frac{d\langle a^1 - a^2 \rangle_s}{|a_s^1 - a_s^2|} \leq \sigma^2 [2n + 8n^3 |\alpha^*|^2] \times \tau_n^1 \wedge \tau_n^2 < +\infty.$$

Si  $L(a^1 - a^2)$  désigne le temps local du processus  $a_s^1 - a_s^2$ , d'après la formule du temps d'occupation, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} L_{\tau_n^1 \wedge \tau_n^2}^x(a^1 - a^2) \frac{dx}{|x|} < +\infty,$$

et on en déduit que le temps local en zéro du processus  $a_s^1 - a_s^2$  est nul presque sûrement. D'après la formule d'Itô-Tanaka, on a alors

$$d(a_s^1 - a_s^2)^+ = G(t_s^1, t_s^2, a_s^1, a_s^2) ds + 1_{\{a_s^1 > a_s^2\}} dM_s^{a^1 - a^2},$$

avec

$$\begin{aligned} G(t_s^1, t_s^2, a_s^1, a_s^2) &:= \frac{3\sigma^2}{2} (a_s^1 - a_s^2)^+ ds + \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s^1)}{a_s^1 a_s^2} (a_s^2 - a_s^1) 1_{\{a_s^1 > a_s^2\}} ds \\ &\quad + |a_s^2|^{-1} (\alpha(t_s^1) + \alpha(t_s^2)) (\alpha(t_s^1) - \alpha(t_s^2)) 1_{\{a_s^1 > a_s^2\}} ds. \end{aligned}$$

Pour  $s$  dans  $]0, \tau_n^1 \wedge \tau_n^2[$ , le terme de dérive  $G(t_s^1, t_s^2, a_s^1, a_s^2)$  est majoré par

$$G(t_s^1, t_s^2, a_s^1, a_s^2) \leq \kappa_n (a_s^1 - a_s^2)^+, \quad \text{où } \kappa_n := \frac{3\sigma^2}{2} + 2n^2 |\alpha^*|^2.$$

En intégrant la formule d'Itô-Tanaka et en prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[(a_s^1 - a_s^2)^+] \leq \kappa_n \int_0^s \mathbb{E}[(a_u^1 - a_u^2)^+] du,$$

dont on déduit que par le lemme de Gronwall que  $a_s^1 \leq a_s^2$  presque sûrement, pour tout  $s$  dans  $]0, \tau_n^1 \wedge \tau_n^2[$ . Par symétrie on obtient que presque sûrement  $a_s^1 = a_s^2$  pour  $s$  dans  $]0, \tau_n^1 = \tau_n^2[$ . En utilisant une nouvelle fois le lemme IV.6, on obtient également que  $t_s^1 = t_s^2$  sur  $]0, \tau_n^1 = \tau_n^2[$ . Enfin, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on conclut que, presque sûrement,  $a_s^1 = a_s^2$  et  $t_s^1 = t_s^2$  pour tout  $s$  inférieur à  $\tau_1^* = \tau_2^*$ , d'où le résultat.  $\square$

Avant de montrer que les composantes spatiales de la diffusion de Franchi et Le Jan peuvent elles-aussi être lancées d'un point de la frontière  $\partial \mathcal{M}_c^-$  de  $\mathcal{M}$ , nous donnons la preuve du lemme IV.6.

*Démonstration.* (du lemme IV.6) La méthode de la preuve est la même que celle de la fin de la preuve de la proposition précédente. Il s'agit d'utiliser la notion de temps local et la formule d'Itô-Tanaka comme dans [LG83] ou les preuves des théorèmes (3.5) et (3.8) p. 390-395 de [RY99]. On se donne  $(t_s^1, a_s^1)$  et  $(t_s^2, a_s^2)$  deux solutions du système (IV.14) issues de points  $(t_0^i, a_0^i) \in [0, T[ \times ]0, +\infty[$ ,  $i = 1, 2$  et tels que  $t_0^1 \geq t_0^2$  et  $a_0^1 \geq a_0^2$ . Comme dans la preuve de la proposition précédente, on représente les martingales  $M^{a^i}$  par deux mouvements browniens indépendants  $B$  et  $B'$  :  $dM_s^{a^i} = a_s^i dB_s + \alpha(t_s^i) dB'_s$ . Pour alléger les expressions, on définit le processus

$$Y_s := (t_s^1 - t_s^2)(a_s^1/\alpha(t_s^1) - a_s^2/\alpha(t_s^2)) = (t_s^1 - t_s^2) \left( \sqrt{|t_s^1|^2 - 1} - \sqrt{|t_s^2|^2 - 1} \right).$$

La formule d'Itô montre que le processus  $Y_s$  est solution de l'équation

$$dY_s = \frac{3\sigma^2}{2} Y_s ds + U_s ds + V_s ds + dM_s^Y,$$

où  $d\langle Y \rangle_s = \sigma^2 Y_s^2 ds$  et où on a posé :

$$U_s := -\sigma^2 \frac{\alpha(t_s^1)\alpha(t_s^2)}{a_s^1 a_s^2} Y_s ds + (t_s^1 - t_s^2) \left( \frac{a_s^1}{\alpha(t_s^1)} - \frac{a_s^2}{\alpha(t_s^2)} \right),$$

$$V_s := -(t_s^1 - t_s^2) \left[ H(t_s^1) t_s^1 \sqrt{|t_s^1|^2 - 1} - H(t_s^2) t_s^2 \sqrt{|t_s^2|^2 - 1} \right],$$

Comme  $d\langle Y \rangle_s \leq \sigma^2 Y_s^2 ds$ , de la formule du temps d'occupation, on déduit que le temps local en zéro de  $Y$  est nul presque sûrement sur l'intervalle  $]0, \tau_1^* \wedge \tau_2^*]$ . Ensuite, si  $Y_s^-$  désigne la partie négative de  $Y_s$ , en appliquant la formule d'Itô-Tanaka, on obtient alors que pour tout  $s$  dans  $]0, \tau_1^* \wedge \tau_2^*]$  :

$$dY_s^- \leq \frac{3\sigma^2}{2} Y_s^- ds + 1_{\{Y_s \leq 0\}} dM_s^Y, \quad (\text{IV.23})$$

l'inégalité découlant des trois points suivants :

i) d'une part, on a toujours

$$(t_s^1 - t_s^2) \left( \frac{a_s^1}{\alpha(t_s^1)} - \frac{a_s^2}{\alpha(t_s^2)} \right) = (t_s^1 - t_s^2) \left( \sqrt{|t_s^1|^2 - 1} - \sqrt{|t_s^2|^2 - 1} \right) \geq 0;$$

ii) d'autre part, sur l'évènement  $\{Y_s \leq 0\}$ , on a

$$-\sigma^2 \frac{\alpha(t_s^1)\alpha(t_s^2)}{a_s^1 a_s^2} Y_s \geq 0;$$

iii) enfin, toujours sur l'évènement  $\{Y_s \leq 0\}$ , comme la fonction  $H$  est décroissante et positive sur l'intervalle  $[0, t^*]$ , on a aussi

$$0 \leq V_s = -H(t_s^1)(t_s^1 - t_s^2) \left( t_s^1 \sqrt{|t_s^1|^2 - 1} - t_s^2 \sqrt{|t_s^2|^2 - 1} \right) - t_s^2 \sqrt{|t_s^2|^2 - 1} (t_s^1 - t_s^2) (H(t_s^1) - H(t_s^2)).$$

En intégrant l'équation (IV.23) puis en prenant l'espérance, on conclut par le lemme de Gronwall que, presque sûrement,  $Y_s$  est positif ou nul pour tout  $s$  dans l'intervalle  $]0, \tau_1^* \wedge \tau_2^*]$ , d'où le résultat.  $\square$

## 4.2 Loi d'entrée de la diffusion globale

On montre enfin que la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  à valeurs dans l'espace tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}$  et solution du système d'équation (IV.1) peut être définie à partir d'un point de la frontière d'entrée  $\partial\mathcal{M}_c^-$  d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$  dont l'inverse du facteur d'expansion est intégrable en zéro. Pour la suite de ce paragraphe, on se donne donc un espace  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$ , celui pouvant être mortel ou éternel, et on suppose que :

$$\int_0^{1 \wedge T/2} \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty.$$

On rappelle que la donnée de la trajectoire  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  dans  $T^1\mathcal{M}$  est équivalente à celle de la trajectoire  $(t_s, a_s, x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ . Un point de la frontière  $\partial\mathcal{M}^-$  est simplement un couple  $(t_0, x_0)$  avec  $t_0 = 0$  et  $x_0 \in M$ . Auquel cas, la donnée de  $(a_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$  peut être vue comme celle d'une demi tangente au point  $(t_0, x_0)$ .

**Proposition IV.6** — Soient  $t_0 = 0$ ,  $a_0 > 0$  et  $(x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|) \in T^1M$ . Alors, le système d'équations différentielles stochastiques qui régit l'évolution du processus  $(t_s, a_s, x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  et qui est équivalent au système (IV.1) admet une solution forte issue de  $(t_0, a_0, x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$  et définie jusqu'au temps  $\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}$ .

*Démonstration.* On sait déjà d'après la proposition IV.5 que la diffusion temporelle  $(t_s, a_s)$  admet une unique solution issue de  $(t_0, a_0)$  et bien définie jusqu'au temps  $\tau$  et qui vérifie  $a_s > 0$  pour  $0 \leq s < \tau$ . Par ailleurs, d'après les corollaires IV.1, IV.2 et IV.3, selon la courbure  $k \in \{-1, 0, 1\}$  de la fibre  $M$ , les systèmes d'équations différentielles stochastiques dérivés du système

(IV.1) qui régissent l'évolution du couple  $(x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  dans  $T^1M$  sont donnés en coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} dx_s^\mu = \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} ds, \\ d \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} = -k x_s^\mu \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} ds - \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} \times \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

avec

$$d\langle M_s^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, M_s^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} \left[ \delta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - k x_s^\mu x_s^\nu - \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} \frac{\dot{x}_s^\nu}{|\dot{x}_s|} \right] ds.$$

Rappelons que le processus  $t_s$  est strictement croissant et désignons par  $t_s^{-1}$  son inverse :  $t(t_s^{-1}) = s$ . On introduit le changement de temps suivant sur  $[0, \tau[$  :

$$S(s) := \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \int_0^{t_s} \frac{1}{\alpha(u)} \times \frac{a_{t_u^{-1}}}{\sqrt{\alpha^2(u) + a_{t_u^{-1}}^2}} du.$$

Le processus  $S$  est bien défini car l'inverse du facteur d'expansion  $\alpha$  est ici supposé intégrable au voisinage de zéro. Par ailleurs,  $S$  est strictement croissant ; on désigne par  $S_s^{-1}$  son inverse *i.e.*  $S(S_s^{-1}) = s$  et on introduit les processus changés de temps  $y_s := x_{S_s^{-1}}$ ,  $\tilde{t}_s := t_{S_s^{-1}}$  et  $\tilde{a}_s := a_{S_s^{-1}}$ . Par ce changement de temps, le système (IV.24) se transforme en :

$$\begin{cases} dy_s^\mu = \dot{y}_s^\mu ds, \\ d \dot{y}_s^\mu = -k y_s^\mu ds - \sigma^2 \frac{\alpha^4(\tilde{t}_s)}{\tilde{a}_s^3} \times \dot{y}_s^\mu ds + dM_s^{\dot{y}^\mu}, \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

où

$$d\langle M_s^{\dot{y}^\mu}, M_s^{\dot{y}^\nu} \rangle_s = \sigma^2 \frac{\alpha^4(\tilde{t}_s)}{\tilde{a}_s^3} [\delta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - k y_s^\mu y_s^\nu - \dot{y}_s^\mu \dot{y}_s^\nu].$$

Les coefficients du nouveau système (IV.25) sont maintenant des fonctions continues et localement bornées des variables  $(\tilde{t}, \tilde{a}, y, \dot{y})$ . D'après les théorèmes d'existence usuels, il admet donc une solution issue de  $(\tilde{t}_0, \tilde{a}_0, y_0, \dot{y}_0) = (t_0, a_0, x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$  et définie jusqu'à un temps d'explosion éventuel. Autrement dit, via changement de temps inverse, le processus  $(t_s, a_s, x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  admet bien une solution issue de  $(t_0, a_0, x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$ . Comme dans la preuve de la proposition IV.4, la relation de pseudo-norme (IV.3) assure en fait que cette

solution est bien définie jusqu'au temps d'atteinte  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ . Montrons maintenant que cette solution est unique. L'argument de la preuve de la proposition IV.4 (régularité lipschitzienne) ne s'applique pas ici car  $\alpha$  n'est pas régulière a priori au voisinage de zéro. Dans le cas euclidien où  $k = 0$ , comme on l'a noté dans la remarque IV.3, l'équation qui régit l'évolution de  $\dot{y}_s$  est en fait celle d'un mouvement brownien sphérique dans  $\mathbb{S}^2$  changé de temps. Cette équation admet bien une unique solution issue de  $\dot{x}_0/|\dot{x}_0|$ . Pour montrer l'unicité trajectorielle dans les cas sphériques et hyperboliques, on peut choisir une "bonne" représentation des martingales  $M^{\dot{y}^\mu}$ . Par exemple, dans le cas sphérique, il existe un mouvement brownien  $W$  de dimension 4 tel que

$$dM_s^{\dot{y}^\mu} = \sigma \frac{\alpha^2(\tilde{t}_s)}{\tilde{a}_s^{3/2}} \left( dW^\mu - y_s^\mu \sum_{\nu=0}^3 y_s^\nu dW_s^\nu - \dot{y}_s^\mu \sum_{\nu=0}^3 \dot{y}_s^\nu dW_s^\nu \right).$$

Considérons alors  $(y_s, \dot{y}_s)$  et  $(z_s, \dot{z}_s)$  deux solutions du système (IV.25) issues d'un même point  $(y_0, \dot{y}_0) = (z_0, \dot{z}_0)$ , les martingales  $M^{\dot{y}^\mu}$  et  $M^{\dot{z}^\mu}$  étant représentée par un même mouvement brownien  $W$  comme ci-dessus. On pose  $|y_s - z_s|^2 := \sum_{\mu=0}^3 |y_s^\mu - z_s^\mu|^2$  et  $|\dot{y}_s - \dot{z}_s|^2 := \sum_{\mu=0}^3 |\dot{y}_s^\mu - \dot{z}_s^\mu|^2$ . Avec les mêmes notations que dans la preuve de la proposition IV.5, le calcul montre alors que

$$d(|y_s - z_s|^2 + |\dot{y}_s - \dot{z}_s|^2) \leq 2\sigma^2 \frac{|\alpha^*|^2}{\tilde{a}_s^3} (|y_s - z_s|^2 + |\dot{y}_s - \dot{z}_s|^2) ds + dN_s,$$

où  $N_s$  est une martingale. On fixe un entier  $n_0$  de sorte que  $a_0 > 1/n_0$ . Pour tout entier  $n \geq n_0$ , en intégrant la dernière inégalité sur l'intervalle  $[0, \tau_n]$  où  $\tau_n := \inf\{s > 0, a_s \leq 1/n\}$ , puis en prenant l'espérance, on déduit du lemme de Gronwall que  $y_s = z_s$  et  $\dot{y}_s = \dot{z}_s$  pour tout  $s$  dans  $[0, \tau_n]$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on conclut que  $y_s = z_s$  et  $\dot{y}_s = \dot{z}_s$  sur tout l'intervalle  $[0, \tau[$ . Dans le cas d'un espace de Robertson-Walker à fibre sphérique, on a donc bien l'unicité trajectorielle des composantes spatiales de la diffusion issue d'un point du bord  $\partial\mathcal{M}^-$ . Le cas hyperbolique se traite de manière analogue, on montre en effet dans ce cas que

$$d(|y_s - z_s|^2 + |\dot{y}_s - \dot{z}_s|^2) \leq 6\sigma^2 \frac{|\alpha^*|^2}{\tilde{a}_s^3} (|y_s - z_s|^2 + |\dot{y}_s - \dot{z}_s|^2) ds + dN'_s,$$

où  $N'_s$  est une nouvelle martingale. On conclut à nouveau en utilisant le lemme de Gronwall. □

---

# Étude de la diffusion temporelle

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Asymptotique dans un univers éternel . . . . .</b>	<b>182</b>
1.1	Dichotomie récurrence/transience . . . . .	182
1.2	Récurrence lorsque $H_\infty > 0$ . . . . .	186
1.3	Transience dans le cas polynomial . . . . .	191
1.4	Un critère de convergence important pour la suite .	199
<b>2</b>	<b>Asymptotique dans un univers mortel . . . . .</b>	<b>201</b>
2.1	Une image de la situation . . . . .	201
2.2	Convergence du processus $a_s$ . . . . .	202
2.3	Vitesse de divergence de $\dot{t}_s$ . . . . .	204
2.4	Prolongement de la diffusion temporelle . . . . .	206

---

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ , solution du système d'équations différentielles stochastiques (IV.13). Nous distinguons les cas selon que l'univers est éternel ou mortel. Dans la section 1, nous traitons tout d'abord le cas d'un univers éternel. D'après la proposition IV.3, on sait que dans ce cas le processus  $\dot{t}_s$  est bien défini sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifie  $\dot{t}_s > 1$  pour tout  $s > 0$ . Le processus  $t_s$  tend donc presque sûrement vers l'infini avec  $s$ , mais à quelle vitesse ? Le processus  $\dot{t}_s$  est-il récurrent, transitoire ? Nous montrons que le comportement asymptotique du facteur d'expansion au voisinage de l'infini donne lieu à une dichotomie : si l'expansion est exponentielle, c'est-à-dire si  $H(t)$  converge vers une limite  $H_\infty$  strictement positive lorsque  $t$  tend vers l'infini, alors le processus  $\dot{t}_s$  est récurrent au sens de Harris. En revanche, si l'expansion est polynomiale, on montre que le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire en précisant sa vitesse de divergence. Dans la section 2, nous décrivons le comportement asymptotique de  $\dot{t}_s$  dans le cas d'un univers mortel. On montre que le processus  $\dot{t}_s$  est alors toujours transitoire et que le processus  $a_s$  converge presque sûrement. Nous montrons ensuite comment, à l'image des composantes temporelles des géodésiques de lumière, la diffusion  $(t_s, a_s)$  peut-être prolongée au delà du temps d'explosion  $\tau$ .

# 1 ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION TEMPORELLE DANS UN UNIVERS ÉTERNEL

Nous déterminons dans cette première section le comportement asymptotique de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ , solution du système (IV.13), lorsque l'univers est éternel, c'est-à-dire lorsque l'espace de Robertson-Walker sur lequel est défini la diffusion relativiste est du type  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  avec  $I = ]0, +\infty[$ . Rappelons que dans un tel univers, d'après l'hypothèse 3, la fonction de Hubble  $H = \alpha'/\alpha$  est bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ , y est positive et décroissante. En particulier, la fonction  $H(t)$  converge lorsque  $t$  tend vers l'infini, on note  $H_\infty$  sa limite :

$$H_\infty := \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t).$$

## 1.1 Récurrence et transience sur deux exemples

Commençons par étudier le comportement asymptotique du processus  $\dot{t}_s$  dans les cas les plus simples où ce dernier est une diffusion, c'est-à-dire lorsque l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $\dot{t}_s$  dans le système (IV.13) ne dépend pas de  $t_s$ . Cette situation se produit si et seulement si la fonction de Hubble est constante. Dans le paragraphe 1.1.1, on traite le cas d'un espace statique où  $H \equiv 0$ , puis dans le paragraphe 1.1.2 le cas où  $H \equiv H_0 > 0$ .

### 1.1.1 Le cas d'un espace de Robertson-Walker statique

Considérons tout d'abord un univers éternel où le facteur d'expansion  $\alpha$  est constant ou encore  $H \equiv 0$ . Dans ce cas, l'espace de Robertson-Walker n'est autre (à un changement d'échelle près) que l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$  et la diffusion relativiste envisagée est la diffusion de Dudley. L'équation vérifiée par  $\dot{t}_s$  s'écrit :

$$d\dot{t}_s = \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + dM_s^{\dot{t}}, \quad \text{avec } d\langle M^{\dot{t}} \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds. \quad (\text{V.1})$$

**Lemme V.1** — *Pour toute condition initiale  $\dot{t}_0 \geq 1$ , l'équation différentielle stochastique (V.1) admet une solution forte  $\dot{t}_s$ , définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ , et telle que  $\dot{t}_s > 1$  presque sûrement, pour tout  $s > 0$ . De plus, il existe un mouvement brownien  $B_s$  et un processus  $u_s$  presque sûrement convergent lorsque  $s$  tend vers l'infini, tels que pour tout  $s \geq 0$  :*

$$\dot{t}_s = \dot{t}_0 \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + u_s).$$

*En particulier, le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire.*

*Démonstration.* L'existence, l'unicité et la minoration de la solution du système (V.1) découle de la proposition IV.3. Comme les coefficients de ce système sont à croissance au plus linéaire, la solution  $\dot{t}_s$  est bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$  (proposition 1.1.11 de [Hsu00]). Par ailleurs, il existe un mouvement brownien standard  $B$  tel que

$$d\dot{t}_s = \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + \sigma\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}dB_s. \quad (\text{V.2})$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction logarithme, il vient

$$d\log(\dot{t}_s) = \left(1 + \frac{1}{2\dot{t}_s^2}\right)\sigma^2 ds + \sigma\sqrt{1 - \dot{t}_s^{-2}}dB_s.$$

Il existe alors un mouvement brownien  $B'$  tel que :

$$\log(\dot{t}_s/\dot{t}_0) = \underbrace{\sigma^2 s + \sigma B_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2}}_{u_s} - B' \left[ \int_0^s \frac{\sigma^2 \dot{t}_u^{-4} du}{\left(1 + \sqrt{1 - \dot{t}_u^{-2}}\right)^2} \right].$$

Lorsque  $s$  tend vers l'infini, on en déduit que

$$\log(\dot{t}_s/\dot{t}_0) \geq \sigma^2 s + o(s) > \sigma^2 s/2.$$

Les deux intégrales qui définissent le processus  $u_s$  convergent donc presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini ; d'où le résultat.  $\square$

### 1.1.2 Le cas où le facteur d'expansion est exponentiel

Nous nous intéressons à présent au cas où le facteur d'expansion est de la forme  $\alpha(t) = \exp(H \times t)$ , avec  $H > 0$  constante, auquel cas la fonction de Hubble est bien entendu constante égale à  $H$ . L'équation différentielle stochastique vérifiée par  $\dot{t}_s$  s'écrit alors :

$$d\dot{t}_s = -H \times (\dot{t}_s^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + \sigma\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}dB_s, \quad (\text{V.3})$$

pour un mouvement brownien réel standard  $B$ .

**Lemme V.2** — *Pour toute condition initiale  $\dot{t}_0 \geq 1$ , l'équation (V.3) admet une solution forte  $\dot{t}_s$ , définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ . Presque sûrement, pour tout  $s > 0$ , on a  $\dot{t}_s > 1$ , et le processus est ergodique dans  $]1, +\infty[$ .*

*Démonstration.* L'existence, l'unicité et la minoration de la solution du système (V.3) découle de la proposition IV.3. Il reste à montrer l'ergodicité. Le calcul montre que la mesure  $\nu_{H,\sigma}$  de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $[1, +\infty[$  :

$$\nu_{H,\sigma}(x) := (x^2 - 1)^{1/2} \times \exp\left(-\frac{2H}{\sigma^2}x\right),$$

est invariante pour le processus  $\dot{t}_s$ . Comme cette mesure est finie sur  $[1, +\infty[$ , le processus  $\dot{t}_s$  est bien ergodique.  $\square$

**Définition V.1** — Dans toute la suite, nous noterons  $\bar{\nu}_{H,\sigma}$  la mesure de probabilité égale à la mesure  $\nu_{H,\sigma}$  normalisée, et  $\bar{\nu}_{H,\sigma}(x)$  la densité correspondante :

$$\bar{\nu}_{H,\sigma} := \nu_{H,\sigma} / \int_1^{+\infty} d\nu_{H,\sigma}, \quad \bar{\nu}_{H,\sigma}(x) := \nu_{H,\sigma}(x) / \int_1^{+\infty} d\nu_{H,\sigma}.$$

La figure suivante donne l'allure des densités renormalisées  $\bar{\nu}_{H,\sigma}$  en fonction des paramètres  $\sigma$  et  $H$ .

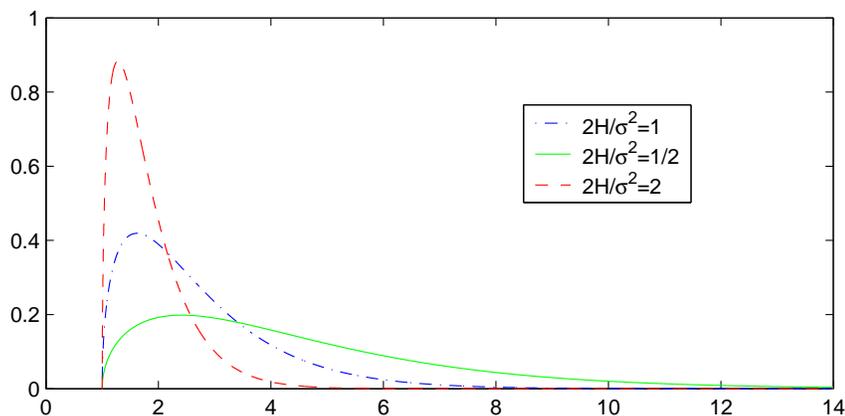


FIGURE 27: Allure des densités renormalisées  $\bar{\nu}_{H,\sigma}$

Remarque V.1 — Dans les cas particuliers où la fonction de Hubble est constante égale à  $H$ , on a donc la dichotomie suivante : si  $H = 0$ , alors le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire ; si  $H > 0$  alors  $\dot{t}_s$  est ergodique. Nous allons voir dans la suite de cette section que cette dichotomie perdure dans le cas général où la fonction de Hubble est autorisée à dépendre de  $t$ . En effet, nous montrons que si la limite  $H_\infty$  est strictement positive,  $\dot{t}_s$  est récurrent ; en revanche lorsque l'expansion est polynomiale (en particulier  $H_\infty = 0$ ),  $\dot{t}_s$  est transitoire.

Le lemme technique suivant nous sera utile dans la suite.

**Lemme V.3** — *Pour tous  $\sigma > 0$ ,  $H > 0$ , la fonction identité et la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $(x^2 - 1)^{-1}$  sur  $[1, +\infty[$  sont intégrables contre la mesure  $\bar{\nu}_{H,\sigma}$  et de plus*

$$\frac{2H}{\sigma^2} \times \bar{\nu}_{H,\sigma}(\text{Id}) - 2 = \bar{\nu}_{H,\sigma}(f).$$

*Démonstration.* L'intégrabilité des fonctions identité et  $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$  ne pose pas de problème. Afin d'alléger les expressions, posons  $\varepsilon = 2H/\sigma^2$  et

$$C = C(\varepsilon) := \bar{\nu}_{H,\sigma}(f), \quad D = D(\varepsilon) := \varepsilon \times \bar{\nu}_{H,\sigma}(\text{Id}) - 2.$$

On veut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $D(\varepsilon) = C(\varepsilon)$ . Par définition, on a

$$C(\varepsilon) = \frac{\int_1^{+\infty} (x^2 - 1)^{-1/2} e^{-\varepsilon x} dx}{\int_1^{+\infty} (x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx}, \quad D(\varepsilon) = \frac{\int_1^{+\infty} (\varepsilon x - 2)(x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx}{\int_1^{+\infty} (x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx}.$$

En faisant le changement de variable  $x \rightarrow \varepsilon(x - 1)$ , on a alors

$$C(\varepsilon) - D(\varepsilon) = \frac{\int_0^{+\infty} \left( \frac{\varepsilon^2}{[x(x + 2\varepsilon)]} + 2 - (x + \varepsilon) \right) [x(x + 2\varepsilon)]^{1/2} e^{-x} dx}{\int_0^{+\infty} [x(x + 2\varepsilon)]^{1/2} e^{-x} dx}.$$

Cette dernière expression montre par convergence dominée que la fonction  $\varepsilon \mapsto C(\varepsilon) - D(\varepsilon)$ , bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , a une limite nulle en zéro. Pour conclure, il suffit de montrer que la dérivée du numérateur de  $C(\varepsilon) - D(\varepsilon)$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Posons donc

$$N(\varepsilon) := \int_1^{+\infty} (x^2 - 1)^{-1/2} e^{-\varepsilon x} dx - \int_1^{+\infty} (\varepsilon x - 2)(x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx.$$

En dérivant par rapport à  $\varepsilon$ , on obtient tout d'abord que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\partial_\varepsilon N(\varepsilon) := - \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} e^{-\varepsilon x} dx - \int_1^{+\infty} (3x - \varepsilon x^2)(x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx.$$

En intégrant le premier terme par parties, il vient ensuite

$$\partial_\varepsilon N(\varepsilon) := - \int_1^{+\infty} 3x(x^2 - 1)^{1/2} e^{-\varepsilon x} dx + \varepsilon \int_1^{+\infty} (x^2 - 1)^{3/2} e^{-\varepsilon x} dx,$$

et l'on conclut que  $\partial_\varepsilon N(\varepsilon) \equiv 0$  en intégrant une nouvelle fois par parties.  $\square$

## 1.2 Récurrence lorsque $H_\infty > 0$

On montre dans ce paragraphe que, dans le cas d'un espace de Robertson-Walker éternel où la fonction de Hubble admet une limite  $H_\infty$  strictement positive en l'infini, si  $(t_s, \dot{t}_s)$  est une solution du système (IV.13), alors le processus  $\dot{t}_s$  est récurrent au sens de Harris dans l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Commençons par établir le lemme de comparaison suivant, qui est valable que limite  $H_\infty$  soit strictement positive ou non.

**Lemme V.4** — Soient  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker éternel et  $H_\infty$  la limite de la fonction de Hubble associée. Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13), où la martingale  $M^{\dot{t}}$  est représentée par un mouvement brownien réel standard  $B : dM_s^{\dot{t}} = \sigma(\dot{t}_s^2 - 1)^{1/2} dB_s$ . Soient enfin  $u_s$  et  $v_s$  les solutions fortes, bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$  et issues de  $u_0 = v_0 = \dot{t}_0$ , des équations :

$$\begin{aligned} du_s &= -H(t_0) (u_s^2 - 1) \frac{3\sigma^2}{2} u_s ds + \sigma \sqrt{u_s^2 - 1} dB_s, \\ dv_s &= -H_\infty (v_s^2 - 1) \frac{3\sigma^2}{2} v_s ds + \sigma \sqrt{v_s^2 - 1} dB_s. \end{aligned}$$

Alors presque sûrement, pour tout  $0 \leq s < +\infty$ , on a  $u_s \leq \dot{t}_s \leq v_s$ .

*Démonstration.* La preuve du lemme suit de près les preuves de théorèmes de comparaison unidimensionnels utilisant le temps local (voir [LG83] ou théorème (3.5) et (3.8) p. 390-395 de [RY99]). Soient  $(t_s, \dot{t}_s)$ ,  $u_s$  et  $v_s$  les processus introduits dans l'énoncé du lemme. Considérons un entier  $n_0$  tel que  $n_0 > \dot{t}_0 = u_0$ , et pour tout entier  $n \geq n_0$ , les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} \tau_n(u) &= \inf\{s > 0, u_s \geq n\}, \quad \tau_n(\dot{t}) = \inf\{s > 0, \dot{t}_s \geq n\}, \\ \tau_n(v) &= \inf\{s > 0, v_s \geq n\} \quad \text{et} \quad \tau_n = \tau_n(\dot{t}) \wedge \tau_n(u) \wedge \tau_n(v). \end{aligned}$$

Pour établir le lemme, il suffit de montrer que pour tout  $n \geq n_0$ , on a l'encadrement  $\tau_n(u) \leq \tau_n(\dot{t}) \leq \tau_n(v)$  et que les processus  $(u_{s \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s \wedge \tau_n})^+$  et  $(\dot{t}_{s \wedge \tau_n} - v_{s \wedge \tau_n})^+$  sont nuls presque sûrement. Pour tout  $s < \tau_n$ , on a

$$d\langle \dot{t} - u \rangle_s = \sigma^2 \left( \sqrt{|\dot{t}_s|^2 - 1} - \sqrt{|u_s|^2 - 1} \right)^2 ds \leq 2\sigma^2 \times n \times |\dot{t}_s - u_s| ds.$$

En particulier, si  $L(\dot{t} - u)$  désigne le temps local du processus  $\dot{t}_s - u_s$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}} L_{s \wedge \tau_n}^x(\dot{t} - u) \frac{dx}{|x|} = \int_0^{s \wedge \tau_n} \frac{d\langle \dot{t} - u \rangle_{s'}}{|\dot{t}_{s'} - u_{s'}|} \leq 2\sigma^2 \times n \times (s \wedge \tau_n) < +\infty.$$

Nécessairement, le temps local en zéro  $L_{s \wedge \tau_n}^0(\dot{t} - u)$  est donc nul presque sûrement. De la même façon, on montre que  $L_{s \wedge \tau_n}^0(v - \dot{t}) = 0$  presque sûrement. En appliquant la formule d'Itô–Tanaka et en prenant l'espérance, on obtient alors les deux équations suivantes

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(u_{s \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s \wedge \tau_n})^+] &= U_s + \frac{3\sigma^2}{2} \int_0^s \mathbb{E} [(u_{s' \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s' \wedge \tau_n})^+] ds', \\ \mathbb{E} [(\dot{t}_{s \wedge \tau_n} - v_{s \wedge \tau_n})^+] &= V_s + \frac{3\sigma^2}{2} \int_0^s \mathbb{E} [(\dot{t}_{s' \wedge \tau_n} - v_{s' \wedge \tau_n})^+] ds',\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}U_s &:= \mathbb{E} \left[ \int_0^{s \wedge \tau_n} [H(t_{s'}) (\dot{t}_{s'}^2 - 1) - H(t_0) (u_{s'}^2 - 1)] 1_{\{u_{s'} > \dot{t}_{s'}\}} ds' \right], \\ V_s &:= \mathbb{E} \left[ \int_0^{s \wedge \tau_n} [H_\infty (v_{s'}^2 - 1) - H(t_{s'}) (\dot{t}_{s'}^2 - 1)] 1_{\{\dot{t}_{s'} > v_{s'}\}} ds' \right].\end{aligned}$$

Comme la fonction  $H$  est décroissante, positive, et que le temps  $t_s$  est croissant, les processus  $U_s$  et  $V_s$  sont négatifs et l'on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [(u_{s \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s \wedge \tau_n})^+] &\leq \frac{3\sigma^2}{2} \int_0^s \mathbb{E} [(u_{s' \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s' \wedge \tau_n})^+] ds', \\ \mathbb{E} [(\dot{t}_{s \wedge \tau_n} - v_{s \wedge \tau_n})^+] &\leq \frac{3\sigma^2}{2} \int_0^s \mathbb{E} [(\dot{t}_{s' \wedge \tau_n} - v_{s' \wedge \tau_n})^+] ds' .\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que  $\mathbb{E} [(u_{s \wedge \tau_n} - \dot{t}_{s \wedge \tau_n})^+] = 0$  et  $\mathbb{E} [(\dot{t}_{s \wedge \tau_n} - v_{s \wedge \tau_n})^+] = 0$ , *i.e.*,  $u_{s \wedge \tau_n} \leq \dot{t}_{s \wedge \tau_n} \leq v_{s \wedge \tau_n}$  presque sûrement. En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on conclut que, pour tout  $s < \tau'$ ,  $u_s \leq \dot{t}_s \leq v_s$  presque sûrement.  $\square$

Armé du lemme V.4, on peut à présent établir la récurrence du processus  $\dot{t}_s$  dans un univers éternel où  $H_\infty > 0$ . Les mesures de probabilités  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}$  qui interviennent dans l'énoncé ci-dessous sont celles qui ont été introduites dans la section 1.1 de ce chapitre.

**Proposition V.1** — *Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Si  $H_\infty > 0$ , alors le processus non markovien  $\dot{t}_s$  est récurrent au sens de Harris dans l'intervalle  $]1, +\infty[$ . Précisément, si  $f$  est une fonction monotone et  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}$ -intégrable, ou encore si elle est continue et bornée, alors lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a la convergence presque sûre, :*

$$\frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \xrightarrow{p.s.} \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f).$$

Remarque V.2 — La convergence ci-dessus fait bien entendu penser au théorème ergodique, et l'on aurait envie de dire que le processus  $\dot{t}_s$  est ergodique dans  $]1, +\infty[$ , de probabilité invariante  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}$ . Cela n'est pas possible car le seul processus  $\dot{t}_s$  n'est pas un processus markovien, contrairement au couple  $(t_s, \dot{t}_s)$ .

*Démonstration.* Il existe un mouvement brownien  $B$  tel que  $\dot{t}_s$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\dot{t}_s = -H(t_s) \times (\dot{t}_s^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s ds + \sigma \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1} dB_s.$$

Soient  $z_s$  et  $z_s^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , les processus définis de la façon suivante. Le processus  $z_s$  est la solution forte, vérifiant  $z_0 = \dot{t}_0$ , de l'équation différentielle stochastique

$$dz_s = -H_\infty \times (|z_s|^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2} z_s ds + \sigma \sqrt{|z_s|^2 - 1} dB_s.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les processus  $z_s^n$  coïncident avec  $\dot{t}_s$  sur  $[0, n]$  et sont les solutions respectives sur  $[n, +\infty[$  des équations différentielles stochastiques

$$dz_s^n = -H(t_0 + n) \times (|z_s^n|^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2} z_s^n ds + \sigma \sqrt{|z_s^n|^2 - 1} dB_s.$$

Presque sûrement, pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $s \geq 0$ , on a alors

$$z_s^n \leq \dot{t}_s \leq z_s. \quad (\text{V.4})$$

En effet, la majoration  $\dot{t}_s \leq z_s$  a déjà été vue dans le lemme V.4 et la minoration  $z_s^n \leq \dot{t}_s$  est aussi conséquence du lemme V.4, en prenant pour conditions initiales  $t'_0 = t_n \geq t_0 + n$  et  $\dot{t}'_0 = \dot{t}_n$ . Les processus  $z_s^0$  et  $z_s$  étant tous deux ergodiques dans  $]1, +\infty[$  (lemme V.2), il sont récurrents au sens de Harris, et  $\dot{t}_s$  l'est lui aussi. Considérons une fonction  $f$  croissante et intégrable contre la probabilité  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}$ , et fixons un réel  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  est alors intégrable contre les mesures  $\bar{\nu}_{H(t_0+n), \sigma}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et d'après le théorème de convergence dominée, lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a

$$\bar{\nu}_{H(t_0+n), \sigma}(f) \longrightarrow \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f).$$

Choisissons  $n$  assez grand pour que

$$|\bar{\nu}_{H(t_0+n), \sigma}(f) - \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f)| \leq \varepsilon.$$

D'après l'encadrement (V.4), pour tout  $s \geq 0$ , on a presque sûrement :

$$\int_0^s f(z_u^n) du \leq \int_0^s f(\dot{t}_u) du \leq \int_0^s f(z_u) du.$$

L'entier  $n$  étant fixé, d'après le théorème ergodique, on peut affirmer que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\bar{\nu}_{H(t_0+n),\sigma}(f) \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \leq \bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(f),$$

donc

$$\bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(f) - \varepsilon \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \leq \bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(f).$$

L'encadrement étant valable pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\frac{1}{s} \int_0^s f(\dot{t}_u) du \longrightarrow \bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(f). \quad (\text{V.5})$$

Toute fonction régulière pouvant s'écrire comme différence de deux fonctions monotones, la convergence (V.5) est aussi valable pour les fonctions  $f$  appartenant à l'ensemble  $C_b^1 = \{f, f' \text{ est bornée sur } ]1, +\infty[ \}$ , puis par régularisation, à l'ensemble  $C_b^0(]1, +\infty[, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollaire V.1** — *Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Si la limite  $H_\infty$  de la fonction de Hubble est strictement positive, alors lorsque  $s$  tend vers l'infini, les processus  $t_s/s$  et  $(a_s)^{1/s}$  convergent presque sûrement vers les limites déterministes  $\bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(Id)$  et  $H_\infty \times \bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(Id)$  respectivement.*

*Démonstration.* La convergence de  $s^{-1} \times t_s$  est une conséquence immédiate de la proposition V.1 et du fait que la fonction identité est intégrable contre  $\bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}$  :

$$s^{-1} \times t_s = s^{-1} \times t_0 + s^{-1} \times \int_{s_0}^s \dot{t}_u du \xrightarrow{p.s.} \bar{\nu}_{H_\infty,\sigma}(Id).$$

Rappelons que si  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13), alors  $a_s > 0$  pour tout  $0 < s < +\infty$ . Comme dans la preuve de la proposition IV.3, en appliquant la formule d'Itô à la fonction logarithme, on montre alors qu'il existe deux mouvements browniens réels standard  $B$  et  $B''$  tels que, pour  $0 < s_0 < s$  :

$$a_s = a_{s_0} \exp \left( \sigma^2(s - s_0) + \sigma(B_s - B_{s_0}) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} + B'' \left( \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right) \right).$$

La fonction monotone  $x \mapsto f(x) := (x^2 - 1)^{-1}$  est intégrable contre  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}$ . D'après la proposition V.1, on a donc la convergence presque sûre :

$$s^{-1} \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \xrightarrow{p.s.} \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f).$$

On a donc d'une part

$$s^{-1}(B_s - B_{s_0}) + s^{-1}B'' \left( \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right) \xrightarrow{p.s.} 0,$$

et d'autre part

$$s^{-1} \left( \sigma^2(s - s_0) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \right) \xrightarrow{p.s.} \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \times \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f) \right).$$

On en déduit la convergence  $(a_s)^{1/s}$  vers la limite  $\sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \times \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f) \right)$ . L'égalité entre la limite cette et la constante  $H_\infty \times \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(\text{Id})$  découle du lemme V.3.  $\square$

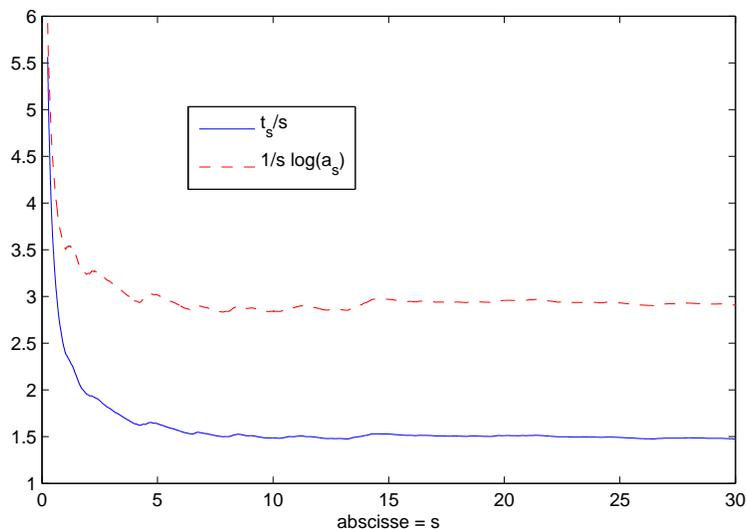


FIGURE 28: Le corollaire V.1 à partir de simulations numériques de  $t_s$  et  $a_s$ .

Remarque V.3 — Dans le cas d'un univers éternel avec  $H_\infty > 0$ , le processus  $t_s$  étant récurrent, il est naturel de penser que la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  n'admet pas de variables asymptotiques non triviales. Dans le chapitre VIII, nous verrons que c'est effectivement le cas : les seules fonctions harmoniques bornées pour le générateur infinitésimal du processus  $(t_s, \dot{t}_s)$  sont les fonctions constantes.

### 1.3 Transience dans le cas polynomial

#### 1.3.1 Divergence exponentielle du processus $\dot{t}_s$

Nous déterminons à présent le comportement asymptotique de  $\dot{t}_s$  lorsque la fonction de Hubble tend vers zéro au voisinage de l'infini et sous l'hypothèse supplémentaire que le facteur d'expansion est à croissance polynomiale *i.e.* lorsqu'il existe  $c \geq 0$  tel que  $H(t) \times t$  tend vers  $c$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Cette hypothèse supplémentaire est vérifiée par tous les exemples d'espaces de Robertson-Walker de la littérature physique tels que  $H_\infty = 0$ . Nous montrons que dans ce cas, le processus  $\dot{t}_s$  diverge exponentiellement vite vers l'infini, la vitesse de divergence étant reliée de manière explicite à l'exposant  $c$ . Précisément, nous avons la proposition suivante :

**Proposition V.2** — *Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Si  $H_\infty = 0$  et si le facteur d'expansion est à croissance polynomiale d'exposant  $c$ , alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a :*

$$\frac{1}{s} \log(\dot{t}_s) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{1+c}, \quad \frac{1}{s} \log(\alpha(t_s)) \longrightarrow \frac{\sigma^2 c}{1+c}.$$

*En particulier,*

$$\frac{1}{s} \log\left(\frac{a_s}{a^2(t_s)}\right) \longrightarrow \sigma^2 \left(\frac{1-c}{1+c}\right).$$

Avant de donner la preuve de la proposition V.2, nous montrons deux lemmes, valables sous la seule hypothèse que  $H_\infty = 0$ .

**Lemme V.5** — *Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et soit  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Si  $H_\infty = 0$ , alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :*

$$\int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du + \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2} = o(s).$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ ; comme  $H_\infty = 0$  et  $\dot{t}_s \geq 1$  pour tout  $s \geq 0$ , pour  $s$  assez grand, on a

$$\int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du \leq \varepsilon \times s, \quad \text{i.e.,} \quad \int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du = o(s).$$

D'autre part, il existe un mouvement brownien  $B$  tel que  $\dot{t}_s$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\dot{t}_s = -H(t_s) \times (\dot{t}_s^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s ds + \sigma \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1} dB_s.$$

On a toujours  $t_s \geq s$ . Fixons  $\eta > 0$  et considérons le temps d'atteinte (déterministe)  $\tau_\eta := \inf\{s > 0, H(s) \leq \eta\}$ . Soit alors  $z_s$  la diffusion coïncidant avec  $\dot{t}_s$  sur l'intervalle  $[0, \tau_\eta]$  et solution de l'équation différentielle stochastique suivante sur  $[\tau_\eta, +\infty[$  :

$$dz_s = -\eta \times (z_s^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2} z_s ds + \sigma \sqrt{z_s^2 - 1} dB_s.$$

D'après le lemme V.4 (avec  $t'_0 = t_{\tau_\eta}$  et  $\dot{t}'_0 = \dot{t}_{\tau_\eta}$ ), presque sûrement, on a

$$z_s \leq \dot{t}_s, \text{ pour tout } s \geq 0.$$

D'après le lemme V.2, la diffusion  $z_s$  est ergodique dans  $]1, +\infty[$ , de probabilité invariante  $\bar{\nu}_{\eta, \sigma}$ . La fonction  $x \mapsto 1/x^2$  étant intégrable contre  $\bar{\nu}_{\eta, \sigma}$ , d'après le théorème ergodique, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\frac{1}{s} \int_0^s \frac{du}{z_u^2} \longrightarrow C(\eta, \sigma^2) := \int_1^{+\infty} x^{-2} \bar{\nu}_{\eta, \sigma}(x) dx.$$

En posant  $\varepsilon = 2\eta/\sigma^2$  et en effectuant le changement de variable  $y = \varepsilon(x-1)$ , on a pour  $\eta$  assez petit :

$$C(\eta, \sigma^2) = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{(u+\varepsilon)^2} \sqrt{u(u+2\varepsilon)} e^{-u} du}{\int_0^{+\infty} \sqrt{u(u+2\varepsilon)} e^{-u} du} \leq \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{(u+\varepsilon)^2} \sqrt{u(u+1)} e^{-u} du}{\int_0^{+\infty} u e^{-u} du}.$$

À  $\sigma$  fixé, d'après le théorème de convergence dominée,  $C(\eta, \sigma^2)$  tend vers zéro lorsque  $\eta$  tend vers zéro. Soit  $\epsilon > 0$  et  $\eta$  assez petit pour que  $C(\eta, \sigma^2) \leq \epsilon/2$ . Presque sûrement, pour  $s$  assez grand, on a alors

$$\frac{1}{s} \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2} \leq \frac{1}{s} \int_0^s \frac{du}{z_u^2} \leq 2C(\eta, \sigma^2) \leq \epsilon,$$

d'où le résultat. □

Remarque V.4 — Sous l'hypothèse que  $H_\infty = 0$  et de la même manière que dans la preuve ci-dessus, la fonction  $x \mapsto (x^2 - 1)^{-1}$  étant intégrable contre les mesures  $\bar{\nu}_{\eta, \sigma}$ , on montre que presque sûrement,  $s$  tend vers l'infini :

$$\frac{1}{s} \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} \longrightarrow 0.$$

**Lemme V.6** — Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et soit  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Si  $H_\infty = 0$ , alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a :

$$\log(\alpha(t_s)\dot{t}_s) = \log\left(\int^{\dot{t}_s} \alpha(u)du\right) = \sigma^2 \times s + o(s).$$

*Démonstration.* Il existe un mouvement brownien réel  $B$  tel que

$$d\dot{t}_s = -H(t_s) \times (\dot{t}_s^2 - 1) ds + \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds + \sigma\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1} dB_s.$$

D'après la formule d'Itô, appliquée à la fonction logarithme, on a alors :

$$d\log(\dot{t}_s) = \sigma^2 ds + \frac{H(t_s)}{\dot{t}_s} ds + \frac{\sigma^2}{2\dot{t}_s^2} ds - H(t_s)\dot{t}_s ds + \sigma\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_s^2}} dB_s.$$

La dernière équation s'écrit encore :

$$d\log(\alpha(t_s)\dot{t}_s) = \sigma^2 ds + \frac{H(t_s)}{\dot{t}_s} ds + \frac{\sigma^2}{2\dot{t}_s^2} ds + \sigma\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_s^2}} dB_s.$$

En intégrant entre 0 et  $s$ , on obtient alors :

$$\log(\alpha(t_s)\dot{t}_s) = \sigma^2 s + \sigma B_s + v_s, \quad (\text{V.6})$$

avec

$$v_s := \log(\alpha(t_0)\dot{t}_0) + \int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du + \int_0^s \frac{\sigma^2}{2\dot{t}_u^2} du - \sigma \int_0^s \frac{\dot{t}_u^{-2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_u^2}}} dB_u. \quad (\text{V.7})$$

D'après le lemme V.5, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du + \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2} = o(s).$$

D'autre part, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a aussi

$$|B_s| + \left| \int_0^s \frac{\dot{t}_u^{-2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_u^2}}} dB_u \right| = o(s).$$

Finalement, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a bien :

$$\log(\alpha(t_s)\dot{t}_s) = \sigma^2 \times s + o(s).$$

En intégrant  $\alpha(t_s)\dot{t}_s$ , on obtient de même

$$\log \left( \int_{.}^{t_s} \alpha(u) du \right) = \sigma^2 \times s + o(s).$$

□

*Démonstration.* (de la proposition V.2) Supposons que la fonction  $H(t) \times t$  tend vers  $0 \leq c < +\infty$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. Soient  $0 < \varepsilon < 1$ , et  $t_0$  assez grand pour que pour tout  $t \geq t_0 : c - \varepsilon \leq H(t) \times t \leq c + \varepsilon$ . Il existe alors deux constantes  $c_0$  et  $c'_0$  telles que, pour tout  $t \geq T$  :

$$(c - \varepsilon + 1) \log(t) + c_0 \leq \log \left( \int_{t_0}^t \alpha(u) du \right) \leq (c + \varepsilon + 1) \log(t) + c'_0.$$

D'après le lemme V.6, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log \left( \int_{t_0}^{t_s} \alpha(u) du \right) = \sigma^2.$$

On en déduit que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini

$$\frac{\sigma^2}{1 + c + \varepsilon} \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log(t_s) \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log(t_s) \leq \frac{\sigma^2}{1 + c - \varepsilon},$$

*i.e.*,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-1} \log(t_s) = \sigma^2(1 + c)^{-1}$ . Il en découle que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log(\alpha(t_s)) = \frac{\sigma^2 c}{1 + c},$$

et toujours d'après le lemme V.6

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log(\dot{t}_s) = \frac{\sigma^2}{1 + c}.$$

En particulier,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log \left( \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log \left( \frac{\dot{t}_s}{\alpha(t_s)} \right) = \sigma^2 \left( \frac{1 - c}{1 + c} \right).$$

□

Remarque V.5 — Nous ne sommes pas parvenus à montrer que le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire sous la seule hypothèse que la fonction de Hubble tend vers zéro au voisinage de l'infini, *i.e.* lorsque  $H_\infty = 0$ . C'est la raison pour laquelle nous nous limitons ici à des facteurs d'expansion à croissance polynomiale.

### 1.3.2 Étude du rapport $\dot{t}_s/t_s$

D'après la preuve ci-dessus, dans un univers éternel où l'expansion est polynomiale, presque sûrement, les processus  $t_s$  et  $\dot{t}_s$  divergent tout deux exponentiellement vite vers l'infini lorsque  $s$  tend vers l'infini, et  $s^{-1} \log(\dot{t}_s/t_s)$  tend presque sûrement vers zéro. Nous précisons ici le comportement asymptotique du rapport  $\dot{t}_s/t_s$ . Pour cela, on introduit le rapport :

$$Z_s := \frac{\alpha(t_s)\dot{t}_s}{\int_{t_0}^{t_s} \alpha(u)du}.$$

Nous allons voir que  $Z_s$  converge en loi, mais pas presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

**Proposition V.3** — *On se place sous les hypothèses de la proposition V.2. Le processus  $Z_s$  converge en loi, mais pas presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers une variable aléatoire  $Z_\infty$  de loi explicite :*

$$Z_\infty \stackrel{d}{=} \frac{\sigma^2}{2} \Gamma(2).$$

*Démonstration.* Rappelons les identités (V.6) et (V.7) obtenues dans la preuve du lemme V.6 :

$$\begin{aligned} \log(\alpha(t_s)\dot{t}_s) &= \sigma^2 s + \sigma B_s + v_s, \quad \text{avec} \\ v_s &:= \log(\alpha(t_0)\dot{t}_0) + \int_0^s \frac{H(t_u)}{\dot{t}_u} du + \int_0^s \frac{\sigma^2}{2\dot{t}_u^2} du - \sigma \int_0^s \frac{\dot{t}_u^{-2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_u^2}}} dB_u. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et  $s$  l'expression de  $\alpha(t_u)\dot{t}_u$  obtenue à partir l'équation (V.6) puis en prenant le quotient, le processus  $Z_s$  s'écrit

$$Z_s = \frac{\alpha(t_s)\dot{t}_s}{\int_{t_0}^{t_s} \alpha(u)du} = \frac{\exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + v_s)}{\int_0^s \exp(\sigma^2 u + \sigma B_u + v_u) du}.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, d'après la proposition V.2, le processus  $v_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe alors un temps  $s_0$  aléatoire et fini presque sûrement tel que, pour tout  $s > s_0$  :

$$(1 - \varepsilon)\tilde{Z}_s \leq Z_s \leq (1 + \varepsilon)\tilde{Z}_s, \quad (\text{V.8})$$

où l'on a posé

$$\tilde{Z}_s := \frac{\exp(\sigma^2 s + \sigma B_s)}{\int_0^s \exp(\sigma^2 u + \sigma B_u) du} = \left[ \int_0^s \exp(\sigma^2(u - s) + \sigma(B_u - B_s)) du \right]^{-1}.$$

Par ailleurs, lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\tilde{Z}_s^{-1}$  converge en loi vers une variable strictement positive, de loi gamma. En effet, à  $s$  fixé, d'après l'égalité en loi

$$(B_s - B_u)_{0 \leq u \leq s} \stackrel{d}{=} (B_x)_{0 \leq x \leq s},$$

la variable  $\tilde{Z}_s^{-1}$  a même loi que la variable

$$\int_0^s \exp(-\sigma^2 x - \sigma B_x) dx,$$

qui converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers l'intégrale de Dufresne<sup>1</sup> :

$$\int_0^\infty \exp(-\sigma^2 x - \sigma B_x) dx \stackrel{d}{=} \frac{2}{\sigma^2} \times \frac{1}{\Gamma(2)}.$$

Désignons par  $\Psi$  la transformée de Laplace de la loi  $\sigma^2/2 \times \Gamma(2)$ . D'après l'encadrement (V.8), pour tout  $u > 0$ , on a

$$\Psi((1 + \varepsilon)u) \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [e^{-uZ_s}] \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E} [e^{-uZ_s}] \leq \Psi((1 - \varepsilon)u).$$

Comme  $\Psi$  est continue, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on conclut que  $Z_s$  converge bien en loi vers une variable  $Z_\infty$  de loi  $\sigma^2/2 \times \Gamma(2)$ . La convergence de  $Z_s$  n'a pas lieu presque sûrement. En effet, si c'était le cas, par le lemme de Césaro, on aurait :

$$\frac{1}{s} \log \left( \int_{t_0}^{t_s} \alpha(v) dv \right) = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\alpha(t_u) \dot{t}_u}{\int_{t_0}^{t_u} \alpha(v) dv} du = \frac{1}{s} \int_0^s Z_u du \rightarrow Z_\infty \text{ p.s.}$$

Par ailleurs, on aurait aussi

$$\frac{1}{s} \log(\alpha(t_s) \dot{t}_s) - \frac{1}{s} \log \left( \int_{t_0}^{t_s} \alpha(v) dv \right) = \frac{1}{s} \log(Z_s) \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Sous l'hypothèse que  $Z_s$  converge presque sûrement, on aurait donc nécessairement

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log(\alpha(t_s) \dot{t}_s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log \left( \int_{t_0}^{t_s} \alpha(v) dv \right) = Z_\infty \text{ p.s.}$$

Or, d'après le lemme V.6, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini

$$\log(\alpha(t_s) \dot{t}_s) = \sigma^2 \times s + o(s),$$

ce qui impose  $Z_\infty = \sigma^2$  p.s., d'où une contradiction.  $\square$

1. Nous renvoyons à [Yor01] ou encore à [Bai08b] pour l'identification de la loi limite.

Dans le cas d'un univers éternel où  $H_\infty = 0$ , le lemme élémentaire suivant établit un lien entre les vitesses (déterministes) de convergence vers zéro de la fonction de Hubble  $H(t)$  et du quotient  $\alpha(t)/\int^t \alpha(v)dv$ . Fixons  $t_0$  dans  $]0, +\infty[$ , et considérons sur  $[t_0, +\infty[$  la fonction  $u$  définie par

$$u(t) := \alpha(t)^{-1} \int_{t_0}^t \alpha(u)du \times H(t).$$

**Lemme V.7** — *Soit  $\alpha$  une fonction log-concave sur  $\mathbb{R}^+$  dont la dérivée logarithmique  $H$  tend vers zéro en l'infini. Si  $t \times H(t)$  converge vers  $c \geq 0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, alors  $u(t)$  tend vers  $c/(1+c)$ . Si  $t \times H(t)$  croît vers l'infini avec  $t$ , alors  $u(t)$  tend 1.*

*Démonstration.* Une première intégration par parties donne :

$$\int_{t_0}^t \alpha(v)dv = \frac{\alpha(t)}{H(t)} - \frac{\alpha(t_0)}{H(t_0)} + \int_{t_0}^t \alpha(v) \frac{H'(v)}{H^2(v)} dv. \quad (\text{V.9})$$

En particulier, comme  $H$  est décroissante, pour tout  $t \geq t_0$ , on a

$$\int_{t_0}^t \alpha(v)dv \leq \frac{\alpha(t)}{H(t)}, \quad \text{c'est à dire } u(t) \leq 1.$$

L'équation (V.9) s'écrit encore

$$\int_{t_0}^t \alpha(v) \left[ 1 - \frac{H'(v)}{H^2(v)} \right] dv = \frac{\alpha(t)}{H(t)} - \frac{\alpha(t_0)}{H(t_0)}.$$

Comme  $H(t)/\alpha(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a :

$$H(t)\alpha(t)^{-1} \int_{t_0}^t \alpha(v) \left[ 1 - \frac{H'(v)}{H^2(v)} \right] dv = 1 + o(1).$$

En intégrant à nouveau par parties, l'intégrale dans le membre de gauche s'écrit :

$$\alpha(t) \left[ (t - t_0) + \frac{1}{H(t)} - \frac{1}{H(t_0)} \right] - \int_{t_0}^t \alpha(v) \left[ H(v)(v - t_0) + 1 - \frac{H(v)}{H(t_0)} \right] dv,$$

et l'on a donc

$$H(t)(t - t_0) + o(1) = H(t)\alpha(t)^{-1} \int_{t_0}^t \alpha(v) [H(v)(v - t_0) + 1 + o(1)] dv. \quad (\text{V.10})$$

Supposons tout d'abord que  $H(t) \times t$  tend vers  $c \geq 0$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. D'après l'équation (V.10), on a alors

$$c + o(1) = (1 + c) \times H(t)\alpha(t)^{-1} \int_{t_0}^t \alpha(v)dv + o\left(H(t)\alpha(t)^{-1} \int_{t_0}^t \alpha(v)dv\right),$$

c'est à dire  $c + o(1) = (1 + c) \times u(t) + o(u(t))$  et l'on a bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{c}{1 + c}.$$

Traitons maintenant le cas où  $H(t) \times t$  croît vers l'infini avec  $t$ . Dans ce cas, le membre de droite de l'équation (V.10) est majoré par

$$[H(t)(t - t_0) + 1] \times u(t) \times (1 + o(1)),$$

et l'on a donc

$$\frac{H(t)(t - t_0)}{1 + H(t)(t - t_0)} + o(1) \leq u(t) \times (1 + o(1)).$$

Comme  $u(t) \leq 1$  pour tout  $t \geq t_0$ , on en déduit que  $u(t)$  tend vers 1 lorsque  $t$  tend vers l'infini.  $\square$

Remarque V.6 — Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_{t_0}^t u(v)dv = t - t_0 - \frac{1}{\alpha(t)} \int_{t_0}^t \alpha(u)du,$$

ou encore

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t u(v)dv = 1 - \frac{u(t)}{H(t) \times (t - t_0)}.$$

Lorsque  $H(t) \times t$  tend vers zéro, on retrouve que  $u(t)$  tend nécessairement vers zéro, et l'on peut préciser que  $u(t) \sim H(t) \times (t - t_0)$ .

Remarque V.7 — Dans le cas d'un univers mortel, nous verrons dans le paragraphe 2.3 de la prochaine section que l'on peut de la même façon relier la vitesse divergence de la fonction de Hubble au voisinage de  $T$  et celle de la fonction  $\alpha(t)/\int_t^T \alpha(v)dv$ . Nous considérerons alors la fonction

$$u(t) := \alpha(t)^{-1} \int_t^T \alpha(u)du \times H(t).$$

Grâce à la proposition V.3, au lemme V.7 et à la remarque V.6 lorsque  $c = 0$ , on déduit la convergence en loi du rapport  $\dot{t}_s/t_s$ .

**Corollaire V.2** — *On se place sous les mêmes hypothèses que dans la proposition V.2. Lorsque  $s$  tend vers l'infini, le rapport  $\dot{t}_s/t_s$  converge en loi, mais pas presque sûrement, vers une variable aléatoire de loi explicite :*

$$\frac{\dot{t}_s}{t_s} \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2}{2} \times \frac{1}{1 + c} \times \Gamma(2).$$

## 1.4 Un critère de convergence important pour la suite

En corollaire immédiat des propositions V.1 et V.2, nous énonçons ici une proposition concernant la convergence d'une fonctionnelle du processus  $\dot{t}_s$  en fonction de la vitesse de divergence du facteur d'expansion au voisinage de l'infini. Cette convergence jouera un rôle déterminant lors de l'étude asymptotique des composantes spatiales de la diffusion relativiste au prochain chapitre. Fixons  $s_0 > 0$ , la quantité qui nous intéresse est l'intégrale suivante :

$$C_s := \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1}$$

**Proposition V.4** — *On considère un espace de Robertson-Walker éternel. Soient  $(t_0, \dot{t}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, \dot{t}_s)$  la solution du système (IV.13) correspondante. Selon la nature de l'expansion, lorsque  $s$  tend vers l'infini, l'intégrale  $C_s$  présente les comportements asymptotiques suivants :*

- si l'expansion est exponentielle,  $C_s$  tend presque sûrement vers l'infini ;
- si l'expansion est polynomiale,  $C_s$  converge presque sûrement dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

*Démonstration.* Dans le cas où l'expansion est exponentielle, i.e  $H_\infty > 0$ , le processus  $\dot{t}_s$  est récurrent au sens de Harris. Plus précisément, dans la preuve du lemme V.1, on a vu qu'en vertu de la proposition V.1, si  $f$  est la fonction qui à  $x$  associe  $1/(x^2 - 1)$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ , alors lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$s^{-1} C_s = s^{-1} \int_{s_0}^s f(\dot{t}_u) du \xrightarrow{p.s.} \bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f) > 0.$$

En particulier, lorsque  $H_\infty > 0$ , l'intégrale  $C_s$  tend bien vers l'infini avec  $s$ . Passons au cas où l'expansion est polynomiale d'exposant  $c$ . D'après la proposition V.2, presque sûrement, le processus  $\dot{t}_s$  diverge alors exponentiellement vite vers l'infini. On en déduit naturellement que l'intégrale  $C_s$  converge alors presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini.  $\square$

Remarque V.8 — Si l'intégrale  $C_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini, alors le processus  $\dot{t}_s$  est nécessairement transitoire. En effet, si l'intégrale  $\int^{+\infty} du/(\dot{t}_u^2 - 1)$  est finie presque sûrement, il en est de même pour les intégrales  $\int^{+\infty} du/\dot{t}_u^2$ ,  $\int^{+\infty} du/\dot{t}_u^3$  et  $\int^{+\infty} du/\dot{t}_u^4$ . Or, en appliquant la formule d'Itô à la fonction  $1/x^2$ , on montre qu'il existe un mouvement brownien  $B$  tel que :

$$\frac{1}{\dot{t}_s^2} - \frac{1}{\dot{t}_0^2} = \int_0^s \frac{2H(t_u)}{\dot{t}_u} du - \int_0^s \left( \frac{2H(t_u)}{\dot{t}_u^3} du + 3\sigma^2 \frac{du}{\dot{t}_u^4} + \frac{2\sigma}{\dot{t}_u^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\dot{t}_u^2}} dB_u \right).$$

Sous l'hypothèse que  $C_s$  converge presque sûrement, la dernière intégrale est convergente. Comme  $1/t_s^2 \leq 1$ , l'intégrale croissante  $\int_0^s \frac{2H(t_u)}{t_u} du$  est nécessairement convergente et finalement le processus  $1/t_s^2$  converge lui même presque sûrement. Comme l'intégrale  $\int^{+\infty} du/t_u^2$  est finie presque sûrement, la limite de  $1/t_s^2$  est nécessairement nulle, d'où le résultat.

## 2 ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION TEMPORELLE DANS UN UNIVERS MORTEL

Nous passons à présent à l'étude du comportement asymptotique de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  solution du système d'équations différentielles stochastiques (IV.13), dans le cas d'un univers mortel, c'est-à-dire un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $I = ]0, T[$  avec  $T < +\infty$ .

### 2.1 Une image de la situation

Dans un univers mortel, on a vu que le temps d'explosion de la diffusion temporelle est fini presque sûrement, égal à  $\tau = \inf\{s > 0, t_s \geq T\}$ . Dans le prochain paragraphe, nous montrons que lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $a_s = \alpha(t_s) \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}$  admet presque sûrement une limite  $a_{\infty}$  finie et strictement positive. Autrement dit, le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire au voisinage de  $\tau$ . À titre d'exemple, l'image suivante est une simulation de la trajectoire  $(t_s, \dot{t}_s)$  correspondant au facteur d'expansion  $\alpha(t) = \sin(t)$  sur l'intervalle  $]0, \pi[$ .

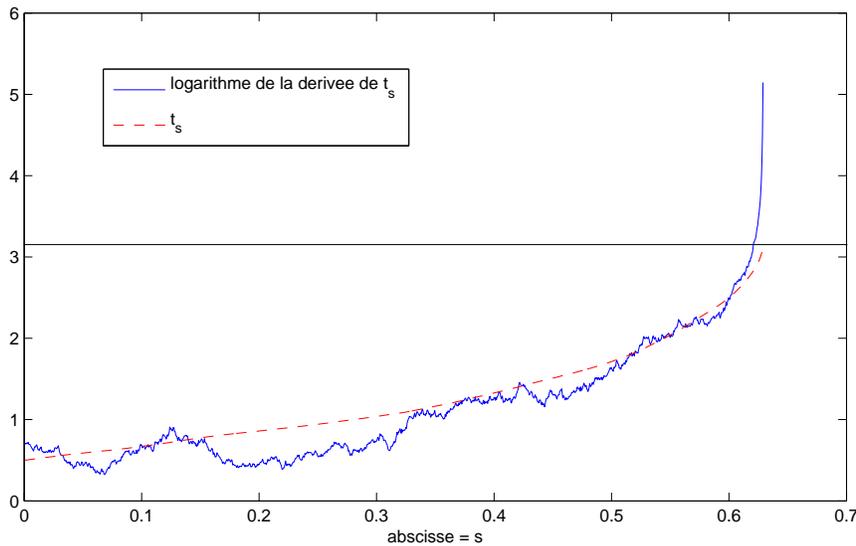


FIGURE 29: Exemple de trajectoire de la diffusion temporelle.

Dans le paragraphe 2.3, nous précisons la vitesse de divergence de  $\dot{t}_s$  puis nous montrons que, comme dans le cas des géodésiques de lumière, le couple  $(t_s, a_s)$  peut-être prolongé en une diffusion bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ .

## 2.2 Convergence du processus $a_s$

On montre ici que  $a_s$  converge presque sûrement vers une variable strictement positive. Comme  $a_s = \alpha(t_s)\sqrt{t_s^2 - 1}$  et que par hypothèse, la fonction  $\alpha(t)$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend  $T$ , la convergence de  $a_s$  a pour corollaire immédiat le fait que le processus  $\dot{t}_s$  est transitoire au voisinage de  $\tau$ .

**Proposition V.5** — *On se place dans le cas d'un univers mortel. Soient une condition initiale  $(t_0, a_0) \in ]0, T[ \times ]0, +\infty[ \cup [0, T[ \times ]0, +\infty[$  et  $(t_s, a_s)$  la solution du système (IV.14) correspondante définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau = \inf\{s > 0, t_s \geq T\}$ . Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $a_s = \alpha(t_s)\sqrt{t_s^2 - 1}$  converge presque sûrement vers une variable  $a_\infty$  strictement positive et finie.*

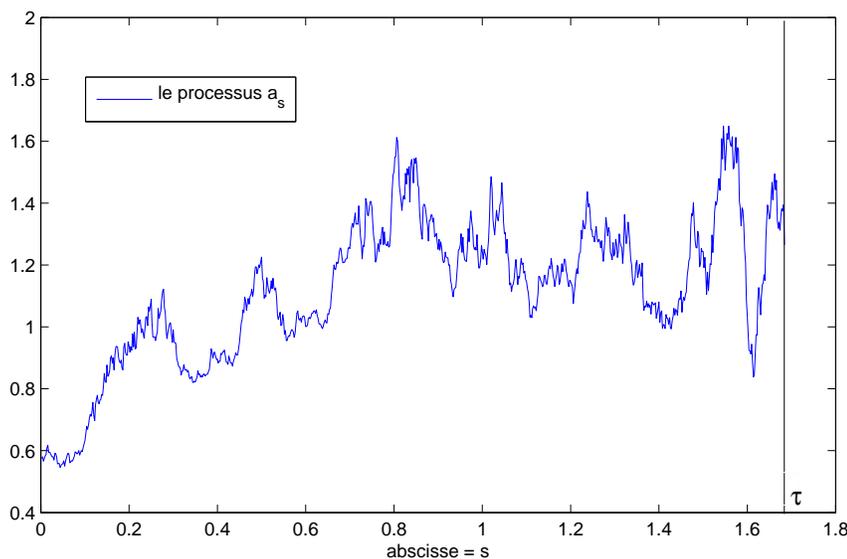


FIGURE 30: Une simulation de la trajectoire  $a_s$  lorsque  $T < +\infty$

*Démonstration.* Soit  $(t_s, a_s)$  la diffusion de l'énoncé issue de  $(t_0, a_0)$ . D'après les propositions IV.3 et IV.5, pour tout  $0 < s < \tau$ , les processus  $a_s$  et  $\dot{t}_s$  vérifient alors  $a_s > 0$  et  $\dot{t}_s > 1$  presque sûrement. Par ailleurs, d'après le système (IV.13), il existe un mouvement brownien réel standard  $B$  tel que

$$d\dot{t}_s = \frac{3\sigma^2}{2}\dot{t}_s ds - H(t_s)(\dot{t}_s^2 - 1) ds + \sigma\sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}dB_s.$$

En appliquant la formule d'Itô, on obtient alors que pour  $0 < s_0 < s < \tau$  :

$$\log \left( \frac{t_s^2 - 1}{t_{s_0}^2 - 1} \right) = \log \left( \frac{\alpha^2(t_{s_0})}{\alpha^2(t_s)} \right) + \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{2t_u^2 - 1}{t_u^2 - 1} du + 2\sigma \int_{s_0}^s \frac{\dot{t}_u}{\sqrt{t_u^2 - 1}} dB_u. \quad (\text{V.11})$$

La dernière équation s'écrit encore :

$$\log \left( \frac{a_s^2}{a_{s_0}^2} \right) = \sigma^2 \underbrace{\int_{s_0}^s \frac{2t_u^2 - 1}{t_u^2 - 1} du}_{A_s} + 2\sigma \underbrace{\int_{s_0}^s \frac{\dot{t}_u}{\sqrt{t_u^2 - 1}} dB_u}_{M_s}. \quad (\text{V.12})$$

Nous allons montrer que le membre de droite de (V.12) converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Fixons  $0 < \varepsilon < 1$  et décomposons le crochet de  $M_s$  en  $\langle M \rangle_s = \langle M \rangle_s^+ + \langle M \rangle_s^-$  avec

$$\langle M \rangle_s^+ = \int_{s_0}^s \frac{t_u^2}{t_u^2 - 1} 1_{\{t_u^2 - 1 \geq \varepsilon\}} du, \quad \langle M \rangle_s^- = \int_{s_0}^s \frac{t_u^2}{t_u^2 - 1} 1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}} du.$$

Posons de même  $A_s = A_s^+ + A_s^-$  avec

$$A_s^+ = \int_{s_0}^s \frac{2t_u^2 - 1}{t_u^2 - 1} 1_{\{t_u^2 - 1 \geq \varepsilon\}} du, \quad A_s^- = \int_{s_0}^s \frac{2t_u^2 - 1}{t_u^2 - 1} 1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}} du.$$

Les processus  $\langle M \rangle_s^+$  et  $A_s^+$  convergent presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers le temps d'explosion  $\tau$ . En effet, ils sont croissants et bornés puisque

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_s^+ &\leq \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon)\tau < +\infty \text{ p.s.} \\ A_s^+ &\leq \varepsilon^{-1}(1 + 2\varepsilon)\tau < +\infty \text{ p.s.} \end{aligned}$$

D'autre part, comme on a les encadrements

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^s \frac{1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}}}{t_u^2 - 1} du &\leq \langle M \rangle_s^- \leq (1 + \varepsilon) \int_{s_0}^s \frac{1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}}}{t_u^2 - 1} du, \\ \int_{s_0}^s \frac{1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}}}{t_u^2 - 1} du &\leq A_s^- \leq (1 + 2\varepsilon) \int_{s_0}^s \frac{1_{\{t_u^2 - 1 < \varepsilon\}}}{t_u^2 - 1} du, \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

les processus croissants  $\langle M \rangle_s^-$  et  $A_s^-$  sont de même nature. Raisonnons par l'absurde et supposons que ces processus divergent, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Nécessairement, le processus  $\dot{t}_s$  visiterait alors infiniment souvent (ou resterait dans) la boule  $B(1, \varepsilon)$  centrée en 1 de rayon  $\varepsilon$ . D'autre part, comme

$\langle M \rangle_s = O(A_s)$  d'après (V.13), le processus  $A_s + M_s$  tendrait presque sûrement vers plus l'infini, ainsi que le processus  $\log(\alpha^2(t_{s_0})/\alpha^2(t_s))$ . Le membre droite de l'équation (V.11), et donc le processus  $\dot{t}_s$ , tendraient donc vers plus l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Ceci contredit le fait que  $\dot{t}_s$  reste dans la boule  $B(1, \varepsilon)$ , ou la visite infiniment souvent. Les processus  $M_s$  et  $A_s$  sont donc presque sûrement convergents lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , d'où le résultat.  $\square$

### 2.3 Vitesse de divergence de $\dot{t}_s$

Suivant une démarche tout à fait analogue à celle que nous avons suivie dans le cas d'un univers éternel, nous faisons maintenant le lien entre la vitesse divergence de la fonction de Hubble et celle de la fonction  $\alpha(t)/\int_t^T \alpha(v)dv$ , ce dans le but d'expliciter la vitesse de divergence de  $\dot{t}_s$ . Fixons  $t_0$  dans  $]0, T[$  et considérons sur  $[t_0, T[$  la fonction  $u$  définie par

$$u(t) := \alpha(t)^{-1} \int_t^T \alpha(u)du \times H(t).$$

**Lemme V.8** — *On se place dans le cas d'un univers mortel. S'il existe une constante  $c \geq 0$  telle que la fonction  $H(t) \times (T-t)$  converge vers  $-c$ , lorsque  $t$  tend vers  $T$ , alors la fonction  $u(t)$  tend vers  $-c/(1+c)$ . Si  $H(t) \times (T-t)$  décroît vers moins l'infini lorsque  $t$  tend vers  $T$ , alors  $u(t)$  tend  $-1$ .*

*Démonstration.* Une première intégration par parties donne :

$$\int_t^T \alpha(v)dv = -\frac{\alpha(t)}{H(t)} + \int_t^T \alpha(v) \frac{H'(v)}{H^2(v)} dv. \quad (\text{V.14})$$

Comme  $H$  est décroissante et tend vers moins l'infini lorsque  $t$  tend vers  $T$ , pour tout  $t$  assez proche de  $T$  de sorte que  $H(t) < 0$ , on a

$$\int_t^T \alpha(v)dv \leq -\frac{\alpha(t)}{H(t)}, \text{ et donc } u(t) \geq -1.$$

L'équation (V.14) s'écrit encore

$$\int_t^T \alpha(v) \left[ 1 - \frac{H'(v)}{H^2(v)} \right] dv = -\frac{\alpha(t)}{H(t)}.$$

En intégrant à nouveau par parties, l'intégrale dans le membre de gauche s'écrit :

$$\alpha(t) \left[ (T-t) - \frac{1}{H(t)} \right] + \int_t^T \alpha(v) [H(v)(T-v) - 1],$$

et l'on a donc

$$[1 - H(t)(T - t)] + H(t)\alpha(t)^{-1} \int_t^T \alpha(v) [1 - H(v)(T - v)] dv = 1. \quad (\text{V.15})$$

Supposons qu'il existe  $c \geq 0$  tel que  $H(t) \times (T - t)$  tend vers  $-c$ , lorsque  $t$  tend vers  $T$ . D'après (V.15), on a alors

$$[(1 + c) + o(1)] + (1 + c) [u(t) + o(u(t))] = 1, \quad \text{et donc } u(t) \rightarrow -\frac{c}{1 + c}.$$

Dans le cas où  $H(t) \times (T - t)$  décroît vers moins l'infini, d'après l'équation (V.15), on a l'inégalité

$$[1 - H(t)(T - t)] \times (u(t) + 1) \leq 1.$$

dont on déduit que  $\limsup_{t \rightarrow T} u(t) + 1 \leq 0$ . Comme  $u(t) \geq -1$  pour  $t$  assez grand, on a bien  $u(t) \rightarrow -1$  lorsque  $t$  tend vers  $T$ .  $\square$

Remarque V.9 — Une nouvelle intégration par parties donne

$$\frac{1}{T - t} \int_t^T u(v) dv = \frac{u(t)}{H(t) \times (T - t)} - 1.$$

Lorsque  $H(t) \times (T - t)$  tend vers zéro, on retrouve que  $u(t)$  tend nécessairement vers zéro, et l'on peut préciser que  $u(t) \sim H(t) \times (T - t)$ .

**Corollaire V.3** — *On se place dans le cas d'un univers mortel. Soient une condition initiale  $(t_0, a_0) \in ]0, T[ \times ]0, +\infty[ \cup [0, T[ \times ]0, +\infty[$  et  $(t_s, a_s)$  la solution du système (IV.14) correspondante définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau = \inf\{s > 0, t_s \geq T\}$ . Si la décroissance du facteur d'expansion est polynomiale d'exposant  $c$ , alors lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :*

$$\begin{aligned} \dot{t}_s &= a_\infty \times (\tau - s)^{-\frac{c}{1+c} + o(1)}, \\ T - t_s &= a_\infty \times (1 + c) \times (\tau - s)^{\frac{1}{1+c} + o(1)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après la proposition V.5, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , la processus  $a_s = \alpha(t_s) \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}$  converge presque sûrement vers une variable strictement positive  $a_\infty$ . Comme  $\alpha(t_s)$  tend vers zéro, on a en fait la convergence presque sûre :  $\alpha(t_s) \dot{t}_s \rightarrow a_\infty$ . Au voisinage de  $\tau$ , on en déduit que

$$\int_{t_s}^T \alpha(u) du = \int_s^\tau \alpha(t_u) \dot{t}_u du = a_\infty (\tau - s) + o(\tau - s).$$

On a alors

$$\frac{\alpha(t_s)\dot{t}_s}{\int_{t_s}^T \alpha(u)du} = \frac{1}{\tau - s} + o\left(\frac{1}{\tau - s}\right),$$

et d'après le lemme V.8, si  $H(t) \times (T - t)$  tend vers  $-c < 0$  :

$$-H(t_s)\dot{t}_s \times \left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\tau - s} + o\left(\frac{1}{\tau - s}\right).$$

En intégrant ce développement au voisinage de  $\tau$ , on obtient

$$\alpha(t_s) = (\tau - s)^{\frac{c}{1+c} + o(1)}.$$

Comme  $\alpha(t_s)\dot{t}_s = a_\infty + o(1)$ , on a finalement  $\dot{t}_s = a_\infty \times (\tau - s)^{-\frac{c}{1+c} + o(1)}$ , puis, en intégrant

$$T - t_s = a_\infty \times (1 + c) \times (\tau - s)^{\frac{1}{1+c} + o(1)}.$$

□

Avant de passer au prolongement des trajectoires de la diffusion temporelle au delà du temps d'explosion  $\tau$ , nous énonçons le résultat suivant, auquel nous ferons souvent référence dans la suite, et qui comme la proposition V.4 concerne le comportement asymptotique de l'intégrale

$$C_s := \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = \int_{s_0}^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1}, \quad 0 < s_0 < s.$$

**Lemme V.9** — *On se place dans le cas d'un univers mortel. Soit une condition initiale  $(t_0, a_0) \in ]0, T[ \times ]0, +\infty[ \cup ]0, T[ \times ]0, +\infty[$  et  $(t_s, a_s)$  la solution du système (IV.14) correspondante définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau = \inf\{s > 0, t_s \geq T\}$ . Alors, lorsque  $s$  tend vers le temps d'explosion  $\tau$ , le processus  $C_s$  converge presque sûrement vers une limite strictement positive.*

*Démonstration.* D'après la proposition IV.3, pour tout  $0 < s < \tau$ , on a  $\dot{t}_s > 1$  et lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $\dot{t}_s$  tend presque sûrement vers l'infini. L'intégrande dans l'expression de  $C_s$  est donc bornée presque sûrement, et comme  $\tau$  est fini presque sûrement, on a bien  $\lim_{s \rightarrow \tau} C_s < +\infty$ . □

## 2.4 Prolongement de la diffusion temporelle

Comme annoncé dans la section 4 du chapitre IV, nous montrons maintenant que dans le cas d'un univers mortel, le processus  $(t_s, a_s)$  a priori défini sur l'intervalle  $[0, \tau[$  peut être prolongé en une diffusion bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ , à l'image des composantes temporelles des géodésiques de lumière. Le plus

gros du travail a été fait dans proposition IV.5, où nous avons montré que le couple  $(t_s, a_s)$  peut être lancé de points du type  $(t_0 = 0, a_0 > 0)$ . Comme au voisinage de  $\tau$  le processus  $(t_s, a_s)$  converge vers  $(T, a_\infty)$ , la concaténation des trajectoires est à portée de main. Nous l'explicitons dans le prochain paragraphe, puis détaillons le comportement asymptotique de la trajectoire prolongée dans le paragraphe 2.4.2.

### 2.4.1 Prolongement des trajectoires

On rappelle que par hypothèse, dans le cas d'un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$ , le facteur d'expansion est une fonction continue, strictement positive sur  $]0, T[$  et de limite nulle en zéro et en  $T$ . Comme précédemment, on note  $\hat{\alpha}$  le prolongement périodique de  $\alpha$  à la droite réelle. On fixe une condition initiale  $(t_0, a_0) \in ]0, T[ \times [0, +\infty[ \cup [0, T[ \times ]0, +\infty[$ . Soit  $(t_s, a_s)$  la solution du système (IV.14) issue de  $(t_0, a_0)$ , définie jusqu'au temps d'explosion  $\tau = \inf\{s > 0, t_s \geq T\}$ .

D'après la proposition V.5, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le couple  $(t_s, a_s)$  converge presque sûrement vers  $(T, a_\infty)$  où la limite  $a_\infty$  est strictement positive et finie presque sûrement. La fonction  $\alpha$  étant prolongée en une fonction périodique, la proposition IV.5 assure que pour  $s \geq \tau$ , le système (IV.14) admet une unique solution  $(t_s^1, a_s^1)$  issue de  $(T, a_\infty)$ , définie jusqu'à  $\tau(2T)$ , le temps d'atteinte de  $2T$  par le processus  $t_s^1$ . D'après la proposition V.5 à nouveau, lorsque  $s$  tend vers  $\tau(2T)$ , le processus  $a_s^1$  converge vers une variable  $a_\infty^1$  strictement positive et finie presque sûrement. À nouveau, d'après la proposition IV.5, le système (IV.14) admet une unique solution  $(t_s^2, a_s^2)$  issue de  $(2T, a_\infty^1)$  et définie jusqu'au temps d'atteinte de  $3T$  par le processus  $t_s^2$  etc. On peut itérer la construction, en concaténant les trajectoires  $(t_s^i, a_s^i)$ , pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , entre les temps d'atteinte successifs des multiples entiers de la période  $T$ .

**Définition V.2** — On appellera diffusion (temporelle) régénérée et on notera  $(\hat{t}_s, \hat{a}_s)$  la diffusion définie pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ , obtenue à partir de la diffusion  $(t_s, a_s)$ , en la prolongeant par continuité aux temps d'atteinte successifs  $\tau_n$  des points  $nT$  par  $\hat{t}_s, n \in \mathbb{N}^*, i.e. \tau_n := \inf\{s > 0, \hat{t}_s = nT\}$ .

Remarque V.10 — Il est en fait possible de contruire directement sur  $\mathbb{R}^+$  le prolongement  $(\hat{t}_s, \hat{a}_s)$  de la diffusion initiale  $(t_s, a_s)$ , sans invoquer la concaténation d'excursions entre les temps  $\tau_n$ . Rappelons les notations introduites dans la preuve de la proposition IV.5. La fonction  $A(t) := \int_0^t \alpha(u) du$  est une primitive de  $\alpha$ ,  $A^{-1}$  désigne sa réciproque et on pose  $A_s := A(t_s)$ . Le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par le couple  $(a_s, a_s^2)$  s'écrit

alors :

$$\begin{cases} dA_s = \sqrt{a_s^2 + (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s)} ds, \\ da_s^2 = 4\sigma^2 a_s^2 ds + 3\sigma^2 (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s) ds + dM_s^{a^2}, \end{cases}$$

avec  $d\langle M^{a^2} \rangle_s = 4\sigma^2 a_s^2 (a_s^2 + (\alpha \circ A^{-1})^2(A_s)) ds$ . Remplaçons la fonction  $\alpha$  par son prolongement périodique  $\mathring{\alpha}$ , partout où elle intervient. On définit ainsi la primitive  $\mathring{A}(t) := \int_0^t \mathring{\alpha}(u) du$  strictement croissante de  $\mathring{\alpha}$  et on désigne par  $\mathring{A}^{-1}$  son inverse. On considère alors le nouveau système

$$\begin{cases} dA_s = \sqrt{a_s^2 + (\mathring{\alpha} \circ \mathring{A}^{-1})^2(A_s)} ds, \\ da_s^2 = 4\sigma^2 a_s^2 ds + 3\sigma^2 (\mathring{\alpha} \circ \mathring{A}^{-1})^2(A_s) ds + dM_s^{a^2}, \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

avec  $d\langle M^{a^2} \rangle_s = 4\sigma^2 a_s^2 (a_s^2 + (\mathring{\alpha} \circ \mathring{A}^{-1})^2(A_s)) ds$ . Les coefficients de ce dernier système sont des fonctions continues de  $(A, a^2)$  sur  $[0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ , de plus ils sont à croissance au plus linéaire ( $\mathring{\alpha}$  est bornée). On en déduit que le système (V.16) admet une solution  $(A_s, |a_s|^2)$  bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ . Le processus  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s)$  correspondant est celui de la définition V.2.

**Remarque V.11** — Au regard de la dernière remarque, la diffusion  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s)$  apparaît directement et naturellement comme une diffusion bien définie sur tout  $\mathbb{R}^+$ . A contrario, la convergence de  $a_s$  au voisinage de  $\tau$  vers la limite  $a_\infty$  n'apparaît pas comme une “vraie” convergence asymptotique, ce que la simulation de la figure 30 illustre assez bien. Affirmer que  $a_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  est du même ordre que dire qu'un mouvement brownien réel standard  $(B_s)_{s \geq 0}$  converge presque sûrement au temps  $s = 1$ .

### 2.4.2 Asymptotique des trajectoires prolongées

Nous décrivons à présent le comportement asymptotique de la diffusion régénérée introduite au paragraphe précédent. Par définition, le processus  $\mathring{t}_s$  est croissant et tend vers l'infini avec  $s$ . Nous montrons ici que le processus  $\mathring{a}_s$  est lui aussi transitoire et précisons sa vitesse de divergence.

**Proposition V.6** — Soient  $(t_0, a_0) \in ]0, T[ \times [0, +\infty[ \cup [0, T[ \times ]0, +\infty[$  et  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s)$  la diffusion régénérée issue de  $(t_0, a_0)$ . Fixons un réel  $s_0 > 0$ . Il existe un mouvement brownien  $B$  et un processus  $u_s$  presque sûrement convergent lorsque  $s$  tend vers l'infini, tels que, presque sûrement, pour tout  $s \geq s_0$  :

$$\mathring{a}_s = \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + u_s).$$

En particulier, le processus  $\mathring{a}_s$  est transitoire.

*Démonstration.* D'après les propositions IV.3 et V.5, le processus  $a_s$  dont  $\hat{a}_s$  est le prolongement vérifie  $a_s > 0$  pour tout  $0 < s < \tau$  et converge presque sûrement, lorsque  $s$  vers  $\tau$ , vers une variable strictement positive. En appliquant la proposition IV.3 entre les temps d'atteinte  $\tau_n$  et  $\tau_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient que le processus régénéré  $\hat{a}_s$  est strictement positif pour tout  $s > 0$ . On a déjà vu à plusieurs reprises qu'il existe deux mouvements browniens standard  $B$  et  $B'$  tels que  $dM_s^a = \sigma(a_s dB_s + \alpha(t_s) dB'_s)$ . Auquel cas, pour  $0 < s_0 < s < \tau$  on a :

$$\log \left( \frac{a_s}{a_{s_0}} \right) = \sigma^2(s - s_0) + \sigma(B_s - B_{s_0}) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)}{a_u} dB'_u.$$

En conservant la même représentation de la martingale  $M^a$  sur chaque excursion, on obtient que pour  $0 < s_0 < s$  :

$$\log \left( \frac{\hat{a}_s}{\hat{a}_{s_0}} \right) = \sigma^2(s - s_0) + \sigma(B_s - B_{s_0}) + \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{\hat{\alpha}^2(\hat{t}_u)}{\hat{a}_u^2} du + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\hat{\alpha}(\hat{t}_u)}{\hat{a}_u} dB'_u.$$

Les deux derniers termes de cette équation convergent ou divergent simultanément. Dans le dernier cas, le terme à variation borné, qui est positif, domine la martingale. Pour  $s$  assez grand, on a donc  $\log(\hat{a}_s) \geq \sigma^2/2 \times s + o(s)$ . Comme la fonction  $\hat{\alpha}$  est bornée, on en déduit que les deux termes évoqués plus haut sont tous deux convergents, d'où le résultat.  $\square$



# Étude des composantes spatiales de la diffusion

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>La diffusion radiale en courbure négative . . . . .</b>	<b>212</b>
1.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	213
1.2	Cas d'une expansion rapide – effondrement lent . .	215
1.3	Cas d'une expansion lente – effondrement rapide .	224
<b>2</b>	<b>Asymptotique lorsque la fibre est euclidienne . . .</b>	<b>233</b>
2.1	Cas d'une expansion rapide – effondrement lent . .	233
2.2	Cas d'une expansion lente – effondrement rapide .	242
<b>3</b>	<b>Asymptotique lorsque la fibre est hyperbolique .</b>	<b>250</b>
3.1	Cas d'une expansion rapide – effondrement lent . .	250
3.2	Cas d'une expansion lente – effondrement rapide .	256
<b>4</b>	<b>Asymptotique lorsque la fibre est sphérique . . .</b>	<b>262</b>
4.1	Cas d'une expansion rapide – effondrement lent . .	262
4.2	Cas d'une expansion lente – effondrement rapide .	264
<b>5</b>	<b>Récapitulatif de nos résultats . . . . .</b>	<b>267</b>
5.1	Convergence vers la frontière causale . . . . .	267
5.2	Comportement asymptotique du vecteur dérivé . .	268
5.3	Sur la convergence vers des géodésiques de lumière	270

---

Dans ce chapitre, nous explicitons le comportement asymptotique des composantes spatiales de la diffusion de Franchi et Le Jan dans les espaces de Robertson-Walker. Nous montrons que comme attendu, le comportement asymptotique des trajectoires de la diffusion est semblable à celui des géodésiques de lumière. Les différents résultats obtenus au cours du chapitre sont résumés sous forme concise dans la dernière section.

# 1 ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION RADIALE EN COURBURE NÉGATIVE OU NULLE

Dans cette première section, nous déterminons le comportement asymptotique de la diffusion radiale  $(t_s, \chi_s, a_s, b_s, c_s)$  introduite dans la section 2 du chapitre IV, dans le cas où la fibre  $M$  de l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  est de courbure négative ou nulle, *i.e.* lorsque  $k = 0$  ou  $-1$ , ou encore lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . On s'intéresse en particulier au comportement asymptotique des processus  $\chi_s$ ,  $c_s/a_s$  et  $\rho_s = b_s/a_s$ . Afin d'alléger les expressions, on préférera ici la notation  $r_s$  à  $f(\chi_s) = \sinh(\chi_s)$  dans le cas hyperbolique. On rappelle que par définition, si  $(t_s, r_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{r}_s, \dot{\theta}_s)$  est la diffusion relativiste à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  exprimée en coordonnées polaires, les processus  $a_s$ ,  $b_s$ ,  $c_s$  et  $\rho_s$  sont définis comme :

$$\begin{aligned} a_s &:= \alpha(t_s) \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1}, & c_s &:= \alpha^2(t_s) \dot{\chi}_s = \frac{\alpha^2(t_s) \dot{r}_s}{\sqrt{1 - kr_s^2}} \\ \vec{b}_s &:= \alpha^2(t_s) r_s^2 \theta_s \wedge \dot{\theta}_s, & b_s &:= |\vec{b}_s| = \alpha^2(t_s) r_s^2 |\dot{\theta}_s|, & \rho_s &:= b_s/a_s, \end{aligned}$$

Par ailleurs la relation de pseudo-norme (IV.3) s'écrit

$$a_s^2 = \frac{b_s^2}{r_s^2} + c_s^2, \quad i.e. \quad 1 = \frac{\rho_s^2}{r_s^2} + \frac{c_s^2}{a_s^2}.$$

Si  $(x_s, \dot{x}_s)$  désignent les composantes spatiales de la diffusion de Franchi et Le Jan en coordonnées cartésiennes, le lien entre les processus  $r_s, \rho_s, c_s/a_s$  et  $x_s, \dot{x}_s$  est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_s = (x_s^1, x_s^2, x_s^3) = r_s \times \theta_s, \\ \dot{x}_s = (\dot{x}_s^1, \dot{x}_s^2, \dot{x}_s^3) = \dot{r}_s \times \theta_s + r_s \times \dot{\theta}_s, \\ \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \frac{c_s}{a_s} \times \theta_s + \frac{\rho_s}{r_s} \times \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \end{array} \right. \quad \text{si } M = \mathbb{R}^3,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_s = (x_s^0, x_s^1, x_s^2, x_s^3) = (\sqrt{1 + r_s^2}, r_s \times \theta_s), \\ \dot{x}_s = (\dot{x}_s^0, \dot{x}_s^1, \dot{x}_s^2, \dot{x}_s^3) = \left( \frac{r_s \dot{r}_s}{\sqrt{1 + r_s^2}}, \dot{r}_s \times \theta_s + r_s \times \dot{\theta}_s \right), \\ \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \left( \frac{c_s}{a_s} \times r_s, \frac{c_s}{a_s} \times \sqrt{1 + r_s^2} \times \theta_s + \frac{\rho_s}{r_s} \times \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} \right), \end{array} \right. \quad \text{si } M = \mathbb{H}^3.$$

En particulier, si  $I = (1, 2, 3)$ , avec les notations du paragraphe 2.1 du chapitre II, le produit vectoriel entre les vecteurs  $x_s^I$  et  $\dot{x}_s^I/|\dot{x}_s^I|$  s'exprime de la

façon suivante :

$$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{|\dot{x}_s^I|} = \rho_s \times \theta_s \wedge \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \quad \text{donc} \quad \rho_s = \left| x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{|\dot{x}_s^I|} \right|.$$

Nous allons voir que selon la nature du facteur d'expansion, les comportements asymptotiques des processus  $r_s$ ,  $\rho_s$  et  $c_s/a_s$  diffèrent notablement. Dans le paragraphe 1.2, nous décrivons ces comportements dans le cas d'univers qui présentent une expansion rapide ou un effondrement lent. Le paragraphe 1.3 traite lui les cas d'une expansion lente ou d'un effondrement rapide. Dans le prochain paragraphe, nous énonçons quelques résultats préliminaires.

## 1.1 Quelques résultats préliminaires

Nous commençons par donner deux représentations des martingale  $M^a$ ,  $M^b$ , et  $M^c$  de la proposition IV.2 en terme de mouvements browniens indépendants. Ces représentations seront fréquemment utilisées dans toute la suite.

**Lemme VI.1** — *Il existe des mouvements browniens standard indépendants  $B$ ,  $B'$  et  $B''$  tels que*

$$\left\{ \begin{array}{l} dM_s^b = \sigma b_s dB_s + \sigma \alpha(t_s) r_s dB'_s + 0 \\ dM_s^c = \sigma c_s dB_s + 0 + \sigma \alpha(t_s) dB''_s \\ dM_s^a = \sigma a_s dB_s + \sigma \alpha(t_s) \frac{\rho_s}{r_s} dB'_s + \sigma \alpha(t_s) \frac{c_s}{a_s} dB''_s. \end{array} \right.$$

*Une autre représentation possible pour la martingale  $(M^a, M^b, M^c)$  est la suivante, pour trois nouveaux mouvements browniens standard indépendants  $\beta$ ,  $\beta'$  et  $\beta''$  :*

$$\left\{ \begin{array}{l} dM_s^b = \sigma b_s d\beta_s + \sigma \alpha(t_s) \frac{b_s}{a_s} d\beta'_s + \sigma \alpha(t_s) r_s \frac{c_s}{a_s} d\beta''_s \\ dM_s^c = \sigma c_s d\beta_s + \sigma \alpha(t_s) \frac{c_s}{a_s} d\beta'_s - \sigma \alpha(t_s) \frac{b_s}{a_s r_s} d\beta''_s \\ dM_s^a = \sigma a_s d\beta_s + \sigma \alpha(t_s) d\beta'_s + 0. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Un calcul direct montre que les expressions des crochets des martingales ci-dessus coïncident avec celles des crochets des martingales  $M^a$ ,  $M^b$ , et  $M^c$  données dans la proposition IV.2.  $\square$

Montrons à présent que comme  $a_s$ , le processus  $b_s$  est strictement positif presque sûrement, pour tout  $s$  dans l'intervalle  $]0, \tau[$ .

**Lemme VI.2** — *Presque sûrement, pour tout  $0 < s < \tau$ , le processus  $b_s$  et donc les processus  $r_s$  et  $|\dot{\theta}_s|$  sont strictement positifs.*

*Démonstration.* Par définition, on a  $b_s := \alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}|_s$ . Montrer que  $b_s$  ne s'annule pas revient donc à montrer que les processus  $b_s^2/r_s^2$  ou  $b_s^2/r_s^3$  ne s'annulent pas. D'après la proposition IV.2 et le lemme VI.1, il existe deux mouvements browniens indépendants  $B$  et  $B'$  tels que

$$db_s = \frac{3\sigma^2}{2}b_s ds + \frac{\sigma^2\alpha^2(t_s)r_s^2}{2b_s}ds + \sigma b_s dB_s + \sigma\alpha(t_s)r_s dB'_s.$$

D'après la formule d'Itô, pour tout  $0 < s < \tau$ , le rapport  $b_s^2/r_s^2 = \alpha^4(t_s)r_s^2|\dot{\theta}|_s^2$  vérifie l'équation :

$$d\frac{b_s^2}{r_s^2} = 4\sigma^2\frac{b_s^2}{r_s^2}ds - 2\frac{b_s^2}{r_s^2}\frac{\dot{r}_s}{r_s}ds + 2\sigma^2\alpha^2(t_s)ds + 2\sigma\frac{b_s^2}{r_s^2}dB_s + 2\sigma\alpha(t_s)\frac{b_s}{r_s}dB'_s. \quad (\text{VI.1})$$

Supposons que  $b_0 = 0$ ; alors  $\tau_0 := \inf\{s > 0, b_s > 0\} = 0$  presque sûrement. En effet, si  $\tau_0$  était strictement positif avec une probabilité non nulle, en intégrant l'équation (VI.1), on aurait la contradiction

$$0 = 2\sigma^2 \int_0^{\tau_0/2} \alpha^2(t_u)du > 0.$$

On peut donc toujours se ramener au cas où  $b_0$  est strictement positif. Par continuité, on a alors  $\tau_1 := \inf\{s > \tau_0, b_s = 0\} > 0$  presque sûrement. Notons que sur l'intervalle  $]0, \tau_1[$ , le processus  $r_s$  est alors strictement positif. En appliquant la formule d'Itô à la fonction logarithme, on obtient que sur  $]0, \tau_1[$ , le processus  $b_s$  s'écrit :

$$b_s = b_0 \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + M_s), \quad (\text{VI.2})$$

où le crochet de la martingale  $M_s$  est donné par :

$$d\langle M \rangle_s = \sigma^2 \alpha^2(t_s)r_s^2 b_s^{-2} ds. \quad (\text{VI.3})$$

En particulier, pour tout  $0 < s < \tau_1$ , on a

$$e^{2M_s} d\langle M \rangle_s = \sigma^2 b_0^{-2} \alpha^2(t_s)r_s^2 \exp(-2\sigma^2 s - 2\sigma B_s) ds.$$

En intégrant la dernière équation, si  $\beta$  désigne le mouvement brownien de Dambis-Dubins-Schwarz associé à la martingale  $M$ , on obtient alors :

$$\int_0^{\langle M \rangle_s} e^{2\beta_u} du = \sigma^2 b_0^{-2} \int_0^s \alpha^2(t_u) r_u^2 \exp(-2\sigma^2 u - 2\sigma B_u) du.$$

Comme  $\alpha(t_s)$  et  $r_s$  sont finis presque sûrement sur l'intervalle  $[0, \tau[$ , presque sûrement, le membre de droite de la dernière équation est fini, et strictement positif pour tout  $s < \tau$ . On en déduit que le crochet  $\langle M \rangle_s$  et donc la martingale  $M_s$  sont finis presque sûrement pour tout  $s < \tau$ . Finalement, d'après l'équation (VI.2), on conclut que  $\tau_1 \geq \tau$ . Presque sûrement,  $b_s$  est bien strictement positif pour tout  $0 < s < \tau$ .  $\square$

## 1.2 Cas d'une expansion rapide – effondrement lent

Nous décrivons ici le comportement asymptotique des processus  $r_s$  et  $\rho_s$  dans un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est rapide ou dans un univers mortel où l'expansion est lente. Rappelons que dans un univers éternel (resp. mortel), on dit que l'expansion est rapide (resp. l'effondrement est lent) lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T \leq +\infty$ .

### 1.2.1 Comportement asymptotique de $r_s$

On s'intéresse tout d'abord à la convergence du processus radial  $r_s$ . Rappelons qu'étant données des conditions initiales raisonnables  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  dans  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , on peut toujours choisir l'origine du système de coordonnées polaires sur  $M$  de sorte que  $r_0$  est aussi grand que l'on veut.

**Proposition VI.1** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. Si l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent, le processus radial  $r_s$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers une variable aléatoire finie  $r_\infty$ . Quitte à choisir  $r_0$  assez grand, on a  $r_\infty > 0$  presque sûrement.*

*Démonstration.* La convergence de  $r_s$  découle directement de la relation de pseudo-norme. En effet, la majoration  $|c_s/a_s| \leq 1$  donne après intégration :

$$\int_0^s \frac{|\dot{r}_u|}{\sqrt{1 - kr_u^2}} du \leq \int_0^s \frac{\dot{t}_u}{\alpha(t_u)} du = \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}.$$

Si l'expansion est rapide, la dernière intégrale converge *p.s.*, lorsque  $s$  tend vers l'infini, et il en est donc de même pour la variation totale du processus radial  $r_s$ . Dans le cas euclidien et hyperbolique, on a alors respectivement, pour tout  $s > 0$  :

$$|r_s - r_0| \leq \int_{t_0}^T \frac{du}{\alpha(u)}, \quad |\operatorname{argsh}(r_s) - \operatorname{argsh}(r_0)| \leq \int_{t_0}^T \frac{du}{\alpha(u)}.$$

En particulier, en choisissant  $r_0$  suffisamment grand, la limite  $r_\infty$  du processus  $r_s$  est strictement positive presque sûrement.  $\square$

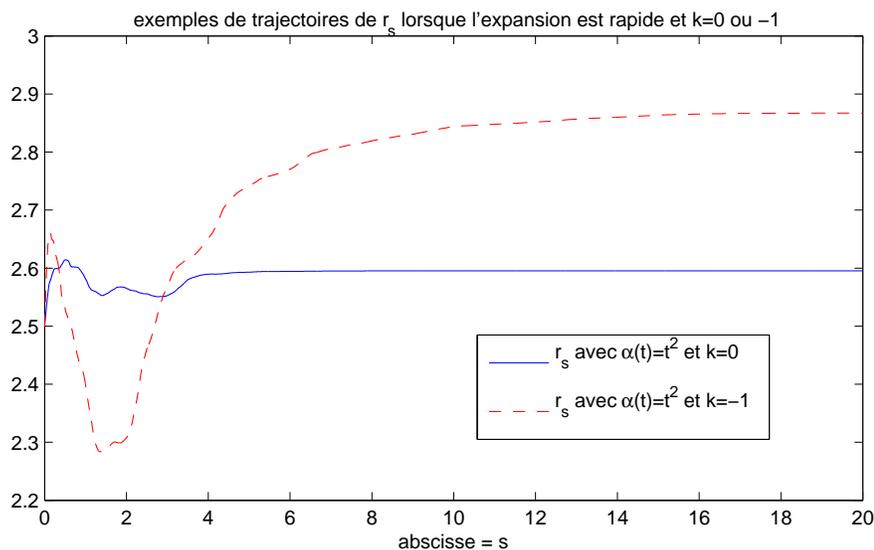


FIGURE 31: Exemples de trajectoires radiales avec  $k = 0$  ou  $-1$

### 1.2.2 Comportement asymptotique de $\rho_s$

Décrivons à présent le comportement asymptotique du rapport  $\rho_s = b_s/a_s$ . La proposition suivante montre que  $\rho_s$  converge presque sûrement si et seulement si l'intégrale  $C_s$ , objet de la proposition V.4 et du lemme V.9, est elle-même convergente.

**Proposition VI.2** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle. On suppose que l'expansion est rapide ou que l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \xi_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. Selon la nature de l'intégrale  $C_s$ , le processus  $\rho_s$  vérifie la dichotomie suivante :*

- si l'intégrale  $C_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , alors  $\rho_s := b_s/a_s$  converge presque sûrement vers une limite  $\rho_\infty$  presque sûrement positive ;
- si l'intégrale  $C_s$  tend presque sûrement vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , alors  $\rho_s := b_s/a_s$  vérifie :

$$\liminf_{s \rightarrow \tau} \rho_s = 0, \quad \limsup_{s \rightarrow \tau} \rho_s = r_\infty.$$

*Démonstration.* Commençons par traiter le cas où  $C_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . D'après la proposition IV.2 et le lemme VI.1, il existe des mouvements browniens réels indépendants  $B$ ,  $B'$  et  $B''$ , tels que les processus  $a$  et  $b$  vérifient les équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} db_s = \sigma^2 \left( \frac{3}{2}b_s + \frac{\alpha^2(t_s)r_s^2}{2b_s} \right) ds + dM_s^b, \\ da_s = \sigma^2 \left( \frac{3}{2}a_s + \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s} \right) ds + dM_s^a, \end{cases}$$

où les martingales  $M^a$  et  $M^b$  sont données par

$$dM_s^b = \sigma (b_s dB_s + \alpha(t_s)r_s dB'_s),$$

$$dM_s^a = \sigma \left( a_s dB_s + \alpha(t_s) \frac{\rho_s}{r_s} dB'_s + \alpha(t_s) \frac{c_s}{a_s} dB''_s \right).$$

Par ailleurs, on sait que  $a_s$  et  $b_s$  sont presque sûrement strictement positifs pour tout  $0 < s < \tau$ . D'après la formule d'Itô, pour tout  $0 < s_0 < s < \tau$ , on a alors la décomposition

$$\log(\rho_s) - \log(\rho_{s_0}) = M_s - R_s, \quad \text{avec } M_s := \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)r_u}{b_u} dB'_u, \quad (\text{VI.4})$$

$$\text{et } R_s := \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \frac{\rho_u}{r_u} dB'_u + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \frac{c_u}{a_u} dB''_u.$$

Sous l'hypothèse que  $C_s$  converge presque sûrement, le processus  $R_s$  converge lui-même presque sûrement. D'autre part, si l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent, on a vu dans la proposition VI.1 que  $r_s$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini ; en particulier,  $r_s$  est borné. Comme on a toujours  $0 < \rho_s \leq r_s$ , le processus  $\log(\rho_s)$  est majoré. D'après l'équation (VI.4), on en déduit que la martingale  $M_s$  est elle aussi majorée, donc

qu'elle converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Le processus  $\log(\rho_s)$  est alors lui-même convergent, d'où le premier point de la proposition. Passons au cas où l'intégrale  $C_s$  tend presque sûrement vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Quitte à changer l'origine du système de coordonnées sur  $M$ , on peut supposer que la limite  $r_\infty$  du processus radial est strictement positive presque sûrement. Avec les notations précédentes, le processus  $R_s$  tend alors presque sûrement vers plus l'infini. Précisément, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a  $R_s/C_s = \sigma^2/2 + o(1)$ . Supposons qu'il existe  $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$  tel que  $\liminf_{s \rightarrow +\infty} \rho_s(\omega) \geq \varepsilon$ . D'après l'équation (VI.4), pour  $s$  assez grand, on aurait alors d'une part

$$\log(\varepsilon/2) \leq \log(\rho_s) = \log(\rho_{s_0}) + M_s - R_s, \quad (\text{VI.5})$$

et d'autre part,

$$\langle M \rangle_s = \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \times \frac{r_u^2}{\rho_u^2} du \leq 4\sigma^2 \varepsilon^{-2} r_\infty^2 \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = O(C_s).$$

En particulier, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $M_s/C_s$  tendrait presque sûrement vers zéro. En divisant chaque terme de l'équation (VI.5) par  $C_s$ , puis en faisant tendre  $s$  vers  $\tau$ , on aurait alors à la limite  $0 \leq -\sigma^2/2$ , d'où une contradiction. On a donc bien

$$\liminf_{s \rightarrow \tau} \rho_s = 0 \text{ presque sûrement.}$$

Montrons à présent que  $\limsup_{s \rightarrow \tau} \rho_s = r_\infty$ . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$  tel que, pour tout  $s_0(\omega) < s < \tau$  assez grand, on ait  $\rho_s^2/r_s^2 \leq 1 - \varepsilon^2$ , ou de manière équivalente  $c_s^2/a_s^2 \geq \varepsilon^2$ . Quitte à augmenter  $s_0$ , on peut supposer que pour tout  $s > s_0$ , on a aussi  $r_s \geq r_\infty/2$ . D'après la proposition IV.2 et le lemme VI.1, les équations différentielles stochastiques vérifiées par les processus  $c_s$  et  $a_s$  sont :

$$\begin{cases} dc_s = \left( \frac{3\sigma^2}{2} c_s + \frac{b_s^2 \dot{r}_s}{c_s r_s^3} \right) ds + dM_s^c, \\ da_s = \sigma^2 \left( \frac{3}{2} a_s + \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s} \right) ds + dM_s^a, \end{cases}$$

où les martingales  $M^c$  et  $M^a$  sont données par

$$dM_s^c = \sigma (c_s dB_s + \alpha(t_s) dB_s''),$$

$$dM_s^a = \sigma \left( a_s dB_s + \alpha(t_s) \frac{\rho_s}{r_s} dB_s' + \alpha(t_s) \frac{c_s}{a_s} dB_s'' \right).$$

Fixons un tel  $0 < s_0 < \tau$ ; d'après la formule d'Itô, pour tout  $s > s_0$ , le processus  $c_s/a_s$  se décompose alors en :

$$\frac{c_s}{a_s} - \frac{c_{s_0}}{a_{s_0}} = I_s - J_s + M_s^{c/a}, \quad (\text{VI.6})$$

où l'on a posé

$$I_s := \int_{s_0}^s \frac{\rho_u^2}{r_u^2} \times \sqrt{\frac{1}{r_u^2} - k} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du, \quad J_s := \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \frac{c_u}{a_u} du,$$

$$M_s^{c/a} := \sigma \int_{s_0}^s \left( \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \frac{\rho_u}{r_u} \frac{c_u}{a_u} dB'_u - \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \left( 1 - \frac{c_u^2}{a_u^2} \right) dB''_u \right).$$

L'expansion étant rapide ou l'effondrement étant lent, l'intégrale croissante  $I_s$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini. En effet, pour tout  $s > s_0$ , on a

$$I_s \leq \sqrt{\frac{4}{r_\infty^2} - k} \times \int_{s_0}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \leq \sqrt{\frac{4}{r_\infty^2} - k} \times \int_{t_0}^{+\infty} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty.$$

D'autre part, le crochet de la martingale  $M_s^{c/a}$  vérifie

$$\langle M^{c/a} \rangle_s = \sigma^2 \int_{s_0}^s \left( 1 - \frac{c_u^2}{a_u^2} \right) \times \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = O(C_s).$$

Enfin, comme  $|c_s/a_s| \geq \varepsilon$ , on a

$$|J_s| \geq \varepsilon \times \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = \varepsilon \times \sigma^2 C_s.$$

En divisant chaque terme de l'équation (VI.6) par  $C_s$  et en faisant tendre  $s$  vers  $\tau$ , on obtient la contradiction :

$$0 = \lim_{s \rightarrow \tau} \left| \frac{c_s}{a_s} - \frac{c_{s_0}}{a_{s_0}} - I_s - M_s^{c/a} \right| / C_s = \lim_{s \rightarrow \tau} |J_s| / C_s \geq \varepsilon \times \sigma^2 > 0.$$

Presque sûrement, on a donc bien

$$\limsup_{s \rightarrow \tau} \rho_s = r_\infty.$$

□

Remarque VI.1 — D'après l'équation (VI.4),  $\log(\rho_s)$  se décompose en :

$$\log(\rho_s) - \log(\rho_{s_0}) = M_s - R_s.$$

Le processus  $R_s$  converge si et seulement si  $C_s$  converge c'est-à-dire si et seulement si  $\rho_s$  converge. Dès lors, on peut aussi affirmer que  $\rho_s$  converge si et seulement si la martingale  $M_s$  converge. En effet, si  $\rho_s$  et  $R_s$  convergent presque sûrement,  $M_s$  converge également d'après l'équation (VI.4). D'autre part, si  $\rho_s$  et  $R_s$  divergent presque sûrement, alors la martingale  $M_s$  est divergente. Si ce n'était pas le cas, l'équation (VI.4) impliquerait que  $\log(\rho_s)$  tend vers moins l'infini, *i.e.*  $\rho_s$  tend vers zéro d'où une contradiction.

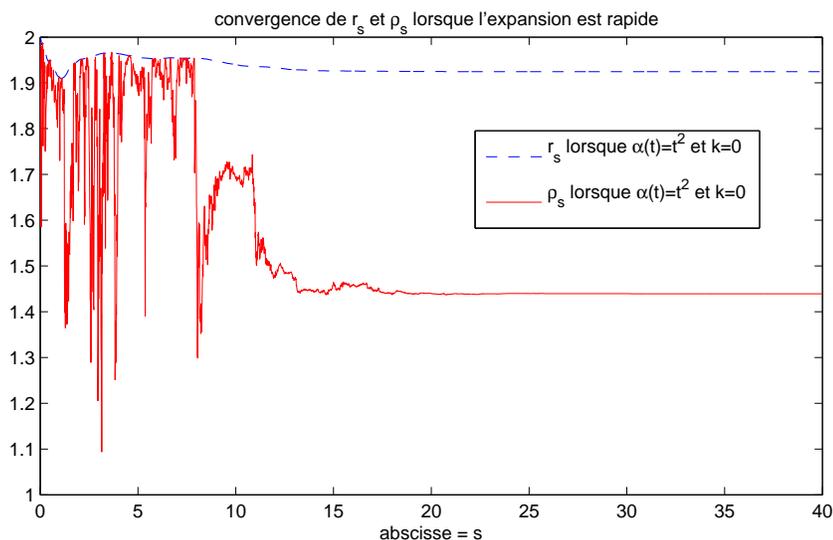


FIGURE 32: Exemple de trajectoire de  $r_s$  et  $\rho_s$  lorsque l'expansion est rapide et polynomiale.

**Corollaire VI.1** — Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker éternel dont la fibre et de courbure négative ou nulle et où l'expansion est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante.

- si l'expansion est polynomiale, alors lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\rho_s := b_s/a_s$  converge presque sûrement vers une limite  $\rho_\infty$  presque sûrement positive ;
- si l'expansion est exponentielle, alors le processus  $\rho_s := b_s/a_s$  est récurrent ; il vérifie :

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \rho_s = 0, \quad \limsup_{s \rightarrow +\infty} \rho_s = r_\infty.$$

*Démonstration.* Le corollaire est une conséquence directe des propositions V.4 et VI.2.  $\square$

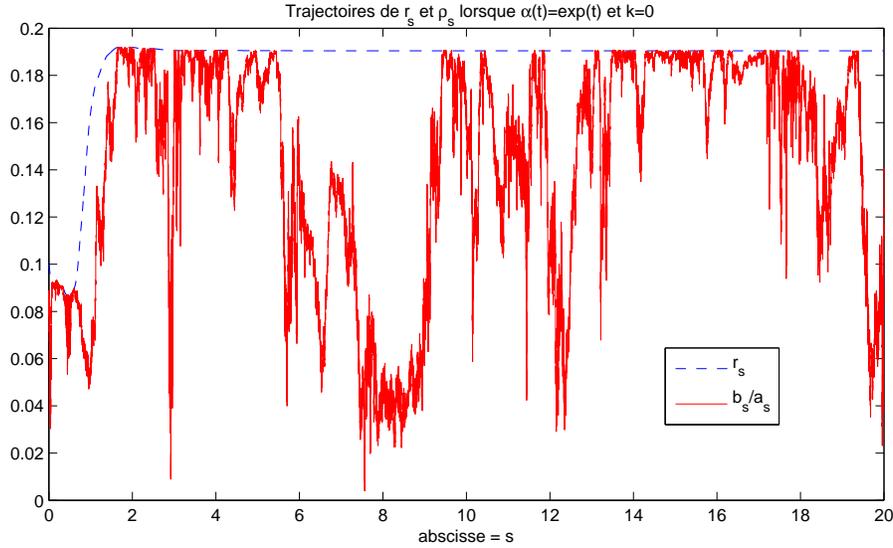


FIGURE 33: Oscillations du processus  $\rho_s$  entre zéro et  $r_\infty$  lorsque l'expansion est exponentielle.

**Corollaire VI.2** — Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker mortel dont la fibre est de courbure négative ou nulle, et où l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \xi_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $\rho_s := b_s/a_s$  converge presque sûrement vers une limite  $\rho_\infty$  presque sûrement positive.

*Démonstration.* Le corollaire est une conséquence directe des propositions du lemme V.9 et de la proposition VI.2.  $\square$

La proposition suivante précise le comportement asymptotique du processus  $b_s$  lorsque  $\rho_s = b_s/a_s$  est récurrent dans  $[0, r_\infty]$ , c'est-à-dire lorsque l'intégrale  $C_s$  est divergente.

**Proposition VI.3** — Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker éternel dont la fibre est de courbure négative ou nulle et où l'expansion est rapide. Soient  $(\xi_0, \xi_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. On suppose que l'intégrale  $C_s$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . Alors, le processus  $b_s$  tend en probabilité vers l'infini, lorsque  $s$  tend vers l'infini.

*Démonstration.* En adoptant les mêmes notations que dans la proposition VI.2, pour  $0 < s_0 < s$  on a :

$$a_s = a_{s_0} \exp(-\sigma^2 s_0 - \sigma B_{s_0}) \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + R_s),$$

$$b_s = b_{s_0} \exp(-\sigma^2 s_0 - \sigma B_{s_0}) \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + M_s).$$

Nous allons voir que lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $M_s/C_s$  converge en probabilité vers la constante  $\sigma^2/2$ , où comme précédemment :

$$C_s = \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = \int_{s_0}^s \frac{du}{t_u^2 - 1}.$$

Dans la preuve de la proposition V.4, on a vu que lorsque  $H_\infty > 0$ ,  $C_s/s$  tend presque sûrement vers  $\bar{\nu}_{H_\infty, \sigma}(f) \in ]0, +\infty[$ . Par ailleurs, lorsque  $H_\infty = 0$ , d'après la remarque V.4,  $C_s/s$  tend presque sûrement vers zéro, lorsque  $s$  tend vers l'infini. Dans les deux cas, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on aura donc

$$b_s = \exp \left[ s \times \left( \sigma^2 + \frac{M_s}{C_s} \times \frac{C_s}{s} + o(1) \right) \right] \longrightarrow +\infty.$$

Montrons donc que  $M_s/C_s$  converge en probabilité vers la constante  $\sigma^2/2$ , lorsque  $s$  tend vers l'infini, ou de manière équivalente que  $M_{C_s^{-1}}/s$  tend vers  $\sigma^2/2$ , où  $C_s^{-1}$  désigne l'inverse généralisé de  $C_s$ . D'après l'équation (VI.3) du lemme VI.2, le crochet de  $M_s$  est donné par :

$$d\langle M \rangle_s = \sigma^2 \alpha^2(t_s) r_s^2 b_s^{-2} ds$$

On a donc, pour  $0 < s_0 < s$  :

$$e^{2M_s} d\langle M \rangle_s = \sigma^2 b_{s_0}^{-2} \alpha^2(t_s) r_s^2 \exp(-2\sigma^2(s - s_0) - 2\sigma(B_s - B_{s_0})) ds,$$

ou encore

$$e^{2M_s} d\langle M \rangle_s = \sigma^2 \rho_{s_0}^{-2} r_s^2 \exp(2R_s) dC_s.$$

Sous l'hypothèse que  $r_\infty > 0$ , on a alors, pour  $s > s_1$  assez grand :

$$e^{2M_s} d\langle M \rangle_s = \exp(2R_s + O(1)) dC_s.$$

Par ailleurs, il existe un mouvement brownien standard  $\tilde{B}$  tel que :

$$R_s = \frac{\sigma^2}{2} C_s + \sigma \tilde{B}(C_s).$$

Désignons par  $\beta$  le mouvement brownien de Dambis-Dubins-Schwarz associé à  $M_s$ . Pour  $s > s_1$ , en intégrant l'expression de  $\exp(2M_s)d\langle M \rangle_s$ , on obtient alors

$$\int_{\langle M \rangle(C_{s_1}^{-1})}^{\langle M \rangle(C_s^{-1})} e^{2\beta_v} dv = \int_{s_1}^s \exp\left(\sigma^2 v + 2\sigma \tilde{B}(v) + O(1)\right) dv = \exp(\sigma^2 s + o(s)).$$

Si l'on pose  $s'_1 := \langle M \rangle(C_{s_1}^{-1})$ , on en déduit que, pour  $s, t > 0$  avec  $t \times s > s_1$  :

$$\langle M \rangle(C_{ts}^{-1}) = \inf \left\{ v > s'_1, \int_{s'_1}^v e^{2\beta_v} dv > \exp(\sigma^2 ts + o(ts)) \right\}.$$

Considérons le processus

$$X_t := \left( \beta_t^{(s)}, \langle M \rangle_t^{(s)} \right) = \left( s^{-1} \beta_{s^2 t}, s^{-2} \langle M \rangle(C_{st}^{-1}) \right).$$

D'après l'invariance d'échelle  $(\beta_{s^2 t})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} s(\beta_t)_{t \geq 0}$ , pour  $s, t > 0$  avec  $t \times s > s_1$  :

$$X_t \stackrel{d}{=} \left( \beta_t, \inf \left\{ u > \frac{s'_1}{s^2}, \int_{s'_1/s^2}^u e^{2s\beta_v} dv > s^{-2} \times \exp[\sigma^2 st + o(ts)] \right\} \right),$$

ou encore

$$X_t \stackrel{d}{=} \left( \beta_t, \inf \left\{ u > \frac{s'_1}{s^2}, \left[ \int_{s'_1/s^2}^u e^{2s\beta_v} dv \right]^{1/2s} > \exp \left[ \frac{\sigma^2 t}{2} (1 + o(1)) \right] \right\} \right).$$

En composant, on obtient que  $s^{-1} M(C_{st}^{-1}) = \beta_{\langle M \rangle_t^{(s)}}^{(s)}$  a même loi que

$$Y_t^{(s)} := \beta \left( \inf \left\{ u > \frac{s'_1}{s^2}, \left[ \int_{s'_1/s^2}^u e^{2s\beta_v} dv \right]^{1/2s} > \exp \left[ \frac{\sigma^2 t}{2} (1 + o(1)) \right] \right\} \right).$$

Or, lorsque  $s$  tend vers l'infini, pour presque toute trajectoire brownienne, on a :

$$\left[ \int_{s'_1/s^2}^u e^{2s\beta_v} dv \right]^{1/2s} \longrightarrow \sup_{y \in [0, u]} \exp(\beta_y) = \exp \sup_{y \in [0, u]} \beta_y.$$

Presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, la deuxième composante du vecteur  $X_t$  converge donc vers  $\inf\{u > 0, \beta_u = \frac{\sigma^2 t}{2}\}$ , et  $Y_t^{(s)}$  converge presque sûrement vers  $\sigma^2 t/2$ . Finalement, le processus  $s^{-1} M(C_{st}^{-1})$  converge donc en loi vers  $\sigma^2 t/2$ , en particulier, pour  $t = 1$ ,  $s^{-1} M(C_s^{-1})$  converge en loi (donc en probabilité) vers la constante  $\sigma^2/2$ , d'où le résultat.  $\square$

### 1.3 Cas d'une expansion lente – effondrement rapide

Nous décrivons à présent le comportement asymptotique de la diffusion radiale lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . Comme dans le paragraphe précédent, on commence par décrire le comportement asymptotique du processus  $r_s$

#### 1.3.1 Comportement asymptotique de $r_s$

On montre ici que dans un univers éternel où l'expansion est lente ou dans un univers mortel où l'effondrement est rapide, le processus radial  $r_s$  est transitoire et on précise sa vitesse de divergence.

**Proposition VI.4** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est lente ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. Alors, le processus  $c_s/a_s$  converge presque sûrement vers 1, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . En particulier, pour  $s$  assez grand, le processus radial  $r_s$  est croissant. Presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $r_s$  tend vers l'infini et l'on a les équivalents suivants :*

$$r_s \sim \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \quad \text{si } M = \mathbb{R}^3, \quad \log(r_s) \sim \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \quad \text{si } M = \mathbb{H}^3.$$

Remarque VI.2 — Avant de donner la preuve de la proposition, rappelons tout d'abord que d'après l'hypothèse 5, dans le cas d'un univers éternel, le facteur d'expansion est à croissance polynomiale ou exponentielle. Si l'expansion est lente, on a alors nécessairement  $H(t) \times t \rightarrow c \leq 1$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. En effet, si  $H(t) \times t$  tendait vers  $c = 1 + \varepsilon > 1$ , on aurait  $\alpha(t) > t^{1+\varepsilon/2}$  pour  $t$  assez grand, et  $1/\alpha$  serait intégrable au voisinage de l'infini.

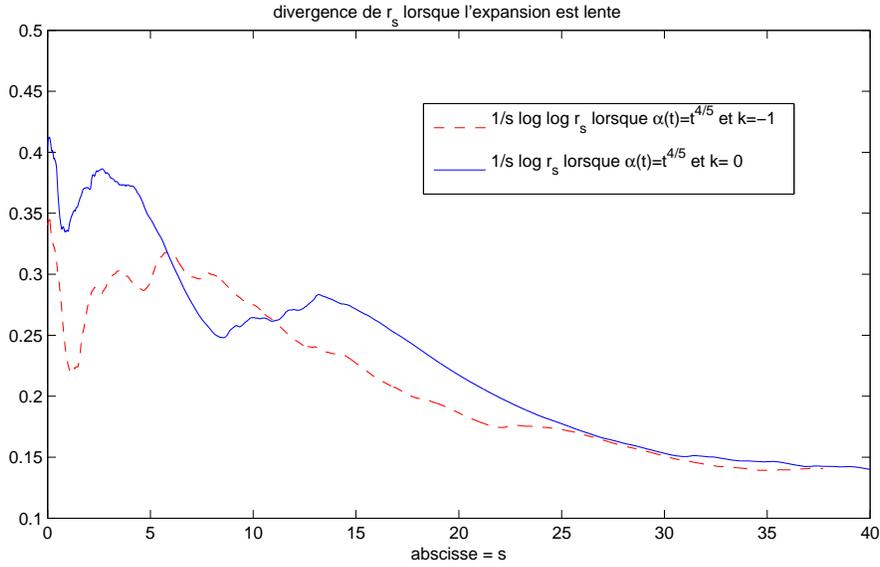
*Démonstration.* On reprend la décomposition (VI.6) obtenue dans la preuve de la proposition VI.2 :

$$\frac{c_s}{a_s} - \frac{c_{s_0}}{a_{s_0}} = I_s - J_s + M_s^{c/a},$$

avec

$$I_s := \int_{s_0}^s \frac{\rho_u^2}{r_u^2} \times \sqrt{\frac{1}{r_u^2} - k} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du, \quad J_s := \sigma^2 \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \frac{c_u}{a_u} du,$$

$$M_s^{c/a} := \sigma \int_{s_0}^s \left( \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \frac{\rho_u}{r_u} \frac{c_u}{a_u} dB'_u - \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \left( 1 - \frac{c_u^2}{a_u^2} \right) dB''_u \right).$$

FIGURE 34: Divergence de  $r_s$  lorsque  $k = 0$  ou  $-1$ .

Comme nous venons de le rappeler dans la remarque VI.2, dans un univers éternel où l'expansion est lente,  $H(t) \times t$  tend vers  $c \leq 1$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. D'après la proposition V.4, l'intégrale

$$C_s = \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du = \int_{s_0}^s \frac{du}{t_u^2 - 1}$$

converge donc presque sûrement, lorsque  $s$  tend  $\tau = +\infty$ . D'après le lemme V.9, l'intégrale  $C_s$  converge également, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , dans un univers mortel. Par ailleurs, d'après la relation de pseudo-norme (IV.17), on a toujours  $\rho_s/r_s \leq 1$  et  $|c_s/a_s| \leq 1$ . On en déduit que la martingale  $M_s^{c/a}$ , dont le crochet s'écrit

$$\langle M^{c/a} \rangle_s = \sigma^2 \int_{s_0}^s \left(1 - \frac{c_u^2}{a_u^2}\right) \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du,$$

converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , ainsi que le processus  $J_s$ . De l'équation (VI.6), on déduit alors que l'intégrale croissante  $I_s$  est presque sûrement convergente, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , et donc que les processus  $c_s/a_s$  ainsi que  $\rho_s/r_s = \sqrt{1 - c_s^2/a_s^2}$  sont eux-mêmes convergents. Notons enfin que lorsque l'expansion est lente, ou l'effondrement est rapide, l'intégrale

$$\int_{s_0}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{t_u^2 - 1}}{\alpha(t_u)} du = \int_{t_{s_0}}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} + o\left(\int_{t_{s_0}}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}\right) \quad (\text{VI.7})$$

diverge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Nous pouvons maintenant préciser le comportement asymptotique du processus  $r_s$  en fonction de la courbure spatiale  $k$ . Lorsque la courbure  $k$  est égale à  $-1$ , le processus  $c_s^2/a_s^2$  tend presque sûrement vers  $1$ . En effet, si tel n'était pas le cas, d'après la relation de pseudo-norme, le processus  $\rho_s^2/r_s^2$  admettrait une limite strictement positive, et en vertu de (VI.7), l'intégrale croissante  $I_s$  serait divergente. Lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a donc  $c_s/a_s \rightarrow -1$ , ou  $c_s/a_s \rightarrow 1$ . Le premier cas est impossible; en effet, si  $c_s/a_s \rightarrow -1$ , pour  $s \geq s_1$  assez grand, on aurait  $c_s/a_s \leq -1/2$ , c'est à dire

$$\dot{r}_s \leq -\frac{a_s \sqrt{1+r_s^2}}{2 \times \alpha^2(t_s)} \leq -\frac{1}{2} \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)}, \quad \text{donc } r_s - r_{s_1} \leq -\frac{1}{2} \int_{s_1}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} \rightarrow -\infty.$$

Presque sûrement, on a donc nécessairement  $c_s/a_s \rightarrow 1$ . En particulier,  $r_s$  est croissant pour  $s$  assez grand, et comme la convergence  $c_s/a_s \rightarrow 1$  s'écrit encore  $\dot{r}_s/\sqrt{1+r_s^2} \sim a_s/\alpha^2(t_s)$ , en intégrant, on en déduit que  $r_s$  tend vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  avec

$$\log(r_s) \sim \int \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du.$$

Passons au cas où la courbure de l'espace est nulle, *i.e.*,  $k = 0$ . Dans ce cas, la limite de  $c_s/a_s$  est non nulle presque sûrement. En effet, si avec probabilité positive, on avait la convergence  $c_s/a_s \rightarrow 0$ , c'est à dire

$$\dot{r}_s = o\left(\frac{a_s}{\alpha^2(t_s)}\right), \quad \text{pour } s \text{ assez grand, on aurait } r_s \leq \left(\int \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du\right).$$

Dès lors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , l'intégrale convergente  $I_s$  serait minorée par l'intégrale divergente :

$$\frac{1}{2} \int \left(\int \frac{a_v}{\alpha^2(t_v)} dv\right)^{-1} \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \frac{1}{2} \log\left(\int \frac{a_v}{\alpha^2(t_v)} dv\right).$$

Presque sûrement, on a donc  $\lim_{s \rightarrow +\infty} c_s^2/a_s^2 > 0$  et en fait  $\lim_{s \rightarrow +\infty} c_s/a_s > 0$ . En effet, si on avait  $c_s/a_s \rightarrow -\varepsilon < 0$ , pour  $s \geq s_1$  assez grand, on aurait  $c_s/a_s \leq -\varepsilon/2$ , c'est à dire  $\dot{r}_s \leq -\varepsilon/2 \times a_s/\alpha^2(t_s)$ . En intégrant, on aurait la contradiction :

$$r_s - r_{s_1} \leq -\frac{\varepsilon}{2} \int_{s_1}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} \rightarrow -\infty, \quad \text{lorsque } s \rightarrow \tau.$$

On a donc  $\lim_{s \rightarrow \tau} c_s/a_s = \varepsilon > 0$  presque sûrement. Comme précédemment, pour  $s$  assez grand, le processus  $r_s$  est donc croissant et il vérifie la minoration :

$$r_s \geq \frac{\varepsilon}{2} \int \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)}, \quad \text{en particulier } \liminf_{s \rightarrow \tau} r_s = +\infty.$$

La divergence de  $r_s$  permet de préciser que  $c_s/a_s$  converge vers 1 comme dans le cas hyperbolique. En effet, si  $c_s/a_s$  convergeait vers  $1 - \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ , on aurait  $\rho_s/r_s > \varepsilon/2$  pour  $s$  assez grand et le processus  $\rho_s$  serait donc aussi divergent. Avec les notations de la preuve de la proposition VI.2, la martingale  $M_s$  dans (VI.4) tendrait vers plus l'infini, d'où une contradiction. La convergence de  $c_s/a_s$  vers 1 induit l'équivalent asymptotique suivant pour le processus  $r_s$ , lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$r_s \sim \int_{\cdot}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du.$$

□

### 1.3.2 Comportement asymptotique de $\rho_s$

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour la convergence du rapport  $\rho_s = b_s/a_s$  lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T \leq +\infty$ . Rappelons que dans la preuve de la proposition VI.2, nous avons obtenu la décomposition (VI.4) du processus  $\log(\rho_s)$ , pour tout  $0 < s_0 < s$  :

$$\begin{aligned} \log(\rho_s) - \log(\rho_{s_0}) &= M_s - R_s, \quad \text{avec } M_s := \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)r_u}{b_u} dB'_u, \\ R_s &:= \frac{\sigma^2}{2} \int_{s_0}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)\rho_u}{a_u r_u} dB'_u + \sigma \int_{s_0}^s \frac{\alpha(t_u)c_u}{a_u a_u} dB''_u. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un univers éternel où l'expansion est lente, d'après la remarque VI.2, le produit  $H(t) \times t$  tend, lorsque  $t$  tend vers l'infini, vers une constante  $c$  nécessairement inférieure ou égale à 1. D'après la proposition V.4, le processus  $C_s$  converge alors presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini, et le processus  $R_s$  converge lui aussi presque sûrement. Dans un univers mortel, d'après le lemme V.9, lorsque  $s$  tend vers le temps d'explosion  $\tau$ , les processus  $C_s$  et  $R_s$  sont également convergents. Le comportement asymptotique du processus  $\log(\rho_s)$  est donc entièrement déterminé par celui de la martingale  $M_s$ . On a la dichotomie suivante :

- si la martingale  $M_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le rapport  $\rho_s$  converge lui aussi presque sûrement vers une variable limite  $\rho_\infty$  strictement positive presque sûrement ;
- si la martingale  $M_s$  diverge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , alors on a

$$\liminf_{s \rightarrow \tau} \rho_s = 0, \quad \limsup_{s \rightarrow \tau} \rho_s = +\infty \text{ p.s.}$$

Le lemme suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la martingale  $M_s$ .

**Lemme VI.3** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est lente ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est rapide. Considérons des conditions initiales raisonnables  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  et la diffusion radiale  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  correspondante, solution du système (IV.19). Alors, la martingale  $M_s$  dans l'équation (VI.4) converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , si et seulement si*

$$\int_0^\tau r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds < +\infty.$$

*Démonstration.* On reprend le début de la preuve de la proposition VI.3 ; pour tout  $0 < s_0 < s < \tau$ , les processus  $a_s$  et  $b_s$  s'écrivent :

$$a_s = a_{s_0} \exp(-\sigma^2 s_0 - \sigma B_{s_0}) \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + R_s),$$

$$b_s = b_{s_0} \exp(-\sigma^2 s_0 - \sigma B_{s_0}) \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + M_s).$$

Considérons tout d'abord le cas d'un univers éternel. Par hypothèse, l'expansion est polynomiale. D'après la proposition V.2,  $\dot{t}_s$  tend vers l'infini avec  $s$ , lorsque  $s$  tend vers l'infini et on a :

$$a_s = \alpha(t_s) \sqrt{\dot{t}_s^2 - 1} = \alpha(t_s) \dot{t}_s \times \sqrt{1 - \dot{t}_s^{-2}} = \alpha(t_s) \dot{t}_s \times (1 + o(1)).$$

De la première équation, comme d'après la proposition V.4  $R_s$  converge presque sûrement, on déduit alors que, lorsque  $s$  tend vers l'infini :

$$\alpha(t) \dot{t}_s = (1 + o(1)) \times \exp(\sigma^2 s + \sigma B_s + O(1)). \quad (\text{VI.8})$$

Dans la preuve du lemme VI.2, nous avons vu que, si  $\beta$  désigne le mouvement brownien de Dambis-Dubins-Schwarz associé à  $M$ , alors :

$$\int_0^{\langle M \rangle_s} e^{2\beta u} du = \sigma^2 b_{s_0}^{-2} \int_{s_0}^s \alpha^2(t_u) r_u^2 \exp(-2\sigma^2 u - 2\sigma B_u) du. \quad (\text{VI.9})$$

La martingale  $M_s$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, si et seulement si son crochet  $\langle M \rangle_s$  converge, donc si et seulement si le terme de droite dans l'équation (VI.9) est lui même convergent. D'après (VI.8),

le membre de droite dans l'équation (VI.9) converge presque sûrement si et seulement si

$$\int_{\cdot}^{+\infty} r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds < +\infty,$$

d'où le résultat. Dans le cas d'un univers mortel, d'après la proposition V.5, au voisinage de  $\tau$ , on a  $a_s \sim \alpha(t_s)\dot{t}_s = a_\infty + o(1)$  avec  $a_\infty$  strictement positif presque sûrement. Par ailleurs,  $\exp(-2\sigma^2 s - 2\sigma B_s)$  converge presque sûrement vers une variable strictement positive. Comme dans le cas éternel, d'après l'équation (VI.9) le crochet de la martingale  $M_s$  converge alors si et seulement si

$$\int_{\cdot}^{\tau} r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds < +\infty,$$

d'où le résultat. □

### 1.3.3 Comportement asymptotique de $\rho_s$ dans un univers éternel

Nous traduisons maintenant la convergence de l'intégrale stochastique dans le lemme VI.3 en fonction de la limite de  $H(t) \times t$  au voisinage de l'infini. Nous montrons ainsi le résultat suivant :

**Proposition VI.5** — *On considère un espace de Robertson-Walker éternel  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où la fibre  $M$  est euclidienne ou hyperbolique et où l'expansion est lente. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et soit  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. On a alors les comportements asymptotiques suivants :*

- lorsque la fibre est euclidienne et  $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t \leq 1$ , le processus  $\rho_s$  converge presque sûrement vers une variable  $\rho_\infty > 0$  p.s. ;
- lorsque la fibre est hyperbolique et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t < 1$ , on a

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \rho_s = 0, \quad \limsup_{s \rightarrow +\infty} \rho_s = \liminf_{s \rightarrow +\infty} r_s = +\infty.$$

*Démonstration.* D'après le paragraphe précédent et lemme VI.3, le processus  $\log(\rho_s)$  converge lorsque  $s$  tend vers l'infini si et seulement si l'intégrale  $\int_{\cdot}^{+\infty} r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds$  est finie. Supposons tout d'abord que la fibre  $M$  est euclidienne. Dans ce cas, d'après la proposition VI.4, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  on a

$$r_s^2 \sim \left( \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right)^2.$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence de  $\log(\rho_s)$  du lemme VI.3 s'écrit donc encore

$$\int_{\cdot}^{+\infty} \dot{t}_s^{-2} \left( \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right)^2 ds < +\infty. \quad (\text{VI.10})$$

Le premier point de la proposition découle alors directement des estimés asymptotiques de la proposition V.2. Si  $0 < c := \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t \leq 1$ , presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, on a en effet :

$$\frac{1}{s} \log(t_s) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{1+c}, \quad \frac{1}{s} \log\left(\frac{a_s}{\alpha^2(t_s)}\right) \longrightarrow \sigma^2 \frac{1-c}{1+c}.$$

Passons maintenant au cas où la fibre  $M$  est hyperbolique. D'après la proposition VI.4, le processus  $c_s/a_s$  tend presque sûrement vers 1 lorsque  $s$  tend vers l'infini. Précisons sa vitesse de convergence. L'intégrale  $I_s$  convergeant presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, il en est de même pour l'intégrale

$$\int_{s_0}^s \frac{\rho_u^2}{r_u^2} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \int_{s_0}^s \left(1 - \frac{c_u^2}{a_u^2}\right) \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du.$$

Pour  $s > s_0$  assez grand, on a par ailleurs :

$$\frac{c_s}{a_s} = \sqrt{1 - \frac{\rho_s^2}{r_s^2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{\rho_s^2}{r_s^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\dot{r}_s}{\sqrt{1+r_s^2}} = \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} - \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \frac{\rho_s^2}{r_s^2} \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)}.$$

En intégrant, on peut préciser l'équivalent de la proposition VI.4 :

$$r_s = \sinh\left(\int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du + O(1)\right) = \exp\left(\int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du + O(1)\right). \quad (\text{VI.11})$$

Dans le cas hyperbolique, le critère du lemme VI.3 est donc équivalent à la convergence de l'intégrale :

$$\int^{+\infty} t_s^{-2} \exp\left(2 \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du\right) ds.$$

Lorsque  $c := \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t < 1$ , les estimés de la proposition V.2 rappelés ci-dessus permettent d'affirmer que cette intégrale est divergente, d'où le résultat.  $\square$

**Remarque VI.3** — Lorsque la fibre est hyperbolique et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t = 1$ , la convergence de  $\rho_s$  est intimement liée à la croissance de  $\int^t du/\alpha(u)$  par rapport à  $\log(t)$ . Par exemple, si  $\alpha(t) = t \log(t)$  i.e  $\int^t du/\alpha(u) = \log \log(t)$ , le processus  $\log(\rho_s)$  converge presque sûrement puisque

$$\int^{+\infty} t_s^{-2} \exp\left(2 \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du\right) ds \sim \int^{+\infty} t_s^{-2} \log(t_s)^2 ds < +\infty.$$

À l'opposé, si  $\alpha(t) = t/\log(t)$  i.e  $H(t) \times t = 1 - 1/\log(t)$  auquel cas  $2 \int^t du/\alpha(u) = \log(t)^2$ , le processus  $\rho_s$  oscille entre zéro et l'infini puisque

$$\int^{+\infty} t_s^{-2} \exp\left(2 \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du\right) ds \sim \int^{+\infty} t_s^{-2} \exp(\log(t_s)^2) ds = +\infty.$$

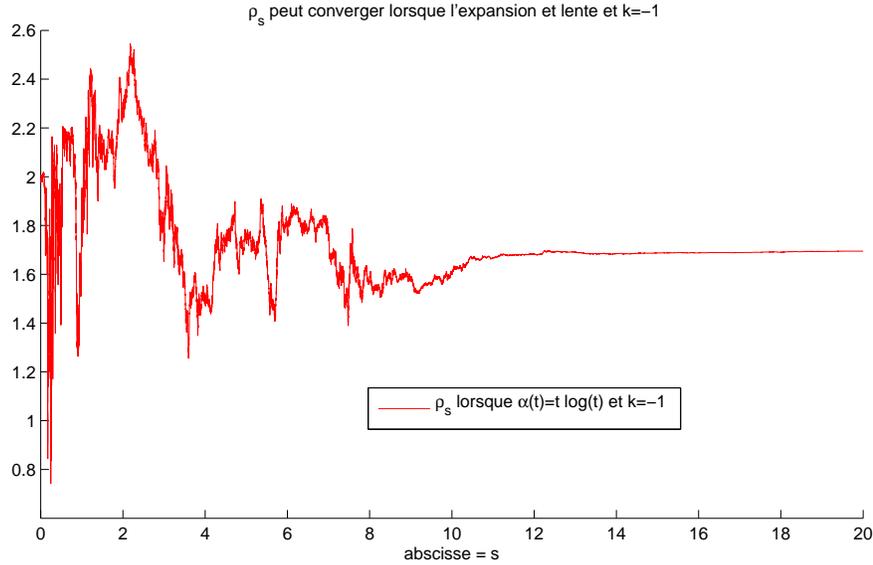


FIGURE 35: Convergence de  $\rho_s$  lorsque  $\alpha(t) = t \log(t)$  et  $k = -1$ .

### 1.3.4 Comportement de $\rho_s$ dans un univers mortel

On donne à présent des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence du processus  $\rho_s$  dans espace de Robertson-Walker mortel, dont la fibre est euclidienne ou hyperbolique, lorsque l'effondrement est rapide.

**Proposition VI.6** — *On considère un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où la fibre  $M$  est euclidienne ou hyperbolique et où l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et soit  $(t_s, r_s, a_s, b_s, c_s)$  la solution du système (IV.19) correspondante. On a alors les comportements asymptotiques suivants :*

- lorsque la fibre  $M$  est euclidienne, le processus  $\rho_s = b_s/a_s$  converge presque sûrement vers une variable  $\rho_{\infty}$  presque sûrement positive ;
- lorsque la fibre  $M$  est hyperbolique, le processus  $\rho_s = b_s/a_s$  converge presque sûrement si et seulement si

$$\int^{\tau} \alpha^3(u) \exp\left(2 \int^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right) du < +\infty.$$

*Démonstration.* D'après le paragraphe 1.3.2 et lemme VI.3, le processus  $\log(\rho_s)$  converge lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale  $\int^\tau r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds$  est finie. Traitons tout d'abord le cas où la fibre  $M$  est euclidienne. D'après la proposition VI.4, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a :

$$r_s \sim \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}.$$

Le processus  $\log(\rho_s)$  converge donc presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , si et seulement si

$$\int^\tau \dot{t}_s^{-2} \left( \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} \right)^2 ds < +\infty.$$

D'après la proposition V.5, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $a_s \sim \alpha(t_s) \dot{t}_s$  converge presque sûrement vers  $a_\infty$  strictement positif. L'intégrale précédente est donc finie si et seulement si

$$\int^\tau \alpha^3(t_s) \left( \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} \right)^2 \dot{t}_s ds < +\infty \text{ i.e. } \int^T \alpha^3(u) \left( \int^u \frac{dv}{\alpha(v)} \right)^2 du < +\infty.$$

Or, lorsque  $t$  tend vers  $T$ , le produit  $\alpha(t) \int^t 1/\alpha$  tend vers zéro et la dernière intégrale est finie. Passons au cas où la fibre  $M$  est hyperbolique. Comme dans la preuve de la proposition VI.5, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a alors

$$r_s = \sinh \left( \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du + O(1) \right) = \exp \left( \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} + O(1) \right).$$

L'intégrale  $\int^\tau r_s^2 \dot{t}_s^{-2} ds$  est donc finie si et seulement si

$$\int^\tau \alpha^2(t_s) \exp \left( 2 \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} \right) ds = \int^\tau \alpha^3(t_s) \exp \left( 2 \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} \right) \dot{t}_s ds < +\infty,$$

ou encore

$$\int^T \alpha^3(u) \exp \left( 2 \int^u \frac{dv}{\alpha(v)} \right) du < +\infty,$$

d'où le résultat. □

**Remarque VI.4** — Dans un univers mortel, et dans le cas où la fibre est euclidienne, le processus  $\rho_s$  est donc toujours convergent. Ce n'est pas le cas lorsque la fibre  $M$  est hyperbolique. Par exemple,  $\rho_s$  converge lorsque  $\alpha(t) = \sin(T-t) \sim T-t$  au voisinage de  $T$ , mais diverge lorsque  $\alpha(t) \sim (T-t)^2$ . Plus généralement, lorsque  $-H(t) \times (T-t)$  converge vers  $1 < c < +\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $T$ , le processus  $\rho_s$  est divergent.

## 2 ASYMPTOTIQUE LORSQUE LA FIBRE EST EUCLIDIENNE

Nous explicitons maintenant le comportement asymptotique des composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s)$  de la diffusion de Franchi et Le Jan  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne. Comme dans la section précédente, nous distinguons les cas selon que l'inverse du facteur d'expansion est intégrable ou non au voisinage de  $T \leq +\infty$ .

### 2.1 Cas d'une expansion rapide – effondrement lent

On traite tout d'abord les cas où l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T$ , c'est-à-dire le cas d'un univers éternel où l'expansion est rapide, ou d'un univers mortel où l'effondrement est lent. Nous montrons que comme dans le cas des géodésiques de lumière, les trajectoires  $x_s$  de la diffusion convergent alors dans la fibre  $M = \mathbb{R}^3$ . On note cependant que dans le cas d'un univers éternel, lorsque l'expansion est exponentielle, le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est différent du cas géodésique. Nous montrons en effet que dans le cas exponentiel, le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est récurrent dans  $\mathbb{S}^2$ .

#### 2.1.1 Convergence des trajectoires dans la fibre

De la même façon que dans le cas des géodésiques lumière étudiées au chapitre II, on montre que lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable, les trajectoires de la diffusion relativiste convergent dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition VI.7** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est rapide ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le vecteur  $x_s$  converge un vecteur aléatoire  $x_{\infty}$  appartenant à  $\mathbb{R}^3$ .*

*Démonstration.* D'après la relation de pseudo-norme (IV.17), pour  $s < \tau$ , on a l'égalité  $|\dot{x}_s|^2 = g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) = a_s^2/\alpha^4(t_s)$ . On en déduit que

$$|x_s - x_0| \leq \int_0^s |\dot{x}_u| du = \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \leq \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, la dernière intégrale est convergente, ainsi que la variation totale de  $x_s$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire VI.3** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.7. Soient  $\mathfrak{x}$  un point de  $\mathbb{R}^3$  et  $\varepsilon > 0$ . On a alors  $\mathbb{P}(|x_\infty - \mathfrak{x}| \leq \varepsilon) = 1$ , pourvu que  $x_0$  soit suffisamment proche de  $\mathfrak{x}$  et  $t_0$  dans un voisinage assez petit de  $T$ .*

*Démonstration.* Fixons un point  $\mathfrak{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  et un réel  $\varepsilon$  strictement positif. Si on choisit  $t_0$  de sorte que  $\int_{t_0}^T du/\alpha(u) < \varepsilon/2$  et  $|x_0 - \mathfrak{x}| < \varepsilon/2$ , alors d'après la preuve de la proposition VI.7, presque sûrement, pour tout  $s < \tau$ , on a alors  $|x_s - x_0| \leq \varepsilon$ , d'où le résultat.  $\square$

Lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T$ , on retrouve bien entendu la convergence de  $r_s = |x_s|$  obtenue dans la proposition VI.1 de la section précédente. On peut préciser la loi de la limite  $x_\infty$  du processus  $x_s$ , du moins la loi de sa composante angulaire. En effet, d'après l'invariance de la loi de la diffusion sous l'action des isométries, on a le résultat suivant.

**Corollaire VI.4** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.7. On choisit le système de coordonnées sur  $\mathbb{R}^3$  de sorte que  $x_0 = 0$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus angulaire  $\theta_s = x_s/|x_s|$  converge vers une variable aléatoire  $\theta_\infty$  de loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$ .*

*Démonstration.* Le générateur infinitésimal de la diffusion relativiste est invariant sous l'action des isométries de  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$ . En particulier, il est invariant sous l'action des isométries qui agissent trivialement sur la base  $I$  et qui fixent l'origine dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire les rotations de  $\mathbb{R}^3$ . Lorsque  $x_0 = 0$ , la loi de la limite  $\theta_\infty$  dans  $\mathbb{S}^2$  est donc invariante sous l'action des rotations : c'est la loi uniforme sur la sphère.  $\square$

Remarque VI.5 — Bien entendu, si on choisit  $x_0 \neq 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ , la loi limite de la variable angulaire est la loi uniforme sur la sphère unité centrée en  $x_0$ . Nous ne sommes pas parvenus à expliciter la loi asymptotique du rayon limite  $r_\infty = |x_\infty|$ .

### 2.1.2 Asymptotique du vecteur dérivé normalisé

Dans la remarque IV.3 de la section 1.1 du chapitre IV, on a vu que dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, le vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est un mouvement brownien sphérique changé de temps. Précisément, si  $\xi_0 \neq (1, 0, 0, 0)$ , il existe un mouvement brownien sphérique  $\Theta_s = (\Theta_s^1, \Theta_s^2, \Theta_s^3)$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , indépendant de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ , tel que pour tout  $s < \tau$  :

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \Theta_{C_s} \quad \text{où} \quad C_s := \sigma^2 \int_0^s \frac{du}{\dot{t}_u^2 - 1} du = \sigma^2 \int_0^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du.$$

Le vecteur dérivé normalisé converge donc presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale  $C_s$  est elle-même convergente. En vertu de la proposition V.4 et du lemme V.9 on peut donc énoncer la proposition suivante :

**Proposition VI.8** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.7. Alors le comportement asymptotique du processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est le suivant :*

- *si l'univers est mortel, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est récurrent dans  $\mathbb{S}^2$ .*

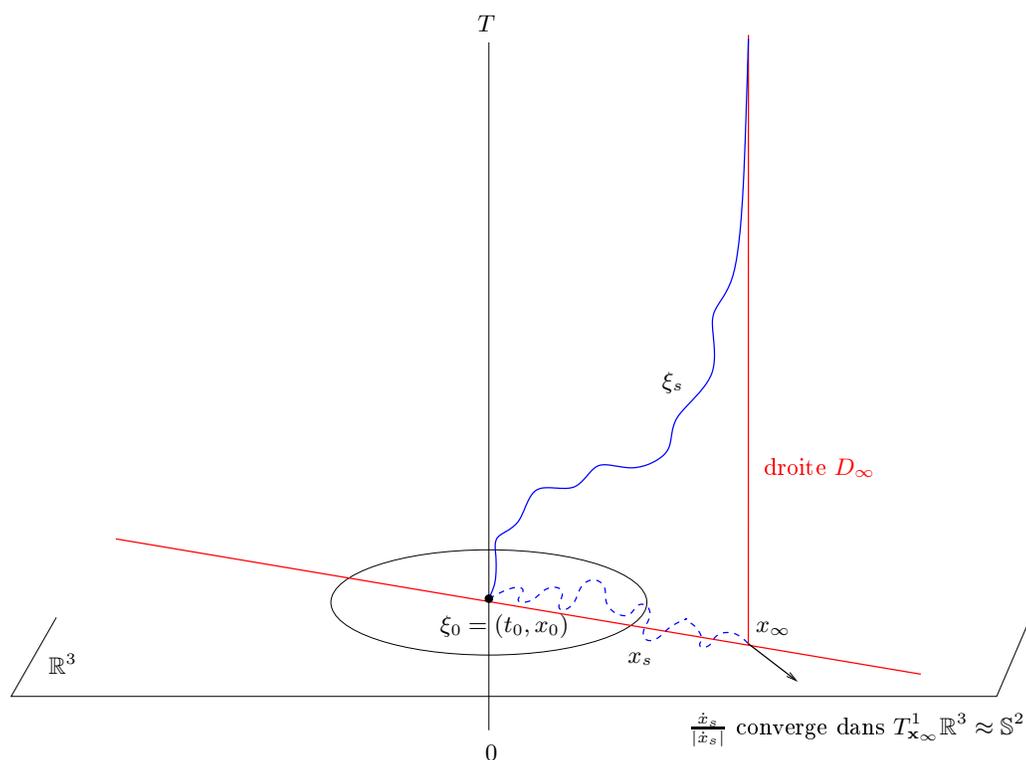


FIGURE 36: Comportement asymptotique de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  dans  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  lorsque  $T < +\infty$  ou lorsque  $T = +\infty$  et l'expansion est polynomiale.

Lorsque le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est convergent, en utilisant l'invariance de la loi de la diffusion sous l'action du groupe des isométries, on peut préciser la loi de la variable limite  $\Theta_\infty$ .

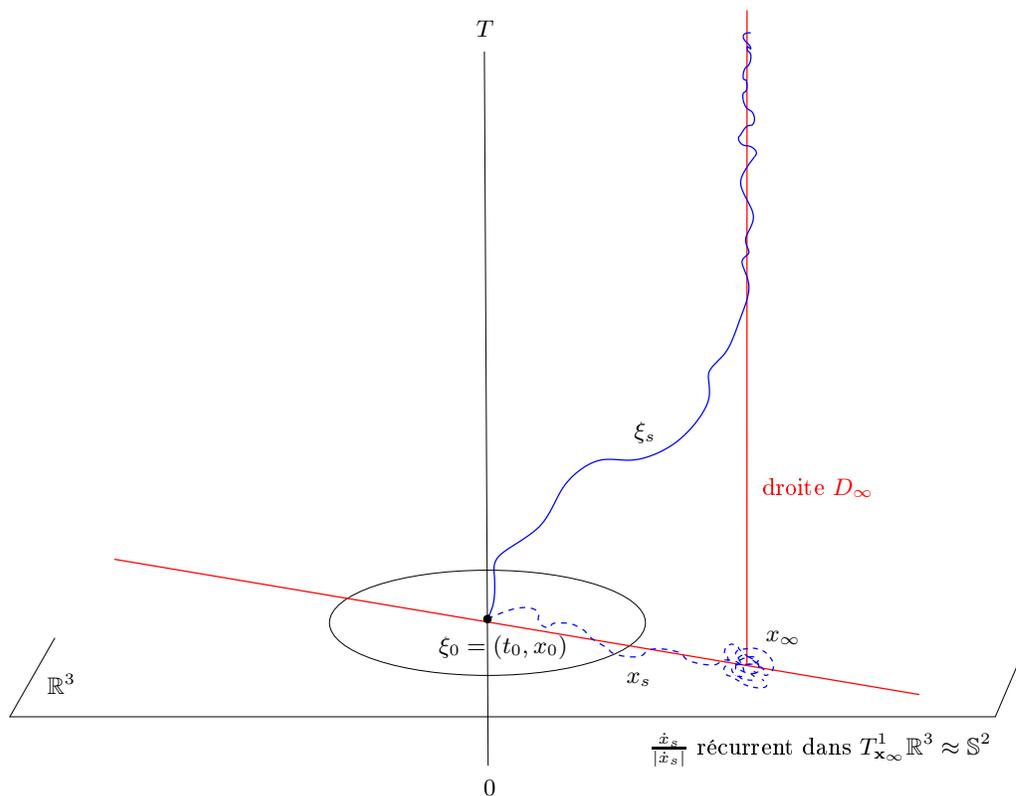


FIGURE 37: Comportement asymptotique de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  dans un univers éternel  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  où l'expansion est exponentielle.

**Corollaire VI.5** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.8 et dans les cas où  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un point  $\Theta_{\infty}$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . La loi de  $\Theta_{\infty}$  est caractérisée par :*

- si  $\dot{\xi}_0 = (1, 0, 0, 0)$ , alors la loi de  $\Theta_{\infty}$  est la loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$  ;
- si  $\dot{\xi}_0 \neq (1, 0, 0, 0)$ , alors la loi  $\Theta_{\infty}$  est l'image de la loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$  par toute isométrie qui envoie le point  $(1, 0, 0, 0)$  sur  $\dot{\xi}_0$ .

*Démonstration.* Notons tout d'abord que l'on peut toujours choisir l'origine du système de coordonnées sur  $\mathbb{R}^3$  de sorte que  $x_0 = 0$ . Comme on l'a déjà vu dans la preuve de la proposition VI.11, le générateur infinitésimal de la diffusion de Franchi et Le Jan est invariant sous l'action des isométries, en particulier sous l'action des isométries qui agissent trivialement sur la base  $I$  et qui fixent l'origine dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire les rotations de  $\mathbb{R}^3$ . Lorsque  $\dot{\xi}_0 = (1, 0, 0, 0)$ , la loi de la limite  $\Theta_{\infty}$  est donc invariante par les rotations de  $\mathbb{R}^3$ , i.e. c'est la loi uniforme sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Lorsque  $\dot{\xi}_0 \neq (1, 0, 0, 0)$ , on se ramène au cas précédent en considérant une isométrie  $\Phi$  qui envoie le point

$\dot{\xi}_0$  sur  $(1, 0, 0, 0)$ . La loi de la variable  $\Theta_\infty$  est alors l'image de la loi uniforme par  $\Phi^{-1}$ , l'inverse de l'application  $\Phi$ .  $\square$

### 2.1.3 Asymptotique du moment angulaire

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la convergence du moment angulaire  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T$ . On rappelle que dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, on a pour tout  $0 < s < \tau$  :

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \frac{c_s}{a_s} \times \theta_s + \frac{\rho_s}{r_s} \times \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \quad \text{donc} \quad x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \rho_s \times \theta_s \wedge \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}.$$

On a vu que dans un univers éternel où l'expansion est rapide ou dans un univers mortel où l'effondrement est lent, le processus  $x_s$  converge presque sûrement. Dans un univers mortel, le processus  $\dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  est toujours convergent. Dans un univers éternel, il converge si et seulement si l'intégrale  $C_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini. On peut donc énoncer le corollaire :

**Corollaire VI.6** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.8. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le comportement asymptotique du moment angulaire  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  est le suivant :*

- *si l'univers est mortel, alors  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un vecteur non nul dans  $\mathbb{R}^3$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale, alors  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un vecteur non nul dans  $\mathbb{R}^3$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  est divergent.*

Dans le cas où le moment angulaire est divergent, il se pourrait que  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  converge presque sûrement bien que le processus  $\rho_s$  oscille entre zéro et  $r_\infty$ . Nous montrons que ce n'est pas le cas : le vecteur dérivé  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  converge si et seulement si le processus  $\rho_s$  converge, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale  $C_s$  est convergente d'après la proposition VI.2.

**Lemme VI.4** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1 \mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , les processus  $\rho_s$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  convergent ou divergent simultanément.*

*Démonstration.* Un calcul direct montre que si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  est la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ , alors le processus  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  est solution du système d'équations différentielles stochastiques, pour  $i = 1, 2, 3$  :

$$d\frac{\dot{\theta}_s^i}{|\dot{\theta}_s|} = -|\dot{\theta}_s|\theta_s^i ds - \frac{\sigma^2}{2} \times \frac{\dot{\theta}_s^i}{|\dot{\theta}_s|} \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2} + dM_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}, \quad (\text{VI.12})$$

où la matrice de covariation quadratique des martingales  $M_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}$  est donnée par :

$$d\langle M_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}, M_s^{\dot{\theta}^j/|\dot{\theta}|} \rangle_s = \sigma^2 \left( \delta_{ij} - \theta_s^i \theta_s^j - \frac{\dot{\theta}_s^i}{|\dot{\theta}_s|} \frac{\dot{\theta}_s^j}{|\dot{\theta}_s|} \right) \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2}. \quad (\text{VI.13})$$

Par ailleurs, les martingales  $M_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}$  sont orthogonales aux martingales  $M_s^i$  et  $M_s^b = M_s^{\alpha^2 r^2 |\dot{\theta}|}$  :

$$d\langle M_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}, M_s^i \rangle_s = d\langle M_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}, M_s^b \rangle_s = 0.$$

Dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre et de courbure négative ou nulle, quelque soit la nature de l'expansion ou de l'effondrement, le processus  $\theta_s$  converge presque sûrement vers un point  $\theta_\infty$  de la sphère (voir les propositions VI.3, VI.7 et VI.13, VI.16 dans le cas hyperbolique). Par conséquent, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  converge si et seulement si le produit vectoriel  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s| \wedge \theta_s$  converge. D'après la formule d'Itô, on a

$$d\frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} \wedge \theta_s = -\frac{\sigma^2}{2} \times \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} \wedge \theta_s \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2} + dM_s^{\dot{\theta}/|\dot{\theta}|} \wedge \theta_s.$$

On en déduit que le processus  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s| \wedge \theta_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale croissante ci-dessous est convergente

$$\int^s \frac{du}{\alpha^2(t_u)r_u^2|\dot{\theta}_u|^2} = \int^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \times \frac{r_u^2}{\rho_u^2} du.$$

Or cette intégrale n'est autre que le crochet de la martingale  $M_s$  introduite dans la preuve de la proposition VI.2. D'après la remarque VI.1 et le paragraphe 1.3.2 de ce chapitre,  $M_s$  converge si et seulement si le processus  $\rho_s$  est lui-même convergent, d'où le résultat.  $\square$

Dans les corollaires VI.1 et VI.2, nous avons établi la convergence / divergence de  $\rho_s$  selon la nature de l'expansion. Par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante :

**Proposition VI.9** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.8. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  est le suivant :*

- *si l'univers est mortel, alors  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  converge presque sûrement vers un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale,  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  converge presque sûrement vers un point de  $\mathbb{S}^2$  ;*
- *si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  est divergent : asymptotiquement, il décrit un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T_{\theta_\infty}^1 \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{S}^1$ .*

*Démonstration.* La proposition est une conséquence directe du lemme VI.4 et des corollaires VI.1 et VI.2. L'assertion concernant le comportement asymptotique brownien de  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  dans le cas divergent fait l'objet de la proposition VI.10 ci-après.  $\square$

**Proposition VI.10** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker éternel dont la fibre est de courbure négative ou nulle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1 \mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables, et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, r_s, \theta_s, \dot{t}_s, \dot{r}_s, \dot{\theta}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que le processus  $\rho_s$  est récurrent. Alors, presque sûrement*

- i) le processus  $\theta_s$  converge presque sûrement un point  $\theta_\infty$  dans  $\mathbb{S}^2$  ;*
- ii) pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps propre  $s_\varepsilon$  fini presque sûrement et un mouvement brownien sphérique changé de temps  $(\Theta_s^\varepsilon, s \geq s_\varepsilon)$  à valeurs dans  $T_{\theta_\infty} \mathbb{S}^2$  tels que, presque sûrement :*

$$\sup_{s > s_\varepsilon} \left| \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} - \Theta_s^\varepsilon \right| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* La convergence presque sûre de l'angle  $\theta_s$  dans le cas euclidien a déjà été obtenue dans la proposition VI.7. Dans le cas hyperbolique, elle découle de la proposition VI.13 ci-après. Montrons l'assertion concernant le caractère asymptotiquement brownien de  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$ . Commençons par donner une heuristique de la démonstration. Dans la preuve du lemme VI.4, nous avons explicité l'équation différentielle stochastique (VI.12) vérifiée par le processus  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$ . Le crochet du processus est donné par l'équation (VI.13). Si l'on néglige tous les termes faisant intervenir l'angle  $\theta_s$ , les équations (VI.12) et (VI.13) se simplifient en :

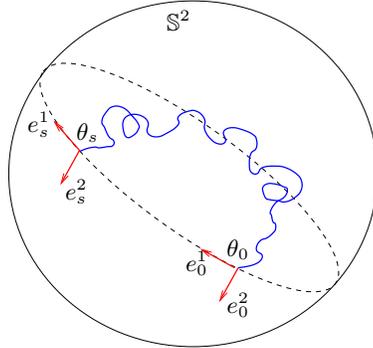
$$d \frac{\dot{\theta}_s^i}{|\dot{\theta}_s|} = -\frac{\sigma^2}{2} \times \frac{\dot{\theta}_s^i}{|\dot{\theta}_s|} \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s) r_s^2 |\dot{\theta}_s|^2} + dM_s^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|} + \dots,$$

$$d\langle M^{\dot{\theta}^i/|\dot{\theta}|}, M^{\dot{\theta}^j/|\dot{\theta}|} \rangle_s = \left( \delta_{ij} - \frac{\dot{\theta}_s^i \dot{\theta}_s^j}{|\dot{\theta}_s|^2} + \dots \right) \frac{ds}{\alpha^2(t_s) r_s^2 |\dot{\theta}_s|^2}.$$

On reconnaît là le système d'équations vérifié par un mouvement brownien dans  $\mathbb{S}^1$  au changement de temps  $ds' := \sigma^2(\alpha^2(t_s) r_s^2 |\dot{\theta}_s|^2)^{-1} ds$  près. Or, on a déjà remarqué dans la preuve du lemme VI.4 que  $ds' = d\langle M \rangle_s$  où  $M_s$  est la martingale introduite dans la preuve de la proposition VI.2, dont on sait (Cf. remarque VI.1 et paragraphe 1.3.2) qu'elle diverge sous les hypothèses de l'énoncé. Nous montrons maintenant rigoureusement en quel sens les termes faisant intervenir  $\theta_s$  peuvent être négligés. Considérons  $(e_0^1, e_0^2)$  une base orthonormée du plan tangent  $T_{\theta_0}^1 \mathbb{S}^2$ . On voit les vecteurs  $e_0^i$ ,  $i = 1, 2$ , comme des vecteurs de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ . La courbe  $\theta_s$  est une courbe de classe  $C^1$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ , de variation totale finie. En effet, de l'inégalité  $\rho_s \leq r_s$ , on déduit la majoration :

$$\int^{+\infty} |\dot{\theta}_s| ds \leq \int^{+\infty} \frac{1}{r_s} \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} ds,$$

la dernière intégrale étant finie presque sûrement sous les hypothèses de l'énoncé. Pour tous les temps  $0 < s < +\infty$ , on désigne par  $(e_s^1, e_s^2)$  le repère



orthonormé de  $T_{\theta_s}^1 \mathbb{S}^2$  obtenu à partir de  $(e_0^1, e_0^2)$  par le transport parallèle (déterministe) le long de (l'un des deux) arcs de grand cercle joignant  $\theta_0$  à  $\theta_s$ . Le processus  $(e_s^1, e_s^2)$  ainsi défini est aussi de classe  $C^1$ , il converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  vers un repère du plan tangent  $T_{\theta_\infty}^1 \mathbb{S}^2$ , et si l'on pose  $\dot{e}_s^i := de_s^i/ds$  pour  $i = 1, 2$ , on a presque sûrement

$$\int_0^{+\infty} (|\dot{e}_u^1| + |\dot{e}_u^2|) du < +\infty,$$

où  $|\dot{e}_u^1|$  et  $|\dot{e}_u^2|$  désignent ici les norme  $L^1$  de  $\dot{e}_u^1$  et  $\dot{e}_u^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On désigne par  $u_s^i$  les coordonnées du processus  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  (vu dans  $\mathbb{R}^3$ ) dans la base  $(e_s^1, e_s^2)$  :

$$u_s^i := \left\langle \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, e_s^i \right\rangle, \quad i = 1, 2.$$

Le processus  $u_s = (u_s^1, u_s^2)$  est alors solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$du_s^i = -\frac{\sigma^2}{2} \times u_s^i \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2} + \left\langle \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \dot{e}_s^i \right\rangle ds + dM_s^{u^i}, \quad (\text{VI.14})$$

$$\text{où} \quad d\langle M^{u^i}, M^{u^j} \rangle_s = (\delta_{ij} - u_s^i u_s^j) \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2}.$$

On représente les martingales  $M^{u^i}$  à l'aide d'un mouvement brownien unidimensionnel  $W$  de la façon suivante :

$$dM_s^{u^1} = \sigma \times \frac{u_s^2 dW_s}{\alpha(t_s)r_s|\dot{\theta}_s|}, \quad dM_s^{u^2} = \sigma \times \frac{-u_s^1 dW_s}{\alpha(t_s)r_s|\dot{\theta}_s|}.$$

Fixons  $\varepsilon > 0$  et considérons un temps propre  $s_\varepsilon$  assez grand pour que, pour tout  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$\int_s^{+\infty} (|\dot{e}_u^1| + |\dot{e}_u^2|) du \leq \varepsilon^2/64, \quad \text{et} \quad |e_s^1 - e_\infty^1| + |e_s^2 - e_\infty^2| \leq \varepsilon/2. \quad (\text{VI.15})$$

Considérons alors le processus  $v_s = (v_s^1, v_s^2)$  issu de  $u_{s_\varepsilon} = (u_{s_\varepsilon}^1, u_{s_\varepsilon}^2)$  et solution de l'équation suivante pour  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} dv_s^1 &= -\frac{\sigma^2}{2} \times v_s^1 \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2} + \sigma \times \frac{v_s^2 dW_s}{\alpha(t_s)r_s|\dot{\theta}_s|}, \\ dv_s^2 &= -\frac{\sigma^2}{2} \times v_s^2 \times \frac{ds}{\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2} + \sigma \times \frac{-v_s^1 dW_s}{\alpha(t_s)r_s|\dot{\theta}_s|}. \end{aligned}$$

Les processus  $v_s^i$ ,  $i = 1, 2$ , sont les coordonnées d'un mouvement brownien sphérique dans  $\mathbb{S}^1$ , paramétré par le temps  $ds' := \sigma^2(\alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|^2)^{-1}ds$ . Par ailleurs un calcul direct montre que  $|u_s - v_s|^2 := |u_s^1 - v_s^1|^2 + |u_s^2 - v_s^2|^2$  vérifie l'équation suivante, pour  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$d|u_s - v_s|^2 = 2(u_s^1 - v_s^1) \left\langle \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \dot{e}_s^1 \right\rangle ds + 2(u_s^2 - v_s^2) \left\langle \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \dot{e}_s^2 \right\rangle ds. \quad (\text{VI.16})$$

En intégrant cette équation, d'après (VI.15), on obtient que presque sûrement, pour tout  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} |u_s - v_s|^2 &= 2 \int_{s_\varepsilon}^s \left[ (u_y^1 - v_y^1) \left\langle \frac{\dot{\theta}_y}{|\dot{\theta}_y|}, \dot{e}_y^1 \right\rangle + (u_y^2 - v_y^2) \left\langle \frac{\dot{\theta}_y}{|\dot{\theta}_y|}, \dot{e}_y^2 \right\rangle \right] dy \\ &\leq 2 \int_{s_\varepsilon}^s \left[ \left| (u_y^1 - v_y^1) \left\langle \frac{\dot{\theta}_y}{|\dot{\theta}_y|}, \dot{e}_y^1 \right\rangle \right| + \left| (u_y^2 - v_y^2) \left\langle \frac{\dot{\theta}_y}{|\dot{\theta}_y|}, \dot{e}_y^2 \right\rangle \right| \right] dy \\ &\leq 4 \int_{s_\varepsilon}^s (|\dot{e}_y^1| + |\dot{e}_y^2|) dy \leq 4 \int_{s_\varepsilon}^{+\infty} (|\dot{e}_y^1| + |\dot{e}_y^2|) dy < \varepsilon^2/16. \end{aligned}$$

Naturellement, on a alors  $|u_s^1 - v_s^1| + |u_s^2 - v_s^2| \leq \varepsilon/2$ . Introduisons le processus  $\Theta_s^\varepsilon$  défini pour  $s \geq s_\varepsilon$  par  $\Theta_s^\varepsilon := v_s^1 e_\infty^1 + v_s^2 e_\infty^1$ . C'est un mouvement brownien sphérique dans le plan tangent unitaire  $T_{\theta_\infty}^1 \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{S}^1$ , paramétré par l'horloge  $\int_{s_\varepsilon}^s du / (\alpha^2(t_u) r_u^2 |\dot{\theta}_u|^2)$  qui tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . D'après l'équation (VI.15), presque sûrement, pour tout  $s \geq s_\varepsilon$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} - \Theta_s^\varepsilon \right| &= |(u_s^1 e_s^1 + u_s^2 e_s^2) - (v_s^1 e_\infty^1 + v_s^2 e_\infty^1)| \\ &= |(u_s^1 - v_s^1) e_\infty^1 + (u_s^2 - v_s^2) e_\infty^2 + u_s^1 (e_s^1 - e_\infty^1) + u_s^2 (e_s^2 - e_\infty^2)| \\ &\leq |u_s^1 - v_s^1| + |u_s^2 - v_s^2| + |e_s^1 - e_\infty^1| + |e_s^2 - e_\infty^2| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

## 2.2 Cas d'une expansion lente – effondrement rapide

Passons maintenant à l'étude des composantes spatiales de la diffusion relativiste dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . Dans le cas éternel, un exemple typique d'une telle situation est l'espace de Minkowski où le facteur d'expansion est constant égal à 1. Nous montrons que dans un univers éternel où l'expansion est lente, le comportement asymptotique de la diffusion présente de nombreuses similarités avec le cas minkowskien étudié dans [Dud67] et [Bai08a]. Nous explicitons également le comportement asymptotique de la diffusion dans un univers mortel où l'effondrement est rapide.

### 2.2.1 Divergence dans une direction privilégiée

D'après l'étude de la diffusion radiale, on sait déjà que lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ , le processus  $x_s$  est transitoire au sens où  $r_s = |x_s|$  tend vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Comme dans le cas de l'espace de Minkowski, nous montrons ici que  $x_s$  tend vers l'infini dans une direction privilégiée, autrement dit les processus  $\theta_s = x_s/|x_s|$  et  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  convergent presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  vers un même point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ , dont on peut préciser la loi.

**Proposition VI.11** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est lente ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1 \mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue*

de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

*Démonstration.* Comme dans la remarque VI.2, notons tout d'abord que, d'après l'hypothèse 5, l'expansion est ici polynomiale avec  $H(t) \times t \rightarrow c \leq 1$ . On rappelle par ailleurs que dans le cas d'un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  s'écrit  $\Theta(C_s)$  où  $\Theta$  est un mouvement brownien sphérique, indépendant de l'horloge  $C_s$ . La proposition découle directement de la proposition V.4 et du lemme V.9 qui affirment que sous les hypothèses de l'énoncé, le changement de temps  $C_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ .  $\square$

De la convergence de  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ , on déduit bien sûr la convergence  $x_s/|x_s|$  :

**Corollaire VI.7** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.11. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $\theta_s = x_s/|x_s|$  converge presque sûrement vers  $\Theta_\infty$ , la limite du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$ .*

*Démonstration.* On rappelle que dans le cas euclidien, lorsque l'expansion est lente, on a

$$r_s = |x_s| \sim \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \int^s |\dot{x}_u| du.$$

On a alors

$$x_s = x_0 + \int_0^s \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \times |\dot{x}_u| du = \Theta_\infty \times (1 + o(1)) \times r_s + o(r_s),$$

d'où le résultat.  $\square$

Comme précédemment, on peut préciser la loi de la limite  $\Theta_\infty$  :

**Corollaire VI.8** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.11. La loi de  $\Theta_\infty$  est caractérisée par :*

- si  $\dot{\xi}_0 = (1, 0, 0, 0)$ , alors la loi de  $\Theta_\infty$  est la loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$  ;
- si  $\dot{\xi}_0 \neq (1, 0, 0, 0)$ , alors la loi  $\Theta_\infty$  est l'image de la loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$  par toute isométrie qui envoie le point  $(1, 0, 0, 0)$  sur  $\dot{\xi}_0$ .

### 2.2.2 Une hypersurface asymptotique

Dans le chapitre I, nous avons rappelé que, dans le cas de la diffusion de Dudley *i.e.* lorsque l'espace de Robertson-Walker envisagé est l'espace de Minkowski, Bailleul a montré dans [Bai08a] que non seulement les trajectoires de la diffusion s'en vont à l'infini dans une direction privilégiée aléatoire  $\Theta_\infty$ , mais qu'elles convergent vers un hyperplan asymptotique aléatoire. Les deux

informations (angle limite, hyperplan limite) peuvent en fait être résumées en une seule en disant que lorsque  $s$  tend l'infini, la trajectoire  $\xi_s = (t_s, x_s)$  de la diffusion de Dudley converge presque sûrement vers un point de la frontière causale de l'espace de Minkowski (voir [Bai08a]) évoquée dans le paragraphe 4.2 du chapitre III. Nous montrons que la situation est tout à fait analogue dans le cas plus général d'un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, lorsque l'expansion est lente ou l'effondrement est rapide. Pour préciser nos résultats, rappelons que d'après la proposition III.7, dans le cas d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}$  dont la fibre est euclidienne, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T \leq +\infty$ , la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  correspondant aux trajectoires orientées vers le futur est un cône de base  $\mathbb{S}^2$ , qui peut être paramétré par un couple de coordonnées  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Une courbe  $\xi_s = (t_s, x_s)$  orientée vers le futur dans  $\mathcal{M}$  converge vers un point  $(\delta_\infty, \Theta_\infty)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+$  lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si  $|x_s|$  tend vers l'infini,  $\theta_s = x_s/|x_s|$  converge vers  $\Theta_\infty$  et

$$-\int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} + \langle x_s, \Theta_\infty \rangle \longrightarrow \delta_\infty.$$

En particulier, les géodésiques de lumière orientées vers le futur convergent vers des points de la frontière causale. Le dernier point concernant la convergence de la fonctionnelle de  $t_s$  et  $x_s$  vers  $\delta_\infty$  revient à dire la trajectoire  $(t_s, x_s)$  converge vers l'hypersurface asymptotique :

$$\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty) := \left\{ \xi = (t, x) \in \mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3, \int_{t_0}^t \frac{du}{\alpha(u)} - \langle x, \Theta_\infty \rangle = \delta_\infty \right\}.$$

Si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  désigne la diffusion relativiste dans  $\mathcal{M}$  et si  $\Theta_\infty$  désigne la limite lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  du processus  $\theta_s = x_s/|x_s|$ , nous montrons ici que le processus

$$\delta_s := \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} - \langle x_s, \Theta_\infty \rangle$$

converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $\delta_\infty$  et donc que la diffusion converge vers un point aléatoire de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .

**Proposition VI.12** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.11. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $(\delta_s, \theta_s)$  converge presque sûrement vers un point aléatoire  $(\delta_\infty, \Theta_\infty)$  de la frontière  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .*

*Démonstration.* Sans perdre en généralité, on peut supposer que  $x_0 = 0$ . Pour tout  $s$  strictement inférieur à  $\tau$ , on a alors

$$x_s = \int_0^s \dot{x}_u du = \int_0^s \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du.$$



D'après l'étude de la diffusion temporelle, dans un univers éternel où l'expansion est lente, ou dans un univers mortel où l'expansion est rapide, l'intégrale  $\int_0^s du/(a_u + \sqrt{a_u^2 + \alpha^2(t_u)})$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Pour conclure, il suffit de montrer que le second terme du membre de droite dans (VI.17), converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est un mouvement brownien sphérique changé de temps. Il existe un mouvement brownien standard  $W$  de dimension trois tel que

$$d\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -\sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}/|\dot{x}|},$$

avec

$$dM_s^{\dot{x}/|\dot{x}|} = \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times \left( dW_s - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \times \left\langle \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, dW_s \right\rangle \right).$$

En intégrant cette équation entre  $s$  et  $\tau$ , il vient

$$\begin{aligned} \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} &= -\sigma^2 \int_s^\tau \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} du \\ &\quad - \sigma \int_s^\tau \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \times \left( dW_u - \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \times \left\langle \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}, dW_u \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

puis en faisant le produit scalaire avec  $\Theta_\infty$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, \Theta_\infty \right\rangle &= -\sigma^2 \int_s^\tau \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \left\langle \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}, \Theta_\infty \right\rangle du \\ &\quad - \sigma \int_s^\tau \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \left\langle \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, \Theta_\infty \right\rangle \left\langle \Theta_\infty, dW_u \right\rangle \\ &\quad - \sigma \int_s^\tau \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \left\langle \Theta_\infty, \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \right\rangle \left\langle \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} - \Theta_\infty, dW_u \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

D'après la loi du logarithme itéré, pour tout  $\varepsilon > 0$ , presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\left| \int_s^\tau \frac{\alpha(t_u)}{a_u} \times \left( dW_u - \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|} \times \left\langle \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}, dW_u \right\rangle \right) \right| = o \left( \left[ \int_s^\tau \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du \right]^{1/2-\varepsilon} \right).$$

De l'équation (VI.18), on déduit alors que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\left| \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \right| = o \left( \left[ \int_s^\tau \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du \right]^{1/2-\varepsilon} \right).$$

En injectant cet estimé asymptotique dans l'équation (VI.19) et en appliquant à nouveau la loi du logarithme itéré, on obtient alors que presque sûrement, pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\left| \left\langle \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, \Theta_\infty \right\rangle \right| = o \left( \left[ \int_s^\tau \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du \left( \int_u^\tau \frac{\alpha^2(t_v)}{a_v^2} dv \right)^{1-2\varepsilon} \right]^{1/2-\varepsilon} \right).$$

Comme dans la remarque VI.2, rappelons dans un univers éternel, d'après l'hypothèse 5, lorsque l'expansion est lente, elle est nécessairement polynomiale avec  $H(t) \times t \rightarrow c \leq 1$ . Dès lors, en utilisant les estimés asymptotiques de la proposition V.2 et du corollaire V.3 selon que l'on se trouve dans un univers éternel ou mortel, on conclut alors que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\int_0^s \left\langle \Theta_\infty - \frac{\dot{x}_u}{|\dot{x}_u|}, \Theta_\infty \right\rangle \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du < +\infty,$$

d'où le résultat.  $\square$

### 2.2.3 Asymptotique du moment angulaire

On explicite maintenant le comportement asymptotique du moment angulaire  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T \leq \infty$ . On a vu que dans ce cas,  $x_s / |x_s|$  et  $\dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  convergent vers la même limite  $\Theta_\infty$  lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Le produit vectoriel de ces deux vecteurs converge donc naturellement vers zéro. En revanche, comme  $|x_s|$  tend vers l'infini au voisinage de  $\tau$ , le comportement asymptotique de  $x_s \wedge \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  n'est pas trivial. On rappelle que dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne, le moment angulaire est donné par :

$$x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \rho_s \times \theta_s \wedge \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}.$$

Lorsque l'expansion est lente ou l'effondrement rapide, on a vu que le processus  $\theta_s$  converge presque sûrement vers un point  $\Theta_\infty$  de  $\mathbb{S}^2$ . La convergence du moment angulaire est donc déterminée par la convergence des processus  $\rho_s$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  dont on sait qu'ils convergent ou divergent simultanément (lemme VI.4). Dans les cas qui nous intéressent ici, la question de la convergence de  $\rho_s$  a fait l'objet des propositions VI.5 et VI.6, d'où le résultat. On a donc le résultat suivant.

**Corollaire VI.9** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.11. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a les comportements asymptotiques suivants :*

- si l'univers est mortel, alors  $x_s \wedge \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  et  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  convergent presque sûrement;
- si l'univers est éternel et si le facteur d'expansion vérifie l'encadrement  $0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \times t \leq 1$ , alors  $x_s \wedge \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  et  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  convergent également presque sûrement.

Remarque VI.6 — Dans les cas où  $\rho_s$  est récurrent, les mêmes arguments que ceux de preuve de la proposition VI.10 permettent d'affirmer que  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  décrit asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T_{\Theta_\infty}^1 \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{S}^1$ .

## Récapitulatif du comportement asymptotique dans le cas euclidien

$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$		$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$	
$T = +\infty$		$T < +\infty$	$T = +\infty$
$T < +\infty$	$T = +\infty$	$T < +\infty$	$T = +\infty$
$\alpha$ croiss. poly.	$\alpha$ croiss. expo.		$0 < \lim_{\infty} H(t) \times t \leq 1$
$x_s \rightarrow x_{\infty} \in \mathbb{R}^3$	$x_s \rightarrow x_{\infty} \in \mathbb{R}^3$	$x_s \rightarrow x_{\infty} \in \mathbb{R}^3$	$ x_s  \rightarrow +\infty$ $\theta_s \rightarrow \Theta_{\infty} \in \mathbb{S}^2$
$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s } \rightarrow \Theta_{\infty} \in \mathbb{S}^2$	$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ récurrent	$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s } \rightarrow \Theta_{\infty} \in \mathbb{S}^2$	$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s } \rightarrow \Theta_{\infty} \in \mathbb{S}^2$
$x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ conv.	$x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ div.	$x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ conv.	$x_s \wedge \frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ conv.
$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ div.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.
			$\delta_s \rightarrow \delta_{\infty}$ conv.

### 3 ASYMPTOTIQUE LORSQUE LA FIBRE EST HYPERBOLIQUE

Nous explicitons maintenant le comportement asymptotique des composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s)$  de la diffusion de Franchi et Le Jan  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est hyperbolique. Comme dans le cas euclidien, on distingue les cas selon que l'inverse du facteur d'expansion est intégrable ou non au voisinage de  $T \leq +\infty$ . Suivant les situations envisagées, nous munirons la fibre  $\mathbb{H}^3$  des coordonnées euclidiennes héritées de  $\mathbb{R}^{1,3}$  ou encore des coordonnées polaires :

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (\cosh(\chi), \sinh(\chi) \times \theta) = (\sqrt{1+r^2}, r \times \theta).$$

Comme la première composante  $x^0 = \cosh(\chi) = \sqrt{1+r^2}$  de  $x$  est entièrement déterminée par les composantes  $x^i = r \times \theta^i$  pour  $i = 1, 2, 3$ , nous nous concentrerons essentiellement sur la description du comportement asymptotique de composantes à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$x_s^I = (x_s^1, x_s^2, x_s^3), \quad \text{et} \quad \dot{x}_s^I = (\dot{x}_s^1, \dot{x}_s^2, \dot{x}_s^3).$$

#### 3.1 Cas d'une expansion rapide – effondrement lent

Commençons par étudier les composantes spatiales de la diffusion dans le cas d'un univers éternel où l'expansion est rapide ou dans le cas d'un univers mortel où l'expansion est lente.

##### 3.1.1 Convergence des trajectoires dans la fibre

On montre tout d'abord que lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable, les trajectoires de la diffusion convergent dans  $\mathbb{H}^3$ .

**Proposition VI.13** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{H}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est rapide ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le vecteur  $x_s$  converge un vecteur aléatoire  $x_\infty$  appartenant à  $\mathbb{H}^3$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu dans la proposition VI.1 que sous les hypothèses de l'énoncé, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $r_s = |x_s^I|$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $r_\infty$ . Quitte à choisir  $r_0$  assez grand, on peut supposer que  $r_\infty > 0$  p.s. D'après la relation de pseudo-norme

(IV.17), pour  $s < \tau$ , on a la majoration  $r_s |\dot{\theta}_s| \leq a_s / \alpha^2(t_s)$ . Pour  $s > s_0$  assez grand, on en déduit que

$$|\theta_s - \theta_{s_0}| \leq \int_{s_0}^s |\dot{\theta}_u| du \leq \frac{2}{r_\infty} \int_{s_0}^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \leq \frac{2}{r_\infty} \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, la dernière intégrale est convergente, ainsi que la variation totale de  $\theta_s$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire VI.10** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.13. Soit  $\mathfrak{x}$  un point de  $\mathbb{H}^3$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif arbitrairement petit, on a alors  $\mathbb{P}(|x_\infty - \mathfrak{x}| \leq \varepsilon) = 1$ , pourvu que  $x_0$  soit suffisamment proche de  $\mathfrak{x}$  et  $t_0$  dans un voisinage assez petit de  $T$ .*

Comme dans le cas euclidien, en choisissant convenablement l'origine du système de coordonnées sur  $\mathbb{H}^3$ , on peut préciser la loi de la variable angulaire limite.

**Corollaire VI.11** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.13. On choisit le système de coordonnées sur  $\mathbb{H}^3$  de sorte que  $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus angulaire  $\theta_s$  converge vers une variable aléatoire  $\theta_\infty$  de loi uniforme sur  $\mathbb{S}^2$ .*

*Démonstration.* Le générateur infinitésimal de la diffusion relativiste est invariant sous l'action des isométries de  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{H}^3$ . En particulier, il est invariant sous l'action des isométries qui agissent trivialement sur la base  $I$  et qui fixent le premier vecteur de base dans  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ , i.e. les rotations de  $\mathbb{R}^3$ . Lorsque  $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ , la loi de la limite  $\theta_\infty$  dans  $\mathbb{S}^2$  est donc invariante sous l'action des rotations : c'est la loi uniforme sur la sphère.  $\square$

### 3.1.2 Asymptotique du vecteur dérivé normalisé

Nous donnons maintenant des conditions assurant la convergence / divergence du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , dans un espace de Robertson-Walker de fibre hyperbolique lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de  $T$ . On rappelle que dans le cas hyperbolique,  $\dot{x}_s / |\dot{x}_s|$  s'exprime en coordonnées polaires comme

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = \left( \frac{c_s}{a_s} \times r_s, \frac{c_s}{a_s} \times \sqrt{1 + r_s^2} \times \theta_s + \frac{\rho_s}{r_s} \times \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|} \right).$$

On sait déjà que lorsque l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent, les processus  $r_s$  et  $\theta_s$  convergent presque sûrement. Lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le

vecteur  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge donc si et seulement si les processus  $\rho_s$  et  $\dot{\theta}_s/|\dot{\theta}_s|$  sont eux-mêmes convergents. D'après le lemme VI.4, ces processus sont de même nature et d'après la proposition VI.2 ils convergent presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale  $C_s$  est convergente. Autrement dit, comme dans le cas euclidien, le vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un point de  $T^1\mathbb{H}^3$  lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale  $C_s$  est elle-même presque sûrement convergente. D'après les corollaires VI.2 et VI.1, on sait que  $\rho_s$  converge dans un univers mortel, et dans un univers éternel,  $\rho_s$  converge lorsque l'expansion est polynomiale et diverge lorsque l'expansion est exponentielle. On a donc la proposition :

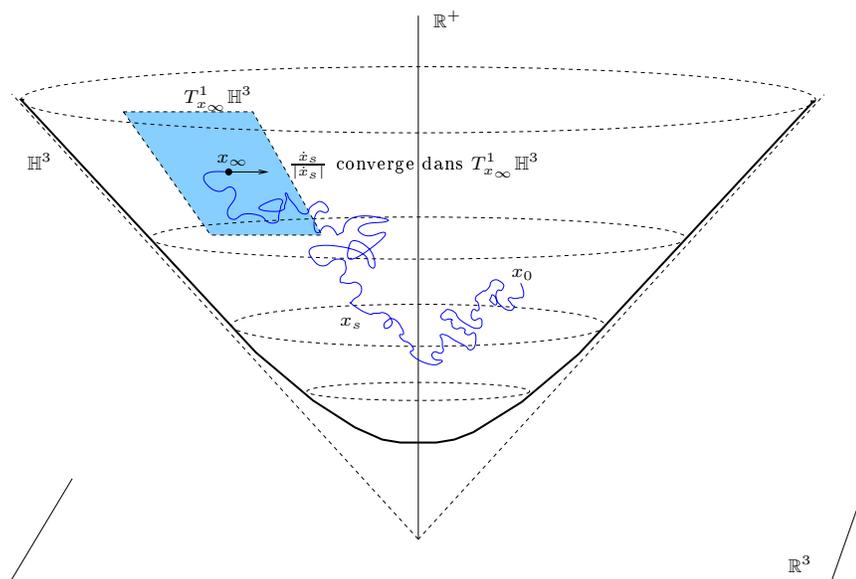


FIGURE 39: Trajectoire typique de la projection  $x_s$  dans  $\mathbb{H}^3$  dans un univers mortel où l'effondrement est lent ou dans un univers éternel où l'expansion est polynomiale.

**Proposition VI.14** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.13. Alors, le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est le suivant :*

- si l'univers est mortel, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , vers un point de  $T^1_{x_\infty}\mathbb{H}^3$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers un point de  $T^1_{x_\infty}\mathbb{H}^3$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est divergent : asymptotiquement, il décrit un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T^1_{x_\infty}\mathbb{H}^3$ .

La preuve du dernier point concernant le comportement asymptotiquement brownien de  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  découle de la proposition suivante dont la preuve présente de nombreuses similitudes avec celle de la proposition VI.10. :

**Proposition VI.15** — Soit  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{H}^3$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables, et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que  $C_s = \int^s \alpha^2(t_u) du / a_u^2$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . Alors, presque sûrement

- i) le processus  $x_s$  converge presque sûrement un point  $x_\infty$  dans  $\mathbb{H}^3$  ;
- ii) pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps propre  $s_\varepsilon$  fini presque sûrement et un mouvement brownien sphérique changé de temps  $(\Theta_s^\varepsilon, s \geq s_\varepsilon)$  à valeurs dans  $T_{x_\infty}\mathbb{H}^3 \approx \mathbb{S}^2$  tels que, presque sûrement :

$$\sup_{s \geq s_\varepsilon} \left| \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} - \Theta_s^\varepsilon \right| \leq \varepsilon.$$

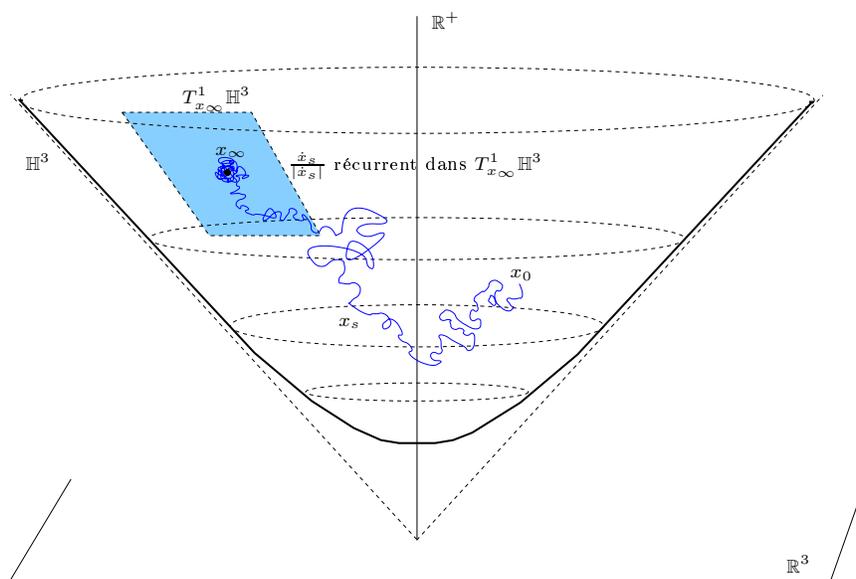


FIGURE 40: Trajectoire typique de la projection  $x_s \in \mathbb{H}^3$  dans un univers éternel où l'expansion est exponentielle.

*Démonstration.* La convergence de  $x_s$  a déjà été obtenue dans la proposition VI.13. Le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est le système (IV.9) du corollaire IV.2. Fixons un repère  $e_0 = (e_0^1, e_0^2, e_0^3)$  (orthonormé pour  $q$ ) de l'espace tangent unitaire  $T_{x_0}^1\mathbb{H}^3$ , et désignons par

$e_s = (e_s^1, e_s^2, e_s^3)$  le repère de  $T_{x_s}^1 \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$  obtenu par transport parallèle (déterministe) le long de la droite hyperbolique reliant  $x_0$  à  $x_s$ . Lorsque  $s$  tend vers l'infini,  $e_s$  converge presque sûrement vers un repère orthonormé de  $T_{x_\infty}^1 \mathbb{H}^3$ . Comme la trajectoire  $x_s$  est de classe  $C^1$ , de variation totale finie, le processus  $e_s$  est aussi de classe  $C^1$ . On note  $\dot{e}_s^i := de_s^i/ds$ . Si  $|\dot{e}_s^i|$  désigne la norme  $\mathbb{L}^1$  de  $\dot{e}_s^i$ , on a alors presque sûrement :

$$\int_0^{+\infty} (|\dot{e}_s^1| + |\dot{e}_s^2| + |\dot{e}_s^3|) ds < +\infty.$$

On note  $u_s^i$  les coordonnées de  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  dans la base  $e_s$  :  $u_s^i := \langle \dot{x}_s/|\dot{x}_s|, e_s^i \rangle$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . Le processus  $u_s = (u_s^1, u_s^2, u_s^3)$  est alors solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$du_s^i = -\sigma^2 \times u_s^i \times \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} ds + \left\langle \frac{\dot{\theta}_s}{|\dot{\theta}_s|}, \dot{e}_s^i \right\rangle ds + dM_s^{u^i}, \quad (\text{VI.20})$$

$$\text{où} \quad d\langle M^{u^i}, M^{u^j} \rangle_s = \sigma^2 (\delta_{ij} - u_s^i u_s^j) \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} ds.$$

On représente les martingales  $M^{u^i}$  à l'aide d'un mouvement brownien euclidien de dimension trois  $W = (W^1, W^2, W^3)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} dM_s^{u^1} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (u_s^3 dW_s^2 + u_s^2 dW_s^3), \\ dM_s^{u^2} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (u_s^3 dW_s^1 - u_s^1 dW_s^3), \\ dM_s^{u^3} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (-u_s^2 dW_s^1 - u_s^1 dW_s^2). \end{aligned}$$

Fixons  $\varepsilon > 0$  et considérons un temps propre  $s_\varepsilon$  assez grand pour que, pour tout  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$\int_s^{+\infty} (|\dot{e}_u^1| + |\dot{e}_u^2| + |\dot{e}_u^3|) du \leq \varepsilon^2 / (4 \times 36) \quad \text{et} \quad \sup_{s \geq s_\varepsilon} \sum_{i=1}^3 |e_s^i - e_\infty^i| \leq \varepsilon/2. \quad (\text{VI.21})$$

Considérons alors le processus  $v_s = (v_s^1, v_s^2, v_s^3)$  issu de  $u_{s_\varepsilon} = (u_{s_\varepsilon}^1, u_{s_\varepsilon}^2, u_{s_\varepsilon}^3)$  et solution de l'équation suivante pour  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$dv_s^i = -\sigma^2 \times v_s^i \times \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} ds + dM_s^{v^i}$$

où

$$\begin{aligned} dM_s^{v^1} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (v_s^3 dW_s^2 + v_s^2 dW_s^3), \\ dM_s^{v^2} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (v_s^3 dW_s^1 - v_s^1 dW_s^3), \\ dM_s^{v^3} &= \sigma \times \frac{\alpha(t_s)}{a_s} \times (-v_s^2 dW_s^1 - v_s^1 dW_s^2). \end{aligned}$$

Les processus  $v_s^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont les coordonnées d'un mouvement brownien sphérique dans  $\mathbb{S}^2$ , paramétré l'horloge  $s' := \sigma^2 \int^s (\alpha^2(t_u)/a_u^2) du$  qui, sous les hypothèses de l'énoncé, tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . Par ailleurs, un calcul direct montre que  $|u_s - v_s|^2 := |u_s^1 - v_s^1|^2 + |u_s^2 - v_s^2|^2 + |u_s^3 - v_s^3|^2$  vérifie l'équation suivante, pour  $s \geq s_\varepsilon$  :

$$d|u_s - v_s|^2 = 2 \sum_{i=1}^3 (u_s^i - v_s^i) \left\langle \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|}, e_s^i \right\rangle ds, \tag{VI.22}$$

D'après (VI.21), pour  $s \geq s_\varepsilon$ , on a alors presque sûrement

$$|u_s - v_s|^2 \leq \varepsilon^2/36, \text{ en particulier } |u_s^i - v_s^i| \leq \varepsilon/6 \text{ pour } i = 1, 2, 3.$$

Introduisons le processus  $\Theta_s^\varepsilon$  défini pour  $s \geq s_\varepsilon$  par  $\Theta_s^\varepsilon := \sum_{i=1}^3 v_s^i e_\infty^i$ . C'est un mouvement brownien sphérique dans l'espace tangent unitaire  $T_{\theta_\infty}^1 \mathbb{H}^3 \approx \mathbb{S}^2$ , paramétré par l'horloge  $\sigma^2 \int_{s_\varepsilon}^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du$ , horloge qui tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . D'après les estimés précédents, pour tout  $s \geq s_\varepsilon$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} - \Theta_s^\varepsilon \right| &= \left| \sum_{i=1}^3 u_s^i e_s^i - \sum_{i=1}^3 v_s^i e_\infty^i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^3 (u_s^i - v_s^i) e_\infty^i + \sum_{i=1}^3 v_s^i (e_s^i - e_\infty^i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^3 |u_s^i - v_s^i| + \sum_{i=1}^3 |e_s^i - e_\infty^i| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Par les mêmes arguments que dans le cas euclidien, on déduit les comportements asymptotiques suivants pour le moment angulaire  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$ .

**Corollaire VI.12** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.13. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le comportement asymptotique du moment angulaire  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  est le suivant :*

- si l'univers est mortel, alors  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un vecteur non nul dans  $\mathbb{R}^3$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale, alors  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers un vecteur non nul dans  $\mathbb{R}^3$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  est divergent.

## 3.2 Cas d'une expansion lente – effondrement rapide

Passons maintenant à l'étude des composantes spatiales de la diffusion de Franchi et Le Jan dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est hyperbolique, lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ . Nous montrons que comportement asymptotique des composantes  $x_s^I$  et  $\dot{x}_s^I$  est tout à fait semblable à celui des composantes spatiales dans le cas euclidien.

### 3.2.1 Divergence dans une direction privilégiée

D'après l'étude de la diffusion radiale, on sait déjà que lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T$ , le processus  $x_s$  et  $x_s^I$  sont transitoires au sens où  $r_s = |x_s^I|$  tend vers l'infini lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Comme dans le cas euclidien, nous montrons ici que  $x_s^I$  tend vers l'infini dans une direction privilégiée, autrement dit le processus  $\theta_s = x_s^I / |x_s^I|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  vers un point  $\theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

**Proposition VI.16** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{H}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est lente ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $\theta_s = x_s^I / |x_s^I|$  converge presque sûrement, vers un point  $\theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

*Démonstration.* On rappelle que par définition  $\rho_s = \alpha^2(t_s)r_s^2|\dot{\theta}_s|/a_s$ . Pour tout  $s$  strictement inférieur à  $\tau$ , on a

$$|\theta_s - \theta_0| \leq \int_0^s |\dot{\theta}_u| du \leq \int_0^s \frac{\rho_u}{r_u} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u) \times r_u} du.$$

D'après la proposition VI.4 et l'équation (VI.11) de la preuve de la proposition VI.5 dans l'étude de la diffusion radiale en courbure négative, sous les hypothèses de l'énoncé, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a presque sûrement :

$$\frac{c_s}{a_s} \rightarrow 1, \quad \text{donc} \quad \frac{\rho_s}{r_s} \rightarrow 0, \quad \text{et} \quad r_s = \exp \left( \int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du + O(1) \right).$$

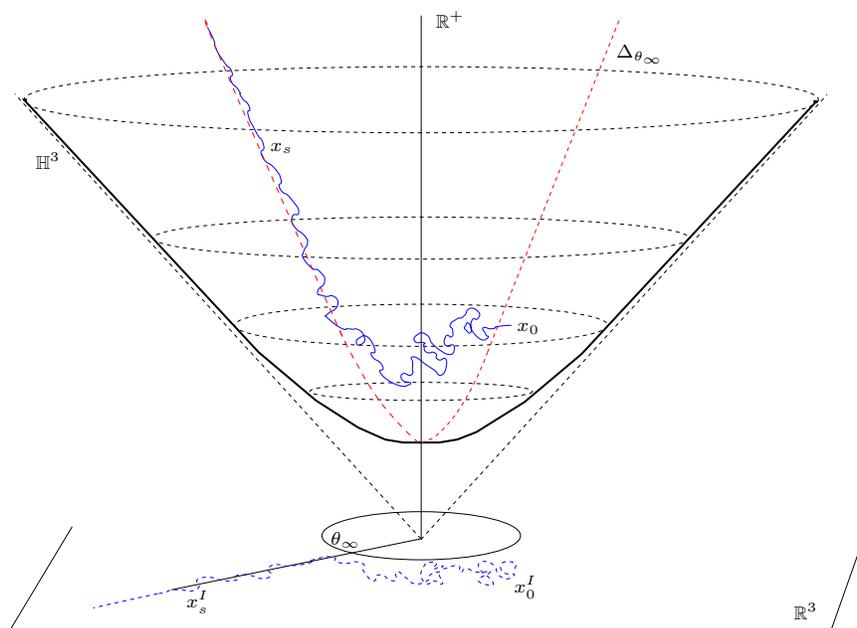


FIGURE 41: Trajectoire typique de la projection  $x_s$  dans  $\mathbb{H}^3$  dans un univers éternel où l'expansion est lente ou dans un univers mortel où l'effondrement est rapide.

On en déduit la majoration suivante, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\int_0^s |\dot{\theta}_u| du \leq O(1) \times \left( 1 + \exp \left( - \int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} \right) \right).$$

Presque sûrement, la variation totale de  $\theta_s$  est finie et lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $\theta_s$  converge donc vers un point  $\theta_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

De l'expression de  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  en coordonnées polaires rappelée au début du paragraphe 3.1.2, on déduit alors le corollaire :

**Corollaire VI.13** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.16. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le produit  $1/r_s \times \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement vers  $(1, \theta_\infty)$ .*

On montre en fait que sous les hypothèses de la proposition VI.16 la composante spatiale  $x_s$  à valeurs dans  $\mathbb{H}^3$  de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  approche, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , une géodésique de lumière de l'espace hyperbolique entièrement déterminée par la limite  $\theta_\infty$  du processus angulaire  $\theta_s$ . Comme précédemment,  $g$  désigne ici la forme bilinéaire minkowskienne et  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  la base canonique dans  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

**Proposition VI.17** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.16. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ ,  $x_s$  converge vers le plan asymptotique  $\Pi(\theta_\infty, 0) := \{x \in \mathbb{H}^3, q(x, \varepsilon_0 + \theta_\infty) = 0\}$ .*

*Démonstration.* On exprime  $x_s^I$  en coordonnées polaires :  $x_s^I = r_s \theta_s = r_s \theta_\infty + r_s(\theta_s - \theta_\infty)$ . En faisant le produit scalaire avec  $\theta_\infty$ , il vient alors  $r_s = \langle x_s^I, \theta_\infty \rangle + r_s \langle (\theta_s - \theta_\infty), \theta_\infty \rangle$ . Or lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a

$$x_s^0 = \sqrt{1 + r_s^2} = r_s + (\sqrt{1 + r_s^2} + r_s)^{-1} = r_s + o(1).$$

Par ailleurs, comme dans le début de la preuve de la proposition VI.16, on montre que lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a aussi

$$|\theta_s - \theta_\infty| = o\left(\exp\left(-\int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}\right)\right).$$

Comme d'après l'équation (VI.11) de la preuve de la proposition VI.5 :

$$r_s = \exp\left(\int^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du + O(1)\right) = \exp\left(\int^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} + O(1)\right),$$

on en déduit que, presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$\begin{aligned} q(x_s, \varepsilon_0 + \theta_\infty) &= -x_s^0 + \langle x_s^I, \theta_\infty \rangle = -r_s + o(1) + \langle x_s^I, \theta_\infty \rangle \\ &= r_s \langle (\theta_s - \theta_\infty), \theta_\infty \rangle + o(1) = o(1). \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Une hypersurface asymptotique

Nous montrons ici que, comme dans le cas euclidien, dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{H}^3$  où l'expansion est lente ou l'effondrement rapide, si  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est la diffusion relativiste dans  $T^1\mathcal{M}$ , alors la trajectoire  $\xi_s \in \mathcal{M}$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  vers un point de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  de  $\mathcal{M}$ . Comme lorsque la fibre est euclidienne, on rappelle que la frontière  $\partial\mathcal{M}_c^+$  s'identifie à un cône de base  $\mathbb{S}^2$ , que l'on peut paramétrer par un couple  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ . Une courbe orientée vers le futur  $\xi_s = (t_s, x_s) = (t_s, r_s, \theta_s)$  dans  $\mathcal{M}$  converge vers un point  $(\delta_\infty, \Theta_\infty)$  de  $\partial\mathcal{M}_c^+$  si et seulement si  $r_s \rightarrow +\infty$ ,  $\theta_s \rightarrow \Theta_\infty$  et

$$\delta_s = -\int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} + \operatorname{argsh}(r_s) \rightarrow \delta_\infty.$$

**Proposition VI.18** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.16. Alors presque sûrement, le processus  $\xi = (t_s, x_s)$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  converge vers un point  $(\delta_\infty, \Theta_\infty)$  de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .*

*Démonstration.* Le seul point à vérifier est la convergence du processus  $\delta_s$ . Dans la preuve de la proposition VI.5, nous avons montré que sous les hypothèses de l'énoncé, l'intégrale  $\int_0^s \frac{\rho_u^2}{r_u^2} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du$  est finie presque sûrement. Par ailleurs, par définition du processus  $c_s/a_s$  et d'après la relation de pseudo-norme, on a :

$$\frac{\dot{r}_s}{\sqrt{1+r_s^2}} = \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} - \frac{1}{\sqrt{1-\rho_s^2/r_s^2+1}} \times \frac{\rho_s^2}{r_s^2} \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)}.$$

En intégrant, on obtient alors que, pour  $s \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}(r_s) - \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)} &= \operatorname{argsh}(r_0) - \int_0^s \frac{du}{a_u + \sqrt{a_u^2 + \alpha^2(t_u)}} \\ &\quad - \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-\rho_u^2/r_u^2+1}} \times \frac{\rho_u^2}{r_u^2} \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)}. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales convergent presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , d'où le résultat.  $\square$

Autrement dit, le comportement asymptotique de la diffusion relativiste dans le cas hyperbolique est tout à fait semblable à celui du cas euclidien, du moins si on observe la fibre  $\mathbb{H}^3$  à une échelle logarithmique. Ainsi, comme le processus  $(t_s, x_s)$  dans le cas euclidien, le processus  $(t_s, X_s)$  où  $X_s = (\operatorname{argsh}(\sqrt{r_s^2+1}), \operatorname{argsh}(r_s)\theta_s)$  converge dans le cas hyperbolique vers une hypersurface aléatoire.

### 3.2.3 Asymptotique du moment angulaire

Pour conclure cette section, nous déterminons le comportement asymptotique du moment angulaire  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable au voisinage de  $T \leq \infty$ . On a vu que dans ce cas,  $\theta_s = x_s^I / |x_s^I|$  et  $1/r_s \times \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  convergent vers la même limite  $\theta_\infty$  lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Le produit vectoriel de ces deux vecteurs converge donc naturellement vers zéro. En revanche, comme  $r_s = |x_s^I|$  tend vers l'infini au voisinage de  $\tau$ , le comportement asymptotique de  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  n'est pas trivial. On rappelle que  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s| = \rho_s \times \theta_s \wedge \dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$ . D'après le lemme VI.4 et la proposition VI.2, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , les processus  $\rho_s$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  et donc  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  sont de même nature. Les propositions VI.5 et VI.6 établies dans l'étude de la diffusion radiale en courbure négative ou nulle permettent ainsi de montrer le résultat suivant :

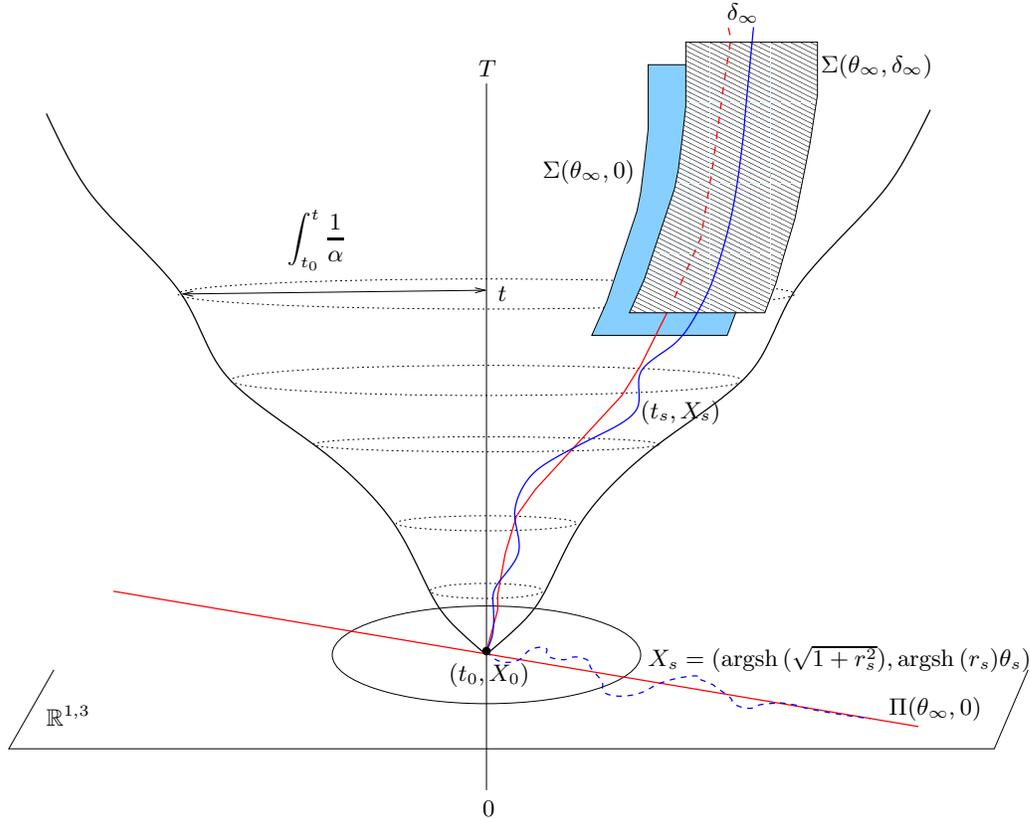


FIGURE 42: Parallèle avec le cas euclidien.

**Corollaire VI.14** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.16. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , les processus  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  présentent les comportements asymptotiques suivants :*

- *si l'univers est mortel, alors  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  convergent presque sûrement si et seulement si*

$$J(\alpha) := \int^T a^3(u) \exp\left(2 \int^u \frac{dv}{\alpha(v)}\right) du < +\infty ;$$

- *si l'univers est éternel et  $\lim_{\infty} H(t) \times t < 1$ , alors  $x_s^I \wedge \dot{x}_s^I / |\dot{x}_s|$  et  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  divergent presque sûrement.*

**Remarque VI.7** — Les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition VI.10 montrent que, lorsque  $\dot{\theta}_s / |\dot{\theta}_s|$  est divergent, il décrit asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T_{\theta_{\infty}}^1 \mathbb{S}^2$ .

### Récapitulatif du comportement asymptotique dans le cas hyperbolique

$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$			$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$		
$T = +\infty$		$T < +\infty$	$T = +\infty$	$T < +\infty$	
$\alpha$ croiss. poly	$\alpha$ croiss. expo.		$\lim_{\infty} H(t) \times t < 1$	$J(\alpha) < +\infty$	$J(\alpha) < +\infty$
$x_s$ conv.	$x_s$ conv.	$x_s$ conv.	$r_s \rightarrow +\infty$ $\theta_s$ conv.	$r_s \rightarrow +\infty$ $\theta_s$ conv.	$r_s \rightarrow +\infty$ $\theta_s$ conv.
$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ conv.	$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ div.	$\frac{\dot{x}_s}{ \dot{x}_s }$ conv.	$\frac{1}{r_s} \times \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.	$\frac{1}{r_s} \times \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.	$\frac{1}{r_s} \times \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.
$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.	$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ div.	$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.	$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ div.	$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ conv.	$x_s^I \wedge \frac{\dot{x}_s^I}{ \dot{x}_s^I }$ div.
$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ div.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ div.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ conv.	$\frac{\dot{\theta}_s}{ \dot{\theta}_s }$ div.
			$x_s \rightarrow \Pi(\theta_{\infty}, 0)$	$x_s \rightarrow \Pi(\theta_{\infty}, 0)$	$x_s \rightarrow \Pi(\theta_{\infty}, 0)$

## 4 ASYMPTOTIQUE LORSQUE LA FIBRE EST SPHÉRIQUE

Dans cette section, nous explicitons le comportement asymptotique des composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s)$  de la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  dans un espace de Robertson-Walker dont la fibre est sphérique. Encore une fois, on distingue les cas selon que l'inverse du facteur d'expansion est intégrable ou non au voisinage de  $T \leq +\infty$ .

### 4.1 Cas d'une expansion rapide – effondrement lent

Commençons par traiter le cas d'un univers éternel où l'expansion est rapide ou d'un univers mortel où l'effondrement est lent. Nous montrons que dans ces deux cas, la composante  $x_s$  de  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  converge vers un point de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Comme dans les cas euclidien et hyperbolique, lorsque l'univers est éternel, le comportement asymptotique du vecteur tangent  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est déterminé par la vitesse de divergence du facteur d'expansion.

#### 4.1.1 Convergence des trajectoires dans la fibre

De la même façon que dans le cas des géodésiques lumière étudiées au chapitre II, on montre que lorsque l'inverse du facteur d'expansion est intégrable, les trajectoires de la diffusion relativiste convergent dans  $\mathbb{S}^3$ .

**Proposition VI.19** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est rapide ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le vecteur  $x_s$  converge un point  $x_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^3$ .*

*Démonstration.* La preuve est la même que dans le cas euclidien. D'après la relation de pseudo-norme (IV.17), pour  $s < \tau$ , on a l'égalité  $|\dot{x}_s|^2 = g^M(\dot{x}_s, \dot{x}_s) = a_s^2/\alpha^4(t_s)$ . On en déduit que

$$|x_s - x_0| \leq \int_0^s |\dot{x}_u| du = \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \leq \int_{t_0}^{t_s} \frac{du}{\alpha(u)}.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé, la dernière intégrale est convergente, ainsi que la variation totale de  $x_s$ , d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire VI.15** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VI.19. Soient  $\mathfrak{x}$  un point de  $\mathbb{S}^3$  et  $\varepsilon > 0$ . On a alors  $\mathbb{P}(|x_\infty - \mathfrak{x}| \leq \varepsilon) = 1$ , pourvu que  $x_0$  soit suffisamment proche de  $\mathfrak{x}$  et  $t_0$  dans un voisinage assez petit de  $T$ .*

### 4.1.2 Asymptotique du vecteur dérivé normalisé

On précise maintenant le comportement du vecteur dérivé normalisé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  lorsque  $x_s$  converge vers  $x_\infty$ . Il est tout à fait semblable à celui observé dans les cas euclidien et hyperbolique :  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  si et seulement si l'intégrale  $C_s$  est elle-même convergente. Grâce aux corollaires VI.1 et VI.1, on en déduit la proposition suivante :

**Proposition VI.20** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est rapide ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  présente les comportements asymptotiques suivants :*

- si l'univers est mortel, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est polynomiale, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini, vers un point  $\Theta_\infty$  de la sphère  $T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$  ;
- si l'univers est éternel et l'expansion est exponentielle, alors le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est divergent : asymptotiquement il décrit un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T^1_{x_\infty}\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$ .

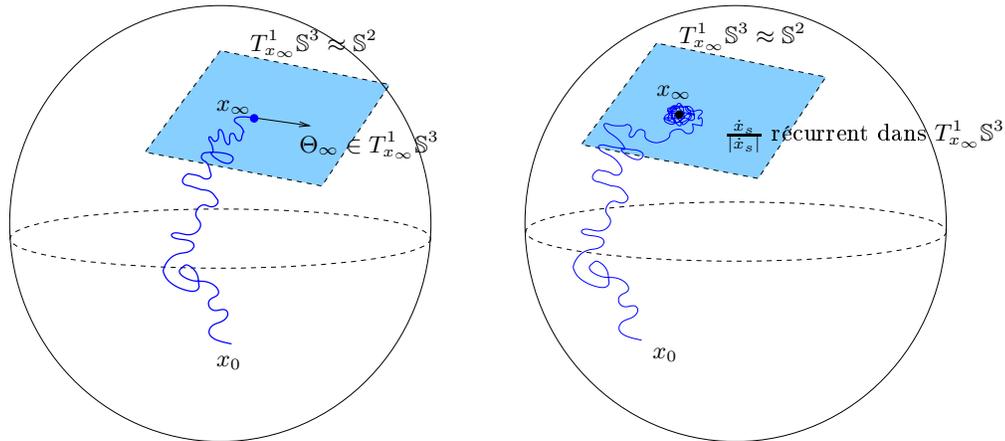


FIGURE 43: À gauche : trajectoire typique de la projection  $x_s$  dans  $\mathbb{S}^3$  dans un univers mortel où l'effondrement est lent ou dans un univers éternel où l'expansion est rapide et polynomiale. À droite, trajectoire typique dans un univers éternel où l'expansion est exponentielle.

En adaptant les arguments de la preuve de la proposition VI.15 au cadre sphérique (on transporte parallèlement le repère  $e_s$  le long d'un arc de grand cercle, les autres arguments se transposent tels quels), on montre en effet :

**Proposition VI.21** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables, et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . On suppose que l'intégrale  $C_s$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . Alors, presque sûrement pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps propre  $s_\varepsilon$  fini presque sûrement et un mouvement brownien sphérique changé de temps  $(\Theta_s^\varepsilon, s \geq s_\varepsilon)$  à valeurs dans  $T_{x_\infty} \mathbb{S}^3 \approx \mathbb{S}^2$  tels que, presque sûrement :*

$$\sup_{s \geq s_\varepsilon} \left| \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} - \Theta_s^\varepsilon \right| \leq \varepsilon.$$

## 4.2 Cas d'une expansion lente – effondrement rapide

Nous passons maintenant à la description du comportement asymptotique des composantes spatiales de la diffusion de Franchi et Le Jan dans le seul cas qu'il nous reste à envisager, celui d'un espace de Robertson-Walker dont la fibre est sphérique lorsque l'inverse du facteur d'expansion n'est pas intégrable. Dans ce dernier cas, le comportement asymptotique de la diffusion est à nouveau semblable à celui des géodésiques de lumière. On montre en effet qu'asymptotiquement les processus  $x_s$  et  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrivent un grand cercle aléatoire sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

**Proposition VI.22** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker. On suppose que  $\mathcal{M}$  est éternel et que l'expansion est lente ou que  $\mathcal{M}$  est mortel et l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, il existe deux vecteurs orthogonaux aléatoires  $U_\infty$  et  $V_\infty$  sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  tels que, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , les vecteurs  $x_s$  et  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  vérifient :*

$$x_s = \cos \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) U_\infty + \sin \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) V_\infty + o(1),$$

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -\sin \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) U_\infty + \cos \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) V_\infty + o(1).$$

*Démonstration.* Le système d'équations différentielles stochastiques (IV.12) qui régit l'évolution du couple  $(x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  peut être interprété comme une

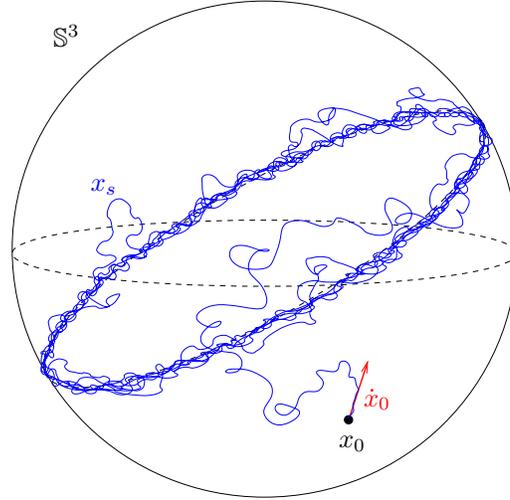


FIGURE 44: Trajectoire typique de la projection  $x_s$  dans  $\mathbb{S}^3$  dans le cas d'un univers éternel lorsque l'expansion est lente ou dans le cas d'un univers mortel lorsque l'effondrement est rapide.

perturbation aléatoire de l'oscillateur harmonique classique. En effet, ce système peut se mettre sous la forme :

$$dx_s = \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} ds, \quad d\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -x_s \times \frac{a_s}{\alpha^2(t_s)} ds + d\eta_s,$$

avec

$$d\eta_s := -\sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} \times \frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} ds + dM_s^{\dot{x}/|\dot{x}|},$$

où pour  $\mu, \nu$  dans  $\{0, 1, 2, 3\}$  :

$$d\langle M^{\dot{x}^\mu/|\dot{x}|}, M^{\dot{x}^\nu/|\dot{x}|} \rangle_s = \sigma^2 \frac{\alpha^2(t_s)}{a_s^2} \left( \delta_{\mu\nu} - x_s^\mu x_s^\nu - \frac{\dot{x}_s^\mu}{|\dot{x}_s|} \frac{\dot{x}_s^\nu}{|\dot{x}_s|} \right) ds.$$

Sous cette forme, le système (IV.12) apparaît comme un oscillateur harmonique, perturbé par le terme  $d\eta_s$ , et changé de temps via le changement de temps  $ds' = a_s ds / \alpha^2(t_s)$ . Pour alléger les notations, posons  $y_s := \dot{x}_s / |\dot{x}_s|$ ,  $z_s := x_s + iy_s$  et  $A_s := \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du$ . Le processus  $z_s$  est alors solution de l'équation

$$dz_s = -i z_s dA_s + id\eta_s.$$

On en déduit que pour tout  $0 \leq s < \tau$  :

$$z_s = z_0 e^{-iA_s} + i e^{-iA_s} I_s, \quad \text{où } I_s := \int_0^s e^{iA_u} d\eta_u. \quad (\text{VI.23})$$

L'intégrale  $I_s$  se décompose en la somme  $I_s = J_s + K_s$  où

$$J_s := -\sigma^2 \int_0^s e^{iA_u} \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} \times y_u du, \quad K_s := \int_0^s e^{iA_u} dM_u^{\dot{x}/|\dot{x}|}.$$

Sous les hypothèses de l'énoncé (rappelons que lorsque l'expansion est lente, elle est implicitement polynomiale d'après l'hypothèse 5), d'après la proposition V.4 et le lemme V.9, l'horloge  $C_s = \int_0^s \frac{\alpha^2(t_u)}{a_u^2} du$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . On en déduit que la variation totale du processus  $J_s$  et le crochet de la martingale  $K_s$  convergent presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . Par suite, les processus  $J_s$ ,  $K_s$  et  $I_s$  convergent presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ . On note  $I_\infty$  la limite presque sûre de l'intégrale  $I_s$ . D'après l'équation (VI.23), lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , on a alors :

$$z_s = (z_0 + iI_\infty) e^{-iA_s} - ie^{-iA_s} (I_\infty - I_s) = (z_0 + iI_\infty) e^{-iA_s} + o(1).$$

Autrement dit, en posant  $U_\infty := x_0 - \Im(I_\infty)$  et  $V_\infty := y_0 + \Re(I_\infty)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_\infty &= x_0 - \int_0^{+\infty} \sin \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) d\eta_s, \\ V_\infty &= y_0 + \int_0^{+\infty} \cos \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) d\eta_s, \end{aligned}$$

on obtient que presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$  :

$$x_s = \cos \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) U_\infty + \sin \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) V_\infty + o(1),$$

$$\frac{\dot{x}_s}{|\dot{x}_s|} = -\sin \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) U_\infty + \cos \left( \int_0^s \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du \right) V_\infty + o(1).$$

Nécessairement, on a alors  $|U_\infty| = |V_\infty| = 1$  et  $\langle U_\infty, V_\infty \rangle = 0$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarque VI.8** — Ici encore, on vérifie donc que le comportement asymptotique de la diffusion relativiste est celui d'une géodésique de lumière puisque la conclusion de la proposition VI.22 est la même que celle du corollaire III.5 dans le cas déterministe. Par ailleurs, au regard de la proposition III.7, la proposition VI.22 va dans le même sens que les propositions VI.12 et VI.18 dans les cas euclidien et hyperbolique, qui affirment que la diffusion converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , vers un point de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$ .

## 5 RÉCAPITULATIF DE NOS RÉSULTATS

### 5.1 Convergence vers la frontière causale

Dans tous les cas d'espaces de Robertson-Walker envisageables, qu'ils soient mortels ou éternels, que l'expansion ou l'effondrement soit rapide ou lent(e) et que la fibre soit euclidienne, hyperbolique ou sphérique, nous avons montré dans ce chapitre que le comportement asymptotique des trajectoires du processus  $\xi_s$  de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  relativiste est semblable à celui des géodésiques de lumière décrit au chapitre III. Notre étude vient donc conforter, sur une large classe d'exemples de variétés lorentziennes, le premier point de la conjecture de Franchi et Le Jan énoncée au chapitre I, à savoir que sur une variété lorentzienne générale, la diffusion approche asymptotiquement une géodésique de lumière aléatoire.

Par ailleurs, dans les propositions VI.12, VI.18 et VI.22, nous avons vu que dans un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_\alpha M$  où l'expansion est lente ou l'effondrement est rapide, le processus  $\xi_s$  converge vers un point aléatoire de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  de  $\mathcal{M}$ . D'après les propositions VI.7, VI.13 et VI.19, c'est aussi le cas lorsque l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent puisque d'après la proposition III.7, la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  est alors simplement composée d'une copie de la fibre  $M$ . On peut donc résumer nos résultats concernant le comportement asymptotique de  $\xi_s$  dans le théorème suivant, analogue parfait de la proposition III.8 dans le cas géodésique :

**Théorème VI.1** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion de Franchi et Le Jan issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $\xi_s$  converge vers un point aléatoire de la frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  de  $\mathcal{M}$ .*

La frontière causale  $\partial\mathcal{M}_c^+$  est définie comme une classe d'équivalence de trajectoires causales sur la variété  $\mathcal{M}$ . Dans l'éventualité où l'on parviendrait à montrer que toute l'information asymptotique de la diffusion est portée par le point limite dans  $\partial\mathcal{M}_c^+$ , le théorème ci-dessus viendrait aussi renforcer la conjecture de Franchi et Le Jan qui affirme que la frontière de Poisson de la diffusion est en bijection avec des classes d'équivalence de géodésiques de lumière. Nous verrons au chapitre VIII, au moins sur certains exemples d'espace de Robertson-Walker, que la tribu invariante pour la diffusion est effectivement engendrée par le point limite dans  $\partial\mathcal{M}_c^+$ , donc que la frontière de Poisson de la diffusion s'identifie à la frontière causale.

## 5.2 Comportement asymptotique du vecteur dérivé

Nous résumons à présent nos résultats concernant le processus dérivé  $\dot{\xi}_s$ . On rappelle que  $H(t) := \alpha'(t)/\alpha(t)$  et que dans le cas d'un univers éternel  $H_\infty := \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \geq 0$ .

**Théorème VI.2** (Propositions V.1, V.2 et V.5) — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , on a les comportements asymptotiques suivants :*

- i) si  $T = +\infty$  et l'expansion est exponentielle,  $\dot{t}_s$  est récurrent dans  $]1, +\infty[$  ;
- ii) si  $T = +\infty$  et l'expansion est polynomiale,  $\dot{t}_s$  est transitoire ;
- iii) si  $T < +\infty$ ,  $\dot{t}_s$  est transitoire.

Le théorème suivant précise le comportement asymptotique du vecteur dérivé normalisé à valeurs dans  $T^1M$  dans un univers éternel où l'expansion est rapide ou dans un univers mortel où l'effondrement est lent, c'est-à-dire un espace  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  avec  $T \leq +\infty$  et tel que

$$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty.$$

**Théorème VI.3** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_\alpha M$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est rapide ou l'effondrement est lent. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers le temps  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $x_s$  converge vers un point aléatoire  $x_\infty$  de la fibre  $M$  et le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  vérifie les assertions suivantes :*

- i) si  $T < \infty$  ou si  $T = +\infty$  et l'expansion est polynomiale, alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $\Theta_\infty$  de  $T^1_{x_\infty}M$  ;
- ii) si  $T = +\infty$  et l'expansion est exponentielle, le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit asymptotiquement un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $T^1_{x_\infty}M \approx \mathbb{S}^2$ .

Remarque VI.9 — Dans le dernier cas, que la fibre de l'espace soit euclidienne, hyperbolique ou sphérique, le processus dérivé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit un mouvement brownien sphérique dans l'espace tangent unitaire limite. Le processus ne “voit” donc pas la courbure de la fibre  $M$ . Son comportement asymptotique ne dépend que du facteur d'expansion  $\alpha$ .

On résume enfin le comportement asymptotique du processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  dans un espace  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  tel que  $T \leq +\infty$  et

$$\int^T \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty.$$

**Théorème VI.4** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, T[ \times_{\alpha} M$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est lente ou l'effondrement est rapide. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0) \in T^1\mathcal{M}$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers le temps  $\tau = \inf\{s > 0, t_s = T\}$ , le processus  $x_s$  est divergent et le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  vérifie les assertions suivantes :*

- i) *si  $M = \mathbb{R}^3$ , alors  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $\Theta_{\infty}$  de  $\mathbb{S}^2$  ;*
- ii) *si  $M = \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$ , alors  $|x_s^0|^{-1} \times \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge vers un point  $(1, \Theta_{\infty})$  ;*
- iii) *si  $M = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit asymptotiquement un grand cercle aléatoire dans  $\mathbb{S}^3$ .*

Remarque VI.10 (Sur l'influence de la courbure) — Rappelons qu'en fonction du facteur d'expansion  $\alpha$  et de la courbure  $k \in \{-1, 0, 1\}$  de la fibre  $M$ , la courbure scalaire d'un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  est donnée par la formule :

$$R := -6 \left( \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right) = -6 \left( H'(t) + 2H(t) + \frac{k}{\alpha^2(t)} \right).$$

La courbure  $R$  influe naturellement sur le comportement asymptotique des géodésiques des espaces de Robertson-Walker et par suite sur le comportement asymptotique de la diffusion relativiste. Cependant, le fait que cette courbure soit constante ou non, en particulier qu'elle soit nulle ou non, n'a pas réellement d'influence sur le comportement asymptotique des géodésiques ou de la diffusion. Par exemple, lorsque  $I = ]0, +\infty[$  et  $k = 0$ , le comportement qualitatif des trajectoires est le même que le facteur d'expansion soit nul ou que  $\alpha(t) = t$ . Dans le premier cas, la courbure  $R$  est nulle, pas dans le second. Comme on l'a vu, le paramètre saillant est en fait l'intégrabilité de l'inverse du facteur d'expansion au voisinage de  $T$ . On peut cependant noter que comme le montre le théorème VI.3 ci-dessus, via le comportement asymptotique de la fonction de Hubble  $H$ , la courbure  $R$  a une influence sur le comportement asymptotique du vecteur dérivé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  de la diffusion, influence qui n'apparaît pas dans le cas géodésique.

### 5.3 Sur la convergence vers des géodésiques de lumière

Pour conclure ce chapitre, nous souhaitons ici faire une remarque concernant la convergence des trajectoires de la diffusion relativiste vers des géodésiques de lumière, convergence conjecturée par Franchi et Le Jan dans [FLJ07] sur une variété lorentzienne générale et démontrée dans ce chapitre dans le cas particulier des espaces de Robertson-Walker. Au regard de la construction même du générateur de la diffusion comme perturbation du flot géodésique, le lien entre les trajectoires de la diffusion et celles des géodésiques n'est pas vraiment étonnant.

Par ailleurs, la convergence vers des rayons lumineux se conçoit bien d'un point de vue physique et heuristique si l'on pense aux trajectoires de la diffusion comme décrivant le mouvement perturbé d'une particule qui initialement suit une géodésique. En effet, perturber les accélérations de la particule à tout instant revient à lui donner de l'énergie, et si l'on pense à cette dernière comme une énergie cinétique, la vitesse de la particule tend naturellement vers celle de la lumière.

Nous souhaitons ici donner un argument, également de nature heuristique, mais plus mathématique que le précédent, qui permet à notre avis de mieux appréhender le pourquoi de la convergence des trajectoires de la diffusion vers des géodésiques, et pourquoi des géodésiques de lumière. Pour cela, considérons une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $(m+1)$  munie d'une métrique lorentzienne  $g = g_{\mu\nu}$  de signature  $(-, +, \dots, +)$ . Pour simplifier, supposons que la métrique  $g$  est diagonale. Rappelons que si  $\xi^\mu$  est un système de coordonnées sur  $\mathcal{M}$ , et si  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  désignent les symboles de Christoffel usuels, alors la diffusion de Franchi et Le Jan  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  est définie comme solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} d\xi_s^\mu = \dot{\xi}_s^\mu ds, \\ d\dot{\xi}_s^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(\xi_s) \dot{\xi}_s^\rho \dot{\xi}_s^\nu ds + \frac{m\sigma^2}{2} \dot{\xi}_s^\mu ds + \sigma dM_s^\mu, \end{cases} \quad (\text{VI.24})$$

où la matrice de covariation quadratique des martingales  $M_s^\mu$  est donnée par

$$d\langle M^\mu, M^\nu \rangle_s = \left( \dot{\xi}_s^\mu \dot{\xi}_s^\nu + g^{\mu\nu}(\xi_s) \right) ds.$$

De plus, la diffusion est paramétrée par le temps propre  $s$ , *i.e.* la longueur d'arc. Elle vérifie donc la relation de pseudo-norme :

$$g_{\mu\nu}(\xi_s) \dot{\xi}_s^\mu \dot{\xi}_s^\nu = -1.$$

La métrique  $g_{\mu\nu}$  étant diagonale, une représentation possible pour les martingales  $M_s^\mu$  est la suivante : il existe un mouvement brownien réel standard  $B$  et un mouvement brownien  $W = (W^1, \dots, W^d)$  de dimension  $d$  tels que, pour  $i = 1, \dots, d$  :

$$\begin{aligned} dM_s^0 &= \left( \dot{\xi}_s^0 + \frac{g^{00}(\xi_s)}{\dot{\xi}_s^0} \right) dB_s - \frac{g^{00}(\xi_s)}{\dot{\xi}_s^0} \times \sum_{i=1}^d \sqrt{g_{ii}(\xi_s)} \dot{\xi}_s^i dW_s^i, \\ dM_s^i &= \dot{\xi}_s^i dB_s + \sqrt{g^{ii}(\xi_s)} dW_s^i. \end{aligned}$$

Considérons alors le changement de temps suivant :

$$S_s := \int_0^s \exp \left( \sigma^2 \times \frac{(m-1)}{2} \times u + \sigma B_u \right) du, \text{ d'inverse } S_s^{-1},$$

et notons  $X_s := \xi_{S_s^{-1}}$  la diffusion relativiste changée de temps. Le processus  $X_s$  est maintenant solution du système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dX_s^\mu = \dot{X}_s^\mu ds, \\ d\dot{X}_s^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu(X_s) \dot{X}_s^\nu \dot{X}_s^\rho ds + \sigma dM_s^{X^\mu}, \end{cases} \quad (\text{VI.25})$$

où les martingales  $M_s^{X^\mu}$  sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} M_s^{X^0} &= \int_0^{S_s^{-1}} R_u \times \left( \frac{g^{00}(\xi_u)}{\dot{\xi}_u^0} dB_u - \frac{g^{00}(\xi_u)}{\dot{\xi}_u^0} \times \sum_{i=1}^d \sqrt{g_{ii}(\xi_u)} \dot{\xi}_u^i dW_u^i \right), \\ M_s^{X^i} &= \int_0^{S_s^{-1}} R_u \times \sqrt{g^{ii}(\xi_u)} dW_u^i, \text{ pour } i = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_u := \exp \left( - \left[ \sigma^2 \frac{m-1}{2} S_u^{-1} + \sigma B_{S_u^{-1}} \right] \right).$$

Lorsque les coefficients  $g^{ii}$  de la métrique sont minorés, ces martingales convergent presque sûrement. C'est le cas par exemple pour les espaces de Robertson-Walker éternels de fibre euclidienne vus en coordonnées cartésiennes, en particulier c'est le cas pour l'espace de Minkowski. Autrement dit, sous des hypothèses raisonnables, le système d'équations (VI.25) vérifié par la diffusion changée de temps est le système des équations géodésiques, perturbé par des martingales convergentes. Par ailleurs, d'après la relation de pseudo-norme, on a

$$-g_{\mu\nu}(X_s) \dot{X}_s^\mu \dot{X}_s^\nu = R_s^2 = o(1).$$

*i.e.* la trajectoire  $X_s$  est asymptotiquement une trajectoire de lumière. Ainsi, en changeant leur vitesse de parcours, les trajectoires de la diffusion relativiste apparaissent asymptotiquement comme des trajectoires de lumière, solution des équations géodésiques perturbées par des martingales asymptotiquement négligeables. À notre sens, ceci éclaire la convergence des trajectoires de la diffusion vers des géodésiques de lumière. Par ailleurs, dans l'éventualité où l'on serait capable de montrer un résultat de stabilité du flot géodésique, cette remarque peut fournir un angle d'approche pour établir rigoureusement la convergence des trajectoires de la diffusion vers celles des géodésiques.

Remarque VI.11 — Dans le cas de l'espace de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,3}$ , le processus  $(X_s, \dot{X}_s)$  n'est autre que la diffusion de Dudley changée de temps. Les coefficients de Christoffel étant nuls, le système (VI.25) peut se résoudre explicitement. On montre ainsi que le processus  $\dot{X}_s$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini vers une variable  $\dot{X}_\infty$ , dont la loi est explicite :

$$\begin{aligned} (\dot{X}_\infty^1, \dot{X}_\infty^2, \dot{X}_\infty^3) &= (\dot{X}_0^1, \dot{X}_0^2, \dot{X}_0^3) + \int_0^{+\infty} e^{-\sigma^2 s - \sigma B_s} dW_s, \\ \dot{X}_\infty^0 &= \sqrt{|\dot{X}_\infty^1|^2 + |\dot{X}_\infty^2|^2 + |\dot{X}_\infty^3|^2}. \end{aligned}$$

En particulier, on retrouve sans difficulté la loi de l'angle limite de la diffusion de Dudley évoquée dans le paragraphe 3.1.2 du chapitre I et qui fait l'objet du théorème 18 de [Bai08a] :

$$\Theta_\infty = \frac{(\dot{X}_\infty^1, \dot{X}_\infty^2, \dot{X}_\infty^3)}{|(\dot{X}_\infty^1, \dot{X}_\infty^2, \dot{X}_\infty^3)|}.$$

# La diffusion régénérée dans un univers mortel

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Prolongement de la diffusion . . . . .</b>	<b>274</b>
1.1	Description du prolongement . . . . .	274
1.2	Frontière de l'espace complété . . . . .	275
<b>2</b>	<b>Asymptotique de la diffusion régénérée . . . . .</b>	<b>277</b>
2.1	Lorsque la fibre est euclidienne . . . . .	277
2.2	Lorsque la fibre est hyperbolique . . . . .	279
2.3	Lorsque la fibre est sphérique . . . . .	279

---

Dans la section 4 du chapitre III, nous avons montré que dans un espace de Robertson-Walker mortel  $\mathcal{M}$  où l'effondrement est lent, les géodésiques de lumière incomplètes peuvent être prolongées en des trajectoires bien définies sur tout  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans le chapelet d'espace de Robertson-Walker  $\widehat{\mathcal{M}}$  introduit dans le paragraphe 4.3.1 de ce même chapitre :

$$\widehat{\mathcal{M}} := \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_n \right) / \left( \forall n \in \mathbb{N}, \begin{array}{l} \partial \mathcal{M}_n^+ \equiv \partial \mathcal{M}_{n+1}^- \\ M_n \equiv M_{n+1} \end{array} \right),$$

où l'espace  $\widehat{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_n \cup \partial \mathcal{M}_n$  est le compactifié causal de l'espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M}_n = ]nT, (n+1)T[ \times_{\hat{\alpha}} M_n$ . Nous montrons ici qu'il en est de même pour la diffusion relativiste. Le plus gros du travail a été effectué en amont. En effet, dans le paragraphe 2.4 du chapitre V, nous avons montré que les composantes temporelles de la diffusion admettent un prolongement naturel  $(\hat{t}_s, \hat{\alpha}_s)$  à valeurs dans  $[0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Par ailleurs, d'après la section 4 du chapitre IV, on sait "faire partir" la diffusion d'un point de la frontière d'entrée  $\partial \mathcal{M}_c^-$  de l'espace  $\mathcal{M}$ .

# 1 PROLONGEMENT DE LA DIFFUSION

Pour toute la suite de cette section, on se donne un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} M$  où  $I = ]0, T[$  avec  $T$  borné. On suppose que le facteur d'expansion  $\alpha$  s'annule au bord de  $I$  et que son inverse est intégrable en zéro et en  $T$  :

$$\int_0^{T/2} \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty \text{ et } \int_{T/2}^T \frac{dv}{\alpha(v)} < +\infty.$$

On rappelle que  $\hat{\alpha}$  désigne le prolongement périodique de  $\alpha$  à  $\mathbb{R}^+$ .

## 1.1 Description du prolongement

On rappelle que sur l'intervalle  $]0, \tau[$  où elle est définie, la donnée des composantes  $(t_s, \dot{t}_s, x_s, \dot{x}_s)$  de la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) \in T^1\mathcal{M}$  est équivalente à celle des composantes  $(t_s, a_s, x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$ . Fixons une condition initiale  $(t_0, a_0, x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$  avec

$$\begin{aligned} (t_0, a_0) &\in ]0, T[ \times [0, +\infty[ \cup [0, T[ \times ]0, +\infty[, \\ (x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|) &\in T^1M. \end{aligned}$$

On désigne ici par  $(\star)$  le système d'équations différentielles stochastiques qui régit l'évolution du processus  $(t_s, a_s, x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  et qui est équivalent au système (IV.1). Le processus  $(\dot{t}_s, \dot{a}_s)$  est le prolongement de la diffusion temporelle construit au chapitre V et objet de la définition V.2. D'après la proposition IV.6, le système  $(\star)$  admet une solution forte issue de  $(t_0, a_0, x_0, \dot{x}_0/|\dot{x}_0|)$  et définie jusqu'au temps  $\tau := \inf\{s > 0, t_s = T\}$ . D'après la proposition V.5, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le couple  $(t_s, a_s)$  converge alors presque sûrement vers  $(T, a_{\infty})$  où la limite  $a_{\infty}$  est strictement positive et finie presque sûrement. Par ailleurs, d'après les propositions VI.7, VI.13 et VI.19 d'une part, et les propositions VI.8, VI.14, et VI.20 d'autre part, les composantes spatiales  $(x_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  convergent presque sûrement vers un point aléatoire  $(x_{\infty}, \Theta_{\infty}) \in T^1M$ .

La fonction  $\alpha$  étant prolongée en la fonction périodique  $\hat{\alpha}$ , la proposition IV.6 assure que pour  $s \geq \tau$ , le système  $(\star)$  admet une unique solution  $(t_s^1, a_s^1, x_s^1, \Theta_s^1) = (\dot{t}_s, \dot{a}_s, x_s^1, \Theta_s^1)$  issue de  $(T, a_{\infty}, x_{\infty}, \Theta_{\infty})$ , bien définie jusqu'à  $\tau_2$ , le temps d'atteinte de  $2T$  par le processus  $\dot{t}_s$ . D'après les propositions citées ci-dessus à nouveau, lorsque  $s$  tend vers  $\tau_2$ , le processus  $(t_s^1, a_s^1, x_s^1, \Theta_s^1)$  converge vers une variable  $(2T, a_{\infty}^1, x_{\infty}^1, \Theta_{\infty}^1)$ . Pour  $s \geq \tau_2$ , à nouveau d'après la proposition IV.6, le système  $(\star)$  admet une solution

forte  $(t_s^2, a_s^2, x_s^2, \Theta_s^2) = (\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  issue  $(2T, a_\infty^1, x_\infty^1, \Theta_\infty^1)$  et définie jusqu'au temps d'atteinte de  $3T$  par le processus  $\mathring{t}_s$  etc. On peut itérer la construction, en concaténant les trajectoires  $(t_s^n, a_s^n, x_s^n, \Theta_s^n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , entre les temps d'atteinte  $\tau_n$  des multiples entiers de la période  $T$  par le processus  $\mathring{t}_s$ .

**Définition VII.1** — On notera  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  et on appellera diffusion régénérée et la diffusion définie pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $T\widehat{\mathcal{M}}$ , obtenue à partir de la diffusion  $(t_s, a_s, x_s, \Theta_s)$ , en la prolongeant par continuité aux temps d'atteinte successifs  $\tau_n$  des points  $nT$  par  $\mathring{t}_s$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , i.e.  $\tau_n := \inf\{s > 0, \mathring{t}_s = nT\}$ .

Remarque VII.1 — La notation  $T\widehat{\mathcal{M}}$  est quelque peu abusive puisque la dérivée de  $\mathring{t}_s$  est non bornée aux voisinages des temps  $\tau_n$ . Cependant, pour tout entier  $n$ , la restriction de la trajectoire  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  à l'intervalle  $]\tau_n, \tau_{n+1}[$  est bien une trajectoire dans l'espace tangent unitaire  $T^1\mathcal{M}_n$ , dont la loi est celle de la diffusion relativiste.

## 1.2 Frontière de l'espace complété

Dans la prochaine section, nous explicitons le comportement asymptotique de la diffusion régénérée. Nous allons voir que celui-ci est tout à fait semblable à celui de la diffusion de Franchi et Le Jan dans un univers éternel où l'expansion est lente. Afin de simplifier les énoncés dans la suite, nous introduisons ici une notion de frontière sur l'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$ , analogue à la notion de frontière causale dans le cas d'un espace éternel où l'expansion est lente. Observons tout d'abord que d'un point de vue ensembliste, l'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  se plonge naturellement dans le produit  $[0, \infty[ \times M$  puisque toutes les fibres  $M_n$  sont indentifiées entre elles. Par ailleurs, l'inverse de la fonction  $\mathring{\alpha}$ , bien que localement intégrable sur  $[0, +\infty[$  à la différence de  $\alpha$ , n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{\mathring{\alpha}(u)} = \infty.$$

Comme nous l'avons déjà noté dans la remarque III.12 ceci implique que les géodésiques de lumière prolongées dans  $\widehat{\mathcal{M}}$  se comportent asymptotiquement comme les géodésiques usuelles dans un espace de Robertson-Walker éternel où l'expansion est lente. Lorsque la fibre est euclidienne ou hyperbolique, elles s'en vont à l'infini dans une direction privilégiée ; lorsque la fibre est sphérique, elles divergent au sens où elles décrivent des grands cercles sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ .

Précisément, si  $(\overset{\circ}{t}_u, \overset{\circ}{x}_u)$  est le prolongement à  $\widehat{\mathcal{M}}$  d'une géodésique de lumière  $(t_u, x_u)$  dans  $\mathcal{M}$ , alors lorsque  $u$  tend vers l'infini, selon la courbure de la fibre  $M$  :

*i)* lorsque  $M = \mathbb{R}^3$ , il existe un couple  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  tels que

$$\overset{\circ}{t}_u \rightarrow +\infty, \quad \frac{\overset{\circ}{x}_u}{|\overset{\circ}{x}_u|} \rightarrow \Theta, \quad - \int_{\overset{\circ}{t}_0}^{\overset{\circ}{t}_u} \frac{dv}{\overset{\circ}{\alpha}(v)} + |\overset{\circ}{x}_u| \rightarrow \delta;$$

*ii)* lorsque  $M = \mathbb{H}^3$ , il existe un couple  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  tels que

$$\overset{\circ}{t}_u \rightarrow +\infty, \quad (\overset{\circ}{x}_u^1, \overset{\circ}{x}_u^2, \overset{\circ}{x}_u^3) / \overset{\circ}{x}_u^0 \rightarrow \Theta, \quad - \int_{\overset{\circ}{t}_0}^{\overset{\circ}{t}_u} \frac{dv}{\overset{\circ}{\alpha}(v)} + \operatorname{argsh}(|\overset{\circ}{x}_u|) \rightarrow \delta;$$

*iii)* lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ ,  $\overset{\circ}{t}_u \rightarrow +\infty$  et  $\overset{\circ}{x}_u$  diverge dans  $\mathbb{S}^3$  en décrivant un grand cercle paramétré par la phase  $\int_{\overset{\circ}{t}_0}^{\overset{\circ}{t}_u} \frac{dv}{\overset{\circ}{\alpha}(v)}$ .

**Définition VII.2** — On définit une frontière  $\partial\widehat{\mathcal{M}}$  sur l'espace  $\widehat{\mathcal{M}}$  de la façon suivante :

- lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , on pose  $\partial\widehat{\mathcal{M}} := \{+\infty\} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  ;
- lorsque  $M = \mathbb{S}^3$ , on pose  $\partial\widehat{\mathcal{M}} := \{+\infty\} \times \{\partial\}$ , où  $\partial$  est un point idéal.

Lorsque  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , étant donnée une courbe orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$  dans  $\widehat{\mathcal{M}}$ , s'il existe un couple  $(\delta, \Theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^2$  tel que les convergences des point *i)* ou *ii)* ci-dessus sont vérifiées, on dira que  $(t_u, x_u)$  converge vers le point  $(+\infty, \delta, \Theta)$  de la frontière  $\partial\widehat{\mathcal{M}}$ .

Lorsque  $M = \mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ , si une courbe orientée vers le futur  $(t_u, x_u)$  dans  $\widehat{\mathcal{M}}$  vérifie les convergences du point *iii)* ci-dessus, on dira qu'elle converge vers le point  $\{+\infty\} \times \{\partial\}$ .

Ayant introduit la frontière  $\partial\widehat{\mathcal{M}}$  de  $\widehat{\mathcal{M}}$ , nous pouvons maintenant décrire le comportement asymptotique, lorsque  $s$  tend vers l'infini, des trajectoires de la diffusion régénérée. Comme annoncé, celui-ci est très proche, pour ne pas dire identique, de / à celui des trajectoires de la diffusion de Franchi et Le Jan dans un espace éternel où l'expansion est lente. Vues les nombreuses similarités entre les deux cas, nous passons rapidement sur les preuves lorsque celles-ci se transposent sans difficulté d'un cas à l'autre.

## 2 ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION RÉGÉNÉRÉE

Pour décrire le comportement asymptotique, lorsque  $s$  tend vers l'infini, des trajectoires de la diffusion régénérée, nous distinguons les cas selon que la fibre  $M$  de l'espace de Robertson-Walker initial est euclidienne, hyperbolique ou sphérique.

### 2.1 Lorsque la fibre est euclidienne

Commençons par le cas euclidien. Si  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  est la diffusion régénérée issue d'un point  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  de  $T^1\mathcal{M}$ , d'après la proposition V.6, le processus  $\mathring{a}_s$  tend exponentiellement vite vers l'infini avec  $s$ . Par ailleurs, le prolongement  $\mathring{\alpha}$  de fonction de torsion est une fonction bornée. Lorsque  $s$  tend vers l'infini, l'horloge

$$\mathring{C}_s := \sigma^2 \int_0^s \frac{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)}{|\mathring{a}_u|^2} du$$

converge donc presque sûrement vers une limite finie. Or le processus  $\mathring{\Theta}_s$  qui prolonge au delà du temps  $\tau$  le processus  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  est précisément un mouvement brownien sphérique à valeurs dans  $\mathbb{S}^2$ , paramétré par l'horloge  $\mathring{C}_s$ . On en déduit le résultat suivant :

**Proposition VII.1** — *Soient  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker mortel où l'effondrement est lent,  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  la diffusion régénérée issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\mathring{\Theta}_s$  converge vers un point  $\mathring{\Theta}_{\infty}$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

On a alors bien sûr le corollaire :

**Corollaire VII.1** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VII.1. Alors, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , le processus  $\mathring{\theta}_s = \mathring{x}_s/|\mathring{x}_s|$  converge presque sûrement vers  $\mathring{\Theta}_{\infty}$ .*

*Démonstration.* Le processus  $\mathring{x}_s$  se décompose en

$$\mathring{x}_s = \mathring{x}_0 + \int_0^s \Theta_s \times \frac{\mathring{a}_s}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_s)} = \mathring{x}_0 + \Theta_{\infty} \times \int_0^s \frac{\mathring{a}_s}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_s)} + o\left(\int_0^s \frac{\mathring{a}_s}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_s)}\right).$$

Le résultat découle de l'équivalent

$$\int_0^s \frac{\mathring{a}_s}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_s)} \sim \int_{\mathring{t}_0}^{\mathring{t}_s} \frac{dv}{\mathring{\alpha}(v)}.$$

□

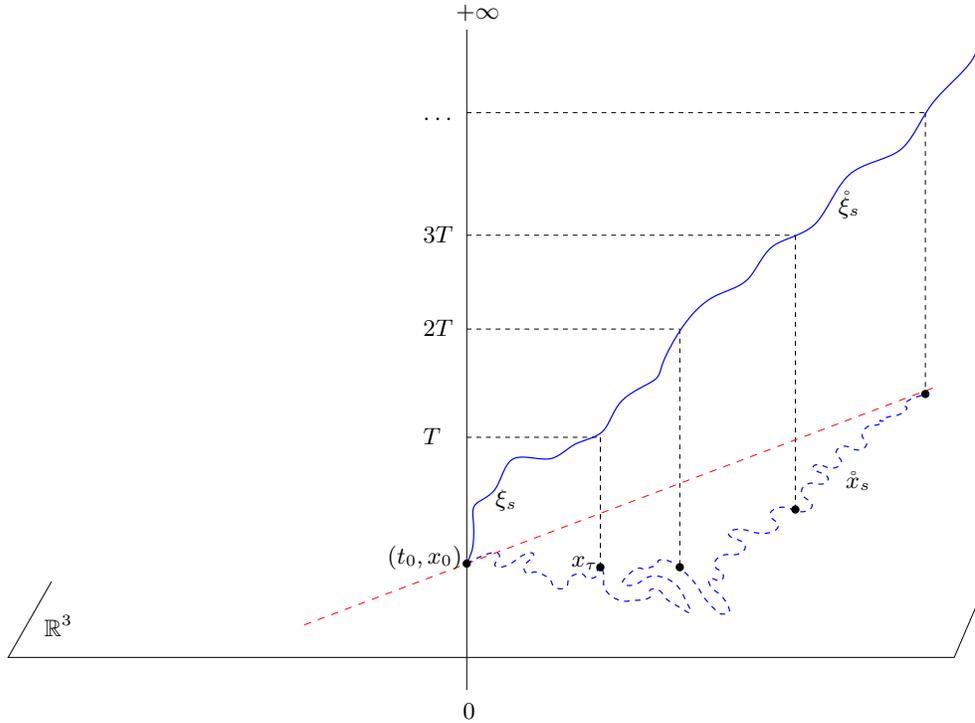


FIGURE 45: Trajectoire typique de la diffusion régénérée dans le cas où la fibre est euclidienne.

En suivant à l'identique la preuve de la proposition VI.12, on montre que comme dans le cas de l'étude de la diffusion relativiste dans un espace éternel où l'expansion est lente, le processus

$$\mathring{\delta}_s := - \int_{t_0}^{t_s} \frac{dv}{\mathring{\alpha}(v)} + |\mathring{x}_s|$$

converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini. Autrement dit, lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $(\mathring{t}_s, \mathring{x}_s)$  converge presque sûrement vers une hypersurface asymptotique dans l'espace complété  $\widehat{\mathcal{M}}$ . D'après la définition VII.2, la convergence vers cette hypersurface est équivalente à la convergence vers un point de la frontière  $\partial\widehat{\mathcal{M}}$ . Aussi, on peut énoncer la proposition :

**Proposition VII.2** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VII.1. Alors, lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\mathring{\delta}_s$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire réelle  $\mathring{\delta}_\infty$ . Autrement dit, il existe une variable aléatoire  $(+\infty, \mathring{\delta}_\infty, \mathring{\Theta}_\infty)$  sur la frontière  $\partial\widehat{\mathcal{M}}$  de l'espace complété  $\widehat{\mathcal{M}}$ , telle que le processus  $(\mathring{t}_s, \mathring{x}_s)$  converge presque sûrement vers  $(+\infty, \mathring{\delta}_\infty, \mathring{\Theta}_\infty)$  lorsque  $s$  tend vers l'infini.*

## 2.2 Lorsque la fibre est hyperbolique

Passons maintenant au cas où la fibre  $M$  de l'espace de Robertson-Walker initiale est hyperbolique. Comme dans la preuve de la proposition VI.4, en utilisant le fait que pour la diffusion régénérée, l'horloge  $\mathring{C}_s := \sigma^2 \int_0^s \frac{\alpha^2(\mathring{t}_u)}{|\mathring{a}_u|^2} du$  converge presque sûrement lorsque  $s$  tend vers l'infini, on montre tout d'abord que le processus  $\mathring{x}_s$  est transitoire. Ainsi, si l'on définit  $\mathring{r}_s$  de sorte que  $\mathring{x}_s = (\sqrt{1 + |\mathring{r}_s|^2}, \mathring{r}_s \mathring{\theta}_s)$ , on a résultat suivant :

**Proposition VII.3** — *Soit  $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{H}^3$  un espace de Robertson-Walker mortel où l'effondrement est lent,  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  la diffusion régénérée issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, le processus  $\mathring{r}_s$  tend vers l'infini avec  $s$ .*

Comme dans la preuve de la proposition VI.4, on peut en fait préciser la vitesse de divergence du processus  $\mathring{r}_s$  (l'analogue du processus  $c_s/a_s$  pour la diffusion régénérée tend vers 1). Dès lors, par les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition VI.16, on obtient que le processus  $\mathring{x}_s$  tend vers l'infini dans une direction privilégiée :

**Proposition VII.4** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VII.3. Alors lorsque  $s$  tend vers l'infini, le processus  $\mathring{\theta}_s$  converge presque sûrement, vers un point  $\mathring{\theta}_\infty$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .*

Enfin, les mêmes estimés pour la vitesse de divergence de  $\mathring{r}_s$  et les mêmes arguments de que ceux de la proposition VI.18 montrent que le processus

$$\mathring{\delta}_s = - \int_{\mathring{t}_0}^{\mathring{t}_s} \frac{du}{\mathring{\alpha}(u)} + \operatorname{argsh}(\mathring{r}_s)$$

converge presque sûrement, lorsque  $s$  tend vers l'infini vers une variable aléatoire réelle  $\mathring{\delta}_\infty$ . On a donc finalement le résultat suivant

**Proposition VII.5** — *On se place sous les hypothèses de la proposition VII.3. Alors presque sûrement, le processus  $(\mathring{t}_s, \mathring{x}_s)$  à valeurs dans  $\widehat{\mathcal{M}}$  converge vers un point  $(+\infty, \mathring{\delta}_\infty, \mathring{\Theta}_\infty)$  de la frontière  $\partial \widehat{\mathcal{M}}$ .*

## 2.3 Lorsque la fibre est sphérique

Traisons enfin le cas où la fibre  $M$  est sphérique. L'argument essentiel de la preuve de la proposition VI.22 qui décrit le comportement asymptotique de la diffusion relativiste dans un espace éternel où l'expansion est lente, est que lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , l'horloge  $C_s = \int_0^s \alpha^2(t_u) du / a_u^2$  converge presque

sûrement. On a déjà vu dans la description du comportement asymptotique de la diffusion régénérée dans les cas euclidien et hyperbolique que l'horloge

$$\mathring{C}_s := \sigma^2 \int_0^s \frac{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)}{|\mathring{a}_u|^2} du$$

converge également lorsque  $s$  tend vers l'infini. Aussi, les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition VI.22 s'appliquent ici et l'on a le résultat suivant :

**Proposition VII.6** — *Soient  $\mathcal{M} = I \times_{\alpha} \mathbb{S}^3$  un espace de Robertson-Walker mortel où l'effondrement est lent,  $(\xi_0, \mathring{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(\mathring{t}_s, \mathring{a}_s, \mathring{x}_s, \mathring{\Theta}_s)$  la diffusion régénérée issue de  $(\xi_0, \mathring{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, il existe deux vecteurs orthogonaux aléatoires  $U_{\infty}$  et  $V_{\infty}$  sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  tels que, lorsque  $s$  tend vers  $\tau$ , les vecteurs  $x_s$  et  $\mathring{\Theta}_s$  vérifient :*

$$\mathring{x}_s = \cos \left( \int_0^s \frac{\mathring{a}_u}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)} du \right) U_{\infty} + \sin \left( \int_0^s \frac{\mathring{a}_u}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)} du \right) V_{\infty} + o(1),$$

$$\mathring{\Theta}_s = -\sin \left( \int_0^s \frac{\mathring{a}_u}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)} du \right) U_{\infty} + \cos \left( \int_0^s \frac{\mathring{a}_u}{\mathring{\alpha}^2(\mathring{t}_u)} du \right) V_{\infty} + o(1).$$

# Frontière de Poisson de la diffusion

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Un théorème de Liouville . . . . .</b>	<b>282</b>
1.1	La diffusion temporelle dans un univers éternel . . .	282
1.2	Le cas de la diffusion régénérée . . . . .	285
<b>2</b>	<b>Lorsque la fibre est euclidienne . . . . .</b>	<b>286</b>
2.1	Frontière de Poisson de la sous-diffusion sphérique	286
2.2	Frontière de Poisson de la diffusion globale . . . . .	288
<b>3</b>	<b>Quelques remarques . . . . .</b>	<b>289</b>

---

Dans ce dernier chapitre, nous explicitons la frontière de Poisson de la diffusion relativiste  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  lorsqu'elle est à valeurs dans le fibré tangent unitaire d'un espace de Robertson-Walker éternel de fibre euclidienne où l'expansion est rapide. Précisément, nous parvenons à expliciter la frontière dans le cas où l'expansion est exponentielle. Parmi les exemples d'espaces de Robertson-Walker évoqués au chapitre II, l'espace de de Sitter vérifie ces conditions. Dans la section 1, nous établissons tout d'abord un théorème de Liouville pour la sous-diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  dans le cas d'un espace éternel, ainsi que pour la diffusion régénérée  $(\overset{\circ}{t}_s, \overset{\circ}{\dot{t}}_s)$  dans le cas d'un univers mortel. Dans le paragraphe 2.1 de la section 2, nous montrons ensuite que dans un espace de Robertson-Walker du type évoqué plus-haut, la tribu asymptotique de la sous-diffusion sphérique  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est triviale. Enfin, dans le paragraphe 2.2, nous explicitons la frontière de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ . Nous concluons dans la section 3 par quelques remarques concernant la détermination de la frontière de Poisson dans les autres cas d'espaces de Robertson-Walker.

# 1 UN THÉORÈME DE LIOUVILLE POUR LA DIFFUSION TEMPORELLE

Dans cette section, nous déterminons l'ensemble des fonctions harmoniques bornées associées au générateur infinitésimal  $L^\sigma$  de la sous-diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  de la diffusion de Franchi et Le Jan, dans le cas d'un univers éternel. Nous traitons aussi le cas de la diffusion régénérée introduite dans la section 2.4 du chapitre V. On rappelle que la sous diffusion  $(t_s, \dot{t}_s)$  est solution du système (IV.13) :

$$\begin{cases} dt_s = \dot{t}_s ds, & d\dot{t}_s = \left[ -H(t_s) (\dot{t}_s^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s \right] ds + dM_s^t, \\ \text{où } d\langle M^t \rangle_s = \sigma^2 (\dot{t}_s^2 - 1) ds, \end{cases}$$

autrement dit, le générateur  $L^\sigma$  est donné par :

$$L^\sigma := \dot{t} \partial_t + \left[ -H(t) (\dot{t}^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t} \right] \partial_{\dot{t}} + \frac{\sigma^2}{2} (\dot{t}^2 - 1) \partial_{\dot{t}\dot{t}}.$$

## 1.1 La diffusion temporelle dans un univers éternel

Dans le cas d'un univers éternel, on a vu au chapitre V que la diffusion  $(t_s, \dot{t}_s)$  présente deux comportements asymptotiques bien distincts selon que l'expansion est exponentielle ou polynomiale. Dans le premier cas, le processus  $\dot{t}_s$  est récurrent ; dans le second cas, il est transitoire. On pourrait s'attendre à ce que la tribu asymptotique de la sous-diffusion temporelle reflète cette dichotomie. Nous montrons ici qu'il n'en est rien : dans les deux cas, la tribu asymptotique de la diffusion temporelle est triviale, autrement dit les seules fonctions harmoniques bornées pour le générateur  $L^\sigma$  sont les fonctions constantes.

**Proposition VIII.1** — *Soit  $H$  une fonction continue, positive et décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Les seules fonctions harmoniques bornées pour le générateur  $L^\sigma$  de la sous-diffusions temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  de la diffusion relativiste sont les fonctions constantes.*

Remarque VIII.1 — Nous donnons ici une preuve de la proposition VIII.1 qui permet de traiter simultanément le cas où la limite  $H_\infty$  est strictement positive et le cas où elle est nulle. Dans le cas où  $H_\infty > 0$ , comme  $\dot{t}_s$  est récurrent, une preuve un peu plus directe est possible.

*Démonstration.* La preuve de la proposition repose sur le constat suivant : deux solutions indépendantes du système (IV.13) se couplent automatiquement. Considérons  $B^1$  et  $B^2$  deux mouvements browniens réels indépendants définis sur des espaces  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  ainsi les processus  $(t_s^1, \dot{t}_s^1)$  et  $(t_s^2, \dot{t}_s^2)$ , issus de  $(t_0^1, \dot{t}_0^1) \neq (t_0^2, \dot{t}_0^2)$  (déterministes) et solutions des systèmes, pour  $i = 1, 2$  :

$$dt_s^i = \dot{t}_s^i ds, \quad d\dot{t}_s^i = \left[ -H(t_s^i) (|\dot{t}_s^i|^2 - 1) + \frac{3\sigma^2}{2} \dot{t}_s^i \right] ds + \sigma \sqrt{|\dot{t}_s^i|^2 - 1} dB_s^i.$$

Afin d'alléger les notations, on pose  $\tau_0 := t_0^1 \vee t_0^2$ . On désigne par  $\mathbb{P}_i$  la loi de  $(t_s^i, \dot{t}_s^i)$  et par  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$  la loi du couple. D'après la proposition IV.3,  $\mathbb{P}_i$ -presque sûrement, on a  $\dot{t}_s^i > 1$  pour tout  $s > 0$ . Les processus  $t_s^i$  sont donc strictement croissants, on note  $(t_s^i)^{-1}$  leur inverse, et on définit les processus  $u_s^i$ , pour  $i = 1, 2$ , par  $u_s^i := \dot{t}_s^i [(t_s^i)^{-1}]$ . Sans perdre en généralité, on peut supposer que  $1 < u_{\tau_0}^1 < u_{\tau_0}^2$ . D'après la formule d'Itô, pour  $s \geq \tau_0$ , on a alors

$$\frac{1}{2} \log \left( \frac{|u_s^1|^2 - 1}{|u_s^2|^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{|u_{\tau_0}^1|^2 - 1}{|u_{\tau_0}^2|^2 - 1} \right) + Q_s + R_s + M_s, \quad (\text{VIII.1})$$

où l'on a posé

$$Q_s := \sigma^2 [(t_s^1)^{-1} - (t_s^2)^{-1}] - \sigma^2 [(t_{\tau_0}^1)^{-1} - (t_{\tau_0}^2)^{-1}],$$

$$R_s := \frac{\sigma^2}{2} \left( \int_{\tau_0}^s \frac{u_r^2 (|u_r^2|^2 - 1) - u_r^1 (|u_r^1|^2 - 1)}{u_r^1 (|u_r^1|^2 - 1) \times u_r^2 (|u_r^2|^2 - 1)} dr \right),$$

et où  $M_s$  est une martingale locale dont le crochet est donné par :

$$\langle M \rangle_s = \int_{(t^1)^{-1}_{\tau_0}}^{(t^1)^{-1}_s} \frac{|\dot{t}_u^1|^2}{|\dot{t}_u^1|^2 - 1} du + \int_{(t^2)^{-1}_{\tau_0}}^{(t^2)^{-1}_s} \frac{|\dot{t}_u^2|^2}{|\dot{t}_u^2|^2 - 1} du \geq (t_s^1)^{-1} - (t_{\tau_0}^1)^{-1}. \quad (\text{VIII.2})$$

Montrons que les processus  $u_s^1$  et  $u_s^2$  se couplent automatiquement en un temps fini  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, *i.e.* que le temps  $\tau_c := \inf\{s > \tau_0, u_s^1 = u_s^2\}$  est fini  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Considérons l'ensemble

$$A := \{\omega \in \Omega_1 \times \Omega_2, \tau_c(\omega) = +\infty\}.$$

Par définition, si  $\omega \in A$  on a  $u_s^1(\omega) < u_s^2(\omega)$  pour tout  $s > \tau_0$ . On en déduit que  $R_s(\omega)$  est positif pour tout  $s > \tau_0$  ainsi que  $Q_s(\omega)$ . En effet, pour tout  $s > \tau_0$ , on a alors :

$$\int_{\tau_0}^s \frac{dr}{u_r^1} > \int_{\tau_0}^s \frac{dr}{u_r^2}, \quad \text{et} \quad \int_{\tau_0}^s \frac{dr}{u_r^i} = \int_{\tau_0}^s \frac{dv}{\dot{t}_v^i [(t^i)^{-1}_v]} = (t^i)^{-1}_s - (t^i)^{-1}_{\tau_0}.$$

Sur l'ensemble  $A$ , on a donc d'après l'équation (VIII.1) :

$$M_s + \frac{1}{2} \log \left( \frac{|u_{\tau_0}^1|^2 - 1}{|u_{\tau_0}^2|^2 - 1} \right) \leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{|u_s^1|^2 - 1}{|u_s^2|^2 - 1} \right) \leq 0.$$

Or d'après (VIII.2), comme  $(t^1)_s^{-1}$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ , on a  $\langle M \rangle_\infty = +\infty$ ,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. On a donc  $\mathbb{P}(A) = 0$ , c'est-à-dire  $\tau_c < +\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s.. Autrement dit, les graphes des courbes  $(t_s^1, \dot{t}_s^1)_{s \geq 0}$  et  $(t_s^2, \dot{t}_s^2)_{s \geq 0}$  s'intersectent presque sûrement. Désignons par  $(t^i, \dot{t}^i)_{\mathbb{R}^+}$  l'ensemble des points de la trajectoire  $(t_s^i, \dot{t}_s^i)_{s \geq 0}$ , et posons

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf \{ s > 0, (t_s^1, \dot{t}_s^1) \in (t^2, \dot{t}^2)_{\mathbb{R}^+} \}, \\ T_2 &= \inf \{ s > 0, (t_s^2, \dot{t}_s^2) \in (t^1, \dot{t}^1)_{\mathbb{R}^+} \}. \end{aligned}$$

Bien que les variables  $T_1$  et  $T_2$  ne soient pas des temps d'arrêt pour la filtration  $\sigma((t_s^i, \dot{t}_s^i), i = 1, 2, s \leq t)_{t \geq 0}$ , elle sont finies  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Par conséquent, les ensembles

$$A_1 := \{\omega_1 \in \Omega_1, T_2 < +\infty \mathbb{P}_2 - \text{p.s.}\} \text{ et } A_2 := \{\omega_2 \in \Omega_2, T_1 < +\infty \mathbb{P}_1 - \text{p.s.}\}$$

vérifient  $\mathbb{P}_1(A_1) = \mathbb{P}_2(A_2) = 1$ . D'autre part, comme les processus  $t_s^i$  sont strictement croissants, on a

$$(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) = (t_{T_2}^2, \dot{t}_{T_2}^2) \quad \mathbb{P} - \text{presque sûrement.} \quad (\text{VIII.3})$$

En effet, par définition de  $T_1$  et  $T_2$ , il existe  $u, v \in \mathbb{R}^+$  (aléatoires) tels que

$$(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) = (t_u^2, \dot{t}_u^2), \quad (t_{T_2}^2, \dot{t}_{T_2}^2) = (t_v^1, \dot{t}_v^1).$$

Si l'on avait  $t_{T_1}^1 = t_u^2 < t_{T_2}^2$ , comme  $t_s^2$  est strictement croissant, on aurait  $u < T_2$  et  $(t_u^2, \dot{t}_u^2) \in (t^1, \dot{t}^1)_{\mathbb{R}^+}$  ce qui contredirait la définition de  $T_2$  comme infimum. On en déduit que  $t_{T_1}^1 \geq t_{T_2}^2$  puis  $t_{T_1}^1 = t_{T_2}^2$  par symétrie. Finalement, en utilisant à nouveau la croissance des  $t_s^i$ , on conclut que  $u = T_2$  et  $v = T_1$ , d'où (VIII.3). Considérons alors une fonction  $h$  harmonique bornée pour l'opérateur  $L^\sigma$ . Pour  $\omega_2 \in \Omega_2$  fixé, l'application  $\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto T_1(\omega_1, \omega_2)$  est un temps d'arrêt fini  $\mathbb{P}_1$ -presque sûrement pour la filtration  $\sigma((t_s^1, \dot{t}_s^1), s \leq t)_{t \geq 0}$ . D'après le théorème d'arrêt, on a alors

$$h(t_0^1, \dot{t}_0^1) = \mathbb{E}_1 [h(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1)] = \int h(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) d\mathbb{P}_1,$$

en intégrant par rapport à  $\mathbb{P}_2$ , on obtient :

$$h(t_0^1, \dot{t}_0^1) = \int h(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) d\mathbb{P}_1 \otimes d\mathbb{P}_2 = \int h(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) d\mathbb{P}.$$

De la même façon, on a

$$h(t_0^2, t_0^2) = \int h(t_{T_2}^2, t_{T_2}^2) d\mathbb{P}_1 \otimes d\mathbb{P}_2 = \int h(t_{T_2}^2, t_{T_2}^2) d\mathbb{P}.$$

D'après (VIII.3) on conclut que  $h(t_0^1, t_0^1) = h(t_0^2, t_0^2)$ , i.e., la fonction  $h$  est constante.  $\square$

## 1.2 Le cas de la diffusion régénérée

En modifiant légèrement la preuve précédente, on montre de la même façon que les seules fonctions harmoniques bornées associées au générateur infinitésimal de la diffusion régénérée  $(\dot{t}_s, \dot{a}_s)$  introduite dans la section 2.4 du chapitre V, sont les fonctions constantes.

**Proposition VIII.2** — *Les seules fonctions harmoniques bornées associées au générateur  $\dot{L}$  de la diffusion  $(\dot{t}_s, \dot{a}_s)$  sont les fonctions constantes.*

*Démonstration.* la preuve est très semblable à celle de la proposition VIII.1, le processus  $a_s$  jouant ici le rôle de  $\dot{t}_s$ . Comme précédemment, nous allons voir que deux trajectoires indépendantes se couplent automatiquement. Soient  $(\dot{t}_s^1, \dot{a}_s^1)$  et  $(\dot{t}_s^2, \dot{a}_s^2)$  deux diffusions régénérées indépendantes issues de points distincts  $(\dot{t}_0^1, \dot{a}_0^1)$  et  $(\dot{t}_0^2, \dot{a}_0^2)$ . On désigne par  $\mathbb{P}_i$  la loi de  $(\dot{t}_s^i, \dot{a}_s^i)$  et par  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$  la loi du couple. D'après la proposition IV.3,  $\mathbb{P}_i$ -presque sûrement, les processus  $\dot{t}_s^i$  sont strictement croissants ; on note  $(\dot{t}_s^i)^{-1}$  leur inverse et on définit les processus  $v_s^i$  sur  $[\dot{t}_0^i, +\infty[$  par  $v_s^i := \dot{a}^i[(\dot{t}_s^i)^{-1}]$ . Afin d'alléger les notations, on pose  $\tau_0 := \dot{t}_0^1 \vee \dot{t}_0^2$ . Sans perdre en généralité, on peut supposer qu'au temps  $\tau_0$  on a  $1 < v_{\tau_0}^1 < v_{\tau_0}^2$ , on note alors  $\tau_c = \inf\{s > \tau_0, v_s^1 > v_s^2\}$ . D'après la proposition V.6, il existe deux mouvements browniens indépendants  $B^1$  et  $B^2$  ainsi que deux processus presque sûrement convergents  $u^1$  et  $u^2$  tels que, pour tout  $s \geq \tau_0$  :

$$v_s^1/v_s^2 = \exp\left(Q_s + \sigma\left(B_{(\dot{t}_s^1)^{-1}}^1 - B_{(\dot{t}_s^2)^{-1}}^2\right) + \left(u_{(\dot{t}_s^1)^{-1}}^1 - u_{(\dot{t}_s^2)^{-1}}^2\right)\right),$$

où comme dans la preuve précédente, on a posé :

$$Q_s := \sigma^2 \left[ (t^1)_s^{-1} - (t^2)_s^{-1} \right] - \sigma^2 \left[ (t^1)_{\tau_0}^{-1} - (t^2)_{\tau_0}^{-1} \right].$$

Sur l'intervalle  $[\tau_0, \tau_c[$ , on a  $Q_s \geq 0$  presque sûrement. En effet, on a l'équivalence

$$v_s^1 \leq v_s^2 \iff \frac{\alpha(s)}{|v_s^1|^2 + \alpha^2(s)} \geq \frac{\alpha(s)}{|v_s^2|^2 + \alpha^2(s)},$$

et d'autre part

$$\int_{\tau_0}^s \frac{\alpha(r)}{|v_r^i|^2 + \alpha^2(r)} dr = (t^i)_s^{-1} - (t^i)_{\tau_0}^{-1}.$$

On en déduit la minoration suivante, pour  $s \in [\tau_0, \tau_c[$  :

$$v_s^1/v_s^2 \geq \exp\left(\sigma\left(B_{(\hat{t}^1)_s}^1 - B_{(\hat{t}^2)_s}^2\right) + O(1)\right).$$

Comme le crochet  $\langle B^1 \circ (\hat{t}^1)^{-1} - B^2 \circ (\hat{t}^2)^{-1} \rangle_s$  tend vers l'infini avec  $s$ , on conclut que le temps  $\tau_c$  est fini  $\mathbb{P}$ -presque sûrement. Autrement dit, les trajectoires  $(\hat{t}_s^i, \hat{a}_s^i)$  s'intersectent en un temps fini  $\mathbb{P}$ -presque sûrement ; on conclut alors comme dans la proposition VIII.1, le rôle de  $\hat{t}_s^i$  étant joué ici par le processus régénéré  $\hat{a}_s^i$ .  $\square$

## 2 FRONTIÈRE DE POISSON LORSQUE LA FIBRE EST EUCLIDIENNE

Nous décrivons ici la frontière de Poisson de la diffusion relativiste pour une famille d'espaces de Robertson-Walker dont la fibre est euclidienne. Il s'agit des espaces éternels  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  où l'expansion est rapide *i.e.* où l'inverse du facteur d'expansion est intégrable au voisinage de l'infini, et où la fonction de Hubble n'est pas de cube intégrable.

### 2.1 Frontière de Poisson de la sous-diffusion sphérique

Commençons par décrire la tribu asymptotique de la sous-diffusion "sphérique"  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  à valeurs dans  $]0, +\infty[ \times ]1, +\infty[ \times \mathbb{S}^2$ .

**Lemme VIII.1** — *Soit  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  un espace de Robertson-Walker où l'expansion est exponentielle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, la tribu asymptotique de la sous-diffusion  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est triviale.*

*Démonstration.* Pour alléger les expressions, on pose  $\Theta_s := \dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  dans la suite de la preuve. On désigne par  $(\star)$  le système d'équations différentielles stochastiques vérifié par le processus  $(t_s, \dot{t}_s, \Theta_s)$ . Via la bijection entre la tribu asymptotique et l'ensemble des fonctions harmoniques bornées, établir la proposition revient à montrer que les seules fonctions harmoniques bornées associées au générateur de la sous-diffusion  $(t_s, \dot{t}_s, \Theta_s)$  sont les fonctions

constantes. Rappelons que sous les hypothèses de l'énoncé, si  $(t_0^1, \dot{t}_0^1)$  et  $(t_0^2, \dot{t}_0^2)$  sont deux conditions initiales raisonnables, et si  $(t_s^1, \dot{t}_s^1)$  est une solution du système (IV.13) issue de  $(t_0^1, \dot{t}_0^1)$ , il est toujours possible de construire une solution du même système (IV.13) issue de  $(t_0^2, \dot{t}_0^2)$  et telle qu'il existe deux temps  $T_1$  et  $T_2$  finis presque sûrement tels que

$$(t_{T_1}^1, \dot{t}_{T_1}^1) = (t_{T_2}^2, \dot{t}_{T_2}^2) \text{ presque sûrement.}$$

Par ailleurs, si  $(t_s, \dot{t}_s, \Theta_s)$  est solution de  $(\star)$ , le processus  $\Theta_s$  est un mouvement brownien sphérique changé de temps dans  $\mathbb{S}^2$ . Précisément, il existe un mouvement brownien sphérique  $\tilde{\Theta}$ , indépendant de la diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$  tel que

$$\Theta_s = \tilde{\Theta} \left( \int_0^s \frac{du}{|\dot{t}_u|^2 - 1} \right).$$

Comme l'expansion est exponentielle, d'après la proposition V.4, l'intégrale  $\int_0^s \frac{du}{|\dot{t}_u|^2 - 1}$  tend presque sûrement vers l'infini avec  $s$ . Fixons des conditions initiales  $(t_0^1, \dot{t}_0^1, \Theta_0^1)$  et  $(t_0^2, \dot{t}_0^2, \Theta_0^2)$  dans  $]0, +\infty[ \times ]1, +\infty[ \times \mathbb{S}^2$ . Considérons alors deux solutions  $(t_s^1, \dot{t}_s^1)$  et  $(t_s^2, \dot{t}_s^2)$  issues de  $(t_0^1, \dot{t}_0^1)$  et  $(t_0^2, \dot{t}_0^2)$  respectivement, qui se couplent en des temps  $T_1$  et  $T_2$  comme ci-dessus. On choisit de faire coïncider les deux diffusions après les temps de couplages, autrement dit  $(t_{T_1+s}^1, \dot{t}_{T_1+s}^1) = (t_{T_2+s}^2, \dot{t}_{T_2+s}^2)$ , pour  $s \geq 0$ . Fixons maintenant deux mouvements browniens sphériques  $\tilde{\Theta}^i$  indépendants issus de  $\Theta_0^i$  et indépendants des deux diffusions temporelles et posons pour  $s \geq 0$  et pour  $i = 1, 2$  :

$$\Theta_s^i := \tilde{\Theta}^i \left( \int_0^s \frac{du}{|\dot{t}_u^i|^2 - 1} \right).$$

Les processus  $(t_s^i, \dot{t}_s^i, \Theta_s^i)$  ainsi définis sont bien solution du système  $(\star)$ . À partir de cette situation, on construit aisément un couplage des trajectoires  $(t_s^i, \dot{t}_s^i, \Theta_s^i)$ . On définit en effet un nouveau processus  $(\Theta_s^2)_{s \geq 0}$ , tel  $\Theta_s^2$  coïncide avec  $\Theta_s^2$  sur l'intervalle  $[0, T_2]$  et  $(\Theta_s^2)_{s \geq T_2}$  est la réflexion du processus  $(\Theta_s^1)_{s \geq T_1}$  par rapport au plan médian entre les points  $\Theta_{T_1}^1$  et  $\Theta_{T_2}^2$ . Le nouveau processus  $(t_s^2, \dot{t}_s^2, \Theta_s^2)$  est encore solution du système  $(\star)$  et au premier temps  $T^*$ , qui est fini presque sûrement, où le processus  $(\Theta_s^1)_{s \geq T_1}$  intersecte le grand cercle médian entre  $\Theta_{T_1}^1$  et  $\Theta_{T_2}^2$ , on a naturellement :

$$(t_{T_2+T^*}^2, \dot{t}_{T_2+T^*}^2, \Theta_{T_2+T^*}^2) = (t_{T_1+T^*}^1, \dot{t}_{T_1+T^*}^1, \Theta_{T_1+T^*}^1).$$

Si  $h$  est une fonction harmonique bornée, d'après les couplages ci-dessus, presque sûrement, on a alors  $h(t_0^2, \dot{t}_0^2, \Theta_0^2) - h(t_0^1, \dot{t}_0^1, \Theta_0^1) = 0$  puisque

$$\mathbb{E} \left[ \left( h(t_{T_2+T^*}^2, \dot{t}_{T_2+T^*}^2, \Theta_{T_2+T^*}^2) - h(t_{T_1+T^*}^1, \dot{t}_{T_1+T^*}^1, \Theta_{T_1+T^*}^1) \right) \right] = 0.$$

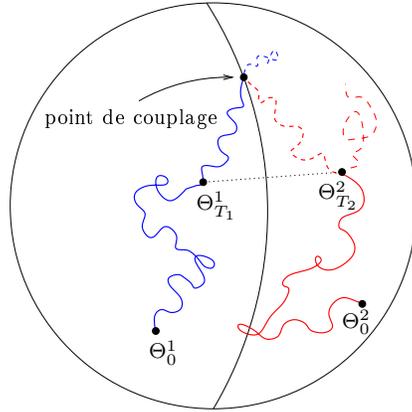


FIGURE 46: Couplage par réflexion sur le plan médian séparant les points  $\Theta_{T_1}^1$  et  $\Theta_{T_2}^2$ .

Ceci étant valable pour des points  $(t_0^i, \dot{t}_0^i)$  quelconques,  $i = 1, 2$ , on conclut que la fonction  $h$  est constante, d'où le résultat.  $\square$

## 2.2 Frontière de Poisson de la diffusion globale

On peut maintenant décrire la frontière de Poisson de la diffusion globale  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  à valeurs dans l'espace tangent unitaire d'un espace de Robertson-Walker éternel, de fibre euclidienne, où l'expansion est exponentielle.

**Théorème VIII.1** — *Considérons un espace de Robertson-Walker  $\mathcal{M} = ]0, +\infty[ \times_{\alpha} \mathbb{R}^3$  où l'expansion est exponentielle. Soient  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$  des conditions initiales raisonnables et  $(\xi_s, \dot{\xi}_s) = (t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s)$  la diffusion relativiste issue de  $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$ . Alors presque sûrement, la tribu asymptotique de la diffusion  $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$  coïncide avec la tribu  $\sigma(x_{\infty})$  engendrée par la seule variable  $x_{\infty} = \lim_{s \rightarrow +\tau} x_s \in \mathbb{R}^3$ .*

*Démonstration.* Sous les hypothèses de l'énoncé, d'après la proposition VI.7, le processus  $x_s$  converge presque sûrement vers des variables  $x_{\infty} \in \mathbb{R}^3$ . On rappelle que d'après la relation de pseudo-norme,  $|\dot{x}_s| = a_s/\alpha^2(t_s)$ , autrement dit  $|\dot{x}_s|$  ne dépend que de la sous-diffusion temporelle  $(t_s, \dot{t}_s)$ . Par ailleurs, pour tout  $s > 0$ , on a :

$$x_{\infty} - x_s = \int_s^{+\infty} \Theta_u \times \frac{a_u}{\alpha^2(t_u)} du = \int_s^{+\infty} \Theta_u \times \frac{\sqrt{\dot{t}_u^2 - 1}}{\alpha(t_u)} du.$$

On en déduit que tout  $s' > 0$ , les tribus suivantes coïncident :

$$\sigma((t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s), s > s') = \sigma(x_{\infty}) \vee \sigma((t_s, \dot{t}_s, \Theta_s), s > s').$$

D'après [RY99] p. 67, en prenant l'intersection sur les tous les temps  $s' > 0$ , on obtient alors

$$\bigcap_{s' > 0} \sigma((t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s), s > s') = \sigma(x_\infty) \vee \bigcap_{s' > 0} \sigma((t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s), s > s'),$$

ou encore

$$\bigcap_{s' > 0} \sigma((t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s), s > s') = \sigma(x_\infty) \vee \bigcap_{s' > 0} \sigma((t_s, \dot{t}_s, \Theta_s), s > s').$$

D'après le lemme VIII.1, la tribu asymptotique de la diffusion sphérique  $(t_s, \dot{t}_s, \Theta_s)$  est triviale. On conclut donc que

$$\bigcap_{s' > 0} \sigma((t_s, x_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s), s > s') = \sigma(x_\infty).$$

□

### 3 QUELQUES REMARQUES

Pour conclure, nous formulons quelques remarques concernant la détermination de la frontière de Poisson de la diffusion relativiste dans les espaces de Robertson-Walker qui ne sont pas du type précédent.

Remarque VIII.2 — Commençons par évoquer le cas des espaces éternels où l'expansion est exponentielle et où la fibre est hyperbolique ou sphérique. Dans ces cas, on a vu que le processus dérivé  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  décrit asymptotiquement un mouvement brownien changé de temps dans  $T_{x_\infty}^1 M$ . Nous pensons que comme dans le cas euclidien, la tribu asymptotique de la diffusion globale à valeurs dans  $T^1 \mathcal{M}$  coïncide alors presque sûrement avec la tribu engendrée par la seule variable  $x_\infty$ . Nous ne sommes pas parvenus à établir ce résultat. La difficulté par rapport au cas euclidien est que dans les cas hyperbolique et sphérique, le processus  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  n'est plus une sous-diffusion de la diffusion globale puisque  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  dépend de  $x_s$ . Il est ainsi plus difficile de montrer que la tribu asymptotique  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est triviale.

Remarque VIII.3 — Évoquons à présent le cas d'un espace de Robertson-Walker éternel de fibre euclidienne et où l'expansion est rapide et polynomiale. Dans ce cas, les processus  $x_s$  et  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  convergent presque sûrement vers des variables  $x_\infty$  et  $\Theta_\infty$  respectivement. Nous pensons sans parvenir à le démontrer que la tribu asymptotique de la diffusion sphérique  $(t_s, \dot{t}_s, \dot{x}_s/|\dot{x}_s|)$  est engendrée par la variable  $\Theta_\infty$ . Le couplage du lemme VIII.1 ne peut

pas être invoqué puisque l'horloge du mouvement brownien changé de temps  $\dot{x}_s/|\dot{x}_s|$  converge ici presque sûrement. Néanmoins, si ce résultat est vrai, comme dans la preuve du théorème VIII.1, on montrerait alors que la tribu asymptotique de la diffusion globale à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  coïncide presque sûrement avec la tribu engendrée par les deux variables  $x_\infty$  et  $\Theta_\infty$ . La question suivante serait alors de chercher à savoir si la tribu  $\sigma(x_\infty, \Theta_\infty)$  coïncide ou non avec la tribu  $\sigma(x_\infty)$ . Si ce n'est pas le cas, cela montrerait que la frontière de Poisson contient plus d'informations que la seule donnée du point limite  $x_\infty$  sur la frontière causale.

Remarque VIII.4 — Mentionnons enfin le cas d'espaces de Robertson-Walker éternels où l'expansion est lente. Lorsque la fibre de l'espace est euclidienne ou hyperbolique, la situation ressemble beaucoup à celle de la diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski. Les résultats de Bailleul rappelés dans le premier chapitre de cette partie montrent que la frontière de Poisson de la diffusion de Dudley s'identifie avec la frontière causale de l'espace de Minkowski. Nous pensons qu'il en est de même pour la diffusion relativiste dans le cas plus général des espaces de Robertson-Walker où l'expansion est lente, *i.e.* que la tribu asymptotique pour la diffusion globale coïncide avec la tribu  $\sigma(\delta_\infty, \Theta_\infty)$ . Malheureusement, nous n'avons pas réussi à adapter les méthodes de Bailleul au cas d'un espace courbe.

---

# Bibliographie

---

---

- [AC07] Luis J. Alías and A. Gervasio Colares. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized robertson-walker spacetimes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 143 :703–729, 2007.
- [AF07] Jürgen Angst and Jacques Franchi. Central limit theorem for a class of relativistic diffusions. *J. Math. Phys.*, 48(8) :083101, 20, 2007.
- [AnF07] V. Alaña and J.L. Flores. The causal boundary of product spacetimes. *Gen. Relativ. Gravitation*, 39(10) :1697–1718, 2007.
- [ARS95a] Luís Alías, Alfonso Romero, and Miguel Sánchez. Compact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes. In *Geometry and topology of submanifolds, VII (Leuven, 1994/Brussels, 1994)*, pages 67–70. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [ARS95b] Luis J. Alías, Alfonso Romero, and Miguel Sánchez. Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in spatially closed Lorentzian manifolds. In *Differential geometry and its applications (Granada, 1994)*, volume 2 of *An. Fís. Monogr.*, pages 177–187. CIEMAT, Madrid, 1995.
- [ARS97] Luis J. Alías, Alfonso Romero, and Miguel Sánchez. Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes. In *Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 1 (Athens, 1996)*, volume 30, pages 655–661, 1997.
- [ATU09] M. Arnaudon, A. Thalmaier, and S. Ulsamer. Existence of non-trivial harmonic functions on Cartan-Hadamard manifolds of unbounded curvature. *Mathematische Zeitschrift*, 263 :369–409, 2009.
- [Bai06] Ismaël Bailleul. Poisson boundary of the relativistic diffusion in Minkowski spacetime. *Thèse de l'université Paris-Sud XI*, 2006.

- [Bai08a] Ismaël Bailleul. Poisson boundary of a relativistic diffusion. *Probab. Theory Related Fields*, 141(1-2) :283–329, 2008.
- [Bai08b] Ismaël Bailleul. Une preuve simple d’un résultat de Dufresne. *Séminaire de probabilités XLI. Berlin : Springer. Lecture Notes in Mathematics 1934, 203-213 (2008).*, 2008.
- [BDR01a] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. Covariant Kolmogorov Equation and Entropy Current for the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *Eur. Phys. J.*, 19 :37, 2001.
- [BDR01b] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. Hydrodynamic behavior of Brownian particles in a position-dependent constant force-field. *J. Math. Phys.*, 40 :2891, 2001.
- [BDR01c] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame. *Eur. Phys. J.*, 23 :487, 2001.
- [Ber89] M.V. Berry. *Principles of Cosmology and Gravitation*. IOP publishing, 1989.
- [Ber03] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Bis84] J.M. Bismut. The Atiyah-Singer theorems : A probabilistic approach. ii : The Lefschetz fixed point formulas. *J. Funct. Anal.*, 57 :329–348, 1984.
- [BW94a] J. Bertoin and W. Werner. Asymptotic windings of planar brownian motion revisited via the Ornstein-Uhlenbeck process. *Séminaire de Probabilité de Strasbourg*, 28 :138–152, 1994.
- [BW94b] J. Bertoin and W. Werner. Comportement asymptotique du nombre de tours effectués par la trajectoire brownienne plane. *Séminaire de Probabilité de Strasbourg*, 28 :164–171, 1994.
- [BY81] N. Bouleau and M. Yor. Sur la variation quadratique de certains temps locaux de certaines semi-martingales. *C.R Acad. Sc. Paris*, 292 :491, 03 1981.
- [CdV07] Bang-Yen Chen and Joeri Van der Veken. Spatial and Lorentzian surfaces in Robertson-Walker space times. *Journal of Mathematical Physics*, 48(7) :073509, 2007.
- [Dar05] O. Darrigol. The genesis of the theory of relativity. *Einstein, 1905-2005. Poincaré Seminar 1*, pages 1–22, 2005.
- [Deb04] F. Debbasch. A diffusion process in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 45(7) :2744–2760, 2004.

- 
- [dFC90] F. de Felice and C.J.S Clarke. *Relativity on curved manifolds*. Cambridge university press, 1990.
- [DH05a] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of relativistic Brownian Motion : The (1+1)-dimensional case. *Physical Review*, E 71 016124, 2005.
- [DH05b] J. Dunkel and P. Hänggi. Theory of relativistic Brownian Motion : The (1+3)-dimensional case. *arXiv 0505532*, 2005.
- [DMR97] F. Debbasch, K. Mallick, and J.P. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat. Phys.*, 88 :945, 1997.
- [DR98] F. Debbasch and J.P. Rivet. A diffusion equation from the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat. Phys.*, 90 :1179, 1998.
- [Dud66] R. M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat.*, 6 :241–268, 1966.
- [Dud67] R. M. Dudley. A note on Lorentz-invariant Markov processes. *Ark. Mat.*, 6 :575–581 (1967), 1967.
- [Dud73] R. M. Dudley. Asymptotics of some relativistic Markov processes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 70 :3551–3555, 1973.
- [Dup05] B. Duplantier. Le mouvement brownien, “divers et ondoyant”. *Einstein, 1905-2005. Poincaré Seminar 1*, *arXiv :0705.195*, pages 201–293, 2005.
- [Ein05a] Albert Einstein. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, 18 :639–641, 1905.
- [Ein05b] Albert Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der wärme gefordert Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, 17 :549–560, 1905.
- [Ein05c] Albert Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, 17 :132–148, 1905.
- [Ein05d] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, 17 :891–921, 1905.
- [Ein06] Albert Einstein. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Annalen der Physik (1900) (series 4)*, 19 :371–381, 1906.
- [EL06] D. Elworthy and X.M. Li. Geometric stochastic analysis on path spaces. In *Geometric stochastic analysis on path spaces. Proceedings of ICM, Madrid, Spain*, 2006.

- [FLJ07] Jacques Franchi and Yves Le Jan. Relativistic diffusions and Schwarzschild geometry. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(2) :187–251, 2007.
- [FN06] J. Foster and J.D Nightingale. *A short course in General Relativity*. Springer, third edition, 2006.
- [Fra07] Jacques Franchi. Relativistic diffusion in Gödel’s universe. <http://arxiv.org/abs/math.PR/0612020v2>, 2007.
- [Fri69] A. Friedman. *Partial differential equations*. Krieger Publishing, 1969.
- [FS00] José Luis Flores and Miguel Sánchez. Geodesic connectedness and conjugate points in GRW space-times. *J. Geom. Phys.*, 36(3-4) :285–314, 2000.
- [FS07] Jose Luis Flores and Miguel Sanchez. The causal boundary of wave-type spacetimes, 2007.
- [GKP72] R. Geroch, E. H. Kronheimer, and R. Penrose. Ideal points in space-time. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 327 :545–567, 1972.
- [Hab09] Z. Haba. Relativistic diffusion. *Physical Review*, E79, 021128, 2009.
- [Hak65] R. Hakim. A covariant theory of relativistic brownian motion in local equilibrium. *J. Math. Phys.*, 6(10), 1965.
- [Hak67a] R. Hakim. Relativistic perfect gas in an external force field. *Phys. Rev.*, 162(1) :128–133, 1967.
- [Hak67b] R. Hakim. Sur la mécanique statistique relativiste. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.*, pages 225–244, 1967.
- [Hak68a] R. Hakim. Relativistic scalar plasma. *Phys. Rev.*, 166(1) :75–81, 1968.
- [Hak68b] R. Hakim. Relativistic stochastic processes. *J. Math. Phys.*, 9(11), 1968.
- [Har04] Steven G. Harris. Boundaries on space-times : An outline. Advances in differential geometry and general relativity. American Mathematical Society (AMS). Contemporary Mathematics 359, 65-85 (2004)., 2004.
- [HE73] Stephen W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs of Mathematical Physics. Vol. I. London : Cambridge University Press., 1973.

- 
- [Her09] J Herrmann. Diffusion in the special theory of relativity. *arxiv :0903.0751*, 2009.
- [HK92] Pei Hsu and Wilfrid S. Kendall. Limiting angle of brownian motion in certain two-dimensional Cartan- Hadamard manifolds. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématiques (Série 6)*, pages 169–186, 1992.
- [HP70] S.W. Hawking and R. Penrose. The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 314(1519) :529–548, 1970.
- [Hsu00] E.P. Hsu. *Stochastic Analysis on Manifolds*. American mathematical society, 2000.
- [Itô63] K. Itô. The brownian motion and tensor fields on Riemannian manifolds. In *Proceedings of the Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 536–539, 1963.
- [IW89] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusions processes*. North Holland, second edition, 1989.
- [Kal01] O. Kallenberg. *Foundation of Modern Probability*. Springer-Verlag, second edition, 2001.
- [Ken80] W. Kendall. Brownian motion, negative curvature, and harmonic maps. In *Stochastic Integrals, Proceedings, LMS Durham Symposium*, pages 479–491, 1980.
- [Ken88] W. Kendall. *The Geometry of Random Motion, Martingales on manifolds and harmonic maps*, volume 73. 1988.
- [Ken98] Wilfrid S. Kendall. From stochastic parallel transport to harmonic maps. Jost, Jürgen et al., *New directions in Dirichlet forms*. Providence, RI : American Mathematical Society. AMS/IP Stud. Adv. Math. 8, 49-115 (1998)., 1998.
- [KK79] Y. Kasahara and S. Kotani. On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete.*, 49 :133–153, 1979.
- [KTS59] F.I. Karpelevich, V.N. Tutubalin, and M.G. Shur. Limit theorems for the compositions of distributions in the Lobachevsky plane and space. *Theory Prob. Appl.*, 4 :399–402, 1959.
- [Kun56] W. Kundt. Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell. *Zeitschrift für Physik*, 145 :611–620, 1956.
- [LG83] J.F. Le Gall. Applications du temps local aux équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. *Semin. de probabilités XVII, Proc. 1981/82, Lect. Notes Math. 986*, 15-31 (1983)., 1983.

- [Mai78] Nelly Maigret. Théoreme de limite central fonctionnel pour une chaîne de markov récurrente au sens de harris et positive. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Nouv. Sér., Sect. B*, 14 :425–440, 1978.
- [Mey78] P.A. Meyer. Martingales locales fonctionnelles additives. I. Semin. Probab. XII, Univ. Strasbourg 1976/77, Lect. Notes Math., 1978.
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi Riemannian Geometry, with applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Pav01] M. Pavon. On the stochastic mechanics of the free relativistic particle. *Journal of Mathematical Physics*, pages 4846–4856, 2001.
- [Pen65] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14 :57–59, 1965.
- [Per27] J. Perrin. *Les atomes. 2. éd.* 335 p. avec fig. Paris, F. Alcan (Nouvelle collection scientifique), 1927.
- [Per82] Edwin Perkins. Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations. Seminaire de probabilites XVI, Univ. Strasbourg 1980/81, Lect. Notes Math. 920, 201-208 (1982)., 1982.
- [Pic91] J. Picard. Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limit. *J. Funct. Anal.*, 99 :223–261, 1991.
- [Reb79] Rolando Rebolledo. La méthode des martingales appliquée à l’étude de la convergence en loi de processus. *Bull. Soc. Math. Fr., Suppl., Mém. 62*, 125 p., 1979.
- [Rin01] W. Rindler. *Relativity, Special, General and Cosmological*. Oxford university press, 2001.
- [RN69] H.P. Robertson and T.W. Noonan. *Relativity and Cosmology*. Saunders Physics books, 1969.
- [Rob35] H.P. Robertson. Kinematics and world-structure. *Astrophys. J.*, 82 :284–301, 1935.
- [RS94] Alfonso Romero and Miguel Sánchez. On completeness of certain families of semi-Riemannian manifolds. *Geom. Dedicata*, 53(1) :103–117, 1994.
- [RS95] Alfonso Romero and Miguel Sánchez. Geodesic completeness and conformal Lorentzian moduli space on the torus. In *Differential geometry and its applications (Granada, 1994)*, volume 2 of *An. Fís. Monogr.*, pages 189–197. CIEMAT, Madrid, 1995.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, third edition, 1999.

- 
- [Sán98] Miguel Sánchez. On the geometry of generalized Robertson-Walker spacetimes : geodesics. *Gen. Relativity Gravitation*, 30(6) :915–932, 1998.
- [Sán99] Miguel Sánchez. On the geometry of generalized Robertson-Walker spacetimes : curvature and Killing fields. *J. Geom. Phys.*, 31(1) :1–15, 1999.
- [Ste90] H. Stephany. *General relativity, an introduction to the theory of the gravitational field*. Cambridge university press, second edition, 1990.
- [TMW73] Kip S. Thorne, Charles W. Misner, and John A. Wheeler. *Gravitation (Physics Series)*. W. H. Freeman, 1973.
- [Tou83] A. Touati. Théorèmes de limite centrale fonctionnels pour les processus de Markov. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Nouv. Sér., Sect. B*, 19 :43–55, 1983.
- [Var80] S.R.S. Varadhan. *Diffusion problems and partial differential equations*. Springer Verlag, 1980.
- [VB06] A. Z. Gazizov V. Berezhinsky. Diffusion of cosmic rays in expanding universe. *Astrophys.J.* 643, pages 8–13, 2006.
- [Wal37] A. G. Walker. On Milne’s Theory of World-Structure. *Proc. London Math. Soc.*, s2-42(1) :90–127, 1937.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and sons, 1972.
- [Yam71] T. Yamada. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, ii :155–167, 1971.
- [Yor01] M. Yor. *Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes*. Springer-Finance, 2001.
- [Zeg99] A. Zeghib. Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. II. Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups. *Geom. Funct. Anal.*, 9(4) :823–854, 1999.