Modélisation algébrique explicite à pondération elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi

Abdou Gafari Oceni

▶ **To cite this version:**

Abdou Gafari Oceni. Modélisation algébrique explicite à pondération elliptique pour les écoulements turbulents en présence de paroi. Sciences de l'ingénieur [physics]. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique - Poitiers, 2009. Français. NNT : . tel-00413841

HAL Id: tel-00413841

https://theses.hal.science/tel-00413841

Submitted on 7 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE (ENSMA)

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)
École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur
École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique

Spécialité : **Mécanique des Fluides**

Présentée et soutenue publiquement par

Abdou Gafari OCENI

le 01 Juillet 2009

À la salle de Communication SP2MI, site du Futuroscope, Université de Poitiers

MODÉLISATION ALGEBRIQUE EXPLICITE A PONDERATION ELLIPTIQUE POUR LES ECOULEMENTS TURBULENTS EN PRESENCE DE PAROI

Directeurs de Thèse : Rémi Manceau & Jacques Borée

JURY

M. Gilmar Mompean, Professeur, Polytech'Lille,Laboratoire de Mécanique de Lille	Président
M. Jean Piquet, Professeur , Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
M.Bertrand Aupoix, HDR, Directeur de Recherche ONERA Toulouse	Rapporteur
M. Thomas Gatski, Directeur de Recherche CNRS, LEA, Poitiers	Examinateur
M. Thibauld Jongen, Techspace Aéro (Groupe Safran), Herstal, BELGIQUE	Examinateur
M. Jacques Borée, Professeur ENSMA, Poitiers	Examinateur
M. Rémi Manceau, Chargé de Recherche CNRS, LEA, Poitiers	Examinateur

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein de l'équipe *Dynamique des Transferts Instationnaires* du *Laboratoire d'Études Aérodynamiques* (LEA) à Poitiers dans le cadre du projet WALLTURB.

Je tiens particulièrement à remercier Rémi Manceau pour l'énorme rôle qu'il a joué dans la conduite de ce travail, les orientations qu'il a su lui imprimé, sa générosité, et sa disponibilité permanente. J'ai pu apprécier tout au long de ces années passées ensemble, sa parfaite et profonde maîtrise du domaine de la Mécanique des fluides, en particulier celui de la modélisation de la turbulence. Merci aussi pour la liberté et le temps qu'il m'a donné, me permettant de mettre en avant mon inspiration et ma créativité, nécessaires à tout travail de recherche, malgré la complexité du sujet. Je ne cacherai pas que j'ai énormément appris à l'école "Manceau" et comme j'ai souvent l'habitude de dire dans son bureau " je sais qu'en venant chez mon *Chef*, il y aura toujours une solution ! ! !".

Je tiens également à remercier vivement le Professeur Jacques Borée. Son pragmatisme et ses conseils m'ont facilité la réalisation de ce travail.

J'ai eu l'honneur de travailler pendant ces trois dernières années avec Thomas Gatski. Je lui exprime ici toute ma gratitude pour son humilité, sa simplicité, son accessibilité, et les discussions que nous eûmes ensemble. Son expertise à été précieuse pour moi dans la maîtrise des procédures relatives à la construction des bases d'intégrité de tenseurs, domaine dans lequel ne s'aventure pas qui veut lors la mise en oeuvre d'un modèle de turbulence. C'est réellement une chance pour moi d'avoir été là pendant son séjour au LEA.

Mes remerciements vont également à l'endroit de Rodolphe PERRIN pour sa qualité d'écoute, sa simplicité et pour m'avoir fourni entre autres, les bases de données du modèle EB-RSM. Ce support, m'a permis de tirer de réelles conclusions sur l'énorme travail théorique d'extension en 3D des modèles développés.

Je tiens à dire toute ma reconnaissance au Pr. Jean PIQUET de l'Ecole Centrale de Nantes et à Bertrand AUPOIX, Directeur de Recherche à l'ONERA de Toulouse pour m'avoir fait l'honneur de juger mes travaux, en qualité de rapporteurs. Que soient également remerciés le Pr. Gilmar Monpean du Laboratoire de Mécanique de Lille et le Dr. Jongen Thilbault de Techspace BELGIQUE, pour avoir accepté d'être membres du Jury.

Ce travail est le fruit d'énormes sacrifices pour moi et pour mes proches. Mes pensées d'abord vont à l'endroit de mon épouse qui, pendant ce long moment a supporté le poids de mon absence et fait face à maintes situations. Je sais que Zul et Amir ne t'ont pas toujours rendu la tâche facile. Reçoit ici toute ma gratitude.

Cette thèse, orientée vers la simulation numérique, n'aurait pu se dérouler correctement sans l'aide et le travail efficace des informaticiens du LEA en particulier Vincent Hurtevent, Francis Boissonneau. Je leur témoigne ici toute ma reconnaissance.

Je n'oublie pas tous les professeurs de l'équipe Electrofluidodynamique (OP5). J'ai évidemment passé de merveilleux moments avec votre équipe pendant mon année de Master. Je pense à C. Louste, E. Moreau, N. ZOUZOU, T. Paillat, H. Romat et G. Touchard. Philippe Traoré, je pense aux bons moments passés ensemble à échanger sur des sujets scientifiques.

Merci également aux amis thésards et Post Doc avec qui j'ai passé d'agréables moments dans ce laboratoire : Aminou, Atabak, Zied, Yannick, Thi- Kim-Dung, Yacine, jerôme, Boni, Sabrina, Christophe, Joseph, Romain, Sylvain, Cyprian, Michel Darboux, Eladawy, Maxime, Hélène.

Ma reconnaissance va également vers tout le personnel de ce Laboratoire. Je pense à, Yves son directeur, Serge Macia mon responsable CNRS, cathérine, chantal, Refin, Yvan et tous les autres.

Cette thèse a aussi été l'occasion pour moi de voyager et de participer à de nombreuses réunions scientifiques qui m'ont été fort enrichissantes. Ma pensée va vers toute l'équipe du Projet Européen WALLTURB, tous les laboratoires et Universités Européens impliqués dans ce projet et en particulier le groupe WP4 sans oublier le Pr. Stanislas avec qui j'ai beaucoup échangé.

Ma reconnaissance va également à l'endroit de Mme et M. FAGBEMI à Poitiers. Je reste convaincu de votre grandeur d'esprit, de votre humanité et je tiens à vous en remercier. Merci aussi pour tous les efforts que vous faites pour ma réussite professionnelle et sociale. Je n'omettrai nullement Adétola et Armel.

Je n'oublie pas mes amis de la rue René Amand : Jean Marien Esso, Lookman Adéoyè, je garde en mémoire ces moments passés ensemble dans cet appartement plein de souvenir.

Comment puis-je oublier ma famille Ivoirienne : Mado et célestin Ehouman. Recevez ici mes vifs remerciements.

Une place à part revient à mon épouse, mes enfants Zul-Kilfi et Amir, mes frères et soeurs, ma mère, mes amis ainsi qu'à tous les membres de ma famille qui m'ont toujours tout donné, soutenu, fait confiance et bien plus encore. Je pense aussi à Ayouba, Masmoud Saizonou, Rachidi, Kao et Aziz, Razack Oket, Dr. Kingbo, La famille Lomdo, M. Kabirou Sadikou, Chacour Dissou, B.K, Redouane et tous les autres qui se reconnaîtront.

J'ai une pensée particulière à l'endroit de mon défunt père. Tellement tu souhaiterais partager ce moment avec moi. Mais sache que ta bénédiction est pour moi plus précieuse.

Cette thèse de Doctorat restera un hommage à mon épouse, à mes enfants et à mon défunt père. Qu'ils reçoivent ici toute ma reconnaissance.

À mon épouse,
À Zul et Amir,
À mon défunt père.

Table des matières

1 La modélisation statistique **4**
- 1.1 Modèles de viscosité turbulente . . . 5
- 1.2 Modèles du type RSM . . . 7
  - 1.2.1 Diffusion turbulente . . . 7
  - 1.2.2 Tenseur de dissipation . . . 8
  - 1.2.3 Terme de pression . . . 8
  - 1.2.4 Limitation des modèles . . . 9

2 La physique des parois **11**
- 2.1 Les phénomènes et effets dues à la présence de paroi . . . 12
  - 2.1.1 Phénoménologie : structures cohérentes . . . 12
  - 2.1.2 Liens entre les structures cohérentes et les équations des tensions de Reynolds . . . 14
- 2.2 Effets induits par la paroi . . . 15
  - 2.2.1 Effets visqueux . . . 15
  - 2.2.2 Effets non visqueux . . . 15
    - 2.2.2.1 Effet de Blocage . . . 15
    - 2.2.2.2 Effet d'écho de paroi . . . 16
- 2.3 Comportements asymptotiques à la paroi . . . 17
- 2.4 Quelques modèles de paroi . . . 18
  - 2.4.1 Les modèles bas Reynolds . . . 19
  - 2.4.2 Les modèles hybrides . . . 19
  - 2.4.3 La relaxation elliptique . . . 20
- 2.5 Conclusion . . . 21

3 Prise en compte des effets de paroi : la Pondération Elliptique **22**
- 3.1 Formulation de la relaxation elliptique . . . 22
- 3.2 Modélisation de $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ . . . 24
- 3.3 De la Relaxation Elliptique au modèle de Pondération Elliptique . . . 26
  - 3.3.1 Modélisation du terme de redistribution . . . 26
  - 3.3.2 Modélisation des termes de dissipation et de diffusion . . . 28
  - 3.3.3 Comportements asymptotiques des termes de pression et de dissipation . . . 28

3.3.3.1 Comportements asymptotiques 28
3.4 Validation en proche paroi du modèle 30
3.4.1 Modélisation de α : test à priori à différents Reynolds 30
3.4.2 Modélisation de α : échelle de Longueur 32
3.5 Conclusion 35

4 La modélisation Algébrique **36**
4.1 Méthodologie de la Modélisation Algébrique 37
4.1.1 Évolution du tenseur de Reynolds 37
4.1.2 Évolution du tenseur d'anisotropie 38
4.2 Formulation Algébrique 38
4.2.1 Modèle algébrique implicite ASM 39
4.2.2 Modèle Algébrique explicite 40
4.3 Le modèle Algébrique EB-EASM 41
4.3.1 Formulation EASM 41
4.4 Introduction de la pondération elliptique : Formulation EB-EASM . . . 44
4.4.1 Système Algébrique 45
4.5 Équations du modèle Algébrique Explicite EB-EASM 46
4.5.1 Projection de Galerkine 46
4.5.2 Solutions du système 48
4.5.3 Rôle des invariants du modèle EB-EASM 48
4.6 Étude des variations de $\frac{P}{\varepsilon}$ 49
4.6.1 Justification du degré de l'équation de β_1 50
4.7 Conclusion 55

5 Choix des bases de tenseurs **56**
5.1 Principes d'élaboration des bases d'intégrité 57
5.1.1 Base d'intégrité Invariante en 3D 58
5.1.2 Base d'intégrité fonctionnelle 58
5.1.3 Application à la détermination de la base fonctionnelle du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ en 3D 60
5.1.4 Cas de l'écoulement 2D plan 62
5.1.5 Cas de l'écoulement 1D 64
5.2 Études de quelques modèles EB-EASM 64
5.3 Prédiction de l'anisotropie à la paroi 66
5.4 Conclusion 69

6 Modèles EB-EASM dans le cas de l'écoulement en Canal (1D) **71**
6.1 Choix du degré du coefficient de pondération 71
6.2 Modèle EB-EASM#1 72
6.2.1 Anisotropie en proche paroi 73
6.2.2 Test à priori du modèle EB-EASM#1 74
6.3 Modèle EB-EASM #2 75

6.4 Simulation Numérique des écoulements en canal 78
6.4.1 Implémentation du modèle dans un code 1D 78
6.4.2 Résultats du modèle non linéaire EB-EASM#1 80
6.4.3 Évaluation du coefficient de pondération α 80
6.4.4 Résultats du modèle linéaire EB-EASM #2 85
6.4.5 Les modèles linéaire EB-EASM #3, et non linéaire EB-EASM #4 90
6.5 Les Modèles EB-EASM dans le cas des écoulements type Couette - Poiseuille 91
6.6 Les Modèles EB-EASM dans le cas des écoulements de couche limite sans cisaillement 95
6.7 Conclusion 96

7 Extension des Modèles algébriques EB-EASM en 3D 97
7.1 Représentation des modèles EB-EASM sur une base de Cinq (05) tenseurs 97
7.2 Représentation sur une base de trois (03) tenseurs 99
7.3 *Test à priori* de l'EB-EASM dans le cas d'un jet impactant sur disque en Rotation 100
7.3.1 Présentation et description du dispositif 100
7.3.2 Cadre de l'étude 101
7.4 Résultats et discussions 102

8 Conclusion 105

A Le Modèle de pondération elliptique EB-RSM : Formulations et Équations 116
A.1 Equation de transport des tensions de Reynolds 117
A.2 Equation de relaxation Elliptique de α 118
A.3 Équations d'évolution du taux de dissipation 118
A.4 Échelle de temps 118
A.5 Les coefficients 118
A.6 Les conditions aux limites à la paroi 119

B Constitution de bases invariantes et fonctionnelles de tenseurs du second d'ordre 120
B.1 Théorème de Cayley Hamilton Généralisé 120
B.1.1 Application du théorème de Cayley Hamilton pour les tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$ 122
B.1.2 Application du théorème de Cayley Hamilton aux tenseurs $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{M}$ 124
B.2 Cas des matrices 2x2 125
B.3 Constitution de la Base d'intégrité Invariante 126
B.3.1 Extension d'un produit de tenseur 126

B.3.2 Base d'intégrité Invariante 127
B.3.2.1 Application aux tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ 127
B.3.2.2 Application aux tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{M}$ 127
B.3.3 Base d'intégrité fonctionnelle 128
B.3.4 Application à la détermination de la base fonctionnelle du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ 129
B.3.4.1 Cas de l'écoulement 2D 131
B.3.4.2 Cas de l'écoulement 1D 133
B.3.5 Étude du cas particulier $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W})$ 133
B.3.6 Base fonctionnelle dans d'autres configurations 134

C Les modèles algébriques explicites EB-EASM en 2D plan 136
C.1 Le modèle algébrique explicite linéaire EB-EASM#2 136
C.1.1 Expressions des coefficients de l'équation en β_1 136
C.1.2 Traitement de la solution β_1 138
C.1.3 Tenseur d'anisotropie 138
C.1.4 Cas particulier des écoulements en canal **1D** 139
C.1.5 Solutions β_i 139
C.1.6 Tenseur d'anisotropie 139
C.2 Le modèle algébrique explicite non linéaire EB-EASM#1 139
C.2.1 Solutions β_i en écoulement 2D 140
C.2.2 Equation en β_1 141
C.2.3 Tenseur d'anisotropie 141
C.3 Justification du degré de l'équation en β_1 : les coefficients 142

D Écoulement Couette - Poiseuille : comparaison des résultats pour α^2 et α^3 143

E Modèle EB-EASM en écoulement 3D 147
E.1 Cas de trois tenseurs : modèle EB-EASM#1 147
E.1.1 Système linéaire 147
E.1.2 Matrices de projection 148
E.1.3 Solution du système linéaire 149
E.1.4 Traitement de la solution β_1 150
E.2 Cas de cinq tenseurs 150

F Résumé des équations des modèles EB-EASM 152
F.1 Modèle non linéaire EB-EASM#1 152
F.2 Modèle linéaire EB-EASM#2 156

Table des figures

2.1 Production de la turbulence près des parois d'après [17] 13
2.2 Écoulement image pour le terme d' *écho de paroi* 17

3.1 Étude comparée du profil du coefficient α pour différents nombres de Reynolds. (a–b) α est calculé à *priori* à partir de l'équation (3.26) . . . 31
3.2 Étude comparée du profil du coefficient α pour différents nombres de Reynolds. α est calculé à *priori* à partir de l'équation (3.28) 31
3.3 Corrélation échelle de longueur L pour $Re_\tau = 395$, 550, 590, 950, 2000 évalué à *priori* : (a) à partir Eq. (3.32) ; (b) en utilisant le modèle L_{Durb}. 33
3.4 Comparaison de l'échelle de longueur L évalué à *priori* et le modèle L_{Durb} pour $Re_\tau = 950$ et 2000 33

6.1 Étude comparative des profils de la vitesse moyenne à différents Reynolds pour le modèle EB-EASM#1 utilisant α^2 et α^3 72
6.2 Évolution du tenseur d'anisotropie. Test *priori* du modèle EB-EASM#1 pour $Re_\tau = 2000$ [49] 76
6.3 Tenseurs de Reynolds. *Test priori* du modèle EB-EASM#1 pour $Re_\tau = 2000$ [49] 76
6.4 Tenseur d'anisotropie. Test à *priori* des modèles EB-EASM#1 et Rumsey *et al.* en comparaison avec la DNS pour $Re_\tau = 2000$ [49] 77
6.5 Tenseur de Reynolds. Test à *priori* des modèles EB-EASM#1 et Rumsey *et al.* en comparaison avec la DNS pour $Re_\tau = 2000$ [49] 77
6.6 Évolution du tenseur d'anisotropie. Test *priori* du modèle EB-EASM#2 pour $Re_\tau = 2000$ [49] 79
6.7 Évolution du tenseur de Reynolds. Test *priori* du modèle EB-EASM#2 pour $Re_\tau = 2000$ [49] 79
6.8 Profils de la vitesse moyenne prédits par les modèles EB-EASM #1 et EBRSM pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, 950 et 2000 Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 81
6.9 Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#1 , EB-RSM et Rumsey *et al.* pour $Re_\tau = 2000$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 81

6.10 Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#1 , et EB-RSM pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, et 950. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]. 82
6.11 Quelques profils des tensions de Reynolds par les modèles EB - EASM#1 et EB-RSM sur une *échelle logarithmique* pour $Re_\tau = 2000$, 950 et 590. 83
6.12 Profils des composantes de l'anisotropie prédits par les modèles EB - EASM#1 , et EB-RSM pour Re 590. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]. 84
6.13 Profils de α pour $Re_\tau = 180$, 395, 550 , 590 , 950 et 2000. α est obtenu par simulation numérique et les profils donnés par le modèle EB-EASM#1 se superposent parfaitement. 84
6.14 Profils de la vitesse moyenne prédits par les modèles EB-EASM #2 et RV2F pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, 950 et 2000 Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 86
6.15 Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#2 , RV2F pour $Re_\tau = 2000$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 86
6.16 Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#2 , et RV2F pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, et 950. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 87
6.17 Quelques profils des tensions de Reynolds par les modèles EB - EASM#2 et RV2F sur une *échelle logarithmique* pour $Re_\tau = 2000$, et 590. 88
6.18 Quelques profils des composantes de l'anisotropie prédits par les modèles EB - EASM#2 , et RV2F pour $Re_\tau = 590$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56] 89
6.19 Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds. 90
6.20 Écoulement Couette-Poiseuille : Profils de vitesse moyenne. Poiseuille-type (PT), Couette type-(CT) et Intermediate-Type (IT) 92
6.21 Écoulement Couette-type (CT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 207$. 93
6.22 Écoulement type Intermédiaire (IT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 182$. 93
6.23 Écoulement de Poiseuille-type (PT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 113$. 94
6.24 Évolution des coefficients de projection 94
6.25 Couche limite sans cisaillement 95

7.1 Configuration schématique du jet et du disque en rotation. 100
7.2 Test à priori modèle EB-EASM#1 . Composantes normales du tenseur de Reynolds pour le profils x=4.8 103
7.3 Test à priori modèle EB-EASM#1 . Composantes de Cisaillement du tenseur de Reynolds pour le profils x=4.8 104

D.1 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Poiseuille $Re_\tau = 113$ 143

D.2 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Poiseuille $Re_\tau = 204$ 144
D.3 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement Intermédiaire $Re_\tau = 100$ 144
D.4 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement Intermédiaire $Re_\tau = 182$ 145
D.5 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Couette $Re_\tau = 110$ 145
D.6 Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Couette $Re_\tau = 207$ 146

Liste des tableaux

2.1 Comportement asymptotique des différents termes de l'équation des tensions de Reynolds en écoulement de canal. 19

3.1 Comportement asymptotique du terme de pression et de dissipation en écoulement de canal 29

4.1 Valeurs des coefficients g_i utilisés par Rumsey *et al.* 42
4.2 Valeurs des nouveaux invariants pour quelques écoulements particuliers 49

5.1 Tableau comparatif du nombre d'éléments des différentes bases dans les cas ou le tenseur d'anisotropie en fonction de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ puis de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$ 65
5.2 Quelques combinaisons de tenseurs de base : Modèles EB-EASM 66
5.3 Prévision de la limite à deux composantes de la turbulence ($\boldsymbol{b}_{22} = -1/3$) en écoulements 1D et 2D plan 69

Notations et Symboles

Opérateurs Mathématiques

$\|\|\boldsymbol{u}\|\| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$	Norme du vecteur $\boldsymbol{u}$
$[\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}]_{ij} = u_i v_j$	Produit tensoriel des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$
$\mathrm{d}f/\mathrm{d}\varphi$	Dérivée totale de f par rapport à φ
$\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}\varphi^2$	Dérivée seconde totale de f par rapport à φ
$\partial f/\partial\varphi$	Dérivée partielle de f par rapport à φ
$\partial^2 f/\partial\varphi^2$	Dérivée seconde partielle de f par rapport à φ
$\boldsymbol{\nabla} f$	Gradient de f
$\nabla\cdot\boldsymbol{u}$	Divergence de $\boldsymbol{u}$
$\nabla^2 f$	Laplacien de f
$f = \mathcal{O}(g)$	f équivalent à g au voisinage de zéro ($\lim_{y\to 0} f/g = 1$)
$f \propto g$	f proportionnel à g ($f/g =$ constante)

Symboles Latins

A_1	Constante du modèle EB-RSM
a_1 (a_2, a_3, a_4)	Constante du modèle de Rumsey
a_5	Constante du modèle EB-RSM
b_{ij}	Tenseur d'anisotropie dans la méthodologie RANS
$C_f = 2\tau_p/(\rho U_0^2)$	Coefficient de frottement
C_K	Constante de Kolmogorov
C_s	Constante du modèle de transport turbulent
C_L	Constante du modèle EB-RSM
C_T	Constante du modèle EB-RSM
C_{ε_1}	Constante de l'équation de la dissipation
C'_{ε_1}	Constante du modèle EB-RSM
C_{ε_2}	Constante de l'équation de la dissipation
D^P_{ij}	Tenseur de transport par la pression fluctuante
$D^P = \frac{1}{2}D^P_{kk} = \frac{1}{2}\phi^*_{kk}$	Terme de transport par la pression fluctuante
D^T_{ij}	Tenseur de transport turbulent
$D^T = \frac{1}{2}D^T_{kk}$	Terme de transport turbulent

D^{ν}_{ij}	Tenseur de diffusion moléculaire
$D^{\nu} = \frac{1}{2}D^{\nu}_{kk}$	Terme de diffusion moléculaire
$\mathcal{G}_{ij} = \phi^{*}_{ij} - \varepsilon_{ij} + \varepsilon^{w}_{ij}$	Variable de la théorie de la relaxation elliptique
$f_{ij} = \mathcal{G}_{ij}/k$	Variable de la théorie de la relaxation elliptique
f_{SGS}	Fonction de retour à l'isotropie des petites échelles
g_i	Constante du du modèle SSG
h	Demi-hauteur de canal
$k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$	Énergie fluctuante totale en décomposition RANS
$L = k^{3/2}/\varepsilon$	Échelle intégrale de longueur de la turbulence
L_{Durb}	Longueur de corrélation des effets de paroi de Durbin
$L_{\eta} = \nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$	Échelle de longueur de Kolmogorov
$\boldsymbol{n}$	Vecteur unitaire normal à la paroi
P^{*}	Pression instantanée
$\mathcal{P} = \overline{P^{*}}$	Moyenne d'ensemble de la pression
$p = P^{*} - \overline{P^{*}}$	Fluctuation de pression en décomposition RANS
P_{ij}	Tenseur de production de l'énergie cinétique fluctuante totale
$P = \frac{1}{2}P_{kk}$	Terme de production de l'énergie cinétique fluctuante totale
Re	Nombre de Reynolds
Re_{τ}	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement
$Re_t = k^2/(\nu\varepsilon)$	Nombre de Reynolds turbulent
$R_{ij} = \overline{u_i u_j}$	Tenseur de Reynolds
S_{ij}	Tenseur de déformation basé sur le champ moyen RANS
$\boldsymbol{T}_i$	Tenseurs de la base d'intégrité fonctionnelle
$T = k/\varepsilon$	Échelle intégrale temporelle de la turbulence
$T_{\eta} = \sqrt{\nu/\varepsilon}$	Échelle temporelle de Kolmogorov
U^{*}_i	Vitesse instantanée (U^{*}, V^{*}, W^{*})
$U_i = \overline{U^{*}_i}$	Moyenne d'ensemble de la vitesse (U, V, W)
$u_i = U^{*}_i - \overline{U^{*}_i}$	Fluctuation de vitesse en décomposition RANS (u, v, w)
$u_{\tau} = \sqrt{\tau_p/\rho}$	Vitesse de frottement
$U^{+} = U/u_{\tau}$	Vitesse moyenne en unité pariétale
$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$	Vecteur position
$y^{+} = yu_{\tau}/\nu$	Distance à la paroi en unité pariétale

Symboles Grecs

α	Coefficient de pondération elliptique du modèle EB-RSM
β_i	coefficients de projection du modèle EB-EASM
δ	Épaisseur de couche-limite
δ_{ij}	Symbole de Krönecker

ε_{ij}	Tenseur du taux de dissipation de l'énergie fluctuante
$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{kk}$	Taux de dissipation de l'énergie fluctuante
ε_{ij}^{h}	Modèle quasi-homogène du tenseur de dissipation
ε_{ij}^{w}	Modèle en proche paroi du tenseur de dissipation
η	Invariant du modèle EB-RSM
η_i	Invariants de la base d'intégrité Invariante
ϕ_{ij}	Corrélation pression-déformation
ϕ_{ij}^{*}	Corrélation vitesse-gradient de pression
ϕ_{ij}^{h}	Modèle quasi-homogène du terme de pression
ϕ_{ij}^{w}	Modèle en proche paroi du terme de pression
μ	Viscosité dynamique du fluide
$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinématique du fluide
ρ	Masse volumique du fluide
τ_{ij}	Tenseur de Reynolds
$\tau_\nu = \mu(\partial U/\partial y)$	Contrainte visqueuse de cisaillement
$\tau_p = \mu(\partial U/\partial y)_{y=0}$	Contrainte de cisaillement pariétale
W_{ij}	Tenseur de rotation basé sur le champ moyen RANS

Autres Symboles

$\mathcal{P}$	Invariant du modèle EB-RSM
$\mathcal{Q}$	Invariant du modèle EB-RSM
$\mathcal{R}$	Invariant du modèle EB-RSM
$\boldsymbol{M}$	Tenseur définissant l'orientation de la normale à la paroi- modèle EB-RSM

SIGLES

DNS	Direct Numerical Simulation
EB-EASM	Elliptic Explicit Algebraic Stress Model
EB-RSM	Elliptic Blending Reynolds-Stress Model
EVM	Eddy Viscosity Model
IP	Isotropization of Production
LRR	Launder, Reece, Rodi
QI	Quasi-Isotropization
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
rms	Root-Mean Square
RSM	Reynolds-Stress Model
SSG	Speziale, Sarkar, Gatski
SST	
TCL	Two Component Limit (Modèle de Craft et Launder (1996)
$\overline{v^2}$–f	modèle de Durbin
RV2F	version améliorée par Manceau *et al.* du modèle $\overline{v^2}$–f

Introduction

La plupart des écoulements rencontrés en mécanique de fluides sont turbulents et le principal problème réside dans la connaissance des phénomènes les régissant, la mise en place de modèles statistiques de prédétermination des écoulements aussi précis que possible, notamment pour le monde industriel, en particulier la détermination des tensions de Reynolds apparaissant dans les équations moyennées de Navier Stokes. Le développement des modèles de fermetures est encore de nos jours un sujet d'intenses activités de recherches et de nombreux efforts sont consacrés aux développements de modèles de turbulence susceptibles de répondre aux exigences précédentes. Les premiers modèles élaborés sont ceux de Boussinesq et sont basés sur l'emploi de la viscosité turbulence. Ces types de modèles ainsi que les diverses améliorations apportées ont été très largement utilisés et ont permis malgré leur limitation théorique, de reproduire assez correctement les mesures d'origine expérimentales pour des cas d'écoulements simples : ce sont des modèles à équations de transport dits de premier ordre dont le plus répandu est le modèle k–ε de Jones et Launder [68].

Du fait de la dépendance de la linéarité de la loi de comportement, les expériences sur les écoulements complexes ont permis de montrer les limites de ces modèles et leur incapacité à prendre en compte la physique des écoulements malgré les améliorations qui lui sont appliquées [51].

Pour pallier à ces insuffisances, de nombreux modèles du second ordre ont vu le jour. Leur particularité réside dans la prise en compte de la résolution des équations de transport des contraintes turbulentes. N'étant pas basés sur le concept de viscosité turbulente, ces modèles sont souvent moins dissipatifs que les précédents, reproduisent mieux les aspects tridimensionnels des écoulements, et permettent un échange local éventuel d'énergie du mouvement fluctuant vers le mouvement moyen, aspects physiques souvent observés. En revanche, si ces modèles n'ont pas bonne réputation au sein des communautés industrielles, c'est principalement dû aux instabilités numériques qu'ils génèrent contrairement aux modèles du premier ordre. Dans le but de concilier les avantages des deux catégories, des modèles du second ordre à relations algébriques pour les contraintes communément baptisés *modèles algébriques* sont développés. Leur formulation est proposée par Rodi [108] par une approximation des termes convectifs et diffus ifs de l'équation des tensions de Reynolds et devrait ainsi permettre d'atténuer les difficultés précédemment rencontrées. Malheureusement, ces équations sont *implicites*,

leur résolution est très onéreuse et pose de réels problèmes de stabilités numériques. Ces difficultés ont conduit Pope [103] à établir pour la première fois pour un écoulement bidimensionnel, un *modèle algébrique explicite* : EASM. Devant les résultats et la simplicité de l'approche de Pope, Taulbee [122], Gatski et Speziale [30] l'ont généralisé en 3D.

Par ailleurs, mis à part certains types d'écoulements comme les jets et les couches de mélanges, la plupart des écoulements se font soit autour d'un obstacle, soit à l'intérieur d'un domaine limité par des parois et les phénomènes générés par leur présence, qui se manifestent dans une région très mince, sont souvent reproduit par l'utilisation des fonctions d'amortissement [110, 27, 126, 122, 57]. Ces fonctions d'amortissements *particularisent* malheureusement les modèles par l'introduction des paramètres empiriques calés pour chaque type d'écoulements. De ce fait, l'universalité des modèles *algébriques explicites* est remise en cause. Dans cette thèse réalisée dans le cadre du projet Européen WALLTURB [1] au Laboratoire d'Études Aérodynamiques (LEA), une nouvelle alternative est proposée : l'introduction du modèle de pondération elliptique EB-RSM [2] développé par Manceau et Hanjalić [87] puis amélioré par Manceau [82] dans les modèles algébriques explicites, ce qui conduit à la naissance de nouveaux modèles linéaires et non linéaires, baptisés EB-EASM [3]. Les premiers résultats comparés à ceux de la simulation numérique directe[94, 49, 56], aux modèles EB-RSM et $\overline{v^2}$–f semblent apporter une lueur d'espoir, étant donné que le modèle EB-RSM est construit autour de l'approche de Durbin [26] qui, évitant au maximum l'introduction des termes *ad hoc*, paraît être la plus prometteuse en terme d'universalité et d'accessibilité dans les codes industriels.

Dans l'objectif de la conception de modèles algébriques explicites à pondération elliptique valables en proche paroi, les travaux de thèse que nous présentons vont s'articuler autour de huit chapitres.

Le premier chapitre présente les notions de la modélisation statistique, les avantages et limitations des modèles à viscosité turbulente et RSM. Une importance particulière sera accordée à la modélisation du terme de redistribution de l'équation du tenseur de Reynolds.

Le deuxième chapitre traite des différents phénomènes induits par la présence d'une paroi dans un écoulement turbulent. Nous savons que l'une des difficultés de ces écoulements provient du fait que, dans la plupart des cas, les statistiques de la turbulence et donc de l'écoulement tout entier, dépendent très fortement de ce qui se passe très près des parois. Une compréhension de ces phénomènes sera nécessairement un atout pour la mise en place de modèles de turbulence. Nous exposerons donc ici, les mécanismes de production de la turbulence à partir de la description des structures cohérentes, ainsi que les principaux facteurs qui modifient l'écoulement et le développement de la

[1] A European Synergy for the Assessment of Wall Turbulence. European union 6th framework program, contract number AST4-CT-2005-516008

[2] Elliptic Blending Reynolds Stress Model

[3] Elliptic Blending - Explicit Algebraic Stress Model

turbulence notamment l'adhérence du fluide à la paroi, l'effet de blocage et l'écho des fluctuations de pression. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à présentation de quelques modèles utilisés comme modèles *bas Reynolds*.

Les modèles algébriques explicites à concevoir introduisent la pondération elliptique (EB-RSM) [87, 82] comme modèle de paroi. Le troisième chapitre de cette thèse lui est entièrement consacré. Un exposé des différentes formulations du modèle sera présenté en passant par la relaxation elliptique de Durbin [26] dont il est issu. Nous compléterons ce chapitre par la validation en proche paroi du modèle dans le cas d'un écoulement en canal en étudiant l'influence du nombre de Reynolds sur le coefficient de pondération et l'échelle de longueur.

Le quatrième chapitre est consacré aux différentes formulations implicite et explicite de la modélisation algébrique dans le cas d'écoulement bidimensionnel. Nous présentons les équations d'une première version du modèle EB-EASM résultant de l'introduction de la pondération elliptique, en utilisant la base de projection classique à trois tenseurs. Une étude analytique en proche paroi de l'anisotropie nous permettra de juger de leur validité comme modèle *bas Reynolds*.

La forme d'un modèle algébrique explicite dépend de la nature et du nombre de tenseurs constituant la base de projection. Ainsi, il est possible de construire toute famille de modèles allant de deux (02) à cinq (05) tenseurs ayant des propriétés différentes en terme de reproduction de l'anisotropie et de linéarité. En particulier l'introduction de la pondération elliptique dans les équations des modèles algébriques fait apparaître un *nouveau* tenseur baptisé $\boldsymbol{M}$ donnant des informations sur l'orientation de la paroi. Nous proposons dans ce cinquième chapitre d'étudier comment la théorie des bases d'intégrité [117] permet de définir le nombre de tenseurs nécessaire devant constituée une base à prendre en compte afin d'éviter toutes singularités dans les modèles de turbulence.

Ce chapitre sera suivi du chapitre 6 consacré à la validation des modèles algébriques EB-EASM linéaires et non linéaires mis en oeuvre dans le cas des écoulements en canal, des écoulements de type Couette - Poiseuille, pour celui de la couche limite sans cisaillement.

Avant de conclure ce travail par le chapitre 8, nous développons au chapitre 7, l'extension des modèles EB-EASM dans le cas d'une configuration 3D. L'objectif étant de savoir s'il est nécessaire de prendre en compte le caractère tridimensionnel des modèles EB-EASM ou si les approximations 2D plan sont suffisantes.

Chapitre 1

La modélisation statistique

La modélisation statistique communément appelée Modélisation RANS (Reynolds Average Navier Stokes) traite la turbulence comme un phénomène non déterministe. Elle a été conçue pour produire des solutions numériques du mouvement moyen du fluide au sens de la moyenne d'ensemble de ces équations. Le mouvement instantané du fluide est décrit par les équations de Navier Stokes qui pour un fluide newtonien incompressible, sans force volumique ni rotation d'ensemble, se mettent sous la forme :

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial t} + U_j^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i^*}{\partial x_j \partial x_j} \tag{1.1}$$

dans laquelle, U_i^*, et P^* sont la vitesse et pression instantanées. Cette équation est associée à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

Par ailleurs, l'application de la décomposition de Reynolds en partie moyenne et fluctuante [1] à l'équation (1.1) permet d'obtenir les équations du champ moyen :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.3}$$

avec : $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j}$ définissant le tenseur de Reynolds. La connaissance des variations de ce tenseur est très importante pour la modélisation car il transporte les informations l'écoulement turbulent.

Par soustraction des équations (1.1) et (1.3), on aboutit à l' équation des vitesses fluctuantes :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i u_k - \overline{u_i u_k} + U_i u_k + U_k u_i\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{1.4}$$

[1] par exemple :$U_i^* = U_i + u_i$ et $P^* = \mathcal{P} + p$. Les premiers termes étant la partie moyenne et les seconds, la partie fluctuante.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.5}$$

D'autre part, les équations de transport du tenseur de Reynolds se déduisent de (1.4) et s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} &= \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D^{\nu}_{ij}} \underbrace{- \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D^{T}_{ij}} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho}\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}}_{\phi_{*ij}} \\ &\quad \underbrace{- \overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} \underbrace{- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{ij}}\end{aligned} \tag{1.6}$$

où C_{ij}, D^{ν}_{ij}, D^{T}_{ij}, ϕ^{*}_{ij}, P_{ij} et ε_{ij} sont appelés respectivement, terme de convection, de diffusion moléculaire (on verra dans le chapitre 2, l'important rôle joué par celui- ci en proche paroi), de transport turbulent * , de corrélation vitesse-gradient de pression* qui contribue à la redistribution des énergies entre les composantes du tenseur de Reynolds, de production de la turbulence et de dissipation visqueuse* [2]. En ce qui concerne l'énergie cinétique fluctuante $k = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$, elle s'obtient de l'équation (1.6) par contraction des indices. Ce qui aboutit à :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_{D^{\nu}} \underbrace{- \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u_i u_i u_j}}{\partial x_j}}_{D^{T}} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p u_j}}{\partial x_j}}_{D^{P}} \underbrace{- \overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{P} \underbrace{- \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}}_{\varepsilon} \tag{1.7}$$

avec $P = \frac{1}{2}P_{ii}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii}$ et $D = D^{\nu} + D^{T} + D^{P}$.

Afin de résoudre les problèmes relatifs à la fermeture des équations(1.6), deux grandes classes de modèles en un point seront présentées de façon exhaustive : les modèles dits à *viscosité turbulente* pour lesquels on évalue le tenseur des contraintes turbulentes à partir du tenseur de déformation, la seconde classe concerne les modèles de *second ordre* pour lesquels on résout une équation de transport pour chacune des composantes du tenseur de Reynolds.

1.1 Modèles de viscosité turbulente

Dans les modèles à viscosité turbulente (EVM)[3], la modélisation du tenseur de Reynolds s'appuie une relation algébrique dépendant des taux de déformation S_{ij} et

[2] les termes marqués par * sont ceux qui nécessitent une modélisation

[3] Eddy viscosity Model

de rotation W_{ij}. Généralement, les modèles les plus couramment utilisés reposent sur une relation purement linéaire de la forme :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} \nu_t^2 S_{ij} \tag{1.8}$$

dans laquelle,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.9}$$

La relation (1.8) implique l'alignement du tenseur de Reynolds sur celui des déformations. Ce qui n'est pas toujours le cas. Il faut par conséquent définir la viscosité turbulente ν_t qui sera le seul degré de liberté du modèle. Pour cela en utilisant la relation de Prandtl Kolmogorov, elle sera reliée à l'énergie cinétique turbulente et la dissipation par la relation :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{1.10}$$

Ensuite il sera nécessaire de résoudre une équation de transport des variables k (1.7) et ε qui deviennent ainsi les inconnues du modèle. Les résultats expérimentaux et des simulations des écoulements ont bien montrés que la loi de comportement (1.8) pose d'énormes problèmes. En effet, on note par exemple une production toujours positive, surestimée dans les zones d'impact et nulle en absence de déformation [4]. Ce qui n'est toujours pas le cas en réalité. De plus, du fait de l'utilisation de la relation algébrique entre les tenseurs de déformations et de Reynolds, elle induit une réponse instantanée de la turbulence à une variation du champ moyen et reproduit mal l'anisotropie du fait de la linéarité de la loi de comportement. Le plus célèbre de ces modèles est le modèle $k-\varepsilon$ de Jones et Launder [68] qui est relativement simple, ne résolvant que ces deux équations supplémentaires k et ε, présente une grande robustesse et par conséquent, est disponible dans tous les codes de calcul industriels[4].

Afin de pallier aux défauts de ces modèles, de nombreux modèles non linéaires ont été développés. Ils adoptent toujours le concept de viscosité turbulente (1.10) et introduisent dans l'équation (1.8) un ou plusieurs termes supplémentaires pour corriger ces défauts [47, 121, 21, 7]. Il s'avère pour certain que ces termes introduisent plus d'instabilités dans les modèles. Néanmoins, d'autres modèles non linéaires à viscosité turbulente à l'instar du modèle Spalart et Allmaras [115], dans sa version dite SA-RC [5], ont donné d'assez bon résultats pour des configurations particulières [22, 63, 7, 3, 21, 121, 102, 6, 115] mais n'arrivent toujours pas à mieux reproduire l'anisotropie surtout en proche paroi ou pour des écoulements complexes ou de courbure. En somme, la seule raison de l'inadéquation des modèles à viscosité turbulente est purement d'ordre physique.

[4] Ces atouts et limitations sont d'ailleurs bien reproduits dans [1]

[5] Ce modèle de type viscosité turbulente qui prend en compte des corrections de courbure utiles, mais insuffisantes pour éviter d'avoir une dissipation trop forte des structures tourbillonnaires par la viscosité turbulente

1.2 Modèles du type RSM

La limitation des modèles EVM conduit naturellement à rechercher des solutions plus fines en évitant l'utilisation de la viscosité turbulente (1.10). Dans les écoulements réels, le tenseurs de Reynolds ne s'aligne pas immédiatement sur celui de déformation [38], il y a un retard, un temps de relaxation, qui rend l'interaction entre turbulence et champ moyen beaucoup plus complexe. Pour ces raisons on peut résoudre directement les équations de transport du tenseur de Reynolds (1.6). Les modèles de ce type sont dits modèles du *second ordre* [6]. De plus il faut noter que par rapport aux modèles à viscosité turbulente, les modèles RSM sont moins dissipatifs, reproduisent mieux les effets non linéaires et permettent éventuellement un échange local d'énergie du mouvement fluctuant vers le mouvement moyen. En revanche, la résolution de l'équation (1.6) modifie profondément les propriétés numériques du modèle étant donné qu'il n' apparaît plus dans l'équation (1.4) sous forme d'un terme stabilisant de diffusion mais de divergence de $\overline{u_i u_j}$. De plus avec les modèles RSM, on doit se préparer à affronter des problèmes de stabilité numérique et par conséquent son coût onéreux.

Par ailleurs, nous avons évoqué précédemment la modélisation des termes de l'équation de transport du tenseur de Reynolds $\overline{u_i u_j}$. Cela consiste à construire des hypothèses de fermetures pour ces équations. Étant donné que les termes C_{ij}, D^{ν}_{ij} et P_{ij} ne dépendent que des vitesses moyennes et des tensions de Reynolds, ils ne seront pas modéliser contrairement aux termes D^{T}_{ij}, ϕ^{*}_{ij}, ε_{ij} qui eux sont fonctions de corrélations inconnues (voir eq (1.6)). Toutefois, il ne s'agit pas ici d'étaler toutes les batteries de procédures qui ont conduits à leurs modélisation et les différentes démarches effectuées pour y parvenir[7], mais plutôt d'examiner succinctement leurs écritures dans le cas des écoulements libres à haut Reynolds. Le cas des écoulements de paroi fera l'objet du chapitre 2 du fait de son importance dans le cadre cette thèse.
L'objectif de la modélisation étant de fournir des relations mathématiques qui permettent de fermer le système, on enregistre à travers cette opération une perte d'informations qu'il nous faut chercher à minimiser par des modèles représentant au mieux la physique des écoulements.

1.2.1 Diffusion turbulente

Les corrélations triples sont modélisées en fonction de $\overline{u_i u_j}$. Nous retiendrons celle proposée par Daly et Harlow [24] :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \tag{1.11}$$

le coefficient C_s varie entre 0,20 et 0,25. Cependant d'autres modèles sont proposés[42, 91, 77] mais l'avantage de (1.11) réside dans le fait qu'il est plus anisotrope, donc contri-

[6] Ils sont aussi désignés en anglais par 'RSM' Reynolds Stress Model ou modèles aux tensions de Reynolds

[7] on pourra se reporter à des articles et ouvrages qui traitent du sujet et ses applications [51, 41, 43, 120, 31, 29, 114, 80]

bue à la réduction d'éventuelles erreurs dues à la modélisation de ce terme. Signalons que cette modélisation (1.11) est utilisée dans le modèle à pondération elliptique [87] laquelle sera utilisée comme modèle de paroi dans les modèles à concevoir dans le cadre de cette thèse. Il faut noter par ailleurs que la modélisation de la diffusion turbulente, prend en fait en compte l'effet globale de $D_{ij}^T + D_{ij}^p$ [80, 13].

1.2.2 Tenseur de dissipation

Généralement ce tenseur est modélisé sous sa forme *isotrope*[8] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{1.12}$$

car on suppose que la dissipation d'énergie est réalisée par les petites échelles qui sont supposées isotropes. De plus, il faut résoudre l'équation de ε, classiquement modélisée par :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U_k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k} + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) \tag{1.13}$$

Le modèle proposé est mise à défaut en proche paroi et des corrections sont proposées [58, 66, 69] permettant à ε_{ij} de reproduire autant que possible l'anisotropie en proche paroi. Nous allons de plus montrer dans le chapitre 3 que les conditions aux limites sur ε devront être compatibles avec son comportement asymptotique.

1.2.3 Terme de pression

C'est le plus important terme qui a fait l'objet d'intenses recherches au sein la communauté scientifique. En effet, c'est un terme de redistribution qui assure la répartition des énergies entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds $\overline{u_i u_j}$. De manière à la rendre plus explicite, ce terme est décomposée en terme corrélation pression-déformation ϕ_{ij} de trace nulle et en diffusion par pression D_{ij}^p :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho}\,\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \tag{1.14}$$

$$D_{ij}^p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i p}\,\delta_{jk} + \overline{u_j p}\,\delta_{ik}\right) \tag{1.15}$$

Cette stratégie vise essentiellement à éviter l'influence de ϕ_{ij} sur le niveau d'énergie, rôle que va jouer D_{ij}^p. La modélisation de ϕ_{ij} se décompose en une partie lente, ϕ_{ij}^1 indépendante de la vitesse moyenne, et en une rapide dépendant du gradient de vitesse, ϕ_{ij}^2.

[8] *modèle de Kolmogorov*

$$\phi_{ij}^1 = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l}(\boldsymbol{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right]} \frac{d(\boldsymbol{x}')}{4\pi\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|} \tag{1.16}$$

et

$$\phi_{ij}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} 2\frac{\partial U_l}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}') \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right]} \frac{d(\boldsymbol{x}')}{4\pi\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|} \tag{1.17}$$

D'une manière générale Lumley [77] montre que l'écriture tensorielle la plus générale de ϕ_{ij}^1 est :

$$\frac{\phi_{ij}^1}{\varepsilon} = \alpha(I, II, III) \ + \beta(I, II, III)\ \boldsymbol{b} + \gamma(I, II, III)\ \boldsymbol{b}^2 \tag{1.18}$$

où I, II et III sont les invariants principaux de l'anisotropie $\boldsymbol{b}$ définis par :

$$I = 0 \quad ; \quad II = -\frac{\{\boldsymbol{b}^2\}}{2} \quad ; \quad III = \frac{\{\boldsymbol{b}^3\}}{3} \quad \text{avec : } \boldsymbol{b} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

De plus, cette modélisation ne dépend que de l'état de la turbulence caractérisé par le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ et ne fera donc pas intervenir le champ de vitesse moyenne.
En ce qui concerne ϕ_{ij}^2, la forme proposée doit dépendre du gradient de vitesse et du tenseur de Reynolds et justifier une linéarité par rapport aux gradients de vitesse. Speziale *et al.* [119] montrent qu'elle peut se présenter sous la forme :

$$\begin{aligned}\phi_{ij}^2 = {} & \xi_1 k \boldsymbol{S} + \xi_2 k \left(\boldsymbol{bS} + \boldsymbol{Sb} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{bS}\}\right) \\ & + \xi_3 k \left(\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{b}^2 - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\}\right) \\ & + \xi_4 k \left(\boldsymbol{bW} + \boldsymbol{Wb}\right) + \xi_5 k \left(\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{b}^2\right)\end{aligned} \tag{1.19}$$

Toutefois, le choix des paramètres α, β, γ et ξ_i détermine la nature et la complexité du modèle à concevoir. Ainsi, de ces différentes écritures de nombreux modèles non linéaires quadratiques [113, 119, 19, 112, 45, 65], cubiques [20, 34, 70] ont vu le jour dont les plus célèbres sont le modèle SSG de Speziale *et al.* [119], le modèle de Rotta+IP ou modèle LRR [65], le modèle TCL [20] développé à Université de Manchester. Malheureusement ces modèles présentent des limitations que nous allons brièvement analyser dans le paragraphe qui suit.

1.2.4 Limitation des modèles

Le passage aux modèles du second ordre est sans contestation le meilleur moyen pour prendre en considération les phénomènes physiques de la turbulence. Les modèles permettent de prédire les effets de courbure, de rotation d'ensemble, d'anisotropie ou

des retards de réaction à un changement brusque de l'écoulement moyen. Ces modèles sont sans doute meilleurs dans ce contexte que les modèles EVM sauf qu'ils présentent des problèmes d'instabilités numériques comme nous l'avons mentionné précédemment. Le nombre d'inconnues supplémentaires introduites par la résolution de l'équation de transport de $\overline{u_i u_j}$, vient appuyer cette affirmation. De plus, ces modèles sont pour la plupart des *modèles haut Reynolds*[9] et par conséquent incapables de reproduire les phénomènes de paroi, plus particulièrement, la composante $\overline{v^2}$ qui, comme on le verra au chapitre 2, se comporte asymptotiquement en y^4. Comportement d'ailleurs qui s'explique notamment par la considération des hypothèses de Chou [15] malheureusement plus valables dans ces régions. Nous verrons au chapitre 3 comment la relaxation elliptique introduite par Durbin [26] permet de rompre avec cette méthode classique de modélisation.
Les limitations non exhaustives des modèles EVM et du second ordre, notamment dans le cas des écoulements avec prise compte de paroi nous incitent à chercher à comprendre les mécanismes des phénomènes qui se déroulent dans la région de proche paroi et leur influence sur les modèles de turbulence.

[9]Ce terme est utilisé pour désigner les modèles non valables à la paroi

Chapitre 2

La physique des parois

Nous avons vu précédemment que la plupart des modèles sont développés et calibrés pour des écoulements turbulents à grands nombres de Reynolds, donc applicables uniquement dans les régions de turbulence pleinement développées et loin des parois. Généralement, la présence de la paroi solide modifie l'écoulement et le développement de la turbulence par trois facteurs principaux [98, 79, 83, 39, 80] : l'adhérence du fluide à la paroi rend prédominant le rôle de la viscosité dans les zones de proche paroi et conduit à un amortissement local de toutes les composantes turbulentes ; la présence de la paroi induit un confinement de l'écoulement (renforce le gradient de vitesse moyenne) et conduit à un effet de blocage rendant la turbulence proche d'un état à deux composantes en réduisant la tension normale dans la direction perpendiculaire à la paroi ; le troisième facteur est relatif à l'effet d'écho des fluctuations de pression qui modifie la redistribution de l'énergie cinétique entre les composantes normales du tenseur de Reynolds par le biais du terme des corrélations pression-déformations.
Pour prendre en compte la présence de la paroi où les effets visqueux et de blocage se font sérieusement sentir, un traitement particulier est nécessaire. Ce traitement est soit fondé sur la remise en cause des hypothèses de Chou [15] de quasi homogénéité et de localité élaborées lors de la modélisation du terme de redistribution [26, 81, 127, 124, 86, 84], soit consiste à introduire des fonctions d'amortissements prenant en compte la distance à la paroi [23] particularisant ainsi les modèles. Afin de mieux cerner ces différentes actions, nous allons d'abord chercher dans ce chapitre à comprendre les différents phénomènes qui se manifestent lorsque la présence d'une paroi se fait sentir, analyser les effets qui en découlent en étudiant le comportement asymptotique des différents termes de l'équation de transport du tenseurs de Reynolds, puis voir comment la paroi est prise en compte dans les différents modèles.

2.1 Les phénomènes et effets dus à la présence de paroi

2.1.1 Phénoménologie : structures cohérentes

Bien que la turbulence soit un phénomène chaotique, une couche limite turbulente est, en fait, constituée d'un ensemble de mécanismes relativement bien identifiés et organisés. Deux structures peuvent se distinguer : celles qui portent l'énergie et celles responsables de la dégradation d'énergie cinétique en chaleur (dissipation), sachant que la taille des structures les plus énergétiques augmente généralement avec la distance à la paroi. De plus, on peut découper la Couche limite en deux régions caractériques[1] : une zone de *proche paroi* où région *bas Reynolds* qualifiée par Pope [104] de *région visqueuse* [2] dans laquelle les effets visqueux sont significatifs et une zone *haut Reynolds* c'est à dire *loin de la paroi* ou *région externe* [3] qui ne subit aucune influence de la viscosité. Dans la région visqueuse, les échelles pertinents sont u_τ et ν. La région externe est quant à elle caractérisée par l'épaisseur de la couche limite δ et la vitesse U_∞. L'écoulement turbulent dans une couche limite est tel que le ratio production/dissipation atteint son maximum dans la zone de proche paroi, dans laquelle on enregistre également une forte diffusion visqueuse. Le pic de production se trouve au environ de $y^+ = 12$, au voisinage duquel une partie de l'énergie produite est dissipée sur place [14], la différence y est prélevée par l'ensemble des termes de diffusion et réinjectée vers la paroi pour revenir alimenter la sous couche visqueuse. En revanche, au delà de cette zone, l'apport de l'énergie en provenance du mouvement moyen est entièrement dissipée localement et cet équilibre Production = dissipation se maintient sur toute l'épaisseur restante, sauf en frontière de la couche limite où la diffusion turbulente redevient significative.

Les deux régions sont en perpétuelle interaction par l'intermédiaire de structures d'échelles de longueur et de temps différentes. De nombreuses expériences ont confirmé l'existence d'une séquence cyclique, [11, 61, 16, 62] liée à la production de la turbulence [16], qui relie ces deux régions. De façon générale, plusieurs événements caractéristiques ont été identifiés faisant intervenir des structures communément dénommées *structures cohérentes* [10, 62, 59, 60] comme on peut l'observer sur la figure 2.1.

L'écoulement proche de la paroi est très agité et reste toujours turbulent ; il est constitué d'un ensemble de stries longitudinales alternées à faible et à plus grande vitesse [17, 18] générées (figure 2.1) comme des tourbillons en épingle. La dimension individuelle de ces tourbillons varie beaucoup dans le temps et l'espace autour d'une valeur moyenne, mais leur espacement transversal est approximativement constant et égal à 15 fois l'épaisseur de la sous-couche visqueuse, soit une centaine d'unités de

[1] on peut bien raffiner cette décomposition : sous-couche visqueuse, zone tampon, zone logarithmique, zone centrale. Nous retenons ici la décomposition la plus pertinente pour la suite, celle de Pope [104]

[2] Viscous wall région : $y^+ < 50$

[3] Outer layer $y^+ > 50$ [104]

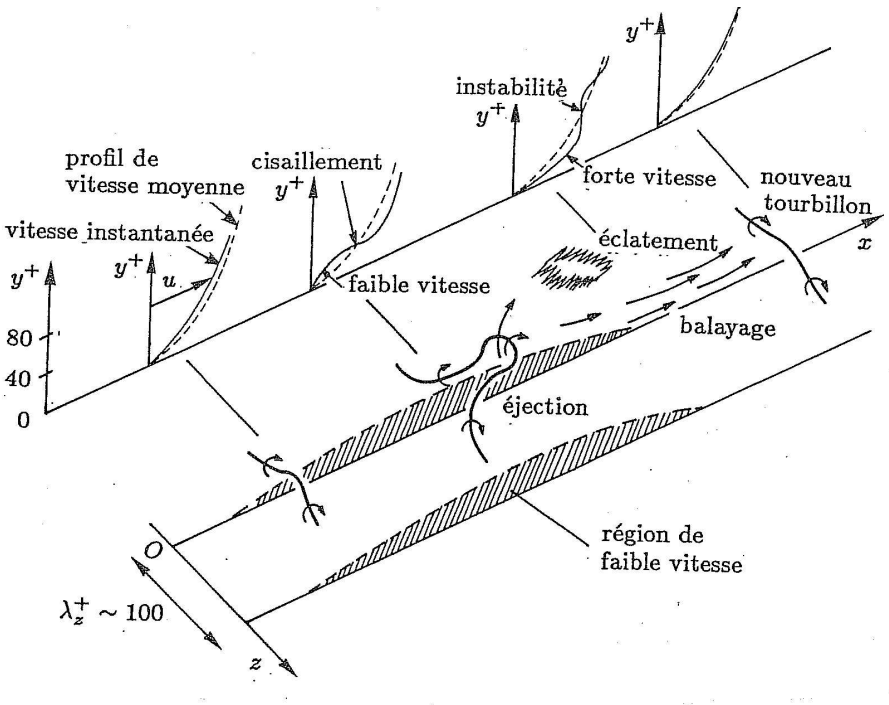


FIG. 2.1 – Production de la turbulence près des parois d'après [17]

paroi. C'est l'interaction de ces tourbillons avec le cisaillement qui induit les stries à forte et faible vitesse. Ils constituent des réminiscences de l'étape non linéaire de la zone de transition du régime laminaire au régime turbulent et sont souvent appelés *hairpin vortices.*[4].

L'interaction de ces stries alternées et l'action sur l'écoulement des importantes fluctuations de vitesse induites, provoquent le soulèvement des tourbillons contrarotatifs, chaque jambe de ces tourbillons se trouvant de part et d'autre de la strie à faible vitesse, emprisonnant ainsi une partie de fluide [64]. Cette strie s'élève progressivement, oscille violemment puis éclate dans un mouvement complètement chaotique. Cet éclatement est le point de départ du cycle de production d'énergie cinétique turbulente à travers un processus identifié sous la terminologie de *bursting* et des résultats d'essais ont montré qu'une partie la production de turbulence dans une couche limite survient au cours cette phase [60, 78]. Les éjections (*bursts*)[5] et les balayages (*sweep*)[6] constituent les deux contributions essentielles de l'activité turbulente.
Les tourbillons en épingle à cheveux constituent la structure dominante de l'écoulement turbulent de proche paroi. La partie supérieure de ces structures a une intensité tourbillonnaire transversale relativement importante.

Actuellement d'intenses études sont en cours pour tenter de mieux cerner ces

[4]Terme anglais désignant des tourbillons en épingle à cheveux
[5]fluide à faible vitesse allant vers l'extérieur
[6]fluide à vitesse élevée venant vers la paroi

différents phénomènes au moyen de la PIV stéréoscopique à l'instar de celles réalisées par Lin Jie *et al.*[76, 75] à l'Université Technologique de Lille, qui confirment l'existence des structures cohérentes et montrent qu'il existe des liens entre *streak* et les tourbillons longitudinaux, lesquelles tourbillons seraient localisés dans entre 20 et 30 unités de paroi [76, 75, 11].

2.1.2 Liens entre les structures cohérentes et les équations des tensions de Reynolds

L'apparition des structures cohérentes et les explosions qui ont lieu en proche paroi sont liés aux équations de Navier Stockes décrit précédemment au chapitre 1. Kim [60] a montré que l'essentiel de la production turbulente a lieu pendant les explosions dans la zone de proche paroi ($y^+ \leqslant 100$) contrairement à Corino Braodley [16] qui estiment qu'au lieu de la totalité, c'est seulement 50 % de la production qui sont concernées, résultats d'ailleurs confirmés par Lyons et al [78]. Tout compte fait on comprend que le mécanisme de la production est régit par les *sweep* et les éjections. Si on s'en tient à l'équation (1.6) dans le cas d'un écoulement de canal pleinement développé, le seul terme intervenant dans la production turbulente est P_{11}

$$P = \frac{1}{2}P_{11} = -\overline{uv}\frac{\partial U}{\partial y} > 0 \tag{2.1}$$

Étant donné que le gradient de vitesse moyenne est positif, et que u et v sont de signes contraires pendant un *sweep* ou une éjection, l'équation (2.1) montre que la production turbulente est positive.[7]. Par conséquent il y a création sur la composante $\overline{u^2}$ d'une énergie turbulente. D'autres termes de l'équation (1.6) comme celui de la diffusion turbulente augmentent sous l'effet des phénomènes observés à la paroi. En effet aux alentours de $y^+ \approx 12$ (maximum de production) le fluide éjecté continue son élan d'éloignement de la paroi contribuant ainsi à modifier D_{ij}^T. La déstabilisation observée précédemment, du fluide éjecté par le gradient de vitesse instantanée provoque des mouvements chaotiques dont les plus violents peuvent venir impacter la paroi [16]. Ce qui aura pour conséquence une augmentation de la diffusion turbulente. En somme trois zones différentes dans l'écoulement sont définis par Corino & Brodkey [16] :

- $y^+ < 5$: c'est une zone passive mais absolument pas laminaire car on y trouve des mouvements désordonnés dus à l'influence de la zone au-dessus d'elle ;
- $5 < y^+ < 70$: c'est une zone active, siège du phénomène d'explosion à l'origine de la production turbulente ;
- $70 < y^+$: cette zone contient de nombreux tourbillons originaires de la zone active, dont la taille croît au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la paroi.

[7]Lors d'un *sweep* venant de l'extérieur, le fluide vient impacter la paroi ($v < 0$) provoquant ainsi localement une fluctuation de vitesse $u > 0$; au contraire, lors d'une éjection à haute vitesse, le fluide à haute vitesse s'éloigne de la paroi ($v > 0$), provoquant une fluctuation de vitesse $u < 0$

De la description des phénomènes qui se produisent en proche paroi, en passant par le lien qu'ils établissent avec les termes de production et de diffusion turbulente de l'équation (1.6), on comprend bien le rôle déterminant joué par les structures cohérentes. Une analyse des effets induits par la présence de la paroi sera d'une utilité cruciale dans la modélisation des équations de transport du tenseur de Reynolds.

2.2 Effets induits par la paroi

Nous avons vu que les modèles de turbulence présentés dans le chapitre 1 ne sont pas valables en région de proche paroi. Vu les phénomènes particuliers décrits précédemment dont la région est le siège, un traitement judicieux s'impose, en prenant en compte les effets induits par la présence d'une paroi sur la stratégie de modélisation des termes de l'équation de transport de Reynolds. Avant d'étudier comment l'influence de ces phénomènes est prise en compte sur les grandeurs moyennes, nous allons dans cette partie, énumérer les plus importants qui seront classés en deux catégories.

2.2.1 Effets visqueux

La proximité de la paroi provoque de fortes variations des gradients de vitesse moyenne entraînant un pic de la production turbulence ; l'hypothèse de faible inhomogénéité n'est donc plus justifiée dans ce genre de configurations, surtout dans la direction normale à la paroi. En conséquence en terme de modélisation, il y aura modification du terme de redistribution (1.6). En terme de tenseur de Reynolds, les expériences et la DNS [94, 49, 56] ont montrés que toutes les composantes s'amortissent à l'approche de la paroi où l'énergie cinétique turbulente est dissipée entièrement en chaleur. Les effets visqueux se font sentir dans les zones les plus rapprochées de la paroi.

Un autre effet visqueux non négligeable est l'absence de séparation des échelles de turbulence qui permet de considérer que les grosses structures (les plus énergétiques) ne sont pas influencées par la viscosité moléculaire tandis que les petites structures (les plus dissipatives) sont isotropes lorsque le nombre de Reynolds turbulent $Re_t = \nu_t/\nu$ est élevé. Pour $Re_t < 100$, la viscosité commence par se faire sentir sur les grosses structures et les structures dissipatives perdent leur isotropie. Ce phénomène est d'ailleurs difficile à prendre en compte dans les modèles de turbulence.

2.2.2 Effets non visqueux

Les effets non visqueux se répartissent en deux parties :

2.2.2.1 Effet de Blocage

L'effet de blocage est la conséquence de l'incompressibilité sur les fluctuations de vitesse, ce qui a pour conséquence l'amortissement de ces fluctuations dans la direction

normale à la paroi par l'intermédiaire du terme de redistribution de l'équation (1.6). En effet, la viscosité entraîne $u = 0$ et $w = 0$. Cette condition impose $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ et conduit par le biais de l'équation de continuité à $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Des deux conditions associées, il s'opère un amortissement important de la valeur *rms*[8] de la composante v par rapport aux composantes u et w. Il en résulte que près de la paroi, $\overline{u^2} \geqslant \overline{v^2}$ et $\overline{w^2} \geqslant \overline{v^2}$. L'énergie est donc redistribuée par $\overline{v^2}$ vers $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ et la turbulence atteint un état limite bicomposante. L'étude expérimentale d'une turbulence sur paroi mobile d'Aronson *et al.* [5] ainsi que la simulation numérique directe de Perot et Moin [100] en sont de réelles illustrations en absence de cisaillement moyen. Par ailleurs, l'introduction d'une paroi à un instant donné dans la DNS montre que l'effet de blocage observé est quasi immédiat contrairement à l'effet d'amortissement visqueux agissant à la suite de ce dernier pour ensemble atténuer le retour à l'isotropie. C'est principalement la pression qui en est responsable, ce qui en fait un effet non local. Dans la modélisation statistique, l'effet de blocage ne peut être reproduit en imposant explicitement la condition d'incompressibilité sur les vitesses fluctuantes car elles ne sont pas résolues, et nous verrons dans le chapitre 3 comment la relaxation elliptique de Durbin [26, 25] l'impose de fort belle manière par le biais du terme de pression.

2.2.2.2 Effet d'écho de paroi

En plus du blocage cinématique que nous venons de mentionner, un autre effet dû à la pression est celui dit d'*écho de paroi*. C'est la réflexion des fluctuations de pression due à la présence de la paroi. On montre que la pression obéit à l'équation de Poisson en prenant la divergence de l'équation (1.4) :

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}^2 p = -2\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{u}_i u_j - \overline{u_i u_j}) \tag{2.2}$$

A la paroi ($y \to 0$) l'équation de Navier Stokes impose que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{y=0} \tag{2.3}$$

En négligeant la pression de Stokes [104], on aboutit à la condition aux limites : $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ donnant la pression, solution de l'équation (2.2) dans un domaine Ω borné par une plaque plane infinie située en $y = 0$:

$$p(\boldsymbol{x}) = -\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^2 p(\boldsymbol{x}')\Big(\frac{1}{4\pi\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|} + \frac{1}{4\pi\|\boldsymbol{x}'^* - \boldsymbol{x}\|}\Big)d\boldsymbol{x}' \tag{2.4}$$

où $\boldsymbol{x}'^*$ représente l'image de $\boldsymbol{x}'$ par symétrie par rapport à la paroi. Tout se passe alors comme si la pression était influencée par l'image de l'écoulement par rapport à la

[8] La valeur *rms* (*root-mean square*) d'une variable aléatoire ϕ est définie par $\phi_{rms} = \sqrt{\overline{(\phi - \overline{\phi})^2}}$

paroi (voir figure 2.2) et l'expression (2.4) montre bien que la pression est non locale. Il s'ensuit que le terme de redistribution ϕ_{ij} de l'équation (1.6) est sujet à l'effet d'écho de paroi considéré à tord comme le plus important des effets non visqueux [23]. Ce terme, d'après une analyse des résultats de la DNS de Moser *et al.* [94] joue dans le même sens que le premier terme de l'équation (2.4), qui pour celle-ci est d'ailleurs le principal terme [89].

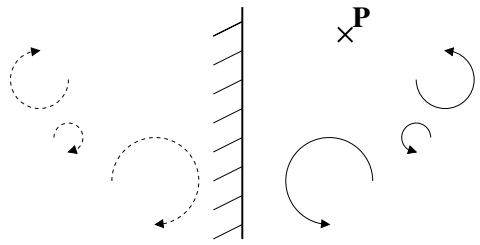


FIG. 2.2 – Écoulement image pour le terme d' *écho de paroi*

En conclusion, les effets induits par la présence de la paroi se manifestent dans différentes zones. Les effets visqueux se font sentir surtout dans la zone très proche de la paroi, principalement en dessous de la zone logarithmique tandis que les effets non visqueux sont actifs dans celle-ci. Tous ces effets en générale mettent en cause :

- l'hypothèse de quasi-homogénéité : les gradients de vitesse moyenne ne varient pas lentement sur la distance caractéristique des corrélations en deux points.
- l'hypothèse de localité : les effets non visqueux sont des effets non locaux (à cause d'eux, la turbulence sent à distance la présence de la paroi).
- l'hypothèse haut-Reynolds : l'absence de séparation entre les grandes et les petites échelles fait que la viscosité n'est plus négligeable.

Ces effets seront pris en considération dans la modélisation des termes de l'équation des tensions de Reynolds. Nous allons passer brièvement en revue la manière dont la paroi est prise en compte dans les modèles après avoir procédé à une étude des comportements asymptotiques des termes de l'équation de transport du tenseur de Reynolds.

2.3 Comportements asymptotiques à la paroi

Les effets induits par la présence de la paroi impliquent la modification des comportements des composantes des tensions de Reynolds, surtout dans la *sous couche visqueuse*. Le développement de Taylor à l'ordre dominant des composantes de fluctuations de vitesse dans cette région conduit aux résultats suivants : $U = \mathcal{O}(y)$,$u = \mathcal{O}(y)$, $w = \mathcal{O}(y)$ et $v = \mathcal{O}(y^2)$, pour lesquelles les conditions aux limites suivantes ont été appliquées [87, 80, 14] :

$$\begin{cases} U_i(0) = 0 & \text{Adhérence à la paroi} \\ \overline{u_i u_j}(0) = 0 & \text{Adhérence à la paroi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(0) = 0 & \text{Incompressibilité (blocage)} \\ k = 0 & \text{(Adhérence à la paroi)} \end{cases} \tag{2.5}$$

Par ailleurs il ressort que la paroi, impose un équilibre entre la diffusion visqueuse et le taux de dissipation à la paroi ($y \longrightarrow 0$) [14]. Ceci se traduit par :

$$(\varepsilon)_{y=0} = \nu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right)_{y=0} \tag{2.6}$$

que l'on traduit (pour des raisons de simplicité numérique) par une forme équivalente à l'ordre dominant :

$$(\varepsilon)_{y=0} = 2\nu \lim_{y \to 0} \frac{k}{y^2} \tag{2.7}$$

Ces analyses asymptotiques sont très précieuses pour la compréhension du bilan énergétique à la paroi et pourront s'étendre aux équations des tensions de Reynolds (1.6). Dans la configuration du canal plan toute modélisation de ces équations ne sera valable en proche paroi que si l'équilibre suivant est respecté [14] dans l'objectif que la turbulence tende en proche paroi vers un état très anisotrope bicomposante :

$$\phi^*_{ij} = \varepsilon_{ij} - D^\nu_{ij} + \mathcal{O}(y^n)(n \geqslant 3) \tag{2.8}$$

Les différents résultats du comportement asymptotique des termes de l'équation (1.6) sont consignés dans le tableau (2.1) [28]. On voit ici que pour les composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$, le terme de pression n'intervient qu'à l'ordre 1 tandis que pour les composantes $\overline{v^2}$ et $\overline{uv}$ elle intervient à l'ordre dominant. De plus dans tous les cas, le terme de pression équilibre toujours $\varepsilon_{ij} - D^\nu_{ij}$.[9]
En somme, les termes qui jouent des rôles importants au voisinage de la paroi sont la diffusion moléculaire, la dissipation et le terme de pression. Pour la modélisation de ces différents termes, on doit également s'efforcer de garder à l'esprit que la condition d'équilibre (2.8) est nécessaire pour bonne reproduction de l'anisotropie en proche paroi.

2.4 Quelques modèles de paroi

Les spécificités de la turbulence de paroi mettent en défaut les schémas élaborés au chapitre 1 par la prise en compte des effets induits suivants :

[9] On pourra se référer à [80] pour une analyse plus détaillée et commentée des différents résultats.

	D_{ij}^T	ϕ_{ij}^*	P_{ij}	$\varepsilon_{ij} - D_{ij}^\nu$	ε_{ij}	D_{ij}^ν
$\overline{u^2}$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
$\overline{v^2}$	$\mathcal{O}(y^5)$	$\mathcal{O}(y^2)$	0	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^2)$
$\overline{w^2}$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y)$	0	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
$\overline{uv}$	$\mathcal{O}(y^4)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^4)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$

TAB. 2.1 – Comportement asymptotique des différents termes de l'équation des tensions de Reynolds en écoulement de canal.

- la prépondérance en proche paroi de la diffusion moléculaire sur la diffusion turbulente
- la considération de l'anisotropie pariétale des tensions de Reynolds (la présence de la paroi est incompatible avec le retour à l'isotropie)
- la disparition de la zone inertielle.

Pour ces raisons, et devant l'incapacité des modèles dit « haut Reynolds » à prédire la zone de proche paroi, de nombreuses corrections y ont été introduites.

Quelques unes des modifications apportées vont être présentées dans les lignes qui suivent.

2.4.1 Les modèles bas Reynolds

La modélisation dite **Bas-Reynolds** consiste à introduire des termes sources supplémentaires et des fonctions d'amortissements dans les équations des modèles classiques. En comparaison avec les modèles **haut-Reynolds** utilisant les lois de paroi, cette approche présente l'avantage de mieux être adapter à des écoulements complexes. En revanche, elle nécessite un nombre important de mailles près de la paroi et par conséquent, un coût de calcul plus important. Dans le cas de la modélisation RSM, les fonctions d'amortissements sont introduites généralement dans le terme de redistribution ϕ_{ij} de l'équation(1.6) et dans l'équation de ε. Elles dépendent de la distance à la paroi par le biais de $Re_y = \dfrac{ky}{\nu}$ et /ou du nombre Reynolds turbulent $Re_t = \dfrac{\nu_t}{\nu}$, voire aussi des invariants du tenseurs d'anisotropie. Plusieurs modèles [14, 51, 67, 114, 40] ont été développées mais la plupart des fonctions d'amortissements étant non-linéaires, ils sont donc prédisposés à des complications numériques. Pour ce qui nous concerne, l'utilisation des fonctions d'amortissements dans les modèles apporte certes des satisfactions dans la prise en compte des problèmes de paroi, mais particularise le modèle par manque d'universalité et sont généralement empiriques.

2.4.2 Les modèles hybrides

Il s'agit ici de l'utilisation des modèles différents dans la zone de proche paroi et dans le reste de l'écoulement en réalisant une transition douce pour passer d'un

modèle à l'autre. Le modèle SST de Menter [92] en est la parfaite illustration. Ce modèle combine les avantages du modèle $k-\varepsilon$ loin des parois et le modèle $k-\omega$ réputé pour son bon comportement en proche paroi. La transition entre ces deux modèles est réalisée grâce à des fonctions très complexes. Toutefois, étant un modèle du premier ordre, il hérite les défauts de ceux ci. Il est à noter que cette approche peut se généraliser à tous les modèles RSM.

2.4.3 La relaxation elliptique

Nous avons vu que les modèles bas Reynolds classiques, qui font appel a des fonctions d'amortissement pour prendre en compte la zone de proche paroi, sont pour la plupart relativement peu robustes et pas assez universels. Pour dépasser ces limitations, Durbin [26, 25] introduit des modifications dans l'expression du terme de redistribution ϕ^*_{ij} en se basant sur l'hypothèse que les corrélations en deux points ont une décroissance exponentielle avec la distance $\mathbf{r}$ entre deux points [10].

Le terme ϕ^*_{ij} est alors solution d'une équation différentielle dite *équation de relaxation elliptique* :

$$\phi^*_{ij} - L^2\nabla^2\phi^*_{ij} = -\frac{L^2}{\rho}\overline{\nabla^2 p(\boldsymbol{x})\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right]} \tag{2.9}$$

dans laquelle, le second membre noté ϕ^h_{ij} exprime son comportement loin des parois. Vu le nombre d'inconnues contenues dans cette équation elliptique, de nombreuses simplifications sont apportées dont la plus célèbre est le modèle $\overline{v^2}$–f [25] disponible dans de nombreux codes de calculs industrielles, avec comme choix pour ϕ^h_{ij}, le modèle de Rotta+IP [109, 65].
En pratique, dans le modèle $\overline{v^2}$–f les variables k et ε restent inconnues du problème. une variable supplémentaire $\overline{v^2}$ est introduite et représente approximativement la tension de Reynolds dans la direction normale aux lignes de courant et ces trois variables, k, ε et $\overline{v^2}$ permettent de calculer la viscosité turbulente requise selon la relation : $\nu_t = C_\nu \overline{v^2} T$. Le principal problème de ce modèle se situe au niveau des conditions aux limites pour la variable $f = \dfrac{\phi_{22}}{k}$ représentant les effets de redistribution dans l'équation de $\overline{v^2}$ à la paroi. De nombreuses versions améliorées sont proposées [47, 84, 127, 88, 74] et semblent alliées des propriétés de stabilité, de robustesse et de simplicité d'implantation numérique.

Une alternative au modèle $\overline{v^2}$–f, est le modèle de pondération elliptique EB-RSM proposée par Manceau et Hanjalic en 2002 [87] et modifié par Manceau [82] en 2005. Basé sur le concept de la relaxation elliptique, c'est un modèle qui permet de réduire le nombre d'inconnues par l'utilisation d'une seule équation de relaxation elliptique (au lieu de 6) en préservant les bons comportements du terme de redistribution en proche et loin des paroi. Ce modèle, numériquement stable, sera introduit dans les modèles

[10] les détails de cette théorie sont explicitement présentés au chapitre suivant

algébriques que nous visons à développer dans cette thèse pour la prise en compte des effets de paroi, notamment l'effet de blocage. Par conséquent, un chapitre lui sera entièrement consacré.

2.5 Conclusion

Nous avons tout au long de cette partie montré l'importance l'influence de la paroi sur la turbulence. La prise en compte de ces effets nécessite le choix d'un modèle capable de reproduire les phénomènes induits par la présence de la paroi, en particulier l'effet de blocage décrit dans les pages précédentes. Les modèles classiques étant limités, même leur extension vers la paroi par le biais des fonctions d'amortissement n'est pas sans conséquences pour une représentation universelle de ces modèles. Il apparaît par conséquent nécessaire et judicieux d'étudier d'autres alternatives. C'est ce que nous allons voir à travers la relaxation elliptique de Durbin [26, 25], puis la pondération elliptique de Manceau et Hanjalic [87] que nous allons abordé dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Prise en compte des effets de paroi : la Pondération Elliptique

A la paroi et à son voisinage immédiat, les comportements des tensions $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ sont analogues alors que celui de $\overline{v^2}$ se singularise nettement en conformité avec les éléments dégagés au chapitre 2. De plus, en canal, les modèles RANS classiques conçus sous l'hypothèse de Chou(1945), ont des difficultés à reproduire le comportement asymptotique du tenseur de Reynolds dans la direction normale à la paroi. Entre autre dans la décomposition du terme de redistribution $\phi^*_{ij} = D^p_{ij} + \phi_{ij}$, la diffusion par pression est souvent négligée en proche paroi et ne rentre pas dans l'étude du comportement asymptotique. Les fonctions d'amortissements introduites également pour intégrer les modèles jusqu'à la paroi introduisent un degré d'empirisme singularisant les modèles.
Ces remarques ont donc conduit Durbin (1991 et 1993) à introduire la relaxation elliptique afin d'améliorer considérablement la prise en compte de l'effet de blocage par une modification de la modélisation de l'important terme ϕ^*_{ij} aboutissant ainsi à la suppression de toute fonction d'amortissement dans les équations des modèles de turbulence. Cependant, la mise en oeuvre de la relaxation elliptique à également conduit à des difficultés numériques dues aux conditions aux limites imposées par le modèle. De nombreuses améliorations ont été apportées [127, 47, 12, 86, 84, 80, 79, 89] ; le problème de stabilité numérique ayant été résolu par Manceau et Hanjalić en (2002) qui proposent la pondération elliptique.

3.1 Formulation de la relaxation elliptique

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le terme de redistribution est décomposé sous la forme :

$$\phi_{ij}^* = \underbrace{\frac{1}{\rho}\overline{p\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)}}_{\phi_{ij}} \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{pu_i}\delta_{jk} + \overline{pu_j}\delta_{ik})}_{D_{ij}^p} \tag{3.1}$$

Partons des considérations suivantes :
- loin des parois, le terme D_{ij}^p est négligeable ou inclus dans la diffusion turbulente. Ce qui conduit à ne modéliser que la partie ϕ_{ij}
- en proche paroi, les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds [79, 80] montrent que ϕ_{ij}^* doit équilibrer la différence $D_{ij}^\nu - \varepsilon_{ij}$ soit simplement :

$$\phi_{ij}^* = D_{ij}^\nu - \varepsilon_{ij} + \mathcal{O}(y^n) \tag{3.2}$$

- Dans la direction normale à la paroi, on montre que [79, 80](cf Tab.2.1)

$$D_{22}^\nu = \mathcal{O}(y^2) \quad \varepsilon_{22} = \mathcal{O}(y^2) \quad \phi_{22} = \mathcal{O}(y)$$

$$D_{22}^P = \mathcal{O}(y) \quad \phi_{22}^* = \mathcal{O}(y^2)$$

On peut donc déduire à partir de ces considérations notamment, le bilan asymptotique de ϕ_{22} et $\phi_{22}^* = \mathcal{O}(y^2)$:

$$\phi_{22} + D_{22}^P = \mathcal{O}(y) \tag{3.3}$$

$$\phi_{22}^* = \mathcal{O}(y^2).$$

Par conséquent la décomposition (3.1) est asymptotiquement inadéquate. On en déduit qu'une meilleure prise en compte des effets de paroi nécessite la modélisation de ϕ_{ij}^* sans le décomposer. D'autre part, en prenant la divergence puis le gradient de l'équation (1.4), on constate que le gradient de pression obéit à l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\frac{\partial p}{\partial x_k} = \rho\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(-2\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(u_i u_j - \overline{u_i u_j})\Big) \tag{3.4}$$

qui, en négligeant la contribution liée à la condition aux limite non homogène sur le gradient de pression aboutit à :

$$\frac{\partial p}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \nabla^2\frac{\partial p}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}')G_\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \tag{3.5}$$

dans laquelle G_Ω est la fonction de Green associée à l'opérateur ∇ dans le domaine Ω. Cette équation permet d'écrire également

$$\rho\phi_{ij}^*(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \Psi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')G_\Omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \tag{3.6}$$

avec

$$\Psi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\overline{u_i(\boldsymbol{x})\nabla^2\frac{\partial p}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}')} - \overline{u_j(\boldsymbol{x})\nabla^2\frac{\partial p}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}')} \tag{3.7}$$

définit comme une fonction de corrélation en deux points. Pour prendre en compte la non localité de la pression exprimée dans l'équation (3.5), Durbin [25] propose de définir la fonction $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ reliant la corrélation en deux points et la corrélation en un point par la relation :

$$\Psi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \Psi_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}')f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \tag{3.8}$$

et de la modéliser simplement par :

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = e^{-\mathbf{r}/L} \tag{3.9}$$

L étant une l'échelle de longueur de corrélation des effets de pression, et r la distance $\mathbf{r} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|$.

De nombreuses études sont effectuées par Manceau [80] et Manceau *et al.* [89] pour montrer la validité de cette modélisation. Des suggestions sont faites pour corriger l'amplification de ϕ^*_{ij} observée dans la zone logarithmique [86, 84, 89] pour une meilleure prise en compte de l'anisotropie. De plus dans le domaine $\mathbb{R}^3$, on montre que ϕ^*_{ij} est solution de l'équation de la *relaxation elliptique* :

$$\phi^*_{ij} - L^2\nabla^2\phi^*_{ij} = \phi^h_{ij} \tag{3.10}$$

Cette equation est essentiellement déterminée par le choix du terme source ϕ^h_{ij} qui ne devient important que dans une zone où l'hypothèse quasi- homogène est valable [1] puis par les conditions aux limites qui vont permettent de reproduire le comportement asymptotique à la paroi. On voit bien que contrairement aux modèles classiques le terme de pression n'est pas exprimé sous forme algébrique mais sous forme d'une *équation différentielle*. On dispose de la liberté du choix du terme source. En général, la plupart des modèles élaborées à partir de la relaxation elliptique utilisent comme terme source entre autre, le modèle de Rotta + IP [109, 65], celui de SSG [119] ou le modèle QI de Launder *et al.* [71].

3.2 Modélisation de $\phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij}$

La modélisation du terme de dissipation ε_{ij} proposée ne s'est pas réellement fondée sur une base théorique très solide comme pour le cas du terme de pression. En se référant à la modélisation classique où ce terme est modélisé loin de la paroi par sa forme isotrope :

$$\varepsilon^h_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \tag{3.11}$$

et en proche paroi, par le modèle de Rotta [109]

$$\varepsilon^w_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon \tag{3.12}$$

[1] En effet loin des parois, $L^2\nabla^2\phi^*_{ij}$ tend vers zéro

Durbin propose l'utilisation d'une équation de relaxation elliptique pour la modélisation de ε_{ij}. Pour cela en décomposant ε_{ij} sous la forme $\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^w_{ij}) + \varepsilon^w_{ij}$, l'équation du modèle de ε_{ij} de Durbin devient :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^w_{ij} - L^2\nabla^2(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^w_{ij}) = \varepsilon^h_{ij} - \varepsilon^w_{ij} \tag{3.13}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^w_{ij})_{y=0} \longrightarrow 0 & \text{à la paroi} \\ \varepsilon_{ij} \longrightarrow \varepsilon^h_{ij} & \text{loin de la paroi} \end{cases} \tag{3.14}$$

Par ailleurs étant donné qu'il apparaît la différence $\phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij}$ dans l'équation des tensions de Reynolds(1.6), il est souhaitable de ne pas pas résoudre séparément les équations (3.10) et (3.13) mais plutôt l'équation de la relaxation elliptique suivante :

$$\mathcal{G}_{ij} - L^2\nabla^2\mathcal{G}_{ij} = \phi^h_{ij} - \varepsilon^h_{ij} + \varepsilon^w_{ij} \tag{3.15}$$

avec $\mathcal{G}_{ij} = \phi^*_{ij} - (\varepsilon_{ij} - \varepsilon^w_{ij})$ et comme conditions aux limites : $\mathcal{G}_{ij} = 0$. Toutefois, la condition au limite sur $\mathcal{G}_{ij}$ n'est pas suffisante dans la direction normale à la paroi où il faut reproduire correctement l'effet de blocage [79, 80, 26]. Dorénavant, on résout une équation elliptique non pas pour $\mathcal{G}_{ij}$ mais pour la variable $f_{ij} = \dfrac{\mathcal{G}_{ij}}{k}$ telle que :

$$f_{ij} - L^2\nabla^2 f_{ij} = \frac{1}{k}\left(\phi^h_{ij} - \varepsilon^h_{ij} + \varepsilon^w_{ij}\right) \tag{3.16}$$

Cette equation permet de respecter le bon équilibre des différents termes du bilan de $\overline{u_i u_j}$ près de la paroi et sera résolue conjointement à l'équation de transport des tensions de Reynolds dans laquelle la différence $\left(\phi^*_{ij} - \varepsilon_{ij}\right)$ sera modélisé par $kf_{ij} - \varepsilon^w_{ij}$. En ce qui concerne les conditions aux limites pour les variables f_{ij}, elles dérivent du comportement asymptotique des composantes du tenseur de Reynolds et sont telles que [26, 79, 28] :

$$\begin{cases} (f_{11})_{y=0} = (f_{33})_{y=0} = -\dfrac{1}{2}(f_{22})_{y=0} \\ (f_{22})_{y=0} = -\dfrac{20\nu^2}{\varepsilon}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\overline{v^2}}{y^4} \\ (f_{12})_{y=0} = -\dfrac{20\nu^2}{\varepsilon}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\overline{uv}}{y^4} \\ (f_{13})_{y=0} = 0 \\ (f_{23})_{y=0} = -\dfrac{20\nu^2}{\varepsilon}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\overline{vw}}{y^4} \end{cases} \tag{3.17}$$

Il est important de noter ici que la condition au limite sur f_{22} est **exacte**, Celles portant sur f_{11}, f_{13} et f_{33} sont arbitraires tandis que f_{12} et f_{23} tendent à sous estimer les composantes $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$. D'autre part, f_{12} et f_{22} génèrent d'énormes problèmes de

stabilités numériques. Cependant, la mise en place de ce modèle a permis de régler le problème de *non-localité* de la pression jusqu'ici ignoré par la modélisation classique. Toutefois, il reprend de nombreux éléments de ces modèles classiques, notamment le terme de dissipation ε_{ij}^h et ϕ_{ij}^h d'une part et les conditions aux limites imposées sur toutes les variables f_{ij} autre que celle de la composante normale à la paroi ne sont toujours pas vérifiée [79, 80, 50].
Des améliorations sont apportées pour corriger ces quelques points problématiques de la relaxation elliptique[2] et ont donc conduit à la naissance de nouveaux modèles plus stables, simples, robustes comme entre autres, le modèle $\overline{v^2}$–f de Durbin [26], le modèle R-$\overline{v^2}$–f de Manceau, Carlson et Gatski [84],le modèles $\tau - \beta_n$ de Carlson et Gastki [12], $\zeta - f$ de Hanjalić et al [47, 46], la pondération elliptique EB-RSM de Manceau et Hanjalić [87], le $\phi -$ model du groupe de D. Laurence (Université de Manchester)[72, 46], le $\phi - \alpha$ modèle [9] $\cdots$.
Pour ce qui nous concerne nous nous intéressons particulièrement à la *pondération elliptique* proposée par Manceau et Hanjalić (2002)[87] et améliorée par Manceau en 2003 [82].

3.3 De la Relaxation Elliptique au modèle de Pondération Elliptique

La relaxation elliptique comme on le voit à travers l'équation (3.16) introduit des équations supplémentaires pour la prise en compte des effets de paroi. Le nombre important d'inconnues et la complexité du modèle combinés avec les problèmes de stabilités numériques enregistrées amènent Manceau et Hanjalić (2002) d'une part et Manceau (2003) d'autre part à proposer une alternative tout en se basant fondamentalement sur les principes de la relaxation elliptique. Ce modèle est déjà testé dans de nombreuses configurations [124, 82, 85, 73] et a démontré tout son potentiel, quoique des améliorations restent envisageables.

3.3.1 Modélisation du terme de redistribution

Le modèle de pondération elliptique EB-RSM[3]modifie la modélisation du terme de pression en introduisant un paramètre α, appelé *coefficient de pondération elliptique*, également solution d'une équation elliptique. Pour basculer entre les comportements en proche paroi et loin de celle ci, Manceau*et al.* [87] propose l'écriture du terme de pression de la façon suivante :

$$\phi_{ij}^* = (1 - f_k)\phi_{ij}^w + f_k\phi_{ij}^h \tag{3.18}$$

[2]Pour plus de précisions, on pourra consulter [80, 79, 127, 86, 84]
[3]EB pour désigner Elliptic Blending

Les exposants ^{w} et ^{h} se rapportent respectivement à la valeur de la variable en zone de proche paroi et à la zone quasi-homogène (loin de la paroi). En supposant que l'écoulement est limité par une seule paroi en $y = 0$, le coefficient de pondération doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to 0} f_k = 0 \\ \lim\limits_{y\to \infty} f_k = 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Les expressions données à la variable f_k ont variées depuis le modèle original où $f_k = k\alpha$ [87] jusqu'à la dernière version pour laquelle $f_k = \alpha^2$ [82] pour des raisons de stabilité numérique.

Le coefficient α est un paramètre important du modèle. Il est solution d'une équation elliptique similaire à (3.16) et s'écrit :

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1 \tag{3.20}$$

Pour respecter les comportements asymptotiques des tensions de Reynolds élaborés au chapitre 2, les conditions aux limites sur le terme de redistribution à la paroi doivent être équivalente à (3.17) et on peut montrer facilement [87] que :

$$\begin{cases} \phi^w_{11} = \dfrac{-1}{2}\phi^w_{22} \\ \phi^w_{22} = -5\dfrac{\varepsilon}{k}\overline{v^2} \\ \phi^w_{33} = \dfrac{-1}{2}\phi^w_{22} \\ \phi^w_{12} = -5\dfrac{\varepsilon}{k}\overline{uv} \\ \phi^w_{13} = 0 \\ \phi^w_{23} = -5\dfrac{\varepsilon}{k}\overline{vw} \end{cases} \tag{3.21}$$

Cette relation (3.21) sera généralisée sous la forme :

$$\phi^w_{ij} = -5\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_iu_k}n_jn_k + \overline{u_ju_k}n_in_k - \frac{1}{2}\overline{u_ku_l}n_kn_l\left(n_in_j + \delta_{ij}\right)\right) \tag{3.22}$$

où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire normal à la paroi. α étant nul à la paroi, le gradient de α est un vecteur orthogonal à la paroi et la normale pourra donc être calculée partout à l'intérieur du domaine par la relation :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\alpha}{\|\boldsymbol{\nabla}\alpha\|} \tag{3.23}$$

Par ailleurs en ce qui concerne le terme source de pression ϕ^h_{ij}, le modèle quasi homogène SSG [119] est utilisé à la place du modèle de Rotta +IP [109, 65] car

il reproduit mieux le comportement des tensions de Reynolds jusque dans la zone logarithmique[84, 12]. De plus, la liberté de choix du modèle quasi homogène est un avantage certain, toutefois on impose notamment d'éviter l'utilisation des modèles bas Reynolds, contraires à l'esprit de la relaxation elliptique.

3.3.2 Modélisation des termes de dissipation et de diffusion

La modélisation du terme de dissipation ε_{ij} est faite de la même façon que celle du terme de pression, par pondération des termes de dissipation en proche et loin des parois. Ce qui conduit à :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon)\varepsilon_{ij}^w + f_\varepsilon \varepsilon_{ij}^h \tag{3.24}$$

A l'instar de la modélisation pour le terme de redistribution, le coefficient $f_\varepsilon = Ak\alpha$ dans la version originale [87] et α^2 dans la dernière version [82], A étant le coefficient d'aplatissement de Lumley. Par ailleurs les termes ε_{ij}^h et ε_{ij}^w sont respectivement définis par les relations (3.11)et (3.12). Ce choix à l'instar du modèle de Durbin est arbitraire mais permet une meilleure reproduction de l'anisotropie. D'autre part, il faut également résoudre une équation de transport de la dissipation ainsi que celle de l'énergie cinétique turbulente.

En ce qui concerne la diffusion turbulente, la modélisation de Daly Halow (1970) (1.11) est utilisée. Pour avoir plus d'informations sur les formulations complètes du modèle de pondération elliptique EB-RSM dans sa dernière version, se référer à l'annexe A.

3.3.3 Comportements asymptotiques des termes de pression et de dissipation

3.3.3.1 Comportements asymptotiques

Nous avons vu que la pondération elliptique utilise le modèle quasi homogène SSG pour plusieurs raisons : simplicité d'implémentation dans un code RSM, absence de dépendance explicite avec la distance à la paroi, meilleure reproduction des tensions de Reynolds dans la zone logarithmique que celui de Rotta+IP et offre des possibilités pour être applicable à des géométries complexes. Speziale*et al.*[119] donnent l'écriture suivante du terme de redistribution ϕ_{ij}^h :

$$\begin{aligned}\phi_{ij}^h = & -\left(g_1 + g_1^* \frac{P}{\varepsilon}\right)\varepsilon b_{ij} + \left(g_3 - g_3^*\sqrt{b_{kl}b_{kl}}\right)kS_{ij} \\ & + g_4 k\left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{lm}S_{lm}\delta_{ij}\right) + g_5 k\left(b_{ik}\Omega_{jk} + b_{jk}\Omega_{ik}\right)\end{aligned} \tag{3.25}$$

à partir de laquelle seront déduit les comportements asymptotiques des ϕ_{ij}^h.
En tenant compte des équations (3.22),(3.11) et (3.12), on aboutit aussi aux résultats des comportements des termes : ϕ_{ij}^w, ε_{ij}^h et ε_{ij}^w. Le tableau (3.1) résume alors l'ensemble des comportements asymptotiques des différents termes énumérés ci dessus[79, 28].

	ϕ_{ij}^*	ϕ_{ij}^w	ϕ_{ij}^h	ε_{ij}	ε_{ij}^w	ε_{ij}^h
$\overline{u^2}$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
$\overline{v^2}$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$
$\overline{w^2}$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$
$\overline{uv}$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	0

TAB. 3.1 – Comportement asymptotique du terme de pression et de dissipation en écoulement de canal

La pondération elliptique vise essentiellement à reproduire la composante normale du tenseur de Reynolds à la paroi. D'après (3.18), Le coefficient de pondération elliptique α peut alors être calculé à partir de la relation

$$f_k = \frac{\phi_{22}^* - \phi_{22}^w}{\phi_{22}^h - \phi_{22}^w} \tag{3.26}$$

et les données contenues dans le tableau (3.1) montrent que $f_k = \mathcal{O}(y^2)$. Ce qui suggère d'utiliser $f_k = \alpha^2$ puisque $\alpha = \mathcal{O}(y)$[82]. Cependant dans cette relation, la modélisation du terme de dissipation n'a pas été prise en compte. On ne saurait se soustraire de l'apport de la dissipation pour homogénéiser les comportements asymptotiques dans l'optique d'une meilleure reproduction des effets induits par la paroi étant donné la contribution de cet important terme. Prenons $f_k = f_\varepsilon = f$ dans la direction normale à la paroi, et utilisons les relations (3.18) et 3.24). On peut écrire :

$$(\phi_{22}^* - \varepsilon_{22}) = (1-f)(\phi_{22}^w - \varepsilon_{22}^w) + f(\phi_{22}^h - \varepsilon_{22}^h) \tag{3.27}$$

Les comportements asymptotiques des différents termes apparaissant dans cette équation montrent bien qu'il faut prendre $f = \mathcal{O}(y^3)$ ce qui suggère $f = \alpha^3$. En conséquence :

$$\alpha^3 = \frac{(\phi_{22}^* - \varepsilon_{22}) - (\phi_{22}^w - \varepsilon_{22}^w)}{(\phi_{22}^h - \varepsilon_{22}^h) - (\phi_{22}^w - \varepsilon_{22}^w)} \tag{3.28}$$

Dans la suite de chapitre, nous allons procéder à la validation du modèle pour une large gamme de nombre de Reynolds, en étudiant l'évolution à *priori* du coefficient α et celle de l'échelle de longueur L.

3.4 Validation en proche paroi du modèle

Les précédents paragraphes nous ont permis de comprendre le rôle principal joué par le modèle de pondération elliptique pour corriger les effets induits par la présence de la paroi, notamment l'effet de blocage. Dans le but de concevoir des modèles *Algébriques Explicites* valables en proche paroi, nous avons décidé de l'introduction de l'EB-RSM comme modèle de paroi. Ce choix nous impose naturellement la vérification d'un certains nombre de point concernant ce modèle notamment le coefficient de pondération et l'échelle de longueur de corrélation. Pour ce faire une validation *à priori* dans le cas des écoulements en canal est entreprise pour une meilleure appréciation de leur évolution en utilisant dans le cadre du projet WALLTURB les bilans des tensions de Reynolds mis à notre disposition sur une large gamme de nombre de Reynolds. Ce travail nous conduira à apprécier l'influence du nombre de Reynolds sur ces différents paramètres clés du modèle. Notons que les résultats de l'échelle de longueur seront comparés à ceux de la modélisation de cette dernière proposée par Durbin.

3.4.1 Modélisation de α : test à priori à différents Reynolds

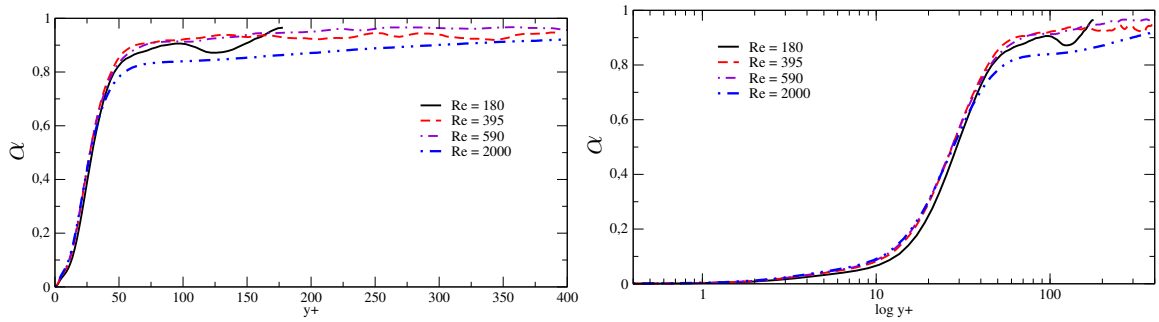
Le coefficient de pondération α permet de relier les comportements loin des parois des termes de pression ϕ_{ij}^h et de dissipation ε_{ij}^h à ceux reproduisant les effets de paroi ϕ_{ij}^w et ε_{ij}^w. Il est solution de l'équation elliptique (3.29) :

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1 \tag{3.29}$$

En tenant compte de l'utilisation par la pondération elliptique du modèle SSG comme modèle quasi homogène loin des parois et de la base des données des différentes simulations numériques directes de l'UPM [4], partenaire du projet *WALLTURB* [49, 56, 55] pour différents nombre de Reynolds Re_τ, nous avons procédé à une évaluation *à priori* de α pour la composante $\overline{v^2}$ en utilisant la relation (3.26) et (3.28) ; le terme $\phi_{22}^h = \phi_{22}^{SSG}$, $\varepsilon_{22}^h = \varepsilon_{22}^{SSG}$, tandis que ϕ_{22}^w et ε_{22}^w sont respectivement définis par les relations (3.21) et (3.12). Les figures 3.1 et 3.2 montrent les profils de α en fonction de la distance à la paroi adimensionnée par y^+ pour différentes valeurs de Re_τ. Nous pouvons voir à travers les différentes courbes aussi bien pour le cas α^2 que pour α^3 que le coefficient de pondération α est totalement *indépendant* du nombre de Reynolds ; ce qui est d'ailleurs appréciable et par conséquent fondamental. Toutefois, il ne tend pas rigoureusement vers 1 loin des parois comme exigé par les conditions aux limites (3.19). Cette divergence est due au modèle quasi homogène SSG qui, dans cette région ne reproduit par *parfaitement* ϕ_{22}^*.

L'analyse des résultats (figure 3.1(b) et 3.2(b)) montrent qu'on peut espérer, sur une large gamme de Reynolds, représenter correctement la transition entre ϕ_{ij}^w et ϕ_{ij}^h par une simple fonction de pondération allant de 0 à la paroi à 1 au loin.

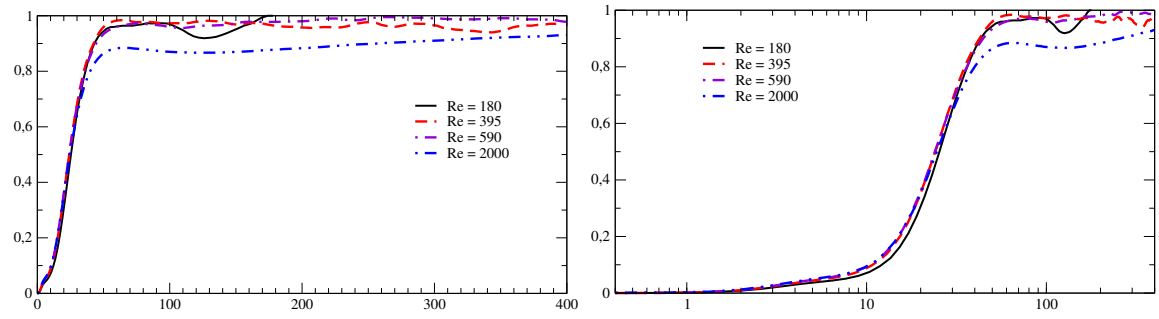
[4] Université Polytechnique de Madrid



(a) Évaluation à *priori* de α, *échelle linéaire.*

(b) Évaluation à *priori* de α, *échelle semi-logarithmique*

FIG. 3.1 – Étude comparée du profil du coefficient α pour différents nombres de Reynolds. (a–b) α est calculé à *priori* à partir de l'équation (3.26)



(a) Évaluation à *priori* de α, *échelle linéaire*

(b) Évaluation à *priori* de α, *échelle semi-logarithme*

FIG. 3.2 – Étude comparée du profil du coefficient α pour différents nombres de Reynolds. α est calculé à *priori* à partir de l'équation (3.28)

D'autre part, en analysant les résultats des figures 3.1(b) et 3.2(b) on s'aperçoit bien qu'en dehors de la valeur $Re_\tau = 2000$, les profils sont en accord avec les résultats de la simulation numérique directe dans la région de proche paroi. Ce qui justifie l'excellente reproduction par le modèle de l'effet de blocage de la paroi, indépendamment du nombre de Reynolds.

3.4.2 Modélisation de α : échelle de Longueur

Dans cette partie, on cherche à répondre à la question suivante : quelle est l'échelle de longueur qui intervient dans la relation (3.29). Pour répondre à cette question, nous allons étudier l'évolution de ce paramètre pour différents Reynolds. De cette relation, l'échelle de corrélation est liée à α par la relation elliptique

$$L^2 = \frac{\alpha - 1}{\bigtriangledown^2 \alpha} \tag{3.30}$$

et montre qu'il est nécessaire de prendre en compte les dérivées secondes qu'elle contient. Cependant, prendre la dérivée seconde des profils de α obtenus au (3.4.1) ne conduit pas à des résultats exploitables. L'échelle de corrélation sera donc approximée.

En supposant en première approximation que L est une constante, une solution analytique *exacte* de l'équation (3.29) existe dans le cas d'un écoulement au-dessus d'une plaque plane et se présente sous la forme :

$$\alpha(y) = 1 - exp(\frac{-y}{L}) \tag{3.31}$$

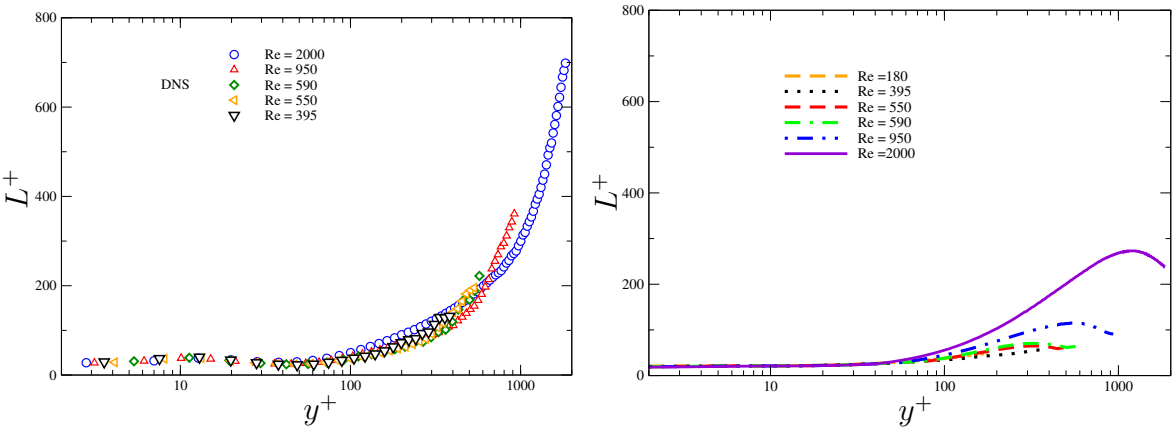
Nous supposerons que cette dernière est également valable pour l'équation elliptique lorsque L varie. Ainsi donc l'échelle de longueur sera évalué à partir de :

$$L(y) = \frac{-y}{ln(1 - \alpha(y))} \tag{3.32}$$

Par ailleurs, pour des raisons identiques à celles développées dans la section précédente, Durbin propose l'utilisation de l'échelle classique $\dfrac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ loin des parois, bornée par celle de Kolmogorov pour une meilleure reproduction de la corrélation lorsqu'on s'approche de la paroi, c'est à dire :

$$L_{Durb} = C_L max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{3.33}$$

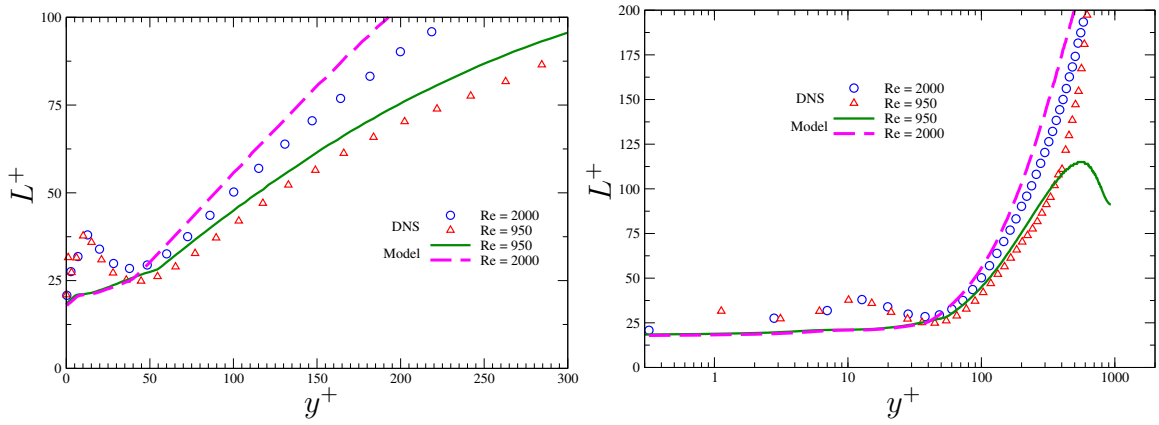
La validité de ce modèle est déjà testée par Manceau [89] avec les données de la simulation numérique de Moser *et al.* [94] pour $Re_\tau = 590$ et ce, en considérant une corrélation en deux points entre les fluctuations de vitesse et le laplacien du gradient de pression. Dans le cas de la pondération elliptique, cette évaluation devrait être plus



(a) Évaluation à *priori* de L par (3.32).

(b) Model L_{Durb} par (3.33) .

FIG. 3.3 – Corrélation échelle de longueur L pour $Re_\tau = 395, 550, 590, 950, 2000$ évalué à *priori* : (a) à partir Eq. (3.32) ; (b) en utilisant le modèle L_{Durb}.



(a) échelle linéaire.

(b) échelle semi-log .

FIG. 3.4 – Comparaison de l'échelle de longueur L évalué à *priori* et le modèle L_{Durb} pour $Re_\tau = 950$ et 2000 .

aisée.

Une étude comparative de l'évolution de l'échelle de longueur utilisant les relations (3.32) et (3.33) est réalisée pour divers nombre de Reynolds. Les résultats présentés sur la figure 3.3(a) montrent une faible variation de l'échelle de longueur avec le nombre de Reynolds. Ce qui n'est pas le cas pour le modèle de Durbin (3.33) qui pour une distance $y^+ > 100$ présente clairement sur le figure 3.3(b), une dépendance de L par rapport à Re_τ et qui s'explique par le fait que nous ne sommes plus dans la zone de paroi.
Une étude comparative des comportements de L provenant de la pondération elliptique et celle de Durbin L_{Durb} uniquement pour $Re_\tau = 950$ et 2000 montre une bonne reproduction de l'échelle de longueur par L_{Durb} sauf dans la zone centrale. Cette insuffisance est mineure étant donnée que dans cette zone le coefficient de pondération α tend vers 1 et par conséquent, la pondération elliptique n'a plus d'influence sur l'écoulement. De plus cette figure 3.4 fait apparaître dans la région $y^+ < 25$ un *pic* qui n'est pas reproduit par le modèle de Durbin. Dans l'étude réalisée dans [89], une observation identique est obtenue pour une corrélation en deux points de l'échelle de longueur dans le cas d'un écoulement en canal. Jusqu'à nos jours, aucune explication concrète n'a pu être apportée à ce phénomène physique. Pour ce qui nous concerne, cela pourrait avoir des rapports avec l'apparition des *streak* décrit dans l'étude des phénomènes de paroi exposés dans le chapitre 2.

3.5 Conclusion

Contrairement aux modèles classiques, la relaxation elliptique permet une reproduction de l'effet non-local de la pression par l'entremise d'une équation différentielle linéaire et elliptique pour la corrélation vitesse-gradient de pression. Le modèle de pondération elliptique EB-RSM proposé d'abord par Manceau et Hanjalić [87] , puis améliorée par Manceau [82] est basé sur l'approche de la relaxation elliptique de Durbin. Il est beaucoup plus facile à implémenter dans un code RSM, résout une seule équation différentielle elliptique et donne de très bons résultats entre autre en canal, pour des écoulements en rotation [82] et dans le cas des jets multiples impactant sur une paroi plane [124] et autres.
Grâce aux bonnes conditions aux limites basées sur un équilibre correct entre la diffusion moléculaire, la dissipation et le terme de pression, le comportement de la composante normale à la paroi est correctement reproduit. Sa simplicité, sa robustesse, le nombre suffisamment réduit d'équation nécessaires, l'avantage de ne pas faire intervenir explicitement la distance à la paroi et donc de pouvoir être utilisé pour des géométries complexes, la résolution du problème d'amplification de la redistribution dans la zone logarithmique dont il a fait preuve [127, 80, 89, 84], sont autant d'atouts incitatifs à sa préférence par rapport aux modèles classiques intégrables à la paroi. De plus nos études de l'influence du nombre de Reynolds sur le paramètre de pondération et l'échelle de longueur utilisé montrent un excellent comportement en proche paroi. Toutefois, les anomalies observées dans ces cas tests, se situent pour la plupart loin de la paroi et sont le fait du modèle quasi homogène choisi.
Les avantages du modèle EB-RSM précédemment énumérés sont suffisants pour son introduction dans les modèles *Algébriques Explicites* que nous allons présenter dans les chapitres suivants comme modèle de paroi, afin de mieux reproduire les effets induits à la présence de celle-ci, particulièrement le plus important, l'effet de blocage.

Chapitre 4

La modélisation Algébrique

Les écoulements turbulents impliquent généralement des échelles de longueur et de temps qui dépendent de la configuration de l'écoulement. Le meilleur compromis pour la modélisation type RANS pour décrire la grande variété des écoulements turbulents fût le modèle k–ε. Néanmoins, étant un modèle de type EVM Linéaire, il représente de manière très incomplète les propriétés d'anisotropie de la turbulence, ce qui limite sévèrement la précision de ces résultats dans les zones où ces phénomènes deviennent prépondérants. Par ailleurs, les différentes approches de la modélisation de la turbulence conduisent à travers les chapitres précédents vers les modèles de viscosité turbulente, linéaires, non linéaires et les modèles du second ordre. Pendant que les premiers sont robustes numériquement, simples à coder, difficiles à calibrer, mauvais pour les écoulements complexes, de rotation et de couche limites, les modèles du second ordre sont en revanche moins robuste, bien adaptés pour les écoulements complexes, traduisent convenablement l'effet mémoire de la turbulence et sont réputés pour une excellente prise en compte de la physique des écoulements bien qu'ils présentent des difficultés pour leur mise en oeuvre.

Les modèles algébriques s'inscrivent dans la démarche de **la combinaison des avantages** des modèles du premier et du second ordre et offrent ainsi l'atout d'une meilleure reproduction des composantes du tenseur de Reynolds que les modèles à viscosité turbulente, sans toutefois nécessiter la résolution d'équations de transports supplémentaires.

En retenant comme inconnues les moments d'ordre deux, Rodi [108] montre sous hypothèses d'équilibre faibles qu'ils ne sont pas déduits des équations de transports aux dérivées partielles, mais d'un système de relations algébriques applicables en tous points du champ dont la résolution nécessite la connaissance de deux grandeurs transportables donnant accès aux échelles caractéristiques[1]. De plus en s'appuyant sur le fait que les tenseurs de déformations contiennent les informations portées par k et ε, il démontre que ce rôle est joué par ces deux variables. En conséquence, les modèles algébriques permettent d'obtenir les champs de tensions de Reynolds en ne résolvant que deux équations aux dérivées partielles supplémentaires, celles des deux variables k

[1]Il s'agit ici des échelles de longueur et de temps

et ε, puis d'établir une loi de comportement non nécessairement linéaire des tensions de Reynolds.

La formulation *implicite* posant d'énormes problèmes numériques, celle-ci a évolue vers une formulation *explicite* qui à connue un réel succès dans la communauté scientifique. Toutefois, bien qu'ils se situent à la charnière entre les fermetures du premier et du second ordre, ils ne permettent guère une meilleure reproduction de l'anisotropie dans la zone de proche paroi que les modèles du premier ordre, s'ils sont basés sur un modèle du second ordre non valable en proche paroi. Afin de remédier à ces insuffisances, plusieurs auteurs[110, 27, 126, 122, 57] utilisent des fonctions d'amortissements pour intégrer les modèles jusqu'à la paroi.

Dans cette thèse, il est question de concevoir un modèle algébrique valable en région de proche paroi. La réalisation de cet objectif passe par la compréhension des différentes étapes de la modélisation algébrique puis par le choix d'un modèle de paroi qui sera ici le modèle de pondération elliptique. Nous allons donc dans les lignes qui vont suivre d'abord présenter les différentes formulations algébriques des modèles de turbulence, y introduire les équations du modèle de pondération elliptique, puis enfin procéder à la validation des modèles qui découlent de ce travail.

4.1 Méthodologie de la Modélisation Algébrique

4.1.1 Évolution du tenseur de Reynolds

La formulation algébrique des tensions de Reynolds initiée par Rodi [108] est très répandue. Nous donnons ici le fil conducteur afin de mettre en évidence la liaison qu'elle établi entre les modèles du premier et du second ordre. Comme nous l'avons présenté précédemment, le point de départ de la modélisation algébrique des contraintes de Reynolds est en effet l'équation de transport des tensions de Reynolds qui pour un fluide incompressible homogène en écoulement turbulent se met sous la forme :

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{dt} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \phi^*_{ij} + D^\nu_{ij} + D^T_{ij} \tag{4.1}$$

dans laquelle par définition :

$$\mathrm{P}_{ij} = -\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad = \text{-}\overline{u_i u_k}(S_{kj} - W_{kj}) - (S_{ik} - W_{ik})\overline{u_j u_k} \tag{4.2}$$

$$\phi^*_{ij} = -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right); \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_{ij} = -2\nu\left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}\right); \tag{4.4}$$

$$D^\nu_{ij} = \nu\frac{\partial^2\overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}; \tag{4.5}$$

$$D_{ij}^T = -\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}; \tag{4.6}$$

sont préalablement définies respectivement par les termes de production (terme exact), de corrélation vitesse-gradient de pression, de dissipation, de diffusion moléculaire, et turbulente. Les différents mécanismes exprimés par les termes de l'équation (4.1) sont importants dans la prise en compte des phénomènes physiques des écoulements turbulents. De plus comme on peut le voir aisément, cette équation n'est pas fermée et nécessite la modélisation de ϕ_{ij}^*, ε_{ij} et D_{ij}^T dont certains ont déjà été développés dans les chapitres précédents.

Dans le développement pratique des modèles ainsi que dans l'analyse des écoulements turbulents, il est d'usage d'utiliser le tenseur d'anisotropie b_{ij}, tenseur objectif [118], symétrique de trace nulle associé aux tensions de Reynolds par la relation :

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \tag{4.7}$$

4.1.2 Évolution du tenseur d'anisotropie

En partant de l'équation (4.7) on établit la relation suivante :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2k}\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k^2}\frac{Dk}{Dt} \tag{4.8}$$

L'équation de transport de k (1.7) s'écrit :

$$\frac{Dk}{Dt} = P - \varepsilon + D \tag{4.9}$$

Dans cette équation, $P = \frac{P_{ii}}{2}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_{ii}}{2}$, et $D = \frac{D_{ii}}{2}$ expriment respectivement, le taux de production, de dissipation et de diffusion (qui combine les effets de diffusion visqueuse et turbulente).

Ainsi l'équation exacte de l'évolution du tenseur d'anisotropie sera obtenue en injectant les relations (4.1) et (4.9) dans (4.8). Ce qui donne :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2k}\left(P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij}^* + D_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}P - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}D - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon\right) \tag{4.10}$$

4.2 Formulation Algébrique

La formulation de tous modèles algébriques passe la mise sous forme *algébrique* de l'équation (4.10). Rodi [108] émet alors deux hypothèses pour y parvenir en prenant en considération comme l'ont spécifiés Gatski et Speziale [30], la difficulté de la stabilité numérique introduite par les termes de diffusion. Il propose alors :

◇ l'équilibre du tenseur d'anisotropie (indépendant donc du temps)

◇ l' alignement de la diffusion sur le tenseur d'anisotropie.
Ces hypothèses se traduisent par :

$$\frac{\mathrm{d}b_{ij}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{D_{ij}}{D_{kk}} = \frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{u_k u_k}} \tag{4.12}$$

et dans une moindre mesure, restent valables dans le cas des écoulements peu complexes (le cas du canal par exemple et en écoulement 2D plan sans courbure). C'est déjà un bon compromis. En effet, en 2002, Omar El Yahyaoui, Gilmar Mompean et al [27] ont montrés d'après une étude sur les modèles algébriques non-linéaires que l'hypothèse d'équilibre (4.11) est bien vérifiée. Les évolutions des tensions de Reynolds et des composantes du tenseur d'anisotropie obtenue sont en bon accord avec la DNS de Gavrilaski dans le cas d'un écoulement turbulent tridimensionnel et périodique dans une conduite à section carrée. De plus, en établissant une cartographie des contours de Db_{11}/Dt et Db_{22}/Dt, ils montrent que ces valeurs sont effectivement négligeables devant les autres termes du modèle. Auparavant, Girimaji[36], Rumsey *et al.* [111], Gatski et Wallin [33] ont démontrés la limite de cette hypothèse lorsque l'écoulement devient complexe ou à forte courbure. Dans ce dernier cas on démontre [110, 125, 33, 48, 36] que la condition (4.11) pourrait être modifiée de la façon suivante dans le cas d'un écoulement inhomogène :

$$\frac{\mathrm{d}b_{ij}}{\mathrm{d}t} = (b_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}b_{kj}) \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

Le tenseur taux de rotation $\boldsymbol{W}_{ij}$ du modèle est remplacé par le tenseur taux de rotation *effectif* $\boldsymbol{W}^*_{ij}$ définit par $\boldsymbol{W}^*_{ij} = \boldsymbol{W}_{ij} - \Omega_{ij}/a_2$ où Ω_{ij} représente le tenseur taux de rotation de rotation des vecteurs propres du tenseur de déformation. Cette correction maintient le caractère algébrique de l'ASM et les résultats obtenus semblent concluants. Cependant, les études comparatives sur les conditions (4.13) et (4.11) effectuées par Rumsey et Gatski[110, 31] dans le cas d'un écoulement à forte courbure ont montrés pour la composante $\overline{uv}$ que les deux conditions sont les mêmes lorsqu'on s'éloigne de la paroi et divergent au fur et à mesure que l'on s' en approche.

4.2.1 Modèle algébrique implicite ASM

En injectant les équations (4.11) et (4.12) dans (4.10), on aboutit à la forme purement *implicite* de l'ASM :

$$(P_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}P) + \phi^*_{ij} - (\varepsilon_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon) = 0. \tag{4.15}$$

L'écriture des termes ε_{ij} et ϕ^*_{ij} en fonction de S_{ij}, W_{ij} et b_{ij} conduit alors au système algébrique (4.15) d'inconnue b_{ij}. Malheureusement, ce système est non linéaire, ne peut être résolu analytiquement, et pose d'énormes problèmes de convergence numérique.

4.2.2 Modèle Algébrique explicite

Pope[103] fut le premier à proposer le modèle algébrique *explicite* dans le cas d'un écoulement 2D. L'équation (4.15) suggère que b_{ij} s'exprime comme une fonction des grandeurs qui interviennent dans le système, c'est à dire en général :

$$b_{ij} = f(S_{kl}, W_{kl}, \frac{k}{\varepsilon}, \frac{P}{\varepsilon}) \tag{4.16}$$

avec S_{ij} définit par la relation (1.9) et

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{4.17}$$

En appliquant la théorie de la base d'intégrité (Spencer [117]) et la projection de Galerkine, on peut obtenir une solution explicite de l'équation(4.15). Cette idée de Pope[103] conçue et mise en oeuvre pour un écoulement 2D plan est reprise d'abord par Taulbee en 1992[122] puis par Gatski et Speziale [30] en 1993 pour une généralisation du Modèle Algébrique Explicite EASM[2] en 3D. Des améliorations sont proposées notamment Girimaji[121, 35] avec la prise en compte de la courbure dans la formulation du modèle pour les écoulements complexes, Xu *et al.* [128] pour la prise en compte de l'anisotropie du taux de dissipation, So *et al.* [116] pour les effets de la gravité. Entre autres formulations, Grundestam[37] utilise la minimisation du résidu de l'équation de l'anisotropie par la méthode des *moindres carrés*. Cette formulation est appliquée avec succès pour des écoulements en rotation. Le choix d'une base tensorielle de projection est déterminant et le modèle qui en découle permet largement de prendre en compte la physique de l'écoulement par le biais des invariants scalaires. Cette méthode sera appliquée par Rumsey *et al.* [110] à un écoulement 2D plan dans une conduite en **U**. La particularité de son application réside dans l'introduction comme terme de redistribution, la modélisation SSG de Speziale *et al.*[119] (3.25).

Par ailleurs dans le cadre ce rapport, le modèle de Rumsey *et al.* nous servira à la fois de point de départ de la mise en oeuvre de notre modèle et de base de comparaison de nos résultats. Notre principal objectif demeure la mise en place de modèles EASM avec prise en compte du modèle de pondération elliptique[82][3] comme modèle de proche paroi.

[2]EASM : Explicit Algebraic Stress Model

[3]Ce modèle est en fait une extension à la paroi du modèle SSG

4.3 Le modèle Algébrique EB-EASM

4.3.1 Formulation EASM

La relation (4.15) représente l'équation générale implicite de l'ASM. Pour être résolue de façon explicite sa transformation est nécessaire. Pour obtenir une solution analytique explicite de cette équation, Pope [103] propose l'utilisation de la projection Galerkine sur une base de tenseurs convenablement choisie. Pour cela le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W}, \frac{k}{\varepsilon}, \frac{P}{\varepsilon})$ [4] s'écrira sous la forme d'une combinaison linéaire d'un certain nombre fini N de tenseurs $\mathbf{T_i}$ symétriques, tous linéairement indépendants, de trace nulle et formés à partir des tenseurs $\mathbf{S}$ et $\mathbf{W}$. Ce qui se traduit par le système linéaire :

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \boldsymbol{T}_i \tag{4.18}$$

Les coefficients scalaires β_i de cette relation linéaire sont fonctions des invariants scalaires indépendants pouvant être formés à partir des tenseurs de la base. En utilisant la théorie de la *base d'intégrité* (Spencer) [117], les six invariants suivants peuvent être constitués à partir des tenseurs [5] $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ [30, 123, 117] :

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \{\mathbf{S^2}\} \\
\eta_2 &= \{\mathbf{W^2}\} \\
\eta_3 &= \{\mathbf{S^3}\} \\
\eta_4 &= \{\mathbf{SW^2}\} \\
\eta_5 &= \{\mathbf{S^2W^2}\} \\
\eta_6 &= \{\mathbf{SWS^2W^2}\}.
\end{aligned}$$

D'autre part, l'obtention d'une solution *polynomiale* de $\boldsymbol{b}$ nécessite une base complète formée de N = 10 tenseurs [103, 30, 123, 117].(Voir Annexe B)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_1} &= \boldsymbol{S} & \mathbf{T_2} &= \mathbf{SW\text{-}WS} \\
\mathbf{T_3} &= \mathbf{S^2} - \tfrac{1}{3}\{\mathbf{S^2}\}\boldsymbol{I} & \mathbf{T_4} &= \mathbf{W^2} - \tfrac{1}{3}\{\mathbf{W^2}\}\boldsymbol{I} \\
\mathbf{T_5} &= \mathbf{WS^2} - \mathbf{S^2W} & \mathbf{T_6} &= \mathbf{SW^2} - \mathbf{W^2S} - \tfrac{2}{3}\{\mathbf{SW^2}\} \\
\mathbf{T_7} &= \mathbf{WSW^2} - \mathbf{W^2SW} & \mathbf{T_8} &= \mathbf{SWS^2} - \mathbf{S^2WS} \\
\mathbf{T_9} &= \mathbf{W^2S^2} + \mathbf{S^2W^2} - \tfrac{2}{3}\{\mathbf{S^2W^2}\}\mathbf{I} & \mathbf{T_{10}} &= \mathbf{WS^2W^2} - \mathbf{W^2S^2W}
\end{aligned}$$

Toutefois en écoulement 2D, seulement une base minimale de trois tenseurs est suffisante pour une représentation exacte de $\boldsymbol{b}$. Par ailleurs pour les écoulements tridimensionnels, le tenseur d'anisotropie étant de dimension 5, pour des raisons similaires au cas bidimensionnel, les solutions exactes de l'équation (4.18) sont obtenues pour une base minimale composée de 5 tenseurs [53].

Pour fermer l'équation (4.15), il faut choisir un modèle pour les termes de redistribution ϕ^*_{ij}, de dissipation et de production. Pour cela à l'instar de Rumsey *et al.*[110],

[4] Notation tensorielle ou matricielle qui sera utilisée préférentiellement dans cette thèse à cause de sa simplicité

[5] Les précisons sur les tenseurs et ses invariants sont données en Annexe B

g_1	g_1^*	g_3	g_3^*	g_4	g_5
3.4	1.8	0.4	0.4	1.25	0.4

TAB. 4.1 – Valeurs des coefficients g_i utilisés par Rumsey *et al.*

introduisons dans l'équation (4.15), le modèle SSG (3.25) pour le terme de redistribution, celui de ε_{ij} sous sa forme isotrope (1.12) pour la dissipation. Pour la production, le sa forme exacte obtenue à partir de l'équation (4.2) se met sous la forme :

$$P_{ij} = -2k\left(b_{ik}S_{jk} + S_{ik}b_{jk}\right) - 2k\left(b_{ik}W_{jk} + W_{ik}b_{jk}\right) - \frac{4}{3}kS_{ij}, \tag{4.19}$$

On aboutit donc à la relation générale algébrique écrite sous sa forme tensorielle :

$$-\frac{1}{a_4}\boldsymbol{b} - a_3(\boldsymbol{bS} + \boldsymbol{Sb} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{bS}\}) + a_2(\boldsymbol{bW} + \boldsymbol{Wb}) = a_1\boldsymbol{S}, \tag{4.20}$$

où $\{.\}$ désigne la trace et les coefficients a_i sont directement reliés à ceux du modèle quasi-homogène et des paramètres de la turbulence k, et ε par :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}g_3; \\
a_2 &= 1 - \frac{g_5}{2}; \\
a_3 &= 1 - \frac{g_4}{2}; \\
a_4 &= g\tau; \\
g &= \left[\left(1 + \frac{g_1^*}{2}\right)\frac{P}{\varepsilon} + \frac{g_1}{2} - 1\right]^{-1}; \\
\tau &= \frac{k}{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

pour lesquels les différentes valeurs des coefficients g_i sont consignées dans le tableau (4.3.1).

Le choix du modèle SSG, se justifie notamment par sa performance dans la zone logarithmique par rapport aux modèles LLR[71], Hanjalić et Launder [44], Lumley et Zeman[130].

Par ailleurs, le modèle de Rumsey *et al.* [110], impose le coefficient $g_3^* = 0$ à cause de la non linéarité qu'il introduit. Or il s'avère que ce coefficient joue un rôle important au voisinage de la paroi. Dans le souci de mieux reproduire l'anisotropie à la paroi, nous proposerons dans le cadre du modèle EB-EASM, de lui restituer sa valeur d'origine proposée par Speziale *et al.* [119].

D'autre part afin d'obtenir une solution explicite de l'équation (4.20), nous allons donc introduire la décomposition (4.18) dans (4.20) et une projection de Galerkine [6] sur une base de tenseurs convenablement choisis parmi ceux énumérés dans la relation (4.3.1) sera réalisée en tenant notamment compte de la nature de l'écoulement.

De cette projection sur cette base de tenseurs $\boldsymbol{T}_m$, on aboutit à un système linéaire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \beta_n \Big[-\frac{1}{a_4}\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\} - a_3\left(\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\} + \{\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\}\right) \\ +a_2\left(\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_m\} - \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\}\right)\Big] \\ = a_1\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

qui se présente sous la forme :

$$\mathcal{X}\mathcal{A} = \boldsymbol{B} \tag{4.23}$$

dans lequel $\mathcal{X}$ et $\boldsymbol{B}$ sont respectivement les vecteurs colonnes composées des inconnues β_n et du second membre $a_1\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\}$. Ce système ainsi constitué est linéaire et nécessite pour la détermination des inconnues β_n l'inversion de la matrice $\mathcal{A}$. Si on se réfère au cas du modèle de Rumsey *et al.* [110] pour lequel les trois tenseurs de base $\boldsymbol{T}_1$–$\boldsymbol{T}_2$–$\boldsymbol{T}_3$ sont utilisés. La matrice s'écrit donc à :

$$\mathcal{A}_{nm} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a_4}\eta^2 & -2a_2\eta^4\mathcal{R}^2 & -\dfrac{1}{3}a_3\eta^4 \\ 2a_2\eta^4\mathcal{R}^2 & -\dfrac{2}{a_4}\eta^4\mathcal{R}^2 & 0 \\ -\dfrac{1}{3}a_3\eta^4 & 0 & -\dfrac{1}{6a_4}\eta^4 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Les seuls invariants qu'on voit apparaître sont :

$$\eta = \sqrt{\{\boldsymbol{S}^2\}} \tag{4.25}$$

et

$$\mathcal{R} = \sqrt{-\frac{\{\mathbf{W}^2\}}{\{\mathbf{S}^2\}}} \tag{4.26}$$

Ces invariants jouent des rôles importants qui sont précisés à la section (4.5). La résolution de ce système linéaire (4.23) donne les solutions β_i de la forme :

$$\beta_i = f\left(a_1, a_2, a_3, a_4, g_i, \eta, \mathcal{R}\right) \tag{4.27}$$

qui peuvent se réduire en utilisant les expressions définies en (4.21) :

$$\beta_i = f\left(\frac{k}{\varepsilon}, \frac{P}{\varepsilon}, \eta, \mathcal{R}\right), \tag{4.28}$$

[6] La projection d'un tenseur $\boldsymbol{A}$, sur une base $\boldsymbol{T}_i$ est définie par le produit scalaire $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_i\}$

Afin d'évaluer l'échelle de temps $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$, la résolution des équations de transport de k et ε est nécessaire. Les tensions de Reynolds seront par conséquent reconstruites à partir de l'équation (4.18), le tenseur d'anisotropie étant :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{S} + \beta_2(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}) + \beta_3(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}). \tag{4.29}$$

Le modèle est ainsi basé sur deux équations de transport et la relation non linéaire du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ est équivalente à celle d'un modèle non linéaire k–ε. Toutefois, les coefficients de l'équation (4.29) ne sont pas constants mais dépendent des invariants η, $\mathcal{R}$, de l'échelle de temps τ et du rapport P/ε comme exprimés dans la relation (4.28). Contrairement aux modèles k–ε non linéaire, le modèle ainsi constitué ne nécessite *aucune procédure de calibration*. D'autre part, le ratio production- dissipation peut s'écrire comme :

$$\frac{P}{\varepsilon} = -2\left\{\boldsymbol{bS}\right\}\tau \tag{4.30}$$

avec

$$\left\{\boldsymbol{bS}\right\} = \beta_1 \eta^2 \tag{4.31}$$

La solution du système linéaire étant dépendante de $\dfrac{P}{\varepsilon}$ (voir Eq. (4.28)), l'introduction des équations (4.30) et (4.31) dans l'eq (4.28) conduit dans le cas présent à la détermination du coefficient β_1 via une équation cubique.

Le modèle de Rumsey *et al.*[110], qui est la forme algébrique explicite du modèle SSG, hérite de l'incapacité de ce dernier à reproduire la zone de proche paroi. Des fonctions d'amortissement sont donc utilisées afin de corriger cette anomalie. Puisque nous cherchons à nous affranchir de l'utilisation de ces fonctions, nous allons donc introduire dans le modèle algébrique explicite précédent, celui de la pondération elliptique. Le modèle que nous obtiendront sera alors donc baptisé **EB-EASM**[7][98, 95, 97].

4.4 Introduction de la pondération elliptique : Formulation EB-EASM

Comme décrit dans le chapitre 3 le modèle de pondération elliptique EB-RSM est une extension à la paroi du modèle SSG. De plus, la nature du choix d'un modèle de redistribution et de dissipation est très importante dans les résultats que l'on est susceptible d'avoir lors d'une modélisation algébrique. Dans le cas du modèle de Rumsey *et al.*, la modélisation SSG est utilisée ainsi que la forme isotrope de la dissipation. Les mauvais comportements asymptotiques obtenus par ce modèle font en sorte qu'une modification de sa structure s'impose. Le modèle EB-RSM permet par le biais du coefficient de pondération α, solution de l'équation elliptique Eq. (3.29) de relier les

[7]Elliptic Blending -Explicit Algebraic Stress Model ; Modèle Algébrique Explicite avec prise en compte de la Pondération Elliptique comme modèle de paroi

comportements loin et proche des parois des modèles de redistribution et de dissipation. La formulation des ces termes que nous rappelons ici, permet de prendre en considération les effets induits par la présence d'une paroi [8].

$$\begin{aligned}\phi^*_{ij} &= (1-\alpha^2)\phi^w_{ij} + \alpha^2\phi^h_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= (1-\alpha^2)\frac{\overline{u_i u_j}}{k} + \frac{2}{3}\alpha^2\varepsilon\delta_{ij}\end{aligned}$$

$$\phi^w_{ij} = -5\frac{\varepsilon}{k}\left[\tau_{ik}n_j n_k + \tau_{jk}n_i n_k - \frac{1}{2}\tau_{kl}n_k n_l\left(n_i n_j + \delta_{ij}\right)\right].$$

Nous allons introduire dans l'équation (4.15), les équations (3.18) et (3.24) en conservant le terme $g^*_3\sqrt{b_{lk}b_{lk}}$ supprimé par Rumsey *et al.*. Toutefois, pour éviter la non linéarité de ce terme, nous reproduirons son effet en utilisant $g^*_3\sqrt{1-\alpha^2}$ [9] [98, 97].

4.4.1 Système Algébrique

Le résultat de l'injection dans (4.15) des équations Eq. (3.18) et Eq. (3.24) conduit au système algébrique implicite suivant :

$$\begin{gathered}-\frac{1}{a_4}\boldsymbol{b} - a_3\left(\boldsymbol{bS}+\boldsymbol{Sb}-\frac{2}{3}\{\boldsymbol{bS}\}\boldsymbol{I}\right) \\ +a_2\left(\boldsymbol{bW}-\boldsymbol{Wb}\right) \\ \boxed{-a_5\left(\boldsymbol{bM}+\boldsymbol{Mb}-\frac{2}{3}\{\boldsymbol{bM}\}\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{bM}\}\boldsymbol{M}\right)} \\ = a_1\boldsymbol{S}+\boxed{\frac{a_5}{2}\boldsymbol{M}},\end{gathered} \tag{4.32}$$

[8] Pour des raisons qui seront exposées au chapitre (6), nous utiliserons α^2 comme coefficient de pondération

[9] Ce terme est introduit dans la version modifiée par Manceau du modèle EB-RSM. L'objectif visé ici étant d'éviter la non linéarité du terme $\sqrt{-II_b}$ puis reproduire son effet. Ce dernier est maximum en proche paroi et s'annule au loin.

dans lequel les nouveaux coefficients deviennent :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(g_3 - \boxed{g_3^*\sqrt{1-\alpha^2}}) \\
a_2 &= 1 - \frac{g_5}{2}\boxed{\alpha^2} \\
a_3 &= 1 - \frac{g_4}{2}\boxed{\alpha^2} \\
a_4 &= g\tau \\
&\boxed{a_5 = \frac{5}{\tau}(1-\alpha^2)} \\
g &= \left[(1 + \frac{g_1^*}{2}\boxed{\alpha^2})\frac{P}{\varepsilon} - (\boxed{\frac{13}{3}} - \frac{g_1}{2})\boxed{\alpha^2} + \boxed{\frac{13}{3}} - 1\right]^{-1} \\
\tau &= \frac{k}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Une comparaison avec les équations (4.20) et (4.32) montre que l'introduction du modèle de pondération elliptique est responsable de l'apparition de nouveaux termes donnés en encadrés. De plus, loin des parois, c'est à dire lorsque le coefficient α tend vers 1, tous ces nouveaux paramètres disparaissent et le modèle dégénère vers celui le Rumsey *et al.*. D'autre part, la principale nouveauté ici est l'apparition d'un nouveau tenseur $\boldsymbol{M}$, défini à partir du pseudo-vecteur normal $\boldsymbol{n}$ et qui rend compte sur son orientation :

$$M_{ij} = n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}. \tag{4.34}$$

ce dernier, loin de la paroi disparaît également car le coefficient a_5 qui tend vers zéro.

4.5 Équations du modèle Algébrique Explicite EB-EASM

4.5.1 Projection de Galerkine

Dans cette partie, une solution explicite de l'équation (4.15) est construite de la même façon qu'au paragraphe (4.3). Différentes formes de solutions explicites sont possibles et dépendent du choix de la base de tenseur. L'étude relative au choix possibles des combinaisons de tenseurs $\boldsymbol{T}_i$ sera détaillée au chapitre 5, de même que la base d'intégrité fonctionnelle modifiée par l'introduction du tenseur $\boldsymbol{M}$ dans le problème et la liste complète des invariants irréductibles.

De façon similaire au modèle de Rumsey *et al.*, l'étude du modèle EB-EASM sera réalisée dans le cas d'un écoulement bidimensionnel (2D) avec la même base de trois

tenseurs de projection. Le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ se mettra alors sous la forme d'une combinaison linéaire des tenseurs :

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{T}_2 = \mathbf{SW\text{-}WS} \qquad \boldsymbol{T}_3 = \mathbf{S^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\{\mathbf{S^2}\}\boldsymbol{I}.$$

soit :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_2 \boldsymbol{T}_2 + \beta_3 \boldsymbol{T}_3. \tag{4.35}$$

En introduisant l'équation (4.35) dans (4.32) puis en procédant à la projection sur la base de tenseurs $\boldsymbol{T}_m$ on aboutit comme nous l'avons montré dans [97, 98, 96] au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3} \beta_n \Bigg[& -\frac{1}{a_4}\left\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\right\} - a_3\left(\left\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\right\} + \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\right\}\right) \\ & + a_2\left(\left\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_m\right\} - \left\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\right\}\right) \\ & - a_5\left(\left\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\right\} + \left\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\right\} - \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{M}\right\}\left\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\right\}\right)\Bigg] \\ & = a_1\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\right\} + \frac{a_5}{2}\left\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\right\}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Ce système linéaire peut également se mettre sous la forme : $\boldsymbol{X}\mathcal{A} = \boldsymbol{B}$ avec $\mathbf{X_i} = \beta_i$. La matrice $\mathcal{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{B}$ obtenus s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\eta^2}{a_4} - 1/3\,a_5\,\eta^2 + 1/2\,a_5\,\mathcal{P}^2 & -2\,a_2\,\eta^4\mathcal{R}^2 + 1/2\,a_5\,\mathcal{P}\mathcal{Q} & -1/3\,a_3\,\eta^4 - 1/4\,a_5\,\eta^2\mathcal{P} \\ 2\,a_2\,\eta^4\mathcal{R}^2 + 1/2\,a_5\,\mathcal{P}\mathcal{Q} & -2\,\dfrac{\eta^4\mathcal{R}^2}{a_4} - 2/3\,a_5\,\eta^4\mathcal{R}^2 + 1/2\,a_5\,\mathcal{Q}^2 & -1/4\,a_5\,\eta^2\mathcal{Q} \\ -1/3\,a_3\,\eta^4 - 1/4\,a_5\,\eta^2\mathcal{P} & -1/4\,a_5\,\eta^2\mathcal{Q} & -1/6\,\dfrac{\eta^4}{a_4} + \dfrac{5}{72}\,a_5\,\eta^4 \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_1\,\eta^2 + \dfrac{a_5}{2}\,\mathcal{P} \\ \dfrac{a_5}{2}\,\mathcal{Q} \\ \dfrac{a_5}{12}\,\eta^2 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

On peut remarquer que la présence du tenseur $\boldsymbol{M}$ dans l'équation (4.32) entraîne l'apparition de nouveaux invariants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ qui s'ajoutent à η et $\mathcal{R}$ et qui s'expriment par :

$$\mathcal{P} = \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\right\} \quad \mathcal{Q} = 2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\right\} \tag{4.39}$$

4.5.2 Solutions du système

La résolution du système (4.36) conduit aux solutions suivantes :

$$\beta_1 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1), \tag{4.40}$$

$$\beta_2 = \frac{a_4}{2\gamma_0}(\gamma_4 a_4^2 + \gamma_5 a_5 + \gamma_6), \tag{4.41}$$

$$\beta_3 = \frac{a_4}{\gamma_0 \eta^2}(\gamma_7 a_4^2 + \gamma_8 a_4 + \gamma_9), \tag{4.42}$$

avec

$$\begin{array}{lll} \gamma_0 = \displaystyle\sum_{m=0}^{3} \lambda_m a_4^m & \gamma_k = f_k\left(\mathbf{a}_i, \eta, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\right) & \lambda_l = g_l\left(\mathbf{a}_i, \eta, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}\right) \\ i = 1, 2, 3, 5 & k = 1, 9 & l = 0, 3. \end{array} \tag{4.43}$$

Les différentes expressions des coefficients λ_l, γ_k du modèle sont consignés dans l'annexe C. Il faut noter à travers les équations (4.40), (4.41) et (4.42) que les expressions de γ_k sont toutes indépendantes de a_4. En effet, le coefficient a_4 joue un rôle particulier. Il dépend du ratio P/ε (4.33) et est lié à β_1 par la relation :

$$\frac{P}{\varepsilon} = -2\,\tau\,\{\boldsymbol{bS}\} = -2\beta_1 \eta^2 \tau. \tag{4.44}$$

De nombreux auteurs ont par ailleurs considérés ce ratio P/ε comme étant une constante [30] alors que dans le cas d'un écoulement en turbulence homogène, il vaut

$$\frac{P}{\varepsilon} = \frac{C_{\varepsilon_2} - 1}{C_{\varepsilon_1} - 1}. \tag{4.45}$$

D'autre part dans le but de prendre en compte la non linéarité des modèles algébriques explicites, des études ultérieures sont menées. Girimaji [35], Ying et Canuto [129] et Jongen *et al.* [54] qui ont suggérés de le considérer comme variable. Cette suggestion nous conduit à une étude des variations de ce ratio, mais avant, précisons le rôle des différents invariants du modèle.

4.5.3 Rôle des invariants du modèle EB-EASM

Nous avons vu que de la prise en compte comme modèle de paroi de la pondération elliptique introduit deux nouveaux invariants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. De plus, la résolution du système linéaire (4.36) conduit à une solution qui peut dorénavant se mettre sous la forme :

$$\beta_i = f\left(\frac{k}{\varepsilon}, \frac{P}{\varepsilon}, \eta, \mathcal{R}, \boxed{\mathcal{P}}, \boxed{\mathcal{Q}}, \boxed{\alpha}\right) \tag{4.46}$$

Types d'écoulements	$\mathbf{Q}/\eta^2$	$\mathbf{P}/\eta$
Jets impactants axisymétriques	$\mathcal{Q}/\eta^2 \longrightarrow 0$	$\mathcal{P}/\eta \longrightarrow 2/3$
Jets Plans	$\mathcal{Q}/\eta^2 = 0$	$\mathcal{P}/\eta^2 \longrightarrow 1/2$
Couche limite	$\mathcal{Q}/\eta^2 \longrightarrow 1$	$\mathcal{P}/\eta \longrightarrow 0$
Canal	$\mathcal{Q}/\eta^2 = 1$	$\mathcal{P}/\eta = 0$

TAB. 4.2 – Valeurs des nouveaux invariants pour quelques écoulements particuliers

Il apparaît que le modèle EB-EASM permet donc de prendre en compte aussi bien les mécanismes de la turbulence à travers les paramètres k et ε que les différents mécanismes physiques que représente les quatre invariants.

∗ l'invariant η caractérise l'intensité de cisaillement et nous verrons qu'il se réduit à $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ dans le cas d'un écoulement en canal.

∗ l'invariant $\mathcal{R}$ est le nombre de Truesdell [10]. Il caractérise le rapport entre les taux de cisaillement et de rotation de l'écoulement. Comme il apparaît au second membre de l'équation de Poisson de la pression moyenne, les valeurs de $\mathcal{R} > 1$ permettent d'identifier les régions de l'écoulement moyen qui tendent à réduire la pression moyenne. Les valeurs $\mathcal{R} = 1$ et $\mathcal{R} = 0$ correspondent respectivement aux régions de cisaillement pure et de déformation plane. Dans le cas d'un écoulement en canal plan, il prend la valeur 1.

∗ $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{SM}\}$ est l'un des nouveaux invariants introduit lors de la prise en compte des effets de blocage par pondération elliptique. Il est sensible à la présence de la paroi. Il renseigne sur l'orientation des axes principaux du tenseur de déformation par rapport à la paroi et est défini dans tout le domaine. A l'approche de la paroi, il tend vers $\mathcal{P} = \frac{\partial U_n}{\partial x_n}$, n étant la normale à la surface Nous appelons cet invariant l'invariant d'impact car on peut montrer [81] qu'il est maximum pour un jet impactant axisymétrique.

∗ Nous appelons invariant de couche limite $\mathcal{Q} = 2\{\boldsymbol{SWM}\}$ le second nouvel invariant. Il caractérise également l'orientation du gradient de vitesse moyenne par rapport à la paroi. De façon similaire à $\mathcal{P}$, quelques exemples de valeurs de $\mathcal{Q}/\eta^2$ sont consignés dans le tableau (4.5.3). $\mathcal{Q}/\eta^2$ est maximum dans le cas d'un canal.

4.6 Étude des variations de $\frac{P}{\varepsilon}$

L'équation (4.33) montre bien que a_4 dépend du ratio P/ε lequel est lié à β_1 par la relation (4.44). Il faut nécessairement résoudre l'équation non linéaire implicite suivante :

[10] mean kinématic vorticity number

$$\beta_1 - \frac{a_4^2}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1) = 0. \tag{4.47}$$

Pour cela, en combinant les équations (4.33) avec (4.47), on aboutit à une équation *quartique* de la forme :

$$\sum_{i=0}^{4} \varphi_i \beta_1^i = 0. \tag{4.48}$$

Ce résultat paraît d'autant plus surprenant que les résultats des modèles algébriques explicites à trois tenseurs donnent *toujours* une équation *cubique*. [110, 123, 117, 57, 53, 52, 37, 2, 8]. L'apparition ici d'une équation *quartique* est le résultat de l'introduction de la pondération elliptique dans l'EASM. Ce que nous démontrerons à la section (4.6.1). Pour la suite, l'équation (4.48) sera résolue par une méthode itérative. La détermination de β_1 permet via les équations (4.41) et (4.42), la connaissance de β_2 , β_3 et le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ par l'intermédiaire de la relation

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_2 \boldsymbol{T}_2 + \beta_3 \boldsymbol{T}_3 \tag{4.49}$$

Nous allons donc examiner dans le chapitre 6 le comportement du modèle dans le cas d'un écoulement en canal (1D) pour lequel $-k\beta_1$ joue le rôle de la viscosité turbulente sachant que parmi les quatre racines (deux sont complexes, une réelle positive et la dernière est réelle négative), les solutions *physiquement admissibles* sont seulement des réels négatifs. Si la sélection de la racine convenable semble aisée dans ce cas, ce n'est pas du tout évident dans le cas général.

4.6.1 Justification du degré de l'équation de β_1

Pour obtenir les solutions explicites de l'équation (4.32), une projection sur une base de tenseurs préalablement choisie est réalisée. De celle-ci découle une équation *quartique* vérifiée par le coefficient de projection β_1. La complexité des coefficients de l'équation polynomiale (4.40) vérifiée par β_1 (Cf Annexe C) ne facilite par la justification de son degré *quartique* qui pourtant apparaît dans son expression. Et comme nous l'avons déjà signalé, cette situation est totalement inhabituelle. Elle mérite que l'on s'y attarde un peu afin de comprendre les raisons qui l'expliquent.

Reprenons donc le problème relatif à la détermination du tenseur d'anisotropie en suivant la démarche de Jongen et Gatski [52] similaire à la projection de Galerkine précédemment utilisée.

Jongen et Gatski [52] ont montrés que dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, la représentation (4.35) du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{b} = \frac{\{\boldsymbol{bS}\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}}\boldsymbol{S} + \frac{\{\boldsymbol{bWS}\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}\{\boldsymbol{W}^2\}}(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}) + 6\frac{\{\boldsymbol{bS}^2\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}^2}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\right)\boldsymbol{I} \tag{4.50}$$

Nous pouvons transformer l'équation (4.32) d'inconnue $\boldsymbol{b}$ en un système d'équations dont les inconnues seront les invariants scalaires $\{\boldsymbol{bS}\}$, $\{\boldsymbol{bWS}\}$ et $\{\boldsymbol{bS}^2\}$ en projetant celle-ci sur chaque tenseur de la base.

$*$ Multiplions (4.32) par $\boldsymbol{S}$ et prenons la trace de la relation ainsi obtenue. On aboutit à la relation :

$$\begin{gathered} -\frac{1}{a_4}\{\boldsymbol{bS}\} - a_3\left(2\{\boldsymbol{bS}^2\} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{bS}\}\{\boldsymbol{S}\}\right) + 2a_2\{\boldsymbol{bWS}\} \\ -a_5\left(2\{\boldsymbol{bMS}\} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{bM}\}\{\boldsymbol{S}\} - \frac{1}{2}\{\boldsymbol{bM}\}\{\boldsymbol{MS}\}\right) = a_1\eta^2 + \frac{1}{2}a_5\{\boldsymbol{MS}\} \end{gathered} \tag{4.51}$$

On voit bien que la présence du tenseur $\boldsymbol{M}$ dans la relation (4.32) a modifié la nature des invariants que l'on pourrait obtenir si l'on faisant intervenir uniquement les tenseurs de déformation $\boldsymbol{S}$ et de rotation $\boldsymbol{W}$. De nouveaux invariants apparaissent :$\{\boldsymbol{bM}\}, \{\boldsymbol{bMS}\}$ et $\{\boldsymbol{MS}\}$
Il va falloir alors les simplifier et les ré écrire sous forme de combinaisons linéaire des invariants $\{\boldsymbol{bS}\}, \{\boldsymbol{bS}^2\}$ et $\{\boldsymbol{bWS}\}$.
D'autre part si nous considérons que le degré de l'équation polynomiale de β_1 ne dépend pas de la dimension de l'écoulement, mais du nombre de tenseurs constituant la base de projection (Voir tableau(5.2)), nous pourrons simplifier cette justification en se plaçant dans le cas particulier de l'écoulement 1D. Pour cette configuration, les relations suivantes ont pu être établies par une utilisation successive du théorème de Cayley Hamilton [11] :

$$\{\boldsymbol{bM}\} = \frac{1}{\eta^2}\{\boldsymbol{bS}^2\} - \frac{1}{\eta^2}\{\boldsymbol{bWS}\}, \quad \{\boldsymbol{bMS}\} = \frac{1}{6}\{\boldsymbol{bS}\}, \quad \{\boldsymbol{MS}\} = 0. \tag{4.52}$$

par conséquent, l'équation (4.51) devient alors :

$$\left(-\frac{1}{a_4} - \frac{1}{3}a_5\right)\{\boldsymbol{bS}\} - 2a_3\{\boldsymbol{bS}^2\} + 2a_2\{\boldsymbol{bWS}\} = a_1\eta^2. \tag{4.53}$$

$*$ La même procédure appliquée au tenseur $(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS})$ permet d'obtenir les nouveaux termes suivants ainsi que leurs simplifications respectives :

[11] Se référer à l'annexe B pour plus de détails sur les simplications

$$
\begin{aligned}
&\left\{\boldsymbol{bWS}^2\right\} = 0 \\
&\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\right\} = 0 \\
&\{\boldsymbol{MWS}\} = -\eta^2\xi^2 \\
&\{\boldsymbol{bMWS}\} = -\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{bS}^2\right\} + \frac{1}{6}\{\boldsymbol{bWS}\} \\
&\left\{\boldsymbol{bW}^2\boldsymbol{M}\right\} = -\frac{1}{2}\xi^2\{\boldsymbol{bS}\} \\
&\{\boldsymbol{bM}\} = \frac{1}{\eta^2}\left\{\boldsymbol{bS}^2\right\} - \frac{1}{\eta^2}\{\boldsymbol{bWS}\}
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

ce qui conduit à la relation :

$$
a_2\{\xi^2\{\boldsymbol{bS}\} + a_5\left(\frac{1}{2}\xi^2 - 1\right)\{\boldsymbol{bS}^2\} + \left[\frac{1}{a_4} + a_5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\xi^2\right)\right]\{\boldsymbol{bWS}\} = \frac{a_5}{2}\xi^2\eta^2 \tag{4.55}
$$

dans laquelle les invariants η et ξ sont tels que :

$$
\eta^2 = \{\boldsymbol{S}^2\} \qquad \xi^2 = -\{\boldsymbol{W}^2\} \qquad \mathcal{R}^2 = \frac{\xi^2}{\eta^2} \tag{4.56}
$$

$*$ Enfin la projection sur $\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\right)$ donne :

$$
\begin{aligned}
&\left\{\boldsymbol{S}^3\right\} = 0 \\
&\left\{\boldsymbol{bWS}^2\right\} = 0 \\
&\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\right\} = 0 \\
&\{\boldsymbol{bW}\} = 0 \\
&\{\boldsymbol{MWS}\} = -\eta^2\xi^2 \\
&\left\{\boldsymbol{bS}^3\right\} = \frac{1}{2}\eta^2\{\boldsymbol{bS}\} \\
&\{\boldsymbol{bM}\} = \frac{1}{\eta^2}\left\{\boldsymbol{bS}^2\right\} - \frac{1}{\eta^2}\{\boldsymbol{bWS}\}
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

soit :

$$-\frac{1}{3}a_3\eta^2\{\boldsymbol{bS}\}+\left(\frac{a_5}{12}-\frac{1}{a_4}\right)\{\boldsymbol{bS}^2\}+\frac{a_5}{4}\{\boldsymbol{bWS}\}=\frac{a_5}{12}\eta^2 \tag{4.58}$$

L'ensemble des relations (4.53), (4.55) et (4.58) forme ainsi donc un système linéaire de type $\mathbf{A}\,\mathbf{Y}\;=\;\mathbf{B}$ avec :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -{a_4}^{-1}-1/3\,a_5 & -2\,a_3 & 2\,a_2 \\ a_2\,\xi^2 & a_5\;(1/2\,\xi^2-1) & {a_4}^{-1}+a_5\;(1/3-1/2\,\xi^2) \\ -1/3\,a_3\,\eta^2 & \frac{5}{12}\,a_5-{a_4}^{-1} & 1/4\,a_5 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

les vecteurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{Y}$ sont tels que :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_1\,\eta^2 \\ 1/2\;a5\;\eta^2\zeta^2 \\ 1/12\;a5\;\eta^2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix} \{\boldsymbol{bS}\} \\ \{\boldsymbol{bS}^2\} \\ \{\boldsymbol{bWS}\} \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

où $\mathbf{Y}$ est l'inconnue du système.
La détermination du vecteur $\mathbf{Y}$ par l'inversion de la matrice $\mathbf{A}$ permet l'obtention de la solution exacte du tenseur d'anisotropie. Par ailleurs, pour déterminer le degré du polynôme du coefficient β_1, identifions les relations (4.49) et (4.50). Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\{\boldsymbol{bS}\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}} \\ \beta_2 &= \frac{\{\boldsymbol{bWS}\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}\{\boldsymbol{W}^2\}} \\ \beta_3 &= 6\frac{\{\boldsymbol{bS}^2\}^2}{\{\boldsymbol{S}^2\}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

La résolution du système linéaire conduit à la solution :

$$\left(\mu_3 a_4^3+\mu_2 a_4^2+\mu_1 a_4+\mu_0\right)\{\boldsymbol{bS}\}=\left(\chi_3 a_4^3+\chi_2 a_4^2+\chi_1 a_4\right) \tag{4.62}$$

les réels χ_i et μ_k sont tous indépendants de a_4. D'autre part de l'équation (4.33), on peut écrire l'équation vérifiée par le coefficient a_4 :

$$a_4=\frac{\tau}{\psi_0\beta_1+\psi_1} \tag{4.63}$$

avec

$$\psi_0 = -2\eta^2\tau\left(1+\frac{g_1^*}{2}\alpha^2\right) \qquad \psi_1 = \frac{10}{3}-\left(\frac{13}{3}-\frac{g_1}{2}\right)\alpha^2 \tag{4.64}$$

ce qui par combinaison avec les équations (4.61) et (4.62), aboutit à l'équation polynomiale d'inconnue a_4 :

$$\left(\eta^2\beta_1\mu_3-\chi_3\right)a_4^3+\left(\eta^2\beta_1\mu_2-\chi_2\right)a_4^2+\left(\eta^2\beta_1\mu_1-\chi_1\right)a_4+\left(\eta^2\beta_1\mu_0\right)\big)=0 \tag{4.65}$$

laquelle donne en injectant l'équation (4.63), une équation d'inconnue β_1 :

$$\underbrace{\tau^3\left(\eta^2\beta_1\mu_3-\chi_3\right)}_{degré\,1}+\underbrace{\tau^2\left(\eta^2\beta_1\mu_2-\chi_2\right)\left(\psi_0\beta_1+\psi_1\right)}_{degré\,2}+\underbrace{\tau\left(\eta^2\beta_1\mu_1-\chi_1\right)\left(\psi_0\beta_1+\psi_1\right)^2}_{degré\,3}+$$
$$\underbrace{\left(\eta^2\beta_1\mu_0\right)\left(\psi_0\beta_1+\psi_1\right)^3}_{degré\,4}=0 \tag{4.66}$$

le degré de β_1 étant identique à celui de $\dfrac{P}{\varepsilon}$, cette équation prend la forme :

$$\varphi_0+\varphi_1\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)+\varphi_2\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^2+\varphi_3\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^3+\varphi_4\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^4=0 \tag{4.67}$$

avec les coefficients donnés en Annexe C

$$\varphi_k = f_k(a_1,a_2,a_3,a_5,\eta,\tau,\alpha) \tag{4.68}$$

Par ailleurs, le degré de l'équation polynomiale (4.67) en $\left(\dfrac{P}{\varepsilon}\right)$ dépend naturellement du coefficient non nul du terme le plus élevé φ_4 qui est donné par la relation :

$$\varphi_4 = -108\eta^2\psi_0^3 \tag{4.69}$$

L'expression de ψ_0 montre que φ_4 ne s'annule que pour la condition $\eta = 0$ En somme, dans le cas du modèle EB-EASM#1, il est bien évident que l'équation (4.67) vérifiée par le ratio $\left(\dfrac{P}{\varepsilon}\right)$ est *quartique* en dehors du cas particulier où $\eta = 0$.

Remarquons toutefois que si $\alpha = 1$, le coefficient a_5 disparaît, le modèle dégénère vers celui de Rumsey *et al.* et l'équation polynomiale devient une équation *cubique* comme pour la plupart des modèles algébriques explicites. En effet, dans cette condition, les coefficients μ_i et χ_i de l'équation (4.62) donnent :

$$\begin{array}{ll} \mu_0 = 108 & \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = -72\,{a_3}^2\eta^2 - 216\,{a_2}^2\eta^2 & \\ \mu_3 = 0 & \chi_1 = -108\,a1\,\eta^2 \\ \chi_2 = 0 & \chi_3 = 0 \end{array} \tag{4.70}$$

et les φ_i de l'équation (4.67) sont :

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 = -108\,\eta^2 a_1\,\psi_1 & \varphi_1 = 36\,\eta^2\left(-3\,a_1\,\psi_0 + 6\,{a_2}^2\eta^2 - 3\,{\psi_1}^2 + 2\,{a_3}^2\eta^2\right) \\ \varphi_2 = -216\,\eta^2\psi_0\,\psi_1 & \varphi_3 = -108\,\eta^2{\psi_0}^2 \\ \varphi_4 = 0 & \end{array} \tag{4.71}$$

L'équation polynomiale vérifiée par β_1 est donc *cubique* avec la disparition de φ_4

On peut finalement donc conclure au vu de cette démarche justificative que la complexité de l'équation polynomiale est bien provoquée par l'introduction de la pondération elliptique.

4.7 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie, le modèle EB-EASM construit à partir du modèle original de Rumsey *et al.* [110] dans le cas des écoulements bidimensionnels (2D). L'intégration du modèle de pondération elliptique EB-RSM dans la modélisation algébrique explicite EASM, à pour objectif une meilleure prise en considération des effets induits par la présence d'une paroi notamment l'effet de blocage et à pour conséquence, l'apparition d'un tenseur $\boldsymbol{M}$ dépendant de la normale à la paroi, ainsi que la naissance de deux nouveaux invariants jouant d'importants rôles à proximité de la paroi. Le modèle EB-EASM concilie les avantages des modèles du premier et du second ordre et est entièrement déterminé par trois paramètres k, ε et α, coefficient de pondération par lequel il est rendu sensible à la distance à la paroi. Sa mise en oeuvre se déroule en somme selon les différentes étapes suivantes :

- Résoudre les équations de transport de k et ε pour la détermination de l'échelle de temps turbulent, $\tau = k/\varepsilon$ dont dépend le coefficient a_4 à travers l'équation (4.33) ;
- résoudre l'équation elliptique (3.29) du coefficient α nécessaire pour la détermination des coefficients du modèle a_i (4.33) ;
- construire le tenseur $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} - 1/3$ à partir de la normale $\boldsymbol{n}$ dépendant du gradient de α ;
- à partir du tenseur $\boldsymbol{M}$, évaluer les invariants $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, les invariants η, et $\mathcal{R}$ dépendant uniquement de $\boldsymbol{S}$ et de $\boldsymbol{W}$;
- déterminer les coefficients de projection β_i en utilisant les équations (4.40), (4.41), et (4.42) ;
- l'équation (4.49) enfin permet de déterminer la solution *exacte* du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ et par conséquent le tenseur de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ facilement obtenue à partir de la relation (4.7).

Chapitre 5

Choix des bases de tenseurs

Dans le chapitre 4, le modèle algébrique explicite EB-EASM est construit avec la base des trois tenseurs suivants :

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} \qquad \boldsymbol{T}_2 = \mathbf{SW\text{-}WS} \qquad \boldsymbol{T}_3 = \mathbf{S^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\{\mathbf{S^2}\}\boldsymbol{I}. \tag{5.1}$$

En se basant sur les propositions de Pope [103] relatives aux différentes combinaisons possibles des tenseurs de déformations $\boldsymbol{S}$ et de rotation $\boldsymbol{W}$ (Cf section (4.3.1)), nous disposons d'une large gamme de choix possible de tenseurs. De plus, l'introduction du modèle EB-RSM dans le modèle algébrique explicite à favoriser la complexité du problème (l'équation de β_1 devient *quartique*) grâce au tenseur $\boldsymbol{M}$ exclusivement dépendant du coefficient de pondération α et ne s'annulant que si $\boldsymbol{\nabla}\alpha = 0$.

L'objectif visé dans ce chapitre est de procéder à des investigations sur les différentes *combinaisons possibles* de ces trois tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$ que nous qualifions *tenseurs de références* dans le but de construire des bases de projection pouvant servir à l'obtention des différents modèles types EB-EASM. Remarquons d'abord que les tenseurs $\boldsymbol{T}_2$ et $\boldsymbol{T}_3$, introduits dans les modèles sont non linéaires suivant le gradient de vitesse moyenne. Les modèles utilisant ces tenseurs sont connus pour introduire des instabilités numériques et présentent quelques problèmes particuliers dans le cas des écoulements complexes lorsque le tenseurs $\boldsymbol{W}$ est nul (points d'arrêt par exemple). Par conséquent ils ne sont pas toujours capables de reproduire correctement l'anisotropie en ces points du fait de leur dépendance de $\boldsymbol{W}$. Dans le cas classique d'une modélisation algébrique, l'introduction de la non linéarité est possible, mais ne permet pas toujours une meilleure reproduction de l'anisotropie surtout en proche paroi. Cependant la prise en compte dans le modèle EB-EASM du tenseur $\boldsymbol{M}$ indépendant du gradient de vitesse moyenne et ne dépendant que de la normale à la surface, élargit les possibilités de construction de différentes bases de tenseurs linéaires, augmente sa complexité tout en améliorant notablement les résultats en proche paroi. D'autre part, la question des singularités reste entière. On se pose la question de savoir comment les éviter. Quelle est le nombre et la nature des tenseurs à choisir pour éviter de les introduire dans les

modèles ? Combien en faut il au minimum pour une représentation *exacte ou approchée* de l'anisotropie dans les différents cas écoulements ? Quelles sont les caractéristiques des tenseurs produits qui doivent conférer au tenseur d'anisotropie, son invariance par changement de base ? Nous allons tenter d'apporter des éléments de réponses tout au long de ce chapitre que nous allons commencer en rappelant brièvement les principes de base indispensables pour la construction des bases d'intégrités.

5.1 Principes d'élaboration des bases d'intégrité

La construction d'une base d'intégrité dans le cas des modèles EB-EASM passe par la prise en compte des différentes combinaisons possibles des trois tenseurs de références $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ (classiquement utilisés dans les modèles) et $\boldsymbol{M}$ dont ils dépendent en respectant le nombre minimal de tenseurs requis par la théorie de la base d'intégrités (Spencer [117]).

La détermination de la base d'intégrité invariante est donc le point de départ de la construction de la base fonctionnelle nécessaire à la représentation complète du tenseur d'anisotropie fonction des tenseurs de *références*. Les éléments de cette base d'intégrité invariante sont alors obtenus comme la trace des produits de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, et $\boldsymbol{M}$, développés à une certaine extension. Lorsque les extensions retenues sont les plus petites, la base obtenue est dite *base d'intégrité* . En partant sur le fait que les tenseurs de *références* sont de nature symétriques ou antisymétriques, Spencer [117], a montré que ces éléments sont des séries d'invariants polynomiaux. Une fois la base d'intégrité invariante déterminée, il faut construire à partir de celle-ci une base d'intégrité fonctionnelle pour laquelle le tenseur d'anisotropie sera décomposée avec des coefficients *polynomiaux*. Les coefficients du polynôme obtenu seront constitués par des combinaisons des éléments de la base invariante initialement construite. Toute représentation de l'anisotropie dans une base incomplète (nombre inférieur à de celle la base d'intégrité fonctionnelle) ne garantit par la *représentation polynomiale* de celle-ci et par conséquent pourrait conduire à des points de singularités. Ce qui est d'ailleurs le cas en pratique car il est impossible de construire un modèle utilisant le nombre élevé de tenseur requis. Signalons toutefois qu'à une base incomplète donnée correspond un modèle pouvant dégénérer ou non.

Afin d'éviter toute ambiguïté ultérieure, définissons ici le vocabulaire que nous utiliserons pour les appellations des différentes bases de tenseurs.

⋆ *Base d'intégrité fonctionnelle* ou *base complète* : permet une représentation *polynomiale* de l'anisotropie. Toute base d'un nombre inférieur de tenseurs sera qualifiée d'incomplète.

⋆ *Base minimale* : base incomplète constituée d'un nombre de tenseurs linéairement indépendants correspondant à la dimension de l'espace du tenseur d'anisotropie.

⋆ *Base subminimale* : base constituée d'un nombre de tenseurs linéairement indépendants inférieur à la dimension de l'espace du tenseur d'anisotropie.

Dans cette partie, nous ne donnerons que les raisonnements essentiels et les résultats

obtenus. Les détails sont reportés à l'Annexe B.

5.1.1 Base d'intégrité Invariante en 3D

La *Base d'intégrité Invariante* est la base constituée des invariants polynomiaux obtenus à partir du nombre minimal des extensions possibles des tenseurs de *référence*. Dans le cas des modèles algébriques EB-EASM, la prise en compte des phénomènes induits par la présence des parois nécessite l'introduction du tenseur $\boldsymbol{M}$ donnant une information en chaque point sur l'orientation de la normale à la paroi. Il résulte d'après le chapitre 4 que l'anisotropie devient alors fonction des trois tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{M})$. Cette considération fait en sorte que nous sortons totalement des cas de représentation classique du tenseur d'anisotropie pour lesquels $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W})$[1]. La complexité introduite par la prise en compte de la paroi fait passer de **6** le nombre d'invariants minimum et irréductibles à prendre en compte en écoulement tridimensionnel pour le cas classique à **29** dans le présent cas en tenant compte notamment des conditions $\{\boldsymbol{S}\} = \{\boldsymbol{M}\} = 0$.

Les invariants scalaires retenus dans le cas général de trois tenseurs de *références* sont donc (Cf Tableau II page 288 de Spencer [117]) :

$$\begin{gathered}
\{\boldsymbol{S}^2\}, \{\boldsymbol{M}^2\}, \{\boldsymbol{S}^3\}, \{\boldsymbol{M}^3\} \\
\{\boldsymbol{SM}\}, \{\boldsymbol{SM}^2\}, \{\boldsymbol{MS}^2\}, \{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW}\boldsymbol{S}^2\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MW}\boldsymbol{M}^2\} \\
\{\boldsymbol{WSM}\}, \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\}, \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{MS}\}, \{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{SM}\}, \\
\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}^2\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MWS}^2\}
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Remarquons que le tenseur normal à la paroi $\mathbf{N}$ est un projecteur c'est à dire que $\mathbf{N}^2 = N$ et par conséquent la propriété suivante est vérifiée pour le tenseur $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{M}^2 = \frac{1}{3}\boldsymbol{M} + \frac{2}{9}\boldsymbol{I}$. Dans le cas des modèles algébriques explicites EB-EASM, La disparition dans l'équation (5.2) des termes en $\boldsymbol{M}^2$ réduit la base d'intégrité invariante à **16** invariants.

Une fois la base d'intégrité invariante obtenue, nous allons donner dans les lignes suivantes la procédure permettant de construire la base fonctionnelle à partir des invariants scalaires polynomiaux obtenus ci-dessus.

5.1.2 Base d'intégrité fonctionnelle

La détermination des éléments de la base fonctionnelle n'est possible que si le tenseur produit à représenter est une *fonction polynomiale de ses arguments*[117, 32].

[1]Des détails sont données en Annexe B

C'est le cas du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ qui dépend des tenseurs de références $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$. En effet, le tenseur d'anisotropie est une fonction algébrique implicite fonction de ces tenseurs de références. D'après Spencer [117], il existe une base des invariants polynomiaux fonction de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$.

La procédure de construction de la base, spécifiée par Spencer [117], dépend de la nature symétrique ou non du tenseur polynomial G_{ij} par exemple à représenter. Elle repose sur l'utilisation d'un tenseur polynomial, du second ordre, symétrique ϕ_{ij}, (si G_{ij} est symétrique) ou d'un tenseur polynomial anti symétrique de second ordre ψ_{ij} (si G_{ij} est anti symétrique) tels que :

$$\begin{array}{l} \mathcal{J} = \{\mathbf{G}\phi\} = G_{ij}\phi_{ji} = \phi_{ij}G_{ji} \\ \mathcal{K} = \{\mathbf{G}\psi\} = G_{ij}\psi_{ji} = \psi_{ij}G_{ji} \end{array} \tag{5.3}$$

- **cas où G_{ij} est symétrique**

on peut écrire :

$$G_{ij} = Gji = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}} \tag{5.4}$$

Soit

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}}\right) \tag{5.5}$$

L'invariant polynomial $\mathcal{J}$ est une fonction linéaire en ϕ_{ij} et peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{J} = \sum_n \mathcal{I}_n \mathcal{J}_n \tag{5.6}$$

dans laquelle les $\mathcal{I}_n$ sont des invariants scalaires appartenant à la base d'intégrité invariante conçue à partir des tenseurs de références dont dépend G_{ij}, tandis que les $\mathcal{J}_n$ constituent les éléments de la base d'intégrité formée par les tenseurs de références auquel on ajoute ϕ [117, 32]. La construction de cette base d'intégrité invariante a fait déjà l'objet du précédent paragraphe. Si on injecte l'équation (5.6) dans (5.5), il vient :

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n \left(\frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ji}}\right) \tag{5.7}$$

Les éléments de la base fonctionnelle sont obtenus après avoir définit tous les éléments de la base d'intégrité invariante $\mathcal{J}_n$ composée des tenseurs de référence et du tenseur symétrique ϕ et dont on ne retiendra *uniquement* que les termes de degré 1 en ϕ auxquels on appliquera pour chacun la relation (5.5). Enfin, la relation (5.7) donne une décomposition de G_{ij} dans la base fonctionnelle.

• **cas où G_{ij} est antisymétrique**
Écrivons l'égalité $G_{ij} = Q_{ij}$. La même procédure que le cas symétrique est utilisée et les relations sont les suivantes :

$$Q_{ij} = -Qji = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ij}} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ji}} \tag{5.8}$$

Le tenseur anti symétrique Q_{ij} et l'invariant $\mathcal{K}$ (joue le même rôle que $\mathcal{J}$) peuvent se mettre sous la forme :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ji}}\right) \tag{5.9}$$

et

$$\mathcal{K} = \sum_n \mathcal{I}_n \mathcal{K}_n \tag{5.10}$$

Soit :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n \left(\frac{\partial \mathcal{K}_n}{\partial \psi_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{K}_n}{\partial \psi_{ji}}\right) \tag{5.11}$$

5.1.3 Application à la détermination de la base fonctionnelle du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ en 3D

Dans le présent cas, le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{M})$. Il est symétrique et par conséquent les relations précédentes permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{\boldsymbol{b}\phi\} = b_{ij}\phi_{ji} = \phi_{ij}b_{ji} \\ b_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

De plus l'équation (5.7) donne dans le présent cas :

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n \left(\frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ji}}\right) \tag{5.13}$$

Pour construire la base fonctionnelle, nous devons chercher à déterminer les invariants $\mathcal{J}_n$ formés à partir de la base d'intégrité pour les tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{M}$ et du tenseur symétrique ϕ . En utilisant la procédure détaillée dans le précédent paragraphe, on recense **105** invariants au total dont **42** sont de degré 1 en ϕ après une application successive du théorème de Cayley Hamilton qui sont :

$$
\begin{gathered}
\{\boldsymbol{\phi}\} \\
\{\boldsymbol{S\phi}\},\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{M\phi}\},\{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi}\} \\
\{\boldsymbol{SM\phi}\},\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M\phi}\},\{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi S}\},\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi}\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{\phi}\} \\
\{\boldsymbol{WS\phi}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{\phi S}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S\phi}\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW\phi}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{\phi WS}^2\} \\
\{\boldsymbol{WM\phi}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{\phi M}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M\phi}\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MW\phi}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{\phi WM}^2\} \\
\{\boldsymbol{WSM\phi}\},\{\boldsymbol{WS\phi M}\},\{\boldsymbol{WMS\phi}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M\phi}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{\phi S}\} \\
\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{\phi M}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S\phi}\},\{\boldsymbol{WMS}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{W\phi M}^2\boldsymbol{S}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M\phi S}\} \\
\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{\phi SM}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{\phi}\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM\phi}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M\phi S}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M\phi}\}\,\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\phi S}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM\phi}\}.
\end{gathered}
\tag{5.14}
$$

En appliquant pour chaque invariant ci dessus $\mathcal{J}_n$, la relation (5.12), on aboutit à la liste des éléments de la base fonctionnelle qui dans le présent cas est composée de **42**, soit **41** tenseurs si la condition de trace nulle est utilisée pour le tenseur $\boldsymbol{b}$.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} && \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} \\
&\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{S}^2 - \tfrac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MS} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SM}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MW} && \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{M} \\
&\boldsymbol{T}_7 = \boldsymbol{MWS} - \boldsymbol{SWM} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{MWS}\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_8 = \boldsymbol{M}^2 - \tfrac{1}{3}\{\boldsymbol{M}^2\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_9 = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MS}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{10} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{11} = \boldsymbol{SWS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{WS} && \boldsymbol{T}_{12} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WS}^2 \\
&\boldsymbol{T}_{13} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{14} = \boldsymbol{SW}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SW}^2\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{15} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{W}^2 - \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{16} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WSW}^2 \\
&\boldsymbol{T}_{17} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MWM}^2 && \boldsymbol{T}_{18} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WM}^2 \\
&\boldsymbol{T}_{19} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{20} = \boldsymbol{MW}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{MW}^2\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{W}^2 - \tfrac{1}{3}\{\boldsymbol{W}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{22} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MW} - \boldsymbol{WMW}^2 \\
&\boldsymbol{T}_{23} = \boldsymbol{SM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S} && \boldsymbol{T}_{24} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{W}^2 \\
&\boldsymbol{T}_{25} = \boldsymbol{WMS} - \boldsymbol{SMW} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{WMS}\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{26} = \boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{WSM}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{27} = \boldsymbol{SWM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WS} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SWM}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{28} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{W} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{29} = \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S} - \boldsymbol{SM}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{30} = \boldsymbol{MWS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{WM} \\
&\boldsymbol{T}_{31} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WSM}^2 && \boldsymbol{T}_{32} = \boldsymbol{WMS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{MW} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{WMS}^2\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{33} = \boldsymbol{SMWM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WMS} && \boldsymbol{T}_{34} = \boldsymbol{SWS}^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{WS} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SWS}^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{35} = \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{36} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} \\
&\boldsymbol{T}_{37} = \boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MW}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{38} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MSW}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{39} = \boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{40} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{W}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{I} \\
&\boldsymbol{T}_{41} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM} - \boldsymbol{MWSW}^2 - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}\}\boldsymbol{I}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Toutefois, en tenant compte de la propriété du tenseur $\boldsymbol{M}$ précédente cette base se réduit dans le cas des modèles EB-EASM à **27** tenseurs.

Pour obtenir une décomposition *polynomiale* de la forme (5.13) du tenseur d'anisotropie, l'utilisation de tous les tenseurs de base (donc de la base complète Eq.B.44) est requise. En cas de réduction du nombre d'éléments de cette base (et c'est toujours le cas d'ailleurs), on aboutit à des *coefficients rationnels* qui peuvent être singuliers en certains points particuliers. C'est la raison pour laquelle de nombreux modèles présentent

des singularités. Néanmoins, utiliser une base de 41 tenseurs en 3D pour représenter le tenseur d'anisotropie apparaît impossible. C'est la raison qui motive le développement des modèles en utilisant une base incomplète. Toutefois en dehors des singularités qui peuvent apparaître, la réduction du nombre d'éléments de la base complète n'est pourtant pas défavorable dans le sens d'une bonne représentation du tenseur d'anisotropie. Une base *minimale* de cinq (05) tenseurs est alors suffisants pour une représentation *exacte* du tenseur d'anisotropie, étant donné sa dimension. Rivlin et Erickson [107] ont montrés qu'au delà de cette base *minimale* (donc nombre supérieur à la dimension de l'espace), on aboutit nécessairement à des redondances. Pour le cas du modèle EB-EASM, les nombres d'éléments des différentes bases sont récapitulés et comparés avec les résultats classiquement obtenus dans le tableau (5.1.5).

5.1.4 Cas de l'écoulement 2D plan

Dans le cas de l'écoulement bidimensionnel, des simplifications apparaissent au niveau de la forme des tenseurs de la base fonctionnelle. Les matrices représentant les tenseurs de déformations et de rotation sont de dimension deux. Ce qui n'est pas le cas de $\boldsymbol{M}$ qui elle est de dimension trois. La simplification des équations devant se faire en utilisant le théorème de Cayley Hamilton pour les matrices 2x2, nous allons utiliser en écoulement bidimensionnel, la normale à la paroi représentée par le tenseur 2x2, $\mathbf{N}$, symétrique, de trace unité et lié à $\boldsymbol{M}$ par la relation : $\boldsymbol{M} = \mathbf{N} - \frac{1}{3}\{\mathbf{N}\}\boldsymbol{I}$.

Sachant que dans un écoulement 2D, la normale $\mathbf{N}$ ainsi que les tenseurs de déformation et de rotation sont respectivement définis par :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{12} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{12} & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

l'application du théorème de Cayley Hamilton par exemple à $\mathbf{N}$, (voir annexe B) conduit à l'équation :

$$\mathbf{N}^2 - \mathbf{N}\{\mathbf{N}\} + \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^{(2)}\left(\{\mathbf{N}\}^2 - \left\{\mathbf{N}^2\right\}\right) = 0 \tag{5.17}$$

Ce qui se réduit encore à

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \tag{5.18}$$

pour laquelle $\boldsymbol{I}^{(2)}$ représente la matrice identité en dimension 2 définie par :

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

De la même façon, on peut écrire pour $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ les relations suivantes :

$$\boldsymbol{S}^2 = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{W}^2 = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{5.21}$$

Nous allons maintenant appliquer les relations ci dessus à tous les éléments de la base fonctionnelle obtenue en 3D définis par la relation (B.44).

Pour illustrer la procédure simplifions par exemple les tenseurs $\boldsymbol{T}_{22} = \boldsymbol{W}^2\mathbf{N}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\mathbf{N}\boldsymbol{W}^2$ et $\boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{S} - \frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\right\}\boldsymbol{I}$. L'injection de la relation (5.21) dans $\boldsymbol{T}_{22}$ conduit simplement :

$$\boldsymbol{T}_{22} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{W}) \tag{5.22}$$

soit une relation de proportionnalité entre $\boldsymbol{T}_{22}$ et $\boldsymbol{T}_5$. D'autre part, on peut écrire pour ce qui concerne $\boldsymbol{T}_4$:

$$\boldsymbol{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\left\{\mathbf{N}\right\} + \mathbf{N}\left\{\boldsymbol{S}\right\} - \boldsymbol{I}^{(2)}\left(\left\{\boldsymbol{S}\right\} - \left\{\mathbf{N}\right\} - \left\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\right\}\right) \tag{5.23}$$

ce qui conduit après simplification à :

$$\boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{S} + \left\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\right\}\left(\boldsymbol{I}^{(2)} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\right) \tag{5.24}$$

laquelle démontre que $\boldsymbol{T}_4$ peut être substitué par les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\left(\boldsymbol{I}^{(2)} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\right)$.

En somme, la base d'intégrité fonctionnelle dans le cas de l'écoulement 2D plan est alors composée des six (**06**) tenseurs suivants :

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{S};\mathbf{N} - \frac{1}{3}\left\{\mathbf{N}\right\}\boldsymbol{I};\boldsymbol{I}^(2) - \frac{2}{3}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S};\boldsymbol{W}\mathbf{N} - \mathbf{N}\boldsymbol{W};\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\mathbf{N} - \mathbf{N}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\end{array} \tag{5.25}$$

soit en tenant compte de la trace du tenseur $\boldsymbol{b}$ et de la définition de $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{S};\boldsymbol{M};\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S};\boldsymbol{W}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{W};\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\right\}\end{array} \tag{5.26}$$

Donc la représentation *polynomiale* de l'anisotropie nécessite une base fonctionnelle composée de six **(06)** tenseurs et une base *minimale* de trois (**3**) tenseurs. Toute représentation dans une base incomplète composée d'un nombre inférieur à 3 tenseurs n'est qu'une approximation.

Par ailleurs, en ce qui concerne la base d'intégrité invariante, les équations (5.2) se réduisent par l'application successive du théorème de Cayley Hamilton à la base d'intégrité invariante en écoulement bidimensionnel composée des invariants scalaires suivant :

$$\begin{array}{c}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\};\left\{\boldsymbol{W}^2\right\} \\ \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\right\};\left\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\right\};\left\{\boldsymbol{M}^2\right\}\end{array} \tag{5.27}$$

On voit bien que dans cette configuration, cinq (**05**) invariants au maximum sont nécessaires soit en tenant compte de la propriété de $\boldsymbol{M}$, quatre (**04**) invariants avec la disparition de $\{\boldsymbol{M}^2\}$. Dans le cas classique on en a besoin que des deux (**02**) : invariants $\{\boldsymbol{S}^2\}$ et $\{\boldsymbol{W}^2\}$.

5.1.5 Cas de l'écoulement 1D

Un écoulement mono dimensionnel présente encore des particularités par rapport à l'écoulement 2D. En effet, on démontre que : $\{\boldsymbol{S}^2\} = \{\boldsymbol{WSN}\} = -\{\boldsymbol{W}^2\} =$ et $\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\} = 0$. La normale, les tenseurs de déformation et de rotations se réduisent à :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & \eta^2 & 0 \\ \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & \eta^2 & 0 \\ -\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

De plus les relations suivantes sont vérifiées :

$$\boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MW} = \boldsymbol{S} \quad (5.29)$$

$$\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} = 3\eta^2\boldsymbol{M} + 3\left(\boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{WSM}\}\right) \quad (5.30)$$

$$\left(\boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{WSM}\}\right) = \frac{1}{3}\eta^2\boldsymbol{M} + \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I}\right) \quad (5.31)$$

Ces derniers montrent qu'en écoulement 1D, la base d'intégrité fonctionnelle se réduit aux tenseurs : $\boldsymbol{S}; \boldsymbol{M}; \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I}$.

On en conclu donc que pour éviter toutes singularités dans cette configuration 1D, il faut choisir une base complète composée exactement de trois (**03**) tenseurs, lesquels peuvent être soit ceux précédemment cités ci dessus, soit toute combinaison linéaire de ceux ci. Remarquons que la dimension du tenseur d'anisotropie oblige les bases minimales et complètes à posséder les mêmes nombre d'éléments comme le présente le tableau 5.1.5.

Enfin la base invariante est identique au cas classique et se réduit au seul invariant $\{\boldsymbol{S}^2\}$. Ces résultats sont d'ailleurs confirmés à travers les équations du modèle EB-EASM présentés au chapitre 6 dans le cas de l'écoulement mono dimensionnel.

5.2 Études de quelques modèles EB-EASM

La détermination des différentes bases étant fait, nous pouvons alors chercher à optimiser la construction de la base dans le but de mettre en place des modèles de turbulence. Pour cela nos investigations sont portées sur le choix de quelques tenseurs de la base fonctionnelle et le nombre de tenseurs devant constituer notre base de

Types D'écoulements	Tenseur d'anisotropie b = b(S,W)			
	Base Int. Invariante	Base complète	Base Minimale	Dim b
3D	**6**	**10**	**5**	**5**
2D	**3**	**3**	**3**	**3**
1D	**1**	**3**	**3**	**3**
Types D'écoulements	**Tenseur d'anisotropie b = b(S,W,M)**			
	Base Int. Invariante	Base complète	Base Minimale	Dim b
3D	**29**	**41**	**5**	**5**
2D	**5**	**6**	**3**	**3**
1D	**1**	**3**	**3**	**3**
Types D'écoulements	**Tenseur d'anisotropie b = b(S,W,M) Cas EB-EASM**			
	Base Int. Invariante	Base complète	Base Minimale	Dim b
3D	**16**	**27**	**5**	**5**
2D	**4**	**6**	**3**	**3**
1D	**1**	**3**	**3**	**3**

TAB. 5.1 – Tableau comparatif du nombre d'éléments des différentes bases dans les cas ou le tenseur d'anisotropie en fonction de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ puis de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$

projection. Ainsi, les tenseurs suivants ont retenu notre attention pour la mise en place des modèles :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} && \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} \\ &\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MS} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{SM}\}\boldsymbol{I} \\ &\boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{MW} - \boldsymbol{WM} && \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{M} \\ &\boldsymbol{T}_7 = \boldsymbol{MWS} - \boldsymbol{SWM} - \tfrac{2}{3}\{\boldsymbol{MWS}\}\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Partant du fait que les modèles de turbulence pour la plupart ne reposent pas sur une base tensorielle complète, mais effectuent une troncature à l'ordre deux, trois ou 5 au maximum d'une part et vu qu'une base *minimale* de trois tenseurs est suffisante en 2D plan et de 5 tenseurs en 3D pour une représentation *exacte* de la solution, une étude des combinaisons des différentes tenseurs est entreprise afin d'aboutir au choix de la base de projection. Pour cela, des bases *minimales*, *subminimales* sont construites (Cf tableau 5.2) et après avoir établi pour chaque cas les équations implicites, procéder à la résolution de chaque système comme dans les chapitres précédents, nous avons déterminé la linéarité du modèle et le degré du coefficient de projection β_1. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau (5.2). Il apparaît bien que la complexité du modèle est fonction du nombre de tenseurs de base choisie[2], sa linéarité ne dépend quand à elle que de la nature des tenseurs constituants cette base : nous qualifions de linéaire, les modèles de degré 1 en gradient de vitesse.

[2]Les modèles à deux, trois ou cinq tenseurs conduisent respectivement à des équations *cubiques, quartiques et d'ordre six* pour β_1

Cas #	Base	Linéarité du modèle	Degré équation de β_1
1	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_6$	Linéaire	Cubique
2	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_4$	Linéaire	Cubique
3	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5$	Linéaire	Cubique
4	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$	Non linéaire	Quartique
5	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_4$	Non linéaire	Quartique
6	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_5$	Non linéaire	Quartique
7	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_6$	Non linéaire	Quartique
8	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_6$	Linéaire	Quartique
9	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	Linéaire	Quartique
10	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_7$	Non Linéaire	Quartique
11	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	Non linéaire	ordre 6
12	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_6$	Non linéaire	ordre 6
13	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	Non linéaire	ordre 6

TAB. 5.2 – Quelques combinaisons de tenseurs de base : Modèles EB-EASM

Le choix des combinaisons étant effectué, il faut tester *analytiquement* les différents comportements des modèles au voisinage de la paroi pour la prédiction de l'anisotropie. Le paragraphe suivant est consacré à cette étude.

5.3 Prédiction de l'anisotropie à la paroi

Dans le but de tester la capacité à reproduire correctement l'anisotropie en proche paroi des modèles obtenus par combinaisons des tenseurs précédemment définis, il est primordial d'étudier le comportement des tenseurs au voisinage de la paroi. Pour cela l' écoulement en canal constitue un excellent indicateur étant donné que c'est dans cette situation que le risque de dégénérescence des tenseurs de base est plus élevé à cause du nombre important de simplifications. Ainsi, les tenseurs $\boldsymbol{T}_1$ à $\boldsymbol{T}_7$ se réduisent a :

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\eta & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

$$\boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} -\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\eta^2 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

$$\boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{T}_1 \tag{5.36}$$

$$\boldsymbol{T}_5 = -\boldsymbol{T}_1 \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{T}_6 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$\boldsymbol{T}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\eta^2 \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

De ces relations, on peut faire les observations suivantes :

- Le tenseur $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S}$ est nécessaire pour que le modèle soit capable de reproduire la tension de cisaillement.
- les tenseurs $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_4$ et $\boldsymbol{T}_5$ étant identiques au signe près, toute base contenant deux de ces tenseurs dégénère en canal.
- En remarquant la forme des tenseurs $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_4$, $\boldsymbol{T}_5$ et $\boldsymbol{T}_6$, on pourra être tenté de construire avec eux, des modèles *linéaires*. Il apparaît qu'aucune base de *trois tenseurs* ne peut être constituée avec eux dans le cas particulier de l'écoulement en canal ; le modèle va dégénérer vers un modèle à deux tenseurs. Par contre en 2D, comme le montre dans le tableau 4.6.1, cette situation est bien possible à l'instar du modèle formé par les tenseurs $\boldsymbol{T}_1$–$\boldsymbol{T}_4$– et –$\boldsymbol{T}_6$ [3] (Cf tableau (5.2)). En effet, ces tenseurs peuvent être linéairement indépendants et reproduire correctement l'anisotropie en proche paroi ;
- le modèle à deux tenseurs $\boldsymbol{T}_1$–$\boldsymbol{T}_6$ est linéaire et capable de reproduire convenablement la limite à deux composantes de la turbulence. En effet, son tenseur d'anisotropie se met sous la forme :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_6 \boldsymbol{T}_6 \tag{5.40}$$

soit :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\beta_6 & \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1\eta & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1\eta & \frac{2}{3}\beta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\beta_6 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

[3] Le modèle $\boldsymbol{T}_1$–$\boldsymbol{T}_4$–$\boldsymbol{T}_6$ par exemple tend vers le modèle linéaire à deux tenseurs $\boldsymbol{T}_1$–$\boldsymbol{T}_6$ en 1D

et tend au voisinage de la paroi comme le modèle EB-RSM dont il dérive vers :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \tag{5.42}$$

car les coefficients de projection $\beta_1 \to 0$ et $\beta_6 \to -1/2$. D'autre part l'équation (5.41) permet de montrer que partout dans le canal on a $b_{11} = b_{33}$. Par conséquent, le modèle linéaire à deux tenseurs est particulièrement intéressant et sera étudié en détail et comparé au chapitre 6 à un autre modèle linéaire similaire de viscosité turbulente basé aussi sur la relaxation elliptique et également capable de reproduire la limite à deux composantes de l'anisotropie de la turbulence : le modèle $\overline{v^2}$–f.

Cas #	Base	Prévision 2D plan	Prévision en 1D
1	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_6$	correcte	correcte
2	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_4$	correcte	Mauvaise
3	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5$	correcte	Mauvaise
4	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$	correcte	correcte
5	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_4$	Mauvaise	Mauvaise
6	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_5$	Mauvaise	correcte
7	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_6$	correcte	correcte
8	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_6$	dégénère vers $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_6$	correcte
9	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	dégénère vers $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_6$	correcte
10	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_7$	correcte	correcte
11	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	Mauvaise	Mauvaise
12	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_6$	Mauvaise	Mauvaise
13	$\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_5, \mathbf{T}_6$	correcte	correcte

TAB. 5.3 – Prévision de la limite à deux composantes de la turbulence ($\boldsymbol{b}_{22} = -1/3$) en écoulements 1D et 2D plan

5.4 Conclusion

Au choix d'une base de tenseurs est naturellement associé un modèle algébrique explicite dont la capacité à reproduire convenablement l'anisotropie en proche paroi dépend des propriétés des tenseurs. En utilisant la théorie des bases d'intégrité [117], nous avons déterminé les bases invariantes et fonctionnelles à partir des trois tenseurs de *références* $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{M}$ symétriques et du tenseur antisymétrique $\boldsymbol{W}$. Il apparaît clairement que contrairement au cas classique ou le tenseur d'anisotropie dépend uniquement des tenseurs $\boldsymbol{S}$, et $\boldsymbol{W}$, la prise en compte de la paroi via le tenseur $\boldsymbol{M}$ exige pour sa représentation *polynomiale* (donc absence de toutes singularités) **41** tenseurs en général et **27** en considérant la particularité de $\boldsymbol{M}$ pour les modèles EB-EASM au lieu de **10** dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, **6** tenseurs en cas d'écoulement 2D plan au lieu de **3** ; le nombre de tenseurs étant inchangé en mono dimensionnel. De plus, cette nouvelle situation modifie également le nombre d'invariants nécessaires pour chaque type de configuration comme le montre le tableau récapitulatif (5.1.5). Par ailleurs, en raison du nombre élevé de possibilités de tenseurs dont nous disposons, nous avons retenus sept pour lesquels les combinaisons possibles de construction de bases de projection ont été établies. De ce travail, Il ressort que :

✓ le degré de l'équation polynomiale vérifiée par β_1 dépend du nombre de tenseurs linéairement indépendants de la base. Les équations sont *cubiques* pour les modèles

à deux tenseurs qui d'ailleurs sont incapables de distinguer les composantes b_{11} et b_{33} du tenseur d'anisotropie. Les modèles à trois tenseurs quand à eux donnent une équation *quartique* due à l'introduction du modèle EB-RSM dans le modèle algébrique originale de Rumsey *et al.*[110]. Analytiquement si le choix des tenseurs est judicieux, ils permettent l'obtention de la solution exacte de l'anisotropie en 2D plan et pourraient être utilisés en 3D en tant qu'approximation. Les modèles utilisant une base de cinq tenseurs donnent une équation très compliquée d'ordre 6 et ne présentent pas de réels intérêts en 2D plan vu le rapport défavorable entre l'amélioration de l'anisotropie et la complexité des équations. En revanche, une base de 5 tenseurs en 3D est une base *minimale*, ce dont nous reparlerons au chapitre 7

✓ Outre le modèle à trois tenseurs de base $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3)$, il apparaît des combinaisons très attractives : $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_4, \boldsymbol{T}_6)$ et $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_5, \boldsymbol{T}_6)$. Ils sont linéaires suivant le gradient de vitesse moyenne et peuvent être aussi intéressants dans le sens de la stabilité numérique. Toutefois, ils dégénèrent en un modèle à deux tenseurs dans le cas particulier d'un écoulement 1D. Ce qui d'ailleurs ne représente pas un gros handicap étant donné que le modèle $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_6)$ vers lequel ils tendent est capable de restituer en proche paroi, la composante $b_{22} = -1/3$.

✓ Les modèles utilisant les bases $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_6)$ et $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3)$ ne dégénèrent pas quand à deux en 1D et reproduisent correctement l'anisotropie en proche paroi, mieux que le modèle originale de Rumsey *et al.*[110], bien qu'ils soient non-linéaires.

A la lumière des différentes remarques effectuées sur les combinaisons possibles de tenseurs, nous proposons dans le chapitre suivant la présentation de quelques modèles EB-EASM, dans le cas 1D, suivi d'un *test à priori* des modèles non linéaires à trois tenseurs et du modèle linéaire à deux tenseurs et enfin leur validation dans quelques cas particuliers d'écoulements en canal.

Chapitre 6

Modèles EB-EASM dans le cas de l'écoulement en Canal (1D)

Le cas de l'écoulement en Canal (1D) n'est qu'un cas particulier de la méthodologie générale présentée dans le chapitre 4. Il n'est donc pas nécessaire de procéder à la reformulation du modèle. Le modèle construit sur la base des trois tenseurs $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3)$ est comme nous l'avons vu précédemment un modèle non linéaire ne dégénérant pas dans le cas 1D vers un modèle à deux tenseurs. De plus, la particularité du modèle linéaire de base $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_6)$ fait qu'une attention lui sera également consacrée. Ils seront dorénavant baptisés respectivement **EB-EASM#1** et **EB-EASM#2** dans la suite de ce rapport. La première partie consistera à préciser la forme analytique de ces modèles dans le cas 1D. Une seconde partie sera consacrée à la validation des modèles dans le cas d'écoulement en canal, d'abord par un *test à priori* effectué sur ces modèles ensuite par simulation numérique. Les différents résultats seront comparés avec ceux de la simulation numérique directe pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, puis également au modèle original de Rumsey *et al.* et au modèle $\overline{v^2}$–f respectivement pour les modèles non linéaire EB-EASM#1 et linéaire EB-EASM#2.

6.1 Choix du degré du coefficient de pondération

Avant de présenter les équations du modèle et les différents résultats des simulations numériques, nous avons avait une étude comparative des évolutions de la vitesse moyenne avec le coefficient de pondération obtenu avec les relations (3.26) et (3.28). Les résultats présentés sur la figure 6.1, montrent que ceux ci sont meilleurs dans le *cas du modèle EB-EASM#1* avec α^2 qu'avec α^3. Dans la suite de cette thèse, nous allons donc introduire la pondération elliptique dans les modèles algébriques en utilisant le terme α^2.

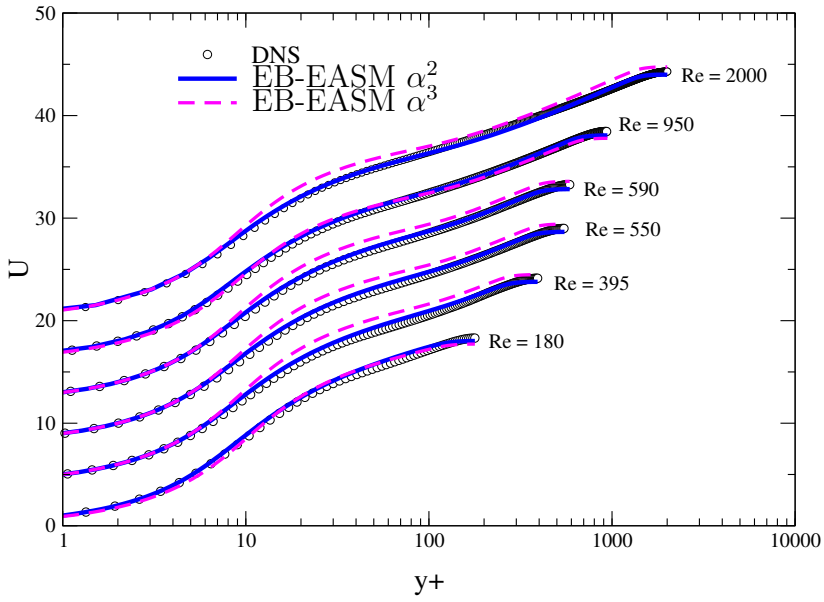


FIG. 6.1 – Étude comparative des profils de la vitesse moyenne à différents Reynolds pour le modèle EB-EASM#1 utilisant α^2 et α^3

6.2 Modèle EB-EASM#1

Le modèle s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{S} + \beta_2 \left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\right) + \beta_3 \left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}\right) \tag{6.1}$$

Les équations dans le cas de l'écoulement en canal du modèle se simplifient. Les invariants se réduisent à :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial U}{\partial y} \\ \mathcal{R} &= 1 \\ \mathcal{P} &= 0 \\ \mathcal{Q} &= \eta^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Le système linéaire $\mathcal{X}\mathcal{A} = \boldsymbol{B}$ est résolu avec la matrice :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\eta^2}{a_4} - 1/3\, a_5\, \eta^2 & -2\, a_2\, \eta^4 & -1/3\, a_3\, \eta^4 \\ 2\, a_2\, \eta^4 & -2\, \dfrac{\eta^4}{a_4} - 1/6\, a_5\, \eta^4 & -1/4\, a_5\, \eta^4 \\ -1/3\, a_3\, \eta^4 & -1/4\, a_5\, \eta^4 & -1/6\, \dfrac{\eta^4}{a_4} + \dfrac{5}{72}\, a_5\, \eta^4 \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

et le vecteur $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_1\, \eta^2 \\ \dfrac{a_5}{2}\, \eta^2 \\ \dfrac{a_5}{12}\, \eta^2 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

6.2.1 Anisotropie en proche paroi

L'étude *analytique* de l'anisotropie est subordonnée à celle des comportements des trois tenseurs de base $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ et $\boldsymbol{T}_3$ qui, nous le rappelons en proche paroi deviennent :

$$\boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\eta & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} -\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{6}\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{6}\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3}\eta^2 \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

Le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_2 \boldsymbol{T}_2 + \beta_3 \boldsymbol{T}_3$ prend donc la forme :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\beta_2\, \eta^2 + 1/6\, \beta_3\, \eta^2 & 1/2\, \beta_1\, \eta\, \sqrt{2} & 0 \\ 1/2\, \beta_1\, \eta\, \sqrt{2} & \beta_2\, \eta^2 + 1/6\, \beta_3\, \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\, \beta_3\, \eta^2 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

La relation (6.6)conduit aux remarques suivantes :
✓ b_{12} ne dépend que de β_1
✓ $b_{33} = b_{11} - b_{22}$ dépend uniquement de β_3

✓ b_{11} et b_{22} sont fonctions de β_2 et β_3.

Ce qui nous amène à la définition des rôles joués par les différents coefficients de projection β_i :

✓ β_1 pilote seul la contrainte de cisaillement tandis que $-k\beta_1$ joue le rôle de la viscosité turbulente

✓ β_3 pilote b_{33}.

✓ β_2 permet de distinguer de b_{22} et b_{11}.

Toutefois, à l'approche de la paroi, le coefficient de pondération $\alpha \to 0$ et les trois coefficients β_i prennent les valeurs limites suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0 \\ \beta_2 &= -\frac{1}{4\eta^2} \\ \beta_3 &= -\frac{1}{2\eta^2} \end{aligned} \tag{6.7}$$

ce qui implique :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Globalement les résultats *analytiques* sont très intéressants pour le modèle EB-EASM#1. Contrairement au modèle de Rumsey *et al.* qui conduit à la forme isotrope $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ à la paroi, la valeur *exacte* de la composante $b_{22} = -1/3$ est restituée. Ainsi, la limite à deux composantes de la turbulence est reproduite et le modèle dégénère loin des parois vers celui de Rumsey *et al.*. La confirmation de la performance du modèle sera validée par un *test à priori* réalisé pour $Re_\tau = 2000$.

6.2.2 Test à priori du modèle EB-EASM#1

La validation du modèle par le *test a priori* consiste à introduire dans les équations du modèle, les résultats des champs du gradient de vitesse moyenne, des échelles de turbulence k et ε provenant de la DNS. La base de données utilisée ici est celle de nos partenaires du projet WALLTURB[1] pour $Re_\tau = 2000$ de l'Université de Madrid UPM [49]. La procédure d'extraction du coefficient α est identique à celle utilisée dans le chapitre 3 pour la validation du modèle EB-RSM. La configuration du canal

[1] A European Synergy for the Assessment of Wall Turbulence. European union 6th framework program, contract number AST4-CT-2005-516008

plan établi est retenue comme cas test, la comparaison des résultats s'effectue avec l'adimensionnalisation basée sur la vitesse de frottement pariétale u_τ.
L'introduction de η, k, ε et α provenant de la DNS permet de déterminer les coefficients de projection β_i et par conséquent, l'anisotropie $\boldsymbol{b}$ à partir de la relation (6.1). Les tensions de Reynolds seront simplement déterminées par la relation :

$$\overline{u_i u_j} = 2k\left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{6.9}$$

Les résultats du *test à priori* présentés sur les figures (6.2) et (6.3) montrent globalement un bon accord avec ceux de la DNS. On note en particulier une confirmation des résultats analytiques [98] obtenus précédemment sur la parfaite reproduction de la valeur à la paroi de la composante normale du tenseur d'anisotropie $b_{22} = -1/3$ et une légère sous-estimation de la composante de cisaillement. Par ailleurs au centre du canal, et de façon similaire à tous des modèles algébriques explicites, les résultats sont loin de correspondre à la réalité. C'est la conséquence directe des hypothèses d'équilibre (4.12) formulées par Rodi [108] sur le terme de diffusion. Il est facile en effet de voir que l'équation algébrique (4.20) (forme limite au centre du canal où $\alpha = 1$) admet comme unique solution $\boldsymbol{b} = 0$ quand $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{W} = 0$. Ce n'est donc pas la projection sur la base tensorielle qui est à l'origine de l'isotropie au centre du canal mais plutôt l'hypothèse d'équilibre faible pour la diffusion (4.12).

Sur les figures 6.4 et 6.5, une comparaison des résultats est faite avec le modèle de Rumsey *et al.*. En effet, ce modèle utilise comme terme de redistribution, le modèle SSG et s'obtient directement du modèle EB-EASM#1 par suppression de la pondération elliptique ($\alpha = 1$). Par conséquent ces figures 6.4 et 6.5 montrent de façon asymptotique et loin des parois, le modèle EB-EASM#1 tend vers celui de Rumsey *et al.* lorsque le coefficient $\alpha \to 1$. On peut donc conclure que les résultats du *test à priori* du modèle montrent les effets de l'introduction de la pondération elliptique dans le modèle de Rumsey *et al.*. Ils démontrent la possibilité de prendre en compte les effets induits à la paroi par cette procédure avec le bénéfice d'une réduction à trois du nombre de paramètres du modèle k, ε et α, la suppression de l'empirisme des fonctions d'amortissements souvent introduites pour corriger les effets de la paroi.

6.3 Modèle EB-EASM #2

L'étude réalisée sur le modèle EB-EASM #2 est similaire à la précédente. Elle consiste ici à utiliser la projection de Galerkine sur la base de deux tenseurs $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S}$ *et* $\boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{M}$. Le modèle ainsi obtenu est linéaire[2]. Le tenseur d'anisotropie

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_6 \boldsymbol{T}_6 \tag{6.10}$$

[2]Les équations du modèle en 2D plan sont résumées en Annexe C

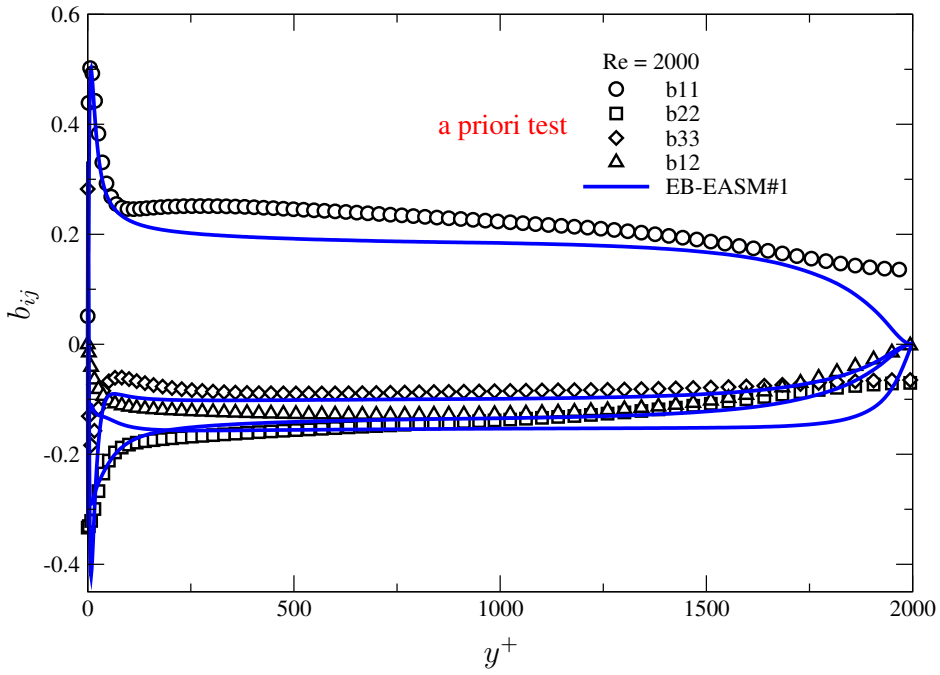


FIG. 6.2 – Évolution du tenseur d'anisotropie. Test *priori* du modèle EB-EASM#1 pour $Re_\tau = 2000$ [49]

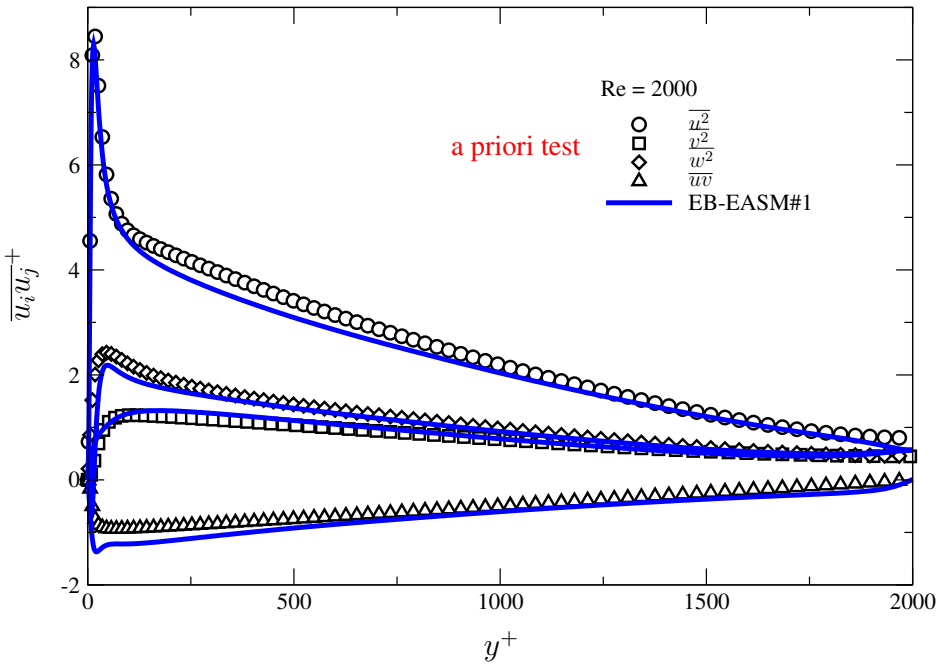


FIG. 6.3 – Tenseurs de Reynolds. *Test priori* du modèle EB-EASM#1 pour $Re_\tau = 2000$ [49]

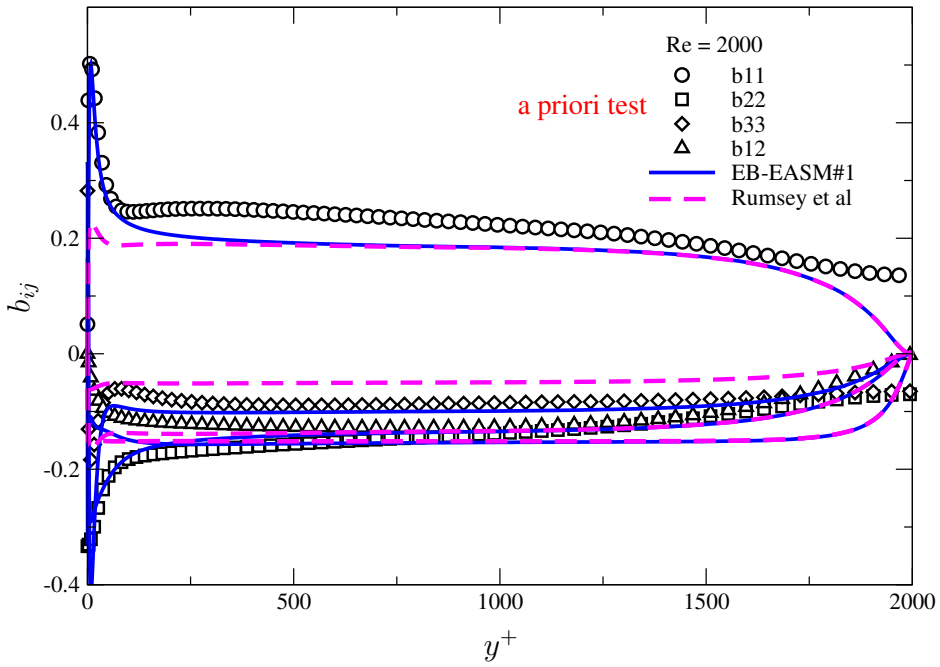


FIG. 6.4 – Tenseur d'anisotropie. Test à *priori* des modèles EB-EASM#1 et Rumsey *et al.* en comparaison avec la DNS pour $Re_\tau = 2000$ [49]

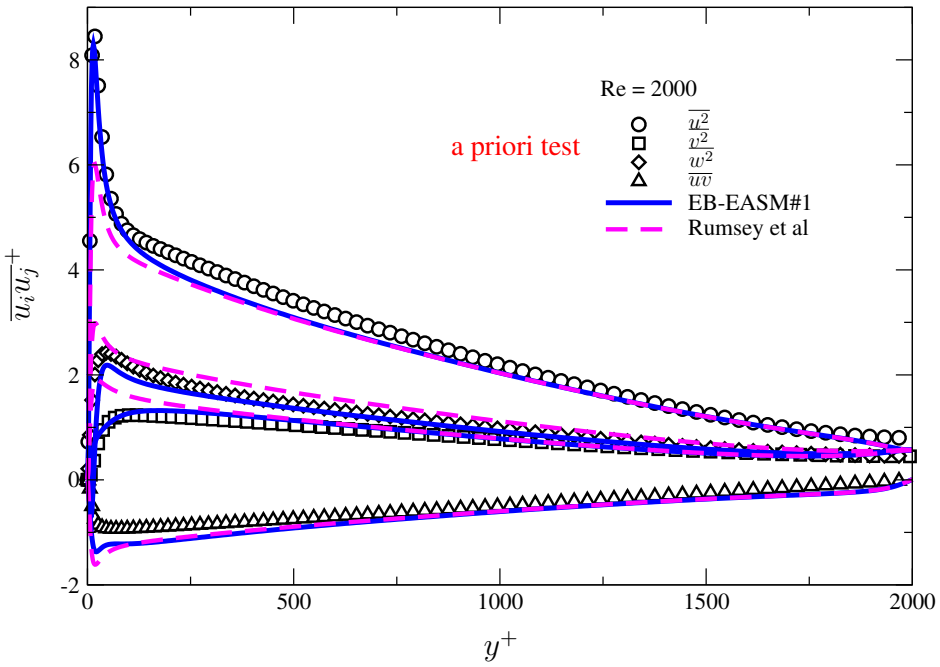


FIG. 6.5 – Tenseur de Reynolds. Test à *priori* des modèles EB-EASM#1 et Rumsey *et al.* en comparaison avec la DNS pour $Re_\tau = 2000$ [49]

se réduit à :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\beta_6 & \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1\eta & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_1\eta & \frac{2}{3}\beta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\beta_6 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

et montre clairement que β_1 pilote la composante de cisaillement et β_6 la composante diagonale normale à paroi. Il est évident ici que le modèle linéaire ne permet pas la reproduction de toutes les composantes de l'anisotropie en proche paroi et on note que $b_{11} = b_{33}$ partout dans le canal contrairement au modèle non linéaire EB-EASM #1. Cependant, le modèle permet la reproduction *exacte* de la composante b_{22} à l'opposé des modèles linéaires à viscosité turbulente qui prévoient une égalité des trois composantes diagonales.
Comme dans le cas précédent, nous allons valider le modèle par un *test à priori* pour $Re_\tau = 2000$.

En observant les résultats présentés sur les figures 6.6 et 6.7, on comprend aisément que conformément aux résultats *analytiques*, le modèle linéaire EB-EASM#2 souffre d'une incapacité à rendre compte convenablement du comportement de toutes les composantes de l'anisotropie. En effet, si le modèle prévoit un bon accord avec les résultats de la DNS [49] pour la composante normale b_{22}, il n'en est pas de même pour les deux autres composantes diagonales pour lesquelles, il prévoit leur égalité. Cependant, globalement les résultats obtenus sont très encourageants car rien qu'avec une base de deux tenseurs, on a pu mettre en place un modèle algébrique explicite *linéaire* capable de reproduire parfaitement les composantes $\overline{v^2}$ et $\overline{uv}$ du tenseur de Reynolds, grâce à la stratégie d'introduction de la pondération elliptique.
Enfin comme dans le cas précédent du modèle non linéaire et d'ailleurs pour tous des modèles algébriques, on retrouve une turbulence exactement isotrope sur l'axe du canal, ce qui n'est pas physique. Les effets de l'introduction de la pondération elliptique étant exclusivement destinés à l'influence de la paroi, on ne doit normalement pas s'attendre à une surprise dans cette région.

6.4 Simulation Numérique des écoulements en canal

6.4.1 Implémentation du modèle dans un code 1D

Dans le but de résoudre les équations des modèles algébriques explicites et de procéder à leur validation dans le cas de l'écoulement 1D, nous les avons mis en oeuvre dans un code de calcul 1D utilisant le schéma aux différences finies. Le code résout les équations différentielles des paramètres du modèle : k, ε et α et évalue les compo-

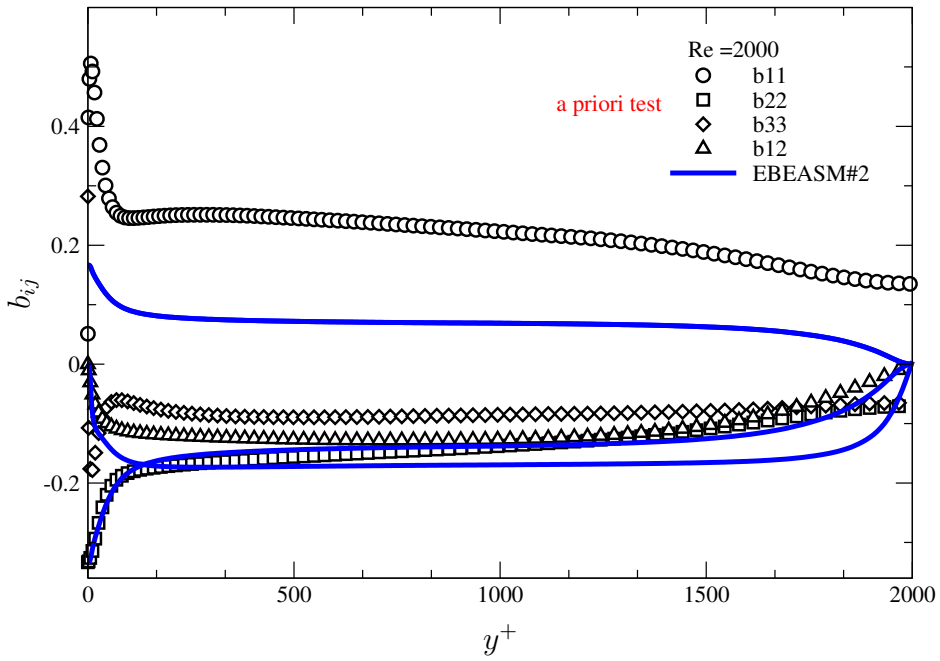


FIG. 6.6 – Évolution du tenseur d'anisotropie. Test *priori* du modèle EB-EASM#2 pour $Re_\tau = 2000$ [49]

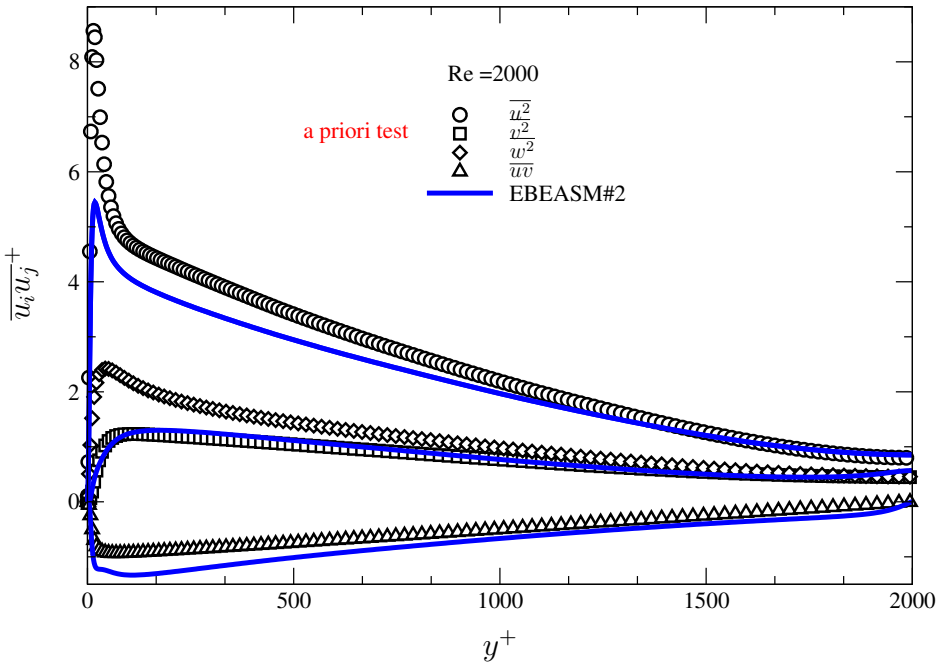


FIG. 6.7 – Évolution du tenseur de Reynolds. Test *priori* du modèle EB-EASM#2 pour $Re_\tau = 2000$ [49]

santes du tenseur d'anisotropie en utilisant les coefficients de projection des équations algébriques explicites. La vitesse moyenne est obtenue en intégrant l'équation

$$\frac{\partial(U/u_\tau)}{\partial y/h} = (1 - y/h + \overline{uv}/u_\tau^2)$$

qui est sa valeur exacte dans le cas de l'écoulement en canal et pour une meilleure précision des résultats, un raffinement du maillage à la paroi est utilisé. Les équations étant adimensionnées par h et u_τ, le code permet d'imposer la valeur de Re_τ. Dans ces conditions, pour diverses valeurs de Re_τ, les équations seront résolues et les résultats seront comparés aux données de la DNS [49, 56, 94]. D'autre part, les résultats du modèle non linéaire EB-EASM#1 ainsi que ceux du modèle linéaire EB-EASM#2 seront respectivement comparés à ceux du modèle EB-RSM [87] et du modèle RV2F[3], version modifiée et améliorée du modèle $\overline{v^2}$–$f$de Durbin (1991).

6.4.2 Résultats du modèle non linéaire EB-EASM#1

Les figures 6.8, 6.9, 6.10 et 6.11 présentent les profils des vitesses moyennes et des tensions de Reynolds et la figure 6.12 montre ceux des composantes du tenseur d'anisotropie pour une gamme de différents nombre de Reynolds. On peut noter sur la figure 6.8 l'excellente prédiction de la vitesse moyenne quel que soit le nombre de Reynolds. Ce résultat est d'ailleurs confirmé par la variation du coefficient de frottement C_f en fonction du nombre de Reynolds représentée sur la figure 6.19.

Si les résultats donnés par les figures 6.9, 6.10, 6.11 et 6.12 confirment ceux obtenus lors du *test à priori* concernant à la bonne reproduction des composantes $\overline{v^2}$ et $\overline{uv}$ des tensions de Reynolds, ce n'est pas le cas pour les composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ en 1D pour lesquelles les résultats ne coïncident pas dans toutes les zones. Toutefois, on note une légère surestimation de $\overline{u^2}$ en 1D (figure 6.11) due sûrement à l'hypothèse d'équilibre sur le terme de diffusion.
Par ailleurs, en observant les résultats du modèle EB-RSM, on voit que le peu de différence avec ceux du modèle EB-EASM#1 surtout pour la composante $\overline{u^2}$, permet de confirmer la validité du modèle algébrique explicite.
Enfin, on observe notamment sur les figures 6.9, 6.10, et 6.11 que le modèle EB-EASM#1 comme le modèle EB-RSM tendent à surestimer la composante $\overline{u^2}$ lorsque le nombre de Reynolds augmente. Ce phénomène est habituellement attribuée à l'apparition d'une agitation par la zone externe, que les modèles RANS ne sont pas capables de reproduire. Ce problème n'est d'ailleurs pas spécifique à la modélisation algébrique explicite, mais à tous les modèles type RANS.

6.4.3 Évaluation du coefficient de pondération α

Dans le paragraphe (3.4) du chapitre 3, nous avions étudié par des *tests à priori* la validité en proche paroi du modèle de pondération elliptique EB-RSM pour une

[3]Rescaled-$\overline{v^2}$–f[84]

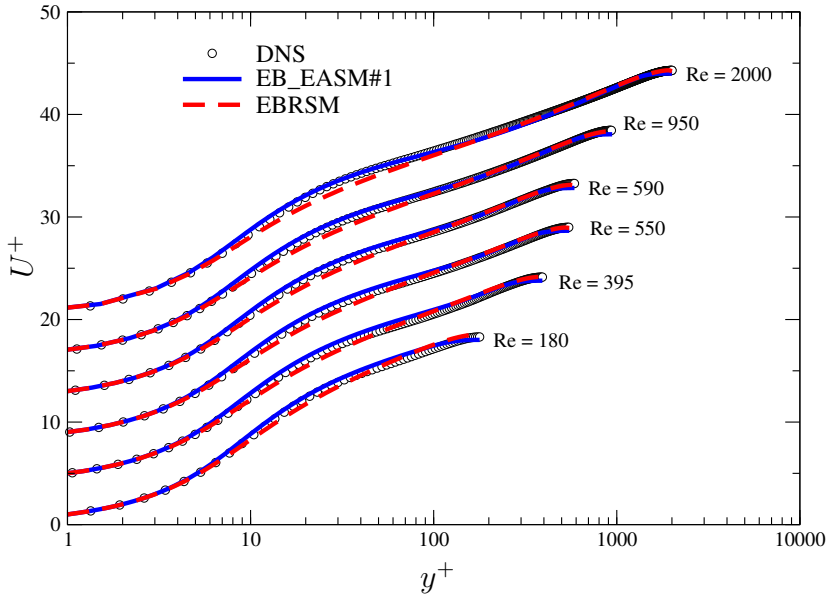


FIG. 6.8 – Profils de la vitesse moyenne prédits par les modèles EB-EASM #1 et EBRSM pour Re_τ = 180, 395 , 550 , 590, 950 et 2000 Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]

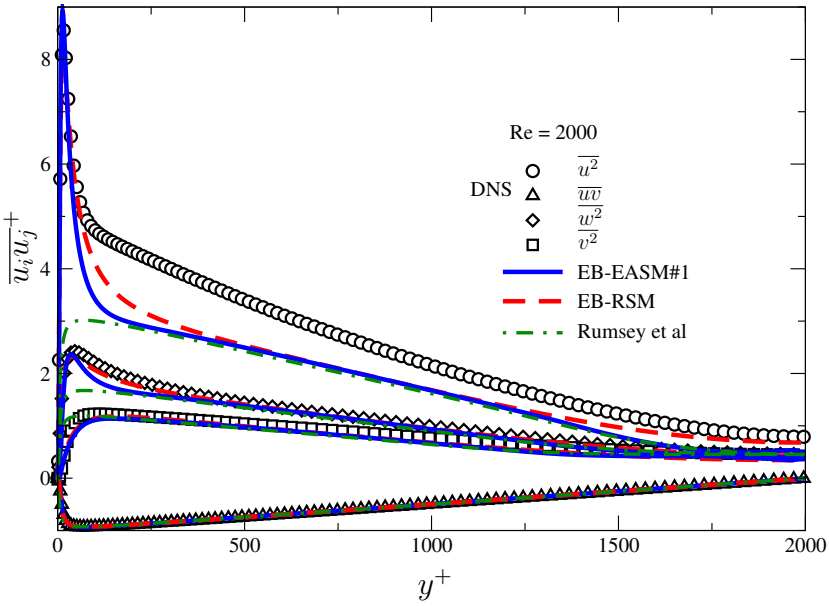
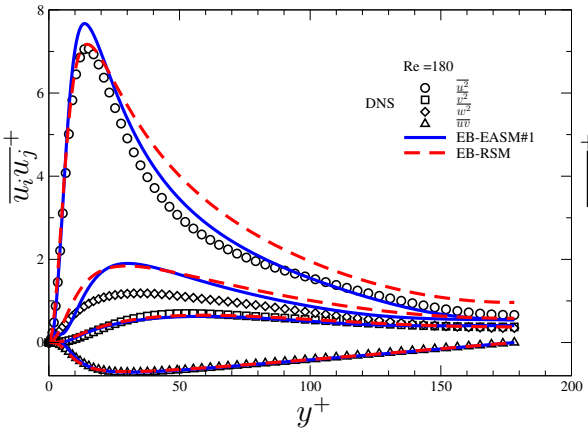
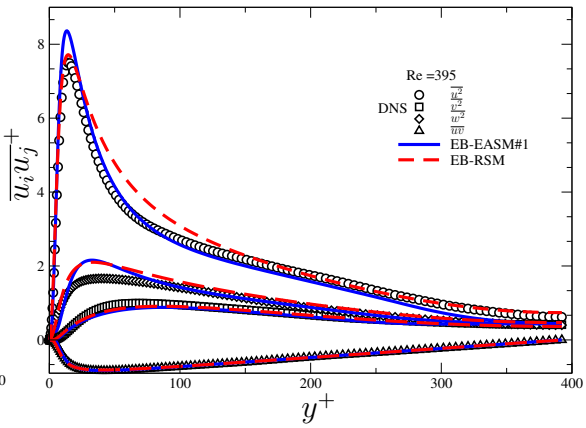


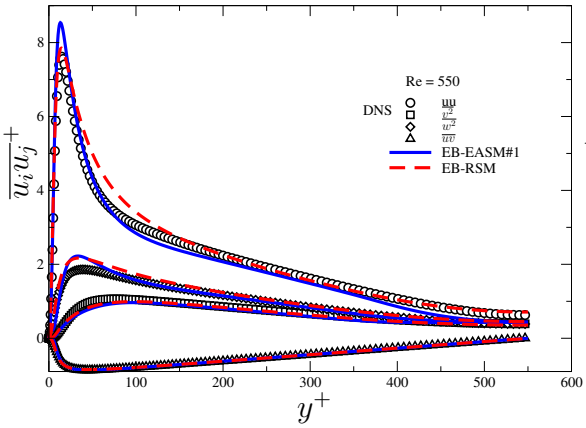
FIG. 6.9 – Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#1 , EB-RSM et Rumsey *et al.* pour $Re_\tau = 2000$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]



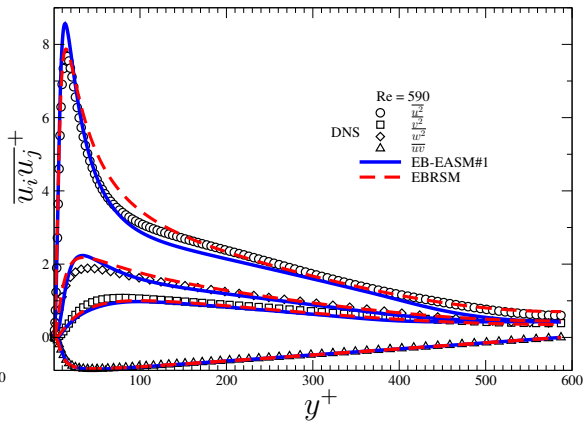
(a) $Re_\tau = 180$



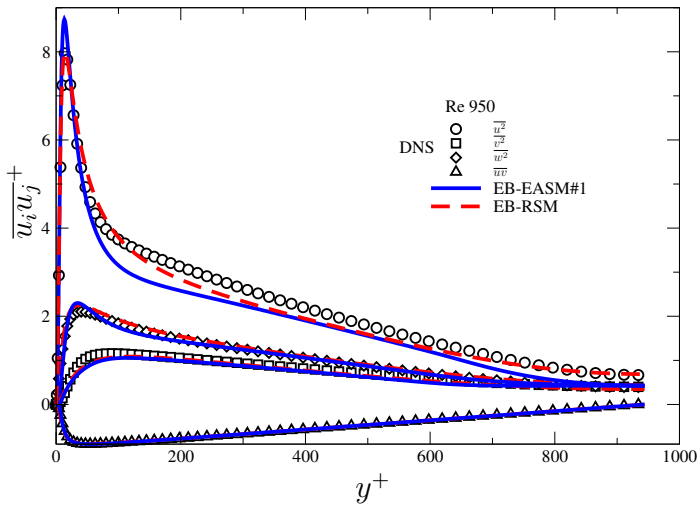
(b) $Re_\tau = 395$



(c) $Re_\tau = 550$

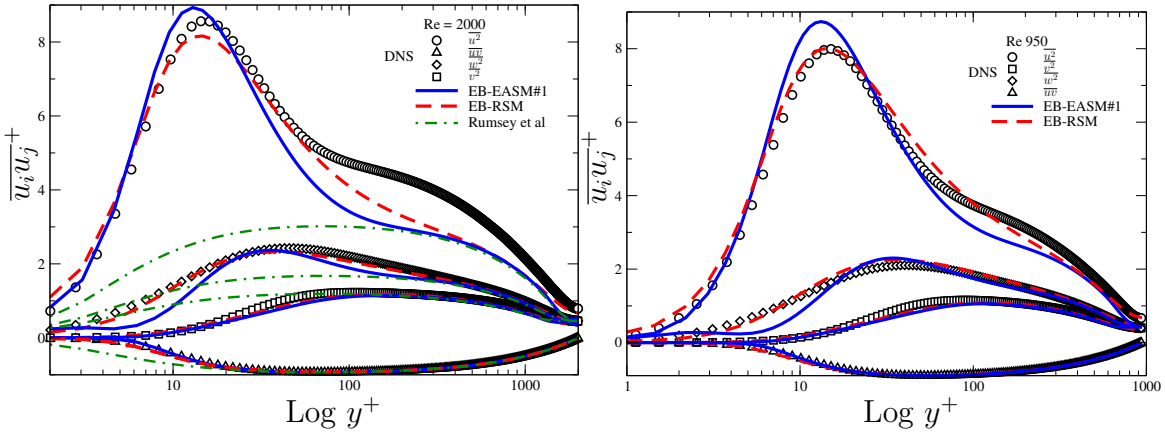


(d) $Re_\tau = 590$

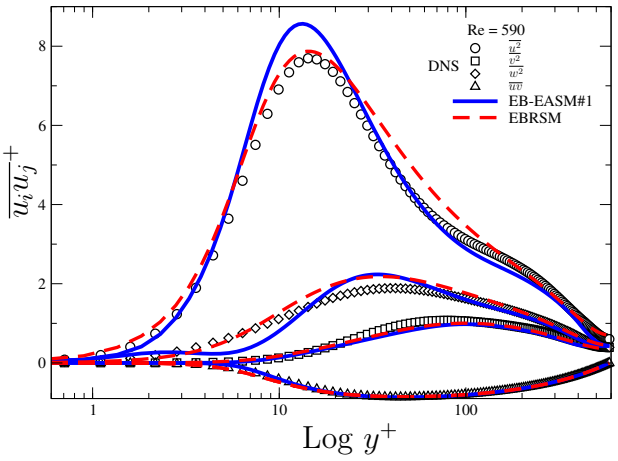


(e) $Re_\tau = 950$

FIG. 6.10 – Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#1 , et EB-RSM pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, et 950. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56].

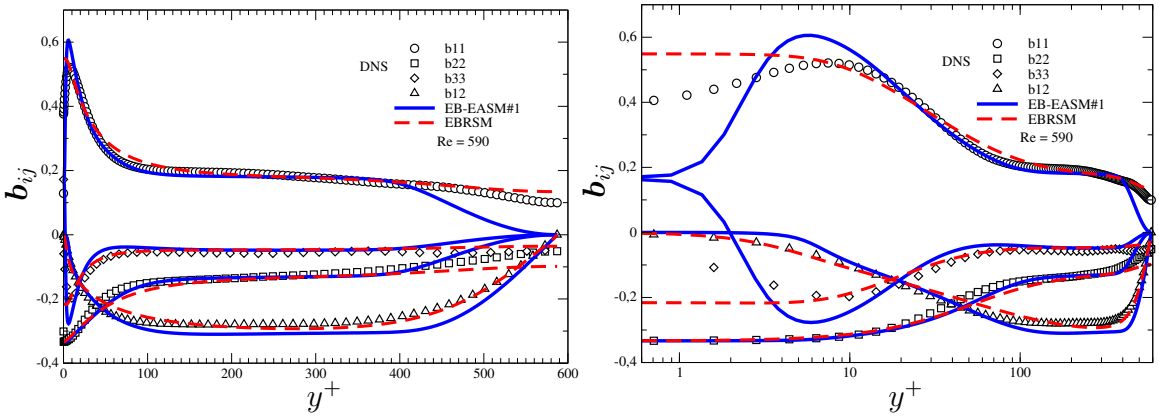


(a) $Re_\tau = 2000$ (b) $Re_\tau = 950$



(c) $Re_\tau = 590$

FIG. 6.11 – Quelques profils des tensions de Reynolds par les modèles EB - EASM#1 et EB-RSM sur une *échelle logarithmique* pour $Re_\tau = 2000$, 950 et 590.



(a) échelle linéaire (b) échelle logarithmique

FIG. 6.12 – Profils des composantes de l'anisotropie prédits par les modèles EB - EASM#1 , et EB-RSM pour Re 590. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56].

large gamme de Reynolds. Dans le cas du modèle EB-EASM#1, nous avons entrepris l'analyse du comportement du coefficient de pondération α dans les mêmes conditions décrit au paragraphe (2.4) c'est à dire en utilisant la relation :

$$\alpha^2 = \frac{\phi_{22}^* - \phi_{22}^w}{\phi_{22}^h - \phi_{22}^w} \tag{6.12}$$

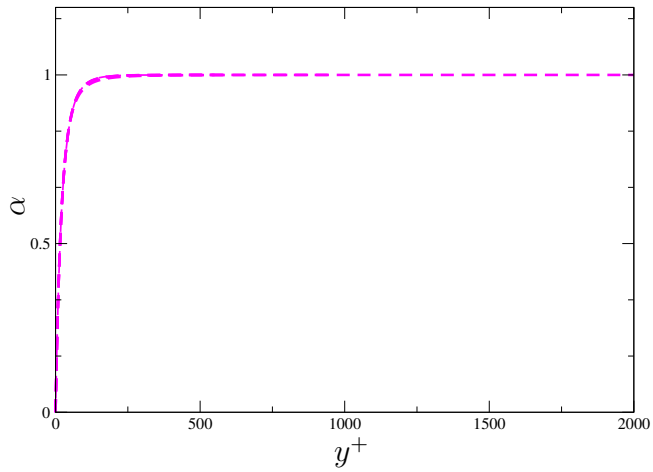


FIG. 6.13 – Profils de α pour $Re_\tau = 180$, 395, 550 , 590 , 950 et 2000. α est obtenu par simulation numérique et les profils donnés par le modèle EB-EASM#1 se superposent parfaitement.

à la différence que les résultats du modèle EB-EASM #1 sont obtenus directement par simulation numérique. La figure 6.13 montre une parfaite superposition de

l'évolution de α pour $Re_\tau = 180, 350, 550, 590, 950$ et 2000 confirmant ainsi l'indépendance de celui ci par rapport au nombre de Reynolds.

6.4.4 Résultats du modèle linéaire EB-EASM #2

Les résultats dans le cas du modèle linéaire sont globalement intéressants. Ce qui compte, c'est sa capacité à reproduire les effets induits à la paroi, principalement la composante normale $\overline{v^2}$ du tenseur de Reynolds. Les résultats de la simulation du modèle linéaire sont ici comparés aussi bien à la base de données de la DNS (Moser *et al.*, Hoyas Jiménez *et al.*, Juan C. Del Alamo *et al.*) [94, 49, 56] qu'à ceux du modèle RV2F de Manceau *et al.* [84]. Le choix du modèle RV2F contrairement au modèle EB-RSM n'est pas anodin. En effet, le modèle EB-EASM #2 et le modèle RV2F sont similaires, tous deux linéaires et basés sur la relaxation elliptique de Durbin (1991) ; ils permettent une bonne reproduction des composantes $\overline{v^2}$ et $\overline{uv}$, mais malheureusement pas les composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ [95]. Le modèle RV2F est une version de $\overline{v^2}$–f de Durbin dans laquelle la pression est adimensionnée par la dissipation. Ce qui permet de corriger le défaut bien connu du modèle $\overline{v^2}$–f qui surestime le terme ϕ^* dans la zone logarithmique.

Les figures 6.15, 6.16, 6.17 et 6.18 confirment les tendances dégagées par l'étude *analytique* et le *test à priori* précédents [97, 95]. On constate qu'à l'instar du modèle non linéaire EB-EASM #1, la prédiction de la valeur à la paroi de la composante b_{22} est *exacte*. Toutefois, il faut noter que pour le modèle RV2F, les résultats de la composante $\overline{v^2}$ présentés sur la figure 6.15 et 6.16 ne sont celles de la composante normale du tenseur de Reynolds formé par la relation de Boussinesq, mais ceux du scalaire "V2" obtenu par sa propre équation de transport. Il apparaît que pour les deux modèles, la limite à deux composantes de la turbulence est correctement préservée et la figure 6.14 montre bien l'excellente reproduction du champ de vitesse moyenne, qui de plus est meilleure que celui du modèle RV2F qui de part sa conception permet de corriger le phénomène d'amplification du terme de redistribution dans la zone logarithmique [89, 84]. L'avantage du modèle EB-EASM #2 par ailleurs vient du fait qu'il n'est analytiquement pas issu des hypothèses de Boussinesq et contrairement au modèle $\overline{v^2}$–f, il n'a pas besoin d'équations de transport additionnelles. De plus, les équations pour $\overline{v^2}$ et f du modèle $\overline{v^2}$–f sont en théorie valables uniquement dans un canal. De ce point de vue, on peut considérer le modèle EB-EASM #2 comme un modèle de type $\overline{v^2}$–f (propriétés similaires), mais dérivent de manière rigoureuse (avec des approximations bien identifiées) du modèle du second ordre.

Sur la figure 6.19 est présentée l'évolution du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds pour le modèle algébrique EB-EASM #2. Elle montre clairement que les résultats sont très satisfaisants etbien meilleurs que pour la plupart des modèles de turbulence disponibles dans la littérature.

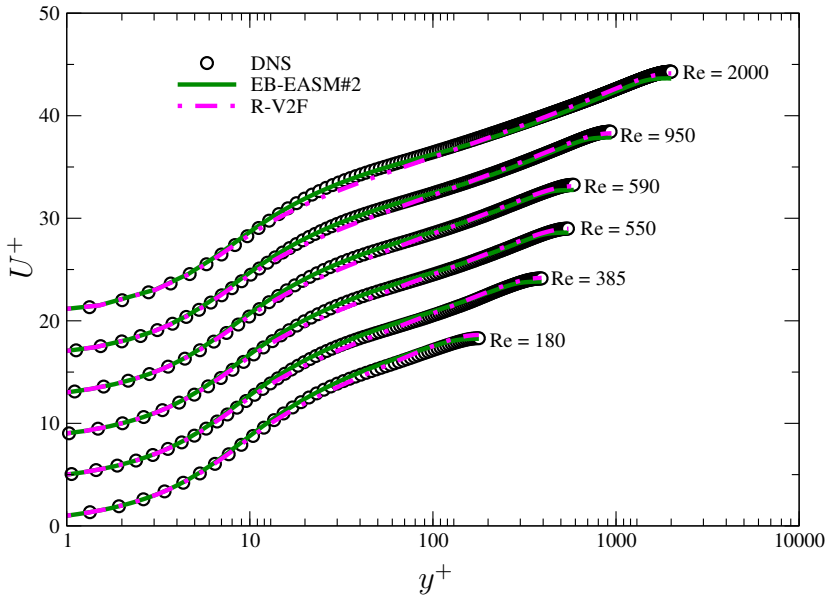


FIG. 6.14 – Profils de la vitesse moyenne prédits par les modèles EB-EASM #2 et RV2F pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, 950 et 2000 Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]

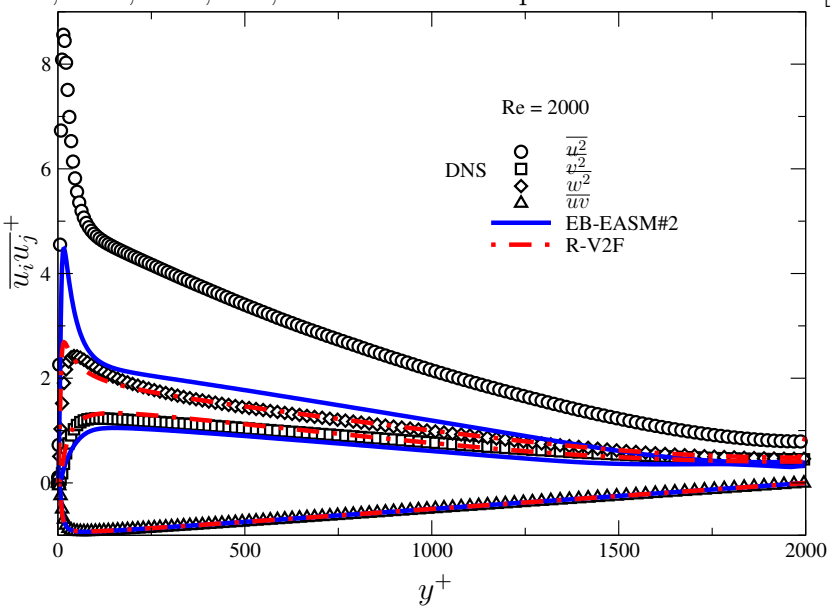
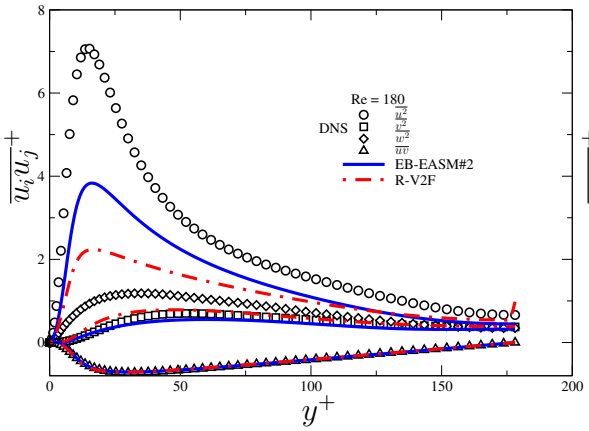
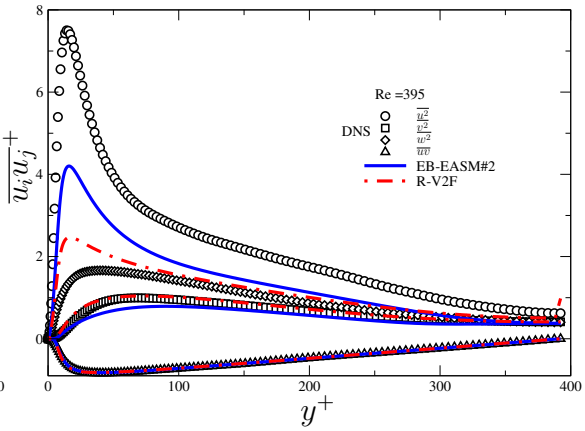


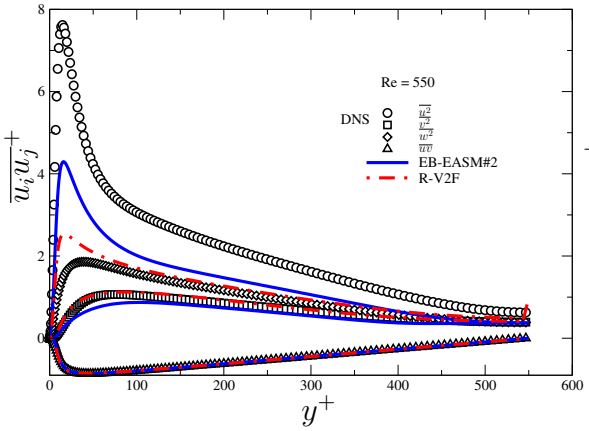
FIG. 6.15 – Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#2 , RV2F pour $Re_\tau = 2000$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]



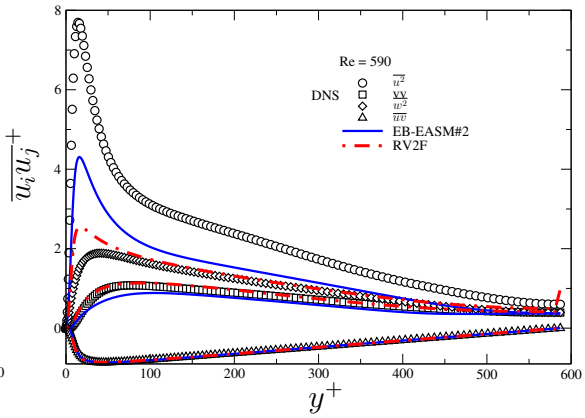
(a) $Re_\tau = 180$



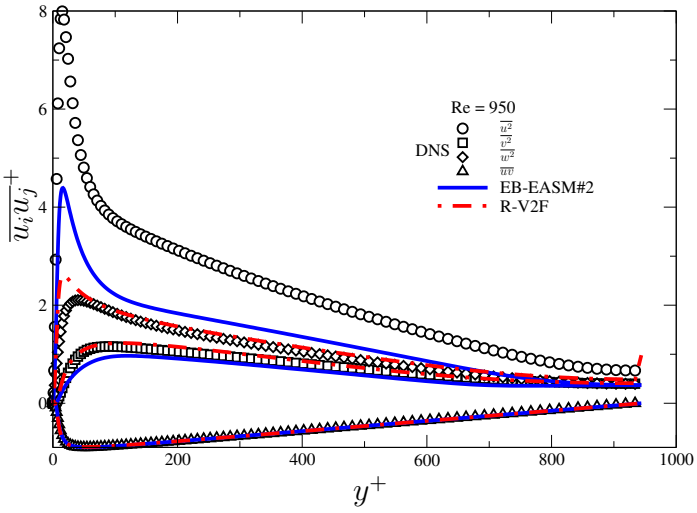
(b) $Re_\tau = 395$



(c) $Re_\tau = 550$

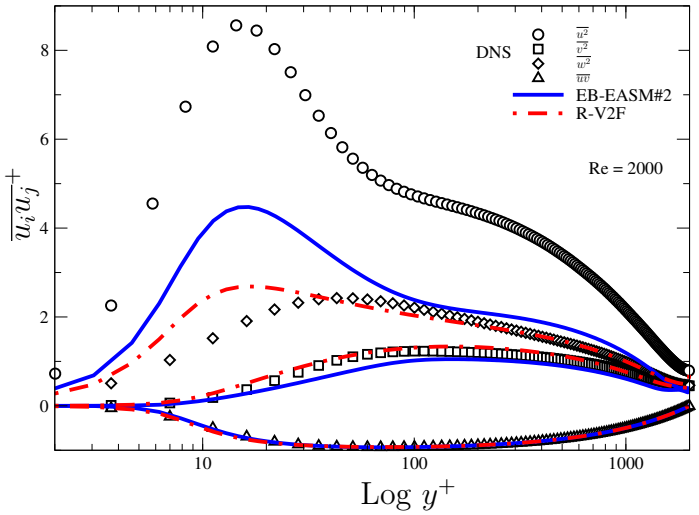


(d) $Re_\tau = 590$

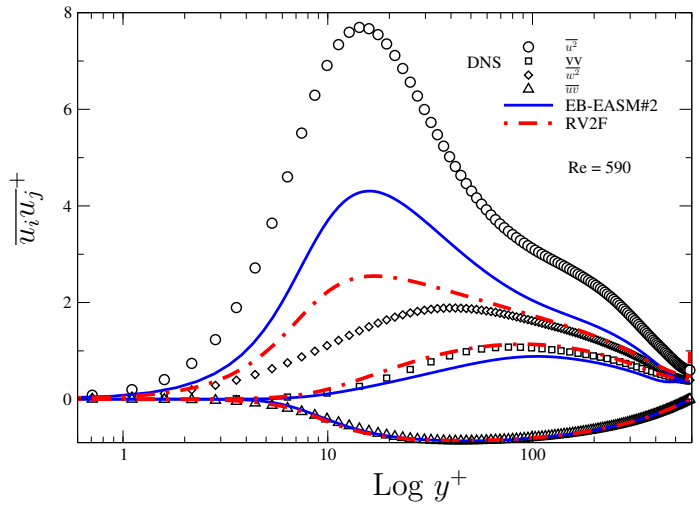


(e) $Re_\tau = 950$

FIG. 6.16 – Profils des tensions de Reynolds prédits par les modèles EB - EASM#2 , et RV2F pour $Re_\tau = 180$, 395 , 550 , 590, et 950. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]

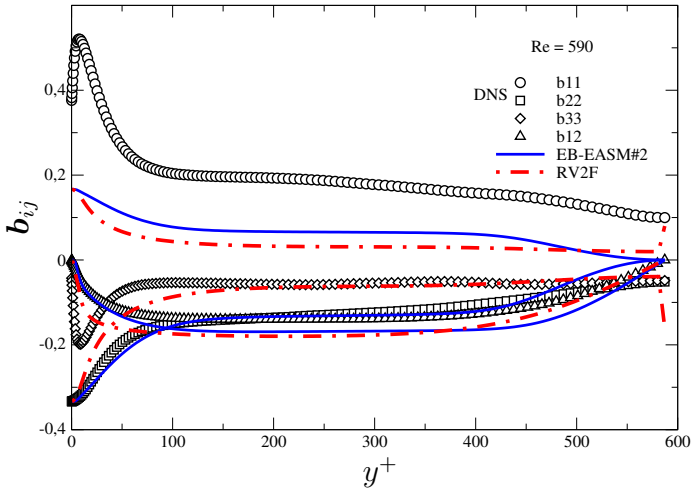


(a) $Re_\tau = 2000$

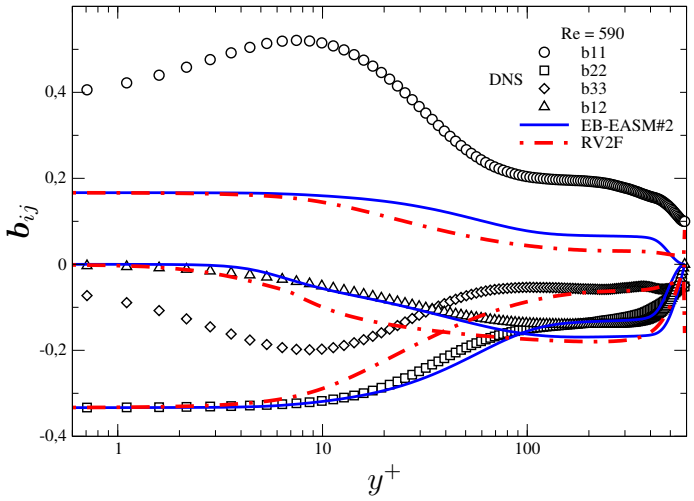


(b) $Re_\tau = 590$

FIG. 6.17 – Quelques profils des tensions de Reynolds par les modèles EB - EASM#2 et RV2F sur une *échelle logarithmique* pour $Re_\tau = 2000$, et 590.



(a) échelle linéaire



(b) échelle logarithmique

FIG. 6.18 – Quelques profils des composantes de l'anisotropie prédits par les modèles EB - EASM#2 , et RV2F pour $Re_\tau = 590$. Comparaison avec la DNS [94, 49, 56]

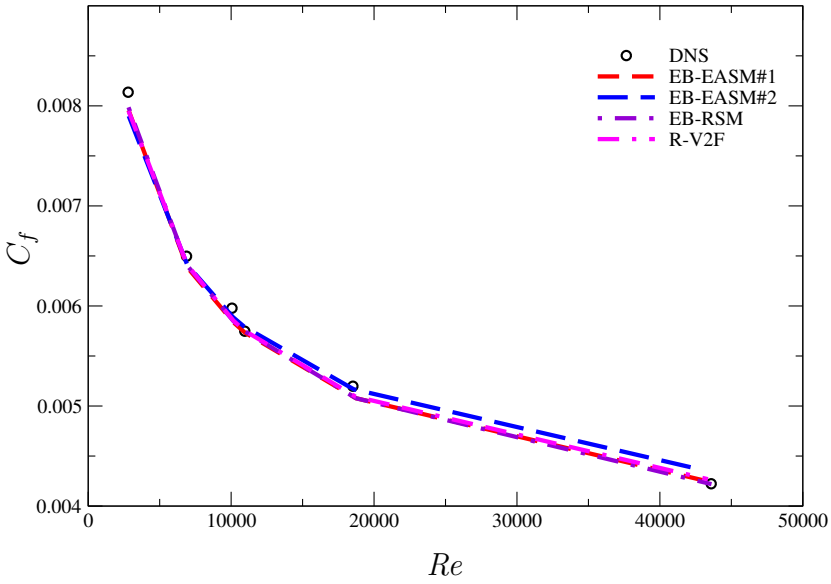


FIG. 6.19 – Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds.

6.4.5 Les modèles linéaire EB-EASM #3, et non linéaire EB-EASM #4

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, d'autres combinaisons paraissent très attractives. C'est le cas du modèle basé sur les tenseurs $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_4, \boldsymbol{T}_6)$, baptisé ici modèle algébrique explicite **EB-EASM #3** et du modèle dont les tenseurs de base sont $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_6)$ nommé **EB-EASM #4**.
L'avantage du modèle EB-EASM #3 réside dans le fait qu'il est *linéaire* suivant le gradient de vitesse, ce qui est attractif pour des raisons de stabilité numérique. Dans le cas de l'écoulement 1D, les tenseurs $\boldsymbol{T}_4$ et $\boldsymbol{T}_6$ étant identiques, le modèle dégénère vers le modèle EB-EASM #2. Par contre en écoulement bidimensionnel (2D), les tenseurs sont linéairement indépendants et par conséquent ses résultats seront les mêmes que pour les modèles non linéaire EB-EASM #1 et EB-EASM #4. Et pour cause comme résumé dans le tableau 5.1.5, les bases minimales en 2D plan étant constituées de 3 tenseurs, la projection de Galerkine sur cette base est exacte [4] et le modèle sera indépendant du choix particulier de la base. Réaliser une projection sur une base $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_4, \boldsymbol{T}_6)$ par exemple revient au même que si la base était $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3)$. En revanche, en 3D, les modèles représentent des approximations qui sont différentes suivant le choix des tenseurs de base. De plus, même en 2D, les modèles ne se comporteront pas de manière identique en certains points, pour lesquels l'un ou l'autre des modèles peut présenter des singularités [5]. C'est le cas du modèle EB-EASM #1 qui, au niveau de la

[4] Exacte signifie ici que la relation algébrique explicite est solution exacte du système linéaire implicite qui lui bien sûr n'est pas exact

[5] Nous verrons au 6.6 que c'est l'un des avantages des modèles EB-EASM #3 et EB-EASM #4 qui se comportent mieux que le modèle EB-EASM #1 lorsque le gradient de vitesse est nul

paroi mobile pour un écoulement de Couette 1D, donne des résultats moins intéressants que le modèle EB-EASM #2 là où le cisaillement moyen s'annule. Il dégénère également dans le cas d'un écoulement en couche limite sans cisaillement. Ces différents points seront explorés dans les paragraphes qui suivent.

6.5 Les Modèles EB-EASM dans le cas des écoulements type Couette -Poiseuille

Dans cette partie, nous allons tester les modèles EB-EASM#1 et EB-EASM #2 dans le cas d'un écoulement de type Couette-Poiseuille en restant toujours dans la configuration des écoulements 1D. Un gradient de pression est imposé et les conditions aux limites sur la vitesse sont telles que la paroi inférieure est en mouvement tandis que l'autre est fixe, la largeur du canal étant 2h. En générale l'adimensionalisation de la vitesse moyenne et des corrélations turbulentes est faite par la vitesse de frottement pariétale moyenne u_τ reliée au gradient de pression par la relation :

$$\frac{dP}{dx} = -\rho \frac{u_\tau^2}{h} \tag{6.13}$$

et à la vitesse moyenne par

$$u_\tau^2 = \frac{1}{2}\left(u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\nu \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=-1} + \nu \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=1}\right) \tag{6.14}$$

Dans le présent cas, et dans le souci de comparer les résultats avec ceux de la DNS de Paolo Orlandi [99], elle sera adimensionné par $\frac{3}{2}U_b$, U_b étant la vitesse débitante. Par ailleurs les conditions particulières de l'écoulement font que les frottements au niveau des deux parois sont différents.

Trois configurations sont étudiées dans ce rapport, toutes différentes selon le gradient de vitesse au niveau de la paroi mobile ; les écoulements "Poiseuille-type" (PT), "Couette-type" (CT), et "Intermediate-type" (IT), selon que ce gradient de vitesse est respectivement positive, négative, et presque nul. Les résultats pour deux différents nombres de Reynolds sont comparés pour les deux modèles algébriques explicites EB-EASM#1 et EB-EASM #2, à la base de données de la DNS [99] ainsi qu'au modèle EB-RSM.

La figure 6.20 montre une excellente reproduction par les deux modèles, de la vitesse moyenne pour les trois types d'écoulements. De plus, les figures 6.21, 6.22, et 6.23 montrent bien que le modèle EB-RSM reproduit bien les tensions de Reynolds pour les trois configurations ; l'ensemble des résultats du modèle non linéaire EB-EASM#1 étant globalement satisfaisants à la paroi sauf une surestimation de l'anisotropie constatée au voisinage de la paroi mobile dans les cas des écoulements de

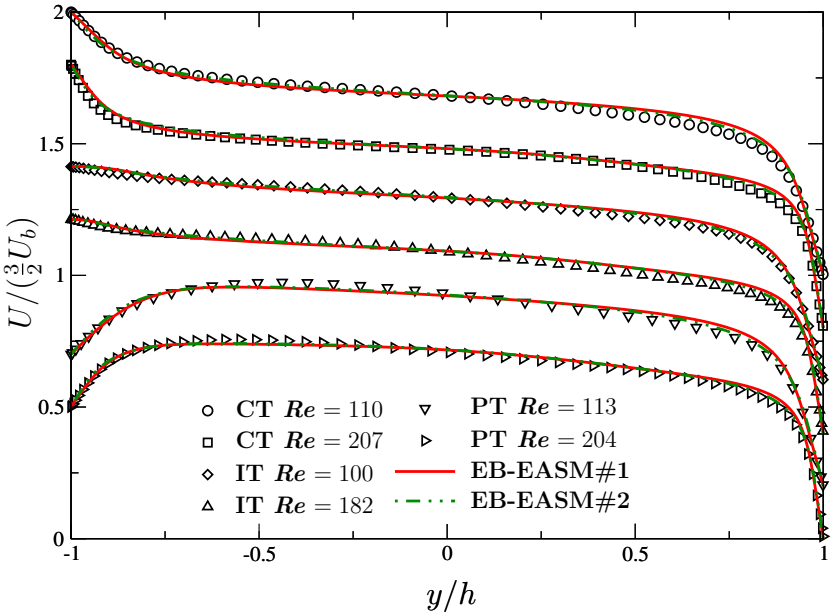


FIG. 6.20 – Écoulement Couette-Poiseuille : Profils de vitesse moyenne. Poiseuille-type (PT), Couette type-(CT) et Intermediate-Type (IT)

Couette-type (CT) et Intermediate-type (IT). La contre performance de ce modèle par rapport au modèle EB-RSM est nécessairement dû à l'hypothèse d'équilibre sur le terme de diffusion (4.10) introduite par Rodi [108] dans la formulation algébrique.

En ce qui concerne le modèle linéaire, EB-EASM#2, les conclusions que l'on peut tirer de l'analyse des résultats présentés sur les figures 6.21, 6.22, et 6.23 sont similaires à celles tirées précédemment dans la cas de l'étude en canal 1D. On constate une bonne reproduction des composantes $\overline{v^2}$, et $\overline{uv}$ sans oublier que le modèle prédit $\overline{w^2} = \overline{u^2}$. Par suite, comparativement au modèle EB-EASM#1 dans le cas de l'écoulement Intermediate-type (IT), le modèle linéaire reproduit mieux les composantes $\overline{v^2}$, et $\overline{uv}$. Ce qui peut probablement s'expliquer par la suppression au voisinage de la paroi mobile, du cisaillement pour le modèle EB-EASM#1 dont la base de trois tenseurs tendent vers zéro. Si cette situation n'est pas observée au niveau du modèle EB-EASM#2, c'est à cause de la présence du tenseur $\boldsymbol{M}$ qui est l'un des éléments de sa base et qui ne s'annule pas dans cette région.

Par ailleurs la figure 6.24 montre l'existence d'un phénomène particulier au point où le gradient de vitesse est nul pour lequel $\overline{u^2} = \overline{w^2}$. Généralement les modèles algébriques explicites prédisent $\boldsymbol{b}_{11} = \boldsymbol{b}_{22} = \boldsymbol{b}_{33} = 0$ lorsque $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ s'annulent. Ici, nous avons $\boldsymbol{b}_{11} = \boldsymbol{b}_{33} \neq 0$ et $\boldsymbol{b}_{22} \neq 0$. L'observation de l'équation (6.6) et de la figure 6.24 explique ce résultat. En effet, on a bien évidemment $\eta = 0$ en ce point, mais β_2 et β_3 tendent vers l'infini avec $\eta^2\beta_2$ et $\eta^2\beta_3$ qui tendent vers des valeurs finies (d'où $\beta_2 \neq 0$) en même temps, comme le montre la figure 6.24, $\boldsymbol{b}_{33}$ =2$\boldsymbol{b}_{22}$. Ce qui montre que $\boldsymbol{b}_{11} = \boldsymbol{b}_{33}$ L'introduction de la pondération elliptique dans le modèle EB-EASM fait distinguer en ce point la composante normale à la paroi des autres composantes diagonales. L'analyse

de ces comportements sera faite également dans le paragraphe suivant

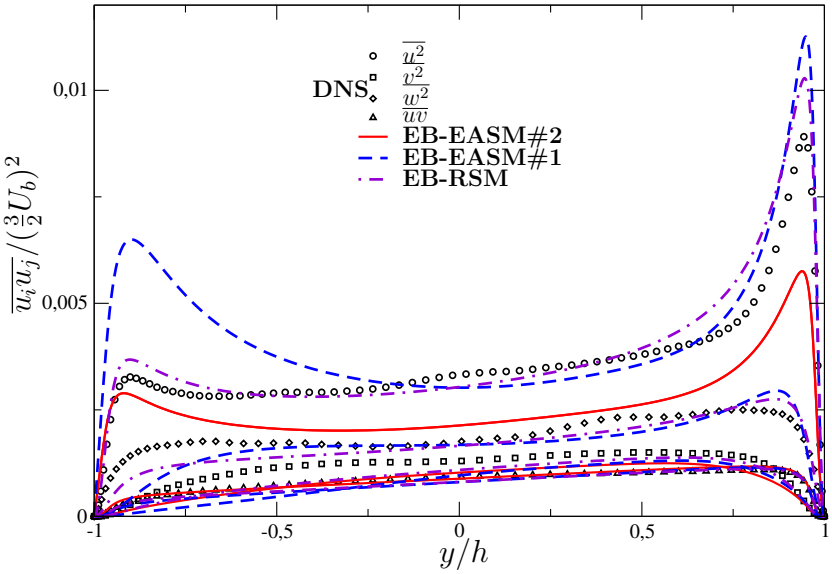


FIG. 6.21 – Écoulement Couette-type (CT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 207$.

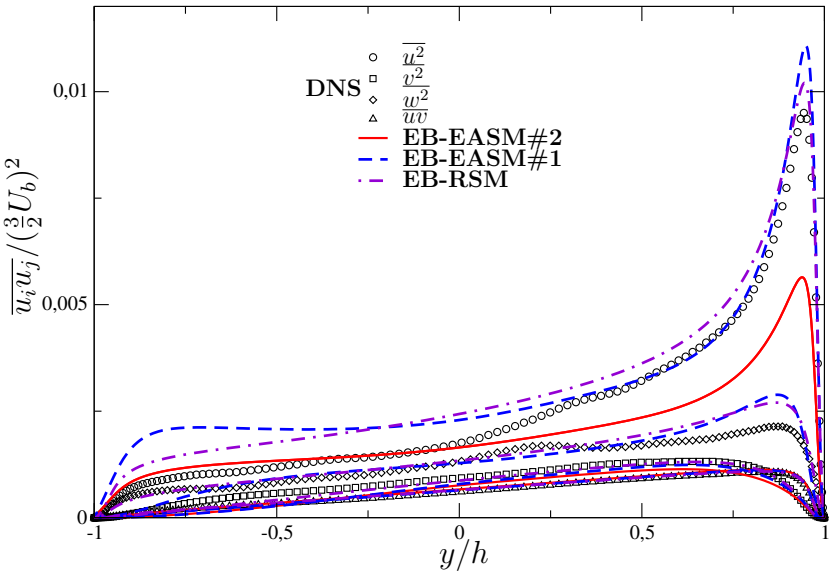


FIG. 6.22 – Écoulement type Intermédiaire (IT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 182$.

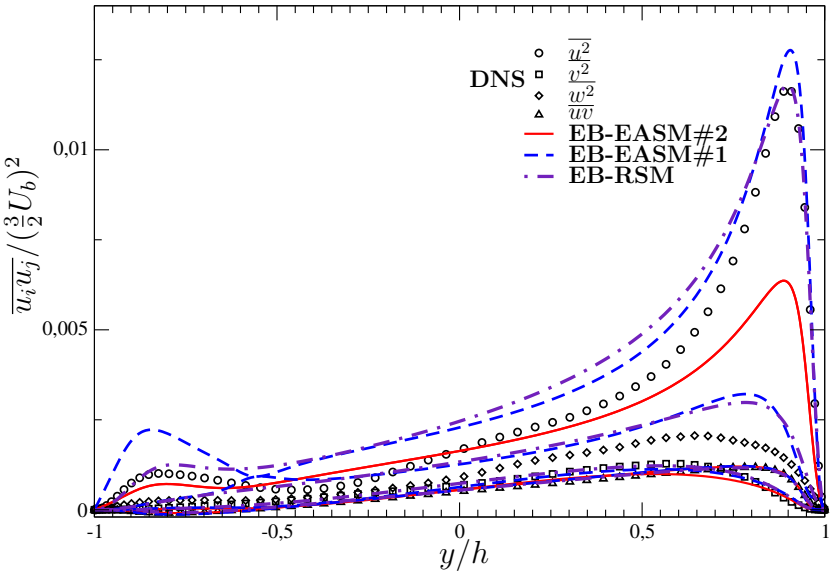


FIG. 6.23 – Écoulement de Poiseuille-type (PT) : Profils des tensions de Reynolds pour $Re_\tau = 113$.

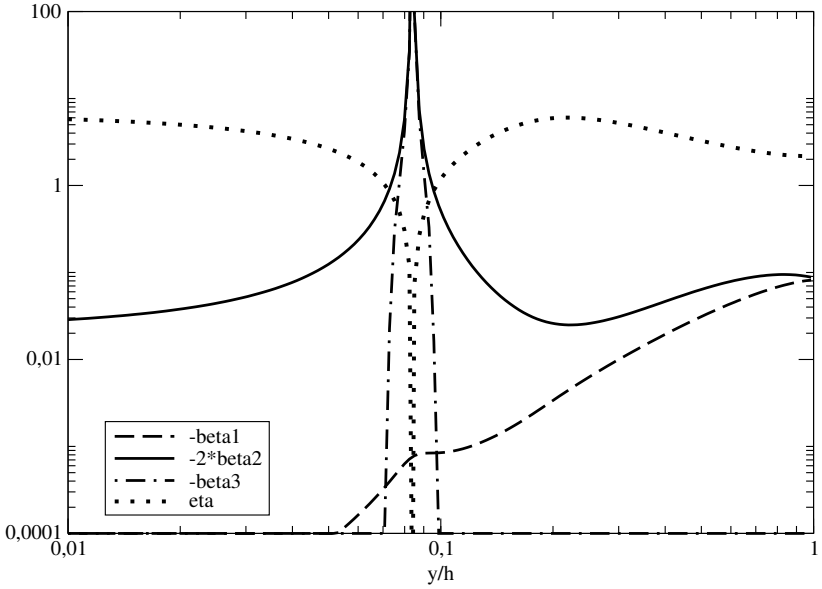


FIG. 6.24 – Évolution des coefficients de projection

6.6 Les Modèles EB-EASM dans le cas des écoulements de couche limite sans cisaillement

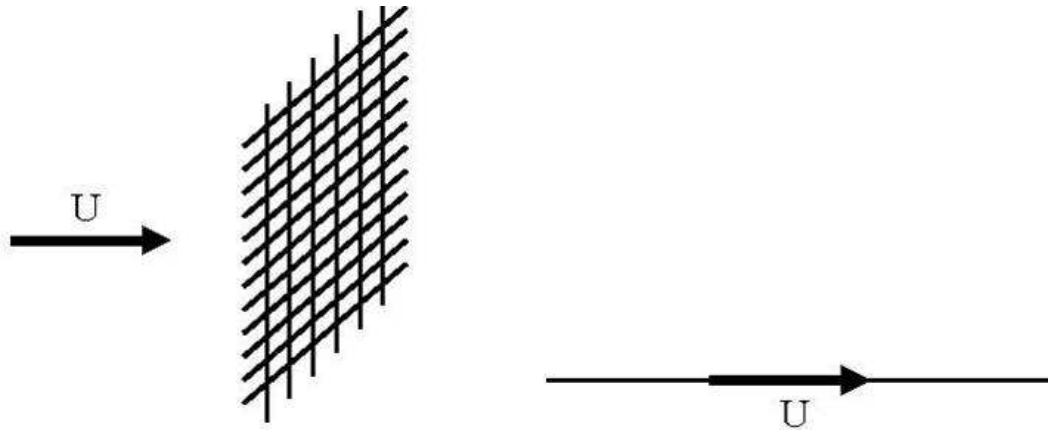


FIG. 6.25 – Couche limite sans cisaillement

De manière à illustrer plus explicitement le comportement des deux modèles dans le cas particulier d'un cisaillement nul, prenons le cas d'un écoulement se déplaçant à la même vitesse constante U que la plaque inférieure. Une grille est placée pour générer la turbulence ou l'écoulement entre deux plaques parallèles se déplaçant à la même vitesse constante U. Les invariants des modèles algébriques définis au chapitre 4 se réduisent dans ce 1D à : $\eta = 0$, $\mathcal{R} = 1$, $\mathcal{P} = 1$, $\mathcal{Q} = 0$. De plus, les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ sont nuls. Ainsi les modèles algébriques explicites ayant des bases utilisant uniquement ces tenseurs donnent partout $\boldsymbol{b} = 0$; c'est le cas de modèle EB-EASM#1. Par contre le tenseur $\boldsymbol{M}$ étant non nul, les modèles EB-EASM#2, EB-EASM#3, et EB-EASM#4 prédisent des comportements totalement différents du modèle EB-EASM#1 D'autre part, dans ce cas de configuration 1D, les trois modèles EB-EASM#4, EB-EASM#2, et EB-EASM#3 sont identiques et le tenseur d'anisotropie se réduit à $\boldsymbol{b} = \beta_6 \boldsymbol{M}$; le coefficient de projection β_6 est alors donné par l'expression :

$$\beta_6 = \frac{-3a_4\left({a_5}^2 a_4 + 3a_5\right)}{18 + 12a_5 a_4 + 2{a_5}^2 {a_4}^2} \tag{6.15}$$

qui tend vers -1/2 à l'approche de la paroi. L'équation (6.11) permet alors d'écrire $b_{22} = -1/3$ et $b_{11} = b_{33} = 1/6$, qui est la valeur *exacte* en proche paroi du tenseur d'anisotropie. Notons qu'en s'éloignant de la paroi, le coefficient β_6 tend vers zéro, ce qui permet de retrouver une turbulence isotrope loin de la paroi.

Dans le cas très particulier d'un écoulement avec paroi et sans cisaillement, on comprend qu'en dehors du modèle EB-EASM#1 qui dégénère à l'instar de tous les modèles algébriques basés sur $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$, les modèles EB-EASM#2, EB-EASM#3, et EB-EASM#4 reproduisent *exactement* les limites bi-composantes de la turbulence du fait de leurs dépendance du tenseur $\boldsymbol{M}$, indépendant de la vitesse moyenne. Cette

situation illustre l'intérêt de l'utilisation du tenseur $\boldsymbol{M}$ comme tenseur de base qui peut être utilisé seul en association avec $\boldsymbol{S}$ (EB-EASM#2), dans un modèle linéaire à 3 tenseurs (EB-EASM#3), ou non linéaire à trois tenseurs (EB-EASM#4).

6.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, les différents comportements en canal, en écoulement Couette-Poiseuille et en couche limite sans cisaillement, le comportement des modèles algébriques explicites EB-EASM#1 et EB-EASM#2. Les résultats obtenus sont respectivement comparés aux modèles de Rumsey *et al.* [110] puis au modèle RV2F dans le cas du test à priori et dans le cas de la simulation numérique. De l'ensemble des résultats, il ressort que l'introduction de modèle de pondération elliptique a permis une amélioration notable des prédictions de l'anisotropie en proche paroi. De plus, les modèles algébriques explicites mis en place reproduisent correctement la vitesse moyenne dans tout le canal, résultats d'ailleurs confirmés par l'évolution du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds (Cf figure 6.19). Le modèle non linéaire EB-EASM#1 dans le cas de l'écoulement en canal permet une excellente prédiction des composantes $\overline{v^2}$, $\overline{uv}$ des tensions de Reynolds à la paroi. Ce comportement est maintenu sur l'ensemble du domaine pour toutes les composantes de l'anisotropie.

En ce qui concerne le modèle linéaire EB-EASM#2, en tant que modèle linéaire à 2 tenseurs, il ne distingue pas les composantes $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$, mais offre la particularité d'une bonne reproduction de la composante normale $\overline{v^2}$. De plus, il permet la reproduction de la valeur *exacte* de l'anisotropie en proche paroi dans le cas d'une couche limite sans cisaillement.

D'autre part, les modèles EB-EASM#3 et EB-EASM#4 présentent également un potentiel intéressant parce qu'ils sont basés sur le tenseur $\boldsymbol{M}$ qui ne dégénère pas quand le gradient de vitesse s'annule. Cependant, seuls les écoulements 3D pourront permettre de juger de la qualité de l'approximation qu'ils représentent par rapport au modèle EB-EASM#1.

Chapitre 7

Extension des Modèles algébriques EB-EASM en 3D

Les différents modèles EB-EASM sont jusqu'ici présentés dans leurs configurations bi et mono dimensionnelle. Dans le chapitre précédent, les études menées sur le choix des bases de tenseurs démontrent d'une part que la complexité du modèle dépend du nombre des éléments de la base de projection choisie pour la représentation du tenseur d'anisotropie et d'autre part que le nombre d'invariants et de tenseurs nécessaires varient selon la dimension de l'écoulement. Plus cette dimension est élevée, moins il y a de simplifications dans les différentes équations du modèle. L'objectif visé dans ce chapitre est de procéder à l'extension en 3D des modèles EB-EASM dans le but d'apprécier les résultats précédemment obtenus. Ce travail devrait logiquement nécessiter 41 tenseurs de bases pour éviter toute singularité du modèle. Étant donnée la dimension du tenseur d'anisotropie, nous nous proposons l'utilisation d'une base de cinq (05) tenseurs pour lesquelles les différentes équations seront présentées puis une restriction sur une base de trois tenseurs c'est à dire une approximation du modèle qui servira à comparer la qualité des résultats avec ceux obtenus dans les configurations de dimension inférieures, notamment, la configuration 2D. Pour cela un *test à priori* sera présenté dans le cas d'un jet impactant sur un plateau tournant de manière à identifier s'il est nécessaire de prendre en compte le caractère 3D dans la formulation ou si les approximations 2D plan sont suffisantes.

7.1 Représentation des modèles EB-EASM sur une base de Cinq (05) tenseurs

La formulation du modèle EB-EASM tridimensionnelle est similaire à celle présentée dans les sections précédentes. En se basant sur l'équation générale implicite (4.32), une projection est donc nécessaire sur une base de tenseurs.

Pour étendre les modèles en 3D, nous avons choisi la base *minimale* de cinq ten-

seurs[1] formée par les tenseurs :

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}, \boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}, \boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MS} - \frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SM}\right\}, \boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{M}$$

La théorie résumée dans le tableau 5.1.5 montrent que la base d'intégrité invariante contient 29 invariants, mais les applications successives du théorème de Cayley Hamilton réalisées dans le cadre de la projection de l'équation algébrique implicite (4.32) ne fait apparaître que les **19** invariants suivants qui peuvent être réduit à **13** en utilisant la propriété de $\boldsymbol{M}$:

$$\begin{array}{lll} \eta_1 = \{\boldsymbol{S}^2\} & \eta_2 = \{\boldsymbol{W}^2\} & \eta_3 = \{\boldsymbol{S}^3\} \\ \eta_4 = \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\} & \eta_5 = \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\} & \eta_7 = \{\boldsymbol{MS}\} \\ \eta_8 = \{\boldsymbol{WSM}\} & \eta_9 = \{\boldsymbol{MS}^2\} & \eta_{10} = \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}\} \\ \eta_{11} = \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{MS}\} & \eta_{12} = \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\} & \eta_{13} = \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\} \\ \eta_{14} = \{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\} & \eta_{15} = \{\boldsymbol{M}^2\} & \eta_{16} = \{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2\} \\ \eta_{17} = \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\} & \eta_{18} = \{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}\} & \eta_{19} = \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM}\} \quad \eta_{20} = \{\boldsymbol{M}^3\} \end{array} \tag{7.1}$$

De plus, la projection sur cette base de la relation (4.36) fait apparaître les matrices 5x5 des traces : $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{ST}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{WT}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{MT}_m\}$, et $\{\boldsymbol{bM}\}\{\boldsymbol{MT}_m\}$ données en Annexe E. On pourra constater que toutes les matrices sont fonctions des invariants η_i et par conséquent conduisent à la résolution d'un système linéaire de type $\mathbf{X}\mathcal{A} = \boldsymbol{B}$ [2]

Notons que l'inversion de la matrice $\mathcal{A}$ est très complexe et la résolution du système linéaire précédent aboutit à des expressions extrêmement compliquées mais qui heureusement prennent la forme générale précédemment obtenue pour la modélisation 2D, c'est-à- dire :

$$\begin{array}{l} \beta_1 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1), \\ \beta_2 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_4 a_4^2 + \gamma_5 a_5 + \gamma_6), \\ \beta_3 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_7 a_4^2 + \gamma_8 a_4 + \gamma_9), \\ \beta_4 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_{10} a_4^2 + \gamma_{11} a_5 + \gamma_{12}), \\ \beta_5 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_{13} a_4^2 + \gamma_{14} a_4 + \gamma_{15}) \end{array} \tag{7.2}$$

Le tenseur d'anisotropie prend la forme :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{S} + \beta_2(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}) + \beta_3(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}) + \beta_4(\boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MS} - \frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SM}\right\}) + \beta_5\boldsymbol{M} \tag{7.3}$$

Par ailleurs, conformément à l'étude réalisée au chapitre 5 le coefficient de projection β_1 est solution d'une équation polynomiale très complexe de degré six (06). Ce point constitue une difficulté majeure dans le cas de simulation utilisant ce modèle

[1] On peut toujours opérer le choix parmi ceux énumérés dans l'équation (B.44)

[2] La matrice $\mathcal{A} = A_{ij}$ et le vecteur $\boldsymbol{B}$ dont donnés en Annexe E

dans la sélection de la solution parmi les six (06) proposées et contenant probablement des solutions complexes.

La complexité du modèle nous amène dans un premier temps et par souci d'apprécier le comportement tridimensionnel des modèles EB-EASM, à proposer l'étude de modèle EBEASM#1 dans le cas d'un écoulement 3D. Ce modèle déjà étudié dans les cas 2D plan et 1D utilise une base formée des trois premiers tenseurs de la relation (7.3). Bien évidemment, les résultats de l'anisotropie ne pourront être qu'une approximation étant donné que la base utilisée est une base *subminimale*.

7.2 Représentation sur une base de trois (03) tenseurs

Dans cette condition seules les trois premières lignes et colonnes de la matrice $\mathcal{A}$ seront considérées.

La réduction du nombre de tenseurs de base conduit à la diminution du nombre d'invariants qui passe de **19** à **12** du fait de la disparition des invariants η_{14} à η_{20}. Par conséquent, les expressions se simplifient et les solutions du système linéaire sont :

$$\beta_1 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1), \tag{7.4}$$

$$\beta_2 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_4 a_4^2 + \gamma_5 a_5 + \gamma_6), \tag{7.5}$$

$$\beta_3 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_7 a_4^2 + \gamma_8 a_4 + \gamma_9) \tag{7.6}$$

Le coefficient β_1 est solution d'une équation *quartique* et le tenseur d'anisotropie est obtenue à partir des relations (7.2) et (7.3) avec $\beta_4 = \beta_5 = 0$.

Par ailleurs en passant de la configuration 3D à 2D, la relation (7.1) donne :

$$\begin{array}{lll} \eta_1 = \eta^2 & \eta_2 = -\eta^2\mathcal{R}^2 & \eta_3 = 0 \\ \eta_4 = 0 & \eta_5 = \frac{1}{2}\eta_1\eta_2 = -\frac{1}{2}\eta^4\mathcal{R}^2 & \eta_7 = \mathcal{P} \\ \eta_8 = -\frac{1}{2}\mathcal{Q} & \eta_9 = \frac{1}{2}\eta_1 = \frac{1}{2}\eta^2 & \eta_{10} = 0 \\ \eta_{11} = -\frac{1}{2}\eta_1\eta_8 = \frac{1}{4}\eta^2\mathcal{Q} & \eta_{12} = \frac{1}{4}\eta_1\eta_2 = -\frac{1}{4}\eta^4\mathcal{R}^2 & \eta_{13} = \frac{1}{2}\eta_2 = -\frac{1}{2}\eta^2\mathcal{R}^2 \end{array} \tag{7.7}$$

On retrouve bien alors la même formulation que celle obtenue dans le cas de l'étude au chapitre 4 du modèle EBEASM#1 en écoulement 2D, puisque le nombre d' invariants obtenus se réduit pour ce modèle aux quatre (04) invariants suivants [3] :

$$\begin{array}{ll} \eta_1 = \eta^2 & \eta_2 = -\eta^2\mathcal{R}^2 \\ \eta_7 = \mathcal{P} & \mathcal{Q} = -2\eta_8 \end{array} \tag{7.8}$$

[3]Nous retrouvons ici les quatres inavariants 2D plan

7.3 *Test à priori* de l'EB-EASM dans le cas d'un jet impactant sur disque en Rotation

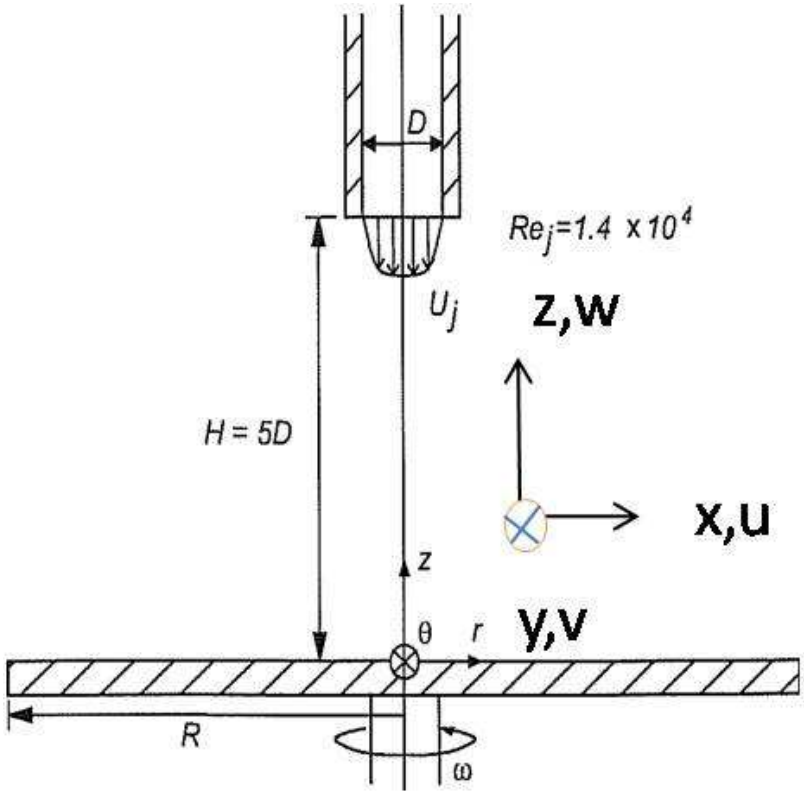


FIG. 7.1 – Configuration schématique du jet et du disque en rotation.

Dans cette partie un test à priori est effectué sur le modèle EBEASM#1 dans un écoulement tridimensionnel.

7.3.1 Présentation et description du dispositif

L'écoulement consiste en un jet impactant sur un disque en rotation dont le schéma de principe est présenté sur la figure 7.1. Le système est composé d'un disque de rayon R en rotation avec autour de l'axe z. La conduite du jet est perpendiculaire à la surface du disque et est placée à une distance H = 5D pour laquelle le maximum de transfert de chaleur dans la région d'impact est réalisé, D étant le diamètre de la conduite. La rotation fait notamment apparaître un cisaillement $\frac{\partial U_\theta}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z}$ qui tridimensionalise le jet de paroi qui se développe sur le disque.

Tous les calculs étant réalisés en cartésien, exprimons les tenseurs de déformation et de rotation dans le système de coordonnées x, y, z où x est l'axe orienté suivant le

rayon du disque, z suivant la normale au disque et y la direction permettant de former un repère direct.

$$\boldsymbol{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial z} & \dfrac{\partial W}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

$$\boldsymbol{W}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial W}{\partial x}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial z} \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}\right) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

Notons qu'en cas de rotation, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ sont non nulles, bien que faibles.

7.3.2 Cadre de l'étude

Le calcul de ce jet impactant a été réalisé [4] avec le modèle EB-RSM par Perrin et Manceau [101]. Les résultats comparés avec ceux la modélisation SST[5] ont été présentés lors du 13th ERCOFTAC de Graz, Austria.

Dans l'objectif de la validation du modèle EB-EASM, ces résultats seront pour nous une base de données étant donné que l'EB-RSM est introduite dans notre modèle algébrique explicite. Pour ce *test à priori*, aucune équation du coefficient de projection de β_1 sera résolue car le ratio $\dfrac{P}{\varepsilon}$ est directement obtenu à partir de la base donnée du modèle EB-RSM. D'autre part, comme nous l'avons suggérer dans la précédente section, nous utiliserons la base *subminimale* formée de trois tenseurs. Le modèle ainsi étudié sera le modèle EB-EASM#1. Une base *minimale* de cinq tenseurs pourrait également être utilisée, mais il importe d'abord de savoir si une approximation 3D à 3 tenseurs est suffisante. Par ailleurs,

L'objectif de cet étude a *priori* est de tester dans cette configuration 3D, si l'approximation 2D plan c'est-à-dire le modèle EB-EASM#1 simplifié dans lequel les invariants sont presque égaux à leur valeur en 2D, (équation (7.7)) est suffisante où si au contraire il est nécessaire de garder l'ensemble des 19 invariants (7.1)).

[4] Pour plus de détails sur les conditions sur le maillage, les équipes qui ont pris part à cette étude et qui proposent la modélisation de cet écoulement avec d'autres modèles, on peut consulter [101, 106]

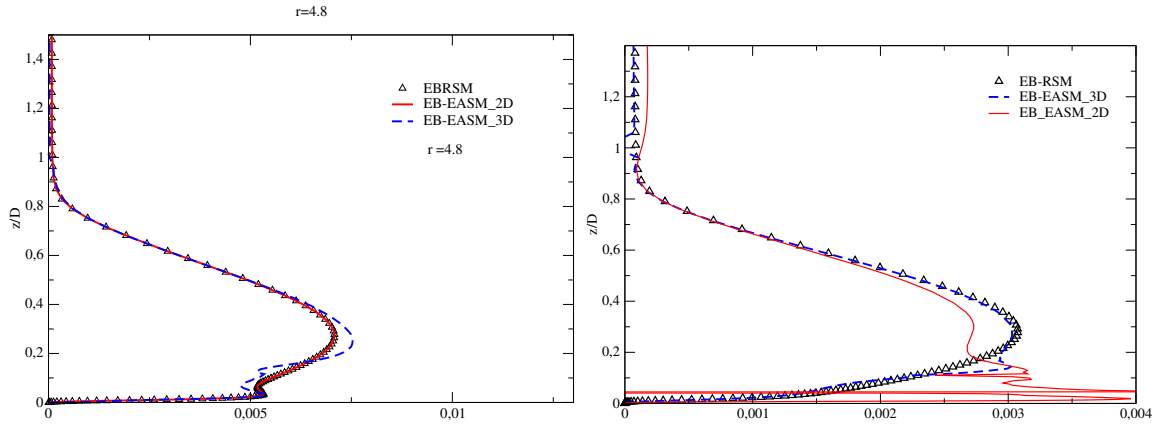
[5] les mesures expérimentales sont réalisées par Minagawa *et al.* [93]

7.4 Résultats et discussions

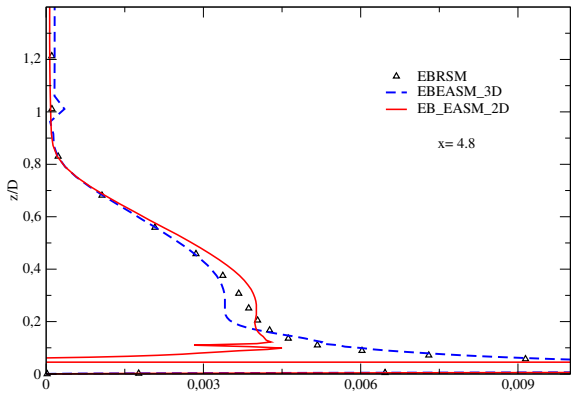
Les figures 7.2 et 7.3 présentent respectivement les évolutions des trois composantes diagonales du tenseur d'anisotropie $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$ et celles des composantes de cisaillement adimensionnées par la vitesse sortante du jet pour une position x = 4.8. Elles montrent que la rotation du disque génère une anisotropie tridimensionnelle. De plus, la composante diagonale $\overline{v^2}$ est fortement intensifiée par le cisaillement $\dfrac{\partial V}{\partial z}$. En comparant les comportements des modèles EB-RSM et EB-EASM, on note une bonne reproduction de toutes les composantes normales par le modèle 3D.En revanche, l'utilisation du modèle 2D plan dégrade fortement le résultat et fait même apparaître des singularités.

Ce phénomène s'explique facilement par le fait que la base utilisée ici est base *subminimale* pour laquelle, les études menées au chapitre 5 prévoient qu'il *pourrait* y avoir de singularités. Cette situation ne se présente pas dans la configuration 3D bien que la nature de la base soit la même. Ceci démontre la nécessité de prendre en compte la formulation 3D des modèles EB-EASM et que l'approximation 2D plan paraît insuffisante. L'amélioration des comportements dans les autres directions normales autres que celle de la paroi ainsi que la singularité observée dans le cas 2D plan viennent appuyer cette affirmation. De plus, étant donnée la bonne approximation de l'anisotropie par le modèle en configuration 3D avec une base *subminimale* et l'absence de singularité pour ce profil, la nécessité d'une utilisation de base *minimale*, donc du modèle à 5 tenseurs n'est pas obligatoire sauf si son utilisation peut contribuer à améliorer les résultats des composantes de cisaillement.

Notons enfin que nous n'avons pas utilisé de correction de courbure, telle que celle de Rumsey *et al.* [110], et que par conséquent, il est possible d'améliorer d'avantage les résultats du modèle sans nécessairement avoir recours à une base de 5 tenseurs.

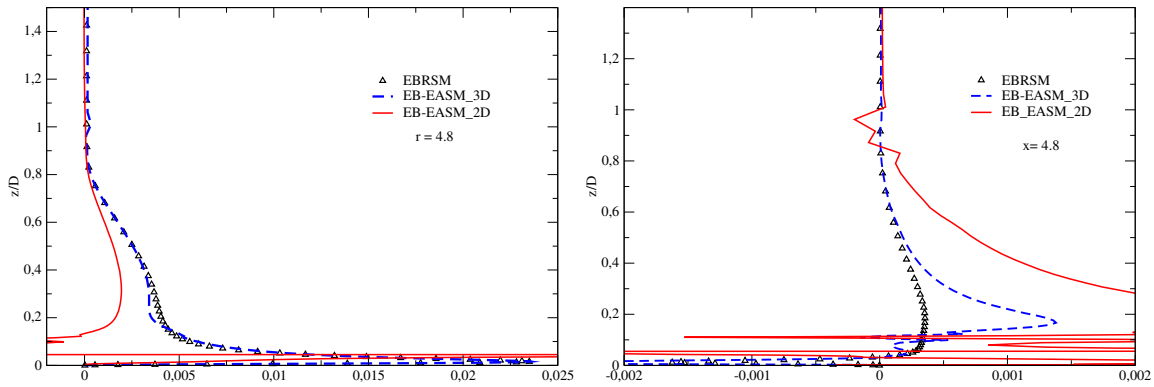


(a) $\overline{u^2}/U_j^2$ (b) $\overline{w^2}/U_j^2$

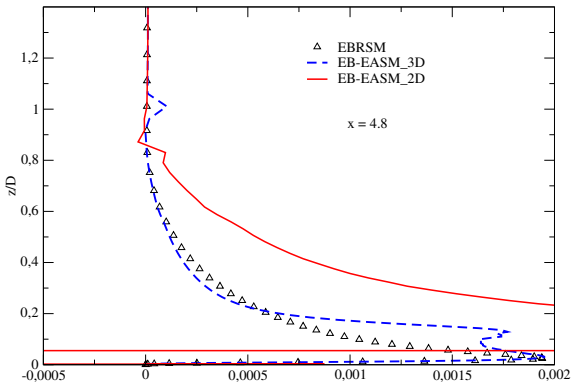


(c) $\overline{v^2}/U_j^2$

FIG. 7.2 – Test à priori modèle EB-EASM#1 . Composantes normales du tenseur de Reynolds pour le profils x=4.8



(a) $\overline{uw}/U_j^2$ (b) $\overline{uv}/U_j^2$



(c) $\overline{vw}/U_j^2$

FIG. 7.3 – Test à priori modèle EB-EASM#1 . Composantes de Cisaillement du tenseur de Reynolds pour le profils x=4.8

Chapitre 8

Conclusion

Afin de prendre en compte les phénomènes induits par la présence d'une paroi, nous avons vu que des adaptations sont opérées sur les modèles de turbulence classique conçus sous hypothèses de localité et de faible inhomogénéité. Des fonctions d'amortissement utilisées dans ces situations ont très vite traduit leur limite et ne permettent pas de tendre vers une universalité lors la modélisation des écoulements turbulents.
Dans cette thèse, nous avons proposé une nouvelle approche utilisant la modélisation *algébrique explicite* avec l'introduction de la pondération elliptique dans les équations du modèle. Cette démarche nous a permis de prendre en considération l'effet de blocage non local, le plus important apparaissant dans l'élaboration des modèles EB-EASM dans la zone de proche paroi. En effet, le modèle à pondération elliptique grâce à sa souplesse, sa stabilité, et le fait qu'il ne fait pas intervenir explicitement la distance à la paroi, est donc utilisable dans des géométries complexes. De plus il résout une seule équation elliptique avec combinent ceux des modèles du premier et du second ordre, on est conduit à l'instar des différents résultats que nous avons présentés tout au long de ce rapport, à des modèles algébriques explicites entièrement déterminés seulement par les trois paramètres k, ε et α et surtout capables de reproduire le tenseurs d'anisotropie en proche paroi.

Déterminer un modèle algébrique explicite EB-EASM, revient à choisir nécessairement une base de projection. Les études effectuées à travers la théorie de la base d'intégrité nous ont permis de déterminer le nombre de tenseurs à prendre en compte pour constituer une base *complète* afin d'éviter toutes singularités dans les modèles. Toutefois, la complexité et le nombre important de tenseurs nécessaires font que la plupart des modèles sont développés avec une base incomplète. La situation qui se présente ici est différente des cas classiquement observés pour lesquelles les bases sont élaborées avec les deux tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ comme tenseurs de *référence*. L'apparition du tenseur $\boldsymbol{M}$ dans les équations des modèles EB-EASM augmente le degré de complexité de problème. Pour preuve, comme nous l'avons démontré, l'équation du premier coefficient de pondération pour le modèle EB-EASM#1 est *quartique* alors qu'habituellement elle est *cubique*. Cette complexité et la linéarité des modèles sont

respectivement fonction du nombre et des propriétés de tenseurs constituant la base de projection.

L'étude de modèle non linéaire EB-EASM#1 et du modèle linéaire EB-EASM#2 a pris une part importante dans ce travail car comparés respectivement aux modèles EB-RSM et R-V2F, ils préservent la limite à deux composantes de la turbulence ($\boldsymbol{b}_{22} = -1/3$). De plus, ils permettent assez convenablement de reproduire l'anisotropie en proche paroi dans le cas des écoulements en canal, et celui de type Couette-Poiseuille bien que le modèle EB-EASM#2, similaire au modèle $\overline{v^2}$–f de Durbin, ne permet pas de distinguer les composantes $\boldsymbol{b}_{11}$ et $\boldsymbol{b}_{33}$. En revanche ce modèle restitue la valeur exacte de l'anisotropie en proche paroi et dans le cas particulier d'un cisaillement nul.

En dehors des deux précédents modèles, des combinaisons attractives de tenseurs ont permis d'identifier les modèles linéaire EB-EASM#3 et non linéaire EB-EASM#4. Ces modèles offrent théoriquement des sérieux atouts surtout dans les configurations 2D plan ou éventuellement 3D. Dans le cas d'écoulement 1D, le modèle EB-EASM#3 dégénère vers le modèle EB-EASM#2, tandis que le modèle EB-EASM#4 est similaire au modèle EB-EASM#1 étant tous les deux formés à partir du même nombre de tenseurs de base. La nature des tenseurs composants ces différentes bases fera en sorte que des différences peuvent apparaître en certains point car tous les modèles comportant le tenseur $\boldsymbol{M}$ permettent de mieux reproduire l'anisotropie dans le cas de cisaillement nul. En perspective, des simulations peuvent être faites pour comparer les résultats des modèles EB-EASM#1 et EB-EASM#4 d'une part et d'autre part de voir si le modèle linéaire EB-EASM#3 offre d'autres atouts en écoulement 2D plan ou en approximation 3D.

L'étude analytique des deux modèles EB-EASM#1 et EB-EASM#2 réalisée en 2D plan confirme bien la tendance obtenue lors de la simulation des écoulements en 1D. Dans la configuration 3D, les résultats présentés permettent de comprendre que ce caractère doit être préservé et que l'approximation 2D plan du modèle EB-EASM#1 due à l'utilisation d'une base *subminimale* conduit à des singularités. Toutefois, en perspective pour valider définitivement cet affirmation, d'autres investigations devraient être faites dans les mêmes conditions, avec d'autres modèles de base composée de moins de cinq tenseurs, le modèle EB-EASM#4 par exemple car même en 2D, les modèles conçus sur la base d'un même nombre de tenseurs, n'ont toujours pas des comportements identiques en certains points. D'autre part, les études de la simulation en 2D plan devraient également contribuer à la prise de cette décision. Dans tous les cas, les résultats à priori obtenus en 3D pour le modèle EB-EASM#1 sont très encourageants et on peut noter l'excellente reproduction de l'effet de blocage, de toutes composantes normales du tenseur de Reynolds ainsi que la composante $\overline{uv}$ confirmant ainsi les résultats en canal.

Ce travail ouvre également de nombreuses perspectives de validation des différents modèles en 3D, de manière à juger de la pertinence des choix des différentes bases de projection définissant chacune une approximation différente en écoulement 3D. Notons enfin que d'autres pistes d'amélioration sont à envisager à l'instar des corrections de courbure où des modifications de l'hypothèse d'équilibre faible sur la diffusion [105].

Bibliographie

[1] *Spécial interess Group on Quality and Trust in CFD*. ERCOFTAC publication, The Best Pratice Guidelines, 1999.

[2] Marco Antonello and Massimo Masi. A simplified explicit algebraic model for Reynolds stress. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 28 :1092–1097, 2007.

[3] D. Apsley and A. Leschziner. A new low-re non-linear two-equation turbulence model for complex flows. *Int. J. Heat Fluid Flow*, pages 209–222, 1998.

[4] F. Archambeau. *Introduction à la turbulence Cours ENSTA*, 2005.

[5] D. Aronson, A. V. Johansson, and L. Löfdahl. Shear-free turbulence near a wall. *J. Fluid Mech.*, 338 :363–385, 1997.

[6] B. Aupoix and P.R. Sparlat. Extensions of the spalart–allmaras turbulence model to account for wall roughness. *Int. J. Heat Fluid Flow*, pages 454–462, 2003.

[7] W. Bauer, O. Haag, and D. K. Hennecke. Accuracy and robustness of non-linear eddy viscosity models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21 :312–319, 2000.

[8] M. Belhoucine, Deville, A.R. Elazehari, and M.O. Bensalah. Explicit algebraic reynolds stress model of incompressible turbulent flow in rotating square duct. *Computers & Fluids*, 33 :179–199, 2004.

[9] F. Billard, J.C. Uribe, and D. Laurence. A new formulation of $\overline{v^2}$–$f$model using elliptic blending and its application to ,heat transfert prediction. In *7th ERCOFTAC Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Limasol, Cyprus*, June ,2008.

[10] R.F Blackwelder. the eddy structure in bounded shear flows in cousteix j. *Report*, 1986.

[11] J. Carlier and M. Stanislas. Experimental study of eddy structures in turbulence boundary layer using piv. *J. Fluid Mech.*, 535 :143–188, 2005.

[12] J. R. Carlson and T. B. Gatski. Elliptic relaxation of a tensor representation for the redistribution terms in a Reynolds stress turbulence model. Technical report, NASA Langley, 2002.

[13] S. Carpy. *Contribution à la modélisation instationnaire de la turbulence. Modélisations URANS et hybride RANS/LES*. PhD thesis, Université de Poitiers / Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2008.

[14] P. Chassaing. *La turbulence en Mécanique des Fluides*. Cépaduès edition edition, 2000.

[15] P. Y. Chou. Pressure flow of a turbulent fluid between two parallel infinite planes. *Quart. of Appl. Math.*, 3 :198–209, 1945.

[16] E. R. Corino and R. S. Brodkey. A visual investigation of the wall region in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 37 :1–30, 1969.

[17] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cepadues Edition, 1989.

[18] Eric Coustols and J Cousteix. Perfomances of ribets in the supersonic regime. 32 :431–433, 1994.

[19] T. J. Craft, L. J. W. Graham, and B. E. Launder. Impinging jet studies for turbulence model assessment—II. An examination of the performance of four turbulence models. *Intl J. Heat Mass Transfer*, 36(10) :2685–2697, 1993.

[20] T. J. Craft and B. E. Launder. A Reynolds stress closure designed for complex geometries. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(3) :245–254, 1996.

[21] T. J. Craft, B. E. Launder, and K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(2) :108–115, 1996.

[22] T. J. Craft, B. E. Launder, and K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(2) :108–115, 1996.

[23] T. J.and Gerasimov Craft. Progress in the genralization of wall-function treatments. 23 :148–160, 2002.

[24] B. J. Daly and F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13 :2634–2649, 1970.

[25] P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions". *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3 :1–13, 1991.

[26] P. A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 249 :465–498, 1993.

[27] Omar El Yahyaoui, Gilmar Mompean, and Naji Hassan. Evaluation à priori d'un modèle non linéaire. *CR Mécanique*, 300 :27–34, 2002.

[28] Atabak FADAI-GHOTBI. *Modélisation de la turbulence en situation instationnaire par approche URANS et hybride RANS-LES prise en compte des effets de paroi par pondération elliptique*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.

[29] Song Fu and Chen Wang. Second–moment closure modelling of turbulence in non inertial frame. *Fluid Dynamics Research*, 20 :43–65, 1997.

[30] T. B. Gatski and C. G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 254 :59–78, 1993.

[31] T.B. Gatski. Constitutive equations for turbulent flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 18 :345–369, 2004.

[32] T.B. Gatski. Second-moment and scalar flux representations in engineering and geophysical flows. *Fluid Dynamics Research*, 41, 2009.

[33] T.B. Gatski and S. Wallin. Extending the weak-equilibrium condition for algebraic stress model to rotating and curved flows. *J. Fluid Mech.*, 2004.

[34] M. M. Gibson and B. E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 86(3) :491–511, 1978.

[35] S. Girimaji. Fully explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 8 :387–402, 1996.

[36] S. Girimaji. A galilean invariant explicit algebraic reynolds stress models for curved flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 8 :387–402, 1996.

[37] O. Grundestam, S. Wallin, and Arne V. Johansson. An explicit algebraic reynolds stress model based on nonlinear pression strain rate model. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 26 :732–745, June 2005.

[38] H. Ha Minh. La modélisation statistique de la turbulence : ses capacités et ses limitations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327(IIb) :343–358, 1999.

[39] K. Hanjalić. Advanced concept in turbulence modelling. In *Technische Universitat Darmstadt*.

[40] K. Hanjalić. Closure models for incompressible turbulent flows. TU Delft.

[41] K. Hanjalić. Second moment turbulence closures : rationale and basic models. TU Delft.

[42] K. Hanjalić. Advanced turbulence closure models : a view of current status and future prospects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15(3) :178–203, 1994.

[43] K. Hanjalić, S. Jakirlic, and I. Hadzic. Expanding the limits "equilibrium" second–moment turbulence closures. *Fluid Dynamics Research*, 20 :25–41, 1997.

[44] K. Hanjalić and B. E. Launder. Fully developed asymmetric flow in a plane channel. *J. Fluid Mech.*, 51(2) :301–335, 1972.

[45] K. Hanjalić and B. E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52 :609–638, 1972.

[46] K. Hanjalić, D. R. Laurence, M. Popovac, and J. C. Uribe. $(\overline{v^2}/k)$–f turbulence model and its application to forced and natural convection. In *6th ERCOFTAC Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Sardinia, Italy*, 2005.

[47] K. Hanjalić, M. Popovac, and M. Hadziabdic. A robust near–wall elliptic relaxation eddy–viscosity turbulence model for cfd. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 25 :1047–1051, 2004.

[48] Hellsen. A curvature corrections for algebraic reynolds stress modelling : A discussion. 40(6) :1909–1911, 2002.

[49] S. Hoyas and J. Jimenez. Scaling of the velocity fluctuations in turbulence channels up to $Re_\tau = 2000$. *Phys. Fluids*, 18 :702–711, 2006. http ://torroja.dmt.upm.es/ftp/channels/data.

[50] J. Hui and S. Obi. A modification of the elliptic relaxation. In *7th ERCOFTAC Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Limasol, Cyprus*, June,2008.

[51] Robert R. HWANG and JAW SHENG-YUH. Second-order near-wall turbulence models : Their achievement and limitations. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, 22(6) :703–722, 1998.

[52] T. Jongen and T. B. Gatski. A new approach to characterizing the equilibrium states of the Reynolds stress anisotropy in homogeneous turbulence. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 11 :31–47, 1998.

[53] T. Jongen and T.B. Gatski. General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows. *IJES*, 36(7–8) :739–763, 1998.

[54] T. Jongen, L. Machiels, and T. B. Gatski. Predicting noninertial effects with linear and nonlinear eddy-viscosity and algebraic stress models. *Flow, Turb. and Comb.*, 60 :215–234, 1998.

[55] C. Juan, Del Alamo, Javier Jiménez, Paulo Zandonat, and Robert D. Moser. Spectral of very large anisotropic scale in turbulence channel flow. *Phys. Fluids*, 2003.

[56] Del. Juan, C.and Alamo, Javier Jiménez, Paulo Zandonat, and Robert D. Moser. Scaling of energy spectral of turbulence channel flow up $Re_\tau = 950$. *J. Fluid Mech.*, 500 :135–144, 2004.

[57] G. Karlatiras and G. Papadakis. Near wall modification of explicit algebraic reynolds stress model using elliptic blending. 6 :87–96, 2005.

[58] W. Kebede, B. E. Launder, and B. A. Younis. Large amplitude periodic pipe flow : a second-moment closure study. In *Proc. Fifth Symp. Turb. Shear Flows, Cornell Univ., Ithaca, New-York, USA*, 16, pages 23–29, 1985.

[59] J. Kim. On the structure of wall bounded turbulent flows. *Phys. Fluids*, 26 :2008–2097, 1983.

[60] J. Kim. Turbulent structures associated with the bursting event. *Phys. Fluids*, 28 :52–58, 1985.

[61] J. Kim and R. Spalart. Scaling of the bursting frequency in turbulent boundary layers at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 30 :3326–3328, 1987.

[62] S.J Kline and S. K Robinson. Turbulent boundary layer structure :. *IUTAM , Symp Springer- verlag*, pages 3–22, 199à.

[63] Jens Knoell and Dale B. Taulbee. A non linear stress–strain model for wall–bounded turbulent flows. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 22 :402–408, 2001.

[64] B. E. Launder. *An introduction to single-point closure methodology.* Simulation and Modelling of Turbulent Flows, ed. by T. B. Gatski, M. Y. Hussaini and J. L. Lumley, Oxford University Press, 1996.

[65] B. E. Launder, G. J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68(3) :537–566, 1975.

[66] B. E. Launder and W. C. Reynolds. Asymptotic near-wall stress dissipation rates in a turbulent flow. *Phys. Fluids*, 26(5) :1157–1158, 1983.

[67] B. E. Launder and N. Shima. Second-moment closure for the near-wall sublayer : Development and application. *AIAA J.*, 27 :1319–1325, 1989.

[68] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3 :269, 1974.

[69] B. E. Launder and D. P. Tselepidakis. Contribution to the second-moment modelling of sublayer turbulent transport. *Zaric Memorial Intl Seminar on Near-Wall Turb., Dubrovnik, Yougoslavie*, pages 16–20, 1988.

[70] B. E. Launder and D. P. Tselepidakis. Directions in second-moment modelling of near-wall turbulence. In *29th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA 91–0219, pages 1–10, 1991.

[71] Reece G.J Launder, B.E and W. Rodi. Progress in developmentof reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68 :537–566, 1975.

[72] D. R. Laurence, J. C. Uribe, and S. V. Utyuzhnikov. A robust formulation of the v^2–f model. *Flow, Turb. and Comb.*, 73(3–4) :169–185, 2005.

[73] Y. Lecocq. Implantation d'un nouveau modèle de turbulence dans un code de calcul. Rapport de stage de DEA, Université de Poitiers, 2004.

[74] F. S. Lien, G. Kalitzin, and P. A. Durbin. RANS modeling for compressible and transitional flows. In *Proc. of the Summer Program*, pages 267–286. Center for Turbulence Research, Stanford University, CA, USA, 1998.

[75] Jie Lin. *Etude détaillée des structures Cohérentes de la zone tampon à l'aide de données de PIV stéréoscopique.* PhD thesis, Université des Sciences et Technologiques de Lille, 2006.

[76] Jie Lin, J.M Foucault, J.P. Laval, and M. Stanislas. Détection des tourbillons longitudinaux dans la zone tampon de la couche limite. *CR Mécanique*, 18eme congrès Grenoble, 2007.

[77] J. L. Lumley and B. Khajeh-Nouri. Computational modeling of turbulent transport. In *Proc. Second IIGG-IUTAM Symp. on Atm. Diffusion in Environmental Pollution*, 1973.

[78] S. L. Lyons, T. J. Hanratty, and J. B. McLaughlin. Turbulence-producing eddies in the viscous wall region. *AIChE J.*, 35 :1962–1974, 1989.

[79] R. Manceau. Reproduccing The Blocking Effect of the Wall in one–point Turbulence Models. In *European Congres on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, year = 2000, month = September 11–14.*

[80] R. Manceau. *Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique.* PhD thesis, Université de Nantes, 1999.

[81] R. Manceau. Accounting for wall-induced Reynolds stress anisotropy in explicit algebraic stress models. In *Proc. 3rd Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan*, June 25–27, 2003.

[82] R. Manceau. An improved version of the Elliptic Blending Model. Application to non-rotating and rotating channel flows. In *Proc. 4th Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Williamsburg, VA, USA*, 2005.

[83] R. Manceau. *Turbulence et modelisation de la turbulence, Cours UE1 Masters Fuide Acoustique et Energétique*, 2005–2006.

[84] R. Manceau, J. R. Carlson, and T. B. Gatski. A rescaled elliptic relaxation approach : neutralizing the effect on the log layer. *Phys. Fluids*, 14(11) :3868–3879, 2002.

[85] R. Manceau, S. Carpy, and D. Alfano. A rescaled $\overline{v^2}$–f model : first application to separated and impinging flows. In W. Rodi and N. Fueyo, editors, *Proc. 5th Int. Symp. Engng. Turb. Modelling and Measurements, Mallorca, Spain*. Elsevier, 2002.

[86] R. Manceau and K. Hanjalić. A new form of the elliptic relaxation equation to account for wall effects in RANS modelling. *Phys. Fluids*, 12(9) :2345–2351, 2000.

[87] R. Manceau and K. Hanjalić. Elliptic blending model : A new near-wall reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids*, 14(2) :744–754, 2002.

[88] R. Manceau, S. Parneix, and D. Laurence. Turbulent heat transfer predictions using the $\overline{v^2}$–f model on unstructured meshes. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21(3) :320–328, 2000.

[89] R. Manceau, M. Wang, and D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier–Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, 438 :307–338, 2001.

[90] R. Manceau, M. Wang, and D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier–Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, 438 :307–3, 2001.

[91] G. L. Mellor and H. J. Herring. A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA J.*, 11(5) :590, 1973.

[92] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 32(8) :1598–1605, 1994.

[93] Y. Minagawa and S. Obi. Development of turbulent impinging jet on a rotating disk. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 25 :759–766, 2004.

[94] R.D. Moser and N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulence channel flow up $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4) :943–945, 1999.

[95] Abdou G. OCENI, R. Manceau, and T.B. Gatski. Explicit algebraic modelling of channel flows. In *WALLTURB D4.10*, June 2008.

[96] Abdou G. OCENI, R. Manceau, and T.B. Gatski. A hierachy of explicit algebraic models for wall bounded flows. In *Report WALLTURB (D4.13)*, March 2008.

[97] Abdou G. OCENI, R. Manceau, and T.B. Gatski. A hierachy of explicit algebraic models for wall bounded flows. In *7th ERCOFTAC Int. Symposium on*

Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Limasol, Cyprus, pages 83–88, June,2008.

[98] Abdou G. Oceni, R R. Manceau, and T.B. Gatski. Derivation of explicit algebraic models. In *WALLTURB, Viterbo (D4.5)*, March 2007.

[99] P. Orlandi. Database of turbulent channel flow with moving walls. http ://dma.ing.uniroma1.it/users/orlandi, 2008.

[100] J. B. Perot and P. Moin. Shear-free turbulent boundary layers : physics and modeling. Technical report, Dept Mech. Engng., Stanford University, 1993.

[101] R. Perrin and R. Manceau. RANS computation of the turbulent jet impinging onto a rotating disk. In *Proc.* $13^{th} ERCOFTAC(SIG15/IAHRWorkshopon RefinedTurbulentModellingTUGrazAustria$, 2008.

[102] B. A. Pettersson Reif, P. A. Durbin, and A. Ooi. Modeling rotational effects in eddy-viscosity closures. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20 :563–573, 1999.

[103] S. B. Pope. A more general effective viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72 :331–340, 1975.

[104] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.

[105] J.F Qiu, S. Obi, and T.B. Gatski. Evaluation of extended weak equilibrium conditions for fully developed rotating chanel flow. *Flow, Turb. and Comb.*, 2008.

[106] M. Hadziadic P. Fourment S. Benhamadouche R. Manceau, R. Perrin. Turbulent jet impinging onto rotating disk. a collaboration evaluation of rans models. In *Proc.* $9^{th} Int.Symp.TurbHeatandMassTransfer, Rome, Italy$, 2009, *A Paraître*.

[107] R.S. Rivlin and Ericksen J.L. Stress deformation relations for isotropic materials. *Arch . Rat. Mech. Anal*, 4 :323–425, 1955.

[108] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *Z. Angew. Math. Mech.*, 56 :219–221, 1976.

[109] J. C. Rotta. Statistische Theorie nicht homogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 129 :547–572, 1951.

[110] C. L. Rumsey, T. B. Gatski, and J. H. Morrison. Turbulence model predictions of strongly curved flow in a U-duct. *AIAA J.*, 38(8) :1394–1402, 2000.

[111] C. L. Rumsey, W. Gatski, T. B.and Kyle, Anderson, and Eric J. Nielsen. Isolating curvature effects in computing wall–bounded turbulent flows. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 22 :573–582, 2001.

[112] T.-H. Shih and J. L. Lumley. Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Technical Report FDA-85-3, Sibley School of Mech. and Aerospace Engng., Cornell University, Ithaca, NY, 1985.

[113] T.-H. Shih, N. N. Mansour, and J. Y. Chen. In *Proc. of the Summer Program*. Center for Turbulence Research, Stanford University, CA, USA, 1987.

[114] Nobuyuki Shima. Low-Reynolds-number second-moment closure without. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 19 :540–555, 1998.

[115] M. K. Shur, M. L.and Strelets and P. R Travin, A. K.and Spalart. Turbulence modeling in rotating and curved channels : Assessing the spalart-shur correction. *AIAA J.*, 38(5) :784–792, 2000.

[116] R. M. C. So, P. Vimala, T. B. Gatski, L. H. Jin, and C. Y. Zhao. Accounting for buoyancy effects in explicit algebraic stress model : homogeneous turbulent shear flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 15(5) :283–302, 2002.

[117] A.J.M Spencer. *Theory of Invariants*. Academy press , new york edition, 1971.

[118] C. G. Speziale. Invariance of turbulent closure models. *Phys. Fluids*, 22(6) :1033–1037, 1979.

[119] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, 227 :245–272, 1991.

[120] Charles G. Speziale and Hua Xu Xiang. Toward the development of second–order closure model for nonequilibrium turbulent flows. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17 :238–244, 1996.

[121] K. Suga. Nonlinear eddy viscosity modelling for turbulence and heat transfer near–wall and shear free boundaries. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 21 :37–48, 2000.

[122] DB Taulbee. An improved algebraic reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Phys. Fluids*, 4 :2555–2561, 1992.

[123] T.B.Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulence flows. *Prog. Aerospace Sci.*, 36 :655–682, 2000.

[124] L. Thielen, K. Hanjalić, H. Jonker, and R. Manceau. Predictions of flow and heat transfer in multiple-impinging jets with an Elliptic-Blending second-moment closure. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 :1583–1598, 2005.

[125] S. Wallin and A. V. Johansson. Modelling stremline curvature effect in explicit algebraic reynolds stress turbulence models. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 23 :721–730, 2002.

[126] S. Wallin and A.V. Johansson. An explicit algebraic reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 403 :89–132, 2000.

[127] V. Wizman, D. Laurence, M. Kanniche, P. Durbin, and A. Demuren. Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17 :255–266, 1996.

[128] X-H Xu and C.G Speziale. *J. Fluid Mech.*, 1 :2026, 1996.

[129] R. Ying and V. M. Canuto. Turbulence modelling over two-dimensional hills using an algebraic Reynolds stress expression. *Boundary-Layer Meteorology*, 77 :69–99, 1996.

[130] O. Zeman and J. L. Lumley. Buoyancy effects in entraining turbulent boundary layers : a second-order closure study. In *Proc. First Symp. Turb. Shear Flows*, 6, pages 295–306, 1979.

Annexe A

Le Modèle de pondération elliptique EB-RSM : Formulations et Équations

Le modèle de pondération elliptique (ou EB-RSM) est un modèle de proche paroi qui a été développée dans sa première version en 2002 par R. Manceau et Hanjalić [87] et modifiée par Manceau [82] en 2003. L'objectif visé est la prise en compte de l'effet de blocage qui apparaît lorsqu'un écoulement est en présence d'une paroi solide. La plupart des modèles proposés pour le terme de redistribution ϕ_{ij}^* sont basés sur la décomposition de ce terme en partie lente et rapide avec en prime, la prise en compte des hypothèses de localité et de quasi homogénéité qui ne sont plus valables aux voisinages de la paroi. Pour pallier à ces insuffisances, Durbin [26] introduit la Relaxation Elliptique qui consiste à résoudre une équation elliptique de ϕ_{ij}^*. La pondération elliptique s'inscrit dans cette démarche et son objectif vise principalement à simplifier le modèle avec possibilité d'être appliqué pour les écoulements complexes. Son approche introduit un paramètre géométrique α solution de l'équation elliptique à l'instar du modèle de Durbin. Cette démarche permet au modèle EB-RSM de préserver les principales formulations de celui de Durbin en réduisant significativement le nombre d'équations de 13 à 3 et en proposant des conditions aux limites qui permettent une meilleures reproduction des effets de parois et respectant parfaitement l'équilibre entre la corrélation pression-déformation, la pseudo-dissipation et la diffusion moléculaire. Les équations suivantes du modèle EB-RSM sont *exactement* celles proposées par Manceau *et al.* [82].

A.1 Equation de transport des tensions de Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u_i u_j}}{\mathrm{d}t} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij} + D^{\nu}_{ij} + D^{T}_{ij} + D^{P}_{ij} \tag{A.1}$$

Le modèle est basé sur la pondération des termes de proche paroi dénommés par $.^{w}$ et les termes quasi homogènes repérés par $.^{h}$. Ainsi le terme de redistribution est présenté de la façon suivante :

$$\phi_{ij} = (1-\alpha^2)\phi^{w}_{ij} + \alpha^2 \phi^{h}_{ij} \tag{A.2}$$

tandis que le tenseur de dissipation est tel que :

$$\varepsilon_{ij} = (1-\alpha^2)\varepsilon^{w}_{ij} + \alpha^2 \varepsilon^{h}_{ij}. \tag{A.3}$$

EB-RSM utilise comme modèle quasi homogène, le modèle SSG de Speziale *et al.* [119] :

$$\begin{aligned}\phi^{h}_{ij} = \phi^{SSG}_{ij} = &-\left(g_1 + g_1^{*}\frac{P}{\varepsilon}\right)\varepsilon b_{ij} \\ &+ \left(g_3 + g_3^{*}\sqrt{b_{lk}b_{lk}}\right) k S_{ij} + g_4 k\left(b_{ik}S_{jk} + S_{ik}b_{jk} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}\right) \\ &- g_5 k\left(b_{ik}\Omega_{jk} + \Omega_{ik}b_{jk}\right),\end{aligned} \tag{A.4}$$

pour lequel le terme non linéaires g_2 sont négligés pour des raisons de stabilité numérique. la $\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$ [87]

$$\phi^{w}_{ij} = -5\frac{\varepsilon}{k}\left[\tau_{ik}n_j n_k + \tau_{jk}n_i n_k - \frac{1}{2}\tau_{kl}n_k n_l\left(n_i n_j + \delta_{ij}\right)\right], \tag{A.5}$$

dans l'objectif d'une meilleure reproduction des comportements en proche paroi ((équilibre de $\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$ [87]), le terme de redistribution dans cette zone est modélisé par :

$$\phi^{w}_{ij} = -5\frac{\varepsilon}{k}\left[\tau_{ik}n_j n_k + \tau_{jk}n_i n_k - \frac{1}{2}\tau_{kl}n_k n_l\left(n_i n_j + \delta_{ij}\right)\right], \tag{A.6}$$

dans lequel le vecteur normale est définit à partir du gradient de α pour lequel la paroi est un isocontour de $\alpha = 0$. Soit :

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nabla}\alpha / \|\boldsymbol{\nabla}\alpha\|. \tag{A.7}$$

Par ailleurs, les deux parties du tenseur de dissipation sont modélisées par :

$$\varepsilon^{w}_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k}\varepsilon \tag{A.8}$$

et

$$\varepsilon^{h}_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}. \tag{A.9}$$

A.2 Equation de relaxation Elliptique de α

En s'inspirant de la théorie de relaxation elliptique Durbin [26], Manceau *et al.* [82] définit le coefficient de pondération α comme solution de l'équation elliptique

$$\alpha - L^2\nabla^2\alpha = 1, \tag{A.10}$$

avec comme conditions aux limites $\alpha = 0$ à la paroi et tend vers 1 si l'on s'en éloigne (dans ces conditions le laplacien α de devient faible), la transition entre les deux états est réalisée par l'échelle de longueur L qui, ici est modélisée de façon similaire à celle de Durbin par le maximum entre les échelles intégrale et celle de Kolmogorov

$$L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{A.11}$$

Cette équation est d'ailleurs confirmée par Manceau *et al.* [90] en utilisant les données de la DNS de Moser *et al.* [90].

A.3 Équations d'évolution du taux de dissipation

$$\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t} = \frac{C'_{\varepsilon_1}P - C_{\varepsilon_2}\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\tau_{kl}\,T\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_k\partial x_k} \tag{A.12}$$

A.4 Échelle de temps

L' échelle de temps utilisé par le modèle est celui définie par Durbin et se présente sous la forme :

$$T = max\left(\frac{k}{\varepsilon}, 6\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right) \tag{A.13}$$

A.5 Les coefficients

$$\begin{gathered} C_{\varepsilon_1} = 1.44\,;\ C_{\varepsilon_2} = 1.85\,;\ A_1 = 0.02\,;\ \sigma_\varepsilon = 1.15\,; \\ \sigma_k = 1.0\,;\ C_L = 0.161\,;\ C_\eta = 80.0\,;\ C_T = 6.0\,; \\ g_1 = 3.4\,;\ g_1^* = 1.8\,;\ g_3 = 0.4\,;\ g_3^* = 0.4\,;\ g_4 = 1.25\,;\ g_5 = 0.4;\ A_1 = 0.076 \end{gathered} \tag{A.14}$$

Le coefficient C'_{ε_1} est tel que

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1}\left(1. + A_1\left(1-\alpha^2\right)\sqrt{\frac{k}{\tau_{ij}n_in_j}}\right) \tag{A.15}$$

A.6 Les conditions aux limites à la paroi

Les conditions aux limites sur k et U_i sont exactes alors que celles de ε dérivent des conditions asymptotiques.

$$U_i = 0 \qquad k = 0 \qquad \varepsilon = 2\nu\frac{k}{y^2} \qquad \alpha = 0 \tag{A.16}$$

Le modèle EBRSM basé sur l'approche de modèle de Relaxation de Durbin a donné dans sa version actuelle, des résultats satisfaisants. Il a l'avantage de ne pas dépendre de la viscosité turbulente et ne dépend que du modèle quasi homogène dont il est issu.

Annexe B

Constitution de bases invariantes et fonctionnelles de tenseurs du second d'ordre

B.1 Théorème de Cayley Hamilton Généralisé

Cet important théorème stipule que toute matrice est solution de son équation caractéristique. Appliqué à une matrice $\mathbf{A}$, 3x3, il s'écrit :

$$\mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 \{\mathbf{A}\} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\left[\{\mathbf{A}\}^2 - \left\{\mathbf{A}^2\right\}\right] - \boldsymbol{I} \det \mathbf{A} = 0 \tag{B.1}$$

où $\boldsymbol{I}$ désigne la matrice Identité 3x3, $\{.\}$ représente l'opérateur trace définit pour toute matrice $\mathbf{H}$ quelconque par la somme de ses éléments diagonaux, c'est à dire :

$$\{\mathbf{H}\} = \mathbf{H}_{ii} \tag{B.2}$$

et det . le déterminant qui peut s'écrire sous forme d'une expression polynomiale en $\{\mathbf{A}\}$, $\left\{\mathbf{A}^2\right\}$ et $\left\{\mathbf{A}^3\right\}$ en prenant la trace de la relation (B.1) par :

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{3}\left[\left\{\mathbf{A}^3\right\} - \frac{3}{2}\left\{\mathbf{A}^2\right\}\{\mathbf{A}\} + \frac{1}{2}\{\mathbf{A}\}^3\right] \tag{B.3}$$

Rivlin [107] donne une relation équivalente à (B.1) pour trois matrices d'ordre 3 quelconque $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, et $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ABC} + \mathbf{BCA} + \mathbf{CAB} + \mathbf{ACB} + \mathbf{CBA} + \mathbf{BAC} = \\
(\mathbf{BC} + \mathbf{CB})\{\mathbf{A}\} + (\mathbf{CA} + \mathbf{AC})\{\mathbf{B}\} + (\mathbf{AB} + \mathbf{BA})\{\mathbf{C}\} \\
+\mathbf{A}(\{\mathbf{BC}\} - \{\mathbf{B}\}\{\mathbf{C}\}) + \mathbf{B}(\{\mathbf{CA}\} - \{\mathbf{C}\}\{\mathbf{A}\}) + \mathbf{C}(\{\mathbf{AB}\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}) \\
+[\{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\{\mathbf{C}\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{BC}\} - \{\mathbf{B}\}\{\mathbf{CA}\} - \{\mathbf{C}\}\{\mathbf{AB}\} + \{\mathbf{ABC}\} + \{\mathbf{CBA}\}]\boldsymbol{I}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Cette expression sera utilisée pour la simplification des relations conduisant à la détermination de la base d'intégrité.
D'autre part, quelques expressions très utiles peuvent se déduire de (B.4).

– Si on prend **A**= **B**=**C**, on obtient la relation (B.1). Maintenant si on multiplie à droite cette relation par une matrice **Y** quelconque et que l'on prend la trace de la relation obtenue, on aboutit à :

$$\left\{\mathbf{A}^3\mathbf{Y}\right\} - \left\{\mathbf{A}^2\mathbf{Y}\right\}\{\mathbf{A}\} + \frac{1}{2}\{\mathbf{A}\mathbf{Y}\}\left[\{\mathbf{A}\}^2 - \left\{\mathbf{A}^2\right\}\right] - \{\mathbf{Y}\}\det\mathbf{A} = 0 \tag{B.5}$$

- En choisissant **A**=**C** dans (B.4), il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{ABA} + \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{BA}^2 = \; & \left[\left\{\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{AB}\} - \tfrac{1}{2}\{\mathbf{B}\}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right)\right]\boldsymbol{I} \\ & + \mathbf{A}\left(\{\mathbf{AB}\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\right)\{\mathbf{A}\} \\ & + \mathbf{A}^2\{\mathbf{B}\} \\ & + \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right) \\ & + (\mathbf{AB} + \mathbf{BA})\{\mathbf{A}\}\end{aligned} \tag{B.6}$$

En multipliant la dernière relation à gauche et à droite par la matrice **A** et en substituant le terme $\mathbf{A}^3$ définit en (B.1) dans l'addition des expressions obtenues, on aboutit à

$$\begin{aligned}\mathbf{ABA}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{BA} \; = \; & \mathbf{ABA}\{\mathbf{A}\} + \det\mathbf{A}\{\mathbf{B}\}\boldsymbol{I} \\ & + \mathbf{A}\left(\left\{\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{AB}\}\right) \\ & + \mathbf{A}^2\{\mathbf{AB}\} - \mathbf{B}\det\mathbf{A}\end{aligned} \tag{B.7}$$

- Par ailleurs, des relations (B.6) et (B.7), on peut déduire :

$$\begin{aligned}\mathbf{ABA} = \; & -\mathbf{A}^2\mathbf{B} - \mathbf{BA}^2 \\ & + \left[\left\{\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{AB}\} - \tfrac{1}{2}\{\mathbf{B}\}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right)\right]\boldsymbol{I} \\ & + \mathbf{A}\left(\{\mathbf{AB}\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\right) \\ & + \mathbf{A}^2\{\mathbf{B}\} \\ & + \tfrac{1}{2}\mathbf{B}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right) \\ & + (\mathbf{AB} + \mathbf{BA})\{\mathbf{A}\}\end{aligned} \tag{B.8}$$

Toutefois, il faut noter que toutes les extensions d'ordre supérieur à trois seront ramenées à un ordre inférieur par l'utilisation du théorème de Cayley Hamilton. Ainsi, on peut écrire les relations suivantes pour toutes matrices d'ordre trois quelconques **A**, **B** et **Y** :

$$\mathbf{AB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{Y} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{AY} = \; H(\mathbf{A},\mathbf{B}^2)\mathbf{Y} \tag{B.9}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}2\mathbf{AB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{Y} = \; & H(\mathbf{A},\mathbf{B}^2)\mathbf{Y} \\ & + \tfrac{1}{3}\left[\mathbf{B}^2G(\mathbf{A},\mathbf{AY}) - G(\mathbf{B},\mathbf{A})\mathbf{AYA}\right. \\ & + \mathbf{B}G(\mathbf{A},\mathbf{BAY}) - G(\mathbf{B},\mathbf{A}^2)\mathbf{AY} \\ & + \mathbf{A}G(\mathbf{B},\mathbf{A})\mathbf{YA} - \mathbf{AB}G(\mathbf{A},\mathbf{BY}) \\ & - 2G(\mathbf{A},\mathbf{B}^2\mathbf{AY}) + 2\mathbf{AB}^2G(\mathbf{A},\mathbf{Y})\end{aligned} \tag{B.10}$$

et

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{AY} = \; & H(\mathbf{A},\mathbf{B}^2)\mathbf{Y} \\ & -\tfrac{1}{3}\left[\mathbf{B}^2 G(\mathbf{A},\mathbf{AY}) - G(\mathbf{B},\mathbf{A})\mathbf{AYA}\right. \\ & +\mathbf{B}G(\mathbf{A},\mathbf{BAY}) - G(\mathbf{B},\mathbf{A}^2)\mathbf{AY} \\ & +\mathbf{A}G(\mathbf{B},\mathbf{A})\mathbf{YA} - \mathbf{AB}G(\mathbf{A},\mathbf{BY}) \\ & \left.-2G(\mathbf{A},\mathbf{B}^2\mathbf{AY}) + 2\mathbf{AB}^2 G(\mathbf{A},\mathbf{Y})\right] \end{aligned} \tag{B.11}$$

La matrice $\mathbf{Y}$ peut être remplacée à convenance par : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2$ ou $\mathbf{B}^2$ et les fonctions G($\mathbf{A}$,B) et H($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$) étant définies par Rivlin [107] de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \; & \left[\left\{\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{AB}\} - \tfrac{1}{2}\{\mathbf{B}\}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right)\right]\boldsymbol{I} \\ & +\mathbf{A}\left(\{\mathbf{AB}\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{B}\}\right) \\ & +\mathbf{A}^2\{\mathbf{B}\} \\ & +\tfrac{1}{2}\mathbf{B}\left(\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \{\mathbf{A}\}^2\right) \\ & +\left(\mathbf{AB}+\mathbf{BA}\right)\{\mathbf{A}\} \end{aligned} \tag{B.12}$$

et

$$\begin{aligned} H(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \; & \mathbf{ABA}\{\mathbf{A}\} + \det\mathbf{A}\{\mathbf{B}\}\boldsymbol{I} \\ & +\mathbf{A}\left(\left\{\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right\} - \{\mathbf{A}\}\{\mathbf{AB}\}\right) \\ & +\mathbf{A}^2\{\mathbf{AB}\} - \mathbf{B}\det\mathbf{A} \end{aligned} \tag{B.13}$$

On remarque effectivement que ces fonctions s'expriment comme polynôme de produit de matrices d'extensions 1 et 2 et sont de degré au plus égal à 3. Dans l'objectif de la construction des bases fonctionnelles et invariantes composées des trois tenseurs de références $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$ nous allons appliquer les relations précédentes à ces tenseurs afin de dégager des expressions directement exploitables pour la construction de ces différentes bases.

B.1.1 Application du théorème de Cayley Hamilton pour les tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$

Les relations précédentes sont appliquées aux tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{M}$ ainsi qu'à $\boldsymbol{W}$, tenseur anti symétrique. Ces tenseurs d'ordre deux sont tous de trace nulle. Ce qui simplifie les expressions et nous donne des relations directement utilisables pour la construction des bases invariantes et fonctionnelles ainsi que pour la mise en oeuvre de modèles de turbulence tridimensionnels. Des simplifications des modèles 3D sont alors possibles vers les cas mono ou bidimensionnels. Les relations que nous proposons seront classées en fonction des différentes extensions possibles qui apparaissent.

- Extensions d'ordre 1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}^3 =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{S} + \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{W}^3 =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{M}^3 =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{M}^2\right\}\boldsymbol{M} + \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{M}^3\right\}\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{B.14}$$

on doit noter que $\{\boldsymbol{W}^3\} = 0$

- Extensions d'ordre 2

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{S}^3\boldsymbol{W} =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\right] \\
\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{S}^3\boldsymbol{W}^2 =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left[\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right] \\
\boldsymbol{W}^3\boldsymbol{S}^3 - \boldsymbol{S}^3\boldsymbol{W}^3 =& -\frac{1}{4}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\left[\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\right] \\
\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^3 - \boldsymbol{W}^3\boldsymbol{S} =& \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\left[\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\right]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Etant donnée que les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{M}$ sont de même nature (symétriques), les relations liants les tenseurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{W}$ sont obtenues en remplaçant $\boldsymbol{S}$ par $\boldsymbol{M}$ dans celles liants $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$.

- Extensions d'ordre 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2 =& -\frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\boldsymbol{W} \\
\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2 =& \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{W} \\
\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 =& \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}^2 + \left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S} \\
& -\frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\boldsymbol{W}^2 + \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^2 =& \boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\right\} + \boldsymbol{S}^2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\right\} - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\} \\
\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2 =& \boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\right\} + \boldsymbol{S}^2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}^2\right\} - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\} \\
\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}^2 =& \boldsymbol{M}\left\{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\right\} + \boldsymbol{M}^2\left\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\right\} - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{M}^3\right\}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} =& -\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 - \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{W}^2\left\{\boldsymbol{S}^2\right\} \\
& + \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S} + \left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}^2 \\
& + \left[\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\} - \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\right]\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} =& -\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 + \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}^2 \\
& + \left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{W}^2 \\
& + \left[\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\} - \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\right]\boldsymbol{I}
\end{aligned} \tag{B.16}$$

• Extensions d'ordre 4

Dans le cas pratique les extensions d'ordre 4 sont rarement utilisées. Nous donnons ici quelques relations juste pour se faire une idée de leur forme.

$$\begin{aligned}
2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 = &\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} \\
&- \frac{1}{3}\left[\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\left(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\right)+2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\right. \\
&- \left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\right)+\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} \\
&- \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} \\
&- \left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}-\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2 \\
&- \left(\frac{3}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}+\frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\boldsymbol{W}\right)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
2\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} = &\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} \\
&- \frac{1}{3}\left[2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\left(\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\right)+2\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\right. \\
&+ \left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\left(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\right)-\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} \\
&- \left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2-\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{S} \\
&- \left(2\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}^2\right\}+\frac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\left\{\boldsymbol{S}^3\right\}\boldsymbol{W}\right)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

B.1.2 Application du théorème de Cayley Hamilton aux tenseurs $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{M}$

Dans le chapitre (4), la justification du degré de l'équation en β_1 s'est effectuée en utilisant la solution exacte de l'anisotropie $\boldsymbol{b}$ en écoulement bidimensionnel proposée par Jongen et Gatski [52]. Cette solution permettait d'avoir l'anisotropie en fonction des tenseurs $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{M}$. Pour cela, nous proposons ici quelques expressions utiles de l'application du théorème de Caley Hamilton à la base ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{S}$), et ($\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{W}$). Toutefois, les tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{b}$ étant symétriques, on peut passer d'une relation à l'autre en utilisant l'un de tenseur à la place de l'autre.

Par ailleurs, conformément à la relation donnant les extensions d'ordre 1 précédemment établie, on peut écrire :

$$\boldsymbol{b}^3 = II\boldsymbol{b} + III\boldsymbol{I} \tag{B.17}$$

dans laquelle II et III désignent le second et le troisième invariant définis respectivement par :

$$\begin{aligned}
II &= \tfrac{1}{2}\left\{\boldsymbol{b}^2\right\} \\
III &= \tfrac{1}{3}\left\{\boldsymbol{b}^3\right\} = \det\boldsymbol{b}
\end{aligned} \tag{B.18}$$

De plus en appliquant le théorème aux tenseurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{S}$ d'une part et aux tenseurs $\boldsymbol{b}$, et $\boldsymbol{W}$ d'autre part on parvient aux relations :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{bSb} &= -\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S} - \boldsymbol{Sb}^2 - II\boldsymbol{S} + \{\boldsymbol{bS}\}\boldsymbol{b} + \left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{bSb}^2 + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{Sb} &= \{\boldsymbol{bS}\}\boldsymbol{b}^2 + \left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{b} - III\boldsymbol{S} \\
\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{Sb}^2 &= -II^2\boldsymbol{S} + \left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{b}^2 - III(\boldsymbol{bS} + \boldsymbol{Sb}) - II(\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{Sb}^2) \\
&\quad + \left[II\left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\right\} - III\{\boldsymbol{bS}\}\right]\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{bWb} &= -\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{Wb}^2 - II\boldsymbol{W} \\
\boldsymbol{bWb}^2 + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{Wb} &= -III\boldsymbol{W} \\
\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{Wb}^2 &= -II^2\boldsymbol{W} - III(\boldsymbol{bW} + \boldsymbol{Wb}) - II(\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W} + \boldsymbol{Wb}^2) \\
&\quad + \left[II\left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}\right\} - III\{\boldsymbol{bS}\}\right]\boldsymbol{I}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

La plupart des modèles classiques reposent sur une base tensorielle *minimale* ou *subminimale*. Ces modèles sont conçus en faisant une troncature généralement à un ordre maximum inférieur ou égal à trois sur le degré total des extensions. La section suivante explique le principe de construction des bases d'intégrité pour une représentation *polynomiale* de tous tenseurs d'ordre deux mais avant, passons à l'écriture du théorème de Cayley Hamilton dans le cas bidimensionnel.

B.2 Cas des matrices 2x2

Après avoir traité le cas d'une matrice 3x3, l'écriture du théorème de Cayley Hamilton dans le cas des matrices 2x2 fera l'objet de ce paragraphe. Pour une matrice quelconque $\mathbf{A}$, 2x2 l'équation caractéristique se résume à :

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\{\mathbf{A}\} + \frac{1}{2}\left[\{\mathbf{A}\}^2 - \left\{\mathbf{A}^2\right\}\right]\boldsymbol{I}^{(2)} = 0 \tag{B.20}$$

où $\boldsymbol{I}^{(2)}$ est la matrice Identité d'ordre 2 définit par :

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

De plus en prenant dans la relation précédente : $\mathbf{A} = \mathbf{B}+\mathbf{C}$ On aboutit :

$$\mathbf{BC} + \mathbf{CB} = \mathbf{B}\{\mathbf{C}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{B}\} - (\{\mathbf{B}\}\{\mathbf{C}\} - \{\mathbf{BC}\})\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{B.22}$$

D'autre part en multipliant la relation (B.22) par $\mathbf{C}$ on est conduit à :

$$\mathbf{BCB} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \boldsymbol{I}^{(2)}\{\mathbf{C}\}\right)\left(\{\mathbf{B}\}^2 - \left\{\mathbf{B}^2\right\} + \mathbf{B}\{\mathbf{CB}\}\right) \tag{B.23}$$

et si on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{A}^2$ dans la même relation (B.22), on trouve :

$$\mathbf{BA}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{B}\left\{\mathbf{A}^2\right\} + \mathbf{A}^2\left\{\mathbf{B}\right\} - \left(\left\{\mathbf{B}\right\}\left\{\mathbf{A}^2\right\} - \left\{\mathbf{BA}^2\right\}\right)\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{B.24}$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient :

$$\mathbf{BA}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{BAB} = \mathbf{B}\left\{\mathbf{BA}\right\} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\left\{\mathbf{B}^2\right\} + \left\{\mathbf{B}^2\mathbf{A}\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{B.25}$$

Enfin pour trois matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ 2x2 quelconques, la généralisation du théorème est :

$$\begin{aligned}&\mathbf{ABC} + \mathbf{BCA} + \mathbf{BAC}\\ &+\mathbf{ACB} + \mathbf{CBA} + \mathbf{ABC} + \mathbf{ABC} = \quad \mathbf{A}\left\{\mathbf{BC}\right\} + \mathbf{B}\left\{\mathbf{CA}\right\} + \mathbf{C}\left\{\mathbf{AB}\right\}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\left\{\mathbf{ABC}\right\} + \left\{\mathbf{CBA}\right\}\right)\end{aligned} \tag{B.26}$$

Les relations obtenues ci dessus peuvent être appliquées à n'importe quelles matrices d'ordre 2.
Quelques relations de l'application du dit théorème aux tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ sont par conséquent :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} & \boldsymbol{W}^2 &= \tfrac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)}\\ \left\{\boldsymbol{W}^3\right\} &= 0 & \left\{\boldsymbol{S}^3\right\} &= 0\\ \boldsymbol{SW} + \boldsymbol{WS} &= 0 & \boldsymbol{SWS} &= -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{W}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\\ \boldsymbol{WSW} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\} & \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} + \boldsymbol{WS}^2 &= \boldsymbol{W}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\\ \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{SW}^2 &= \boldsymbol{S}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\} + \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\right\}\boldsymbol{I}^{(2)}\end{aligned}$$

B.3 Constitution de la Base d'intégrité Invariante

La construction d'une base tensorielle passe de prime abord par la détermination des différentes extensions possibles des tenseurs de *références*. De ces différentes expressions, Spencer [117] a montré qu'on peut construire une base invariante, obtenue à partir du nombre minimale d'extensions possibles, (donc irréductibles) que l'on peut former avec les tenseurs de *référence* qui, généralement sont symétriques ou antisymétriques. Les éléments de cette base invariante seront une série d'invariants polynomiaux. Cette base est qualifiée de base d'intégrité lorsque le nombre d'extension est minimal. Le nombre d'éléments de la base invariante dépend du nombre de tenseurs de *références*. De cette base invariante, il faut procéder à la construction de la base fonctionnelle formée de tenseurs linéairement indépendants et permettant une *représentation polynomiale exacte* de tout tenseur produit. Ainsi, toute troncature lors de la représentation d'un tenseur par un nombre inférieur à celle la base d'intégrité fonctionnelle ne garantit par la *représentation polynomiale* de celui ci et par conséquent pourrait conduire à des points de singularités.

B.3.1 Extension d'un produit de tenseur

Si on considère un tenseur Y_{ij} auquel on associe une matrice polynomiale $\mathbf{Y}$, *produit* de p extensions de trois matrices polynomiales $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ d'ordre trois, on peut

écrire $\mathbf{Y}$ sous la forme d'un nombre fini de succession de multiplication des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, c'est à dire :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{\alpha_1}\mathbf{B}^{\beta_1}\mathbf{C}^{\gamma_1}\mathbf{A}^{\alpha_1}\mathbf{B}^{\beta_1}\mathbf{C}^{\gamma_1}\cdots\mathbf{A}^{\alpha_p}\mathbf{B}^{\beta_p}\mathbf{C}^{\gamma_p} \tag{B.27}$$

avec : $\sum_i^p \alpha_i$, $\sum_i^p \beta_i$, $\sum_i^p \gamma_i$ désignant respectivement, les degrés de $\mathbf{Y}$ en $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ [117].
Si les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont associées à des tenseurs de références, symétriques ou antisymétriques, la base d'intégrité invariante est formée d'éléments de la $\{Y$ obtenus en prenant le nombre irréductible d'extensions possibles.

B.3.2 Base d'intégrité Invariante

Nous allons ici illustrer nos propos par des exemples de cas concrets pour une représentation d'un tenseur en écoulement tridimensionnel. Quelques cas seront étudiés pour la représentation de l'anisotropie qui dépend seulement du gradient de vitesse moyenne et du taux de rotation.

B.3.2.1 Application aux tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$

Nous avons ici deux tenseurs dont l'un est symétrique et le second antisymétrique. l'anisotropie$\boldsymbol{b}$ est représenté ici par $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W})$. Le nombre d'invariants polynomiaux (minimale et irréductible) des éléments de la base d'intégrité est au nombre de six :

$$\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{S}^3\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\right\} \tag{B.28}$$

Une application aux tenseurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{S}$ permet de retenir uniquement les huit invariants suivants du fait de la nature symétrique des deux tenseurs.

$$\left\{\boldsymbol{b}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{S}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{b}^3\right\}, \left\{\boldsymbol{S}^3\right\}, \left\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{S}\right\}, \left\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{S}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{b}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}^2\right\} \tag{B.29}$$

En considérant les tenseurs $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{W}$:

$$\left\{\boldsymbol{b}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{b}^3\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}^2\right\}, \left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}\boldsymbol{b}^2\right\} \tag{B.30}$$

B.3.2.2 Application aux tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{M}$

Ici, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{M})$. La complexité introduite par la prise d'un troisième tenseur $\boldsymbol{M}$ fait passer de 6 le nombre d'invariants irréductibles à prendre en compte en écoulement tridimensionnel à 29 si on considère $\{\boldsymbol{S}\} = \{\boldsymbol{M}\} = 0$, sinon, ce nombre passera 7 à 31.
Les invariants scalaires retenus sont donc pour les trois tenseurs de références :

$$\begin{gathered}\{\boldsymbol{S}^2\},\{\boldsymbol{M}^2\},\{\boldsymbol{S}^3\},\{\boldsymbol{M}^3\}\\ \{\boldsymbol{SM}\},\{\boldsymbol{SM}^2\},\{\boldsymbol{MS}^2\},\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\}\\ \{\boldsymbol{W}^2\}\\ \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWS}^2\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MWM}^2\}\\ \{\boldsymbol{WSM}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\},\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{MS}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{SM}\},\\ \{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\},\{\boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\}\\ \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}^2\},\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MWS}^2\}\end{gathered} \tag{B.31}$$

Une fois la base d'intégrité invariante obtenue, nous allons donner comment se construit la base fonctionnelle.

B.3.3 Base d'intégrité fonctionnelle

Le tenseur produit à représenter doit être une *fonction polynomiale de ses arguments.* C'est le cas du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$ qui dépend des tenseurs de *références* : $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{M}$. Soit G_{ij} le tenseur polynomial à représenter. Deux cas sont possibles : soit il symétrique, soit il est anti symétrique [1]. La construction de la base passe par celle d'un tenseur quelconque polynomial, du second ordre, symétrique ϕ_{ij}, (si G_{ij} est symétrique) ou d'un tenseur polynomial anti symétrique de second ordre ψ_{ij} (si G_{ij} est anti symétrique) tels que

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \{\mathbf{G}\phi\} = G_{ij}\phi_{ji} = \phi_{ij}G_{ji}\\ \mathcal{K} &= \{\mathbf{G}\psi\} = G_{ij}\psi_{ji} = \psi_{ij}G_{ji}\end{aligned} \tag{B.32}$$

- **cas où G_{ij} est symétrique**
  on peut écrire :

$$G_{ij} = Gji = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}} \tag{B.33}$$

  Soit

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}}\right) \tag{B.34}$$

  L'invariant polynomial $\mathcal{J}$ est une fonction linéaire en ϕ_{ij} et peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{J} = \sum_n \mathcal{I}_n \mathcal{J}_n \tag{B.35}$$

[1] Si on n'a pas le deux cas, on pourra utiliser le fait que toute matrice peut être décomposée en la somme de deux matrices dont l'une est symétrique et l'autre anti symétrique

où $\mathcal{I}_n$ sont des invariants scalaires combinaisons linéaires des éléments de la base d'intégrité invariante conçue à partir des tenseurs de références dont dépend G_{ij}, tandis que $\mathcal{J}_n$ constituent les éléments de la base d'intégrité formée par les tenseurs de références auquel on ajoute ϕ. La construction de cette base d'intégrité invariante a fait déjà l'objet du précédent paragraphe. Si on injecte l'équation (B.35) dans (B.33), il vient :

$$G_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n \left(\frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ji}} \right) \tag{B.36}$$

Les éléments de la base fonctionnelle sont obtenus après avoir définit tous les éléments de la base d'intégrité invariante $\mathcal{J}_n$ composée des tenseurs de référence initialement prise en compte auxquels on ajoute le tenseur symétrique ϕ et dont on ne retiendra *uniquement* que les termes de degré 1 en ϕ pour lesquels la relation (B.34) sera appliquée pour chacun.
Enfin la relation (B.36) donne une décomposition de G_{ij} dans la base fonctionnelle.

- **cas où G_{ij} est antisymétrique**
  Écrivons l'égalité $G_{ij} = Q_{ij}$. La même procédure que le cas symétrique est appliquée et les relations sont les suivantes :

$$Q_{ij} = -Qji = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ij}} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ji}} \tag{B.37}$$

  Le tenseur anti symétrique Q_{ij} peut se mettre sous la forme :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_{ji}} \right) \tag{B.38}$$

$$\mathcal{K} = \sum_n \mathcal{I}_n \mathcal{K}_n \tag{B.39}$$

  L'invariant $\mathcal{K}$ joue le même rôle que $\mathcal{J}$
  Le tenseur Q_{ij} peut s'écrire dans ce cas :

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n \left(\frac{\partial \mathcal{K}_n}{\partial \psi_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{K}_n}{\partial \psi_{ji}} \right) \tag{B.40}$$

B.3.4 Application à la détermination de la base fonctionnelle du tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b}$

Dans le présent cas, le tenseur d'anisotropie $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{M})$ Ce tenseur est symétrique et par conséquent les relations précédentes permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{\boldsymbol{b}\phi\} = b_{ij}\phi_{ji} = \phi_{ij}b_{ji} \\ b_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi_{ji}} \right) \end{aligned} \tag{B.41}$$

De plus l'équation (B.36) donne dans le présent cas :

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{I}_n = \left(\frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \phi_{ji}}\right) \tag{B.42}$$

Pour construire la base fonctionnelle, nous devons chercher à déterminer les invariants $\mathcal{J}_n$ formés à partir de la base d'intégrité pour les tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{M}$ et du tenseur symétrique ϕ. En utilisant la procédure détaillée dans le précédent paragraphe, on recense 105 invariants au total dont 42 sont de degré 1 en ϕ. (Spencer [117], page 288)qui sont :

$$\begin{gathered}
\{\phi\} \\
\{\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{M}^2\phi\} \\
\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{M}^2\phi\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\phi\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\phi\} \\
\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\phi\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\phi\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\phi\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\} \\
\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\phi\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\phi\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{W}\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\phi\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\} \\
\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\phi\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\phi\boldsymbol{S}\} \\
\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\phi\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}\phi\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\phi\boldsymbol{S}\} \\
\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\phi\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2\phi\} \\
\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}\phi\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\phi\}\, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\phi\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\phi\}.
\end{gathered} \tag{B.43}$$

L'application pour chaque invariant ci dessus $\mathcal{J}_n$, de la relation (B.41), aboutit à la liste des éléments de la base fonctionnelle qui dans le présent cas est composée de 42 tenseurs linéairement indépendants, soit 41 tenseurs si la condition de trace nulle

est utilisée pour le tenseur $\boldsymbol{b}$.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} && \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}\\
&\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{S}^2 - \tfrac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MS} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SM}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MW} && \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{M}\\
&\boldsymbol{T}_7 = \boldsymbol{MWS} - \boldsymbol{SWM} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{MWS}\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_8 = \boldsymbol{M}^2 - \tfrac{1}{3}\left\{\boldsymbol{M}^2\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_9 = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MS}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{10} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{11} = \boldsymbol{SWS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{WS} && \boldsymbol{T}_{12} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WS}^2\\
&\boldsymbol{T}_{13} = \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{14} = \boldsymbol{SW}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SW}^2\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{15} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{W}^2 - \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{16} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WSW}^2\\
&\boldsymbol{T}_{17} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MWM}^2 && \boldsymbol{T}_{18} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WM}^2\\
&\boldsymbol{T}_{19} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{20} = \boldsymbol{MW}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{MW}^2\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{21} = \boldsymbol{W}^2 - \tfrac{1}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{22} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{MW} - \boldsymbol{WMW}^2\\
&\boldsymbol{T}_{23} = \boldsymbol{SM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S} && \boldsymbol{T}_{24} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} - \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{W}^2\\
&\boldsymbol{T}_{25} = \boldsymbol{WMS} - \boldsymbol{SMW} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{WMS}\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{26} = \boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{WSM}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{27} = \boldsymbol{SWM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WS} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SWM}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{28} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{W} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{29} = \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S} - \boldsymbol{SM}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{30} = \boldsymbol{MWS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{WM}\\
&\boldsymbol{T}_{31} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WSM}^2 && \boldsymbol{T}_{32} = \boldsymbol{WMS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{MW} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{WMS}^2\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{33} = \boldsymbol{SMWM}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{WMS} && \boldsymbol{T}_{34} = \boldsymbol{SWS}^2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{WS} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SWS}^2\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{35} = \boldsymbol{WM}^2\boldsymbol{S}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W} && \boldsymbol{T}_{36} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}\\
&\boldsymbol{T}_{37} = \boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MW}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{38} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM} + \boldsymbol{MSW}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SM}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{39} = \boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{SW}^2\boldsymbol{M}^2\right\}\boldsymbol{I} && \boldsymbol{T}_{40} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{MS}^2\boldsymbol{W}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{M}\right\}\boldsymbol{I}\\
&\boldsymbol{T}_{41} = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM} - \boldsymbol{MWSW}^2 - \tfrac{2}{3}\left\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SWM}\right\}\boldsymbol{I}
\end{aligned}
\tag{B.44}
$$

Pour obtenir une décomposition *polynomiale* de la forme (B.42), du tenseur d'anisotropie, l'utilisation de tous les tenseurs de base (donc de la base complète) est requise. En cas de réduction de celle-ci (c'est toujours le cas d'ailleurs), on est conduit à des singularités du fait qu'on n'est plus dans les conditions d'une représentation polynomiale. C'est la raison pour laquelle de nombreux modèles présentent des singularités. Néanmoins, utiliser une base de 41 tenseurs en 3D pour représenter le tenseur d'anisotropie apparaît fastidieux. C'est ce qui motive le développement des modèles en utilisant une base incomplète.

B.3.4.1 Cas de l'écoulement 2D

Ici de nombreuses simplifications apparaissent au niveau des éléments de la base fonctionnelle (Eq. **??**) et celles de la base d'intégrité invariante (Eq. B.31). Ces relations seront simplifiées par l'utilisation de la relation de Cayley Hamilton en tenant compte de la nature simplifiée des tenseurs de *références*. Pour ces cas les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ sont représentés par des matrices 2x2 et Mpar une matrice 3x3. Il faut donc utiliser à sa place le tenseur $\mathbf{N}$ tel que $\boldsymbol{M} = \mathbf{N} - \frac{1}{3}\left\{\mathbf{N}\right\}\boldsymbol{I}$ qui est représentée par une matrice 2x2.
Dans cette condition, l'application du théorème de Cayley Hamilton pour les matrice 2x2 appliquée par exemple à $\mathbf{N}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$, conduisent aux équations :

$$
\mathbf{N}^2 - \mathbf{N}\left\{\mathbf{N}\right\} + \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^{(2)}\left(\left\{\mathbf{N}\right\}^2 - \left\{\mathbf{N}^2\right\}\right) = 0 \tag{B.45}
$$

Comme le tenseur $\mathbf{N}$ est un projecteur, on a :

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \tag{B.46}$$

De plus :

$$\boldsymbol{S}^2 = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{B.47}$$

$$\boldsymbol{W}^2 = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}\boldsymbol{I}^{(2)} \tag{B.48}$$

Notons ici que $\boldsymbol{I}^{(2)}$ est la matrice Identité d'ordre 2.
Par ailleurs les relations ci dessus seront appliquées à tous les éléments de l'équation (**??**). En guise d'illustration de la procédure de simplification, prenons par exemple les tenseurs $\boldsymbol{T}_{22} = \boldsymbol{W}^2\mathbf{N}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\mathbf{N}\boldsymbol{W}^2$ et $\boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{S} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\}\boldsymbol{I}$. L'injection de la relation (B.48) dans $\boldsymbol{T}_{22}$ conduit simplement à :

$$\boldsymbol{T}_{22} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{W}^2\right\}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{W}) \tag{B.49}$$

soit une relation de proportionnalité entre $\boldsymbol{T}_{22}$ et $\boldsymbol{T}_5$. D'autre part, on peut écrire pour ce qui concerne $\boldsymbol{T}_4$:

$$\boldsymbol{S}\mathbf{N} + \mathbf{N}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\{\mathbf{N}\} + \mathbf{N}\{\boldsymbol{S}\} - \boldsymbol{I}^{(2)}(\{\boldsymbol{S}\}\{\mathbf{N}\} - \{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\}) \tag{B.50}$$

Ce qui donne après simplification :

$$\boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{S} + \{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\}\left(\boldsymbol{I}^{(2)} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\right) \tag{B.51}$$

Ainsi, $\boldsymbol{T}_4$ peut être représenté par les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\left(\boldsymbol{I}^{(2)} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\right)$.
Au finish, la base d'intégrité fonctionnelle dans le cas de l'écoulement 2D plan est alors composée des 6 tenseurs suivants :

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{S};\mathbf{N} - \frac{1}{3}\{\mathbf{N}\}\boldsymbol{I};\boldsymbol{I}^{(2)} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S};\boldsymbol{W}\mathbf{N} - \mathbf{N}\boldsymbol{W};\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\mathbf{N} - \mathbf{N}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\end{array} \tag{B.52}$$

laquelle peut être ré écrite en remarquant que $\boldsymbol{b}$ est symétrique et de trace nulle :

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{S};\boldsymbol{M};\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{S};\boldsymbol{W}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{W};\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}\boldsymbol{W} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\}\end{array} \tag{B.53}$$

Donc la représentation polynomiale de $\boldsymbol{b}$ exige une base fonctionnelle composée de six (06) tenseurs mais on peut utiliser une base minimale de trois (03) tenseurs correspondant à la dimension de $\boldsymbol{b}$. Pour un nombre de tenseurs de base inférieur à trois (03), nous obtenons une approximation .

B.3.4.2 Cas de l'écoulement 1D

Des simplifications par rapport au cas 2D plan sont obtenues dans cette configuration. On peur écrire :$\{\boldsymbol{S}^2\} = \{\boldsymbol{WS}\mathbf{N}\} = -\{\boldsymbol{W}^2\} =$, $\{\boldsymbol{S}\mathbf{N}\} = 0$. La normale est réduite au tenseur :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.54}$$

De plus, on a :

$$\boldsymbol{WM} - \boldsymbol{MW} = \boldsymbol{S} \tag{B.55}$$

$$\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} = 3\eta^2\boldsymbol{M} + 3\left(\boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{WSM}\}\right) \tag{B.56}$$

$$\left(\boldsymbol{WSM} - \boldsymbol{MSW} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{WSM}\}\right) = \frac{1}{3}\eta^2\boldsymbol{M} + \frac{2}{3}\left(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\left\{\boldsymbol{S}^2\right\}\boldsymbol{I}\right) \tag{B.57}$$

Ces relations montrent qu'en écoulement 1D, la base d'intégrité fonctionnelle se réduit aux tenseurs :

$$\boldsymbol{S};\ \boldsymbol{M}; \text{et } \boldsymbol{S}^2 - \tfrac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I}. \tag{B.58}$$

On peut conclure donc que pour éviter toutes singularités dans le cas d'un écoulement 1D, il faut choisir une base minimale composée exactement de trois tenseurs, ces tenseurs peuvent être soit les trois tenseurs ci dessus soit une combinaison linéaire de ceux ci. Remarquons que le tenseur d'anisotropie est de dimension 3, ce qui montre que les bases minimale et complète doivent avoir le même nombre de tenseurs.

B.3.5 Étude du cas particulier $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W})$

Ce cas particulier à fait l'objet de premières études réalisées par Pope [103], et repris par de nombreux auteurs [30, 32]. En appliquant la méthodologie précédente à une base de tenseurs $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W}$ et ϕ on aboutit en prenant $\boldsymbol{M} = 0$ dans la relation (B.43) à une base d'intégrité composée des **10** invariants suivants :

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\phi\}, \{\boldsymbol{WS}\phi\}, \{\boldsymbol{WS}^2\phi\} \\ \{\boldsymbol{WS}^2\phi\boldsymbol{S}\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW}\phi\}, \{\boldsymbol{W}^2\phi\boldsymbol{WS}^2\} \end{gathered} \tag{B.59}$$

Ce qui donne une représentation polynomiale exacte de l'anisotropie dans la base fonctionnelle composée des **10** tenseurs suivants :

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} & \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS} \\ \boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_4 = \boldsymbol{W}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{W}^2\}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{WS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} & \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{SW}^2 + \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S} - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{SW}^2\}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{T}_7 = \boldsymbol{WSW}^2 - \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{SW} & \boldsymbol{T}_8 = \boldsymbol{SWS}^2 - \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{WS} \\ \boldsymbol{T}_9 = \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2 - \frac{2}{3}\{\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W}^2\}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}_{10} = \boldsymbol{WS}^2\boldsymbol{W}^2 - \boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{W} \end{array} \tag{B.60}$$

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus par Pope [103], Gatski [32, 30] *et al.* et sont les plus utilisés dans la communauté.
En somme en 3D, lorsque $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{W})$, il faut une base de **10** tenseurs pour une représentation polynomiale de l'anisotropie, fonction de $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$. Une base incomplète de 5 tenseurs permet d'avoir une représentation exacte de l'anisotropie mais peut conduire à des singularités en certains points. La base invariante quand à elle est réduite à partir de (B.31) et nécessite les six invariants :

$$\{\boldsymbol{S}^2\}\,;\{\boldsymbol{W}^2\}\,;\{\boldsymbol{S}^3\}\,;\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\}\,;\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}^2\}\,;\{\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^2\} \tag{B.61}$$

Par ailleurs en 2D, les réductions obtenues à partir de l'équation (B.60) conduisent à une base fonctionnelle composée de 3 trois tenseurs linéairement indépendants pris parmi ceux définis en (B.60) et dont la classique est

$$\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{S}^2-\tfrac{1}{3}\{\boldsymbol{S}^2\}\,\boldsymbol{I} \tag{B.62}$$

Quand à la base invariante, elle est réduite aux deux (02) invariants : $\{\boldsymbol{S}^2\}$ et $\{\boldsymbol{W}^2\}$.
Enfin en écoulement 1D, il faut également une base fonctionnelle de trois tenseurs et la base invariante est réduite à $\{\boldsymbol{S}^2\}$.

B.3.6 Base fonctionnelle dans d'autres configurations

Dans la section précédente relative à la construction de la base d'intégrité Invariante, nous avions donné les éléments de celle-ci pour les cas des tenseurs de références ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{W}$) et ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{S}$). Dans les lignes qui vont suivre, nous donnons juste la liste des tenseurs de leur base respective

⋆ Cas des tenseurs ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{W}$)
La base d'intégrité est formée de 5 invariants (Voir (B.30)) si la condition $\{\boldsymbol{b}\}=0$ est prise en compte. La base fonctionnelle quant à elle est composée de 11 tenseurs ou de 10 tenseurs si la condition précédente est valide.

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{I}\\
\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}^2\\
\boldsymbol{W}^2\\
\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{b},\boldsymbol{W}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W}\\
\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}^2+\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b},\boldsymbol{W}\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}^2-\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}\\
\boldsymbol{b}\boldsymbol{W}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W}\boldsymbol{b},\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W}^2,\boldsymbol{W}\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W}^2-\boldsymbol{W}^2\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{W}
\end{gathered} \tag{B.63}$$

⋆ Cas des tenseurs ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{S}$)
Ici les deux tenseurs sont symétriques et la base d'intégrité (Voir (B.29)) comporte autant d'éléments que la base fonctionnelle, soit 8 éléments. Les tenseurs composant cette base fonctionnelle sont :

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}^2 \\ \boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}^2 \\ \boldsymbol{bS} + \boldsymbol{Sb}, \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S} + \boldsymbol{Sb}^2 \\ \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{bS}^2, \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{S}^2 + \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{b}^2 \end{array} \tag{B.64}$$

Annexe C

Les modèles algébriques explicites EB-EASM en 2D plan

C.1 Le modèle algébrique explicite linéaire EB-EASM#2

Le modèle linéaire EB-EASM#2 est un modèle algébrique explicite obtenu en utilisant les tenseurs de base : $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{S} \quad et \quad \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{M}$. Le tenseur d'anisotropie se met alors sous la forme : $\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{T}_1 + \beta_6 \boldsymbol{T}_6$. Dans les lignes qui vont suivre, nous donnons les expressions importantes conduisant à la détermination du comportement du modèle dans le cas des écoulements bidimensionnels.

C.1.1 Expressions des coefficients de l'équation en β_1

La mise en oeuvre du modèle a conduit à la résolution d'un système linéaire du type : $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Les matrices A et **B** sont définies par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\eta^2}{a_4} - 1/3\,a_5\,\eta^2 + 1/2\,a_5\,\mathcal{P}^2 & -\frac{\mathcal{P}}{a_4} - 1/3\,a_3\,\eta^2 + a_2\,\mathcal{Q} - 1/3\,a_5\,\mathcal{P} \\ -\frac{\mathcal{P}}{a_4} - 1/3\,a_3\,\eta^2 - a_2\,\mathcal{Q} - 1/3\,a_5\,\mathcal{P} & -\frac{2}{3a_4} - 2/3\,a_3\,\mathcal{P} - 2/9\,a_5 \end{bmatrix} \tag{C.1}$$

où : $\mathbf{X}_i = \beta_i, \quad i = 1, 2$ et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1\eta^2 + \frac{1}{2}a_5\mathcal{P} \\ a_1\mathcal{P} + \frac{1}{3}a_5 \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

Les solutions de ce système déterminées avec un logiciel de calcul formel sont :

$$\begin{aligned}\beta_1 = \frac{3a_4}{\gamma_0}\Big[&6a_1\eta^2 - 9a_1\mathcal{P}^2 + 3a_2\mathcal{Q}a_4a_5 - 3a_5\mathcal{P}^2a_4a_1 + 9a_2\mathcal{Q}a_4a_1\mathcal{P} \\ &- a_3\eta^2a_4a_5 + 3a_1\eta^2a_4a_3\mathcal{P} + 2a_1\eta^2a_4a_5 + 3a_5\mathcal{P}^2a_4a_3\Big]\end{aligned} \tag{C.3}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_6 = \frac{-3a_4}{2\gamma_0}\Big[&9a_5\mathcal{P}^3a_4a_1 + 6a5^2\mathcal{P}^2a_4 + 9a_5\mathcal{P}^2 + 3\mathcal{P}a_3\eta^2a_4a_5 \\ &+ 9\mathcal{P}a_2\mathcal{Q}a_4a_5 + 6a_3\eta^4a_4a_1 - 2{a_5}^2\eta^2a_4 + 18a2\,\mathcal{Q}a_4a_1\eta^2 - 6a_5\eta^2\Big]\end{aligned} \tag{C.4}$$

Ces solutions dépendent des coefficients a_i, $i = 1, 5$, et des invariants : $\eta, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ définis respectivement par :

$$\mathcal{R}^2 = -\frac{\{\boldsymbol{W}^2\}}{\{\boldsymbol{S}^2\}} \qquad \eta = \sqrt{\{\boldsymbol{S}^2\}} \tag{C.5}$$

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{SM}\} \qquad \mathcal{Q} = 2\{\boldsymbol{SWM}\} \tag{C.6}$$

Étant donné le rôle joué par le coefficient a_4, les solutions β_i sont mises sont mises sous la forme :

$$\beta_1 = a_4\frac{\gamma_2a_4 + \gamma_1}{\gamma_0} \qquad \beta_6 = a_4\frac{\gamma_3a_4 + \gamma_4}{2\gamma 0} \tag{C.7}$$

avec :

$$\gamma_O = \sum_{i=0}^{2}\lambda_i a_4^i$$

.

Dans ces conditions les coefficients γ_k et λ_n $k = 0, 4$; $n = 0, 2$ sont tels que :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -18\eta^2 + 27\mathcal{P}^2 \\ \lambda_1 &= -12a_5\eta^2 + 27a_5\mathcal{P}^2 \\ \lambda_2 &= -2{a_5}^2\eta^2 + 6{a_5}^2\mathcal{P}^2 + 9a_5\mathcal{P}^3a_3 + 3{a_3}^2\eta^4 - 27{a_2}^2\mathcal{Q}^2\end{aligned} \tag{C.8}$$

et :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 8a_1\eta^2 - 27a_1\mathcal{P}^2 \\ \gamma_2 &= 9a_2\mathcal{Q}a_5 - 9a_5\mathcal{P}^2a_1 + 27a_2\mathcal{Q}a_1\mathcal{P} - 3a_3\eta^2a_5 + 9a_1\eta^2a_3\mathcal{P} + 6a_1\eta^2a_5 + 9a_5\mathcal{P}^2a_3 \\ \gamma_3 &= -18{a_5}^2\mathcal{P}^2 - 9\mathcal{P}a_3\eta^2a_5 - 27a5\mathcal{P}^3a_1 - 18a_3\eta^4a_1 + 6{a_5}^2\eta^2 - 54a_2\mathcal{Q}a_1\eta^2 - 27\mathcal{P}a_2\mathcal{Q}a5 \\ \gamma_4 &= 18a_5\eta^2 - 27a_5\mathcal{P}^2\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.1.2 Traitement de la solution β_1

Dans l'objectif de déterminer la forme générale de la solution β_1 définie par les équations (C.3) et (C.7), l'équation suivante est résolue :

$$\beta_1 - a_4 \frac{\gamma_2 a_4 + \gamma_1}{\gamma_0} = 0 \tag{C.10}$$

Cette équation en β_1 est une équation **cubique** qui s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{3} \varphi_i {\beta^i}_1 \;=\; \varphi_0 + \varphi_1 \alpha_1 + \varphi_2 \alpha_1^2 + \varphi_3 \alpha_1^3 = 0 \tag{C.11}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi_0 = &-3\, a_3\, \eta^2 \tau^2 a_5 - 9\, a_5\, \mathcal{P}^2 \tau^2 a_1 + 6\, a_1\, \eta^2 \tau^2 a_5 + 9\, a_5\, \mathcal{P}^2 \tau^2 a_3 + 9\, a_2\, \mathcal{Q} \tau^2 a_5 \\ &+18\, \tau\, a_1\, \eta^2 \psi_1 - 27\, \tau\, a_1\, \mathcal{P}^2 \psi_1 + 9\, a_1\, \eta^2 \tau^2 a_3\, \mathcal{P} + 27\, a_2\, \mathcal{Q} \tau^2 a_1\, \mathcal{P} \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = &\, 27\, {a_2}^2 \mathcal{Q}^2 \tau^2 - 3\, {a_3}^2 \eta^4 \tau^2 + 54\, a_1\, \mathcal{P}^2 \eta^2 \psi_0\, \tau^2 + 2\, {a_5}^2 \eta^2 \tau^2 - 6\, {a_5}^2 \mathcal{P}^2 \tau^2 - 36\, a_1\, \eta^4 \psi_0\, \tau^2 \\ &+12\, \eta^2 \tau\, a_5\, \psi_1 + 18\, \eta^2 {\psi_1}^2 - 27\, \mathcal{P}^2 {\psi_1}^2 - 27\, a_5\, \mathcal{P}^2 \tau\, \psi_1 - 9\, {a_5}_P{}^3 \tau^2 a_3 \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\varphi_2 = -24\, \eta^4 \tau^2 a_5\, \psi_0 - 72\, \eta^4 \psi_0\, \tau\, \psi_1 + 108\, \mathcal{P}^2 \eta^2 \psi_0\, \tau\, \psi_1 + 54\, a_5\, \mathcal{P}^2 \tau^2 \eta^2 \psi_0 \tag{C.14}$$

$$\varphi_3 = 72\, \eta^6 {\psi_0}^2 \tau^2 - 108\, \mathcal{P}^2 \eta^4 {\psi_0}^2 \tau^2 \tag{C.15}$$

La connaissance des différentes expressions de φ_i conduisent à la détermination des trois solutions de l'équation en β_1 (C.11) : une négative, une positive et une complexe [98, 95]. Des trois solutions obtenues à chaque distance à la paroi (y^+), une seule sera retenue, la solution négative [98].

C.1.3 Tenseur d'anisotropie

L'objectif principal étant une meilleure reproduction de l'anisotropie en proche paroi, son écriture en fonction des tenseurs de base nous permet alors d'écrire :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}\ \beta_1 + \dfrac{1}{3}\,\beta_6 & \dfrac{\mathcal{Q}}{\sqrt{2}\,\eta\,\mathcal{R}}\,\beta_1 & 0 \\ \dfrac{\mathcal{Q}}{\sqrt{2}\,\eta\,\mathcal{R}}\,\beta_1 & \mathcal{P}\,\beta_1 + \dfrac{2}{3}\,\beta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3}\,\beta_6 \end{bmatrix} \tag{C.16}$$

C.1.4 Cas particulier des écoulements en canal 1D

Dans le cas des écoulements en canal, il suffit de prendre comme invariants :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial U}{\partial y} \\ \mathcal{R} &= 1 \\ \mathcal{P} &= 0 \\ \mathcal{Q} &= \eta^2. \end{aligned} \tag{C.17}$$

La matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ se réduisent à :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\eta^2}{a_4} - 1/3a5\eta^2 & -1/3a_3\eta^2 - a_2\eta^2 \\ -1/3a_3\eta^2 + a_2\eta^2 & -\dfrac{2}{3a_4} - 2/9a_5 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1\eta^2 \\ \dfrac{1}{3}a_5 \end{bmatrix} \tag{C.18}$$

C.1.5 Solutions β_i

Les solutions β_i sont telles que :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -3\,\frac{(3\,a_4\,a_2\,a_5 + a_4\,a_3\,a_5 - 2\,a_1\,a_5\,a_4 - 6\,a_1)\,a_4}{-18 - 12\,a_5\,a_4 - 2\,{a_5}^2{a_4}^2 + 3\,\eta^2{a_4}^2{a_3}^2 - 27\,\eta^2{a_4}^2{a_2}^2} \\ \beta_2 &= -3\,\frac{a_4\,(-{a_5}^2a_4 + 3\,\eta^2a_4\,a_3\,a_1 - 3\,a_5 - 9\,\eta^2a_4\,a_2\,a_1)}{-18 - 12\,a_5\,a_4 - 2\,{a_5}^2{a_4}^2 + 3\,\eta^2{a_4}^2{a_3}^2 - 27\,\eta^2{a_4}^2{a_2}^2} \end{aligned} \tag{C.19}$$

C.1.6 Tenseur d'anisotropie

La matrice du tenseur d'anisotropie est telle que :

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1/3\,\beta_6 & 1/2\,\beta_1\,\eta\,\sqrt{2} & 0 \\ 1/2\,\beta_1\,\eta\,\sqrt{2} & 2/3\,\beta_6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\,\beta_6 \end{bmatrix}$$

C.2 Le modèle algébrique explicite non linéaire EB-EASM#1

Ce modèle non linéaire utilise la base des tenseurs $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3)$ le tenseur d'anisotropie se met sous la forme :

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{S} + \beta_2(\boldsymbol{SW} - \boldsymbol{WS}) + \beta_3(\boldsymbol{S}^2 - \frac{1}{3}\{\boldsymbol{S}\}^2)\boldsymbol{I}) \tag{C.20}$$

C.2.1 Solutions β_i en écoulement 2D

$$\beta_1 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1), \tag{C.21}$$

$$\beta_2 = \frac{a_4}{2\gamma_0}(\gamma_4 a_4^2 + \gamma_2 a_5 + \gamma_6), \tag{C.22}$$

$$\beta_3 = \frac{a_4}{\gamma_0 \eta^2}(\gamma_7 a_4^2 + \gamma_8 a_4 + \gamma_9), \tag{C.23}$$

Les coefficients γ_i sont donnés en fonction des a_i et des invariants

$\gamma_1 = 54\, a_5\, \eta^2 \mathcal{P} \mathcal{R}^2 + 108\, \eta^4 \mathcal{R}^2 a_1$
$\gamma_2 = -18\, a_5\, \eta^4 a_3\, \mathcal{R}^2 - 27\, \mathcal{Q}^2 a_5\, a_1 - 18\, {a_5}^2 \eta^2 \mathcal{P} \mathcal{R}^2 - 9\, a_5\, \eta^4 \mathcal{R}^2 a_1 + 54\, \mathcal{Q} a_2\, \mathcal{R}^2 \eta^2 a_5$
$\gamma_3 = -9\, \mathcal{Q}^2 {a_5}^2 a_1 - 15\, {a_5}^2 \eta^4 \mathcal{R}^2 a_1 - 6\, {a_5}^2 \eta^4 a_3\, \mathcal{R}^2 - 12\, {a_5}^3 \eta^2 \mathcal{P} \mathcal{R}^2 + 18\, \mathcal{Q}^2 {a_5}^2 a_3 - 36\, \mathcal{Q} a_2\, \mathcal{R}^2 \eta^2 {a_5}^2$

$\gamma_4 = -6\, {a_5}^3 \mathcal{Q} - 18\, {a_5}^2 \mathcal{P} \mathcal{Q} a_3 + 9\, {a_5}^2 \mathcal{P} \mathcal{Q} a_1 + 18\, a_5\, \eta^4 a_2\, \mathcal{R}^2 a_3 + 27\, a_3\, \eta^2 \mathcal{Q} a_5\, a_1 + 36\, {a_5}^2 \mathcal{P} a_2\, \mathcal{R}^2 \eta^2 + 45\, a_5\, \eta^4 a_2\, \mathcal{R}^2 a_1 - 18\, {a_3}^2 \eta^2 \mathcal{Q} a_5$

$\gamma_5 = -9\, {a_5}^2 \mathcal{Q} + 27\, a_5\, \mathcal{P} \mathcal{Q} a_1 - 54\, a_2\, \eta^2 \mathcal{R}^2 a_5\, \mathcal{P} - 108\, \eta^4 a_2\, \mathcal{R}^2 a_1$

$\gamma_6 = 27\, a_5\, \mathcal{Q}$

$\gamma_7 = 54\, \mathcal{Q}^2 \eta^2 a_3\, a_1\, a_5 - 36\, {a_5}^3 \mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 \eta^2 + 162\, \mathcal{Q} a_5\, \eta^4 a_2\, \mathcal{R}^2 a_1 - 18\, \mathcal{Q}^2 {a_5}^3 + 6\, {a_5}^3 \eta^4 \mathcal{R}^2 + 108\, a_5\, \eta^6 {a_2}^2 \mathcal{R}^4 - 72\, \eta^6 a_5\, a_3\, \mathcal{R}^2 a_1 - 108\, \mathcal{Q} a_5\, \eta^4 a_2\, \mathcal{R}^2 a_3 - 36\, a_3\, \mathcal{R}^2 \mathcal{P} \eta^4 {a_5}^2 - 54\, \mathcal{P} {a_5}^2 \eta^4 \mathcal{R}^2 a_1$

$\gamma_8 = -108\, a_3\, \mathcal{R}^2 \mathcal{P} \eta^4 a_5 - 108\, {a_5}^2 \mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 \eta^2 - 216\, \eta^6 a_3\, \mathcal{R}^2 a_1 - 54\, {a_5}^2 \mathcal{Q}^2 - 162\, a_5\, \mathcal{P} \eta^4 \mathcal{R}^2 a_1 + 36\, {a_5}^2 \eta^4 \mathcal{R}^2$

$\gamma_9 = 4\, a_5\, \eta^4 \mathcal{R}^2$

Pour ce qui concerne γ_0 son expression dépend de a_4 et on le rassemble sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{3} \lambda_i a_4^i = 0 \tag{C.24}$$

avec

$$\begin{array}{l}\lambda 0 = -108\,\eta^4\mathcal{R}^2 \\ \lambda_1 = 54\,a_5\,\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\eta^2 + 27\,a_5\,\mathcal{Q}^2 - 27\,a_5\,\eta^4\mathcal{R}^2 \\ \lambda_2 = -216\,\eta^6 {a_2}^2\mathcal{R}^4 + 72\,\eta^6 {a_3}^2\mathcal{R}^2 + 18\,{a_5}^2\mathcal{Q}^2 + 36\,{a_5}^2\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\eta^2 + 108\,a_3\,\mathcal{R}^2\mathcal{P}\eta^4 a_5 + 18\,{a_5}^2\eta^4\mathcal{R}^2 \\ \lambda_3 = 24\,a_5\,\eta^6 {a_3}^2\mathcal{R}^2 + 6\,{a_5}^3\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\eta^2 + 5\,{a_5}^3\eta^4\mathcal{R}^2 + 90\,a_5\,\eta^6 {a_2}^2\mathcal{R}^4 + 36\,a_3\,R^2\mathcal{P}\eta^4 {a_5}^2 \\ -18\,\mathcal{Q}^2 a_5\,{a_3}^2\eta^2 + 3\,\mathcal{Q}^2 {a_5}^3\end{array} \tag{C.25}$$

C.2.2 Equation en β_1

C'est une équation *quartique* dont les coefficients φ_i sont :

$$\sum_{i=0}^{4} \varphi_i \beta_1^i = 0 \tag{C.26}$$

$\varphi_0 = 12\,a_1\,\tau^3 {a_5}^2 - 54\,\tau\,a_1\,{\psi_1}^2 - 6\,a_3\,\tau^3 {a_5}^2 - 18\,\tau^3 {a_5}^2 a_2 + 18\,a_5\,a_1\,\tau^2\psi_1 + 9\,a_3\,a_5\,\tau^2\psi_1 + 27\,a_5\,\tau^2 a_2\,\psi_1$
$\varphi 1 = 216\,a_1\,\eta^2\psi_0\,\tau^2\psi_1 - 108\,{a_2}^2\eta^2\tau^2\psi_1 + 3\,{a_3}^2\tau^3\eta^2 a_5 + 18\,{a_5}^2\tau^2\psi_1 + 36\,{a_3}^2\tau^2\eta^2\psi_1 + 45\,a_5\,\tau^3 {a_2}^2\eta^2 - 18\,a_3\,a_5\,\tau^3\eta^2\psi_0 - 54\,a_5\,\tau^3 a_2\,\eta^2\psi_0 - 36\,a_5\,a_1\,\tau^3\eta^2\psi_0 + 4\,\tau^3 {a_5}^3 - 54\,{\psi_1}^3$

$\varphi 2 = -36\,{a_5}^2\tau^3\eta^2\psi_0 - 216\,a_1\,\eta^4 {\psi_0}^2\tau^3 + 216\,{a_2}^2\eta^4\tau^3\psi_0 - 72\,{a_3}^2\tau^3\eta^4\psi_0 + 324\,\eta^2\psi_0\,\tau\,{\psi_1}^2$

$\varphi 3 = -648\,\eta^4 {\psi_0}^2\tau^2\psi_1$

$\varphi 4 = 432\,\eta^6 {\psi_0}^3\tau^3$

La résolution de cette équation permet la détermination des coefficients de projection β_i ainsi que l'anisotropie en proche paroi.

C.2.3 Tenseur d'anisotropie

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}\;\beta_1 - \beta_2\,\mathcal{Q} + \dfrac{1}{6}\,\eta^2\,\beta_3 & \dfrac{\mathcal{Q}}{\sqrt{2}\,\eta\,\mathcal{R}}\,\beta_1 - 2\mathcal{P}\,\mathcal{R}\,\eta\,\beta_2 & 0 \\ \dfrac{\mathcal{Q}}{\sqrt{2}\,\eta\,\mathcal{R}}\,\beta_1 - 2\mathcal{P}\,\mathcal{R}\,\eta\,\beta_2 & \mathcal{P}\,\beta_1 + \mathcal{Q}\,\beta_2 + \dfrac{1}{6}\,\eta^2\,\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3}\,\eta^2\,\beta_3 \end{bmatrix} \tag{C.27}$$

C.3 Justification du degré de l'équation en β_1 : les coefficients

Lorsqu'on prend en considération la pondération elliptique, le coefficient $a_5 \neq 0$ et les coefficients de l'équation sont :

$$
\begin{aligned}
&\mu_0 = 108\\
&\mu_1 = 54\,a_5\,\eta^2 + 27\,a_5\\
&\mu_2 = -18\,{a_5}^2\eta^2 - 45\,{a_5}^2 - 216\,{a_2}^2\eta^2 - 72\,{a_3}^2\eta^2\\
&\mu_3 = -36\,{a_3}^2\eta^4 a_5 - 14\,{a_5}^3 + 90\,{a_2}^2\eta^2 a_5 - 24\,{a_3}^2\eta^2 a_5 + 36\,a_3\,a_2\,\eta^4 a_5 - 12\,{a_5}^3\eta^2 + 126\,a_3\,\eta^2 a_5\,a_2\\
&\chi_1 = -108\,a_1\,\eta^2\\
&\chi_2 = -3\,\left(-6\,a_3\,a_5 + 18\,a_1\,a_5\,\eta^2 - 3\,a_1\,a_5 + 36\,a_2\,a_5\,\eta^2\right)\eta^2\\
&\chi_3 = -3\,\left(-14\,a_1\,{a_5}^2 - 12\,{a_5}^2 a_2\,\eta^2 - 12\,a_1\,{a_5}^2\eta^2 - 12\,a_3\,{a_5}^2\eta^2 - 2\,a_3\,{a_5}^2 + 6\,a_2\,{a_5}^2\right)\eta^2
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

les coefficients de l'équation en β_1 deviennent :

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0 = \eta^2\left(36\,{a_5}^2 a_2\,\eta^2 - 108\,a_1\,{\psi_1}^2 + 36\,a_3\,{a_5}^2\eta^2 + 42\,a_1\,{a_5}^2 - 54\,a_5\,a_1\,\eta^2\psi_1\right.\\
&\left.+9\,a_5\,a_1\,\psi_1 - 108\,a_5\,a_2\,\eta^2\psi_1 + 18\,a_5\,a_3\,\psi_1 - 18\,a_2\,{a_5}^2 + 6\,a_3\,{a_5}^2 + 36\,a_1\,{a_5}^2\eta^2\right)\\
&\varphi_1 = \eta^2\left(18\,a_5\,a_3\,\psi_0 + 9\,a_5\,a_1\,\psi_0 - 216\,a_1\,\psi_0\,\psi_1 + 12\,{a_5}^3\eta^2 + 45\,{a_5}^2\psi_1 + 72\,{a_3}^2\eta^2\psi_1 + 24\,{a_3}^2\eta^2 a_5\right.\\
&+36\,{a_3}^2\eta^4 a_5 - 90\,{a_2}^2\eta^2 a_5 - 54\,a_5\,a_1\,\eta^2\psi_0 - 108\,a_5\,a_2\,\eta^2\psi_0 + 14\,{a_5}^3 - 108\,{\psi_1}^3 + 18\,{a_5}^2\eta^2\psi_1 - 27\,a_5\,{\psi_1}^2\\
&\left.-54\,a_5\,\eta^2{\psi_1}^2 + 216\,{a_2}^2\eta^2\psi_1 - 36\,a_3\,a_2\,\eta^4 a_5 - 126\,a_3\,\eta^2 a_5\,a_2\right)\\
&\varphi_2 = \eta^2\left(72\,{a_3}^2\eta^2\psi_0 + 216\,{a_2}^2\eta^2\psi_0 + 18\,{a_5}^2\eta^2\psi_0 + 45\,{a_5}^2\psi_0 - 108\,a_5\,\eta^2\psi_0\,\psi_1 - 324\,\psi_0\,{\psi_1}^2\right.\\
&\left.-108\,a_1\,{\psi_0}^2 - 54\,a_5\,\psi_0\,\psi_1\right)\\
&\varphi_3 = \eta^2\left(-324\,{\psi_0}^2\psi_1 - 27\,a_5\,{\psi_0}^2 - 54\,a_5\,\eta^2{\psi_0}^2\right)\\
&\varphi_4 = -108\,\eta^2{\psi_0}^3
\end{aligned}
\tag{C.29}
$$

Annexe D

Écoulement Couette - Poiseuille : comparaison des résultats pour α^2 et α^3

Le modèle EB-RSM dans sa version originale (2002) [87] est proposée avec le coefficient de pondération α^2. Dans le cadre de la validation de ce modèle en vue de son introduction dans le modèle Algébrique, un *test à priori* est réalisé au chapitre 3, avec α^2 et α^3. Les résultats obtenu dans le cadre de la simulation numérique du modèle EB-EASM sont présentés ici pour un cas d'écoulement de type Couette-Poiseuille à différents nombres de Reynolds. Les figures à travers les figures D.1 à D.6 en sont les illustrations.

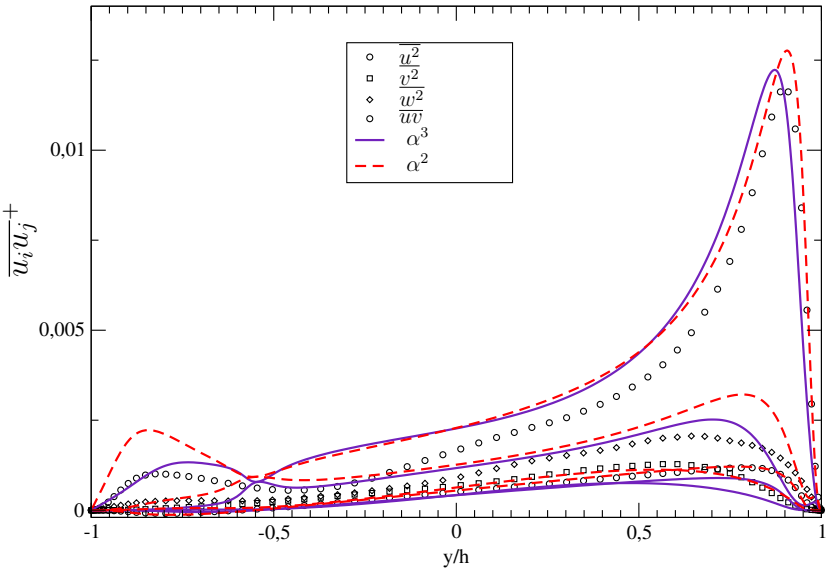


FIG. D.1 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Poiseuille $Re_\tau = 113$

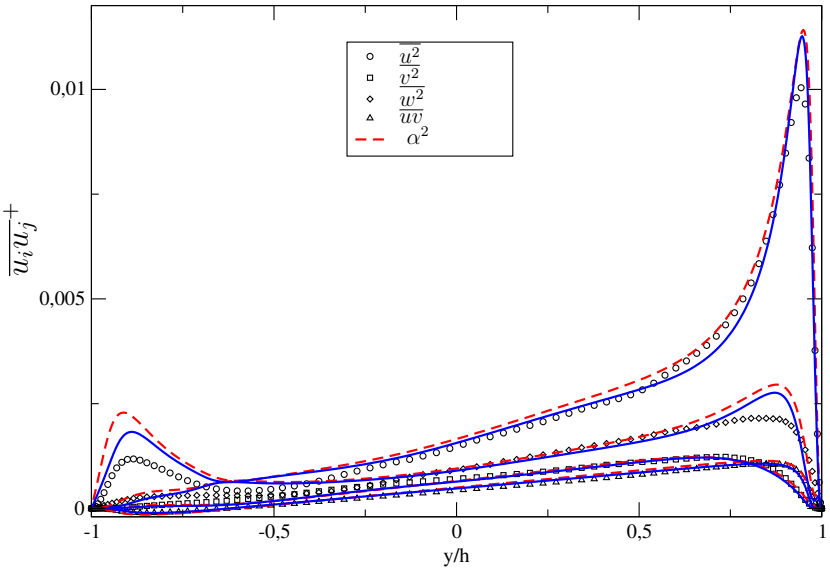


FIG. D.2 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Poiseuille $Re_\tau = 204$

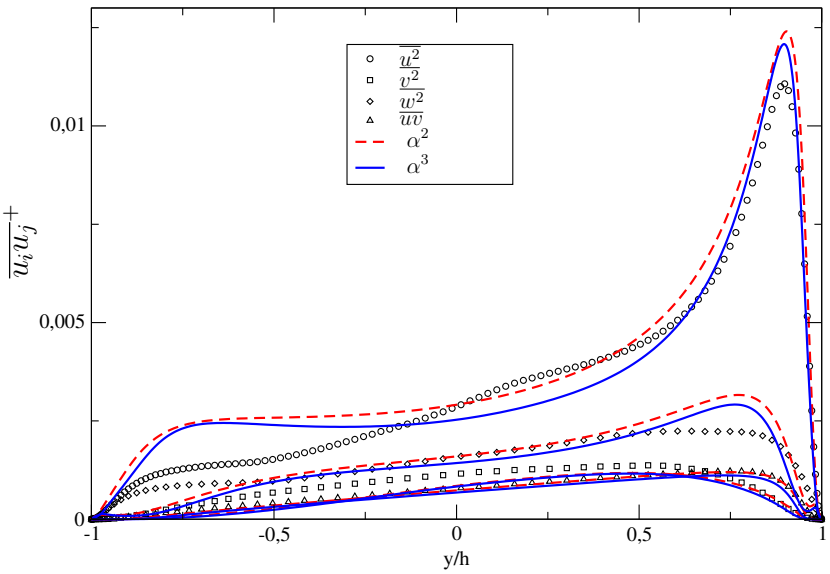


FIG. D.3 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement Intermédiaire $Re_\tau = 100$

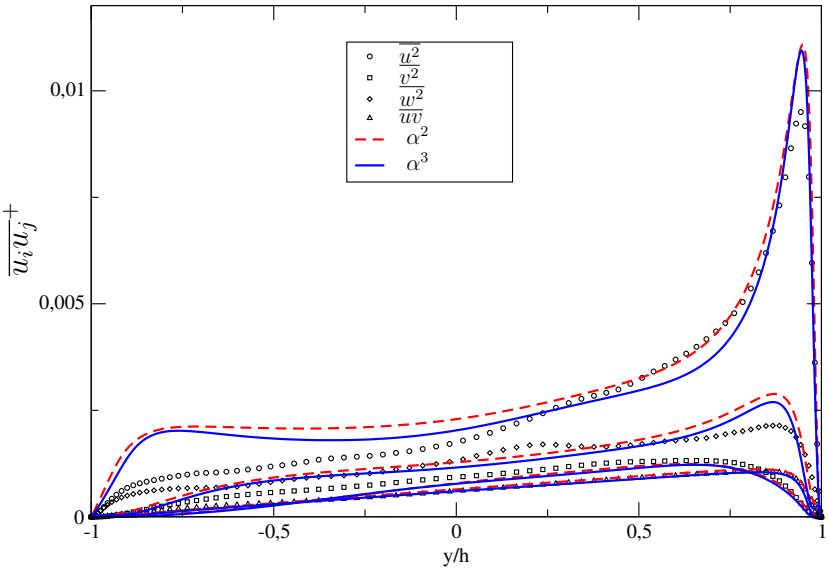


FIG. D.4 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement Intermédiaire $Re_\tau = 182$

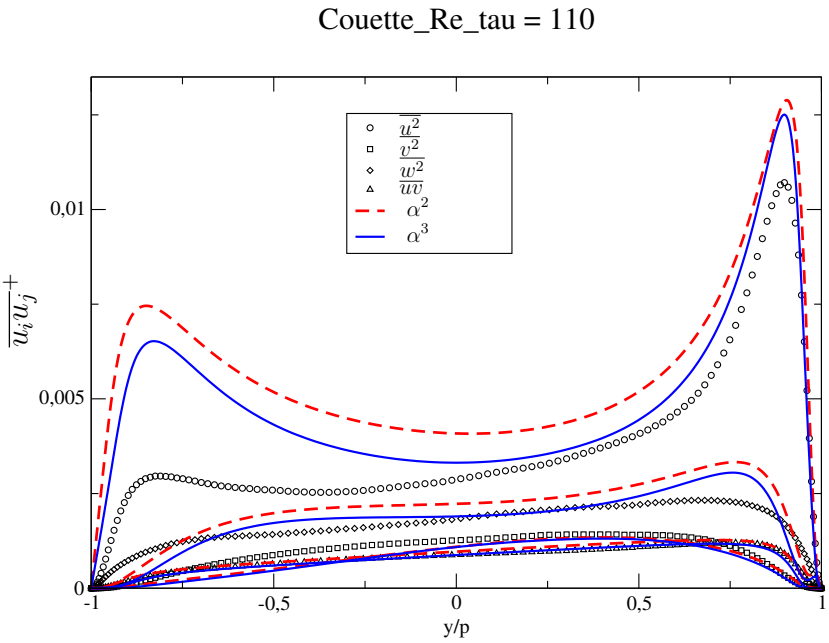


FIG. D.5 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Couette $Re_\tau = 110$

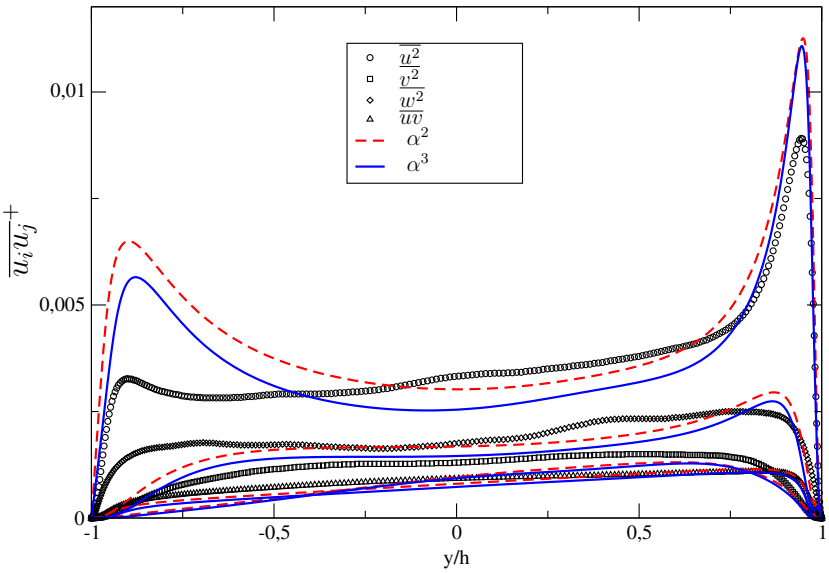


FIG. D.6 – Modèle EB-EASM#1. Évolution comparative des tensions de Reynolds pour α^2 et α^3. Écoulement de Couette $Re_\tau = 207$

Annexe E

Modèle EB-EASM en écoulement 3D

E.1 Cas de trois tenseurs : modèle EB-EASM#1

Dans le cas de l'écoulement 3D, l'utilisation d'une base à trois tenseurs permet d'approximer le tenseur d'anisotropie. Seulement, contrairement au cas 2D, nous prenons en compte tous les invariants du modèle. Dans ce qui suit, nous donnons les différents coefficients permettant de définir entièrement le modèle ainsi que les matrices obtenues lors de la projection de Galerkine.

E.1.1 Système linéaire

Il s'agit de résoudre le système linéaire de type $\mathbf{X}\mathcal{A} = \mathbf{B}$. La matrice $\mathcal{A} = A_{ij}$ et le vecteur $\mathbf{B}$ sont alors plus beaucoup plus complexes que dans les cas des écoulements 2D plan et sont tels que :

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \tfrac{\eta_1}{a_4} - 2\,a_3\,\eta_3 - 2\,a_5\,\eta_9 + 1/2\,a_5\,{\eta_7}^2 \\
A_{12} &= 2\,a_2\,\left(-3\,\eta_5 + 1/2\,\eta_1\,\eta_2\right) + 2\,a_5\,\eta_{10} - a_5\,\eta_7\,\eta_8 \\
A_{13} &= -\tfrac{\eta_3}{a_4} - 1/3\,a_3\,{\eta_1}^2 - 1/3\,a_5\,\eta_1\,\eta_7 + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_9 \\
A_{21} &= 2\,a_2\,\left(3\,\eta_5 - 1/2\,\eta_1\,\eta_2\right) + 2\,a_5\,\eta_{10} - a_5\,\eta_7\,\eta_8 \\
A_{22} &= -\tfrac{-6\,\eta_5 + \eta_1\,\eta_2}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3\right) \\
&-2\,a_5\,\left(6\,\eta_{12} - 5/2\,\eta_1\,\eta_{13} - 5/2\,\eta_2\,\eta_9 - \eta_4\,\eta_7\right) + 2\,a_5\,{\eta_8}^2 \\
A_{23} &= 2\,a_2\,\left(1/2\,\eta_2\,\eta_3 + 1/2\,\eta_1\,\eta_4\right) - 2\,a_5\,\left(\eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8\right) - a_5\,\eta_9\,\eta_8 \\
A_{31} &= -\tfrac{\eta_3}{a_4} - 1/3\,a_3\,{\eta_1}^2 - 1/3\,a_5\,\eta_1\,\eta_7 + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_9 \\
A_{32} &= 2\,a_2\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3\right) - 2\;\,a_5\,\left(\eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8\right) - a_5\,\eta_9\,\eta_8 \\
A_{33} &= -1/6\,\tfrac{{\eta_1}^2}{a_4} - 1/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_3 - 2\,a_5\,\left(-1/6\,\eta_1\,\eta_9 + 1/3\,\eta_3\,\eta_7\right) + 1/2\,a_5\,{\eta_9}^2
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1\,\eta_1 + 1/2\,a_5 \;\; eta_7 \\ -a_5\,\eta_8 \\ a_1\,\eta_3 + 1/2\,a_5\,\eta_9 \end{bmatrix} \tag{E.2}$$

Notons que la matrice $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de l'équation algébrique explicite grâce aux matrices de projection définies dans le paragraphe suivant :

E.1.2 Matrices de projection

La projection de l'équation algébrique implicite permet d'obtenir le modèle explicite défini par l'équation 4.36. Les matrices des traces de projection $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_m\}$, $\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\}$, et $\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{M}\}\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\}$ sont respectivement définies par

$$\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{T}_m\} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \eta_3 \\ 0 & -6\,\eta_5 + \eta_1\,\eta_2 & 0 \\ \eta_3 & 0 & 1/6\,{\eta_1}^2 \end{bmatrix} \tag{E.3}$$

$$\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_m\} = \begin{bmatrix} \eta_3 & 0 & 1/6\,{\eta_1}^2 \\ 0 & -1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3 & 0 \\ 1/6\,{\eta_1}^2 & 0 & 1/6\,\eta_1\,\eta_3 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

$$\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_m\} = \begin{bmatrix} 0 & -3\,\eta_5 + 1/2\,\eta_1 \;\; eta_2 & 0 \\ 3\,\eta_5 - 1/2\,\eta_1\,\eta_2 & 0 & 1/2\,\eta_2\,\eta_3 + 1/2\,\eta_1\,\eta_4 \\ 0 & -1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(E.5)

$$\{\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\} = \begin{bmatrix} \eta_9 & -\eta_{10} & 1/6\,\eta_1\,\eta_7 \\ -\eta_{10} & 6\,\eta_{12} - 5/2 \;\; eta_1\,\eta_{13} - 5/2\,\eta_2\,\eta_9 - \eta_4\,\eta_7 & \eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8 \\ 1/6\;\; \eta_1\,\eta_7 & \eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8 & -1/6\,\eta_1\,\eta_9 + 1/3\,\eta_3\,\eta_7 \end{bmatrix}$$

(E.6)

$$\{\boldsymbol{b}\boldsymbol{M}\}\,\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}_m\} = \begin{bmatrix} {\eta_7}^2 & -2\,\eta_7\,\eta_8 & \eta_7\,\eta_9 \\ -2\,\eta_7\,\eta_8 & 4\,{\eta_8}^2 & -2\,\eta_9\,\eta_8 \\ \eta_7\,\eta_9 & -2\,\eta_9\,\eta_8 & {\eta_9}^2 \end{bmatrix}$$

(E.7)

E.1.3 Solution du système linéaire

La résolution du système linéaire précédent conduit à la solution

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \tag{E.8}$$

avec

$$\beta_1 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_3 a_4^2 + \gamma_2 a_4 + \gamma_1), \tag{E.9}$$

$$\beta_2 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_4 a_4^2 + \gamma_2 a_5 + \gamma_6), \tag{E.10}$$

$$\beta_3 = \frac{a_4}{\gamma_0}(\gamma_7 a_4^2 + \gamma_8 a_4 + \gamma_9), \tag{E.11}$$

Les coefficients γ_i étant complexes , leurs expressions ne seront pas proposées dans ce rapport.

E.1.4 Traitement de la solution β_1

L'équation en β_1 étant implicite, sont traitement par l'injection de la relation donnant a_4 en fonction de β_1 conduit à une solution *quartique* dont les coefficients φ_i ne seront pas aussi proposée pour les raisons identiques que précédemment

E.2 Cas de cinq tenseurs

Dans ce cas nous proposons la forme de la matrice $\mathcal{A} = A_{ij}$:

$$\begin{array}{l} A_{11} = \frac{\eta_1}{a_4} - 2\,a_3\,\eta_3 - 2\,a_5\,\eta_9 + 1/2\,a_5\,{\eta_7}^2 \\ A_{12} = 2\,a_2\,\left(-3\,\eta_5 + 1/2\,\eta_1\,\eta_2\right) + 2\,a_5\,\eta_{10} - a_5\,\eta_7\,\eta_8 \\ A_{13} = -\frac{\eta_3}{a_4} - 1/3\,a_3\,{\eta_1}^2 - 1/3\,a_5\,\eta_1\,\eta_7 + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_9 \\ A_{14} = -2\,\frac{\eta_9}{a_4} - 2/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_7 - 2\,a_2\,\eta_{10} \\ -2\,a_5\,\left(-\eta 16 + 1/3\,{\eta_7}^2 + 1/2\,\eta_1\,\eta_{15}\right) + a_5\,\eta_7\,\eta_{14} \\ A_{15} = -\frac{\eta_7}{a_4} - 2\,a_3\,\eta_9 - 2\,a_2\,\eta_8 - 2\,a_5\,\eta_{14} + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_{15} \end{array} \tag{E.12}$$

$$\begin{array}{l} A_{21} = 2\,a_2\,\left(3\,\eta_5 - 1/2\,\eta_1\,\eta_2\right) + 2\,a_5\,\eta_{10} - a_5\,\eta_7\,\eta_8 \\ A_{22} = -\frac{-6\,\eta_5 + \eta_1\,\eta_2}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3\right) \\ -2\,a_5\,\left(6\,\eta_{12} - 5/2\,\eta_1\,\eta_{13} - 5/2\,\eta_2\,\eta_9 - \eta_4\,\eta_7\right) + 2\,a_5\,{\eta_8}^2 \\ A_{23} = 2\,a_2\,\left(1/2\,\eta_2\,\eta_3 + 1/2\,\eta_1\,\eta_4\right) - 2\,a_5\,\left(\eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8\right) - a_5\,\eta_9\,\eta_8 \\ A_{24} = 2\,\frac{\eta_{10}}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_8 - \eta_{11}\right) \\ +2\,a_2\,\left(-3\,\eta_{12} + 2\,\eta_2\,\eta_9 + \eta_4\,\eta_7 + 3/2\,\eta_1\,\eta_{13}\right) \\ -2\,a_5\,\left(-2/3\,\eta_7\,\eta_8 + \eta_{17}\right) - 2\,a_5\,\eta_8\,\eta_{14} \\ A_{25} = 2\,\frac{\eta_8}{a_4} + 2\,a_3\,\eta_{10} + 2\,a_2\,\left(-3\,\eta_9 + 1/2\,\eta_2\,\eta_7\right) - 4\,a_5\,\eta_{18} \\ -a_5\,\eta_8\,\eta_{15} \end{array} \tag{E.13}$$

$$\begin{array}{l} A_{31} = -\frac{\eta_3}{a_4} - 1/3\,a_3\,{\eta_1}^2 - 1/3\,a_5\,\eta_1\,\eta_7 + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_9 \\ A_{32} = 2\,a_2\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_4 - 1/2\,\eta_2\,\eta_3\right) - 2\;a_5\,\left(\eta_{11} + 1/6\,\eta_1\,\eta_8\right) - a_5\,\eta_9\,\eta_8 \\ A_{33} = -1/6\,\frac{{\eta_1}^2}{a_4} - 1/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_3 - 2\,a_5\,\left(-1/6\,\eta_1\,\eta_9 + 1/3\,\eta_3\,\eta_7\right) + 1/2\,a_5\,{\eta_9}^2 \\ A_{34} = -1/3\,\frac{\eta_1\,\eta_7}{a_4} - 2/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_9 + 2\,a_2\,\left(1/2\,\eta_1\,\eta_8 + \eta_{11}\right) \\ -2\,a_5\,\left(-1/6\,\eta_1\,eta_1 4 + 1/6\,\eta_3\,\eta_{15} + 1/3\,\eta_7\,\eta 9\right) + a_5\,\eta_9\,\eta_{14} \\ A_{35} = -\frac{\eta_9}{a_4} - 1/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_7 + 2\,a_2\,\eta_{10} - 2\,a5\,\left(-1/3\,\eta_1\,\eta_{15} + \eta_{16}\right) \\ +1/2\,a_5\,\eta_{15}\,\eta_9 \end{array} \tag{E.14}$$

$$
\begin{aligned}
A_{41} &= -2\,\tfrac{\eta_9}{a_4} - 2/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_7 + 2\,a2\,\eta_{10} - 2\,a5\,\left(-\eta_{16} + 1/3\,{\eta_7}^2 + 1/2\,\eta_1\,\eta_{15}\right)\\
&+ a_5\,\eta_7\,eta_1 4\\
A_{42} &= 2\,\tfrac{eta_1 0}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-1/2\,\eta_1\,eta_8 - eta_{11}\right)\\
&+ 2\,a_2\,\left(3\,\eta_{12} - 2\,\eta_2\,\eta_9 - \eta_4\,\eta_7 - 3/2\,\eta_1\,\eta_{13}\right) - 2\,a_5\,\left(-2/3\,\eta_7\,\eta_8 + \eta_{17}\right)\\
&- 2\,a_5\,\eta_8\,\eta_{14}\\
A_{43} &= -1/3\,\tfrac{\eta_1\,\eta_7}{a_4} - 2/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_9\\
&+ 2\,a_2\,\left(-1/2\,\eta_1\,\eta_8 - \eta_{11}\right)\\
&- 2\,a_5\,\left(-1/6\,\eta_1\,\eta_{14} + 1/6\,\eta_3\,\eta_{15} + 1/3\,\eta_7\,\eta 9\right) + a_5\,\eta_9\,\eta_{14}\\
A_{44} &= -\tfrac{2/3\,{\eta_7}^2 + \eta_1\,\eta_{15} - 2\,\eta_{16}}{a_4} - 2\,a_3\,\left(1/2\,\eta_1\,\eta_{14} - 1/6\,\eta_3\,\eta_{15} + 1/3\,\eta_7\,\eta_9\right)\\
&- 2\,a5\,\left(1/3\,\eta_7\,\eta_{14} - 1/6\,\eta_1\,\eta_{20} + 1/2\,\eta_{15}\,\eta_9\right) + 2\,a_5\,{\eta_{14}}^2\\
A_{45} &= -2\,\tfrac{\eta_{14}}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-\eta_{16} + 1/3\,{\eta_7}^2 + 1/2\,\eta_1\,\eta_{15}\right) + 2\,a_2\,\eta_{18} - 2/3\,a_5\,\eta_7\,\eta_{15} + a_5\,\eta_{14}\,\eta_{15}
\end{aligned}
\tag{E.15}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{51} &= -\tfrac{eta_7}{a_4} - 2\,a3\,\eta_9 + 2\,a_2\,\eta_8 - 2\,a_5\,\eta_{14} + 1/2\,a_5\,\eta_7\,\eta_{15}\\
A_{52} &= 2\,\tfrac{\eta_8}{a_4} + 2\,a_3\,\eta_{10} + 2\,a2\,\left(3\,\eta_{19} - 1/2\,\eta_2\,\eta_7\right) - 4\,a_5\,\eta_{18} - a_5\,\eta_8\,\eta_{15}\\
A_{53} &= -\tfrac{\eta_9}{a_4} - 2/3\,a_3\,\eta_1\,\eta_7 - 2\,a_2\,\eta_{10} - 2\,a_5\,\left(-1/3\,\eta_1\,\eta_{15} + \eta_{16}\right)\\
&+ 1/2\,a_5\,\eta_{15}\,\eta_9\\
A_{54} &= -2\,\tfrac{\eta_{14}}{a_4} - 2\,a_3\,\left(-\eta_{16} + 1/3\,{\eta_7}^2 + 1/2\,\eta_1\,\eta_{15}\right) - 2\,a_2\,\eta_{18}\\
&- 2/3\,a_5\,\eta_7\,\eta_{15} + a_5\,\eta_{14}\,\eta_{15}\\
A_{55} &= -\tfrac{\eta_{15}}{a_4} - 2\,a3\,\eta_{14} - 2\,a_5\,\eta_{20} + 1/2\,a_5\,{\eta_{15}}^2
\end{aligned}
\tag{E.16}
$$

Annexe F

Résumé des équations des modèles EB-EASM

le présent annexe résume les différentes équations des modèles EB-EASM non linéaire et linéaire.

F.1 Modèle non linéaire EB-EASM#1

Equation

$$\overline{u_i u_j} = 2k\left(b_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{F.1}$$

$$b_{ij} = \beta_1 S_{ij} + \beta_2(S_{ik}W_{kj} - W_{ik}S_{kj}) + \beta_3(S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{3}S_{kl}S_{kl}\delta_{ij}) \tag{F.2}$$

$$\varphi_0 + \varphi_1\beta_1 + \varphi_2\beta_1^2 + \varphi_3\beta_1^3 + \varphi_4\beta_1^4 = 0 \tag{F.3}$$

Coefficients de l'équation quartique en β_1

$$\begin{aligned}\varphi_0 \;=\; & 9a_5\eta^4\mathcal{R}^2\tau^2 a_1\psi_1 + 6a_5^2\eta^4\tau^3 a_3\mathcal{R}^2 + 18a_5\eta^4\tau^2 a_3\mathcal{R}^2\psi_1 - 108\tau\eta^4\mathcal{R}^2 a_1\psi_1^2 \\ & +15a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2\tau^3 a_1 - 36\mathcal{Q}a_2\mathcal{R}^2\tau^3\eta^2 a_5^2 + 9\mathcal{Q}^2 a_5^2\tau^3 a_1 + 54\mathcal{Q}a_2\mathcal{R}^2\tau^2\eta^2 a_5\psi_1 \\ & +12a_5^3\eta^2\mathcal{P}\tau^3\mathcal{R}^2 + 18a_5^2\eta^2\mathcal{P}\mathcal{R}^2\tau^2\psi_1 - 18\mathcal{Q}^2 a_5^2\tau^3 a_3 + 27\mathcal{Q}^2 a_5\tau^2 a_1\psi_1 \\ & -54\tau a_5\eta^2\mathcal{P}\mathcal{R}^2\psi_1^2\end{aligned} \tag{F.4}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 18a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2\tau^2\psi_1 + 432\eta^6\mathcal{R}^2a_1\psi_0\tau^2\psi_1 - 27a_5\eta^4\mathcal{R}^2\tau\psi_1^2 \\ &-108\mathcal{Q}a_2\mathcal{R}^2\tau^3\eta^4a_5\psi_0 + 27a_5\mathcal{Q}^2\tau\psi_1^2 - 36a_5^2\eta^4\mathcal{P}\mathcal{R}^2\tau^3\psi_0 \\ &-18\mathcal{Q}^2a_5\tau^3a_3^2\eta^2 - 54\mathcal{Q}^2a_5\tau^3a_1\eta^2\psi_0 - 36a_5\eta^6\tau^3a_3\mathcal{R}^2\psi_0 \\ &+90a_5\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4\tau^3 + 5a_5^3\mathcal{R}^2\tau^3\eta^4 + 216a_5\eta^4\mathcal{P}\mathcal{R}^2\psi_0\tau^2\psi_1 \\ &-18a_5\eta^6\mathcal{R}^2\tau^3a_1\psi_0 + 3\mathcal{Q}^2\tau^3a_5^3 - 108\eta^4\mathcal{R}^2\psi_1^3 \\ &-216\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4\tau^2\psi_1 + 18a_5^2\mathcal{Q}^2\tau^2\psi_1 + 36a_5^2\eta^2\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\tau^2\psi_1 \\ &+108a_5\eta^4\mathcal{P}\mathcal{R}^2\tau^2a_3\psi_1 + 72\eta^6\tau^2a_3^2\mathcal{R}^2\psi_1 + 36a_5^2\eta^4\tau^3a_3\mathcal{R}^2\mathcal{P} \\ &+24a_5\eta^6\tau^3a_3^2\mathcal{R}^2 + 54a_5\eta^2\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\tau\psi_1^2 + 6a_5^3\eta^2\mathcal{P}^2\tau^3\mathcal{R}^2 \end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= 108a_5\eta^6\mathcal{R}^2\tau^2\psi_0\psi_1 - 108a_5\mathcal{Q}^2\tau^2\eta^2\psi_0\psi_1 - 216a_5\eta^6\mathcal{P}\mathcal{R}^2\tau^3a_3\psi_0 \\ &-216a_5\eta^6\mathcal{P}\mathcal{R}^2\psi_0^2\tau^3 + 648\eta^6\mathcal{R}^2\psi_0\tau\psi_1^2 - 36a_5^2\mathcal{Q}^2\tau^3\eta^2\psi_0 \\ &-216a_5\eta^4\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\tau^2\psi_0\psi_1 - 432\eta^8\mathcal{R}^2a_1\psi_0^2\tau^3 - 36a_5^2\eta^6\mathcal{R}^2\tau^3\psi_0 \\ &-144\eta^8\tau^3a_3^2\mathcal{R}^2\psi_0 - 72a_5^2\eta^4\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\tau^3\psi_0 + 432\eta^8a_2^2\mathcal{R}^4\tau^3\psi_0 \end{aligned} \tag{F.6}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= 108a_5\mathcal{Q}^2\tau^3\eta^4\psi_0^2 - 108a_5\eta^8\mathcal{R}^2\tau^3\psi_0^2 + 216a_5\eta^6\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2\tau^3\psi_0^2 \\ &-1296\eta^8\mathcal{R}^2\psi_0^2\tau^2\psi_1 \end{aligned} \tag{F.7}$$

$$\varphi_4 = 864\eta^{10}\mathcal{R}^2\psi_0^3\tau^3 \tag{F.8}$$

Les deux autres solutions β_2 et β_3

$$\begin{aligned}\beta_2 &= 3a_4(9a_5\mathcal{P}\mathcal{Q}a_4a_1 - 12a_5^2\mathcal{P}a_2\mathcal{R}^2a_4^2\eta^2 + 18a_2\eta^2\mathcal{R}^2a_4a_5\mathcal{P} + 3a_5^2\mathcal{P}\mathcal{Q}a_4^2a_1 \\ &-6\eta^2a_3^2\mathcal{Q}a_5a_4^2 - 2a_5^3a_4^2\mathcal{Q} + 9a_5\mathcal{Q} - 3\mathcal{Q}a_4a_5^2 - 15a_4^2a_5\eta^4a_2\mathcal{R}^2a_1 \\ &-6a_4^2a_5\eta^4a_2\mathcal{R}^2a_3 + 9\eta^2a_3\mathcal{Q}a_5a_4^2a_1 - 6a_5^2\mathcal{P}\mathcal{Q}a_4^2a_3 + 36a_4\eta^4a_2\mathcal{R}^2a_1) \\ &/(-27a_5\eta^4\mathcal{R}^2a_4 + 36a_5^2\eta^2\mathcal{P}^2a_4^2\mathcal{R}^2 + 54a_5\eta^2\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2a_4 - 18\mathcal{Q}^2a_5a_4^3a_3^2\eta^2 \\ &-108\eta^4\mathcal{R}^2 + 27a_5\mathcal{Q}^2a_4 + 24a_5\eta^6a_4^3a_3^2\mathcal{R}^2 + 90a_5\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4a_4^3 + 5\eta^4\mathcal{R}^2a_5^3a_4^3 \\ &+108a_5\eta^4a_4^2a_3\mathcal{R}^2\mathcal{P} + 36a_5^2\eta^4a_4^3a_3\mathcal{R}^2\mathcal{P} + 6a_5^3\eta^2\mathcal{P}^2a_4^3\mathcal{R}^2 + 72\eta^6a_4^2a_3^2\mathcal{R}^2 \\ &-216\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4a_4^2 + 18a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2a_4^2 + 18a_5^2\mathcal{Q}^2a_4^2 + 3\mathcal{Q}^2a_4^3a_5^3) \end{aligned} \tag{F.9}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= -6(6\mathcal{P}^2a_5^3\eta^2a_4^2\mathcal{R}^2+18\mathcal{P}^2a_5^2\eta^2a_4\mathcal{R}^2+9\mathcal{P}a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2a_4^2a_1+6\mathcal{P}a_5^2\eta^4a_4^2a_3\mathcal{R}^2\\ &+18\mathcal{P}a_5\eta^4a_4a_3\mathcal{R}^2+27\mathcal{P}a_5\eta^4\mathcal{R}^2a_4a_1+3\mathcal{Q}^2a_4^2a_5^3-9\mathcal{Q}^2a_4^2\eta^2a_3a_1a_5\\ &+9\mathcal{Q}^2a_5^2a_4-18\mathcal{Q}a_4^2a_5\eta^4a_2\mathcal{R}^2a_3+27\mathcal{Q}a_4^2a_5\eta^4a_2\mathcal{R}^2a_1-a_5^3a_4^2\eta^4\mathcal{R}^2\\ &+12a_4^2\eta^6a_5a_3\mathcal{R}^2a_1-18a_4^2a_5\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4-6a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2a_4+36a_4\eta^6a_3\mathcal{R}^2a_1\\ &-9a_5\eta^4\mathcal{R}^2)a_4/\eta^2/(-27a_5\eta^4\mathcal{R}^2a_4+36a_5^2\eta^2\mathcal{P}^2a_4^2\mathcal{R}^2+54a_5\eta^2\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2a_4\\ &-18\mathcal{Q}^2a_5a_4^3a_3^2\eta^2-108\eta^4\mathcal{R}^2+27a_5\mathcal{Q}^2a_4+24a_5\eta^6a_4^3a_3^2\mathcal{R}^2\\ &+90a_5\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4a_4^3+5\eta^4\mathcal{R}^2a_5^3a_4^3+108a_5\eta^4a_4^2a_3\mathcal{R}^2\mathcal{P}+36a_5^2\eta^4a_4^3a_3\mathcal{R}^2\mathcal{P}\\ &+6a_5^3\eta^2\mathcal{P}^2a_4^3\mathcal{R}^2+72\eta^6a_4^2a_3^2\mathcal{R}^2-216\eta^6a_2^2\mathcal{R}^4a_4^2+18a_5^2\eta^4\mathcal{R}^2a_4^2\\ &+18a_5^2\mathcal{Q}^2a_4^2+3\mathcal{Q}^2a_4^3a_5^3)\end{aligned} \tag{F.10}$$

Les invariants

$$\eta = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \tag{F.11}$$

$$\mathcal{R} = \sqrt{-\frac{W_{ij}W_{ji}}{S_{ij}S_{ji}}} \tag{F.12}$$

$$\mathcal{P} = S_{ij}M_{ji} \tag{F.13}$$

$$\mathcal{Q} = 2S_{ij}W_{ik}M_{ki} \tag{F.14}$$

Autres variables

$$a_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(g_3 - g_3^*\sqrt{(1-\alpha^2)})\alpha^2 \tag{F.15}$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2}g_5\alpha^2 \tag{F.16}$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{2}g_4\alpha^2 \tag{F.17}$$

$$a_4 = \frac{\tau}{(\psi_1 - 2\eta^2\tau\psi_0\beta_1)} \tag{F.18}$$

$$a_5 = \frac{5}{\tau}(1-\alpha^2) \tag{F.19}$$

$$\psi_0 = 1 + \frac{1}{2} g_1^* \alpha^2 \tag{F.20}$$

$$\psi_1 = \frac{10}{3} - (\frac{13}{3} - \frac{1}{2} g_1)\alpha^2 \tag{F.21}$$

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon} \tag{F.22}$$

Coefficients

$$g_1 = 3.4\ ;\ g_1^* = 1.8\ ;\ g_3 = 0.8\ ;\ g_3^* = 1.3\ ;\ g_4 = 1.25\ ;\ g_5 = 0.4$$

Equations de tranport de k et ε

$$\frac{\mathrm{D}k}{\mathrm{D}t} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_k}\overline{u_l u_m} T \frac{\partial k}{\partial x_m}\right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} \tag{F.23}$$

$$\frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2}\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon}\overline{u_l u_m} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m}\right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} \tag{F.24}$$

Equations de α

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \tag{F.25}$$

$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right) \qquad ; \qquad L = C_L \max\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}\right) \tag{F.26}$$

Coefficients

$$C_{\varepsilon_1} = 1.44\ ;\ C_{\varepsilon_2} = 1.83\ ;\ A_1 = 0.02\ ;\ C_\mu = 0.21\ ;\ \sigma_\varepsilon = 1.15\ ;$$
$$\sigma_k = 1.0\ ;\ C_L = 0.161\ ;\ C_\eta = 80.0\ ;\ C_T = 6.0\ ;$$

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1}\left(1. + A_1\left(1 - \alpha^2\right)\sqrt{\frac{k}{\overline{u_i u_j} n_i n_j}}\right) \tag{F.27}$$

Conditions aux limites à la paroi

$$U_i = 0 \; ; \; k = 0 \; ; \; \varepsilon = 2\nu \lim_{y \to 0} \frac{k}{y^2} \; ; \; \alpha = 0$$

F.2 Modèle linéaire EB-EASM#2

Par rapport au modèle EB-EASM#1, l'équation de β_1 est cubique.

Equations

$$\varphi_0 + \varphi_1 \beta_1 + \varphi_2 \beta_1^2 + \varphi_3 \beta_1^3 = 0 \tag{F.28}$$

Les coefficients

$$\begin{aligned} \varphi_0 \;=\; & 9a_3\mathcal{P}^2\tau^2 a_5 + 6a_5\tau^2 a_1\eta^2 + 27a_2\mathcal{Q}\tau^2 a_1\mathcal{P} - 27\tau a_1\mathcal{P}^2\psi_1 \\ & -3a_3\eta^2\tau^2 a_5 + 9a_2\mathcal{Q}\tau^2 a_5 + 18\tau a_1\eta^2\psi_1 - 9a_5\mathcal{P}^2\tau^2 a_1 + 9a_3\mathcal{P}\tau^2 a_1\eta^2 \end{aligned} \tag{F.29}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \;=\; & 54a_1\mathcal{P}^2\eta^2\psi_0\tau^2 - 27\mathcal{P}^2{\psi_1}^2 + 2{a_5}^2\tau^2\eta^2 - 6{a_5}^2 \\ & \tau^2\mathcal{P}^2 - 9a_3\mathcal{P}^3\tau^2 a_5 - 3{a_3}^2\eta^4\tau^2 + 18\eta^2{\psi_1}^2 + 12a_5 \\ & \eta^2\tau\psi_1 - 36a_1\eta^4\psi_0\tau^2 - 27a_5\mathcal{P}^2\tau\psi_1 \\ & +27{a_2}^2\mathcal{Q}^2\tau^2 \end{aligned}$$

(F.30)

$$\varphi_2 \;=\; 54a_5\mathcal{P}^2\tau^2\eta^2\psi_0 + 108\mathcal{P}^2\eta^2\psi_0\tau\psi_1 - 72\eta^4\psi_0\tau\psi_1 - 24a_5\eta^4\tau^2\psi_0$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 \;=\; & 54a_5\mathcal{P}^2\tau^2\eta^2\psi_0 + 108\mathcal{P}^2\eta^2\psi_0\tau\psi_1 \\ & -72\eta^4\psi_0\tau\psi_1 - 24a_5\eta^4\tau^2\psi_0 \end{aligned} \tag{F.31}$$

La solution β_2

$$\beta_2 = -3/2\frac{a_4\sigma_1}{\sigma_2} \tag{F.32}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 \;=\; & 9a_5\mathcal{P}^3a_4a_1 + 6{a_5}^2\mathcal{P}^2a_4 + 9a_5\mathcal{P}^2 + 3Pa_3\eta^2a_4a_5 + 9Pa_2Qa_4a_5 \\ & +6a_3\eta^4a_4a_1 - 2{a_5}^2\eta^2a_4 + 18a2Qa_4a_1\eta^2 \\ & -6a_5\eta^2a_4\end{aligned} \tag{F.34}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 \;=\; & -12a_5\eta^2a_4 + 27a_5\mathcal{P}^2a_{\mathit{4}} - 18\eta^2 - 2{a_5}^2{a_4}^2\eta^2 + 6{a_5}^2{a_4}^2\mathcal{P}^2 \\ & +3{a_3}^2\eta^4{a_4}^2 - 27{a_2}^2\mathcal{Q}^2{a_4}^2 + 27\mathcal{P}^2 \\ & +9a_3\mathcal{P}^3{a_4}^2a_5\end{aligned} \tag{F.36}$$

Remarques

∗ Dans le cas d'écoulement monodimensionnel, tenir compte des simplifications suivantes : $\mathcal{P} = 0 \qquad \mathcal{Q} = \eta^2 \qquad \mathcal{R} = 1$

∗ Les modèles EB-EASM sont objectifs. Pour cela modifier les équations en intégrant le taux de rotation absolue $\boldsymbol{W}^*_{ij}$ défini dans le paragraphe (4.2) en lieu et place de $\boldsymbol{W}$.

∗ Dans le cas des écoulements à courbure ou de rotation , remplacer l'hypothèse d'équilibre (4.11) par (4.13) avant la projection sur la base de tenseurs choisis.