



HAL
open science

Perturbations singulières : approximations, stabilité pratique et applications à des modèles de compétition

Karim Yadi

► **To cite this version:**

Karim Yadi. Perturbations singulières : approximations, stabilité pratique et applications à des modèles de compétition. Mathématiques [math]. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2008. Français. NNT: . tel-00411503

HAL Id: tel-00411503

<https://theses.hal.science/tel-00411503>

Submitted on 27 Aug 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Haute-Alsace de Mulhouse

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications

THESE de DOCTORAT

Option : Mathématiques

Présentée par :

Karim YADI

Perturbations Singulières : Approximations, Stabilité Pratique et Applications à des Modèles de Compétition

Soutenue le 13 novembre 2008 devant la commission d'examen :

A. FRUCHARD	Professeur des Universités, Mulhouse	Président
C. LOBRY	Professeur des Universités, Nice	Rapporteur
Ch. POGGIALE	Professeur des Universités, Marseille	Rapporteur
M. DJEMAI	Professeur des Universités, Valenciennes	Membre
R. LUTZ	Professeur des Universités, Mulhouse	Membre
T. SARI	Professeur des Universités, Mulhouse	Directeur de thèse

*A Samira, mon amour,
A mes fils, ma fierté,
Salih, Khalil et Faïz.*

Permettez-moi de remercier, après Dieu, tous ceux qui m'ont porté jusque là, par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leur aide, leurs reproches, leur patience. Tous ces êtres que le destin m'a fait croiser et qui ont, souvent à leur insu, balisé ma route et ces autres que je n'ai connus qu'au travers de leurs œuvres et qui m'ont nourri l'esprit.

Parmi ces rencontres providentielles, il convient bien sûr de citer nommément le Professeur Fruchard qui préside le jury et qui a contribué à améliorer sensiblement mon document. Je tâcherai un jour de lui apporter un résultat qui surprend.

Mes vifs remerciements vont aux Professeurs Lobry et Poggiale qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. J'exprime le vœu d'être, dans l'avenir, au diapason avec leurs centres d'intérêt dans la recherche, car ils allient à merveille la mathématique dans toute sa rigueur et ses applications dans la science du vivant.

Merci au Professeur Djemai, membre du jury et qui n'a jamais manqué l'occasion de m'exprimer ses encouragements. Il représente pour moi l'immense champ scientifique de la théorie de la commande, champ dans lequel il m'est arrivé timidement de m'aventurer.

Je remercie avec déférence le Professeur Lutz qui examine mon modeste travail et pour qui j'ai développé une admiration sans bornes, impressionné que je suis par sa culture et l'aura qu'il dégage.

Je disais de lui qu'il est mon fil d'Ariane dans la recherche. Je pourrais ajouter qu'il est mon mentor. Je sais que cela le gênerait que j'insiste là-dessus, pourtant je ne crois pas que de le remercier puisse rendre toute la gratitude que je me dois de lui témoigner. Je ne trouve pas de mots à exprimer à mon directeur de recherche autres que : Merci Professeur Sari. Merci pour votre patience, merci pour votre écoute, merci de m'avoir donné confiance en moi.

Table des matières

I	Perturbations singulières	3
1	Théorie de Tikhonov	15
1.1	Perturbation plutôt que déformation	15
1.2	Théorème de Tikhonov	17
2	Théorème de Pontryagin-Rodygin	21
2.1	Approximations	21
2.2	Enoncés externes	23
2.3	Lemmes préliminaires	25
2.4	Preuve du théorème 2.2.1	28
2.5	Exemples	29
3	Sur la théorie géométrique	35
3.1	Variété invariante	35
3.2	Comment chercher l'équation de \mathcal{N}_ε ?	37
3.3	A propos de la dynamique rapide oscillante	38
4	Extension aux temps infinis	43
4.1	Théorèmes d'approximations	43
4.2	Non robustesse : quelques exemples	44
4.3	Stabilité pratique	48
4.4	Résultats de stabilité pratique	50
4.5	Sur la phase asymptotique	53
4.6	Formulations externes	55
4.6.1	Caractérisation externe de la stabilité pratique	55
4.6.2	Enoncés externes	56
4.7	Preuve des énoncés externes	58
4.7.1	Preuve du théorème 4.6.3	58
4.7.2	Preuve du théorème 4.6.4	60
4.7.3	Preuves des théorèmes 4.6.5 et 4.6.6	60

II	Cycle Lent Rapide et Modèle de Compétition	63
5	Cycle lent-rapide	69
5.1	Le problème et ses hypothèses	69
5.2	Le résultat	75
5.3	Lemmes préliminaires	76
5.4	Preuve du Théorème 5.2.1	80
5.5	Exemples	80
5.6	Un cas de cycle canard	84
6	Application à un modèle de compétition	91
6.1	Le modèle	91
6.2	Equation du mouvement lent	92
6.3	Exemple de Lobry	95
6.4	Conditions suffisantes de coexistence	99
6.5	Persistance des compétiteurs	102
6.6	Preuve du théorème 6.5.2	109
6.7	Exemple et simulations	111
A		117
A.1	L'axiomatique IST	117
A.2	Quelques définitions externes	119
A.3	Principes de permanence	120
A.4	S-Stabilité	121
A.5	Deux outils de base	121
A.6	Lemmes requis	123
A.7	Théorie de Neishtadt	124

Première partie
Perturbations singulières

Introduction

Perturbations

Un problème (P_ε) , de cauchy ou aux limites par exemple, dépendant du paramètre ε , peut s'avérer difficile à traiter. Supposons que l'on est capable de résoudre le problème (P_{ε_0}) obtenu pour une certaine valeur ε_0 de ε . On espère en déduire des informations sur d'éventuelles solutions de (P_ε) pour des valeurs de ε voisines de ε_0 . Si $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est la solution supposée unique de (P_{ε_0}) de variable indépendante t , existe-t-il une solution $x_\varepsilon(t)$ de (P_ε) qui soit proche de $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$ pour ε proche de ε_0 ? Si oui, cette approximation peut-elle avoir lieu pour toutes les valeurs de t pour lesquelles $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est définie? Pour ε proche de ε_0 , on dit que le problème (P_ε) est une *perturbation* (ou plus précisément *déformation*) du problème (P_{ε_0}) . Ce dernier est appelé *problème réduit* ou *non perturbé*. Dans la théorie des perturbations d'équations différentielles, le problème (P_ε) est une famille d'équations différentielles $dx/dt = F(x, \varepsilon)$ assujetties à des conditions que nous notons c_ε . La variable x est dans un ouvert de \mathbb{R}^n et ε est dans un sous-ensemble de \mathbb{R}^k . La famille (P_ε) est alors une *déformation à k paramètres* de (P_{ε_0}) , i.e. de $(dx/dt = F(x, \varepsilon_0), c_{\varepsilon_0})$. Lorsque (P_ε) est un problème de Cauchy dépendant agréablement du paramètre ε , de sorte que l'on peut appliquer la théorie de dépendance continue par rapport aux paramètres et/ou aux conditions initiales, la littérature parle de *perturbation régulière* : si $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$ est définie pour $t \in [0, T]$ avec $\bar{x}_{\varepsilon_0}(0) = \alpha_{\varepsilon_0}$, et si $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \alpha_\varepsilon = \alpha_{\varepsilon_0}$, alors il existe une solution $x_\varepsilon(t)$ de (P_ε) définie au moins sur $[0, T]$, de condition initiale α_ε telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} x_\varepsilon(t) = \bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$, la convergence étant uniforme par rapport à t dans $[0, T]$.

Comme exemple simple, où le point sur la variable désigne la dérivation par rapport à t , on perturbe l'équation différentielle

$$\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1,$$

de solution $\bar{x}_0(t) = e^{-t}$, pour obtenir l'équation

$$\dot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0, \quad x(0) = \cos \varepsilon.$$

On sait calculer la solution exacte du problème perturbé, en l'occurrence

$$x_\varepsilon(t) = \frac{\cos \varepsilon}{e^t(1 + \varepsilon \cos \varepsilon) - \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

On a bien

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = \bar{x}_0(t) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos \varepsilon = 1$$

pour tout $t \geq 0$. Quand on veut aller au-delà de la première approximation, on cherche une solution du problème perturbé sous forme d'un développement

asymptotique formel de puissances de ε . Le premier terme ne sera autre que la solution du problème réduit. Pour cette approche, il faut ajouter des conditions de régularité par rapport aux arguments (voir [53]).

Si la solution $x_\varepsilon(t)$ du problème perturbé (P_ε) ne dépend pas continûment du paramètre ε , on parle de *perturbation singulière*. La convergence de $x_\varepsilon(t)$ vers une solution du problème réduit (P_{ε_0}) n'est pas uniforme par rapport à t . Cette "cassure" se voit généralement sur de très petits intervalles de la variable indépendante t . Ces intervalles sont appelés *couches limites* ou *libres* selon qu'ils se trouvent aux limites de l'intervalle de définition de la solution du problème réduit (P_{ε_0}) ou à l'intérieur. Par exemple, l'équation linéaire

$$\varepsilon \dot{x} + x = 1, \quad x_\varepsilon(0) = x_0$$

dont la solution exacte est

$$x_\varepsilon(t) = 1 + (x_0 - 1)e^{-t/\varepsilon},$$

pour $t \geq 0$ a pour problème réduit, obtenu pour $\varepsilon = 0$, l'équation algébrique $x = 1$. Plus généralement, la présence d'un petit paramètre ε devant la dérivée du plus grand ordre d'une équation différentielle est un signe probable de perturbation singulière. En posant $\varepsilon = 0$, on perd au moins un ordre de dérivation et la définition du problème réduit devient parfois ambiguë vis-à-vis de la condition initiale. Dans l'exemple précédent, la solution du problème réduit ne vérifie la condition initiale que si $x_0 = 1$. Si $x_0 \neq 1$, la solution exacte ne converge pas uniformément vers la solution du problème réduit quand $\varepsilon \rightarrow 0$ puisqu'elle tend vers la fonction discontinue valant x_0 en $t = 0$ et 1 pour $t \geq 0$. Notez que la solution exacte s'écrit comme somme d'une fonction de t (ici la fonction constante 1) et d'une fonction du temps dit rapide (stretched time) $\tau = t/\varepsilon$. Cette dernière vaut $(x_0 - 1)e^{-\tau}$ et tend vers 0 quand $\tau \rightarrow +\infty$.

Systèmes lents-rapides

Les systèmes suivants sont parmi les modèles les plus étudiés des perturbations singulières :

$$\begin{aligned} \varepsilon dx/dt &= F(x, y, \varepsilon), & x(0) &= \alpha_\varepsilon, \\ dy/dt &= G(x, y, \varepsilon), & y(0) &= \beta_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Le couple (x, y) est dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et ε est un réel positif suffisamment petit. Les fonctions F, G sont continues par rapport à leurs arguments ainsi que les conditions initiales. En remplaçant ε par 0, la première équation du système dégénère en une équation algébrique. Le problème obtenu ne peut pas satisfaire les conditions initiales (α_0, β_0) . De tels systèmes

ditions algébro-différentielles ont donné lieu à des études indépendantes et intéressantes en soi comme dans [7, 11, 12]. Ils sont résolus comme limites de systèmes obtenus en introduisant artificiellement un petit paramètre qu'on fait tendre vers zéro. Comme expliqué plus haut, on ne peut espérer qu'une solution éventuelle du problème (1) converge uniformément vers celle supposée connue du problème obtenu pour $\varepsilon = 0$. C'est bien un problème de *perturbation singulière*. L'approche classique pour la description du comportement des solutions de (1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour $0 \leq t \leq L$, où L peut être infini, est celle des *échelles de temps multiples*. Nous adoptons naturellement le vocabulaire de la cinématique où la variable indépendante t est désormais le temps et $(x(t), y(t))$ la position d'un mobile dans l'espace de phases à l'instant t . Quand l'échelle est double, on parle de champs ou de systèmes *lents-rapides*. La variable x est dite rapide et la variable y lente. Le changement de l'échelle du temps $\tau = t/\varepsilon$ (temps rapide) transforme le système en

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= F(x, y, \varepsilon), & x(0) &= \alpha_\varepsilon, \\ dy/d\tau &= \varepsilon G(x, y, \varepsilon), & y(0) &= \beta_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

où nous conservons les mêmes notations pour les variables. Ce problème est une *déformation à un paramètre* du système

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= F(x, y, 0), & x(0) &= \alpha_0, \\ dy/d\tau &= 0, & y(0) &= \beta_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Relativement à la composante y qui demeure d'abord proche de sa valeur initiale β_0 , la composante x varie très vite et est approchée par la solution de l'équation dite *de la couche limite*

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \beta_0, 0), \quad x(0) = \alpha_0.$$

C'est la phase rapide du mouvement. On définit alors l'*équation rapide*¹ par

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, y, 0), \quad (4)$$

où la composante y est considérée comme un paramètre. La théorie des perturbations régulières donne, sous des hypothèses convenables, une approximation des solutions de (2) par une solution de (3) pour des temps τ de l'ordre de 1 seulement, correspondant à des temps t de l'ordre de ε . Il s'agit alors de décrire la phase lente du système d'origine (1) et nous allons voir qu'elle dépend du comportement des solutions de l'équation rapide (4). Une

¹Cette équation est appelée parfois *équation de la couche limite*, mais nous réservons cette dernière appellation à l'équation rapide assujettie à une condition initiale.

solution de (4) pourrait ne pas être bornée quand $\tau \rightarrow +\infty$, ou tendre vers un point d'équilibre, ou vers un autre type d'attracteur. Ce comportement dépend naturellement des données initiales. Par exemple, si l'équation (4) admet pour tout y dans un compact de \mathbb{R}^m un équilibre $x = \xi(y)$ asymptotiquement stable uniformément par rapport à y , on définit habituellement l'équation lente par

$$\frac{dy}{dt} = G(\xi(y), y, 0). \quad (5)$$

Le théorème de Tikhonov [67] dit alors principalement que si, pour toute condition initiale fixée, la propriété d'unicité des solutions est satisfaite pour les équations considérées, alors les limites suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)), \quad t \in]0, T], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

où $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution de (1) et $\bar{y}(t)$ la solution de (5) de condition initiale β_0 définie sur $[0, T]$. La première limite n'est pas vérifiée pour $t = 0$ où s'observe une couche limite pour la composante x .

Aperçu historique

Pour un aperçu sur l'histoire des perturbations singulières, on recommande l'annexe du livre *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations* de R. O'Malley, Jr [54]. La première date à mentionner est celle du début historique des perturbations singulières qui remonterait à 1904, quand L. Prandtl [57] a présenté un travail dans le domaine de la dynamique des fluides lors du Troisième Congrès des Mathématiciens à Heidelberg. La deuxième est celle de l'utilisation pour la première fois du terme "perturbation singulière" par K. Friedrichs et son étudiant W. Wasow, en 1946, dans [20]. La troisième est en rapport avec les travaux de Andrey Nikolayevich Tikhonov (ou Tykhonov, ou Tihonov, ou Tychonoff..!) [67] et de ses étudiants [70] et à l'apparition du très recommandé livre *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* de Wasow [76]. Puis, à peu près à la même époque, dans les années 70, s'est développée d'une part l'approche non standard et d'autre part la théorie géométrique. L'approche non standard de la théorie des perturbations d'équations différentielles ordinaires a mis le doigt sur l'existence de solutions canard et a donné un éclairage nouveau aux problèmes de retard à la bifurcation (voir par exemple [36, 5]). L'idée d'utiliser l'Analyse Non Standard dans la théorie des perturbations des équations différentielles s'est développée au sein de l'école de G. Reeb. L'Analyse Non Standard est aujourd'hui devenue un outil bien établi dans la théorie asymptotique. La théorie géométrique des perturbations singulières, quant à elle, a pour fondateur reconnu N. Fenichel [18]. Elle est basée sur la

théorie des variétés invariantes et jouit d'une large utilisation pour l'étude des systèmes lents-rapides. Signalons enfin le développement relativement récent des perturbations singulières dans la théorie de la commande et surtout les travaux de Kokotovic et Khalil [34, 32]. Il ne faut pas omettre un champ d'application par excellence des méthodes de perturbations singulières qui est celui des modèles de dynamique de population ([6, 50, 71, 72]). Entre problèmes à valeurs initiales et problèmes aux limites, équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles ou stochastiques, inclusions différentielles, la variété des problèmes singulièrement perturbés est très étendue.

Définitions et caractérisations externes de la stabilité

Revenons un moment sur l'outil que nous aurons à utiliser souvent dans cette thèse : la théorie IST (Internal Set Theory). C'est une extension des mathématiques classiques permettant une approche axiomatique à l'Analyse Non Standard (ANS). On en trouve dans l'annexe en page 117 une brève introduction ainsi qu'un certain nombre de références. L'axiomatique classique de la théorie des ensembles ZFC est enrichie par l'adjonction d'un nouveau prédicat unaire *standard* (st) qui est manipulé à l'aide de trois nouveaux axiomes ajoutés à ZFC : Transfert, Idéalisation et Standardisation. IST ne remet pas en cause les théorèmes ZFC mais ajoute du nouveau. Une formule de IST est dite *interne* dans le cas où elle ne fait pas intervenir le nouveau prédicat "st" ; autrement, elle est dite *externe*. Les théorèmes externes prouvés dans IST peuvent être reformulés de manière à les rendre internes grâce à un procédé de réduction ramenant des formules externes à des formules internes sous certaines conditions. La plupart des résultats de ce travail seront prouvés dans le langage IST.

Ce travail traite à maintes reprises les problèmes de stabilité. Rappelons d'ores et déjà les définitions des différents types de stabilité, au sens de Lyapunov, d'un sous-ensemble borné (voir [17, 21] par exemple). Le cas d'un équilibre ponctuel s'en déduit directement. Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \tag{6}$$

où f est continue sur un ouvert U de \mathbb{R}^n .

Définition 0.0.1 1. Un sous-ensemble \mathcal{M} de U est dit **positivement invariant** pour le système (6) si toute solution $x(t)$ de (6) telle que $x(0) \in \mathcal{M}$ est définie pour tout $t > 0$ et vérifie $x(t) \in \mathcal{M}$.

2. Un sous-ensemble borné \mathcal{M} de U est dit **stable** pour le système (6) si, pour tout $\mu > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $\text{dis}(x(0), \mathcal{M}) < \eta$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu$.²

² $\text{dis}(x(\cdot), \mathcal{M})$ désigne la distance usuelle dans \mathbb{R}^n définie par $\inf_{m \in \mathcal{M}} \|x(\cdot) - m\|$.

3. \mathcal{M} est dit **attractif** s'il admet un voisinage \mathcal{V} (bassin d'attraction) tel que toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $x(0) \in \mathcal{V}$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) = 0$.

4. \mathcal{M} est **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif.

Soit le cas d'un système

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (7)$$

dépendant d'un paramètre y décrivant un ensemble Y . Soit \mathcal{M}_y un sous-ensemble borné de U asymptotiquement stable pour tout y dans Y .

Définition 0.0.2 Le bassin d'attraction de \mathcal{M}_y est dit **uniforme** dans Y pour (7) s'il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout y dans Y , l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dis}(x, \mathcal{M}_y) \leq a\}$ est dans le bassin d'attraction de \mathcal{M}_y .

La formulation externe de la stabilité d'un sous-ensemble borné $\mathcal{M} \subset U$ du système (6) est exprimée dans le lemme suivant. L'occasion se présente pour montrer comment manipuler l'algorithme de réduction du langage IST (voir l'annexe A) :

Lemme 0.0.3 Supposons que f , U et \mathcal{M} sont standard. Le sous-ensemble borné $\mathcal{M} \subset U$ est :

1. Stable pour le système (6) si, et seulement si, toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $\text{dis}(x(0), \mathcal{M}) \simeq 0$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$.

2. Attractif si, et seulement si, \mathcal{M} admet un voisinage standard \mathcal{V} tel que toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $x(0)$ est standard dans \mathcal{V} peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$.

Preuve. 1. Soit B la formule "toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $x(0) = \alpha$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu$." Dire dans le lemme $\text{dis}(\alpha, \mathcal{M}) \simeq 0$ équivaut à dire $\forall^{\text{st}} \eta \text{dis}(\alpha, \mathcal{M}) < \eta$ et dire $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ revient à dire $\forall^{\text{st}} \mu \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu$ (voir l'annexe A.2). La stabilité de \mathcal{M} est caractérisée par la formule

$$\forall \alpha (\forall^{\text{st}} \eta \text{dis}(\alpha, \mathcal{M}) < \eta \Rightarrow \forall^{\text{st}} \mu B),$$

où f et \mathcal{M} sont des paramètres standard, η , μ des réels positifs. D'après la première formule de réduction de (A.1) dans l'annexe A.1, l'implication est équivalente à

$$\forall \mu \exists^{\text{fin}} \eta' \forall \alpha (\forall \eta \in \eta' \text{dis}(\alpha, \mathcal{M}) < \eta \Rightarrow B).$$

L'ensemble η' étant fini, Il admet un plus petit élément $\eta > 0$ et la dernière formule devient

$$\forall \mu \exists \eta \forall \alpha (\text{dis}(\alpha, \mathcal{M}) < \eta \Rightarrow B).$$

C'est la définition usuelle de la stabilité de \mathcal{M} .

2. Par transfert, l'attractivité d'un sous-ensemble standard est équivalente à l'existence d'un bassin d'attraction standard. Dire dans le lemme que $t \simeq +\infty$ équivaut à dire $\forall^{\text{st}} r t > r$. La caractérisation du bassin d'attraction standard \mathcal{V} est que toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $x(0)$ est standard dans \mathcal{V} peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie

$$\forall t (\forall^{\text{st}} r t > r) \Rightarrow \forall^{\text{st}} \mu \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu.$$

Dans cette formule, $x(\cdot)$ et \mathcal{M} sont des paramètres standard tandis que r, μ sont des réels positifs. En appliquant la première formule de réduction de (A.1), on a

$$\forall \mu \exists^{\text{fin}} r' \forall t (\forall r \in r' t > r \Rightarrow \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu).$$

Dire, pour r' ensemble fini, $\forall r \in r' t > r$ équivaut à dire $t > r$ pour $r = \max r'$ et la formule devient

$$\forall \mu \exists r \forall t (t > r \Rightarrow \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) < \mu).$$

Ainsi, pour tout standard α dans \mathcal{V} , toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $x(0) = \alpha$, est prolongeable pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dis}(x(t), \mathcal{M}) = 0$. Par transfert, cette propriété est vraie pour tout α dans \mathcal{V} . C'est la définition classique de l'attractivité. ■

Voici une élégante caractérisation de la stabilité asymptotique d'un sous-ensemble compact positivement invariant. Notez à quel endroit de la preuve la compacité et l'invariance positive interviennent.

Lemme 0.0.4 *Supposons que le système (6) a la propriété d'unicité des solutions et que f, U et \mathcal{M} sont standard. Supposons que \mathcal{M} est un sous-ensemble compact de U qui soit positivement invariant pour (6). Alors \mathcal{M} est asymptotiquement stable pour (6) si, et seulement si, il existe un standard $a > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de (6) pour laquelle $\text{dis}(x(0), \mathcal{M}) < a$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$.*

Preuve. Supposons d'abord que \mathcal{M} , compact et positivement invariant, est asymptotiquement stable. Il admet donc un bassin d'attraction \mathcal{V} . Soit $a > 0$ standard tel que l'adhérence de l'ensemble $A = \{x \in U : \text{dis}(x, \mathcal{M}) < a\}$ est incluse dans \mathcal{V} . Soit $\alpha \in A$ et $x(t; \alpha)$ la solution de (6) telle que $x(0; \alpha) = \alpha$.

Soit $\alpha_0 \in \mathcal{V}$ la partie standard de α . Comme \mathcal{M} est attractif, d'après le lemme 0.0.3 la solution $x_0(t; \alpha_0)$ de (6) partant de α_0 est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x_0(t; \alpha_0), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$. D'après le lemme de l'ombre courte (annexe A.5), $x(t, \alpha) \simeq x_0(t; \alpha_0)$ pour tout t limité positif. D'après le lemme de Robinson [58] (voir l'annexe A.3), il existe $\rho \simeq +\infty$ tel que $x(t; \alpha) \simeq x_0(t; \alpha_0)$ pour tout t dans $[0, \rho]$. A ce stade, on sait donc que $\text{dis}(x(t; \alpha), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout t illimité tel que $t \leq \rho$. Par stabilité de \mathcal{M} , d'après le lemme 0.0.3, cette approximation reste vraie pour tout $t > \rho$ et $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un standard $a > 0$ qui satisfait la propriété du lemme. L'ensemble A standard ci-dessus est alors par définition contenu dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} . D'où l'attractivité de \mathcal{M} . Soit $x(t; \alpha)$ une solution de (6) où α est infiniment proche d'un standard $\alpha_0 \in \mathcal{M}$ (\mathcal{M} est compact). Puisque $\alpha \in A$, par hypothèse, $x(t; \alpha)$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t; \alpha), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$. D'autre part, la trajectoire positive de la solution maximale $x_0(t; \alpha_0)$ de (6) est dans l'ensemble positivement invariant \mathcal{M} . Par le lemme de l'ombre courte, $x(t, \alpha) \simeq x_0(t; \alpha_0) \in \mathcal{M}$ pour tout $t \geq 0$ limité. Finalement, $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \geq 0$ et \mathcal{M} est stable. ■

Remarque 0.0.5 *Soit l'équation (7) dépendant du paramètre $y \in Y$. Supposons que (7) a la propriété d'unicité et que f , U et Y sont standard. Soit \mathcal{M}_y un sous-ensemble compact standard de U positivement invariant pour (7) pour tout y dans Y . A la lumière du lemme 0.0.4, on peut établir que \mathcal{M}_y est asymptotiquement stable pour (7) si, et seulement si, il existe un standard $a > 0$ tel que pour tout standard $y \in Y$, toute solution $x(t)$ de (7) pour laquelle $\text{dis}(x(0), \mathcal{M}) < a$ peut être prolongée pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$.*

Présentation de la première partie

Cette partie est composée de quatre chapitres. Le premier chapitre rappelle la théorie de Tikhonov [67] pour les systèmes lents-rapides. C'est la situation où la dynamique rapide converge vers des équilibres qui dépendent de la variable lente. Nous commenterons la pertinence du mot *perturbation* quand il ne s'agit en fait que de *déformation à un paramètre*. Le théorème de Tikhonov est formulé comme dans le papier de Lobry et al. [37] et cette approche topologique sera adoptée dans toute la thèse. Nous mentionnerons aussi le résultat correspondant en termes d'ANS. Le deuxième chapitre examine le cas où la dynamique rapide converge vers des cycles limites qui dépendent de la variable lente. Nous devons l'étude de cette configuration à Pontryagin et Rodygin [56]. Nous avons affaibli les conditions de leur théorème pour ne lui garder qu'un caractère topologique (voir aussi [63]). Nous

énonçons et démontrons les résultats sur un intervalle de temps borné, les preuves étant menées avec les techniques non standard. Nous concluons par deux exemples. Nous disons quelques mots sur la théorie géométrique des perturbations singulières dans le troisième chapitre, en introduisant la théorie de Fenichel sur la persistance des variétés invariantes et indiquerons comment dans [55] un cas de dynamique rapide oscillante est traité. Dans le dernier chapitre, le plus long, nous établissons des résultats d'approximations sur des intervalles de temps infinis lorsque la dynamique lente converge vers un compact positivement invariant. Nous le faisons aussi bien pour le cas d'une dynamique rapide oscillante que stationnaire. Les extensions des théorèmes de Tikhonov et de Pontryagin-Rodygin aux temps infinis en sont des cas particuliers. Ces résultats, qui sont prouvés dans le langage IST, s'interprètent en termes de stabilité pratique, une notion qui peut présenter un intérêt dans les domaines appliqués.

Chapitre 1

Théorie de Tikhonov

Dans son célèbre papier de 1952, A. N. Tikhonov [67] présentait sa théorie sur *les systèmes d'équations différentielles contenant de petits paramètres dans la dérivée*. On retrouve aussi son travail dans le chapitre X du livre de W. Wasow [76]. Ses résultats concernent des systèmes d'équations différentielles caractérisés par deux ou plusieurs échelles de temps. Le but de ce chapitre est de rappeler cette théorie pour les systèmes lents-rapides ainsi que son extension à des temps infinis. Notre préférence va à une formulation topologique que nous rappelons dans le premier paragraphe.

1.1 Perturbation plutôt que déformation

Le vocable “perturbation” tel que nous l’avons présenté jusqu’ici est inapproprié et il serait plus juste de le remplacer par “déformation ” à un paramètre. Il s’agit en effet d’étudier le comportement d’un champ associé à une équation différentielle dépendant d’un paramètre lorsque ce dernier tend vers une valeur donnée. A ce propos, comme relevé dans [62], Arnold avait écrit dans une note en bas de page ([3], page 157) “(the behaviour of the perturbed problem solutions) takes place in all systems that are close to the original unperturbed system. Consequently, one should simply study neighbourhoods of the unperturbed problem in a suitable function space. However, here and in other problems of perturbation theory, for the sake of mathematical convenience, in the statements of the results of an investigation such as an asymptotic result, we introduce (more or less artificially) a small parameter ε and, instead of neighborhoods, we consider one-parameter deformations of the perturbed systems”. L’Analyse Non Standard permet de définir une notion proprement dite de perturbation qui s’interprète classiquement par des “petits” voisinages dans une topologie adéquate de l’espace des champs continus sur un ouvert.

Munissons l'ensemble

$$\mathcal{T} = \{(\Omega, F, G, \alpha, \beta) : \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m}, (\alpha, \beta) \in \Omega, \\ F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continues}\}$$

de la topologie définie comme suit : un système de voisinages d'un élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ est engendré par les ensembles

$$V(D, a) = \{(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in \mathcal{T} : D \subset \Omega, \|F - F_0\|_D < a, \|G - G_0\|_D < a, \\ \|\alpha - \alpha_0\| < a, \|\beta - \beta_0\| < a\},$$

où D est un sous-ensemble compact de Ω_0 et a un nombre réel strictement positif. Ici $\|h\|_D = \sup_{u \in D} \|h(u)\|$, où h est définie sur le compact D à valeurs dans un espace normé. Appelons-la "la topologie de la convergence uniforme sur les compacts" et considérons le problème de Cauchy lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= F(x, y), \quad x(0) = \alpha, \\ \dot{y} &= G(x, y), \quad y(0) = \beta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

correspondant à un élément $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ de \mathcal{T} où $(\cdot) = d/dt$. Il s'agit donc d'étudier le système (1.1) avec ε suffisamment petit et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ suffisamment proche d'un élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} dans le sens de la topologie définie. Dans ce cas, l'équation rapide est définie par

$$x' = F_0(x, y), \tag{1.2}$$

où $(\cdot) = d/d\tau$ avec $\tau = t/\varepsilon$. Nous exprimerons les résultats de cette partie en terme de perturbation proprement dite mais tout, bien sûr, peut être exprimé en terme de déformation.

Dans le langage de l'ANS, l'élégance de l'approche vient du fait que la perturbation d'un objet standard Σ est juste un autre objet Σ' qui est non standard et infiniment proche de Σ . Les caractéristiques de l'objet Σ' sont alors examinées directement sans utilisation de propriétés telles que celles liées aux paramètres de déformation.

Définition 1.1.1 *Un élément $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ de \mathcal{T} est appelé perturbation de l'élément standard $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} si Ω contient tous les éléments presque standard dans Ω_0 , $F(x, y) \simeq F_0(x, y)$ et $G(x, y) \simeq G_0(x, y)$ pour tout (x, y) presque standard dans Ω_0 et $\alpha \simeq \alpha_0$, $\beta \simeq \beta_0$.*

Notons que $F_0(x, y)$ et $G_0(x, y)$ sont bien définies pour tous les éléments (x, y) presque standard dans Ω_0 . En effet, Ω_0 étant un ouvert standard, il contient tous les points (x, y) presque standard dans Ω_0 . Voici un lemme qui fait le lien entre cette définition et la notion d'infiniment proche selon la topologie de \mathcal{T} .

Lemme 1.1.2 [37] *L'élément $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ de \mathcal{T} est une perturbation de l'élément standard $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} si, et seulement si, $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ est infiniment proche de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Preuve. Soit $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Soit alors D un sous-ensemble compact standard de Ω_0 . Par compacité, tout élément $(x, y) \in D$ est presque standard dans D , donc dans Ω_0 . Par définition de la perturbation, on a alors que $D \subset \Omega$, $\alpha \simeq \alpha_0$, $\beta \simeq \beta_0$ et $F(x, y) \simeq F_0(x, y)$, $G(x, y) \simeq G_0(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$. Soit $a > 0$ un nombre réel standard. Les quatre dernières relations s'écrivent par définition $\|\alpha - \alpha_0\| < a$, $\|\beta - \beta_0\| < a$, $\|F - F_0\|_D < a$ et $\|G - G_0\|_D < a$. Ceci signifie que $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V(D, a)$ pour tout compact standard $D \subset \Omega_0$ et tout standard $a > 0$, c'est-à-dire que $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \simeq (\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Réciproquement, soit $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ infiniment proche de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit (x, y) presque standard dans Ω_0 . Notons alors par (x_0, y_0) l'élément standard de Ω_0 tel que $(x, y) \simeq (x_0, y_0)$. Ainsi, (x, y) est dans tout voisinage standard de (x_0, y_0) . Soit alors D un voisinage standard compact de (x_0, y_0) tel que $D \subset \Omega_0$. Donc $D \subset \Omega$, $(x, y) \in D$ et $\|F(x, y) - F_0(x, y)\| < a$, $\|G(x, y) - G_0(x, y)\| < a$ pour tout standard $a > 0$. D'où $(x, y) \in \Omega$ et $F(x, y) \simeq F_0(x, y)$, $G(x, y) \simeq G_0(x, y)$. Enfin, sachant que $\alpha \simeq \alpha_0$ et $\beta \simeq \beta_0$, nous arrivons au fait que $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ est une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. ■

1.2 Théorème de Tikhonov

Le théorème de Tikhonov concerne le cas où les solutions de l'équation rapide (1.2) tendent vers des points d'équilibre. Le théorème que nous énonçons ici est présenté comme dans [37]. Contrairement à la version d'origine, le problème perturbé n'est pas supposé satisfaire des conditions d'unicité des solutions. Nous traitons donc le problème (1.1). Nous faisons les hypothèses suivantes notées par la lettre T :

$T1$: *Pour tout y , l'équation rapide (1.2) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.*

La variété lente du système est définie par l'ensemble des points de $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$F_0(x, y) = 0. \quad (1.3)$$

Elle est constituée des points d'équilibre de l'équation rapide (1.2). On suppose alors qu'il existe une variété \mathcal{N} de dimension m qui soit contenue dans

la variété lente et qui soit le graphe d'une fonction continue sur un compact de \mathbb{R}^m d'intérieur non vide. Plus précisément :

T2 : Il existe une application continue $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$, Y étant un compact dans \mathbb{R}^m d'intérieur non vide, telle que $\mathcal{N} = \{(x, y) \in \Omega_0 : x = \xi(y), y \in Y\}$. De plus, pour tout $y \in Y$, $x = \xi(y)$ est une racine isolée de l'équation (1.3), dans le sens où $F_0(\xi(y), y) = 0$ et qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que les relations $y \in Y$, $\|x - \xi(y)\| < \delta$ et $x \neq \xi(y)$ impliquent $F_0(x, y) \neq 0$.

La troisième hypothèse est essentielle.

T3 : Pour tout y dans Y , l'équilibre $x = \xi(y)$ de l'équation rapide (1.2) est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction est uniforme sur Y .

De l'hypothèse *T3*, il découle que pour tout $y \in Y$, $x = \xi(y)$ est une racine isolée de l'équation (1.3) uniformément par rapport à y dans Y , dans le sens où $F_0(\xi(y), y) = 0$ et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que les relations $y \in Y$, $\|x - \xi(y)\| < a$ et $x \neq \xi(y)$ impliquent $F_0(x, y) \neq 0$. Le réel a provient de la définition du bassin d'attraction uniforme.

En substituant $\xi(y)$ à x dans la deuxième équation du problème de départ on obtient l'équation lente

$$\dot{y} = G_0(\xi(y), y), \quad (1.4)$$

qui sera définie dans l'intérieur \mathring{Y} du compact Y .

T4 : L'équation lente (1.4) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale donnée.

En adjoignant à l'équation rapide (1.2), de paramètre $y = \beta_0$, la condition initiale $x(0) = \alpha_0$, on obtient l'équation de la couche limite

$$x' = F_0(x, \beta_0), \quad x(0) = \alpha_0. \quad (1.5)$$

Le problème réduit consiste en l'équation lente (1.4) avec la condition initiale $y(0) = \beta_0$:

$$\dot{y} = G_0(\xi(y), y), \quad y(0) = \beta_0. \quad (1.6)$$

Une dernière hypothèse de "positionnement" est :

T5 : β_0 est dans \mathring{Y} et α_0 est dans le bassin d'attraction du point d'équilibre $x = \xi(\beta_0)$.

Le théorème de Tikhonov est alors un résultat de convergence des solutions du problème (1.1) sur un intervalle de temps compact : une solution de (1.1) possède une phase de transition décrite par l'équation de la couche limite du point (α, β) au point $(\alpha, \xi(\beta))$ près de la variété lente \mathcal{N} . Un mouvement lent, approché par le problème réduit, s'observe ensuite près de \mathcal{N} .

Théorème 1.2.1 [37] *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ un élément de \mathcal{T} et $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons vérifiées les hypothèses *T1* à *T5*. Soit*

$\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.5). Soit $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (1.6) et T un nombre réel dans son intervalle positif de définition. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l'élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ du problème (1.1) est définie au moins sur $[0, T]$ et il existe $\omega > 0$ (indépendant de T) tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| &< \eta \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq T, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Nous aurons besoin de l'énoncé externe du théorème.

Théorème 1.2.2 [37] Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$ standard et $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction standard continue. Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T5. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l'équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (1.6). Soit $T > 0$ standard dans l'intervalle positif de définition de $\bar{y}(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Alors toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie au moins dans $[0, T]$ et il existe $\omega > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq T, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Il existe d'autres versions du théorème de Tikhonov, utilisant des techniques différentes, comme les fonctions de Lyapunov, demandant donc plus de régularité pour les seconds membres du système étudié (voir [24, 32]). Dans cette dernière référence, par exemple, traitant en fait le cas non autonome, l'auteur impose en plus la stabilité exponentielle des équilibres de l'équation rapide (théorème 9.1, page 361). Enfin, il est intéressant de noter que la version d'origine (en russe) du papier de Tikhonov comporte une erreur reprise par Wasow dans son livre ([76], 1965) mais corrigée par la suite dans l'édition de 1976 [77]. Tikhonov, en effet, a formulé son résultat en n'imposant pas la propriété d'uniformité à la stabilité asymptotique de l'équilibre de l'équation rapide. L'erreur résidait dans l'énoncé et la preuve d'un lemme assurant que le module de stabilité η intervenant dans la définition de la stabilité asymptotique admet sous les hypothèses du problème une borne inférieure non nulle dans le compact Y . L'exemple simple suivant montre que cela est faux (voir la discussion sur ce point par le découvreur de l'erreur, F. Hoppensteadt [24]).

Exemple : L'origine du système qui s'écrit, en coordonnées polaires, comme suit

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r(\lambda - r)^2, \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}$$

est un équilibre asymptotiquement stable pour toute valeur du paramètre λ dans le compact $[0, 1]$. Pour tout λ dans $]0, 1]$, l'origine est le centre du cercle de rayon λ . Ce cercle est l'unique cycle limite de l'équation et il est instable de l'intérieur et stable de l'extérieur. Le bassin d'attraction de $(0, 0)$ est le disque ouvert D_λ formé par ces cycles. Si on suppose qu'il existe un module de stabilité η indépendant de λ qui réalise la définition de la stabilité asymptotique, le disque centré en l'origine et de rayon η devrait se trouver dans tous les disques D_λ . Ceci est absurde quand on sait que les D_λ tendent vers l'origine quand $\lambda \rightarrow 0$.

Le papier de Tikhonov et le livre de Wasow ne traitent pas le cas de la convergence des solutions sur un intervalle de temps infini. Hoppensteadt s'y attela dans une série de papiers ([23, 25, 26, 27]) et établit, **sous des conditions de régularité plus restrictives**, que les résultats du théorème de Tikhonov sont valables pour tous les temps $t \geq 0$ sous l'hypothèse que le problème réduit admet un équilibre asymptotiquement stable. Il a traité aussi le cas non autonome. Nous trouvons un résultat analogue dans le livre de Khalil ([32], théorème 9.4, page 384) usant là aussi de fonctions de Lyapunov mais imposant à la stabilité des équilibres des équations lente et rapide d'être exponentielle.

La formulation suivante se trouve aussi dans [37]. Pour que les approximations du théorème 1.2.1 soient étendues à tous les temps $t \geq 0$, il suffit donc que l'équation lente admette un équilibre asymptotiquement stable. Plus précisément :

T6 : Il existe un point d'équilibre y_∞ de l'équation lente (1.4) dans \mathring{Y} . Cet équilibre est asymptotiquement stable et β_0 est dans son bassin d'attraction.

Théorème 1.2.3 [37] *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ un élément de \mathcal{T} et $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons vérifiées les hypothèses T1 à T6. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.5) et $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (1.6). Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l'élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ du problème (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\begin{aligned}\varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| &< \eta \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } t \geq 0.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorème de Pontryagin-Rodygin

Lorsque les trajectoires de l'équation rapide (1.2) tendent vers des cycles Γ_y , le théorème de Tikhonov ne convient plus. Nous indiquons dans ce chapitre une description des solutions due à Pontryagin et Rodygin [56] dans un papier de 1960. Nous avons reformulé leur résultat en affaiblissant considérablement les conditions [63] et en utilisant pour les preuves les techniques de l'analyse non standard. Des approximations aussi bien pour les temps finis qu'infinis sont obtenues et illustrées par des exemples. Dans un des exemples nous sommes tombés sur un cas de retard à la bifurcation qui n'est pas couvert par la théorie de Neishtadt [51].

2.1 Approximations

D'après Pontryagin et Rodygin, le comportement limite du problème singulièrement perturbé lorsque la dynamique rapide admet des cycles Γ_y asymptotiquement stables est le suivant : après une transition rapide près des cycles Γ_y , les orbites de solutions s'enroulent très vite autour de la surface engendrée par ces cycles. C'est en quelque sorte l'équivalent de la variété lente. Le reste du mouvement, en fait la lente dérive de la variable y , est naturellement approché par la moyenne sur les cycles. Ce résultat était obtenu pour des champs de vecteurs de classe au moins C^2 , sous l'hypothèse de stabilité asymptotique des cycles Γ_y pour l'approximation linéaire, c'est-à-dire que l'équation variationnelle correspondant au cycle a des multiplicateurs de modules inférieurs à l'unité avec une seule exception. Cependant, le résultat que nous énonçons ici montre que la description des solutions par Pontryagin et Rodygin est essentiellement topologique et qu'il n'est pas besoin de tant de régularité. Nous conservons sur l'équation rapide l'hypothèse $T1$ que nous

renommions $P1$ et les autres hypothèses seront désignées par la lettre P .

$P1$: Pour tout y , l'équation rapide (1.2) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

$P2$: Il existe une famille de solutions $x^*(\tau, y)$ dépendant continûment de $y \in Y$, où $Y \subset \mathbb{R}^m$ est un compact d'intérieur non vide, telle que $x^*(\tau, y)$ est une solution périodique de l'équation rapide (1.2) de période $T(y) > 0$. L'application $y \rightarrow T(y)$ est continue.

$P3$: Le cycle Γ_y correspondant à la solution périodique $x^*(\tau, y)$ est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction est uniforme sur Y .

De ce qui précède on déduit que le cycle Γ_y dépend continûment de y et est localement unique, i.e. il existe un voisinage W de Γ_y tel que l'équation rapide (1.2) n'admet pas d'autre cycle dans W . La solution $x^*(\tau, y)$ est dite orbitalement asymptotiquement stable.

Nous définissons l'équation lente dans l'intérieur $\overset{\circ}{Y}$ de Y par le système moyennisé

$$\dot{y} = \bar{G}(y) := \frac{1}{T(y)} \int_0^{T(y)} G_0(x^*(\tau, y), y) d\tau. \quad (2.1)$$

Supposons ce qui suit :

$P4$: L'équation lente (2.1) possède la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale préalablement fixée.

$P5$: β_0 est dans $\overset{\circ}{Y}$ et α_0 est dans le bassin d'attraction de Γ_{β_0} .

Nous nous référons à l'équation de la couche limite comme étant l'équation (1.5) et au problème réduit comme étant

$$\dot{y} = \bar{G}(y), \quad y(0) = \beta_0. \quad (2.2)$$

Nous avons alors le résultat suivant dont la preuve est reportée au prochain paragraphe :

Théorème 2.1.1 [63] Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ un élément de \mathcal{T} . Supposons vérifiées les hypothèses $P1$ à $P5$. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.5). Soit $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (2.2) et L un nombre réel dans son intervalle positif de définition. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l'élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ du problème (1.1) est définie au moins sur $[0, L]$ et il existe $\omega > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La distance mentionnée est la distance usuelle dans \mathbb{R}^n définie pour chaque t par $\inf_{\gamma \in \Gamma_{y(t)}} \|x(t) - \gamma\|$.

Les approximations du théorème 2.1.1 peuvent être obtenues également pour tout $t \geq 0$ en supposant qu'il existe dans \mathring{Y} un point d'équilibre y_∞ de l'équation lente moyennisée (2.1) qui soit asymptotiquement stable.

P6 : L'équation lente (2.1) admet un point d'équilibre y_∞ dans \mathring{Y} qui est asymptotiquement stable et β_0 est dans son bassin d'attraction.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème 4.1.2 énoncé au chapitre 4.

Théorème 2.1.2 [63] *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ un élément de \mathcal{T} . Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P6. Soit $\tilde{x}(\tau)$ la solution de l'équation de la couche limite (1.5) et $\bar{y}(t)$ la solution du problème réduit (2.2). Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l'élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ du problème (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &< \eta, \\ \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| &< \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ \|y(t) - \bar{y}(t)\| &< \eta \text{ pour } t \geq 0, \\ \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &< \eta \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

2.2 Enoncés externes

Les théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 ont été énoncés en termes classiques. Ils sont des conséquences des résultats externes suivants. Dans ce qui suit, la notation $x(t) \simeq \Gamma_{\bar{y}(t)}$ remplace l'écriture $\text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) \simeq 0$.

Théorème 2.2.1 [63] *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$ standard. Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P5. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l'équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (2.2). Soit $L > 0$ standard dans l'intervalle positif de définition de $\bar{y}(t)$. Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Alors toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie au moins dans $[0, L]$ et il existe $\omega > 0$ (indépendant de L) tel que :*

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.2 [63] Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$ standard. Supposons vérifiées les hypothèses P1 à P6. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l'équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (2.2). Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Alors toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ (indépendant de L) tel que :

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \geq 0, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } t \geq \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

Nous avons précisé dans le paragraphe précédent que le théorème 2.1.2 est une conséquence du théorème 4.1.2 du chapitre 4. Nous ne démontrons donc pas à ce niveau que le théorème 2.2.2 implique le théorème 2.1.2, mais nous montrons que le théorème 2.2.1 implique le théorème 2.1.1. Le théorème 2.2.1 sera démontré dans le paragraphe 2.4.

Preuve. Désignons par \mathcal{F} la formule : “toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie au moins sur $[0, L]$ et il existe $\omega > 0$ tel que (2.3)” et respectivement par u_0 et u les variables $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ de \mathcal{T} . Désignons aussi par \mathcal{F}' la formule “toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie au moins sur $[0, L]$ et il existe $\omega > 0$ tel que (2.4)”. Dire que “ ε est infinitésimal et u est une perturbation de u_0 ” équivaut à dire

$$\forall^{st} \varepsilon^*, \varepsilon < \varepsilon^*,$$

u est dans tout voisinage standard V de u_0 .

De même, la formule \mathcal{F}' est équivalente à la formule $\forall^{st} \eta \mathcal{F}$. Le théorème 2.2.1 peut se formaliser par l'expression

$$\forall \varepsilon \forall u (\forall^{st} \varepsilon^* \forall^{st} V K \Rightarrow \forall^{st} \eta \mathcal{F}), \quad (2.5)$$

où K désigne l'expression “ $\varepsilon < \varepsilon^*$ et $u \in V$ ”. Ici, u_0 et L sont des paramètres standard, u compte parmi les éléments de \mathcal{T} , tandis que ε et ε^* font partie des réels strictement positifs et V est parmi les voisinages de u_0 . D'après la première formule de réduction de (A.1) (voir l'annexe A.1), (2.5) est équivalente à

$$\forall \eta \exists^{\text{fin}} \varepsilon^{*'} \exists^{\text{fin}} V' \forall \varepsilon \forall u (\forall \varepsilon^* \in \varepsilon^{*'} \forall V \in V' K \Rightarrow \mathcal{F}).$$

L'ensemble $\varepsilon^{*'}$ étant fini, il admet un plus petit élément $\varepsilon^* > 0$. De même, V' étant un ensemble fini, il existe V tel que $V = \bigcap_{v \in V'} v$. La dernière formule devient équivalente à

$$\forall \eta \exists \varepsilon^* \exists V \forall \varepsilon \forall u (K \Rightarrow \mathcal{F}).$$

En définitive, le théorème 2.1.1 est vérifié pour tout standard u_0 et $L \in I$. Par transfert, il est vérifié pour tout u_0 et tout $L \in I$. Le théorème 2.1.1 est ainsi démontré. ■

2.3 Lemmes préliminaires

Soit à présent l'ensemble $\mathcal{S} = \bigcup_{y \in Y} (\Gamma_y \times \{y\})$ et considérons le système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le lemme suivant assure qu'une trajectoire de (2.6) qui arrive infiniment près de \mathcal{S} reste proche de cet ensemble tant que y n'est pas infiniment proche du bord de Y . Les principaux outils pour le démontrer sont le lemme de l'ombre courte (annexe A.5) et le lemme de Robinson (annexe A.3).

Lemme 2.3.1 *Supposons satisfaites les hypothèses P1 à P3. Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (2.6) telle que $y(t)$ est presque standard dans \mathring{Y} pour tout t dans $[t_0, t_1]$ et $x(t_0) \simeq \Gamma_{y(t_0)}$. Alors $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$ pour tout t dans $[t_0, t_1]$.*

Preuve. Soit y_0 standard dans \mathring{Y} et soit x_0 standard dans Γ_{y_0} tels que $x(t_0) \simeq x_0$ et $y(t_0) \simeq y_0$. Comme fonction de τ , $(x(t_0 + \varepsilon\tau), y(t_0 + \varepsilon\tau))$ est une solution du système

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y), \\ y' &= \varepsilon G(x, y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

de condition initiale $(x(t_0), y(t_0))$. Ce problème à valeur initiale est une perturbation régulière du système

$$\begin{aligned} x' &= F_0(x, y), \\ y' &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de condition initiale (x_0, y_0) . D'après le lemme de l'ombre courte, nous obtenons

$$x(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq \Gamma_{y_0}, \quad y(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq y_0 \quad \text{pour } \tau \geq 0 \text{ limité.} \quad (2.9)$$

Supposons qu'il existe un s dans $[t_0, t_1]$ tel que $\text{dis}(x(s), \Gamma_{y(s)}) = \gamma_0$ n'est pas infinitésimale. Notons par ailleurs que d'après la remarque 0.0.5, P3 est équivalente à

P3' : il existe un standard $a > 0$ tel que, pour tout standard y , toute solution $\tilde{x}(\tau)$ de (1.2) pour laquelle $\text{dis}(\tilde{x}(0), \Gamma_y) < a$ peut être prolongée pour tout $\tau \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(\tilde{x}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$ pour tout $\tau \simeq +\infty$.

Soit $\gamma < \gamma_0$ tel que $0 \ll \gamma \leq a$ et choisissons $s \in]t_0, t_1]$ tel que $\text{dis}(x(s), \Gamma_{y(s)}) = \gamma$. Puisque $\text{dis}(x(t_0), \Gamma_{y(t_0)}) \simeq 0$ et $y(t)$ est presque standard dans \dot{Y} pour tout $t \in [t_0, s]$, il existe une plus petite valeur $m \in]t_0, t_1]$ de s telle que $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$ et un standard (x_1, y_1) tel que $y_1 \in \dot{Y}$ et $(x_1, y_1) \simeq (x(m), y(m))$. Si $\tau_0 = \frac{m - t_0}{\varepsilon}$ était limité, par (2.9) nous aurions $x(m) \simeq \Gamma_{y_0}$ et $y(m) \simeq y_0$, d'où $x(m) \simeq \Gamma_{y(m)}$. Ceci contredit le fait que $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$. La valeur τ_0 est donc illimitée. Considérons la solution $(x(m + \varepsilon\tau), y(m + \varepsilon\tau))$ de (2.7) avec la condition initiale $(x(m), y(m))$. Ce problème est une perturbation régulière de (2.8) de condition initiale (x_1, y_1) , de solution maximale $(\tilde{x}(\tau), y_1)$. D'après le lemme de l'ombre courte, $x(m + \varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau)$ et $y(m + \varepsilon\tau) \simeq y_1$ pour tout $\tau \leq 0$ limité. D'après le lemme de Robinson, il existe $\tau_1 < 0$ illimité, pouvant être choisi tel que $-\tau_0 < \tau_1$, satisfaisant encore $x(m + \varepsilon\tau_1) \simeq \tilde{x}(\tau_1)$. En notant que $\text{dis}(x(m + \varepsilon\tau), \Gamma_{y(m + \varepsilon\tau)}) < \gamma$ pour tout $\tau \in [-\tau_0, 0[$, nous aurons en particulier $\text{dis}(\tilde{x}(\tau_1), \Gamma_{y_1}) < \gamma \leq a$. D'après l'hypothèse (P3'), $\tilde{x}(\tau_1 + \tau)$ est définie pour tout $\tau \geq 0$ et satisfait $\tilde{x}(\tau_1 + \tau) \simeq \Gamma_{y_1}$ pour tout τ positif illimité. En particulier, pour $\tau = -\tau_1$, $\tilde{x}(0) \simeq \Gamma_{y_1}$ i.e. $x(m) \simeq \Gamma_{y_1} \simeq \Gamma_{y(m)}$. C'est une contradiction avec le fait que $\text{dis}(x(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$. ■

Le lemme suivant affirme que la composante y d'une trajectoire de (2.6) qui est infiniment proche de \mathcal{S} est approchée par une solution de l'équation lente (2.1). Il est démontré à l'aide du lemme de stroboscopie (annexe A.5) et du lemme de l'ombre courte.

Lemme 2.3.2 *Supposons satisfaites les hypothèses P1 à P4. Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (2.6) telle que $y(t_0)$ est presque standard dans \dot{Y} . Soit y_0 standard dans \dot{Y} tel que $y(t_0) \simeq y_0$ et $\bar{y}(t)$ la solution de (2.1) de condition initiale y_0 , définie dans un intervalle standard $[0, L]$. Soit $t_1 \geq t_0$ tel que $t_1 \leq t_0 + L$ et $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. Alors $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$ pour tout $0 \leq s \leq L$ tel que $t_0 + s \leq t_1$.*

Preuve. Considérons la collection externe $I = \{t \geq t_0 : (x(t), y(t)) \text{ est définie et } x(s) \simeq \Gamma_{y(s)} \text{ pour tout } s \in [t_0, t]\}$ qui contient l'intervalle $[t_0, t_1]$. Montrons que $y(t)$ satisfait l'hypothèse (i) du lemme de stroboscopie (théorème A.5.2). Soit $\mu = \varepsilon \min_{y \in Y} T(y)$. Puisque T est continue et Y est compact, μ est strictement positif. Soit t_λ limité dans $[t_0, t_1[$ tel que $y(t_\lambda)$ est presque standard dans \dot{Y} . Le changement de variables

$$\tau = \frac{t - t_\lambda}{\varepsilon}, \quad U(\tau) = \frac{y(t_\lambda + \varepsilon\tau) - y(t_\lambda)}{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

transforme le problème (2.6) de condition initiale $(x(t_\lambda), y(t_\lambda))$ en

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y(t_\lambda) + \varepsilon U), \\ U' &= G(x, y(t_\lambda) + \varepsilon U), \end{aligned}$$

de condition initiale $(x(t_\lambda), 0)$. La solution du dernier système est notée $(x(\tau), U(\tau))$. Pour τ et U limités, ce problème est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} x' &= F_0(x, y_\lambda), \\ U' &= G_0(x, y_\lambda), \end{aligned} \tag{2.11}$$

de condition initiale $(x_\lambda, 0)$, où x_λ et y_λ sont standard et tels que $x_\lambda \simeq x(t_\lambda)$, $y_\lambda \simeq y(t_\lambda)$. Le lemme de l'ombre courte donne

$$\begin{aligned} x(\tau) &\simeq x_0(\tau), \\ U(\tau) &\simeq U_0(\tau), \end{aligned} \tag{2.12}$$

pour tout τ limité, où $(x_0(\tau), U_0(\tau))$ est la solution de (2.11) de condition initiale $(x_\lambda, 0)$. Par conséquent, sachant que $x(t_\lambda) \simeq \Gamma_{y(t_\lambda)} \simeq \Gamma_{y_\lambda}$ et que x_λ et Γ_{y_λ} sont standard, il vient que $x_\lambda \in \Gamma_{y_\lambda}$. La première équation de (2.11) n'est rien d'autre que l'équation rapide (1.2) de condition initiale x_λ et de paramètre $y = y_\lambda$. Il existe $\tau_\lambda \in [0, T(y_\lambda)]$ tel que $x^*(\tau_\lambda, y_\lambda) = x_\lambda$. D'où

$$x_0(\tau) = x^*(\tau + \tau_\lambda, y_\lambda), \quad U_0(\tau) = \int_0^\tau G_0(x^*(s + \tau_\lambda, y_\lambda), y_\lambda) ds.$$

En utilisant (2.11) et (2.12) et la périodicité de x^* , nous avons

$$U(T(y_\lambda)) \simeq \int_0^{T(y_\lambda)} G_0(x^*(s, y_\lambda), y_\lambda) ds. \tag{2.13}$$

Considérons à présent l'instant $t_\nu := t_\lambda + \varepsilon T(y_\lambda)$. Nous affirmons que $t_\nu \in I$, c'est-à-dire que $x(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$ pour tout s dans $[t_0, t_\nu]$. Etant donné que t_λ est dans I , cette propriété est vérifiée pour tout s dans $[t_0, t_\lambda]$. Il reste à montrer qu'elle l'est aussi pour tout s dans $[t_\lambda, t_\nu]$. En effet, soit $s = t_\lambda + \varepsilon\tau$. Nous avons, d'après (2.10),

$$y(s) = y(t_\lambda) + \varepsilon U(\tau) \simeq y(t_\lambda)$$

pour tout τ dans $[0, T(y_\lambda)]$. Puisque $y(t_\lambda)$ est presque standard dans \mathring{Y} et $x(t_\lambda) \simeq \Gamma_{y(t_\lambda)}$, d'après le lemme 2.3.1 nous avons $x(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$ pour tout s dans $[t_\lambda, t_\nu]$.

Nous avons donc montré que, pour t_λ limité dans I et $y(t_\lambda)$ presque standard dans \mathring{Y} , il existe t_ν tel que $0 \simeq t_\nu - t_\lambda \geq \mu$, $[t_\lambda, t_\nu] \subset I$, et $y(s) \simeq y(t_\lambda)$ pour tout s dans $[t_\lambda, t_\nu]$. D'après (2.10) et (2.13), nous avons

$$\frac{y(t_\nu) - y(t_\lambda)}{t_\nu - t_\lambda} = \frac{U(T(y_\lambda))}{T(y_\lambda)} \simeq \bar{G}(y_\lambda) \simeq \bar{G}(y(t_\lambda)).$$

D'après le lemme de stroboscopie (annexe A.5), $[t_0, t_0 + L] \subset I$ et $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$ pour tout $0 \leq s \leq L$. Par conséquent, cette approximation est valable pour tout s tel que $t_0 + s \leq t_1$. ■

2.4 Preuve du théorème 2.2.1

Soit $(x(t), y(t))$ une solution du système (1.1). Alors $(x(\varepsilon\tau), y(\varepsilon\tau))$ est une solution de

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y), \\ y' &= \varepsilon G(x, y), \end{aligned}$$

de condition initiale (α, β) . Ce problème est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y), \\ y' &= 0, \end{aligned}$$

de condition initiale (α_0, β_0) . D'après le lemme de l'ombre courte, $x(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau)$ et $y(\varepsilon\tau) \simeq \beta_0$ pour tout $\tau \geq 0$ limité. Le lemme de Robinson assure alors l'existence d'un réel ω positif illimité tel que ces approximations demeurent vraies pour tout $\tau \in [0, \omega]$. On peut choisir ω tel que $\varepsilon\omega \simeq 0$. D'autre part, d'après les hypothèses P2 à P5, $\tilde{x}(\tau)$ est définie pour tout $\tau \geq 0$ et satisfait $\tilde{x}(\tau) \simeq \Gamma_{\beta_0}$ pour tout τ positif et illimité. Cette dernière propriété reste vraie en particulier pour $\tau = \omega$, ce qui signifie qu'au bout d'un temps $t_0 := \varepsilon\omega$ la solution de (1.1) est infiniment proche de $\Gamma_{\beta_0} \subset \mathcal{S}$. Supposons qu'il existe $s \in]t_0, L]$ tel que $y(s) \not\simeq \bar{y}(s)$. Soit $r > 0$ standard tel que $\|y(s) - \bar{y}(s)\| \geq r$. Considérons alors le voisinage tubulaire

$$\mathcal{B} = \{(t, y) : t \in [0, L], y \in \mathring{Y} \text{ et } \|\bar{y}(t) - y\| < r\}.$$

Puisque $\bar{y}(t)$ est presque standard dans \mathring{Y} , nous pouvons choisir r suffisamment petit de manière que pour tout $(t, y) \in \mathcal{B}$, y est presque standard dans \mathring{Y} . Soit alors $t_1 < L$ la plus petite valeur de t pour laquelle $y(t_1)$ est sur le bord de \mathcal{B} . Le lemme 2.3.1 assure que la solution reste infiniment proche de \mathcal{S} pour $t \in [t_0, t_1]$. Le lemme 2.3.2 permet d'affirmer que $y(t) \simeq \bar{y}(t)$ pour $t \leq t_1$. En particulier, $y(t_1) \simeq \bar{y}(t_1)$ ce qui contredit $\|y(t_1) - \bar{y}(t_1)\| = r$. Ainsi, $y(t)$ est définie au moins sur $[0, L]$ et satisfait $y(t) \simeq \bar{y}(t)$. Finalement, $x(t) \simeq \Gamma_{y(t)} \simeq \Gamma_{\bar{y}(t)}$ pour tout t dans $[\varepsilon\omega, L]$.

Remarque 2.4.1 *Il est utile d'ajouter qu'une trajectoire qui est infiniment proche de \mathcal{S} à un temps \bar{t} reste près du cycle $\Gamma_{\bar{y}(\bar{t})}$ le long duquel elle oscille*

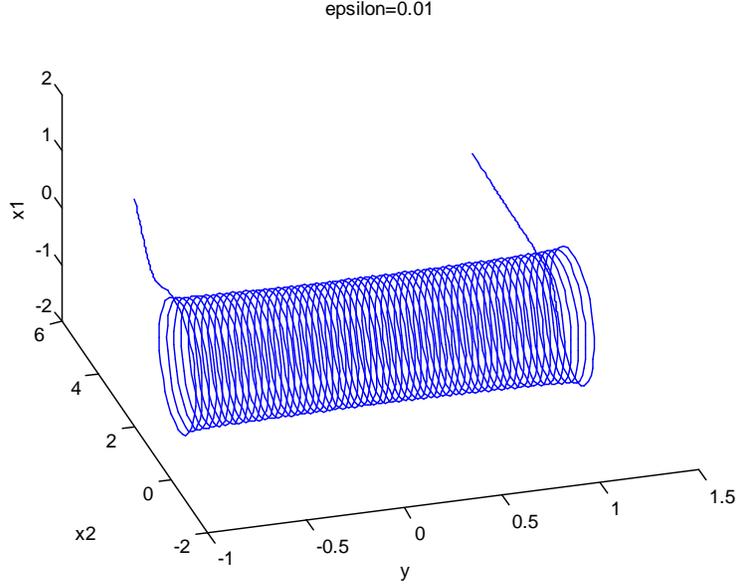


FIG. 2.1 – Une solution de (2.14) avec $\varepsilon = 0.01$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\beta = -1$ dans l'espace de phase (x_1, x_2, y) . La trajectoire continue à s'enrouler autour de la surface engendrée par les cycles Γ_y , même quand ces derniers sont instables, jusqu'à $y = +1$.

rapidement avec une période approximative de $\varepsilon T(\bar{y}(t))$. Plus exactement, pour tout $\bar{t} \in [\varepsilon\omega, L]$, il existe $\delta(\bar{t}) \in [0, T(\bar{y}(\bar{t}))]$ tel que pour τ limité

$$x(t) \simeq x^*\left(\frac{t - \bar{t}}{\varepsilon} + \delta(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t})\right).$$

En effet, soit $\bar{t} \in [\varepsilon\omega, L]$. Par ce qui précède, $x(\bar{t}) \simeq \Gamma_{y(\bar{t})}$. Soit x° standard tel que $x^\circ \simeq x(\bar{t})$ et $x^\circ \in \Gamma_{y(\bar{t})}$. Il existe alors $\delta(\bar{t}) \in [0, T(y(\bar{t}))]$ tel que $x^(\delta(\bar{t}), y(\bar{t})) = x^\circ$. En posant $\tau = \frac{t - \bar{t}}{\varepsilon}$ dans (2.6), le lemme de l'ombre courte donne l'approximation*

$$x(\bar{t} + \varepsilon\tau) \simeq x^*(\tau + \delta(\bar{t}), y(\bar{t})) \text{ pour } \tau \text{ limité.}$$

Finalement, l'affirmation est prouvée sachant que $y(\bar{t}) \simeq \bar{y}(\bar{t})$.

2.5 Exemples

Exemple 1 [63]

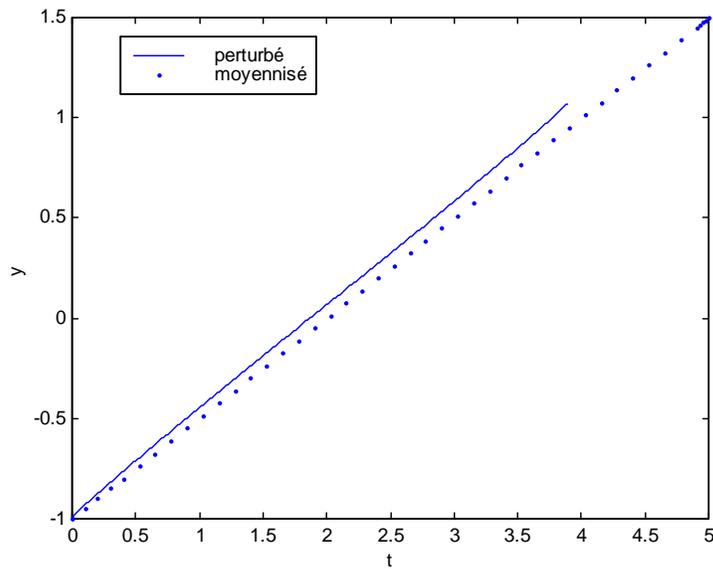


FIG. 2.2 – Comparaison de la composante $y(t, \varepsilon)$ de la solution de (2.14) et de la solution $\bar{y}(t)$ de l'équation moyennisée (2.17) correspondant aux données de Fig.2.1. L'approximation de $y(t, \varepsilon)$ par $\bar{y}(t)$ est valable jusqu'à $t = 4$.

L'exemple suivant illustrera le résultat du théorème 2.1.1 mais aussi un phénomène de retard à la bifurcation. Considérons le système lent-rapide tridimensionnel

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ \dot{y} &= x_1^2,\end{aligned}\tag{2.14}$$

d'équation rapide

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 - yx_1(1 - x_1^2 - x_2^2)^3, \\ x_2' &= -x_1 - yx_2(1 - x_1^2 - x_2^2)^3,\end{aligned}\tag{2.15}$$

où y est un paramètre. En coordonnées polaires ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$), l'équation (2.15) s'écrit

$$\begin{aligned}r' &= -ry(1 - r^2)^3, \\ \theta' &= -1.\end{aligned}\tag{2.16}$$

De (2.16) nous voyons que l'équation rapide (2.15) possède un cycle unique non trivial Γ_y pour toute valeur non nulle de y , qui n'est autre que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Soit $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, -\sin \tau)$ une solution 2π -periodique d'orbite Γ_y . Ces cycles sont asymptotiquement stables pour tout $y < 0$ et instables pour $y > 0$. Si $y = 0$, l'origine de (2.15) est un centre. Le théorème de Pontryagin-Rodygin [56] ne s'applique pas car les cycles Γ_y ne sont pas exponentiellement stables. Notons aussi que pour tout $y < 0$, le bassin d'attraction de Γ_y est le plan (x_1, x_2) tout entier privé de l'origine, si bien que la stabilité est uniforme sur tout intervalle Y de $] -\infty, 0[$. Soit (S) le problème de Cauchy consistant en le système (2.14) avec la condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ telle que $\beta < 0$. Le problème réduit est défini par

$$\dot{y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \beta.\tag{2.17}$$

Sa solution est $\bar{y}(t) = \beta + t/2$. D'après le théorème 2.1.1, la solution de (2.14) satisfait $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t)$ tant que $0 \leq t \leq L < -2\beta$. De plus, d'après la remarque 2.4.1, $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon))$ reste près du cycle $\Gamma_{\bar{y}(t)}$, en oscillant rapidement autour, avec une période approximative de $2\pi\varepsilon$, c'est-à-dire que $r(t)$ est approchée par la solution de l'équation moyennisée

$$\varepsilon \dot{r} = -r\bar{y}(t)(1 - r^2)^3, \quad r(0) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.\tag{2.18}$$

La solution de (2.18) est notée par $\bar{r}(t)$. Soit $s(t) := \bar{r}(-4\beta - t)$. On vérifie en dérivant que

$$\varepsilon \dot{s} = -s\bar{y}(t)(1 - s^2)^3.$$

De plus, $s(-2\beta) = \bar{r}(-2\beta)$. On en déduit que $s(t) = \bar{r}(t)$. En particulier, pour $t = 0$, $\bar{r}(-4\beta) = \bar{r}(0)$. Puisque $\bar{y}(-4\beta) = -\beta$, si une trajectoire du système moyennisée s'approche des cycles de rayon 1 pour une valeur $\beta < 0$, elle demeure alors proche des cycles tant que $\beta < \bar{y}(t) < -\beta$. Rappelons que, pour $0 < \bar{y}(t) < -\beta$, les cycles sont instables : il y a retard à la bifurcation pour le système moyennisé. La relation *entrée-sortie* près des cycles est définie par $\beta \mapsto -\beta$. D'après le théorème 2.1.1, la solution de (2.14) est approché par la solution moyennisée tant que $0 \leq t < -2\beta$, c'est-à-dire tant que $\beta \leq \bar{y}(t) < 0$. Les figures 2.1 et 2.2 sont des simulations numériques (MATLAB) montrant que la solution $y(t, \varepsilon)$ est approchée par la solution moyennisée $\bar{y}(t)$ même au-delà du temps $t = -2\beta$ où les cycles deviennent instables. Cette approximation a lieu asymptotiquement jusqu'au *temps de sortie* $t = -4\beta$ du système moyennisé. L'enroulement de la trajectoire de $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ autour des cycles Γ_y se poursuit pour des valeurs strictement positives de y , bien que les cycles soient devenus instables. Ainsi, si y est considéré comme un paramètre dynamique de bifurcation, le phénomène de retard à la bifurcation relevé par A. Neishtadt [51] (voir l'annexe A.7) demeure valable pour cet exemple bien que la stabilité des cycles soit asymptotique et non exponentielle. Notons à ce propos que A. Neishtadt [51] a établi le phénomène de retard à la bifurcation dans des situations plus générales, où les seconds membres des systèmes lents-rapides qu'il considère dépendent de ε et où la "variété lente" n'est pas invariante comme c'est le cas dans cet exemple.

Exemple 2

Considérons le système (Σ) suivant

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2,\end{aligned}$$

qui se transforme en coordonnées cylindriques $(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, y)$ en

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= -r^2 y^3 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

L'équation rapide

$$\begin{aligned}r' &= r(r - 1)^2(1 - r^2), \\ \theta' &= 1,\end{aligned}\tag{2.19}$$

admet un cycle limite stable Γ_y correspondant à $r = 1$ (cercle de centre l'origine et de rayon 1). Son bassin d'attraction est uniforme par rapport à

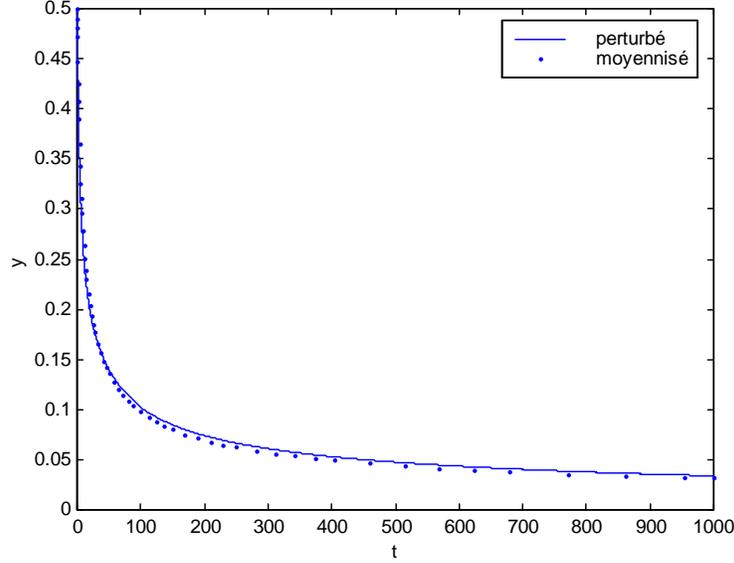


FIG. 2.3 – Comparaison de la composante $y(t, \varepsilon)$ de la solution de (Σ) de condition initiale $(1, 1, 0.5)$ et de la solution $\bar{y}(t)$ de l'équation moyennisée (2.20) avec $\varepsilon = 0.05$.

y , puisque c'est tout le plan (x_1, x_2) excepté l'origine. Ce cycle correspond par exemple à la solution 2π -périodique $x^*(\tau, y) = (\cos \tau, \sin \tau)$. D'après le théorème 2.1.1, l'équation régissant le mouvement lent est donnée par

$$\dot{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^3 \cos^2 \tau d\tau = -\frac{y^3}{2}. \quad (2.20)$$

Cette équation admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable. Si l'on choisit une condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ de (Σ) telle que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, la solution $\bar{y}(t)$ de (2.20) de condition initiale β est $\bar{y}(t) = \pm \sqrt{\beta^2 / (t\beta + 1)}$. Le théorème 2.1.2 permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}(x(t, \varepsilon), \Gamma_{\bar{y}(t)}) &= 0, \quad t > 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

On donne un exemple de simulation sur la figure.2.3. On reviendra à cet exemple plus loin.

Chapitre 3

Sur la théorie géométrique

Nous avons parlé dans l'introduction de l'approche géométrique de la théorie des perturbations singulières. Ce chapitre en est un très bref aperçu et il nous permet de signaler un travail où justement les théorèmes de réductions géométriques sont utilisés dans le cas où la dynamique rapide est oscillante.

3.1 Variété invariante

Une méthode dite des développements asymptotiques (DA) [54, 70, 73] en puissances de ε pour l'étude de systèmes autonomes tels que (1), donne en première approximation la solution $\bar{y}(t)$ du problème réduit tel que défini par Tikhonov et vivant dans ce que nous avons appelé la variété lente \mathcal{N} . On pense alors naturellement à associer à un tel développement une variété \mathcal{N}_ε dans l'espace des phases sur laquelle on fait vivre la solution obtenue avec le DA. La question est de savoir si une telle variété existe. C'est N. Fenichel qui a donné les premières réponses [18]. Considérons le système

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3.1}$$

où f et g sont de classe C^∞ , (x, y) est dans un compact $X \times Y$ de \mathbb{R}^{n+m} et ε dans un intervalle contenant 0. Les géomètres examinent plus souvent ce système à l'échelle du temps $\tau = t/\varepsilon$,

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon).\end{aligned}\tag{3.2}$$

On suppose que l'ensemble

$$\mathcal{N}_0 = \{(x, y) \in X \times Y, f(x, y, 0) = 0\}$$

est une variété de dimension m . Celle-ci représentera la première approximation de la variété invariante \mathcal{N}_ε de dimension m . C'est cette dernière, quand elle existe, qui sera appelée variété lente en théorie géométrique. \mathcal{N}_0 , quant à elle, est la variété critique. Le champ sur \mathcal{N}_ε est approché par celui sur \mathcal{N}_0 . On dit que \mathcal{N}_0 est normalement hyperbolique si le linéarisé de

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, 0), \\ y' &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

en tout point de \mathcal{N}_0 a exactement m valeurs propres sur l'axe imaginaire. Fenichel affirme justement à ce propos que *si \mathcal{N}_0 est une variété compacte normalement hyperbolique, il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon^*$, il existe une variété (localement) invariante¹ \mathcal{N}_ε telle que $\mathcal{N}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{N}_0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On dit que \mathcal{N}_0 persiste pour de petites valeurs de ε . La condition de compacité est essentielle pour ce résultat d'existence et d'unicité de la variété lente.*

Énonçons à titre indicatif et avec plus de précision ce même résultat en terme de graphe d'une fonction.

Hypothèse 1 : f et g sont de classe C^∞ sur l'ouvert $U \times I$ de \mathbb{R}^{n+m+1} , $0 \in I$.

Hypothèse 2 : \mathcal{N}_0 est une variété compacte normalement hyperbolique pour (3.3), graphe d'une fonction C^∞

$$x = \xi(y)$$

définie sur un domaine compact K .

Théorème 3.1.1 (1^{er} théorème de la variété invariante de Fenichel)
[30] *Sous les hypothèses 1 et 2, pour tout entier naturel r , pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une fonction de classe C^r en y et ε*

$$x = \eta(y, \varepsilon)$$

définie sur K telle que la variété

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \{(x, y), x = \eta(y, \varepsilon)\}$$

est localement invariante pour (3.1). De plus, \mathcal{N}_ε est $\mathcal{O}(\varepsilon)$ proche de \mathcal{N}_0 .

La variété critique \mathcal{N}_0 étant hyperbolique, elle possède une variété stable E^s et une variété instable E^u correspondant respectivement aux valeurs propres à partie réelle strictement négative et strictement positive. Le second

¹ \mathcal{N}_ε est dite localement invariante pour (3.1) si elle admet un voisinage V tel qu'aucune trajectoire ne quitte \mathcal{N}_ε sans quitter V .

théorème de Fenichel que nous omettons d'énoncer en termes de graphes de fonctions montre, sous les hypothèses 1 et 2, l'existence, pour tout $r < +\infty$ et pour ε assez petit, de deux variétés W_ε^s et W_ε^u localement invariantes et C^r . Ces variétés vérifient bien sûr localement $W_\varepsilon^s \rightarrow E^s$ et $W_\varepsilon^u \rightarrow E^u$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Plus de détails peuvent être trouvés dans [30, 31] par exemple.

3.2 Comment chercher l'équation de \mathcal{N}_ε ?

Il faut remarquer que les preuves des théorèmes de Fenichel utilisent des résultats d'existence comme le théorème des fonctions implicites. Par conséquent, quand il s'agit de les appliquer à un exemple précis on peut se heurter à des difficultés. Nous trouvons dans [32] une présentation incomplète mais plus pratique à certains égards qui a le mérite de souligner l'analogie des théorèmes de Fenichel avec le théorème de la variété centrale. Supposons pour simplifier que nos fonctions du second membre ne dépendent pas de ε . Soit $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ une solution de

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour que la variété lente $x = \eta(y, \varepsilon)$ soit invariante elle doit vérifier, pour tout t dans l'intervalle positif de définition de $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$

$$x(0, \varepsilon) - \eta(y(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \implies x(t, \varepsilon) - \eta(y(t, \varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

En dérivant les deux membres de $x = \eta(y, \varepsilon)$ par rapport à t et en multipliant par ε , on obtient à partir du système (3.4) l'équation aux dérivées partielles

$$f(\eta(y, \varepsilon), y) - \varepsilon \frac{\partial \eta(y, \varepsilon)}{\partial y} g(\eta(y, \varepsilon), y) = 0. \quad (3.5)$$

C'est *la condition de variété* que doit satisfaire $\eta(y, \varepsilon)$ pour ε petit. Il est clair que si $\varepsilon = 0$, l'équation (3.5) a pour solution $\eta(y, 0) = \xi(y)$, où $\xi(y)$ définit la variété critique. On ne sait pas toujours résoudre cette équation mais on peut obtenir une approximation de l'équation de la variété lente à partir d'un développement en série de Taylor en $\varepsilon = 0$, à condition que f et g soient suffisamment régulières. Si l'on substitue le développement

$$\eta(y, \varepsilon) = \eta_0(y) + \eta_1(y)\varepsilon + \eta_2(y)\varepsilon^2 + \dots \quad (3.6)$$

dans l'équation (3.5), on peut, en identifiant les coefficients des puissances de ε , trouver quelques termes de (3.6). Ainsi

$$\eta_0(y) = \xi(y),$$

et, par exemple, $\eta_1(y)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(y), y) \cdot \eta_1(y) = \frac{d\xi(y)}{dy} g(\xi(y), y)$$

qui est résoluble si $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(y), y)$ est inversible, ce qui est assuré par les conditions d'hyperbolicité dans la théorie de Fenichel.

Notons enfin que l'équation

$$\dot{y} = g(\eta(y, \varepsilon), y)$$

décrit dans ce cas le mouvement lent sur la variété lente. On l'appelle parfois *l'équation lente exacte*.

3.3 A propos de la dynamique rapide oscillante

Dans sa thèse, J. Ch. Poggiale [55] étudie un modèle général de dynamique des populations où il tient compte de ce qu'il a appelé *l'hétérogénéité* du milieu et/ou du comportement. Pour ce faire, il subdivise chaque population de son système en sous-populations qu'il appelle *états*. La dynamique des états est supposée plus rapide que celle des populations. Le modèle proposé est transformé après plusieurs changements de variables en un système lent-rapide que nous écrirons pour aller à l'essentiel sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f(u, n) + \varepsilon F(u, n), \\ \frac{dn}{d\tau} &= \varepsilon g(u, n), \\ \frac{d\varepsilon}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Les composantes de la variable lente n dans \mathbb{R}^{k_2} représentent les densités globales des populations, et les composantes de la variable rapide u dans \mathbb{R}^{k_1} sont en fait des fréquences obtenues comme rapport de la densité d'un état sur la densité globale. Le champ \mathcal{X} défini par (3.7) est supposé C^∞ dans $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}$. L'auteur examine les deux situations où la dynamique rapide converge vers un équilibre ou un cycle limite. Le premier cas est traité à l'aide d'un théorème de la variété centrale mais nous tenons ici à faire une brève allusion au second cas sans trop entrer dans les détails. Les cycles limites de l'équation rapide sont supposés *hyperboliquement stables* (i.e. les

valeurs propres du linéarisé de l'application du premier retour sont de modules strictement inférieurs à 1). Il est proposé deux méthodes. D'abord celle de la moyennisation sur les cycles. Un résultat dû à Zvonkin et Shubin [78] montre que *si une trajectoire se trouve initialement dans un voisinage du cycle limite Γ_{n_0} , la solution $(u(\tau), n(\tau))$ de (3.7) reste, à partir d'un instant τ_0 de l'ordre de $|\ln \varepsilon|$ à une distance inférieure à ε de $\Gamma_{n(\varepsilon\tau)}$* . Le problème est ensuite transformé en vue de l'application d'un théorème de moyennisation. En notant par S^1 l'espace quotient de \mathbb{R} par $[0, 2\pi]$, on sait qu'il existe un changement de coordonnées C^∞

$$u \longmapsto (z, \varphi)$$

dans un ε -voisinage de Γ_n , pour tout $n \in \mathbb{R}^{k_2}$, provenant de la paramétrisation des cycles. On en déduit que pour tout n le cycle Γ_n a pour équation $z = 0$ si bien que l'auteur arrive, en notant que z est de l'ordre de ε dans l' ε -voisinage, à transformer (3.7) en

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= \omega(n) + \varepsilon u(\varphi, n, \varepsilon), \\ \frac{dn}{d\tau} &= \varepsilon v(\varphi, n, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\omega(n)$ est une fréquence non nulle et u et v sont 2π -périodiques en $\varphi \in S^1$. Soit l'équation différentielle

$$\dot{p} = \varepsilon.G(p) := \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi, p, 0) d\varphi, \tag{3.9}$$

définie pour p dans un compact D de \mathbb{R}^{k_2} . Soit $p(\tau)$ la solution de (3.9) définie dans le compact D sur $[0, T]$, $T \ll 1$. Soit $n(\tau)$ la composante de la solution du problème perturbé (3.8) telle que $n(0) = p(0)$. Un théorème de moyennisation [2] affirme alors que

$$\forall \tau \in [0, T/\varepsilon], \quad \|n(\tau) - p(\tau)\| \leq C\varepsilon,$$

où C est une constante indépendante de ε , pourvu que ω ne s'annule pas dans D .

Les techniques de moyennisation sont bien rôdées et la méthode précédente est somme toute classique. Elle est similaire par ses hypothèses et ses conclusions au théorème de Pontryagin-Rodygin. La deuxième méthode est plus géométrique. Elle consiste à appliquer un théorème de réduction à la variété centrale à un système discret qui n'est autre que l'application du premier retour de Poincaré définie dans un voisinage du cycle limite. Il existe pour tout n une application de premier retour

$$P_n : \Sigma_n \rightarrow P_n(\Sigma_n),$$

définie sur une section Σ_n transverse à Γ_n . Soit $\Sigma = \bigcup_{n \in D} \Sigma_n$, D un compact de \mathbb{R}^{k_2} , qui soit une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ et soit l'application

$$\begin{aligned} P : \Sigma &\rightarrow P(\Sigma_n), \\ (u, n) &\mapsto P(u, n) = P_n(u). \end{aligned}$$

Pour ε_0 proche de 0, le théorème des fonctions implicites assure l'existence de $T_{\varepsilon_0}(u, n)$, temps écoulé entre un point (u, n) de la variété Σ et le premier retour à celle-ci. Soit le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \Delta(\Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \\ (u_0, n_0, \varepsilon) &\mapsto (u(T_\varepsilon(u_0, n_0)), n(T_\varepsilon(u_0, n_0)), \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il est supposé ce qui suit : Δ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{(k_1-1)+k_2+1}$; l'ensemble des points fixes de Δ est donné par $M = \{0\} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \{0\}$. Le linéarisé de Δ en tout point $(0, n, 0)$ de M possède $k_1 - 1$ valeurs propres de modules strictement inférieurs à 1 et 1 est une valeur propre de multiplicité $k_2 + 1$. D'après un théorème d'algèbre linéaire, $\mathbb{R}^{(k_1-1)+k_2+1}$ se décompose en tout point $(0, n, 0)$ de M sous la forme $W_n^s \times W_n^c$ où W_n^s est l'espace stable de dimension $k_1 - 1$ et W_n^c est l'espace central de dimension $k_2 + 1$. Sous ces hypothèses et avec les mêmes notations, il est énoncé le théorème de réduction suivant :

Théorème 3.3.1 [18] *Pour tout compact D de \mathbb{R}^{k_2} et tout entier naturel r , il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une application $\eta : D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^{k_1}$ de classe C^r et de graphe \mathcal{G} tels que*

- 1° $\eta(n, 0) = 0$,
- 2° \mathcal{G} est tangent à W_n^c en tout point de M ,
- 3° \mathcal{G} est invariant sous l'action de Δ (i.e. $\Delta(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$).

Pour vérifier que le difféomorphisme (3.10) vérifie le théorème ci-dessus, il est d'abord rappelé qu'ici aussi une trajectoire de condition initiale donnée rentre très vite dans un ε -voisinage de Σ . Il existe par ailleurs un changement de coordonnées

$$u \mapsto (z, \varphi) \in \mathbb{R}^{k_1-1} \times S^1$$

tel que dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{k_1-1} \times S^1 \times \mathbb{R}^{k_2}$ on ait $\Sigma \equiv \mathbb{R}^{k_1-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{k_2}$. Le difféomorphisme (3.10) peut s'écrire alors

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \Delta(\Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \\ (z_0, n_0, \varepsilon) &\mapsto (z(\bar{T}_\varepsilon(z_0, n_0)), n(\bar{T}_\varepsilon(z_0, n_0)), \varepsilon), \end{aligned}$$

où \bar{T}_ε est la composée de T_ε et du changement de coordonnées. Il est montré que $n(\bar{T}_\varepsilon(z_0, n_0)) = n_0 + O(\varepsilon)$ si bien que Δ s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta : \Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \Delta(\Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \\ (z_0, n_0, \varepsilon) &\mapsto (z(\bar{T}_\varepsilon(z_0, n_0)), n_0 + O(\varepsilon), \varepsilon), \end{aligned}$$

et pour lequel les points $(0, n_0, 0)$ sont des points fixes. La condition sur les valeurs propres est en outre assurée par la stabilité hyperbolique des cycles Γ_n quand $\varepsilon = 0$. Le théorème de réduction est applicable. Il existe une variété invariante de dimension $k_2 + 1$ sur laquelle s'observe la dynamique lente. Le difféomorphisme lent (exact) est donné par

$$\begin{aligned} \phi : D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] &\rightarrow \phi(D \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]) \\ (n_0, \varepsilon) &\mapsto (n(\bar{T}_\varepsilon(\eta(n_0, \varepsilon))), n_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Cette méthode ne comporte pas de limitation de la durée car la dynamique lente obtenue sur la variété centrale est exacte et “exponentiellement attrayante”. Il est cependant relevé que l'inconvénient réside dans la difficulté de traitement des systèmes discrets. Poggiale montre alors, et nous ne le développons pas ici, que la dynamique obtenue par la réduction à la variété centrale est une ε^2 -perturbation de la discrétisation de la dynamique réduite obtenue par moyennisation. Il en déduit alors que si cette dernière est structurellement stable, la première est aussi valable sans limitation de durée.

Chapitre 4

Extension aux temps infinis

Nous nous sommes proposés dans ce chapitre d’apporter des énoncés dont les théorèmes 1.2.3 et 2.1.2 sont des cas particuliers. Nous supposons que la dynamique lente admet un ensemble compact asymptotiquement stable. Les solutions de (1.1) vont vivre pour tout $t \geq 0$ mais les approximations des deux derniers théorèmes ne seront plus valables en général au-delà d’une certaine valeur très grande du temps. Par exemple, si la dynamique lente a un cycle limite, il pourrait y avoir un déphasage entre la solution périodique et la composante $y(t)$ de la solution de (1.1) (voir le paragraphe 4.5 en page 53). Nous discuterons ensuite les résultats de stabilité qui peuvent en découler, notamment en terme de stabilité pratique. Nous reformulerons les énoncés en non standard avant de prouver les résultats.

4.1 Théorèmes d’approximations

Nous énonçons un premier résultat d’approximations des solutions de (1.1) sous des conditions “à la Tikhonov”. L’équation lente (1.4) est supposée admettre un sous-ensemble compact positivement invariant.

Théorème 4.1.1 *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ un élément de \mathcal{T} et $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Supposons que les hypothèses T1 à T4 sont satisfaites et que α_0 est dans le bassin d’attraction de $\xi(\beta_0)$. Soit \mathcal{M} un sous-ensemble fermé de \dot{Y} qui soit positivement invariant pour l’équation lente (1.4). Supposons que \mathcal{M} est asymptotiquement stable pour (1.4) avec β_0 dans son bassin d’attraction. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l’équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (1.6). Alors pour tout $\eta > 0$ il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l’élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1)*

est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ et $\omega' > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon\omega < \eta, \quad 1/\omega' < \eta, \\
& \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| < \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\
& \|x(t) - \xi(\bar{y}(t))\| < \eta \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'] \\
& \|y(t) - \bar{y}(t)\| < \eta \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\
& \forall t \geq \omega' \exists y_t \in \mathcal{M} : \|y(t) - y_t\| < \eta, \\
& \text{et } \|x(t) - \xi(y_t)\| < \eta.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Notons que \mathcal{M} est nécessairement un sous-ensemble compact de \mathring{Y} comme le seront tous les sous-ensembles positivement invariants dans ce qui suit. Le cas particulier où \mathcal{M} est réduit à un point est le théorème 1.2.3.

Sous les hypothèses du théorème de Pontryagin-Rodygin, si l'on suppose que l'équation moyennisée (2.1) admet un sous-ensemble fermé positivement invariant, on a le résultat qui suit.

Théorème 4.1.2 *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$. Supposons que les hypothèses P1 à P4 sont satisfaites et que α_0 est dans le bassin d'attraction de Γ_{β_0} . Soit \mathcal{M} un sous-ensemble fermé dans \mathring{Y} qui soit positivement invariant pour l'équation lente (2.1). Supposons que \mathcal{M} est asymptotiquement stable pour (2.1) avec β_0 dans son bassin d'attraction. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l'équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (2.2). Alors pour tout $\eta > 0$ il existe $\varepsilon^* > 0$ et un voisinage V de l'élément $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} tels que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ et tout $(\Omega, F, G, \alpha, \beta) \in V$, toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ et $\omega' > 0$ tels que :*

$$\begin{aligned}
& \varepsilon\omega < \eta, \quad 1/\omega' < \eta, \\
& \|x(\varepsilon\tau) - \tilde{x}(\tau)\| < \eta \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\
& \|y(t) - \bar{y}(t)\| < \eta \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\
& \text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) < \eta \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\
& \forall t \geq \omega' \exists y_t \in \mathcal{M} : \|y(t) - y_t\| < \eta, \\
& \text{et } \text{dis}(x(t), \Gamma_{y_t}) < \eta.
\end{aligned}$$

On retrouve le théorème 2.1.2 quand \mathcal{M} est réduit à un équilibre asymptotiquement stable du problème réduit. Les preuves des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 seront données dans le paragraphe 4.6.2.

4.2 Non robustesse : quelques exemples

Il est connu que la stabilité asymptotique n'est pas robuste sous l'effet de petites perturbations. La stabilité asymptotique, disons de l'origine d'un problème perturbé régulièrement, n'est pas assurée par la stabilité asymptotique

de l'origine du problème réduit. Qu'en est-il des systèmes lents-rapides ? Supposons que l'origine d'un problème singulièrement perturbé et du problème réduit est un point d'équilibre. Il a été établi, sous des conditions de stabilité exponentielle tant de l'origine de l'équation rapide que de celle de l'équation lente, que l'origine de tout le problème est exponentiellement stable (voir par exemple [32] théorème 9.3, page 380). Pour un champ différentiable, lorsque le problème réduit possède par exemple un cycle limite Γ , la question de savoir si le problème singulièrement perturbé admet ou non une orbite périodique Γ_ε près de Γ pour de petites valeurs de ε a été traitée par des auteurs comme K. O. Friedrichs et W. Wasow [20], L. Flatto et N. Levinson [19], N. D. V. Anosov [1], N. Fenichel [18] et plus récemment par F. Verhulst [72]. Dans [1, 18], il a été établi que l'orbite Γ de période \mathcal{P} peut être "prolongée" (continued) à une famille Γ_ε d'orbites fermées si (i) Γ , comme orbite du problème réduit, a 1 comme multiplicateur simple de Floquet, (ii) pour tout $y \in \Gamma$, le point d'équilibre $x = \xi(y)$ de l'équation de la couche limite est hyperbolique. Ce genre de résultats exige des conditions fortes qui assurent jusqu'à l'unicité de Γ_ε pour ε assez petit avec une période tendant vers \mathcal{P} quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et la propriété de phase asymptotique. Examinons les exemples suivants où $(\dot{\cdot}) = d/dt$ et $(\prime) = d/d\tau$, avec $\tau = t/\varepsilon$.

Exemple 1 Le système lent-rapide planaire

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -y^2 x + \varepsilon y,\end{aligned}$$

où ε est un petit paramètre positif a pour équation rapide

$$x' = -x + y.$$

L'hypothèse $T1$ est clairement satisfaite par l'équation rapide. La variété lente est définie par la bissectrice $x = \xi(y) := y$ (Hypothèse $T2$). Elle est formée d'équilibres (globalement) asymptotiquement stables de l'équation rapide pour toute valeur de y (Hypothèse $T3$). En substituant, dans la deuxième équation du système, $\xi(y)$ à x et 0 à ε , on obtient l'équation lente

$$\dot{y} = -y^3,$$

qui satisfait $T4$. L'origine $y = 0$ de l'équation lente est (globalement) asymptotiquement stable (Hypothèse $T6$). On peut appliquer au problème le théorème 1.2.3, pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ (Hypothèse $T5$). On a alors

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= \bar{y}(t), \\ \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= \xi(\bar{y}(t)),\end{aligned}$$

où $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution du système tout entier de condition initiale (x_0, y_0) et $\bar{y}(t)$ est la solution de l'équation réduite. À présent, sachant que $\bar{y}(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, on obtient la limite suivante pour la solution du problème d'origine

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)) = (0, 0).$$

Cette limite ne signifie pas que l'origine du système, qui est ici un point d'équilibre, est asymptotiquement stable, ni même attractive. On vérifie par linéarisation que c'est un point-selle pour toute valeur de ε .

Exemple 2 Le système lent-rapide suivant

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x^3 + \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -y + x^2, \end{aligned}$$

est donné uniquement pour exhiber un exemple où, contrairement au précédent, l'origine de l'équation rapide $x' = -x^3$ est asymptotiquement stable mais pas exponentiellement et celle de l'équation lente $\dot{y} = -y$ est exponentiellement stable. On peut alors affirmer que toute solution du problème perturbé tend vers $(0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $t \rightarrow +\infty$. Pourtant, l'origine $(0, 0)$ est un point-selle pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.

Exemple 3 Les équations rapide et lente du système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x + \varepsilon, \\ \dot{y} &= -y + \varepsilon x, \end{aligned}$$

sont données respectivement par $x' = -x$ et $\dot{y} = -y$ dont les origines sont exponentiellement stables. Toute solution du problème singulièrement perturbé tend vers $(0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $t \rightarrow +\infty$. Cependant, l'origine n'est même pas un point d'équilibre du problème.

Exemple 4 Reconsidérons le système (Σ) de l'exemple 2 du chapitre 2 (page 32)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 + \varepsilon \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1 - \varepsilon \right) (1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{y} &= -y^3 x_1^2, \end{aligned}$$

transformé en coordonnées cylindriques en

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{y} &= -r^2 y^3 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Son équation rapide

$$\begin{aligned} r' &= r(r-1)^2(1-r^2), \\ \theta' &= 1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

admet le cercle unité Γ_y comme unique cycle limite stable. L'équation lente était définie par

$$\dot{y} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^3 \cos^2 \tau d\tau = -\frac{y^3}{2}. \quad (4.3)$$

L'origine $y = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable de (4.3) mais sa stabilité n'est pas exponentielle. On peut affirmer grâce au théorème 2.1.2 que pour toute condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ de (Σ) autre que l'origine, on a

$$\forall t \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \forall t > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon)), \Gamma_{\bar{y}(t)}) = 0,$$

où $(x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ est la solution du système (Σ) de condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ et $\bar{y}(t)$ est la solution de (4.3) de condition initiale β . Enfin, puisque $\bar{y}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} \text{dis}((x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), y(t)), \Gamma_0 \times \{0\}) = 0.$$

Cette limite ne dit pas que la courbe fermée $\Gamma_0 \times \{0\}$ dans l'espace de phases \mathbb{R}^3 est un ensemble asymptotiquement stable. D'ailleurs, pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, le cylindre formé par les cycles Γ_y est "répulsif" pour le système (Σ) , étant compris entre deux cylindres "attractifs" correspondant à $r = 1 - \varepsilon$ et $r = 1 + \varepsilon$. Autrement dit, la dynamique rapide "exacte" du problème, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned} r' &= r(r-1+\varepsilon)(r-1-\varepsilon)(1-r^2), \\ \theta' &= 1, \end{aligned}$$

qui est une déformation à un paramètre de (4.2), admet pour tout y et pour tout $\varepsilon > 0$ deux cycles limites $r = 1 - \varepsilon$ et $r = 1 + \varepsilon$ stables entourant le cycle limite $r = 1$ instable.

Dans les applications, il est raisonnable d'imposer la condition de stabilité de type exponentiel, ou de type exponentiel uniforme en place de la simple stabilité asymptotique (on dira que la stabilité asymptotique est critique lorsqu'elle n'est pas exponentielle). Les exemples qui précèdent montrent justement que la stabilité asymptotique n'est pas robuste. Signalons enfin que la stabilité exponentielle des origines des équations lente et rapide n'est pas une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de l'origine, quand c'est un équilibre, du système complet. En voici un exemple vu dans [32]. On peut aussi voir dans cette référence le théorème 9.2, page 377.

Exemple 5 ([32], exemple 9.9) L'origine du système

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x + \varepsilon(x - y^3), \\ \dot{y} &= -y^3 + x.\end{aligned}\tag{4.4}$$

est un point d'équilibre. L'équation lente est donnée par

$$\dot{y} = -y^3.$$

Son origine est asymptotiquement stable mais pas exponentiellement. L'équation rapide est

$$x' = -x,$$

et l'origine en est un équilibre exponentiellement stable. On montre à l'aide de fonctions de Lyapunov de type quadratique (voir [32]) que l'origine du problème (4.4) est asymptotiquement stable (voire globalement) pour ε assez petit. L'existence de fonctions de Lyapunov quadratiques n'implique pas nécessairement la stabilité exponentielle, qui en est un cas particulier.

4.3 Stabilité pratique

Les limites des exemples précédents, bien que n'impliquant pas une stabilité asymptotique, apportent une information d'un intérêt pratique. Elles traduisent une sorte de stabilité "apparente" des équilibres où des cycles des systèmes en question pour de très petites valeurs du paramètre ε . Un résultat affirme que l'attractivité uniforme, disons de l'origine d'un système, par rapport aux conditions initiales implique sa stabilité asymptotique (voir [21], théorème 38.1). De plus, la stabilité asymptotique globale est équivalente à l'uniformité de l'attractivité pour toute condition initiale dans une boule arbitrairement grande centrée à l'origine [38]. L'exemple de Vinograd dans [21], page 191 est une belle illustration d'une attractivité qui n'est pas uniforme par rapport aux conditions initiales. Examinons le cas d'un système différentiel dépendant du paramètre positif ε

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon),\tag{4.5}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue. Notons par $x(t, x_0, \varepsilon)$ les solutions telles que $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$. Nous ne supposons pas que la limite de f est définie lorsque ε tend vers 0. Le système (4.5) peut donc être singulièrement perturbé. Les deux définitions suivantes sont extraites du cours donné par Lobry et Sari lors de l'école CIMPA 2003 de Tlemcen, Contrôle Non Linéaire et Applications ([64], 151-177) (voir aussi des mêmes auteurs le rapport de recherche [38]). La terminologie est néanmoins empruntée à

A. R. Teel et L. Praly dans [66] (voir aussi [9]). Ces derniers en font usage dans la théorie de la commande en termes de stabilisation pratique des systèmes.

Définition 4.3.1 *On dit que l'origine est semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable (SGPAS) pour le système (4.5) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ si, pour tout $R > 0$ et tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| \leq R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (4.5) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$.*

La définition dit que toute solution vérifie $\lim x(t, x_0, \varepsilon) = 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ et que la convergence est uniforme par rapport à x_0 dans la boule de \mathbb{R}^n de rayon R et de centre 0 (i.e. $\lim_{t \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \text{Sup}_{\|x_0\| \leq R} \|x(t, x_0, \varepsilon)\| = 0$). En d'autres termes, si \mathcal{B}_R et \mathcal{B}_r sont les boules de \mathbb{R}^n de centre l'origine et de rayons respectifs R et r , toute trajectoire partant d'une boule arbitrairement grande \mathcal{B}_R atteint une boule arbitrairement petite \mathcal{B}_r en un temps fini assez grand et pour ε assez petit. Ceci n'est pas une attractivité uniforme par rapport aux conditions initiales à cause de la présence du paramètre ε . Notons par ailleurs que s'il n'était pas requis que T et ε_0 soient les mêmes pour tout x_0 , un tel T fini ou un tel ε_0 aurait pu ne pas exister, même si x_0 varie dans un compact (voir [9]).

Exemples : Ces exemples, vus presque tous dans [38], montrent que la propriété de stabilité asymptotique semiglobale pratique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ signifie en quelque sorte que l'origine "semble" globalement asymptotiquement stable quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. C'est le caractère de *globalité* de la stabilité asymptotique de l'origine qui est "apparent" pour l'équation $\dot{x} = x(\varepsilon x - 1)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En fait, $x = 0$ est localement stable, mais le bassin d'attraction $] -\infty, 1/\varepsilon[$ peut être rendu aussi grand qu'on le veut.

2. C'est le *statut de point d'équilibre* qui est apparent pour l'origine de l'équation $\dot{x} = \varepsilon - x$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ puisque ce n'est pas un équilibre. C'est toutefois un équilibre globalement asymptotiquement stable pour l'équation réduite $\dot{x} = -x$.

3. Pour l'équation $\dot{x} = x^2(\varepsilon - x)$, l'*attractivité*, sa *globalité* mais aussi la *stabilité* sont apparentes quand $\varepsilon \rightarrow 0$, puisque l'origine est un équilibre instable pour toutes les valeurs de $\varepsilon > 0$. Là aussi, c'est un équilibre globalement asymptotiquement stable de l'équation réduite $\dot{x} = -x^3$.

4. Dans l'équation $\dot{x} = -x + \varepsilon/x$, bien que l'origine soit un pôle répulsif (dans le sens où c'est un point compris entre deux équilibres $-\sqrt{\varepsilon}$ et $\sqrt{\varepsilon}$ attractifs) on pourrait dire qu'elle est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Evidemment, l'attractivité uniforme par rapport aux données initiales peut ne pas être globale. Le nombre réel R n'est plus arbitraire et nous avons la définition suivante :

Définition 4.3.2 *On dit que l'origine est pratiquement asymptotiquement stable (PAS) pour le système (4.5) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ s'il existe $R > 0$ tel que pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $T > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $t \geq T$ et tout x_0 tel que $\|x_0\| \leq R$, toute solution $x(t, x_0, \varepsilon)$ de (4.5) satisfait $\|x(t, x_0, \varepsilon)\| \leq r$.*

Etendons ces définitions conformément à notre approche et exprimons la stabilité d'un sous-ensemble borné. Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{(\Omega, F, G) : \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n+m}, \\ F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continues}\}$$

que nous munissons de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Considérons le système lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y), \end{aligned} \tag{4.6}$$

correspondant à l'élément $u := (\Omega, F, G)$ de \mathcal{U} . Soit $u_0 := (\Omega_0, F_0, G_0)$ un autre élément de \mathcal{U} .

Définition 4.3.3 *Un sous-ensemble borné \mathcal{A} de Ω_0 est dit SGPAS pour le système (4.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 (dans le sens de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) si, pour tout voisinage compact $\mathcal{K} \subset \Omega_0$ de \mathcal{A} (arbitrairement grand) et tout voisinage $\mathcal{O} \subset \Omega_0$ de \mathcal{A} (arbitrairement petit), il existe $\varepsilon_0 > 0$, un voisinage V de u_0 et $T > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, tout $u \in V$, tout $t \geq T$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$, toute solution $(x(t), y(t))$ de (4.6) de condition initiale (α, β) est dans \mathcal{O} .*

Si \mathcal{K} n'est pas arbitraire, le sous-ensemble \mathcal{A} est dit PAS pour le système (4.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 .

4.4 Résultats de stabilité pratique

L'intérêt de la notion de stabilité pratique est de pouvoir répondre à la question naturelle suivante : "si l'équation lente (1.4) admet, disons, un équilibre y_∞ asymptotiquement stable ou un cycle limite Γ , quel rôle peut avoir pour le problème tout entier (1.1) le point $(\xi(y_\infty), y_\infty)$ ou le sous-ensemble $\xi(\Gamma) \times \Gamma$ correspondants de la variété lente ? Il n'y a aucune raison qu'ils en

soient respectivement un équilibre ou un cycle, mais pour des valeurs très petites du paramètre ε , ils peuvent en avoir l'air. Vu le caractère asymptotique de cette propriété, un ingénieur, un biologiste,...se satisferait d'un modèle qui semble tendre vers un état stationnaire ou oscillatoire permanent, faute d'une stabilité somme toute idéale. Reconsidérons le problème perturbé (1.1). Les résultats du théorème 4.1.1 s'interprètent en terme de stabilité pratique comme suit :

Théorème 4.4.1 *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, le sous-ensemble $\xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$ de la variété lente est PAS pour le système (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et (Ω, F, G) proche de (Ω_0, F_0, G_0) .*

De même, le théorème 4.1.2 induit le résultat de stabilité asymptotique pratique suivant :

Théorème 4.4.2 *Sous les hypothèses du théorème 4.1.2, le sous-ensemble $\bigcup_{y \in \mathcal{M}} (\Gamma_y \times \{y\})$ de Ω_0 est PAS pour le système (1.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et (Ω, F, G) proche de (Ω_0, F_0, G_0) .*

Le cas particulier où \mathcal{M} est réduit à un point y_∞ mène à la stabilité asymptotique pratique, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et (Ω, F, G) est proche de (Ω_0, F_0, G_0) , du point $(\xi(y_\infty), y_\infty)$ à partir du théorème 4.4.1 et de la courbe fermée $\xi(\Gamma_{y_\infty}) \times \Gamma_{y_\infty}$ à partir du théorème 4.4.2. Enfin il est intéressant de constater que si \mathcal{M} est un cycle limite, le système de départ (1.1) semble avoir un cycle limite (voir l'exemple ci dessous) ou un tore attractif pour ε assez petit et (Ω, F, G) proche de (Ω_0, F_0, G_0) .

Exemple 6 La dynamique lente associée au système lent-rapide suivant écrit en coordonnées cylindriques ($x = x, y_1 = r \cos \theta, y_2 = r \sin \theta$)

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -x + r \cos \theta, \\ \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

est approchée par l'équation lente

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(r - 1)^3(r + 1), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

ayant le cercle unité Γ comme un cycle asymptotiquement stable. Les équilibres de l'équation rapide $x' = -x + y_1$ sont tous les points de la surface lente $x = \xi(y_1, y_2) := y_1$ et ils sont (globalement) asymptotiquement stables.

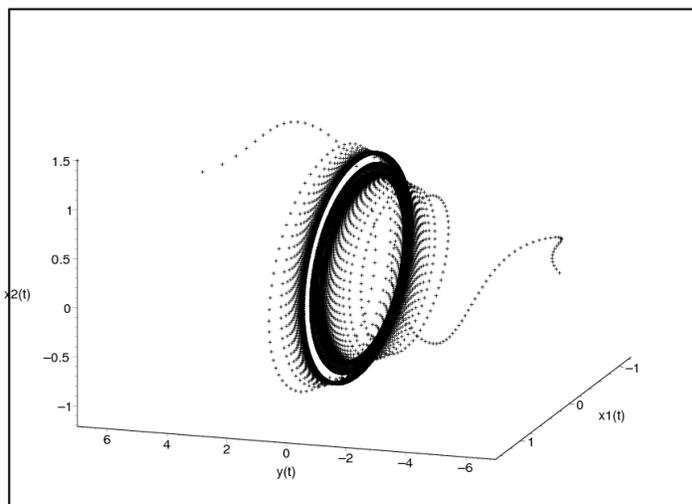
Soit $(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon))$ la solution de (4.7) écrite en coordonnées rectangulaires avec n'importe quelle condition initiale autre que l'origine. On peut appliquer le théorème 4.1.1 pour établir les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} \text{dis}(x(t, \varepsilon), \xi(\Gamma)) &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty} \text{dis}((y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon)), \Gamma) &= 0. \end{aligned}$$

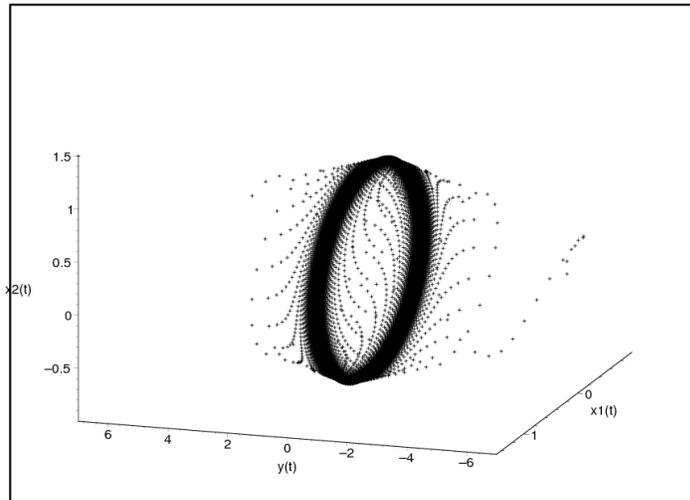
Même si le sous-ensemble $\xi(\Gamma) \times \Gamma$ de \mathbb{R}^3 devait être une orbite fermée de (4.7), elle ne pourrait pas être stable. En effet, pour le sous-système lent “exact”

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(r - 1 + \varepsilon)(r - 1 - \varepsilon)(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned}$$

pour toute valeur de $\varepsilon > 0$, l'orbite Γ est un cycle limite instable entouré par deux cycles limites stables $r = 1 - \varepsilon$ et $r = 1 + \varepsilon$. On peut pourtant affirmer que $\xi(\Gamma) \times \Gamma$ est SGPAS pour (4.7) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.



Simulation de l'exemple 4 avec $\varepsilon = 0.1$.

Simulation de l'exemple 4 avec $\varepsilon = 0.003$.

Dans le paragraphe 4.2, on peut dire que l'origine des systèmes des exemples 1, 2 et 3 est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans l'exemple 4, le sous-ensemble $\Gamma_0 \times \{0\}$ de \mathbb{R}^3 est SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$. A titre illustratif, les simulations du système (Σ) de l'exemple 4 avec Maple montrent que plus ε est petit, plus les trajectoires semblent tendre vers le cycle $\Gamma_0 \times \{0\}$ pourtant instable.

4.5 Sur la phase asymptotique

Dans le cas d'un système autonome possédant une solution périodique non triviale, on ne peut parler de stabilité asymptotique de cette solution. C'est la raison pour laquelle les résultats sont exprimés en termes de stabilité d'orbites. Il existe une autre notion attachée aux solutions périodiques : celle de la phase asymptotique.

Définition 4.5.1 *Supposons que le système*

$$\dot{x} = f(x)$$

admette une solution périodique $x^(t)$ d'orbite Γ . On dit que la solution $x^*(t)$ a la propriété de phase asymptotique s'il existe $b > 0$ tel qu'à tout point x_0*

vérifiant $\text{dis}(x_0, \Gamma) < b$ il correspond un réel $\alpha(x_0)$ (phase asymptotique) tel que la solution $x(t, x_0)$ de condition initiale x_0 vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0) - x^*(t - \alpha(x_0))\| = 0.$$

La stabilité asymptotique orbitale avec phase asymptotique signifie que pour toute condition initiale x_0 suffisamment proche de Γ , on peut choisir une solution d'orbite Γ telle que sa différence avec $x(t, x_0)$ tende vers zéro quand t tend vers l'infini. C'est une sorte de synchronisation à l'infini avec une "translatée" de la solution périodique.

Revenons au problème traité par le théorème 4.4.2. Quand bien même on supposerait, comme cela est naturel d'y penser, que la solution périodique de l'équation rapide $x' = F(x, y_\infty)$ de paramètre $y = y_\infty$ et de condition initiale α_0 est orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique, nous ne pouvons espérer obtenir, en plus de la stabilité asymptotique pratique de $\Gamma_{y_\infty} \times \{y_\infty\}$, une sorte de phase asymptotique "apparente".

Exemple 7 Examinons le système suivant écrit en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r} &= (1 - r^2)^3 / r, & r(0) &= r_0, \\ \varepsilon \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon(1 - r^2)^2, & \theta(0) &= \theta_0, \\ \dot{y} &= -y, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'équation de la couche limite

$$\begin{aligned} r' &= (1 - r^2)^3 / r, & r(0) &= r_0, \\ \theta' &= 1, & \theta(0) &= \theta_0, \end{aligned}$$

admet le cercle unité Γ_y comme cycle asymptotiquement stable pour toute valeur de y . De plus, puisque $\theta(\tau) - \tau = \theta_0$, la solution périodique associée possède la propriété de phase asymptotique. L'équation réduite est simplement la troisième équation de (4.8), pour laquelle l'origine est asymptotiquement stable. En vertu du théorème 4.4.2, l'ensemble $\Gamma_0 \times \{0\}$ est PAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Cependant, la solution explicite de (4.8) est donnée par

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{1 - \frac{1 - r_0^2}{\sqrt{1 + \frac{4}{\varepsilon} t (1 - r_0^2)^2}}}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + \frac{t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{4} \ln\left(1 + \frac{4}{\varepsilon} t (1 - r_0^2)^2\right), \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{aligned}$$

On voit alors que pour tout ε fixé, la quantité $\theta(t) - t/\varepsilon$ tend vers l'infini avec t . Ce qui ôte l'espoir d'une propriété de phase asymptotique pratique est le fait que $\theta(t) - t/\varepsilon$ peut encore tendre vers l'infini quand $t \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ si $\varepsilon \ln t$ tend vers l'infini (par exemple pour $t = e^{1/\varepsilon^2}$).

4.6 Formulations externes

Exprimons tous ces résultats dans le langage non standard. Il faut relever à ce niveau que dans [68], les preuves des théorèmes de stabilité pratique ont été menées légèrement différemment en passant par la notion externe de s -stabilité que nous expliquons à titre d'information dans l'annexe A.4.

4.6.1 Caractérisation externe de la stabilité pratique

Lorsque $u_0 \in \mathcal{U}$ est standard, nous obtenons la caractérisation suivante de la notion SGPAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 pour le système (4.6).

Lemme 4.6.1 *Supposons que u_0 est standard. Un sous-ensemble \mathcal{A} borné standard de Ω_0 est SGPAS pour le système (4.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 si, et seulement si, pour tout (α, β) presque standard dans Ω_0 , tout $\varepsilon > 0$ infinitésimal, toute perturbation u de u_0 et tout $t > 0$ illimité, toute solution $(x(t), y(t))$ de (4.6) de condition initiale (α, β) vérifie $\text{dis}((x(t), y(t)), \mathcal{A}) \simeq 0$.*

Preuve. Voici les écritures formalisées des expressions intervenant dans le lemme. L'expression “ (α, β) presque standard dans Ω_0 ” s'écrit

$$\exists^{st} \mathcal{K}, \text{ sous-ensemble compact de } \Omega_0 : (\alpha, \beta) \in \mathcal{K}.$$

De même que “ $\varepsilon > 0$ infinitésimal” s'écrit

$$\forall^{st} \varepsilon_0 > 0, \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

et “ u perturbation de u_0 ” s'écrit

$$\forall^{st} V \text{ (voisinage de } u_0), u \in V.$$

Dire “ $t > 0$ illimité” revient à dire

$$\forall^{st} T t \geq T.$$

Enfin, le résultat “ $\text{dis}((x(t), y(t)), \mathcal{A}) \simeq 0$ ” est équivalent à

$$\forall^{st} \mathcal{O} \text{ voisinage de } \mathcal{A}, (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}$$

Ainsi, la caractérisation de la stabilité asymptotique semiglobale quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 est donnée dans le lemme par

$$\forall (\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall u \forall t \quad (\exists^{st} \mathcal{K} \forall^{st} \varepsilon_0 \forall^{st} V \forall^{st} T P \Rightarrow \forall^{st} \mathcal{O} (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}),$$

où P est la formule interne “ $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $u \in V$ et $t \geq T$ ”. Ici, u_0 est un paramètre standard de \mathcal{U} , ε_0 et T sont des réels positifs, V est parmi les voisinages de u_0 , \mathcal{K} et \mathcal{O} sont des sous-ensembles. D’après la deuxième formule de (A.1), on a

$$\forall \mathcal{K} \forall \mathcal{O} \exists^{fin} \varepsilon'_0 \exists^{fin} V' \exists^{fin} T' \\ \forall (\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall u \forall t (\forall \varepsilon_0 \in \varepsilon'_0 \forall V \in V' \forall T \in T' P \Rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}).$$

Par ailleurs, les ensembles ε'_0 , V' et T' étant finis, il existe ε_0 , V et T tels que $\varepsilon_0 = \min \varepsilon'_0$, $V = \bigcap_{v \in V'} v$ et $T = \max T'$. La dernière formule devient

$$\forall \mathcal{K} \forall \mathcal{O} \exists \varepsilon_0 \exists V \exists T \forall (\alpha, \beta) \forall \varepsilon \forall u \forall t (P \Rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}).$$

C’est la définition 4.3.3. ■

Voici la caractérisation de PAS quand $\varepsilon \rightarrow 0$ que nous utiliserons dans nos résultats.

Lemme 4.6.2 *Supposons que u_0 est standard. Un sous-ensemble \mathcal{A} borné standard de Ω_0 est PAS pour le système (4.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et u proche de u_0 si, et seulement si, il existe un voisinage compact standard $\mathcal{K} \subset \Omega_0$ de \mathcal{A} tel que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$, tout $\varepsilon > 0$ infinitésimal, toute perturbation u de u_0 et tout $t > 0$ illimité, toute solution $(x(t), y(t))$ de (4.6) de condition initiale (α, β) vérifie $\text{dis}((x(t), y(t)), \mathcal{A}) \simeq 0$.*

4.6.2 Énoncés externes

Les théorèmes 4.6.3 et 4.6.4 ci-dessous sont des énoncés externes des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 lorsque $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ est standard. Ils sont démontrés dans le paragraphe 4.7.

Théorème 4.6.3 *Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$ standard et $\xi : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction standard continue. Supposons que les hypothèses T1 à T4 sont vérifiées et que α_0 est dans le bassin d’attraction de $\xi(\beta_0)$. Soit \mathcal{M} un sous-ensemble fermé standard de \dot{Y} qui soit positivement invariant pour l’équation lente (1.4). Supposons que \mathcal{M} est asymptotiquement stable pour (1.4) et que β_0 est dans son bassin d’attraction. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l’équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (1.6). Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Alors toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$*

et $\omega' > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\omega \simeq 0, \quad \omega' \simeq +\infty, \\
&x(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\
&x(t) \simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'] \\
&y(t) \simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\
&\forall t \geq \omega' \exists y_t \in \mathcal{M} : y(t) \simeq y_t, \\
&\text{et } x(t) \simeq \xi(y_t).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Théorème 4.6.4 Soit $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{T}$ standard. Supposons que les hypothèses P1 à P4 sont vérifiées et que α_0 est dans le bassin d'attraction de Γ_{β_0} . Soit \mathcal{M} un sous-ensemble fermé standard de \mathring{Y} qui soit positivement invariant pour l'équation lente (2.1). Supposons que \mathcal{M} est asymptotiquement stable pour (1.4) et que β_0 est dans son bassin d'attraction. Soit $\tilde{x}(\tau)$ et $\bar{y}(t)$ les solutions respectives de l'équation de la couche limite (1.5) et du problème réduit (2.2). Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal et $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ une perturbation de $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$. Alors toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ et $\omega' > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\omega \simeq 0, \quad \omega' \simeq +\infty, \\
&x(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\
&y(t) \simeq \bar{y}(t) \text{ pour } t \in [0, \omega'], \\
&\text{dis}(x(t), \Gamma_{\bar{y}(t)}) \simeq 0 \text{ pour } t \in [\varepsilon\omega, \omega'], \\
&\forall t \geq \omega' \exists y_t \in \mathcal{M} : y(t) \simeq y_t, \\
&\text{et } x(t) \simeq \Gamma_{y_t}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous montrons par exemple comment le théorème 4.6.3 se ramène au théorème 4.1.1. De la même manière, on peut établir que le théorème 4.1.2 se déduit du théorème 4.6.4.

Preuve. Soit \mathcal{F} la formule : “toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ et $\omega' > 0$ tels que (4.1)”. Désignons par \mathcal{F}' la formule “toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega > 0$ et $\omega' > 0$ tels que (4.9)”. La formule \mathcal{F}' est équivalente à la formule $\forall^{\text{st}} \eta \mathcal{F}$. Notons respectivement par u et u_0 les éléments $(\Omega, F, G, \alpha, \beta)$ et $(\Omega_0, F_0, G_0, \alpha_0, \beta_0)$ de \mathcal{T} . D'autre part, dire que “ ε est infinitésimal” équivaut à dire que “ $\forall^{\text{st}} \varepsilon^*, \varepsilon < \varepsilon^*$ ”. De même, dire “ u est une perturbation de u_0 ” revient à dire “ u est dans tout voisinage standard V de u_0 ”. Le théorème 4.6.3 se formalise comme suit :

$$\forall \varepsilon \forall u (\forall^{\text{st}} \varepsilon^* \forall^{\text{st}} V \varepsilon < \varepsilon^* \ \& \ u \in V \Rightarrow \forall^{\text{st}} \eta \mathcal{F}). \tag{4.11}$$

Ici, u_0 est un paramètre standard, u compte parmi les éléments de \mathcal{T} , tandis que ε et ε^* font partie des réels strictement positifs et V est parmi les voisinages de u_0 . En utilisant la première formule de réduction de (A.1), (4.11)

est équivalente à

$$\forall \eta \exists^{\text{fin}} \varepsilon^{*'} \exists^{\text{fin}} V' \forall \varepsilon \forall u (\forall \varepsilon^* \in \varepsilon^{*'} \forall V \in V' \varepsilon < \varepsilon^* \& u \in V \Rightarrow \mathcal{F}).$$

Les ensembles $\varepsilon^{*'}$ et V' étant finis, il existe $\varepsilon^* > 0$ et V tels que ε^* est le plus petit élément de $\varepsilon^{*'}$ et $V = \bigcap_{v \in V'} v$. La dernière formule est équivalente à

$$\forall \eta \exists \varepsilon^* \exists V \forall \varepsilon \forall u (\varepsilon < \varepsilon^* \& u \in V \Rightarrow \mathcal{F}).$$

Par conséquent, l'énoncé du théorème 4.1.1 est vrai pour tout u_0 standard. Par transfert, il est établi pour tout u_0 . ■

Les énoncés externes des théorèmes 4.4.1 et 4.4.2 sont :

Théorème 4.6.5 *Sous les hypothèses du théorème 4.6.3, le sous-ensemble $\xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$ de la variété lente est PAS pour le système (1.1) pour tout $\varepsilon > 0$ infinitésimal et toute perturbation (Ω, F, G) de (Ω_0, F_0, G_0) .*

Théorème 4.6.6 *Sous les hypothèses du théorème 4.6.4, le sous-ensemble $\bigcup_{y \in \mathcal{M}} (\Gamma_y \times \{y\})$ de Ω_0 est PAS pour le système (1.1) pour tout $\varepsilon > 0$ infinitésimal et toute perturbation (Ω, F, G) de (Ω_0, F_0, G_0) .*

Les preuves de ces deux derniers théorèmes sont données dans le paragraphe suivant.

4.7 Preuve des énoncés externes

4.7.1 Preuve du théorème 4.6.3

Soit $(x(t), y(t))$ une solution du problème (1.1). D'après les hypothèses du théorème 1.2.2, il existe un réel illimité $\omega > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon \tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } \varepsilon \omega \leq t \leq T, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{4.12}$$

où T est un réel positif dans l'intervalle positif de définition de la solution $\bar{y}(t)$ du problème réduit (1.6). Etant donné que β_0 est dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} , la solution $\bar{y}(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(\bar{y}(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour $t \simeq +\infty$. Par conséquent, les approximations (4.12) demeurent vraies pour tout $T > 0$ limité. D'après le lemme de Robinson, les deux dernières

approximations de (4.12) restent vraies jusqu'à un réel positif ω' illimité. Ceci prouve les quatre premières approximations de (4.9).

On a $y(\omega') \simeq \bar{y}(\omega') \simeq \mathcal{M}$ et $x(\omega') \simeq \xi(\bar{y}(\omega'))$ par continuité de la fonction standard ξ . Considérons alors la solution partant du point $(x(\omega'), y(\omega'))$. Soit $y_{\omega'}$ la partie standard de $y(\omega')$. Bien sûr, $y_{\omega'} \in \mathcal{M}$. Puisque \mathcal{M} est positivement invariant, la trajectoire positive de la solution maximale de l'équation lente (1.4) de condition initiale $y_{\omega'}$ est entièrement dans \mathcal{M} . On applique de nouveau le théorème 1.2.2 pour obtenir

$$\begin{aligned} y(\omega' + k) &\simeq y_{\omega'+k} \in \mathcal{M}, \\ x(\omega' + k) &\simeq \xi(y_{\omega'+k}) \text{ pour tout } k \geq 0 \text{ limité.} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Supposons qu'il existe $s \geq \omega'$ tel que $y(s) \not\simeq \mathcal{M}$. Alors il existerait un réel standard $b > 0$ tel que, d'une part, l'ensemble $\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{dis}(y, \mathcal{M}) \leq b\}$ soit inclus dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} et d'autre part, il existe $\sigma \geq \omega'$ tel que $\text{dis}(y(\sigma), \mathcal{M}) = b$. Soit μ la plus petite valeur d'un tel σ (μ existe par compacité de \mathcal{A}). Ainsi, $\text{dis}(y(\mu), \mathcal{M}) = b$. Comme $y(t)$ est presque standard dans \dot{Y} pour tout t dans $[\omega', \mu]$ et que $x(\omega') \simeq \xi(y(\omega'))$, nous utilisons¹ le lemme A.6.1 (annexe A.6) pour en déduire que $x(t) \simeq \xi(y(t))$ pour tout t dans $[\omega', \mu]$. Notons d'autre part que le temps $k_0 := \mu - \omega'$ pris pour aller de $(x(\omega'), y(\omega'))$ à $(x(\mu), y(\mu))$ est positif illimité. En effet, si tel n'était pas le cas, d'après (4.13) on aurait $y(\omega' + k_0) \simeq \mathcal{M}$, i.e. $y(\mu) \simeq \mathcal{M}$, ce qui est contradictoire. A présent, la solution partant de $(x(\mu), y(\mu))$ vérifie $y(\mu + k) \in \mathcal{A}$ pour tout k dans $[-k_0, 0]$. Soit $\bar{y}(k)$ la solution de l'équation lente (1.4) de condition initiale $\bar{y}(0) = y_0(\mu)$, où $y_0(\mu)$ est la partie standard de $y(\mu)$. Le lemme A.6.2 assure que $y(\mu + k) \simeq \bar{y}(k)$ pour tout $k \leq 0$ limité. Par le lemme de Robinson, il existe $k_1 < 0$ illimité tel que $y(\mu + k_1) \simeq \bar{y}(k_1)$. On peut choisir k_1 tel que $-k_0 \leq k_1$. Par conséquent, $\bar{y}(k_1)$ est dans \mathcal{A} , donc dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} . Le lemme 0.0.4 donne $\bar{y}(k_1 + k) \simeq \mathcal{M}$ pour tout $k > 0$ illimité. En particulier, pour $k = -k_1$, on a $\bar{y}(0) \simeq \mathcal{M}$. Or $\bar{y}(0) = y_0(\mu)$ et $y_0(\mu) \simeq y(\mu)$, donc $y(\mu) \simeq \mathcal{M}$. C'est une contradiction avec la définition de μ . Au bout du compte, (4.13) est vérifiée pour tout $k \geq 0$ ce qui prouve les dernières approximations de (4.9).

¹les Lemmes A.6.1 et A.6.2 (voir dans [37] et dans Annexe A.6) sont essentiels. Ils assurent que la solution reste près de la variété lente en étant approchée par une solution de l'équation lente.

4.7.2 Preuve du théorème 4.6.4

Soit $(x(t), y(t))$ une solution du problème (1.1). D'après les hypothèses du théorème 2.2.1, il existe un réel $\omega > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega &\simeq 0, \\ x(\varepsilon\tau) &\simeq \tilde{x}(\tau) \text{ pour } 0 \leq \tau \leq \omega, \\ y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq L, \\ x(t) &\simeq \Gamma_{\bar{y}(t)} \text{ pour } \varepsilon\omega \leq t \leq L, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pour tout $L > 0$. Le réel β_0 étant dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} , la solution du problème réduit $\bar{y}(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie $\text{dis}(\bar{y}(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$. Les approximations (4.14) sont vraies pour tout $L > 0$ limité. Elles le demeurent, par Robinson, jusqu'à un certain ω' illimité, d'où les quatre premières approximations de (4.10). Ainsi, $y(\omega') \simeq \bar{y}(\omega') \simeq \mathcal{M}$ et $x(\omega') \simeq \Gamma_{\bar{y}(\omega')} \simeq \Gamma_{y(\omega')}$ par continuité des Γ_y par rapport à y . Comme dans la preuve précédente, le fait que $\mathcal{M} \subset \dot{Y}$ est positivement invariant et l'application du théorème 2.2.1 à la solution partant du point $(x(\omega'), y(\omega'))$ conduisent aux approximations

$$\begin{aligned} y(\omega' + k) &\simeq y_{\omega'+k} \in \mathcal{M}, \\ x(\omega' + k) &\simeq \Gamma_{y_{\omega'+k}} \text{ pour tout } k \geq 0 \text{ limité}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Un raisonnement par l'absurde identique au précédent finit de démontrer le théorème mais les lemmes A.6.1 et A.6.2 sont remplacés par les lemmes essentiels 2.3.1 et 2.3.2.

4.7.3 Preuves des théorèmes 4.6.5 et 4.6.6

Soit $a > 0$ la borne uniforme déduite de la remarque 0.0.5 appliquée à l'équation rapide. Soit $b > 0$ un réel standard tel que le voisinage compact $\{y \in \mathbb{R}^m : \text{dis}(y, \mathcal{M}) \leq b\}$ de \mathcal{M} est dans le bassin d'attraction de \mathcal{M} . Considérons alors le voisinage compact de $\xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$ défini par

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega_0 : \|x - \xi(y)\| \leq a/2, \text{dis}(y, \mathcal{M}) \leq b\}.$$

Soit $(\Omega, F, G) \in \mathcal{U}$ une perturbation de (Ω_0, F_0, G_0) et $\varepsilon > 0$ infinitésimal. Puisque Ω contient tous les éléments presque standard dans Ω_0 , on a que $\mathcal{K} \subset \Omega$. Soit (α, β) un point arbitraire de \mathcal{K} . Nous voulons montrer que toute solution $(x(t), y(t))$ de (1.1) de condition initiale (α, β) est définie pour tout $t \geq 0$ et vérifie $(x(t), y(t)) \simeq \xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$ pour tout $t \simeq +\infty$. Soit (α_0, β_0) standard tel $(\alpha, \beta) \simeq (\alpha_0, \beta_0)$. Par compacité, $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$. Le théorème 4.6.3

et la construction de \mathcal{K} impliquent que $(x(t), y(t))$ est définie pour tout $t \geq 0$ et il existe $\omega' \simeq +\infty$ tel que

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq \bar{y}(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \omega', \\ x(t) &\simeq \xi(\bar{y}(t)) \text{ pour } 0 < t \leq \omega', \\ \text{dis}(y(t), \mathcal{M}) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \\ \text{dis}(x(t), \xi(\mathcal{M})) &\simeq 0 \text{ pour } t \geq \omega', \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\bar{y}(t)$ est la solution du problème réduit (1.6). Par conséquent, pour $t \geq \omega'$, on a $(x(t), y(t)) \simeq \xi(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}$. D'autre part, puisque $\text{dis}(\beta_0, \mathcal{M}) < b$, la stabilité asymptotique de \mathcal{M} implique que $\text{dis}(\bar{y}(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ pour tout $t \simeq +\infty$. Ceci est vrai en particulier pour tout t illimité tel que $0 < t \leq \omega'$. Selon les deux premières approximations de (4.16), on en déduit que $\text{dis}(y(t), \mathcal{M}) \simeq \text{dis}(\bar{y}(t), \mathcal{M}) \simeq 0$ et $\text{dis}(x(t), \xi(\mathcal{M})) \simeq 0$ pour tout t illimité tel que $0 < t \leq \omega'$. Le théorème 4.6.5 est prouvé.

La preuve du théorème 4.6.6 peut être menée de manière analogue. Il suffit de choisir

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \Omega : \text{dis}(x, \Gamma_y) \leq a/2, \text{dis}(y, \mathcal{M}) \leq b\}$$

comme voisinage compact de $\bigcup_{y \in \mathcal{M}} (\Gamma_y \times \{y\})$ où a et b sont choisis comme dans la preuve précédente. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{K}$, le Théorème 4.6.4 conduit au résultat.

Deuxième partie

Cycle Lent Rapide et Modèle de Compétition

Introduction

Cycles avec relaxation

Le théorème de Pontryagin-Rodygin présente un inconvénient : contrairement au théorème de Tikhonov, on ne sait pas en général déterminer explicitement l'équation lente. Le calcul de la moyenne sur les cycles requiert la localisation de ces cycles et la connaissance de leurs périodes, ce qui est souvent un problème. Remarquons que les deux méthodes utilisées dans le chapitre 3, au paragraphe 3.3, ne sont pas non plus d'un grand secours car elles sont basées sur des théorèmes d'existence comme le théorème des fonctions implicites. Une situation intéressante où l'on sait localiser les cycles et estimer leurs périodes est celle des cycles dits lents-rapides (voir par exemple [6]). Ce sont des cycles bidimensionnels avec relaxation, dont les branches lentes "épousent" certaines branches de la variété lente. Le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \delta, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \delta, \varepsilon), \\ \dot{y} &= g(x_1, x_2, y, \delta, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.17}$$

est un système à trois échelles de temps pour lequel l'équation rapide

$$\begin{aligned}\delta dx_1/d\tau &= f_1(x_1, x_2, y, \delta, 0), \\ dx_2/d\tau &= f_2(x_1, x_2, y, \delta, 0),\end{aligned}\tag{4.18}$$

est elle-même un système lent-rapide. Si l'on admettait que l'on a une configuration telle que pour δ assez petit l'équation (4.18) admet un unique cycle $\Gamma_{y,\delta}$ asymptotiquement stable uniformément par rapport à y dans un domaine compact, on serait tenté d'appliquer le théorème de Pontryagin-Rodygin pour affirmer que la dérive de la composante $y(t, \delta, \varepsilon)$ de (4.17) est approchée par la solution de la moyenne

$$\dot{y} = \frac{G(y, \delta)}{P(y, \delta)} := \frac{1}{P(y, \delta)} \int_0^{P(y, \delta)} g(x_1^*(\tau, y, \delta), x_2^*(\tau, y, \delta), y, \delta, 0) d\tau$$

où $(x_1^*(\tau, y, \delta), x_2^*(\tau, y, \delta))$ est une solution $P(y, \delta)$ -périodique d'orbite $\Gamma_{y,\delta}$. Après quoi, on remarquerait que $\Gamma_{y,\delta}$ est caractérisée par des phases lentes et rapides proches successivement des arcs de courbes et des segments formant la courbe fermée $\Gamma_{y,0}$. On pourrait en tirer une approximation de la période $P(y, \delta)$ et de $G(y, \delta)$ en négligeant les phases rapides.

Voici des contraintes qui apparaissent dans une telle approche : d'abord un coup d'oeil sur le théorème de Pontryagin-Rodygin [56] et sur sa reformulation dans [63] montre que son application directe dans notre cas de

figure ne coule pas de source. Par exemple, dans ces théorèmes, l'équation rapide ne dépend pas (singulièrement) d'un paramètre. Notons ensuite que la courbe fermée $\Gamma_{y,0}$ n'est un cycle pour aucune équation et que pour que $\Gamma_{y,\delta}$ existe pour δ petit cela nécessiterait plus de conditions de régularité comme l'unicité des solutions. Rien n'assure par ailleurs que le cycle est localement unique (en fait unique dans la théorie de Pontryagin-Rodygin). On ne pourra pas éviter de tenir compte des trois dynamiques d'un tel système si on veut trouver une équation qui décrit la dérive de la composante lente. La courbe fermée $\Gamma_{y,0}$ est appelée par certains auteurs *cycle singulier* ou *pseudo-cycle*. Tout en gardant à l'esprit ce fait, nous finirons par parler simplement de cycle lent-rapide.

Pour notre part, dans le premier des deux chapitres de cette partie, nous proposons d'écrire rigoureusement un résultat "à la Pontryagin-Rodygin" pour deux configurations où les cycles lents-rapides présentent deux branches lentes et deux branches rapides. Ce sont en réalité deux paradigmes et la généralisation à plusieurs branches est immédiate. Ce chapitre est entièrement formulé en non standard. Nous n'exigerons pas l'existence d'un vrai cycle $\Gamma_{y,\delta}$ proche du cycle lent-rapide $\Gamma_{y,0}$ pour $\delta \simeq 0$. Les configurations étudiées entraîneront une propriété de stabilité pratique du cycle lent-rapide qui suffira pour la suite. L'étude commencera par poser le problème et détailler le comportement des solutions du sous-système (4.18). Nous indiquons l'expression de l'équation moyennisée qui décrira la variation de la composante lente pendant que la trajectoire du système (4.17) s'enroule autour de la surface engendrée par les cycles lents-rapides. Le résultat principal est démontré en s'appuyant sur deux lemmes assez techniques dont l'un est basé sur la stroboscopie. Des exemples avec simulations numériques illustrent ce résultat. Le deuxième paradigme présente le phénomène de retard à la bifurcation (solution canard). Une des branches lentes du cycle continue de longer appréciablement une partie répulsive de la variété lente avant de s'en éloigner selon une relation entrée-sortie que nous déterminons.

Sur les modèles de compétition en dynamique des populations

Les travaux de Lotka [44] en 1925 et Volterra [74] en 1926 sont considérés comme l'origine de l'étude mathématique de la dynamique proie-prédateur. Dans ce même article, Volterra affirmait que la coexistence (i.e. la non extinction à long terme) de plusieurs espèces de prédateurs en compétition sur moins d'espèces de proies est impossible. Ce fait fut appelé bien plus tard *principe de l'exclusion compétitive*. Hardin [22] par exemple écrivait précisément que *deux ou plusieurs espèces présentant des modes d'utilisation des ressources identiques ne peuvent coexister dans un environnement stable, la plus apte éliminant l'autre*. Certaines observations dans la nature semblaient toutefois contredire ce principe (voir par exemple [29]). A l'aide

de simulations numériques, Koch [33] en 1974 montre la possibilité d'une coexistence de deux prédateurs² exploitant la même proie dans un environnement constant et uniforme. Il utilise une réponse fonctionnelle non linéaire dite de Michaelis-Menten ou de Holling. Une telle coexistence s'observe autour d'une orbite périodique dans l'orthant positif plutôt qu'autour d'un point d'équilibre. Deux ans plus tard, Armstrong et McGehee, [48, 4] ont formulé mathématiquement le résultat essentiel qui dit que *la persistance n'a pas forcément lieu sous forme d'un équilibre*. A partir de là, un grand nombre d'articles apparaissent et où il est mis en évidence numériquement ou théoriquement une persistance de deux ou plusieurs compétiteurs sur un moindre nombre de proies autour d'orbites périodiques ou d'attracteurs plus complexes [28, 35, 39, 40, 41, 42, 47].

Le deuxième chapitre de cette partie est une étude d'un modèle de compétition en dynamique de population de dimension quatre. Le point de départ se trouve dans certains exposés de C. Lobry³ [43] qui a réussi à construire un modèle où trois espèces x_1 , x_2 et x_3 sont en compétition sur une seule proie s , la coexistence des deux dernières semblant possible au travers de simulations numériques, pendant que s et x_1 oscillent. C'est un modèle à trois échelles de temps qui correspond au premier paradigme du chapitre précédent. La proie s se développe nettement plus vite que le premier prédateur x_1 qui, lui, se développe nettement plus vite que les deux autres compétiteurs x_2 et x_3 . Nous commençons par décrire théoriquement ce modèle en déterminant le système moyennisé qui décrit l'évolution du couple (x_2, x_3) pendant les oscillations de s et x_1 . Nous détaillons l'exemple de Lobry pour lequel les simulations montrent une coexistence. Nous proposons un modèle légèrement modifié et nous établissons des conditions suffisantes de persistance des quatre espèces interagissant dans ce modèle. Ce passage est illustré par un certain nombre d'exemples et de simulations numériques.

²On aura compris qu'en parlant d'un nombre de prédateurs ou de proies, on sous-entend le *nombre d'espèces*.

³Par exemple durant l'école-symposium *Perturbations Singulières et Applications à la Théorie du Contrôle*, tenue à Tlemcen - Algérie en janvier 2006 et puis récemment à l'école CIMPA *Mathématiques pour l'Écoulement et l'Épuration de l'Eau* toujours à Tlemcen en mai 2008.

Chapitre 5

Cycle lent-rapide

5.1 Le problème et ses hypothèses

Considérons le système à trois échelles de temps

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y), \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y), \\ \dot{y} &= g(x_1, x_2, y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

où nous supposons les fonctions f_1 , f_2 et g standard et continues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et les réels positifs ε et δ infinitésimaux. Notons les hypothèses par la lettre **A**.

A1 : *Il existe un compact K standard de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide tel que, pour tout $y \in K$, les isoclines nulles $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ ont l'allure schématisée sur la figure.5.1. Elles partagent le plan (x_1, x_2) en quatre régions où le champ a les signes indiqués dans la figure.*

Dans le repère d'abscisse x_1 et d'ordonnée x_2 , la figure dit simplement que l'isocline $f_1 = 0$, pour tout y dans K , est une courbe $x_2 = \phi(x_1, y)$ continue présentant un minimum local et un maximum local (une cubique à deux bosses par exemple). Les valeurs des extrema $\xi_1(y)$ et $\xi_2(y)$ sont des fonctions continues de y . D'autre part, l'isocline $f_2 = 0$ coupe transversalement $f_1 = 0$ en un unique point E_y qui se trouve pour tout $y \in K$ entre les points extrémaux à une distance appréciable. Les branches décroissantes ¹ de ϕ sont notées $x_1 = \psi_1(x_2, y)$ et $x_1 = \psi_2(x_2, y)$ définies respectivement pour x_2 dans $]-\infty, \xi_2(y)]$ et dans $[\xi_1(y), +\infty[$. De cette hypothèse, il résulte que pour tout y dans K , le champ de

$$\begin{aligned}\delta dx_1/d\tau &= f_1(x_1, x_2, y), \\ dx_2/d\tau &= f_2(x_1, x_2, y),\end{aligned}\tag{5.2}$$

¹Nous préférons exprimer x_1 en fonction de x_2 et y pour des raisons qui apparaissent dans la suite du travail.

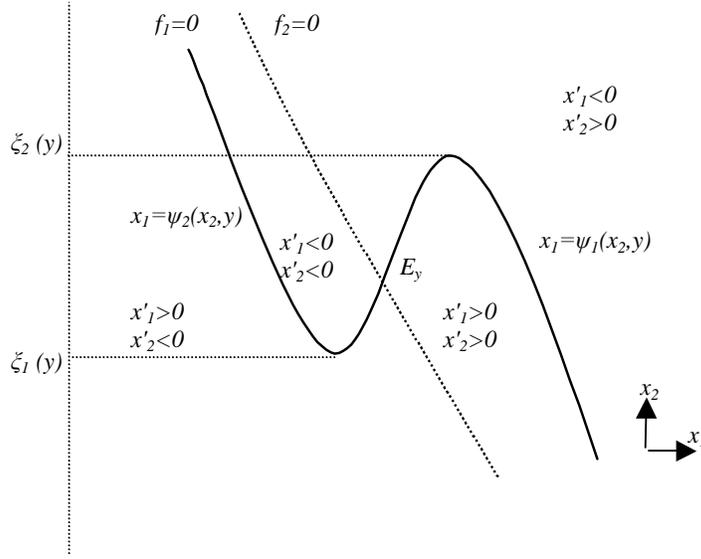


FIG. 5.1 – Isoclines nulles et signes du champ de (5.2) pour y constant.

où $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, est quasi-rectiligne parallèlement à l'axe (ox_1) en tout point non infiniment proche de la variété $f_1 = 0$, dans le sens des x_1 croissants en bas et décroissants en haut. On sait démontrer [45, 49] que l'orbite d'une solution $\hat{S}(\tau) = (\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau))$ de (5.2), partant d'un point P (voir figure.5.2) arrive en un temps infinitésimal infiniment près d'un point Q de la courbe $f_1 = 0$ (phase rapide) qu'elle traverse. Elle longe ensuite moins vite cette courbe jusqu'à s'approcher infiniment de B (phase intermédiaire). L'allure du champ l'empêche de s'écarter de la courbe avant B . Elle saute alors quasi-horizontalement en C , longe CD puis saute en A . A partir de là, $\hat{S}(\tau)$ évolue autour de la courbe fermée $ABCD$. Rappelons que cette courbe dépend de $y \in K$.

Dans ce cas de figure, cette approche qualitative classique permet en plus de montrer, pourvu que l'on ait unicité des solutions, que l'application de premier retour envoie un segment standard contenant P sur un segment infiniment petit autour du point M . Il en découle l'existence d'un cycle limite de (5.2), d'après le théorème du point fixe. Nous n'exigerons pas l'existence du cycle mais nous travaillerons avec la courbe fermée $ABCD$, dépendant de y , et que l'on notera Γ_y .

Quantitativement, pour tout y fixé dans K , les phases rapides et lentes de $\hat{S}(\tau)$ sont respectivement proches des solutions des équations

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, x_2, y), \quad x_2, y \text{ paramètres}, \quad (5.3)$$

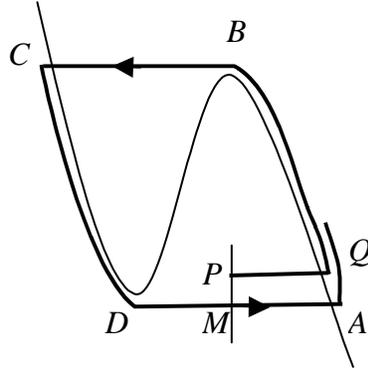


FIG. 5.2 – Un exemple de trajectoire de (5.2).

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_i(x_2, y), x_2, y), \quad i = 1, 2, \quad y \text{ paramètre}, \quad (5.4)$$

où $\sigma = \frac{\tau}{\delta}$. On rappelle ici, dans une proposition, l'essentiel de la démarche qui donne des approximations de $\hat{S}(\tau)$, sous les hypothèses suivantes selon le théorème de Tikhonov.

A2 : Pour tout y et tout x_2 , l'équation (5.3) a la propriété d'unicité.

A3 : Pour tout y , l'équation (5.4) a la propriété d'unicité.

Une conséquence de l'hypothèse A1 est que $x_1 = \psi_i(x_2, y)$ sont des points d'équilibre de (5.3) et ils sont asymptotiquement stables. Plus exactement :

Conséquence 1 : Pour tout $y \in K$, y standard, le point d'équilibre $x_1 = \psi_1(x_2, y)$ (respectivement $x_1 = \psi_2(x_2, y)$) de (5.3) est asymptotiquement stable uniformément par rapport à x_2 , pour tout x_2 limité tel que $x_2 \leq \xi_2(y)$ (respectivement $x_2 \geq \xi_1(y)$).

Proposition 5.1.1 Soit f_1, f_2 des fonctions standard continues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Supposons satisfaites les hypothèses A1 à A3. Soit y standard dans K . Alors une solution $\hat{S}(\tau)$ de (5.2) atteint en un temps infinitésimal un δ -voisinage de Γ_y puis évolue autour Γ_y pour τ limité en étant successivement approchée par les solutions des équations

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, \xi_i(y), y),$$

de condition initiale $\psi_j(\xi_i(y), y)$, $i, j = 1, 2, i \neq j$ et

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_i(x_2, y), x_2, y),$$

de condition initiale $\xi_i(y)$, $i = 1, 2$. De plus, la trajectoire de $\hat{S}(\tau)$ effectue un tour de Γ_y en un temps

$$p(y) \simeq P(y) = \int_{\xi_1(y)}^{\xi_2(y)} \frac{dx_2}{f_2(\psi_1(x_2, y), x_2, y)} + \int_{\xi_2(y)}^{\xi_1(y)} \frac{dx_2}{f_2(\psi_2(x_2, y), x_2, y)}. \quad (5.5)$$

Preuve. 1) Soit y standard dans K . Soit $P = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ de partie standard $({}^o\alpha_1, {}^o\alpha_2)$. Pour fixer les idées, on supposera comme sur la figure.5.2 que ${}^o\alpha_1$ est dans le bassin d'attraction du point d'équilibre $x_1 = \psi_1({}^o\alpha_2, y)$ de (5.3) (d'après la conséquence 1). Soit $\tilde{x}_1(\sigma)$ la solution, définie pour tout $\sigma \geq 0$, de

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, {}^o\alpha_2, y),$$

de condition initiale ${}^o\alpha_1$. Soit $\bar{x}_2(\tau)$ la solution, définie pour tout $x_2 \leq \xi_2(y)$ limité, de

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_1(x_2, y), x_2, y),$$

de condition initiale ${}^o\alpha_2$. Soit $\hat{S}(\tau) = (\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau))$ une solution de (5.2) de condition initiale P . Alors, d'après le théorème de Tikhonov, il existe $\omega_1 \simeq +\infty$ et $\tau_1 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &\simeq 0, \\ \hat{x}_1(\delta\sigma) &\simeq \tilde{x}_1(\sigma), \quad \hat{x}_2(\delta\sigma) \simeq {}^o\alpha_2 \text{ pour tout } \sigma \in [0, \omega_1], \\ \hat{x}_1(\delta\omega_1 + \tau) &\simeq \psi_1(\bar{x}_2(\tau), y), \quad \hat{x}_2(\delta\omega_1 + \tau) \simeq \bar{x}_2(\tau) \text{ pour tout } \tau \in [0, \tau_1], \\ \bar{x}_2(\tau_1) &\simeq \xi_2(y). \end{aligned}$$

On a longé PQ puis QB sur la figure.

2) Soit $\sigma = \frac{\tau - \tau_1}{\delta}$. Soit $\tilde{x}_{11}(\sigma)$ la solution de

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, \xi_2(y), y),$$

de condition initiale $\psi_1(\xi_2(y), y)$. Soit $\bar{x}_{21}(\tau)$ la solution de

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_2(x_2, y), x_2, y),$$

de condition initiale $\xi_2(y)$. Alors, il existe $\omega_2 \simeq +\infty$ et $\tau_2 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \delta\omega_2 &\simeq 0, \\ \hat{x}_1(\tau_1 + \delta\sigma) &\simeq \tilde{x}_{11}(\sigma), \quad \hat{x}_2(\tau_1 + \delta\sigma) \simeq \xi_2(y) \text{ pour tout } \sigma \in [0, \omega_2], \\ \hat{x}_1(\tau_1 + \delta\omega_2 + \tau) &\simeq \psi_2(\bar{x}_{21}(\tau), y), \\ \text{et } \hat{x}_2(\tau_1 + \delta\omega_2 + \tau) &\simeq \bar{x}_{21}(\tau) \text{ pour } \tau \in [0, \tau_2], \\ \bar{x}_{21}(\tau_2) &\simeq \xi_1(y). \end{aligned}$$

On a longé BC puis CD .

3) Soit $\sigma = \frac{\tau - \tau_2}{\delta}$. Soit $\tilde{x}_{12}(\sigma)$ la solution de

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, \xi_1(y), y),$$

de condition initiale $\psi_2(\xi_1(y), y)$. Soit $\bar{x}_{22}(\tau)$ la solution de

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_1(x_2, y), x_2, y),$$

de condition initiale $\xi_1(y)$. Alors, il existe $\omega_3 \simeq +\infty$ et $\tau_3 > 0$ tels que

$$\begin{aligned} \delta\omega_3 &\simeq 0, \\ \hat{x}_1(\tau_2 + \delta\sigma) &\simeq \tilde{x}_{12}(\sigma), \quad \hat{x}_2(\tau_2 + \delta\sigma) \simeq \xi_1(y) \text{ pour tout } \sigma \in [0, \omega_3], \\ \hat{x}_1(\tau_2 + \delta\omega_3 + \tau) &\simeq \psi_1(\bar{x}_{22}(\tau), y), \\ \text{et } \hat{x}_2(\tau_2 + \delta\omega_3 + \tau) &\simeq \bar{x}_{22}(\tau) \text{ pour } \tau \in [0, \tau_3], \\ \bar{x}_{22}(\tau_3) &\simeq \xi_2(y). \end{aligned}$$

On a longé DA puis AB . Ainsi de suite, pour les temps limités ultérieurs, $\hat{S}(\tau)$ évolue près de Γ_y , ses composantes étant donc approchées par les solutions de

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, \xi_i(y), y),$$

de condition initiale $\psi_j(\xi_i(y), y)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ et de

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_i(x_2, y), x_2, y),$$

de condition initiale $\xi_i(y)$, $i = 1, 2$.

A présent, si on suppose par exemple que $P \simeq A$, i.e. $\alpha_1 \simeq \psi_1(\alpha_2, y)$, $\alpha_2 \simeq \xi_1(y)$, alors en ajustant les temps du raisonnement précédent on voit que $\hat{S}(\tau)$ fait le tour de Γ_y au bout d'un temps

$$p(y) = \int_{\Gamma_y} d\tau \simeq \tau_1 + \delta\omega_2 + \tau_2 + \delta\omega_3,$$

avec $\delta\omega_2 \simeq 0$ et $\delta\omega_3 \simeq 0$. Ainsi

$$p(y) \simeq \tau_1 + \tau_2 =: P(y) = \int_{AB} d\tau + \int_{CD} d\tau.$$

De l'équation (5.4), on déduit alors l'approximation (5.5). ■

Conséquence 2 : On constate la propriété suivante de l'objet standard Γ_y : Γ_y est semi-globalement pratiquement asymptotiquement stable (SGPAS) pour (5.2) quand $\delta \simeq 0$ i.e. pour tout y standard dans K , tout (α_1, α_2) limité différent du point d'équilibre E_y de (5.2), tout $\delta \simeq 0$ et tout $\tau \simeq +\infty$, toute solution de (5.2) de condition initiale (α_1, α_2) vérifie $\text{dis}(\hat{S}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$. On notera parfois $\hat{S}(\tau) \simeq \Gamma_y$.

On définit l'équation standard

$$\dot{y} = M(y), \quad (5.6)$$

où $y \in \overset{\circ}{K}$, l'intérieur de K , avec

$$M(y) := \frac{1}{P(y)} \sum_{i=1}^2 \int_{\xi_i(y)}^{\xi_{i+1}(y)} \frac{g(\psi_i(x_2, y), x_2, y)}{f_2(\psi_i(x_2, y), x_2, y)} dx_2,$$

où $\xi_3(y) = \xi_1(y)$

A4 : L'équation (5.6) a la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale fixée. La fonction $P(y)$ est continue.

Considérons le problème de Cauchy consistant en le système (5.1) avec la condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. On se réfère à l'équation de la couche limite rapide

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, {}^\circ\alpha_2, {}^\circ\beta), \quad (5.7)$$

de condition initiale ${}^\circ\alpha_1$, à l'équation réduite intermédiaire

$$\frac{dx_2}{d\tau} = f_2(\psi_i(x_2, {}^\circ\beta), x_2, {}^\circ\beta), \quad (5.8)$$

de condition initiale ${}^\circ\alpha_2$ et à l'équation réduite lente

$$\frac{dy}{dt} = M(y), \quad (5.9)$$

de condition initiale ${}^\circ\beta$.

A5 : $({}^\circ\alpha_1, {}^\circ\alpha_2) \neq E_{{}^\circ\beta}$ et ${}^\circ\beta \in \overset{\circ}{K}$.

Remarquons que nous pouvons considérer x_1 comme variable d'intégration dans les expressions de $P(y)$ et $M(y)$. Nous obtenons les formules ci-

dessous

$$\begin{aligned}
M(y) &= \frac{1}{P(y)} \int_{\eta_1(y)}^{\eta_2(y)} \frac{g(x_1, \phi(x_1, y), y) \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1}{f_2(x_1, \phi(x_1, y), y)} \\
&\quad + \int_{\eta_3(y)}^{\eta_4(y)} \frac{g(x_1, \phi(x_1, y), y) \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1}{f_2(x_1, \phi(x_1, y), y)}, \tag{5.10} \\
P(y) &= \int_{\eta_1(y)}^{\eta_2(y)} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_1}{f_2(x_1, \phi(x_1, y), y)} + \int_{\eta_3(y)}^{\eta_4(y)} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y) dx_2}{f_2(x_1, \phi(x_1, y), y)}
\end{aligned}$$

après le changement de variable $x_2 = \phi(x_1, y)$ avec $\eta_1(y) = \psi_1(\xi_1(y))$, $\eta_2(y) = \psi_1(\xi_2(y))$, $\eta_3(y) = \psi_2(\xi_1(y))$, $\eta_4(y) = \psi_2(\xi_2(y))$ (voir aussi les exemples de la page 80).

5.2 Le résultat

Notons par $(S(t), y(t)) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ les solutions de (5.1). Nous allons décrire le comportement de ces solutions dans le théorème suivant. En réalité, les trois premières assertions sont une application directe du théorème de Tikhonov. Le dernier point est le résultat proprement dit.

Théorème 5.2.1 *Soit f_1, f_2 et g des fonctions standard continues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ limité dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, de partie standard $({}^o\alpha_1, {}^o\alpha_2, {}^o\beta)$. Supposons satisfaites les hypothèses A1 à A5. Soit $\tilde{x}_1(\sigma)$ et $\tilde{x}_2(\tau)$ les solutions respectives de (5.7) et (5.8). Soit $y_0(t)$ la solution de (5.9) définie sur un intervalle standard $[0, T]$. Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ deux réels infinitésimaux. Alors toute solution $(S(t), y(t))$ de (5.1) de condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ est définie au moins sur $[0, T]$ et il existe $\omega \simeq +\infty$, $\bar{\tau} > 0$, $i = 1, 2$ tels que*

- i) $\delta\omega \simeq 0$,
- ii) $S(\varepsilon\delta\sigma) \simeq (\tilde{x}_1(\sigma), {}^o\alpha_2)$, $y(\varepsilon\delta\sigma) \simeq {}^o\beta$ pour tout $\sigma \in [0, \omega]$,
- iii) $x_1(\varepsilon\tau) \simeq \psi_i(\tilde{x}_2(\tau), {}^o\beta)$ pour tout $\tau \in [\delta\omega, \bar{\tau}]$,
 $x_2(\varepsilon\tau) \simeq \tilde{x}_2(\tau)$, $y(\varepsilon\tau) \simeq {}^o\beta$ pour tout $\tau \in [0, \bar{\tau}]$,
- iv) $S(t) \simeq \Gamma_{y_0(t)}$ pour tout $t \in [\varepsilon\bar{\tau}, T]$,
 $y(t) \simeq y_0(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Remarque 5.2.2 *On pourrait montrer de plus qu'une trajectoire de (5.1) qui est infiniment proche de la variété \mathcal{G} engendrée par les Γ_y , $y \in K$, à un instant \bar{t} , reste infiniment près de $\Gamma_{y_0(\bar{t})}$ en oscillant rapidement autour avec une période proche de $\varepsilon P(y_0(\bar{t}))$ en présentant un phénomène de relaxation.*

5.3 Lemmes préliminaires

Etablir le théorème principal consiste à montrer d'abord qu'une trajectoire de (5.1) atteint rapidement un voisinage infinitésimal de la variété $\mathcal{G} = \bigcup_{y \in K} (\Gamma_y \times \{y\})$ engendrée par les cycles lents-rapides. Il faudra ensuite s'assurer qu'une telle trajectoire reste infiniment proche de \mathcal{G} tant que la composante $y(t)$ est loin du bord de K (lemme 5.3.1). Enfin, on montrera par stroboscopie que cette composante $y(t)$ est approchée par la solution de l'équation moyennisée (5.9) (lemme 5.3.2).

Lemme 5.3.1 *Supposons satisfaites les hypothèses A1 à A3. Soit $(S(t), y(t))$ une solution de (5.1) telle que $S(t_0) \simeq \Gamma_{y(t_0)}$. Supposons que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $y(t)$ est presque standard dans \mathring{K} . Alors, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $S(t) \simeq \Gamma_{y(t)}$.*

Preuve. Comme fonction de $\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}$, $(S(t_0 + \varepsilon\tau), y(t_0 + \varepsilon\tau))$ est solution de

$$\begin{aligned} \delta dx_1/d\tau &= f_1(x_1, x_2, y), \\ dx_2/d\tau &= f_2(x_1, x_2, y), \\ dy/d\tau &= \varepsilon g(x_1, x_2, y), \end{aligned} \quad (5.11)$$

de condition initiale $(S(t_0), y(t_0))$. Nous affirmons d'abord que cette solution admet les mêmes approximations, tant que τ est limité, qu'une solution $\hat{S}(\tau)$ de

$$\begin{aligned} \delta dx_1/d\tau &= f_1(x_1, x_2, {}^o y(t_0)), \\ dx_2/d\tau &= f_2(x_1, x_2, {}^o y(t_0)), \end{aligned}$$

de condition initiale $S(t_0)$ et de paramètre la partie standard ${}^o y(t_0)$ de $y(t_0)$.

A l'échelle du temps $\sigma = \frac{t - t_0}{\varepsilon\delta} = \frac{\tau}{\delta}$, (5.11) s'écrit

$$\begin{aligned} dx_1/d\sigma &= f_1(x_1, x_2, y), \\ dx_2/d\sigma &= \delta f_2(x_1, x_2, y), \\ dy/d\sigma &= \varepsilon\delta g(x_1, x_2, y), \end{aligned}$$

de condition initiale $(S(t_0), y(t_0))$. Ce système est une perturbation régulière de

$$\begin{aligned} dx_1/d\sigma &= f_1(x_1, x_2, y), \\ dx_2/d\sigma &= dy/d\sigma = 0, \end{aligned}$$

de condition initiale $({}^o S(t_0), {}^o y(t_0))$ où ${}^o S(t_0) = ({}^o x_1(t_0), {}^o x_2(t_0))$ est la partie standard de $S(t_0)$. La phase rapide de (5.11) est donc approchée par l'équation de la couche limite

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, {}^o x_2(t_0), {}^o y(t_0)),$$

de condition initiale ${}^o x_1(t_0)$. Selon la théorie de Tikhonov, la phase intermédiaire est alors décrite par

$$\begin{aligned} dx_2/d\tau &= f_2(\psi_i(x_2, {}^o y(t_0)), x_2, y), \\ dy/d\tau &= 0, \end{aligned}$$

de condition initiale $({}^o x_1(t_0), {}^o y(t_0))$ pour un certain $i = 1$ ou 2 . Ceci montre l'affirmation et le fait qu'on peut déduire, grâce à une double application du lemme de l'ombre courte, que pour tout $\tau \geq 0$ limité, $(S(t_0 + \varepsilon\tau), y(t_0 + \varepsilon\tau)) \simeq (\hat{S}(\tau), {}^o y(t_0))$. Or $\hat{S}(0) \simeq S(t_0) \simeq \Gamma_{y(t_0)} \simeq \Gamma_{{}^o y(t_0)}$ par hypothèse, donc, pour tout $\tau \geq 0$ limité,

$$S(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq \Gamma_{{}^o y(t_0)}, \quad y(t_0 + \varepsilon\tau) \simeq {}^o y(t_0). \quad (5.12)$$

Supposons à présent qu'il existe $s \in]t_0, t_1]$ tel que $\text{dis}(S(s), \Gamma_{y(s)}) = \gamma$ appréciable. Puisque $S(t_0) \simeq \Gamma_{y(t_0)}$ et $y(t)$ est presque standard dans \hat{K} pour tout $t \in [t_0, s]$, il existe une plus petite valeur m de s telle que $\text{dis}(S(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$. Le temps $\tau_0 = \frac{m - t_0}{\varepsilon}$ pris pour aller de $(S(t_0), y(t_0))$ à $(S(m), y(m))$ est, d'après (5.12), nécessairement illimité positif. Considérons alors une solution $(S(m + \varepsilon\tau), y(m + \varepsilon\tau))$ de (5.1) de condition initiale $(S(m), y(m))$. Par une application indirecte du lemme de l'ombre courte, on obtient que

$$(S(m + \varepsilon\tau), y(m + \varepsilon\tau)) \simeq (\hat{S}(\tau), y_m) \quad (5.13)$$

pour tout $\tau \leq 0$ limité, où $y_m = {}^o y(m)$ et $(\hat{S}(\tau), y_m)$ est une solution de (5.2) de paramètre y_m et de condition initiale $(S(m), y_m)$. D'après le lemme de Robinson, il existe $\tau_1 \simeq -\infty$ que l'on peut choisir tel que $-\tau_0 < \tau_1$ et pour lequel $(S(m + \varepsilon\tau_1), y(m + \varepsilon\tau_1)) \simeq (\hat{S}(\tau_1), y_m)$. D'autre part, d'après la conséquence 2, $\hat{S}(\tau_1 + \tau) \simeq \Gamma_{y_m}$ pour tout $\tau \simeq +\infty$. En particulier, pour $\tau = -\tau_1$, on obtient $S(m) \simeq \hat{S}(0) \simeq \Gamma_{y_m} \simeq \Gamma_{y(m)}$. Ceci contredit le fait que $\text{dis}(S(m), \Gamma_{y(m)}) = \gamma$. ■

Remarque : Dans la preuve, arrivé au niveau de l'approximation (5.13), on pouvait raisonner de manière plus qualitative comme ceci : la demi-trajectoire négative de $\hat{S}(\tau)$ partant de $(S(m), y_m)$ est quasi-horizontale pour $\tau < 0$ limité. Elle s'éloigne de Γ_{y_m} et s'en trouve à une distance supérieure à γ . D'après (5.13), ce sera aussi le cas de $S(m + \varepsilon\tau)$, ce qui contredit la définition de m .

Lemme 5.3.2 *Supposons satisfaites les hypothèses A1 à A4. Soit $(S(t), y(t))$ une solution de (5.1) telle que $y(t_0)$ est presque standard dans \mathring{K} . Soit $y_0(t)$ la solution de (5.9) de condition initiale ${}^o y = {}^o y(t_0)$, définie sur un intervalle $[0, T]$. Soit la collection externe $\mathcal{I} = \{t \geq t_0, (S(t), y(t)) \text{ est définie et } S(s) \simeq \Gamma_{y(s)} \text{ pour tout } s \in [t_0, t]\}$. Alors, $[t_0, t_0 + T] \subset \mathcal{I}$ et $y(t_0 + s) \simeq y_0(s)$ pour tout $s \in [0, T]$.*

Preuve. Définissons le réel $\mu = \varepsilon \min\{P(y), y \in K\}$. D'après l'hypothèse A4, $\mu > 0$. Soit t_m limité dans \mathcal{I} tel que $y(t_m)$ presque standard dans \mathring{K} . Le problème (5.1) de condition initiale $(S(t_m), y(t_m))$ est transformé par le changement de variables

$$\tau = \frac{t - t_m}{\varepsilon}, \quad Y(\tau) = \frac{y(t_m + \varepsilon\tau) - y(t_m)}{\varepsilon}, \quad (5.14)$$

en le problème

$$\begin{aligned} \delta dx_1/d\tau &= f_1(x_1, x_2, y(t_m) + \varepsilon Y), \\ dx_2/d\tau &= f_2(x_1, x_2, y(t_m) + \varepsilon Y), \\ dY/d\tau &= g(x_1, x_2, y(t_m) + \varepsilon Y), \end{aligned} \quad (5.15)$$

de solution $(S(t_m + \varepsilon\tau), Y(\tau))$ et de condition initiale $(S(t_m), 0)$. Rappelons que $S(t_m) \simeq \Gamma_{y(t_m)}$. Supposons² que pour un certain $i = 1$ ou 2 , $x_1(t_m) \simeq \psi_i(x_2(t_m), y(t_m))$, où $x_2(t_m)$ est dans $[\xi_1(y_m), \xi_2(y_m)[$, $y_m = {}^o y(t_m) \in \mathring{K}$. Disons que $i = 1$. Sans perte de généralité, nous allons supposer pour réduire la longueur du raisonnement que $x_2(t_m) \simeq \xi_1(y_m)$. Le système (5.15) est un système lent-rapide dont l'équation réduite est alors, pour Y limité,

$$\begin{aligned} dx_2/d\tau &= f_2(\psi_1(x_2, y_m), x_2, y_m), \\ dY/d\tau &= g(\psi_1(x_2, y_m), x_2, y_m), \end{aligned} \quad (5.16)$$

de condition initiale $({}^o x_2(t_m), 0)$. Notons par $(\bar{x}_2(\tau), \bar{Y}(\tau))$ la solution de (5.16). La première équation de (5.16) n'est autre que l'équation (5.4) de condition initiale ${}^o x_2(t_m)$ et de paramètre y_m . Il existe donc $\tau_1 > 0$ tel que $\bar{x}_2(\tau_1) \simeq \xi_2(y_m)$. Pour Y limité et $\tau \in [0, \tau_1]$, on a d'après le théorème de Tikhonov

$$(x_1(t_m + \varepsilon\tau), x_2(t_m + \varepsilon\tau), Y(\tau)) \simeq (\psi_1(\bar{x}_2(\tau), y_m), \bar{x}_2(\tau), \bar{Y}(\tau)). \quad (5.17)$$

On a alors l'approximation

$$Y(\tau_1) \simeq \bar{Y}(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} g(\psi_1(\bar{x}_2(s), y_m), \bar{x}_2(s), y_m) ds. \quad (5.18)$$

²Si le point $(S(t_m), y(t_m))$ était infiniment proche d'une branche horizontale de $\Gamma_{y(t_m)}$, il est clair qu'au bout d'un temps infinitésimal, en comparaison avec l'échelle du temps de τ , on se retrouverait dans ce cas.

Posons $\sigma = (\tau - \tau_1)/\delta$ et notons par \bar{Y}_0 la partie standard de $\bar{Y}(\tau_1)$. Soit $\tilde{x}(\sigma)$ la solution de

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = f_1(x_1, \xi_2(y_m), \bar{Y}_0),$$

de condition initiale $\psi_1(\xi_2(y_m), y_m)$. Soit $(\bar{x}_{21}(\tau), \bar{Y}_1(\tau))$ la solution de

$$\begin{aligned} dx_2/d\tau &= f_2(\psi_2(x_2, y_m), x_2, y_m), \\ dY/d\tau &= g(\psi_2(x_2, y_m), x_2, y_m), \end{aligned}$$

de condition initiale $(\xi_2(y_m), \bar{Y}_0)$. Alors, d'après le théorème de Tikhonov, il existe $\omega \simeq +\infty$ et $\tau_2 > 0$ tels que $\delta\omega \simeq 0$ et

$$\begin{aligned} S(t_m + \varepsilon\tau_1 + \varepsilon\delta\sigma) &\simeq (\tilde{x}(\sigma), \xi_2(y_m)), \quad Y(\tau_1 + \delta\sigma) \simeq \bar{Y}_0 \text{ pour tout } \sigma \in [0, \omega], \\ S(t_m + \varepsilon\tau_1 + \varepsilon\delta\omega + \varepsilon\tau) &\simeq (\psi_2(\bar{x}_{21}(\tau), y_m), \bar{x}_{21}(\tau)) \\ \text{et } Y(\tau_1 + \delta\omega + \tau) &\simeq \bar{Y}_1(\tau) \text{ pour tout } \tau \in [0, \tau_2], \\ \bar{x}_{21}(\tau_2) &\simeq \xi_1(y_m). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pour faire court, on dira que le saut suivant va produire un $\omega_1 \simeq +\infty$ pour lequel $\delta\omega_1 \simeq 0$ tel qu'en définitive

$$\begin{aligned} Y(\tau_1 + \tau_2) &\simeq Y(\tau_1 + \delta\omega + \tau_2 + \delta\omega_1) \simeq \bar{Y}_0 + \int_0^{\tau_2} g(\psi_2(\bar{x}_{21}(s), y_m), \bar{x}_{21}(s), y_m) ds \\ &\simeq \int_0^{\tau_1} g(\psi_1(\bar{x}_2(s), y_m), \bar{x}_2(s), y_m) ds + \int_0^{\tau_2} g(\psi_2(\bar{x}_{21}(s), y_m), \bar{x}_{21}(s), y_m) ds, \end{aligned} \tag{5.20}$$

d'après la troisième approximation de (5.19) et (5.18). Notons que $\tau_1 + \tau_2 = P(y_m)$.

Sachant d'autre part que $d\tau = dx_2/f_2$, $f_2 \neq 0$, (5.20) s'écrit

$$\begin{aligned} Y(P(y_m)) &\simeq H(y_m) \\ &:= \sum_{i=1}^2 \int_{\xi_i(y_m)}^{\xi_{i+1}(y_m)} \frac{g(\psi_i(x_2, y_m), x_2, y_m)}{f_2(\psi_i(x_2, y_m), x_2, y_m)} dx_2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

avec $\xi_3 = \xi_1$. Soit alors l'instant $t_n = t_m + \varepsilon P(y_m)$. Vérifions que $t_n \in \mathcal{I}$, i.e. pour tout $s \in [t_0, t_n]$, $S(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$. C'est évidemment vrai pour $s \in [t_0, t_m]$. Soit alors $s = t_m + \varepsilon\tau$. D'après (5.14), $y(s) = y(t_m) + \varepsilon Y(\tau) \simeq y(t_m)$ pour tout $\tau \in [0, P(y_m)]$. Or $y(t_m)$ est presque standard dans \mathring{K} et $S(t_m) \simeq \Gamma_{y(t_m)}$. D'après le lemme 5.3.1, pour tout $s \in [t_m, t_n]$, $S(s) \simeq \Gamma_{y(s)}$. Ainsi, t_n est dans \mathcal{I} .

Pour tout t_m limité dans \mathcal{I} , avec $y(t_m)$ presque standard dans \mathring{K} , on a donc trouvé t_n tel que $0 \simeq t_n - t_m \geq \mu$, $[t_m, t_n] \subset \mathcal{I}$ et $y(s) \simeq y(t_m)$ pour

tout $s \in [t_m, t_n]$. D'après (5.14) et (5.21), on a

$$\frac{y(t_n) - y(t_m)}{t_n - t_m} = \frac{Y(P(y_m))}{P(y_m)} \simeq \frac{H(y_m)}{P(y_m)} = M(y_m) \simeq M(y(t_m)).$$

D'après le lemme de stroboscopie, $[t_0, t_0 + T] \subset \mathcal{I}$ et $y(t_0 + s) \simeq y_0(s)$ pour tout $s \in [0, T]$. ■

5.4 Preuve du Théorème 5.2.1

Soit $(S(t), y(t))$ une solution de (5.1) de condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. D'après le théorème de Tikhonov, la trajectoire de $(S(t), y(t))$ arrive en un temps infinitésimal $t_0 = \varepsilon\delta\omega$ où $\delta\omega \simeq 0$, près du point $(\psi_i({}^o\alpha_2, {}^o\beta), {}^o\alpha_2, {}^o\beta)$ de la variété lente puis longe celle-ci tant que $x_2(t)$ est loin du bord de $] -\infty, \xi_2({}^o\beta)[$ si $i = 1$ ou de $]\xi_1({}^o\beta), +\infty[$ si $i = 2$. Les approximations sont alors données par (ii) et (iii). D'autre part, $\bar{\tau}$ dans (iii) peut être choisi assez grand pour que $\bar{x}_2(\bar{\tau}) \in [\xi_1({}^o\beta), \xi_2({}^o\beta)]$ de sorte qu'au bout du temps $t_1 = \varepsilon\bar{\tau}$ infinitésimal la trajectoire $(S(t), y(t))$ est infiniment proche de $\Gamma_{\circ\beta} \subset \mathcal{G}$. Supposons alors qu'il existe $s \in]t_1, T]$ tel que $y(s) \not\simeq y_0(s)$. Soit $r > 0$ un réel standard tel que $|y(s) - y_0(s)| \geq r$. Etant donné que $y_0(t)$ est presque standard dans \mathring{K} , on peut définir, pour r standard, un voisinage tubulaire de $(t, y_0(t))$ sur $[0, T]$, à savoir $\mathcal{B} = \{(t, y) : t \in [0, T], y \in \mathring{K}, |y(t) - y_0(t)| < r\}$ tel que, pour tout $(t, y) \in \mathcal{B}$, y est presque standard dans \mathring{K} . Soit alors t_2 la plus petite valeur de s pour laquelle $|y(t_2) - y_0(t_2)| = r$. Sachant que $S(t_1) \simeq \Gamma_{\circ\beta}$, et vue que pour tout $s \in [t_1, t_2]$, $y(s)$ est presque standard dans \mathring{K} , le lemme 5.3.1 assure que pour tout $s \in [t_1, t_2]$, $S(s) \simeq \Gamma_{y(s)} \subset \mathcal{G}$. Le lemme 5.3.2 permet alors d'affirmer que pour tout $t \in [0, t_2]$, $y(t) \simeq y_0(t)$. En particulier, $y(t_2) \simeq y_0(t_2)$. Ceci contredit le fait que $|y(t_2) - y_0(t_2)| = r$. Par conséquent, $y(t)$ est définie au moins sur $[0, T]$ et vérifie $y(t) \simeq y_0(t)$. De là, $S(t) \simeq \Gamma_{y(t)} \simeq \Gamma_{y_0(t)}$ pour $t \in [t_1, T]$. D'où l'assertion (iv).

5.5 Exemples

Exemple 1 : Considérons le système

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y), \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y), \\ \dot{y} &= g(x_1, x_2, y), \end{aligned} \tag{5.22}$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y) &= x_2 - x_1^3/3 + x_1 - y, \\ f_2(x_1, x_2, y) &= -x_1, \\ g(x_1, x_2, y) &= -x_1^2 y. \end{aligned}$$

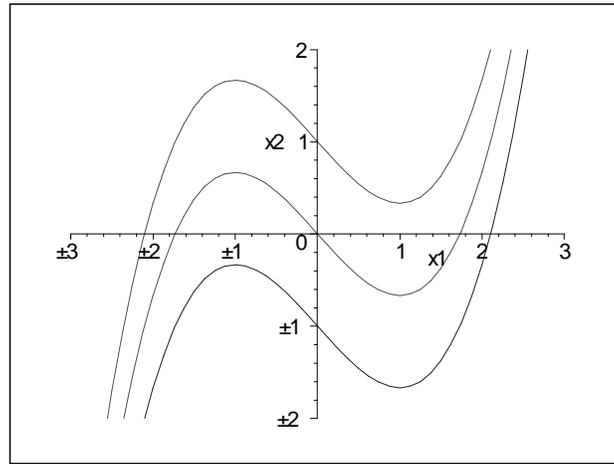


FIG. 5.3 – Exemples d'isoclines $f_1 = 0$ pour les valeurs $-1, 0$ et 1 de y .

L'isocline $f_2 = 0$ est l'axe des x_2 et l'isocline $f_1 = 0$ est la cubique d'équation

$$x_2 = \phi(x_1, y) := x_1^3/3 - x_1 + y.$$

On en a représenté trois sur la figure.5.3 pour différentes valeurs de y . Les trajectoires sont quasi-horizontales en dehors de la courbe $x_2 = \phi(x_1, y)$ avec x_1 croissant au dessus et décroissant en dessous. Ce système satisfait évidemment les conditions du théorème 5.2.1. La particularité de ce cas est que les valeurs extrêmes des abscisses des cycles Γ_y ainsi formés ne dépendent pas de y et valent -2 et 2 . Les abscisses internes sont -1 et 1 . Il est alors plus pratique de calculer avec les formules (5.10). Sachant que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, y) = x_1^2 - 1,$$

on obtient

$$P(y) = \int_{-2}^{-1} \frac{1 - x_1^2}{x_1} dx_1 + \int_1^2 \frac{1 - x_1^2}{x_1} dx_1 = 3 - 2 \ln 2,$$

$$M(y) = \frac{y}{3 - 2 \ln 2} \left(\int_{-2}^{-1} \frac{-x_1^2(1 - x_1^2)}{x_1} dx_1 + \int_1^2 \frac{-x_1^2(1 - x_1^2)}{x_1} dx_1 \right) = \frac{-9y}{6 - 4 \ln 2}.$$

Sur la figure 5.4, on constate la bonne approximation de la composante $y(t)$ de la solution de (5.22) de condition initiale $(0, 1, 0.5)$ par la solution

$$y_0(t) = 0.5e^{-9t/(6-4 \ln 2)}$$

de l'équation moyennisée.

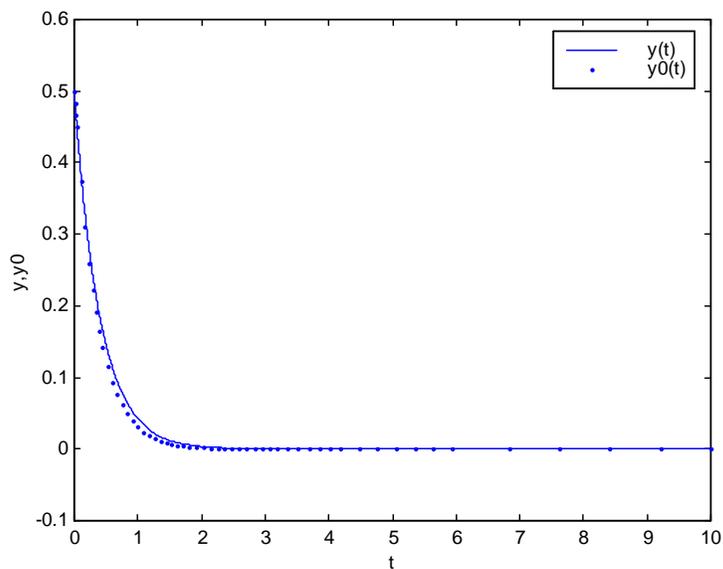


FIG. 5.4 – Comparaison de la solution $y(t)$ de (5.22) et de la solution $y_0(t)$ de $\dot{y} = M(y)$ de condition initiale 0.5 ($\varepsilon = \delta = 1/25$).

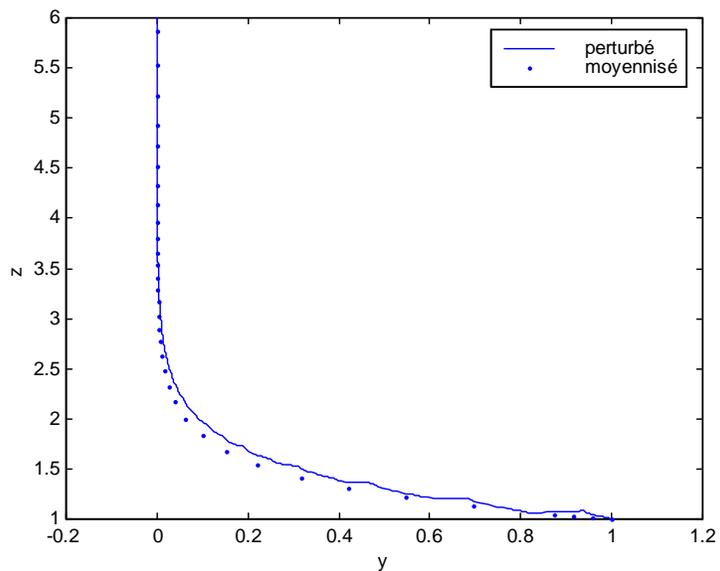


FIG. 5.5 – Simulation d'une trajectoire de (5.23) et d'une trajectoire de (5.24) de condition initiale $(1, 1)$, $t = 0..2$.

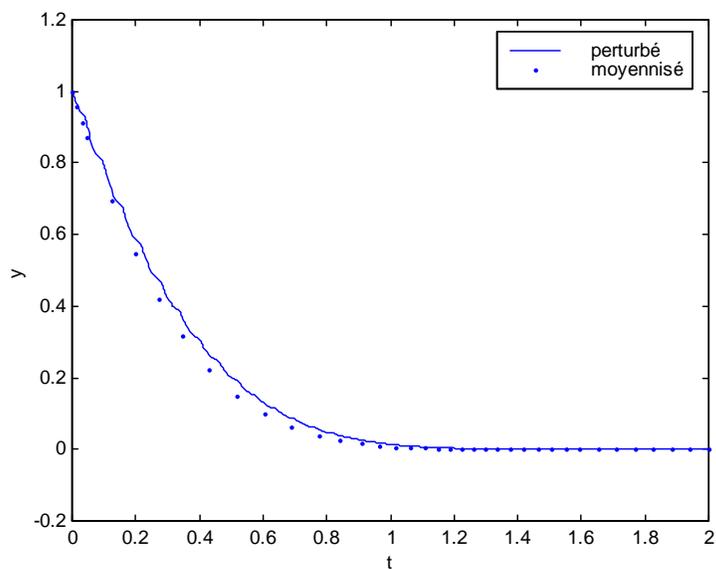


FIG. 5.6 – Comparaison de la solution $y(t)$ de (5.23) et de la solution $y_0(t)$ de (5.24) avec les paramètres de Fig.5.5.

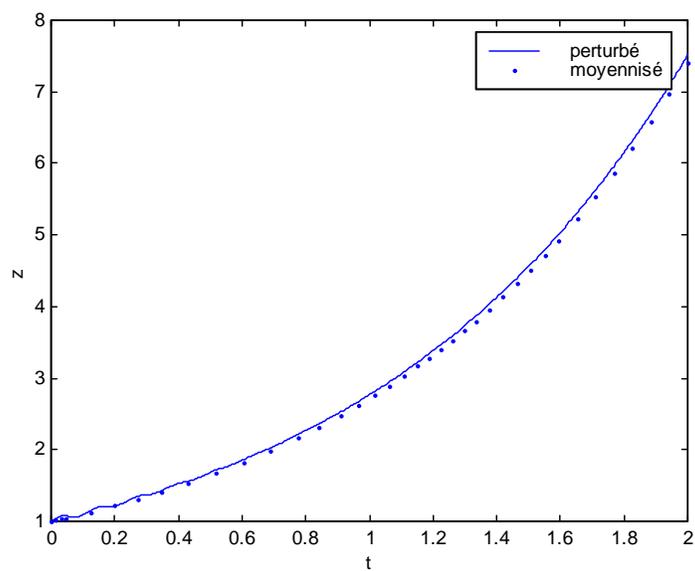


FIG. 5.7 – Comparaison de la solution $z(t)$ de (5.23) et de la solution $z_0(t)$ de (5.24) avec les paramètres de Fig.5.5.

Exemple 2 : On considère le système de dimension quatre suivant

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3/3 + x_1 - yz, \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= -x_1, \\ \dot{y} &= -x_1^2yz, \\ \dot{z} &= x_1y + z.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Les cycles $\Gamma_{y,z}$ ont la même allure que ceux de l'exemple 1, mais leurs valeurs maximales et minimales dépendent de y et de z (en fait de yz), l'isocline $\dot{x}_1 = 0$ étant définie par

$$x_2 = \phi(x_1, y, z) := x_1^3/3 - x_1 + yz.$$

Les formules (5.10) permettent de définir le système moyennisé

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{-9yz}{6 - 4 \ln 2}, \\ \dot{z} &= z.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Les simulations pour cet exemple ont été effectuées avec $\varepsilon = \delta = 0.05$. Sur la figure.5.5, on compare deux trajectoires de (5.23) et (5.24) dans l'espace des phases. Les comparaisons des solutions correspondantes sont visibles sur les figures.5.6 et 5.7.

5.6 Un cas de cycle canard

Il existe des situations où au moins une branche d'un cycle lent-rapide présente un phénomène dit canard (voir par exemple [5]). Une telle branche continue dans ce cas à longer la variété lente mais dans sa partie répulsive avant de finalement s'en éloigner. C'est un retard à la bifurcation. Nous examinons ici un exemple inspiré par des modèles de biomathématiques pour lequel nous précisons comment la théorie précédente s'applique. Soit le système

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta\dot{x}_1 &= x_1f_1(x_1, x_2, y), \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= x_2f_2(x_1, x_2, y), \\ \dot{y} &= g(x_1, x_2, y),\end{aligned}\tag{5.25}$$

où f_1 , f_2 et g sont standard et continues dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, ε et δ des réels positifs infinitésimaux. Notons les hypothèses par la lettre **B**.

B1 : *Il existe un compact K standard de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide tel que, pour tout $y \in K$, les isoclines nulles $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ ont l'allure schématisée sur la figure.5.8. Elles partagent, avec les isoclines $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ le quadrant positif $(x_1 \times x_2)$ en quatre régions où le champ a les signes indiqués sur la figure.*

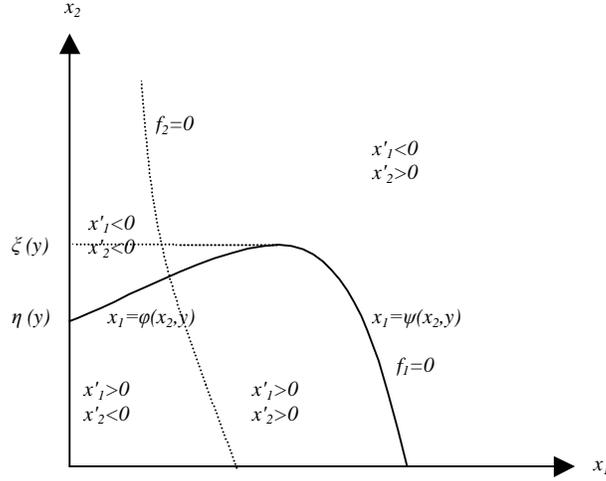


FIG. 5.8 – Isoclines nulles et signes du champ de (5.26).

Pour tout $y \in K$, $f_1 = 0$ est donc formée de part et d'autre du sommet de deux branches $x_1 = \psi(x_2, y)$ et $x_1 = \varphi(x_2, y)$ continues définies respectivement pour x_2 dans $]0, \xi(y)]$ et $[\eta(y), \xi(y)]$, où η et ξ sont continues sur K avec $\eta(y)$ appréciable positif. D'autre part, l'isocline $f_2 = 0$ coupe transversalement $x_1 f_1 = 0$ en un unique point E_y se trouvant à distance appréciable des points $(0, \eta(y))$ et $(\varphi(\xi(y), y), \xi(y))$.

Comme pour le cas précédent, le champ du système

$$\begin{aligned} \delta dx_1/d\tau &= x_1 f_1(x_1, x_2, y), \\ dx_2/d\tau &= x_2 f_2(x_1, x_2, y), \end{aligned} \quad (5.26)$$

est quasi-horizontale en dehors des points infiniment proches de $x_1 f_1 = 0$. Une trajectoire $\hat{S}(\tau)$ de (5.26) partant d'un point P hors des axes (voir figure.5.9) atteint quasi-horizontalement en un temps infinitésimal un point infiniment proche du point Q sur $\{x_1 = 0\}$. Elle longe ensuite sa partie attractive jusqu'à s'approcher du point R . Nous montrerons plus bas que la trajectoire continue à longer $\{x_1 = 0\}$ dans sa partie répulsive jusqu'à un point infiniment proche de S (retard à la bifurcation). Elle saute près de T , longe TA où $f_1 = 0$ sans pouvoir s'en écarter avant A , saute près de B , longe BC , C étant le point de sortie dépendant du point d'entrée B sur $\{x_1 = 0\}$. La trajectoire saute près de D . Elle évolue ensuite autour de la courbe fermée $ABCD$ dépendant de y , notée Γ_y . Les approximations des phases rapides et lentes de $\hat{S}(\tau)$ sont données par les équations

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = x_1 f_1(x_1, x_2, y), \quad \sigma = t/\varepsilon\delta, \quad (5.27)$$

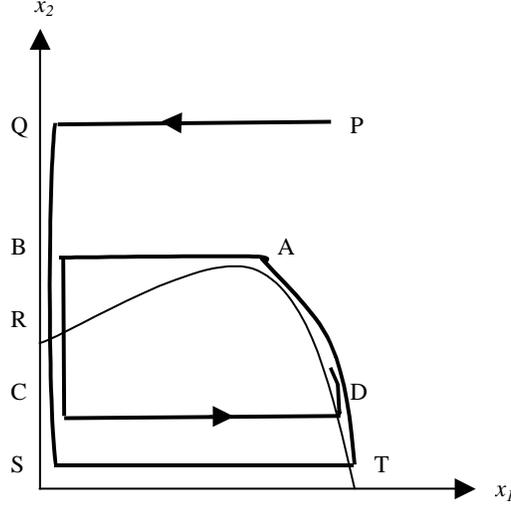


FIG. 5.9 – Une trajectoire de (5.26).

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2 f_2(0, x_2, y), \quad \tau = t/\varepsilon, \quad (5.28)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2 f_2(\psi(x_2, y), x_2, y), \quad (5.29)$$

avec l'hypothèse suivante :

B2 : Pour tout $y \in K$, les équations (5.27), (5.28) et (5.29) ont la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale fixée.

Quand $\hat{S}(\tau)$ évolue infiniment près de Γ_y , elle est approchée alternativement par les solutions de

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\sigma} &= x_1 f_1(x_1, \xi(y), y), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_2 f_2(0, x_2, y), \\ \frac{d\tau}{d\sigma} &= x_2 f_2(0, x_2, y), \\ \frac{dx_1}{d\sigma} &= x_1 f_1(x_1, \xi_s(y), y), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_2 f_2(\psi(x_2, y), x_2, y), \end{aligned}$$

où $\xi_s(y)$ correspond au point C et sera déterminée par le lemme suivant.

Lemme 5.6.1 (Relation entrée-sortie) *Supposons les hypothèses B1 et B2 satisfaites. Soit y standard dans K . Soit $\hat{S}(\tau) = (\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau))$ une trajectoire de (5.26) de condition initiale strictement positive arrivant quasi-horizontalement infiniment près d'un point standard $Q = (0, x_e)$. Alors $\hat{S}(\tau)$*

évolue infiniment près de la droite $x_1 = 0$ et ne s'en éloigne qu'arrivée infiniment près d'un point standard $S = (0, x_s)$ tel que

$$\int_{x_e}^{x_s} \frac{f_1(0, x_2, y)}{x_2 f_2(0, x_2, y)} dx_2 = 0. \quad (5.30)$$

Preuve. Remarquons que le lemme parle du premier point S après Q près duquel la trajectoire considérée quitte un voisinage infiniment petit (halo) de $\{x_1 = 0\}$. Sachant que pour tout τ , $\hat{x}_1(\tau)$ est strictement positive, on peut définir le changement de variable $X_1 = x_1^\delta$ qui transforme (5.26), de condition initiale $\hat{S}(\tau_0)$, en

$$\begin{aligned} dX_1/d\tau &= X_1 f_1(X_1^{1/\delta}, x_2, y), \\ dx_2/d\tau &= x_2 f_2(X_1^{1/\delta}, x_2, y), \end{aligned} \quad (5.31)$$

de condition initiale $((\hat{x}_1(\tau_0))^\delta, \hat{x}_2(\tau_0))$ et de solution notée $(X_1(\tau), x_2(\tau))$. Il existe un τ_0 tel que $\hat{S}(\tau_0) \simeq Q$ et $\delta \ln \hat{x}_1(\tau_0) \simeq 0$. Il en découle que $X_1(\tau_0) \simeq 1$. Soit $\tau_1 > \tau_0$ tel que $X_1(\tau_0) = X_1(\tau_1)$ et, pour tout $\tau \in]\tau_0, \tau_1[$, $X_1(\tau) < X_1(\tau_0)$. Sachant que, pour tout $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, $\hat{x}_1(\tau) \simeq 0$, on a $X_1(\tau) = e^{-\delta\omega}$ pour un certain $\omega \simeq +\infty$ d'où $X_1^{1/\delta}(\tau) \simeq 0$ pour tout $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. La solution considérée de (5.31) est donc infiniment proche, pour tout $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, de la solution du système standard

$$\begin{aligned} dX_1/d\tau &= X_1 f_1(0, x_2, y), \\ dx_2/d\tau &= x_2 f_2(0, x_2, y), \end{aligned} \quad (5.32)$$

de condition initiale $(1, x_e)$. Notons par $(\bar{X}_1(\tau), \bar{x}_2(\tau))$ la solution de (5.32). La composante $\bar{x}_2(\tau)$ n'est autre que la solution de l'équation rapide (5.28) de condition initiale x_e . D'autre part, de la première équation de (5.32), on a

$$\int_{X_1(\tau_0)}^{X_1(\tau)} \frac{dX_1}{X_1} = \int_{\tau_0}^{\tau} f_1(0, \bar{x}_2(s), y) ds,$$

pour tout $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. En particulier, pour $\tau = \tau_1$, on trouve

$$\ln \bar{X}_1(\tau_1) - \ln \bar{X}_1(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_1(0, \bar{x}_2(s), y) ds.$$

Or $\bar{X}_1(\tau_1) = \bar{X}_1(\tau_0) = 1$. Enfin, d'après la deuxième équation de (5.32), sachant que $\bar{x}_2(\tau_0) = x_e$ et en notant $\bar{x}_2(\tau_1) = x_s$, on obtient la relation (5.30). ■

Rappelons que x_e et x_s dépendent de y à l'instar de $\hat{S}(\tau)$. Si $x_e = \xi(y)$, en notant $\xi_s(y)$ la valeur de x_s correspondante, la relation

$$\int_{\xi(y)}^{\xi_s(y)} \frac{f_1(0, x_2, y)}{x_2 f_2(0, x_2, y)} dx_2 = 0$$

détermine complètement la branche BC de Γ_y . Il est clair que x_s dépend de x_e et ne peut donc être égal à $\eta(y)$. Il y a donc bien retard à la bifurcation.

Pour tout $y \in K$, on définit l'équation

$$\dot{y} = M(y), \quad (5.33)$$

$$M(y) := \frac{1}{P(y)} \int_{\xi(y)}^{\xi_s(y)} \frac{g(0, x_2, y)}{x_2 f_2(0, x_2, y)} dx_2 + \frac{1}{P(y)} \int_{\xi_s(y)}^{\xi(y)} \frac{g(\psi(x_2, y), x_2, y)}{x_2 f_2(\psi(x_2, y), x_2, y)} dx_2,$$

$$P(y) = \int_{\xi(y)}^{\xi_s(y)} \frac{dx_2}{x_2 f_2(0, x_2, y)} + \int_{\xi_s(y)}^{\xi(y)} \frac{dx_2}{x_2 f_2(\psi(x_2, y), x_2, y)}.$$

B3 : L'équation (5.33) a la propriété d'unicité des solutions pour toute condition initiale fixée. La fonction $P(y)$ est continue dans K .

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ tel que $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ et $\beta \in K$. On se réfère à l'équation de la couche limite (rapide)

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = x_1 f_1(x_1, {}^\circ\alpha_2, {}^\circ\beta), \quad (5.34)$$

de condition initiale ${}^\circ\alpha_1$, à l'équation réduite (intermédiaire)

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2 f_2(\psi_i(x_2, {}^\circ\beta), x_2, {}^\circ\beta), \quad i = 1, 2, \quad (5.35)$$

de condition initiale ${}^\circ\alpha_2$ avec $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = 0$ et à l'équation réduite (lente)

$$\frac{dy}{dt} = M(y), \quad (5.36)$$

de condition initiale ${}^\circ\beta$.

B4 : ${}^\circ\beta$ est dans \hat{K} .

Nous pouvons alors énoncer un théorème analogue au théorème 5.2.1. La preuve est pratiquement identique une fois que l'on a localisé, grâce au lemme 5.6.1, les Γ_y . Notons néanmoins que la stabilité "apparente" de ces cycles s'exprime de la manière suivante : pour tout y standard dans K , tout (α_1, α_2) limité différent de l'équilibre E_y de (5.26), tout $\delta \simeq 0$ et tout $\tau \simeq +\infty$, toute solution de de condition initiale (α_1, α_2) vérifie $\text{dis}(\hat{S}(\tau), \Gamma_y) \simeq 0$.

Théorème 5.6.2 *Soit f_1, f_2 et g des fonctions standard continues dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ limité dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, de partie standard $({}^\circ\alpha_1, {}^\circ\alpha_2, {}^\circ\beta)$. Supposons satisfaites les hypothèses B1 à B5. Soit $\tilde{x}_1(\sigma)$ et $\bar{x}_2(\tau)$ les solutions respectives de (5.34) et (5.35). Soit $y_0(t)$ la solution de (5.36) définie sur un intervalle standard $[0, T]$. Soit $\varepsilon > 0, \delta > 0$ deux réels infinitésimaux. Alors toute solution $(S(t), y(t))$ de (5.25) de condition initiale $(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ est définie au moins sur $[0, T]$ et il existe $\omega \simeq +\infty, \bar{\tau} > 0, i = 1, 2$ tels que*

- i) $\delta\omega \simeq 0,$
- ii) $S(\varepsilon\delta\sigma) \simeq (\tilde{x}_1(\sigma), {}^\circ\alpha_2), y(\varepsilon\delta\sigma) \simeq {}^\circ\beta$ pour tout $\sigma \in [0, \omega],$
- iii) $x_1(\varepsilon\tau) \simeq \psi_i(\bar{x}_2(\tau), {}^\circ\beta)$ pour tout $\tau \in [\delta\omega, \bar{\tau}],$
 $x_2(\varepsilon\tau) \simeq \bar{x}_2(\tau), y(\varepsilon\tau) \simeq {}^\circ\beta$ pour tout $\tau \in [0, \bar{\tau}],$
- iv) $S(t) \simeq \Gamma_{y_0(t)}$ pour tout $t \in [\varepsilon\bar{\tau}, T],$
 $y(t) \simeq y_0(t)$ pour tout $t \in [0, T].$

Chapitre 6

Application à un modèle de compétition

6.1 Le modèle

Dans le modèle suivant où trois espèces sont en compétition sur une ressource

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta\dot{s} &= f(s) - x_1H_1(s) - x_2h_2(s) - x_3h_3(s), \\ \varepsilon\dot{x}_1 &= x_1(H_1(s) - m_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2(h_2(s) - m_2), \\ \dot{x}_3 &= x_3(h_3(s) - m_3),\end{aligned}\tag{6.1}$$

et où le point désigne la dérivation par rapport à t , les petits paramètres positifs réels ε et δ marquent une hiérarchisation de la vitesse de croissance des populations : la proie-ressource (s) se développe nettement plus vite que le premier prédateur (x_1) qui, lui, croît nettement plus rapidement que les deux autres prédateurs en compétition (x_2) et (x_3). f est la fonction de croissance de la proie en l'absence de prédateurs, les fonctions H_1 , h_2 et h_3 sont les réponses fonctionnelles des prédateurs et les $m_i > 0$, $i = 1$ à 3 , leurs taux de mortalité. Pour des raisons biologiques, les densités de populations s , x_1 , x_2 et x_3 sont supposées positives. Il n'est pas tenu compte dans ce modèle d'une compétition "explicite" entre les prédateurs. Claude Lobry, qui est comme expliqué dans l'introduction à l'origine de ce chapitre, a mis sur les fonctions intervenant dans le modèle des conditions pour obtenir une évolution très lente des prédateurs (x_2) et (x_3) pendant que (s) et (x_1) oscillent en permanence. Il forme d'ailleurs un schéma d'Euler menant à l'équation régissant le couple (x_2, x_3). D'abord, nous expliquons comment Lobry construit judicieusement son modèle. Chemin faisant, nous réobtenons les équations du mouvement de (x_2) et (x_3) grâce à la théorie de

Pontryagin-Rodygin adaptée aux cycles lents-rapides. Lobry donne ensuite un exemple du modèle (6.1) où, par simulation numérique, il obtient une convergence des compétiteurs (x_2) et (x_3) vers un état stationnaire pendant que (s) et (x_1) oscillent. Ces simulations font penser à un système de Volterra et elles prédisent l'existence d'un cycle limite globalement asymptotiquement stable dans l'orthant strictement positif. Nous reprenons cet exemple dans le paragraphe 6.3, par ailleurs bien mieux commenté et expliqué dans [43]. Pour notre part, nous donnerons des conditions suffisantes de persistance pour le modèle (6.1) très légèrement modifié pour en simplifier le traitement. Il n'est pas inutile de rappeler au passage ce qu'est mathématiquement la persistance des espèces de (6.1). Il y a persistance (ici uniforme) des populations $s(t)$ et $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ s'il existe des constantes $a > 0$, $a_i > 0$ indépendantes des conditions initiales strictement positives telles que, pour tout i ,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq a, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) \geq a_i.$$

6.2 Equation du mouvement lent

Nous supposons dès à présent que toutes les fonctions intervenant dans le modèle sont de classe C^1 ou C^1 par morceaux. Les hypothèses sont indiquées par la lettre A et nous nous permettrons d'utiliser les résultats du chapitre 5.

A1 : Les fonctions f et H_1 ont les allures indiquées sur la figure 6.1. En particulier, $f'(0) > 0$ et $\exists K > 0$ tel que $f(0) = f(K) = 0$, $f(x) > 0$ sur $]0, K[$ et $f(x) < 0$ pour $x > K$ tandis que $H_1(0) = 0$, $H_1'(0) = 0$ et H_1 est croissante majorée.

Il découle de A1 que

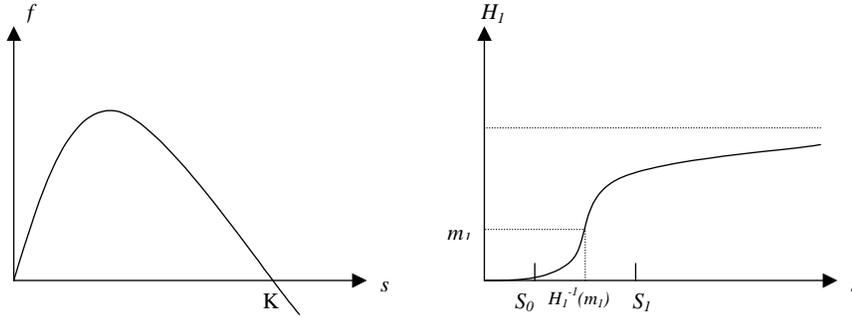
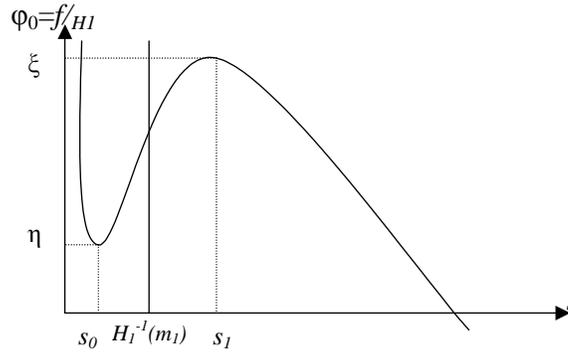
$$\text{si } \varphi_0(s) := f(s)/H_1(s) \text{ alors } \lim_{s \rightarrow 0} \varphi_0(s) = +\infty. \quad (6.2)$$

A2 : La courbe de φ_0 a l'allure indiquée sur la figure 6.2. En particulier, elle admet un minimum et un maximum locaux d'abscisses s_0 et s_1 . De plus, la valeur $H_1^{-1}(m_1)$ est nettement comprise entre s_0 et s_1 .

Soit, pour $\tau = t/\varepsilon$, le sous-système

$$\begin{aligned} \delta ds/d\tau &= f(s) - x_1 H_1(s), \\ dx_1/d\tau &= x_1(H_1(s) - m_1). \end{aligned} \quad (6.3)$$

D'après A2, pour ce système, $\dot{s} > 0$ si, et seulement si, $x_1 < \varphi_0(s)$ et $\dot{x}_1 > 0$ si, et seulement si, $s > H_1^{-1}(m_1)$. La direction du champ dans le plan (s, x_1) montre que le système (6.3) où les autres compétiteurs sont absents, est le modèle classique proie-prédateur admettant, pour δ assez petit, un cycle limite lent-rapide autour d'un point d'équilibre positif instable (voir par

FIG. 6.1 – Allures de f et H_1 .FIG. 6.2 – Allure de f/H_1 .

exemple [49]). La limite (6.2) empêche le cycle de s'approcher exagérément des axes, ce qui biologiquement signifierait une quasi-extinction d'une espèce.

A présent, l'isocline $\dot{s} = 0$ de (6.1) ayant pour équation

$$x_1 = \varphi(s, x_2, x_3) := \varphi_0(s) - x_2 h_2(s)/H_1(s) - x_3 h_3(s)/H_1(s), \quad (6.4)$$

la construction de Lobry consiste à choisir h_2 et h_3 de manière à maintenir les oscillations de s et x_1 pendant que x_2 et x_3 évoluent. Pour cela il lui suffit de ne faire entrer en action ces deux réponses fonctionnelles qu'à partir de valeurs de s supérieures ou égales à s_1 . Plus exactement :

A3 : Les fonctions h_2 et h_3 sont nulles jusqu'à des valeurs de $s \geq s_1$ et elles sont strictement croissantes majorées au-delà.

Notons un moment les seuils jusqu'auxquels $h_2(s)$ et $h_3(s)$ sont nulles respectivement par s' et s'' . D'après cette hypothèse, les courbes de φ_0 et φ coïncident sur $[0, \min(s', s'')]$ si bien que les valeurs $\xi = \varphi_0(s_1)$ et $\eta = \varphi_0(s_0)$ ne dépendent ni de x_2 ni de x_3 .

A4 : On suppose que (6.4) se résout par $s = \psi_0(x_1)$ pour $x_1 \in [\eta, +\infty[$ ($s \in]0, s_0]$) et par $s = \psi(x_1, x_2, x_3)$ pour $x_1 \in [0, \xi]$ ($K \geq s \geq s_1$).

Notons qu'une condition suffisante pour que A4 soit vérifiée et que $h'_j H_1 - h_j H'_1 \geq 0$, $j = 2, 3$ car alors $d\varphi/ds$ serait strictement négative.

À l'échelle de temps de (s, x_1) , le couple (x_2, x_3) est quasi-constant. Le système

$$\begin{aligned} \delta \frac{ds}{d\tau} &= f(s) - x_1 H_1(s) - x_2 h_2(s) - x_3 h_3(s), \\ \frac{dx_1}{d\tau} &= x_1 (H_1(s) - m_1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

représente la phase rapide de (6.1). C'est en fait une perturbation de (6.3). Les isoclines $\dot{s} = 0$ de (6.3) et de (6.5) ne se différencient que pour $s \geq \min(s', s'')$ où la courbe de φ se trouve en dessous de celle de φ_0 quelles que soient les valeurs de x_2 et x_3 (voir figure 6.3). On est toujours dans une configuration d'un champ lent-rapide admettant, pour tout (x_2, x_3) fixé, un cycle limite (ici, $\dot{s} > 0$ si, et seulement si, $x_1 < \varphi(s, x_2, x_3)$ et $\dot{x}_1 > 0$ si, et seulement si, $s > H_1^{-1}(m_1)$). La seule branche du cycle de (6.5) qui a changé par rapport au cycle de (6.3) est celle proche de $\{s = \psi(x_1, x_2, x_3), s \geq \min(s', s'')\}$. Il suffit pour cela que $\min(s', s'') < K$, puisque le cycle proie-prédateur est entièrement maintenu si $\min(s', s'') \geq K$. Par conséquent, un tel cycle est proche de la courbe fermée formée par les branches lentes définies par ψ_0 et ψ pour x_1 dans $[\eta, \xi]$. Par construction, on a obtenu en résumé ceci :

Théorème 6.2.1 *Si les hypothèses A1 à A4 sont satisfaites, alors pour tout (x_2, x_3) dans \mathbb{R}_+^2 , et pour δ assez petit, il existe un cycle limite avec relaxation pour le système (6.5).*

Dans l'esprit du chapitre 5, on définit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2 M_2(x_2, x_3) / P(x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 M_3(x_2, x_3) / P(x_2, x_3), \end{aligned} \quad (6.6)$$

où, pour tout (x_2, x_3) et $j = 2, 3$,

$$\begin{aligned} M_j(x_2, x_3) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{-m_j}{[(H_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1] x_1} dx_1 \\ &+ \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_j \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_j}{[(H_1 \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_1] x_1} dx_1, \\ P(x_2, x_3) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{[(H_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1] x_1} dx_1 \\ &+ \int_{\eta}^{\xi} \frac{1}{[(H_1 \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_1] x_1} dx_1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

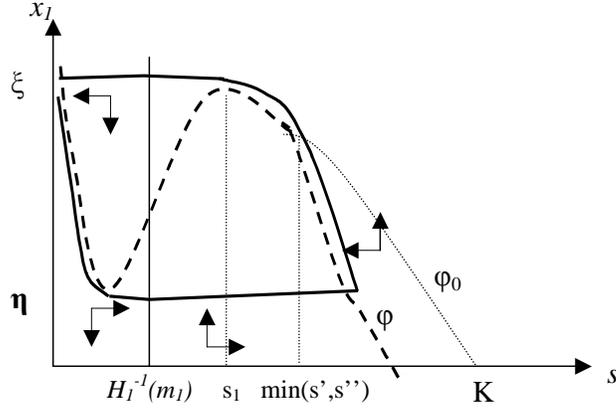


FIG. 6.3 – Isoclines et direction du champ de (6.5) pour (x_2, x_3) fixé (ébauche d'un cycle)

On est dans une configuration particulière du théorème 5.2.1 du chapitre 5. On peut énoncer brièvement le théorème suivant.

Théorème 6.2.2 *Pour ε et δ assez petits, s et x_1 oscillent autour des cycles limites de (6.5) tandis que le mouvement lent des prédateurs x_2 et x_3 est proche des solutions du système moyennisé (6.6).*

6.3 Exemple de Lobry

Dans le modèle considéré par Lobry [43], on a (voir figure.6.4)

$$f(s) = 3s(1 - s), \quad H_1(s) = \frac{s^2}{0.01 + s^2}, \quad m_1 = 0.65, m_2 = m_3 = 0.025,$$

$$h_2(s) = \begin{cases} \frac{0.1(s - 0.5)}{0.01 + (s - 0.5)}, & s \geq 0.5, \\ 0, & s < 0.5, \end{cases} \quad (6.8)$$

$$h_3(s) = \begin{cases} \frac{2(s - 0.58)}{0.01 + (s - 0.58)}, & s \geq 0.58, \\ 0, & s < 0.58. \end{cases}$$

On peut remarquer que le seuil 0.5 de s où naît la fonction h_2 est légèrement supérieur à $s_1 = .478$. L'auteur avait obtenu une simulation numérique où le couple (x_2, x_3) est très proche de trajectoires d'un système qui possède

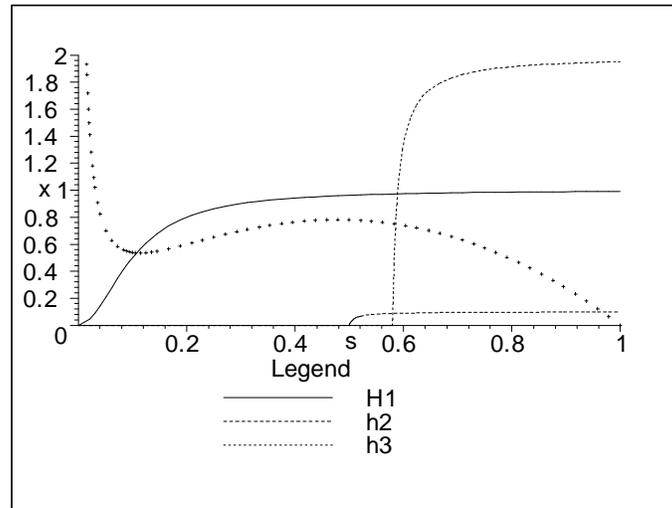


FIG. 6.4 – Les fonctions H_1 , h_2 , h_3 et f/H_1 dans l'exemple (\mathcal{V}).

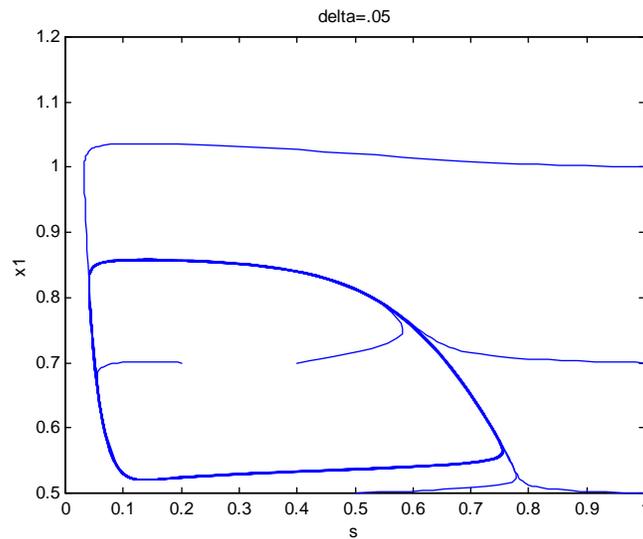
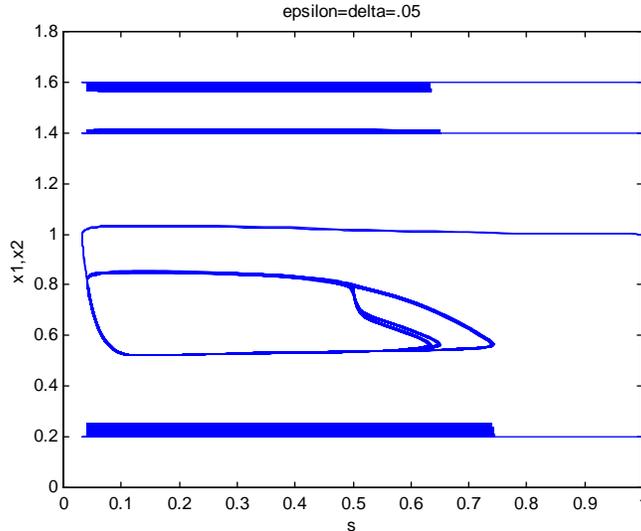


FIG. 6.5 – Oscillations de (s, x_1) pour $x_2 = x_3 = 0$ dans l'exemple (\mathcal{L}).

FIG. 6.6 – Coexistence de s , x_1 et x_2 en l’absence de x_3 .

un équilibre globalement asymptotiquement stable. Il est remarqué que “ le caractère “tremblé” de la simulation correspond au fait que x_2 et x_3 oscillent infinimentésimalement pendant une oscillation du couple (s, x_1) .”

Nous avons refait, à l’aide du logiciel Matlab, les simulations de (6.8) avec $\varepsilon = \delta = 0.05$. La figure 6.5 représente le cycle proie-prédateur de (6.3) avec les fonctions de l’exemple. Sur les figures.6.6 et 6.7, on illustre la coexistence de s et x_2 en l’absence de x_3 d’une part et de s et x_3 en l’absence de x_2 d’autre part, en reproduisant dans le même plan la simulation des trajectoires de

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta\dot{s} &= f(s) - x_1H_1(s) - x_jh_j(s), \\ \varepsilon\dot{x}_1 &= x_1(H_1(s) - m_1), \\ \dot{x}_j &= x_j(h_j(s) - m_j), \end{aligned} \quad (6.9)$$

pour $j = 2, 3$. Les “bandes” horizontales sont les simulations de trajectoires de x_j . Le champ étant lent-rapide, on retrouve une faible variation de x_2 pendant que s oscille (donc x_1 aussi !). On constate que pour une petite condition initiale de x_2 , cette dernière se met à croître très lentement tandis qu’elle décroît pour une condition initiale assez grande, ce qui indique la présence d’un point d’équilibre entre les deux valeurs. On peut aussi le voir en dimension trois sur la figure.6.8. Les mêmes constatations peuvent être faites pour la coexistence de s , x_1 et x_3 en l’absence de x_2 . Nous observons par ailleurs qu’une petite condition initiale de x_2 pour le système (6.9), $i = 2$, entraîne une faible déformation du cycle de (6.3). Plus la condition initiale est grande,

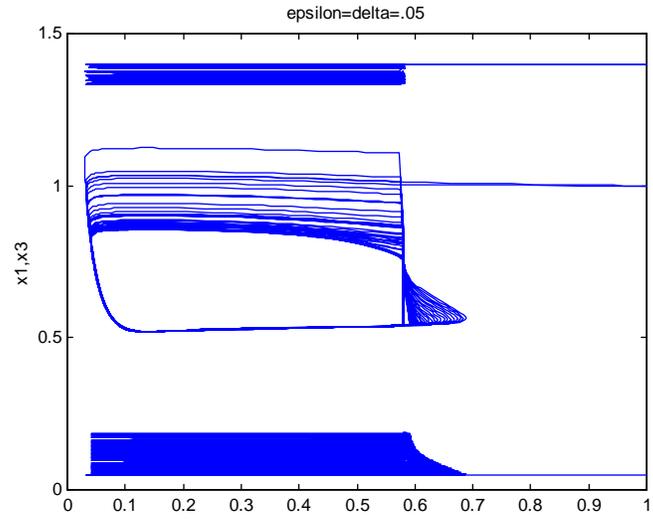


FIG. 6.7 – Coexistence de s , x_1 et x_3 en l'absence de x_2 .

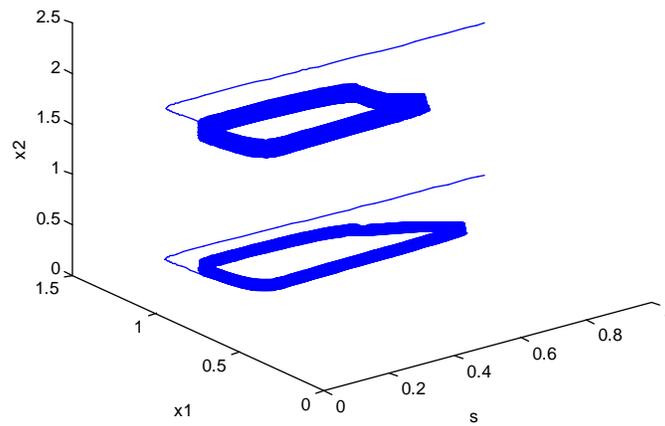


FIG. 6.8 – Deux trajectoires de (6.9), $i = 2$.

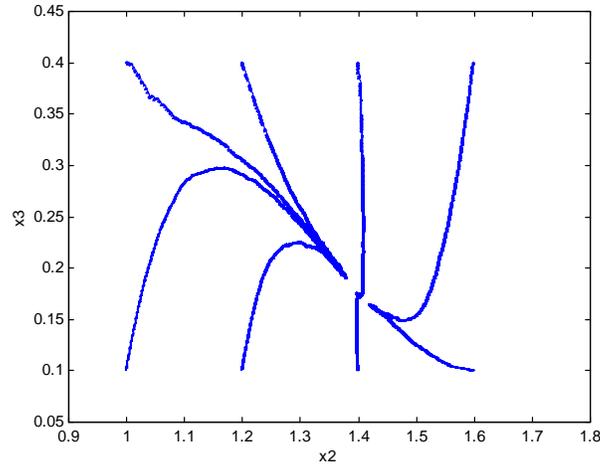


FIG. 6.9 – Simulation de l'exemple (\mathcal{N}) : coexistence des espèces x_2 et x_3 .

plus ce cycle est déformé sur sa partie gauche vers l'intérieur. Il en est de même pour le cas de x_3 en l'absence de x_2 , la déformation étant plus marquée dans ce cas. La simulation de trajectoires du modèle complet (6.8) ou plutôt de sa projection sur le quadrant positif (x_2, x_3) (Figure.6.9) semble bien indiquer l'existence d'un équilibre intérieur globalement asymptotiquement stable correspondant à un cycle dans l'orthant strictement positif. Enfin, la dernière simulation (Figure.6.10) montre que si l'on supprime le compétiteur le plus rapide x_1 , l'espèce x_2 l'emporte sur x_3 .

6.4 Conditions suffisantes de coexistence

Compte tenu des hypothèses précédentes du modèle général (6.1) (oscillations de s et x_1), la preuve de la coexistence des espèces x_2 et x_3 assurera la persistance de tous les compétiteurs. Nous n'irons pas jusqu'à énoncer un résultat de persistance à l'équilibre dans le plan (x_2, x_3) mais on pourra se convaincre de cette possibilité. Nous regardons un système du type

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2 L_2(x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_3 L_3(x_2, x_3), \end{aligned} \quad (6.10)$$

où L_2 et L_3 sont définies et C^1 (ou C^1 par morceaux) dans le quadrant positif. Nous énumérons des conditions suffisantes pour que les trajectoires de conditions initiales strictement positives tendent toutes vers un attracteur

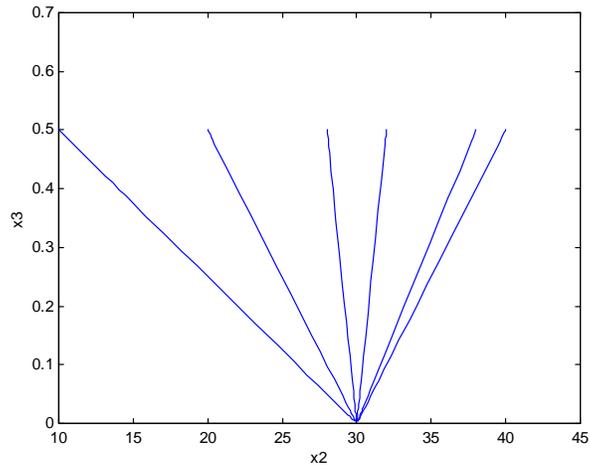


FIG. 6.10 – Simulation de l'exemple (X) : la suppression de x_1 provoque la disparition de x_3 .

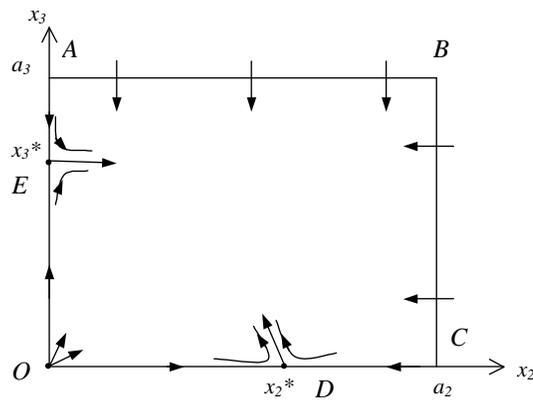


FIG. 6.11 – La boîte $(OABC)$ positivement invariante.

positif. Nous verrons comment choisir les paramètres de l'équation moyennisée (6.6) pour que celle-ci réponde aux dites conditions. Pour mener à bien la preuve du théorème suivant, nous utiliserons le lemme de Butler–McGhee [8] qui affirme que *si P est un point hyperbolique de (6.10) appartenant à un ensemble limite K d'une trajectoire, et si K ne se réduit pas à $\{P\}$ alors K rencontre les variétés stables et instables de P en des points différents de P .*

Théorème 6.4.1 *Pour que, pour toute solution $(x_2(t), x_3(t))$ de (6.10) avec $x_2(0) > 0$ et $x_3(0) > 0$, il existe des constantes $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_3 > 0$ telles que*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \geq \alpha_2 \text{ et } \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_3(t) \geq \alpha_3,$$

il suffit que :

- I) $L_2(0, 0) > 0$, $L_3(0, 0) > 0$,
- II) $L_2(x_2, 0) = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_2^*$,
- III) $L_3(0, x_3) = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_3^*$,
- IV) $L_2(0, x_3^*) > 0$, $L_3(x_2^*, 0) > 0$,
- V) $\exists a_2 > 0 \exists a_3 > 0 : \forall x_3 \in [0, a_3], L_2(a_2, x_3) < 0$
 $\forall x_2 \in [0, a_2], L_3(x_2, a_3) < 0$.

VI) *Toutes les solutions de conditions initiales strictement positives rentrent dans la région $\{(x_2, x_3) : 0 < x_2 < a_2, 0 < x_3 < a_3\}$.*

Preuve. Les demi-axes du quadrant positif sont invariants. L'origine $(0, 0)$ est un équilibre en lequel la jacobienne du système (6.10) a pour valeurs propres $L_2(0, 0)$ et $L_3(0, 0)$. D'après (I), c'est un nœud répulsif. D'après (II) et (III), les points $D = (x_2^*, 0)$ et $E = (0, x_3^*)$ sont les seuls autres points d'équilibre sur les demi-axes. Une des valeurs propres de la jacobienne en D (respectivement en E) est $L_3(x_2^*, 0)$ (respectivement $L_2(0, x_3^*)$). D'après (IV) ces deux points sont instables. Mais alors, selon (I), (II) (respectivement (I), (III)), D (respectivement E) est un point-selle de séparatrice stable le demi-axe ox_2 (respectivement ox_3). Soit la "boîte" $OABC$ formée par les points $O = (0, 0)$, $A = (0, a_3)$, $B = (a_2, a_3)$ et $C = (a_2, 0)$ (voir la figure.6.11) D'après (V), la boîte ouverte est positivement invariante. D'après (VI), toute trajectoire de (6.10) de condition initiale strictement positive se trouve à un moment dans cette boîte et n'en sort plus. Les ensembles ω -limites des demi-trajectoires positives sont des compacts non vides dans $(OABC)$. Montrons que si K est un ensemble ω -limite, alors il ne rencontre pas les axes. Supposons par l'absurde qu'il existe un point P dans l'intersection de K avec les axes. Ce point P ne peut pas être le point O car celui-ci est un nœud répulsif et ne peut donc pas se trouver dans un ensemble ω -limite. Le point P ne peut pas se trouver sur les segments ouverts $]OD[$ ou $]OE[$ car alors K contiendrait l'adhérence $[OD]$ ou $[OE]$ de l'orbite de P , donc O serait dans

K , ce qui est impossible. Le point P ne peut pas se trouver sur les segments ouverts $]DC[$ ou $]EA[$ car dans ce cas K contiendrait l'orbite de P qui est non bornée, ce qui est impossible car K est compact. Il reste à montrer que P est distinct de D et de E . Remarquons tout d'abord que K ne peut pas se réduire à $\{D\}$ ou à $\{E\}$ car D et E sont des points-selles et ne sont donc l'ensemble ω -limite que des points de leur variété stable, c'est-à-dire les points des axes. Supposons que P soit égal à D (respectivement E). Comme K est différent de $\{D\}$ (respectivement $\{E\}$), par le lemme de Butler–McGehee, K doit rencontrer la variété stable de D (respectivement E) en un point différent de D (respectivement E), c'est-à-dire en un autre point de l'axe, ce qui est impossible comme nous venons de le voir. Finalement, K ne peut pas rencontrer les axes, d'où l'existence de $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_3 > 0$ répondant au théorème. ■

6.5 Persistance des compétiteurs

Dans l'exemple (6.8), la valeur de la réponse fonctionnelle H_1 est quasiment constante à partir d'un certain seuil légèrement supérieur à s_1 (voir la figure.6.4). La “physionomie” du modèle ne change pratiquement pas si l'on considère H_1 constante à partir de s_1 . Soit plus précisément le modèle

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \dot{s} &= f(s) - x_1 h_1(s) - x_2 h_2(s) - x_3 h_3(s), \\ \varepsilon \dot{x}_1 &= x_1 (h_1(s) - m_1), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (h_2(s) - m_2), \\ \dot{x}_3 &= x_3 (h_3(s) - m_3), \end{aligned} \tag{6.11}$$

où

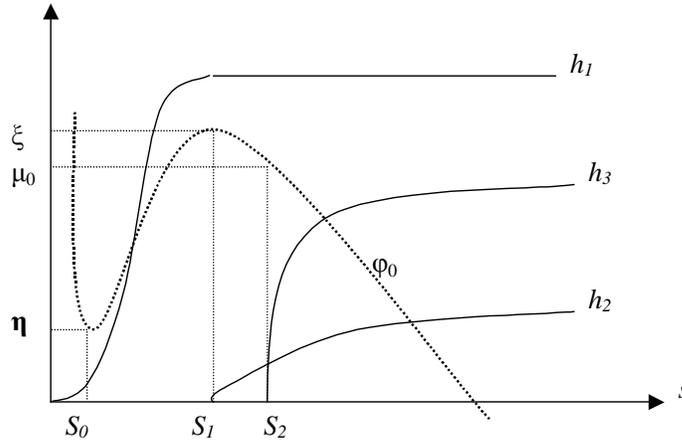
$$h_1(s) = \begin{cases} H_1(s), & 0 \leq s < s_1, \\ H_1(s_1) =: h_{1m}, & s \geq s_1. \end{cases}$$

Nous remplaçons l'hypothèse A3 par :

A3' : La fonction $h_2(s)$ est nulle jusqu'au seuil s_1 et la fonction h_3 est nulle jusqu'à une valeur s_2 telle que $s_1 < s_2$. Elles sont strictement croissantes majorées au-delà de leurs seuils respectifs. Notons par $h_{2m} > 0$ et $h_{3m} > 0$ leurs limites quand $s \rightarrow +\infty$.

Les hypothèses A1 et A2 sont vérifiées en prenant soin de les reformuler en tenant compte de h_1 . Il est évident (voir l'expression (6.13) plus bas) que A4 n'est plus une hypothèse car elle est vérifiée automatiquement. Posons

$$c := h_{1m} - m_1 > 0.$$

FIG. 6.12 – Exemple de fonctions h_2 et h_3 .

Les expressions de (6.7) s'écrivent plus simplement

$$\begin{aligned}
 M_j(x_2, x_3) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{-m_j}{[(h_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1]x_1} dx_1 \\
 &\quad + \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_j \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_j}{cx_1} dx_1, \\
 P(x_2, x_3) &= \int_{\xi}^{\eta} \frac{1}{[(h_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1]x_1} dx_1 + \frac{1}{c} \ln \frac{\xi}{\eta}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nous prenons en considération les résultats des théorèmes 6.2.1 et 6.2.2. Dans ce cas, la fonction φ est définie, pour $s \geq s_1$, par

$$\varphi(s, x_2, x_3) := \frac{1}{h_{1m}} (f(s) - x_2 h_2(s) - x_3 h_3(s)). \tag{6.13}$$

Conséquence 6.5.1 *La période $P(x_2, x_3)$ est une constante positive.*

Preuve. Soit l'intégrale définie

$$P_1 := \int_{\xi}^{\eta} \frac{dx_1}{[(h_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1]x_1} = - \int_{\xi}^{\eta} \frac{dx_1}{[(h_1 \circ \psi_0)(x_1) - m_1]x_1} \tag{6.14}$$

provenant du premier terme de $P(x_2, x_3)$ dans (6.12). Comme $h_1(\psi_0(x_1)) < m_1$, il est clair que P_1 est une constante strictement positive (elle ne dépend pas de x_2 et x_3). ■

Il n'y a rien d'étonnant à cette conséquence puisque aussi bien l'exemple (6.8) que le modèle que nous étudions ont été construits de manière à ce que le cycle initial en l'absence des prédateurs x_2 et x_3 ne soit pas trop "chahuté" par l'introduction des deux compétiteurs. Le choix des réponses fonctionnelles permet en outre de maintenir les valeurs ξ et η constantes. Il est certainement possible d'exhiber des exemples de coexistence où la valeur supérieure ξ des cycles dépend du couple (x_2, x_3) mais l'établissement théorique de la persistance devient une tâche ardue. Réécrivons les expressions de M_j , $j = 2, 3$ comme ceci :

$$cM_j(x_2, x_3) = -m_j cP_1 + \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_j \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_j}{x_1} dx_1 \quad (6.15)$$

où P_1 est le réel strictement positif donné par (6.14). Soit

$$\mu := \varphi(s_2, x_2, x_3) = \frac{1}{h_{1m}} (f(s_2) - x_2 h_2(s_2)), \quad (6.16)$$

qui ne dépend donc pas de x_3 . Notons par

$$\mu_0 := \varphi(s_2, 0, 0) = \frac{f(s_2)}{h_{1m}}.$$

Théorème 6.5.2 *Supposons satisfaites les hypothèses A1, A2 et A3'. Supposons que $\mu_0 > \eta$ et que m_2 est tel que*

$$m_2 < \min \left(h_{2m}, \frac{1}{cP_1 + \ln \xi/\eta} \left(h_2(s_2) \ln \mu_0/\eta + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{(h_2 \circ \psi)(x_1, 0, 0)}{x_1} dx_1 \right) \right),$$

Alors, pour $s_2 - s_1$ et m_3 suffisamment petits, en tout cas

$$m_3 < \min \left(h_{3m}, \frac{1}{cP_1 + \ln \xi/\eta} \int_{\eta}^{\mu_0} \frac{(h_3 \circ \psi)(x_1, 0, 0)}{x_1} dx_1 \right),$$

il y a persistance des espèces x_2 et x_3 de (6.6).

Formulons et prouvons d'abord quelques lemmes préparatoires. Soulignons qu'on peut toujours avoir $\mu_0 > \eta$ en diminuant s_2 (avec $s_2 > s_1$), sachant que $\mu_0 \rightarrow \xi$ quand $s_2 \rightarrow s_1$. Le premier lemme montre que pour m_3 assez petit, $M_3(0, 0) > 0$.

Lemme 6.5.3 *Supposons que $\mu_0 > \eta$. Si m_3 est tel que*

$$m_3 < \min \left(h_{3m}, \frac{1}{cP_1 + \ln \xi/\eta} \int_{\eta}^{\mu_0} \frac{(h_3 \circ \psi)(x_1, 0, 0)}{x_1} dx_1 \right) \quad (6.17)$$

alors $M_3(0, 0) > 0$.

Preuve. De (6.15), on décompose l'expression de $M_3(0, 0)$ comme suit :

$$\begin{aligned} cM_3(0, 0) &= -m_3 cP_1 + \int_{\eta}^{\mu_0} \frac{(h_3 \circ \psi)(x_1, 0, 0) - m_3}{x_1} dx_1 \\ &\quad + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{-m_3}{x_1} dx_1 \end{aligned}$$

puisque $h_3(s) > 0$ quand $s > s_2$ (voir la figure 6.12) et que h_3 est nulle ailleurs. On obtient alors

$$cM_3(0, 0) = -m_3 cP_1 - m_3 \ln \xi/\eta + \int_{\eta}^{\mu_0} \frac{(h_3 \circ \psi)(x_1, 0, 0)}{x_1} dx_1,$$

où l'intégrale est évidemment positive (d'où la nécessité que $\mu_0 > \eta$). On en déduit la condition (6.17) en notant que m_3 doit être inférieur à h_{3m} , sinon $M_3(x_2, x_3) < 0$ pour tout (x_2, x_3) . ■

Lemme 6.5.4 *Supposons que $\mu_0 > \eta$. Soit $\hat{x} := \frac{f(s_2) - h_{1m}\eta}{h_2(s_2)}$. Pour tout*

x_2, x_3 dans \mathbb{R}_+ , on a :

- a) $(\partial M_2/\partial x_2)(x_2, x_3) < 0$,
- b) $(\partial M_j/\partial x_3)(x_2, x_3) < 0$, $j = 2, 3$ et $(\partial M_3/\partial x_2)(x_2, x_3) < 0$ si $x_2 < \hat{x}$ tandis que $(\partial M_j/\partial x_3)(x_2, x_3) = (\partial M_3/\partial x_2)(x_2, x_3) = 0$ si $x_2 \geq \hat{x}$.

Preuve. Le seuil \hat{x} est strictement positif car $\mu_0 = \frac{f(s_2)}{h_{1m}} > \eta$. Dans (6.15), les intégrants étant continus en x_1 et admettant des dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 , on peut dériver sous le signe d'intégration. On a, pour $i, j = 2, 3$,

$$c(\partial M_j/\partial x_i)(x_2, x_3) = \int_{\eta}^{\xi} \frac{1}{x_1} h'_j(\psi(x_1, x_2, x_3)) (\partial \psi/\partial x_i)(x_1, x_2, x_3) dx_1. \quad (6.18)$$

Nous affirmons d'abord que

$$(\partial\psi/\partial x_2)(x_1, x_2, x_3) < 0 \text{ pour tout } x_1 < \xi, (\partial\psi/\partial x_2)(\xi, x_2, x_3) = 0. \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} (\partial\psi/\partial x_3)(x_1, x_2, x_3) &< 0 \text{ pour tout } x_1 < \mu, \\ (\partial\psi/\partial x_3)(x_1, x_2, x_3) &= 0 \text{ pour tout } \mu \leq x_1 \leq \xi. \end{aligned} \quad (6.20)$$

En effet, en appliquant le théorème des fonctions implicites à

$$\varphi(s, x_1, x_2, x_3) - x_1 = 0$$

pour $s > s_1$, $x_1 < \xi$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, sachant que

$$(\partial\varphi/\partial s)(s, x_2, x_3) = \frac{1}{h_{1m}} (f'(s) - x_2 h_2'(s) - x_3 h_3'(s)) < 0,$$

on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= -\frac{(\partial\varphi/\partial x_2)}{(\partial\varphi/\partial s)} \\ &= \frac{h_2}{f' - x_2 h_2' - x_3 h_3'} < 0. \end{aligned}$$

De plus, il est clair que pour $x_1 = \xi$ i.e. $s = s_1$, cette dérivée est nulle, d'où (6.19). De même que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x_3} &= -\frac{(\partial\varphi/\partial x_3)}{(\partial\varphi/\partial s)} \\ &= \frac{h_3}{f' - x_2 h_2' - x_3 h_3'} < 0 \end{aligned}$$

pour $s > s_2$, i.e. $x_1 < \mu$. Comme $h_3(s) = 0$ pour s entre s_1 et s_2 , i.e. pour $\mu \leq x_1 \leq \xi$, on a alors (6.20).

Par conséquent, puisque $h_2'(\psi(x_1, x_2, x_3)) > 0$ pour tout x_1 dans $[\eta, \xi[$, il vient que $(\partial M_2/\partial x_2)(x_2, x_3) < 0$ d'après (6.18) et (6.19). D'où l'assertion (a) du lemme. Concernant le signe de $(\partial M_2/\partial x_3)(x_2, x_3)$, il faut d'abord remarquer dans (6.16) que μ comme fonction de x_2 est strictement décroissante et qu'elle varie dans $] -\infty, \xi]$. On peut alors écrire

$$c(\partial M_2/\partial x_3) = \int_{\eta}^{\max(\eta, \mu)} \frac{1}{x_1} h_2'(\psi(x_1, x_2, x_3)) dx_1 + \int_{\max(\eta, \mu)}^{\xi} \frac{1}{x_1} h_2'(\psi(x_1, x_2, x_3)) dx_1. \quad (6.21)$$

Si $\mu > \eta$, c'est-à-dire d'après (6.16) si

$$x_2 < \frac{f(s_2) - h_{1m}\eta}{h_2(s_2)} = \hat{x},$$

alors de (6.20) on voit que la première intégrale de (6.21) est strictement négative tandis que la deuxième est nulle. Si $\mu \leq \eta$, c'est-à-dire si $x_2 \geq \hat{x}$ alors

$$c(\partial M_2/\partial x_3) = \int_{\eta}^{\xi} \frac{1}{x_1} h_2'(\partial\psi/\partial x_3) dx_1 = 0$$

d'après (6.20). De même, étant donné que $h_3'(\psi(x_1, x_2, x_3))$ est nulle pour x_1 dans $]\mu, \xi]$, on a

$$c(\partial M_3/\partial x_i) = \int_{\eta}^{\max(\eta, \mu)} \frac{1}{x_1} h_3'(\partial\psi/\partial x_i) dx_1, \quad i = 2, 3$$

qui est donc, d'après (6.19) et (6.20), strictement négative si $x_2 < \hat{x}$ et nulle si $x_2 \geq \hat{x}$. Ceci démontre l'assertion (b) du lemme. ■

Le lemme suivant montre en particulier que pour m_2 assez petit, $M_2(0, 0) > 0$. Nous exigeons plus en fait, mais c'est une condition qui se justifie dans nos modèles.

Lemme 6.5.5 *Supposons que $\mu_0 > \eta$. Si m_2 est tel que*

$$m_2 < \min \left(h_{2m}, \frac{1}{cP_1 + \ln \xi/\eta} \left(h_2(s_2) \ln \mu_0/\eta + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{(h_2 \circ \psi)(x_1, 0, 0)}{x_1} dx_1 \right) \right), \quad (6.22)$$

alors $M_2(0, x_3) > 0$ pour tout $x_3 \geq 0$.

Preuve. Le lemme 6.5.4 assurant que $(\partial M_2/\partial x_3)(0, x_3) < 0$, il suffit de prouver que la limite de $M_2(0, x_3)$ quand $x_3 \rightarrow +\infty$ est positive. On a

$$\begin{aligned} cM_2(0, x_3) &= -m_2 cP_1 + \int_{\eta}^{\mu_0} \frac{(h_2(\psi(x_1, 0, x_3)) - m_2)}{x_1} dx_1 \\ &\quad + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{(h_2(\psi(x_1, 0, x_3)) - m_2)}{x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Notons que pour $\mu_0 \leq x_1 \leq \xi$, $\psi(x_1, 0, x_3)$ comme inverse de $\varphi(s, 0, x_3) = \frac{1}{h_{1m}}(f(s) - x_3 \cdot 0)$ ne dépend pas en réalité de x_3 . D'autre part, on peut voir

que $\psi(x_1, 0, x_3) \rightarrow s_2$ quand $x_3 \rightarrow +\infty$ et l'on obtient que la limite de $cM_2(0, x_3)$ quand $x_3 \rightarrow +\infty$ vaut

$$\begin{aligned} & -m_2 cP_1 + (h_2(s_2) - m_2) \ln \mu_0 / \eta + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{(h_2(\psi(x_1, 0, 0)) - m_2)}{x_1} dx_1 \\ & = -m_2(cP_1 + \ln \xi / \eta) + h_2(s_2) \ln \mu_0 / \eta + \int_{\mu_0}^{\xi} \frac{h_2(\psi(x_1, 0, 0))}{x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Dans cette limite, l'intégrale est évidemment positive et la limite elle-même est positive pour m_2 assez petit. Plus exactement, en rappelant que m_2 doit être inférieur à h_{2m} , sinon $M_2(x_2, x_3) < 0$, on obtient la condition (6.22). ■

Lemme 6.5.6 *Pour tout $x_3 \geq 0$ il existe $x_2 > 0$ tel que $M_j(x_2, x_3) < 0$, $j = 2, 3$ et pour tout $x_2 \geq 0$ il existe $x_3 > 0$ tel que $M_3(x_2, x_3) < 0$.*

Preuve. Commençons par considérer

$$cM_2(x_2, x_3) = -m_2 cP_1 + \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_2 \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_2}{x_1} dx_1.$$

Montrons que pour tout $x_3 \geq 0$ il existe $x_2 > 0$ tel que $M_2(x_2, x_3) < 0$. Quand $x_2 \rightarrow +\infty$, on voit que $(h_2 \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) \rightarrow h_2(s_1) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} cM_2(x_2, x_3) = -m_2 cP_1 - m_2 \ln \xi / \eta < 0.$$

Examinons maintenant

$$cM_3(x_2, x_3) = -m_3 cP_1 + \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_3 \circ \psi)(x_1, x_2, x_3) - m_3}{x_1} dx_1.$$

Pour obtenir que pour tout $x_3 \geq 0$ il existe $x_2 > 0$ tel que $M_3(x_2, x_3) < 0$, il suffit de considérer le cas où $x_2 \geq \hat{x}$ (lemme 6.5.4). Puisqu'alors $\mu \leq \eta$ et $h_3(\psi(x_1, x_2, x_3)) = 0$ sur $[\eta, \xi]$, il vient que

$$cM_3(x_2, x_3) = -m_3 cP_1 - m_3 \ln \xi / \eta < 0, \quad x_2 \geq \hat{x}.$$

Enfin, pour tout $x_2 \geq 0$ fixé, l'expression

$$\begin{aligned} cM_3(x_2, x_3) & = -m_3 cP_1 + \int_{\eta}^{\max(\eta, \mu)} \frac{(h_3(\psi(x_1, x_2, x_3)) - m_3)}{x_1} dx_1 \\ & + \int_{\max(\eta, \mu)}^{\xi} \frac{-m_3}{x_1} dx_1, \end{aligned}$$

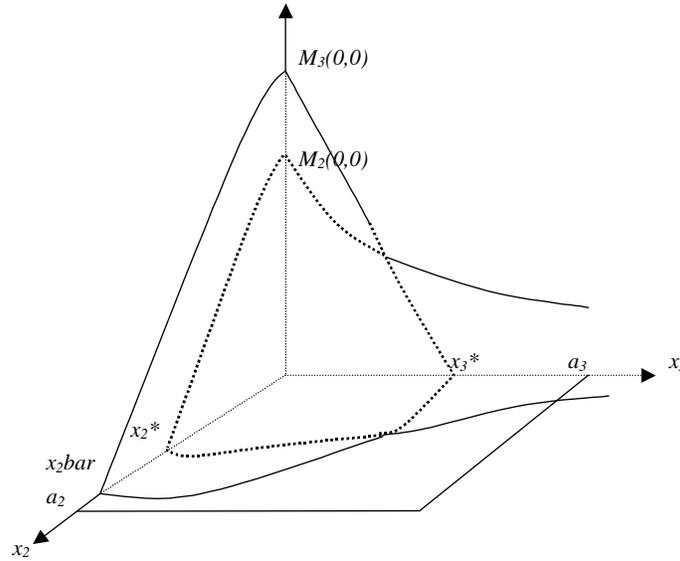


FIG. 6.13 – Surfaces $z = M_j(x_2, x_3)$, $j = 2, 3$ vérifiant le Théorème 6.4.1.

est clairement négative si $\mu \leq \eta$ et vaut $-m_3 c P_1 - m_3 \ln \xi / \eta$. Si $\mu > \eta$, alors $h_3(\psi(x_1, x_2, x_3)) \rightarrow h_3(s_2) = 0$ quand $x_3 \rightarrow +\infty$ d'où

$$\lim_{x_3 \rightarrow +\infty} cM_3(x_2, x_3) = < 0.$$

■

6.6 Preuve du théorème 6.5.2

Comme la période $P(x_2, x_3)$ est constante, il suffit de vérifier les conditions du théorème 6.4.1 pour les fonctions M_j .

Condition I : elle est assurée par le lemme 6.5.3 et le lemme 6.5.5.

Condition II : L'existence de x_2^* est une conséquence du lemme 6.5.5 et du lemme 6.5.6, qui assure que M_2 change de signe. L'unicité de x_2^* provient du lemme 6.5.4.

Condition III : L'existence de x_3^* est une conséquence du lemme 6.5.3 et du lemme 6.5.6, qui assure que M_3 change de signe. L'unicité de x_3^* provient du lemme 6.5.4.

Condition IV : En premier lieu, $M_2(0, x_3^*) > 0$ en vertu du lemme 6.5.5.

Rappelons d'autre part que le lemme 6.5.4 implique que $\frac{\partial M_3(x_2, 0)}{\partial x_2} < 0$ pour $x < \hat{x}$ et que cette dérivée est nulle au-delà, ce qui signifie d'ailleurs

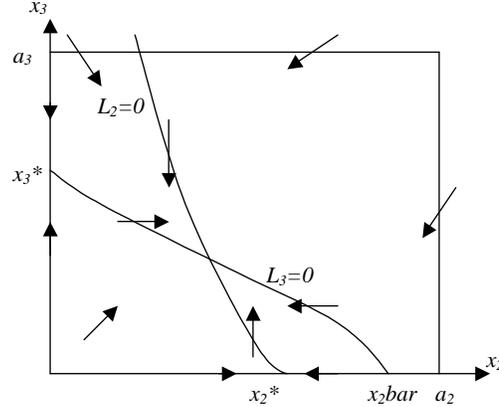


FIG. 6.14 – Exemples d'isoclines de (6.6).

que $M_3(\hat{x}, 0) \leq M_3(x_2, 0)$ pour tout x_2 . Il est essentiel de voir que l'on peut toujours supposer que $\hat{x} > x_2^*$. Il faudrait pour cela que

$$f(s_2) - h_{1m}\eta > x_2^*h_2(s_2) \iff \mu_0 - \eta > x_2^*h_2(s_2)/h_{1m}.$$

On peut, sans contredire les hypothèses précédentes, garantir cette inégalité sous la condition $s_2 - s_1$ assez petit. D'ailleurs \hat{x} peut être rendu aussi grand qu'on le veut quand $s_2 \rightarrow s_1$. On peut s'assurer que cette dernière condition n'agit pas sur x_2^* en constatant par exemple que dans l'expression

$$cM_2(x_2, 0) = -m_2cP_1 + \int_{\eta}^{\xi} \frac{(h_2(\psi(x_1, x_2, 0)) - m_2)}{x_1} dx_1,$$

$\psi(x_1, x_2, 0)$ ne dépend pas de x_3 , donc pas de h_3 et par la même pas de s_2 .

À présent, considérons les valeurs $x_2^*(m_2)$ et $\bar{x}_2(m_3)$ de x_2 pour lesquelles $M_2(x_2^*(m_2), 0) = 0$ et $M_3(\bar{x}_2(m_3), 0) = 0$ et $x_2^*(m_2) < \hat{x}$. Si $x_2^*(m_2) \geq \bar{x}_2(m_3)$, nous affirmons que pour m_3 encore plus petit, la dernière inégalité est inversée. En effet, la dérivée de $M_3(x_2, 0)$ par rapport à m_3 valant la constante strictement négative $-P_1 - \frac{\ln \xi/\eta}{c}$, la diminution de m_3 a pour effet l'augmentation (indépendamment de x_2) de $M_3(x_2, 0)$. Ceci fait alors tendre $\bar{x}_2(m_3)$ vers \hat{x} .

Condition V : Des lemmes 6.5.4 et 6.5.6, on déduit que l'isocline non triviale $M_3 = 0$ est la courbe d'une fonction décroissante dans le repère direct (x_2, x_3) (mais aussi dans (x_3, x_2)). Cette isocline joint le point $(\bar{x}_2, 0)$ de l'axe des abscisses à l'équilibre $(0, x_3^*)$ sur l'axe des ordonnées (voir par exemple la

figure 6.14). L'isocline $M_2 = 0$ est, en vertu des lemmes 6.5.4, 6.5.5 et 6.5.6 la courbe d'une fonction décroissante non bornée dans (x_2, ox_3) . Elle coupe au moins une fois l'isocline $M_3 = 0$. Il est clair que n'importe quel couple de constantes positives (a_2, a_3) tel que $a_2 > \bar{x}_2$ et $a_3 > x_3^*$ réalise la condition V (voir la figure 6.13).

Condition VI : Rappelons que les axes sont invariants. D'après ce qui précède, l'isocline horizontale $M_3 = 0$ est complètement contenue dans la boîte fermée $(OABC)$, où $A = (0, a_3)$, $B = (a_2, a_3)$ et $C = (a_2, 0)$. L'extérieur de cette boîte est partagé en une région \mathcal{R}_g à gauche de l'isocline verticale $M_2 = 0$ et une région \mathcal{R}_d à droite. Ces deux régions ne contiennent aucun équilibre. Puisque, dans \mathcal{R}_d , $\dot{x}_2 < 0$ et $\dot{x}_3 < 0$, les trajectoires qui s'y trouvent rentrent dans la boîte directement ou bien rentrent dans la région \mathcal{R}_g . Les trajectoires de cette dernière ne peuvent pas traverser l'isocline verticale $M_2 = 0$ ni l'axe invariant (ox_3) . Sachant que $\dot{x}_3 < 0$, une trajectoire de la région de gauche rentre nécessairement dans la boîte.

Corollaire 6.6.1 *Sous les conditions du théorème 6.5.2, il y a compétition sans exclusion des espèces x_1 , x_2 et x_3 sur la proie s pour toute condition initiale strictement positive.*

6.7 Exemple et simulations

Je considère le modèle (6.11) avec le choix suivant des fonctions :

$$f(s) = 3s(1 - s),$$

$$h_1(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{0.01 + s^2}, & 0 \leq s < s_1, \\ h_{1m} := \frac{s_1^2}{0.01 + s_1^2}, & s \geq s_1. \end{cases}$$

$$h_2(s) = \begin{cases} \frac{0.1(s - s_1)}{0.01 + (s - s_1)}, & s \geq s_1, \\ 0, & s < s_1, \end{cases}$$

$$h_3(s) = \begin{cases} \frac{2(s - s_2)}{0.01 + (s - s_2)}, & s \geq s_2, \\ 0, & s < s_2. \end{cases}$$

Les quantités fixes s_1 , η et ξ que l'on avait représentées sur la figure.6.12, ainsi que les réels ε et δ , ont pour valeurs

$$s_1 = 0.4781283796, \quad \eta = 0.5361690603, \quad \xi = 0.781309551, \\ \varepsilon = \delta = 0.05.$$

Les données de ce modèle sont celles de l'exemple (6.8), aux exceptions suivantes : d'abord s_1 correspond exactement au maximum local de f/h_1 , ensuite la réponse fonctionnelle h_1 est constante à partir de s_1 et enfin je m'autoriserai à faire varier s_2 mais de manière que $\mu_0 - \eta > 0$, avec

$$\mu_0 = \frac{f(s_2)}{h_{1m}}.$$

Je rappelle que si $\mu_0 \leq \eta$, le cycle proie-prédateur en l'absence du couple (x_2, x_3) est maintenu et que ce cas trivial a été écarté. J'ai regroupé dans le tableau ci-dessous les paramètres que j'ai fait varier dans les simulations. Les deux dernières colonnes indiquent deux valeurs de x_2 , à savoir la quantité

$$\hat{x} = \frac{f(s_2) - h_{1m}\eta}{h_2(s_2)},$$

apparaissant dans l'énoncé du lemme 6.5.4 et l'abscisse x_2^* du seul équilibre de l'équation moyennisée (6.6) sur le demi-axe positif (ox_2). Il est bon de se souvenir que \hat{x} est la valeur de x_2 au-delà de laquelle la dérivée $\partial M_3/\partial x_2$, disons en $(x_2, 0)$, n'est plus strictement négative et vaut zéro, que $M_3(\hat{x}, 0)$ est strictement négative et donc que \bar{x}_2 tel que $M_3(\bar{x}_2, 0) = 0$ est inférieur à \hat{x} .

	s_2	m_2	m_3	Observations	\hat{x}	$x_2^* \simeq$
1	0.58	0.03	0.5	extinction de x_3	2.3841	1.08
2	"	"	0.45	bifurcation (ext. de x_3)	"	"
3	"	"	0.35	coex. (x_3 en difficulté)	"	"
4	"	"	0.05	coexistence	"	"
5	0.75	"	"	extinction de x_3	0.5059	"
6	"	"	0.001	extinction de x_3	"	"

Simulation 1 : Figure.6.15.

J'ai commencé dans la ligne 1 du tableau, pour s_2 fixé à 0.58, par choisir d'une part m_2 suffisamment petit pour que $M_2(0, x_3) > 0$ et d'autre part m_3 pour que $M_3(0, 0) > 0$. Pour cette valeur de s_2 on a bien

$$\mu_0 - \eta = 0.2265985001 > 0.$$

Il y a disparition de x_3 car m_3 n'est pas assez petit. Je n'ai pas cru utile de représenter la simulation correspondante. Je diminue m_3 . La ligne 2 semble correspondre à m_3 très proche d'une valeur de bifurcation nœud-col. Il y a extinction de x_3 . D'autres simulations avec différentes conditions initiales montrent qu'il n'y a pas dans ce cas un autre équilibre intérieur.

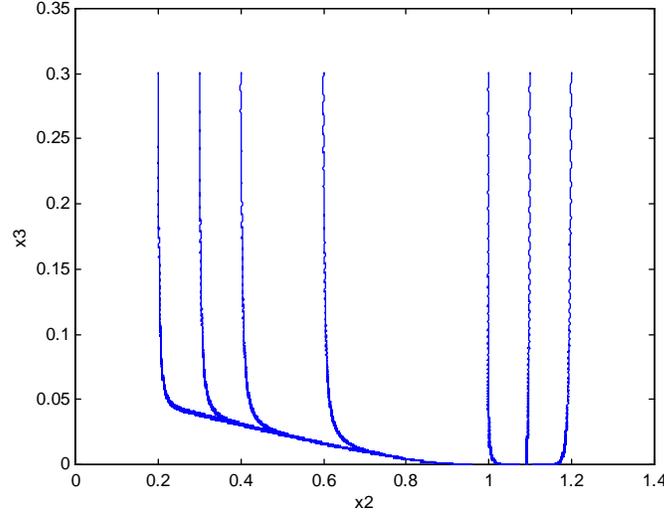


FIG. 6.15 – Trajectoires de (6.11) dans l'espace des phases (x_2, x_3) avec les fonctions et paramètres du texte et de la ligne 2 du tableau.

Simulation 2 : Figure.6.16.

La diminution de m_3 dans la ligne 3, pour s_2 et m_2 inchangées, a pour effet de faire apparaître l'équilibre près de l'axe des x_2 , près du col $(x_2^*, 0)$. Plusieurs autres simulations montrent qu'il n'y a pas d'autres équilibres intérieurs. L'espèce x_3 frôle l'extinction.

Simulation 3 : Figure.6.17

La ligne 4 est un cas d'une nette coexistence. Les simulations indiquent la présence d'un équilibre intérieur unique globalement asymptotiquement stable.

Dans tous les cas cités, on constate que $x_2^* \ll \hat{x}$. Je vais, dans les simulations suivantes, examiner la situation où $x_2^* \gg \hat{x}$ obtenue pour $s_2 - s_1$ plus grand.

Simulation 4 : Figure.6.18.

Dans la ligne 5, je conserve les valeurs des taux de mortalité de la ligne 4, mais je donne à s_2 la valeur plus grande 0.75 de sorte que

$$x_2^* \gg \hat{x},$$

$$\mu_0 - \eta = 0.0509365127 > 0.$$

Les simulations montrent que je perds la coexistence. Notez que x_2^* n'a pas changé et que \bar{x}_2 doit être inférieure à x_2^* .

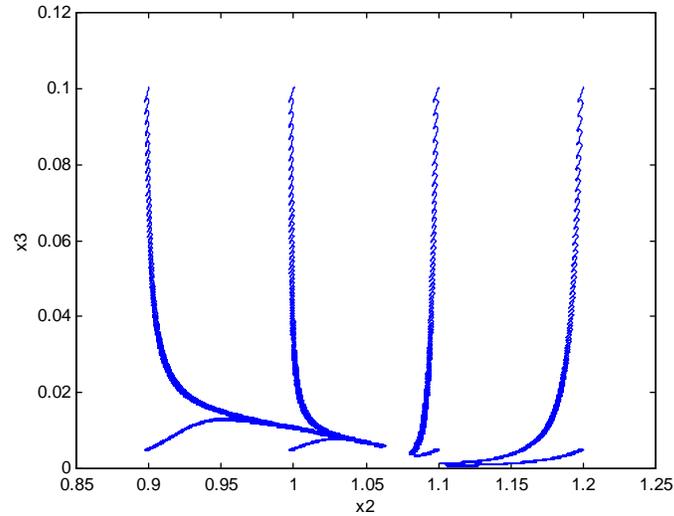


FIG. 6.16 – Trajectoires de (6.11) dans l'espace des phases (x_2, x_3) avec les fonctions et paramètres du texte et de la ligne 3 du tableau.

Simulation 5 : Figure.6.19

La ligne 6 montre bien que l'on peut vainement diminuer m_3 sans jamais réobtenir la coexistence. En effet, quand m_3 diminue, \bar{x}_2 s'approche de \hat{x} sans jamais le dépasser, et demeure loin de x_2^* . Toutes ces considérations tiennent compte du fait que dans cet exemple on n'obtient qu'au plus un équilibre intérieur de (6.6). Enfin, la dernière simulation me surprend assez ; elle dit que sous ces conditions, un taux de mortalité de l'espèce x_3 , aussi petit soit-il, n'assure pas la survie de l'espèce.

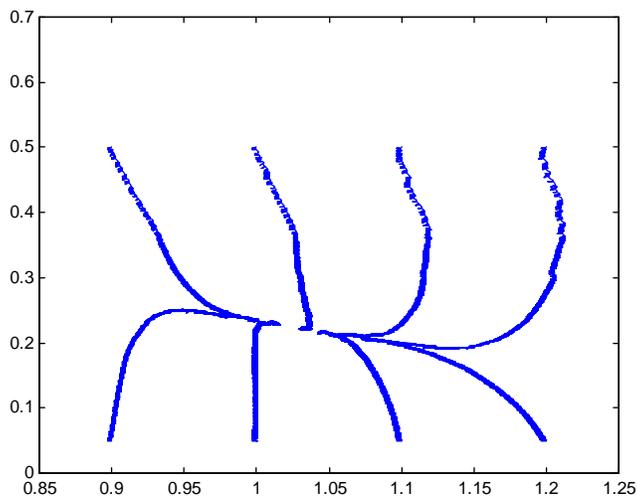


FIG. 6.17 – Trajectoires de (6.11) dans l'espace des phases (x_2, x_3) avec les fonctions et paramètres du texte et de la ligne 4 du tableau.

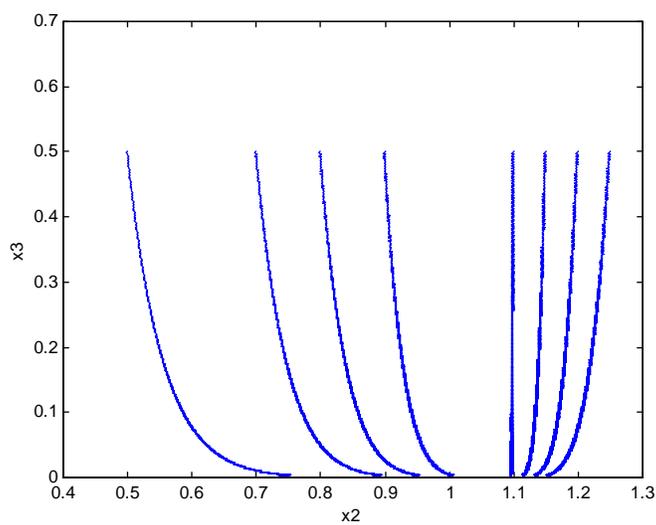


FIG. 6.18 – Trajectoires de (6.11) dans l'espace des phases (x_2, x_3) avec les fonctions et paramètres du texte et de la ligne 5 du tableau.

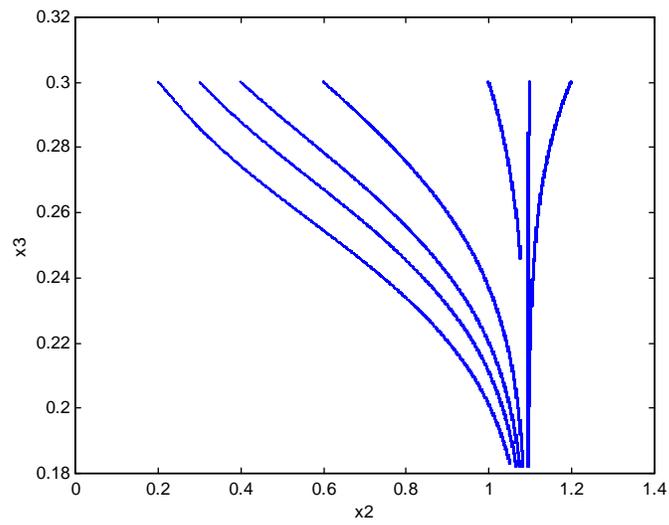


FIG. 6.19 – Trajectoires de (6.11) dans l'espace des phases (x_2, x_3) avec les fonctions et paramètres du texte et de la ligne 6 du tableau.

Annexe A

A.1 L'axiomatique IST

La théorie IST (Internal Set Theory) est une extension des mathématiques ordinaires donnant une approche axiomatique à l'Analyse Non Standard de A. Robinson [58]. Elle est due à E. Nelson [52]. Le point de départ est l'axiomatique classique de la théorie des ensembles ZFC (pour Zermelo-Fraenkel et l'axiome du choix). Au prédicat binaire indéfini \in de la théorie des ensembles est joint un nouveau prédicat unaire *standard* (st) qui sera manipulé à l'aide de trois nouveaux axiomes ajoutés à ZFC : Transfert, Idéatisation et Standardisation. *Tous les théorèmes de ZFC restent valides dans IST.* Ce qui est nouveau dans IST c'est un ajout et non un changement. Une formule de IST est dite *interne* dans le cas où elle ne fait pas intervenir le nouveau prédicat "st" ; autrement, elle est dite *externe*. Voici à titre indicatif la formulation des trois axiomes ajoutés. Pour plus de détails, on peut consulter [13, 52]. On adopte les notations suivantes où \wedge et \vee désignent respectivement les opérateurs logiques conjonction et disjonction :

$$\begin{aligned} \forall^{\text{st}} x \text{ pour } \forall x, x \text{ standard} &\Rightarrow, & \exists^{\text{st}} x \text{ pour } \exists x, x \text{ standard} &\wedge, \\ \forall^{\text{fin}} x \text{ pour } \forall x, x \text{ fini} &\Rightarrow, & \exists^{\text{fin}} x \text{ pour } \exists x, x \text{ fini} &\wedge, \\ \forall^{\text{st fin}} x \text{ pour } \forall^{\text{st}} x, x \text{ fini} &\Rightarrow, & \exists^{\text{st fin}} x \text{ pour } \exists^{\text{st}} x, x \text{ fini} &\wedge. \end{aligned}$$

Transfert : Pour toute formule interne $F(x, v_1, \dots, v_n)$ sans autres variables libres que x, v_1, \dots, v_n , on a :

$$\forall^{\text{st}} v_1 \dots \forall^{\text{st}} v_n (\forall^{\text{st}} x F(x, v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \forall x F(x, v_1, \dots, v_n)).$$

Le principe de transfert dit que si la formule interne $F(x, v_1, \dots, v_n)$ est vraie pour tout standard x , elle le sera pour tous les x , pourvu que les autres variables soient standard. Par contraposée, s'il existe un x pour lequel la formule n'est pas vraie, il en existera un standard pour lequel la formule n'est pas vérifiée. En particulier, si un tel x est unique, il sera nécessairement

standard. Il découle de ceci que tout objet spécifique des mathématiques conventionnelles comme $0, 1, 2, \sin, \ln, \pi, \mathcal{C}[0, 1], L^p, \dots$ est standard, parce que caractérisé de manière unique. Une autre conséquence importante est que toute fonction standard prend des valeurs standard aux points standard.

Idéalisation : Pour toute formule interne $B(x, y)$ où x et y sont des variables libres mais peut-être pas les seules, on a :

$$\forall^{\text{st}} \text{fin } z \exists x \forall y \in z B(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{\text{st}} y B(x, y).$$

Ce principe, plus délicat à comprendre, dit que la relation interne $B(x, y)$ où x et y sont des variables libres, mais peut-être pas les seules, est simultanément vérifiable pour tout standard y si, et seulement si, elle est simultanément vérifiable dans tout ensemble fini standard. Le principe d'idéalisation permet notamment de démontrer que tout élément d'un ensemble E est standard si et seulement si E est un ensemble standard fini. Par conséquent, tout ensemble infini contient un élément non standard. Il existe donc un entier naturel non standard... Enfin, une des conséquences importantes de cet axiome est qu'il existe un ensemble standard A qui contient tous les objets standard.

Standardisation : Pour toute formule $F(z)$, interne ou externe, où z n'est peut-être pas la seule variable libre, on a :

$$\forall^{\text{st}} x \exists^{\text{st}} y \forall^{\text{st}} z (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge F(z)).$$

Nous devons remarquer à ce niveau que seules les formules internes peuvent définir des sous-ensembles, comme nous le reverrons plus bas. Le principe de standardisation fournit un substitut. Il assure que pour tout ensemble standard x , il existe un sous-ensemble standard y dont les éléments standard sont ceux qui vérifient F . L'ensemble y est unique. En effet, deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. Par transfert, deux ensembles standard sont égaux s'ils ont les mêmes éléments standard. L'ensemble y est noté $^{\text{S}}\{z \in x : F(z)\}$.

La théorie IST est une extension conservative de ZFC : tout théorème interne de IST est un théorème de ZFC. Certains théorèmes prouvés dans IST sont externes et peuvent être reformulés de manière à les rendre internes. On doit en effet à E. Nelson [52] un algorithme de réduction ramenant toute formule externe $F(x_1, \dots, x_n)$ de IST sans autres variables libres que x_1, \dots, x_n à une formule interne $F'(x_1, \dots, x_n)$ avec les mêmes variables libres, telle que $F \equiv F'$, c'est-à-dire $F \Leftrightarrow F'$ pour toutes les valeurs standard des variables libres. Voici la réduction des formules les plus rencontrées :

$$\begin{aligned} \forall x (\forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \forall^{\text{st}} z B) &\equiv \forall z \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow B), \\ \forall x (\exists^{\text{st}} w \forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \forall^{\text{st}} z B) &\equiv \forall w \forall z \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow B), \\ \forall x (\exists^{\text{st}} w \forall^{\text{st}} y A \Rightarrow \exists^{\text{st}} z B) &\equiv \forall w \exists^{\text{fin}} z' \exists^{\text{fin}} y' \forall x (\forall y \in y' A \Rightarrow \exists z \in z' B), \end{aligned} \tag{A.1}$$

où A (respectivement B) est une formule interne de variable libre y (respectivement z) et de paramètres standard.

A.2 Quelques définitions externes

Un nombre réel x est dit **infinitésimal** si $|x| < a$ pour tout réel a strictement positif standard, **limité** si $|x| \leq a$ pour un certain nombre standard a , **appréciable** s'il est limité et non infinitésimal, et **illimité** s'il n'est pas limité. Nous notons $x \simeq 0$ pour x infinitésimal, $x \simeq \pm\infty$ pour x illimité positif ou négatif et $x \gg 0$ pour x non infinitésimal positif. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x \simeq 0 &\Leftrightarrow \forall^{\text{st}} a > 0 \ |x| < a, \\ x \gg 0 &\Leftrightarrow \exists^{\text{st}} a > 0 \ x > a, \\ x \text{ limité} &\Leftrightarrow \exists^{\text{st}} a > 0 \ |x| \leq a, \\ x \simeq \infty &\Leftrightarrow \forall^{\text{st}} a > 0 \ |x| > a. \end{aligned}$$

Soit (E, d) un espace métrique standard. Deux points x et y dans E sont dits **infinitement proches**, et on note $x \simeq y$, si $d(x, y) \simeq 0$. Un élément x est dit **presque standard** dans E s'il existe dans cet espace un standard x_0 tel que $x \simeq x_0$. Le point x_0 est appelé la **partie standard** de x (elle est unique) et est notée ${}^\circ x$. Notons qu'un nombre réel est presque standard dans \mathbb{R} si, et seulement si, il est limité. Un vecteur dans \mathbb{R}^n (n standard) est dit **infinitésimal** (respectivement **limité**, **illimité**) si $\|x\|$ est infinitésimal (respectivement limité, illimité) où $\|\cdot\|$ est une norme standard de \mathbb{R}^n .

Soit X un espace topologique standard. Un point x de X est dit **infinitement proche** d'un point standard x_0 , et on note aussi $x \simeq x_0$, si x est dans tout voisinage standard de x_0 . Soit A un sous-ensemble standard de X . Un point $x \in X$ est dit **presque standard** dans A s'il existe un standard $x_0 \in A$ tel que $x \simeq x_0$. Le sous-ensemble standard A est compact si, et seulement si, tout point $x \in A$ est presque standard dans A . Le sous-ensemble standard A est ouvert si, et seulement si, tout point $x \in X$ qui est presque standard dans A , appartient à A .

Une fonction standard f est continue en un point standard x_0 de son ensemble de définition D si, et seulement si, $f(x) \simeq f(x_0)$ pour tout x de D tel que $x \simeq x_0$. Elle est continue sur D si, et seulement si, elle est continue en tout point standard de D .

Nous pouvons continuer à caractériser de façon externe d'autres notions comme la continuité uniforme, la différentiabilité, l'intégration,... mais nous ne donnons que les notions dont nous avons besoin dans ce travail.

A.3 Principes de permanence

On ne peut pas utiliser des prédicats externes pour définir des sous-ensembles (on parle de formation illégale d'ensembles). Par exemple, on peut prouver qu'il n'existe pas de sous-ensembles L et I de \mathbb{R} tels que, *pour tout x dans \mathbb{R} , x est dans L si, et seulement si, x est limité, ou x est dans I si, et seulement si, x est infinitésimal*. Ce résultat sert parfois à prouver la validité d'une propriété au-delà du domaine où elle a été établie. Par exemple, supposons qu'une certaine propriété interne A a été établie pour tout x limité. Si nous admettions que A n'est vraie pour aucun x illimité, nous aurions alors caractérisé les nombres limités par l'ensemble $L = \{x \in \mathbb{R} : A\}$, ce qui est illégal. C'est un *principe de permanence*, dit de Cauchy. Une des plus importantes conséquences de ce principe est le fameux lemme de Robinson, dont voici une des versions :

Lemme A.3.1 (Robinson) [58] *Soit f une fonction réelle telle que $f(x) \simeq 0$ pour tout $x \geq 0$ limité, alors il existe un réel illimité ω tel que $f(x) \simeq 0$ pour tout x dans $[0, \omega]$.*

Preuve. L'ensemble de tous les s tels que $|f(x)| < 1/s$ pour tout $x \in [0, s]$ contient tous les limités $s \geq 1$. D'après le principe de Cauchy, il doit contenir un illimité ω . ■

À ce stade nous devons souligner toutefois qu'une collection d'éléments d'un ensemble \mathcal{E} vérifiant une propriété externe F est parfois appelée, par commodité, *ensemble externe*. On s'autorisera même à la noter par un symbole et à pratiquer sur elle les opérations booléennes binaires telles que la réunion, l'intersection, le complémentaire, etc... Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que ce n'est pas un ensemble à proprement parler. Un ensemble externe en tant que tel met en défaut au moins un axiome de la théorie classique des ensembles. Nous adopterons quant à nous l'expression de *collection externe*. Par exemple, la collection externe définie par $hal(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ infinitésimal}\}$, appelée *halo de 0*, n'est pas un ensemble car on ne peut pas lui appliquer l'axiome de la borne supérieure. En effet, tout réel standard r est plus grand que tout élément de $hal(0)$. Supposons alors que s est une borne supérieure de $hal(0)$ et soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal. Si $s \simeq 0$, alors $s + \varepsilon \simeq 0$, ce qui est absurde car s est la borne supérieure du halo de 0. Si s est appréciable, alors $s - \varepsilon$ l'est aussi est c'est un majorant de $hal(0)$, ce qui est impossible. Il reste beaucoup à dire sur les fondements, les développements et les applications de l'ANS. Les lecteurs intéressés sont renvoyés à quelques références classiques comme [15, 16, 69] pour les fondements et [14, 36, 46, 69, 75] pour les applications. Le livre *Nonstandard Analysis in Practice* [13] est particulièrement intéressant pour apprécier la portée des outils non standard dans au

moins neuf domaines, et l'on trouvera dans [10, 45, 60, 62, 61, 78] ce qu'il faut savoir sur la théorie des perturbations d'équations différentielles ordinaires.

A.4 S-Stabilité

Soit le système

$$\dot{x} = f(x), \quad (\text{A.2})$$

où le champ de vecteurs f est continu, pas nécessairement standard. Supposons que f est définie dans un ouvert U de \mathbb{R}^n .

Définition A.4.1 *Un sous-ensemble standard borné \mathcal{M} de U est dit s-globalement asymptotiquement stable (s-GAS) pour (A.2) si pour tout x_0 presque standard dans U et tout $t > 0$ illimité, toute solution $x(t)$ de condition initiale x_0 vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$.*

Les notions s-GAS et GAS sont équivalentes si f est standard (voir [38], proposition 4.1, page 10).

Définition A.4.2 *Un sous-ensemble standard borné \mathcal{M} de U est dit s-asymptotiquement stable (s-AS) pour (A.2) s'il existe un voisinage compact standard $\mathcal{K} \subset U$ de \mathcal{M} tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{K}$ et tout $t > 0$ illimité, toute solution $x(t)$ de condition initiale x_0 vérifie $\text{dis}(x(t), \mathcal{M}) \simeq 0$.*

En analyse non standard, le préfixe s (s-propriétés) sert à distinguer entre une notion standard et la notion non standard correspondante [13].

A.5 Deux outils de base

Nous présentons deux résultats fondamentaux de la théorie non standard des perturbations d'équations différentielles. D'abord la méthode stroboscopique, qui avait été proposée par J. L. Callot et G. Reeb en 1977 pour l'étude d'une équation particulière et présentée dans un colloque par ce dernier en 1978 (on peut lire par exemple [10]). Cette méthode consiste grosso modo en ceci : supposons qu'une fonction ϕ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} soit à valeurs limitées dans \mathbb{R}^n . Supposons de plus qu'il existe une fonction standard continue F et une suite de points $(t_n, \phi(t_n))$ dans $I \times \mathbb{R}^n$ tels que

$$0 < t_{n+1} - t_n \simeq 0 \text{ et } \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \simeq F(t_n, \phi(t_n)).$$

La méthode stroboscopique dit alors que la fonction ϕ est infiniment proche d'une solution $x(t)$ de l'équation différentielle ordinaire $dx/dt = F(t, x)$ pour

tout t et $x(t)$ limités. Des améliorations se sont imposées par le fait du peu d'informations que l'on peut avoir a priori sur la fonction ϕ considérée. Par exemple, si cette fonction est solution d'une équation différentielle, comment vérifier qu'elle ne prend que des valeurs limitées sur un intervalle donné? Comment construire explicitement la suite $(t_n, \phi(t_n))$? T. Sari a étendu la méthode dans [59] au cas où pour tout t dans I pour lequel t et $\phi(t)$ sont limités, il existe t' dans I tel que

$$0 < t' - t \simeq 0 \text{ et } \frac{\phi(t') - \phi(t)}{t' - t} \simeq F(t, \phi(t)).$$

A partir de ce résultat et de la *stroboscopie sélective* de R. Lutz [45] où l'existence de t' n'est assurée que pour des t dans un sous-ensemble de I , Sari établit le *lemme de stroboscopie* que nous énonçons ici (voir à ce sujet [60, 61, 65]).

Soit U un ouvert standard de \mathbb{R}^n , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue standard. Soit J un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $\phi(0)$ est presque standard dans U , c'est-à-dire qu'il existe un standard $x_0 \in U$ tel que $\phi(0) \simeq x_0$. Soit I un sous-ensemble connexe de J (éventuellement une collection externe) tel que $0 \in I$.

Définition A.5.1 (Propriété de stroboscopie) *Soit t et t' dans I . La fonction ϕ est dite satisfaire la propriété de stroboscopie $\mathcal{S}(t, t')$ si $[t, t'] \subset I$, $t' \simeq t$, $\phi(s) \simeq \phi(t)$ pour tout s dans $[t, t']$ et*

$$\frac{\phi(t) - \phi(t')}{t - t'} \simeq F(\phi(t)).$$

Sous des conditions convenables, le lemme de stroboscopie affirme que la fonction ϕ est approchée par la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = x_0. \quad (\text{A.3})$$

Théorème A.5.2 (Lemme de Stroboscopie) [61] *Supposons que*

(i) *il existe $\mu > 0$ tel que, dès que $t \in I$ est limité et $\phi(t)$ est presque standard dans U , il existe $t' \in I$ tel que $t' - t \geq \mu$ et la fonction ϕ satisfait la propriété de stroboscopie $\mathcal{S}(t, t')$,*

(ii) *le problème de Cauchy (A.3) admet une solution unique $x(t)$.*

Alors, pour tout standard L dans l'intervalle positif maximal de définition de $x(t)$, on a $[0, L] \subset I$ et $\phi(t) \simeq x(t)$ pour tout $t \in [0, L]$.

L'autre outil essentiel concerne la théorie des perturbations régulières. Considérons les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\frac{dx}{dt} = F_0(x), \quad x(0) = a_0 \in U_0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad x(0) = a \in U. \quad (\text{A.5})$$

Le lemme de l'ombre courte permet de comparer les solutions de (A.4) et (A.5) quand F est proche de F_0 et a est proche de a_0 dans un sens à préciser. On en trouvera une preuve à l'aide du lemme de stroboscopie dans [61].

Théorème A.5.3 (Lemme de l'Ombre Courte) *Soit U_0 un ouvert standard de \mathbb{R}^n et soit $F_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ standard et continue. Soit $a_0 \in U_0$ standard. Supposons que le problème de Cauchy (A.4) admet une solution unique $x_0(t)$ et soit $J = [0, \omega[$, $0 < \omega \leq +\infty$, son intervalle positif maximal de définition. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n qui contient tous les éléments presque standard dans U_0 . Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $F(x) \simeq F_0(x)$ pour tout x presque standard dans U_0 . Alors, toute solution $x(t)$ du problème de Cauchy (A.5) avec $a \simeq a_0$ est définie pour tout t presque standard dans J et satisfait $x(t) \simeq x_0(t)$.*

A.6 Lemmes requis

La démonstration du théorème 1.2.2 requiert deux résultats techniques que nous rappelons ici car nous les utilisons pour la preuve du théorème 4.6.3.

Lemme A.6.1 ([37] Lemma 9, page 17) *Supposons satisfaites les hypothèses T1, T2 et T3. Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (1.1) telle que $y(t)$ est presque standard dans \dot{Y} pour tout t dans $[t_0, t_1]$ et $x(t_0) \simeq \xi(y(t_0))$. Alors $x(t) \simeq \xi(y(t))$ pour tout t dans $[t_0, t_1]$.*

Lemme A.6.2 ([37] Lemma 10, page 18) *Supposons satisfaite l'hypothèse T4. Soit y_0 standard dans \dot{Y} . Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (1.1) telle que $x(t) \simeq \xi(y(t))$ pour tout t dans $[t_0, t_1]$ et $y(t_0) \simeq y_0$. Soit $\bar{y}(t)$ la solution de l'équation lente (1.4) de condition initiale y_0 définie sur un intervalle standard $[0, T]$. Alors $y(t_0 + s) \simeq \bar{y}(s)$ pour tout $s \leq T$ tel que $t_0 + s \leq t_1$.*

A.7 Théorie de Neishtadt

La variable lente y du système lent-rapide

$$\begin{aligned}\varepsilon dx/dt &= F(x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ dy/dt &= G(x, y, \varepsilon), \quad y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}\tag{A.6}$$

peut être considérée comme un paramètre dynamique de bifurcation, si on imagine que le point d'équilibre ou le cycle limite de l'équation rapide change de stabilité quand une certaine valeur de y est atteinte. Dans son papier devenu une référence, A. I. Neishtadt [51] suppose d'abord que les seconds membres de (1.1) sont au moins deux fois continûment différentiables sur un domaine donné. Il se met dans l'une des deux situations où l'équation rapide (1.2) admet un point d'équilibre x_y ou un cycle limite Γ_y non dégénérés, dépendant continûment de y . Désignons ces équilibres et ces cycles par la notation unique L_y . Les équations lentes respectives sont données par

$$\frac{dy}{dt} = G(\xi(y), y, 0),\tag{A.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T(y)} \int_{\Gamma_y} G(x, y, 0) dx.\tag{A.8}$$

Soit $\bar{y}(t)$ la solution de l'équation régissant le mouvement lent (A.7) ou (A.8) définie sur $[t_0, t_1]$ et telle que $\bar{y}(t_0) = y_0$. Supposons qu'il existe t_* dans $]t_0, t_1[$ tel que, pour tout $t \in [t_0, t_*[$, $L_{\bar{y}(t)}$ est asymptotiquement stable pour l'approximation linéaire et perd sa stabilité pour $t = t_*$. Supposons aussi que pour tout t dans $[t_0, t_*[$ et pour ε assez petit, la trajectoire γ du système (A.6) se trouve dans un petit voisinage de $L_{\bar{y}(t)} \times \{\bar{y}(t)\}$. Ainsi, à l'instant t_* , dans le cas de l'équilibre, il existe une paire de valeurs propres conjuguées imaginaires et 0 n'est pas une valeur propre et, dans le cas du cycle, soit il existe une paire de multiplicateurs conjugués sur le cercle unité, soit -1 est un multiplicateur mais pas 1. Le théorème de Neishtadt, que nous n'énonçons pas ici, dit que si les seconds membres du système (1.1) sont *analytiquement* prolongeables par rapport à x et y à un voisinage complexe de $L_{\bar{y}(t_*)}$ indépendant de ε , il y a retard à la bifurcation. Cela signifie que la trajectoire γ continue à évoluer dans un petit voisinage de $L_{\bar{y}(t)} \times \{\bar{y}(t)\}$ au delà de l'instant t_* avant de s'en éloigner. L'auteur donne même une estimation du retard.

Bibliographie

- [1] D. V. Anosov, On limit cycles in systems of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, *AMS Translations*, Ser. **2** **33** (1963), 233-275.
- [2] V. I. Arnold, *Chapitres Supplémentaires sur la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires*, ed. Mir (1980).
- [3] V. I. Arnold (Ed.), *Dynamical Systems V*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. **5**, Springer-Verlag, (1994).
- [4] R.A. Armstrong, R. McGehee, Coexistence of species competing for shared resources, *Theor. Popul. Biol.* **9** (1976), 317–328.
- [5] E. Benoît (Ed.), *Dynamical Bifurcation*, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, **1493** (1991).
- [6] H. Boudjellaba, T. Sari, Oscillations in a prey-predator-superpredator system, *J. Biol. Sys.* **6** (1998), 17-33.
- [7] K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, North-Holland, Amsterdam (1989).
- [8] G. Butler, P. Waltman, Persistence in dynamical systems, *J. Differential Equations*, **63** (1986), 255-263.
- [9] C. I. Byrnes, A. Isidori, Bifurcation analysis of the zero dynamics and the practical stabilization of nonlinear minimum-phase systems, *Asian Journal of Control*, **4** (**2**) (2002), 171-185.
- [10] J. L. Callot, T. Sari, Stroboscopie et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes, *Mathematical Tools and Models for Control, Systems Analysis and Signal Processing*, **3**, CNRS Paris (1983), 345-353.
- [11] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, San Francisco (1980).
- [12] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations II*, Pitman, San Francisco (1982).

- [13] F. Diener, M. Diener (Eds), *Nonstandard Analysis in Practice*, Universitext Springer-Verlag, (1995).
- [14] F. Diener, *Cours d'Analyse Non Standard*, Office des Publications Universitaires, Alger (1983).
- [15] M. Diener, C. Lobry (Eds), *Analyse Non Standard et Représentation du Réel*, Editions CNRS, Paris et Office des Publications Universitaires, Alger (1989).
- [16] F. Diener, G. Reeb, *Analyse Non Standard*, Hermann, (1989).
- [17] M. Farkas, *Periodic Motions*, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences **104**, (1994).
- [18] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, **31** (1979), 53-98.
- [19] L. Flatto, N. Levinson, Periodic solutions of singularly perturbed systems, *J. Rational Mech.*, **4** (1955), 943-950.
- [20] K. O. Friedrichs, W. Wasow, Singular perturbations of nonlinear oscillations, *Duke Math. J.* **13** (1946), 361-381.
- [21] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Heidelberg (1967).
- [22] G. Hardin, The competition exclusion principle, *Science* **131** (1960), 1292-1298.
- [23] F. Hoppensteadt, Singular perturbations on the infinite interval, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123** (1966), 521-535.
- [24] F. Hoppensteadt, Stability in systems with parameters, *J. Math. Anal. Appls.*, **18** (1967), 129-134.
- [25] F. Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbation problems, *J. Diff. Eq.*, **4** (1968), 350-358.
- [26] F. Hoppensteadt, Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters, *Comm. Pure Appl. Math.*, **24** (1971), 807-840.
- [27] F. Hoppensteadt, Asymptotic stability in singular perturbation problems II : problems having matched asymptotic expansions solutions, *J. Diff. Equations*, **15** (1974), 510-521.
- [28] S. B. Hsu, S. P. Hubbel, P. Waltman., Competing predators, *Appl. Math.*, **4** (1978), 617-625.
- [29] G.E. Hutchinson, The paradox of the plankton, *American Naturalist*, **95** (1961), 137-145.
- [30] Ch. K. R. T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, in Dynamical Systems, Montecatini Terme, Italy, L. Arnold, Lecture Notes in Mathematics, vol 1609, 44-118, Springer-Verlag, Berlin (1994).

- [31] T. J. Kaper, *An Introduction to Geometric Methods and Dynamical System Theory for Singular Perturbation Problems*, Proceedings Symposia , Applied Mathematics 56 : Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation Methods, Cronin, J. and O'Malley, Jr., R.E., eds.(1999), pp. 85–131, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [32] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (1996).
- [33] A. L. Koch, Competitive coexistence of two predators utilizing the same prey under constant environmental conditions, *J. Theoret. Biol.* **44** (1974), 373-386.
- [34] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil et J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*, Academic Press, New York (1986).
- [35] W. Liu, Exchange lemmas for singularly perturbed problems with certain turning points, *J. Diff. Eq.*, **167** (2000), 134-180.
- [36] C. Lobry, A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "bifurcations dynamiques", *Annales de l'institut Fourier*, **42** (1-2) (1992), 327-351.
- [37] C. Lobry, T. Sari, S. Touhami, On Tykhonov's theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electron. J. Diff. Eqns*, **19** (1998), 1-22.
- [38] C. Lobry et T. Sari, *The Peaking Phenomenon and Singular Perturbations : An Extension of Tikhonov's Theorem*, Rapport de recherche n° **4051** de l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (2000).
- [39] C. Lobry, F. Mazenc, A. Rapaport, Persistence in ecological model of competition for a single resource, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **340** (2005), 199–204.
- [40] C. Lobry, F. Mazenc, A. Rapaport, Sur un modèle densité dépendant de compétition pour une seule ressource, *C. R. Acad. Sci. Paris, Biologies* **329** (2006), 63-70.
- [41] C. Lobry, J. Harmand, A new hypothesis to explain the coexistence of n species in the presence of a single ressource, *C. R. Acad. Sci. Paris, Biologies* **329** (2006), 40-46.
- [42] C. Lobry, F. Mazenc, Effect on persistence in intra-specific competition in competition models, *Electron. J. Diff. Eqns*, **125** (2006), 1-10.
- [43] C. Lobry, *Stabilité et persistance dans les écosystèmes microbiens - Modèles de compétition pour une ressource : le rôle de la compétition intra spécifique*, Cours de l'école CIMPA Tlemcen (2008).

- [44] A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Williams ans Wilkins, Baltimore, MD (1925).
- [45] R. Lutz, *L’Intrusion de l’Analyse ’Non Standard dans l’Etude des Perturbations Singulières*, III^e rencontre de géométrie du Schnepfenried, *Astérisque* **109-110** (1983), 101-140.
- [46] R. Lutz, M. Goze, *Nonstandard Analysis : A Practical Guide with Applications*, Lecture Notes in Mathematics **881**, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [47] F. Mazenc, C. Lobry, A. Rappaport, Persistence in ratio-dependant models of consumer-ressource dynamics, *Electron. J. Diff. Eqns, conferences* **15** (2007), 211-220.
- [48] R. McGehee, R.A. Armstrong, Some mathematical problems concerning the ecological principle of competitive exclusion, *J. Diff. Equat.* **23** (1977), 30–52.
- [49] N. Mehidi, T. Sari, Limit cycles of a predator prey model, *Proceedings of the 1st ECMBM-Pau, 1-5 June 1992*, ed. par Kimmel (Wuerz Publications, 1996).
- [50] S. Muratori, S. Rinaldi, Low and high-frequency oscillations in three-dimensional food chain systems, *SIAM J. Appl. Math.* **52** (1992), 1688-1706.
- [51] A. Neishtadt, Persistence of stability loss for dynamical bifurcation, I, *Differential Equations* **23** (1987), 1385-1391.
- [52] E. Nelson, Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1165-1198.
- [53] R. O’Malley Jr, *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, (1974).
- [54] R. E. O’Malley, Jr, *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences **89**, Springer-Verlag, (1990).
- [55] J. Ch. Poggiale, *Application des Variétés Invariantes à la Dynamique des Populations*, Thèse–Université de Bourgogne, Dijon (1994).
- [56] L. S. Pontryagin, L. V. Rodygin, Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives, *Soviet. Math. Dokl.*, **1** (1960), 237-240.
- [57] L. Prandtl, Über Flüssigkeits - bewegung bei kleiner Reibung, *Verhandlungen, III. Int. Math.* **13** (1905), 740-766.
- [58] A. Robinson, *Nonstandard Analysis*, American Elsevier, New York (1974).

- [59] T. Sari, *Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes*, Thèse, Université de Mulhouse (1983).
- [60] T. Sari, Petite histoire de la stroboscopie, dans *Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-louis Callot*, A. Fruchard et A. Troesh (Eds), IRMA Publication, Strasbourg (1995), 5-15.
- [61] T. Sari, Stroboscopy and averaging, dans *Colloque Trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-louis Callot*, A. Fruchard et A. Troesh (Eds), IRMA Publication, Strasbourg (1995), 95-124.
- [62] T. Sari, Nonstandard perturbation theory of differential equations, *présenté lors de la conférence The International Research Symposium on Nonstandard Analysis and its Applications, ICMS, Edinburgh, 11-17 August (1996)*. (<http://www.math.uha.fr/sari/papers/icms1996.pdf>)
- [63] T. Sari, K. Yadi, On Pontryagin–Rodygin’s theorem for convergence of solutions of slow and fast systems, *Electron. J. Diff. Eqns*, **19** (2004), 1-17.
- [64] T. Sari, *Contrôle Non Linéaire et Applications*, Cours du CIMPA, Collection Travaux en Cours **64**, Hermann éditeur (2005).
- [65] T. Sari, *Averaging in Ordinary Differential Equations and Functional Differential Equations*, in The Strength of Nonstandard Analysis, I. van den Berg, V. Neves (editors), Springer-Verlag, Wien (2007), 286-305.
- [66] A. R. Teel, L. Praly, Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback, *SIAM J. Contr. Optim.* **33** (1995), 1443-1485.
- [67] A. N. Tykhonov, Systems of differential equations containing small parameters multiplying the derivatives, *Mat. Sborn.*, **31** (1952), 575-586.
- [68] K. Yadi, Singular perturbations on infinite time interval, (à paraître in 2007 International Conference in Honor of Claude Lobry).
- [69] I. P. van den Berg, *Nonstandard Asymptotic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1249**, Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [70] A. B. Vasileva, V. M. Volosov, The work of Tikhonov and his pupils on ordinary differential equations containing a small parameter, *Russian Math. Surveys*, **22** (1967), 124-142.
- [71] F. Verhulst, Periodic solutions and slow manifolds, *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Engrg* **17** (2007), 2533-2540.
- [72] F. Verhulst, T. Bakri, The dynamics of slow manifold, *J. Indones. Math. Soc.* **13** (2007), n°1, 73-90.
- [73] F. Verhulst, *Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Texts in Appl. math. **50** Springer (2005).

- [74] V. Volterra, Variazioni e fluttuazione del numero di individui in specie animali conviventi, *Mem. Accad. Lincei* **2** (1926), 31-113.
- [75] G. Wallet, Entrée-sortie dans un tourbillon, *Annales de l'institut Fourier*, **36** (4) (1986), 157-184.
- [76] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Interscience, New York (1965).
- [77] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Robert E. Kriger Publishing Company, New York (1976).
- [78] A. K. Zvonkin, M. A. Shubin, Nonstandard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations, *Uspehi Mat. Nauk.* **39** (1984), 77-127.