



HAL
open science

Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal

Pierre-Antoine Adragna

► **To cite this version:**

Pierre-Antoine Adragna. Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Savoie, 2007. Français. NNT: . tel-00403876

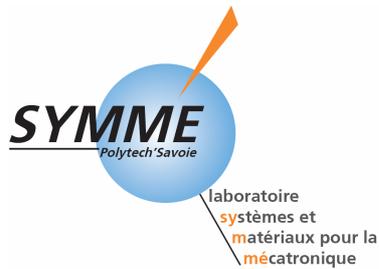
HAL Id: tel-00403876

<https://theses.hal.science/tel-00403876>

Submitted on 13 Jul 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire SYMME



Université de Savoie



Union Européenne

Thèse

Présenté par

Pierre-Antoine ADRAGNA

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Savoie

Spécialité : Génie Mécanique

Tolérancement des Systèmes Assemblés, une approche par le Tolérancement Inertiel et Modal

Soutenue le 6 décembre 2007 devant le jury composé de :

Bernard ANSELMETTI	Rapporteur	Professeur des Universités IUT de Cachan
Jacques JACOT	Rapporteur	Professeur EPFL
Marc BOUIX	Examineur	Ingénieur SOMFY Responsable Métier Electromécanique
Jean – Pierre NADEAU	Examineur	Professeur des Universités ENSAM de Bordeaux
Maurice PILLET	Directeur	Professeur des Universités IUT d'Annecy-le-Vieux
Serge SAMPER	Co-directeur	Maître de Conférence Polytech'Savoie d'Annecy

Remerciements

Je tiens à remercier mes rapporteurs d'avoir accepté ce travail de relecture. Je remercie ainsi Jacques Jacot (professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne) que j'ai pu apprécier durant ces trois années de collaboration et dont les discussions m'ont apporté un éclairage supplémentaire pour traiter la problématique de ce rapport. Mes remerciements vont également à Bernard Anselmetti (professeur des universités à l'IUT de Cachan) dont les approches de résolution m'ont inspiré et servit de référence dans l'évolution de mes travaux.

Je suis très reconnaissant à messieurs Jean-Pierre Nadeau (professeur des universités à l'Ecole Supérieure des Arts et Métiers de Bordeaux) et Marc Bouix (Ingénieur SOMFY) qui ont accepté les rôles d'examineurs. Une pensée particulière à M. Bouix dont la collaboration dans ce projet a apporté une vision industrielle permettant de mettre en applications nos théories.

Toute ma gratitude va également à mes responsables de thèse, Maurice Pillet (professeur des universités à l'IUT d'Annecy-le-Vieux) qui m'a permis d'aborder la recherche avec un point de vue plus industriel, ainsi que Serge Samper (maître de conférence à Polytech'Savoie d'Annecy) dont les discussions fructueuses ont permis de proposer de nombreuses évolutions.

Mes remerciements vont aussi aux partenaires de ce projet de recherche, les partenaires universitaires, Fabien Bourgeois, Sandra Koelmeijer Chollet et Yuri Lopez de Meneses de l'EPFL, qui ont un regard différent sur la problématique. Je remercie aussi les partenaires industriels, Marc Bouix de SOMFY, Michel Sarrazin de TEFAL, Didier Lamongesse de Dassault Aviation et enfin Bertrand Nicquevert du CERN, qui nous ont fourni des cas d'applications et des problématiques permettant de faire évoluer nos recherches.

Je tiens aussi à remercier les membres du laboratoire SYMME pour leur passion lors des discussions scientifiques, en particulier Pascal Hernandez, Max Giordano, Frédéric Germain et Hugues Favrelière. Je remercie aussi les thésards du laboratoires pour leur bonne humeur de chaque jour, Affaf, Anne-Sophie, Hugues, Frédéric, Dimitri...

Je suis très reconnaissant envers mes parents, Emile et Béatrice, qui m'ont permis d'arriver jusque là. J'ai également une pensée pour mes frères Julien et Alban. Enfin, je tiens à remercier ma Karine pour ses encouragements et sa patience.

Table des matières

Table des matières.....	v
Introduction	1
Le projet Interreg IIIA, "Tolérancement des systèmes assemblés"	1
Les cas limites des méthodes actuelles	1
Enjeux de ce programme de recherche	2
Déroulement du projet de recherche	3
Chapitre 1 Présentation non exhaustive du tolérancement 1D	5
1 Outil et hypothèse pour le tolérancement 1D	7
1.1 Chaîne de cote 1D et hypothèse d'indépendance des variables	7
1.1.1 Chaîne de cote 1D	7
1.1.2 Hypothèse d'indépendance des variables	8
1.1.3 Définitions	11
1.2 Représentations graphiques des tolérances.....	11
1.2.1 Le graphe ($\delta\sigma$).....	12
1.2.2 Le graphe en U	13
1.3 Le graphe ($\delta\sigma^2$) : une analyse des tolérances statistiques 1D	14
1.3.1 Assemblage vectoriel.....	15
1.3.2 Domaines de tolérance et domaine résultant	16
1.3.3 Les domaines de condition fonctionnelle	17
1.4 Analyse et comparaison des méthodes de tolérancement : la méthode des aires.....	18
1.4.1 Hypothèse de répartition uniforme des résultantes d'assemblage	18
1.4.2 Indices de qualification de la méthode de tolérancement	19
1.5 Une analyse des tolérances 1D par simulation de Monte Carlo	19
1.5.1 Tirage uniforme dans les domaines de tolérance.....	20
1.5.2 Tirage uniforme sur la limite du domaine de tolérance	22
1.5.3 Qualification de la méthode de tolérancement	23
1.5.4 Indice de qualification de la méthode de tolérancement.....	26
2 Tolérancement traditionnel 1D.....	27
2.1 Indices de capabilité traditionnels et domaines associés	27
2.1.1 L'indice C_p	27
2.1.2 L'indice C_{pk}	28
2.1.3 L'indice C_{pm}	30
2.1.4 L'indice C_{pmk}	31
2.1.5 Combinaison d'indices de capabilité et domaine associé.....	32
2.2 Condition fonctionnelle et son domaine d'acceptation.....	33
2.3 Tolérancement traditionnel	33
2.3.1 Le pire des cas	34
2.3.2 Tolérancement statistique	36
2.3.3 Tolérancement statistique augmenté	38
3 Tolérancement inertiel 1D.....	40
3.1 Perte de Taguchi et le critère inertie.....	40
3.1.1 La fonction de perte de Taguchi	40
3.1.2 Le critère inertie	41
3.2 Représentation graphique de la tolérance inertielle.....	41
3.2.1 Premières représentations graphiques.....	41
3.2.2 Graphe bi-tolérance	42
3.3 Indices de capabilité inertiels	43
3.3.1 L'indice C_p	43
3.3.2 L'indice C_{pi}	44
3.4 Condition fonctionnelle et son domaine d'acceptation.....	45
3.4.1 Une inertie comme CF	45

3.4.2	Un intervalle de tolérance comme CF	45
3.5	Tolérancement inertiel	46
3.5.1	Garantir une inertie sous l'hypothèse du pire des cas.....	46
3.5.2	Garantir une inertie sous l'hypothèse de décentrage aléatoire.....	47
3.5.3	Garantir un intervalle de tolérance sous l'hypothèse de décentrage aléatoire	48
4	Conclusions et perspectives	51
4.1	Conclusions du chapitre	51
4.2	Perspectives	51
Chapitre 2	Tolérancement inertiel 1D garantissant une Condition Fonctionnelle	53
1	Des propositions de tolérancement inertiel dans le cas de produits assemblés	55
1.1	Un compromis entre tolérancement au pire des cas et tolérancement statistique	55
1.2	Un tolérancement inertiel ajusté	56
1.3	Tolérancement inertiel classique et indice de capabilité C_{pi}	57
1.4	Choix d'une méthode de tolérancement	58
1.4.1	De l'inertiel avec exposant α à l'inertiel ajusté avec indice I_C	58
1.4.2	De l'inertiel avec indice C_{pi} à l'inertiel ajusté avec indice I_C	58
1.4.3	Tolérance fixe ou indice de capabilité C_{pi} fixe	59
1.5	Synthèse	59
2	Garantir une CF exprimée par un IT_{CF} et un indice C_{pk}_{CF} minimum	60
2.1	Tolérancement inertiel et indice de capabilité C_{pk}_{ass} résultant	60
2.1.1	Hypothèse simplificatrice : des composants en limite de tolérances inertielles	60
2.1.2	Indice C_{pk}_{ass} d'une chaîne de cote en limite de tolérance inertielle	61
2.2	Valeur et configuration du C_{pk}_{ass} minimum	61
2.2.1	Hypothèse simplificatrice : réduction du domaine d'étude	62
2.2.2	Recherche de la plus mauvaise configuration.....	62
2.2.3	La fonction C_{pk}_{ass} est convexe	63
2.3	Garantir un C_{pk}_{ass} minimum sur l'IT_{CF} de la CF	66
2.3.1	Valeur minimale du C_{pk}_{ass} résultant.....	66
2.3.2	Garantir un $C_{pk}_{ass}^{Min}$ défini par la CF	66
2.3.3	Le cas d'application.....	67
2.3.4	Impossible d'atteindre la plus mauvaise configuration	69
3	Garantir une CF exprimée par un IT_{CF} et un TNC_{CF} maximum	72
3.1	Le domaine de tolérance défini par un TNC_{CF} associé à un IT_{CF}	72
3.1.1	Domaine de tolérance d'un TNC_{CF} sur un IT_{CF}	72
3.1.2	Garantir un TNC_{Max} grâce au C_{pk} de la plus mauvaise configuration	73
3.1.3	Le cas d'application.....	74
3.2	Comparaison des méthodes de tolérancements	75
3.2.1	Comparaison des écarts-types maximums autorisés.....	75
3.2.2	Comparaison des décentrages maximums autorisés	76
3.2.3	Comparaison grâce au graphe (δ, σ^2)	78
4	Garantir la CF en considérant les décentrages aléatoires des composants	79
4.1	Répartition des assemblages par simulation de Monte Carlo	79
4.1.1	Hypothèses	79
4.1.2	Simulations d'assemblage de composants dans leurs domaines de tolérance	80
4.1.3	Simulation d'assemblage de composants en limite de leurs domaines de tolérance	85
4.2	Tolérancement inertiel avec des risques	90
4.2.1	Différentes approches possibles de modélisation du risque	90
4.2.2	Une estimation statistique du risque	92
5	Conclusion du chapitre	93
Chapitre 3	Tolérancement 3D et forme d'une pièce ou d'un assemblage	95
1	Tolérancement 3D et analyse de forme : un bilan non exhaustif	98
1.1	Norme et tolérancement 3D	98
1.1.1	La norme ISO	98
1.1.2	La Spécification Géométrique des Produits (GPS).....	98
1.2	Modèle et outils de tolérancement 3D	98
1.2.1	Graphes de mécanisme	99
1.2.2	Modèles de tolérancement 3D	99
1.2.3	Modèles de tolérancement 3D avec prise en compte des défauts de forme.....	101
1.3	Analyse et caractérisation des défauts de forme	102

1.3.1	Analyse d'écart de formes dans le domaine métrologique	102
2	La méthode modale naturelle	103
2.1	Etat de l'art de la méthode modale	103
2.1.1	Création de la base modale théorique naturelle	103
2.1.2	Analyse d'un écart de forme et vocabulaire associé	105
2.1.3	Ecriture sous forme matricielle.....	106
2.2	Un cas d'illustration simple : un profil poutre.....	106
2.2.1	Base modale naturelle d'une poutre	106
2.2.2	Un défaut de forme simulé	107
2.2.3	Caractérisation du défaut de forme.....	108
3	Evolution de la méthode modale	110
3.1	Evolution du résidu de caractérisation modale	111
3.2	Base modale euclidienne	112
3.2.1	Orthonormalisation de Gram Schmidt.....	112
3.3	Base modale métrique.....	113
3.3.1	Projection modale dans la base métrique.....	114
3.4	Défauts technologiques	115
3.4.1	Enrichissement de la base modale	115
3.4.2	Le cas d'application industriel.....	115
3.5	Application sur le cas d'exemple.....	118
3.5.1	Evolution de la base modale.....	118
3.5.2	Analyse de l'écart de forme simulé	119
3.5.3	Re-combinaison des modes	119
3.6	Equivalence entre modes rigides et composantes du torseur de petits déplacements	120
4	Assemblage de composants et méthode modale	123
4.1	Accostage et méthode modale.....	123
4.1.1	Définition des défauts d'accostages.....	123
4.1.2	Analyse modale et écarts d'accostage	124
4.1.3	Un cas d'application industriel	126
4.2	Assemblage sans défaut de forme	129
4.2.1	Association modale des formes rigides	129
4.2.2	Assemblage modal sans défaut de forme.....	132
4.3	Prise en compte de l'écart de forme.....	136
4.3.1	Notre proposition : un effort de mise en position	137
4.3.2	Le cas d'exemple.....	138
4.3.3	Assemblage modal, surface écart et point de contact	139
5	Conclusion et perspectives	143
5.1	Conclusion du chapitre	143
5.2	Perspectives du chapitre	144
<i>Chapitre 4</i>	<i>Caractérisation modale d'un lot et tolérancement modal inertiel.....</i>	<i>145</i>
1	Statistique et méthode modale.....	147
1.1	Simulation d'un lot d'écarts de forme	147
1.1.1	Exemple d'illustration	147
1.1.2	Création d'un lot de défauts de forme	148
1.2	Représentation modale des écarts de forme.....	150
1.2.1	Première représentation : histogramme des signatures.....	150
1.2.2	Seconde représentation : signature modale moyenne et signature modale écart type	151
1.2.3	Surface moyenne et surface écart-type	153
1.3	Synthèse de la partie	156
2	Fusion de la méthode modale et du critère inertie.....	157
2.1	Inertie 3D classique	157
2.1.1	L'inertie 3D par Pillet.....	157
2.1.2	Inertie et description modale	159
2.2	Inertie 3D ajustée	161
2.2.1	Brève critique de l'inertie 3D classique.....	161
2.2.2	L'inertie 3D ajustée	163
2.3	L'espace des coefficients modaux	164
2.3.1	La représentation dans l'espace des coefficients modaux	165
2.3.2	Représentation de la zone de tolérance 3D ISO	166
2.3.3	Représentation de l'inertie 3D ajustée.....	168

2.3.4	Synthèse de cette partie	170
3	Proposition de tolérancement 3D inertiel	171
3.1	Spécification de tolérance modale inertielle	171
3.1.1	Sans prise en compte des défauts de forme	172
3.1.2	Prise en compte des défauts de forme	174
3.2	Application du tolérancement 3D inertiel sans défaut de forme	176
3.2.1	Tolérancement inertiel d'un empilage de cinq composants	176
3.2.2	Cas d'application avec bras de levier et tolérancement 3D au pire des cas	178
3.2.3	Tolérancement inertiel 3D du cas d'application avec bras de levier	182
3.2.4	Comparaison des tolérancements 3D au pire des cas et inertiel sur le cas d'application	186
3.2.5	Simulations d'assemblage	188
3.2.6	Tolérancement inertiel 3D et torseur de petits déplacements	198
3.2.7	Synthèse de cette partie	207
4	Synthèse et perspectives du chapitre	208
4.1	Synthèse du chapitre	208
4.2	Perspectives	209
4.2.1	Définition de l'inertie 3D et sa tolérance	209
4.2.2	Tolérancement inertiel 3D sans défaut de forme	209
4.2.3	Tolérancement modal inertiel	210
Chapitre 5 Conclusion générale et perspectives		211
Conclusion		211
Perspectives		213
Tolérancement 1D		213
Tolérancement 3D		213
Tolérancement 3D avec défauts de forme		213
<i>Bibliographie</i>		<i>215</i>
Référence bibliographique		215
Norme		224
<i>Annexe 1</i>		<i>225</i>
Interpolation et extrapolation modale		225
Interpolation modale		226
Extrapolation modale		227
Possibilités d'application		227
<i>Annexe 2</i>		<i>229</i>
Base modale technologique métrique		229

Introduction

Le projet Interreg IIIA, "Tolérancement des systèmes assemblés"

Les recherches que nous présentons dans le présent document sont supportées par le programme de l'Union Européenne : Interreg IIIA, "Tolérancement des systèmes assemblés", qui est une collaboration France-Suisse. Cette collaboration est à deux niveaux :

- une collaboration de partenaires universitaires, entre les laboratoires :
 - SYMME (**S**ystème et **M**atériaux pour la **M**écatronique, fusion en 2006 du LAIMAN et du LMéca) de l'école d'ingénieurs Polytech'Savoie (fusion en 2006 de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs d'Annecy et de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Chambéry)
 - LPM (**L**aboratoire de **P**roduction **M**icrotechnique) de l'EPFL (**E**cole **P**olytechnique **F**édérale de **L**ausanne).
- une collaboration avec des partenaires industriels dont :
 - coté français : Tefal, Dassault Aviation, Somfy, le Cern
 - coté suisse : Symbios, Audemars Piguet,

Ce projet de collaboration européenne Interreg IIIA, "Tolérancement des systèmes assemblés" identifie trois situations nécessitant un approfondissement de la recherche :

- les cas limites où les méthodes actuelles de tolérancement ne traduisent pas correctement la fonctionnalité du produit,
- les modifications du système en fonctionnement,
- les cas de couplage de technologie (mécatronique).

Parmi ces trois axes identifiés, ce projet de recherche "Tolérancement des systèmes assemblés, une approche par le tolérancement inertiel et modal" se propose de traiter le premier axe. Les autres situations ont également été traitées par les partenaires dans le cadre du programme, mais ne font pas partie des travaux exposés dans le présent document.

Les cas limites des méthodes actuelles

Le tolérancement définit les limites d'acceptation des produits en vue de garantir la satisfaction du client. Cette satisfaction passe par la qualité du mécanisme. Cette qualité s'exprime au moment de l'assemblage des composants (existence du mécanisme) et par le bon fonctionnement du mécanisme tout au long de sa durée de vie (service rendu au client). Le tolérancement d'un système dans le cas de produits assemblés consiste à répondre à une double exigence contradictoire :

- assurer les fonctionnalités du produit en respectant des critères de qualités,
- garantir une production à moindre coût.

Pendant de nombreuses années, le tolérancement de produits mécaniques a spécifié des limites de variations de caractéristiques dimensionnelles (souvent uni-directionnelle) par un intervalle de tolérance. On identifie principalement deux approches de tolérancement :

- "au pire des cas", qui assure l'assemblage et la fonctionnalité du système mécanique, mais induit un coût de production plus élevé que la seconde approche,

- "statistique", qui assure un faible coût de production mais accepte des mécanismes dont la fonctionnalité n'est pas respectée.

On constate donc le principal dilemme. Ce qui peut parfois pousser à ne pas développer un produit car les tolérances garantissant la fonctionnalité sont trop exigeantes par rapport au moyen de production, et l'élargissement des tolérances crée un risque important d'obtenir du rebut.

Les modèles de tolérancement ont ensuite augmenté en complexité avec la prise en compte des défauts géométriques, donnant lieu au tolérancement 3D où les défauts de forme sont bien souvent négligés.

Les défauts de forme ne sont cependant, plus négligeables dans le cas notamment des micro-systèmes, où les défauts géométriques se confondent avec les problèmes de rugosité. C'est également le cas pour des systèmes de dimensions plus importantes lorsque la précision recherchée est de quelques microns.

Les hypothèses conventionnelles de simplification nous amènent à séparer les défauts de taille, position, forme, et texture, en prenant en compte séparément les différents modèles de comportement.

Enjeux de ce programme de recherche

Nos travaux de recherche présentent plusieurs enjeux, techniques et économiques. Dans le cycle de vie du produit, ces enjeux sont souvent présents aux mêmes niveaux car un gain de productivité peut se traduire en gain économique. On peut ainsi distinguer des enjeux entre autres aux étapes de :

- la conception : on définit un nouveau critère de spécification des tolérances en vue de libérer le concepteur du dilemme "pire des cas" ou "statistique",
- la production : l'élargissement des tolérances permet de baisser le coût de production,
- l'assemblage : une bonne maîtrise des écarts des composants permet un meilleur assemblage,
- la relation client-fournisseur : un critère univoque de qualification des lots permet d'éviter les conflits et de gagner du temps,
- la satisfaction du client : la maîtrise des écarts des composants permet de maîtriser la fonction du produit, donc de mieux satisfaire le client

Cependant, les enjeux directs de ce projet de recherche sont applicables à la phase de conception :

- Développer des produits garantissant mieux les spécifications fonctionnelles tout en donnant plus de liberté à la production,
- Permettre une meilleure modélisation du comportement lors de l'assemblage des produits,
- Mieux exprimer les besoins sur les composants (cible et écarts tolérés)

Les enjeux cités découlent d'une meilleure maîtrise des écarts autour de la cible. Certains d'entre eux, tels que la production, l'assemblage ou la relation-client fournisseur, sont traitées durant la collaboration mais ne sont pas présentés dans ce rapport.

On peut notamment distinguer une forte préoccupation des nos partenaires scientifiques suisses sur la problématiques de l'assemblage [Jacot, 2000], et des micro-systèmes [Benmayor 2000], [Koelemeijer 2002], [Bourgeois 2007].

Déroulement du projet de recherche

L'approche que nous proposons d'aborder dans le présent projet de recherche consiste dans une étude couplée des modèles, c'est-à-dire à prendre en compte simultanément les différentes contraintes. Pour cela, nous envisageons de développer une méthode de tolérancement inertiel géométrique qui permet d'intégrer dans une seule spécification plusieurs ordres de grandeur de défauts. Pour atteindre cet objectif, nous basons nos recherches sur deux axes :

- Notre premier axe de travail consiste à explorer la voie du tolérancement inertiel afin de mieux prendre en compte les aspects de la combinatoire lors de l'assemblage de plusieurs composant. Cette récente approche de tolérancement remet en cause toute l'histoire du tolérancement par intervalle de tolérance.
- Notre second axe de recherche s'intéresse à la méthode modale de caractérisation des écarts de forme. Cette récente approche est une méthode générique de caractérisation de défaut de forme sur tout type de géométrie. Elle permet de décomposer les défauts de forme en une combinaison de défauts élémentaires.

Ce projet de recherche se présente en quatre chapitres :

- Le premier chapitre est une présentation des hypothèses et outils d'analyse du tolérancement 1D. Il contient aussi un bref état de l'art des indices de capabilité et méthodes de tolérancement 1D.
- Le second chapitre est une proposition de tolérancement 1D fondé sur le tolérancement inertiel, dont l'objectif est de garantir la conformité de la résultante d'un système assemblé.
- Le troisième chapitre est un développement de la méthode modale. On présente des évolutions de la méthode de caractérisation des écarts de forme pour se diriger vers une approche de tolérancement avec défaut de forme.
- Le quatrième et dernier chapitre de ce projet est le rapprochement des deux axes de recherche, dont l'objectif est de proposer une méthode de tolérancement 3D et de forme afin de garantir la fonctionnalité de l'assemblage.

Chapitre

1

Présentation non exhaustive du tolérancement 1D

OBJECTIF DU CHAPITRE

Nous n'avons pas cherché à faire un état de l'art du tolérancement 1D, nous proposons de présenter les outils et méthodes utilisés par la suite. Nous profitons de ce chapitre pour présenter une nouvelle méthode d'analyse graphique des différentes stratégies de tolérancement.

Ce chapitre se décompose en trois parties:

- *La première partie de ce chapitre présente le principe de la chaîne de cote 1D, l'hypothèse d'indépendance des variables, les représentations graphiques, et deux méthodes d'analyse des tolérances : le graphe (δ, σ^2) d'analyse des domaines de tolérance et une analyse des tolérances par la méthode de Monté Carlo.*
- *Dans une seconde partie, on présente quelques méthodes de synthèse des tolérances fondées sur le tolérancement traditionnel 1D. Un bilan des indices de capabilité traditionnels et des différentes méthodes de tolérancement est réalisé. Cette partie revient à présenter des méthodes garantissant un intervalle de tolérance comme condition fonctionnelle, IT_{CF} , par des intervalles de tolérance sur les composants, IT_i .*
- *La dernière partie de ce chapitre est une présentation de quelques méthodes de synthèse de tolérance fondées sur le tolérancement inertiel 1D. On présente les indices de capabilité et différentes méthodes de tolérancement dont le but est de garantir une inertie sur la CF, I_{CF} ou un intervalle de tolérance IT_{CF} , par des tolérances inertielles sur les composants, I_i .*

L'apport des nos travaux de recherche dans cette partie se résume à l'introduction d'une nouvelle méthode d'analyse des tolérances, dont l'utilisation ici sert à comparer les efficacités des stratégies de tolérancement.

Glossaire	
CF	Condition Fonctionnelle
Cp	Indice de capabilité de la dispersion instantanée traditionnelle ou inertiel
Cpi	Indice de capabilité inertiel
Cpk	Indice de capabilité de respect de l'intervalle de tolérance
Cpk_{ass}	Indice Cpk de la résultante de l'assemblage
Cpk_{CF}	Valeur fonctionnelle de l'indice Cpk de la résultante à respecter sur l' IT_{CF}
Cpk_i	Indice de capabilité Cpk du composant i
Cpm	Indice de capabilité de Taguchi
$Cpmk$	Indice de capabilité combinant le Cpm et le Cpk
f	Coefficient augmenté utilisé pour le tolérancement traditionnel statistique augmenté
h_{sommet}	Hauteur du sommet de la gaussienne équivalente de moyenne δ et écart-type σ
I_{ass}	Inertie de la résultante de l'assemblage
I_{CF}	Tolérance inertielle de la CF
I_i	Tolérance inertielle du composant i
IT_{CF}	Intervalle de tolérance de la CF de l'assemblage
IT_{Xi}	Intervalle de tolérance du composant i
IT_Y	Intervalle de tolérance résultant de l'assemblage
MC	Monte Carlo
n	Nombre de composants dans la chaîne de cote
$R_{exp.}$	Taux d'exploitation de la CF sous l'hypothèse de répartition uniforme
R_{HCF}	Taux de non-respect de la CF sous l'hypothèse de répartition uniforme
R_{HCF}^{MC}	Taux de non-respect de la CF par simulation de MC
TNC	Taux de Non-Conformité
TNC_{ass}	Taux de Non-Conformité de la résultante de l'assemblage
TNC_{CF}	Taux de Non-Conformité fonctionnelle à respecter sur l' IT_{CF}
TNC_{ppm}	Taux de Non-Conformité en partie par million (ppm)
TNC_{ppm}^{Sup}	Borne supérieure du TNC_{ppm} pour un indice Cpk donné
TNC_{ppm}^{Inf}	Borne inférieure du TNC_{ppm} pour un indice Cpk donné
X_i	Caractéristique du composant i de la chaîne de cote
Y	Caractéristique résultante de la chaîne de cote
α_i	Coefficient d'incidence du composant i
β_i	Indice de faisabilité du composant i
δ_{ass}	Décentrage résultant de la caractéristique résultante de l'assemblage
δ_i	Décentrage par rapport à sa cible du lot du composant i
σ_{ass}	Ecart-type résultant de la caractéristique résultante de l'assemblage
σ_i	Ecart-type du lot du composant i

1 Outil et hypothèse pour le tolérancement 1D

1.1 Chaîne de cote 1D et hypothèse d'indépendance des variables

1.1.1 Chaîne de cote 1D

Pour le tolérancement de systèmes assemblés, le problème réside dans la détermination des caractéristiques élémentaires X_i des composants dans le but d'obtenir une caractéristique finale Y sur le produit assemblé qui soit satisfaisante pour les besoins du consommateur. Dans le cas du tolérancement 1D, le lien entre la résultante de l'assemblage Y et les composants X_i est exprimé par la chaîne de cote. La chaîne de cote minimale est le plus court parcours décrivant la condition fonctionnelle n'utilisant qu'une seule fois les composants. La figure ci-dessous présente un assemblage de 5 composants, sa condition fonctionnelle et la chaîne de cote associée.

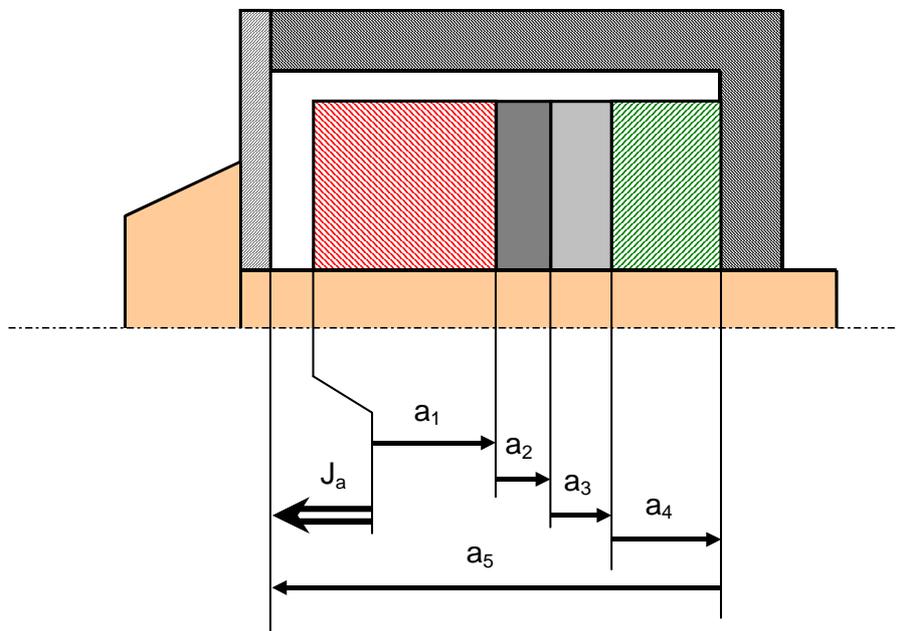


Figure 1-1 : Chaîne de cote minimale d'un assemblage de 5 composants

La chaîne de cote de cet assemblage s'écrit :

$$J_a = a_5 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \quad [1-1]$$

La cote a_5 est affectée d'un signe positif, car son influence sur la cote condition J_a est du sens de cette dernière. Les autres incidences sont négatives car les cotes sont opposées au sens de la cote condition.

Le comportement de la caractéristique finale peut être décrit de façon générale par la relation :

$$Y = \sum_i \alpha_i \cdot X_i \quad [1-2]$$

Où Y_{ass} représente la cote condition, J_a dans l'exemple, et X_i représente la cote du composant a_i .

On note α_i le coefficient d'influence, aussi appelé coefficient d'incidence, de X_i sur Y , et i est le numéro du composant compris entre 1 et n , le nombre de pièces dans la chaîne de cote. Dans l'exemple, les incidences sont toutes directes sur la chaîne de cote, on a donc $\alpha_i = -1$ ou $+1$ comme coefficient d'incidence.

Pour la suite du document, nous utiliserons les notations de l'équation [1-2] pour décrire une chaîne de cote 1D.

1.1.2 Hypothèse d'indépendance des variables

Dans le cas de production de systèmes assemblés, la majorité des composants de la chaîne de cote sont réalisés sur des systèmes de production indépendants, on peut donc considérer les dimensions des différents composants comme des variables aléatoires indépendantes.

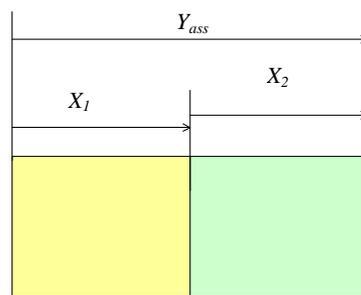


Figure 1-2 : Assemblage de deux variables aléatoires indépendantes

1.1.2.1 Simulation d'assemblages de variables aléatoires indépendantes

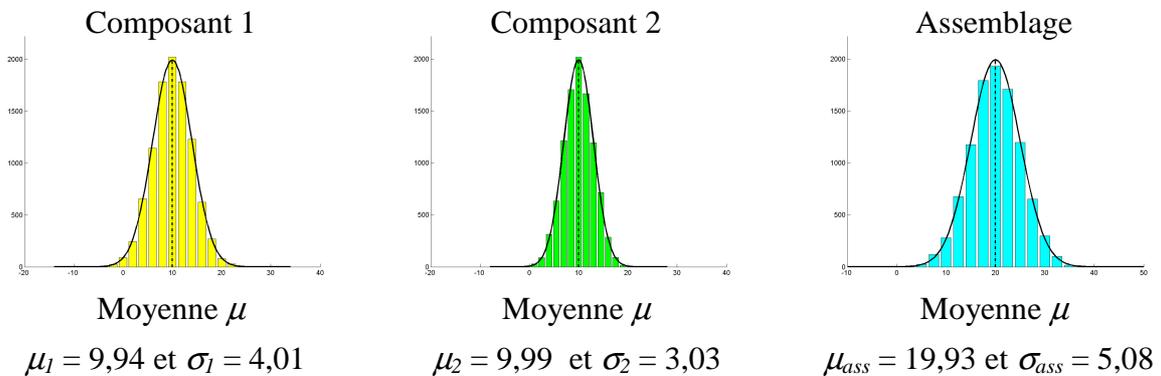


Figure 1-3 : Assemblage de deux lots de variables aléatoires indépendantes

Dans le cas d'exemple de la figure 1-2, la modélisation de l'assemblage des deux dimensions donne la relation suivante :

$$Y = X_1 + X_2 \quad [1-3]$$

Et dans le cas où les lots sont indépendants comme présenté dans la figure 1-3, on obtient :

$$\mu_Y = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} \quad [1-4]$$

Où μ_Y est la moyenne du lot de la résultante, μ_1 et μ_2 sont les moyennes respectives des lots 1 et 2.

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 \quad [1-5]$$

Où σ_Y est l'écart-type du lot résultant, σ_1 et σ_2 sont les écarts respectivement du lot 1 et du lot 2.

1.1.2.2 Simulation d'assemblages de variables aléatoires non-indépendantes

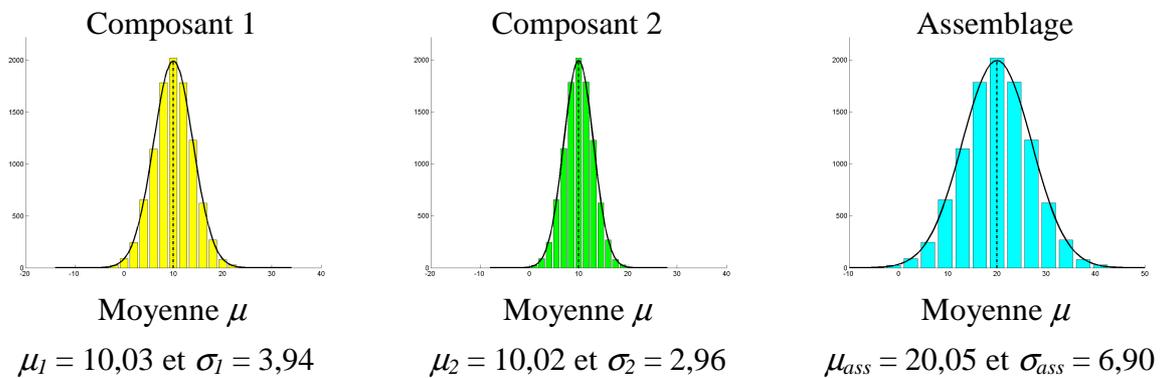


Figure 1-4 : Assemblage de deux lots de variables aléatoires non indépendantes

Cette dernière équation [1-5] peut s'écrire dans le cas général

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2.Cov_{X_1,X_2} \quad [1-6]$$

Où Cov_{X_1,X_2} représente la covariance entre les variables aléatoires X_1 et X_2 .

Lors de la production de systèmes assemblés, bien que les composants soient réalisés sur des systèmes de productions indépendants, il est possible de rencontrer des assemblages comportant des composants non indépendants. Ce cas peut notamment être rencontré lors de l'utilisation multiple d'un composant dans la chaîne de cote. Ce cas est discuté dans [Anselmetti et al, 2003] où il est présenté un assemblage comportant deux fois le même composant. Les deux composants identiques sont susceptibles d'être issus du même lot de fabrication. Et bien que les deux composants soient indépendants au sein d'un même lot, ils peuvent être corrélés d'un lot à l'autre.

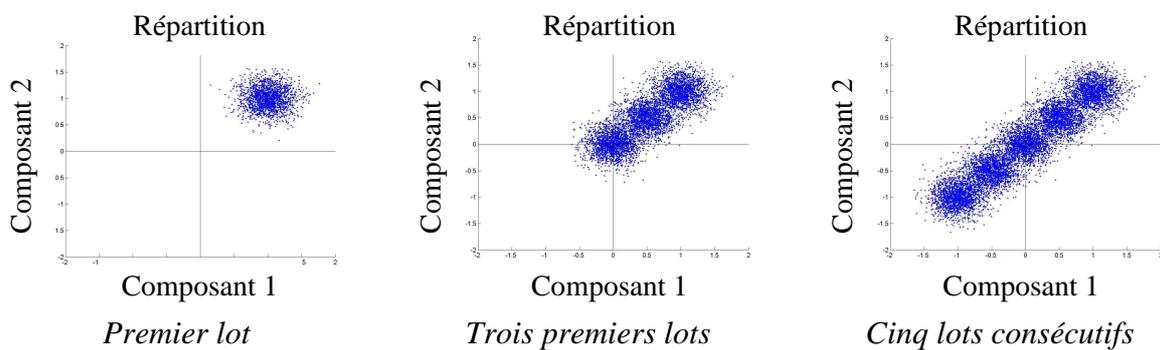


Figure 1-5 : Répartition des dimensions de deux composants du même lot de production

La première illustration de la figure 1-5 montre la répartition de deux variables aléatoires indépendantes. Ce peut être la représentation de deux composants issus d'un même lot de production. Au fur et à mesure de l'évolution de la production, la moyenne du lot évolue, faisant évoluer la moyenne des deux composants issus du même lot. Au final, en observant les répartitions des dimensions de deux composants issus de lots différents, on se rend compte que de la covariance apparaît. A l'extrême, si les capacités du moyen de production sont très élevées, la corrélation finale entre les deux composants tend vers 1. Dans ce cas, grâce à l'expression de la corrélation entre deux lots :

$$r = \frac{Cov_{X_1, X_2}}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \quad [1-7]$$

On peut tirer l'expression de la covariance pour une corrélation donnée :

$$Cov_{X_1, X_2} = r \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \quad [1-8]$$

Et lorsqu'à l'extrême la corrélation tend vers 1, la relation [1-6] tend vers :

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + 2 \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} \quad [1-9]$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\sigma_Y = \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2} \quad [1-10]$$

On vient donc de donner deux relations qui encadrent l'écart-type résultant de l'assemblage de deux composants. La première relation [1-5] définit la borne inférieure et la relation [1-10] définit la borne supérieure de l'encadrement de l'écart-type résultant.

1.1.2.3 Hypothèse simplificatrice

Pour simplifier la modélisation des chaînes de cote, ainsi que la synthèse et l'analyse des tolérances des composants, on considère dans la suite de ce projet que les variables sont toutes indépendantes. Cette hypothèse est assez proche de la réalité où les composants d'une chaîne de cote sont des composants distincts, réalisés indépendamment les uns des autres.

Pour le tolérancement 1D, deux relations permettent de lier les caractéristiques de la résultante de l'assemblage aux caractéristiques des composants. On peut calculer le décentrage par rapport à la cible et l'écart-type de la résultante de l'assemblage sous l'hypothèse d'indépendance des variables par :

$$\delta_Y = \sum_i \alpha_i \cdot \delta_{X_i} \quad [1-11]$$

Où δ_Y est le décentrage par rapport à la cible de la résultante de l'assemblage, et δ_{X_i} est le décentrage du composant i par rapport à sa cible.

$$\sigma_Y^2 = \sum_i \alpha_i^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 \quad [1-12]$$

Où σ_Y est l'écart-type de la résultante de l'assemblage, et σ_{X_i} est l'écart type du composant i . Ces deux relations donnent lieu à deux méthodes d'analyse et de synthèse de tolérances sous l'hypothèse du "pire des cas" ou "statistique".

1.1.3 Définitions

1.1.3.1 Coefficient d'incidence de la chaîne de cote

Dans la relation de la chaîne de cote exprimée par l'équation [1-2], on rappelle que α_i est le coefficient d'incidence du composant X_i sur la résultante Y de la chaîne de cote. Ces coefficients non nuls compris entre -1 et $+1$ sont utilisés pour l'analyse et la synthèse des tolérances.

On constate que la relation entre la résultante et les composants est une relation linéaire, or ce n'est pas le cas pour toutes les chaînes de cotes. Cependant, au voisinage de la cotation cible, une approximation linéaire au premier ordre est suffisante pour modéliser le comportement du système, [Graves, 1997] et [Graves, 2001].

1.1.3.2 Indice de faisabilité des tolérances des composants

Sans conditions supplémentaires, la synthèse des tolérances distribue uniformément les tolérances sur les composants. Pour permettre une répartition non uniforme, on définit les indices de faisabilité β_i , aussi appelés indices de difficulté, qui sont des réels supérieurs ou égaux à 1. On obtient ainsi une relation entre les tolérances par intervalle, IT , du type :

$$\frac{IT_{X_i}}{IT_{X_j}} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \quad [1-13]$$

Cette relation traite le cas de tolérance traditionnelle du type intervalle de tolérance. La relation est similaire avec les tolérances inertielles I . On obtient la relation suivante :

$$\frac{I_{X_i}}{I_{X_j}} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \quad [1-14]$$

1.2 Représentations graphiques des tolérances

La tolérance est une expression de la conformité des composants. Elle est traduite par une ou des relations sur les caractéristiques du lot, X_i ou δ_{X_i} et σ_{X_i} . Dans nos travaux de recherches, on travaille avec deux types d'expressions de la tolérance : la tolérance traditionnelle exprimée par l'intervalle de tolérance $IT = [Min, Max]$, et la tolérance inertielle caractérisée par un scalaire I . L'intervalle de tolérance est considéré comme symétrique, on peut donc aussi le caractériser par un scalaire t , dans ce cas on a : $IT = [-t, t]$,

L'expression la plus répandue et la plus courante actuellement est l'intervalle de tolérance, qui ne pose apparemment pas de problème de représentation, mais peut néanmoins conduire à quelques mauvaises interprétations de la conformité notamment avec l'utilisation de l'indice de capacité de Taguchi, l'indice C_{pm} .

Concernant la tolérance inertielle plus récente et par conséquent moins répandue, sa représentation graphique actuelle, un demi-cercle limitant le décentrage δ et l'écart type σ , n'est pas des plus explicites pour un esprit non averti.

L'intérêt de cette partie est de proposer des représentations graphiques permettant une meilleure interprétation de la tolérance inertielle, mais surtout permettant de comparer les variabilités permises sur le décentrage δ et l'écart types σ par les différentes expressions de la tolérance et les indices de capacité associés.

L'analyse des différentes possibilités de représentation graphique des tolérances a constitué notre première contribution. Nous présentons dans cette partie, deux méthodes capables à la fois de représenter la tolérance traditionnelle et la tolérance inertielle. L'intérêt de ces représentations graphiques est aussi de pouvoir représenter les tolérances associées aux indices de capabilité de chaque méthode de tolérancement en vue de les comparer.

Nous présentons en premier abord le graphe (δ, σ) , puis un graphe dit en U considérant une loi de distribution équivalente du lot. Ces deux représentations sont adaptées aussi bien au tolérancement traditionnel qu'inertiel. Une troisième représentation (δ, σ^2) introduite dans le paragraphe 0 permet de faire l'analyse des tolérances des différentes méthodes de tolérancement 1D par une nouvelle approche. Enfin une quatrième et dernière méthode de représentation bi-limite est présentée dans la partie 3.2.2 et utilisée uniquement pour la tolérance inertielle.

Dans cette partie, nous présentons le concept des différents outils ainsi qu'un exemple de leur utilisation. Les inéquations des indices de capabilité sont introduites dans la partie 2.1 sur le tolérancement traditionnel et dans la partie 3.3 sur le tolérancement inertiel. Néanmoins pour l'explication des outils, nous utilisons deux tolérances définies par :

- un intervalle de tolérance $IT = 0,5$ mm et un indice $Cpk = 1,2$
- une tolérance inertielle $I = 0,1$ mm et un indice $Cpi = 1$

1.2.1 Le graphe (δ, σ)

Utilisé par [Boyles, 1991], aussi présenté dans [Kotz et al, 1993], le graphe (δ, σ) est la représentation la plus proche de l'expression des tolérances. En effet, les tolérances sont exprimées par des inéquations sur les caractéristiques δ et σ du lot définies par les indices de capabilité. Par conséquent, ce graphe (δ, σ) traduit directement l'expression des tolérances dans le domaine des caractéristiques du lot défini par l'écart par rapport à la cible δ et l'écart-type σ du lot.

La figure 1-6 présente un exemple de représentation des indices de capabilité Cpk pour une tolérance traditionnelle et un indice Cpi pour une tolérance inertielle, ainsi qu'un lot représenté par un point (δ_i, σ_i) . Ici, le lot représenté se caractérise par $\delta_i = 0,05$ et $\sigma_i = 0,06$.

Cette représentation peut être satisfaisante pour une personne habituée à côtoyer les termes moyenne et écart-types. Cependant, elle peut être considérée trop éloignée de la production et de la représentation du lot par un histogramme de valeur ou une courbe gaussienne.

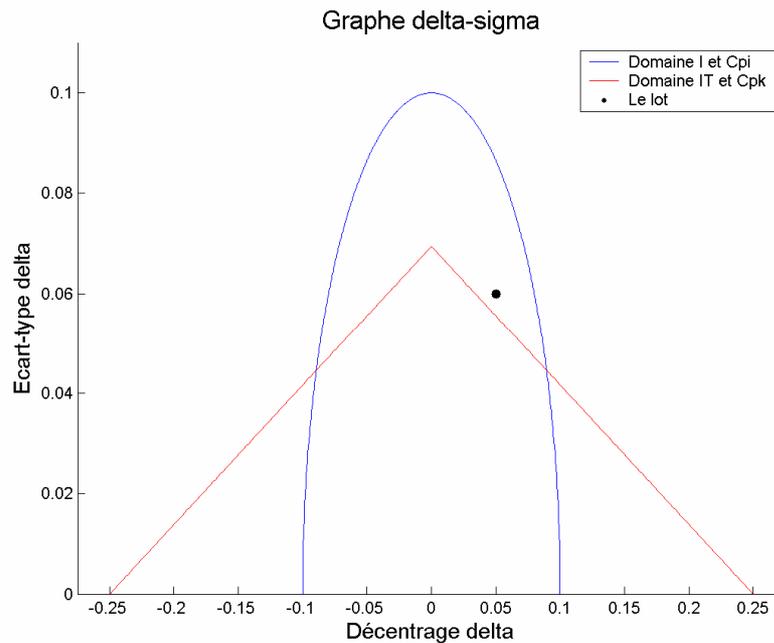


Figure 1-6 : Indice $C_{pk} = 1,2$ sur $IT = 0,5\text{mm}$ et $C_{pi} = 1$ sur $I = 0,1\text{mm}$ dans graphe (δ, σ)

1.2.2 Le graphe en U

Le graphe en U est une autre représentation des tolérances exprimées dans le graphe (δ, σ) . La représentation des tolérances ne se fait plus sur les caractéristiques du lot mais sur une caractéristique d'une loi de distribution associée au lot. On choisit une loi normale, que l'on nomme gaussienne équivalente, pour représenter les limites de tolérance. Les domaines de tolérance exprimés dans (δ, σ) sont traduits par les variations du sommet d'une loi normale de caractéristiques δ et σ .

On traduit dans l'espace $(\delta, h_{\text{sommet}})$ un domaine de tolérance exprimé dans l'espace (δ, σ) . Cette traduction se fait en exprimant la hauteur du sommet (h_{sommet}) de la gaussienne équivalente en fonction de l'écart type σ , par la relation suivante :

$$h_{\text{sommet}} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \Pi}} \quad [1-15]$$

Cette expression est le résultat de la loi de distribution normale centrée sur la moyenne.

Cette représentation permet de se rapprocher de la représentation de la tolérance traditionnelle car elle est représentée sur la loi de distribution du lot. Ce choix de loi de distribution correspond bien souvent à ce qui est fait en pratique pour la représentation de la distribution d'un lot associé à un histogramme de mesures.

La figure 1-7 est une représentation d'un indice de capabilité C_{pk} pour une tolérance traditionnelle et d'un indice de capabilité C_{pi} pour une tolérance inertielle. On représente une gaussienne équivalente, représentant les caractéristiques d'un lot. Le sommet de celle-ci est comparé aux tolérances en U correspondant aux indices C_{pk} et C_{pi} .

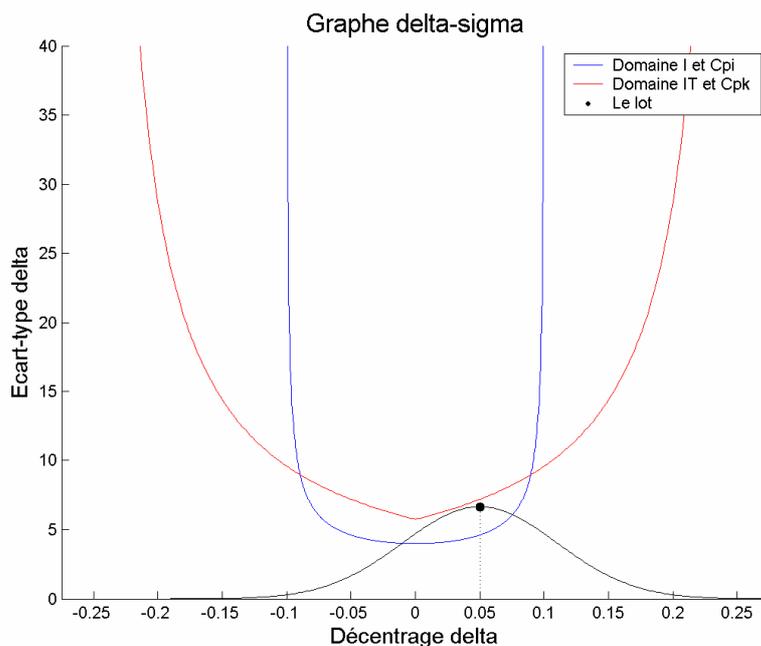


Figure 1-7 : Indice $Cpk = 1,2$ sur $IT = 0,5\text{mm}$ et $Cpi=1$ sur $I = 0,1\text{mm}$ dans le graphe en U

1.3 Le graphe (δ, σ^2) : une analyse des tolérances statistiques 1D

Dans le but d'analyser des tolérances statistiques basées sur la définition et la combinaison de domaines statistiques de tolérances, nous proposons d'utiliser un nouveau graphe : le graphe (δ, σ^2) . On nomme domaine statistique de tolérance, l'ensemble des configurations possibles d'un composant pour une tolérance donnée ou variabilité permise. La représentation d'un domaine de variabilité se fait dans le graphe des décentrages-variances, (δ, σ^2) . La représentation des tolérances dans ce nouveau graphe est similaire à la représentation dans le graphe (δ, σ) , excepté qu'ici l'écart type σ est traduit en variance σ^2 .

La représentation d'un composant dans ce graphe permet d'utiliser les deux relations statistiques issues de la chaîne de cote. En effet, l'axe des abscisses δ caractérisant les décentrages permet d'utiliser la relation [1-11], et l'axe des ordonnées σ^2 caractérisant les variances permet d'utiliser la relation [1-12]. En exprimant les caractéristiques d'un composant sous la forme d'un vecteur, il est possible de faire l'assemblage de plusieurs composants d'un assemblage par une somme vectorielle des caractéristiques sous l'hypothèse de variables indépendantes.

Il est aussi possible de faire l'assemblage des domaines de variabilité des composants par la somme de Minkowski afin d'obtenir le domaine résultant de variabilité sur la condition fonctionnelle. Ce domaine résultant des variabilités représente l'ensemble des configurations atteignables pour la résultante de l'assemblage. Il peut alors être comparé au domaine de variabilité autorisé défini par la condition fonctionnelle.

Pour illustrer la présentation et l'utilisation du graphe (δ, σ^2) comme graphe d'analyse de tolérance, on considère un système assemblé de deux composants défini par la figure 1-2. Les tolérances des composants sont définies par :

- 1) un intervalle de tolérance $IT = 0,5$ mm et un $Cpk = 1,2$ pour le premier composant,
- 2) et une tolérance inertielle $I = 0,1$ et un $Cpi = 1$ pour le second composant.

1.3.1 Assemblage vectoriel

Les relations [1-11] et [1-12] décrivant respectivement la somme des décentrages et la somme des variances représentent un système de deux équations :

$$\begin{bmatrix} \delta_Y \\ \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \alpha_i \cdot \delta_i \\ \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2 \end{bmatrix} \quad [1-16]$$

Ce qui peut aussi s'écrire par une somme de produit de matrices :

$$\begin{bmatrix} \delta_Y \\ \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_i \\ \sigma_i^2 \end{bmatrix} \quad [1-17]$$

On définit ainsi la matrice d'incidence, contenant le coefficient d'incidence α_i , qui joue sur l'influence des caractéristiques de décentration et de variances. Le produit de la matrice d'incidence par le vecteur caractéristique définit le vecteur d'influence de la caractéristique et représente son influence sur la résultante de l'assemblage.

Le principal intérêt de cette propriété n'est pas de définir une nouvelle méthode d'expression des relations statistiques de la chaîne de cote 1D. En fait, l'assemblage de lots de composants est modélisé par une somme vectorielle, et peut se représenter graphiquement.

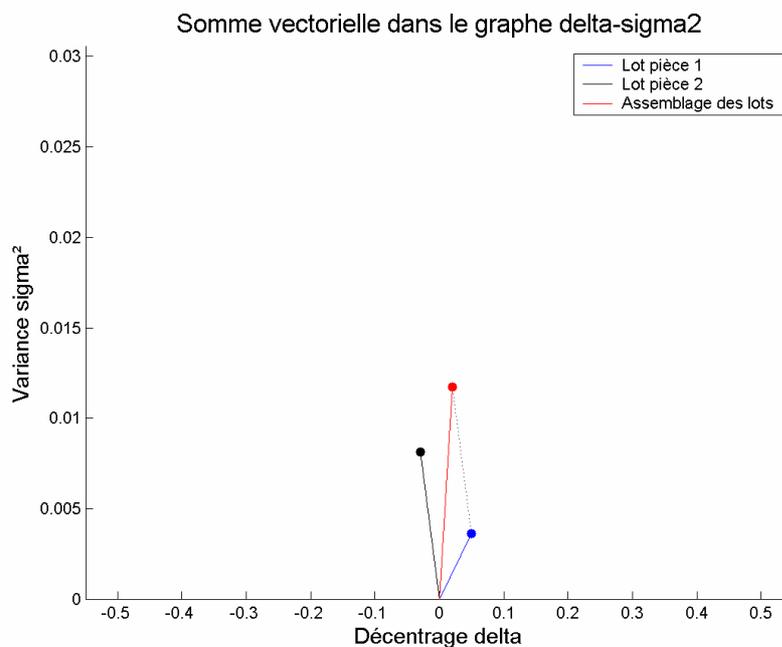


Figure 1-8 : Somme vectorielle correspondant à l'assemblage de deux composants

La figure 1-8 illustre l'assemblage vectoriel de deux composants :

- 1) un premier lot : $\delta_1 = 0,05$ et $\sigma_1 = 0,06$ soit $\sigma_1^2 = 0,0036$ pour le premier composant,
- 2) un second lot : $\delta_2 = -0,03$ et $\sigma_2 = 0,09$ soit $\sigma_2^2 = 0,0081$ pour le second composant.

La somme vectorielle donne un assemblage des deux composants qui a les caractéristiques suivantes, $\delta_{ass} = 0,02$ et $\sigma_Y = 0,108$ soit $\sigma_Y^2 = 0,0117$, ce qui peut se représenter par la somme vectorielle représentée dans la figure 1-8.

1.3.2 Domaines de tolérance et domaine résultant

1.3.2.1 Les domaines de tolérance

On appelle domaine de tolérance, la représentation de l'ensemble des variations permises sur les deux caractéristiques statistiques d'un composant : son décentrage δ_i et sa variance σ_i^2 . En fonction du type de la tolérance, un intervalle de tolérance ou une inertie et des indices de capabilités associés, on définit un domaine de tolérance de formes diverses qui seront détaillées au paragraphe 2.1 et 3.3 de ce chapitre.

On présente dans la figure 1-9 deux domaines de tolérance associés aux deux types de tolérances avec des indices de capabilité. Le premier domaine correspond à un intervalle de tolérance $IT_1=0,5$ associé à un indice de capabilité $Cpk=1,2$, et le second domaine correspond à une inertie $I_2=0,1$ associé à un indice $Cpi=1$.

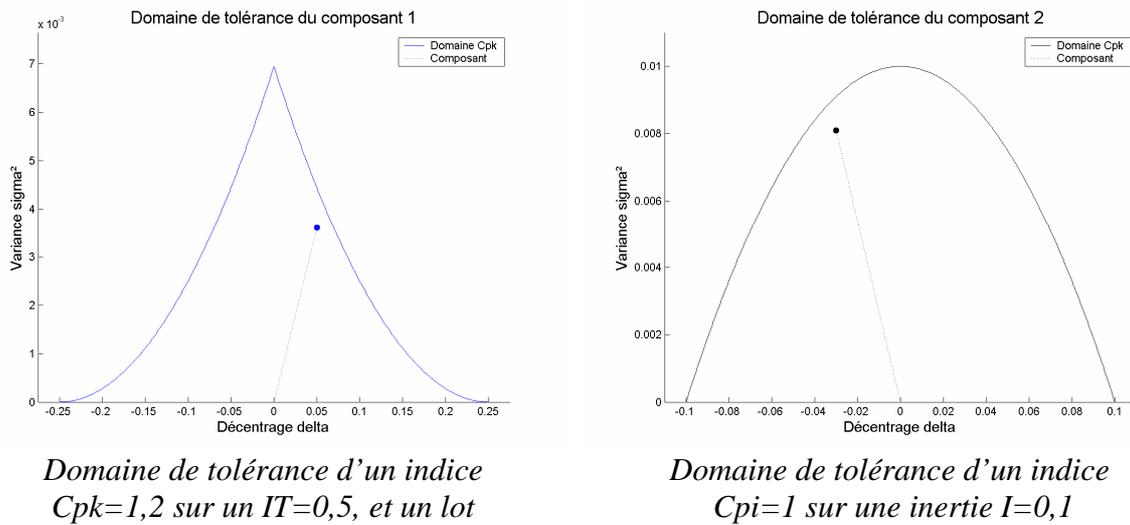


Figure 1-9 : Exemple de domaine de tolérance dans le graphe (δ, σ^2)

1.3.2.2 Domaine résultant de l'assemblage de domaines de tolérance

On peut aller plus loin que l'assemblage vectoriel des caractéristiques statistiques de composants. Grâce à la somme de Minkowski [Wikipedia, 2007 b], on peut calculer l'assemblage des domaines de tolérance, et donc trouver l'ensemble des configurations que peut atteindre l'assemblage de composants appartenant à chaque domaine de tolérance.

La somme de Minkowski

La somme de Minkowski de deux ensembles P_1 et P_2 est la somme des vecteurs position de chaque point de P_1 avec chaque point de P_2 .

$$P_1 \oplus P_2 = \{a + b / a \in P_1, b \in P_2\} \quad [1-18]$$

Graphiquement le domaine résultant de la somme de deux domaines correspond au balayage du centre du domaine P_2 sur la frontière du domaine P_1 .

Propriété de la somme de Minkowski

La somme de Minkowski est une opération :

- associative

$$(P_1 \oplus P_2) \oplus P_3 = P_1 \oplus (P_2 \oplus P_3) \quad [1-19]$$

- commutative

$$P_1 \oplus P_2 = P_2 \oplus P_1 \quad [1-20]$$

Et possède pour élément neutre le domaine [0] correspondant au domaine nul.

Procédure informatique

Bien que la définition des domaines de tolérance soit donnée par une inéquation de fonction continue, le domaine est discrétisé et décrit par un ensemble de points décrivant son contour. Le calcul du domaine résultant de la somme de Minkowski discrétisé consiste à faire le balayage d'un domaine discrétisé sur l'autre. On obtient ainsi un ensemble de configurations qui correspondent à l'assemblage vectoriel des configurations aux limites de chaque domaine. Certaines configurations obtenues définissent l'enveloppe du domaine résultant de la somme de Minkowski des deux domaines.

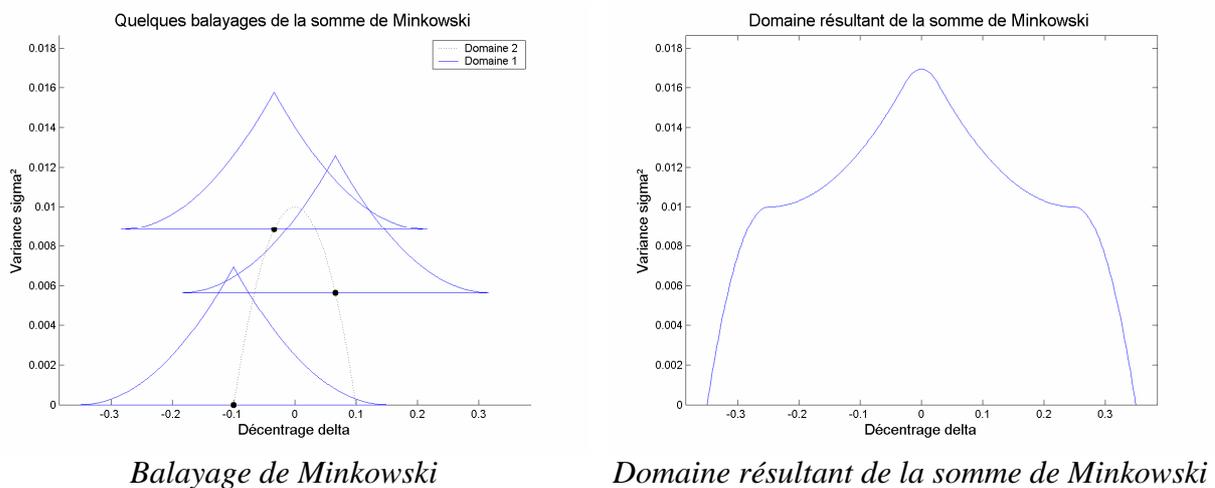


Figure 1-10 : Assemblage de domaines de tolérance par la somme de Minkowski

Une difficulté réside dans la détermination des points qui définissent le domaine résultant de la somme de Minkowski. Comme les domaines ne sont pas obligatoirement convexes, en effet le domaine de tolérance de l'indice Cpk est concave, on ne peut pas utiliser d'algorithme déterminant l'enveloppe convexe d'un nuage de point. Nous utilisons une identification de l'enveloppe en cherchant les ordonnées (variances σ^2) correspondant à des abscisses (décentrage δ) régulièrement réparties sur l'étendue de la base du domaine.

1.3.3 Les domaines de condition fonctionnelle

Au même titre que les domaines de variabilité des tolérances, on peut associer un domaine d'acceptation à la condition fonctionnelle de la résultante d'assemblage. On va se réduire à deux cas pour l'expression de la CF , soit un indice Cpk_{CF} minimum sur un IT_{CF} , soit un TNC_{CF} maximum sur un IT_{CF} . Dans ces deux cas, la CF est traduite en domaine de variabilité acceptable sur la résultante de l'assemblage dans le graphe (δ, σ^2) , que l'on détaillera au paragraphe 2.2 et 3.4. On présente ici un domaine d'acceptation défini par un $Cpk_{CF} = 1.16$ sur un $IT_{CF} = 1\text{mm}$.

On peut constater sur la figure 1-11 que le domaine résultant dépasse légèrement le domaine CF . Cela signifie que certaines configurations d'assemblage des composants ne garantissent pas la CF .

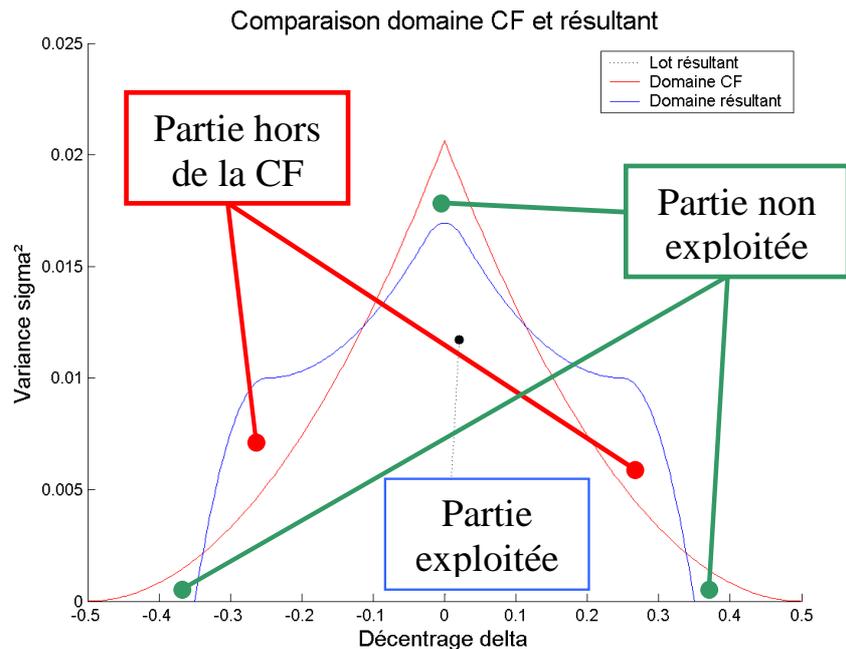


Figure 1-11 : Qualification de l'analyse des tolérances

Pour la suite, nous allons présenter deux méthodes permettant de caractériser les risques engendrés par les méthodes de tolérancement :

- la méthode des aires,
- la méthode de Monte Carlo.

1.4 Analyse et comparaison des méthodes de tolérancement : la méthode des aires

Cette partie présente une première approche de comparaison des méthodes de tolérancement que l'on nomme méthode des aires. L'intérêt principal de ce graphe (δ, σ^2) est de pouvoir calculer le domaine résultant de l'analyse des tolérances des composants. L'intérêt de l'analyse des tolérances est de comparer le domaine résultant des tolérances des composants au domaine d'acceptabilité définie par la *CF*. On peut ainsi juger de l'efficacité d'une méthode de tolérancement en terme de respect de la *CF*.

Concrètement, si le domaine résultant est totalement inclus dans le domaine de la *CF*, alors le tolérancement étudié garantit le respect de la *CF*. Par contre, s'il le dépasse, alors le tolérancement proposé comporte des configurations à risque qui ne garantissent pas la *CF*.

1.4.1 Hypothèse de répartition uniforme des résultantes d'assemblage

Le domaine résultant d'analyse des tolérances représente l'ensemble des configurations possibles de la résultante d'assemblage. Ne sachant pas a priori comment se répartissent les résultantes, on suppose une répartition uniforme dans le domaine résultant.

Le domaine de la *CF* définit l'ensemble des configurations acceptables pour la résultante de l'assemblage. On considère que toutes ces configurations sont acceptables quelles que soient leurs places dans le domaine. On considère donc que la répartition des assemblages est uniforme dans le domaine de la *CF*.

L'intérêt de cette hypothèse de répartition uniforme permet de simplifier le calcul du nombre de configurations par un calcul d'aire d'où le nom de la méthode.

1.4.2 Indices de qualification de la méthode de tolérancement

Comme on peut le constater dans la figure 1-11, il existe trois sous-domaines lors de la qualification de l'analyse des tolérances par rapport à la CF . En effet, le domaine résultant de l'analyse des tolérances n'est pas forcément inclus dans le domaine CF , on trouve donc une partie du domaine résultant hors de la CF . Il existe aussi une partie du domaine CF qui n'est pas exploitée par le domaine résultant. Et enfin la troisième partie correspond à la partie commune du domaine CF et du domaine résultant, qui est la partie exploitée par le tolérancement.

Cette troisième partie doit être la plus grande proportionnellement au domaine CF . On s'attache à la qualification de la partie du domaine résultant hors du domaine CF , et de la partie du domaine CF exploitée par le domaine résultant.

1.4.2.1 Indice R_{HCF} , ratio de la partie hors de la CF

Pour juger du respect de la CF , nous proposons de calculer un indice qui qualifie le ratio du domaine résultant qui se trouve hors de la CF , R_{HCF} . Le calcul de cet indice R_{HCF} correspond au ratio de la surface du domaine résultant qui se trouve hors du domaine CF sur la surface entière du domaine résultant. On a ainsi :

$$R_{HCF} = \frac{S_{HCF}}{S_{CF}} \quad [1-21]$$

Où S_{HCF} correspond à la surface du domaine résultant qui est hors du domaine CF , et S_{CF} correspond à la surface entière du domaine CF .

Cet indice R_{HCF} correspond à la probabilité d'avoir un lot d'assemblage résultant hors de la CF sous l'hypothèse d'une répartition uniforme des assemblages.

Dans l'exemple présenté dans cette partie, l'indice R_{HCF} vaut $R_{HCF} = 18,9\%$.

1.4.2.2 Indice R_{exp} , ratio de la partie exploitée de la CF

On peut aussi juger de la proportion du domaine CF qui est exploité par le domaine résultant. On définit ainsi l'indice R_{exp} , qui correspond au ratio de la surface du domaine résultant inclus dans le domaine CF sur la surface entière du domaine CF . On définit ainsi :

$$R_{exp} = \frac{S_{Res.} - S_{HCF}}{S_{CF}} \quad [1-22]$$

Où S_{CF} correspond à l'aire entière du domaine CF , $S_{Res.}$ correspond à l'aire entière du domaine résultant de l'analyse des tolérances et S_{HCF} est la surface du domaine résultant hors du domaine CF .

Dans l'exemple présenté dans cette partie, l'indice R_{exp} vaut $R_{exp} = 91,8\%$.

1.5 Une analyse des tolérances 1D par simulation de Monte Carlo

On peut reprocher à l'analyse des domaines de tolérance de ne pas considérer l'aspect probabiliste de la répartition aléatoire des décentrages des composants lors de l'assemblage. En effet, l'analyse des tolérances par le graphe (δ, σ^2) détermine le domaine résultant de l'analyse des tolérances, ce domaine contient toutes les configurations possibles. Or, on se doute que toutes ces configurations résultantes n'ont pas la même probabilité d'apparaître lors de l'assemblage des composants, même réparties uniformément dans leurs domaines.

Pour avoir un aperçu de la répartition des assemblages dans le domaine de la CF , on utilise la simulation de Monte Carlo. On considère deux hypothèses de répartition des lots de composant dans leur domaine de tolérance exprimé dans le graphe (δ, σ^2) :

- une première hypothèse de répartition uniforme dans le domaine,
- une seconde hypothèse de répartition sur la frontière du domaine.

D'autres approches considèrent des répartitions différentes du type probabiliste uniforme, normale centrée etc. [Anselmetti et al, 2003] qui font parti des perspectives de nos travaux.

On assemble alors aléatoirement un certain nombre de chaque composant définissant ainsi autant d'assemblages, ces derniers ne sont pas répartis uniformément dans le domaine résultant. L'aspect aléatoire est donc pris en compte par le tirage de Monte Carlo.

1.5.1 Tirage uniforme dans les domaines de tolérance

La répartition des lots de composants dans leurs domaines de tolérance n'étant pas connue à priori, on choisit une répartition uniforme dans leur domaine exprimé dans le graphe (δ, σ^2) .

1.5.1.1 Justification d'un tirage uniforme dans (δ, σ^2)

Le choix d'un tirage uniforme dans le domaine (δ, σ^2) de tolérance peut surprendre principalement pour deux raisons :

- la répartition des variances (σ^2) étant uniforme, la répartition des écarts types (σ) , ne l'est pas alors qu'on travaille fréquemment dans l'espace (δ, σ) .
- on peut simuler des lots de variances (σ^2) quasiment nulles alors que ce cas est très peu probable.

On justifie ce choix d'un tirage uniforme dans le domaine (δ, σ^2) pour assurer la cohérence entre les deux méthodes d'analyse que sont la méthode des aires et la méthode de Monte Carlo.

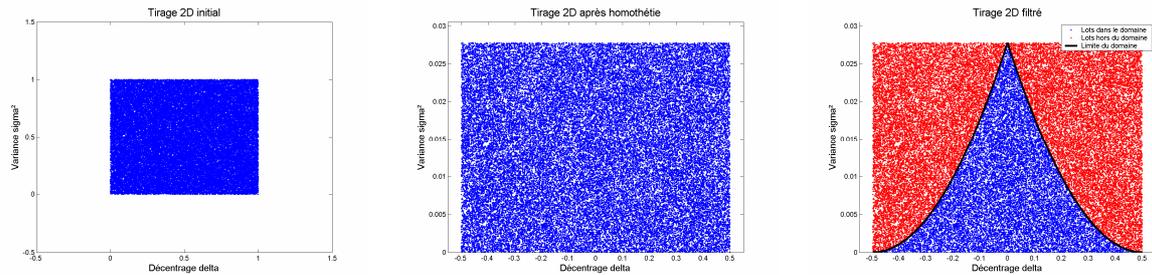
Ainsi en comparant un domaine CF et un domaine résultant dont les caractéristiques seraient réparties uniformément, le calcul des indices de qualité R_{HCF} et $R_{exp.}$ est identique par les deux méthodes de comparaison des surfaces ou de tirage aléatoire.

1.5.1.2 Une répartition uniforme dans les domaines de tolérance

La première étape de notre application de la simulation de Monte Carlo est de construire des tirages aléatoires uniformes dans les domaines de tolérance. On fait l'hypothèse d'être en possession d'un générateur aléatoire uniforme sur deux dimensions de bonne qualité, ainsi on s'affranchit du développement d'un tel générateur. Connaissant la forme du domaine de tolérance du composant, on connaît les bornes *mini* et *maxi* de variation du décentrage δ , bornes symétriques car les tolérances sont symétriques. On connaît aussi les bornes des variations de la variance σ^2 , positive et inférieure à la variance maximale.

Le générateur aléatoire retourne un ensemble de points dans le domaine 2D uniformément répartis dans un carré $[0,1]^2$. Grâce à une translation et une homothétie axiale, on transforme le domaine initial en un domaine carré contenant le domaine de tolérance du composant. On obtient ainsi un ensemble de points uniformément répartis dans tout le domaine de tolérance, mais aussi quelques points en dehors de ce domaine. On opère alors un tri dont le but est de garder les points conformes à la tolérance, donc à l'intérieur du domaine.

Si le nombre de points aléatoires restant dans le domaine de tolérance est inférieur à la taille de la simulation, on répète cette opération en concaténant les listes de points aléatoires. Pour chaque domaine de tolérance, les composants répartis uniformément dans la tolérance sont stockés dans une matrice de m lignes et 2 colonnes, où m représente la dimension du tirage aléatoire, la première colonne contient les décentrages et la seconde contient les variances.



Création domaine carré du générateur aléatoire

Transformation pour trouver le domaine carré contenant le domaine de tolérance

Tri pour obtenir une répartition uniforme dans le domaine de tolérance

Figure 1-12 : Obtention d'une répartition uniforme dans le domaine de tolérance

1.5.1.3 Assemblage des composants aléatoires

Les composants aléatoires de moyenne et de variance des composants du système sont classés dans un vecteur m lignes et 2 colonnes. La simulation d'assemblage de lots de composants revient à faire la somme matricielle des différents vecteurs $(m,2)$ de chaque composant pour ainsi obtenir des lots de résultantes d'assemblage. Le lot résultant est aussi décrite par un vecteur $(m,2)$ dont la première colonne correspond aux moyennes des lots résultants, et la seconde colonne correspond à leurs variances.

En cas d'incidence non directe d'un composant ($|\alpha_i| \neq 1$), le vecteur du composant $(m,2)$ est multiplié par sa matrice d'incidence $(2,2)$ pour obtenir le vecteur d'influence du composant sur la résultante, comme défini au paragraphe 1.3.1.

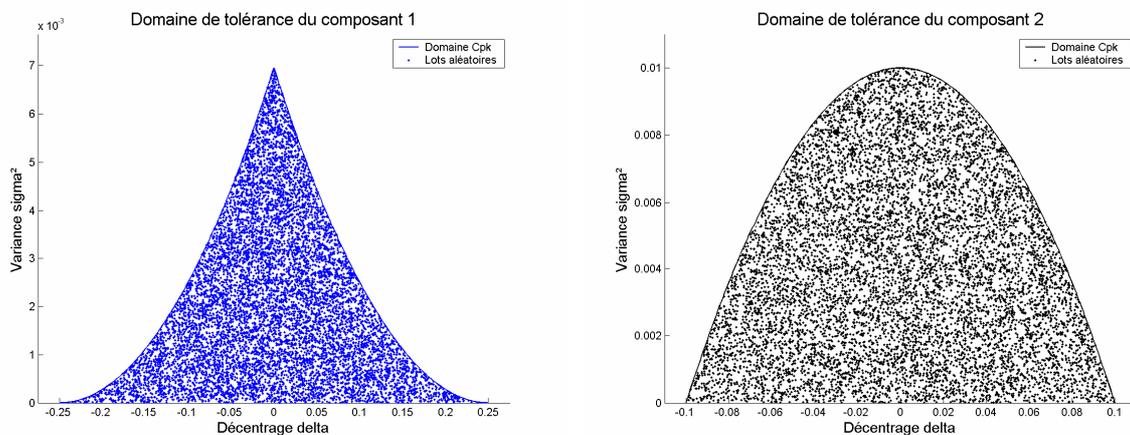


Figure 1-13 : Tirage de lots des composants dans leurs domaines de tolérance

Bien que la répartition des composants soit uniforme dans son domaine de tolérance, la résultante de l'assemblage n'est pas répartie uniformément, ce qu'on observe sur l'exemple de la figure 1-14.

On propose deux méthodes pour caractériser la répartition des assemblages dans le domaine résultant qui sont détaillées au paragraphe 1.5.3.

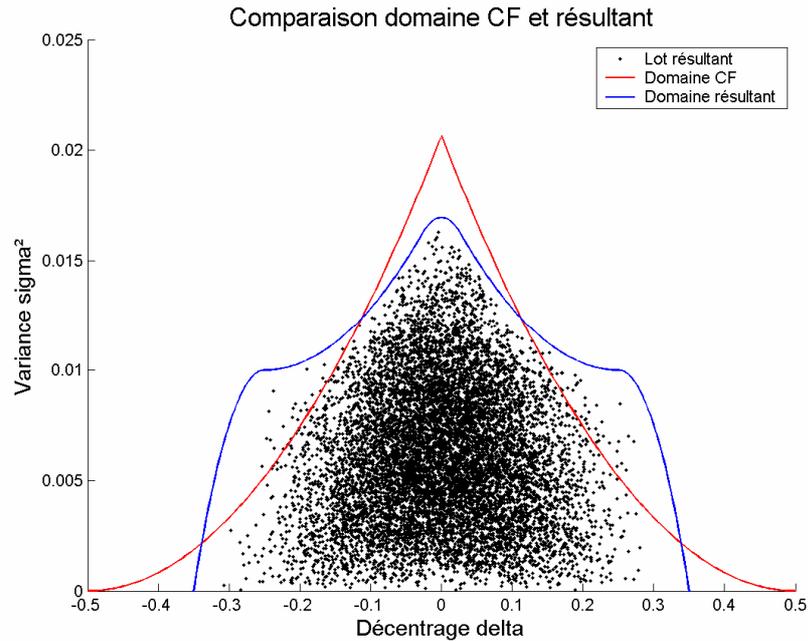


Figure 1-14 : Assemblage de lots de composants uniformément répartis dans leurs domaines de tolérance

1.5.2 Tirage uniforme sur la limite du domaine de tolérance

La partie 1.5.1 suppose que les composants sont uniformément répartis dans le domaine de tolérance, ce qui équivaut à tester l'ensemble des configurations possibles des composants, y compris celles avec un décalage faible et une faible dispersion, donc loin de la limite de capabilité.

De ce fait, cette partie considère que tous les lots de composants sont en limite de capabilité. On évalue ainsi l'assemblage des composants d'un point de vue plus pessimiste que précédemment, ce qui permet d'obtenir une seconde borne permettant d'encadrer du côté défavorable les résultats des simulations de *MC*.

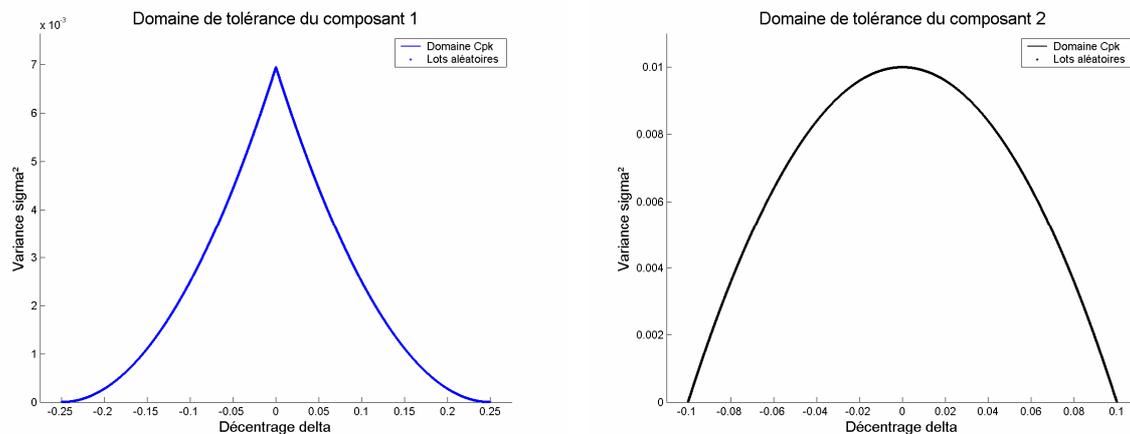


Figure 1-15 : Tirage de lots des composants en limite de leurs domaines de tolérance

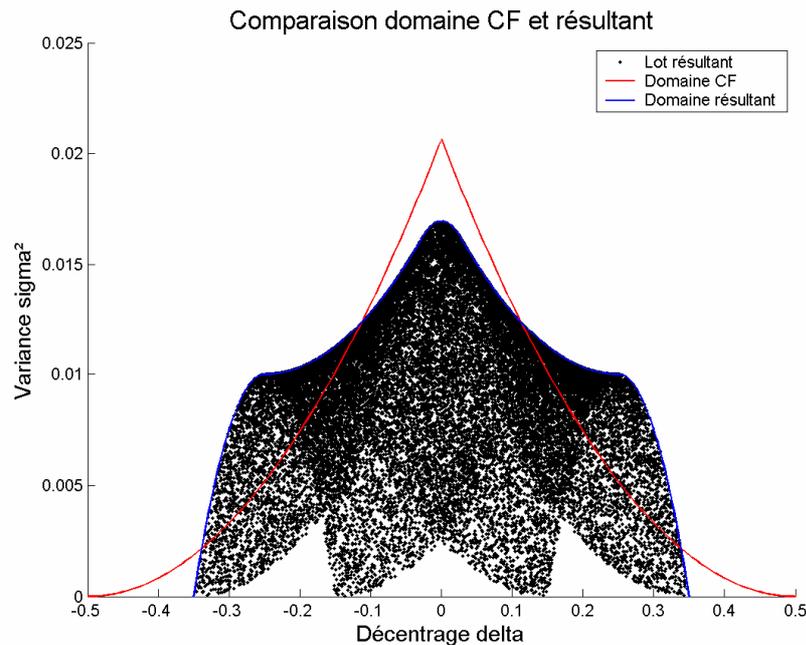


Figure 1-16 : Assemblage de lots de composants en limite de leurs domaines de tolérance

La figure 1-15 présente les lots de deux composants en limite de capabilité. Tous les lots des composants sont répartis sur la limite supérieure du domaine. Le tirage aléatoire se fait en deux étapes.

- on tire d'abord une répartition uniforme des décentrages de lot du composant dans la gamme de décentrage possible,
- on associe ensuite les variances correspondantes aux décentrages grâce à la définition mathématique de la frontière.

Les assemblages des lots de composants se font par la méthode définie dans la partie 1.5.1.3. Ils sont représentés par les points noirs, lots résultants, en superposition du domaine *CF* en rouge sur la figure 1-16.

On remarque une répartition particulière qui est similaire au balayage d'un domaine sur l'autre pour le calcul de la somme de Minkowski. Cela est dû au fait que les lots de composants sont en limite de capabilité, donc sur les frontières des domaines, d'où les lots résultants se trouvent sur ce balayage des domaines.

1.5.3 Qualification de la méthode de tolérancement

A partir de la figure 1-13 et de la figure 1-15, on peut observer la qualité et les risques engendrés par l'assemblage de tolérances suivant différentes hypothèses. Cependant, l'interprétation n'est pas évidente : pour avoir une bonne estimation des répartitions, il faut augmenter la taille de la simulation, ce qui équivaut à augmenter le nombre de points en risquant de masquer la lisibilité de la figure.

On propose donc une autre approche qui consiste à trier et classer les lots résultants en fonction de critère de qualité. On choisit comme critère l'indice de capabilité résultant Cpk_{ass} et le taux de non-conformité TNC_{ass} . On représente enfin les résultats sous forme d'histogramme.

1.5.3.1 Histogramme des Cpk_{ass} des assemblages résultants

Le premier traitement mis en œuvre pour qualifier la répartition des lots résultants consiste à les classer par leur indice de capacité Cpk_{ass} . On choisit de travailler sur l'indice Cpk pour deux raisons principales :

- c'est l'indice de capacité le plus couramment employé, il est donc connu du plus grand nombre,
- il permet de qualifier le respect de l'intervalle de tolérance de la CF . Cette idée est discutée dans la partie 2.1.2.2 de la page 28.

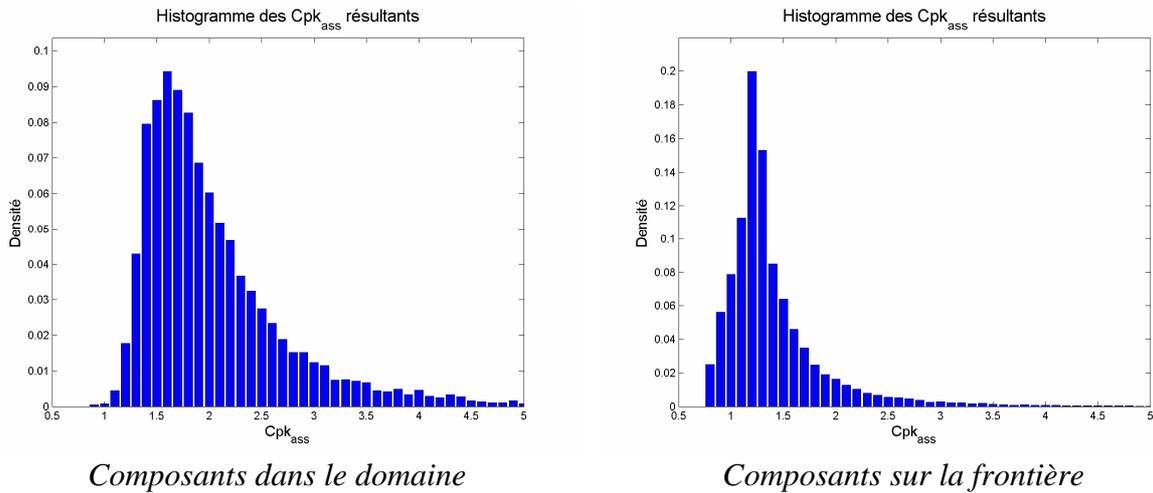


Figure 1-17 : Répartition des indices de capacité Cpk_{ass} des lots résultants d'assemblages

Cette première représentation permet d'estimer, suivant l'hypothèse considérée, la répartition des assemblages suivant le critère Cpk_{ass} . Dans le cas présenté, on peut lire que le minimum de l'indice Cpk_{ass} qui peut être atteint est $Cpk_{ass}^{Min} = 0,8$.

1.5.3.2 Histogramme des TNC_{ass} des assemblages résultants

La seconde interprétation possible est l'utilisation du critère Taux de Non-Conformité, le TNC_{ass} . Bien que le TNC puisse être lié à l'indice de capacité Cpk , il semble tout aussi important voire plus explicite pour la qualification de la qualité d'un assemblage. En effet, le but de tolérancement est de garantir le respect de la CF pour le plus grand nombre de mécanismes.

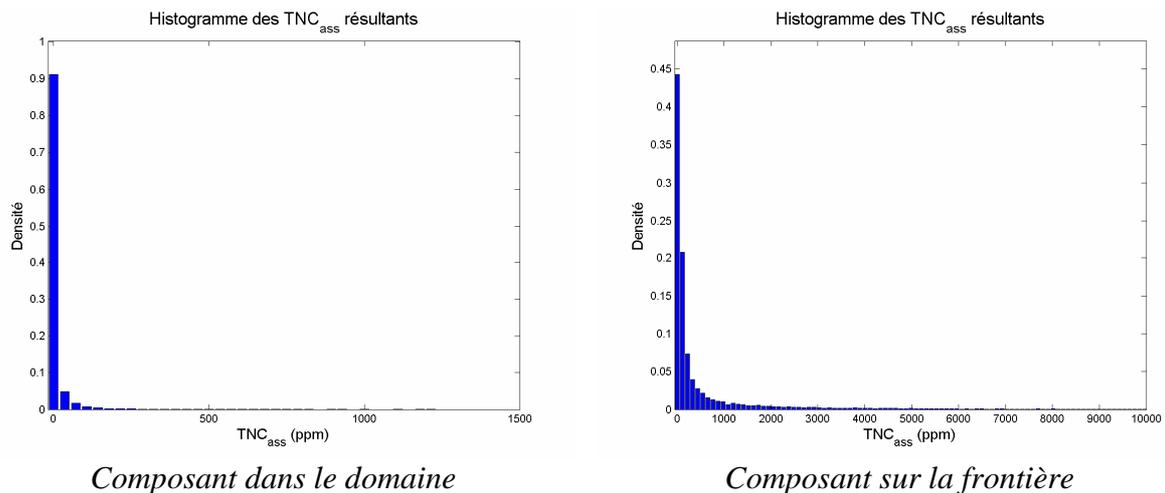


Figure 1-18 : Répartition des TNC_{ass} des lots résultants d'assemblages

On fait le choix de considérer l'hypothèse simplificatrice de calculer le TNC à partir d'une loi de distribution normale, ce choix est discuté dans la partie 3.1 du chapitre 2.

On présente donc dans la figure 1-18, le classement des lots d'assemblages résultants par leur TNC_{ass} . On peut s'apercevoir des différences de représentation entre les deux indices de qualité Cpk et TNC .

L'interprétation des résultats par les TNC n'est pas évident lorsque la condition fonctionnelle est mal respectée. Le TNC maximal pour certaines configurations peut être très élevé imposant un écart important de représentation entre les différentes hypothèses, ce qui n'apparaît pas avec l'indice de qualité Cpk . Cependant, le TNC offre une meilleure estimation du respect de la CF .

1.5.3.3 Probabilité d'occurrence du critère de qualité

Une troisième interprétation qui est rendue possible grâce aux histogrammes est de travailler sur les probabilités d'occurrence de la qualité. Le but est de pouvoir évaluer l'occurrence d'une certaine qualité ou non-qualité.

Pour les histogrammes utilisant l'indice de qualité Cpk , dans ce cas d'application et sous l'hypothèse de composants en limite de capacité, on constate que la probabilité d'obtenir un indice de capacité inférieur à $Cpk_{ass} = 1$ est de l'ordre de 8%.

Pour les histogrammes des TNC_{ass} , on remarque que dans plus de 90% des cas en répartition uniforme dans la tolérance le TNC_{ass} résultants est nul, alors que cette occurrence chute à moins de 45% des cas sous l'hypothèse de composants en limite de capacité.

Cette troisième interprétation des résultats des simulations de MC sera utilisée dans le chapitre 2 lorsqu'on évaluera le risque de non-respect de la CF en vue d'élargir les tolérances en considérant un risque.

1.5.4 Indice de qualification de la méthode de tolérancement

On reprend ici l'idée développée dans la partie 1.4.2 qui considère un indice R_{HCF} de qualification de la méthode de tolérancement pour estimer le risque d'être hors du domaine CF . On définit ici un nouvel indice R_{HCF}^{MC} qui qualifie le non-respect de la CF par l'analyse aléatoire de MC des tolérances. On ne peut redéfinir que cet indice car l'autre indice R_{exp} , qualifiant la partie exploitée de la CF n'a de sens qu'avec le calcul du domaine résultant. On définit l'indice R_{HCF}^{MC} comme le ratio entre le nombre d'assemblages résultants hors de la CF sur le nombre total d'assemblages. On a ainsi :

$$R_{HCF}^{MC} = \frac{N_{HCF}}{N_{res.}} \quad [1-23]$$

Où N_{HCF} correspond au nombre d'assemblages résultants qui sont hors du domaine CF , et $N_{res.}$ correspond au nombre total d'assemblages résultants, soit la taille de la simulation.

Cet indice R_{HCF}^{MC} correspond à la probabilité d'avoir un assemblage résultant hors de la CF sous différentes hypothèses. Dans notre exemple :

- pour des composants uniformément répartis dans leur domaine de tolérance : $R_{HCF}^{MC} = 0,8\%$ sur une simulation de taille 300 000 tirages aléatoires (soit un écart-type de 0,03% sur le résultat),
- pour des composants uniformément répartis sur la frontière de leur domaine de tolérance : $R_{HCF}^{MC} = 28,8\%$ sur une simulation de taille 300 000 tirages aléatoires, (soit un écart-type de 0,08% sur le résultat).

Ces estimations sont des moyennes dont les écarts-types diminuent en fonction de la taille de la simulation, comme le montre [Cvetko et al, 1998] pour l'estimation d'un TNC résultant par la méthode de MC .

2 Tolérancement traditionnel 1D

Pour comparer les différentes méthodes de tolérancement que nous présentons ci-après, on choisit d'illustrer le tolérancement de chaque méthode et son domaine résultant par un exemple simple de chaîne de cote. On choisit un empilage de cinq composants présentés à la figure 1-1. La condition fonctionnelle est définie par intervalles de tolérance $IT_{CF} = 1$ mm. Les incidences des composants dans la chaîne de cote sont identiques ($\alpha_i = 1$), et les tolérances sont réparties uniformément ($\beta_i = 1$).

2.1 Indices de capabilité traditionnels et domaines associés

Afin de juger de la qualité d'un lot par rapport à sa tolérance, on définit des indices de capabilité qui comparent la qualité du lot, moyenne et écart type, à sa tolérance suivant différents critères. Les indices de capabilité retournent un scalaire dont la valeur est croissante pour une qualité croissante du lot. On peut distinguer des travaux qui présente un état de l'art de indices de capabilité, tels [Kotz et al, 1993] ou [Kotz et al, 2002].

2.1.1 L'indice C_p

2.1.1.1 Définition de l'indice C_p

L'indice C_p [Sullivan 1984] est défini par la formule suivante :

$$C_p = \frac{IT}{6.\sigma} \quad [1-24]$$

Où IT est l'intervalle de tolérance défini par une limite inférieure et une limite supérieure, $[Min, Max]$, et σ est l'écart type du lot produit.

Sous l'hypothèse habituelle de normalité de la loi de distribution du lot et d'un procédé centré au milieu de la zone de tolérance, on peut calculer le pourcentage de pièces non conformes :

$$TNC_{ppm} = 2.\Phi(1 - 3.C_p).10^6 \quad [1-25]$$

Où Φ est la fonction de distribution d'une loi normale réduite [Kotz et al, 1993].

Mais l'indice C_p compare seulement la dispersion du lot par rapport à la zone de tolérance, et ne prend pas en compte le décalage de la moyenne du lot par rapport à la cible.

2.1.1.2 Les représentations graphiques de l'indice C_p

Dans le domaine (δ, σ) , l'expression de l'indice C_p se traduit par :

$$\sigma = \frac{IT_{CF}}{6.C_p} \quad [1-26]$$

Dans le domaine (δ, σ^2) , la limite du domaine de l'indice C_p s'exprime par :

$$\sigma^2 = \left(\frac{IT_{CF}}{6.C_p} \right)^2 \quad [1-27]$$

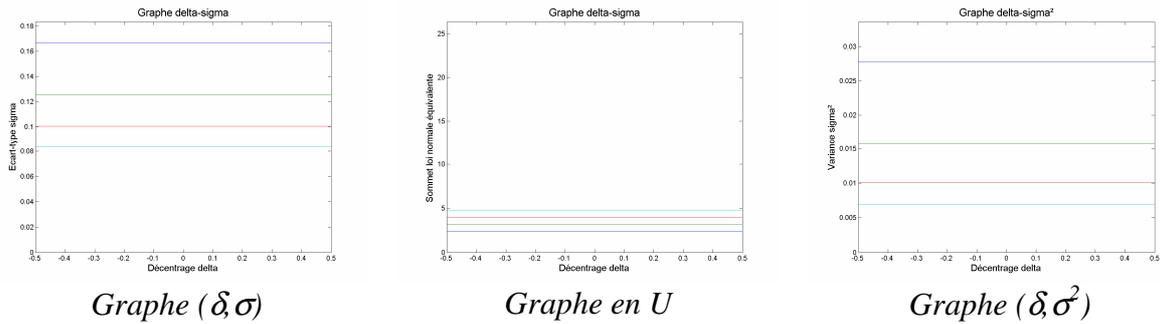


Figure 1-19 : Différentes représentations de l'indice Cp

La figure 1-19 donne la représentation dans les différents graphes d'une situation avec $Cp = 1$, $Cp = 1,33$, $Cp = 1,66$ et $Cp = 2$. On constate qu'il n'y a aucune limitation de décentrage ce qui est normal vu le rôle de l'indice Cp qui ne limite que l'écart-type.

2.1.2 L'indice Cpk

2.1.2.1 Définition de l'indice Cpk

L'indice Cpk [Kane, 1986] est défini par la formule suivante :

$$Cpk = \frac{\min\{TS - \mu; \mu - TI\}}{3 \cdot \sigma} = \frac{IT}{2} - |\delta| \quad [1-28]$$

Où TS représente la tolérance supérieure, Max, et TI représente la tolérance inférieure, Min. δ représente le décalage de la moyenne du lot par rapport à la cible.

2.1.2.2 Un indice garantissant l'intervalle de tolérance

Le fait de respecter un indice Cpk supérieur à 1 revient à garantir que le lot est dans l'intervalle de tolérance [Min, Max].

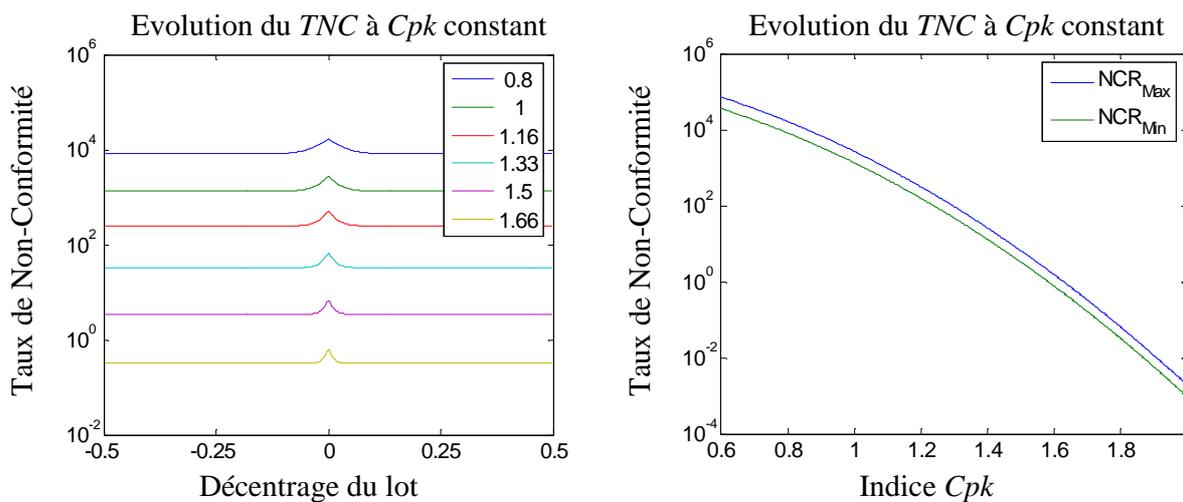


Figure 1-20 : Evolution du TNC à Cpk constant pour une loi normale

[Boyles, 1991] présente l'application de l'indice Cpk sur la loi normale. Il présente les variations du TNC pour différentes valeurs d'indice Cpk en fonction du décalage du lot. La figure suivante montre l'évolution du TNC pour différentes valeurs d'indice Cpk en fonction du décalage du lot.

On définit deux limites sur le TNC en fonction du Cpk du lot. Une limite inférieure donnée par :

$$TNC_{ppm}^{Inf} = (1 - \Phi(3.Cpk)).10^6 \quad [1-29]$$

Et une borne supérieure définie par

$$TNC_{ppm}^{Sup} = 2.(1 - \Phi(3.Cpk)).10^6 \quad [1-30]$$

2.1.2.3 Les représentations graphiques de l'indice Cpk

Dans le graphe (δ, σ) , l'indice Cpk peut s'exprimer par :

$$\sigma = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - |\delta|}{3.Cpk} \quad [1-31]$$

La limite du domaine de tolérance dans le graphe (δ, σ^2) s'exprime comme suit :

$$\sigma^2 = \left(\frac{\frac{IT_{CF}}{2} - |\delta|}{3.Cpk} \right)^2 \quad [1-32]$$

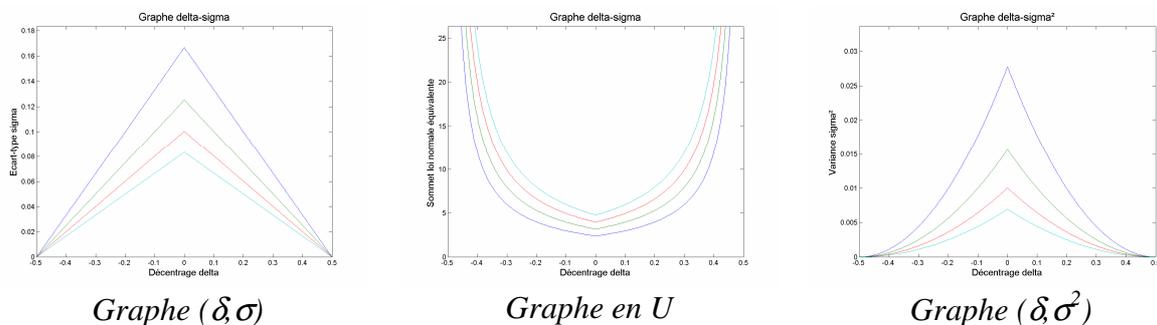


Figure 1-21 : Les différentes représentations de l'indice Cpk

La figure 1-21 donne la représentation dans les différents graphes d'une situation avec $Cpk = 1$, $Cpk = 1,33$, $Cpk = 1,66$ et $Cpk = 2$.

On constate que les décentrages maximaux sont définis par +/- le demi-intervalle de tolérance. Ainsi il est possible avec l'indice Cpk d'obtenir des composants dont la moyenne est au bord de la tolérance, cependant, l'écart-type associé est faible.

2.1.3 L'indice *Cpm*

L'indice *Cpm* [Chan et al, 1988] est aussi appelé l'indice de capabilité de Taguchi, qui est basé sur la fonction de perte de Taguchi.

2.1.3.1 Définition de l'indice *Cpm*

L'indice *Cpm* est défini dans [Boyles, 1991] par la formule suivante:

$$Cpm = \frac{IT}{6 \cdot \sqrt{\sigma^2 + \delta^2}} \quad [1-33]$$

Le fait de garantir un indice *Cpm* supérieur à 1 revient à garantir que le lot respecte la cible. La caractéristique est considérée pour elle-même mais non en fonction de son incidence dans l'assemblage dont elle fait partie. En effet, le fait de garantir des indices *Cpk* corrects sur les composants d'un assemblage ne suffit pas à garantir un indice *Cpk* correct sur la condition d'assemblage : l'indice *Cpm* semble donc mieux adapté [Parlar et al, 1999], [Denniston, 2006]

2.1.3.2 Les représentations graphiques de l'indice *Cpm*

La limite du domaine de tolérance de l'indice *Cpm* dans le graphe (δ, σ) peut s'écrire

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpm}\right)^2 - \delta^2} \quad [1-34]$$

Et dans le graphe (δ, σ^2) le domaine de tolérance est délimité par :

$$\sigma^2 = \left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpm}\right)^2 - \delta^2 \quad [1-35]$$

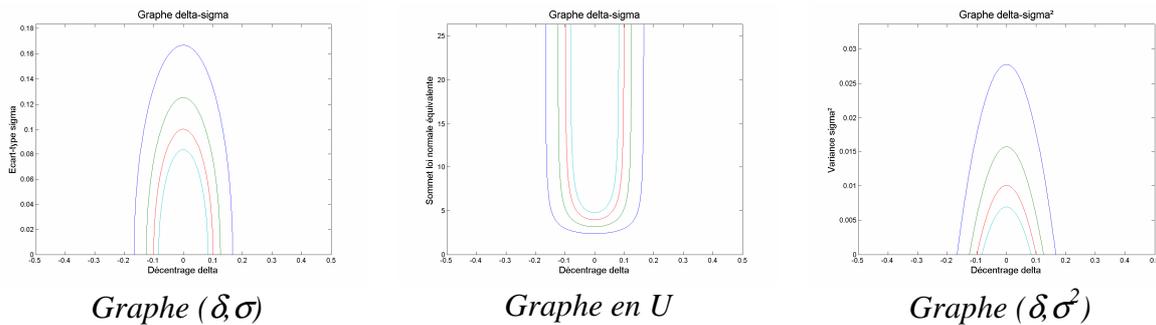


Figure 1-22 : Les différentes représentations de l'indice *Cpm*

2.1.4 L'indice *Cpmk*

L'indice *Cpmk* [Pearn et al, 1992] est défini par :

$$Cpmk = \frac{\frac{IT}{2} - |\delta|}{3 \cdot \sqrt{\sigma^2 + \delta^2}} \quad [1-36]$$

Différentes valeurs types sont proposées pour l'utilisation de cette indice de capabilité dans [Pearn et al, 2002]. Une expression de la borne supérieure du *TNC* en fonction de l'indice *Cpmk* est exprimée dans [Pearn et al, 2004] à partir de la relation présentée par [Boyles, 1991] entre l'indice *Cpk* et la borne maximum du *TNC* :

$$TNC_{ppm}^{Sup} = 2 \cdot (1 - \Phi(3 \cdot Cpmk)) \cdot 10^6 \quad [1-37]$$

2.1.4.1 Les représentations graphiques de l'indice *Cpmk*

L'expression de l'indice de capabilité *Cpmk* peut se traduire dans le graphe (δ, σ) par :

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\frac{IT_{CF}}{2} - |\delta|}{3 \cdot Cpmk} \right)^2 - \delta^2} \quad [1-38]$$

Et dans le graphe (δ, σ^2) , le domaine de tolérance défini par l'indice *Cpmk* est délimité par :

$$\sigma^2 = \left(\frac{\frac{IT_{CF}}{2} - |\delta|}{3 \cdot Cpmk} \right)^2 - \delta^2 \quad [1-39]$$

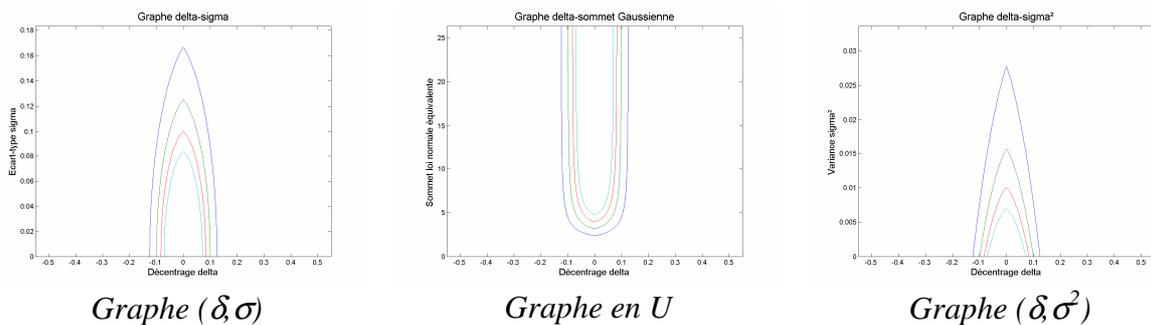


Figure 1-23 : Les différentes représentations de l'indice *Cpmk*

2.1.5 Combinaison d'indices de capabilité et domaine associé

La combinaison des indices de capabilité correspond à l'utilisation d'au moins deux indices pour la même tolérance. Ce cas est souvent rencontré dans le tolérancement traditionnel où l'intervalle de tolérance est accompagné des indices de capabilité C_p et C_{pk} . Le domaine de variabilité de la combinaison des indices de capabilité correspond à la partie commune des différents domaines, autrement dit c'est l'intersection des domaines de variabilité des différents indices de capabilité.

Dans la figure suivante sont présentés deux cas de combinaison d'indices de capabilité.

2.1.5.1 Cas 1, combinaison $C_p > 2,5$, $C_{pk} > 2$ et $C_{pm} > 1$.

Ce cas peut être une expression classique de la tolérance d'un composant d'une chaîne de cotes. Les limites de capabilité sont des limites inférieures.

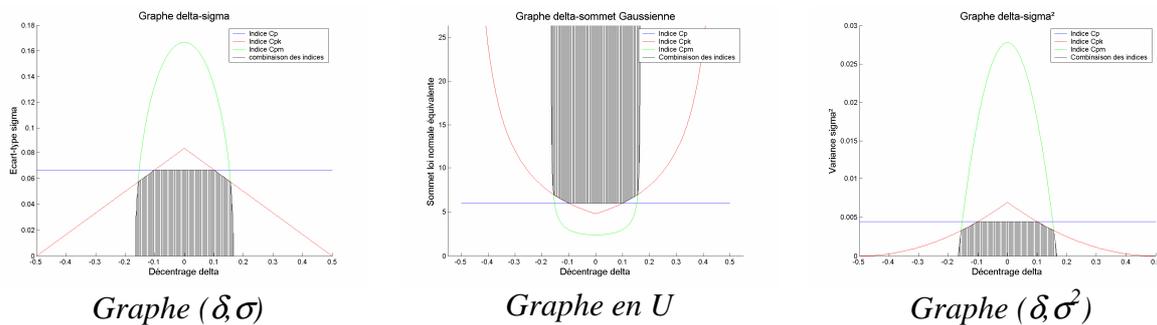


Figure 1-24 : Combinaison des indices $C_p > 2,5$, $C_{pk} > 2$ et $C_{pm} > 1$

Grâce aux représentations des domaines de tolérance, on peut juger de l'intérêt de combiner les indices de capabilité. Dans ce cas, on peut remettre en cause l'utilité de la spécification de la tolérance avec l'indice C_{pk} , vu que le domaine est principalement délimité par l'indice C_p et l'indice C_{pm} .

2.1.5.2 Cas 2, combinaison $C_p < 4$ et $C_{pk} > 1$

Ce cas est notamment rencontré pour le tolérancement statistique, afin de réduire le décentrage des composants. L'indice C_p exprime ici une limite supérieure de capabilité alors que l'indice C_{pk} exprime une limite inférieure.

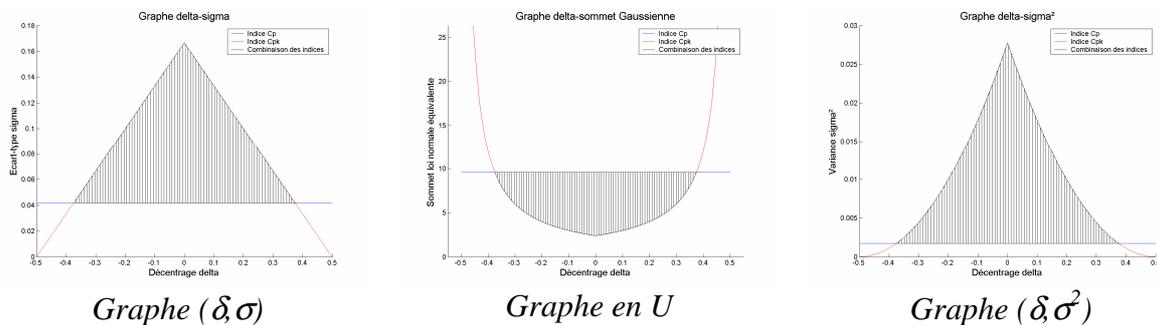


Figure 1-25 : Combinaison des indices $C_p < 4$ et $C_{pk} > 1$

On voit ici l'intérêt de combiner une limite inférieure sur l'indice de capabilité C_{pk} avec une limite supérieure sur l'indice de capabilité C_p . Le but est de limiter le décentrage maximal afin que la moyenne ne puisse pas atteindre le demi-intervalle.

Cependant, il est dommage de ne pas accepter des lots relativement centrés dont l'écart type est faible. Par conséquent, il pourrait être intéressant de remplacer cette combinaison d'indice de capabilité par l'indice Cpm qui seul limite le décentrage.

2.2 Condition fonctionnelle et son domaine d'acceptation

Dans le tolérancement traditionnel, la condition fonctionnelle est exprimée par un intervalle de tolérance IT_{CF} autour d'une cible. On a vu que l'intervalle de tolérance est garanti par l'indice de capabilité Cpk . Ainsi on propose de traduire le respect de la condition fonctionnelle définie par un IT à l'aide de l'indice Cpk . Le domaine d'acceptation correspondant à un intervalle de tolérance est décrit par l'indice $Cpk = 1$.

En considérant un indice $Cpk = 1$, cela revient à accepter six écarts types dans l'intervalle de tolérance dans le cas centré. Certains peuvent être plus exigeant et imposer huit écarts types au minimum dans l' IT_{CF} , cela revient à considérer un Cpk supérieur ou égal à $Cpk = 1,33$.

On considère donc dans un premier temps qu'une condition fonctionnelle est caractérisée par un intervalle de tolérance IT_{CF} autour de la cible, et par un indice de capabilité Cpk_{CF} . Il est maintenant possible de traduire la condition fonctionnelle en domaine d'acceptation des résultantes d'assemblage.

Pour le cas d'application de la figure 1-1 on choisit une condition fonctionnelle définie par un $IT_{CF} = 1$ mm. Sans autre indication, on considère que l'indice $Cpk_{CF} = 1$. Ainsi le domaine d'acceptation est décrit par la figure suivante.

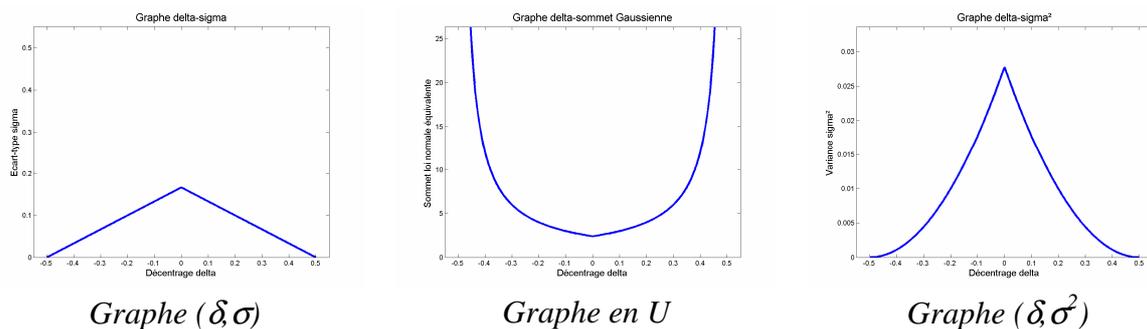


Figure 1-26 : Les différentes représentations de la condition fonctionnelle : IT_{CF}

Dans un second temps, on pourra considérer que la CF est toujours caractérisée par un intervalle de tolérance IT_{CF} autour d'une cible, mais qu'on impose une limite maximale du taux de non-conformité TNC_{CF} . Comme il existe un lien entre le TNC et le Cpk , cette seconde expression de la CF est assez similaire à celle présentée ici. Mais on se contente pour l'instant d'exprimer la CF par un IT_{CF} et un Cpk_{CF} . L'étude de la seconde expression de la CF par un TNC se fera lors du développement du tolérancement inertiel.

2.3 Tolérancement traditionnel

Le tolérancement dimensionnel traditionnel d'une caractéristique se fait par le biais de deux limites sur la caractéristique. Ces limites, supérieure et inférieure, définissent une zone de conformité de la caractéristique, représentée par un intervalle $[Min, Max]$. Sur la condition fonctionnelle, ces limites sont imposées par le concepteur autour d'une valeur de cote, aussi appelée Valeur Cible.

La conformité de la caractéristique tolérancée est jugée bonne lorsque la mesure de cette caractéristique est comprise dans l'intervalle [*Valeur Cible* + *Min*, *Valeur Cible* + *Max*]. Cet intervalle [*Min*, *Max*] sur la dimension mesurée se représente par une double frontière, et exprime graphiquement la notion de conformité d'une caractéristique par rapport à ses tolérances.

Dans le cas de tolérancement traditionnel de systèmes assemblés, trois approches sont couramment employées, celle du "pire des cas" (Worst of Case), l'approche statistique (Statistical) et l'approche "statistique augmentée" (Inflated Statistical).

Le paragraphe suivant présente brièvement les différentes méthodes de tolérancement, et leur application sur l'assemblage de cinq composants. L'application des méthodes de tolérancement sur l'exemple consiste à faire une synthèse des tolérances des composants, puis à faire l'analyse des tolérances calculées par les deux méthodes décrites précédemment, l'analyse de l'ensemble des situations possibles par la somme de Minkowski des domaines de tolérance et l'analyse par simulation de Monte Carlo.

2.3.1 Le pire des cas

L'hypothèse du pire des cas sous-entend que la condition fonctionnelle est respectée dans toutes les configurations, en particulier dans la pire configuration. Ce pire cas est identifié comme l'assemblage de composants en limite de tolérance dont le décalage est maximal, et la dispersion nulle par conséquent. Dans ce cas le décalage résultant, qui doit être compris dans le demi IT_{CF} , vaut la somme des décalages des composants, définis par le demi intervalle de tolérance.

On a donc la relation suivante, qui correspond à l'analyse des tolérances au pire des cas.

$$IT_Y = \sum_i |\alpha_i| \cdot IT_{X_i} \quad [1-40]$$

Où IT_Y représente l'intervalle de tolérance sur la condition fonctionnelle, et IT_{X_i} l'intervalle de tolérance sur les caractéristiques des composants.

On définit donc la relation permettant de faire la synthèse des tolérances des composants par :

$$IT_{X_i} = \frac{IT_Y}{\sum_i |\alpha_i|} \quad [1-41]$$

Dans le cas d'une répartition non uniforme des tolérances des composants, on utilise les indices de faisabilité β_i , la relation s'exprime alors comme :

$$IT_{X_i} = \frac{\beta_i \cdot IT_Y}{\sum_i |\alpha_i| \cdot \beta_i} \quad [1-42]$$

Dans le cas d'une répartition uniforme, tous les $\beta_i = 1$, et d'une incidence directe de tous les composants, tous les $\alpha_i = 1$, la synthèse des tolérances se calcule par la relation bien connue du tolérancement au pire des cas :

$$IT_{X_i} = \frac{IT_Y}{n} \quad [1-43]$$

Ce tolérancement présente l'avantage de respecter la condition fonctionnelle dans toutes les situations, y compris la pire configuration du tolérancement traditionnel. Par contre, ses tolérances serrées engendrent un coût élevé de production.

2.3.1.1 Le cas d'application

En s'intéressant à la synthèse des tolérances au pire des cas de l'exemple d'application, on obtient les tolérances suivantes résumées dans le tableau ci-dessous.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance IT_i	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Tableau 1-1 : Caractéristiques et tolérances au pire des cas des composants

Sans condition particulière, on considère que les intervalles de tolérances de composants sont garantis par des indices de capabilité $Cpk_i = 1$.

2.3.1.2 Analyse de l'ensemble des configurations résultantes

Ainsi, on trouve les domaines de tolérance des composants tous égaux car les tolérances sont identiques. Par ailleurs, en faisant l'analyse des domaines de tolérance, on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la condition fonctionnelle.

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la CF du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

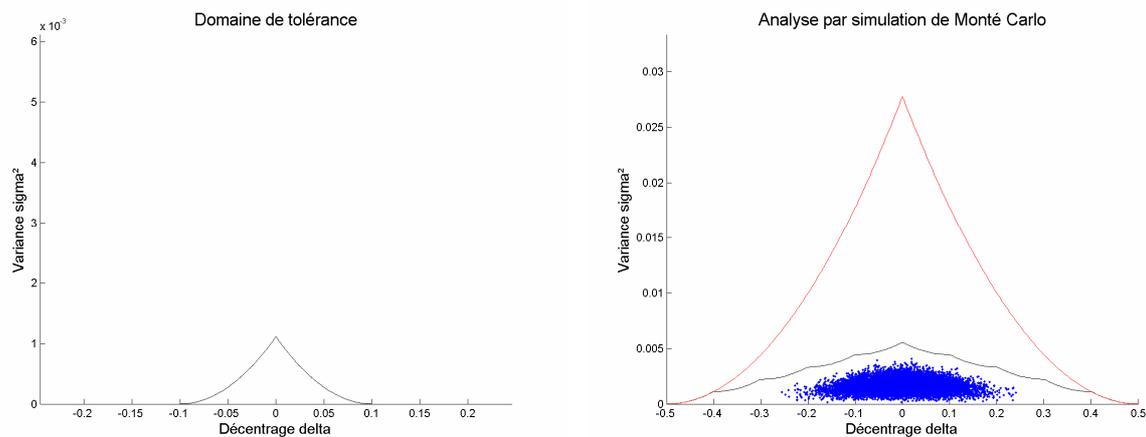


Figure 1-27 : Domaine de tolérance des composants au pire des cas, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

On constate bien que la CF est entièrement respectée par le tolérancement au pire des cas. En effet, le domaine résultant est entièrement inclus dans le domaine CF.

Dans ce cas d'application, l'indice de qualification du non respect de la CF R_{HCF} est nul car la CF est respectée. L'indice d'exploitation de la CF ici vaut $R_{expl.} = 0,28$.

L'analyse par simulation de Monte Carlo donne la répartition des assemblages résultants présentée dans la figure ci-dessous.

Conformément à l'objectif du tolérancement, aucun assemblage n'est hors du domaine d'acceptation de la CF. Par contre, on se rend compte que la combinaison aléatoire des décentrages des composants donne une répartition des assemblages proche de la cible.

2.3.2 Tolérancement statistique

Le tolérancement statistique a été développé dans le but de prendre en compte la faible probabilité d'avoir plusieurs caractéristiques en limite de leur tolérance en même temps [Shewhart, 1931], [Evans, 1975]. Sous l'hypothèse que les variables X_i sont indépendantes avec un écart type σ_i , on obtient la relation suivante définie par l'équation [1-12] :

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2} \quad [1-44]$$

Avec des tolérances proportionnelles à l'écart type [Chase et al, 1991], on obtient alors la relation suivante pour l'analyse statistique des tolérances :

$$IT_Y = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot IT_{X_i}^2} \quad [1-45]$$

Dans cette méthode de tolérancement, la considération de base est le centrage de toutes les caractéristiques des composants sur leur valeur cible.

On définit ainsi la relation permettant de faire la synthèse des tolérances statistiques des composants. Dans le cas général où la distribution des tolérances est non-uniforme, on obtient :

$$IT_{X_i} = \frac{\beta_i \cdot IT_Y}{\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \quad [1-46]$$

Dans le cas particulier où les incidences des composants sont directes ($\alpha_i = 1$), et la répartition des tolérances se fait de manière uniforme ($\beta_i = 1$), l'expression précédente se résume en :

$$IT_{X_i} = \frac{IT_Y}{\sqrt{n}} \quad [1-47]$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne garantit pas la conformité de l'assemblage selon toutes les configurations des composants. Il se peut que plusieurs caractéristiques des composants soient conformes à leurs tolérances mais que leurs décalages par rapport à leurs valeurs cibles entraînent une non-conformité de la condition finale.

2.3.2.1 Le cas d'application

Première analyse sans précaution particulière

En s'intéressant à la synthèse des tolérances statistiques de l'exemple d'application, on obtient les tolérances suivantes résumées dans le tableau ci-dessous.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance IT_i	0,447	0,447	0,447	0,447	0,447

Tableau 1-2 : Caractéristiques et tolérances statistiques des composants

Comme précédemment sans condition particulière, on considère que les intervalles de tolérances de composants sont garantis par des indices de capabilité $Cpk_i = 1$.

En faisant l'analyse des domaines de tolérance, on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la condition fonctionnelle.

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la CF du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

On constate que le tolérancement statistique sans précaution n'est pas bien adapté pour le tolérancement de la CF. On garantit le respect de la dispersion maximale, mais le décentrage maximum est largement dépassé.

Dans ce cas d'application, l'indice de qualification du non respect de la CF vaut $R_{HCF} = 0,68$ et l'indice de non exploitation de la CF ici vaut $R_{expl.} = 1$.

L'analyse par simulation de Monte Carlo donne la répartition des assemblages avec un indice de non-respect de la CF : $R_{HCF}^{MC} = 0,15$.

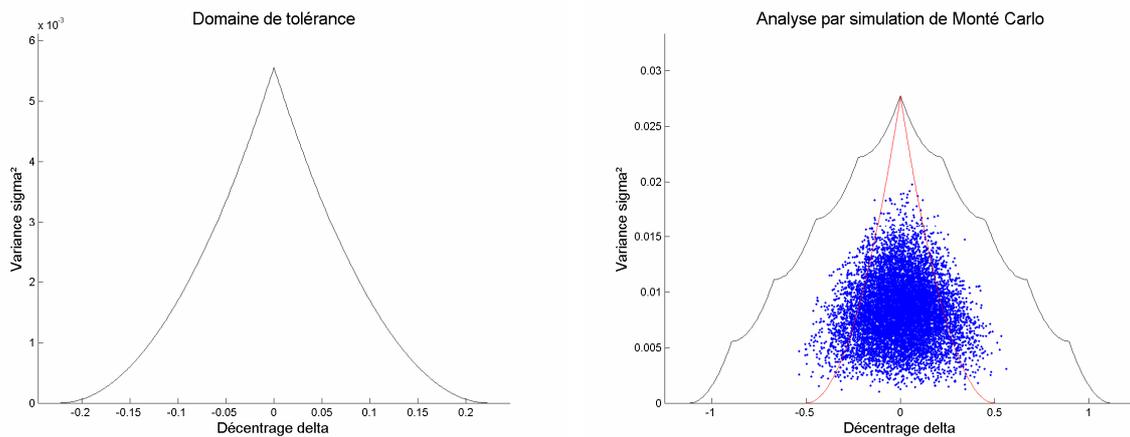


Figure 1-28 : Domaine de tolérance des composants, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

Seconde analyse avec $Cpk_i > 1,66$

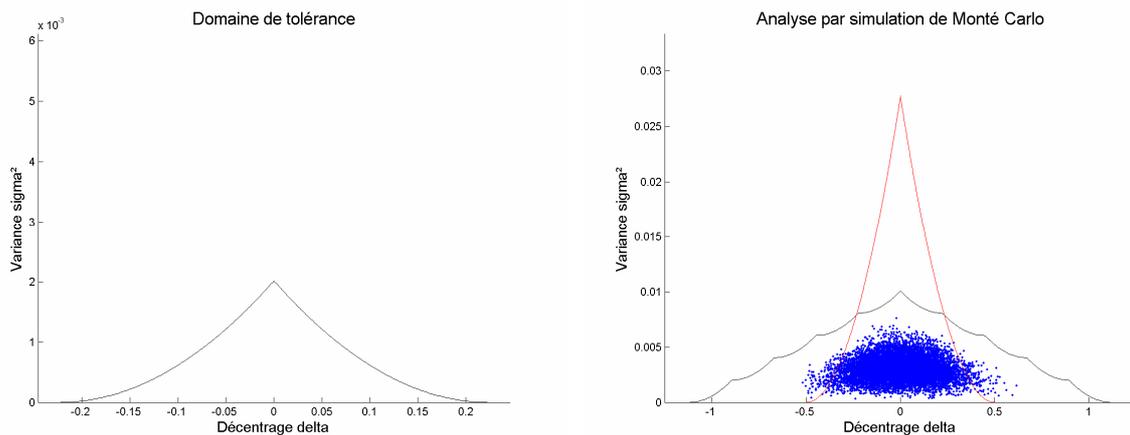


Figure 1-29 : Domaine de tolérance avec $Cpk_i = 1,67$, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

On se propose de faire l'analyse des tolérances mais en considérant cette fois-ci une valeur minimale de l'indice Cpk_i des composants. On choisit arbitrairement un indice $Cpk_i = 1,67$ pour tous les composants de la chaîne de cote. La figure suivante résume l'analyse des tolérances.

L'analyse par la méthode des aires donne un indice d'exploitation $R_{expl.} = 0,59$ et un indice de non-conformité $R_{HCF} = 0,48$. Avec l'analyse par simulation de Monte Carlo, l'indice de non-conformité devient $R_{HCF}^{MC} = 0,03$.

Malgré l'utilisation d'indice de capabilité $Cpk_i > 1$, on constate que le tolérancement statistique offre beaucoup de configuration à risque sur la résultante. Son utilisation sans précaution pour vérifier son hypothèse de composants centrés est risquée pour le tolérancement de la CF .

2.3.3 Tolérancement statistique augmenté

Plusieurs méthodes sont proposées pour réduire l'aspect négatif du tolérancement statistique, dont une discussion est proposée dans [Graves et al, 2000]. [Gilson, 1951] et [Bender, 1962] proposent une méthode basée sur le tolérancement statistique comprenant un facteur augmenté f (inflated factor). La tolérance dans le cas général est alors définie par la relation suivante

$$IT_{X_i} = \frac{\beta_i \cdot IT_Y}{f \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \quad [1-48]$$

Où f représente le coefficient augmenté. Ce coefficient est souvent choisi arbitrairement autour d'une valeur de $f = 1,5$ ou $1,6$ selon leurs expériences avec de nombreux assemblages. Dans le cas particulier de répartition uniforme ($\beta_i = 1$) et d'incidence directe de tous les composants ($\alpha_i = 1$), on obtient les tolérances sur les composants par :

$$IT_{X_i} = \frac{IT_Y}{f \cdot \sqrt{n}} \quad [1-49]$$

Dans le cas où $f = 1$, on retrouve une répartition des tolérances par la méthode statistique, dans le cas où $f = \sqrt{n}$, on retrouve du tolérancement au pire des cas.

Une discussion sur la valeur du coefficient est proposée par [Graves, 1997] et [Graves, 2001] sur différentes situations qui conduisent au choix de différentes valeurs de f . Graves propose une approche intéressante pour optimiser le coefficient f selon les indices de capabilité.

Mais malgré la qualité de cette méthode de tolérancement, il est toujours possible de trouver une situation ne garantissant la CF . En effet, comme on peut le constater sur la figure 1-30, le décentrage maximal résultant excède le décentrage maximal admissible.

2.3.3.1 Le cas d'application

La synthèse des tolérances statistiques augmentées de l'exemple d'application donne les tolérances suivantes en utilisant le facteur augmenté $f = 1,6$.

Sans condition particulière, on considère que les intervalles de tolérances de composants sont garantis par des indices de capabilité $Cpk_i = 1$.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance IT_i	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280

Tableau 1-3 : Caractéristiques et tolérances statistiques augmentées des composants

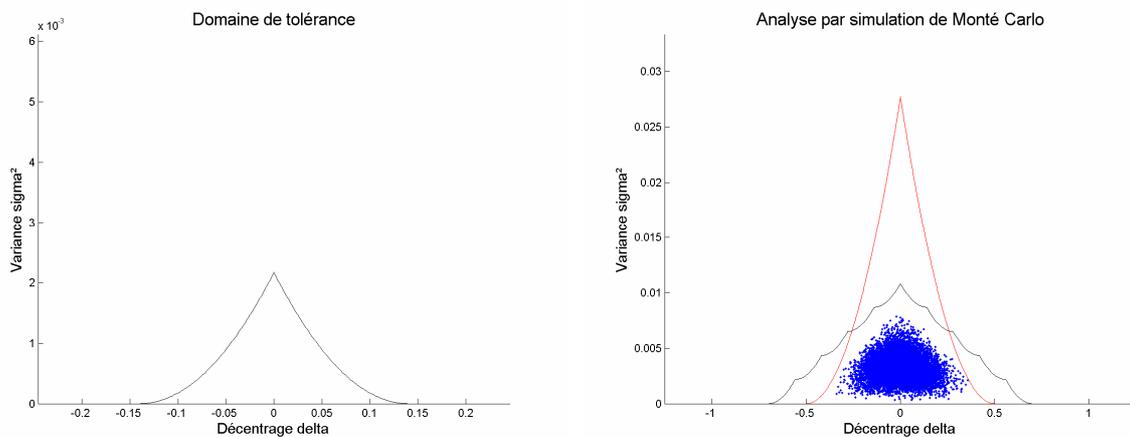


Figure 1-30 : Domaine de tolérance des composants, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

En faisant l'analyse des domaines de tolérance, on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la condition fonctionnelle.

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la CF du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

Dans ce cas, la CF est relativement bien respectée bien que le tolérancement du système permette des configurations hors de la CF. En effet, l'indice de configuration hors de la CF fourni par l'étude des aires est $R_{HCF} = 0,23$ alors que l'indice d'exploitation vaut $R_{exp.} = 0,41$. En revanche, par la méthode de Monte Carlo, on obtient un indice de non-respect de la tolérance de $R_{HCF}^{MC} = 0,00$.

Cette observation nous permet de constater que cette méthode exploite correctement l'aspect aléatoire des combinaisons des décentrages et par la même garantit statistiquement la CF.

3 Tolérancement inertiel 1D

OBJECTIFS DE CETTE PARTIE

Cette partie est un état de l'art du tolérancement inertiel. Nous allons aborder plusieurs points :

- Dans un premier temps nous présentons la fonction de perte de Taguchi. Pillet s'est basé sur cette fonction de perte pour définir un critère de qualification des écarts qu'il nomme l'inertie.
- Nous abordons dans un second temps les représentations graphiques de la tolérance inertielle, et notamment le graphe bi-tolérance que nous introduisons.
- La troisième partie introduit les deux indices de capabilité (C_p et C_{pi}) que l'on utilise pour contrôler un lot en tolérancement inertiel,
- Dans une quatrième partie on présente les deux types de condition fonctionnelle applicable avec le tolérancement inertiel qui sont la tolérance inertielle et l'intervalle de tolérance,
- Enfin la cinquième partie traite de trois cas de tolérancement inertiel et de leurs hypothèses de calcul des tolérances. Deux approches de tolérancement visent à garantir une CF définie par une inertie et la troisième vise à garantir un IT.

3.1 Perte de Taguchi et le critère inertie

Cette partie présente la fonction de perte de Taguchi qui est à l'origine de la genèse du critère inertie qu'introduit Pillet.

3.1.1 La fonction de perte de Taguchi

Taguchi propose une formule simple permettant d'évaluer la contrepartie financière due aux erreurs de production, la fonction quadratique de perte de qualité. Le but de formule est d'évaluer en unité monétaire la perte financière subie à la suite d'une défaillance d'un produit. Cette estimation de la perte englobe non seulement l'entreprise mais aussi le client et le vendeur. Taguchi caractérise cette perte financière engendrée par l'écart d'une caractéristique par rapport à sa cible comme une fonction proportionnelle au carré de cet écart. Il donne ainsi :

$$L = k.(T - X_i)^2 \quad [1-50]$$

Où L représente la perte financière (financial Loss), et k est un coefficient permettant de relier les écarts quadratique à l'unité financière (euros/mm² par exemple). T représente la valeur cible (Target) et X_i est la valeur mesurée sur un composant. [Taguchi et al, 1989], donne une méthode permettant de déterminer le coefficient k en fonction de l'intervalle de tolérance, définissant la limite d'acceptation de la pièce, et du prix de production associé à la pièce.

$$k = \frac{A}{\left(\frac{IT}{2}\right)^2} \quad [1-51]$$

Où IT est l'intervalle de tolérance et A est le prix de production de la pièce ou son prix de retouche.

3.1.2 Le critère inertie

En partant de la définition de la fonction de perte de Taguchi, Pillet [Pillet, 2004] propose un nouveau critère d'acceptation l'inertie. A ses débuts l'inertie est définie par :

$$I = (T - X_i)^2 \quad [1-52]$$

Pillet montre que cette expression peut aussi s'écrire sous la forme d'une addition du carré de l'écart par rapport à la cible et du carré de l'écart type, soit :

$$I = \delta^2 + \sigma^2 \quad [1-53]$$

Pour un souci de cohérence entre les valeurs mesurées en mm et les valeurs de l'inertie mm² initialement, le calcul de l'inertie est redéfini en prenant la racine carrée de sa définition initiale. Ainsi il y a homogénéité entre les valeurs mesurées et la valeur du critère inertie. La nouvelle définition de l'inertie s'écrit :

$$I = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2} \quad [1-54]$$

On dispose donc d'un critère d'acceptation du lot lié à la perte financière engendrée. Ce critère d'acceptation est un scalaire dont l'unité est proportionnelle à l'unité de mesure des pièces du lot. L'inertie est la combinaison quadratique du décentrage de la moyenne du lot par rapport à la cible et de l'écart type du lot.

3.2 Représentation graphique de la tolérance inertielle

Cette partie traite des représentations graphiques de la tolérance inertielle. Nous abordons dans un premier temps les représentations utilisées dans les parties 1.2 et 1.3 qui permettent de représenter les tolérances traditionnelles et inertielles. Nous présentons enfin une représentation graphique dédiée à la tolérance inertielle que nous nommons le graphe bi-tolérance.

3.2.1 Premières représentations graphiques

La première représentation graphique de l'inertie s'est naturellement faite dans le domaine (δ, σ) , voir la figure 1-26. Dans cette représentation, on voit bien l'interaction entre la moyenne et l'écart type, mais l'interprétation n'est pas aussi évidente que la tolérance traditionnelle où le lot est représenté dans son intervalle de tolérance.

Pour un souci de diffusion de la méthode de tolérancement inertiel, le premier travail de recherche s'est focalisé sur les représentations graphiques de la tolérance inertielle. La figure suivante montre les différentes représentations graphiques décrites en début de ce chapitre.

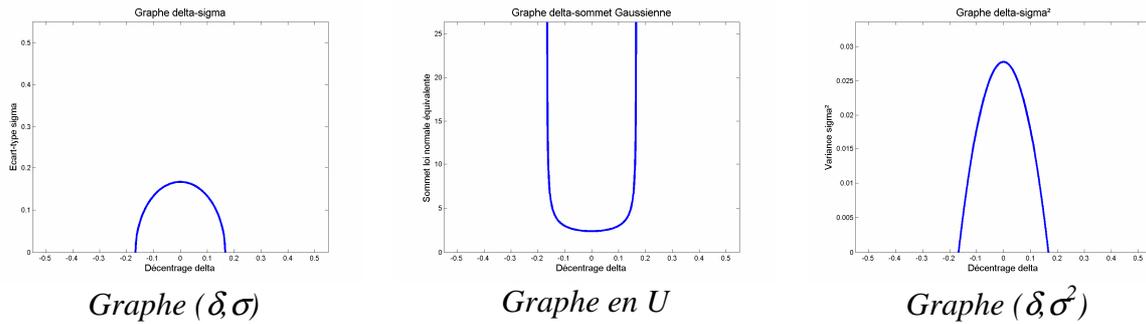


Figure 1-31 : Les différentes représentations de la tolérance inertielle

On voit l'intérêt de la représentation du graphe en U, qui permet d'exprimer une tolérance sur les caractéristiques δ et σ du lot en une limite d'acceptation sur la représentation du lot par la gaussienne équivalente. C'est la première représentation qui permet d'interpréter la tolérance inertielle d'une manière plus courante.

Cependant, une autre représentation est proposée, propre à la tolérance inertielle celle-ci.

3.2.2 Graphe bi-tolérance

Une dernière proposition de représentation graphique des tolérances est la représentation bi-tolérances. En observant le graphe (δ, σ) , on se rend compte que la tolérance inertielle qui limite l'inertie du lot, fusion entre le décentrage δ et la dispersion σ , peut être exprimée en deux tolérances dépendantes sur le décentrage et la dispersion. L'intérêt est alors de pouvoir quitter la représentation (δ, σ) pour revenir à une représentation classique sur la distribution du lot, mais en affichant deux tolérances mobiles contrairement à l'IT.

La tolérance sur le décentrage du lot δ_{tol} . Se calcule en fonction de la tolérance inertielle I_{tol} . et de la dispersion du lot σ_{lot} . :

$$\delta_{tol} = \sqrt{I_{tol}^2 - \sigma_{lot}^2} \quad [1-55]$$

La tolérance est alors représentée comme un intervalle centré sur la cible représentant une bi-limite sur la moyenne du lot δ_{lot} . Cette première tolérance vérifie la relation :

$$\delta_{lot} \in [-\delta_{tol}; +\delta_{tol}] \quad [1-56]$$

La tolérance sur la dispersion σ_{tol} . Est définie par :

$$\sigma_{tol} = \sqrt{I_{tol}^2 - \delta_{lot}^2} \quad [1-57]$$

La tolérance est alors représentée comme un intervalle centré sur la moyenne du lot représentant une bi-limite sur l'étendue du lot, six dispersions. Cette seconde tolérance exprime la relation :

$$[\delta_{lot} - 3.\sigma_{tol}; \delta_{lot} + 3.\sigma_{tol}] \subset [\delta_{lot} - 3.\sigma_{tol}; \delta_{lot} + 3.\sigma_{tol}] \quad [1-58]$$

Les figures suivantes montrent les deux représentations dans le graphe (δ, σ) et la tolérance bi-limite sur un histogramme de mesures. Là encore on utilise une représentation équivalente du lot, la gaussienne équivalente, principalement pour comparer la dispersion du lot à la dispersion autorisée par la tolérance en considérant le décentrage du lot.

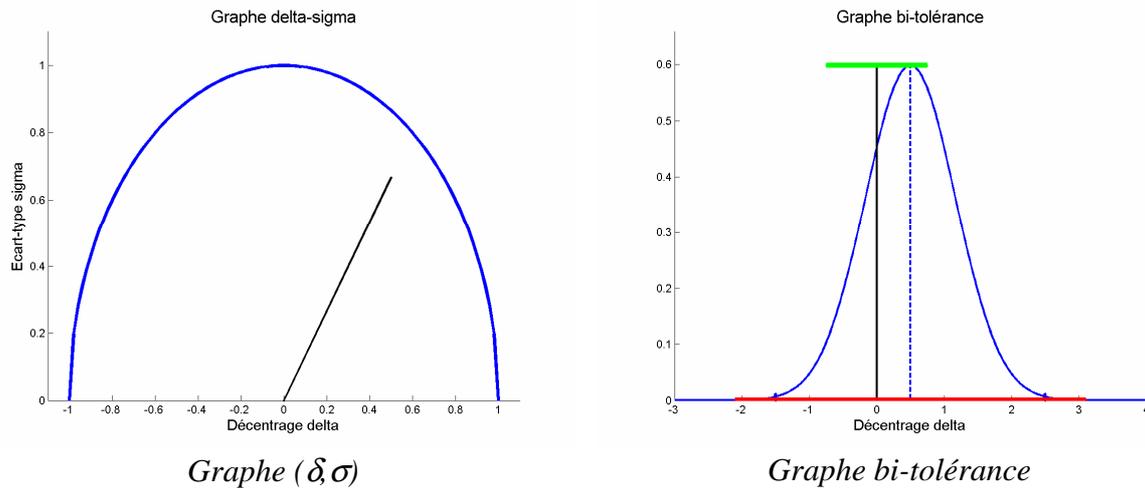


Figure 1-32 : Qualification d'un lot en tolérance inertielle bi-tolérance

3.3 Indices de capabilité inertiels

3.3.1 L'indice Cp

Comme pour le tolérancement traditionnel, Pillet définit un indice de capabilité définissant le ratio entre la variabilité permise et la variabilité court terme du processus, l'indice Cp. L'indice Cp est défini par :

$$Cp = \frac{I_{CF}}{\sigma} \quad [1-59]$$

3.3.1.1 Les représentations graphiques de l'indice Cp

Le domaine de tolérance de l'indice Cp dans le graphe (δ, σ) est délimité par :

$$\sigma = \frac{I_{CF}}{Cp} \quad [1-60]$$

Et dans le graphe (δ, σ^2) le domaine de tolérance est délimité par :

$$\sigma^2 = \left(\frac{I_{CF}}{Cp} \right)^2 \quad [1-61]$$

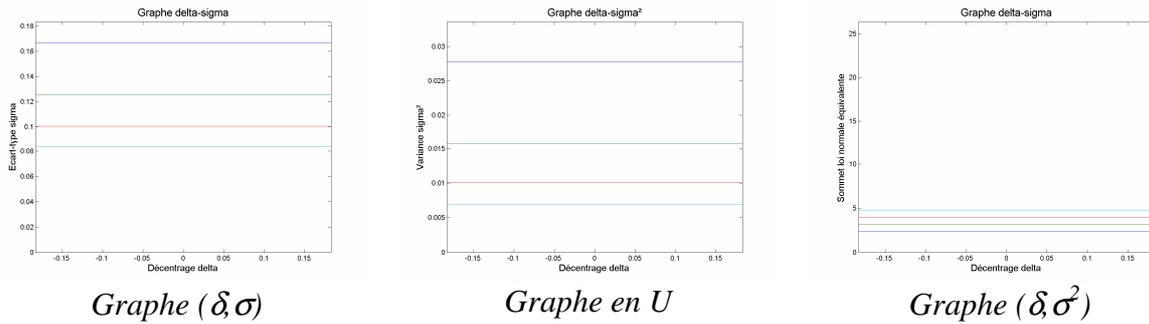


Figure 1-33 : Les différentes représentations de l'indice inertiel C_p

On constate bien que l'indice C_p du tolérancement traditionnel ou du tolérancement inertiel a bien le même rôle, il compare la variabilité instantanée du procédé à la variabilité autorisée.

3.3.2 L'indice C_{pi}

L'inertie est un critère de qualification du lot à elle seule, elle combine le décentrage δ et l'écart-type σ . Cependant, comme pour le tolérancement traditionnel Pillet introduit un indice de capabilité C_{pi} qui permet de comparer l'inertie du lot à la tolérance inertielle.

L'indice C_{pi} est défini par :

$$C_{pi} = \frac{I_{CF}}{\sqrt{\delta^2 + \sigma^2}} \quad [1-62]$$

3.3.2.1 Les représentations graphiques de l'indice C_{pi}

La limite du domaine de tolérance de l'indice C_{pi} dans le graphe (δ, σ) peut s'écrire

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{I_{CF}}{C_{pi}}\right)^2 - \delta^2} \quad [1-63]$$

Et dans le graphe (δ, σ^2) le domaine de tolérance est délimité par :

$$\sigma^2 = \left(\frac{I_{CF}}{C_{pi}}\right)^2 - \delta^2 \quad [1-64]$$

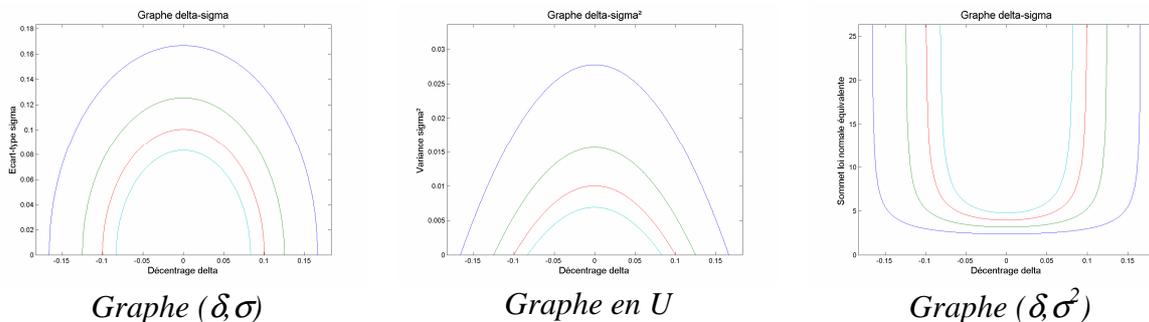


Figure 1-34 : Les différentes représentations de l'indice inertiel C_{pi}

On observe que l'indice de capabilité traditionnel C_{pm} et l'indice de capabilité inertiel C_{pi} ont le domaine de tolérance. Cela vient du fait que ces deux indices qualifient le lot de la même façon à l'aide de la fonction de perte de Taguchi. La différence majeure est que l'indice C_{pm} est basé sur un intervalle de tolérance soulevant un problème d'acceptation de lot dans l' IT mais avec un mauvais C_{pm} . Cette ambiguïté est discutée dans le chapitre suivant sur l'application du tolérancement inertiel au tolérancement traditionnel à l'aide de l'indice C_{pm} .

3.4 Condition fonctionnelle et son domaine d'acceptation

Le tolérancement inertiel a pour but de garantir une inertie sur la résultante de l'assemblage, mais on peut également chercher à garantir un intervalle de tolérance.

3.4.1 Une inertie comme CF

En se basant sur la fonction de perte de Taguchi, l'inertie désigne une zone pour laquelle le coût de non qualité est constant. En produisant des assemblages dont l'inertie est inférieure à la tolérance inertielle définissant la condition fonctionnelle autour d'une cible, d'après Taguchi on produit ainsi des assemblages dont le coût de non qualité maximum est maîtrisé. En vue d'obtenir la même dispersion dans le cas centré entre une CF exprimée par un IT ou une inertie, on impose d'avoir les mêmes valeurs des indices de capabilité C_p traditionnel et inertiel. Ainsi on a la relation :

$$C_p^{Inertiel} = \frac{I_{CF}}{\sigma_{Lot}} = \frac{IT_{CF}}{6 \cdot \sigma_{Lot}} = C_p^{Traditionnel} \quad [1-65]$$

D'où on tire une relation d'équivalence entre l'inertie et l'intervalle de tolérance dans le but d'obtenir la même dispersion dans le cas centré :

$$I_{CF} = \frac{IT_{CF}}{6} \quad [1-66]$$

De cette relation on peut exprimer la tolérance inertielle équivalente à l' IT_{CF} défini dans le cas du tolérancement traditionnel. Ainsi, nous définissons la condition fonctionnelle de notre exemple d'application par $I_{CF} = 0,167$ mm. Les domaines de tolérances sont représentés par la figure 1-31.

3.4.2 Un intervalle de tolérance comme CF

Toujours dans un souci de diffusion du tolérancement inertiel, certains souhaitent exprimer la condition fonctionnelle comme traditionnellement par un intervalle de tolérance. Dans ce cas la définition de la CF ne change pas par rapport au cas traditionnel, on considère un $IT_{CF} = 1$ mm et un indice de capabilité $C_{pk_{CF}} = 1$. Le domaine de tolérance défini par un intervalle de tolérance est présentée dans la figure 1-26.

3.5 Tolérancement inertiel

L'inertie résultante de l'assemblage de composants tolérancés en inertiel se calcule par les relations statistiques qui lient les deux caractéristiques des composants δ_i et σ_i aux caractéristiques de la résultante de l'assemblage δ_{ass} et σ_{ass} . Ainsi en calculant l'inertie de la résultante de l'assemblage on trouve :

$$I_{ass} = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot I_i^2 + 2 \cdot \sum_{i \neq j} \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \delta_i \cdot \delta_j} \quad [1-67]$$

En partant de cette relation, différentes hypothèses de tolérancement sont évoquées [Pillet, 2004]. On se contente de présenter deux méthodes garantissant une *CF* définie par une tolérance inertielle, et la méthode actuelle garantissant une *CF* définie par un intervalle de tolérance.

3.5.1 Garantir une inertie sous l'hypothèse du pire des cas

En s'inspirant de l'hypothèse de pire des cas, on considère que l'inertie résultante est uniquement due aux décentrages δ_i des composants, en considérant tous les α_i égaux, l'inertie résultante est donc donnée par :

$$I_{ass} = n \cdot I_i \quad [1-68]$$

Pillet propose donc un tolérancement inertiel permettant de garantir une inertie résultante avec une hypothèse de pire des cas :

$$I_i = \frac{I_{CF}}{n} \quad [1-69]$$

Comme pour le tolérancement traditionnel au pire des cas, cette méthode de tolérancement garantit la *CF* dans toutes les configurations, mais les tolérances obtenus sont encore plus serrées que le tolérancement traditionnel.

3.5.1.1 Le cas d'application

La synthèse des tolérances inertielles de l'exemple d'application donne les tolérances exprimées dans le tableau 1-4.

Sans condition particulière, on considère que les inerties des composants sont garanties par des indices de capabilité $Cpi_i = 1$.

En faisant l'analyse des domaines de tolérance on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la condition fonctionnelle.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance I_i	0,033	0,033	0,033	0,033	0,033

Tableau 1-4 : Caractéristiques et tolérances au pire des cas des composants

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la *CF* du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

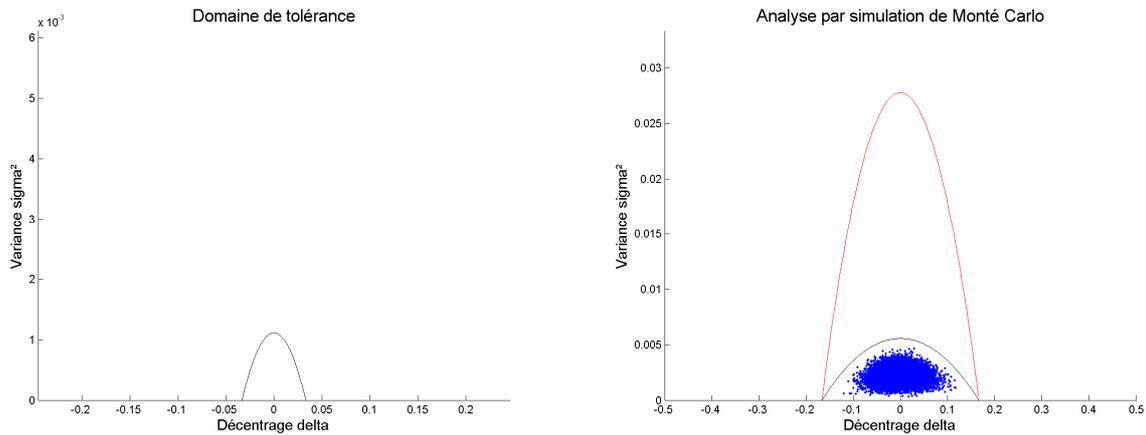


Figure 1-35 : Domaine de tolérance des composants, et domaine résultant de l’analyse des tolérances

On constate bien que la CF est entièrement respectée par le tolérancement au pire des cas, en effet le domaine résultant est entièrement inclus dans le domaine CF.

3.5.2 Garantir une inertie sous l’hypothèse de décentrage aléatoire

En considérant l’hypothèse de distribution aléatoire des décalages δ_i des composants, ce qui permet de négliger le double produit $\delta_i \delta_j$, l’inertie résultante est donc donnée par :

$$I_{ass} = \sqrt{n} \cdot I_i \tag{1-70}$$

Pillet propose un tolérancement inertiel garantissant une inertie résultante avec une hypothèse statistique de distribution aléatoire des moyennes des composants :

$$I_i = \frac{I_{CF}}{\sqrt{n}} \tag{1-71}$$

Cette méthode de tolérancement garantit bien l’écart type maximum de la CF, mais il existe des configurations, notamment en cas de non-compensation des décentrages des composants, où la CF n’est pas respecté.

3.5.2.1 Le cas d’application

Première analyse sans précaution particulière

En s’intéressant à la synthèse des tolérances inertielles sous l’hypothèse statistiques de distribution aléatoire des décentrages des composants de l’exemple d’application, on obtient les tolérances suivantes résumées dans le tableau ci-dessous.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance I_i	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075

Tableau 1-5 : Caractéristiques et tolérances statistiques des composants

Comme précédemment sans condition particulière, on considère que les inerties des composants sont garanties par des indices de capabilité $Cpi_i = 1$.

En faisant l'analyse des domaines de tolérance on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la condition fonctionnelle.

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la CF du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

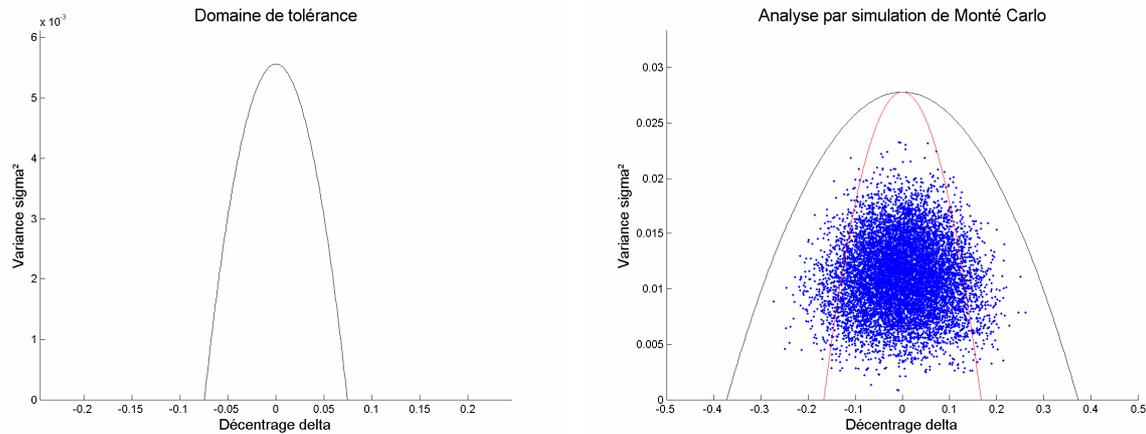


Figure 1-36 : Domaine de tolérance des composants, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

On constate que le tolérancement inertiel statistique garantissant un inertie comme CF sans précaution n'est pas suffisamment adapté pour le tolérancement de la CF . On garantit le respect de la dispersion maximale, mais le décentrage maximum est dépassé.

3.5.3 Garantir un intervalle de tolérance sous l'hypothèse de décentrage aléatoire

Comme traditionnellement la CF d'un assemblage est déterminée par un intervalle de tolérance IT_{CF} . Le tolérancement inertiel est adapté de façon à garantir une CF exprimé par un IT_{CF} et non une inertie I_{CF} . Néanmoins l'adaptation de la méthode est basée sur le tolérancement inertiel sous l'hypothèse de décentrage aléatoire. L'inertie I_{CF} de la méthode précédente est exprimée en fonction de l' IT_{CF} à garantir grâce à la relation [1-66].

Ainsi le calcul des inerties des composants I_i dans le cas d'incidences et de répartition identiques des tolérances est exprimé par :

$$I_i = \frac{IT_{CF}}{6\sqrt{n}} \quad [1-72]$$

3.5.3.1 Le cas d'application

Première analyse sans précaution particulière

En s'intéressant à la synthèse des tolérances inertielles sous l'hypothèse statistique de distribution aléatoire des décentrages des composants de l'exemple d'application, on obtient les tolérances suivantes résumées dans le tableau ci-dessous.

On constate que les tolérances inertielles sont identiques à celles du tolérancement inertiel garantissant une inertie sous l'hypothèse de distribution aléatoire des décentrages. Cela se justifie par le fait que l' IT_{CF} dans ce cas et l' I_{CF} dans le cas précédent sont équivalents en terme de dispersion centrée.

Comme précédemment sans condition particulière, on considère que les inerties des composants sont garanties par des indices de capabilité $Cpi_i = 1$.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance I_i	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075

Tableau 1-6 : Caractéristiques et tolérances statistiques des composants

A partir de l'analyse des domaines de tolérance, on trouve le domaine résultant de l'assemblage des tolérances que l'on compare au domaine de la CF.

La figure suivante montre le domaine de tolérance des composants, ainsi que la comparaison avec le domaine de la CF du domaine résultant de l'analyse des tolérances.

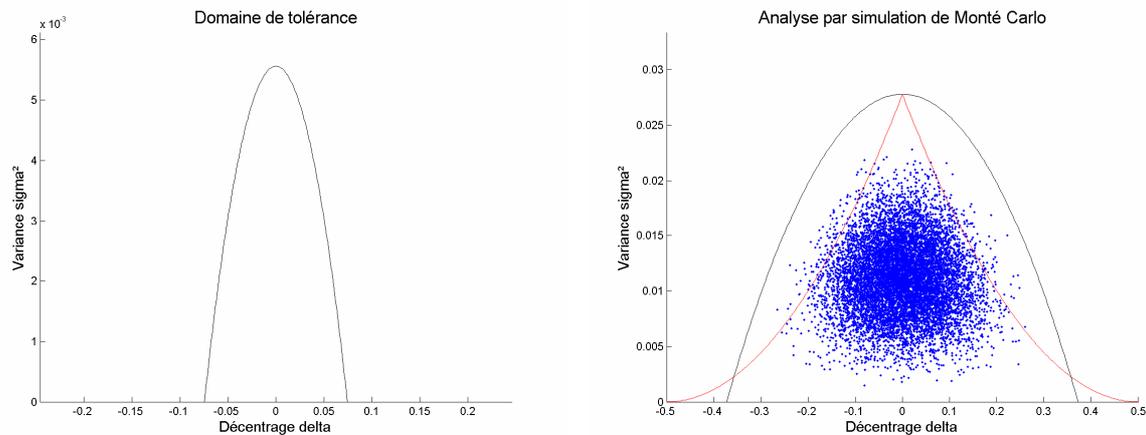


Figure 1-37 : Domaine de tolérance des composants, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

On constate que le tolérancement inertiel statistique garantissant un inertie comme CF sans précaution n'est pas bien adapté pour le tolérancement de la CF. On garantit le respect de la dispersion maximale, mais pour certaines configurations le domaine de tolérance défini par la CF n'est pas respectée.

Pour ce cas d'application, on obtient les indice de capabilité suivant : $R_{HCF} = 0,34$ et $R_{expl.} = 0,98$. L'analyse du tolérancement par la simulation de Monte Carlo donne $R_{NCF}^{MC} = 0,02$.

Seconde analyse avec $Cpi_i = 1,2$

On se propose de faire l'analyse des tolérances mais en considérant cette fois ci une valeur minimale de l'indice Cpi des composants. On choisit arbitrairement un indice $Cpi = 1,2$ pour tous les composants de la chaîne de cote. La figure suivante résume l'analyse des tolérances.

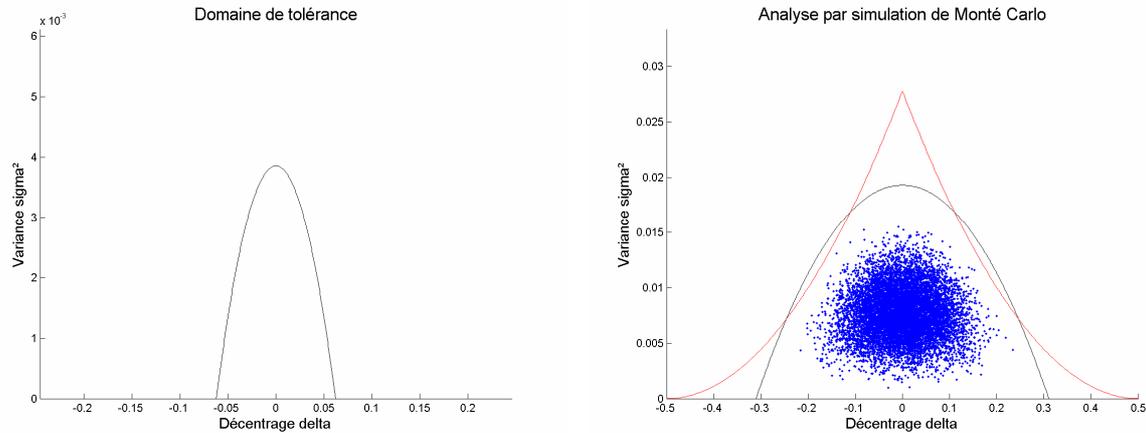


Figure 1-38 : Domaine de tolérance des composants avec $Cpi_i = 1,2$, et domaine résultant de l'analyse des tolérances

Les indices $R_{HCF} = 0,03$ et $R_{expl.} = 0,84$, et la simulation de Monte Carlo donne un indice de capabilité $R_{NCF}^{MC} = 0$.

Un bilan est présenté dans le chapitre 2 en page 78, présentant les différentes approches de tolérancement qui sont comparées grâce aux indicateurs présentés ($R_{expl.}$, R_{HCF} , R_{HCF}^{MC}) pour le cas particulier de l'assemblage de 5 composants.

4 Conclusions et perspectives

4.1 Conclusions du chapitre

Ce chapitre a permis de balayer le domaine du tolérancement 1D sans pour autant le traiter de manière exhaustive.

Nous avons introduit un outil intéressant qu'est le graphe (δ, σ^2) qui permet l'analyse des tolérances des composants. Cet outil et les indices de qualification associés permettent une analyse quantifiable des méthodes de tolérancement.

Au regard des différentes méthodes de tolérancement et de leurs résultats sur le cas d'application, on peut conclure que le tolérancement inertiel avec l'utilisation d'un indice de capabilité semble la méthode la mieux adaptée pour garantir et exploiter au mieux la CF.

4.2 Perspectives

Du graphe (δ, σ^2) :

- Il serait intéressant de poursuivre de manière plus exhaustive d'autres analyses de Monte Carlo en intégrant notamment les approches proposées dans [Anselmetti et al, 2003] sur la répartition des composants dans l'*IT*.
- L'hypothèse d'utilisation du graphe est de considérer des composants indépendants. Cependant la méthode peut également être adaptée en considérant l'hypothèse contraire c'est à dire avec des composants fortement dépendants. En effet, on peut utiliser la même méthodologie d'assemblage des domaines de tolérances mais en utilisant le graphe (δ, σ) comme le préconise l'équation [1-10].

Du tolérancement inertiel :

Etant donné l'effet de l'indice de capabilité C_{pi} sur le domaine résultant de l'assemblage des tolérances par rapport au domaine *CF*, on envisage de déterminer la valeur optimale de l'indice C_{pi} garantissant dans toutes les configurations la *CF*. Cette perspective est traitée dans le chapitre 2.

Chapitre 2

Tolérancement inertiel 1D garantissant une Condition Fonctionnelle

OBJECTIF DU CHAPITRE

Ce chapitre répond à la question suivante : Comment garantir un taux de non-conformité sur une condition fonctionnelle en utilisant le tolérancement inertiel ?

La condition fonctionnelle est caractérisée par une cible et un intervalle de tolérance réparti de façon symétrique autour de cette cible. Deux visions sont alors possibles, on peut chercher à respecter l'IT de la CF, dans ce cas on impose une valeur minimale sur l'indice Cpk de l'assemblage, ou on peut chercher à garantir un Taux de Non- Conformité sur l'IT de la CF.

Ce chapitre se décompose en trois parties qui suivent l'évolution des travaux de recherche :

- On présente en premier lieu une application du tolérancement inertiel garantissant absolument un indice Cpk sur l'IT de la CF. Le but est de faire garantir la CF à la plus mauvaise configuration.*
- Dans un second temps, nous adapterons les résultats obtenus afin de garantir dans toutes les situations une valeur maximale du TNC de la CF sur son IT.*
- Enfin, nous nous attacherons à l'occurrence de cette plus mauvaise configuration grâce aux simulations de Monte Carlo.*

Glossaire	
C_{pi}	Indice de capabilité inertiel
$C_{pi_{CF}}$	Indice de capabilité C_{pi} à imposer sur les composants pour garantir la CF
$C_{pk_{ass}}$	Indice de capabilité de la résultante de l'assemblage (fonction des δ_i et σ_i)
$C_{pk_{ass}}^{Min}$	Valeur minimum de l'indice $C_{pk_{ass}}$ pour la plus mauvaise configuration
$C_{pk_{CF}}$	Indice de capabilité C_{pk} à respecter sur la CF
I_{CF}	Inertie de la condition fonctionnelle
I_i	Inertie du composant i
IT_{CF}	Intervalle de tolérance de la condition fonctionnelle
n	Nombre de composants dans la chaîne de cite
TNC_{CF}	Taux de Non-Conformité à respecter sur la CF
$TNC_{inf.}$	Borne inférieure du TNC à pour un indice C_{pk} donné
TNC^{MAX}	Valeur maximal du TNC résultant pour la plus mauvaise configuration
α_i	Coefficient d'incidence du composant i
β_i	Indice de faisabilité du composant i
δ_i	Décentrage par rapport à la cible du composant i
δ_j^{Min}	Décentrage du composant j donnant la plus mauvaise configuration de la résultante
σ_i	Ecart-type du composant i

1 Des propositions de tolérancement inertiel dans le cas de produits assemblés

OBJECTIF DE CETTE PARTIE :

Plusieurs propositions de tolérancement inertiel garantissant un IT comme CF sont possibles. Dans le cadre de nos recherches, deux méthodes de tolérancement basées sur le tolérancement inertiel et garantissant un IT comme condition fonctionnelle ont été proposées. Nous effectuerons un survol de ces méthodes avant de développer une troisième approche.

1.1 Un compromis entre tolérancement au pire des cas et tolérancement statistique

Basée sur l'observation des premières méthodes de tolérancement inertiel, une façon innovante de tolérer est proposée. Pillet développe plusieurs méthodes de tolérancement inertiel et leurs hypothèses. On s'intéresse plus particulièrement aux deux méthodes de tolérancement inertiel présentées dans la première partie en vue de garantir une inertie I_{CF} sous l'hypothèse du pire des cas ou l'hypothèse statistique.

- Un tolérancement inertiel permettant de garantir une inertie résultante avec une hypothèse de pire des cas:

$$I_i = \frac{I_{CF}}{n} \quad [2-1]$$

Bien que séduisante, cette façon de tolérer conduit à des conditions très restrictives au niveau de la fabrication des composants.

- Un tolérancement inertiel garantissant une inertie résultante avec une hypothèse statistique :

$$I_i = \frac{I_{CF}}{\sqrt{n}} \quad [2-2]$$

Dans cette seconde définition, l'inertie résultante n'est garantie que si les décentrages de chacune des composantes se compensent.

Basée sur cette définition du tolérancement inertiel, Pillet propose une méthode permettant de garantir un intervalle de tolérance IT_{CF} :

$$I_i = \frac{IT_{CF}}{6 \cdot \sqrt{n}} \quad [2-3]$$

Cette proposition garantit dans « presque » tous les cas le respect d'un intervalle de tolérance sur la cote condition. Le problème réside dans le « presque ».

En se fondant sur ces deux premières approches, nous avons proposé une approche hybride :

$$I_i^{Expo} = \frac{IT_{CF}}{6 \cdot n^\alpha} \quad [2-4]$$

Où α est l'exposant de tolérancement dont la valeur reste à définir. Deux valeurs limites sont définies implicitement par Pillet :

- $\alpha = 1$ pour un tolérancement garantissant absolument l'inertie résultante,

- $\alpha = 1/2$ pour un tolérancement garantissant l'inertie résultante dans l'hypothèse de distribution aléatoire des décentrages.

Il reste à déterminer la valeur de l'exposant α permettant de garantir la CF . On décide de caractériser la CF de l'assemblage par un indice Cpk_{CF} sur l'intervalle de tolérance IT_{CF} . Dans ce cas, on montre dans [Adragna et al, 2006 a] que la solution permettant de garantir la CF est donnée par :

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{n^2}{9} + n.Cpk^2\right)}{2.\ln(n)} \quad [2-5]$$

Nous n'approfondissons pas davantage la réflexion sur la validité de la méthode dans le cas d'incidences non toutes directes sur la CF et le cas de répartition non uniforme. Néanmoins, cette solution permet de comparer le tolérancement inertiel garantissant une CF au tolérancement traditionnel via la comparaison des exposants α pour le tolérancement au pire des cas et statistique [Adragna et al, 2006 a].

1.2 Un tolérancement inertiel ajusté

Une autre méthode de tolérancement inertiel ayant pour but de garantir la CF est inspirée du tolérancement traditionnel statistique augmenté et appliqué au tolérancement inertiel classique visant un IT .

Le tolérancement traditionnel augmenté est défini par :

$$IT_i = \frac{IT_{CF}}{f.\sqrt{n}} \quad [2-6]$$

Et le tolérancement inertiel classique visant un IT est défini par :

$$I_i = \frac{IT_{CF}}{6.\sqrt{n}} \quad [2-7]$$

Le rapprochement de ces deux méthodes est proposé dans [Adragna et al, 2006 b], où on propose l'utilisation d'un coefficient I_C , coefficient inertiel d'ajustement. On définit ainsi une nouvelle formule de synthèse de tolérance inertielle, le tolérancement inertiel ajusté :

$$I_i^{Ajust} = \frac{IT_{CF}}{6.I_C.\sqrt{n}} \quad [2-8]$$

Le coefficient I_C est calculé en fonction de la CF à garantir sur l'assemblage, et cette CF est exprimée comme précédemment par un IT_{CF} et un indice de capabilité Cpk_{CF} .

Pour garantir la CF , la solution proposée dans [Adragna et al, 2006 b] est définie comme suit :

$$I_C = \sqrt{Cpk_{CF}^2 + \frac{n}{9}} \quad [2-9]$$

Cette méthode possède l'avantage incontestable de garantir le respect de la CF par une approche statistique. Cependant, quelques points particuliers sont à mettre en avant :

- l'indice de correction I_C est calculé en fonction de la qualité de la CF (Cpk_{CF}) avant le calcul des tolérances des composants,
- les tolérances sont liées à la qualité de la condition fonctionnelle (Cpk_{CF}) et pour un même IT_{CF} , elles peuvent varier d'une CF à l'autre,
- la méthode n'utilise aucun indice de capabilité ou à défaut un indice $Cpi_i = 1$.

Ce dernier point peut sembler contradictoire avec la tendance habituelle qui consiste plutôt à avoir les tolérances des composants par une méthode de tolérancement et des indices de capabilité dépendant de la qualité de la CF à garantir.

La méthode développée pour la suite de ce projet, est plus proche de cette méthode conventionnelle. On propose un tolérancement des composants dépendant uniquement de l' IT_{CF} , puis on impose des indices de capabilité en vue de garantir la CF.

1.3 Tolérancement inertiel classique et indice de capabilité C_{pi}

Dans le but de simplifier l'utilisation du tolérancement inertiel et sa diffusion, il est préférable de ne considérer qu'une seule formule pour le calcul de la synthèse des tolérances. On décide de se baser sur le tolérancement inertiel classique pour le calcul des tolérances, mais la limitation des écarts des composants se fait grâce à l'indice de capabilité inertiel C_{pi} dans le but de garantir une CF sur l'assemblage.

L'idée est de garder une méthode classique de calcul des tolérances, et de calculer l'indice C_{pi} à respecter sur les composants afin de garantir la CF.

Ainsi on définit la méthode de tolérancement des composants dans le cas particulier par :

$$I_i^{Class} = \frac{IT_{CF}}{6 \cdot \sqrt{n}} \quad [2-10]$$

Et dans le cas général où les incidences sont non toutes directes et la répartition des tolérances est non uniforme, l'expression précédente se généralise en :

$$I_i^{Class} = \frac{\beta_i \cdot IT_{CF}}{6 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \quad [2-11]$$

Pour contrôler les variations des composants par rapport à leurs tolérances garantissant la CF de l'assemblage, on utilise l'indice de capabilité C_{pi} :

$$C_{pi} = \frac{I_i^{Class}}{I_i} = \frac{I_i^{Class}}{\sqrt{\delta_i^2 + \sigma_i^2}} \quad [2-12]$$

Où C_{pi} doit être idéalement défini par une valeur garantissant la CF de l'assemblage.

Le principal avantage de cette méthode comparée aux deux propositions précédentes est de garder la même tolérance inertielle pour chaque composant quelle que soit la CF à garantir, le seul changement se trouve sur la valeur de l'indice C_{pi} à respecter en fonction de la CF à garantir.

Cependant, on peut reprocher le fait d'utiliser des indices de capabilité différents en fonction du nombre de composants où de la qualité de la CF à garantir. En effet, on peut se demander comment il serait possible de gérer sur un plan différentes cotes avec des indices de capabilité différents.

1.4 Choix d'une méthode de tolérancement

Pour la suite de ce projet, nous choisissons d'utiliser la méthode de tolérancement inertiel classique en utilisant les indices de capabilité Cpi . Nos travaux ont pour objet d'identifier les valeurs de l'indice Cpi à imposer sur les composants. Le but est de garantir la CF d'un assemblage, identifiée par un IT_{CF} et un Cpk_{CF} ou un IT_{CF} et un TNC_{CF} , dans la plus mauvaise configuration ou en acceptant un risque dû à la faible probabilité de rencontrer la plus mauvaise configuration.

Cependant, pour laisser le choix de l'utilisation de telle ou telle méthode, nous présentons dans cette partie des équivalences entre les méthodes de tolérancement citées permettant de passer de l'une à l'autre. En effet, les trois propositions de tolérancement inertiel présentées dans les parties 1.1, 1.2 et 1.3 sont équivalentes.

1.4.1 De l'inertiel avec exposant α à l'inertiel ajusté avec indice I_C

Ces deux méthodes de tolérancement, inertiel ajusté et inertiel avec exposant α , donnent les mêmes tolérances des composants et ne nécessite aucune utilisation de l'indice de capabilité Cpi par défaut. Par conséquent, le passage de l'une à l'autre est directe.

En comparant les dénominateurs des deux formules de calcul des tolérances, on trouve dans le cas de répartition uniforme ($\alpha_i=1$) et de faisabilités identiques ($\beta_i = 1$) :

$$I_C \cdot \sqrt{n} = n^\alpha \quad [2-13]$$

D'où on peut conclure la relation suivante :

$$\alpha = \frac{\ln(I_C \cdot \sqrt{n})}{2 \cdot \ln(n)} \quad [2-14]$$

1.4.2 De l'inertiel avec indice Cpi à l'inertiel ajusté avec indice I_C

L'équivalence est rapide entre la tolérance définie par le tolérancement inertiel ajusté avec indice I_C et la tolérance définie par le tolérancement inertiel classique avec indice de capabilité Cpi . En comparant les deux tolérances inertielles, on retrouve l'indice de capabilité Cpi :

$$\frac{I_i^{Class.}}{I_i^{Ajust.}} = I_C = Cpi \quad [2-15]$$

Ainsi on possède deux méthodes de tolérancement offrant les mêmes variabilités sur les composants mais laissant le choix d'agir sur les tolérances ou les indices de capabilité. Nous disposons donc de deux paramètres pour garantir la CF grâce au tolérancement inertiel, la tolérance inertielle I_i et l'indice de capabilité Cpi . Dans le paragraphe suivant, nous poussons plus loin le raisonnement pour permettre d'imposer une tolérance ou un indice de capabilité tout en garantissant le respect de la CF .

1.4.3 Tolérance fixe ou indice de capabilité *Cpi* fixe

Dans la pratique, on peut être amené à travailler dans le cadre d'une relation client fournisseur avec un indice de capabilité fixe. Cette partie propose de traduire le couple tolérance inertielle et indice de capabilité *Cpi*, garantissant la CF en un autre couple dont l'un est spécifié par le concepteur. On envisage les deux cas possibles : un indice de capabilité donné ou une tolérance donnée. Par conséquent, l'autre partenaire du couple est calculé pour offrir la même variabilité du composant.

1.4.3.1 Tolérance imposée, indice *Cpi* variable

Considérons le cas où la tolérance d'un composant est imposée par I_i^{imp} . On cherche à conserver la variabilité définie par le tolérancement par le couple I_i et Cpi .

Dans ce cas, la valeur de l'indice *Cpi* varie pour donner la même variabilité. La relation permettant de définir le nouvel indice de capabilité $Cpi^{var.}$ offrant la même variabilité est définie par :

$$Cpi^{var.} = Cpi \cdot \frac{I_i}{I_i^{imp.}} \quad [2-16]$$

1.4.3.2 Indice *Cpi* imposé, tolérance variable

Considérons maintenant le cas plus courant où l'indice de capabilité est imposée par $Cpi^{imp.}$. Comme précédemment, on cherche à conserver la variabilité définie par le tolérancement par le couple I_i et Cpi .

Dans ce cas, la valeur de la tolérance I_i varie pour donner la même variabilité. La relation permettant de définir la nouvelle tolérance $I_i^{var.}$ offrant la même variabilité est définie par :

$$I_i^{var.} = I_i \cdot \frac{Cpi}{Cpi^{imp.}} \quad [2-17]$$

1.5 Synthèse

Nous disposons donc de différentes approches de tolérancement inertiel permettant de garantir la CF. Ne pouvant traiter de front ces trois approches, pour la suite de nos recherches, nous ne considérons que le tolérancement inertiel classique que nous accompagnons de son indice de capabilité *Cpi*.

Cependant, on a vu que ces trois approches sont similaires et offrent les mêmes variabilités sur les composants. Nous proposons ainsi des passerelles permettant d'appliquer les résultats de ce chapitre aux autres méthodes.

On propose aussi une discussion offrant plus de liberté à l'utilisation de la méthode en permettant de définir un indice de capabilité fixe et de calculer les tolérances garantissant la CF.

2 Garantir une CF exprimée par un IT_{CF} et un indice Cpk_{CF} minimum

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Cette partie présente la démarche de développement d'une méthode de tolérancement garantissant une CF en se basant sur le tolérancement inertiel classique et l'utilisation de l'indice C_{pi} . Le but de la méthode proposée est de garantir la condition fonctionnelle de l'assemblage exprimée par une valeur minimale de l'indice C_{pk} , Cpk_{CF} , à garantir sur l'intervalle de tolérance, IT_{CF} .

Pour répondre à cet objectif, nous allons suivre la démarche suivante :

- Dans un premier temps, on exprime l'indice de capabilité C_{pk} de la résultante de l'assemblage Cpk_{ass} en fonction des caractéristiques des composants, décentrage δ_i et écart-type σ_i .
- En considérant que les composants sont tolérancés par le tolérancement inertiel classique visant un intervalle de tolérance IT_{CF} , et que leurs variabilités sont limitées par l'indice de capabilité inertiel C_{pi} , l'expression de l'indice C_{pk} résultant Cpk_{ass} se simplifie.
- Enfin, on étudie les variations de l'indice C_{pk} résultant Cpk_{ass} , pour trouver son minimum, et ainsi identifier la valeur de l'indice C_{pi} garantissant le respect de la CF définie par le Cpk_{CF} à ce minimum du Cpk_{ass} .

2.1 Tolérancement inertiel et indice de capabilité Cpk_{ass} résultant

Dans cette partie, on exprime l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante de l'assemblage en fonction des caractéristiques des composants. On précise les hypothèses permettant de simplifier l'expression de l'indice Cpk_{ass} en considérant que les composants sont en limite de leur capabilité inertielle.

Avec les relations sur les moyennes et les relations sur les écarts-types liant les caractéristiques des composants aux caractéristiques de la résultante d'assemblage, il est possible d'exprimer l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante en fonction des caractéristiques des composants.

$$Cpk_{ass} = \frac{IT_{CF} - \left| \sum_i \alpha_i \cdot \delta_i \right|}{3 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2}} \quad [2-18]$$

2.1.1 Hypothèse simplificatrice : des composants en limite de tolérances inertielles

On se doute que l'indice Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage est moins bon lorsque les composants sont en limite de tolérance. En effet, pour une configuration donnée où un des composants de la chaîne de cote n'est pas en limite de tolérance, l'accroissement de son décalage δ_i ou de son écart-type σ_i provoque un accroissement de une des caractéristiques de la résultante δ_{ass} ou σ_{ass} , ce qui a pour but de faire décroître la valeur de l'indice Cpk_{ass} . Cette considération est valable pour n'importe quel type de tolérance, par intervalle ou inertielle.

On considère donc que les composants de la chaîne de cote sont en limite de tolérance inertielle. Cette hypothèse simplificatrice permet d'exprimer un des paramètres (δ ou σ) de la distribution du composant en fonction de sa tolérance inertielle I_i et de son autre paramètre. On choisit d'exprimer l'écart-type des composants σ_i en fonction de leur décalage δ_i , on obtient ainsi la relation suivante.

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{I_i}{Cpi} \right)^2 - \delta_i^2 \quad [2-19]$$

2.1.2 Indice Cpk_{ass} d'une chaîne de cote en limite de tolérance inertielle

Il est donc possible d'exprimer l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage d'une chaîne de cote dont les composants sont tous en limite de tolérance inertielle en fonction du décalage des composants.

$$Cpk_{ass} = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - \left| \sum_i \alpha_i \cdot \delta_i \right|}{3 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \left(\left(\frac{I_i}{Cpi} \right)^2 - \delta_i^2 \right)}} \quad [2-20]$$

Le problème de l'étude des variations de l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage a donc été réduit d'un problème à $2.n$ variables, comprenant les δ_i et les σ_i , à un problème à n variables, comprenant uniquement les δ_i . Les inerties des composants I_i sont des constantes exprimées par le tolérancement inertiel classique et l'indice Cpi permettant de contrôler les variations des composants.

L'indice Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage peut donc s'écrire :

$$Cpk_{ass} = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - \left| \sum_i \alpha_i \cdot \delta_i \right|}{3 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \left(\left(\frac{\beta_i \cdot IT_{CF}}{6 \cdot Cpi \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \right)^2 - \delta_i^2 \right)}} \quad [2-21]$$

2.2 Valeur et configuration du Cpk_{ass} minimum

L'expression précédente de l'indice Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage est simplifiée par l'hypothèse de composants en limite de tolérance inertielle. L'expression de l'indice Cpk_{ass} traite le cas général d'une chaîne de cote d'incidences non toutes directes, coefficients d'incidence α_i non tous égaux à 1, et de répartition des tolérances non uniforme, indices de faisabilité β_i non tous égaux. Le but de cette partie est de montrer que l'indice Cpk_{ass} de la résultante d'un assemblage de composants en limite de tolérance inertielle admet une valeur minimale. Il s'agit alors de trouver cette plus mauvaise configuration, ensemble des décalages δ_i , pour laquelle ce minimum est atteint et la valeur obtenue dans cette configuration.

2.2.1 Hypothèse simplificatrice : réduction du domaine d'étude

Afin de trouver la plus mauvaise configuration pour laquelle l'indice Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage est minimum, on considère l'indice Cpk_{ass} comme une fonction de plusieurs variables de R^n dans R . Afin de simplifier la fonction Cpk_{ass} , en particulier pour supprimer la fonction valeur absolue sur le décalage résultant, on réduit le domaine d'étude à R^{+n} . Cette simplification est possible car l'indice de capacité Cpk est symétrique par rapport à δ , et on consent que la configuration défavorable se trouve lorsque les décalages des composants se combinent de façon à augmenter le décentrage. En considérant les décalages des composants positifs, cela implique que tous les coefficients d'incidence sont positifs, la réciproque est aussi vraie.

$$\delta_i \in R^+ \Leftrightarrow \alpha_i > 0 \quad [2-22]$$

On définit ainsi la fonction Cpk_{ass} sous les deux hypothèses simplificatrices utilisées par :

$$Cpk_{ass} = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - \sum_i \alpha_i \cdot \delta_i}{3 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \left(\left(\frac{\beta_i \cdot IT_{CF}}{6 \cdot Cpi \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \right)^2 - \delta_i^2 \right)}} \quad [2-23]$$

Et le domaine de définition de cette fonction Cpk_{ass} est donné par $D_{Cpk_{ass}}$:

$$D_{Cpk_{ass}} = (\delta_i \in R^+ / \delta_i < I_i)_{1 \leq i \leq n} \quad [2-24]$$

Que l'on peut aussi noter :

$$D_{Cpk_{ass}} = \prod_{i=1}^n [0, I_i[\quad [2-25]$$

Avec les I_i tolérances inertielles des composants définies par le tolérancement du système.

2.2.2 Recherche de la plus mauvaise configuration

Afin de trouver la plus mauvaise configuration qui donne le plus mauvais indice Cpk_{ass} , il suffit de calculer le gradient de cette fonction de plusieurs variables et d'en trouver le point singulier. Le gradient de la fonction Cpk_{ass} se note :

$$\nabla_{Cpk_{ass}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Cpk_{ass}}{\partial \delta_j} \\ \dots \end{bmatrix} \quad [2-26]$$

Et les termes contenus dans ce vecteur gradient s'expriment comme suit :

$$\frac{\partial Cpk_{ass}}{\partial \delta_j} = \frac{\left(\frac{IT_{CF}}{2} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \delta_i \right) \cdot \alpha_j^2 \cdot \delta_j}{3 \cdot \left(\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpi} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \delta_i^2 \right)^{3/2}} - \frac{\alpha_j}{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpi} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \cdot \delta_i^2}} \quad [2-27]$$

On cherche le point singulier de la fonction Cpk_{ass} , c'est à dire celui qui annule son gradient, ce qui revient à résoudre le système de n inconnus à n équations :

$$\nabla_{Cpk_{ass}} = 0 \quad [2-28]$$

Sur une étape intermédiaire de la résolution en descendant, on trouve la solution incomplète de la $j^{ème}$ équation :

$$\delta_j^{Min} = \frac{\sum_{i=j+1}^n \alpha_i^2 \cdot \delta_i^2 - \frac{IT_{CF}^2}{36 \cdot Cpi^2}}{\alpha_j \cdot \left(\frac{IT_{CF}}{2} - \sum_{i=j+1}^n \alpha_i \cdot \delta_i \right)} \quad [2-29]$$

La résolution de la dernière équation, correspondant à la dernière ligne du système donne la dernière inconnue de la plus mauvaise configuration :

$$\delta_n^{Min} = \frac{IT_{CF}}{18 \cdot Cpi^2 \cdot \alpha_n} \quad [2-30]$$

En remplaçant les solutions des dernières lignes dans les précédentes, on trouve les solutions du système :

$$\delta_j^{Min} = \frac{IT_{CF}}{18 \cdot Cpi^2 \cdot \alpha_j} \quad [2-31]$$

On connaît donc maintenant les valeurs des décentrages des composants δ_j^{Min} définissant la plus mauvaise configuration de l'indice Cpk_{ass} de la résultante de l'assemblage.

Remarques

- On observe que la solution est générale, en effet si le signe des coefficients d'incidence α_j change, cela change le signe du décalage donnant la plus mauvaise configuration δ_j^{Min} . Cela correspond bien à l'hypothèse d'une baisse de l'indice de capabilité résultant lorsque les composants se combinent pour augmenter le décalage de la résultante.
- On peut aussi remarquer que le décalage des composants définissant la plus mauvaise configuration est dépendant de la CF , des coefficients d'incidence α_i et de l'indice de capabilité Cpi . Par contre, les indices de faisabilité β_i n'ont aucune influence. Par conséquent, la plus mauvaise configuration est indépendante des tolérances des composants, mais elle est liée à leur influence dans la chaîne de cote.

2.2.3 La fonction Cpk_{ass} est convexe

Le but de cette partie est de montrer que l'indice de capabilité résultant Cpk_{ass} est une fonction convexe. Ainsi on pourra conclure que la configuration identifiée dans la partie précédente est bien l'unique minimum de la fonction dans le domaine d'étude.

Nous avons démontré dans [Adragna et al, 2006 a] que l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante de l'assemblage est bien convexe. Le cas traité présente les particularités suivantes :

- tolérances des composants définis par le tolérancement inertiel avec exposant α ,
- on considère le cas particulier d'influence directe de tous les composants ($\alpha_i = 1$),
- on considère une distribution uniforme des tolérances ($\beta_i = 1$),

A partir de ces considérations, nous avons pu montrer que la matrice hessienne de la fonction Cpk_{ass} de plusieurs variables est bien définie positive. Cette démonstration peut facilement être appliquée au cas du tolérancement inertiel classique avec l'utilisation de l'indice Cpi que nous utilisons dans ce chapitre. Cependant, l'extension de cette démonstration au cas général ($\alpha_i \neq 1$ et $\beta_i \neq 1$) n'est pas facilement réalisable. D'autres approches ont été envisagées sans succès pour le moment.

2.2.3.1 Simplification de l'étude de convexité

On propose de faire un changement de variable permettant d'exprimer chaque variable de décentrage des composants δ_i en fonction d'une seule variable δ , on propose ainsi de considérer :

$$\delta_i = \alpha_i \cdot \delta \quad [2-32]$$

L'intérêt est de simplifier la problématique tout en traitant le cas générale ($\alpha_i \neq 1$ et $\beta_i \neq 1$). Ce changement de variable revient à traiter le cas particulier dans la direction de plus forte pente déterminée par le gradient de la fonction.

2.2.3.2 Cpk_{ass} fonction d'une seule variable

La fonction Cpk de la résultante de l'assemblage, dans sa direction de plus forte pente peut alors s'écrire :

$$Cpk_{ass} = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - n \cdot \delta}{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpi}\right)^2 - n \cdot \delta^2}} \quad [2-33]$$

Ce qui revient à traiter le cas particulier ($\alpha_i = 1$ et $\beta_i = 1$). Nous avons montré dans [Adragna et al, 2006 b] que cette fonction est convexe. Nous étudions les variations de la fonctions Cpk_{ass} sous la condition qu'elle reste positive. Cette condition se traduit par la relation suivante :

$$Cpi > \frac{\sqrt{n}}{3} \quad [2-34]$$

Le dérivée première de cette fonction Cpk_{ass} simplifiée donne :

$$\frac{\partial Cpk_{ass}}{\partial \delta} = \frac{\frac{IT_{CF}}{2} - n \cdot \delta}{3 \cdot \left(\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpi}\right)^2 - n \cdot \delta^2\right)^{3/2}} - \frac{n}{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{IT_{CF}}{6 \cdot Cpi}\right)^2 - n \cdot \delta^2}} \quad [2-35]$$

Cette fonction dérivée permet de déterminer les signes de variation de la fonction Cpk_{ass} . On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

δ	0	$\delta = \frac{IT_{CF}}{18.Cpi^2}$	$\frac{\partial Cpk_{ass}}{\partial \delta}$
Cpk_{ass}	Cpi	$\sqrt{Cpi^2 - \frac{n}{9}}$	+ infini
$\frac{\partial Cpk_{ass}}{\partial \delta}$	$\frac{-2.n.Cpi^2}{IT_{CF}}$	-	0
			+
			+ infini

Tableau 2-1 : Tableau de variation de Cpk_{ass}

Ce tableau présente les variations de la fonction Cpk_{ass} sous l’hypothèse de rester positive sur son domaine de variation. On peut donc représenter sa variation pour deux valeurs distinctes de l’indice Cpi ($Cpi = 1$ en bleue et $Cpi = 1.33$ en noire) pour le cas particulier d’un assemblage de 5 composants.

Dans le cas où l’indice Cpi ne respecte pas la condition [2-34], (soit $Cpi < 0,75$), on obtient une variation de l’indice Cpk_{ass} qui peut être négative (plus de 50% de non conformité) ($Cpi = 0,7$ en rouge), le minimum est alors atteint lorsque les décentrages sont maxima. On ne s’intéresse pas à ce cas car très mauvais, on considère donc le minimum

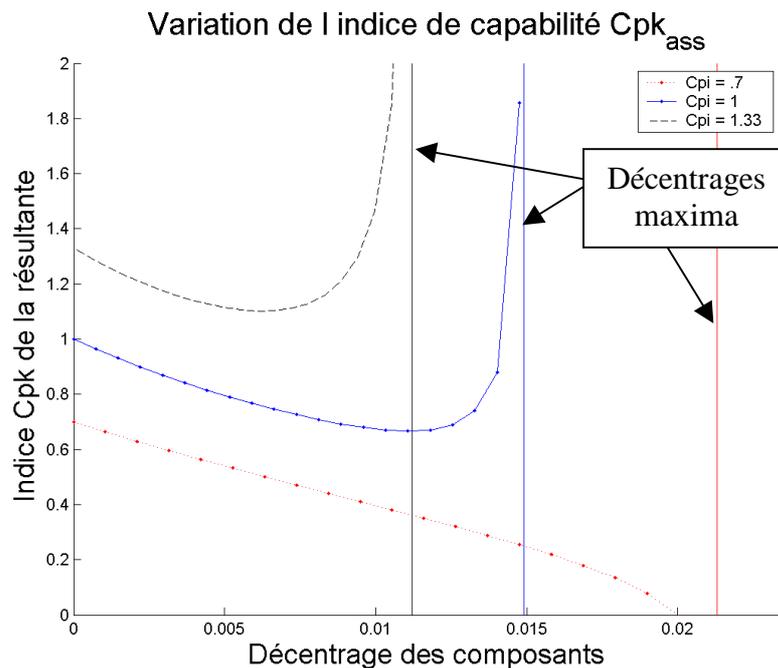


Figure 2-1 : Variation de l’indice Cpk_{ass} de la résultante de l’assemblage en fonction de l’indice Cpi et du décentrage des composants

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

On vient de montrer que l'indice de capabilité Cpk_{ass} de la résultante d'un assemblage dont les composants sont tolérancés en inertiel admet un minimum. La configuration de ce minimum est identifiée par la configuration des composants de la chaîne de cote, en limite de capabilité et dont le décalage est donné par l' IT_{CF} et l'indice de capabilité Cpi identique sur les composants.

Maintenant que cette plus mauvaise configuration est identifiée, il reste à évaluer la valeur du minimum de l'indice Cpk_{ass} en fonction de l'indice Cpi et du nombre de composants. A partir de l'expression de ce minimum, on pourra ainsi proposer une valeur de l'indice Cpi permettant de garantir que le minimum de l'indice Cpk_{ass} sera défini par la condition fonctionnelle donnée par le Cpk_{CF} . C'est ce que traite la partie suivante qui donne la solution pour garantir la CF .

2.3 Garantir un Cpk_{ass} minimum sur l' IT_{CF} de la CF

La plus mauvaise configuration de l'indice Cpk_{ass} de la résultante de l'assemblage est maintenant identifiée. Il reste à évaluer le minimum obtenu en cette plus mauvaise configuration, puis tirer une relation à partir de ce minimum entre l'indice Cpi et la CF à garantir.

2.3.1 Valeur minimale du Cpk_{ass} résultant

Pour connaître la valeur minimale de l'indice Cpk_{ass} de l'assemblage résultant, on évalue la fonction en sa plus mauvaise configuration définie par les δ_j^{Min} . On obtient ainsi le minimum de l'indice Cpk_{ass} résultant défini par la simple relation suivante:

$$Cpk_{ass}^{Min} = \sqrt{Cpi^2 - \frac{n}{9}} \quad [2-36]$$

On remarque que le minimum de l'indice Cpk_{ass} de la résultante d'assemblage dépend seulement de deux paramètres :

- le nombre n de composants présents dans la chaîne de cote
- la valeur de l'indice de capabilité inertiel Cpi qui est respecté sur les composants.

Plus le nombre de composants dans la chaîne de cote est important, plus l'indice de capabilité Cpi devra être important pour limiter la plus mauvaise configuration. Cependant, comme pour le tolérancement statistique traditionnel, on conçoit que plus le nombre de composants dans la chaîne de cote est important, plus le risque de se trouver dans la plus mauvaise configuration est faible, rendant inutile l'utilisation d'un Cpi aussi élevé. Ce compromis à trouver entre garantir la plus mauvaise configuration et une configuration moyenne observée en moyenne fait partie d'une étude statistique que nous présentons dans la suite de ce travail.

2.3.2 Garantir un Cpk_{ass}^{Min} défini par la CF

La précédente relation [2-36] donne un lien entre :

- le minimum de l'indice Cpk_{ass} pour un assemblage de composants dans leur plus mauvaise configuration
- et la valeur de l'indice Cpi des composants de la chaîne de cote.

Il est possible d'inverser cette relation afin d'exprimer l'indice Cpi des composants en fonction du minimum de l'indice Cpk_{ass} résultant et du nombre de composants.

$$Cpi = \sqrt{(Cpk_{ass}^{Min})^2 + \frac{n}{9}} \quad [2-37]$$

Le but de la méthode proposée est de garantir le respect de la Condition Fonctionnelle grâce au tolérancement inertiel. On cherche donc à toujours respecter la CF et en particulier au point le plus critique de l'assemblage défini par la plus mauvaise configuration. La précédente relation [2-37] permet de trouver la valeur des indices Cpi permettant de garantir la CF dans la plus mauvaise configuration d'assemblage du tolérancement inertiel.

$$Cpi_{CF} = \sqrt{Cpk_{CF}^2 + \frac{n}{9}} \quad [2-38]$$

Où Cpk_{CF} est la valeur de l'indice Cpk définissant la CF sur l' IT_{CF} , intervalle de tolérance de la CF, et n est le nombre de composants dans la chaîne de cote.

2.3.3 Le cas d'application

2.3.3.1 Première condition fonctionnelle: $IT_{CF} = 1\text{mm}$ et $Cpk_{CF} = 1$

On applique la méthode au cas d'application traité par les différentes méthodes de tolérancement et présenté par la figure 1-1. Ce cas d'application est un assemblage de $n = 5$ composants. La CF est donnée par l'intervalle de tolérance $IT_{CF} = 1\text{ mm}$, et par défaut l'indice de capabilité garantissant cet IT_{CF} et donnée par $Cpk_{CF} = 1$. Dans ces conditions, l'indice de capabilité Cpi_{CF} à imposer sur les composants est donné par la relation suivante :

$$Cpi_{CF} = \sqrt{Cpk_{CF}^2 + \frac{n}{9}} = \sqrt{1 + \frac{5}{9}} = 1,247 \quad [2-39]$$

Il est possible d'évaluer la plus mauvaise configuration pour laquelle la CF sera tout juste respectée dans notre cas. La plus mauvaise configuration est donnée par le décalage des composants de la chaîne de cote par la relation [2-31]. Dans notre cas, le décalage donnant cette plus mauvaise configuration vaut :

$$\delta_j^{Min} = \frac{IT_{CF}}{18.Cpi^2.\alpha_j} = \frac{1}{18.1,247^2} = 0,036 \quad [2-40]$$

Les tolérances des composants sont calculées par la méthode de tolérancement inertiel classique visant un intervalle de tolérance donné par la relation [2-10] dans le cas particulier d'incidence directe des composants et de répartition uniforme des tolérances. Le tableau suivant résume les tolérances des composants.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-1	-1	1
Faisabilité β_i	1	1	1	1	1
Tolérance I_i	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075

Tableau 2-2 : Caractéristiques et tolérances des composants garantissant la CF

La figure suivante est la représentation des domaines de tolérance des composants dans le (δ, σ^2) , ainsi que la comparaison du domaine de la CF avec le domaine résultant de l'analyse des tolérances.

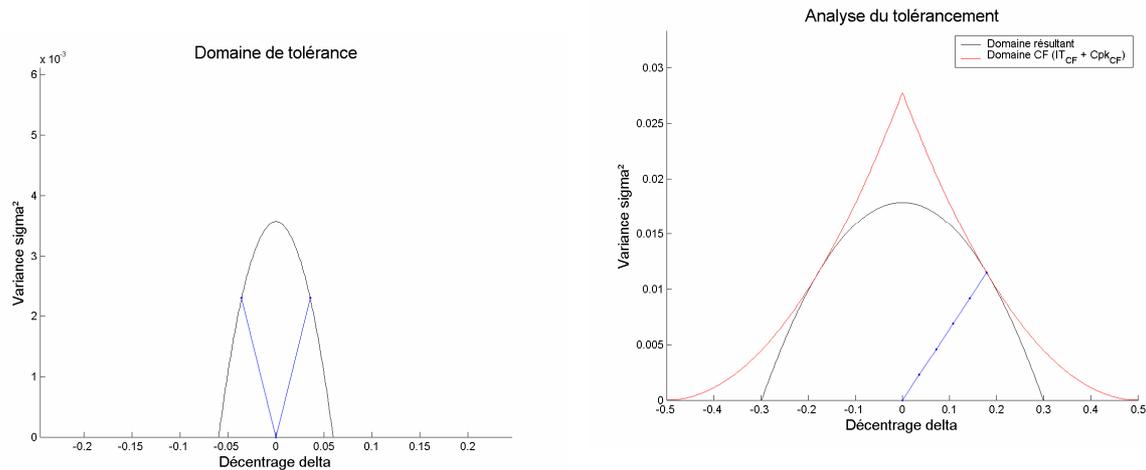


Figure 2-2 : Domaine des tolérances inertielles garantissant le $Cpk_{CF} = 1$, et analyse des tolérances

Les caractéristiques des composants δ_i et σ_i^2 sont schématisées par un vecteur dont le décentrage est donné par la relation [2-31] et la variance par l'hypothèse de composants en limite de tolérance. La plus mauvaise configuration de la résultante est représentée par la somme vectorielle des vecteurs caractéristiques des composants.

Remarques

- On se rend compte que la CF est respectée : le domaine résultant de l'analyse des tolérances des composants est inclus exactement dans le domaine de la tolérance fonctionnelle. On conclut que la méthode est comparable au tolérancement traditionnel au pire des cas en terme de respect de la CF . Ce qui différencie l'efficacité de ces deux méthodes concerne la partie non exploitée. Dans le cas du tolérancement inertiel, l'indice qualifiant la partie exploitée vaut $R_{expl.} = 0,768$, alors que la valeur de cet indice dans le cas du tolérancement traditionnel au pire des cas vaut $R_{expl.} = 0,280$.
- On constate que la plus mauvaise configuration est la configuration pour laquelle la résultante de l'assemblage est la plus mauvaise en terme de respect de la CF . Avec cette méthode de tolérancement, on est capable de contrôler cette plus mauvaise configuration et de l'imposer à la valeur choisie, en l'occurrence à la valeur de la CF définie ici par un Cpk_{CF} sur un IT_{CF} . En résumé, la méthode inertielle paraît aussi efficace que la méthode du "pire des cas" car elle garantit la CF dans toutes les configurations. Par contre, elle autorise trois fois plus de variations au final permettant de mieux exploiter le domaine de tolérance de la CF .

2.3.3.2 Seconde condition fonctionnelle : $IT_{CF} = 1\text{mm}$ et $Cpk_{CF} = 1,2$

Afin de montrer que la méthode est efficace pour garantir un IT_{CF} associé à toute valeur de l'indice Cpk_{CF} , on choisit d'appliquer à nouveau la méthode mais en changeant la CF . On sélectionne cette fois-ci une CF exprimée par le même $IT_{CF} = 1\text{mm}$ mais en imposant un indice de capabilité $Cpk_{CF} = 1,2$.

Avec cette nouvelle CF , l'indice de capabilité à imposer sur les composants vaut :

$$Cpi_{CF} = \sqrt{Cpk_{CF}^2 + \frac{n}{9}} = \sqrt{1,2^2 + \frac{5}{9}} = 1,413 \quad [2-41]$$

Les tolérances inertielles des composants sont identiques à celles définies précédemment par le tolérancement inertiel classique visant un IT_{CF} . La plus mauvaise configuration est maintenant définie par le décentrage donné ci dessous :

$$\delta_j^{Min} = \frac{IT_{CF}}{18.Cpi^2.\alpha_j} = \frac{1}{18.1,413^2} = 0,028 \quad [2-42]$$

La figure suivante présente les domaines de tolérance des composants, ainsi que la comparaison du nouveau domaine de tolérance de la CF avec le domaine résultant de l'analyse des tolérances.

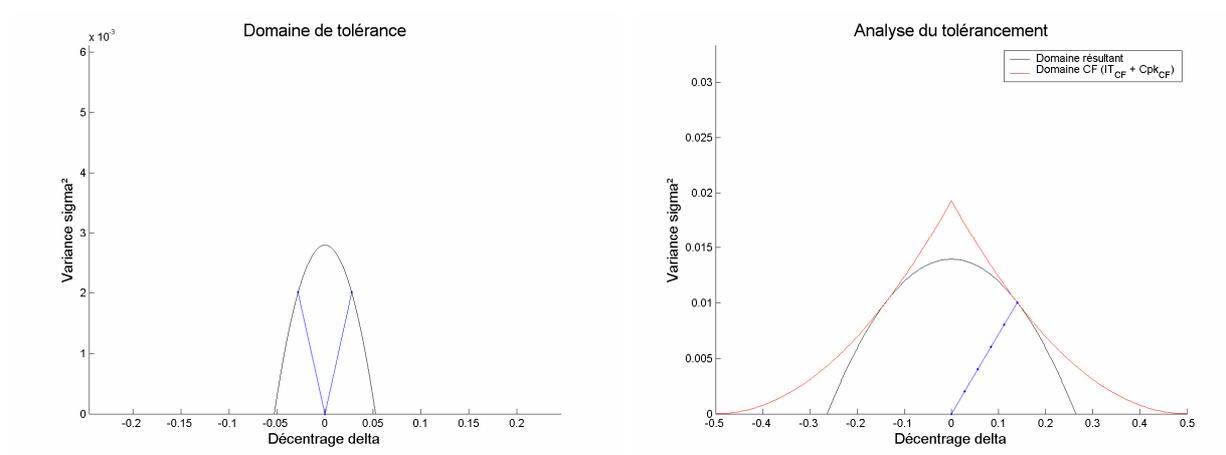


Figure 2-3 : Domaine des tolérances inertielles garantissant le $Cpk_{CF} = 1,2$, et analyse des tolérances

La figure ci-dessus présente la plus mauvaise configuration de l'assemblage sur les composants et sur le domaine de tolérance.

Remarque

Même pour une CF définie par un IT_{CF} et un Cpk_{CF} différent de 1, la méthode présentée est efficace et garantit le respect de la CF dans la plus mauvaise configuration. La méthode est donc efficace quelle que soit la valeur de l'indice Cpk_{CF} à garantir sur la CF.

2.3.4 Impossible d'atteindre la plus mauvaise configuration

Il se peut que la plus mauvaise configuration du tolérancement inertiel garantissant la CF ne soit pas atteignable. C'est le cas lorsque la variation maximale d'un composant est plus faible que le décalage qui définit la plus mauvaise configuration. Ce cas peut être rencontré en fonction des valeurs des indices de faisabilité. En effet, ces derniers interviennent dans la définition des tolérances inertielles mais pas dans celle des décentrages de la plus mauvaise configuration.

A partir de la relation [2-43] donnant la variabilité maximale des composants, et l'équation [2-31] définissant le décentrage de la plus mauvaise configuration, on peut faire la comparaison de la variabilité avec le décentrage présentée par la relation [2-44].

$$I_i^{Max} = \frac{I_i^{Class}}{Cpi_{CF}} \quad [2-43]$$

La plus mauvaise configuration ne peut être atteinte si la variation permise est plus petite que le plus mauvais décentrage du composant, soit :

$$I_i^{Max} < \delta_i^{Min} \quad [2-44]$$

Ce qui se traduit par :

$$\frac{\beta_i \cdot IT_{CF}}{6 \cdot Cpi \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} < \frac{IT_{CF}}{18 \cdot Cpi^2 \cdot \alpha_i} \quad [2-45]$$

Ce qui peut s'écrire :

$$|\beta_i \cdot \alpha_i| < \frac{\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}}{3 \cdot Cpi} \quad [2-46]$$

La plus mauvaise configuration ne peut donc être atteinte si au moins un composant de la chaîne respecte la condition définie par l'équation [2-46]. Dans un tel cas, le minimum de l'indice résultant Cpk_{ass} sera donc supérieur au Cpk_{CF} . La CF sera donc respectée mais le tolérancement peut être qualifié de sur-contraint.

On ne peut cependant, rien conclure actuellement sur la nouvelle "plus mauvaise" configuration, les cas sont multiples. On peut seulement dire que la méthode proposée pour garantir la CF est toujours valable.

2.3.4.1 Le cas d'application : une répartition non uniforme des tolérances

Dans cette application, on décide de tolérer les composants avec une répartition non uniforme des tolérances. Le tableau suivant regroupe les caractéristiques des composants, coefficients d'incidence dans la chaîne de cote et indice de faisabilité, ainsi que les tolérances de chaque composant.

La CF est identique au cas précédent ($IT_{CF} = 1\text{mm}$ et $Cpk_{CF} = 1$), de ce fait l'indice Cpi garantissant la CF est aussi identique ($Cpi_{CF} = 1,247$).

	Composant 1	Composant 2	Composant 3	Composant 4	Composant 5
Incidence α_i	-1	-1	-0,1	-1	1
Faisabilité β_i	2	1	1	1	1
Tolérance I_i	0,126	0,063	0,063	0,063	0,063

Tableau 2-3 : Caractéristique des composants et tolérances

On se rend compte que le composant 3 se trouve dans le cas où la tolérance est plus petite que le décentrage de la plus mauvaise configuration. En effet, il vérifie la relation donnée par [2-46] :

$$|\beta_3 \cdot \alpha_3| < \frac{\sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}}{3 \cdot Cpi} \Leftrightarrow 0,1 < 0,708 \quad [2-47]$$

Dans ce cas, comme le décentrage de la plus mauvaise configuration ne peut être atteint par ce composant, son décentrage est maximal et la dispersion est nulle.

La figure 2-4 suivante montre les différents domaines de tolérance des composants, on retrouve bien deux domaines de tailles différentes déterminées par les indices de faisabilité β_i des composants. On présente aussi la comparaison du domaine de tolérance de la CF avec le domaine résultant de l'analyse des tolérances.

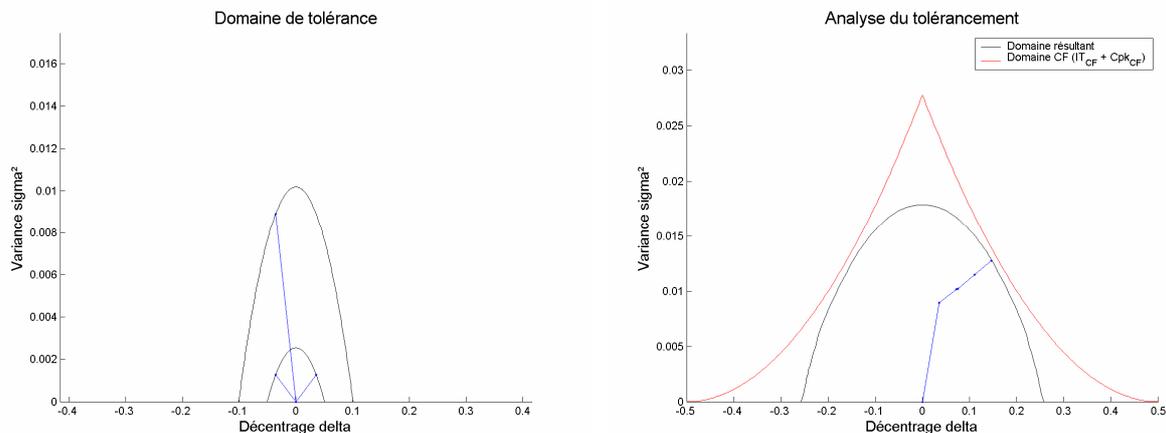


Figure 2-4 : Domaine des tolérances inertielles garantissant un $Cpk_{CF} = 1$, et analyse des tolérances

Cette dernière figure présente la plus mauvaise configuration sur les composants et sur le domaine de tolérance. On se rend bien compte que le domaine résultant du tolérancement n'atteint pas le domaine CF . Dans ce cas, le tolérancement garantit toujours le respect de la CF , on peut même dire que le tolérancement est trop sévère.

Remarque

Quelle que soit la répartition des tolérances, la méthode proposée garantit le respect de la CF . Dans certains cas, le tolérancement proposé est même trop sévère, ce qui permettrait d'élargir les tolérances. Afin de garantir tout juste la CF , on peut envisager d'élargir les tolérances des composants.

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

Cette partie est un pas important dans le développement du tolérancement inertiel. Elle montre l'intérêt et l'efficacité de la méthode pour le tolérancement de chaîne de cote 1D dont la CF est définie par un IT . En effet, le tolérancement inertiel n'est pas uniquement applicable à une CF définie par une inertie mais aussi par un intervalle de tolérance.

De plus, cette méthode statistique de tolérancement est capable de garantir une CF définie par un indice Cpk_{CF} . Son utilisation nécessite alors la simple utilisation d'un seul indice de capabilité sur les composants, l'indice inertiel Cpi , dont la valeur est calculée en fonction de la CF .

3 Garantir une CF exprimée par un IT_{CF} et un TNC_{CF} maximum

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Nous avons proposé dans la partie 2 de ce chapitre, une méthode garantissant une CF définie par un intervalle de tolérance (IT_{CF}) et un indice de capabilité Cpk qualifiant cet intervalle (Cpk_{CF}).

Cette partie a pour objectif d'appliquer cette méthode de tolérancement inertiel pour garantir une CF toujours définie par un IT_{CF} mais qualifiée cette fois ci par un Taux de Non Conformité (TNC_{CF}).

Le développement de cette partie suit la démarche suivante :

- dans un premier temps, on définit le domaine de la tolérance fonctionnelle défini par un IT_{CF} et un TNC_{CF} pour une distribution normale du lot,
- dans un second temps, on choisit un lien entre l'indice Cpk et le TNC de la loi normale pour définir une solution permettant de garantir la CF ,
- on propose ensuite une solution permettant de garantir une CF définie par un IT_{CF} et un TNC_{CF} ,
- enfin, la méthode est appliquée sur l'exemple de l'assemblage de cinq composants.

3.1 Le domaine de tolérance défini par un TNC_{CF} associé à un IT_{CF}

On a démonté l'intérêt du tolérancement inertiel pour garantir un IT_{CF} . Mais l'expression d'une CF , surtout en tolérancement statistique, se caractérise aussi par un TNC à respecter sur un intervalle de tolérance, le TNC_{CF} . Plus fréquente, cette expression de la CF traduit la volonté du concepteur d'utiliser une méthode statistique de tolérancement.

Pour associer un domaine de tolérance à une CF définie par un TNC_{CF} , il faut faire le choix d'une loi de distribution. Par défaut, on choisit la loi normale pour deux raisons principales :

- La loi est symétrique, donc la répartition des TNC est identique des deux cotés. On s'attend finalement à obtenir un domaine de tolérance symétrique tout comme le domaine de tolérance donné par l'indice Cpk_{CF} ou le domaine résultant de l'analyse des tolérances.
- Le théorème central limite indique que la résultante d'un assemblage de loi quelconque tend vers une loi normale.

3.1.1 Domaine de tolérance d'un TNC_{CF} sur un IT_{CF}

Dans notre application, on choisit de définir le domaine de tolérance d'un TNC sur un IT associé à la loi de distribution normale. Le TNC est calculé par l'intégrale de la probabilité de densité de la loi normale. Il est donc impossible d'exprimer de façon analytique l'écart-type en fonction du TNC et du décentrage. Le domaine de tolérance est donc déterminé numériquement.

La figure suivante montre les domaines d'acceptation pour différentes valeurs de TNC_{CF} sur un même IT_{CF} . En complément du domaine TNC_{CF} , on trace le domaine Cpk associé au TNC du cas décentré (limite inférieure fonction du Cpk) défini par la relation [1-30] donnée par [Boyles, 1991].

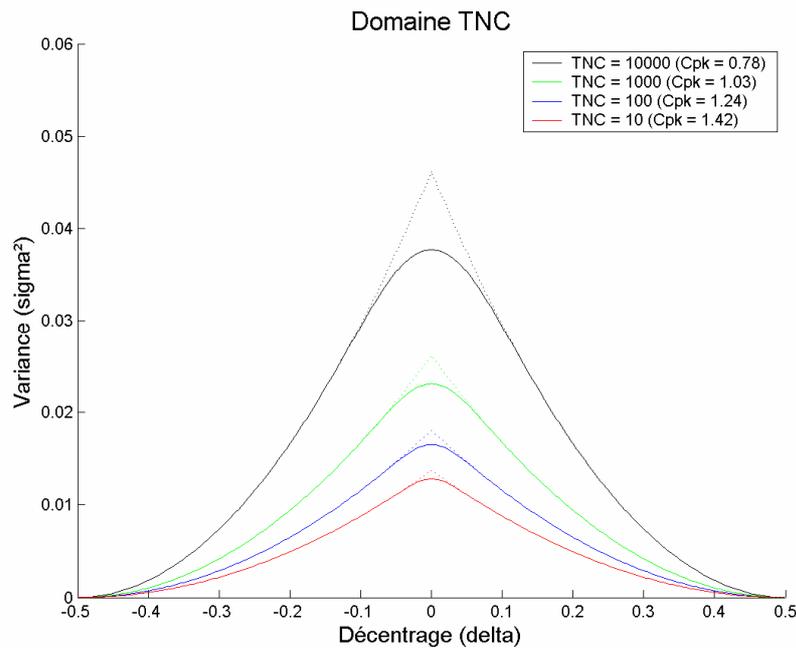


Figure 2-5 : Les domaines de tolérance des TNC_{CF}

La figure précédente montre la comparaison des deux types de domaines CF . On remarque que les formes des domaines TNC_{CF} sont similaires aux domaines Cpk_{CF} :

- en configuration décentrée, les deux domaines sont strictement égaux,
- en configuration centrée ou proche de la cible, le domaine TNC_{CF} est plus restrictif que le domaine Cpk_{CF} .

Remarque

On se rend compte que le domaine de tolérance défini par un TNC_{CF} ou un indice de capabilité Cpk_{CF} sont très similaires, en particulier dans les cas décentrés où les domaines sont identiques. On décide donc d'utiliser le lien entre l'indice de capabilité Cpk et TNC pour développer la suite de cette partie.

3.1.2 Garantir un TNC_{Max} grâce au Cpk de la plus mauvaise configuration

[Boyles, 1991] présente deux relations qui lient le TNC d'un lot en fonction du Cpk du lot pour une distribution normale des composants. Il met en évidence l'existence de deux bornes délimitant le TNC d'un lot à indice Cpk constant.

Avec ce qu'on a pu constater sur la méthode proposée de tolérancement inertiel garantissant le respect d'un indice Cpk_{CF} sur l' IT_{CF} , la plus mauvaise configuration est une combinaison de configuration décentrée des composants. La résultante est donc aussi décentrée. On peut donc s'attendre à ce que le TNC atteint par la plus mauvaise configuration soit défini par le Cpk d'un lot décentré. On s'intéresse donc uniquement au lien entre le Cpk et la borne inférieure du TNC rappelée ci-dessous :

$$TNC_{Inf.} = (1 - \Phi(3.Cpk)).10^6 \quad [2-48]$$

On vient de choisir la relation qui fait le lien entre la méthode de tolérancement proposée précédemment pour garantir un Cpk_{CF} sur un IT_{CF} et la nouvelle méthode qu'on cherche à mettre en place garantissant un TNC_{CF} sur un IT_{CF} .

Grâce à la relation précédente liant le TNC au Cpk dans la configuration décentrée du lot, on décide d'utiliser la méthode précédente de tolérancement garantissant le respect de l'indice Cpk de la résultante de l'assemblage pour garantir un TNC . De cette relation, on peut exprimer la valeur de l'indice Cpk_{CF} à garantir en vue de respecter le TNC_{CF} sur l'assemblage :

$$Cpk_{CF} = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{TNC_{CF}}{10^6}\right)}{3} \quad [2-49]$$

On a donc le lien permettant de définir une CF équivalente à celle demandée, et ainsi déterminer l'indice de capabilité Cpi à imposer sur les tolérances inertielles des composants dans le but de garantir un TNC_{CF} sur l' IT_{CF} .

La méthode que nous proposons ici, a pour but de garantir une CF définie par un IT_{CF} et un TNC_{CF} par le tolérancement inertiel. Les tolérances sont calculées par la méthode classique visant un IT_{CF} sous l'hypothèse de répartition aléatoire des moyennes. Quant à l'indice de capabilité Cpi à imposer sur les composants pour garantir cette CF , il se calcule par l'intermédiaire de l'indice de capabilité équivalent à la CF donné ci dessus par la relation [2-49].

3.1.3 Le cas d'application

3.1.3.1 Une condition fonctionnelle: $IT_{CF} = 1\text{mm}$ et $TNC_{CF} = 300\text{ppm}$

On applique la méthode au cas d'application traité par les différentes méthodes de tolérancement et présenté par la figure figure 1-1. Ce cas d'application est un assemblage de $n = 5$ composants. La CF est donnée par l'intervalle de tolérance $IT_{CF} = 1\text{ mm}$, et le taux de non-conformité à garantir $TNC_{CF} = 300\text{ppm}$.

Dans une première phase, on calcule l'indice de capabilité Cpk_{CF} équivalent à cette condition fonctionnelle.

$$Cpk_{CF} = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{300}{10^6}\right)}{3} = 1,144 \quad [2-50]$$

Dans ces conditions, l'indice de capabilité Cpi_{CF} à imposer sur les composants est donné par la relation suivante :

$$Cpi_{CF} = \sqrt{Cpk_{CF}^2 + \frac{n}{9}} = \sqrt{1,144^2 + \frac{5}{9}} = 1,365 \quad [2-51]$$

Dans notre cas, le décalage donnant cette plus mauvaise configuration vaut :

$$\delta_j^{Min} = \frac{IT_{CF}}{18.Cpi^2.\alpha_j} = \frac{1}{18.1,144^2} = 0,042 \quad [2-52]$$

Les tolérances des composants sont calculées par la méthode de tolérancement inertiel classique visant un intervalle de tolérance. Les tolérances des composants sont les mêmes que pour les autres cas d'application, seul change l'indice de capabilité Cpi à imposer sur les composants, c'est l'intérêt de cette méthode.

La figure suivante présente les domaines de tolérance des composants, ainsi que la comparaison du domaine de la CF avec le domaine résultant de l'analyse des tolérances.

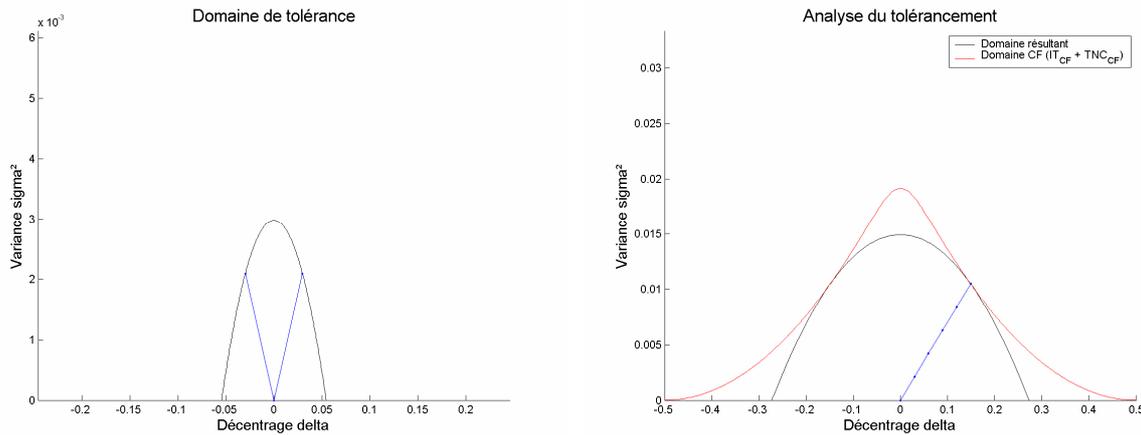


Figure 2-6 : Domaines des tolérances inertielles garantissant un TNC_{CF} , et analyse des tolérances

La figure ci-dessus présente la plus mauvaise configuration de l’assemblage sur les composants et sur le domaine de tolérance.

On se rend compte que la CF est bien respectée, le domaine résultant de l’analyse des tolérances des composants est inclus dans le domaine de la CF .

On admet qu’il existe des répartitions de tolérances qui ne permettent pas d’atteindre la plus mauvaise configuration comme cité précédemment avec la CF définie par un Cpk_{CF} .

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

La méthode de tolérancement 1D que l’on propose est une méthode de tolérancement statistique capable de garantir un TNC sur la résultante de l’assemblage. Bien que le tolérancement statistique sous-entend qu’on prend des risques sur la CF , ou que la méthode est efficace sous certaines hypothèses dont le centrage des composants, la méthode que l’on propose garantit la CF dans toutes les configurations possibles de la résultante, y compris la plus mauvaise configuration où la CF est juste respectée.

3.2 Comparaison des méthodes de tolérancements

Cette partie traite de la comparaison des variabilités permise sur les composants par les approches traditionnelle de tolérancement et notre approche garantissant la CF .

3.2.1 Comparaison des écarts-types maximums autorisés

[Radouani , 2003] propose une estimation du gain entre les tolérancements traditionnelle par intervalle de tolérance sous l’hypothèse statistiques et pire des cas. Pour comparer les différentes méthodes de tolérancement, on considère des lots centrés et dispersé dont l’indice de capabilité $Cp = 1$. Cela équivaut à considéré six écarts-types dans un intervalle de tolérance, ou un écart-type égale à une inertie.

Ainsi pour les différentes approches on a :

- au pire des cas :

$$\sigma_{pc}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{6.n} \quad [2-53]$$

- en statistique :

$$\sigma_{st}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{6\sqrt{n}} \quad [2-54]$$

- en inertiel classique :

$$\sigma_{ic}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{6\sqrt{n}} \quad [2-55]$$

- en inertiel ajusté, avec $Cpi = \sqrt{1 + \frac{n}{9}}$

$$\sigma_{ia}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{2\sqrt{9.n + n^2}} \quad [2-56]$$

Avec une étude de limite, on constate que le tolérancement inertiel ajusté offre un écart-type trois fois plus large que celui du tolérancement traditionnel au pire des cas.

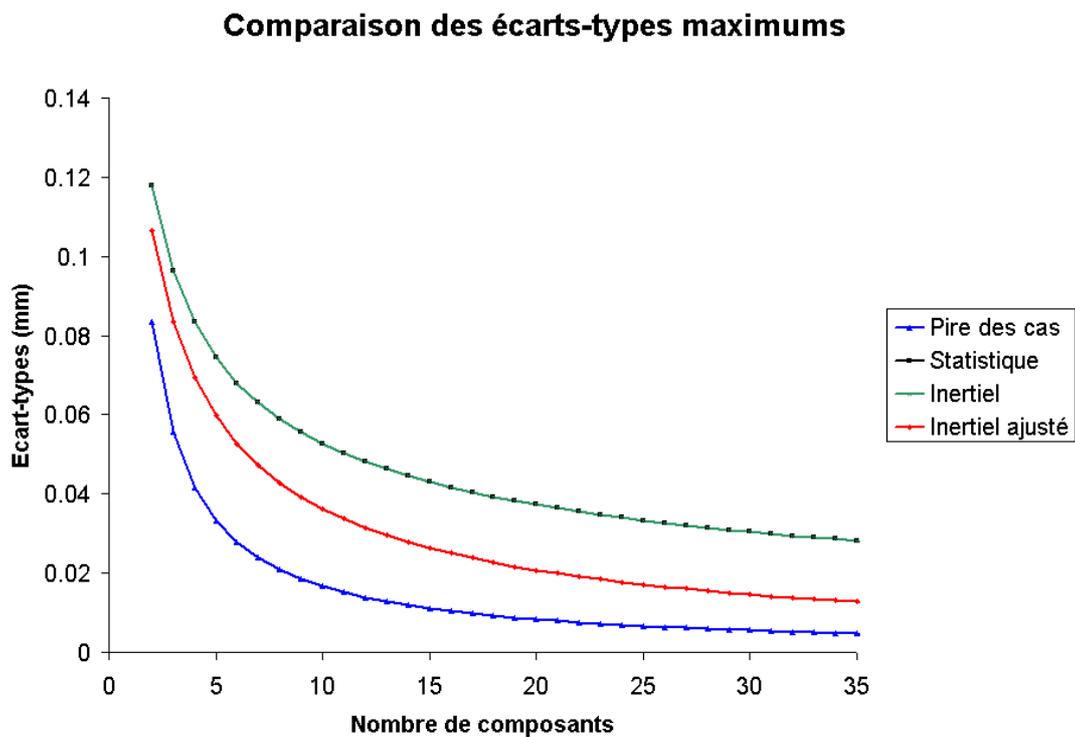


Figure 2-7 : Comparaison des écarts-types maximums des différentes approches de tolérancement

3.2.2 Comparaison des décentrages maximums autorisés

On considère maintenant que les écarts-types sont nuls et que les décentrages sont maximums, définis par la tolérance.

Ainsi pour les différentes approches on a :

- au pire des cas :

$$\delta_{pc}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{2.n} \quad [2-57]$$

- en statistique :

$$\delta_{st}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{2.\sqrt{n}} \quad [2-58]$$

- en inertiel classique :

$$\delta_{ic}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{6.\sqrt{n}} \quad [2-59]$$

- en inertiel ajusté, avec $Cpi = \sqrt{1 + \frac{n}{9}}$

$$\delta_{ia}^{Max} = \frac{IT_{CF}}{2.\sqrt{9.n + n^2}} \quad [2-60]$$

Avec une étude de limite, on constate que le tolérancement inertiel ajusté offre un décentrage égale à celui du tolérancement traditionnel au pire des cas.

Comparaison des décentrages maximums

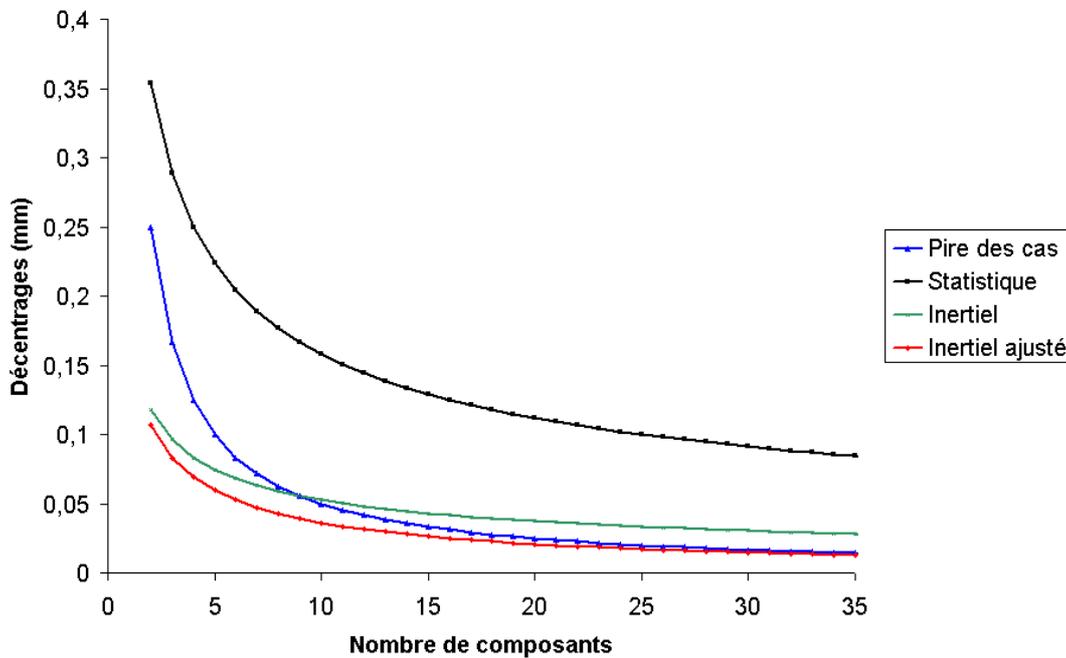


Figure 2-8 : Comparaison des décentrages maximums des différentes approches de tolérancement

3.2.3 Comparaison grâce au graphe ($\delta\sigma^2$)

Nous présentons ici un bilan des comparaisons des approches de tolérancement sur le cas d'assemblage de 5 composants. On obtient le tableau suivant :

	$R_{\text{expl.}}$	R_{HCF}	R_{HCF}^{MC}
<i>Pire des cas</i>	0,279	0	0
<i>Statistique</i>	1	0,680	0,148
<i>Statistique augmenté</i>	0,412	0,233	0
<i>Inertiel classique</i>	0,980	0,342	0,018
<i>Inertiel ajusté</i>	0,768	0	0

Tableau 2-4 : Comparaison des approches de tolérancement

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

En observant les résultats de la comparaison du tolérancement traditionnel au pire des cas et du tolérancement inertiel, on constate que lorsque le nombre de composants croît :

- le décentrage maximal de l'inertiel ajusté tend vers celui du pire des cas,
- alors que l'écart-type de l'inertiel ajusté tend vers trois fois celui du pire des cas.

On remarque donc que le tolérancement inertiel ajusté tend vers le tolérancement au pire des cas mais en offrant trois fois de dispersion dans le cas centré. On peut donc dire que le tolérancement inertiel ajusté est une méthode statistique permettant de garantir "au pire des cas" la *CF* de l'assemblage.

Le tableau 2-4 permet de constater que le tolérancement inertiel ajusté est le compromis entre tolérancement au pire des cas, offrant un $R_{HCF} = 0$ donc statistiquement aucun risque d'être hors de la *CF*, et le tolérancement statistique offrant la meilleure exploitation du domaine résultant.

CONCLUSION DE LA PARTIE

Le point important de cette partie est l'identification de la configuration des composants qui donne la plus mauvaise configuration de la résultante de l'assemblage. Cette configuration est clairement identifiée en fonction de l'indice C_{pi} des composants et de l' IT_{CF} .

L'utilisation de cette propriété est utilisée pour la synthèse de tolérance. En effet, en application sur les tolérances inertielles classiques I_i , on calcule l'indice C_{pi} qui garantit la *CF*. Pour autant, cette propriété peut être utilisée dans une phase d'analyse de tolérance pour calculer la *CF* garantie en fonction des tolérances I_i et de l'indice C_{pi} .

Nous avons aussi mis en évidence une condition qui permet de tester si cette plus mauvaise configuration peut être atteinte. Cependant, il reste un point obscur : celui de l'exploitation de la marge de tolérance restante pour augmenter les tolérances I_i tout en garantissant la *CF* en une configuration critique.

En outre, on ne sait pas encore évaluer le risque pris lorsque le tolérancement ne garantit pas parfaitement la *CF*. Ce dernier point est une perspective qui sera traitée dans la partie 4.

4 Garantir la CF en considérant les décentrages aléatoires des composants

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

La méthode proposée ci-dessus permet de garantir la CF de l'assemblage dans toutes les configurations, y compris la plus mauvaise configuration. On peut se poser la question de l'occurrence de cette plus mauvaise configuration qui restreint les tolérances des composants. Est-il possible de prendre un risque qui serait maîtrisé tout en garantissant la CF dans la majorité des cas ?

Cette partie a pour but de proposer une solution de tolérancement qui fait le compromis entre garantir la CF de l'assemblage et élargir les tolérances des composants. La réflexion se déroule en deux étapes :

- Dans un premier temps, on estime la répartition des assemblages résultants grâce à des simulations de Monte Carlo. Deux modèles sont présentés :
 - l'un est une répartition uniforme des composants dans le domaine de tolérance comme présenté dans le précédent chapitre,
 - l'autre considère des composants en limite de tolérance inertielle uniformément répartis sur la limite du domaine de tolérance.
- Dans un second temps, on propose une méthode permettant de façon simple d'élargir les tolérances des composants tout en garantissant la CF dans la majorité des cas. On propose aussi des abaques basés sur les résultats des simulations permettant de choisir l'indice C_{pi} à imposer sur les composants en fonction de la CF et d'un risque considéré.

4.1 Répartition des assemblages par simulation de Monte Carlo

La méthode d'analyse du tolérancement basée sur la simulation de Monte Carlo va nous permettre d'évaluer la répartition des assemblages en fonction du nombre de composants dans la chaîne de cote.

4.1.1 Hypothèses

4.1.1.1 Choix d'une configuration particulière

Afin de réduire le nombre de simulations à effectuer, on choisit de considérer le cas particulier d'une incidence directe pour tous les composants de la chaîne de cote ($\alpha_i = 1$), ainsi qu'une répartition uniforme des tolérances des composants ($\beta_i = 1$).

Comme pour l'analyse des tolérances par la somme de Minkowski, certaines configurations de tolérancement (α_i et β_i) ne permettent pas d'atteindre la plus mauvaise configuration. On se doute que les résultats ne seront pas identiques en considérant une répartition non homogène des tolérances ou des incidences non toutes directes.

4.1.1.2 Indépendance du choix de l' IT_{CF}

L'intervalle de tolérance de la CF, IT_{CF} , n'est pas un paramètre que l'on fait varier dans les simulations. D'après leurs définitions, les caractéristiques des composants donnant la plus mauvaise configuration sont proportionnelles à l'intervalle de tolérance IT_{CF} . Une variation de l' IT_{CF} consiste donc à faire une homothétie des domaines, et ne devrait donc pas influencer sur les résultats des simulations de MC.

4.1.2 Simulations d'assemblage de composants dans leurs domaines de tolérance

On a vu que les méthodes de tolérancement garantissant une CF définie par un Cpk_{CF} ou un TNC_{CF} sont identiques. Par conséquent on utilise le résultat d'une simulation pour étudier les répartitions des assemblages suivant les deux critères : l'indice de capabilité Cpk_{ass} et le taux de non-conformité TNC_{ass} de l'assemblage résultant.

Par conséquent, on choisit d'imposer la même CF à tous les assemblages. Les tolérances des composants I_i ainsi que les indices de capabilité Cpi sont calculés dans le but de respecter la CF .

Les études de la répartition des assemblages résultants par la méthode de Monte Carlo ont pour objet :

- l'efficacité de la méthode qui garantit bien les différentes CF ,
- mais aussi la sévérité de la plus mauvaise configuration par rapport à la combinaison aléatoire des décentrages.

L'idée est de simuler des assemblages avec un nombre croissant de composants dans la chaîne de cote. On peut ainsi montrer que la compensation due au décentrage aléatoire des composants est bien croissante avec le nombre de composants.

4.1.2.1 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1$, ou un $TNC_{CF} = 1350$ ppm

Nous considérerons le cas courant où le concepteur ne spécifie qu'un intervalle de tolérance IT_{CF} comme condition fonctionnelle. La CF est donc exprimée par un indice de capabilité $Cpk_{CF} = 1$, ce qui équivaut dans le cas décentré à un taux de non-conformité $TNC_{CF} = 1350$ ppm.

Observation des simulations

Les analyses de la méthode de tolérancement que nous proposons pour garantir cette CF donne les graphes suivants, sur lesquels on observe un centrage des assemblages résultants.

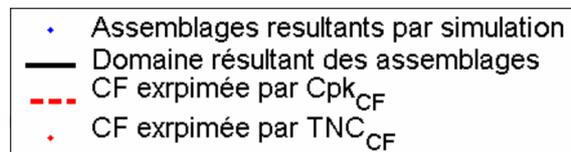


Figure 2-9 : Légende des figures suivantes

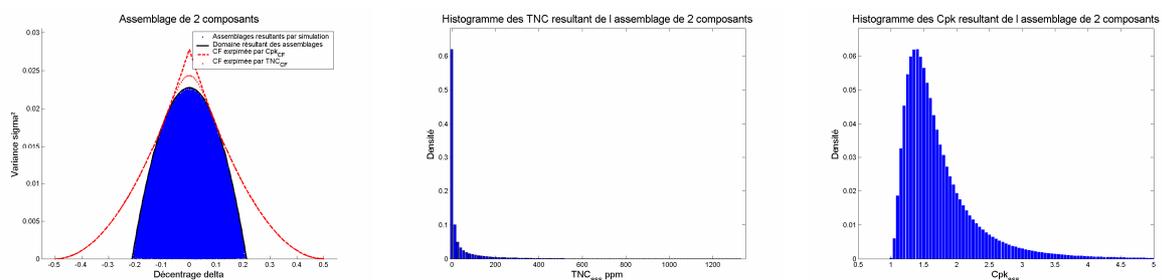


Figure 2-10 : Simulation d'assemblage de 2 composants

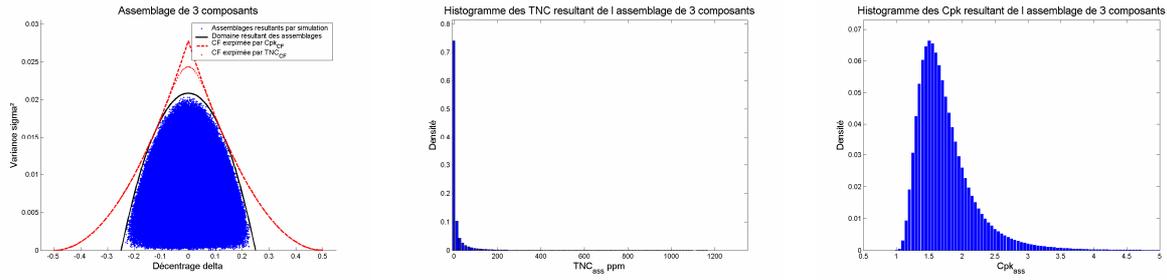


Figure 2-11 : Simulation d'assemblage de 3 composants

Remarque

L'application de la méthode est justifiée pour des assemblages de deux ou trois composants dans la chaîne de cote. En effet, la plus mauvaise configuration donnant un TNC_{ASS} maximum égal au TNC_{CF} , ou un Cpk_{ASS} minimum égal au Cpk_{CF} , est rencontrée dans les simulations que l'on présente.

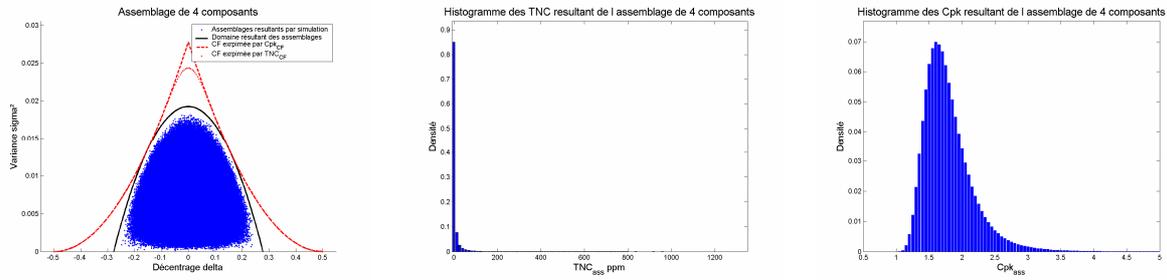


Figure 2-12 : Simulation d'assemblage de 4 composants

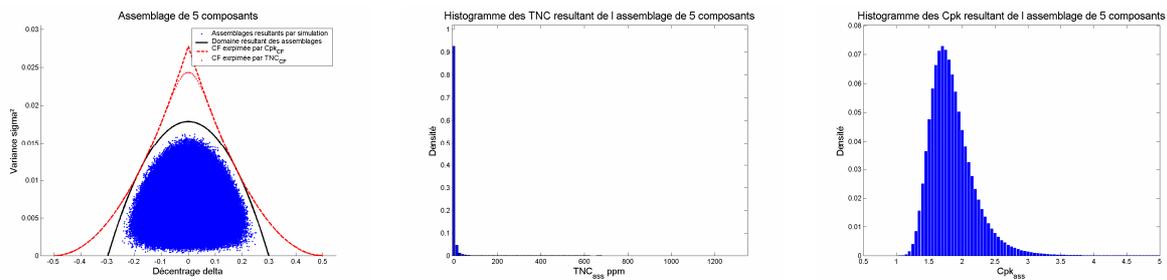


Figure 2-13 : Simulation d'assemblage de 5 composants

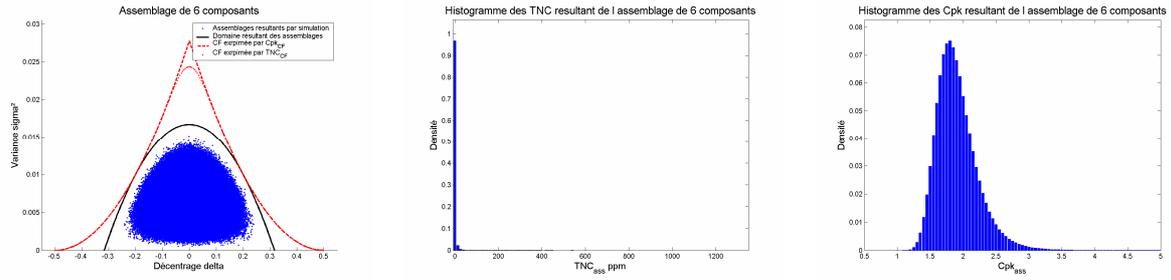


Figure 2-14 : Simulation d'assemblage de 6 composants

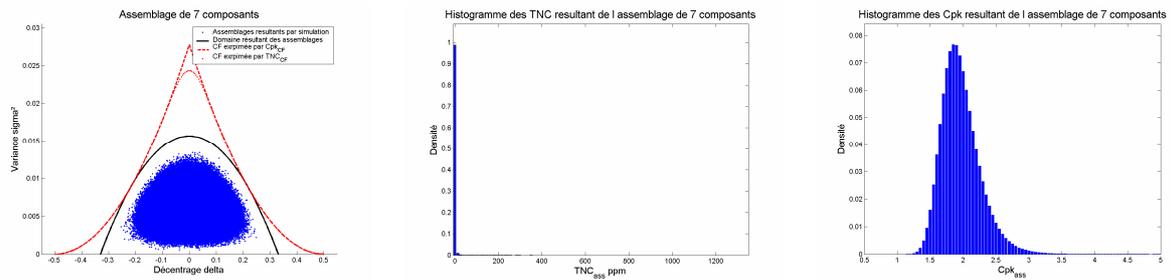


Figure 2-15 : Simulation d'assemblage de 7 composants

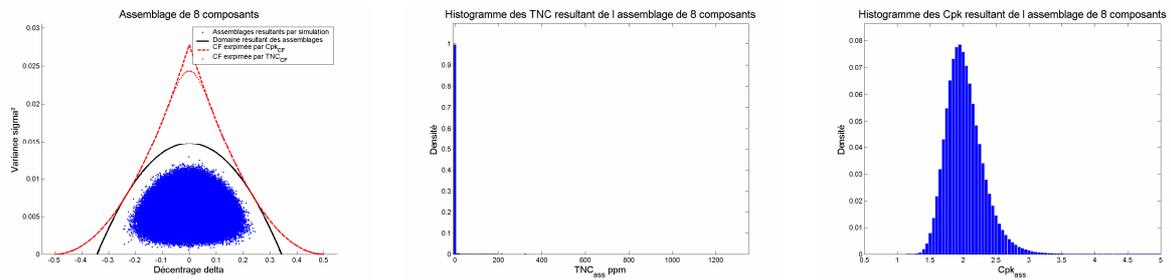


Figure 2-16 : Simulation d'assemblage de 8 composants

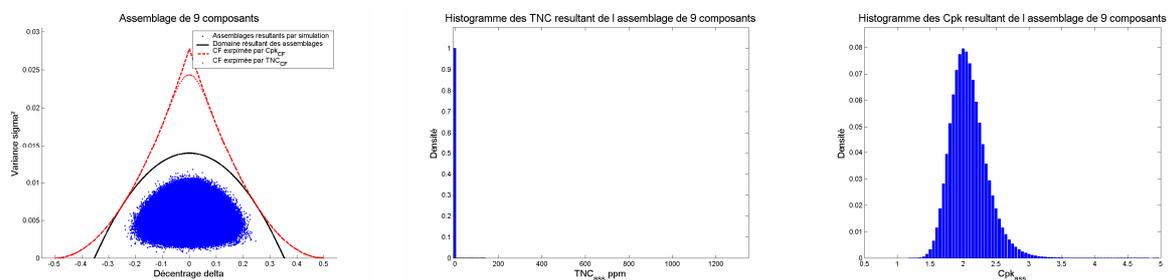


Figure 2-17 : Simulation d'assemblage de 9 composants

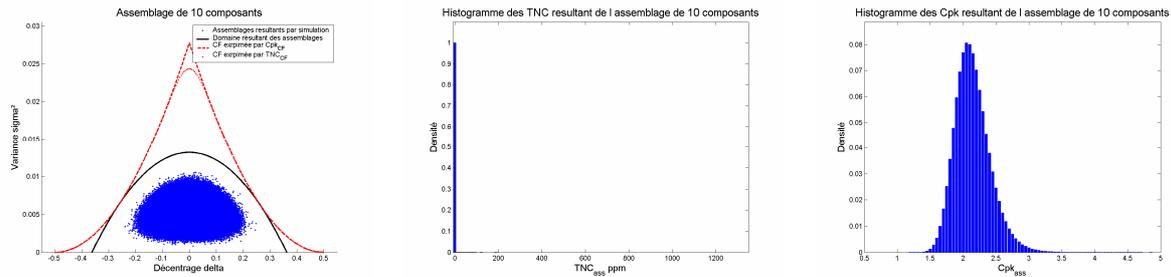


Figure 2-18 : Simulation d'assemblage de 10 composants

Remarques

- On constate que le domaine résultant de la somme de Minkowski respecte bien les deux CF définies par un Cpk_{CF} ou un TNC_{CF} , et ceci quel que soit le nombre de composants dans la chaîne de cote.
- Le domaine résultant a tendance à s'aplatir, provoquant l'augmentation du décentrage maximum résultant tout en diminuant l'écart-type maximum résultant.
- On peut penser que la méthode de tolérancement tend vers le tolérancement traditionnel au pire des cas pour lequel le décentrage maximal résultant égale le décentrage maximal admissible.
- L'observation des résultats des simulations de Monte Carlo confirme ce qu'on attendait sur le comportement des assemblages résultants, à savoir un centrage croissant des assemblages en augmentant le nombre de composants dans la chaîne de cote. Et donc une forte et rapide baisse de l'occurrence de la plus mauvaise configuration sous l'hypothèse choisie de répartition uniforme dans le domaine de tolérances des composants.

Analyse des résultats de cette première simulation

Pour interpréter les simulations présentées ci-dessus, on propose de suivre l'évolution du taux de non-conformité TNC_{ass} et de l'indice de capabilité Cpk_{ass} en fonction du nombre de composants dans la chaîne de cote. On décide d'étudier l'évolution des caractéristiques des assemblages, TNC_{ass} et Cpk_{ass} , en fonction du pourcentage de composant respectant cette valeur de caractéristique, c'est à dire qu'on observe l'évolution des caractéristiques pour $x\%$ des assemblages simulés résultants.

La notion de $x\%$ des assemblages résultants respectant la caractéristique, un TNC_{ass} ou Cpk_{ass} , ne correspond pas à un taux de non-conformité mais plutôt à une occurrence de l'assemblage en fonction d'une situation initiale définie par la CF. En se basant sur les résultats-ci dessous, pour un assemblage de cinq composants dont la CF est définie par un $Cpk_{CF} = 1$, on peut prédire que dans 90% des cas, l'indice de capabilité résultants Cpk_{ass} ne sera pas inférieur à $Cpk_{ass}^{90\%} = 1,4$.

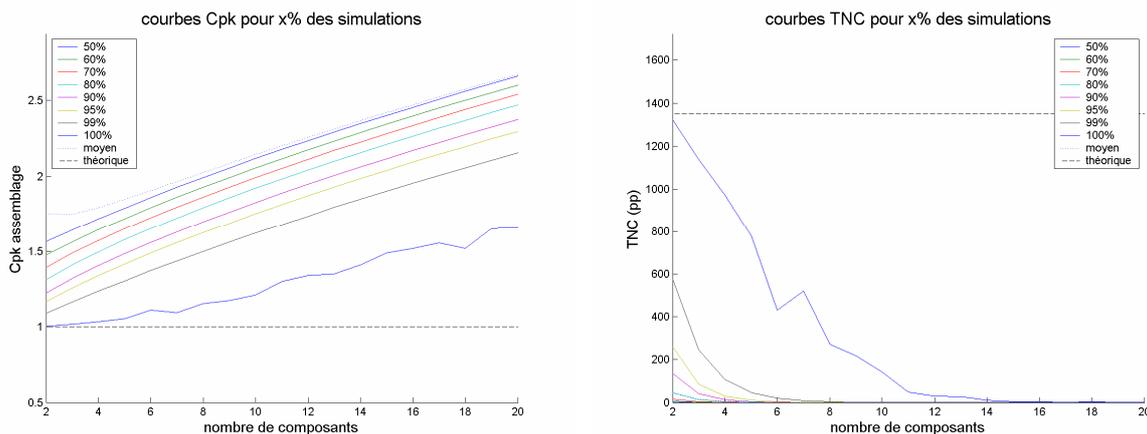


Figure 2-19 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1$

4.1.2.2 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,16$, ou un $TNC_{CF} = 250$ ppm

On ne présente pas ici l’observation des résultats de la simulation, qui sont similaires à ceux de la première CF, mais on se contente simplement de décrire l’analyse des résultats des caractéristiques en fonction du pourcentage de cas considérés.

Les analyses suivantes présentent les résultats des simulations garantissant une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,16$, ou un $TNC_{CF} = 250$ ppm.

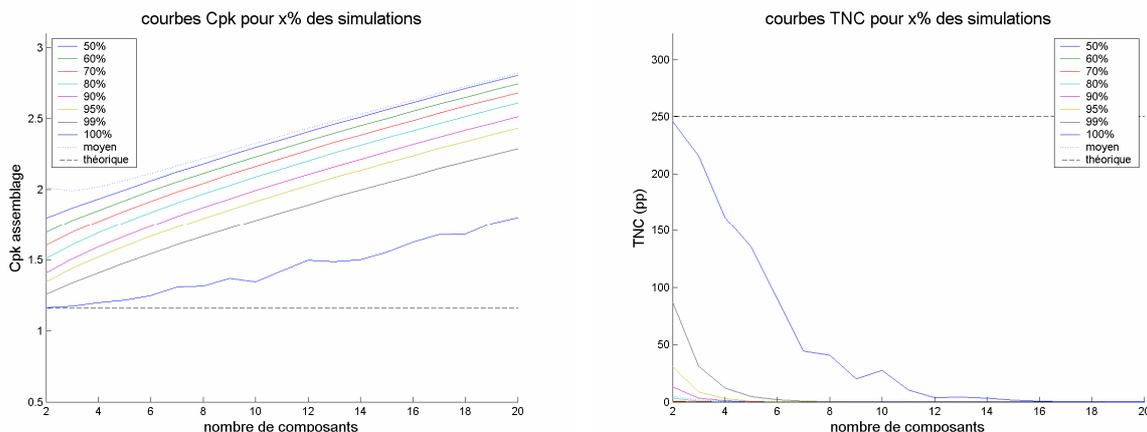


Figure 2-20 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1,16$

4.1.2.3 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,33$, ou un $TNC_{CF} = 33$ ppm

On présente ici une troisième analyse de tolérancement garantissant un $Cpk_{CF} = 1,33$, soit un $TNC_{CF} = 33$ ppm.

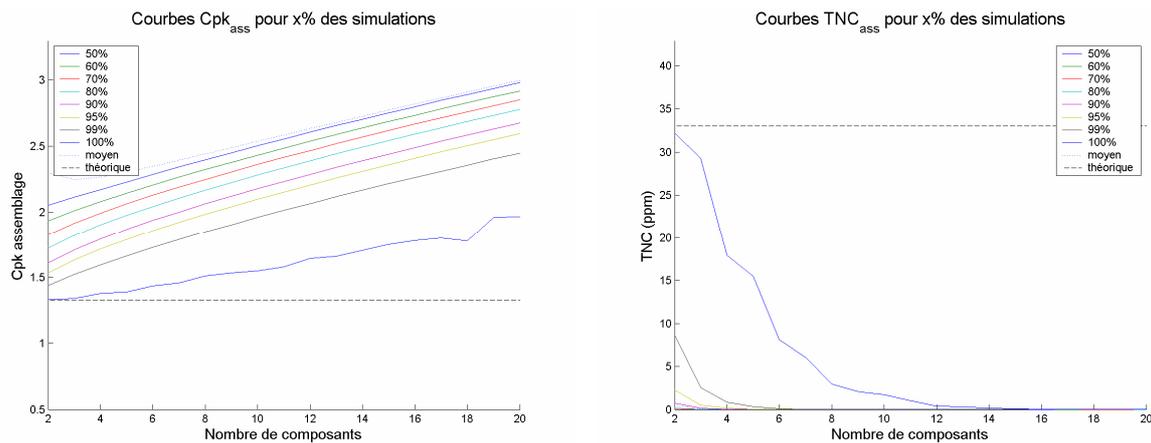


Figure 2-21 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1,33$

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

Les résultats des simulations ci-dessus montrent bien que la méthode est efficace, la CF est constamment respectée. En revanche, on met en évidence que le tolérancement proposé est d'autant plus sévère, que le nombre de composants est croissant. On a pris en compte l'aspect statistique pour deux raisons :

- la combinaison des décentrages aléatoires,
- les composants ne sont pas tous en limites de capabilité.

Néanmoins, on peut trouver les résultats des simulations un peu trop optimistes. En effet, la plus mauvaise configuration n'est jamais atteinte même pour un assemblage de deux composants. De ce fait, on remet en cause le choix d'une distribution uniforme dans le domaine de tolérance. On propose alors le même type de simulation mais en considérant des composants en limite de tolérances uniquement.

4.1.3 Simulation d'assemblage de composants en limite de leurs domaines de tolérance

Le modèle de simulation précédent considère que les composants sont uniformément répartis dans le domaine de tolérance. Par conséquent, de nombreux lots de composants sont loin de la limite de tolérance, ce qui a pour effet de diminuer grandement le risque de se trouver dans la plus mauvaise configuration.

Cette partie présente un modèle de simulation plus pessimiste que précédemment. En effet, dans cette partie, on considère que les composants sont en limite de conformité, ce qui consiste à tirer des lots de composants uniquement sur la limite du domaine de tolérance. On retrouve donc l'hypothèse de composants en limite de capabilité inertielle qui a servi à déterminer la méthode de tolérancement.

4.1.3.1 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1$ ou un $TNC_{CF} = 1350$ ppm

Comme précédemment, avec l'hypothèse de lots uniformément répartis dans le domaine de tolérance, la première simulation est faite sur une CF garantissant juste l'intervalle de tolérance IT_{CF} , c'est à dire en considérant un indice de capabilité $Cpk_{CF} = 1$, ce qui équivaut à garantir un taux de non conformité $TNC_{CF} = 1350$ ppm. Les figures suivantes présentent les résultats des simulations pour différents nombres de composants dans la chaîne de cote.

Observation des simulations

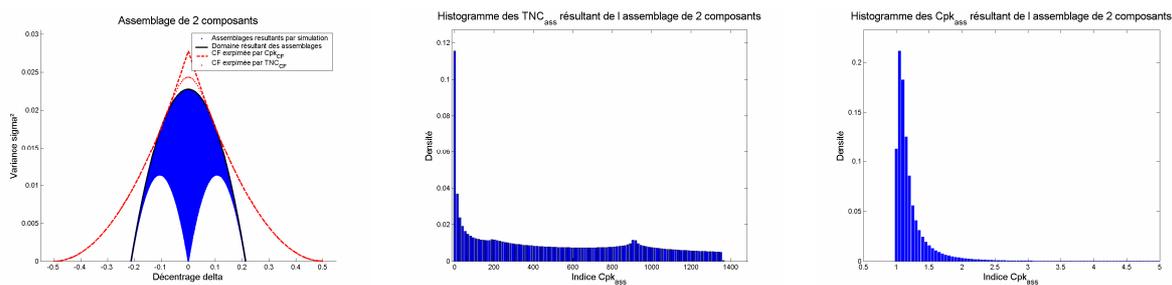


Figure 2-22 : Simulation d'assemblage de 2 composants

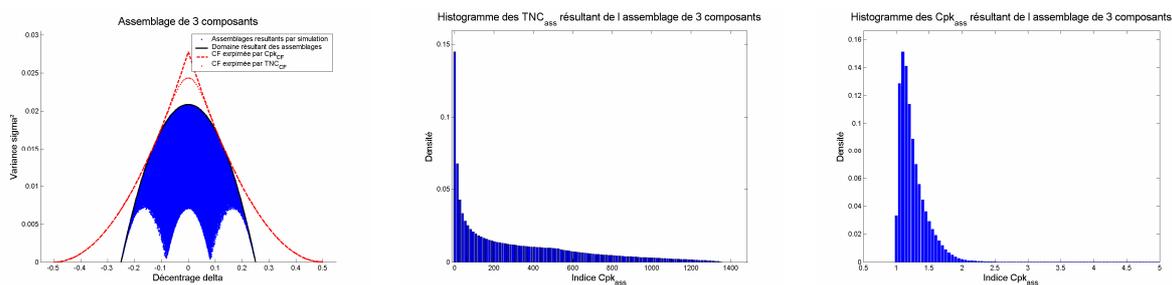


Figure 2-23 : Simulation d'assemblage de 3 composants

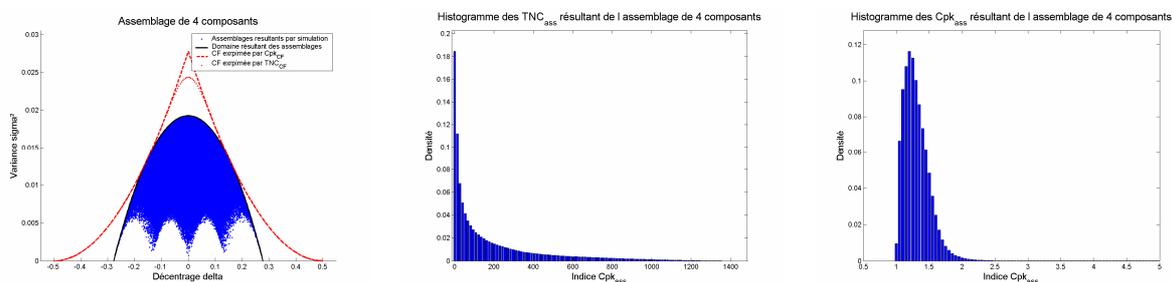


Figure 2-24 : Simulation d'assemblage de 4 composants

Remarques

- Les formes en arcade que l'on observe sont dues au fait que certaines configurations de lot ne sont pas exploitées. On retrouve alors la forme des balayages des domaines pour le calcul de la somme de Minkowski. En effet, les composants sont en limite de capacité, donc sur le domaine de tolérance. Cela explique pourquoi l'assemblage de composants se trouve sur le balayage des domaines.
- La répartition des assemblages résultants dans le domaine de tolérance peut expliquer la répartition des taux de non conformité résultants TNC_{ass} , notamment les pics que l'on observe pour les assemblages de deux et trois composants.

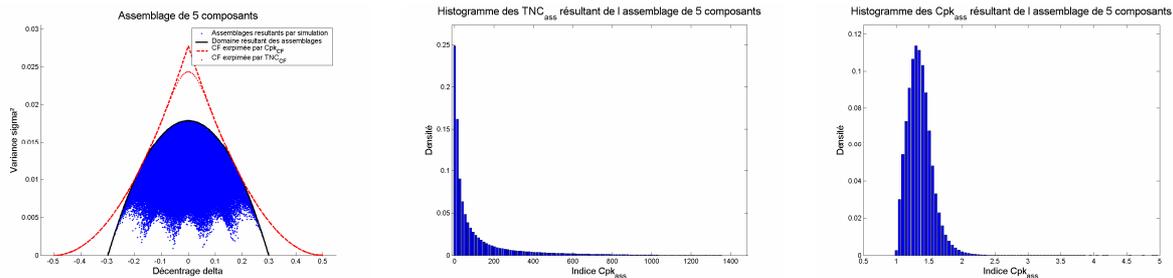


Figure 2-25 : Simulation d'assemblage de 5 composants

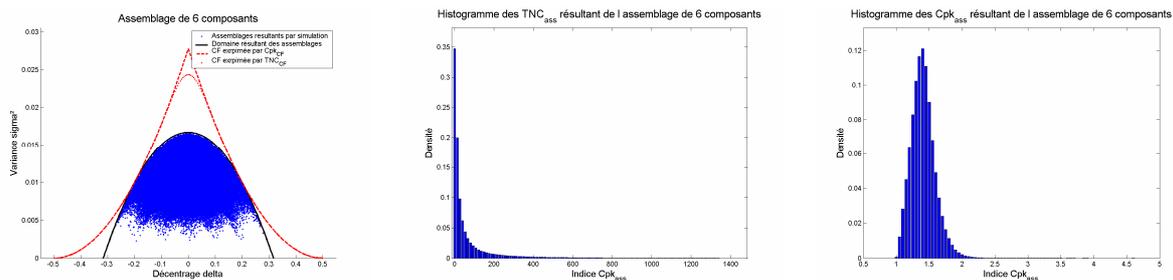


Figure 2-26 : Simulation d'assemblage de 6 composants

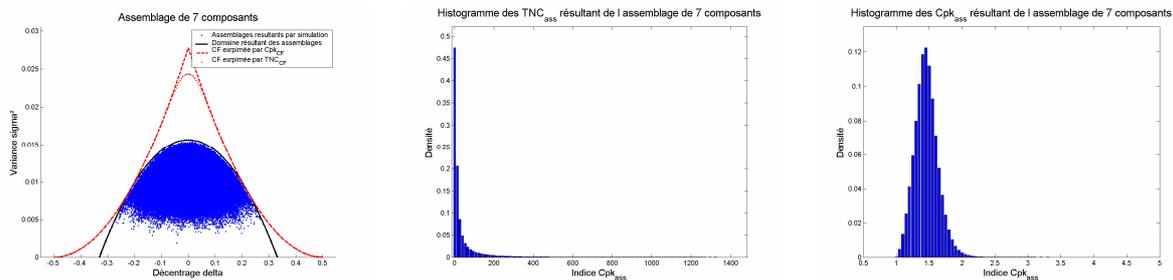


Figure 2-27 : Simulation d'assemblage de 7 composants

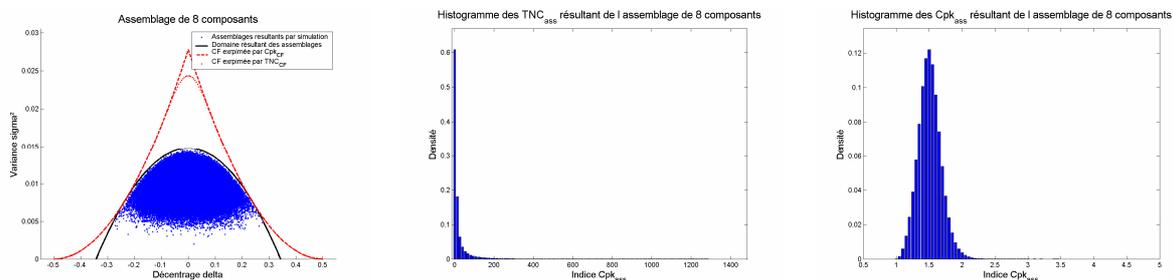


Figure 2-28 : Simulation d'assemblage de 8 composants

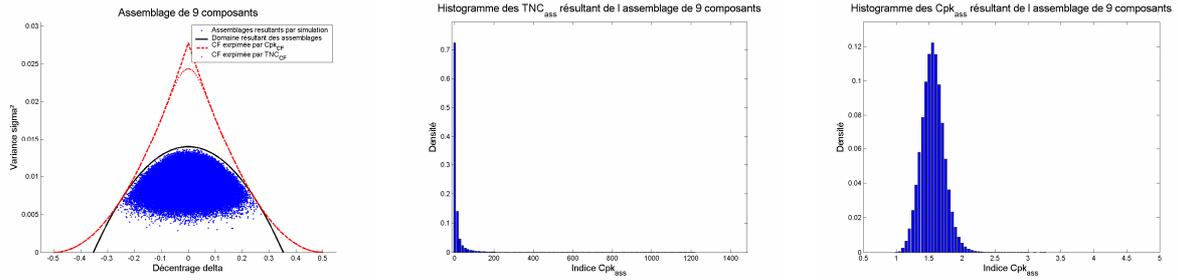


Figure 2-29 : Simulation d'assemblage de 9 composants

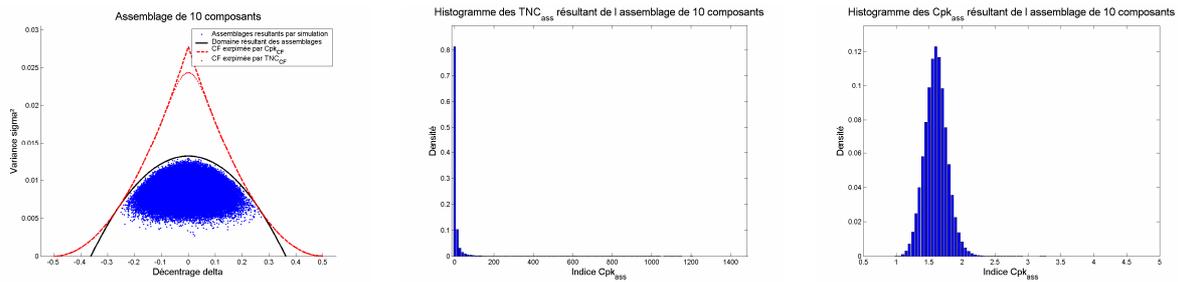


Figure 2-30 : Simulation d'assemblage de 10 composants

Analyse des résultats de cette première simulation

Comme pour les simulations précédentes supposant une répartition uniforme des tolérances, on analyse les répartitions des caractéristiques résultantes, Cpk_{ass} et TNC_{ass} , en fonction de leur occurrence $x\%$.

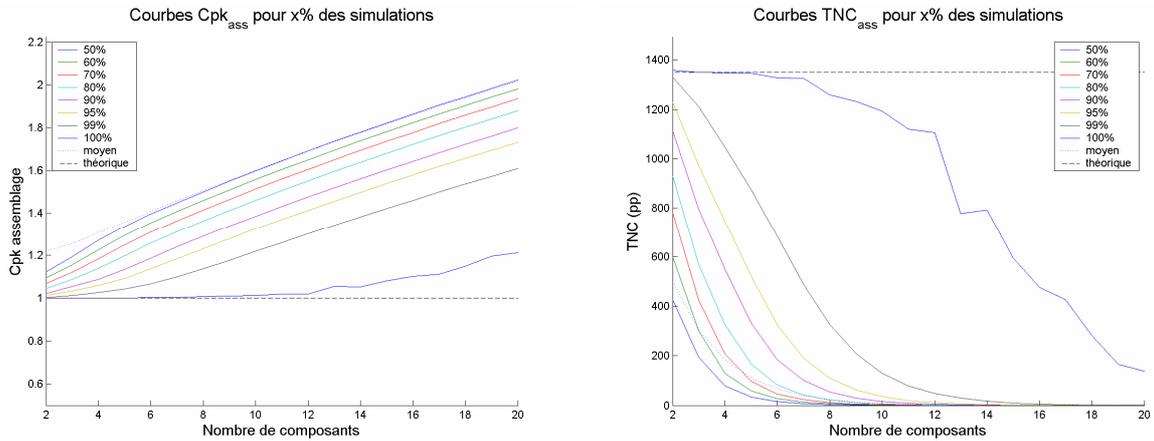


Figure 2-31 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1$

4.1.3.2 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,16$ ou un $TNC_{CF} = 250$ ppm

Les simulations donnent des résultats similaires en terme de répartition des assemblages dans le domaine de tolérance. On se contente de présenter les résultats des analyses des caractéristiques résultantes Cpk_{ass} et TNC_{ass} en fonction de leurs occurrences.

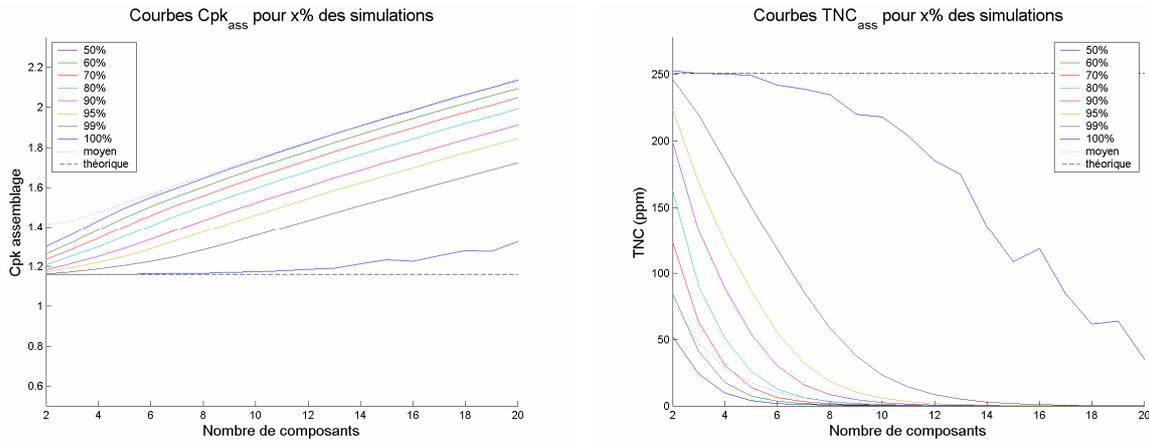


Figure 2-32 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1,16$

4.1.3.3 Une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,33$ ou un $TNC_{CF} = 33$ ppm

On présente ici les résultats d'une troisième simulation de Monte Carlo pour l'analyse d'un tolérancement dont le but est de garantir une CF définie par un $Cpk_{CF} = 1,33$, ce qui équivaut à garantir un $TNC_{CF} = 33$ ppm.

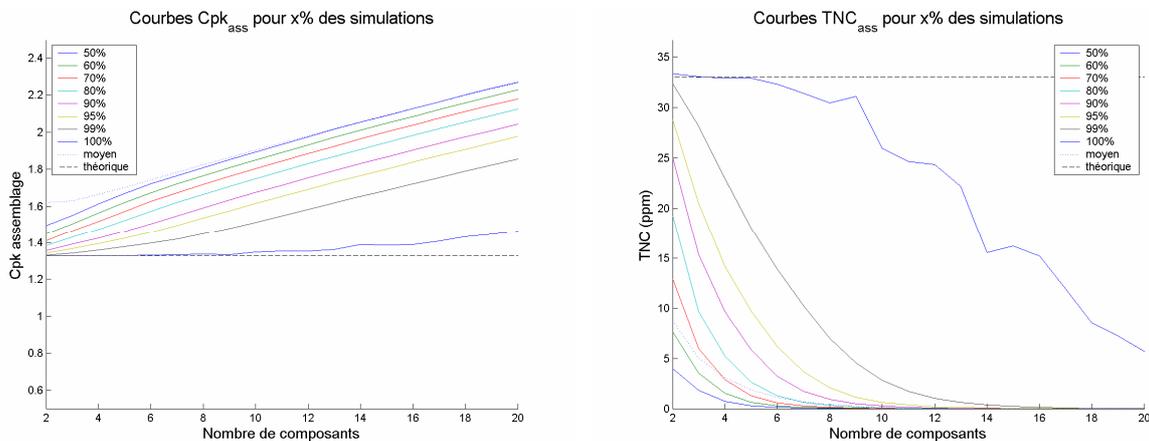


Figure 2-33 : Analyse des résultats pour une CF : $Cpk_{CF} = 1,33$

Remarque

On se rend compte que pour un assemblage de deux composants, l'indice de capabilité résultant Cpk_{ass} respecte bien la CF définie par un Cpk_{CF} , ce qui nous conforte dans l'efficacité de la méthode. Par contre, le taux de non-conformité résultant TNC_{ass} excède légèrement la CF définie par un TNC_{CF} , cette remarque est discutée dans [Adragna et al 2007 a]. Ceci est dû au fait que la plus mauvaise configuration sur la résultante est relativement centrée, d'où un TNC_{ass} compris entre la limite inférieure et la limite supérieure du TNC à Cpk constant.

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

En observant la courbe d'évolution des indices de capabilité Cpk_{ass} , on peut constater que la valeur maximale observée pour 100% des cas est proche de la limite définie par la CF , Cpk_{CF} . Cette même observation sur les TNC_{ass} montre que jusqu'à 5 composants dans la chaîne de cote il est possible d'obtenir des assemblages à la limite de la CF . De ce fait, cette hypothèse de composants en limite de tolérance permet de se rendre compte de l'efficacité de notre méthode de tolérancement.

Il ressort de ces simulations que pour moins de six composants dans la chaîne de cote, la méthode de tolérancement garantissant la CF dans toutes les configurations est fondée.

Toutefois en considérant un risque de 1% de ne pas respecter la CF , il serait potentiellement possible d'élargir les tolérances des composants. Cette perspective est traitée dans la partie suivante.

4.2 Tolérancement inertiel avec des risques**4.2.1 Différentes approches possibles de modélisation du risque**

Afin de caractériser le risque nous proposons l'utilisation de différentes permettant de modéliser les résultats des simulations. Une fois les évolutions des TNC_{ass} ou Cpk_{ass} modélisés, nous sommes alors capables d'estimer la valeur élargie de la CF afin de garantir la vraie CF en considérant un risque.

4.2.1.1 Comportement des indices de capabilité résultant Cpk_{ass}

En observant l'analyse des indices de capabilité résultants Cpk_{ass} , on constate que leurs évolutions sont globalement linéairement croissantes. De plus cette remarque est valable sous les deux hypothèses considérées, des composants aléatoirement répartis dans leurs tolérances et des composants en limites de tolérance.

Par conséquent on peut proposer des modèles simples de comportement des indices de capabilité résultants en fonction de l'occurrence voulue $x\%$. On pourrait noter alors :

$$Cpk_{ass}^{x\%} = f(Cpk_{CF}, x\%) \quad [2-61]$$

A cette relation on pourrait même ajouter un troisième critère qui serait le type d'hypothèse considérée.

Or autour de cinq et six composants, sous l'hypothèse de composants en limite de tolérance, on observe un changement de pente dans les variations de certaines occurrences. De ce fait on peut envisager une approximation affine par morceau, [Zhang et al, 2006], permettant une meilleure approximation des courbes.

4.2.1.2 Comportement du taux de non-conformité résultant TNC_{ass}

La caractérisation des TNC_{ass} n'est pas aussi simple que celle des Cpk_{ass} car une approximation affine n'est pas le modèle qui convient. On peut se pencher sur un comportement en exponentiel décroissante.

Ainsi dans [Adragna et al, 2007 a], nous proposons une modélisation du TNC moyen et du TNC médian, que l'on note respectivement TNC_{μ} et $TNC_{50\%}$.

Par exemple, sous l'hypothèse de composants en limite de capabilité, le TNC médian peut être estimé par :

$$TNC_{50\%} = 0,5^n . TNC_{CF} \quad [2-62]$$

Le TNC moyen sous la même hypothèse peut être estimé quant à lui par :

$$TNC_{\mu} = 0,6^n . TNC_{CF} \quad [2-63]$$

Bien sûr d'autres modèles mieux appropriés et plus fidèles peuvent être proposés. Cependant, nous ne poussons pas plus loin la recherche de modèle.

4.2.1.3 Proposition d'abaques

Garantir un TNC de 200 ppm sur un assemblage Notion de prise de risque en élargissant les tolérances																	
	95%	Pourcentage des assemblages pour lesquels on garantit le TNC indiqué															
	196	Valeur maximale du TNC en ppm garantie pour X% des assemblages															
	1.321	Valeur de l'indice Cpi à imposer (ou Ic dans les calculs des tolérances)															
5	534	Valeur maximale du TNC en ppm qu'un assemblage peut obtenir pour les 1-X % d'assemblages restants															
Nombre de composants dans l'assemblage																	
nb	100%	99%	98%	97%	96%	95%	94%	93%	92%	91%	90%	89%	88%	87%	86%	85%	80%
2	202	197	204	199	194	202	197	205	200	195	203	198	194	202	198	194	201
	1.271	1.271	1.266	1.266	1.266	1.261	1.261	1.256	1.256	1.251	1.251	1.251	1.246	1.246	1.246	1.236	
3	200	227	242	257	274	291	310	330	330	351	373	396	421	421	448	505	
	200	199	196	195	196	198	200	203	194	198	202	194	199	204	196	202	195
4	1.314	1.304	1.299	1.294	1.289	1.284	1.279	1.274	1.274	1.269	1.264	1.259	1.254	1.254	1.249	1.239	
	200	227	242	257	274	291	310	330	330	351	373	396	421	421	448	505	
5	200	205	205	198	195	207	206	206	206	194	196	198	199	202	204	194	196
	1.355	1.330	1.320	1.315	1.310	1.300	1.295	1.290	1.285	1.285	1.280	1.275	1.270	1.265	1.260	1.240	
6	200	276	314	334	356	405	431	459	488	488	520	553	587	626	666	666	848
	198	194	199	200	204	196	203	197	206	203	199	197	195	206	205	205	206
7	1.396	1.361	1.346	1.336	1.326	1.321	1.311	1.306	1.296	1.291	1.286	1.281	1.276	1.266	1.261	1.256	1.231
	198	316	386	435	504	534	605	645	731	779	827	881	937	1071	1133	1202	1636
8	196	205	197	200	196	206	193	196	201	206	201	195	204	200	197	195	205
	1.435	1.380	1.365	1.350	1.340	1.325	1.320	1.310	1.300	1.290	1.285	1.280	1.270	1.265	1.260	1.255	1.225
9	196	416	503	619	699	852	915	1054	1191	1355	1427	1526	1719	1841	1968	2064	3008
	209	203	206	198	198	205	202	200	204	195	200	194	201	197	194	204	200
10	1.468	1.398	1.373	1.358	1.343	1.328	1.318	1.308	1.298	1.293	1.283	1.278	1.268	1.263	1.258	1.248	1.223
	209	532	759	926	1131	1350	1607	1785	2035	2226	2464	2611	3030	3206	3384	3891	5342
11	199	197	201	201	197	201	197	194	197	199	203	198	206	200	197	194	203
	1.505	1.410	1.380	1.360	1.345	1.330	1.320	1.310	1.300	1.290	1.280	1.275	1.265	1.260	1.255	1.250	1.220
12	199	761	1142	1561	1799	2272	2599	2957	3367	3792	4370	4688	5471	5749	6108	6415	9475
	208	200	194	203	197	198	194	205	205	195	200	207	199	195	205	202	197
13	1.537	1.417	1.387	1.362	1.347	1.332	1.322	1.307	1.297	1.292	1.282	1.272	1.267	1.262	1.252	1.247	1.222
	208	1135	1818	2477	2950	3778	4429	5192	6229	6269	7104	8785	9099	9872	10815	11792	15717
14	195	198	200	206	199	201	193	205	205	194	198	204	198	207	202	199	205
	1.567	1.422	1.387	1.362	1.347	1.332	1.322	1.307	1.297	1.292	1.282	1.272	1.267	1.257	1.252	1.247	1.217
15	195	1691	2859	4141	5208	5880	7330	8367	9539	10758	12709	13602	14373	17810	16559	18469	24331
	202	196	207	198	204	203	196	207	206	194	199	205	198	206	201	197	204
16	1.597	1.427	1.387	1.367	1.347	1.332	1.322	1.307	1.297	1.292	1.282	1.272	1.267	1.257	1.252	1.247	1.217
	202	2736	5043	5727	8321	8830	11768	13013	14658	15126	21540	19048	21091	22333	34038	30590	51148
17	197	205	202	203	195	194	199	195	194	197	201	193	200	194	203	199	204
	1.636	1.426	1.391	1.366	1.351	1.336	1.321	1.311	1.301	1.291	1.281	1.276	1.266	1.261	1.251	1.246	1.216
18	197	5207	6729	11852	11324	10897	14139	19518	20206	22404	31351	24151	28368	37818	43197	34428	46292
	194	203	196	198	202	201	206	201	202	201	205	197	204	197	206	202	194
19	1.654	1.429	1.394	1.369	1.349	1.334	1.319	1.309	1.299	1.289	1.279	1.274	1.264	1.259	1.249	1.244	1.214
	194	6432	9893	11795	12048	21609	23385	32135	26955	26606	29538	27780	30705	39923	33590	41076	52567
20	201	203	205	207	196	194	200	194	193	194	198	203	196	203	198	193	198
	1.687	1.432	1.392	1.367	1.352	1.337	1.322	1.312	1.302	1.292	1.282	1.272	1.267	1.257	1.252	1.247	1.217
21	201	7244	14113	13103	16558	20950	23127	31178	39833	35302	47331	36276	37815	44059	42924	49758	67921
	202	205	204	204	205	206	194	203	201	202	207	197	203	197	205	202	206
22	1.709	1.434	1.394	1.369	1.349	1.334	1.324	1.309	1.299	1.289	1.279	1.274	1.264	1.259	1.249	1.244	1.214
	202	9074	11163	19323	24054	21361	25733	37965	31408	34173	56380	36716	62063	56457	53206	58191	92408

Figure 2-34 : Exemple d'abaque pour un $TNC_{CF} = 200ppm$

Une autre solution permettant de caractériser les résultats obtenus par les simulations de MC est de représenter les différentes configurations dans un abaque. Nous présentons le résultat d'une telle démarche dans la figure 2-34. L'abaque que nous montrons traite la méthode pour respecter un $TNC_{CF} = 200\text{ppm}$ sous l'hypothèse de composants en limite de tolérance.

Cependant, une telle approche nécessite un nombre important de simulation et le développement d'un abaque pour chaque valeur de CF (TNC_{CF} ou Cpk_{CF}). De ce fait nous considérons que cette approche utilisée de manière traditionnelle sur feuille papier n'est pas optimale. Néanmoins la méthode est intéressante et nous pouvons envisager une informatisation de ces abaques permettant de les générer automatiquement quelle que soit la CF .

4.2.2 Une estimation statistique du risque

Finalement nous proposons une approche simple de l'estimation du risque de rencontrer la pire configuration. On suppose que la pire configuration est définie par la combinaison des décentrages du même côté.

De ce fait, chaque composant a une chance sur deux se trouver du côté de la plus mauvaise configuration. Ainsi pour un système assemblé comportant n composants dans sa chaîne de cote, on considère que l'occurrence de la plus mauvaise configuration est donnée par :

$$P^{\%} = 0,5^n \quad [2-64]$$

Alors le TNC_{ass} obtenu sur la résultante de l'assemblage en fonction du TNC_{CF} et du nombre de composants est donné par :

$$TNC_{ass} = 0,5^n \cdot TNC_{CF} \quad [2-65]$$

Or ce résultat est le même que l'estimation du TNC médian, $TNC_{50\%}$, sous l'hypothèse de composants en limite de tolérance. On en conclut que cette estimation du TNC_{ass} résultants calculée par deux approches différentes est correcte.

5 Conclusion du chapitre

Le tolérancement inertiel 1D est une méthode efficace de synthèse de tolérancement dans le but de garantir l'assemblage et la fonction du produit final. On vient de démontrer dans ce chapitre que cette approche de tolérancement 1D permet le respect de la condition fonctionnelle. La méthode que nous proposons, grâce à la simple utilisation d'un seul indice de capabilité C_{pi} , garantit la CF dans toutes les configurations possibles y compris la plus mauvaise configuration. La méthode est une sorte de tolérancement statistique garantissant la CF en statistique au « pire des cas », sous l'hypothèse de variable indépendante.

Qui dit tolérancement statistique suppose répartition aléatoire des décentrages des composants, et donc un faible risque de se retrouver dans la plus mauvaise configuration d'assemblage des composants. Ce second aspect du tolérancement a été pris en considération avec l'intégration d'une notion de prise de risque dans la garantie de la Condition Fonctionnelle. Présenté par une loi généralisée ou sous forme d'abaque, on fait le choix des indices de capabilité C_{pi} à imposer sur les composants en vue de garantir la CF en prenant en compte un risque maîtrisé de dépasser cette CF.

Seul l'aspect conception du tolérancement inertiel a été abordé ici, mais d'autres aspects du cycle de vie du produit sont traités sur le tolérancement inertiel tels que le pilotage en production [Pillet et al, 2007], le contrôle de lot en réception [Pillet et al, 2005] et [Pillet et al, 2006 a] ainsi que le tri en cas de lot non conforme [Pillet et al, 2006 b]. Des démarches de conception ont aussi été menées dans le cas des micro-systèmes [Bourgeois et al, 2005]. On peut donc considérer que le tolérancement inertiel n'est pas seulement une vision de l'esprit mais une méthode qui est suffisamment développée pour être applicable dans le milieu industriel. C'est d'ailleurs le rôle d'une thèse commencée fin 2006 dans le cadre du Pole de Compétitivité Arve Industries et réalisée par Dimitri Dénimal.

Chapitre 3

Tolérancement 3D et forme d'une pièce ou d'un assemblage

OBJECTIF DU CHAPITRE

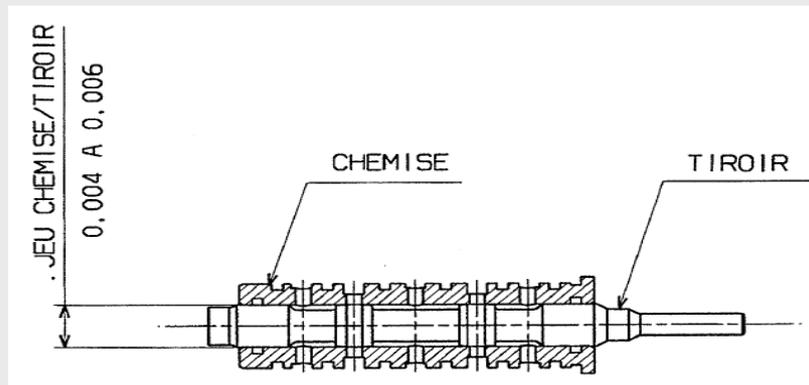
L'objectif de ce chapitre est d'étendre le tolérancement inertiel au 3D et à l'analyse de forme. Pour atteindre cet objectif, nous présentons le paramétrage modal des formes, appelé "méthode modale". Il s'agit d'une méthode générique de caractérisation des écarts de forme. Nous expliquons le cheminement réalisé pour faire évoluer cette méthode d'analyse de forme, et proposer une approche d'analyse des défauts d'assemblages.

Ce chapitre se décompose en quatre parties :

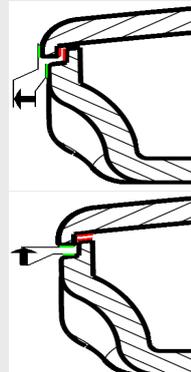
- Une première partie bibliographique résume différentes méthodes de tolérancement 3D et d'analyse des écarts de forme. Quelques méthodes de tolérancement 3D ou d'analyse d'écart de forme sont légèrement détaillées car elles paraissent proches de notre proposition ou elles permettent de faire une comparaison avec nos travaux.*
- La seconde partie présente la méthode modale naturelle. On définit ainsi la terminologie associée à cette approche ainsi qu'un cas d'application simple sur un profil poutre. Ce cas d'exemple sert à illustrer l'évolution de la caractérisation modale présentée dans la troisième partie.*
- La troisième partie traite des évolutions apportées à la méthode. Les évolutions concernent le résidu de la description, une signification métrique de la caractérisation et l'introduction de défauts complémentaires dans la base des défauts naturels. Le cas d'exemple est de la partie précédente est traité pour comparer l'effet de des évolutions de la méthode.*
- La quatrième et dernière partie aborde l'assemblage des composants d'un système. L'objectif est de faire évoluer la méthode de caractérisation des écarts d'une géométrie vers l'analyse d'assemblage avec défauts de forme. Un premier point traite la caractérisation des défauts d'accostage, et un second point présente l'assemblage de composants selon deux critères : sur les surfaces associées ou sur les écarts de forme.*

PROBLEMATIQUES ABORDEES

Les évolutions apportées à la méthode modale, que l'on présente dans la seconde partie de ce chapitre, ont été en partie sollicitées par des problématiques industrielles. En effet, les collaborations industrielles dans le cadre du projet Interreg IIIA, ont fait apparaître des problématiques communes sur deux applications différentes :



Un tiroir de distributeur hydraulique : la forme est liée à une condition d'assemblage et un débit de fuite entre tiroir et chemise



Problématique d'affleurement

Problématique de jeu

Un capot plastique : la forme est liée à une condition d'accostage et une condition d'aspect

Les problématiques communes que l'on a pu identifier sur ces deux sujets sont :

- L'identification et la maîtrise de la forme (traité dans ce chapitre),
- La qualification statistique d'un lot (traité dans le chapitre 4).

Glossaire :	
B	base modale (n, m) contenant les m vecteurs modaux,
E_{F1A}	Ecart de forme de la surface 1A, dû au positionnement avec défaut de forme
$EGRM$	Elément Géométrique de Référence Minimum
E_{iA}	Ecart de la surface A du composant 1 par rapport à la configuration idéale
E_{p2A1}	Ecart dû au positionnement du composant 2 sur le composant 1
E_{r1A}	Ecart rigide de la surface 1A, dû au positionnement sur la surface associée
J_{1A2}	Jeu entre les composants 1 et 2 par les surfaces A (1A et 2A)
J_{c1A2}	Jeu de contact, correspond au défaut d'orientation de positionnement
J_{m1A2}	Jeu de mobilité entre les surfaces 1A et 2A
MAP	MAintient en Position (effort)
Q_i	vecteur modal (n, l) décrivant la forme d'un défaut modal,
$R(m)$	vecteur résidu (n, l) de caractérisation de la méthode modale avec m modes
$r(m)$	résidu scalaire de la description par la méthode modale avec m modes
R_{iA}	Repère associée à la surface A de la pièce i
$r_{L/F}$	Ratio de la longueur (L) de la géométrie sur l'amplitude du défaut de forme (F)
$SATT$	Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement
T	vecteur écart (n, l) de forme à analyser,
V	Vecteur défaut de forme mesuré
Λ_{1A}	Signature modale de la surface A du composant 1
Λ_{1A2}	Signature modale de l'écart entre les surfaces 1A et 2A
Λ_i	vecteur (m, l) signature modale de l'écart de forme dans la base modale,
λ_i	coefficient modal de l'influence du mode i ,
$\rho(p, m)$	efficacité de description modale de p modes à m modes

1 Tolérancement 3D et analyse de forme : un bilan non exhaustif

Le but de nos travaux de recherche n'est pas de présenter un état de l'art exhaustif des domaines abordés, néanmoins nous regroupons des approches par domaines et approfondissons la présentation de celles qui serviront à comparer nos méthodes.

1.1 Norme et tolérancement 3D

Nous ne pouvons parler de tolérancement 3D et de défaut de forme sans citer la norme. En effet, le tolérancement est un langage normalisé qui représente un moyen de communication entre différents métiers. Ce langage spécifie les limites des défauts des pièces de façon univoque et compréhensible par les acteurs du cycle d'élaboration du produit.

1.1.1 La norme ISO

C'est une norme internationale qui traite de la spécification et se présente par un langage graphique. La définition normalisée repose sur :

- un principe, par exemple : le principe de l'indépendance [ISO 8015] qui considère que toutes les exigences spécifiées sur un dessin doivent être respectées,
- des exigences, par exemple : l'exigence du maximum matière, spécifié par le symbole \textcircled{M} à droite de la valeur de la tolérance,
- des tolérances dimensionnelles [ISO 8015] : ces tolérances portent sur les longueurs et les angles,
- et des tolérances géométriques [ISO 8015] : ces tolérances limitent les écarts d'un élément par rapport à sa forme, son orientation et/ou sa position théorique [ISO 1101].

1.1.2 La Spécification Géométrique des Produits (GPS)

Le concept GPS (Geometrical Product Specification) est défini pour remédier à quelques ambiguïtés des normes dues à leur nombre important. Ainsi le concept GPS est-il défini comme un langage de communication univoque et international entre le concepteur, le fabricant et le métrologue permettant un échange clair sur les exigences fonctionnelles d'un produit.

Le concept s'appuie sur la matrice GPS [ISO/TR 14638] qui regroupe les normes existantes à réviser, en cours d'étude et celles à définir. Cette matrice est composée de dix huit lignes, les "chaines", qui regroupent des caractéristiques géométriques de l'élément tolérancé (taille, distance, rayon, ...). Ces chaînes sont divisées en six maillons caractérisant les étapes de l'élaboration du produit, les deux derniers maillons par exemple sont plus spécifiques à la métrologie.

1.2 Modèle et outils de tolérancement 3D

Nous pouvons distinguer certains articles qui présentent un état de l'art des méthodes de tolérancement. On peut citer entre autre [Hong et al, 2002] qui présente un état de l'art en abordant différents sujets tels que la schématisation des mécanismes, la représentation et la spécification des tolérances, des approches de synthèse et d'analyse de tolérances ainsi que des méthodes de transfert de tolérance.

1.2.1 Graphes de mécanisme

Les graphes permettent une représentation schématisée d'un mécanisme et quelques-unes de ses caractéristiques telles que les types de liaisons entre composants, tolérances des surfaces etc. Les défauts entre les surfaces d'une même pièce sont modélisés par des écarts. Un mécanisme est un ensemble de pièces avec défauts qui sont liées entre elles par des liaisons. Les liaisons sont modélisées par des jeux.

Il existe plusieurs façons de représenter les liaisons entre les surfaces par les graphes. Ces graphes contiennent généralement :

- les pièces, représentées par des bulles indicées : ce sont les sommets des graphes,
- les éléments géométriques tels que les surfaces élémentaires, schématisées par les pôles portant des lettres avec le numéro de la pièce en indice. Les surfaces sont les sommets du graphe,
- les liaisons, représentées par des arcs entre les pièces ou les surfaces,
- les conditions fonctionnelles, *CF*, qui sont généralement des liaisons dont le jeu est limité.

[Petit, 2004] présente un état de l'art des représentations des mécanismes par les graphes. Il distingue les graphes des liaisons, les graphes d'assemblage [Dantan, 2000], les graphes des tolérances [Kandikjan et al, 2001], [Murauskaite et al, 2004], et enfin le graphe LMéca.

On s'intéresse précisément à ce dernier graphe car il affiche la particularité de représenter les repères liés aux pièces, voire aux surfaces. Les repères sont alors les pôles du graphe : le graphe est orienté, et les torseurs jeux et écarts entre les repères sont indiqués.

Les torseurs sont dits :

- écarts si les extrémités de l'arc appartiennent à la même pièce,
- jeux si les extrémités appartiennent à deux pièces du mécanisme.

1.2.2 Modèles de tolérancement 3D

Le modèle de tolérancement est le support conceptuel qui permet les exigences de la *CF* vers les composants du mécanisme. On peut distinguer différentes approches et modèles associées, on peut citer de façon non exhaustive :

- Classes variationnelles, [Requicha, 1977] et [Requicha, 1983]. Cette méthode considère des décalages des surfaces nominales coté intérieur matière et extérieur matière qui définissent ainsi des zones de variation. Une extension de ces travaux a porté à la traduction des exigences fonctionnelles en frontières virtuelles [Jayaraman et al, 1989].
- Modèle vectoriel, [Wirtz, 1989] caractérise la position d'une surface dans l'espace par un point et un vecteur dans une base donnée. Quatre vecteurs indépendants peuvent être nécessaires pour définir la position, orientation, forme et dimension. [Gaunet, 1993] présente un approche similaire mais en intégrant trois concepts :
 - Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement (*SATT*),
 - Élément Géométrique de Référence Minimum (*EGRM*),
 - et les torseurs de petits déplacements [Bourdet et al, 1988].

[Chase, 1999] utilise une chaîne de cote 3D, "Vector chain", qu'il crée à partir d'une méthode de linéarisation directe (Direct Linearization Method *DLM*). Il est ainsi capable de traiter des variations de position-orientation et taille. Une étude de sensibilité permet de définir la répartition des tolérances.

- Méthode *CLIC* (Cotation en Localisation avec Influence des Contacts) [Anselmetti, 2001] permet une cotation formalisée et fonctionnelle du mécanisme. A partir du Tableau de Mise en Position (*TMP*) et des exigences fonctionnelles, une cotation ISO est générée [Anselmetti et al, 2002], [Anselmetti, 2005].

- Modèle des T-Maps [Davidson et al, 2002 a], qualifie les variations d'une géométrie par rapport aux structures primitives de contrôles [Kandikjan et al, 2001] qui identifie les degrés de liberté et les invariants d'une structure. Ainsi une zone de tolérance est traduite en région multi-dimensionnelle appelé Tolérance-Map® (*T-Map*) en fonction de la nature de l'objet toléré, (plan [Mujezinovic et al, 2004], cylindre [Davidson et al, 2002 b], etc). L'accumulation des défauts des différents composants du système est réalisé par la somme de Minkowski des T-Map, représentant ainsi une analyse des tolérances des composants.
- Approche paramétrique, définit des limites à des paramètres scalaires [Guilford et al, 1993]. [Turner, 1987] propose une approche variationnelle construite à partir du modèle CAO, déterminant ainsi des variables du modèle (M_i définissant une rotation, translation, etc) auxquelles sont associées des contraintes de tolérance (T_i). On détermine ainsi un espace de faisabilité correspondant aux variations permises tout en respectant les tolérances.
- Approche par les torseurs de petits déplacements. Issue de la qualification des écarts en métrologie [Bourdet et al, 1976], [Bourdet, 1987], [Bourdet et al, 1995], cette notion donne lieu à plusieurs concepts :
 - Le concept SATT [Clément et al, 1994] qui identifie les géométries associées à une surface ou un groupe de surface. On catégorise ainsi sept classes permettant de trier les liaisons entre surface ou groupe de surface.
 - L'EGRM [Clément et al, 1994] qui correspond à l'ensemble minimum nécessaire et suffisant pour décrire la liaison d'une classe.
 Ainsi, on peut définir les défauts d'un mécanisme par différents torseurs :
 - le torseur d'écarts qui qualifie les défauts d'une surface associée par rapport à son nominal,
 - le torseur défaut qui relie les écarts entre deux surfaces d'une même pièce,
 - le torseur jeu qui représente le jeu entre deux surfaces nominales de deux pièces,
 - et le torseur pièce qui relie tous les torseurs d'écarts d'une même pièces

1.2.2.1 Méthode des domaines jeux et écarts

Nous détaillons légèrement cette approche qui par la suite nous sert de référence de comparaison pour l'approche de tolérancement et de spécification que nous proposons.

Initiée par [Giordano et al, 1992], [Giordano et al, 1993], la méthode des domaines jeux et écarts consiste à traduire les zones de tolérance ISO en domaines de tolérance dans l'espace des torseurs de petits déplacements. Cette approche nécessite la définition de repère attaché à un point d'application. Généralement le point d'application est défini au centre de la surface.

Torseur et domaine écart

On nomme torseur écarts les composantes de petits déplacements de la surface associée par rapport à sa position nominale. Cette appellation torseur écarts caractérise aussi bien le torseur d'écarts que le torseur défini précédemment.

Le domaine écart est la traduction de la tolérance imposée à une surface dans l'espace des petits déplacements.

Torseur et domaine jeux

Le torseur jeux exprime les degrés de liberté possible entre deux pièces grâce au jeu d'une liaison définie par deux surfaces en contact. En considérant l'hypothèse de pièces indéformables, les petites mobilités dues aux jeux sont limitées par la condition d'imperméabilité des pièces entre elles. Ainsi dans un torseur de liaison, on distingue les mobilités de la liaison qui sont les invariants de la liaison, et les mobilités du jeu que l'on nomme torseur jeux.

Le domaine jeux d'une liaison définit l'ensemble des torseurs jeux possibles pour une liaison.

Tolérancement au pire des cas

La méthode d'analyse des tolérances 3D consiste à exprimer les domaines écarts des surfaces tolérancées ainsi que les domaines jeux des liaisons au même points. Grâce à la somme de Minkowski, on trouve le domaine écarts résultant de l'assemblage des tolérances des surfaces, ainsi que le domaine jeux résultant de l'assemblage des jeux des liaisons. Pour faire simple, le tolérancement garantit la *CF* si le domaine écarts résultant est inclus dans le domaine jeu résultant.

Pour plus de détails sur la méthode, se référer notamment à [Giordano et al, 1999], [Giordano et al, 2001], [Kataya, 2002], [Petit, 2004].

1.2.3 Modèles de tolérancement 3D avec prise en compte des défauts de forme

Dans bien des approches le défaut de forme est négligé. Bien souvent c'est une problématique de second rang qui vient enrichir ou complexifier une méthode de tolérancement 3D. Nous citons quelques approches qui traite les défauts de forme lors du tolérancement 3D.

- Approche paramétrique [Gupta et al, 1993] où le défaut de forme est modélisé par le déplacement des nœuds d'un maillage crée en discrétisant les entités géométriques.
- Modèle des T-Map [Ameta et al, 2007] qui propose de considérer une tolérance supplémentaire pour la forme, qui est ajoutée à la tolérance 3D.

Des approches présentent une analyse des assemblages avec prise en compte des écarts de forme, telles que :

- [Lee et al, 2006] qui présente une approche de mise en position de deux composants avec défauts de forme (ondulation et rugosité) suivant un mécanisme de mise en position comprenant une surface auxiliaire et des directions de mise en position,
- [Radouani, 2003] propose une étude expérimentale afin d'évaluer la différence entre la mise en position théorique sur les surfaces associées et les essais. Ces phénomènes sont caractérisés par deux paramètres, l'interpénétration et le décollement. Il définit ainsi une méthode permettant de prendre en compte le défaut de planéité dans le calcul des tolérances.

Bien souvent, les systèmes sont considérés indéformables, c'est le cas pour le moment dans nos travaux de recherche. Cependant, des approches traitent des mécanismes flexibles dont [Perpoli, 2004] fait un bilan telles que les approches de [Sellem et al, 1998], [Shiu et al, 2003] ou [Merkley, 1998].

1.3 Analyse et caractérisation des défauts de forme

Les méthodes de caractérisation des formes sont nombreuses dû aux différents domaines d'application tels que :

- les formes 3D dans le domaine médical [Cootes, 2004] ou [Davatzikos et al, 2003].
- l'optique avec les polynômes de Zernicke [Wyant et al, 1992],

1.3.1 Analyse d'écart de formes dans le domaine métrologique

La norme ISO définit la tolérance de forme par zone déterminée par le balayage d'une sphère sur la géométrie tolérancée. Dans le cas général on utilise [ISO 1101], cas des profils [ISO 1660] .

Dans le cas des défauts de cylindricité, la norme [ISO 12180-1] identifie trois types d'écarts : ligne médiane, écarts radiaux et écarts de sections.

La méthode que la norme préconise pour caractériser les défauts est basée sur une qualification en harmonique par la méthode de Fourier.

Dans le milieu de la recherche scientifique, des approches proposent de caractériser les écarts de forme telles que :

- [Capello et al, 2000] qui présente une extension de la caractérisation des défauts de forme par les séries de Fourier aux surfaces planes. Initialement, sa démarche traite des défauts circulaire et cylindrique, qui considère les séries de Fourier pour analyser les défauts de surface circulaire ou cylindrique.
- [Summerhays et al, 2002] présente une méthode d'analyse des défauts cylindrique en caractérisant la forme par une combinaison des series de Fourier et des polynômes de Chebyshev, qu'il complète par une base de défauts propres (vecteurs propres) issus des mesures.
- [Huang et al, 2003] traite de la caractérisation des défauts de forme emboutie par la méthode des transformées en cosinus discret (Discret Cosinus Transform DCT). Cette méthode lui permet d'identifier des amplitudes des défauts de position-orientation, puis de forme.

2 La méthode modale naturelle

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Cette partie est une présentation de la méthode modale initialement définie par [Formosa et al, 2007]. Le but est de faire un bilan de la méthode avant le début de nos travaux. Cette partie se décompose en plusieurs étapes :

- *un état de l'art de la méthode, citant les premiers travaux, les détails de la méthode et le vocabulaire associé, une description de notre démarche de création de la base modale et des outils que nous utilisons pour développer et utiliser la méthode,*
- *une présentation d'un cas théorique simple, un profil poutre 2D, ayant pour but de présenter la base modale initiale. Ils servent de cas d'application pour les évolutions que nous présentons au paragraphe 3, et enfin l'utilisation de la méthode modale naturelle sur les écarts de formes de ces cas théoriques, dont le but est de montrer non seulement l'intérêt de la méthode mais aussi les points à améliorer.*

2.1 Etat de l'art de la méthode modale

On peut reprocher une spécificité dans l'application des méthodes d'analyse de forme présentée dans le paragraphe 1.3.1. En effet, certaines sont applicables sur des géométries types, mais ne peuvent être généralisées dans leur application notamment sur les surfaces gauches.

Pour répondre à la problématique de disposer d'une méthode générique, permettant l'analyse de tout type de défaut pour tout type de géométrie, [Perpoli, 2004], [Bonargent, 2005]_et [Formosa et al, 2007] proposent la méthode modale. L'idée est d'utiliser les modes naturels de vibration de la géométrie à étudier pour créer sa propre base de défauts. Ainsi un écart de forme est décrit dans la base des modes propres de l'élément géométrique (profil ou surface), d'où le nom de méthode modale.

Cette approche d'analyse des écarts de forme a des propriétés intéressantes :

- 1) Un défaut de forme analysé est décrit par une combinaison de défauts de forme élémentaires,
- 2) La base modale est une base de défauts de forme a priori, les défauts modaux sont générés automatiquement
- 3) La méthode est applicable sur tout type de géométrie, y compris les profils et surfaces gauches
- 4) Une seule base décrit tous les types de défauts : position et orientation, taille, forme de grande et courte période,
- 5) Les longueurs d'onde des défauts sont inversement proportionnelles à l'ordre du mode dans la base, la complexité des défauts est croissante

2.1.1 Création de la base modale théorique naturelle

La méthode modale est fondée sur l'analyse vibratoire de géométrie à étudier, qui peut donc être de type quelconque, curviligne, surfacique ou volumique. La méthode est donc générique et peut s'appliquer à tout type de géométrie.

L'analyse vibratoire peut se faire sur un modèle continu, voir la dynamique des structures de systèmes continus. Mais son application et la résolution des formes des modes de vibration se complexifie rapidement en fonction des conditions limites et de la géométrie étudiée. Or, comme on cherche à analyser des écarts de forme de mesures discrètes et qu'il est plus simple de résoudre un système discret, on considère donc une géométrie discrétisée. De plus on dispose sur le marché de nombreux solveurs de système dynamique discret, ce qui facilite la création de la base modale propre à une géométrie.

2.1.1.1 Dynamique linéaire d'un système discret

En dynamique linéaire, les équations de mouvement d'un système conservatif à n degré de liberté s'écrivent sous la forme générale :

$$M.\ddot{q} + K.q = 0 \quad [3-1]$$

Où $M (n,n)$ est la matrice de masse généralisée, $K (n,n)$ la matrice de raideur et $q (n,1)$ le vecteur des déplacements nodaux.

2.1.1.2 Modes propres de vibration

Un mouvement propre d'une structure est un mouvement périodique en temps, dans lequel la structure bouge en phase. En considérant des déplacements de faibles amplitudes, l'équation de mouvement peut être linéarisée et les solutions s'écrivent alors sous la forme :

$$q = Q.\cos(\omega.t) \quad [3-2]$$

où $Q (n,1)$ est le vecteur amplitude et ω la pulsation en rad.s^{-1} . Les mouvements propres sont donc solutions de l'équation :

$$(K - \omega^2.M)Q = 0 \quad [3-3]$$

Remarque

Cette équation admet n solutions qui sont les modes propres de la structure, car M et K sont définies positives. Si K est m singulière, on obtient alors les m modes propres correspondants.

Les pulsations propres ω_i des différents modes propres sont les solutions du polynôme caractéristique :

$$\text{Det}(K - \omega^2.M) = 0 \quad [3-4]$$

Les pulsations propres ω_i sont triées par ordre croissant, ce qui a pour effet de trier les vecteurs propres associés Q_i par ordre croissant. On obtient ainsi en principe un ordre croissant de complexité des défauts de forme de la base. Cette complexité croissante peut être associée à un ordre d'ondulation.

Les propriétés des vecteurs modaux Q_i sont :

- L'ensemble des vecteurs modaux Q_i détermine une base dans l'espace des n degrés de liberté,
- On définit le produit scalaire $\langle A.B \rangle = A^t.M.B$

et la norme $\|A\| = \sqrt{A^t.M.A}$ tels que $\langle Q_i.Q_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Dû au choix de travailler sur des géométries discrétisées, le nombre de degrés de libertés du modèle limite ainsi la taille de la base modale. Une base modale est complète lorsque le nombre de modes est égal au nombre de degrés de liberté du modèle EF .

Néanmoins, on choisit toujours une base modale réduite, où le nombre de modes est inférieur au degré de liberté du modèle. En effet, le paramétrage modal n'a aucun d'intérêt si le nombre de vecteurs significatifs (pour reconstruire un défaut) est aussi grand que le nombre de nœuds du maillage. Dans un tel cas, la discrétisation est trop faible ou que la méthode n'a aucun intérêt. La seconde signifie que l'on utilise autant de descripteur (défauts modaux) que de caractéristiques à modéliser (points de mesure de la géométrie).

Par conséquent, la méthode modale est utile pour représenter des défauts de forme relativement « lisses », à l'opposé des défauts de formes très locaux types pics ou marches qui sont alors filtrées par la caractérisation.

2.1.2 Analyse d'un écart de forme et vocabulaire associé

Nous énumérons ici les différentes étapes et le vocabulaire associés pour la caractérisation d'un écart de forme. On considère que la base modale est créée et que l'écart de forme à analyser est mesuré.

2.1.2.1 Projection modale

La projection modale correspond à la caractérisation d'un écart de forme dans la base modale. Cela consiste à identifier les coefficients d'influences, nommés coefficients modaux, des différents modes composant l'écart de forme. Ces coefficients modaux s'obtiennent par :

$$\lambda_i = \langle V \cdot Q_i \rangle = V' \cdot M \cdot Q_i \quad [3-5]$$

Où λ_i est le coefficient modal du défaut modal i (mode i) dans la description de l'écart de forme $V(n, l)$.

L'ensemble des λ_i coefficients modaux décrit un vecteur $\Lambda(m, l)$ que l'on nomme signature modale. Cette signature contient les influences des m défauts modaux de la base sur la caractérisation de l'écart de forme V .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dots \\ \lambda_i \\ \dots \end{bmatrix} \quad [3-6]$$

Des évolutions de la projection modale sont présentées dans la partie 3.2 et 3.3.

2.1.2.2 Reconstruction modale

La reconstruction modale correspond à la recombinaison des défauts modaux pondérés de leurs coefficients modaux. L'objectif est de recréer l'écart de forme à partir de sa caractérisation modale.

Connaissant la signature modale de l'écart de forme, sa reconstruction est donnée par :

$$T = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot Q_i \quad [3-7]$$

Où $T(n, l)$ correspond à la reconstruction du défaut analysé par la base modale associée.

2.1.2.3 Résidu de projection modale

Dans le cas d'une base complète, où le nombre de vecteurs modaux correspond au nombre de degrés de liberté du système, un écart de forme est alors toujours parfaitement décrit.

Dans le cas contraire d'une base tronquée, le nombre de modes est donc inférieur aux degrés de liberté, d'où la caractérisation de l'écart n'est pas exacte. On définit ainsi un résidu d'analyse:

$$R = V - T \quad [3-8]$$

$R(n, I)$ est le vecteur résidu qui correspond à la différence de forme entre l'écart analysée et sa description modale. On définit ainsi le scalaire r , le résidu global d'analyse, par la norme du vecteur résidu :

$$r = \langle R.R \rangle \quad [3-9]$$

De façon générale, on définit le vecteur résidu en fonction du nombre de modes utilisés pour la caractérisation. Ainsi on définit $R(m)$ qui est le vecteur écart résidu d'analyse en considérant m mode de la base modale :

$$R(m) = V - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot Q_i \quad [3-10]$$

De la même façon que le résidu scalaire, on définit $r(m)$ le résidu de la description modale en considérant m modes.

$$r(m) = \langle R(m).R(m) \rangle \quad [3-11]$$

Une évolution de la caractérisation du résidu est présentée dans la partie 3.1.

2.1.3 Ecriture sous forme matricielle

Les étapes de décomposition et reconstruction modale d'un défaut de forme peuvent s'écrire sous la forme d'un produit de matrice et de vecteurs. Pour ce-faire, on définit $B(n, m)$, la base modale, contenant l'ensemble des m vecteurs modaux Q_i .

Ainsi la projection d'un écart V de forme dans la base modale B s'écrit :

$$\Lambda^t = V^t . M . B \quad [3-12]$$

Et sa reconstruction T par sa signature modale Λ dans la base modale B s'écrit :

$$T = B . \Lambda \quad [3-13]$$

D'où on définit l'écart de caractérisation R :

$$R = V - T = V - B . \Lambda \quad [3-14]$$

Il en ressort un intérêt certain pour cette écriture de la méthode qui permet de calculer la signature modale en une seule étape. De même, la reconstruction de la forme, à l'écart de description prêt, se fait en une seule opération. On voit surtout l'intérêt pour l'intégration de la méthode dans un logiciel de calcul matriciel, type *Matlab*.

2.2 Un cas d'illustration simple : un profil poutre

Pour illustrer nos propos et se rendre compte des différentes évolutions que nous proposons, nous choisissons de traiter un cas simple à visualiser qu'est le profil d'une poutre 2D. La géométrie considérée est un profil de 100mm de longueur discrétisé en 50 éléments.

2.2.1 Base modale naturelle d'une poutre

La figure 3-1 présente les neuf premiers modes de la base modale naturelle obtenue par l'analyse vibratoire du modèle poutre.

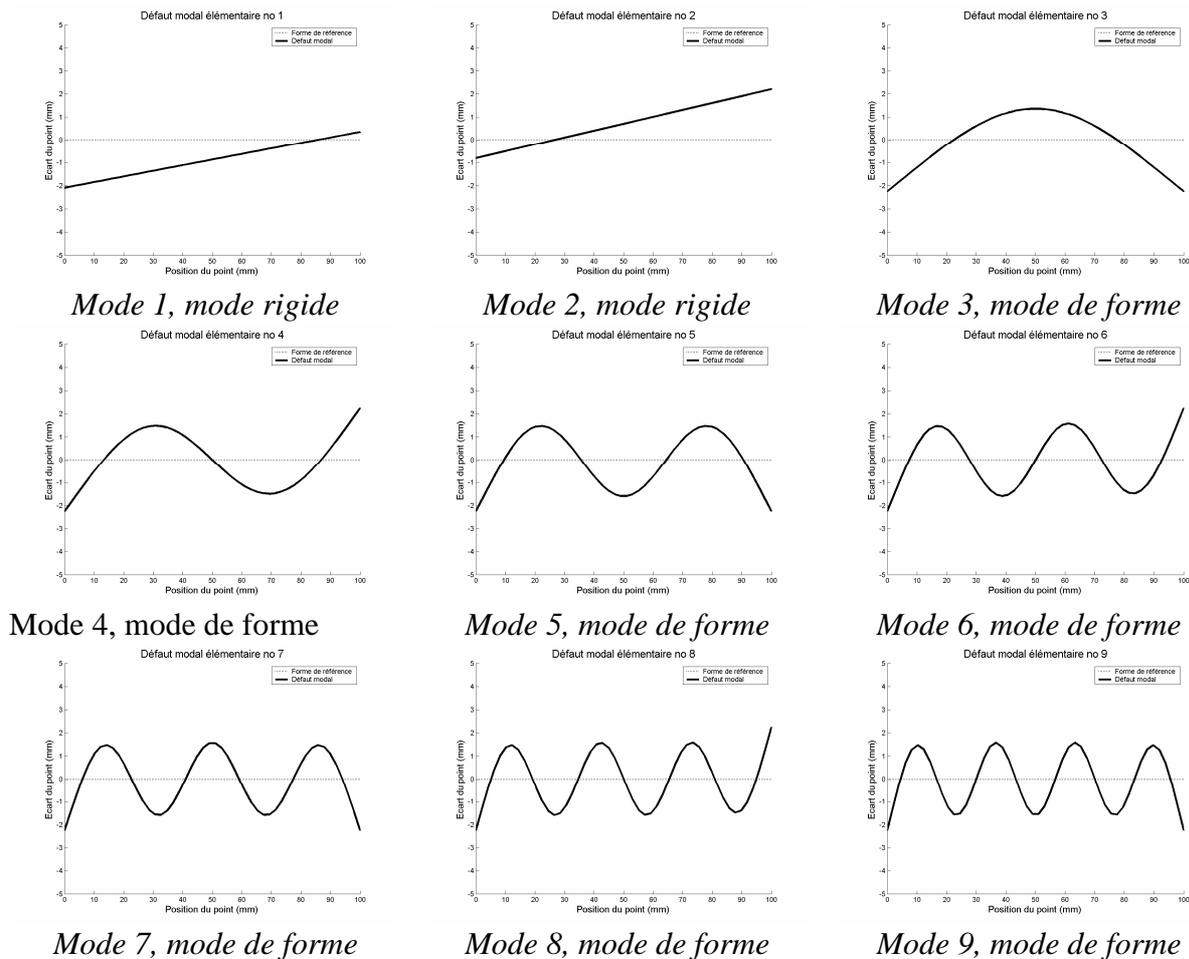


Figure 3-1 : Premiers modes de la base modale naturelle du modèle poutre

Remarques

- Cette base modale est générée automatiquement, on se rend compte de la complexité croissante des défauts de forme en fonction de leur ordre naturel dans la base modale.
- Les deux premiers modes rigides ne sont pas des modes de translation ou de rotation pure. Ce sont des combinaisons de ce qu'on espère, le mode de translation suivant la direction y et verticale et le mode de rotation autour de l'axe z normal au plan 2D.

2.2.2 Un défaut de forme simulé

Pour appliquer la méthode modale, on choisit un exemple simulé de défaut de forme. On utilise la résolution statique du modèle EF dont certains nœuds sont soumis à des déplacements. Cette approche permet de fournir une forme relativement lisse (pas de pic ou marche).

On justifie le choix d'une application sur une simulation car la méthode est récente et nécessite d'être évaluée. On peut ainsi la tester sur tout type de forme avec un aspect relativement lisse.

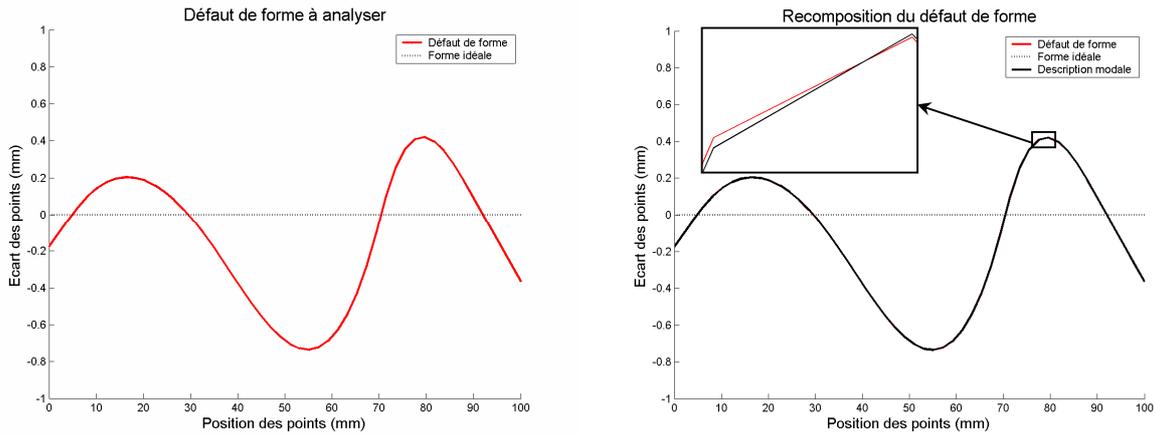


Figure 3-2 : Ecart de forme simulé et recombinaison modale

2.2.3 Caractérisation du défaut de forme

La figure 3-3 montre la description du défaut de forme par sa signature modale. On peut aussi remarquer que le résidu de caractérisation décroît rapidement avec le nombre de modes. On peut observer que le résidu de reconstruction avec 30 modes est très faible, mais pas nul. Cela se justifie par le fait que la base modale n'est pas complète, on obtiendra donc toujours un résidu. On peut observer une source de ce résidu sur la figure 3-2. Un zoom local montre un écart entre le défaut de forme et la recombinaison modale.

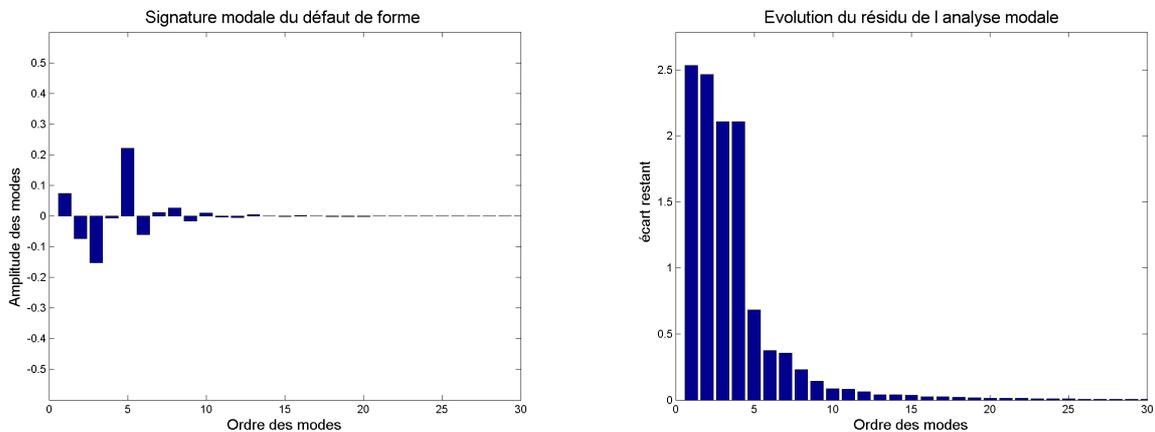


Figure 3-3 : Signature modale et évolution du résidu de caractérisation

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

Ce cas d'exemple simple permet de voir le fonctionnement de la méthode, et l'intérêt que nous lui portons. Bien sûr le principal intérêt de la méthode n'est pas présenté ici, elle est applicable à tout type de géométrie y compris les surfaces gauches. C'est principalement ce dernier point qui nous pousse à utiliser cette approche de caractérisation des écarts de forme. Entre autre la méthode présente des propriétés intéressantes :

- L'écart de forme est caractérisé par une combinaison de défaut de forme élémentaire,
- L'identification d'un écart de forme peut être représentée de façon simple par un histogramme indiquant l'influence de chaque défaut modal,
- Le résidu de caractérisation de la forme diminue rapidement en augmentant le nombre de modes dans la description de l'écart de forme.

Cependant, les écarts de forme n'ont pas l'interprétation métrique fondamentale pour sa manipulation en tolérancement. Ce point nous amène à une évolution de la base modale vers une base métrique présentée dans la partie 3.3.

3 Evolution de la méthode modale

La base modale est un outil intéressant grâce à ses différentes propriétés (exhaustives et applicables sur tout type de géométrie). Cependant, du point de vue du métrologue qui utiliserait cette méthode d'analyse des écarts de forme, l'interprétation des résultats n'est pas toujours évidente. La signature modale permet de mettre en avant la combinaison de certains défauts modaux avec des influences plus ou moins grandes. Cependant, la quantification n'a pas de sens métrique. De plus, l'utilisateur de la méthode peut avoir un certain niveau d'expertise sur la géométrie à caractériser et peut alors être amené à compléter la base modale naturelle par des défauts de forme qu'il cherche à observer.

En réponse à ces problématiques, nous proposons deux principales évolutions de la méthode modale de caractérisation des écarts de formes :

- en donnant une signification métrique aux coefficients modaux,
- en proposant d'intégrer des défauts de forme dits technologiques.

Pour clarifier la démarche d'évolution de la base modale, nous avons schématisé les différentes avancées et leur ordre d'utilisation.

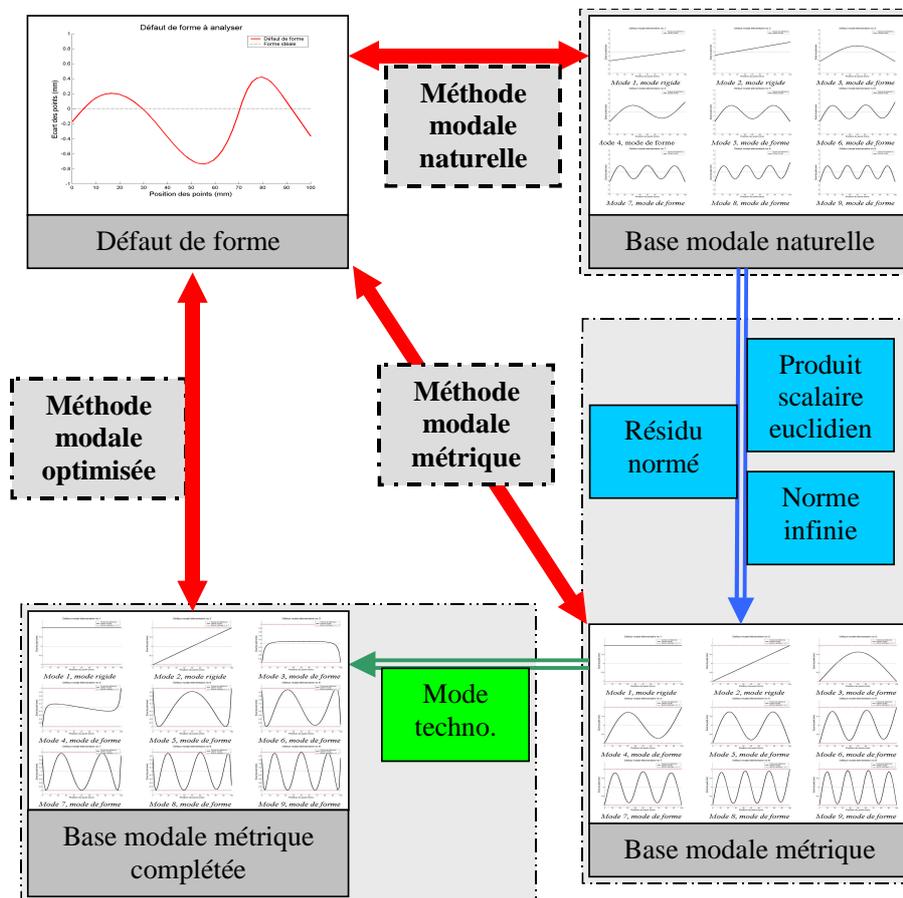


Figure 3-4 : Schéma d'évolution de la base modale

Le premier bloc de ce schéma correspondant à la méthode modale naturelle est traité précédemment dans la partie 2.1.1. Les deux autres blocs qui traitent de l'évolution de la base modale sont traités dans cette partie 3.

On présente dans la partie 3.1 une évolution sur la qualification du résidu de la caractérisation modale. Celle-ci n'apparaît pas comme une étape dans le schéma des évolutions de la figure 3-4 mais cette nouvelle qualification du résidu de caractérisation modale permet de comparer l'efficacité de la méthode d'une façon plus générique.

Le bloc correspondant à la base modale métrique est traité en deux parties :

- la première présente la simplification de la description du défaut de forme dans la base modale en considérant un espace vectoriel euclidien,
- la seconde donne un lien métrique entre la valeur du coefficient modal et l'amplitude du défaut modal en utilisant la norme infinie.

Le dernier bloc enfin représente la dernière évolution que nous apportons à la méthode modale. Cette évolution est présentée dans la partie 3.4 et correspond à l'introduction de défauts technologiques, correspondant à des formes qui ne sont pas naturellement comprises dans la base modale.

3.1 Evolution du résidu de caractérisation modale

Le but est de présenter une méthode standard de caractérisation des résidus de la description modale des écarts de forme. L'intérêt est de pouvoir comparer l'efficacité de la méthode quel que soit l'écart à analyser.

L'inconvénient de la définition actuelle du résidu est que sa valeur initiale dépend de l'écart caractérisé. Ainsi on ne peut pas aisément comparer les résidus de deux analyses modales car ils ne sont pas à la même échelle (résidu initial dépendant du défaut).

Pour s'affranchir de l'unité de mesure et de la valeur initiale du résidu, on définit $\rho(p,m)$ le ratio des résidus $r(p)$ sur $r(m)$ qui correspond à un résidu relatif.

$$\rho(p,m) = \frac{r(p)}{r(m)} \quad [3-15]$$

L'intérêt d'une telle définition est de montrer l'efficacité de la description modale entre différents niveaux de la caractérisation :

- Si $m = 0$, on qualifie la méthode par rapport à la mesure de l'écart de forme lui-même, comme présenté dans [Adragna et al, 2006 c]. Ainsi on a une qualification du résidu de caractérisation par rapport à l'écart initial,
- Si m égale le nombre de modes rigides, on juge alors l'efficacité de la méthode modale pour la description de la forme uniquement,

ρ correspond à un pourcentage de non-identification du résidu, compris entre 0 et 1 et dont la valeur optimale tend vers 0.

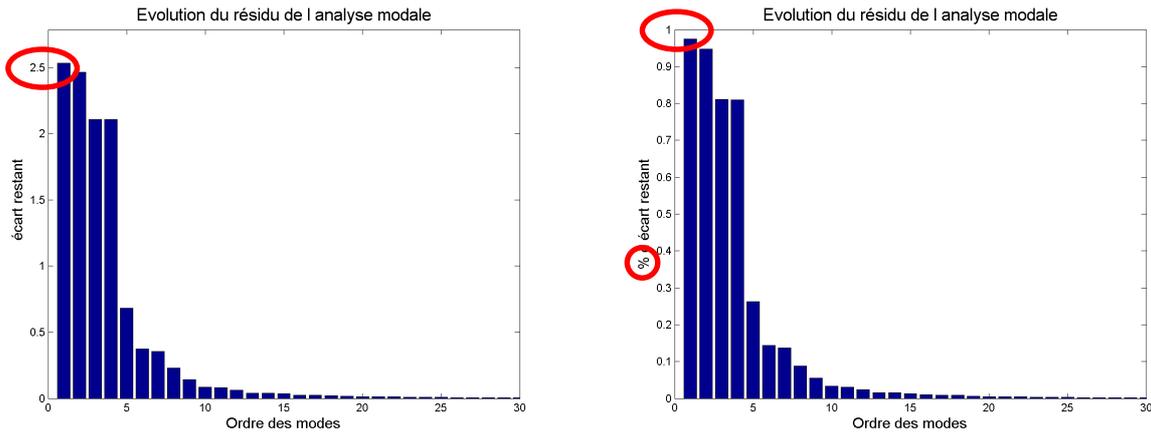


Figure 3-5 : Ancienne et nouvelle expression du résidu de caractérisation

3.2 Base modale euclidienne

La méthode initiale de projection se fait dans une base M-orthogonale. Les coefficients modaux obtenus ont donc une signification matériaux et non métrologique. L'objectif est de définir la projection modale du défaut de forme dans la base modale grâce au produit scalaire euclidien :

$$\lambda_i = \langle V, Q_i \rangle = V^t \cdot Q_i \quad [3-16]$$

Où λ_i est le coefficient modal du mode i , Q_i , dans la description du défaut de forme V . L'intérêt de cette approche est de simplifier la projection modale et de se dispenser de cette matrice de masse M .

3.2.1 Orthonormalisation de Gram Schmidt

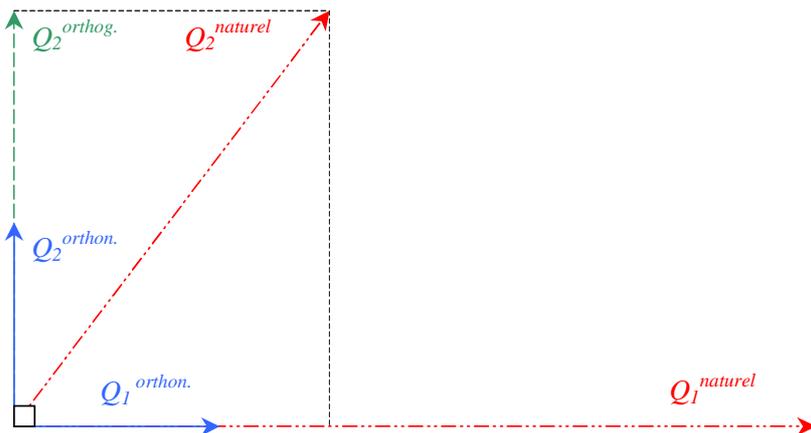


Figure 3-6 : Orthonormalisation de Gram Schmidt

Pour transformer la base modale en base euclidienne on utilise la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt [Wikipedia, 2007 a]. Cette méthode d'orthonormalisation d'une base modale est facile à implémenter suivant l'algorithme :

```

pour i <- 1 jusqu'à i = n
  pour i <- 1 jusqu'à i = j - 1
     $Q_i \leftarrow Q_i - \langle Q_i, Q_j \rangle \cdot Q_j$ 
  fin pour
   $Q_i \leftarrow Q_i / \text{racine}(\langle Q_i, Q_i \rangle)$ 
fin pour
    
```

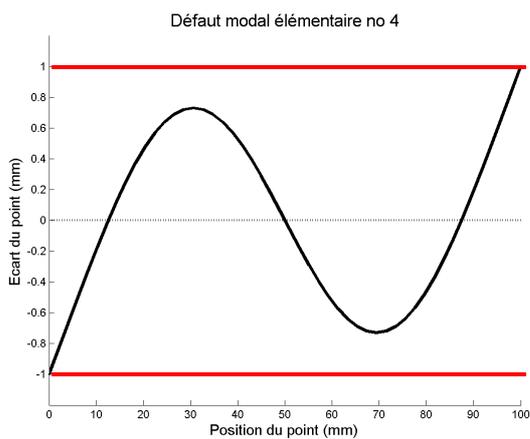
Où Q_i représente un des n vecteurs de la base, i est le numéro d'un vecteur, et $\langle Q_i, Q_j \rangle$ est le produit scalaire euclidien des vecteurs Q_i et Q_j .

Remarque

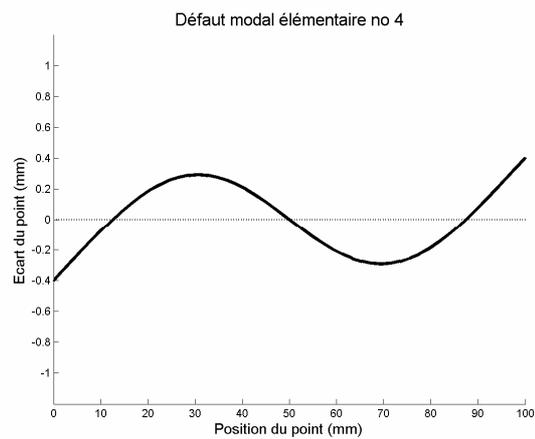
La particularité de cette méthode d'orthonormalisation est l'influence de l'ordre des vecteurs dans la base. En effet, les premiers vecteurs sont prioritaires sur les suivants dû à la démarche d'orthonormalisation de la base.

Cette notion est importante notamment lors de l'introduction de défauts dits technologiques dans la base modale. Ces défauts supplémentaires sont bien souvent des combinaisons linéaires de certains vecteurs de la base, ainsi leur introduction parmi les premiers modes provoque un changement de forme des suivants. Cette approche est présentée au paragraphe 3.4.

3.3 Base modale métrique



Mode 4 : mode de forme métrique



Mode 4 avec un coefficient modal $\lambda_4 = 0,4$

Figure 3-7 : Exemple de défaut modal métrique

Afin de donner un intérêt supplémentaire à la caractérisation modale pour le milieu de la métrologie, on présente la base modale métrique. La projection d'un défaut de forme dans cette base fournit alors une signature modale, dont les coefficients ont un sens métrique (mm par exemple).

Cette base modale métrique est une évolution de la base modale euclidienne. Ses vecteurs modaux sont orthogonaux au sens du produit scalaire euclidien, mais leurs normes est maintenant définies par la infinie ($\|Q_i\|_\infty = 1$) et plus la norme euclidienne ($\|Q_i\|_2 = 1$). Cette approche rend unitaire l'amplitude maximale des défauts modaux. Il en découle que l'écart maximal de la recomposition d'un vecteur Q_i est défini par son coefficient modal λ_i .

On constate alors que cet aspect est très intéressant pour la mise en place de la méthode en métrologie, la signature modale définit des amplitudes métriques des défauts élémentaires.

3.3.1 Projection modale dans la base métrique

Le changement de norme des vecteurs modaux influe sur la projection modale. En effet on ne peut plus simplement utiliser le produit scalaire euclidien pour déterminer directement l'influence de chaque mode de la base sur la caractérisation de l'écart de forme.

Comme les vecteurs modaux on une norme infinie, on a :

$$\|Q_i\|_{\infty} = \text{Max}(Q_{i,j}^{\infty}) = 1 \quad [3-17]$$

Où $Q_{i,j}$ représente la $j^{\text{ème}}$ coordonnée du $i^{\text{ème}}$ vecteur modale de la base et Q_i^{∞} représente le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base dont la norme est infinie.

On a une relation entre le vecteur en norme euclidienne et le même vecteur en norme infinie :

$$\frac{Q_i^{\infty}}{\|Q_i^{\infty}\|_2} = Q_i^2 \quad [3-18]$$

Où Q_i^2 représente le $i^{\text{ème}}$ vecteur en norme euclidienne, Q_i^{∞} représente le même $i^{\text{ème}}$ vecteurs en norme infinie et $\|Q_i^{\infty}\|_2^2$ représente la norme euclidienne du $i^{\text{ème}}$ vecteur modal en norme infinie.

En utilisant la projection modale euclidienne définie au paragraphe 3.2 mais en utilisant les défauts modaux métriques, on a :

$$\lambda_i = \langle Q_i^{\infty}, V \rangle = \|Q_i^{\infty}\|_2 \cdot \left\langle \frac{Q_i^{\infty}}{\|Q_i^{\infty}\|_2}, V \right\rangle \quad [3-19]$$

D'où l'influence de ce mode est :

$$T_i = \lambda_i \cdot Q_i^{\infty} = \|Q_i^{\infty}\|_2 \cdot \left\langle \frac{Q_i^{\infty}}{\|Q_i^{\infty}\|_2}, V \right\rangle \cdot Q_i^{\infty} = (\|Q_i^{\infty}\|_2)^2 \cdot \left\langle \frac{Q_i^{\infty}}{\|Q_i^{\infty}\|_2}, V \right\rangle \cdot \frac{Q_i^{\infty}}{\|Q_i^{\infty}\|_2} \quad [3-20]$$

De cette relation et la relation [3-18] on peut déduire :

$$T_i = (\|Q_i^{\infty}\|_2)^2 \cdot \langle Q_i^2, V \rangle \cdot Q_i^2 \quad [3-21]$$

Le produit scalaire euclidien classique utilisé pour projection dans la base modale euclidienne est à modifier ici pour la projection dans la base modale métrique. On propose donc de définir la projection dans la base modale métrique par :

$$\lambda_i = \frac{\langle Q_i^{\infty}, V \rangle}{(\|Q_i^{\infty}\|_2)^2} \quad [3-22]$$

Où $\langle Q_i^{\infty}, V \rangle$ est le produit scalaire euclidien de l'écart de forme par le $i^{\text{ème}}$ vecteur modal de la base métrique.

3.4 Défauts technologiques

La base modale a la propriété d'être exhaustive, elle peut décrire tout type de défaut à la condition que la discrétisation du modèle associé soit suffisamment fine au regard de l'écart de forme à décrire. Néanmoins les défauts modaux sont issus de l'analyse vibratoire des géométries d'étude et possèdent donc certaines propriétés géométriques comme la continuité de la forme des modes. Par conséquent, on ne peut pas obtenir de défauts modaux comportant un pic, une marche ou un brusque changement de pente.

De plus, la description d'un écart de forme peut combiner plusieurs modes qui pour le métrologue caractérisent un seul défaut "technologique". C'est d'ailleurs un tel cas qui est à l'origine de la méthode [Adragna et al, 2006 d], et que l'on résume dans la partie 3.4.2.

3.4.1 Enrichissement de la base modale

La méthode que nous proposons pour enrichir la base modale correspond à l'ajout d'un nouveau défaut de forme qui n'est pas naturellement exprimé par l'analyse vibratoire. Ce défaut est dit technologique car :

- pour le client, il correspond à une forme à contrôler,
- pour les études et les méthodes, il correspond à un défaut qu'il est possible d'obtenir par les moyens de production,
- pour la métrologue, il identifie une forme que la méthode modale naturelle décrit par une combinaison de plusieurs défauts.

Comme ce défaut a une forme connue, il peut être décrit par des fonctions mathématiques continues (que l'on discrétise) ou discrètes. De cette manière les déplacements des nœuds correspondants sont connus.

Une fois identifiés et définis, les défauts de formes sont introduits dans la base modale. Nous préconisons de les placer parmi les premiers modes de la base, après les modes rigides car :

- ce sont des défauts que l'on s'attend à observer, il est donc préférable de les placer en début de base,
- le processus d'orthogonalisation de la base risque de modifier leur forme en fonction des modes précédents, on minimise ainsi ce risque de modification du défaut technologique.

3.4.2 Le cas d'application industriel

Nous rappelons ici rapidement la démarche présentée dans [Adragna et al, 2006 d] qui consiste à enrichir la base modale par des défauts technologiques.

Nous avons caractérisé un lot de tiroirs de distributeur hydraulique mesuré sur une machine de mesure de forme. Les mesures des pièces sont réalisées par des mesures radiales de différentes sections. L'observation des signatures modales a mis en évidence une signature commune faisant apparaître un écart répétitif sur les différentes pièces du lot (utilisation du critère de similarité de Pearson). Cet écart répétitif a été identifié comme un écart de diamètre du cylindre, que l'on nomme défaut de taille qui est présenté avec sa signature modale dans la base naturelle dans la dans la figure 3-8. Cette forme de mode n'étant pas incluse dans la base modale naturelle, elle est décrite par une combinaison de modes.

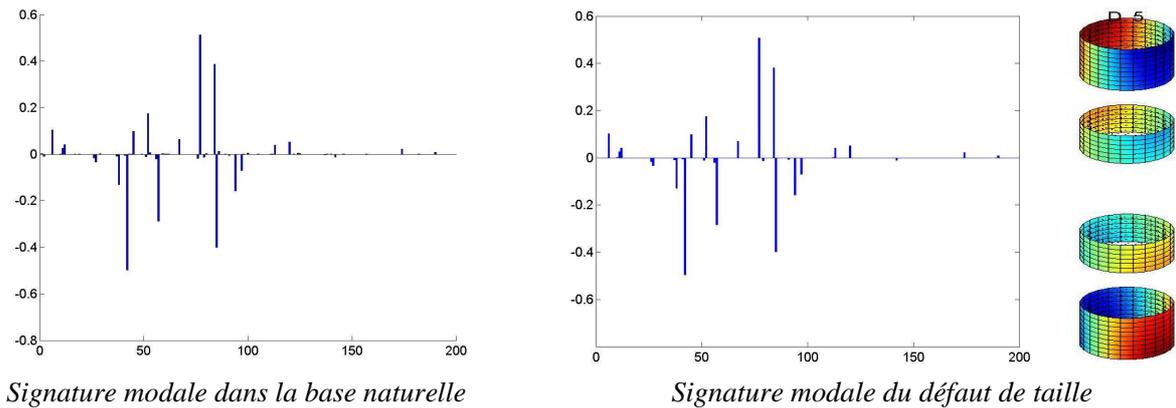


Figure 3-8 : Signature modale naturelle et identification du 1^{er} défaut technologique

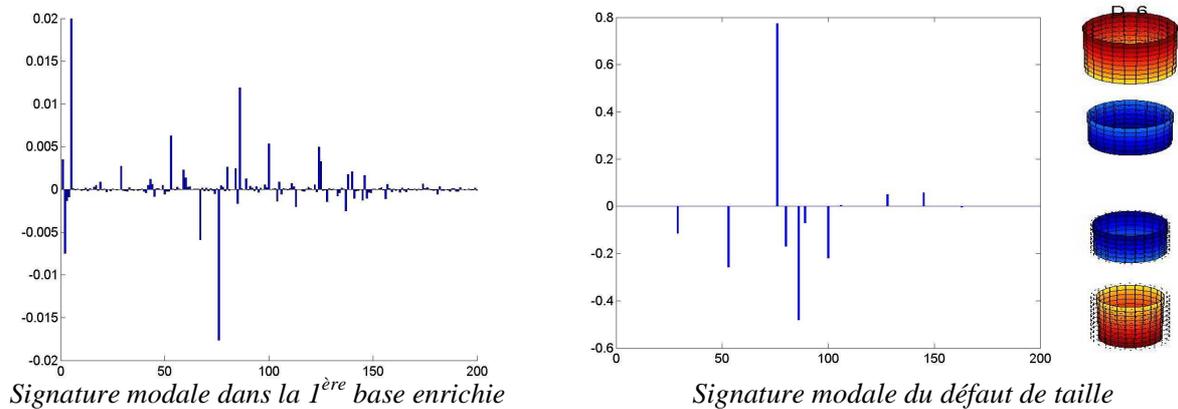


Figure 3-9 : Signature modale dans la base enrichie et identification du second défaut technologique

L'analyse du lot dans cette nouvelle base modale enrichie d'un mode technologique de "taille" fait apparaître une seconde signature modale que l'on retrouve sur les différentes pièces. Cet écart répétitif est identifié par un défaut de type "conicité", qui lui aussi est traduit par une combinaison de modes dans la base naturelle.

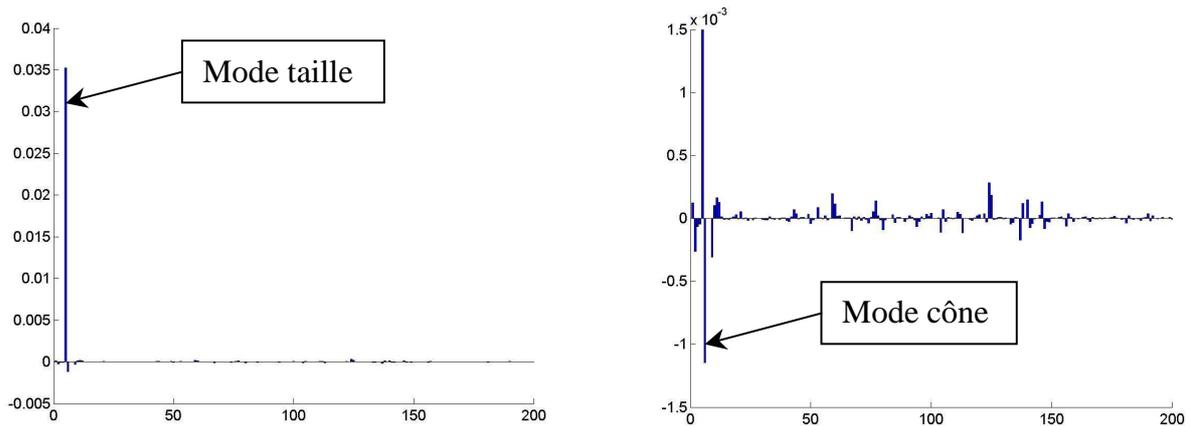


Figure 3-10 : Signature modale à deux différentes échelles dans la base technologique (modal + taille + cône)

La base modale technologique ainsi identifiée permet alors d'identifier les défauts de forme sans laisser de défaut répétitif parmi les pièces du lot. On peut ainsi identifier :

- des écarts dus au dégauchissage de la mesure sur les quatre premiers modes,
- un écart de taille de 35,3 μm , qui est en fait un paramètre de pilotage de l'usinage pour appairer les composants,
- un écart de forme conique, le coefficient modal $\lambda_6 = -1,2\mu\text{m}$, soit un écart de conicité d'amplitude 1,2 μm orienté dans le sens contraire à la définition du défaut élémentaire. Après expertise cet écart est identifié comme un écart du moyen de mesure,
- des écarts de forme dont tous sont inférieurs à 0,3 μm .

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

La méthode que nous proposons dans ce paragraphe, que nous appelons enrichissement de la base modale, confirme l'intérêt porté à la méthode modale. En effet on dispose maintenant non seulement d'une base de caractérisation des écarts de forme a priori, sans savoir ce qu'on attend comme défaut de forme, mais on peut avoir une expertise plus poussée et compléter cette base modale par des défauts de forme que l'on souhaite observer et que l'on sait décrire par expertise ou a posteriori.

Ainsi si le concepteur ou le métrologue sait à l'avance les formes qu'il peut observer sur la mesure des écarts de forme, la base modale vient alors en arrière plan laissant la priorité de caractérisation de la forme à la base de défauts technologiques. Une fois les influences des formes technologiques identifiées, les défauts modaux décrivent le résidu d'écart de forme qui n'a pu être caractérisé par la base technologique.

3.5 Application sur le cas d'exemple

On reprend ici le cas du profil poutre et de l'écart de forme simulé pour appliquer les évolutions proposées. On caractérise ensuite l'écart de forme simulé pour présenter les évolutions obtenues sur l'analyse d'un défaut de forme.

3.5.1 Evolution de la base modale

On applique les évolutions de la méthode modale sur la base modale du profil poutre. On procède en deux étapes afin de montrer les deux phases de l'évolution.

3.5.1.1 Base modale métrique

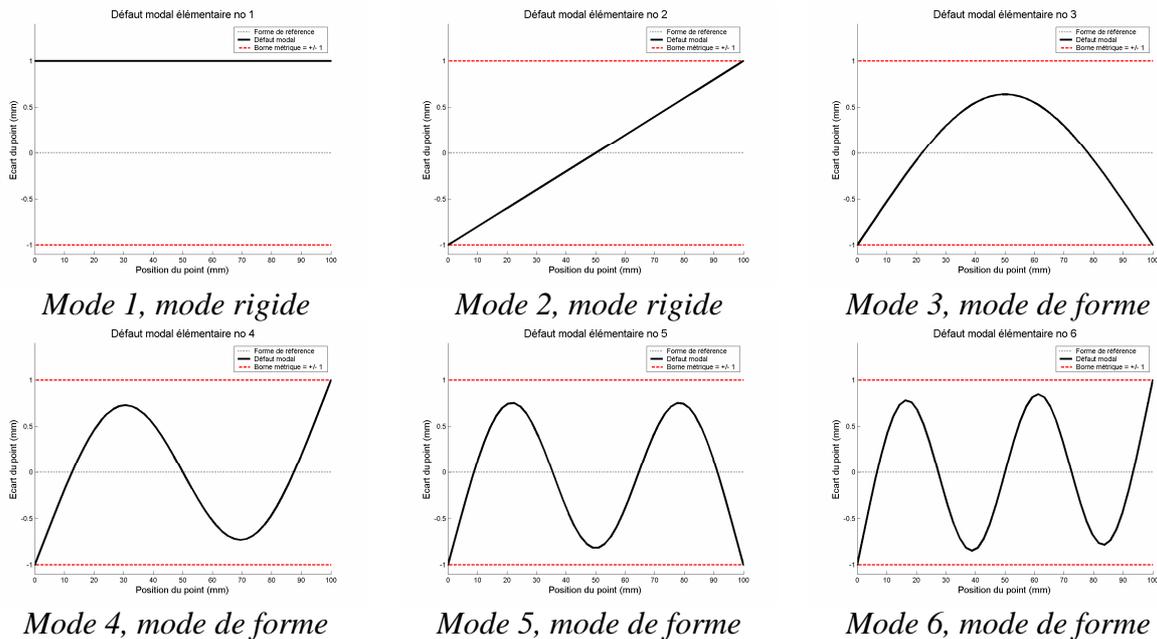


Figure 3-11 : Base modale métrique du modèle poutre

On remplace le premier mode rigide par un mode de translation pure. On rend la base euclidienne, puis métrique.

On peut constater que les formes globales des défauts modaux changent très peu entre la base naturelle et la base métrique. Cependant, le point remarquable sur cette nouvelle base de défaut de forme est :

- la présence de deux défauts rigides purs, translation et rotation,
- l'écart maximal de chaque mode est maîtrisé et défini unitaire, ce sont des modes métriques.

L'intérêt de cette première évolution est de lier l'amplitude du défaut type identifié à une valeur métrique. On constate ainsi une différence entre la caractérisation dans la base naturelle (figure 3-3) où les coefficients modaux sont liés aux amplitudes sans signification métrique, et la caractérisation du même écart de forme dans la base métrique de la figure 3-12.

La seconde évolution qui consiste à insérer des défauts technologique est présentée en annexe 2 , où l'on propose d'insérer des défauts caractérisant des effets de bord. Cependant, les résultats de cette évolutions nous paraissent moins intéressant que ceux de la base modale métrique, c'est pourquoi on choisit de ne les présenter qu'en annexe.

3.5.2 Analyse de l'écart de forme simulé

La figure 3-12 présente la caractérisation du défaut de forme dans la base modale métrique. Par rapport à la caractérisation modale dans la base naturelle, il n'y a pas de franc changement d'aspect global, hormis les modes rigides.

Cependant, le changement marquant est la signification métrique de la signature modale.

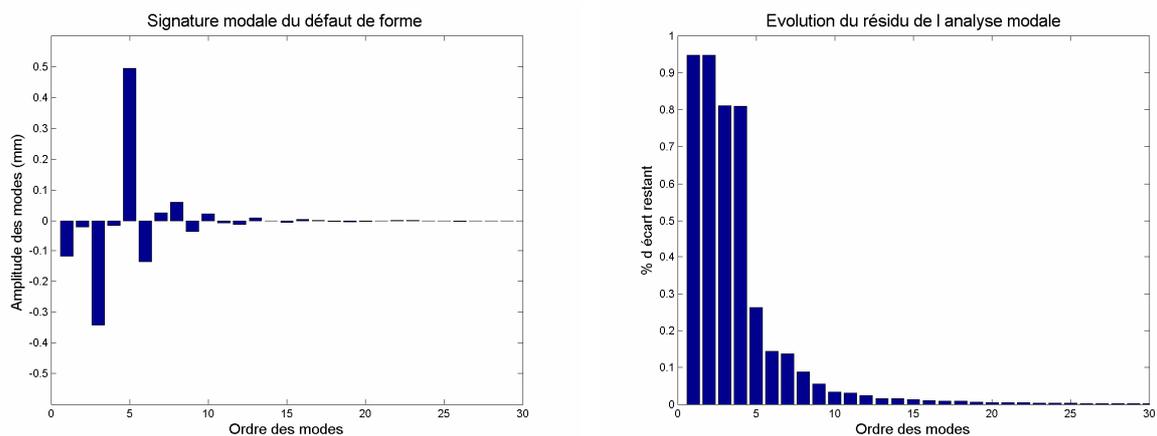


Figure 3-12 : Caractérisation de l'écart de forme dans la base métrique

3.5.3 Re-combinaison des modes

On présente ici à titre indicatif la combinaison des modes lors de la recombinaison du défaut de forme. Cet aspect est plutôt ludique mais présente cependant, un intérêt. On peut observer la combinaison et la compensation des modes. On peut ainsi constater l'effet des modes de grande influence (coefficient modal élevé ou forte chute du résidu). On constate ainsi que le mode 3 et le mode 5 ont en effet un rôle important dans la description de ce défaut de forme.

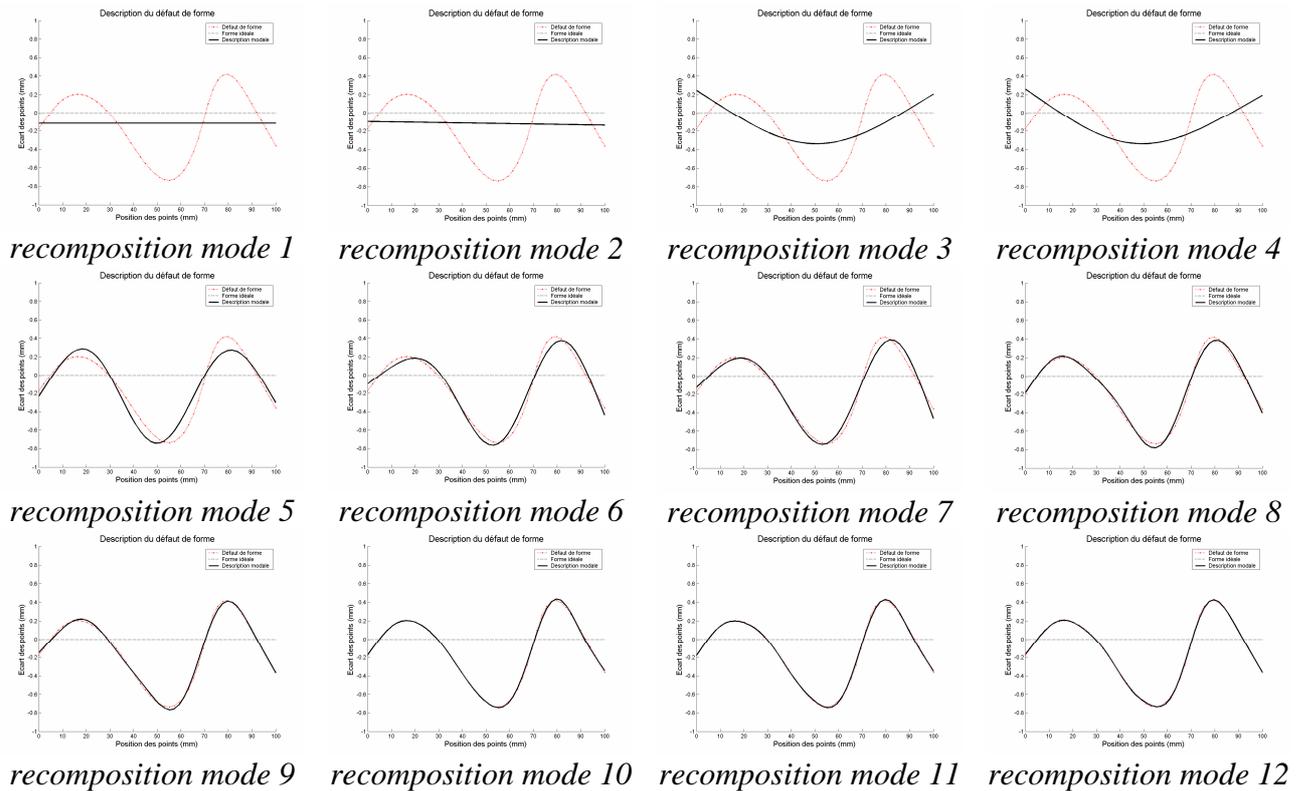


Figure 3-13 : Déroulement de la recomposition modale étape par étape

3.6 Equivalence entre modes rigides et composantes du torseur de petits déplacements

Les transformations rigidifiantes d'une surface peuvent s'exprimer selon plusieurs types de paramètres indépendants. Si ces transformations sont exprimées à l'aide de relations linéaires, alors les relations entre ces paramètres sont elles aussi des relations linéaires. Ces paramétrages étant équivalents (ils représentent les mêmes mobilités) l'espace qu'ils décrivent est de la même dimension. La relation linéaire entre deux paramétrages linéaires indépendants peut être écrite à l'aide d'une matrice carrée définie¹. Nous avons choisi de n'exprimer que le lien entre le paramétrage rigide modal et le torseur de petits déplacements (TPD). En effet, nous utilisons le concept de TPD pour l'assemblage.

¹ A déterminant non nul. La relation est de ce fait un système cramérien.

La base modale contient des « défauts types » que l'on peut décomposer en deux catégories, les modes rigides et les modes de forme. Ils correspondent aux écarts d'une surface mesurée par rapport à sa géométrie idéale. Ces écarts (mesurés ou simulés) sont « mesurés » dans des repères locaux à chaque point de mesure (voir paragraphe 4.1 de ce chapitre). Dans cette modélisation, chaque nœud du maillage EF (dont des points de mesures) définit sa propre référence (un repère lui est associé). Dès lors le déplacement de chaque nœud est décrit par rapport à sa référence (surface idéale), connue dès l'étape de discrétisation. A la différence des torseurs de petits déplacements, les modes rigides ne sont pas forcément chacun définis comme une mobilité (Tx, Ty, ..., Rz) de la surface mais représentent six mobilités rigidifiantes indépendantes. Ils forment un sous espace des modes qui peut être recomposé de façon à correspondre à des mobilités plus explicite pour le concepteur. Cette première évolution est présentée dans la partie 3.5.1 de ce chapitre. La relation linéaire [3-23] peut avoir une écriture simplifiée avec une matrice de passage diagonale.

Cependant, l'orthogonalisation de la base modale ne permet pas d'imposer les modes rigides car elle modifie un vecteur modal de la base en fonction des précédents. Ainsi, les modes rigides d'orientation peuvent s'apparenter à des écarts de rotation dont l'origine du repère correspond au centre de gravité des nœuds du maillage. Il est alors possible de définir une matrice de passage permettant d'établir un lien entre la paramétrisation modale rigide et les composantes du TPD d'un repère associé :

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \lambda_{Ri} \\ \dots \end{bmatrix} = [\Lambda_r - TPD_o] \begin{bmatrix} \dots \\ T_j \\ \dots \end{bmatrix}_o \quad [3-23]$$

Où $\begin{bmatrix} \dots \\ \lambda_{Ri} \\ \dots \end{bmatrix}$ représente les coefficients des modes rigides, aussi appelé la signature modale

rigide Λ_r , $\begin{bmatrix} \dots \\ T_j \\ \dots \end{bmatrix}_o$ représente les composantes du torseur de petit déplacement du repère

(O,x,y,z), et $[\Lambda_r TPD_o]$ représente la matrice de passage des composantes du torseur de petit déplacement au point O vers les coefficients modaux rigides. Dans le cas le plus général, la matrice de passage est une matrice (6 x 6). Dans le cas particulier où les modes rigides modaux correspondent à des composantes prises une à une du torseur de petit déplacement, la matrice est diagonale. C'est le cas pour le modèle 2D présenté dans le paragraphe 4.2.2.3 de ce chapitre.

CONCLUSION DE LA PARTIE

On peut dès lors voir un premier lien entre tolérance 3D et méthode modale. On peut même tirer une relation nécessaire qui vérifie si un écart de forme est compris dans une zone de tolérance :

- Pour que la zone de tolérance soit respectée, il faut au minimum que chaque coefficient modal soit inférieur en valeur absolue à la valeur de la zone de tolérance.

Bien sûr cette condition est nécessaire, mais non suffisante. Si tous les coefficients modaux respectent individuellement la condition, la combinaison des influences des modes peut être hors de la zone de tolérance. Une courte discussion est proposée dans le chapitre 4 sur la représentation de la tolérance dans la base modale.

L'intégration de nouveaux modes ("technologiques") dans la base modale est à pratiquer avec précaution. Le cas des défauts de forme est délicat car la base se suffit pour la description des formes. Cette étape d'enrichissement nécessite donc une certaine expertise de la géométrie à analyser, dont la base modale naturelle permet de se passer le plus souvent.

4 Assemblage de composants et méthode modale

Cette partie traite principalement de l'assemblage de composants. Elle se détaille en trois sous-parties :

- Une première partie présente la caractérisation modale des accostages. La méthode de description des défauts de forme permet la création d'une base d'analyse des écarts d'accostage grâce à une définition appropriée de repères locaux.
- Une seconde partie traite de l'assemblage modal de composants sans prendre en compte les écarts de forme. On présente un critère d'association d'une surface sur un défaut de forme, que l'on peut comparer aux moindres carrés, et qui permet de faire l'assemblage de composants sur ces surfaces associées.
- Enfin, une troisième partie propose une approche d'assemblage de composants avec prise en compte des défauts de forme. Pour cela, nous définissons la surface convexe de contact, et un inter-effort de liaison qui nous permettent de déterminer l'écart de mise en position d'une géométrie par rapport à l'autre.

4.1 Accostage et méthode modale

Cette partie traite d'une approche permettant de caractériser les écarts de forme des accostages. On retrouve cette problématique des accostages dans de nombreux cas industriels tels que l'assemblage de deux capots. Une condition fonctionnelle est esthétique et l'autre est l'assemblage. Parmi les nombreux produits qui peuvent être cités, nous trouvons des éléments d'électroménager (balances, télécommandes) et des éléments de carrosserie (ailes de carrosseries dans [Perpoli, 2004]). En effet le client est sensible à un problème d'accostage par sa vue ou son toucher.

4.1.1 Définition des défauts d'accostages

La notion d'accostage entre composants est très présente dans l'automobile, où les notions de jeu et affleurement sont importantes pour la satisfaction du client. L'accostage est défini par l'espace entre les parties fixes et/ou les ouvrants du véhicule. Autre que la fonction technique, le client perçoit l'esthétique de l'assemblage des composants. Une définition de la qualification d'un accostage a été proposée dans [Balmas, 1999] qui prend en compte la position de l'observateur pour déterminer la partie du jeu ou de l'affleurement réellement perçu. D'autres équipes de recherche travaillent sur la qualification des écarts d'accostage, [Clement et al, 1996], [Clozel, 2000].

On peut caractériser les écarts d'accostage en fonction d'un repère d'accostage. Ce repère d'accostage est défini tel que :

- La direction \underline{x} du repère est colinéaire au profil d'accostage au point d'intérêt,
- La direction y caractérise le jeu, elle est donc tangente à la surface de référence,
- La direction z est telle que (x,y,z) est un repère orthonormé, et donc z est orthogonale à la surface de référence et caractérise l'affleurement.

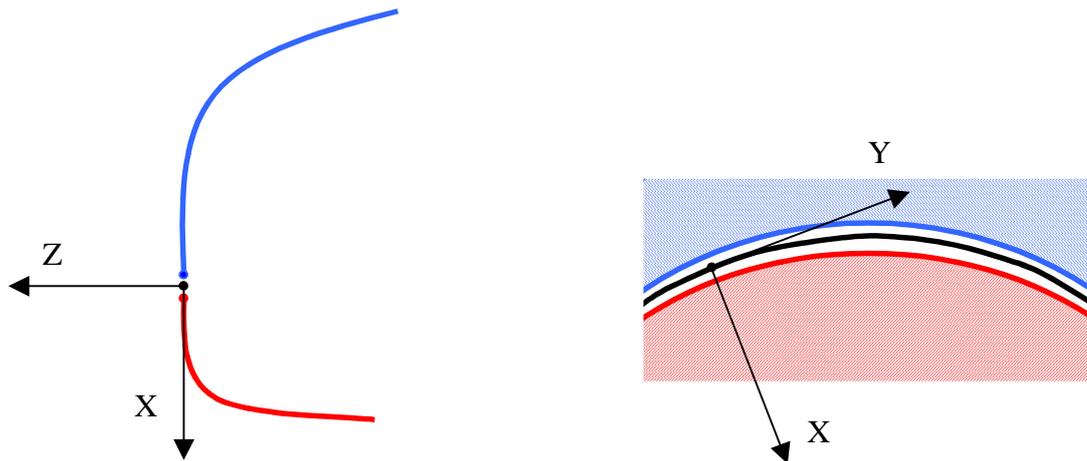


Figure 3-14 : Exemple de configuration du repère d'accostage lié à un jeu entre deux profils

Le tableau 3-1 résume les différents défauts d'accostage que l'on peut obtenir. Les défauts sont catégorisés en jeux et affleurements et décrits suivant chaque axe du repère local. On commence par citer les 3 écarts de type jeu, puis les trois écarts de type affleurements et on associe à chaque écart d'accostage le torseur de petits déplacements associés.

4.1.2 Analyse modale et écarts d'accostage

La méthode modale est appropriée au traitement de la caractérisation des écarts de jeu et affleurement. En effet, la définition de repères locaux convient particulièrement pour la création de la base modale (sélection des degrés de liberté liés au défaut de forme).

Ainsi, les repères locaux du modèle *EF* permettant d'obtenir la base modale sont définis par les repères d'accostages. Grâce au tableau 3-1 et à la connaissance des défauts modaux, on peut lier un type de défaut, jeu ou affleurement, à un comportement de mode :

- Les jeux sont caractérisés suivant les directions *y* locales, donc par des modes de déformation suivant cette direction *y*, par exemple des modes de flexion autour de *z*,
- Les affleurements sont caractérisés suivant les directions *z* locales, donc par exemple par des modes de flexion autour de la direction *y*.

Comme on ne peut mesurer les écarts de type jeu de décalage, ce défaut de forme est ignoré, il est donc conseillé de bloquer ces degrés de liberté pour ne pas les faire apparaître dans la base des défauts modaux de forme.

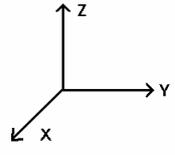
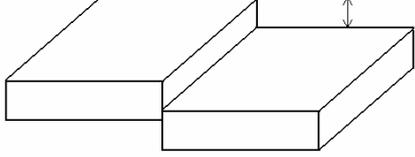
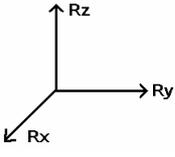
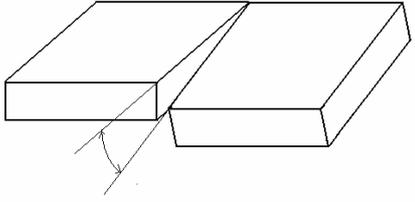
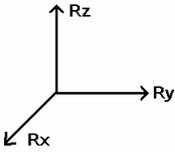
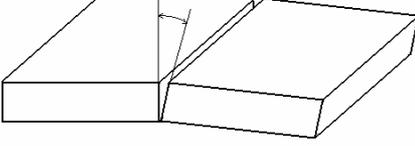
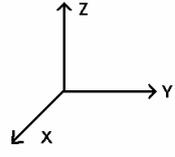
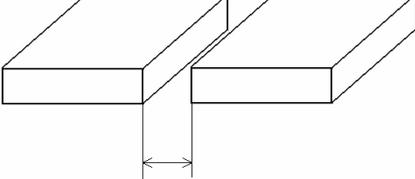
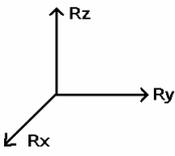
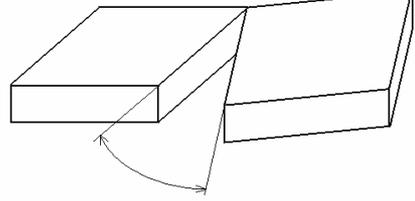
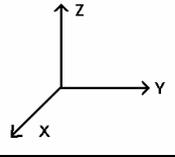
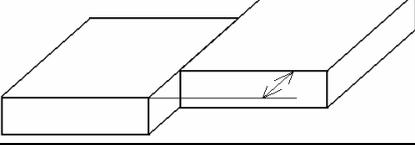
Repère	Visualisation	Torseur de petits déplacements	Proposition d'appellation
		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	Affleurement
		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Affleurement évolutif
		$\begin{Bmatrix} 0 & R_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Affleurement de tangence
		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Jeu
		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & R_z \end{Bmatrix}$	Jeu évolutif
		$\begin{Bmatrix} T_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Jeu de décalage

Tableau 3-1 : Définition des jeux et affleurements

4.1.2.1 Bonnes pratiques pour la caractérisation des accostages

On propose la liste suivante des bonnes pratiques permettant de créer deux bases d'analyse des écarts d'accostages :

- 1) Définir le modèle EF du type poutre correspondant au profil d'accostage,
- 2) Définir des repères locaux à chaque nœud du maillage EF ,
- 3) On bloque les mobilités suivant la direction x des repères locaux pour éviter les modes de déformation de type traction-compression caractérisant le jeu de décalage, inutile dans ce cas.
- 4) En bloquant les degrés de liberté suivant les directions y locales, on obtient des défauts de forme suivant les directions locales z pour la caractérisation des jeux,
- 5) En bloquant les degrés de liberté suivant les directions z locales, on obtient des défauts de forme suivant les directions locales y pour la caractérisation des affleurements.

On constitue ainsi une méthode permettant de caractériser les défauts d'accostage non plus par une seule mais deux signatures modales. Cette solution permet de mieux qualifier la description du profil d'accostage en décrivant les affleurements et les jeux de façon séparée. Sans tenir compte de ces bonnes pratiques, on obtient une base globale comprenant les deux défauts d'accostages, jeux et affleurements, sans prépondérance de l'un sur l'autre (intercalage des types de défauts).

4.1.3 Un cas d'application industriel

Un cas d'accostage est présenté dans [Adragna et al, 2006 c] qui traite deux écarts de profils simulés. La problématique est la caractérisation des écarts d'accostage de capot de balance.

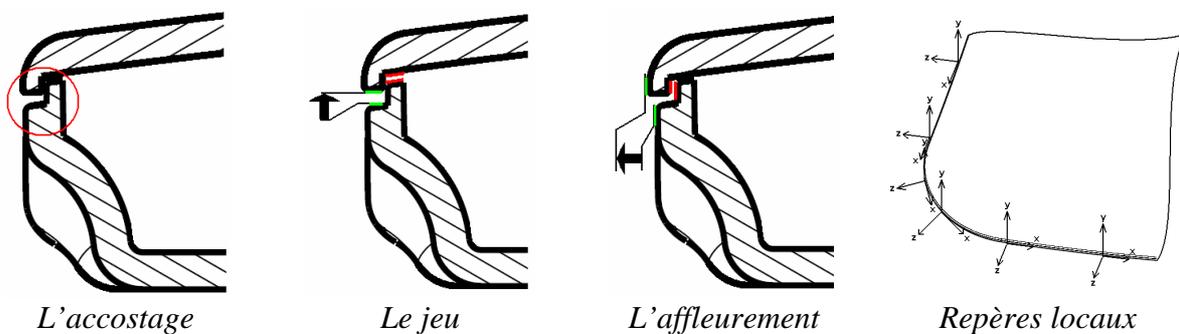


Figure 3-15 : Cas d'accostage entre deux composants, et repères locaux associés au profil

La figure 3-15 présente la problématique d'accostage traité. Le profil d'accostage 3D complet est dévoilé dans la figure 3-16, nous considérons un modèle poutre. Chaque capot du mécanisme comporte son propre profil d'accostage, qui coïncident lors de l'assemblage de pièces parfaites. Ces profils sont déterminés par l'intersection des surfaces rouges de contact pour le jeu et l'affleurement.

4.1.3.1 Méthode appliquée

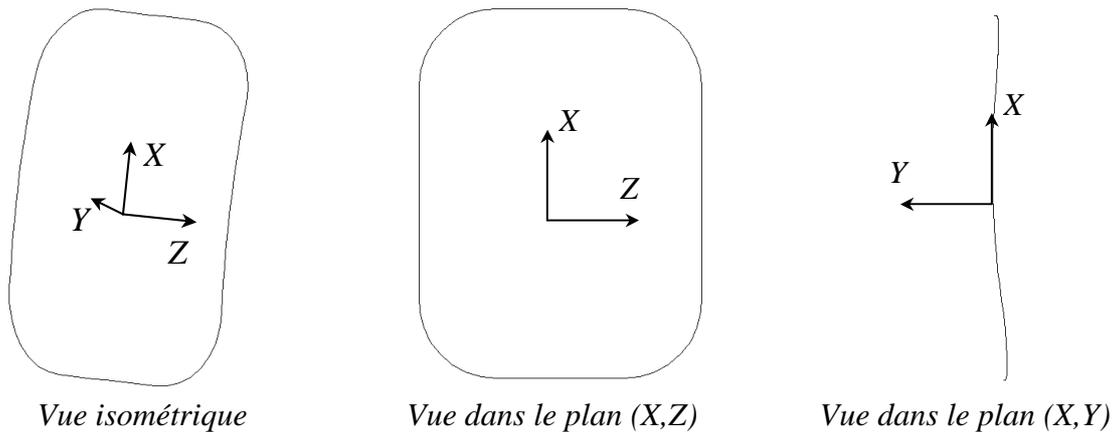


Figure 3-16 : le profil d'accostage 3D

L'approche présentée traite la problématique avec une seule base modale caractérisant les deux types de défauts (jeux et accostages). Malgré le fait que les deux caractérisations sont présentes dans la même base, nous proposons une méthode permettant de donner la priorité à un type de défaut. En utilisant les propriétés des modes de vibration, on peut favoriser la flexion dans une direction grâce à la section de la poutre.

4.1.3.2 Les modes de jeu

Les défauts de jeu sont caractérisés par des modes de flexion hors du plan (X,Z). Pour visualiser ces défauts modaux (écart suivant Y), on présente les modes en projection dans le plan (X,Y).

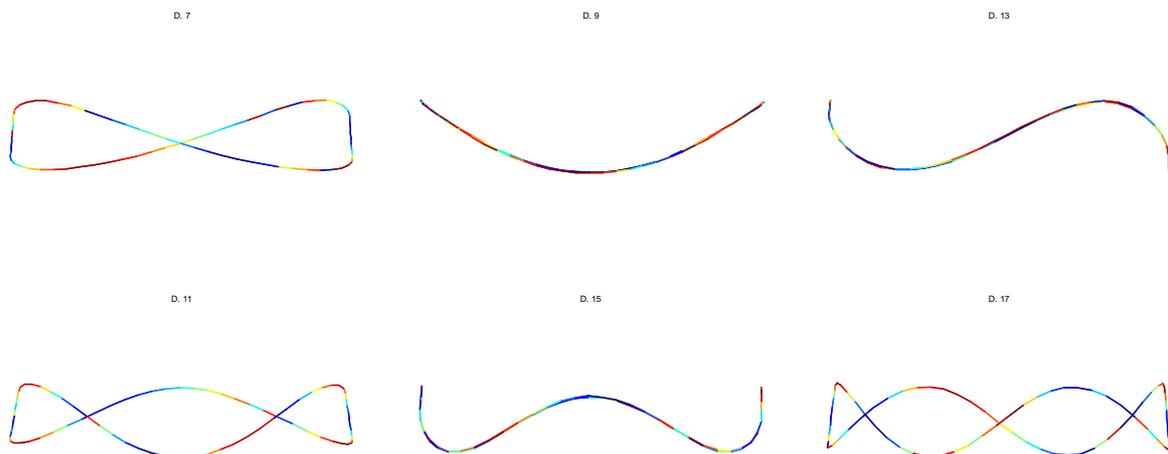


Figure 3-17 : Quelques défauts modaux caractérisant les écarts de jeu du profil du capot

4.1.3.3 Les modes d'affleurement

Les défauts d'affleurement sont caractérisés par des modes de flexion dans le plan (X,Z) . Pour visualiser ces défauts modaux, on présente les modes en projection dans le plan (X,Z) .

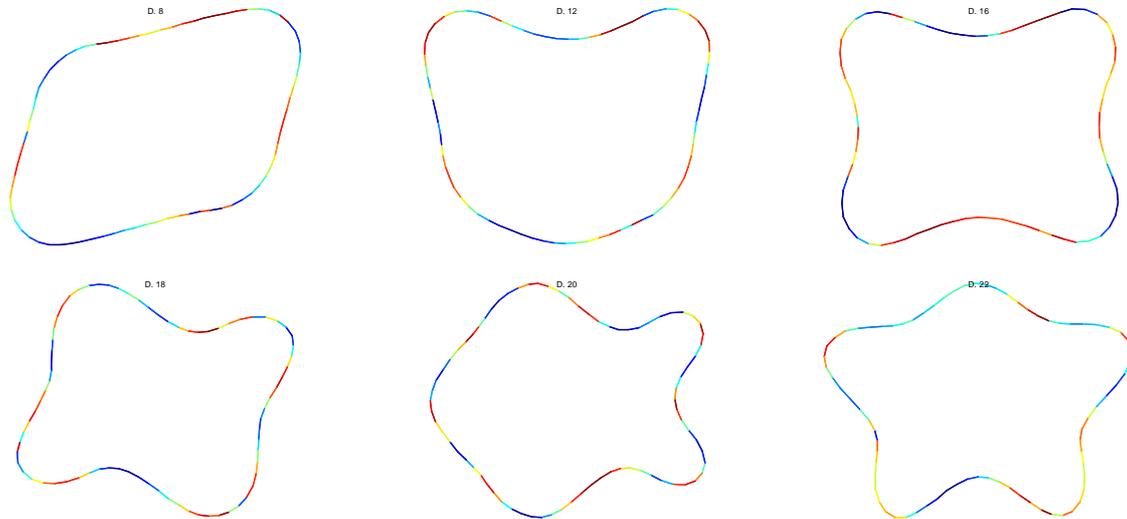


Figure 3-18 : Quelques défauts modaux caractérisant les écarts d'affleurement du profil du capot

4.1.3.4 description modale d'un défaut d'accostage

On caractérise ici un défaut de forme de basse fréquence, dont les longueurs d'onde sont longues relativement à la forme. Pour autant nous n'associons pas de frontière permettant de distinguer les défauts de basse fréquence parmi les autres défauts.



Figure 3-19 : Défaut de grande longueur d'onde

On peut constater que ce défaut de grande longueur d'onde (ou de basse fréquence) est bien caractérisée (moins de 1% de résidu) par les 50 premiers modes.

Cependant, on peut regretter la non-différenciation entre les jeux et les affleurements qui est présenté par cette méthode classique. On justifie ainsi l'utilisation de la bonne pratique qui distingue les deux caractérisations.

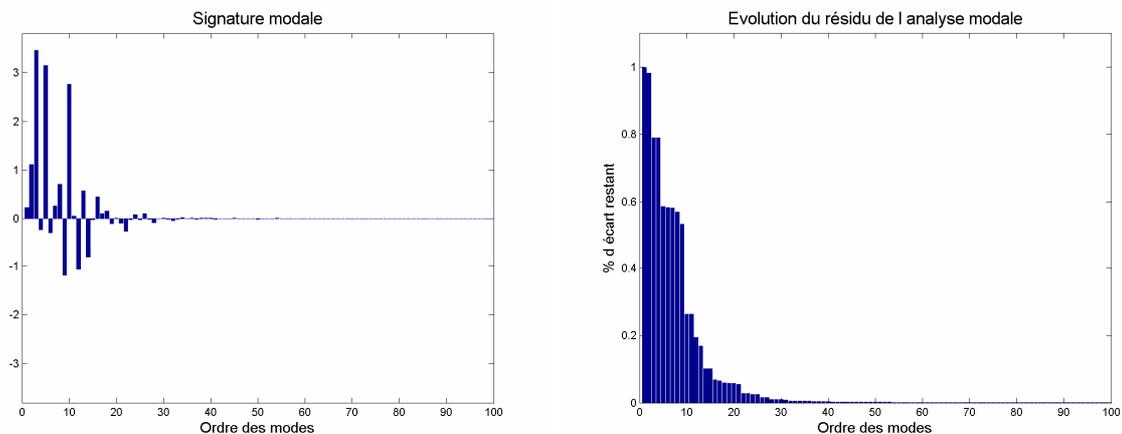


Figure 3-20 : Caractérisation modale du défaut d'accostage de grande longueur d'onde

CONCLUSION INTERMEDIAIRE

La méthode modale semble être très appropriée pour la caractérisation des écarts de forme de profils d'accostage.

Le client exprime deux problématiques distinctes que le jeu et l'affleurement. La démarche que nous proposons répond à cette problématique. En utilisant les repères locaux, qui expriment les jeux et affleurements, la méthode modale propose une base de caractérisation des jeux séparément d'une autre base caractérisant les affleurements.

Cependant, l'application dans la base modale classique dans un repère unique globale, fournit une base suffisamment riche pour caractériser l'accostage. Cependant, on peut reprocher le mélange des caractérisations qui ne répond plus alors exactement aux problématiques du client.

Nous n'avons pas considéré l'assemblage de deux accostages. Cependant, les composants étudiés étant en plastique, ils acceptent une certaine déformation lors de leur assemblage, le modèle à considérer doit donc être flexible.

La perspective de cette remarque est de considérer une modélisation flexible des accostages. L'utilisation d'un modèle EF permet d'envisager la déformation élastique de la géométrie suite à une mise en position (par effort ou déplacement).

4.2 Assemblage sans défaut de forme

Cette première étape de l'assemblage 3D considère l'assemblage de deux composants sur leurs géométries associées. Les défauts de forme sont filtrés dans un premier temps, pour être pris en compte dans un second temps dans la partie 4.3.

4.2.1 Association modale des formes rigides

La méthode modale permet une caractérisation du défaut de forme en défaut élémentaire, dont des modes rigides de position-orientation (translation et rotation). Cette partie présente la méthode modale comme un moyen d'association d'une surface sans défaut de forme sur une surface mesurée comportant des écarts.

Cette nouvelle approche d'association de surface est comparée à la méthode des moindres carrés, qui est une méthode de référence actuellement. Bien sûr il existe d'autres critères d'association (minimum ou maximum matière, plan tangent, etc) que nous ne détaillerons pas. L'association aux moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des écarts entre les points et l'élément à associer. La plus courte distance entre un point et l'élément à associer est définie par la normale à l'élément passant par le point.

En revanche, la caractérisation modale minimise les écarts suivant les directions d'expression des écarts, les normales locales à la géométrie idéale.

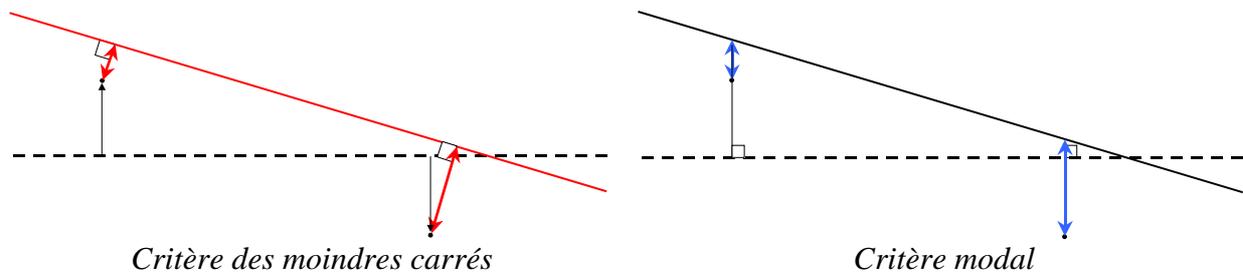


Figure 3-21 : Critères d'association d'une géométrie à un défaut de forme

On se rend donc compte que les deux approches d'association d'une géométrie à un écart de forme n'ont pas le même critère d'association. Par contre, sous l'hypothèse des petits déplacements, on peut penser que les écarts décrits les moindres carrés tendent vers la description modale des écarts. On peut donc supposer que la méthode modale est le critère des moindres carrés donnent des résultats d'association semblables, sous l'hypothèse des petits déplacements.

4.2.1.1 Critère modal et critère des moindres carrés sous l'hypothèse des petits déplacements

Faisons l'hypothèse qui considère que l'association modale d'une géométrie à un défaut de forme est similaire à l'association des moindres carrés.

Pour vérifier cette hypothèse, nous comparons les résultats d'association des deux méthodes sur un cas simple. On choisit un profil rectiligne, dont le défaut de forme est tiré aléatoirement.

On compare les deux critères d'association en faisant varier l'hypothèse des petits déplacements. En considérant le même défaut de forme (même valeurs d'écarts), on fait varier la longueur du profil. On peut ainsi se trouver sous l'hypothèse de petits déplacements lorsque la longueur est bien supérieure à l'amplitude du défaut de forme. Mais en considérant un longueur plus petite l'hypothèse de petits déplacements n'est plus vérifiée.

On définit donc le ratio r_{LF} comme le rapport de la longueur du profil sur l'amplitude du défaut de forme.

Dans un premier temps nous effectuons une comparaison visuelle des résultats d'association. Puis dans un second temps on s'intéresse aux évolutions des écarts de position (translation) et d'orientation (rotation) des surfaces associées par les deux critères. Pour cette dernière observation on décrit le résultat de l'association aux moindres carrés dans l'espace des coefficients modaux rigides (translation et rotation).

La figure 3-22 présente trois résultats d'associations en considérant des ratios :

- $r_{LF} = 0,1$ puis $r_{LF} = 1$: l'hypothèse de petits déplacements n'est pas vérifiée, et on constate que les deux associations sont différentes,
- $r_{LF} = 10$, l'hypothèse de petits déplacements est vérifiée, et on remarque que les deux surfaces associées sont confondues.

Les courbes d'évolution des différentes caractéristiques d'association (translation et rotation) montrent la convergence des deux approches. La caractérisation de la translation est identique par les deux approches et n'est pas sensible à l'hypothèse de petits déplacements. Le critère de rotation quant à lui est sensible à l'hypothèse. On voit que la méthode des moindres carrés converge rapidement vers la méthode modale. Dans notre cas d'exemple, lorsque l'hypothèse est vérifiée ($r_{LF} \approx 13$), l'écart d'association entre les deux méthodes est de l'ordre de 0,5%.

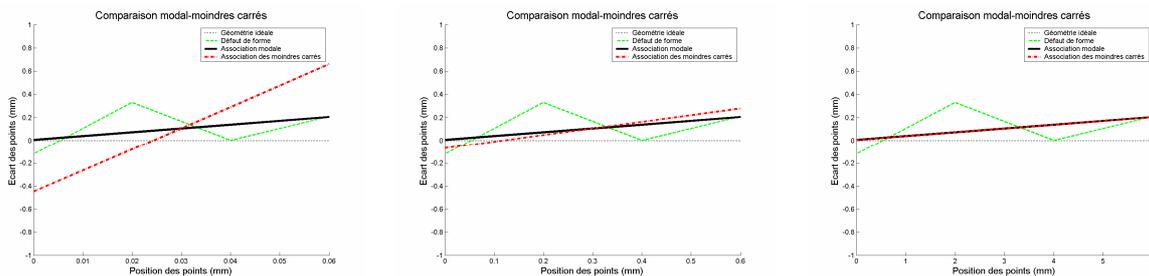


Figure 3-22 : Comparaison des modèles d'association

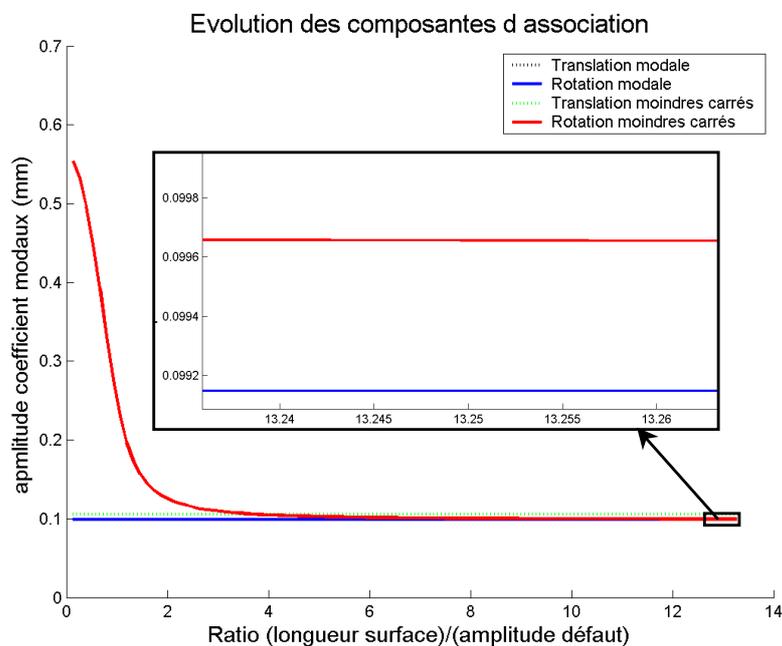


Figure 3-23 : Comparaison des modèles d'association

On en conclut que sous l'hypothèse des petits déplacements la méthode des moindres carrés peut être approximée par la méthode modale.

On choisit donc d'utiliser la méthode modale pour faire l'association d'une surface rigide (définie par les modes rigides) sur un nuage de points pour plusieurs raisons :

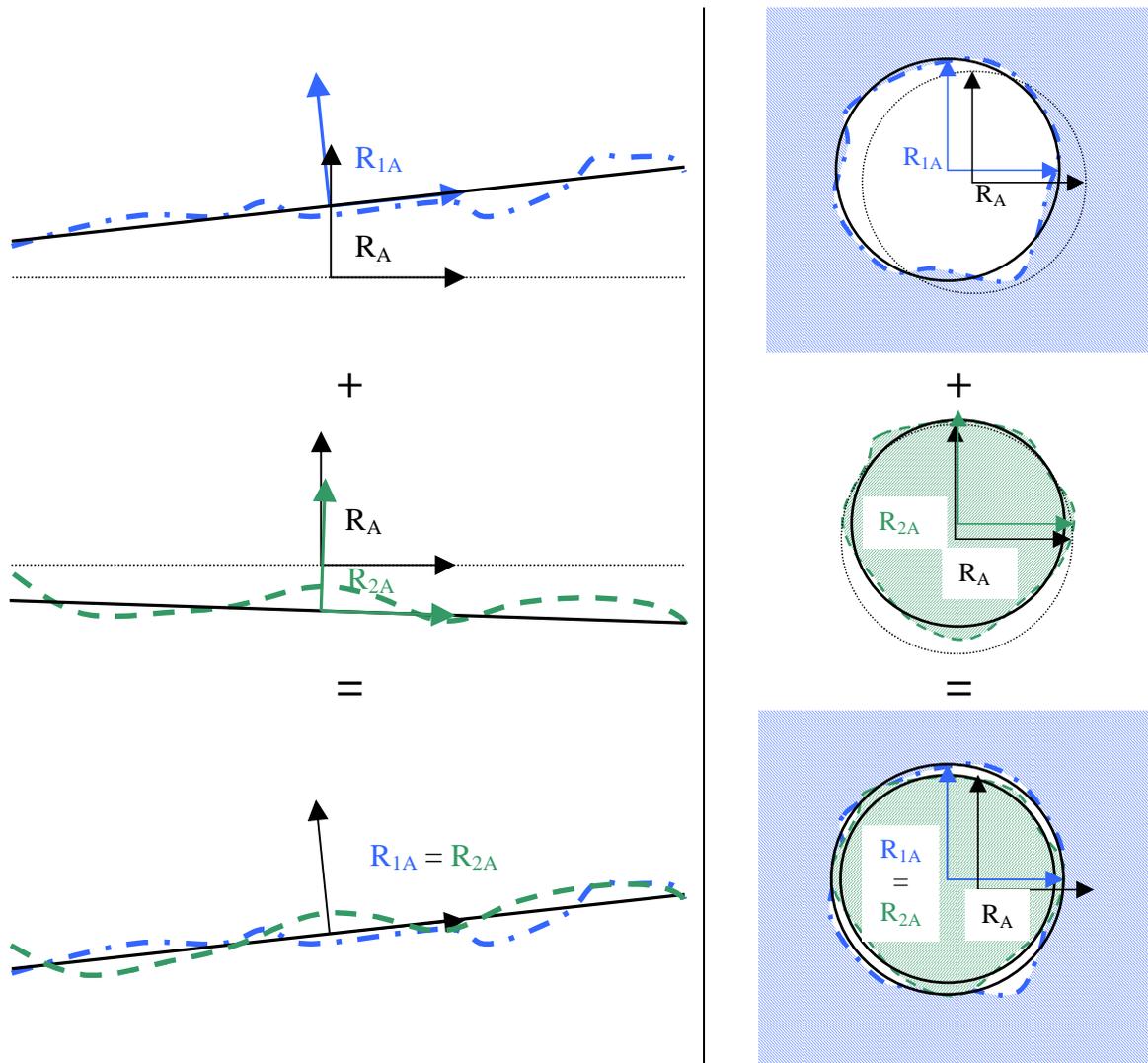
- Tout d'abord pour la raison justifiée énoncée que la méthode modale tend vers le moindre carré sous l'hypothèse des petits déplacements, souvent vérifiée dans les différentes approches de tolérancement,
- On utilise ainsi une seule méthode pour la caractérisation de l'écart de forme et l'association d'une forme rigide,
- La méthode modale est applicable sur toute géométrie, et la caractérisation d'un écart de forme se fait par une simple projection dans la base modale (la méthode des moindres carrés nécessite une optimisation)

4.2.2 Assemblage modal sans défaut de forme

4.2.2.1 Assemblage sans défaut de forme

Pour le moment, nous considérons que l'assemblage de géométries sans considérer les défauts de forme se fait par leurs surfaces associées. Les surfaces associées peuvent être caractérisées par leurs torseurs équivalents, qui déterminent les invariants de la liaison et la transmission d'effort. On peut donc s'appuyer sur les caractéristiques des surfaces d'une liaison définies par le SATT.

L'intérêt de s'appuyer sur les caractéristiques des liaisons pour les faire coïncider est de supprimer les inconnus d'assemblage dû au jeu de la liaison. Dans cette approche, on considère donc que le jeu est nul. Dans la partie 4.3 on propose une méthode permettant de s'affranchir des invariants de mise en position dû à la forme, donc du jeu.



Assemblage des deux composants sur les caractéristiques des géométries associées

Figure 3-24 : Assemblage par les géométries associées (type EGRM), cas plan sur plan et cylindre dans cylindre

La figure 3-24 illustre le principe de l'assemblage sur les repères des surfaces associées dans le cas de profils poutre (schématisant une liaison plan sur plan) et dans le cas de cercles (schématisant une liaison pivot). On imagine aisément l'extension du principe à des géométries 3D grâce au principe des EGRM.

4.2.2.2 Assemblage modal sans défaut de forme

On définit l'écart de mise en position E_{1A2} d'une pièce (2) sur l'autre (1) par la combinaison des écarts des surfaces de contact de chaque pièce de la liaison, E_{1A} et E_{2A} .

En utilisant les définitions de Bourdet pour qui l'écart entre deux surfaces de deux pièces est un jeu, cet écart de mise en position E_{1A2} peut être renommé jeu de contact J_{c1A2} . Cela revient à définir un jeu de mobilité J_{m1A2} correspondant à la définition actuelle du jeu, et le jeu de contact.

On considère un jeu de mobilité nul, $J_{m1A2} = 0$, Alors, le jeu de contact est égal à la combinaison des écarts des surfaces des deux composants, soit par la relation de Chasles :

$$J_{c1A2} = E_{1A2} = E_{1A} - E_{2A} \quad [3-24]$$

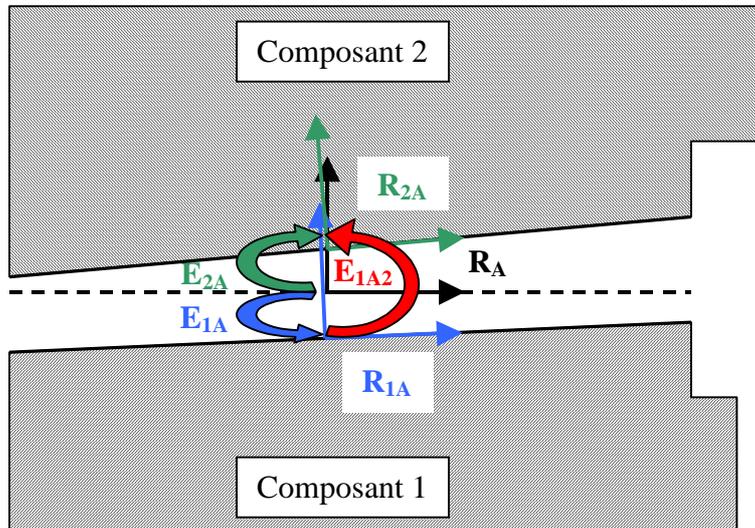


Figure 3-25 : Assemblage par les surfaces associées

Pour caractériser l'assemblage de deux surfaces grâce à la méthode modale, il faut orienter les repères des deux surfaces de façon identique. Cela permet de caractériser les surfaces dans la même base modale (même orientation des modes), et ainsi de traiter l'assemblage sans défaut de forme par leurs signatures modales rigides.

On définit Λ_{r1A2} la signature modale rigide de mise en position des surfaces A du composant 2 sur le composant 1. Cette signature modale Λ_{r1A2} correspond à la caractérisation modale de l'écart de mise en position décrit par le jeu de contact J_{c1A2} . Cette description modale rigide est calculée par la différence de la signature modale rigide Λ_{r1A} de la géométrie A du composant 1 moins la signature modale rigide Λ_{r2A} de la géométrie A du composant 2 :

$$\Lambda_{r1A2} = \Lambda_{r1A} - \Lambda_{r2A} \quad [3-25]$$

Cette signature modale est la description de l'écart de mise en position du composant 2 sur le composant 1 par mise en contact des surfaces associées A.

4.2.2.3 Ecart entre deux surfaces d'une même pièce

Le graphe des liaisons décrit aussi les écarts entre deux surfaces d'une même pièce, qui sont nommés écarts. La figure 3-26 présente l'écart, au sein du composant 1, de la surface B par rapport à la surface A, que l'on note E_{B1A} . Grâce à la relation de Chasles, on peut définir :

$$E_{B1A} = E_{1A} - E_{1B} \quad [3-26]$$

Où E_{1A} et E_{1B} représente l'écart de la surface A et l'écart de la surface B de la pièce 1 respectivement.

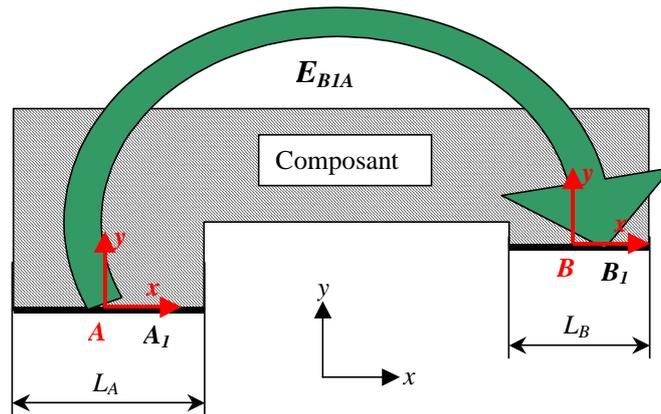


Figure 3-26 : Ecart entre deux surfaces d'une même pièce

Cependant, la caractérisation modale de l'écart E_{BIA} n'est pas directe, alors que son calcul par les torseurs de petits déplacements l'est.

Toutefois, une solution permet d'exprimer l'écart dans la base modale de la surface B, cela consiste à utiliser les torseurs de petits déplacements. On a l'équivalence entre les modes rigides et les composantes du torseur de petit déplacement comme présenté au paragraphe 3.6 de ce chapitre :

$$\Lambda_{1A} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1A} \\ \lambda_{2,1A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{L_A}{2} \end{bmatrix}_A \cdot \begin{bmatrix} T_Y \\ R_Z \end{bmatrix}_A \quad [3-27]$$

Ainsi dans notre cas :

$$\Lambda_{BIA} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1A} + \lambda_{1,1B} \\ \lambda_{2,1A} \cdot \frac{L_B}{L_A} + \lambda_{2,1B} \end{bmatrix} \quad [3-28]$$

Où $\lambda_{1,1A}$ et $\lambda_{1,1B}$ correspondent aux composantes modales de translation, et $\lambda_{2,1A}$ ainsi que $\lambda_{2,1B}$ correspondent aux rotations.

Pour compléter le schéma de l'assemblage des écarts, il faut définir une méthode de transport des écarts. Bien qu'une proposition soit faite par l'extrapolation modale (Annexe 1), on conseille l'utilisation des torseurs de petits déplacements qui est bien plus simple.

4.3 Prise en compte de l'écart de forme

On propose de noter l'écart de la surface associée E_{RAI} . Cet écart correspond à l'écart "rigide", dû uniquement au composante de translation et rotation (modes rigides).

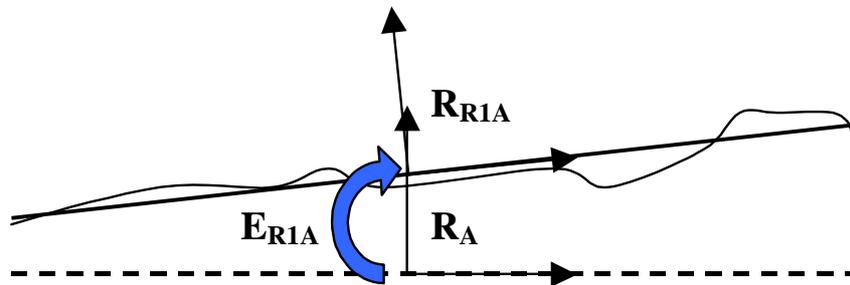


Figure 3-27 : Ecart rigide E_{RIA} de mise en position de la surface associée

En plus de cet écart rigide dû aux défauts de la surface associée (translation et rotation), on définit l'écart de position dû au défaut de forme, E_{FAI} . Cet écart supplémentaire caractérise l'écart entre la surface associée et la surface de contact entre les composants. Dans le cas de la figure 3-28 la surface de contact est définie tangente (mini ou maxi matière, non défini ici).

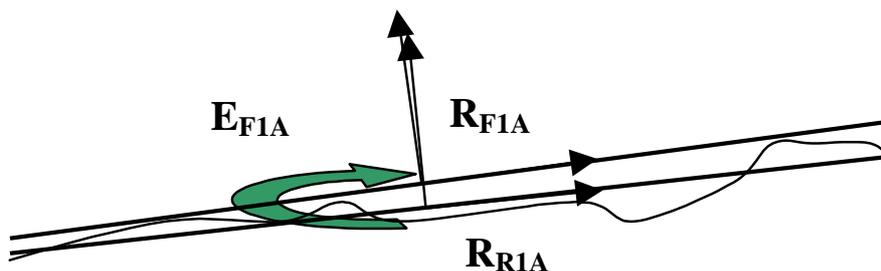


Figure 3-28 : Ecart de forme E_{F1A} de mise en position de la surface de contact

Or dans le cas d'assemblage de composants, la mise en contact des surfaces ne se fait pas obligatoirement sur ce critère. De ce fait, notre objectif est de proposer une méthode pour déterminer cette surface de contact.

Finalement on retrouve l'écart de la surface de contact par rapport à sa configuration idéale, E_{IA} . On définit ainsi une relation entre l'écart de la surface de contact, E_{IA} , et les écarts rigides et de forme E_{RIA} et E_{F1A} :

$$E_{IA} = E_{RIA} + E_{F1A} \quad [3-29]$$

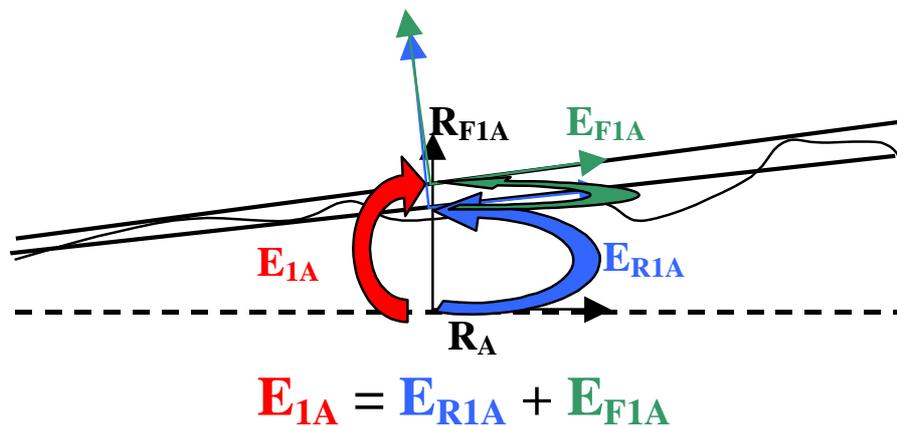


Figure 3-29 : Ecart de la surface de contact, dû à l'écart rigide de la surface associée et l'écart contact dû à la forme

4.3.1 Notre proposition : un effort de mise en position

Notre démarche proposée dans [Adragna et al, 2007 c] se présente en deux étapes :

- premièrement, on considère un dispositif de pré-positionnement bloquant les degrés de liberté de la liaison,
- on détermine l'ensemble des configurations possibles de mise en contact des surfaces,
- enfin, grâce à la prise en compte d'un effort de maintien en position, on identifie la configuration de contact des deux composants.

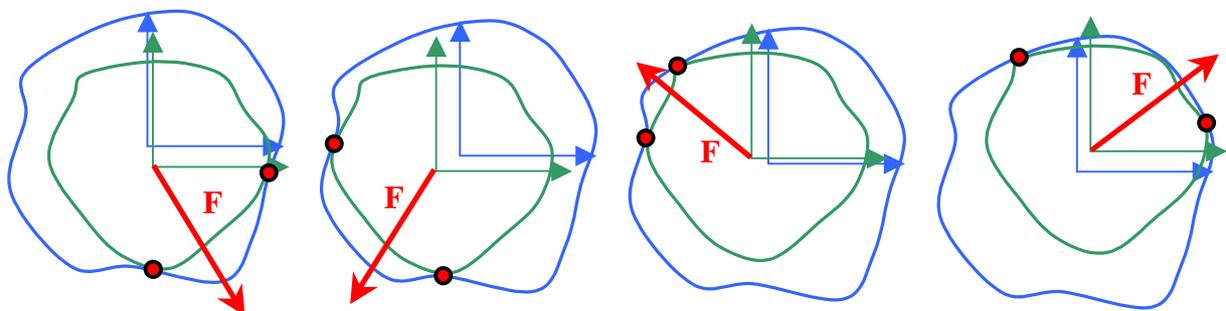


Figure 3-30 : Exemple d'inconnue de mise en position

La figure 3-30 montre les points de contact entre les deux surfaces lorsque la liaison est soumise à un effort de MAintien en Position (MAP). En fonction de la direction de cet effort de MAP, les points de contact changent. On dispose donc d'un ensemble de possibles points de contact qu'il faut déterminer. Il faut ensuite identifier la combinaison de ces points de contact (2 points ici car problème 2D) permettant le positionnement d'une géométrie sur l'autre est identifiée grâce à la direction de la forme de MAP.

La méthode que l'on propose considère un système de guidage des composants et un effort de maintien en position. Le guidage du composant permet de bloquer les mobilités de la liaison. On bloque ainsi les glissements d'un plan sur l'autre dans le cas de la liaison plan sur plan. L'effort de maintien en position permet de déterminer la mise en position d'un composant sur l'autre quel que soit le jeu ou les défauts de forme des géométries en vis-à-vis.

4.3.2 Le cas d'exemple

Pour illustrer nos propos, nous considérons un cas simple de mise en position d'un profil rectiligne sur un autre. Ce cas peut représenter une coupe d'une liaison plan sur plan. On présente ainsi deux profils simulés d'une pièce 1 et d'une pièce 2 en contact sur ce profil nommé A.

Le profil est caractérisé par une base modale métrique de 30 modes. On représente :

- la surface brute, correspondant à une mesure,
- la surface filtrée, qui est la recombinaison modale
- la surface associée, aussi appelée surface rigide.

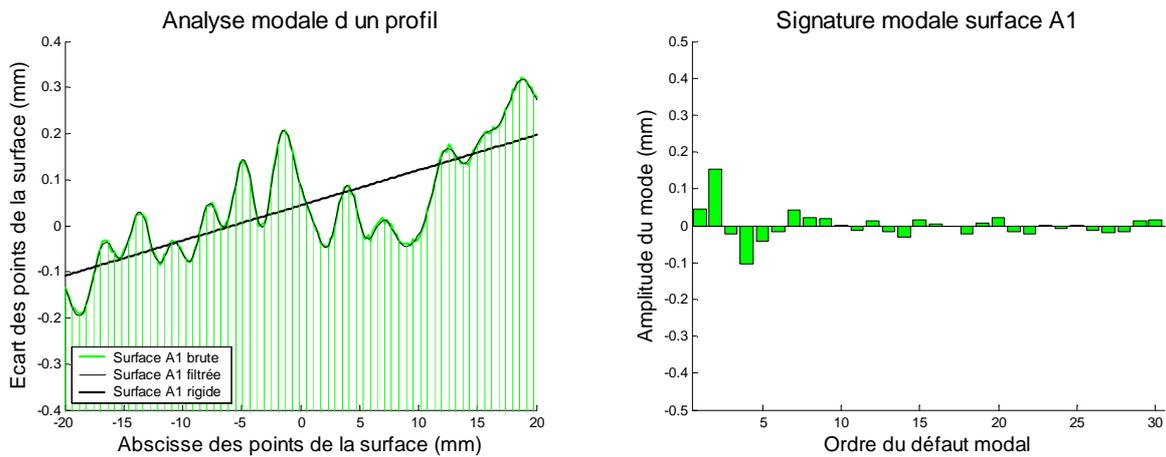


Figure 3-31 : Défaut de forme et signature modale du profil A1

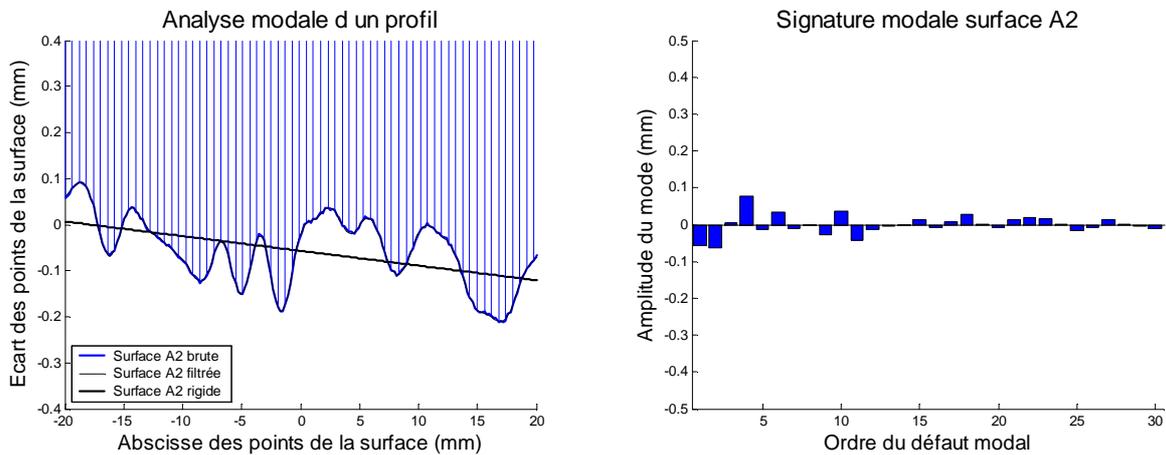


Figure 3-32 : Défaut de forme et signature modale du profil A2

On peut dès lors appliquer l'assemblage de ces deux défauts de forme par leurs surfaces associées. Cela revient à ne pas prendre en compte les défauts de forme, comme présenté dans la partie 4.2.

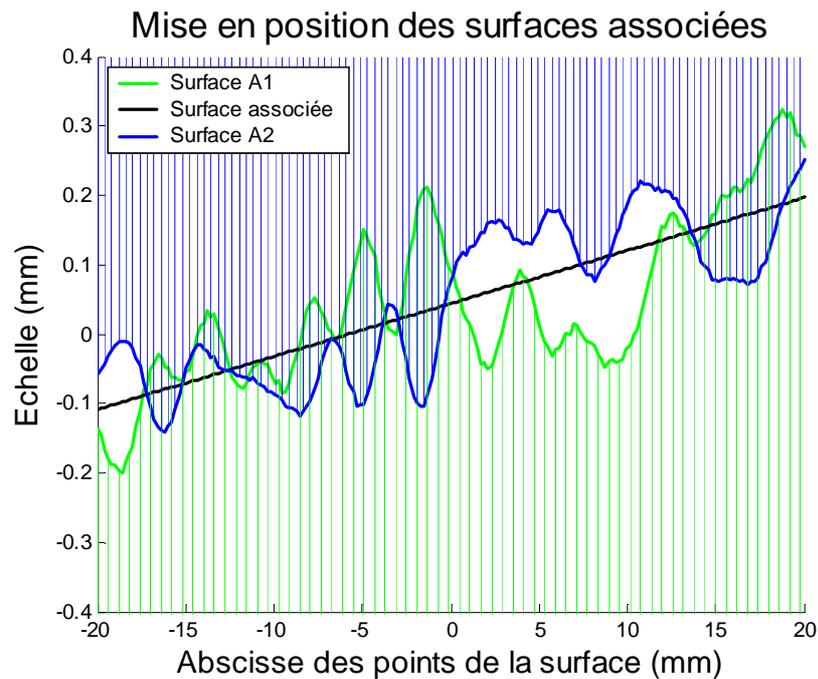


Figure 3-33 : Assemblage par les surfaces associées

Comme on peut se rendre compte sur cet exemple, les surfaces associées ne sont pas le meilleur critère pour l'assemblage des composants.

4.3.3 Assemblage modal, surface écart et point de contact

4.3.3.1 Surface écart

L'assemblage de deux géométries avec défaut de forme définit un ensemble de possibles points de contact. Pour déterminer ces possibles points de contact on définit la surface écart qui représente l'ensemble des écarts entre les deux surfaces. Elle représente les distances point à point lors de la mise en correspondance de forme. La détermination de cette surface écart peut se faire directement à partir des surfaces brutes issues de la mesure.

Un autre moyen est l'utilisation de la caractérisation modale des écarts de forme. Comme les deux défauts de forme sont décrits dans la même base modale, la surface écart définie par la différence des deux géométries est caractérisée par la différence des signatures modales. Un intérêt est le filtrage des défauts type rugosité ou bruit de mesure.

Par conséquent la signature modale de la surface écart lissée est déterminée par :

$$\Lambda_{1A2} = \Lambda_{1A} - \Lambda_{2A} \quad [3-30]$$

Cette formule est l'écriture généralisée au défaut de forme de l'équation [3-25].

La détermination de la surface écart consiste à redresser une surface pour reporter son défaut de forme sur la surface en vis à vis.

4.3.3.2 Surface écart convexe et points de contact

Maintenant que la surface écart est définie, on cherche les possibles points de contact. La mise en contact des pièces se fait sur les plus courtes distances entre les surfaces.

Pour identifier tous les points de contact, on calcule l'enveloppe de la surface écart que l'on nomme surface écart convexe. Les points qui définissent cette surface écart convexe sont les possibles points de contact.

Il en ressort que les facettes de la surface convexe, déterminées par p points de contact ($p = 2$ dans notre cas car problème 2D), sont identifiées comme les possibles facettes de contact.

Remarque

La mise en contact de deux surfaces se fait sur 3 points (2 points dans un cas 2D comme ici). Ces trois points déterminent une facette, qui est un plan (droite en 2D) quel que soit le type de liaison.

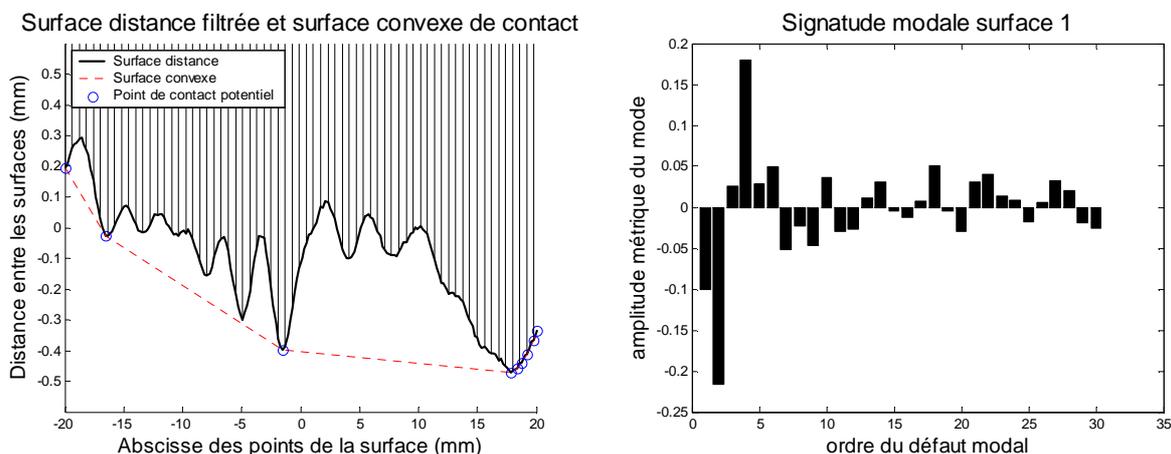


Figure 3-34 : Surface écart et signature modale

La figure 3-34 présente la surface écart, différence entre les géométries avec défauts de forme. Cette surface écart est incluse dans la surface convexe, définie par les possibles points de contacts et les possibles facettes de contacts associées.

On peut aussi observer la signature modale de cette surface écart. Ses deux premiers coefficients modaux A_{RIA2} sont la description de l'écart de mise en position sur la surface associée E_{RIA2} .

Le reste de la signature modale correspond à la caractérisation de la surface écart de forme, qui permet de déterminer l'écart de mise en position dû à la forme, E_{FIA2} , grâce à l'effort de MAP.

4.3.3.3 Effort de maintien en position et facette de contact

Pour identifier la facette de contact on définit un inter-effort de liaison que l'on nomme effort de maintien en position. Cet effort de MAP possède certaines caractéristiques :

- L'effort de maintien en position est un glisseur,
- Sa direction est définie par les composantes de transmission d'effort de la liaison [Hernandez et al, 2002],
- Sa position est contenue par la géométrie idéale, pas d'effort hors des surfaces

Par exemple, dans le cas d'une liaison plan sur plan, l'effort de MAP est dirigé suivant la verticale au plan idéal de contact, et son point d'application se trouve dans cette surface. Dans le cas d'une liaison pivot, l'effort de MAP est radial passant par l'axe du cylindre idéal. Avec l'hypothèse de système rigide indéformable l'intensité de l'effort importe peu. On ne considère donc que sa direction et son sens.

Par conséquent, la facette de contact est celle qui contient la direction de l'effort de MAP. La figure 3-35 montre quatre mises en position différentes en fonction de la position de l'effort sur le profil.

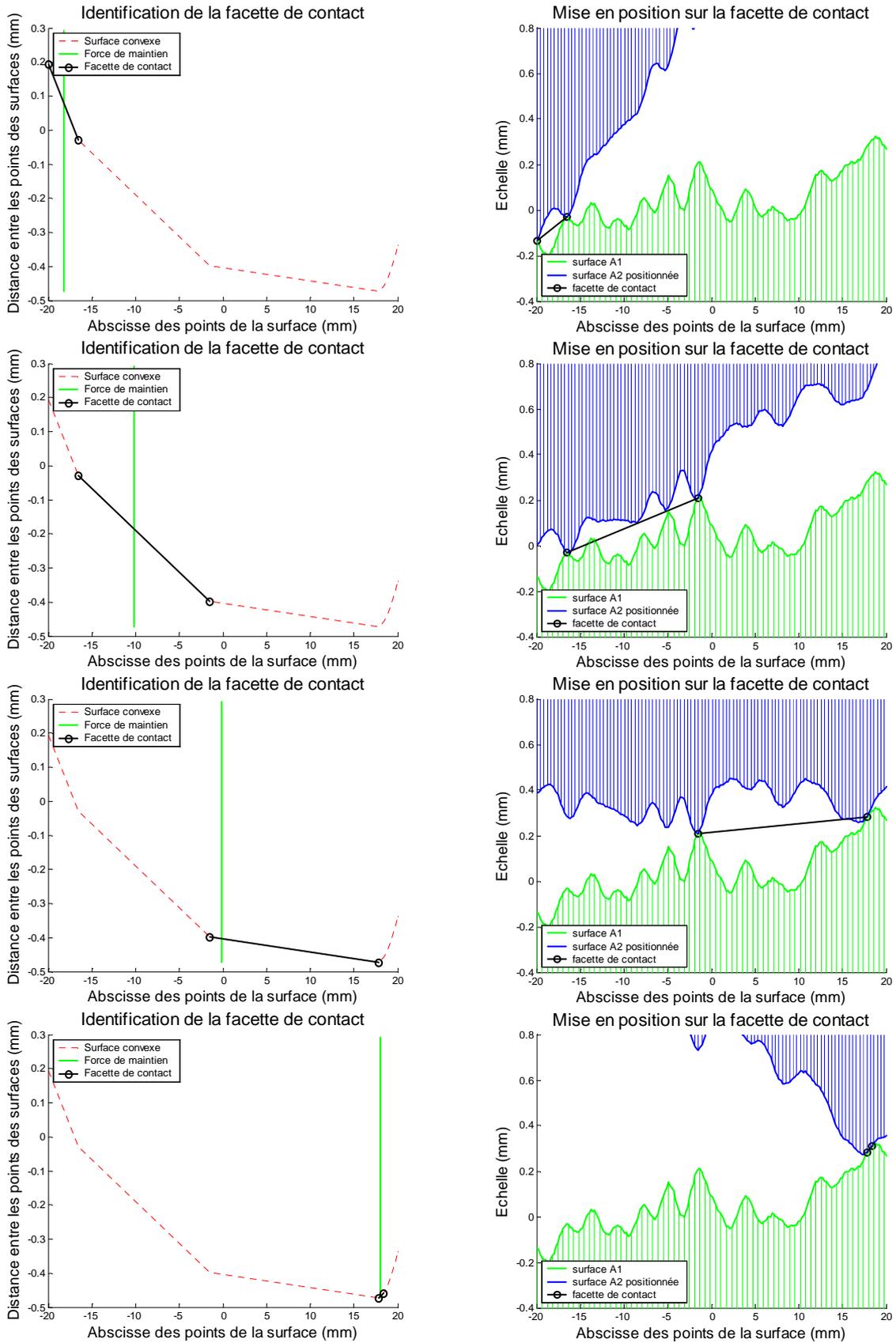


Figure 3-35 : Quelques assemblages des défauts de forme

La facette de contact définit l'écart E_{IA2} du plan de contact de la surface A du composant 2 par rapport à la surface 1, que l'on a aussi noté comme le jeu de contact J_{cIA2} .

De ce fait, l'écart d'assemblage (dû à la mise en position) du composant 2 sur le composant 1 est défini par l'opposé du jeu de contact J_{cIA2} .

Il en découle que l'écart résultant du composant 2 par rapport au composant 1, dû au positionnement de l'un sur l'autre par la surface A, est défini par E_{p2A1} et vaut :

$$E_{p2A1} = -J_{cIA2} \quad [3-31]$$

CONCLUSION DE LA PARTIE

La méthode modale semble particulièrement efficace pour la caractérisation des défauts d'un profil d'accostage. Grâce à la bonne pratique que nous définissons, nous répondons aux besoins du client qui spécifient un jeu et un affleurement.

Cette partie est un pas important vers le tolérancement modal des systèmes assemblés. Nous sommes maintenant capables de traiter l'analyse des écarts de deux composants sous l'hypothèse de système non déformable et :

- En considérant les surfaces associées par le critère modal (approximation des moindres carrés). Le jeu de la liaison entre composants est nul, les surfaces sont assemblées sur les *EGRM*.

Ou

- En considérant les défauts de forme des surfaces mises en contact, l'écart de positionnement d'une surface sur l'autre dépend de l'effort de maintien en position de la liaison. Le jeu de mobilité de la liaison est nul, car on considère un jeu de contact définissant l'écart de mise en position d'une pièce sur l'autre.

5 Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion du chapitre

Ce chapitre est une étape majeure dans l'évolution de la méthode modale de caractérisation des écarts de forme vers une approche de tolérancement 3D avec prise en compte des défauts de forme.

La figure 3-36 résume les différentes étapes développées dans ce chapitre. La problématique est la caractérisation des assemblages de composants représentée par le bloc central. Pour atteindre cet objectif, nous avons fait évoluer la méthode modale afin de disposer d'une méthode de caractérisation des écarts de forme, schématisée par le bloc de gauche. Nous proposons une approche permettant l'analyse du positionnement d'une géométrie sur une autre en considérant les surfaces associées (type EGRM) ou en considérant les défauts de forme et un inter-effort de positionnement (MAP), représentée par le bloc de droite.

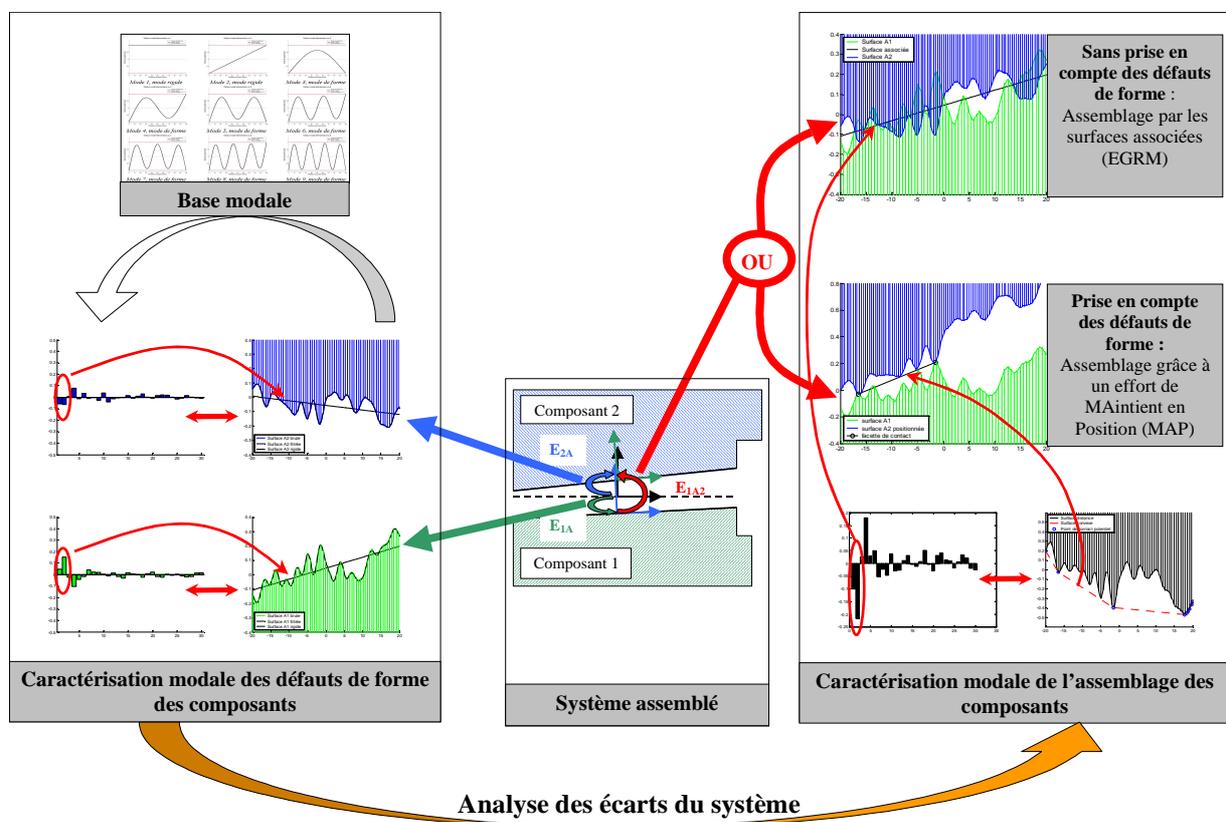


Figure 3-36 : Synthèse du chapitre

On peut estimer que la méthode modale de caractérisation des écarts de forme est suffisamment évoluée pour être applicable en métrologie de forme. En effet l'évolution vers la base métrique permet une lecture explicite des défauts de forme. De plus l'enrichissement de la base des défauts élémentaires permet de faire évoluer la description des écarts. Cependant, due à l'utilisation du produit scalaire euclidien (nécessitent une base orthogonale), cette introduction de défauts technologiques doit se faire de façon réfléchi (Annexe 2) pour optimiser la description modale. Ce point peut malgré tout être un avantage en vérifiant l'efficacité de l'enrichissement de la base modale.

L'analyse du positionnement d'une géométrie sur l'autre est à ses débuts. Dans l'état actuel, l'approche gère le positionnement des surfaces en considérant un effort glisseur (pas de moment). L'extension de cette méthode à d'autres surfaces ne semble pas poser de problème à priori, pour le moment nous manquons de recul pour l'affirmer.

5.2 Perspectives du chapitre

On peut identifier quelques perspectives de ce chapitre :

- La projection modale par le produit scalaire euclidien nécessite une base orthogonale, ce qui modifie les formes élémentaires lors de l'introduction de défauts technologiques. On peut se demander si la projection euclidienne est la meilleure méthode de caractérisation d'un écart de forme, peut-on se passer d'une base modale euclidienne ? Un début de réponse est apporté par Hugues Favrelière en thèse sur le déploiement de la méthode modale en métrologie.
- L'approche modale est adaptée à la caractérisation des accostages. Une prochaine étape importante est l'évolution vers des modèles flexibles, tels que le proposent entres autres [Merkley, 1998], [Sellem et al, 1998], [Shiu et al, 2003] , on peut aussi regarder pencher sur les modélisation que propose [Mounaud et al, 2007].
- Le positionnement d'une géométrie soumise à un couple. L'ambition d'une telle évolution est la détermination de l'écart de positionnement d'une géométrie dans une autre, caractérisant une liaison avec jeu, lorsque l'effort de MAP est extérieur à la liaison (type pivot dans un mécanisme avec porte-à-faux).

Chapitre 4

Caractérisation modale d'un lot et tolérancement modal inertiel

OBJECTIF DE CE CHAPITRE

Le chapitre 3 précédent présente les évolutions de la méthode modale dans la caractérisation d'un défaut de forme. La méthode modale décrit un écart de forme avec une signification métrique, dans une base de défauts de forme élémentaire définie à priori ou spécifiée dans une relation client-fournisseur. Ce même chapitre présente aussi l'utilisation de la méthode modale pour l'analyse des écarts dans l'assemblage de composants. Toutes ces évolutions sont faites pour la qualification d'un seul défaut de forme et l'analyse d'un seul assemblage.

Le chapitre 5 propose l'extension de la méthode modale à la caractérisation d'un lot de forme et l'analyse de lot d'assemblages. Cette évolution vers le traitement statistique des écarts de forme se fait en deux étapes :

- Dans une première partie, on propose une description modale statistique d'un lot de défauts de forme. Pour cela, on introduit la caractérisation de la forme moyenne du lot et sa forme écart type.*
- Dans une seconde partie, on propose d'appliquer le critère d'inertie à la description statistique modale. Nous rapprochons ainsi notre critère de quantification, l'inertie, à notre méthode de qualification, la méthode modale.*

Grâce à cette avancée de la caractérisation modale des écarts de forme vers le domaine statistique, on dispose alors d'un nouveau critère d'acceptation 3D des formes.

Suite aux bons résultats de l'utilisation du critère inertie en tolérancement unidirectionnel, on se propose de tester ce critère en tolérancement 3D. On propose donc de traiter un cas simple d'assemblage 2D de trois composants comprenant des bras de leviers. Afin de comparer notre méthode de tolérancement statistique 3D avec une méthode existante de tolérancement, les défauts de forme ne sont pas étudiés lors des simulations d'assemblage.

Glossaire	
$\bar{\Lambda}$	Signature modale moyenne
B	Base modale
I	Critère inertie
$I_{ajustée}$	Inertie ajusté d'un lot de défaut de forme
I_i	Inertie du point i
I_s	Inertie scalaire du lot de défaut de forme
$I_{s,i}$	Inertie scalaire de la surface i
$I_{s,j}$	Inertie de la surface j
I_T	Surface inertielle du lot de défauts de forme
$I_{\lambda_i}^{\delta}$	Inertie du coefficient modal λ_i due au décentrage
$I_{\lambda_i}^{\sigma}$	Inertie du coefficient modal λ_i due à l'écart-type
K	Nombre de défauts de forme (surface)
N	Nombre de points mesurés par défaut de forme (surface)
Qi	$i^{ème}$ vecteur modal
T	Recomposition modale de la surface décrite
$X_{i,j}$	Ecart du point j de la surface i
Λ_j	Signature modale de la forme no j
Σ_T	Matrice de variance-covariance du lot de défauts de forme
Σ_{Λ}	Matrice de variance-covariance modale
λ_i	$i^{ème}$ coefficient modal
λ_i	$i^{ème}$ coefficient de la signature modale moyenne
$\lambda_{i,j}$	$i^{ème}$ coefficient modal du $j^{ème}$ défaut de forme
μ_T	Surface moyenne du lot de défauts de forme
μ_{λ_i}	Moyenne du $i^{ème}$ coefficient modal
σ_T	Surface écart-type du lot de défauts de forme
σ_{Λ}	Signature modale écart-type
σ_{λ_i}	Ecart type du $i^{ème}$ coefficient modal

1 Statistique et méthode modale

OBJECTIF DE LA PARTIE

Dans cette partie, on présente l'application de la méthode modale à un lot de défauts de forme. Ainsi on aborde l'aspect statistique de la caractérisation modale. L'évolution de la méthode modale vers la qualification statistique d'un lot de défauts de forme se fait en plusieurs étapes :

- *On présente le lot de signatures modales représentant la description d'un lot de défaut de forme,*
- *De ce lot de caractérisation modale des défauts de forme, on extrait la caractérisation moyenne des défauts de forme ainsi qu'une caractérisation des écarts-types des défauts de forme élémentaire composant les défauts de forme. On introduit ainsi la signature modale moyenne et écart-type d'un lot de défauts de forme.*
- *On introduit une représentation de la forme moyenne du lot d'écarts de forme, ainsi qu'une géométrie représentant les écarts types des formes. Enfin, on fait le lien entre les descriptions modales du défaut de forme moyen et écart-type pour en faire la représentation sous forme de géométrie moyenne et écart type.*

1.1 Simulation d'un lot d'écarts de forme

Avant de discuter de la caractérisation modale d'un lot de défauts de forme, nous introduisons d'abord un cas simple permettant d'illustrer nos propos. Ensuite, nous développons une méthode basée sur la caractérisation modale qui nous permet de simuler non seulement une forme mais aussi un lot de défauts de forme.

1.1.1 Exemple d'illustration

Pour illustrer les différentes représentations graphiques d'un lot de défauts de forme, on choisit de traiter le cas simple du profil poutre introduit dans le chapitre 3. La caractérisation modale d'un écart de forme est présentée dans la partie 2.1.5 où l'écart de forme analysé est créé par déformation statique d'un modèle par éléments finis.

Le modèle géométrique que l'on considère est un profil poutre de cinquante nœuds. La figure suivante rappelle les différents défauts de forme élémentaires qui composent la base modale métrique. Dans le cas d'exemple, on se contente de considérer vingt défauts modaux élémentaires, dont dix sont énumérés dans la figure 4-1. Cependant, on rappelle que la base modale peut être plus complète.

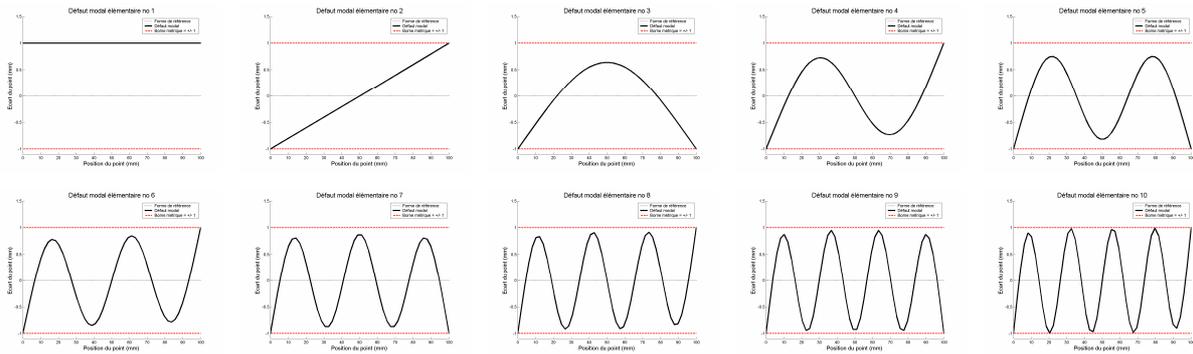


Figure 4-1 : Base modale métrique du modèle poutre

1.1.2 Création d'un lot de défauts de forme

Cette partie traite d'une méthode de création d'un lot d'écart de forme. On justifie l'utilisation de cette méthode avant d'en développer la démarche.

1.1.2.1 Justification de la méthode

Nos travaux de recherche sont récents et leurs essais sur des mesures sont prévus dans un avenir proche. Cependant, afin de tester la méthode, on décide de faire de la simulation de défaut de forme.

Le premier avantage de notre méthode de création de défauts de formes est de permettre le paramétrage des formes obtenues. La méthode que l'on propose permet une maîtrise des géométries créées.

Une utilisation future de cette méthode qui n'est pas détaillée dans ce rapport est liée à l'assemblage de surface avec défaut de forme. En effet, étant donné que l'on maîtrise les défauts de forme simulés, on peut donc tester l'influence des défauts de forme élémentaires, leur amplitude et leur combinaison sur l'écart de mise en position.

Afin de faire apparaître une tendance dans les écarts de forme à analyser, dans le but de représenter un lot de pièces issues d'un même procédé de fabrication, on décide de créer des variations de forme autour d'un écart de forme de base. Plusieurs solutions sont possibles, on peut faire varier les déplacements imposés lors de la résolution statique du défaut de forme, mais on envisage d'utiliser la méthode modale pour créer le lot de défaut de forme.

Notre objectif ici est de créer un lot de défauts de forme qui pourrait être issu d'un procédé de production générant un défaut de forme systématique.

1.1.2.2 Signature modale du défaut de forme de base : la moyenne

Plusieurs possibilités s'offrent à nous. On part soit d'un défaut de forme connu, issu de la mesure, soit d'une déformée statique ou autre que l'on caractérise pour obtenir sa signature modale. On peut partir directement d'une signature modale choisie arbitrairement.

Dans notre cas, nous choisissons de tirer aléatoirement une signature modale que nous considérons comme la caractérisation du défaut de forme initial. Les amplitudes des coefficients modaux respectent une loi inversement proportionnelle à leur ordre d'apparition dans la base.

On justifie le choix d'une telle loi de distribution des coefficients modaux car elle est proche de ce qu'on peut observer sur les caractérisations des écarts de forme [Samper et al, 2007], [Perpoli, 2004], [Adragna et al, 2006 d] et [Favrelière et al, 2007]. Les défauts de forme de courte ondulation sont généralement moins importants dans la description de l'écart de forme que ceux de plus grande ondulation.

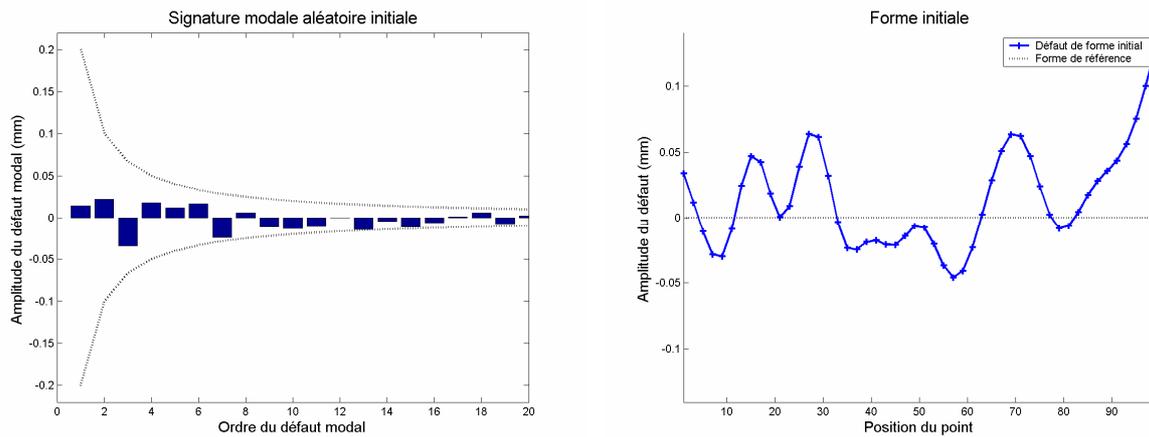


Figure 4-2 : Moyenne initiale, signature modale et forme recomposée

Dans le cas de surfaces volontairement texturées (ou ondulées), la forme échappe à cette loi, cependant la forme n'est pas le défaut de forme.

$$A(i) = \frac{A_0}{i} \quad [4-1]$$

Où $A(i)$ représente l'amplitude maximale du $i^{\text{ème}}$ coefficient modal et A_0 représente l'amplitude initiale.

$$\lambda_i = \omega.A(i) \quad [4-2]$$

Où ω est un générateur de nombre aléatoire appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

On présente ainsi dans la figure 4-2, la signature modale de base et la forme de base recomposée.

1.1.2.3 Création d'un lot à partir du défaut de base : la dispersion

Afin de créer de la variation autour de ce défaut de forme de base, plusieurs solutions sont possibles. On peut ajouter des écarts aléatoires sur la forme moyenne, cette solution consiste à créer du bruit que l'on peut apparenter à du bruit de mesure. Cette solution n'est pas suffisante pour créer de la dispersion autour de la forme moyenne. Les variations engendrées sur la caractérisation modale dépendent de l'amplitude du bruit et du nombre de points du modèle.

Une autre solution consiste à ajouter des écarts aléatoires sur la signature modale de la forme de base, ainsi on change la forme du défaut. Pour créer ce bruit aléatoire sur les coefficients modaux, on choisit la même loi de distribution que celle utilisée pour la création de la signature modale du défaut de forme de base.

Au final, on décide de combiner les deux solutions présentées pour créer de la dispersion. Dans un premier temps, on ajoute un bruit aléatoire sur la signature modale pour créer une variation de la forme. Et dans un second temps, on ajoute un bruit de mesure sur les formes recomposées. On obtient ainsi une forme similaire à la forme de base mais comportant des variations de formes. Pour créer un lot de forme, on répète cette opération pour créer toutes les formes simulées.

On présente aussi les formes obtenues par les variations sur les signatures modales ainsi que les formes obtenues par le bruit de mesure simulé.

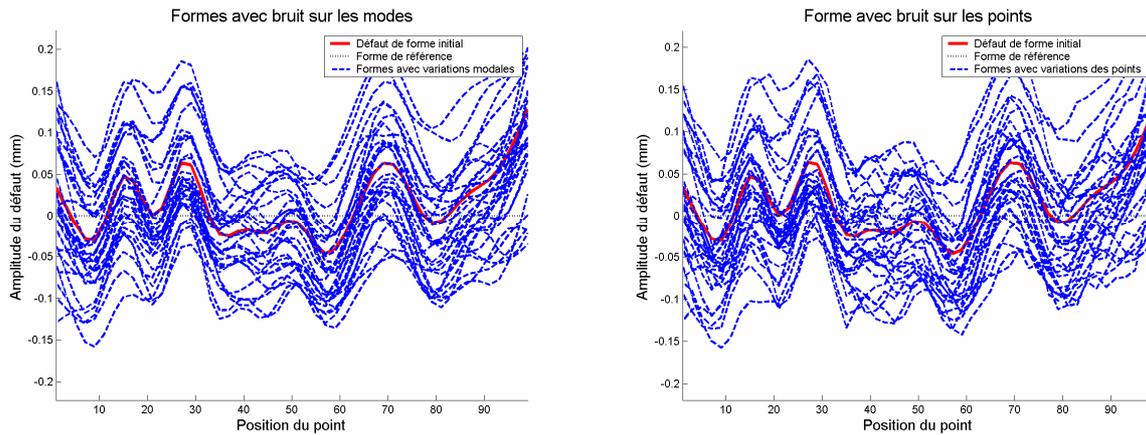


Figure 4-3 : Lot simulé de formes avec variation modale puis bruit de mesure

1.2 Représentation modale des écarts de forme

La méthode modale permet de caractériser des écarts de forme de n'importe quelle géométrie en une combinaison de défaut de forme élémentaire. Le résultat de la caractérisation d'un écart de géométrie V est un nombre limité de descripteur, les coefficients modaux λ_i . Ces coefficients modaux sont les coefficients d'influence de chaque défaut de forme élémentaire Q_i dans la description de l'écart de forme. L'ensemble de ces coefficients modaux est regroupé dans un vecteur que l'on nomme signature modale A .

Cependant, l'utilisateur peut être intéressé à caractériser non plus une seule pièce, mais un lot de pièce. Nous proposons alors deux méthodes permettant la représentation des caractéristiques d'un lot de pièce :

- Dans un premier temps, on représente l'ensemble des caractérisations des écarts de forme par l'ensemble de leurs signatures modales sous forme d'histogramme. Cette représentation peut être intéressante mais comporte certains inconvénients.
- Enfin on présente une signature modale moyenne, qui est la moyenne des signatures modale et une signature modale écart type, qui est l'écart-type des signatures modales. Ainsi seulement deux signatures modales suffisent à représenter un lot d'écarts de forme.

1.2.1 Première représentation : histogramme des signatures

Cette partie propose une première représentation de la caractérisation modale d'un lot de formes. Le résultat de la caractérisation modale d'un lot de défauts de forme est un lot de signatures modales.

La première façon que l'on choisit pour représenter les différentes caractérisations des défauts de forme est une succession d'histogrammes. On obtient ainsi une représentation exhaustive des signatures modales représentant les caractérisations dans la même base modale de toutes les pièces du lot.

A partir des résultats obtenus, on peut repérer les modes communs à chaque géométrie. On peut ainsi visuellement identifier une signature moyenne du lot, qui peut correspondre à une tendance de la forme moyenne du lot.

Cependant, on peut rencontrer des difficultés lors de la visualisation du lot de signatures :

- Les défauts de formes ne sont pas tous de même amplitude, mais on observe néanmoins une tendance globale des descriptions des défauts de forme. On peut normer l'amplitude maximale du mode le plus influent. Ainsi toutes les caractérisations peuvent avoir la même amplitude.
- La taille du lot est importante, dans ce cas l'affichage ou la lecture de toutes ces signatures modale n'est pas évidente. L'interprétation est d'autant moins évidente si les similitudes entre les descriptions des formes sont faibles.

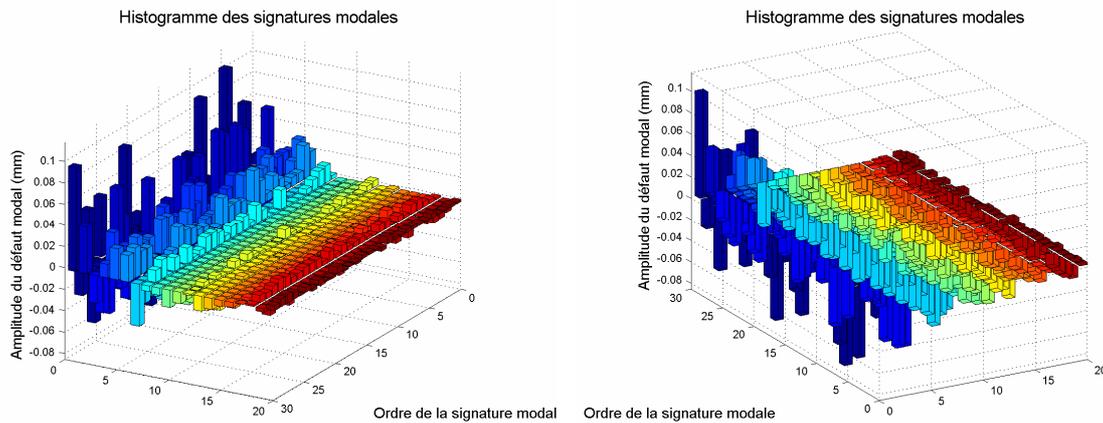


Figure 4-4 : Deux vues de la même description du lot de forme par l'histogramme des signatures modales

1.2.2 Seconde représentation : signature modale moyenne et signature modale écart type

La seconde approche que nous proposons considère le lot de signature modale comme un lot de caractéristiques. On fait alors une interprétation similaire au cas 1D où le lot de caractéristiques est décrit par une moyenne et une dispersion. Dans notre cas, on propose de calculer la signature moyenne et la signature écart type. Ces signatures correspondent respectivement à la moyenne et l'écart-type de chaque coefficient modal.

1.2.2.1 Signature modale moyenne

Ce qu'on appelle signature modale moyenne correspond à la moyenne des signatures modales. Les coefficients modaux de la signature modale moyenne sont les moyennes des coefficients modaux des signatures modales des géométries du lot.

$\bar{\Lambda}$ la signature modale moyenne d'un lot de défaut de forme est calculée de la façon suivante :

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{n} \sum_j \Lambda_j \quad \left| \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\sum_j \lambda_{i,j}}{n} \right. \quad [4-3]$$

Où Λ_j est la signature modale du $j^{\text{ème}}$ défaut de forme et $\lambda_{i,j}$ est le $i^{\text{ème}}$ coefficient modal de cette $j^{\text{ème}}$ signature modale. On définit aussi $\bar{\lambda}_i$ comme la $i^{\text{ème}}$ coordonnée modale de la signature modale moyenne, c'est aussi la moyenne des $i^{\text{ème}}$ coefficients modaux des défauts de forme.

La figure 4-5 présente la signature modale moyenne du lot de défauts de forme simulés présenté dans la figure 4-3.

1.2.2.2 Signature modale écart-type

La signature modale écart-type regroupe des coefficients positifs. On note σ_{λ_i} le coefficient modal de la signature modale écart-type σ_{Λ} . Ses coefficients correspondent aux écarts types des coefficients modaux λ_i des signatures modales Λ_j .

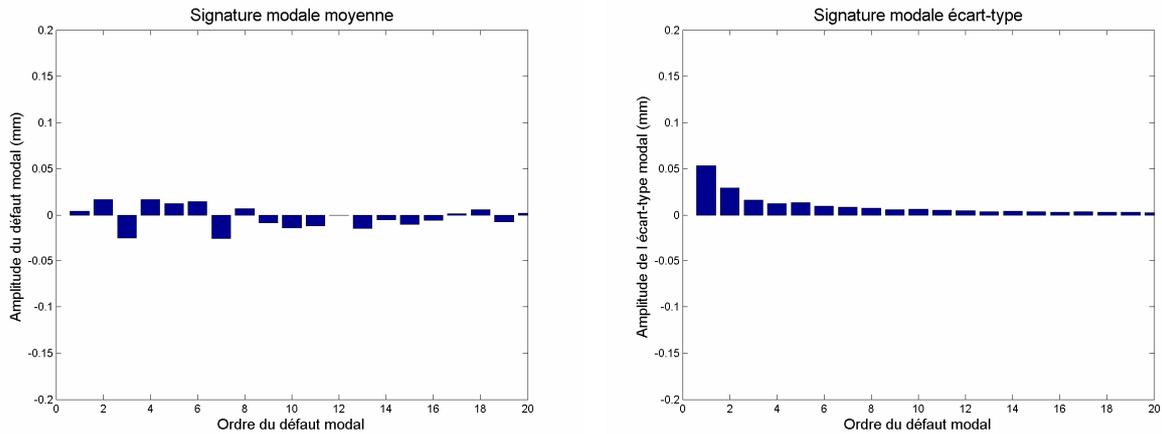


Figure 4-5 : Signatures modales moyenne et écart-type du lot

La figure 4-5 ci dessus présente la signature modale écart-type. Cette description modale permet de visualiser les défauts élémentaires modaux qui participent à la variation aléatoire du lot de défauts de forme. On peut aussi observer au contraire les défauts de forme élémentaires pour lesquels la dispersion est nulle.

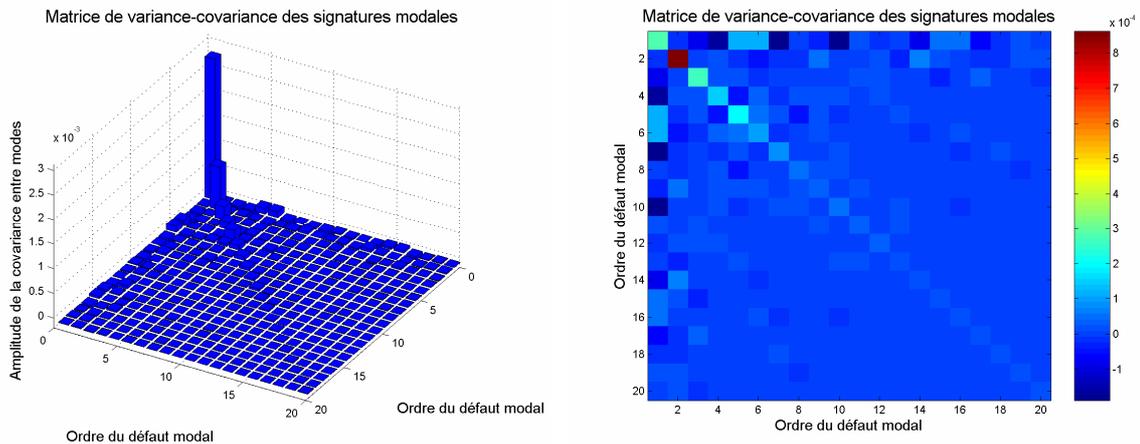


Figure 4-6 : Deux vues de la matrice variance-covariance modale du lot

Néanmoins cette caractérisation des dispersions peut ne pas être suffisante, on propose alors une autre représentation qui est plus complète. Il s'agit de Σ_{Λ} la matrice de variance-covariance des coefficients modaux. Elle permet de faire apparaître des corrélations entre les défauts de formes élémentaires. La diagonale de cette matrice est la signature modale écart-type σ_{Λ} présentée précédemment.

La figure 4-6 ci dessus est une représentation de la matrice de variance covariance comme le propose [Merkley, 1998]. La lecture d'un tel résultat n'est pas aisée. Dans la représentation sous forme d'image, la variance du mode 1 est divisée par 10 afin de ne pas masquer les amplitudes des autres variances et covariances.

1.2.3 Surface moyenne et surface écart-type

OBJECTIF DE LA PARTIE

Cette partie fait le lien entre les caractérisations statistiques d'un lot de défauts de forme et leurs représentations géométriques. Ce qu'on appelle les caractérisations statistiques sont en fait la signature modale moyenne et la matrice de variance-covariance modale. On présente ainsi la surface moyenne et la surface écart type.

Du point de vue de l'expert en méthode modale, les caractéristiques modales statiques, signature modale moyenne et signature modale écart-type ou la matrice de variance-covariance, peuvent être suffisantes pour décrire un lot de défauts de forme. Cependant, cette partie a vu le jour notamment grâce à la collaboration industrielle. Il est évident que la représentation par une forme géométrique plutôt que par sa description modale facilite l'interprétation d'un lot d'écarts de forme.

L'intérêt de la méthode modale est l'équivalence (au résidu près) entre la description en défauts élémentaires et la recombinaison en forme géométrique. On peut ainsi décrire un lot de défauts de forme et obtenir les caractéristiques statistiques de ce lot, signature modale moyenne et écart-type. L'interprétation de ces caractérisations statistiques modales n'est pas évidente, c'est pourquoi on propose une représentation sous forme de géométrie 3D. [Favrelière et al, 2007] présente ainsi la forme moyenne et la forme écart-type représentant les caractéristiques statistiques d'un lot de géométrie.

Ces surfaces moyenne et écart-type représentent les moyennes et les écarts-types de chaque point de la surface. Elles sont calculées à partir des points de chaque défaut de forme. On peut obtenir les mêmes représentations 3D de la moyenne et l'écart-type sans l'intermédiaire de la méthode modale. L'intérêt d'utiliser la méthode modale est le filtrage des géométries analysées permettant ainsi de lisser les écarts de forme identifiés. De plus, en utilisant la méthode modale, on a directement les caractérisations modales du lot, ce qui permet de ne pas analyser les surfaces moyenne et écart-type pour obtenir leurs caractérisations modales.

1.2.3.1 Surface modale moyenne

La méthode modale permet la description d'une forme par une relation linéaire :

$$T = \sum_i \lambda_i \cdot Q_i = B^t \cdot \Lambda \quad [4-4]$$

Où $Q_i(m,1)$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur modale de la base modale $B(n,m)$.

On considère donc la méthode modale comme une transformation linéaire du type $Y = A \cdot X$ où A est une matrice de constantes non carrée [Saporta, 2000].

La surface moyenne μ_T d'un lot de forme filtré par la méthode modale se calcule grâce à la base modale et la signature modale moyenne. On obtient ainsi :

$$\mu_T = B^t \cdot \bar{\Lambda} \quad [4-5]$$

Dans notre cas d'application, la surface moyenne est déterminée par la signature modale moyenne présentée à la figure 4-5.

La figure 4-8 ci-dessous présente la géométrie moyenne du lot d'écart de forme.

1.2.3.2 Surface modale écart type

La surface écart-type σ_T du lot de forme filtré ne s'obtient pas directement à partir de la signature modale écart-type σ_A . La relation statistique d'une transformation linéaire lie les matrices de variance-covariance. On ne peut donc directement travailler sur la signature modale écart-type et la surface écart type. On obtient en fait la matrice de variance-covariance Σ_T des points du lot de forme filtré grâce la matrice de variance-covariance modales Σ_A du lot. On a donc :

$$\Sigma_T = B^t \cdot \Sigma_A \cdot B \quad [4-6]$$

Le résultat de ce calcul donne la matrice de variance-covariance entre les nœuds des défauts de forme analysés. Ce qui nous intéresse est la surface écart-type qui est déterminée grâce à la diagonale de cette matrice variance-covariance.

Le résultat de la conversion modale de la matrice de variance-covariance des modes est une matrice de variance-covariance des points de la géométrie. Comme pour la matrice de variance-covariance des modes, on peut représenter cette matrice.

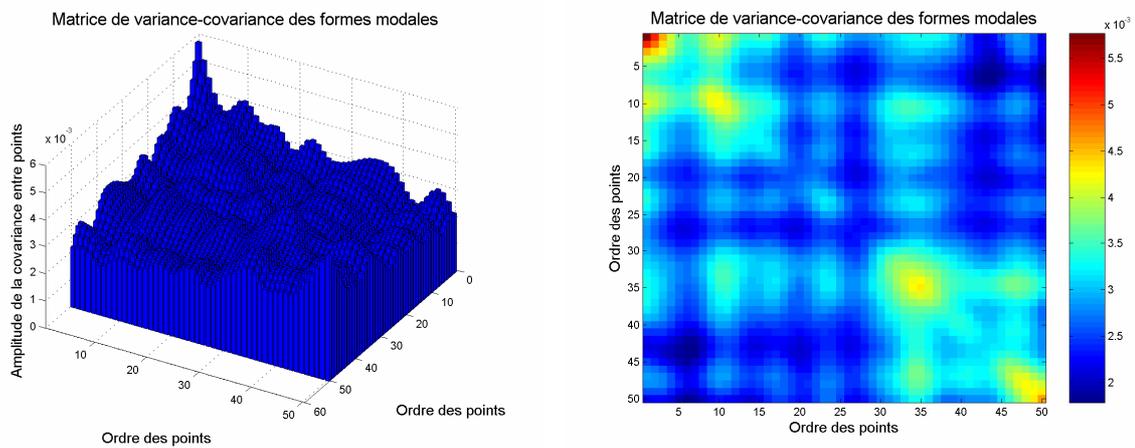


Figure 4-7 : Deux vues de la matrice de variance-covariance modale des points de la géométrie

Pour notre cas d'application, la surface écart-type est déterminée par la matrice de variance-covariance modale présentée à la figure 4-6.

$$\sigma_T = \sqrt{\text{diag}(B^t \cdot \Sigma_A \cdot B)} \quad [4-7]$$

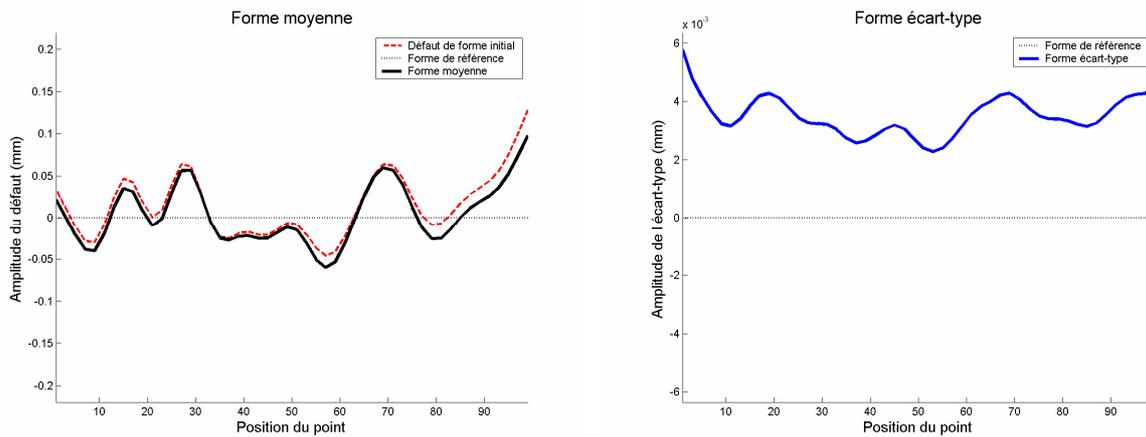


Figure 4-8 : Surfaces modales moyenne et écart-type du lot

La figure 4-8 b) présente la géométrie écart-type du lot d'écart de forme. Les points où la forme est proche de la géométrie idéale signifient que la dispersion est localement faible. Au contraire, aux endroits où la forme écart-type est éloignée de la géométrie idéale, cela signifie que ces points ont une grande dispersion parmi les différents écarts de forme du lot.

1.3 Synthèse de la partie

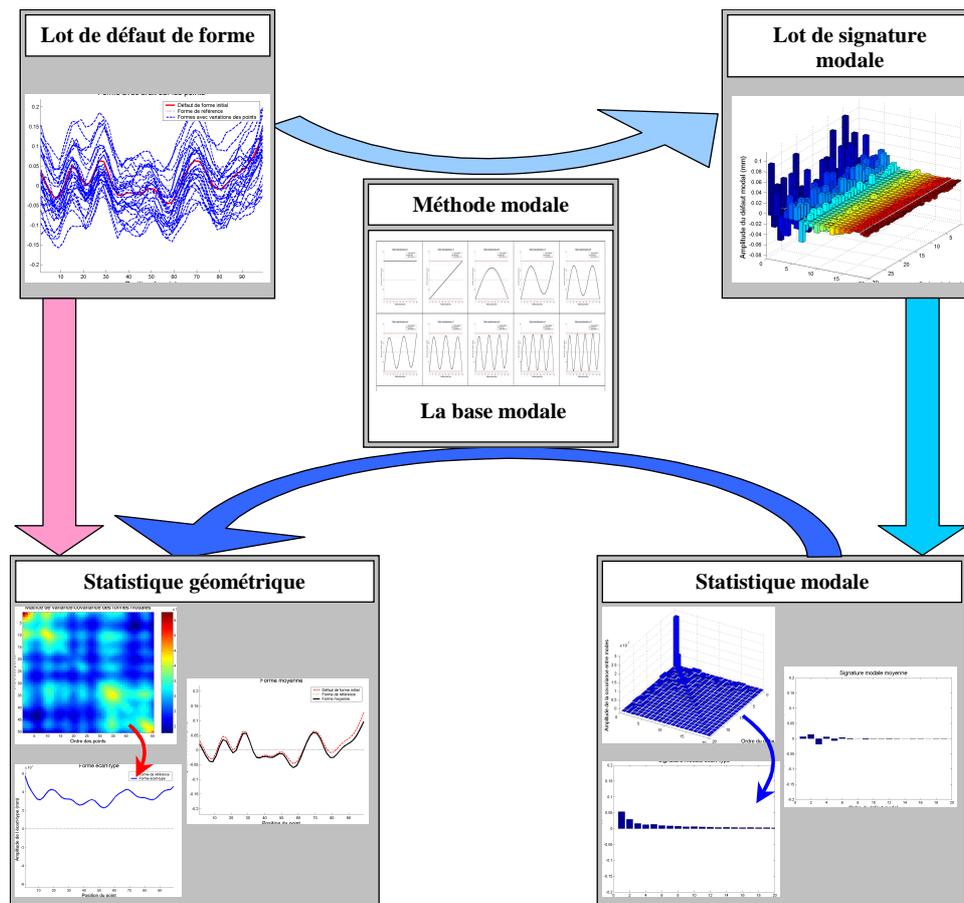


Figure 4-9 : Résumé de la caractérisation modale statistique

La figure 4-9 ci-dessus résume cette partie 1 qui traite de la caractérisation statistique d'un lot de défaut de forme. On peut obtenir directement la description statistique de la géométrie du lot à partir du lot de défaut de forme. Cette étape symbolisée par la flèche rose n'est pas détaillée dans cette partie, contrairement aux flèches bleues qui reprennent les trois étapes de la caractérisation statistique d'un lot de forme.

- La première qui consiste à décrire les défauts de forme V_j dans la base modale B pour obtenir les signatures modales A_j est présentée dans le chapitre 4 précédent.
- La seconde étape, symbolisée par la flèche verticale, permet d'obtenir la description statistique modale à partir du lot de description modale des défauts de forme. On obtient ainsi :
 - Une signature modale moyenne $\bar{\Lambda}$ représentant le défaut de forme moyen du lot,
 - Une matrice de variance-covariance Σ_A des signatures modales du lot, dont la diagonale correspond à la signature modale écart-type σ_A .
- La troisième étape consiste à re-basculer les informations modales statistiques dans l'espace géométrique des surfaces. On présente ainsi :
 - Une forme modale moyenne μ_T représentant le défaut de forme moyen du lot,
 - Une matrice de variance-covariance Σ_T des points du lot, dont la diagonale correspond à la forme modale écart-type σ_T .

2 Fusion de la méthode modale et du critère inertie

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Dans cette partie, nous traitons du rapprochement de nos deux axes de recherche, le tolérancement inertiel et la méthode modale. Le tolérancement inertiel est basé sur un critère d'acceptation, l'inertie, qui permet de qualifier statistiquement un lot de composants tout en garantissant efficacement la CF de la résultante de l'assemblage. La méthode modale est une méthode de caractérisation des écarts de position-orientation, taille et forme de tout élément géométrique en défauts de forme élémentaires. Cette méthode traite aussi l'assemblage de géométries avec écart de position et/ou de forme.

Notre objectif dans cette partie est de proposer une extension du critère de quantification inertiel sur la méthode de qualification modale. [Pillet et al, 2005] propose déjà une extension du critère inertiel au traitement des géométries 3D. Nous reprenons cette définition pour la compléter par la caractérisation modale, puis nous proposons une évolution de ce critère inertie 3D.

Cette partie se présente donc en deux sous parties :

- Dans un premier temps, on utilise la définition existante de la définition de l'inertie d'une surface. La méthode modale permet ainsi de déterminer l'inertie d'une surface ou d'un lot de surface grâce à la caractérisation statistique modale.
- Dans un second temps, on propose une évolution de ce critère. En effet, nous discuterons de sa définition initiale afin de justifier notre nouvelle proposition d'inertie d'une surface.

2.1 Inertie 3D classique

Cette partie traite de la fusion du critère inertie sur la description modale. Dans un premier temps, on présente la définition de l'inertie 3D d'une géométrie puis la démarche permettant d'obtenir une inertie à partir de la méthode modale. On expose enfin le calcul de l'inertie d'une surface, puis l'inertie d'un lot de surface.

2.1.1 L'inertie 3D par Pillet

[Pillet, 2004] présente un critère de quantification des écarts unidirectionnels, l'inertie, dont nous avons discuté dans les chapitres 1 et 2.

$$I = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (X_k - C)^2} = \sqrt{\delta^2 + \sigma^2} \quad [4-8]$$

La première parution de l'inertie 3D est présentée dans [Pillet et al, 2005]. La vision d'un défaut de forme correspond à celle que l'on décrit par la méthode modale :

- un écart de forme est mesuré selon les normales à la surface idéale,
- un défaut de forme est décrit par des points de mesure prédéfinis,

2.1.1.1 Inertie d'une surface

Ainsi la quantification inertielle $I_{s,i}$ du défaut de forme d'une surface i , se définit par :

$$I_{s,i} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - C)^2} \quad [4-9]$$

Avec :

- $I_{s,i}$: l'inertie de la surface i ,
- n : le nombre de points de mesure sur la surface,
- $X_{i,j}$: la mesure du point j de la surface i ,
- C : la valeur cible

Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$I_{s,i} = \sqrt{\delta_i^2 + \sigma_i^2} \quad [4-10]$$

Où δ_i représente le décentrage moyen des points de mesures par rapport à leurs valeurs cibles, et σ_i est l'écart-type de la répartition des points autour de leurs valeurs cibles.

Remarque

On reconnaît ici la définition de l'inertie d'un lot d'une simple caractéristique que l'on utilise dans le chapitre 3. Pour le calcul de l'inertie d'une surface, on considère que les points de mesure sont des mesures indépendantes. On ne tient pas compte d'un quelconque lien dû à leur appartenance à la même surface.

2.1.1.2 Inertie d'un lot de surface

Dans le cas d'un lot de surface, l'inertie I du lot de k surfaces est définie comme suit :

$$I = \sqrt{\frac{1}{k.n} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=n} (X_{i,j} - C)^2} \quad [4-11]$$

Où k représente le nombre de surfaces du lot, et n est le nombre de points de mesures par surface.

De cette relation générale on peut tirer deux relations particulières :

Inertie du lot à partir des inerties des surfaces

La relation [4-11] peut aussi s'écrire sous la forme :

$$I = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} (X_{i,j} - C)^2 \right)} \quad [4-12]$$

Ce qui peut finalement s'écrire par :

$$I = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} I_{s,i}^2} \quad [4-13]$$

Cette équation signifie que l'inertie d'un lot de défaut de forme est la moyenne quadratique des inerties de chaque défaut de forme.

Inertie du lot à partir des inerties des points

La relation [4-11] peut aussi s'écrire sous la forme :

$$I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=k} (X_{i,j} - C)^2 \right)} \quad [4-14]$$

Ce qui peut finalement s'écrire par :

$$I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} I_j^2} \quad [4-15]$$

Où I_j est l'inertie du point j des défauts de forme. Cette équation signifie que l'inertie d'un lot de défaut de forme peut aussi être calculée par la moyenne quadratique des inerties de chaque point de la géométrie.

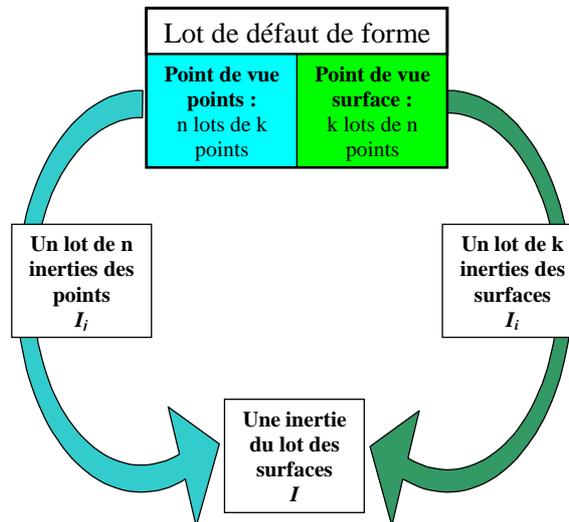


Figure 4-10 : Résumé des approches de calcul de l'inertie d'un lot de forme

On a donc deux méthodes permettant d'obtenir l'inertie d'un lot de défaut de forme.

- On peut considérer chaque défaut de forme comme une caractéristique pour laquelle on calcule son inertie, et l'inertie du lot est ensuite calculée en combinant les inerties de tous les défauts de forme.
- On peut considérer chaque point de mesure comme une caractéristique et calculer l'inertie de chaque point du maillage de mesure. L'inertie du lot est ensuite calculée par la combinaison des inerties de chaque point du maillage de mesure.

2.1.2 Inertie et description modale

La méthode modale permet une description des défauts de forme par un nombre minimale de caractéristiques que sont les coefficients modaux λ_i , regroupés dans la signature modale Λ . Un défaut de forme V_j est caractérisé par sa signature modale Λ_j , contenant les $\lambda_{i,j}$ coefficients modaux. On a présenté dans le paragraphe 1 une caractérisation statistique d'un lot de défauts de forme par la méthode modale.

Le but de cette partie est de permettre l'obtention de l'inertie d'un lot de défauts de forme grâce à la méthode modale et la caractérisation statistique.

2.1.2.1 Surface inertie

Dans le paragraphe 1.2.3.1 on a défini la surface moyenne et dans le paragraphe 1.2.3.2, la surface écart-type. Ces deux surfaces constituent les caractéristiques statistiques des points du maillage.

En combinant ces moyennes et écarts-types grâce à l'équation [4-10], on calcule les inerties de chaque point du maillage qui définissent ainsi la surface inertie. On nomme cette représentation la surface inertie modale du lot d'écart de forme :

$$I_T = \sqrt{\mu_T^2 + \sigma_T^2} \quad [4-16]$$

Où μ_T correspond à la surface modale moyenne définie à l'équation [4-5] et σ_T correspond à la surface modale écart-type définie à l'équation [4-7].

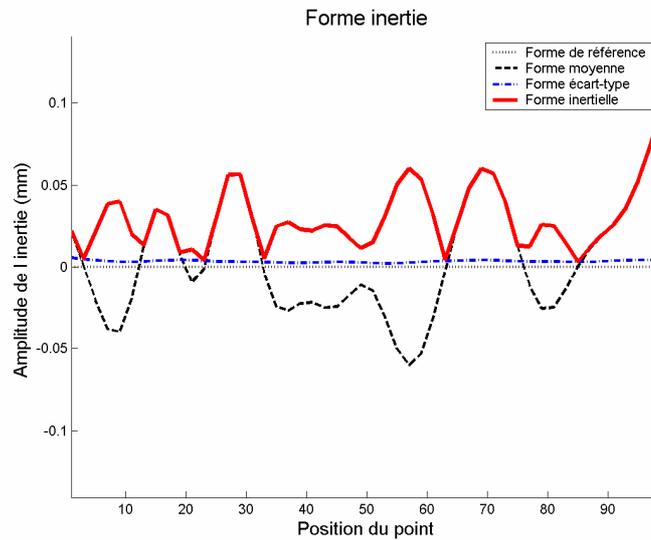


Figure 4-11 : La surface inertie modale du lot

La détermination du scalaire inertie qui quantifie les écarts du lot par rapport à leur cible est alors définie par la relation [4-14]. On peut alors écrire :

$$I = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} I_{T,j}^2} \quad [4-17]$$

Où $I_{T,j}$ représente l'inertie du point j du lot, $I_{T,j}$ est en fait le $j^{\text{ème}}$ point la surface modale inertielle I_T .

2.1.2.2 Cas particulier

On peut identifier deux cas particuliers pour le calcul de l'inertie d'un lot en fonction des caractéristiques modales statistiques :

- Cas 1 : la signature modale écart-type est nulle,
- Cas 2 : la signature modale moyenne est nulle.

Inertie uniquement due à la moyenne

Dans le cas 1, on ne traite qu'une seule pièce ou alors le lot est très peu dispersé. Par conséquent, la surface inertie modale n'est due qu'à la surface modale moyenne. L'inertie du lot se calcule donc uniquement grâce à la signature modale moyenne..

$$I_T = B^t \cdot \bar{\Lambda} \quad [4-18]$$

Inertie uniquement due à l'écart-type

Dans le cas 2, on ne traite qu'un lot de pièces centrées sur la géométrie cible. De ce fait, la surface inertie modale n'est due qu'à la surface modale écart-type. L'inertie du lot se calcule donc uniquement grâce à la matrice de variance-covariance modale.

$$I_T = \sqrt{\text{diag}(B' \cdot \Sigma_\Lambda \cdot B)} \quad [4-19]$$

Où *diag* est la fonction qui retourne la diagonale d'une matrice carrée.

Signatures inertielles ?

Cette problématique est présentée dans [Adragna et al, 2007 b], donnant aussi lieu à des définitions de signatures modales inertielles. Mais ce concept de signature inertielle modale n'est pas facilement exploitable.

En effet, dans le cas d'écart de forme uniquement dû à une moyenne, la signature modale est le vecteur signature modale moyenne. Dans le cas de défaut de forme uniquement dû à l'écart-type, la signature inertielle est en fait la matrice carrée de variance-covariance modale. Cependant, dans la partie 2.3.3, nous proposons une représentation graphique de la signature modale moyenne et de la signature modale écart-type sur certains modes de la base modale. On définit ainsi des domaines de tolérance. Mais, étant donné qu'on ne prend pas en compte la covariance entre les modes, on ne peut considérer cette représentation fort intéressante comme aboutie.

2.2 Inertie 3D ajustée

Cette partie traite d'une nouvelle définition de l'inertie 3D d'un lot de forme. C'est à partir de l'étude de l'inertie 3D classique que nous dévoilons une nouvelle définition de l'inertie 3D.

2.2.1 Brève critique de l'inertie 3D classique

Cette critique a pu voir le jour grâce au rapprochement de l'inertie et de la méthode modale. La discussion repose sur les deux défauts de forme rigides issus de la base modale du modèle poutre, la translation et la rotation.

2.2.1.1 Une inertie dépendante du nombre de points de mesure

D'après la définition de l'inertie d'un défaut de forme 3D, l'inertie de la forme est la moyenne quadratique des inerties des points du maillage.

Considérons un unique écart de géométrie donné par le mode de rotation. Ce défaut de forme est centré et symétrique. Donc en considérant un point à chaque extrémité du profil, p_1 et p_2 , on a la relation sur les décalages des points :

$$\delta_1 = -\delta_2 \quad [4-20]$$

D'où les inerties de ces deux points sont égales à la valeur du décentrage, que l'on note δ

$$I_1 = I_2 = \delta \quad [4-21]$$

Dans ce cas l'inertie du défaut de forme est :

$$I = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2}{2}} = |\delta| \quad [4-22]$$

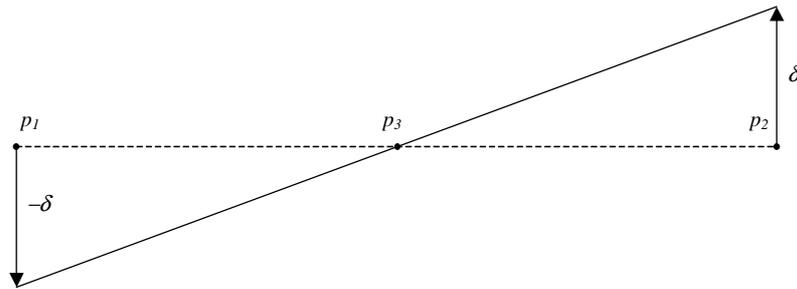


Figure 4-12 : Un défaut de forme mesuré en 2 et 3 points

Considérons ce même écart de géométrie mesuré maintenant en trois points, p_1 et p_2 à chaque extrémité, et p_3 au centre. Les points p_1 et p_2 ont les mêmes inerties que précédemment, p_3 quant à lui a une inertie nulle car le défaut est centré sur la cible en p_3 . D'où l'inertie du défaut de forme est maintenant égale à :

$$I = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}{3}} = |\delta| \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad [4-23]$$

La remarque est présentée dans [Adragna et al, 2007 b]. En considérant une combinaison des modes de translation et de rotation, on observe une augmentation de l'écart-type admissible en fonction du nombre de points de mesure.

Se dégage ainsi le problème suivant : afin que deux personnes trouvent la même inertie d'un défaut de forme, il faut spécifier le nombre de points de mesure et leurs emplacements. Quel peut alors être la relation entre un client et son fournisseur si cette précaution n'est pas prise ? L'un pourrait choisir les points de mesure pour artificiellement augmenter l'inertie du lot et avoir une meilleure qualité alors que l'autre pourrait augmenter le nombre de points de mesure pour essayer de diminuer l'inertie du lot et gagner en rentabilité.

2.2.1.2 Une inertie ne garantissant plus la CF

Pour illustrer ce point, on propose de considérer un simple exemple d'empilage 2D de deux composants. Le problème est ensuite décomposé en deux chaînes de cote 1D que l'on traite par le tolérancement inertiel du chapitre 2.

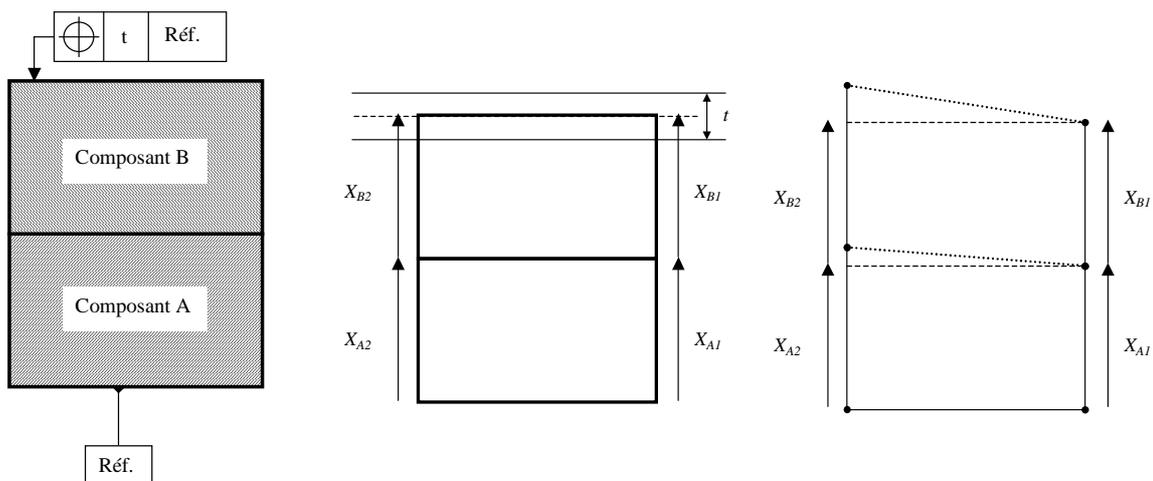


Figure 4-13 : Empilage 2D

La figure 4-13 ci-dessus présente le cas d'exemple d'un empilage 2D traité par le tolérancement vectoriel. On dispose ainsi de deux chaînes de cote, 1 et 2.

Grâce à la méthode de tolérancement inertiel 1D que l'on propose, on peut garantir la *CF*, voir même garantir un *TNC* sur cette *CF*. En appliquant la méthode sur les deux chaînes de cote 1 et 2, on peut garantir la *CF* indépendamment sur l'une et l'autre, et ainsi garantir la *CF* du problème 2D.

Considérons maintenant le cas particulier présenté dans la figure 4-13. Les composants de la chaîne de cote 1 sont parfaitement centrés. En supposant une faible dispersion, l'inertie de chaque composant est faible.

Par définition, l'inertie 3D classique autorise alors plus d'écarts sur la chaîne de cote 2. Cette augmentation d'écart ne garantit plus de ce fait la *CF* sur cette seconde chaîne de cote. Par conséquent, la méthode ne la garantit plus sur la globalité.

CONCLUSION INTERMEDIAIRE :

La définition classique est une définition intéressante puisqu'elle jette les bases de l'inertie 3D. Cependant, elle a ses limites et ne permet pas de répondre à l'objectif du tolérancement. On propose donc une nouvelle inertie qui évite ces problèmes particuliers : l'inertie 3D ajustée.

2.2.2 L'inertie 3D ajustée

Cette partie a pour but de définir une évolution de l'inertie 3D classique que l'on appelle inertie 3D ajustée qui répond aux critères suivants :

- obtenir la même inertie d'un lot quel que soit le nombre de points mesurés sur la surface,
- garantir la *CF* 3D résultante grâce à la méthode de tolérancement inertiel 1D garantissant une *CF*.

2.2.2.1 Définition de l'inertie 3D ajustée

En se basant sur les remarques du paragraphe 2.2.1 précédent, on en a déduit la proposition suivante pour l'inertie d'une géométrie :

$$I_{ajustée} = \text{Max}(I_i) \quad [4-24]$$

Où $I_{ajustée}$ est un scalaire qui représente l'inertie 3D ajustée, et I_i est l'inertie des points mesurés de la géométrie.

2.2.2.2 Discussion sur cette définition

Cette nouvelle définition de l'inertie géométrique permet d'éviter la problématique soulevée par le paragraphe 2.2.1.2. Cette partie est une rapide discussion sur les problématiques présentées dans le paragraphe 2.2.1.

Avantages

En effet, l'inertie d'une géométrie ne dépend plus du nombre de points mesurés, elle est définie par la plus grande inertie mesurée sur la géométrie. Cependant, elle dépend toujours de l'endroit où les écarts sont mesurés. En utilisant la méthode modale, on peut faire l'interpolation des défauts de forme, et ainsi artificiellement augmenter le nombre de points de mesure pour affiner le maillage. On a alors plus d'opportunités de trouver le point qui possède la plus mauvaise inertie, et donc de détecter une inertie identique quels que soient les points de mesures.

De plus, dans le cas du tolérancement de l'empilage de composants, l'inertie 3D ajustée permet maintenant de garantir la CF. En effet, la chaîne de cote 2 est seule prise en compte quelles que soient les inerties plus faibles de la chaîne de cote 1. Donc on garantit la CF sur la chaîne de cote 2, et donc sur l'empilage 3D des composants. Une application similaire sur l'empilage de cinq composants est présentée dans [Adragna et al, 2007 b].

Inconvénients

L'application de cette méthode sur une surface brute révèle quelques inconvénients : une erreur de mesure peut faire apparaître un pic sur la surface faussant la valeur de l'inertie 3D ajustée, alors que son impact serait moindre avec l'inertie 3D classique. Le critère d'inertie 3D ajustée nécessite alors d'être appliqué sur une surface filtrée (lissage des pics). Cette remarque renforce le choix de l'utilisation de la méthode modale.

Par ailleurs, la méthode garantit la CF, ce qu'on considère acquis dans le cas des empilages. C'est un avantage incontestable. Cependant, comme dans le cas 1D et plus encore dans le cas 3D, on limite l'inertie acceptable pour des configurations particulières dont l'occurrence peut être faible. On se dirige alors vers une méthode pouvant engendrer de la sur-qualité.

2.3 L'espace des coefficients modaux

Cette partie traite de la représentation graphique des coefficients modaux. Cet aspect n'a pas été présenté plus tôt car on a choisi de présenter en priorité la base métrique et le critère inertie 3D. L'objectif de cette partie est d'introduire la représentation de la tolérance 3D par zone et inertiel dans l'espace des coefficients modaux. L'intérêt est entre autres de pouvoir comparer les deux méthodes de tolérancement, le tolérancement 3D au pire des cas et le tolérancement 3D inertiel que nous proposons par la suite.

Cette partie se décompose en trois sous-parties :

- Une introduction de la représentation dans l'espace des coefficients modaux. Cette partie s'accompagne d'une rapide discussion sur la description modale d'un écart par rapport à la méthode des petits déplacements ou des TMaps.
- La représentation de la tolérance 3D par zone dans le domaine modal. On introduit ainsi, sans entrer dans les détails, quelques réflexions sur différentes bases de défauts de formes élémentaires avec certaines propriétés.
- La représentation de la tolérance inertielle 3D ajustée dans l'espace des coefficients modaux. On présente ainsi une discussion sur le domaine inertiel de tolérance.

2.3.1 La représentation dans l'espace des coefficients modaux

Un écart de forme V_j est caractérisé par la méthode modale par une combinaison de coefficients modaux $\lambda_{i,j}$ regroupés dans la signature modale A_j . Cette signature modale peut être représentée par un point dans l'espace des coefficients modaux.

On compare cette représentation dans l'espace modale à celle plus connue dans l'espace des petits déplacements, à la différence que la méthode modale contient des modes de forme ce qui augmente la taille de l'espace de représentation.

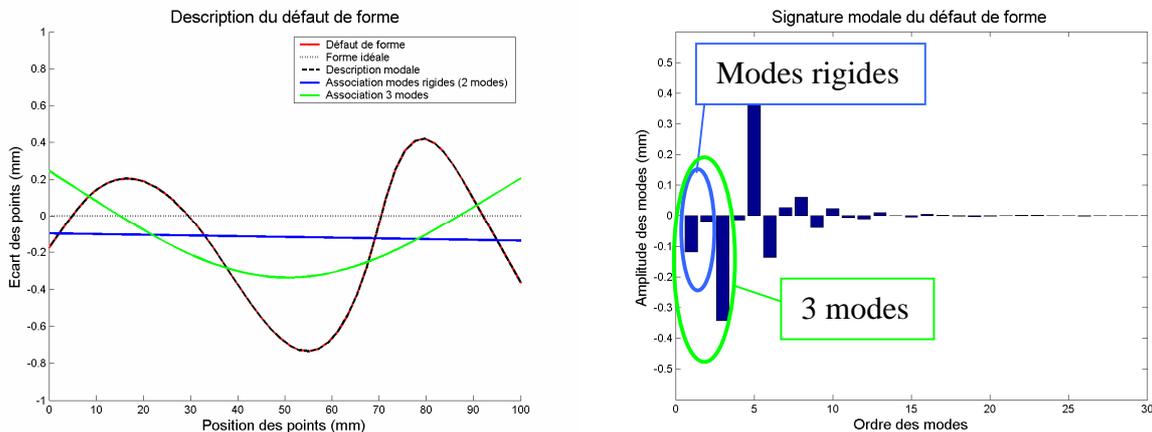


Figure 4-14 : Un défaut de forme et sa description modale

La figure 4-14 présente un défaut de forme et sa signature modale. A partir de sa signature modale on représente la surface rigide que l'on considère comme la surface associée par la méthode modale. Ce profil associé est aussi caractérisé par la méthode des petits déplacements.

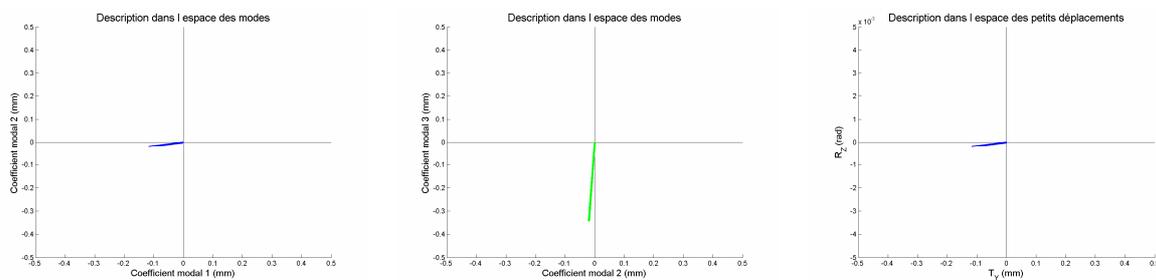


Figure 4-15 : Représentation dans les espaces modaux (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_3), et l'espace des petits déplacements (T_Y, R_Z)

La figure 4-15 ci dessus représente le défaut de forme caractérisé dans la base modale. Sa caractérisation est représentée dans l'espace des trois premiers modes (translation, rotation et bombé). L'autre représentation correspond aux caractéristiques du profil associé dans l'espace des petits déplacements.

La restriction de la base modale aux modes rigides de position-orientation permet de comparer la méthode à la méthode des petits déplacements comme discuté au paragraphe 3.6 du chapitre 3. Le centre du repère correspond au centre de gravité du maillage, l'axe x est aligné sur le modèle et l'axe y et normal au modèle orienté suivant un écart positif du mode 1. On peut donc faire un lien entre les deux représentations. Dans le cas présenté on a :

$$\begin{aligned} T_Y &= \lambda_1 \\ R_Z &= \frac{\lambda_2}{l} \end{aligned} \quad [4-25]$$

Où T_Y et R_Z correspondent respectivement aux composantes de translations suivant Y et rotation autour de Z du torseur de petits déplacements. λ_1 et λ_2 correspondent eux respectivement aux coefficients modaux des modes de translation et de rotation.

La représentation de plus de trois dimensions pose un problème. Une solution est de présenter le résultat dans plusieurs coupes ou projection. On peut utiliser la même méthode pour les résultats de la caractérisation modale. Néanmoins, il faut noter que la représentation de domaines est réservée au développement de la méthode. L'utilisateur final n'est pas concerné par ce problème. Ce dernier cherche à faire les bons choix de spécifications et à les valider à l'aide d'outils numériques.

Comparaison méthode modale – torseurs de petit déplacement

L'avantage de la méthode modale par rapport aux torseurs de petits déplacements est la caractérisation d'un écart et la représentation d'un écart de forme.

En effet, la méthode modale permet instantanément de caractériser les écarts de position-orientation par une simple projection vectorielle, alors qu'il faut associer une surface idéale et caractériser ces écarts pour la méthode des petits déplacements.

De plus, la méthode modale possède une homogénéité dans la caractérisation des écarts. Le défaut de rotation est caractérisé par un déplacement et non une rotation. Ainsi la représentation statistique d'un lot défauts de position-orientation dans l'espace modal permet de donner du sens à la corrélation du nuage de points car les unités sont cohérentes.

Cependant, on doit le reconnaître, la méthode des torseurs de petits déplacements permet le transport des écarts de manière simple par l'utilisation d'un produit vectoriel, alors que le transport des écarts par la méthode modale est moins simple et explicite.

On peut par conséquent envisager une combinaison des deux méthodes permettant de ne garder que les avantages de chacune.

La méthode modale permet de :

- caractériser facilement un écart de forme et en extraire ses composantes rigides,
- représenter dans un espace métrique les composantes du défaut,

La méthode des petits déplacements quant à elle offre l'avantage de :

- permettre facilement le transport des défauts d'un repère à un autre,
- faire l'assemblage des défauts lors de la mise en coïncidence des surfaces.

2.3.2 Représentation de la zone de tolérance 3D ISO

A la manière des domaines écarts définis par la méthode des domaines, on peut interpréter une zone de tolérance 3D dans l'espace des coefficients modaux. [Samper et al, 2007] présente un domaine modal qui correspond à l'interprétation d'une tolérance de localisation. Ce domaine modal correspond à l'ensemble des configurations qui respectent la zone de tolérance.

La prise en compte des modes de forme ne donne pas toujours un domaine modal symétrique. On peut le constater notamment dans le cas du profil avec le mode 2 d'inclinaison et le mode 3 de bombé.

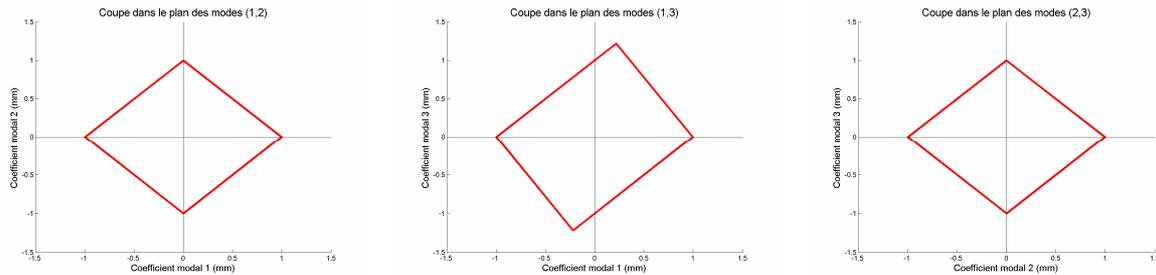


Figure 4-16 : Coupes du domaine modal dans les plans (λ_1, λ_2) , (λ_1, λ_3) et (λ_2, λ_3) pour une tolérance $t = 1\text{mm}$

Cependant, en ne considérant que les modes rigides, le domaine modal est symétrique. Le respect de la tolérance peut s'exprimer par la relation :

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq t \quad [4-26]$$

Cette relation est due aux modes rigides pour lesquels, on a :

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| = \text{Max}(|X_i|) \quad [4-27]$$

Où $\text{Max}(|X_i|)$ représente l'écart maximal par rapport à la cible.

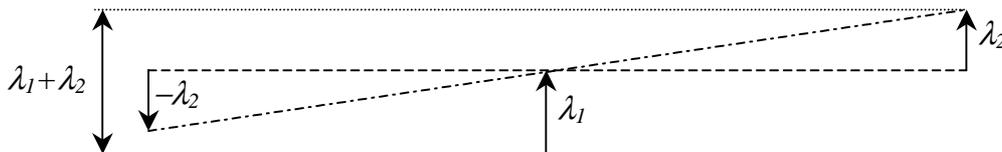


Figure 4-17 : écart maximal des modes rigides

Cette relation n'est pas vérifiée en considérant certains modes de forme, comme on peut le constater dans la coupe des modes 1 (translation) et 3 (bombé).

2.3.2.1 Notion de modes extrêmes

On présente ainsi ce qu'on nomme les modes extrêmes qui permettent de définir une relation simple d'interprétation du respect de la zone de tolérance, telle que la relation de l'équation [4-26]. De façon générale, on peut donner la définition des modes extrêmes :

Une base de défauts de forme élémentaires est appelée base extrême si pour toute recombinaison de forme comprise dans une zone de tolérance, on a :

$$\sum_i |\lambda_i| \leq t \quad [4-28]$$

Ce critère d'extrémalité peut être visualisé par un hyperdiamant (dual de l'hypercube) qui est un losange symétrique par rapport aux axes en 2D. Dans le cas de la figure 4-16, on se rend compte que le couple de modes (1,2) (translation et rotation) est extrême, alors que le couple (1,3) (translation, bombé) ne l'est pas.

Bien que nos recherches sur ce sujet soient en cours de développement, on introduit cette notion de domaine modal de tolérance associé à une zone de tolérance. Cette notion de représentation graphique de la tolérance est utile pour comparer la zone de tolérance inertielle 3D.

2.3.3 Représentation de l'inertie 3D ajustée

Cette partie constitue une discussion sur la représentation de la tolérance inertielle 3D ajustée dans l'espace des coefficients modaux. On choisit de travailler avec les défauts modaux rigides, qui sont extrêmes.

Par conséquent, ils permettent d'utiliser la relation [4-24], et simplifient la représentation du domaine dans une schématisation 2D (translation et rotation).

En considérant ces deux modes extrêmes, la relation [4-27] est valable.

Cette relation peut s'interpréter en statistique par une relation sur les moyennes et une relation sur les écarts-types sous l'hypothèse que les λ_i sont indépendants :

$$|\mu_{\lambda_1}| + |\mu_{\lambda_2}| = \text{Max}(|\mu_{x_i}|) \quad [4-29]$$

Et

$$\sigma_{\lambda_1}^2 + \sigma_{\lambda_2}^2 = \text{Max}(\sigma_{x_i}^2) \quad [4-30]$$

Ces deux relations peuvent s'interpréter directement sur l'inertie de la surface I_i . De plus en introduisant la notion d'inertie des coefficients modaux I_{λ_1} et I_{λ_2} , on peut distinguer deux cas permettant d'exprimer une relation entre l'inertie des coefficients modaux et l'inertie de la surface. On distingue ainsi deux relations permettant de différencier deux domaines inertiels modaux.

Domaine inertiel dû aux décentrages

Dans le cas de dispersion nulle, les inerties sont uniquement dues aux décentrages, avec la relation [4-29], on peut dire :

$$I_{\lambda_1}^{\delta} + I_{\lambda_2}^{\delta} = I_s^{\delta} \quad [4-31]$$

Où $I_{\lambda_i}^{\delta}$ représente l'inertie du coefficient λ_i uniquement due à son décentrage, et I_s^{δ} représente l'inertie de la surface uniquement au décentrage.

Domaine inertiel dû aux écarts-types

Et dans le cas de centrages des caractéristiques, les inerties sont uniquement dues aux écarts-types, avec la relation [4-30], on a :

$$\sqrt{I_{\lambda_1}^{\sigma^2} + I_{\lambda_2}^{\sigma^2}} = I_s^{\sigma} \quad [4-32]$$

Où $I_{\lambda_i}^{\sigma}$ représente l'inertie du coefficient λ_i uniquement due à son écart-type, et I_s^{σ} représente l'inertie de la surface uniquement à l'écart-type.

On a donc deux équations qui limitent le domaine inertiel modal en fonction de l'hypothèse retenue. On présente ces deux domaines inertiels dans la figure 4-18.

On se permet de définir un symbole permettant d'exprimer la combinaison des différentes inerties, de translation et de rotation, quelle que soit l'hypothèse considérée, décentrage pur ou dispersion pure. On définit ainsi :

$$I_{\lambda_1} \oplus I_{\lambda_2} = I_s \quad [4-33]$$

Où le symbole \oplus est emprunté entre autres au produit de convolution de loi de distribution, et que l'on lit "combiné à". Dans notre cas, comme les inerties I_{λ_1} et I_{λ_2} sont des scalaires, il n'y a pas d'ambiguïté quant à la signification du symbole. Ainsi le symbole \oplus dans notre cas désigne la combinaison des inerties des coefficients modaux selon l'hypothèse de décentrage pure, dispersion pure ou aucune hypothèse. Dans cette dernière situation, la combinaison est détaillée par l'équation [4-34].

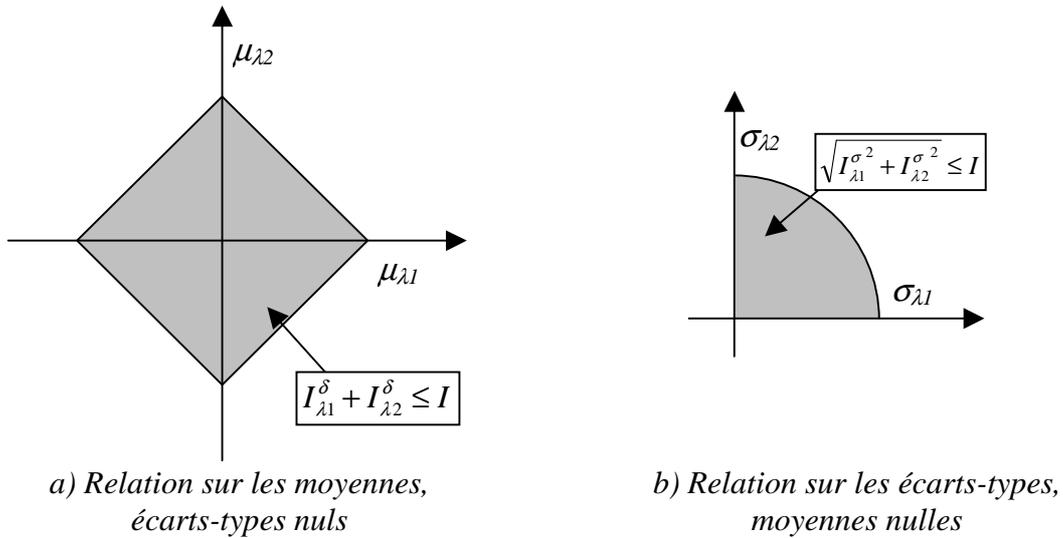


Figure 4-18 : Domaines modaux sur les moyennes et les écarts-types des coefficients

En détaillant davantage la composition de l'inertie ajustée de la surface I_i , on se rend compte que c'est la combinaison quadratique de la somme des valeurs absolues des moyennes des coefficients modaux, $\mu_{\lambda 1}$ et $\mu_{\lambda 2}$, et de la somme quadratique des écarts-types des coefficients modaux $\sigma_{\lambda 1}$ et $\sigma_{\lambda 2}$.

$$\sqrt{(|\mu_{\lambda 1}| + |\mu_{\lambda 2}|)^2 + (\sigma_{\lambda 1}^2 + \sigma_{\lambda 2}^2)} = \sqrt{\mu_{i,\lambda}^2 + \sigma_{i,\lambda}^2} = \sqrt{I_{i,s}^{\delta^2} + I_{i,s}^{\sigma^2}} = I_s \quad [4-34]$$

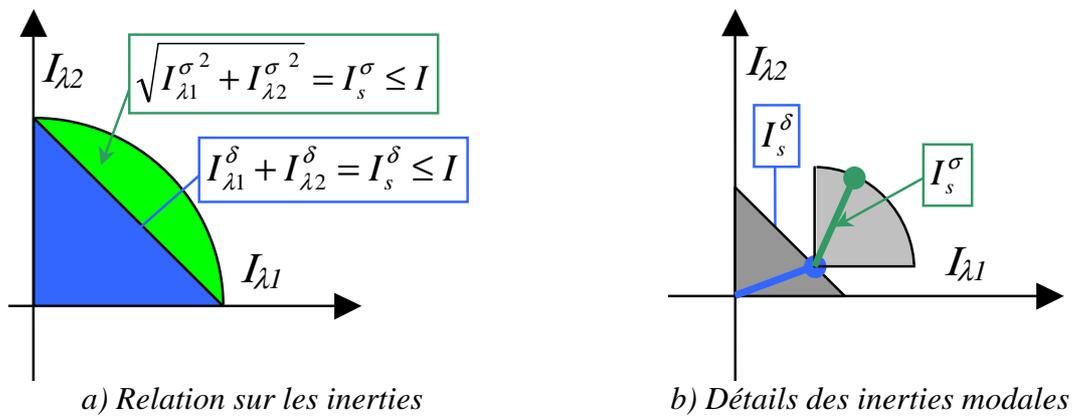


Figure 4-19 : Domaines modaux sur les inerties des coefficients

La figure 4-19 b est une vue de la combinaison des inerties des coefficients modaux, dues aux décalages et aux écarts-types avec leurs domaines de tolérance associés. Comme pour le cas de la tolérance inertielle 1D, connaissant le décentrage I_s^{δ} et l'inertie I_s , on peut calculer la tolérance restante sur l'écart-type I_s^{σ} , et vice versa, connaissant l'écart-type I_s^{σ} , on peut calculer la tolérance disponible pour le décalage I_s^{δ} . Attention cependant, à ne pas faire l'erreur de calculer l'inertie de la surface I_s par la somme vectorielle des inerties de décalage I_s^{δ} et d'écart-type I_s^{σ} .

2.3.4 Synthèse de cette partie

D'un point de vue général :

- Nous avons réussi la fusion de la méthode modale de qualification des défauts de forme avec la méthode inertielle de quantification des écarts. Ainsi, on peut obtenir l'inertie des écarts de forme à partir de la caractérisation modale du lot de défaut de forme,
- Le critère inertie classique qualifie le lot de défauts de forme dans sa globalité en moyennant les écarts de l'ensemble des points des défauts de forme. Nous conseillons son utilisation à la caractérisation de la forme uniquement,
- Le critère inertie ajustée qualifie la plus grande inertie de chaque point du lot de forme. Ce critère ne prend pas en compte le lot de défauts de forme dans sa globalité, il est donc plus restrictif que l'inertie classique. Cependant, sa définition permet d'envisager une méthode de tolérancement 3D statistique garantissant une *CF*.

Cette partie nous a également permis de faire une comparaison entre la méthode des domaines jeux et écarts liée aux torseurs de petits déplacements et la méthode modale. Ainsi, nous pouvons comparer les spécifications de tolérance de notre méthode, le tolérancement modal-inertiel, et une méthode existante et reconnue qu'est le tolérancement par les domaines jeux et écarts.

Nous montrons aussi une représentation du domaine de tolérance défini par l'inertie 3D ajustée dans l'espace des coefficients modaux. Cependant, la présentation qui en est faite dans ce document ne représente pas encore une approche aboutie. Elle mérite plusieurs études complémentaires de validation et d'interprétation qui sont planifiées pour les prochains mois au sein de notre laboratoire.

3 Proposition de tolérancement 3D inertiel

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Ce partie a pour ambition de proposer une approche de tolérancement 3D en utilisant la définition d'inertie modale. L'inertie modale est un critère de quantification des défauts de forme. C'est l'union du critère inertie de quantification des écarts et de la méthode modale de qualification des écarts de forme. L'objectif ici est d'utiliser la méthode modale inertielle de

qualification et quantification des écarts de forme présentée dans la partie 2 pour faire de la spécification de tolérance en vue de garantir une condition fonctionnelle d'un assemblage. Cette partie se décompose en deux sous-parties :

- *Dans un premier temps, on présente une discussion sur des spécifications de tolérances inertielles 3D. Par comparaison avec les tolérances actuelles 3D par zone, on définit une méthode de spécification des tolérances inertielles 3D ajustée sur les défauts de forme rigides. On discute aussi de la spécification de la tolérance des défauts de forme.*
- *Dans un second temps, on présente une approche de tolérancement inertiel 3D, les défauts de forme ne sont pas considérés. On applique la méthode sur un cas théorique d'empilage de composant comportant des bras de levier. Le fait de ne pas considérer les défauts de forme permet de comparer notre méthode à celle des domaines des composantes de torseurs de petits déplacements.*
- *On présente enfin une application du tolérancement modal inertiel sur le même cas théorique d'empilage avec bras de levier en considérant les défauts de forme. Cette dernière application est accompagnée d'une discussion.*

3.1 Spécification de tolérance modale inertielle

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Dans cette première sous-partie, nous proposons une méthode de spécification de la tolérance inertielle 3D. On se rend compte que la seule spécification par un scalaire n'est pas suffisante dans tous les cas. On propose une spécification de la tolérance inertielle de forme en deux temps :

- *Une première spécification des défauts de la surface associée par la tolérance inertielle 3D ajustée. Le but est de garantir la CF lorsque les défauts de formes ne sont pas pris en compte. On introduit ainsi une loi de spécification des composantes d'écart.*
- *La seconde spécification concerne les défauts de forme dont la tolérance inertielle peut être spécifiée de deux façons, par un scalaire représentant l'inertie ou une spécification par composantes.*

3.1.1 Sans prise en compte des défauts de forme

Pour la modélisation d'un système sans prise en compte des défauts de forme, le tolérancement différencie les défauts de position-orientation et les défauts de forme. Le découpage en deux problèmes se justifie aussi par l'hypothèse bien souvent considérée que les défauts de forme sont négligeables devant les écarts de position-orientation.

Ainsi, on développe le tolérancement inertiel en plusieurs étapes avec des phases de validation et de confrontation de la méthode à d'autres méthodes de tolérancement 3D. Bien que notre approche soit capable de tolérer et spécifier tous types de défauts, position et forme, la phase de validation se fait par la confrontation avec la méthode des domaines des torseurs de petits déplacements, donc sans prise en compte des défauts de forme. Dans le but de garantir une CF et du fait que l'on considère les modes extrêmes (rigides et taille), on choisit de travailler avec la tolérance inertielle 3D ajustée. La spécification de la tolérance inertielle 3D se fait par évolution. On ne traite que deux cas de tolérance qui sont les équivalents de la tolérance de localisation et une combinaison de la tolérance de localisation et la tolérance de parallélisme.

3.1.1.1 La localisation inertielle

L'interprétation modale de la tolérance de localisation est un losange dans l'espace des modes de translation et de rotation. Les diagonales de ce losange sont de même longueur, on accorde autant de variation sur la translation que sur la rotation.

Pour la tolérance inertielle de localisation, on accorde donc la même propriété, autant de rotation que de translation. On a donc la relation suivante qui caractérise le domaine inertiel de tolérance :

$$I_{\lambda_1} \oplus I_{\lambda_2} = I_s \leq I \quad [4-35]$$

La figure 4-20 suivante présente la comparaison des formes des domaines de tolérance traditionnelle par zone de tolérance et inertielle. C'est une comparaison qualitative, on n'a aucune correspondance entre les grandeurs des axes.

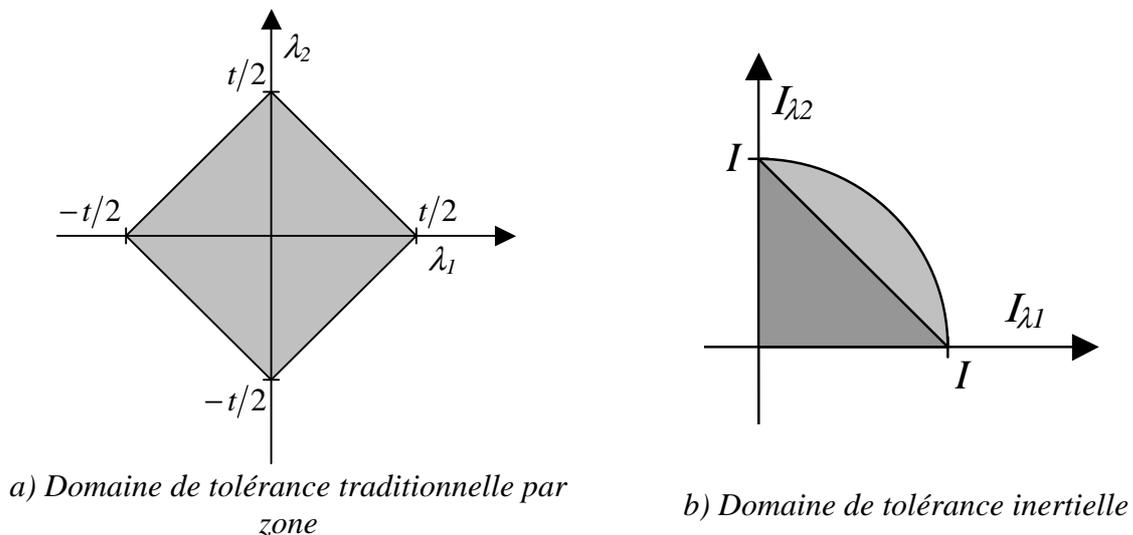


Figure 4-20 : Domaines modaux traditionnel et inertiel pour une tolérance de localisation

3.1.1.2 Combinaison inertielle de la localisation et du parallélisme

Ce paragraphe propose une expression de la tolérance inertielle 3D ajustée qui se veut l'équivalent de la combinaison de la tolérance 3D de localisation et de la tolérance de parallélisme. La tolérance de localisation est présentée dans le paragraphe 3.1.1.1 précédent. La tolérance de parallélisme quant à elle, est exprimée par deux plans parallèles limitant la rotation des défauts de position-orientation. Elle est représentée dans l'espace des modes de translation et de rotation par deux droites parallèles à l'axe des translations distantes de la valeur de la tolérance. Les translations ne sont pas tolérancées.

Dans la méthode des domaines jeu et écart, la combinaison de tolérance est une combinaison de domaine écart, qui retourne la partie commune des domaines écarts. Ainsi la combinaison d'une tolérance de localisation et d'une tolérance de parallélisme admet une variation sur la translation définie par la valeur de la localisation et une variation sur la rotation définie par la valeur de parallélisme.

Pour la tolérance inertielle de localisation, on accorde donc la même propriété : moins de rotation que de translation. On a donc la relation suivante qui combine les différentes inerties pour définir le domaine inertiel de tolérance :

$$I_{\lambda_1} \oplus \alpha_2 \cdot I_{\lambda_2} = I_s \leq I \quad [4-36]$$

Où α_2 correspond à un coefficient de majoration des écarts de rotation par rapport aux écarts de translation.

La figure 4-21 suivante présente la comparaison des formes des domaines de tolérance traditionnelle par zone de tolérance et inertielle.

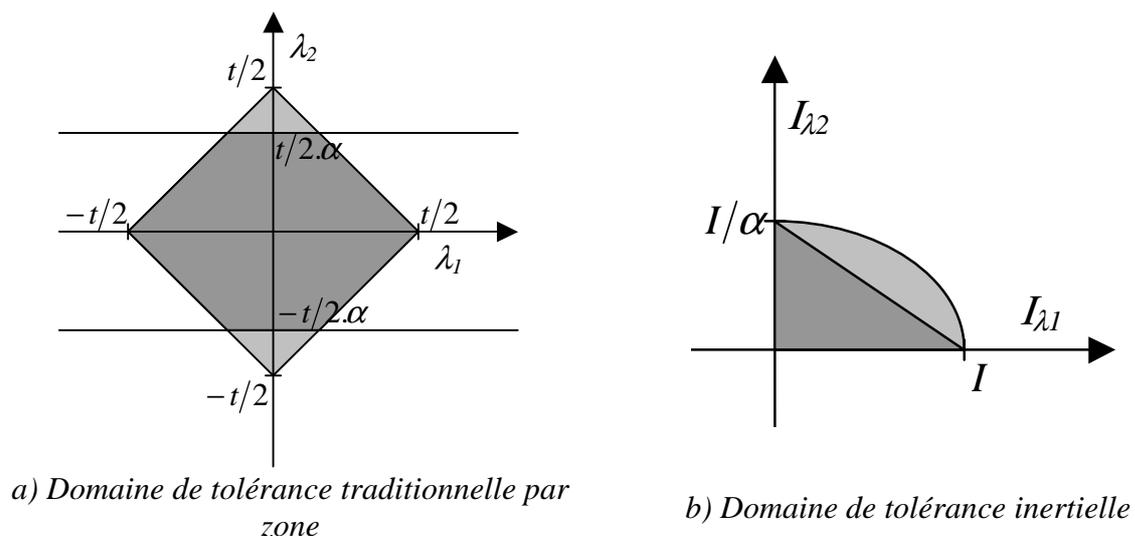


Figure 4-21 : Domaines modaux traditionnel et inertiel pour une combinaison de tolérance de localisation et de parallélisme

On arrête ici la présentation des tolérances 3D. Notre but n'est pas de présenter la liste exhaustive des tolérances inertielles 3D que nous pouvons définir. Comme le tolérancement inertiel 3D en est à ses débuts on propose une méthodologie permettant sa compréhension, et son utilisation

3.1.1.3 Loi de spécification des écarts

On se rend compte par cette dernière spécification de l'équation [4-36] que le scalaire inertie ne suffit plus à exprimer la tolérance d'un composant. Il faut préciser une loi de combinaison des inerties des coefficients modaux.

Ainsi d'une façon générale, on peut donner une valeur de tolérance inertielle 3D ajustée spécifiée par un scalaire I , que l'on accompagne d'une loi de spécification. Dans notre cas d'exemple de tolérancement du profil 2D, la base de défauts extrêmes se compose de deux modes, la translation et la rotation. Dans ce cas, on peut envisager d'exprimer la combinaison de la tolérance de localisation et de parallélisme par un scalaire I et la loi de spécification.

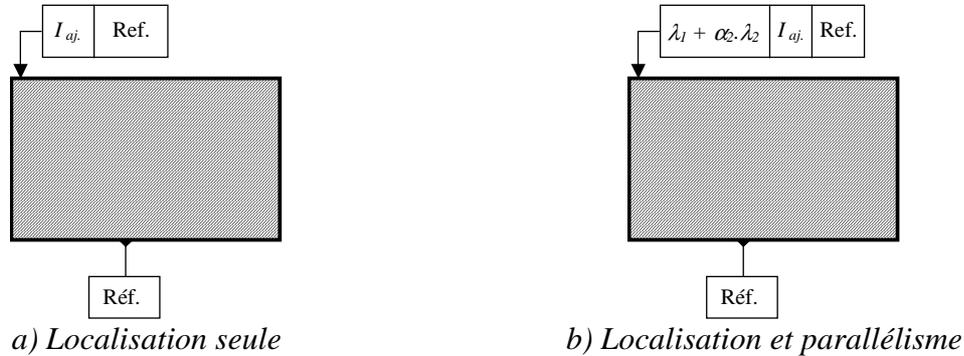


Figure 4-22 : Exemple de spécification de tolérance 3D inertielle

La loi de spécification peut être exprimée comme la combinaison des coefficients modaux λ_i majorés de leurs coefficients de majoration α_i . L'annotation $I_{aj.}$ précise qu'on utilise l'inertie 3D ajustée. Cette loi de combinaison n'est qu'une proposition mais l'idée est présente. La tolérance serait plus explicite en spécifiant les composantes du torseur de petits déplacements.

3.1.2 Prise en compte des défauts de forme

Le tolérancement 3D avec prise en compte des défauts de forme est plus délicat que le tolérancement rigide par les formes associées. En effet, la prise en compte des défauts de forme lors de l'assemblage modifie la mise en position d'un composant sur l'autre par rapport à leur mise en contact sur les surfaces associées, voir le paragraphe 4.3 du chapitre 3 (page 136).

On divise la problématique du tolérancement avec défaut de forme en deux étapes :

- le tolérancement des défauts rigides proposé dans le paragraphe 3.1.1,
- le tolérancement des défauts de formes.

Nous traitons ainsi deux solutions de tolérancement inertielle 3D à appliquer aux défauts de forme :

- une première simple et rapide qui consiste à spécifier la tolérance par une simple inertie,
- une autre qui consiste à utiliser une loi de spécification des écarts déjà introduite au paragraphe 3.1.1.3.

Notre recherche sur le tolérancement des défauts de forme dans le tolérancement 3D d'un système réclame des études complémentaires. Nous justifions ce point par un manque de recul sur cette problématique et la récente mise en place de l'outil de simulation des assemblages avec défaut de forme proposé au chapitre 4.

Il nous faut simuler et expérimenter l'influence des défauts de forme sur les écarts de mise en position, mais aussi recueillir et analyser des problématiques industrielles qui nous permettront alors d'évoluer dans la discussion du tolérancement 3D inertielle des défauts de forme.

3.1.2.1 Tolérance inertielle scalaire

La solution la plus simple consiste à définir une tolérance inertielle scalaire que les défauts de forme ne doivent pas excéder. Une fois la valeur de cette inertie de forme définie, il reste à choisir le critère d'inertie à appliquer, inertie 3D classique ou ajustée.

Pour rester dans l'esprit du tolérancement inertiel de Pillet, on choisit l'inertie 3D classique qui a pour avantage de considérer le défaut de forme dans sa globalité.

On peut aussi choisir le critère inertie 3D ajustée. On est dans ce cas plus sévère quant à la dimension de l'écart maximal admissible sur le défaut de forme. Cependant, on encadre l'inertie maximale de chaque point du défaut de forme. Cette approche peut se comparer à celle présentée par [Ameta et al, 2007] sur la méthode des T-Maps qui considère une zone de tolérance supplémentaire pour contrôler le défaut de forme. Dans ce cas, on n'autorise pas la compensation d'un défaut par l'autre, on ajoute leurs conséquences. Cette hypothèse peu probable (approche au pire des cas étendue au défauts de forme) est pénalisante.

3.1.2.2 Loi de spécification

Une autre méthode de tolérancement des défauts de forme peut être l'utilisation d'une loi permettant de spécifier les défauts de forme plus ou moins admissible. Comme pour le paragraphe précédent, on se pose la question du choix du critère d'inertie, 3D classique ou ajustée ?

On justifie le choix de l'utilisation d'une loi de spécification par un exemple.

Reprenons le cas d'exemple de l'empilage de composant présenté à la figure 4-13. On peut considérer que tous les défauts de forme sont admissibles dans une certaine mesure, à l'exception du mode 3 de bombé. En effet, si les surfaces des deux composants ont ce défaut de forme, l'assemblage possèdera une instabilité de mise en position en fonction de la position de l'effort de pose.

On peut donc affecter un important coefficient de majoration pour ce défaut élémentaire. On peut même pousser la réflexion plus loin, en considérant que ce défaut de forme est plus gênant dans le sens maximum matière, alors que dans le sens minimum matière, il peut permettre d'absorber les autres défauts de forme.

3.1.2.3 Discussion

On vient de voir qu'il existe plusieurs façons de spécifier les défauts de forme. Nous manquons de cas d'application et donc d'expertise quant à l'utilisation en statistique de notre outil d'assemblage des défauts de forme. Cependant pour un expert, la piste que nous évoquons sur la spécification de la tolérance par une loi peut être intéressante. Elle peut mener dans le cas d'exemple que nous citons, à préciser le besoin. Dans le cas courant, on préconise l'utilisation d'un simple scalaire accompagné de la tolérance inertielle classique.

3.2 Application du tolérancement 3D inertiel sans défaut de forme

OBJECTIF DE CETTE PARTIE

Cette partie est une mise en application du concept de tolérancement inertiel 3D sur un cas théorique. Le but est de tester la méthode de tolérancement statistique que l'on propose et de la comparer à une méthode existante et éprouvée qu'est la méthode des domaines jeux et écarts. La comparaison des méthodes se fait aussi bien sur les variabilités permises sur les composants que sur la résultante de l'assemblage. Afin de pouvoir comparer les méthodes cette partie ne traite pas les défauts de forme, on considère les géométries parfaites ne comportant que des écarts de position-orientation.

Cette partie se présente en plusieurs sous-parties :

- *Dans un premier temps, on présente le cas d'application théorique, un assemblage de trois composants comportant des bras de levier. On présente en même temps le tolérancement par la méthode des domaines. Les tolérances 3D sont représentées dans l'espace des modes pour servir de base de comparaison.*
- *Dans un second temps, on applique le tolérancement inertiel 3D. On calcule ainsi les tolérances des composants que l'on compare au domaine de tolérance de la méthode des domaines.*
- *La troisième partie présente la méthode de simulations que l'on utilise. Les résultats des simulations d'assemblage sont comparés au domaine de tolérance de la condition fonctionnelle. On teste différentes hypothèses de simulations permettant d'évaluer des configurations défavorables.*

Avant de commencer l'étude du tolérancement du cas d'assemblage avec bras de levier, on tient à présenter et discuter un premier cas de tolérancement inertiel 3D paru dans [Adragna et al, 2007 b].

3.2.1 Tolérancement inertiel d'un empilage de cinq composants

Un premier cas d'application du tolérancement inertiel 3D a été présenté dans [Adragna et al, 2007 b]. Il s'agit d'un simple empilage de cinq composants. Le problème est traité en 2D, en ne considérant que le défaut de translation et un défaut de rotation. La condition fonctionnelle est une localisation de la surface supérieure de l'assemblage par rapport à la surface A.

Cet empilage simple pourrait être considéré comme un cas unidimensionnel ne nécessitant pas de tolérancement 3D. Dans ce cas, les défauts de rotation ont la même influence que les défauts de translation. Cependant, nous pensons qu'il est néanmoins intéressant à traiter comme un premier cas d'application du tolérancement inertiel 3D. Nous montrerons que même dans ce cas simple, l'approche statistique traditionnelle offre beaucoup de configurations à risque pour lesquelles la *CF* n'est pas respectée. Le tolérancement inertiel est plus efficace pour garantir une *CF* dans toutes les configurations des composants, car il prend en compte et pénalise le décentrage.

Les simulations faites sur ce premier cas d'application ont permis de vérifier que, dans le cas centré, l'inertie 3D ajustée autorise plus de variabilité sur les composants que le tolérancement au pire des cas. Et dans les configurations très décentrées ou très faiblement dispersées, les deux limites semblent similaires.

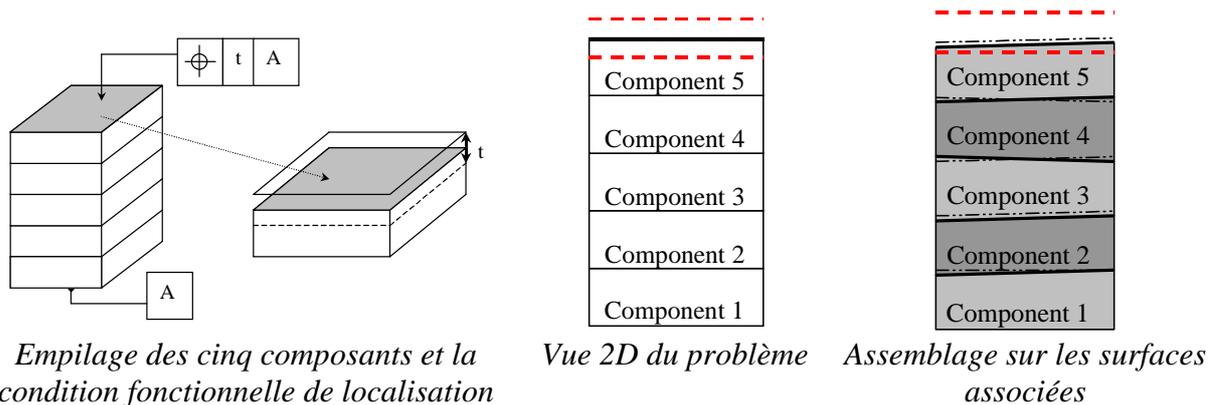


Figure 4-23 : Cas simple d'empilage de cinq composants, problème 2D

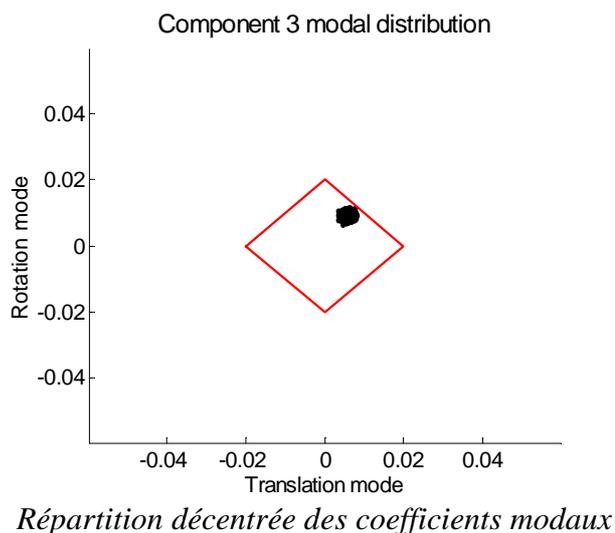
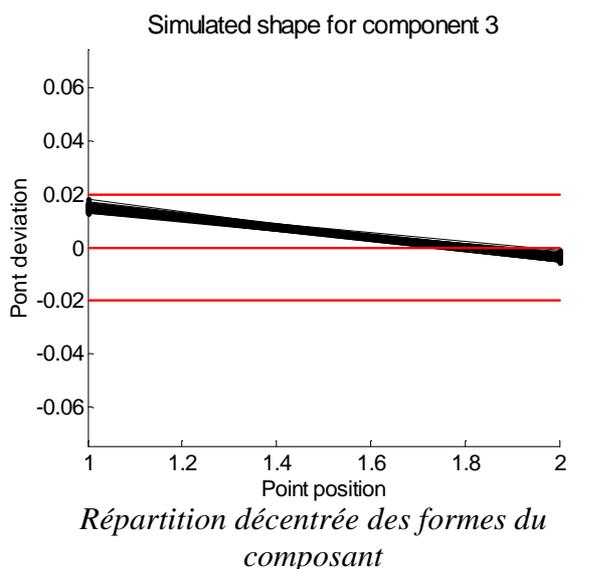
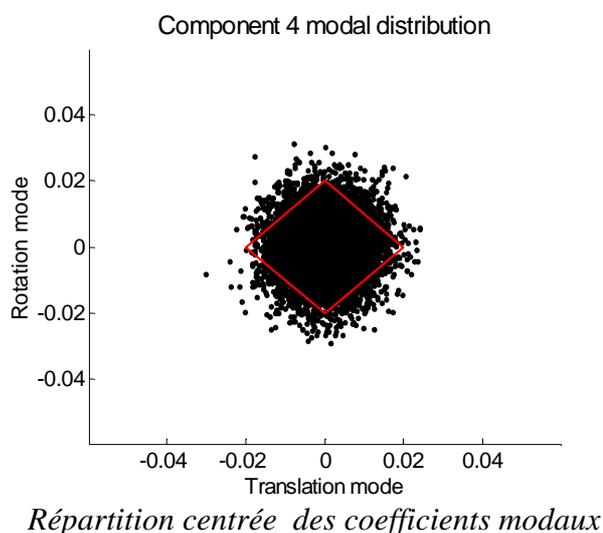
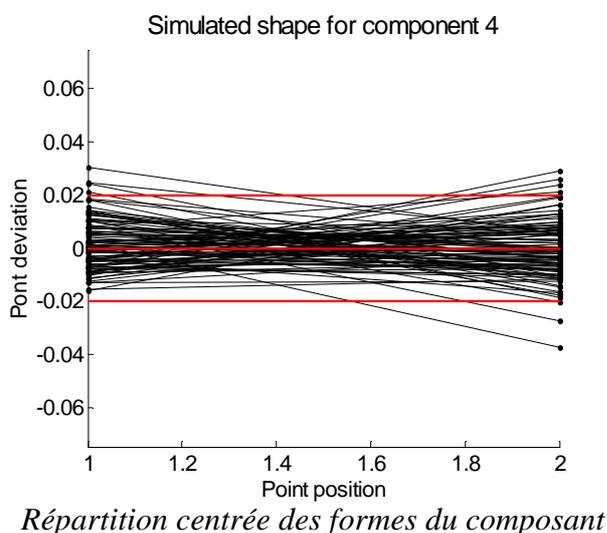


Figure 4-24 : Les configurations acceptables en inertie 3D ajustée, centrée et décentrée

La figure 4-24 ci-dessus est une comparaison des tolérances 3D inertielles et pire des cas.

Les résultats des simulations sur ce premier cas d'application sont convaincants. Sans précaution particulière, en considérant un indice de capabilité inertiel de base, $C_{pi} = 1$, dans le cas centré, le TNC est très faible. En revanche, les simulations sous l'hypothèse de cas défavorables, tous les décentrages du même coté, donnent un TNC plus élevé. Cependant, cette valeur reste faible par rapport à la valeur maximale que l'on peut atteindre en 1D sous les mêmes hypothèses.

En imposant un indice de capabilité arbitraire à $C_{pi} = 1,25$, le TNC dans obtenu pour les simulations en cas défavorable est à nouveau contrôlé.

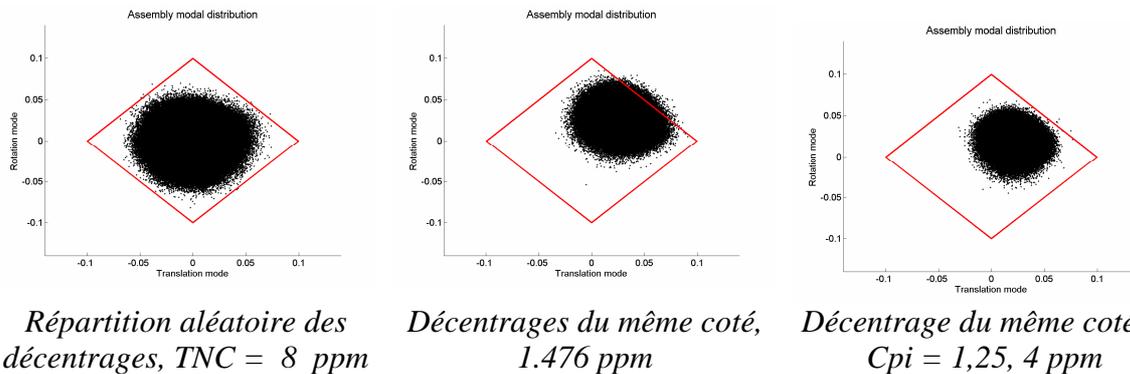


Figure 4-25 : Résultat des simulations

[Germain, 2007] montre l'intérêt du tolérancement statistique dans le tolérancement 3D. Notre simulation confirme ses travaux mais notre approche va plus loin en considérant les décalages. Bien que cette première application du tolérancement inertiel 3D soit simple, les résultats obtenus nous confortent dans le choix de l'application du critère inertie au tolérancement 3D.

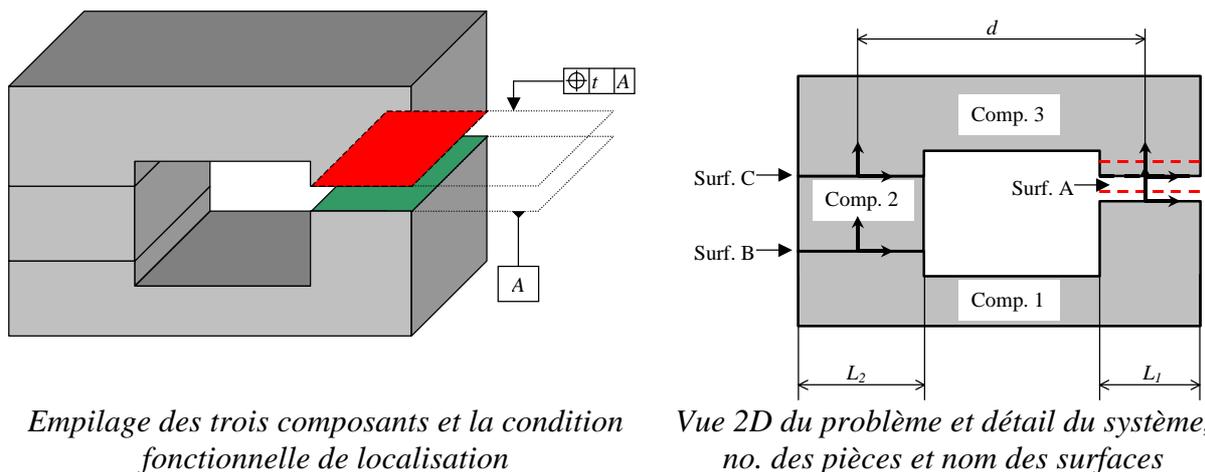
On se rend compte que l'aspect aléatoire de la combinaison des décentrages est encore plus forte dans le tolérancement 3D. Bien que la plus mauvaise configuration n'ait pas encore été identifiée, on pressent qu'elle est la combinaison de configuration particulière sur chaque composant.

3.2.2 Cas d'application avec bras de levier et tolérancement 3D au pire des cas

Cette partie présente le cas d'application théorique qui sert à tester la méthode de tolérancement inertiel 3D sur un assemblage avec bras de levier. On traite également du tolérancement actuel 3D au pire des cas. Ce tolérancement 3D par zone de tolérance est représenté dans l'espace des modes rigides pour servir de base de comparaison.

3.2.2.1 Empilage de trois composants avec bras de levier

Nous étudions ici un cas d'application d'assemblage de composants comportant des bras de leviers. Le choix d'un tel système assemblé permet de rester simple dans le tolérancement du mécanisme tout en augmentant la complexité par rapport au cas du paragraphe 3.2.1.



Empilage des trois composants et la condition fonctionnelle de localisation

Vue 2D du problème et détail du système, no. des pièces et nom des surfaces

Figure 4-26 : Empilage de trois composants avec bras de levier, problème 2D

3.2.2.2 Tolérancement 3D au pire des cas

Le tolérancement 3D au pire des cas est assez simple dans cet exemple. La figure 4-28 suivante présente notre proposition de tolérancement pour ce mécanisme. La solution est discutable mais elle nous permet d'utiliser les tolérances de localisation et parallélisme définies dans ce chapitre 4.

Description du système par les graphes

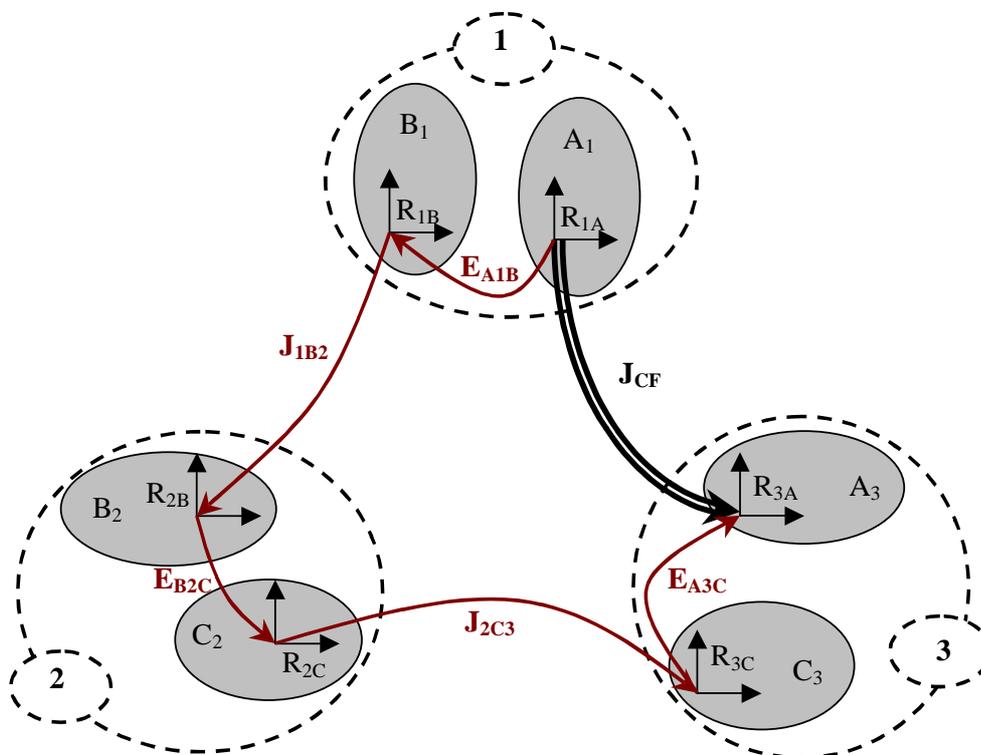


Figure 4-27 : Graphe des liaisons du mécanisme

Dans le graphe de la figure 4-27 on retrouve le nom des surfaces des composants et la désignation des jeux où écarts entre ces différentes surfaces.

Tolérancement qualitatif

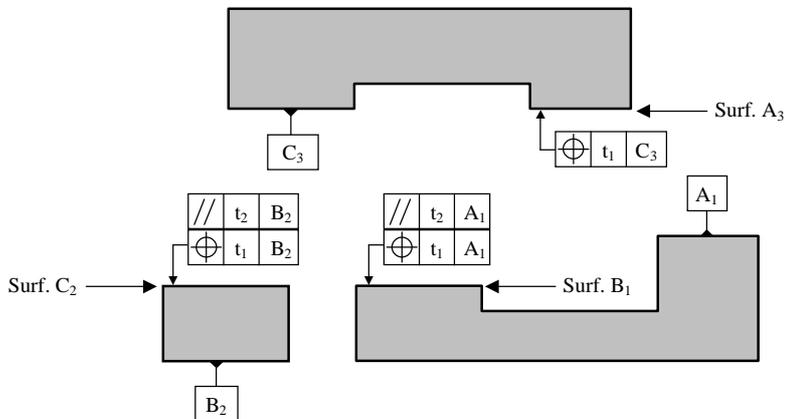
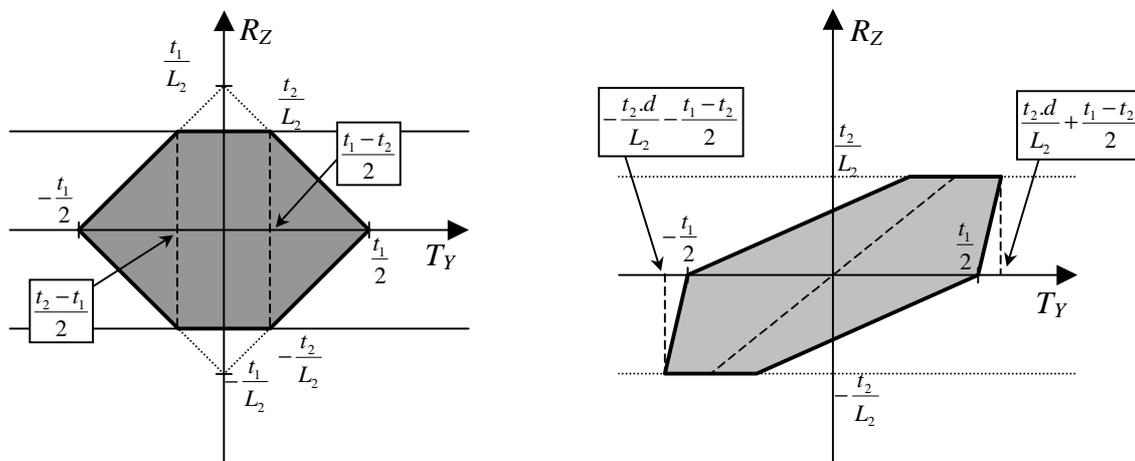


Figure 4-28 : Tolérance 3D qualitatif par zone

Les domaines de tolérance exprimés par les tolérances 3D peuvent être représentés comme suit :



a) Domaine de tolérance au centre des surfaces B₁ et C₂

b) Domaine de tolérance décalé au centre de la surface CF

Figure 4-29 : domaines modaux traditionnels exprimés au centre de leurs surfaces d'application puis au centre de la surface fonctionnelle

Assemblage des domaines écarts

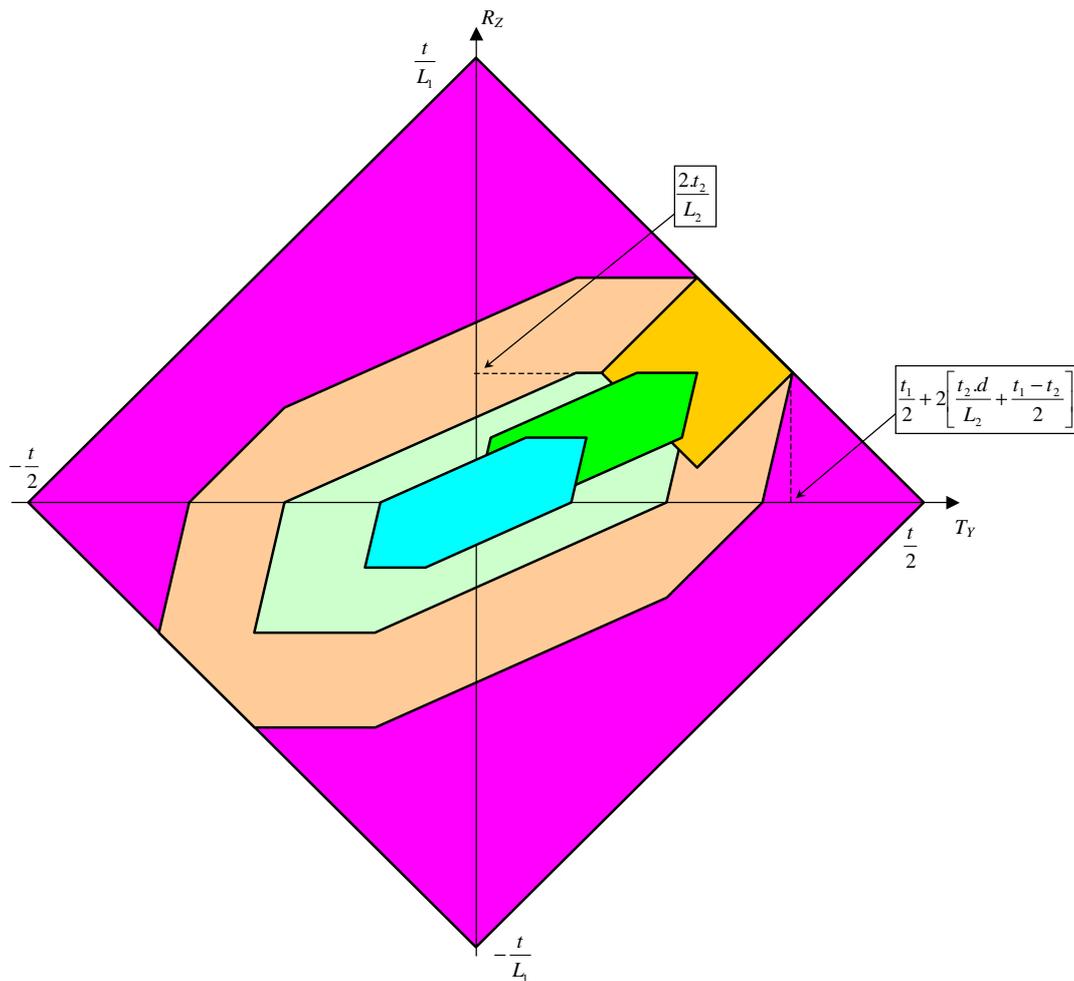


Figure 4-30 : Somme de Minkowski des domaines de tolérances des composants

Tolérancement quantitatif

La frontière du domaine de tolérance *CF* est définie par l'équation :

$$\left| R_z \cdot \frac{L_1}{2} \right| + |T_y| = \frac{t}{2} \quad [4-37]$$

D'où on tire la relation suivante pour le point d'intérêt :

$$t_2 \cdot \frac{L_1}{L_2} + \frac{t_1}{2} + 2 \cdot \left[\frac{t_2 \cdot d}{L_2} + \frac{t_1 - t_2}{2} \right] = \frac{t}{2} \quad [4-38]$$

Il faut maintenant choisir le ratio α entre la tolérance de localisation et la tolérance de parallélisme. On ne cherche pas à faire d'optimisation sur la valeur du ratio α pour augmenter l'étendue du domaine résultant par rapport au domaine de la *CF*.

On choisit une valeur arbitraire $\alpha = 2$, ce qui donne la tolérance unitaire t_u telle que :

$$t_u = t_2 = \frac{t_1}{2} \quad [4-39]$$

D'où la relation [4-38] devient :

$$t_u \cdot \frac{L_1}{L_2} + t_u + 2 \cdot \left[\frac{t_u \cdot d}{L_2} + t_u - \frac{t_u}{2} \right] = t_u \cdot \frac{L_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot L_2}{L_2} = \frac{t}{2} \quad [4-40]$$

On a enfin la relation sur la tolérance unitaire :

$$t_u = \frac{t \cdot L_2}{2 \cdot (L_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot L_2)} \quad [4-41]$$

D'où la valeur de la tolérance de localisation :

$$t_1 = \frac{t \cdot L_2}{L_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot L_2} \quad [4-42]$$

Et la valeur de la tolérance de parallélisme :

$$t_2 = \frac{t \cdot L_2}{2 \cdot (L_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot L_2)} \quad [4-43]$$

3.2.3 Tolérancement inertiel 3D du cas d'application avec bras de levier

Il n'existe pas de méthodologie prédéfinie pour le tolérancement inertiel 3D. Par conséquent, on propose une première approche simpliste qui consiste à considérer la tolérance de localisation et la tolérance de parallélisme comme deux tolérances indépendantes, ce qu'on considère équivalent à deux chaînes de cote indépendantes.

Une seconde approche est aussi proposée au paragraphe 3.2.3.2 comme une ouverture sur le tolérancement statistique 3D.

3.2.3.1 Approche simple : relations indépendantes

Cette partie propose une approche simple du tolérancement inertiel 3D. La méthode consiste à considérer autant de relation indépendante que de natures de paramètre à tolérer.

Dans notre cas, nous devons tolérer les translations et rotations, soit 2 paramètres de natures différentes. On propose donc de faire deux chaînes de cote, une première qui ne considère que les écarts de translation, et une seconde ne considérant que les écarts de rotation. Le couplage des deux défauts étant pris en compte dans la tolérance inertielle 3D, le tolérancement devrait être efficace.

Chaîne de cote des translations

Cette partie traite de la tolérance équivalente à la localisation en ne considérant que les défauts de translations. La réflexion se fait sur les coefficients modaux, on a alors la relation :

$$\lambda_{1,B} + \lambda_{1,C} + \lambda_{1,A} = \delta_{Max} \quad [4-44]$$

La relation ci-dessus est la chaîne de cote des translations. Où $\lambda_{1,A}$, $\lambda_{1,B}$ et $\lambda_{1,C}$ représente les composantes modales de translation des tolérances sur les surfaces A, B et C respectivement. $\lambda_{1,CF}$ correspond au coefficient modal de translation de la CF résultant de l'assemblage. On choisit une iso-répartition des tolérances, on a donc $\lambda_{1,A} = \lambda_{1,B} = \lambda_{1,C} = \lambda_1$. D'où la relation [4-43] peut s'écrire :

$$3 \cdot \lambda_1 = \delta_{Max} \quad [4-45]$$

On cherche à garantir dans le cas centré que six écarts-types du décentrage résultant, $\lambda_{I,CF}$, sont contenus dans la tolérance de la *CF* t . Le tolérancement inertiel de cette chaîne de cote donne alors la tolérance inertielle de translation modale des composants.

$$I_{\lambda 1} = \frac{t}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad [4-46]$$

Chaîne de cote des rotations

Cette partie traite de la tolérance équivalente au parallélisme en ne considérant que les défauts de rotation. On a ainsi la relation suivante :

$$2 \cdot \frac{\lambda_{2,B}}{L_2} \cdot \left(d + \frac{L_1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{\lambda_{2,C}}{L_2} \cdot \left(d + \frac{L_1}{2} \right) + \lambda_{2,A} = \delta_{Max} \quad [4-47]$$

Comme la surface A est tolérancée par une localisation, on a $\lambda_{I,A} = \lambda_{2,A}$, la tolérance est définie par la précédente chaîne de cote de translation. De plus, en gardant le ratio imposé dans la partie 3.2.2.2 entre la tolérance de localisation et la tolérance de parallélisme, on a :

$$I_{\lambda 1} = 2 \cdot I_{\lambda 2} \quad [4-48]$$

Dans cette chaîne de cote, on utilise donc les indices de faisabilité, tels que :

$$\begin{aligned} \beta_A &= 2 \\ &et \\ \beta_B &= \beta_C = 1 \end{aligned} \quad [4-49]$$

Et les coefficients d'incidences de cette chaîne de cote sont tels que :

$$\begin{aligned} \alpha_A &= 1 \\ &et \\ \alpha_B &= \alpha_C = \frac{2 \cdot d + L_1}{L_2} \end{aligned} \quad [4-50]$$

On détermine ainsi les tolérances inertielles des composantes modales de rotations par :

$$I_{\lambda 2,i} = \frac{\beta_i \cdot t}{6 \cdot \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \cdot \beta_i^2}} \quad [4-51]$$

Avec $i = A, B$ ou C , ainsi que les coefficients d'incidence α_i et les indices de faisabilité β_i définis précédemment.

Choix des tolérances

Ces deux parties présentent deux chaînes de cote qui nous donnent les tolérances des composantes modales de translation et de rotation. Dans le paragraphe 3.2.6 de ce chapitre nous considérons que les tolérances de chaque composantes définissent la loi de combinaison. Cependant dans ce paragraphe les tolérances ne sont pas indépendantes car on impose un ratio entre la tolérance de parallélisme et de localisation, il faut donc choisir les valeurs de tolérance qui avec la loi de combinaison respecte la *CF*.

Dans le but de respecter la *CF*, il faut sélectionner les tolérances qui garantissent le respect des deux chaînes de cotes. Par défaut, on choisit donc les plus petites tolérances pour les différents composants.

Les tolérances des surfaces B et C sont similaires :

$$I_C = I_B = \text{Min} \left(\left| \begin{array}{l} 2.I_{\lambda_{2,B}} \\ I_{\lambda_{2,B}} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} I_{\lambda_{1,B}} \\ I_{\lambda_{1,B}}/2 \end{array} \right| \right) \quad [4-52]$$

Et de même pour la surface A :

$$I_A = \text{Min} \left(\left| \begin{array}{l} I_{\lambda_{2,A}} \\ I_{\lambda_{2,A}} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} I_{\lambda_{1,A}} \\ I_{\lambda_{1,A}} \end{array} \right| \right) \quad [4-53]$$

On définit ainsi les tolérances inertielles 3D.

Discussion

La spécification des tolérances que l'on propose dans les équations [4-52] et [4-53] sont différentes de celle proposée dans la partie 3.1.1.3. Les deux équations proposent une spécification de la tolérance 3D inertielle par une spécification des tolérances sur chaque composante. Alors que la spécification de la tolérance 3D inertielle dans la partie 3.1.1.3 propose une inertie unique accompagnée d'une loi de spécification de la combinaison des inerties de chaque composante. Cependant, les résultats de ces deux approches sont identiques car les inerties sont combinées de la même manière.

Les relations indépendantes des chaînes de cotes, de translation et de rotation, peuvent être exprimées différemment. En effet, les chaînes de cote présentées lient les défauts de forme à une caractéristique qui est l'écart maximal engendré. Or, on peut envisager de lier les défauts de forme élémentaires, translation et rotation, aux défauts de forme élémentaire de la CF. On construit ainsi ce qu'on appelle une matrice d'influence qui lie les défauts de forme élémentaires des composants aux défauts de forme élémentaires de la CF. Dans notre cas, on obtient alors deux matrices d'influence :

- une liant l'influence de la composante de translation des composants,
- et une autre liant la composante de rotation des composants à la CF.

Matrice d'influence des composantes modales de translation :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,CF} \\ \lambda_{2,CF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{1,A} \\ \lambda_{1,B} \\ \lambda_{1,C} \end{bmatrix} \quad [4-54]$$

Matrice d'influence des composantes modales de rotation :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,CF} \\ \lambda_{2,CF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2.d}{L_2} & \frac{2.d}{L_2} \\ 1 & \frac{L_1}{L_2} & \frac{L_1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{2,A} \\ \lambda_{2,B} \\ \lambda_{2,C} \end{bmatrix} \quad [4-55]$$

L'exigence de la CF est une tolérance sur la combinaison des composantes de la CF. On retrouve ainsi nos deux relations indépendantes que sont les chaînes de cote des équations [4-44] et [4-47].

3.2.3.2 Discussion et autre une méthode envisageable

La proposition de tolérancement inertiel par chaîne de cote indépendante ne nous satisfait pas complètement. On présente donc une discussion sur cette méthode de tolérancement ainsi que la proposition d'une autre méthode de tolérancement que l'on envisage.

Discussion sur le tolérancement par chaîne de cote indépendante

Cette partie est une discussion sur le calcul des tolérances inertielles 3D par chaînes de cotes indépendantes.

Comme pour le tolérancement 3D au pire des cas, on peut discuter de la valeur du ratio α entre la tolérance de localisation et la tolérance de parallélisme. Plusieurs critères d'optimisation peuvent être envisager.

- Le critère le plus simple est de maximiser les deux tolérances inertielles, de localisation et de parallélisme.
- Un autre critère peut consister à calculer le domaine résultant de l'assemblage des domaines inertiels dus au décentrage pur ou des domaines inertiels dus à la dispersion pure ou une combinaison des deux domaines résultants. Comme pour le cas du 3D pire des cas, on maximise ensuite l'étendue du domaine.

Ces points n'ont pas été abordés dans nos travaux mais ils font partis des perspectives à suivre.

Autre méthode de tolérancement, par les ellipses

Cette partie discute d'une autre approche du tolérancement inertiel 3D pouvant être comparée à la méthode 3D au pire des cas à la différence près qu'on ne travaille pas au pire des cas sur les décentrages.

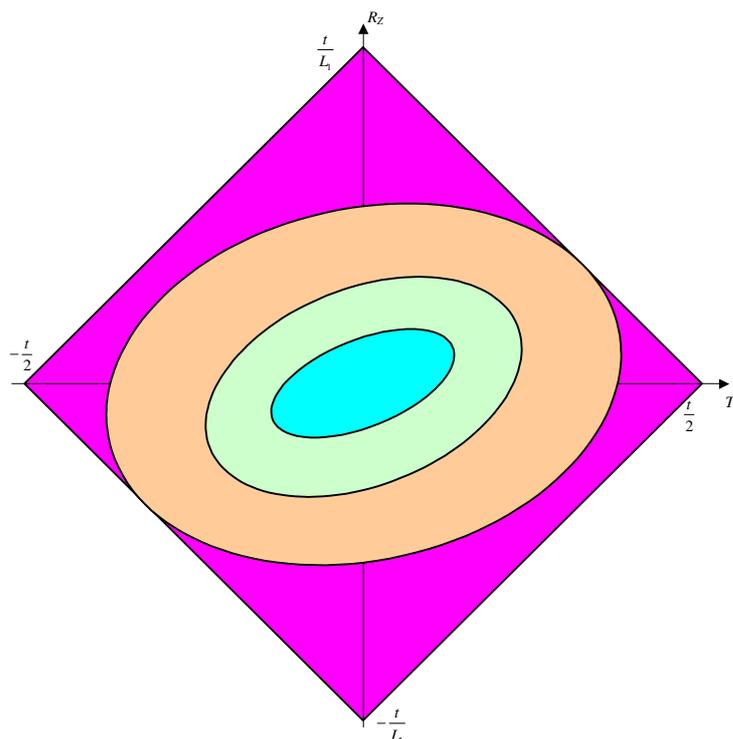


Figure 4-31 : Somme des domaines de tolérances inertielles centrées des composants

Notre objectif n'est pas tant de faire entrer la combinaison des plus mauvais décentrages dans le domaine de la *CF* mais de combiner les domaines de tolérances uniquement dus aux dispersions. On considère comme dans le cas 1D des répartitions à six écarts-types, par exemple. Puis on identifie sur le domaine résultant les points, qui caractérisent une configuration particulière, pour laquelle la *CF* est le moins bien respectée.

Cela revient à identifier la plus mauvaise configuration, sous l'hypothèse de covariance nulle dans la figure 4-31. On applique ensuite le tolérancement inertiel dont le but est de garantir la CF pour cette configuration, la méthode peut être comparée à celle développée pour le 1D.

3.2.4 Comparaison des tolérancements 3D au pire des cas et inertiel sur le cas d'application

Cette partie présente une simulation analytique du tolérancement inertiel 3D. Les tolérances des composants ainsi que les résultats des simulations d'assemblage sont comparés à la méthode de tolérancement au pire des cas.

Comme pour le cas du tolérancement du système simple défini par l'empilage de cinq composants, on réalise trois simulations :

- une première simulation d'assemblage où les décentrages sont répartis uniformément sur les caractéristiques des composants (translation et rotation),
- une seconde ne considérant que des décentrages du même coté, le but est de tester une configuration défavorable,
- et la dernière simulation dans une configuration défavorable mais en utilisant un indice de capabilité C_{pi} supérieur à 1.

3.2.4.1 Le cas d'application et comparaison des valeurs de tolérance

Cette partie correspond à l'application numérique des paragraphes 3.2.2.2 et 3.2.3.1 sur le cas d'application. Le cas d'application possède trois cotes importantes dans le tolérancement du mécanisme :

- La longueur de la surface fonctionnelle A , $L_1 = 100\text{mm}$,
- La longueur des surfaces de contact B et C , $L_2 = 80\text{mm}$,
- La longueur du bras de levier entre les centres des surfaces B et C et la surface fonctionnelle A , $d = 220\text{mm}$.
- La condition fonctionnelle du mécanisme est une tolérance de localisation de $t = 0,2\text{ mm}$.

Avec ces caractéristiques du mécanisme on trouve les tolérances suivantes :

- Le tolérancement 3D au pire des cas donne une tolérance de localisation $t_1 = 0,0229\text{ mm}$, et une tolérance de parallélisme $t_2 = 0,0114\text{ mm}$ pour les composants 1 et 2,
- Le tolérancement 3D inertiel donne une tolérance inertielle sur les écarts de translation $I_1 = 0,0068\text{ mm}$, et une tolérance inertielle des écarts de rotation $I_2 = 0,0034\text{ mm}$ pour les composants 1 et 2. On a donc une tolérance inertielle $I = 0,0068\text{ mm}$ avec une loi de combinaison $I = I_{\lambda_1} \oplus I_{\lambda_2}$ pour le composants 3 et $I = I_{\lambda_1} \oplus 2.I_{\lambda_2}$ pour les composants 1 et 2.

3.2.4.2 Discussion sur le gain en tolérance

En cherchant à comparer, dans le cas centré, comme l'inertie combine les écarts des deux paramètres, l'inertie équivalente de la méthode Germain est alors définie par la combinaison des écarts-types sur chaque axe. Pour une configuration centrée et équi-réparti (dispersion maximale sur chaque composante), l'inertie équivalente est calculée via la loi de combinaison des inerties $I = I_{\lambda_1} \oplus 2.I_{\lambda_2}$ pour les composants 1 et 2. Ainsi on obtient pour des écarts-types donnés à $6.\sigma$ dans la tolérance sur chaque axe : une inertie de localisation équivalente ($I = I_{\lambda_1} \oplus I_{\lambda_2}$) $I_{eq} = 0,0054$, et ($I = I_{\lambda_1} \oplus 2.I_{\lambda_2}$) $I_{eq} = 0,0054$ pour la combinaison de localisation et parallélisme. D'où le gain du tolérencement inertiel dans le cas centré est de 26% dans ce choix de tolérance. Le gain obtenu dans la partie 3.2.6 sur un cas 3D sans imposé de restriction est plus important.

3.2.5 Simulations d'assemblage

Dans un premier temps, la méthode de Germain est étudiée, et une extension de son principe est développée.

Dans un second temps, les résultats des simulations de Monté Carlo permettent d'analyser la méthode de tolérancement inertiel 3D selon différentes hypothèses.

Chaque étude présente les domaines de tolérances des composants ainsi que le tirage de MC des composants. Sur chaque graphique des résultats de la simulation, le domaine résultant du tolérancement 3D au pire des cas est affiché.

Nous utilisons un tirage de Monté Carlo de 10000 assemblages. Afin d'avoir une meilleure évaluation du *TNC*, on propose de répéter 100 fois la simulation pour obtenir au final 1000000 d'assemblages simulés. On définit ainsi une simulation long terme permettant d'obtenir un second *TNC* comme un *TNC* à long terme, noté *TNC_{LT}*.

3.2.5.1 Tolérancement 3D au pire des cas et effet de bord

La réflexion de F.Germain montre que le tri à 100% des pièces hors du domaine de tolérance des composants n'est pas nécessaire. La constatation de F. Germain sur les effets de bord du tolérancement 3D au pire des cas [Germain et al, 2007] est appliquée sur notre cas d'exemple à bras de levier. Nous considérons cette approche comme le tolérancement statistique 3D de référence.

Les tolérances des composants sont calculées dans le paragraphe 3.2.2.2. Germain propose de considérer un nuage de points répartis suivant une loi multi-normale. Il considère des indices de capacité $C_p = 1$ sur chaque composante des tolérances. En raison du type de distribution, des composants sont hors du domaine de tolérance mais en faible nombre. C'est ce qu'il appelle l'effet de bord.

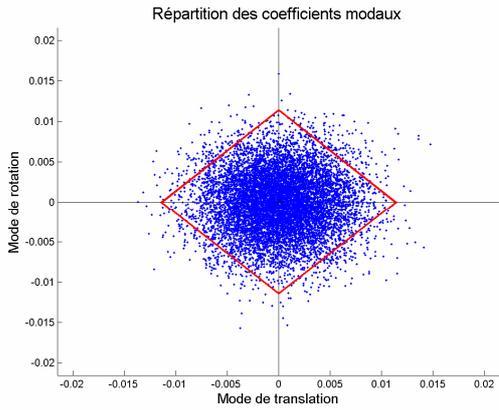
Cas centré

La figure 4-32 montre les domaines de tolérance des trois composants de l'assemblage ainsi que les répartitions statistiques des composants dans les domaines. Les caractéristiques des composants sont centrées sur leurs cibles.

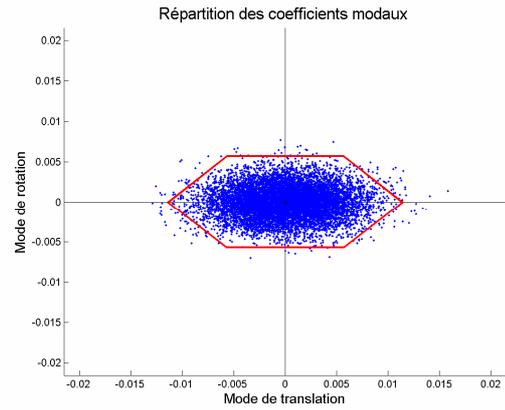
Il en découle que si la globalité des composants est centrée, la résultante de l'assemblage sera également centrée et le *TNC* sera faible bien qu'il ne soit pas sur chaque composant. On parle d'un risque à évaluer qui est le calcul du *TNC* résultant. Une approche analytique et une approche statistique que nous n'abordons pas sont traitées dans [Germain 2007].

Remarque

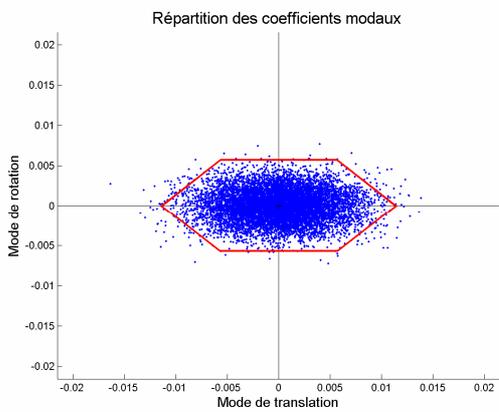
On se rend compte que les assemblages résultants sont centrés et très peu dispersés dans le domaine résultant de l'assemblage des tolérances pire des cas. On pense qu'il est possible d'augmenter les dispersions des composants tout en garantissant globalement la *CF*.



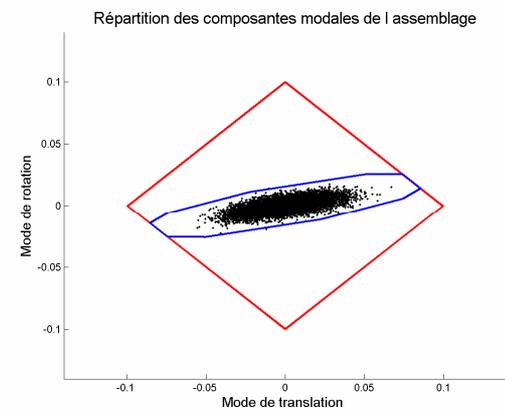
Composant 3, tolérance de la surface A



Composant 1, tolérance de la surface B



Composant 2, tolérance de la surface C



Assemblage, TNC = 0 ppm

Figure 4-32 : Tolérancement statistique sur les tolérance au pire des cas

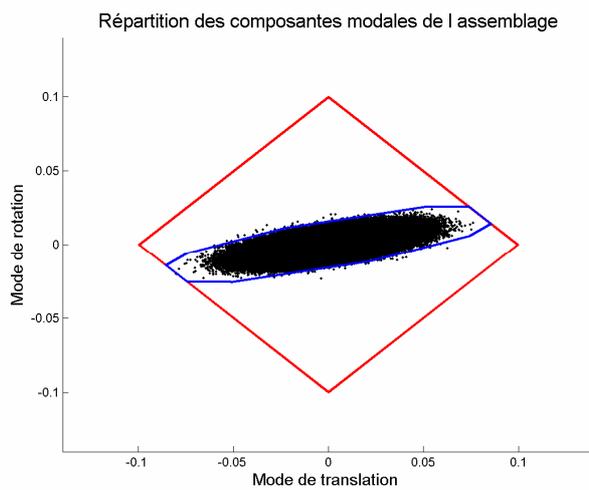


Figure 4-33 : Simulation à long terme, $TNC_{LT} = 1 \text{ ppm}$

Cas décentré

Cependant, cette approche qui consiste à considérer une proportion du lot dans le domaine de tolérance ressemble à l'approche 1D utilisant l'indice de capacité Cpk . Notre critère ici est le nombre de composants hors de leur tolérance.

- Dans le cas de la tolérance de localisation, nos simulations indiquent que 6.65% des composants sont hors de leur tolérance lorsque les caractéristiques de translation et rotation sont centrées et dispersées de six écarts-types,
- Dans le cas de la tolérance de localisation et parallélisme, nos simulations indiquent sous les mêmes conditions de centrage et de dispersion que 1,55% des composants sont hors de leur tolérance.

La figure 4-34 suivante montre la simulation d'une configuration particulière des composants pour lequel le TNC résultant est élevé. Bien que les proportions de composants hors de leur tolérance soient identiques à celles du cas centré, le taux de non-conformité résultant devient élevé.

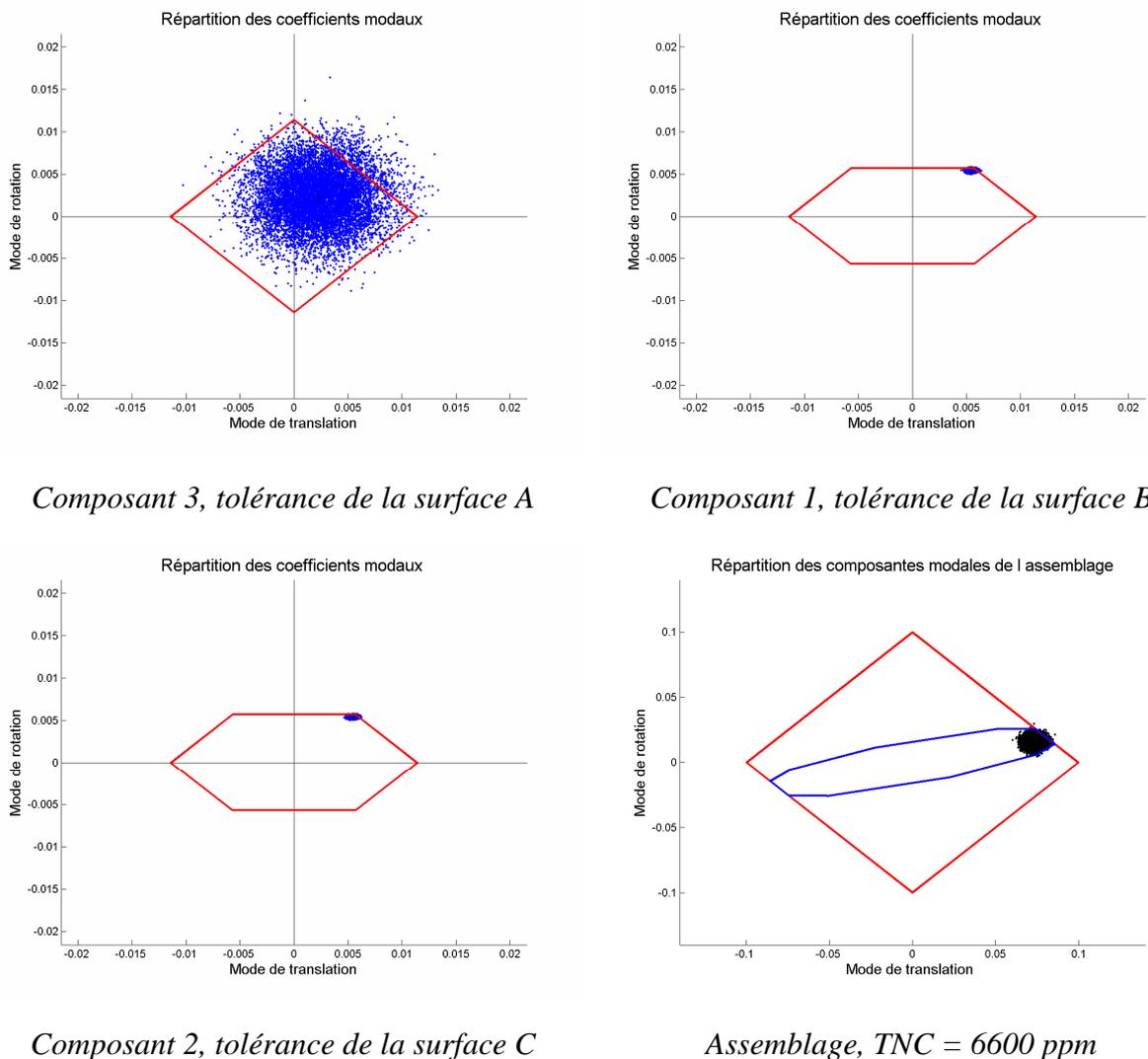


Figure 4-34 : Cas particulier avec moyenne dans la tolérance

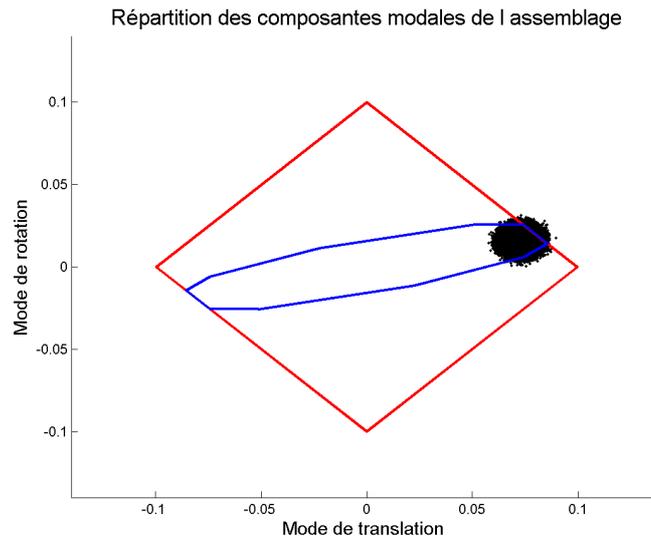


Figure 4-35 : Simulation à long terme, $TNC_{LT} = 6943 \text{ ppm}$

En utilisant plusieurs simulations dans la même configuration de décentrage et dispersion, on obtient un taux de non-conformité long terme $TNC_{LT} = 6943 \text{ ppm}$.

En utilisant le critère de qualification inertielle, on trouve une inertie de la surface A , $I_A = 0,063\text{mm}$, et une inertie équivalente pour les surfaces B et C $I_B = I_C = 0,163$ en utilisant la loi de combinaison inertielle définie pour la tolérance de localisation et parallélisme. Les défauts de la surface A sont acceptés par le critère inertie, $I_A < 0,068$, alors que ceux des surfaces B et C ne le sont pas, $I_B = I_C > 0,068$.

3.2.5.2 Tolérancement inertiel configuration centrée

Dans cette partie, on reste dans le cas des composants centrés sur les cibles. On considère maintenant que les dispersions des écarts-types des composants sont toujours donnés par un $Cp = 1$ mais en regard des tolérances inertielle et non plus pire des cas.

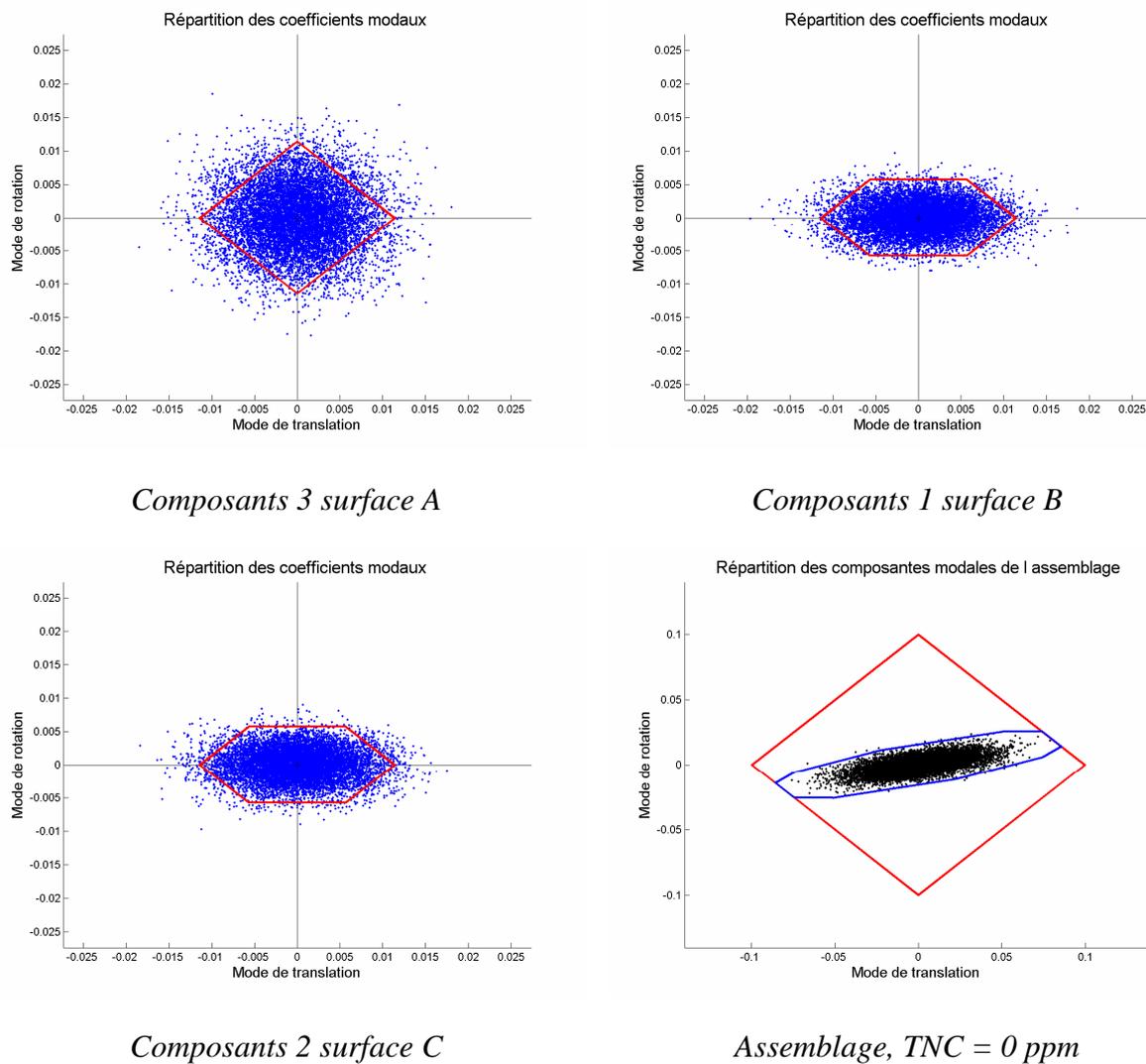
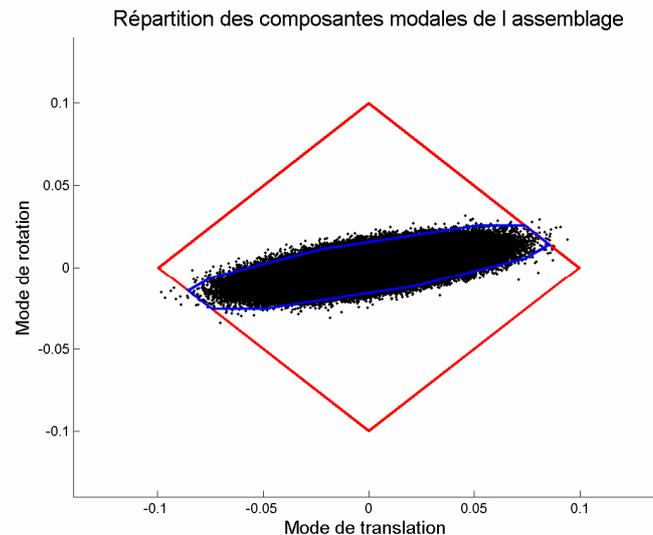


Figure 4-36 : Une simulation d'assemblage de défauts centrés équi-dispersés inertiel $C_{pi} = 1$

La figure 4-37 ci-dessous présente le résultat d'une simulation long terme sous l'hypothèse de distribution centrée des écarts modaux et de répartition équi-inertie.



Assemblage $TNC_{LT} = 33ppm$

Figure 4-37 : Simulation long terme de défauts centrés équi-dispersés

Le résultat de cette simulation permet de confirmer les constatations de Germain. Dans le cas présenté on élargit les écarts-types définis dans la partie 3.2.5.1 de 26% pour atteindre les écarts-types du tolérancement inertiel centré présenté dans ce paragraphe 3.2.5.2.

Le tolérancement inertiel permet d'élargir les tolérances. Un autre avantage, et non des moindres, est la prise en compte et la limitation du décentrage quand celui-ci n'est pas nul. Les paragraphes qui suivent permettent de juger l'intérêt du tolérancement inertiel. Les simulations font varier aléatoirement les décentrages et les écarts-types des composants en limite de tolérance inertielle.

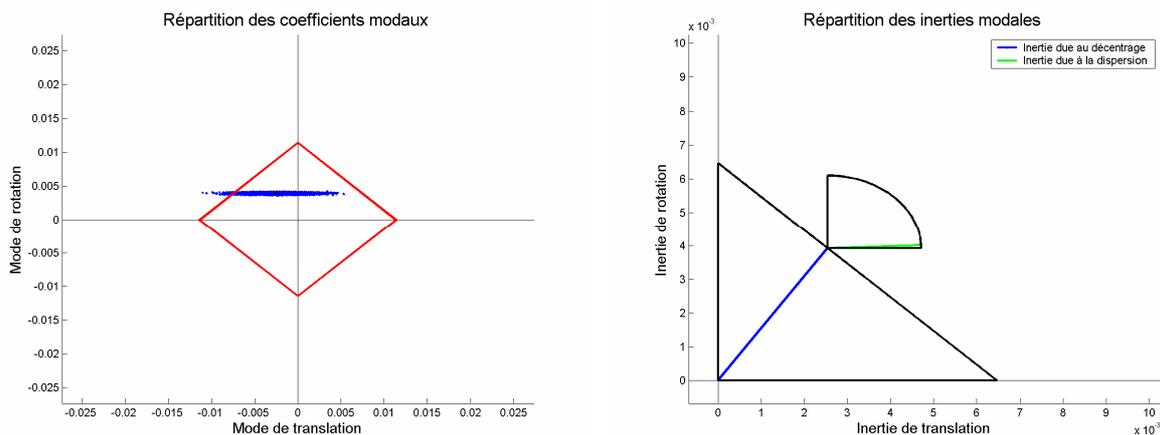
Deux hypothèses sont testées sur les décentrages :

- la première considère des décentrages aléatoires des composants, aussi bien positif que négatif,
- La seconde simule des décentrages du même coté. L'intérêt ici est de tester des configurations dites défavorables dues à la non compensation des défauts.
- Enfin la dernière teste les effets des indices de capabilité C_{pi} dans la configuration défavorable.

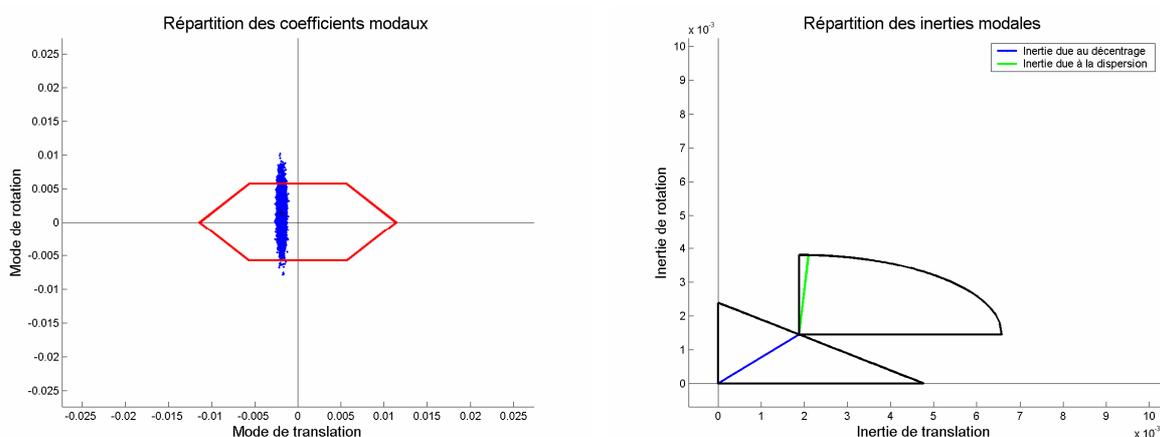
3.2.5.3 Tolérancement inertiel avec décentrage et écart-type aléatoires

On peut se rendre compte de différentes configurations que la tolérance inertielle admet. On observe aussi la représentation des écarts de décentrage et d'écart-type avec leurs domaines d'iso-écart associé.

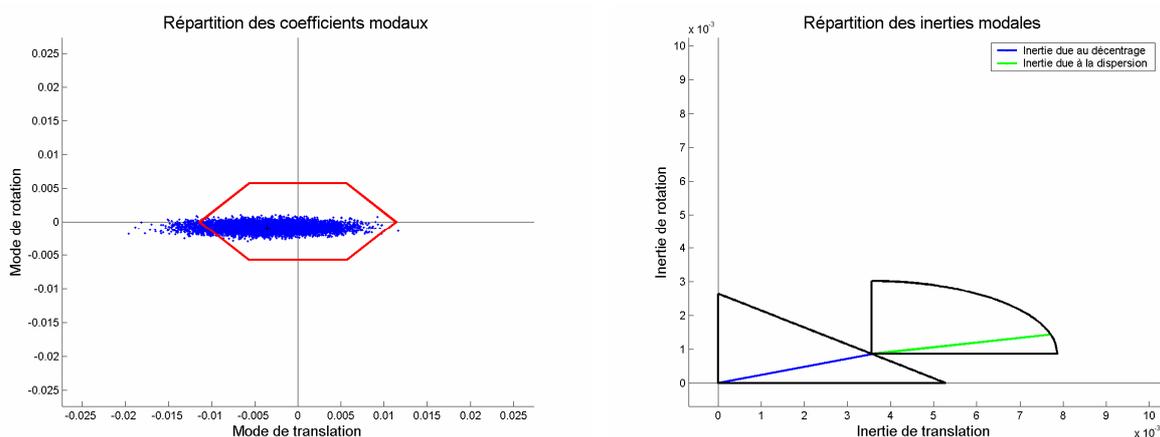
Le vecteur bleu représente l'inertie due aux écarts de décentrage des caractéristiques modales. Le triangle contenant cette inertie est l'iso-inertie de décentrage. Le vecteur vert représente l'inertie due aux écart-types des caractéristiques modales. Le quart de cercle associé est l'iso-inertie des écarts-types.



Composants 3, tolérance de la surface A



Composants 1, tolérance de la surface B



Composants 2, tolérance de la surface C

Figure 4-38 : Simulation d'assemblage avec décentrages variables, $C_{pi} = 1$

Les deux domaines iso-inertie dépendent l'un de l'autre et de la tolérance inertielle. Le domaine de l'un correspond à la différence quadratique de la tolérance inertielle moins l'inertie de l'autre. Cette relation est définie par l'équation [4-34].

Les frontières des domaines iso-inerties représentent les combinaisons d'écartes fournissant la même inertie. Ainsi deux lots ayant une inertie de décentrage identique se trouvent sur la frontière du même domaine iso-inertie des décentrages. La réflexion est identique concernant le domaine iso-inertie des écarts-types.

La figure 4-39 ci dessous présente le résultat de l'assemblage des lots de composants présenté dans la figure 4-38 précédente. On se rend compte que l'assemblage des lots présenté respecte très bien la *CF*. Par ailleurs, bien que certains composants soient hors du domaine de tolérance au pire des cas, on peut même constater que les assemblages résultants sont dans le domaine résultant du pire des cas. Cela s'explique principalement par la compensation des décentrages des composants.

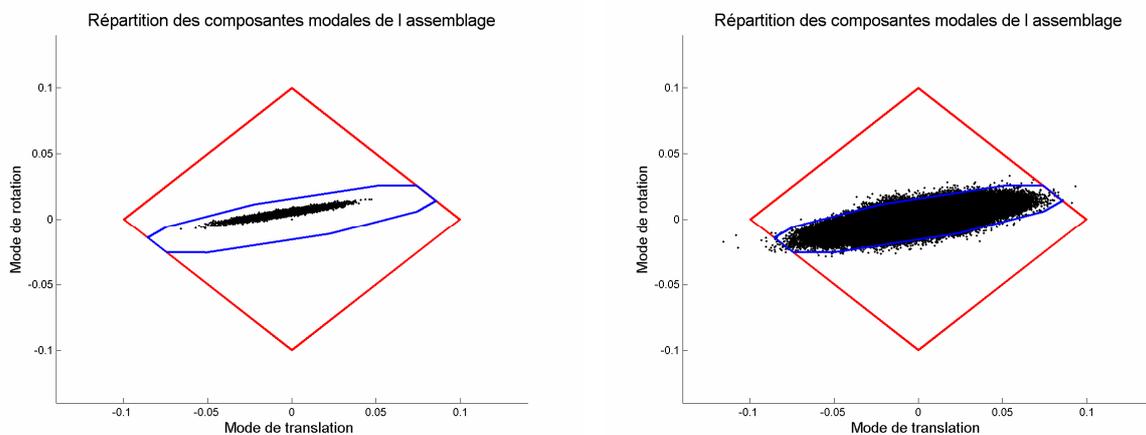


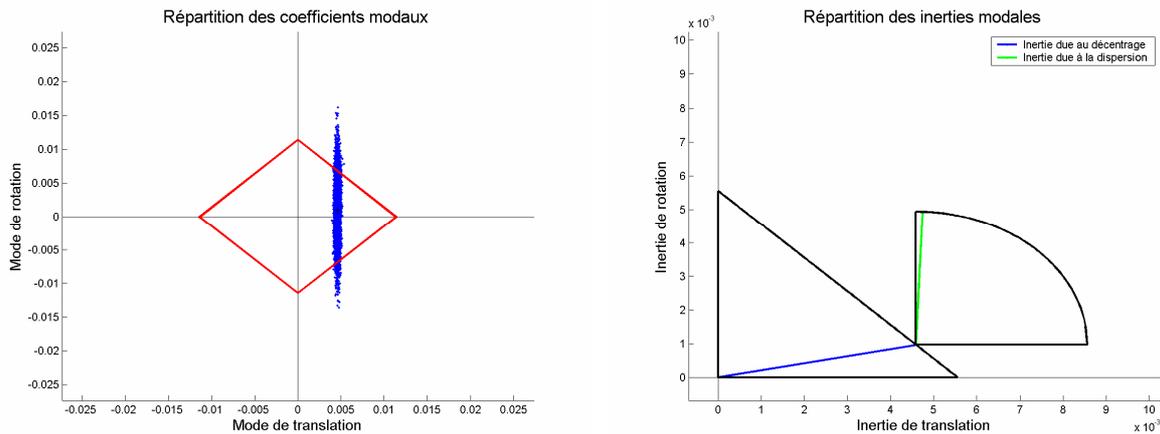
Figure 4-39 : Simulation avec décentrage aléatoire, $TNC_{LT} = 46$ ppm

La figure 4-39 met en relief les résultats des simulations dites long-terme. On remarque que la quasi-totalité du domaine résultant au pire des cas est exploité, voire plus au centre du domaine.

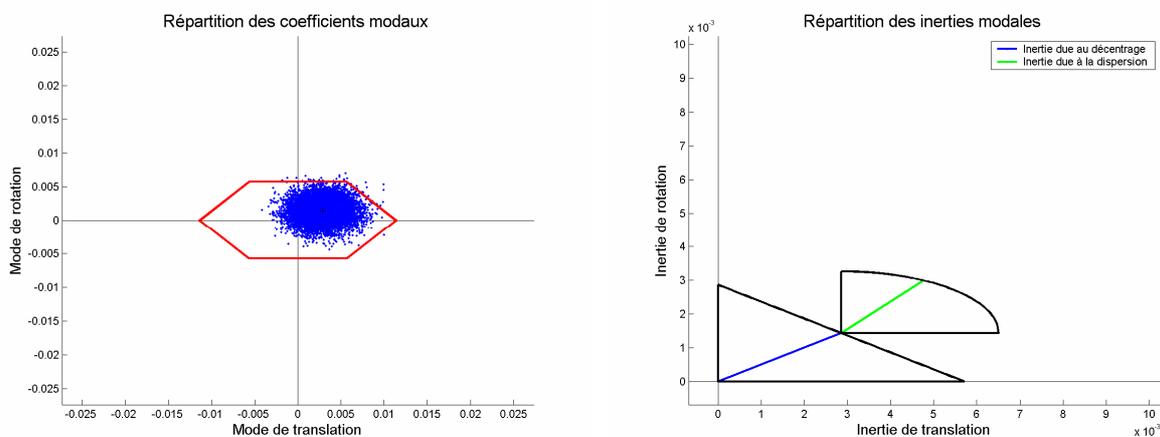
On constate cependant que quelques assemblages sont hors tolérance, mais le taux est très faible pour l'hypothèse considérée. Avec un indice de capabilité $C_{pi} = 1$, on obtient 46 ppm.

3.2.5.4 Tolérancement inertiel avec décentrage du même coté

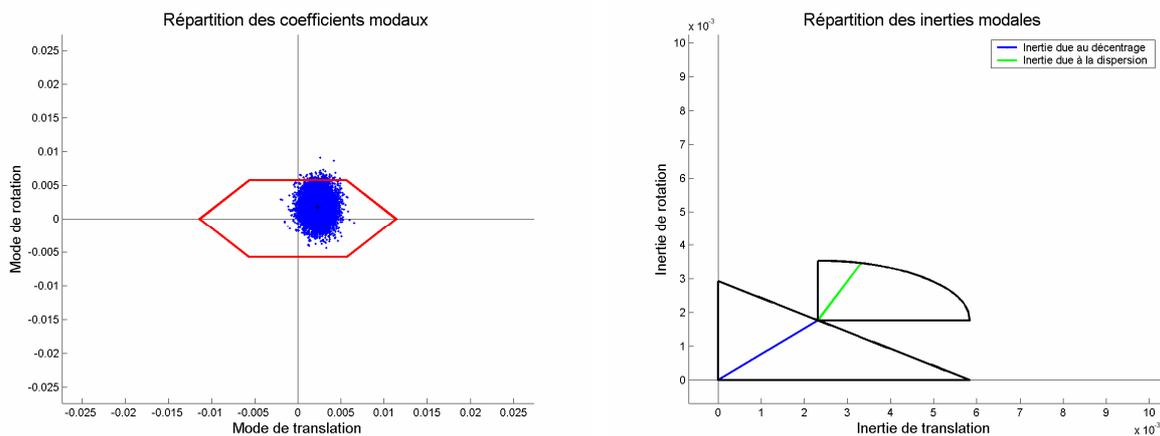
Ce paragraphe cherche à évaluer une limite supérieure en considérant l'hypothèse de non-compensation des décentrages avec des moyennes toutes du même coté.



Composants 3, tolérance de la surface A



Composants 1, tolérance de la surface B



Composants 2, tolérance de la surface C

Figure 4-40 : Simulation d'assemblage inertiel avec décentrage du même coté $C_{pi} = 1$

On peut constater là encore les différentes configurations possibles ainsi que leurs représentations dans les domaines inertiels.

La figure 4-41 ci-dessous présente le résultat de l'assemblage des composants de la figure 4-40 . On se rend compte que malgré l'hypothèse de non-compensation des écarts de décentrages, le TNC de la simulation est faible : seulement 63 ppm dans le cas présenté. La simulation long terme montre un taux de non-conformité qui lui aussi est faible : 90 ppm pour 100 simulations de 10000 assemblages. De plus, ce TNC est obtenu en considérant un indice de capabilité à sa valeur minimale qui est $C_{pi} = 1$.

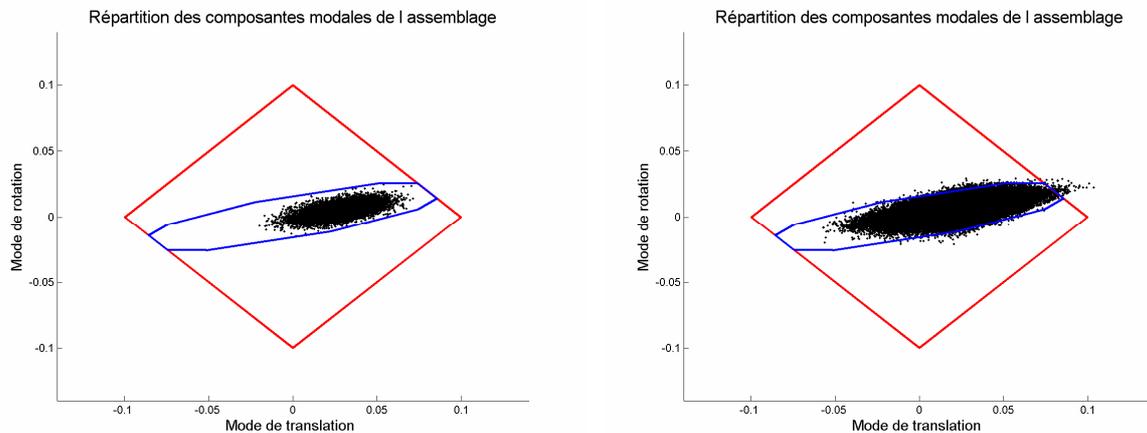


Figure 4-41 : Simulation avec décentrage du même coté, $TNC = 63 \text{ ppm}$ puis $TNC_{LT} = 90 \text{ ppm}$

Cependant, on peut considérer que ce TNC est non négligeable. La solution est alors de faire varier les valeurs des indices de capabilité C_{pi} des composants, ce qui est traité dans le paragraphe 3.2.5.5 suivant.

3.2.5.5 Tolérancement inertiel et indice de capabilité C_{pi}

Ce paragraphe a pour objectif de tester différentes valeurs d'indice de capabilité C_{pi} imposé sur les composants dans la plus mauvaise hypothèse testée qui considère des décentrages moyens du même coté pour chaque composant.

Les résultats des simulations de cette partie sont obtenus en considérant des décentrages positifs et des écarts-types aléatoires.

Les valeurs des TNC ne sont pas constantes entre deux simulations avec les mêmes caractéristiques. C'est ce qu'on peut constater pour la première simulation de ce paragraphe qui traite une simulation en considérant un $C_{pi} = 1$ comme le paragraphe précédent. Le TNC_{LT} varie de 19 ppm par rapport à la simulation du paragraphe précédent. Cela peut s'expliquer entre autres, par la taille de la simulation que [Cvetko et al, 1998] modélise.

Ce qu'on peut observer de la figure 4-42 est que l'indice de capabilité C_{pi} a un effet certain sur la répartition des assemblages résultants.

On se rend compte que l'utilisation d'un indice de capabilité $C_{pi} = 1,16$ permet d'obtenir un TNC quasiment nul.

Le choix d'un indice de capabilité $C_{pi} = 1,33$ permet apparemment de ne plus générer de TNC . De plus, cette valeur d'indice de capabilité est courante.

Cependant, il ne faut pas tirer de conclusion hâtive. En effet, les simulations présentées ne sont le résultat que de 100 simulations, on n'a donc pas testé toutes les configurations possibles, et surtout la plus mauvaise configuration.

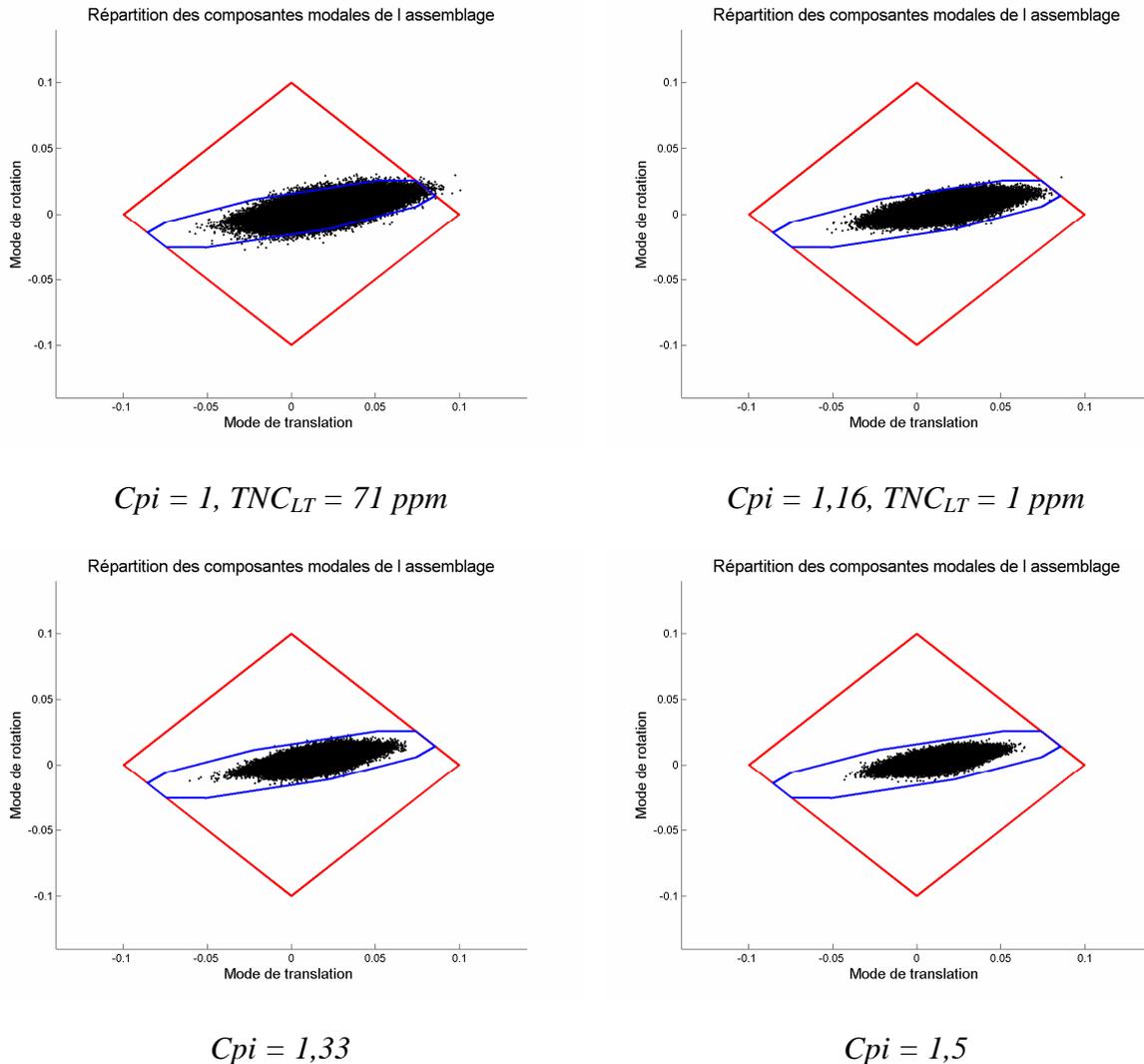


Figure 4-42 : Simulation long terme avec décentrage du même côté pour différents C_{pi}

3.2.6 Tolérancement inertiel 3D et torseur de petits déplacements

Les paragraphes précédents traitent le problème en deux dimensions, avec une description modale des écarts. Ce paragraphe permet d'appliquer le critère inertie 3D sur le même cas d'application traité cette fois-ci en trois dimensions, dont les écarts sont caractérisés par les composantes du torseur de petits déplacements.

Les caractéristiques du mécanisme sont identiques au mécanisme précédent en ajoutant la profondeur :

- longueur surface A_i suivant x : $L_{Ax} = 100 \text{ mm}$,
- longueur surface B_i et C_i suivant x : $L_{Bx} = 80 \text{ mm}$,
- longueur surface A_i , B_i et C_i suivant z : $L_{Az} = 80 \text{ mm}$,
- longueur du bras de levier entre les centres des surfaces B_i et C_i et le centre des surfaces A_i suivant x : $d = 220 \text{ mm}$,
- la condition fonctionnelle est une localisation de valeur $t = 0,02 \text{ mm}$.

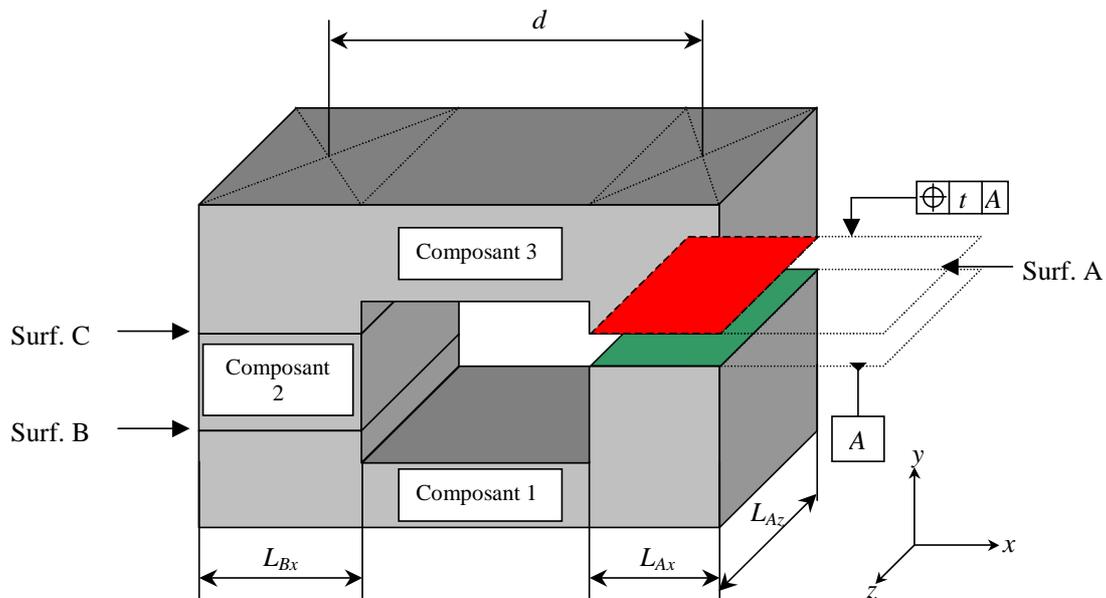


Figure 4-43 : Empilage de trois composants avec bras de levier, problème 3D

3.2.6.1 Tolérancement du mécanisme

Comme précédemment, le tolérancement inertiel 3D est comparé au tolérancement traditionnel au pire des cas.

Tolérancement au pire des cas

Nous gardons le même tolérancement qualitatif que précédemment, à savoir un tolérance de localisation sur la surface A_3 , et une combinaison de tolérance de localisation et d'une tolérance de parallélisme pour les surfaces B_1 et C_2 . Le tolérancement quantitatif n'est pas détaillé, cependant, on obtient les même valeurs de tolérance que précédemment en considérant un ratio 2 entre la tolérance de parallélisme et de localisation :

- tolérance de localisation $t_1 = 0,0229$ mm
- tolérance de parallélisme $t_2 = 0,0114$ mm

Tolérancement inertiel

Notre approche de tolérancement inertiel consiste à déterminer les tolérances inertielles de chaque composants du torseur de petits déplacements. Cela consiste à définir trois chaîne de cotes dans cette problématique 3D, que l'on exprime au centre de la surface A_3 . Nous considérons une répartition non uniforme des tolérances inertielles de rotation.

Chaîne de cotes en translation suivant y:

En ne considérant que les composantes de translation suivant l'axe y des différentes surfaces tolérancées, on obtient la chaîne de cotes suivante :

$$T_{y1} + T_{y2} + T_{y3} = \delta_{Max} \quad [4-56]$$

Soit en considérant une répartition uniforme :

$$I_{Tyi} = \frac{t}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad [4-57]$$

Chaîne de cotes en rotation autour de x:

En ne considérant que les composantes de rotation autour de x des différentes surfaces tolérancées, on obtient la chaîne de cotes suivante :

$$\frac{L_{Az}}{2} \cdot R_{x1} + \frac{L_{Az}}{2} \cdot R_{x2} + \frac{L_{Az}}{2} \cdot R_{x3} = \delta_{Max} \quad [4-58]$$

Soit en considérant une répartition non uniforme ($\beta_1 = \beta_2 = 1$ et $\beta_3 = 2$):

$$I_{Rxi} = \frac{\beta_i \cdot t}{3 \cdot L_{Az} \cdot \sqrt{\sum_i \beta_i^2}} \quad [4-59]$$

Chaîne de cotes en rotation autour de z:

En ne considérant que les composantes de translation suivant l'axe y des différentes surfaces tolérancées, on obtient la chaîne de cotes suivante :

$$\left(\frac{L_{Bx}}{2} + d \right) \cdot R_{z1} + \left(\frac{L_{Bx}}{2} + d \right) \cdot R_{z2} + \frac{L_{Ax}}{2} \cdot R_{z3} = \delta_{Max} \quad [4-60]$$

Soit en considérant une répartition non uniforme ($\beta_1 = \beta_2 = 1$ et $\beta_3 = 2$):

$$I_{Rzi} = \frac{\beta_i \cdot t}{6 \cdot \sqrt{2 \cdot \beta_1^2 \cdot \left(\frac{L_{Bx}}{2} + d \right)^2 + \beta_3^2 \cdot \left(\frac{L_{Ax}}{2} \right)^2}} \quad [4-61]$$

Tolérances inertielles des composants:

On obtient ainsi les tolérances des composants suivant chaque axes.

	Composant 1	Composant 2	Composant 3
Inertie de translation T_y (mm)	0,0192	0,0192	0,0192
Inertie de rotation R_x (rad)	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-4}$
Inertie de rotation R_z (rad)	$8,44 \cdot 10^{-5}$	$8,44 \cdot 10^{-5}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4-1 : Tolérances inertielles des composants

Que l'on peut exprimer par une valeur de tolérance inertielle et une loi de combinaison:

- $I_i = 0,0192$ mm,
- $I_{Ty} \oplus \alpha_{Rx} \cdot I_{Rx} \oplus \alpha_{Rz} \cdot I_{Rz} = I_i$

Avec :

- $\alpha_{R_x} = \frac{I_i}{I_{R_x}}$, qui vaut environ 56,6 pour les composants 1 et 2, et 28,3 pour le composant 1,
- $\alpha_{R_z} = \frac{I_i}{I_{R_z}}$, qui vaut environ 227,9 pour les composants 1 et 2, et 113,9 pour le composant 1,

3.2.6.2 Comparaison des tolérancements en configuration centrée

Afin de comparer les deux approches de tolérancement, nous considérons la réflexion de Germain qui considère des composants répartis suivant une loi multi-normale centrée dont six écarts-types suivant chaque axes sont compris dans le domaine de tolérance. Il est alors possible de combiner les écarts-types de ce nuage pour calculer l'inertie équivalente. L'inertie équivalente se calcule en considérant la loi de combinaison de la tolérance inertielle. Une autre comparaison est faite sur chaque composantes. Les représentations des distributions multi-normale sont réalisées dans un premier temps par des ellipsoïdes transparentes, ceci dans un soucis de clarté. En effet, un nuage de points occulterait les frontières du domaine de tolérance au pire des cas. Par la suite, nous rétablissons la représentation du lot par un nuage de points, notamment pour représenter le lot de la résultante de l'assemblage.

Tolérances des composants 1 et 2

L'inertie équivalente du tolérancement 3D au pire des cas pour une répartition centrée à six écart-types suivant chaque axe vaut : $I_{eq1} = I_{eq2} = 0,0118$. D'où le gain du tolérancement inertiel en configuration centrée est de 63%. Ce gain correspond à une augmentation homothétique par rapport à la répartition à six écart-types dans le domaine au pire des cas. Une illustration est présentée dans la figure 4-45.

Hors la répartition du tolérancement au pire des cas et celle du tolérancement inertielle ne sont pas homothétiques, comme on peut le constater sur la figure 4-44. On propose ainsi le tableau suivant qui compare le gain en dispersion suivant chaque axe en configuration centrée.

	Composante T _y (mm)	Composante R _x (rad)	Composante R _z (rad)
Ecart-type équivalent pour la tolérance au pire des cas	0,0038	$4,76 \cdot 10^{-5}$	$4,76 \cdot 10^{-5}$
Ecart-type pour la tolérance inertielle centrée	0,0111	$1,96 \cdot 10^{-4}$	$4,85 \cdot 10^{-5}$
Gain (%)	190	310	2

Tableau 4-2 : Gain en configuration centrée du tolérancement 3D inertiel par rapport au tolérancement 3D au pire des cas

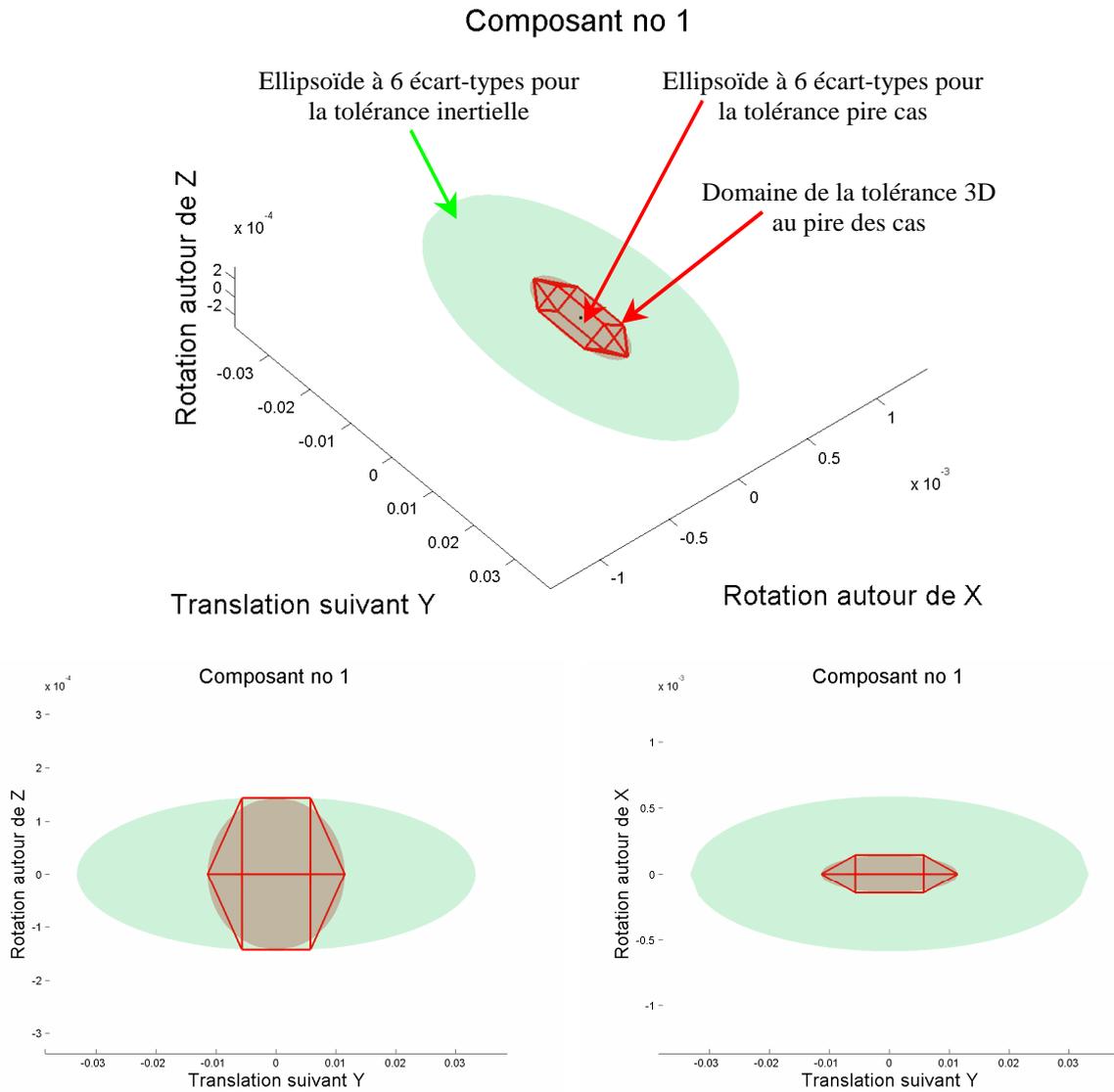


Figure 4-44 : Tolérances au pires des cas et inertielle centrée des composants 1 et 2

Cette figure 4-44 illustre le tableau 4-2 des différents gain sur chaque axes. L'ellipsoïde rouge correspond à la répartition à six écart-types suivant chaque axe dans le domaine de tolérance au pire des cas. L'ellipsoïde verte correspond à la répartition à six écart-types de la tolérance inertielle dont les dispersion sont réparties proportionnellement à la tolérance inertielle suivant chaque axes. Cette dernière répartition correspond à une distribution par défaut suivant le tolérancement inertiel par composants (translation suivant y, rotation autour de x puis rotation autour de z), tout en respectant la tolérance inertielle du lot.

La figure 4-45 suivante représente le gain entre l'inertie équivalente de la tolérance au pire des cas et la tolérance inertielle proposée. On peut observer dans ce cas que le gain est identique sur les trois composantes. Cette valeur est de 63% dans ce cas.

Composant no 1

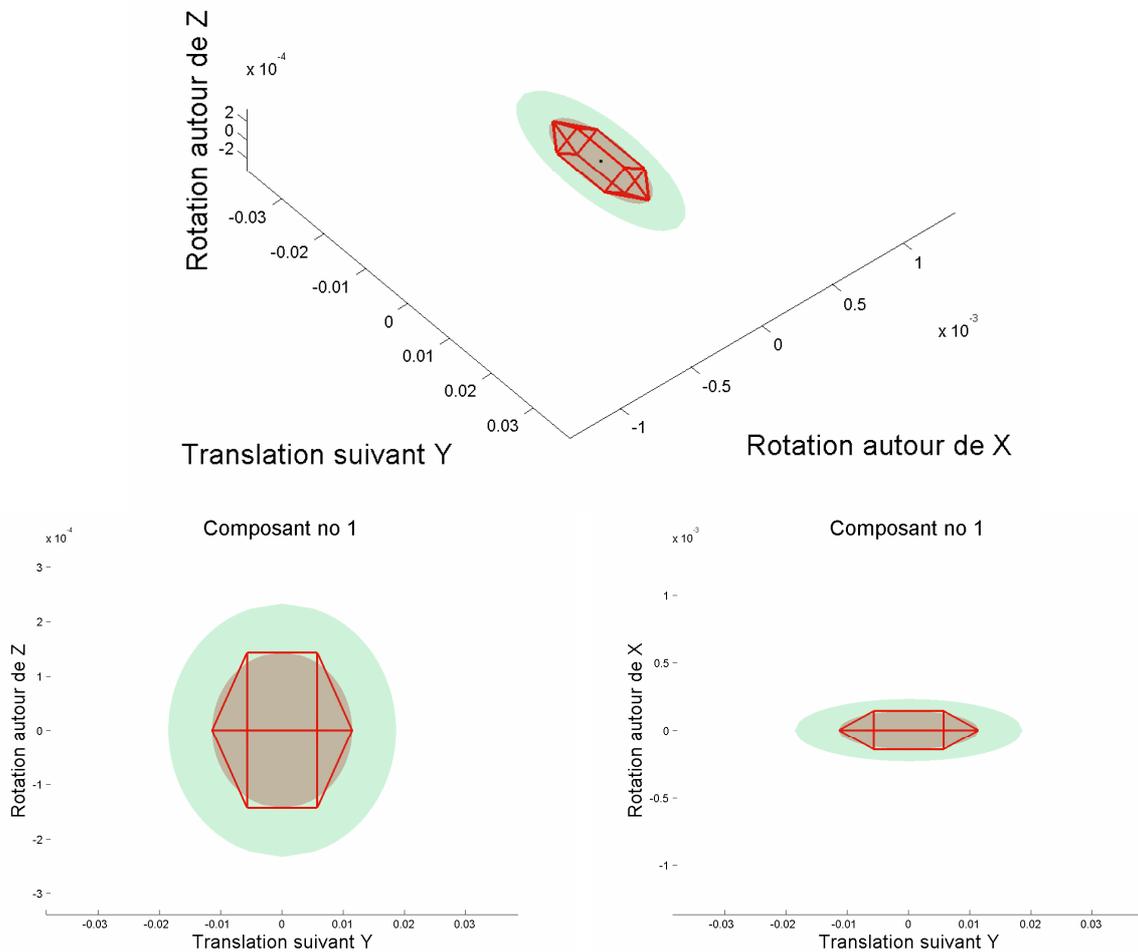


Figure 4-45 : Gain homothétique de 63 % entre les tolérancements au pire des cas et inertiel

Tolérances du composant 3

L'inertie équivalente du tolérancement 3D au pire des cas pour une répartition centrée à six écart-types suivant chaque axe vaut : $I_{eq3} = 0,0099$. D'où le gain du tolérancement inertiel en configuration centrée est de 95%. Le tableau suivant compare en configuration centrée le gain sur chaque axe.

	Composante T_y (mm)	Composante R_x (rad)	Composante R_z (rad)
Ecart-type équivalent pour la tolérance au pire des cas	0,0038	$4,76 \cdot 10^{-5}$	$3,81 \cdot 10^{-5}$
Ecart-type pour la tolérance inertielle centrée	0,0111	$3,91 \cdot 10^{-4}$	$9,71 \cdot 10^{-5}$
Gain (%)	190	310	27

Tableau 4-3 : Gain en configuration centrée du tolérancement 3D inertiel par rapport au tolérancement 3D au pire des cas

Composant no 3

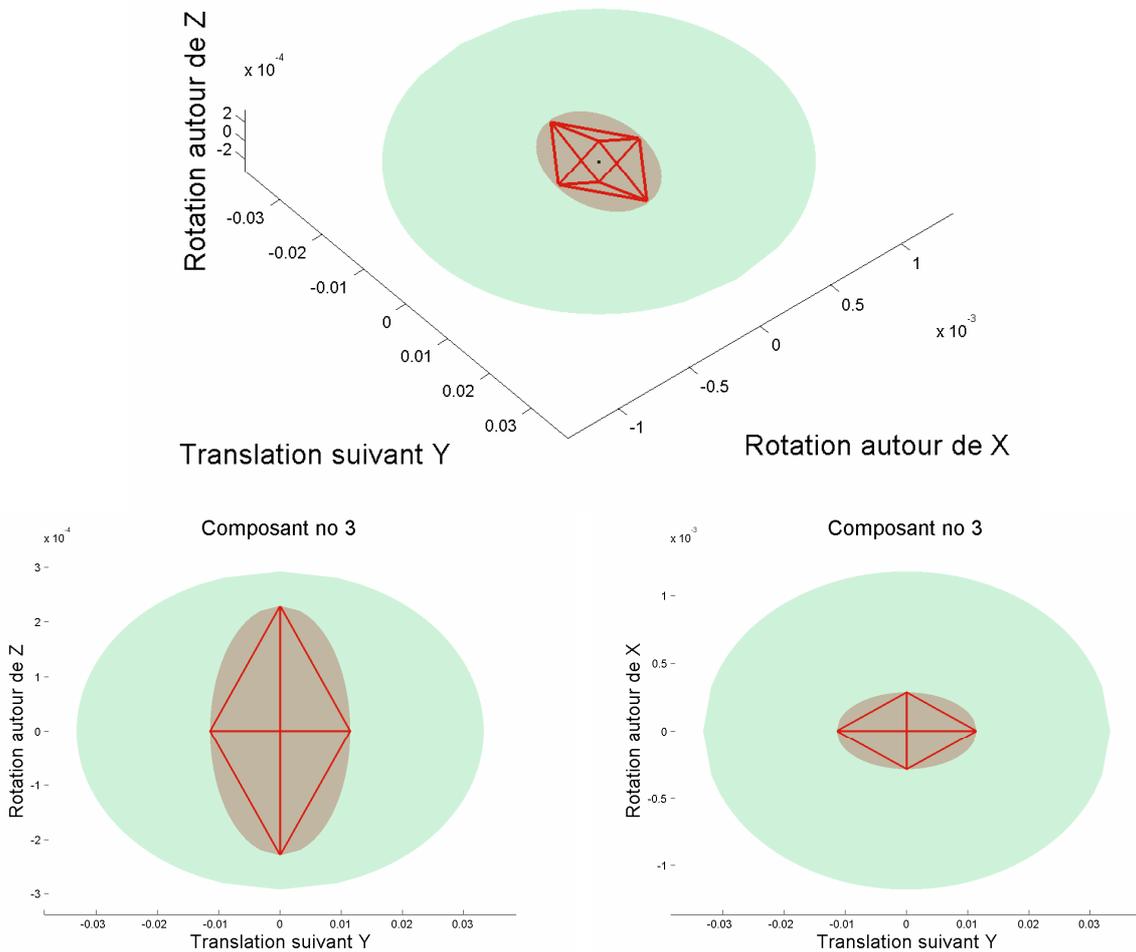


Figure 4-46 : Tolérances au pires des cas et inertielles centrée du composant 3

3.2.6.3 Quelques résultats

Cette partie présente brièvement des résultats de simulations de l'application du tolérancement inertiel 3D sur ce mécanisme. Dans une première partie nous montrons des configurations des lots de composants avec la représentation de leurs écarts dans les domaines inertiels, puis des résultats de simulations sont présentés sous forme d'histogramme de *TNC* résultants.

Quelques configurations des composants

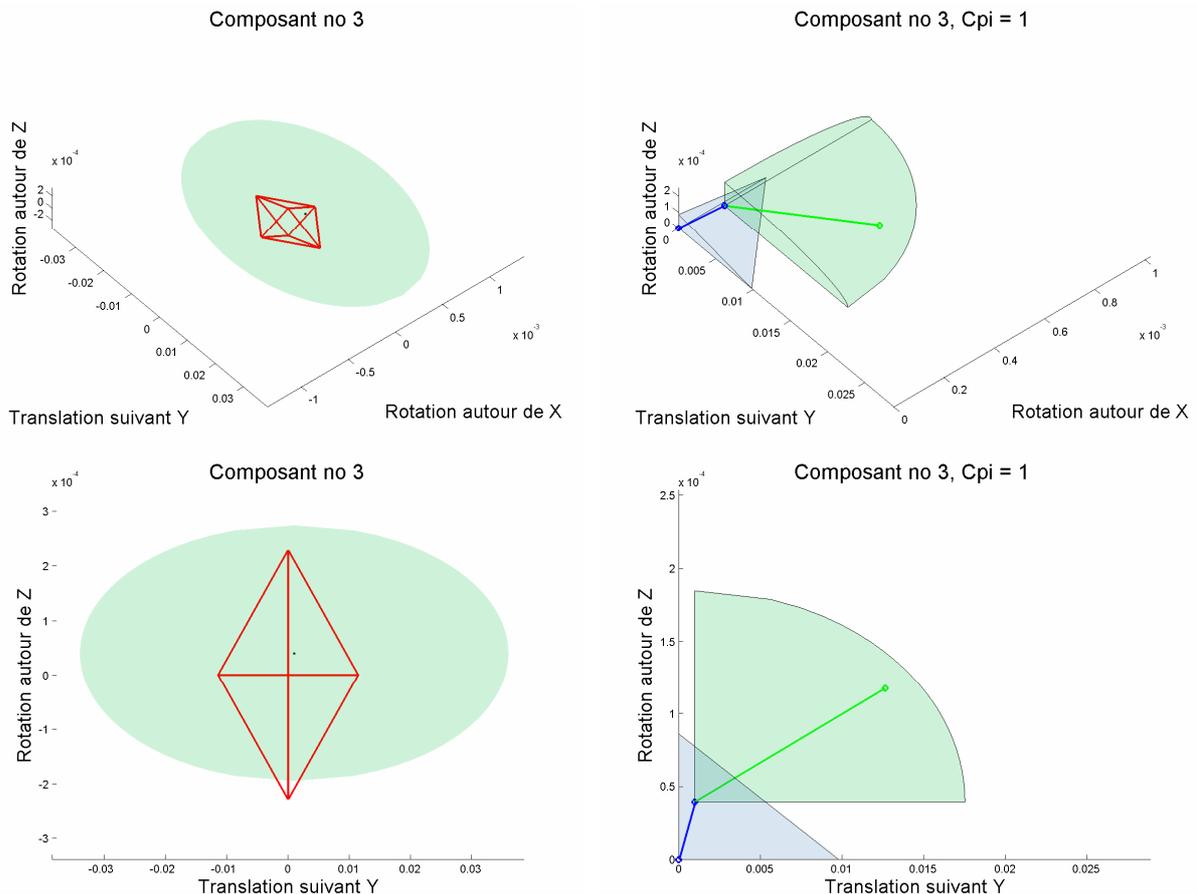


Figure 4-47 : Une configuration et sa représentation inertielle

A la manière du paragraphe 3.2.5.3 de ce chapitre, la figure 4-47 représente une configuration particulière d'un lot de composant et la représentation graphique de la tolérance inertielle. On peut observer les domaines d'iso-écart :

- en bleu le domaine iso-inertie due aux décentrages,
- en vert le domaine iso-inertie due aux écarts-types,

La figure suivante traite un assemblage. On peut observer les domaines inertiels des trois composants de la chaîne de cotes ainsi que la répartition du nuage de point résultant. Le nuage de points est représenté par 20 000 points, mais le *TNC* annoncé est calculé sur un nuage de 500 000 points. On impose un indice de capabilité $C_{pi} = 1,33$ sur chaque composant.

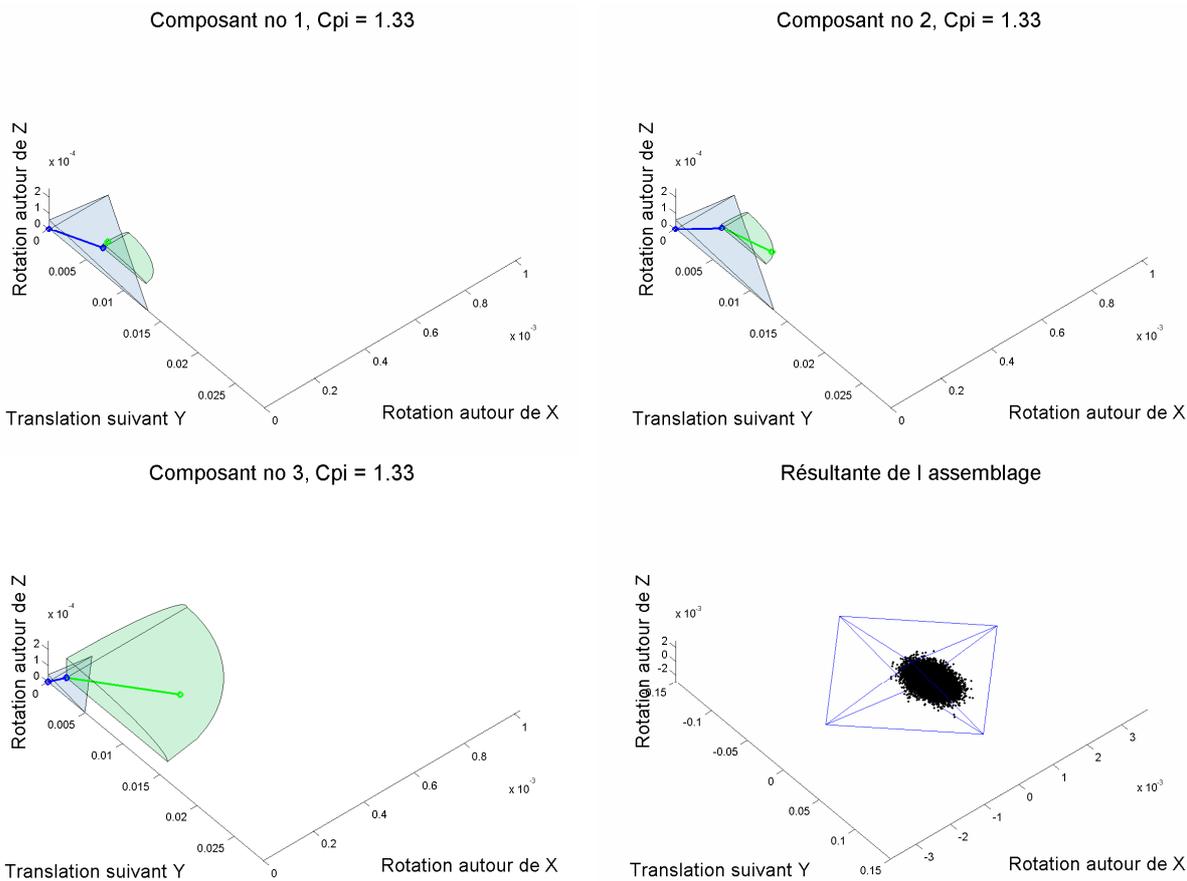


Figure 4-48 : Un assemblage, TNC = 2 ppm

La figure suivante montre deux résultats de simulations d'assemblage sous les hypothèses de lot de composants en limite de capabilité et en considérant les décentrages tous du même coté (positifs dans notre cas).

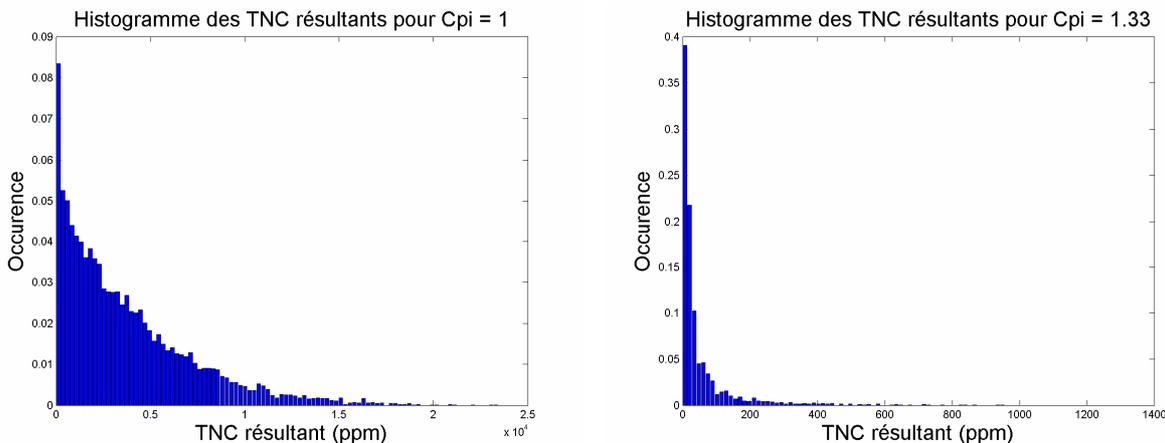


Figure 4-49 : Histogrammes de TNC résultants

On se rend compte que malgré le choix des hypothèses dans le but de sur-estimer le *TNC* résultant, la répartition de ces *TNC* est concentré sur une *TNC* faible. Chaque histogramme est construit sur la base de 10 000 simulations. On se rend compte que pour un indice $C_{pi} = 1$ le *TNC* maximal atteint vaut 24 160 ppm, et le *TNC* moyen vaut 3 700 ppm. Enfin pour un indice de capabilité $C_{pi} = 1,33$, le *TNC* maximum chute à 1400 ppm, avec une moyenne de 15 ppm.

On ne peut tirer de conclusion sur les observations des deux histogrammes, si ce n'est qu'ils confirment l'influence de l'indice C_{pi} sur le respect de la *CF*. Cette partie 3.2.6 a pour but de confirmer l'application 3D de la méthode qui doit cependant être appliquée sur d'autres cas. On se rend compte que la représentation 3D des tolérances et écarts des composants n'est pas évidente, ce qui a motivé le traitement du mécanisme en 2D.

3.2.7 Synthèse de cette partie

Cette partie du chapitre 5 constitue le bilan de nos travaux de recherche concernant le tolérancement modal inertiel. Ce bilan est relativement positif car nous avons mis en place une méthode de tolérancement statistique 3D permettant de garantir la *CF*. Il est vrai cependant que la synthèse des tolérances ne considère que les défauts rigides, la prise en compte des défauts de forme restant encore à développer.

Nous avons décrit la méthode de tolérancement modal inertiel en deux niveaux : le tolérancement 3D inertiel basé sur le critère inertie ajustée, et le tolérancement de forme. Le tolérancement de forme a été discuté même s'il nécessite encore quelques approfondissements. En revanche, le tolérancement 3D inertiel que nous proposons semble être rapidement exploitable :

- Les défauts modaux rigides de position, orientation et taille (modes extrêmes) permettent de calculer directement l'inertie des écarts. A partir de quoi, une représentation graphique des écarts inertiels a été mise en place. Cette représentation permet de visualiser non seulement les différentes sources d'écarts par rapport à la cible, décentrage ou dispersion, mais aussi les composantes modales à l'origine de ces écarts.
- Nous avons proposé une méthode de tolérancement inertiel 3D basée sur le critère inertie ajustée. Cette méthode choisit ainsi de traiter plusieurs chaînes de cote 1D en considérant les lois de combinaison des inerties. Les tolérances inertiels des composants sont ensuite définies par la chaîne de cote fournissant la tolérance la plus serrée.
- La mise en place de simulations de Monté Carlo ont permis de rapidement tester le tolérancement inertiel 3D. La méthode permet comme dans le cas 1D d'élargir les dispersions dans le cas centré tout en garantissant la *CF*.

4 Synthèse et perspectives du chapitre

Cette partie résume les points clefs développés dans ce chapitre. Dans un second temps, on présente les perspectives de ce chapitre.

4.1 Synthèse du chapitre

Ce chapitre traite du tolérancement statistique 3D avec prise en compte des défauts de forme. L'ensemble des concepts et méthodes présentés ont permis de boucler en partie cet aspect. En partant de la définition d'un système assemblé et de sa condition fonctionnelle, on présente une synthèse des tolérances statistiques des composants. On présente aussi l'analyse des écarts statistiques des composants pour vérifier le respect de la CF. La figure 4-50 ci-dessous résume ce chapitre en présentant les différents points clefs développés. La synthèse de ce chapitre se fait par un résumé des différentes parties du chapitre que l'on retrouve dans la figure.

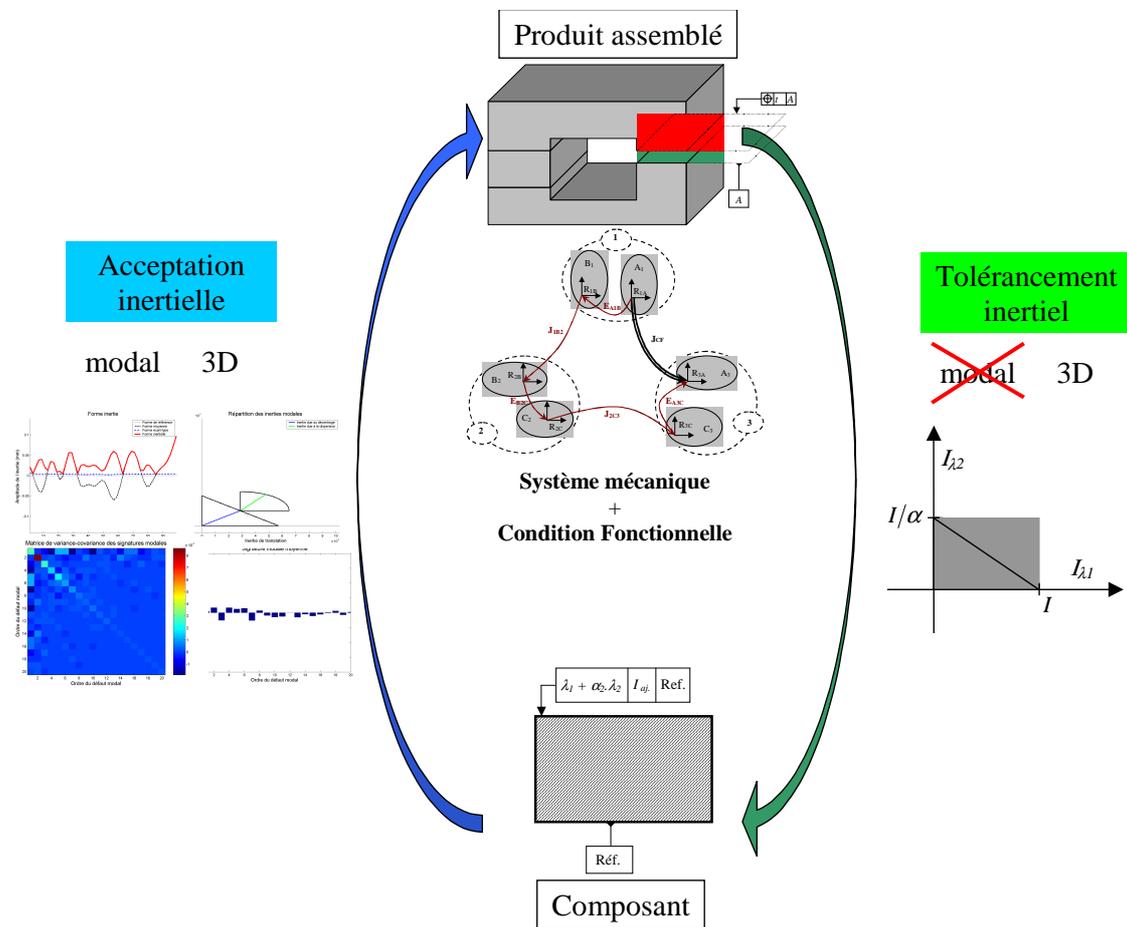


Figure 4-50 : Synthèse du chapitre

Ce chapitre présente l'extension de la méthode modale à la caractérisation statistique de lots de défauts de forme qui permet la description et l'acceptation modale d'un lot de défaut de forme. Ainsi la partie 1 présente la caractérisation modale d'un lot de forme. On présente ainsi la signature modale moyenne et la matrice modale de variance covariance dans la partie 1.2.2.

La partie 2 présente la fusion du critère inertie à la méthode modale, on dispose ainsi d'un critère d'acceptation inertiel à partir de la caractérisation statistique modale d'un lot de défaut de forme. Dans un premier temps, on définit l'inertie 3D classique dans la partie 2.1 puis l'inertie 3D ajustée dans la partie 2.2. En se basant sur la définition de l'inertie 3D ajustée, on donne dans la partie 2.3 une représentation de la tolérance inertielle dans l'espace des coefficients modaux.

Enfin, on présente une démarche de tolérancement inertiel d'une problématique 3D. Dans un premier temps on cite dans la partie 3.1 les approches envisagées pour la spécification des tolérances inertielles des défauts de forme, en distinguant défaut de position-orientation et défauts de forme. Dans un second temps, la partie 3.2 présente notre démarche de tolérancement 3D sans prise en compte des défauts de forme. En effet le tolérancement des défauts de forme n'étant pas encore au point on ne peut proposer de méthode de tolérancement inertiel modal, on se limite au tolérancement des modes rigides donc au tolérancement inertiel 3D. Les simulations de Monte Carlo dans la partie 3.2.5 permettent de mettre en évidence l'intérêt du tolérancement inertiel dans les problématiques 3D.

4.2 Perspectives

Les perspectives sont nombreuses sur ce chapitre. Nous les avons classées selon leur domaine d'application.

4.2.1 Définition de l'inertie 3D et sa tolérance

On peut s'intéresser au C_{pm} multi-dimensions défini par [Kotz et al, 1993] et discuté dans [Wang et al, 2000]. Comme dans le cas 1D, le C_{pm} est lié à l'inertie par l'intervalle de tolérance, il faut voir si on peut définir l'inertie multi-dimensions.

La loi de combinaison des inerties de chaque composante est-elle optimale ? Ne peut-on pas définir une inertie scalaire et un indice de capacité 3D $C_{pi_{3D}}$, qui serait l'équivalent de la loi de combinaison.

Quelle inertie prendre en compte pour la quantification des défauts de forme, inertie classique ou inertie ajustée ?

Comme pour le cas du tolérancement au pire des cas, peut-on mieux définir le coefficient α de répartition de la tolérance de localisation et parallélisme, afin d'optimiser les tolérances des composants et/ou le domaine résultant.

4.2.2 Tolérancement inertiel 3D sans défaut de forme

4.2.2.1 Chaîne de cote 3D

Peut-on mettre en place une méthode de tolérancement matricielle utilisant les matrices d'influence ? Ces matrices d'influence peuvent être créées grâce à l'extrapolation modale en déterminant l'influence d'une surface de la chaîne de cote sur la surface de la CF .

La méthode de tolérancement proposée par les chaînes de cote 1D indépendantes marche-t-elle pour tous les cas ?

4.2.2.2 Plus mauvaise configuration et TNC

Comme pour le cas 1D, il faut chercher la plus mauvaise configuration des composants qui donne le plus mauvais TNC . Une fois la plus mauvaise configuration identifiée, on peut mettre en place un tolérancement inertiel 3D garantissant la CF . On peut ensuite évaluer la prise de risque à élargir les tolérances.

Au lieu d'utiliser des simulations de Monte Carlo pour évaluer le TNC , on peut utiliser les travaux de [Germain, 2007] sur le calcul du TNC 3D.

Quel est l'effet de la covariance et comment la prendre en compte dans la spécification des tolérances ? A-t-on besoin de la prendre en compte ?

4.2.3 Tolérancement modal inertiel

Nous manquons actuellement de recul sur cette approche récente. Les perspectives sont donc actuellement réduites, mais elles apparaîtront au fur et à mesure de notre expérience dans ce domaine de recherche.

4.2.3.1 Tolérance modale inertielle sans défaut de forme

Quelle est l'interprétation de la tolérance inertielle ajustée dans l'espace des défauts modaux de forme ? Quelles sont les formes des domaines inertiels des décentrages et des écarts-types ? Il faut plus travailler sur la criticité des défauts de forme pour pouvoir spécifier une tolérance.

4.2.3.2 Tolérancement inertiel avec défauts de forme

Les défauts de forme et les écarts de mise en position associés peuvent-ils être caractérisés de façon statistique ?

Chapitre 5

Conclusion générale et perspectives

Conclusion

L'objectif du tolérancement des systèmes assemblés est de définir les tolérances des composants permettant la satisfaction du client : l'assemblage et le bon fonctionnement des systèmes. On peut identifier des cas limites du tolérancement pour lesquelles ces objectifs sont mal respectés. Différents modèles de complexité croissante sont identifiés : 1D, 3D et 3D avec prise en compte des défauts de forme. On peut aussi distinguer différentes hypothèses de comportement des composants du système : rigide non déformable, flexible élastique et élasto-plastique.

Ce projet de recherche se propose de traiter les problématiques de tolérancement sous l'hypothèse de comportement rigide des composants, pour les différentes complexités de modélisation existante : 1D, 3D et 3D avec défauts de forme.

Notre approche se fonde sur le critère inertie I de quantification des écarts d'une caractéristique par rapport à sa cible. Ce critère, basé sur la fonction de perte de Taguchi, est proposé par Pillet dans une méthode de tolérancement 1D. Pour étendre cette approche de tolérancement à la qualification de plusieurs caractéristiques, dans le cas des surfaces, nous choisissons d'utiliser la méthode modale de description des défauts de forme de toutes géométries proposée par Samper. Ces deux approches, de quantification (inertiel) et de qualification (modal), évoluent pour enfin être fusionnées et proposer une méthode d'acceptation multi-caractéristique, le tolérancement modal inertiel.

La modélisation 1D du tolérancement est bien cernée. Le graphe (δ, σ^2) permet l'analyse des tolérances des composants en vue de vérifier la conformité de la résultante pour toutes les configurations. On met ainsi à disposition un outil permettant de vérifier un tolérancement quelle que soit l'expression de la tolérance, intervalle de tolérance ou inertie, quels que soient les indices de capabilité et sous l'hypothèse statistique d'indépendance des variables ou non (non illustrée ici).

De plus, on montre que le tolérancement inertiel est un bon compromis entre le tolérancement au pire des cas et le tolérancement statistique. Et même mieux, l'évolution proposée permet de garantir statistiquement une Condition Fonctionnelle, *IT* et indice *Cpk* ou *TNC*, dans toutes les configurations y compris la plus défavorable. Nous proposons ainsi une approche statistique de synthèse des tolérances garantissant la *CF* dans toutes les configurations.

Comme la configuration la plus défavorable n'est pas atteinte à chaque assemblage, nous proposons une estimation de l'occurrence de cette mauvaise configuration. On permet ainsi d'élargir les tolérances tout en garantissant la *CF* avec un risque choisit par le concepteur. Cet aspect mérite cependant que l'on s'y penche plus encore, faisant apparaître des perspectives de recherches.

Afin de diffuser cette approche de tolérancement, nous proposons plusieurs représentations graphiques de la tolérance inertielle. La représentation bi-tolérance semble suffisamment évoluée et claire pour être diffusée.

L'analyse des défauts de forme par la méthode modale permet de disposer d'une méthode générique de caractérisation des écarts. Le principe d'obtention de la base de défauts élémentaires permet d'appliquer la méthode sur tous types de géométrie, c'est l'avantage de cette approche. De plus, les évolutions que nous apportons permettent à la méthode de trouver sa place aussi bien en métrologie qu'en conception.

- En métrologie, on permet la caractérisation d'un écart ou d'un lot d'écarts de forme. On représente ainsi la pièce par une signature et le lot par un couple de signature (moyenne et écart-type) ou par un couple de surface (moyenne et écart-type). L'analyse du défaut se fait sur la base naturelle ayant une signification métrique, les amplitudes des défauts élémentaires sont identifiées en unité métrique, ou dans une base complétée comportant des défauts technologiques. Cependant, cette dernière évolution permettant l'ajout de défaut de forme nécessite un minimum d'expertise, au risque de modifier la description d'un écart sans gagner en efficacité. Néanmoins, la méthode est applicable sur tout type de géométrie, et semble bien adaptée à la caractérisation des accostages grâce à la définition d'une bonne pratique qui précise l'utilisation de repère pour distinguer jeux et affleurements.
- En conception, les évolutions proposées sur la caractérisation modale des assemblages de surface permettent d'envisager le tolérancement modal. En effet, l'assemblage des composants rigides peut être envisagé selon plusieurs considérations dont l'assemblage sur les surfaces associées, type EGRM, ou sur les surfaces de contacts prenant en compte les défauts de forme. Pour traiter cette dernière approche considérant les écarts de forme, nous introduisons un inter-effort de maintien en position.

La fusion des deux approches a permis de mettre en évidence deux types de caractérisation statistique des écarts de forme, l'inertie 3D classique et l'inertie 3D ajustée. L'inertie classique mérite que l'on se penche plus sur son utilisation pour quantifier les écarts de forme. Pour autant, l'inertie ajustée associée aux modes rigides (translation et rotation) permet de mettre en œuvre une approche statistique de synthèse de tolérance 3D qui semble efficace. Cette approche permet d'élargir l'acceptation de lot centré, tout en garantissant la *CF* en cas de décentrage. Nous proposons ainsi une représentation graphique des variabilités permises sur le décentrage et l'écart-type de chaque composante d'écart de forme.

On peut cependant regretter que l'application ne soit pas poussée plus loin pour le moment. Bien que la caractérisation statistique des écarts de forme soit développée, le point qui fait défaut est la caractérisation statistique des écarts de mise en position, qui fait ainsi partie des perspectives.

Ce projet de recherche a permis de porter l'intérêt sur deux méthodes prometteuses de tolérancement de systèmes assemblés. On peut considérer que la problématique 1D est quasiment aboutie avec l'utilisation du tolérancement inertiel 1D ajusté. Ce projet se conclue par une perspective d'ouverture sur une approche de tolérancement statistique 3D (utilisation du critère inertie 3D ajustée sur les surfaces associées). La perspective apportée par la méthode modale concerne la dernière problématique, mais non des moindres, le tolérancement 3D avec prise en compte des défauts de forme.

Perspectives

Tolérancement 1D

- On peut mieux évaluer la notion de risque en utilisant d'autres hypothèses de répartition des lots [Anselmetti et al, 2003], ceci permettra d'affiner notre proposition permettant d'élargir les tolérances.
- Il faut valider les prédictions par des observations dans le milieu industriel. Cette démarche est en cours dans le cadre du Pole de Compétitivité Arve Industries qui finance une thèse sur la diffusion du tolérancement inertiel.

Tolérancement 3D

- On doit appliquer la méthode sur d'autres cas pour choisir une approche de synthèse des tolérances (chaînes de cotes indépendantes, combinées, méthode des ellipses etc.) et pour valider le choix de l'utilisation du critère inertie 3D ajustée.
- Existe-t-il une plus mauvaise configuration pour laquelle la CF est la moins bien respectée ? Quelle est alors la solution pour garantir la CF ?
- Une perspective qui est une étape importante dans l'évolution de l'approche et la prise en compte des jeux dans un assemblage.

Tolérancement 3D avec défauts de forme

- Il faut faire évoluer la prise en compte des défauts de forme vers un aspect statistique. Une première évolution sera présentée dans IPAS 2008.
- Peut-on exprimer statistiquement l'écart de mise en position en fonction d'une caractérisation statistique des écarts de forme ? Une première approche simple consiste à identifier les points de contact et à les considérer identiques pour toutes les formes du lot.
- Est-il possible de mettre en place une approche permettant l'identification des défauts élémentaires nuisibles à la CF ? Dans ce cas, la spécification par loi de comportement est-elle suffisante ?
- Une fois ces problématiques réglées, quel type de critère inertiel 3D faut-il utiliser pour la forme (classique ou ajusté) ? Peut-on garantir une CF dans toutes les configurations ou statistiquement ?

Bibliographie

Référence bibliographique

- [Adragna et al, 2006 a] Adragna P.-A., Pillet M., Samper S., Formosa F., "Inertial Tolerancing Guarantying a Cpk indice on the Final Characteristic in an Assembly Production", 6th International conference on integrated design and manufacturing in mechanical engineering, IDMME 2006,
- [Adragna et al, 2006 b] Adragna P.-A., Pillet M., Formosa F., Samper S., "Inertial tolerancing and capability indices in an assembly production", Integrated design and production Cpi 2005, Revue Internationale d'Ingénierie Numérique, Vol.2, No. 1-2, pp. 71-88 2006.
- [Adragna et al, 2006 c] Adragna P.-A., Samper S., Formosa F., Pillet M., "Modal Tolerancing – Application to Gap and Flush Analyses", 6th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, IDMME 2006.
- [Adragna et al, 2006 d] Adragna P.-A., Samper S., Pillet M., "Analysis of Shape Deviations of Measured Geometries with a Modal Basis", Journal of Machine Engineering : Manufacturing Accuracy Increasing Problems, Optimization, Vol. 6, No. 1, 2006, pp. 95-102
- [Adragna et al, 2007 a] Adragna P.-A., Pillet M., Samper S., Formosa F., "Guarantying a maximum of Non-Conformity Rate on the assembly resultant with a statistical tolerancing approach", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlanger, Germany, 2007
- [Adragna et al, 2007 b] Adragna P.-A., Pillet M., Samper S., Formosa F., "Inertial tolerancing applied to 3D and form tolerancing with the modal analysis ", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlanger, Germany, 2007
- [Adragna et al, 2007 c] Adragna P.-A., Samper S., Favrelière H., Pillet M., "Analyses d'un assemblage avec prise en compte des défauts de forme", Congrès CPI 2007, accepté
- [Ameta et al, 2007] Ameta G., Davidson J.K., Shah J., "Influence of Form Frequency Distribution for 1-D Clearance Which is Generated from Tolerance-Maps", Proceedings of the 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlanger, Germany, 2007

- [Anselmetti et al, 2002] Anselmetti B., Mawussi K., "Tolérancement fonctionnel d'un mécanisme : identification de la boucle de contact", Proceedings of the 4th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME 2002), Clermont-Ferrand, France, May 2002
- [Anselmetti et al, 2003] B. Anselmetti, M. Radouani, "Calcul statistique de chaînes de cote avec des distributions hétérogènes non indépendantes", Conception et Production Intégrées, CPI 2003, pp.1-16
- [Anselmetti, 2001] Anselmetti B., "Spécification fonctionnelle par la méthode CLIC", Revue Technologie et Formation, No. 97, juillet/août 2001, pp. 25-35
- [Anselmetti, 2005] Anselmetti B., "Génération automatique de la cotation fonctionnelle par la méthode CLIC", 4^{ème} Conférence International Conception et Production Intégrées (CPI 2005), Casablanca, Maroc, Novembre 2005
- [Balmas, 1999] Balmas A. L., "Les accostages de carrosserie", Rapport de stage DESS Industriel, Conception de Produits réalisé au sein de la société Plastic Omnium, 1999
- [Bender, 1962] Bender A., "Benderizing tolerances – a simple practical probability method of handling tolerances for limits-stack-ups", Graphic Science, pp. 17-21, December 1962
- [Benmayor, 2000] Benmayor L., "Dimensional analysis and similitude in microsystem design and assembly", thèse, EPFL Lausanne, 2000
- [Bleys et al, 2007] Bleys P., Van Gestel N., Cuypers S., Kruth J.-P., "Uncertainty due to limited sampling of circular features on coordinates measuring machines", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Specification and Verification for Assemblies, march 2007, Erlangen, Germany
- [Bonargent, 2005] Bonargent A. "Validation du tolérancement modal", Rapport de stage Master Recherche en Sciences et Technologies, Université de Savoie, 2005
- [Bourdet et al, 1976] Bourdet P., Clement A., "Controlling a complex surface with a 3 axis measuring machine", Annals of the CIRP, Vol. 25, Manufacturing Technology, pp. 359, January 1976
- [Bourdet et al, 1988] Bourdet P., Clement A., "A study of optimal-criteria identification based-on the small displacement screw model", Annals of the CIRP, Vol. 37, 1988, pp. 503-506

- [Bourdet, 1987] Bourdet P., "Contribution à la mesure tridimensionnelle : Modèle d'identification géométrique des surfaces, Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, Correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles", thèse, Université de Nancy, 1987
- [Bourdet et al, 1995] Bourdet P., Mathieu L., Lartigue C., Ballu A., "The concept of the small displacement taylor in metrology", Proceedings of the International Euroconference, Advanced Mathematical Tools in Metrology, Oxford, 27-30 septembre 1995
- [Bourgeois et al, 2005] Bourgeois F., De Meneses Y. L., Koelemeijer Chollet S., Jacot J., "Defining specifications from product functional requirements using inertial tolerancing in precision assembly", Proceedings of the IEEE international Symposium on Assembly and Task Planning, Montreal, Canada, July 2005
- [Bourgeois, 2007] Bourgeois F., "Vers la maîtrise de la qualité des assemblages de précision", thèse, EPFL Lausanne, 2007
- [Boyles, 1991] Boyles R. A., "The Taguchi Capability Index", Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 1, January 1991
- [Capello et al, 2000] Capello E., Semeraro Q., "Harmonic fitting approach for opkane geometry measurements", The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 16, pp. 250-258, 2000
- [Chan et al, 1988] Chan L. K., Cheng S. W., Spring F. A., "A New Measure of Process Capability : C_{pm} ", Journal of Quality Technology, Vol. 20, No. 3, 1998, pp. 162-175
- [Chase et al, 1991] Chase K. W., Parkinson A. R., "A survey of research in the application of tolerance analysis to the design of mechanical assemblies", Research in Engineering design 3, 1991
- [Chase, 1999] Chase K. W., "Tolerance Analysis of 2D and 3D assemblies", ADCATS Report, Vol. 94 No. 4, 1999
- [Clément et al, 1994] Clement A., Riviere A., Temmerman M., "Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques", Théories et pratiques, PYC Editions, 1994
- [Clement et al, 1996] Clement A., Riviere A., Serre P., "The TTRS : a common declarative modale for relative positioning, tolerancing and assembly", MICAD Proceedings, Revue de CFAO et d'informatique graphique, Vol. 11, 1996, pp. 149-164
- [Clozel, 2000] Clozel P., "3D tolerancing from preliminary study : industrial examples", IDMME 2000, Montréal, Canada, 2000

- [Cootes, 2004] Cootes T., "Timeline off developments in algorithms for finding correspondances across sets of shapes and images", www.isbe.man.ac.uk/~bim/Papers/correspondence_timeline.pdf , 2004
- [Cvetko et al, 1998] Cvetko R., Chase K.W., Maleby S.P., "New metrics for evaluating Monte Carlo tolerance analysis of assemblies", Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Conference and Exposition, 1998
- [Dantan, 2000] Dantan J. Y., "Synthèse des Spécifications Géométriques : Modélisation par Calibre à Mobilités Internes", thèse , Université de Bordeaux, 2000
- [Davatzikos et al, 2003] Davatzikos C., Cat X., Shen D., "Hierarchical active shape models, using the wavelet transform", IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 22, 3, 2003
- [Davidson et al, 2002 a] Davidson J. K., Shah J. J., "Geometric Tolerances : A New Application for Line Geometry and Screws", ImechE Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 216, Part C, 2002, pp. 95-104
- [Davidson et al, 2002 b] Davidson J. K., Mujezinovic A., Shah J. J., "A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Round Faces", ASME Transactions, Journal of Mechanical Design, Vol. 124, 2002, pp. 609-622
- [Denniston, 2006] Denniston B., "Capability indices and Conformance to Specification: The Motivation for Using Cpm", Quality Engineering, Vol. 18, pp. 79-88, 2006
- [Evans ,1975] Evans D. H., "Statistical tolerancing : the state of the art", newspaper of quality technology, Vol. 7, No. 1, 1975
- [Favrelière et al, 2007] Favrelière H., Samper S., Adragna P.-A., Giordano M., "3D statistical analysis and representation of form defect by a modal approach", 10th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, March 2007
- [Formosa et al, 2007] Formosa F., Samper S., Perpoli I., "Modal expression of form defects", In Models for Computer Aided Tolerancing in Desgin and Manufacturing, Springer series, 2007, pp. 13-22
- [Gaunet, 1993] Gaunet D., "Modèle formel de tolérancement de position. Contribution à l'aide au tolérancement des mécanismes en CFAO", Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994

- [Germain et al, 2007] Germain F., Giordano M., "A new approach for three-dimensional statistical tolerancing", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Erlanger, Germany, 2007
- [Germain, 2007] Germain F. , "Tolérancement Statistique Tridimensionnel, Intégration en CFAO", thèses pour obtenir le grade de docteur en Génie Mécanique de l'Université de Savoie, 2007
- [Gilson, 1951] Gilson J., " A New Approach to Engineering Tolerances", The Machinery Publishing CO. LTD, London, 1951
- [Giordano et al, 1992] Giordano M., Duret D., Tichadou S., Arrieux R., "Clearance Space in Volumic Dimensioning", Annals of the CIRP, Vol. 41 No. 1, 1992
- [Giordano et al, 1993] Giordano M., Duret D. "Clearance Space and Deviation Space. Application to three-dimensional chain of dimensions and positions ", Proceeding of the 3rd CIRP Seminars on Computer Aided Tolerancing, April 27-28, 1993
- [Giordano et al, 1999] Giordano M., Pairel E., Samper S., "Mathematical representation of tolerance zones", Proceedings of the 6th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 1999, pp. 177-186
- [Giordano et al, 2001] Giordano M., Kataya B., Pairel E., "Tolerance analysis and synthesis by means of clearance and deviation spaces", Proceedings of the 7th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 2001, pp. 345-354
- [Graves et al, 2000] Graves S., Bisgaard S., "Five ways statistical tolerancing can fail, and what to do about them", Quality Engineering, Vol. 13, No. 1, pp. 73-82, January 2000
- [Graves, 1997] Graves S., "How to Reduce Costs Using a Tolerance Analysis Formula Tailored to Your Organization", CQPI report, No. 157, April 1997
- [Graves, 2001] Graves S., " Tolerance Analysis Formula Tailored to Your Organization", Journal of Quality Technology, Vol. 33, No. 3, July 2001
- [Guilford et al, 1993] Guilford J. D., Turner J. U., "Advanced tolerance analysis and synthesis for geometric tolerances", Proceedings of the International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, CRTD, Vol. 27, 1993, pp. 187-198
- [Gupta et al, 1993] Gupta S., Turner J. U., "Variational solid modelling for tolerance analysis", IEEE Comuter Graphics & Applications, Vol. 17, 1993, pp. 64-74

- [Hernandez et al, 2002] Hernandez P., Giordano M., "Outil analytique d'aide au tolérancement géométrique et intégration en C.A.O.", IDMME 2002, Clermont-Ferrand, France, May 2002
- [Hong et al, 2002] Hong Y. S., Chang T.-C., "A comprehensive review of tolerancing research", International Journal of Production Research, Vol. 40, No. 11, pp. 2425-2459, 2002
- [Huang et al, 2003] Huang W., Ceglarek D., "Mode-based decomposition of part form error by discrete-cosine-transform with implementation to assembly stamping system with compliant parts", Annals of the CIRP, Vol. 51, No. 1, pp. 21-26, 2002
- [Jacot, 2000] Jacot J., "Maîtrise des coût – Où sont les coût ? Qui peut les maîtriser ?", Cours d'assemblage, chapitre 13, 2000
- [Jayaraman et al, 1989] Jayaraman R., Srinivasan V., "Geometric Tolerancing : 1. Virtual Boundary Requirement", IBM Journal of Research and Development, Vol. 33, No. 2, 1989, pp. 90-104
- [Kandikjan et al, 2001] Kandikjan T., Shah J. J., Davidson J. K., "A mechanism for validating dimensioning and tolerancing schemes in CAD systems", Computer-Aided Design, Vol. 33, 2001, pp. 721-737
- [Kane,1986] Kane V. E., "Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol. 18, pp. 41-52
- [Kataya, 2002] Kataya B., "Modélisation des tolérances géométriques des mécanismes pour leur intégration en conception assistée par ordinateur", thèse, Université de Savoie, 2002
- [Koelemeijer, 2002] Koelemeijer Chollet A., "Méthodologie pour la conception de micro-systèmes et de leur équipement d'assemblage", thèse, EPFL Lausanne, 2002
- [Kotz et al, 1993] Kotz, S., Johnson, N. L. "Process Capability Indices", Chapman & Hall, 1993
- [Kotz et al, 2002] Kotz S., Johnson N. L., "Process Capability indices – A Review, 1992-2000", Journal of Quality Technology, Vol. 34, No. 1, January 2002
- [Merkley, 1998] Merkley K.G., "Tolerance Analysis of Compliant Assemblies", dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, Brigham Young University, 1998

- [Mounaud et al, 2007] Mounaud M., Thiebaut F., Bourdet P., "Integrating flexibility of components in the assembly of aeronautics hydraulic systems", 10th CIRP Conference on Computer Aided Tolerancing, Specification and Verification for Assemblies, march 2007, Erlangen, Germany
- [Mujezinovic et al, 2004] Mujezinovic A., Davidson J. K., Shah J. J., "A New Mathematical Model for Geometric Tolerances as Applied to Polygonal Faces", ASME Transactions, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, 2004, pp. 504-518
- [Murauskaite et al, 2004] Murauskaite J., Giordano M., "Modélisation des tolérances géométriques par des graphes et applications à la détermination des tolérances", Rapport de stage Master Recherche en Sciences et Technologies, Université de Savoie, 2004
- [Lee et al, 2006] Lee N.K.S., Yu G., Joneja A., Ceglarek D. "The modeling and analysis of butting assembly in the presence of workpiece surface roughness and part dimensional error", International Journal of Manufacturing Technology, vol. 31, pp. 528-538, 2006
- [Parlar et al, 1999] Parlar M., Wesolowsky G. O., "Specification limits, Capability Indices, and Process Centering in Assembly Manufacture", Journal of Quality Technology, Vol. 31, No. 3, July 1999, pp. 317-325
- [Pearn et al, 1992] Pearn W. L., Kotz S., Johnson N. L., "Distributional and inferential properties of process capability indices", Journal of Quality Technology, Vol. 24, No. 4, pp. 216-231, 1992
- [Pearn et al, 2002] Pearn W. L., Lin P. C., "Computer program for calculating the p-value in testing process capability index Cpmk", Quality and Reliability Engineering International, Vol. 18, pp. 333-342, 2002
- [Pearn et al, 2004] Pearn W. L., Shu M. H., "Measuring manufacturing capability based on lower confidence bounds of Cpmk applied to current transmitter process", International Journal of Advance Manufacturing Technology, Vol. 23, pp. 116-125, 2004
- [Perpoli, 2004] Perpoli I., "Tolérancement des mécanismes flexibles, Application à une aile de carrosserie", Mémoire pour obtenir le diplôme d'ingénieur Conservatoire National des Arts et Métiers en Mécanique des Structures et des Systèmes, Centre Agréé de Grenoble (CUEFA) Antenne d'Annecy
- [Petit, 2004] Petit J. P., "Spécification Géométriques des Produits : Méthode d'Analyse de Tolérances. Application en Conception Assistée par Ordinateur", thèse, Université de Savoie, 2004

- [Pillet et al, 2005] Pillet M., Samper S., Formosa F., "Geometrical Inertial Tolerancing", 6ème Congrès International Pluridisciplinaire Qualité et Sûreté de Fonctionnement, QUALITA 2005, Bordeaux, France, 2005, pp. 757-764
- [Pillet et al, 2005] Pillet M., Adragna P.-A., Samper S., Formosa F., "Une approche du contrôle réception avec le tolérancement inertiel", 4^{ème} Conférence International Conception et Production Intégrées (CPI 2005), Casablanca, Maroc, Novembre 2005
- [Pillet et al, 2006 a] Pillet M., Adragna P.-A., Samper S., Formosa F., "Inertial Tolerancing : The Acceptance Sorting Problem", 6th International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering (IDMME 2006), Grenoble, France, May 2006
- [Pillet et al, 2006 b] Pillet M., Adragna P.-A., Germain F., "Inertial Tolerancing : The Sorting Problem", Journal of Machine Engineering : Manufacturing Accuracy Increasing Problems, Optimization, Vol. 6, No. 1, 2006, pp. 95-102
- [Pillet et al, 2007] Pillet M., Adragna P.-A., Ouzouf V., Guerra A. S., "Pilotage par carte de contrôle dans le cas du tolérancement inertiel", QUALITA 2007, mars 2007
- [Pillet, 2004] Pillet M., "Inertial Tolerancing", The Total Quality Management Magazine, Vol. 16, No. 3, pp. 202-209, May 2004
- [Radouani, 2003] Radouani M., "Contribution à la validation du modèle des chaînes de cotes", thèse, ENS Cachan, 2003
- [Requicha, 1977] Requicha A. A. G., "Part and Assembly Description Language : 1 – Dimensionning and Tolerancing", TM-19, Production Automation Project, 1977
- [Requicha, 1983] Requicha A. A. G., "Toward a theory of Geometric Tolerancing", The International Journal of Robotics Research, 1983, pp. 45-60
- [Samper et al, 2007] Samper S., Formosa F., "Form Defects Tolerancing by Natural Modes Analysis", Journal of Computing and Information Science in Engineering, Vol. 7, March 2007
- [Saporta, 2000] Saporta G., "Probabilités analyse des données et statistiques", Editions TECHNIP, ISBN : 2-7108-0565-02000
- [Sellem et al, 1998] Sellem E., Riviere A., "Tolerance analysis of deformable assemblies", proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference, Atlanta, USA, 1998

- [Shewhart, 1931] Shewart W. A., "Economic Control of Quality of Manufacturing Product", Van Nostrand, New York, 1931
- [Shiu et al, 2003] Shiu B.W., Apley D., Ceglarek D., "Tolerance allocation for sheet metal assembly using beam-base model", Transaction of the IIE Journal of Engineering and Technology, Industrial and Production Engineering, vol. 35, 4, pp.329-342, 2003
- [Sullivan, 1984] Sullivan L.P., "Reducing Variability – A New Approach to Quality", Quality Progress, Vol. 17, No. 6, pp. 15-21
- [Summerhays et al, 2002] Summerhays K.D., Henke R.P., Baldwin J.M., Cassous R.M., Brown C.W., "Optimizing discrete point sample patterns and measurement date analysis on internal cylindrical surfaces with systematic form deviations", Journal of the International Society for Precision Engineering, Vol. 26, 1, pp. 105-121, 2002
- [Taguchi et al, 1989] Taguchi G., Elsayed E. A., Hsiang T. C., "Quality engineering in Production Systems", McGraw-Hill, 1989, ISBN 0-07-062830-0
- [Turner, 1987] Turner J. U., "Tolerances in computer-aided geometric design", PhD thesis at Rensselaer Polytechnic Institute, 1987
- [Wang et al, 2000] Wang F. K., Hubele N. F., Lawrence F. P., Miskulin J. D., Shahriari H., "Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol. 31, No. 3, July 2000
- [Wikipedia, 2007 a] Wikipedia the free encyclopedia, "Gram–Schmidt process", http://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process
- [Wikipedia, 2007 b] Wikipedia, L'encyclopédie libre, "Somme de Minkowski", http://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_de_Minkowski
- [Wirtz, 1989] Wirtz A., "Vectorial tolerancing", Proceedings of the International Conference on CAD/CAT and AMT, 1989
- [Wyant et al, 1992] Wyant J.C., Creatch K., "basic wavefront aberration theory for optical metrology", Applied Optics and Optical Engineering, vol. 11, pp. 2-53, 1992
- [Zhang et al, 2006] H.Zhang, S.Wang, "Global optimization of separable objective functions on convex polyhedra via piecewise-linear approximation", Journal of Computational and Applied Mathematics 2006, Vol. 197, pp. 212-217

Norme

- [ISO 8015] "Dessins techniques : principes de tolérancement de base", ISO 8015, 1985
- [ISO 1101] "Dessins techniques – Tolérancement géométrique – Tolérancement de forme, orientation, position et battement – Généralité, définitions, symboles, indications sur les dessins", ISO 1101, 1983
- [ISO/TR 14638] "Spécification géométrique des produits (GPS) – Schéma directeur", ISO/TR 14638, 1995
- [ISO 1660] "Dessins techniques : cotations et tolérancement des profils", NF EN ISO 1660, 1995
- [ISO 12180-1] "Spécification géométrique des produits (GPS) – Cylindricité – Partie 1 : Vocabulaire et paramètres de cylindricité", ISO-12180-1, 2003

Annexe 1

Interpolation et extrapolation modale

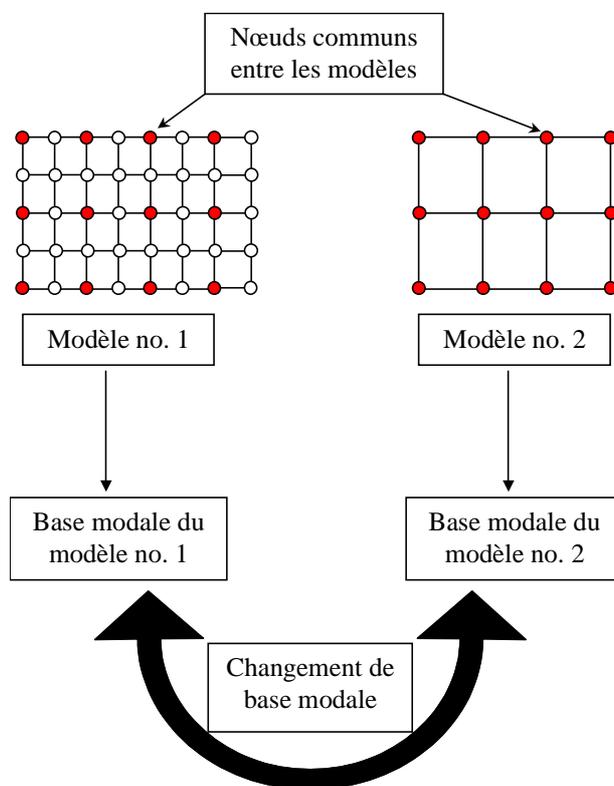


Figure a1-1 : Schéma de l'interpolation modale

Cet aspect connexe de la méthode modale permet dans un premier temps d'affiner la représentation graphique des formes. En effet l'approche que nous proposons ici permet d'interpoler des nœuds entre des points de mesure dans le but d'affiner la représentation de la forme.

Dans un second temps cette approche peut permettre l'extrapolation de défaut sur une surface déportée. Dans ce cas on ne traite que les défauts rigides, ce qui peut s'apparenter au transport des torseurs écarts.

Notre approche considère deux bases modales :

- la base d'analyse des écarts de forme, sur un modèle réduit (no. 2),
- la base d'affichage des résultats, sur le modèle complet (no. 1).

Le schéma de la figure a1-1 résume notre démarche d'interpolation/extrapolation. Les nœuds communs aux deux modèles permettent de calculer la matrice de changement de base d'un modèle vers l'autre. L'intérêt ici est de faire l'analyse d'écart de forme grâce au modèle no. 2, et de faire l'interpolation des nœuds non présents grâce au modèle no. 1. La démarche est présentée dans [Adragna et al, 2007 c].

On propose la méthode suivante :

- 1) Définir un modèle complet correspondant à ce que l'on cherche à afficher, on nomme ce modèle un modèle riche.
- 2) Grâce à ce modèle riche on définit une base modale qui caractérise tous les écarts de tous les nœuds de ce modèle riche, on définit la base modale riche B_{ri} ,
- 3) Définir un second modèle correspondant aux nœuds qui seront caractérisés par la méthode modale, on nomme ce modèle un modèle tronqué,
- 4) On tronque la base modale riche pour ne garder que les déplacements des nœuds du modèle tronqué, on définit ainsi la base modale tronquée B_{tr} ,
- 5) Les deux bases modales sont rendues orthogonales et métriques,
- 6) Finalement on détermine la matrice de passage de la base tronquée vers la base riche $P_{B_{tr.} \rightarrow B_{ri}}$.

Le calcul se fait en deux étapes :

Dans un premier temps on calcule la matrice de passage de la base euclidienne riche vers la base euclidienne tronquée :

$$P_{Tr. \rightarrow Ri}^{eucl.} = \left(B_{Ri.}^{eucl.} \right)_{|n_{Ri.} = n_{Tr.}} \cdot B_{Tr.}^{eucl.} \quad [a-1]$$

Où la notation $n_{Ri.} = n_{Tr.}$ indique que le nombre de nœuds de la base riche est réduit au nombre de nœuds de la base tronquée.

Puis on calcule la matrice de passage de la base riche métrique vers la base riche euclidienne :

$$P_{Ri.}^{métr. \rightarrow eucl.} = \left(B_{Ri.}^{eucl.} \right) \cdot B_{Ri.}^{métr.} \quad [a-2]$$

Et la matrice de passage de la base euclidienne tronquée vers la base métrique riche est définie par :

$$P_{Tr. \rightarrow Ri}^{eucl. \rightarrow métr.} = \left(P_{Ri.}^{métr. \rightarrow eucl.} \right)^{-1} \cdot \left(P_{Tr. \rightarrow Ri}^{eucl.} \right)^{-1} \quad [a-3]$$

Ainsi on peut maintenant calculer les coefficients modaux pour la base riche métrique à partir de la description modale dans la base tronquée euclidienne :

$$\Lambda_{Ri.}^{métr.} = P_{Tr. \rightarrow Ri}^{eucl. \rightarrow métr.} \cdot \Lambda_{Tr.}^{eucl.} \quad [a-4]$$

Remarque

Le nombre de vecteurs modaux de la base modale qui sert à la caractérisation de l'écart de forme est limité par le nombre de nœuds du modèle, égal dans le cas de la base complète, d'où la complexité des formes d'interpolation/extrapolation est limitée.

Interpolation modale

La métrologie traditionnelle par Machine de Mesure Tridimensionnelle et palpage mécanique est souvent un compromis entre le nombre de points de mesure et le temps de mesure. On identifie donc le nombre minimum de point de mesure permettant l'identification d'écarts de forme que l'on souhaite détecter. Une discussion sur ce point est présentée sur les défauts de circularité dans [Bleys et al, 2007]. Pour un nombre réduit de point de mesure, l'affichage de la surface mesurée peut laisser apparaître des facettes relativement larges par rapport à la taille totale de la surface, c'est là que l'interpolation modale intervient.

Un cas théorique sur le profil 1D permet d'illustrer nos propos par la figure a1-2. On constate des zones où les informations sur la forme sont absentes. L'interpolation modale permet de définir de combler les vides. Une discussion sur cette approche est proposée dans [Favrelière et al, 2007] .

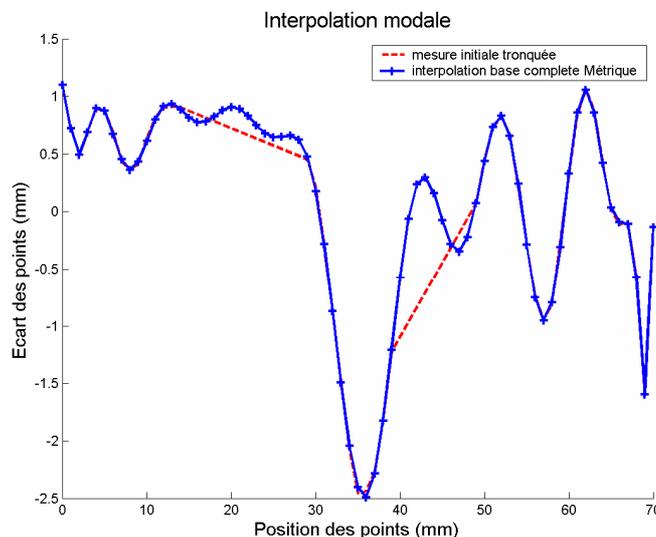


Figure a1-2 : Interpolation modale sur un profil

Extrapolation modale

Cette pratique est plus risquée car elle peut mener à des divergences des points extrapolé par rapport à la tendance globale de la forme. Néanmoins l'extrapolation peut être correcte si elle reste proche des points de mesure.

L'extrapolation modale peut avoir un intérêt pour enrichir l'affichage dans le cas d'une pièce mesurée par mesure de quelques profils, l'affichage peut alors être fait sur la surface entière.

Une autre application de cette approche peut concerner des zones non mesurables. Dans le cas de l'accostage des capots de balance, le profil d'accostage est difficilement mesurable. Or l'écart de forme de ce profil d'accostage est très fortement lié au défaut de forme de la surface du capot. On peut donc envisager l'extrapolation de la forme du profil en fonction de la forme de la surface.

Possibilités d'application

- Affiner l'affichage des résultats de points mesurés,
- Permettre la mesure de partie non accessible par extrapolation des écarts,
- Calcul des sensibilité des défauts rigides par rapport à la CF , le schéma de la figure a1-2 représente la démarche que l'on propose en traitant un cas 2D avec bras de levier.

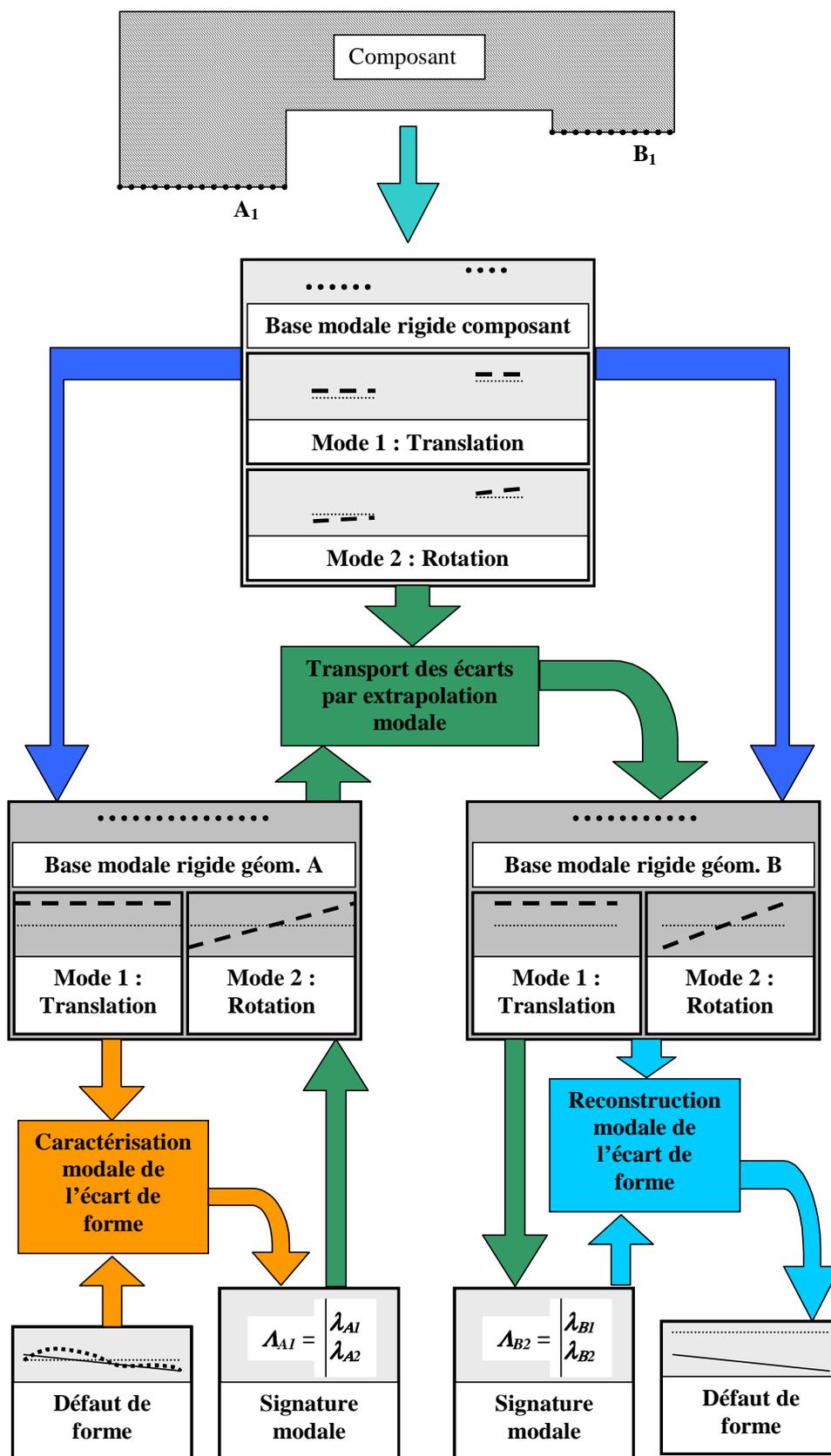


Figure a1-3 : schéma du transport des écarts de mise en position par l'extrapolation modale

Annexe 2

Base modale technologique métrique

A titre d'exemple, on intègre deux défauts technologiques pour caractériser les défauts de forme de type effet de bord. On procède ensuite à la transformation en base orthogonale métrique.

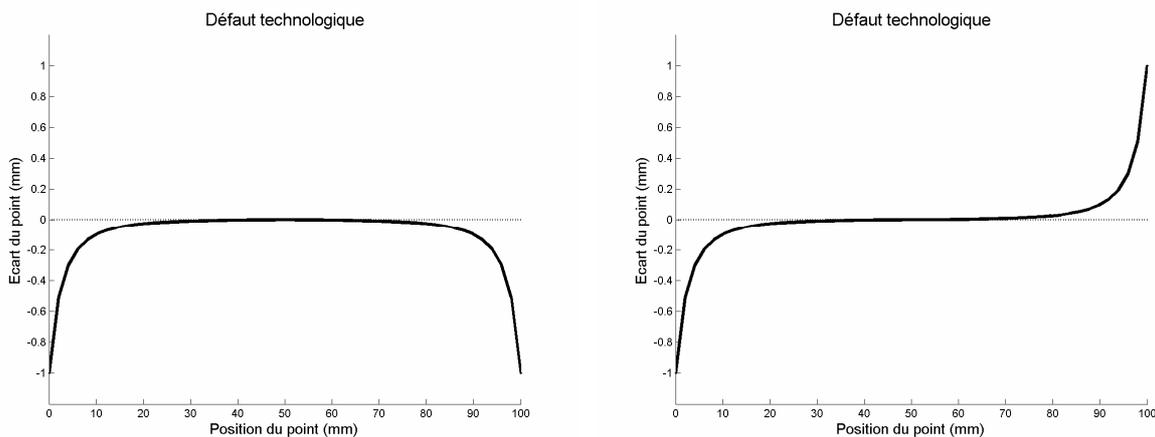


Figure a2-1 : Exemple de défauts technologiques

Les défauts technologiques sont créés par une fonction continue. Le premier mode technologique caractérise des défauts de bord du même côté, alors que le second mode symétrique caractérise des défauts de bord opposé.

La figure a2-2 présente la base modale métrique, intégrant les défauts technologiques. On peut constater le changement de forme dû à l'orthogonalisation de la base. L'effet se fait sentir à partir du troisième mode, cela signifie qu'initialement les défauts étaient légèrement dépendant des précédents.

On remarque que les modes naturels, décalés de deux places par rapport leurs positions initiales dans la base naturelle, ont aussi changé d'aspect. Cela est dû à leur légère dépendance (ressemblance) avec les modes précédents (technologiques).

On pouvait s'attendre à une telle modification. Le premier mode technologique, qui qualifie les défauts de bord du même côté, possède une moyenne non nulle, il est donc légèrement dépendant du défaut de translation. Cette remarque est valable pour le second mode technologique dont l'inclinaison ressemble au mode de rotation, d'où sa modification dans la base orthogonalisée.

L'effet des modes technologiques n'est pas négligeable non plus sur les modes de forme suivant. A titre d'exemple, le mode 3 de la base métrique correspond au mode 5 de la base technologique. On constate que le changement de forme entre ces deux modes (identiques à la base) est important.

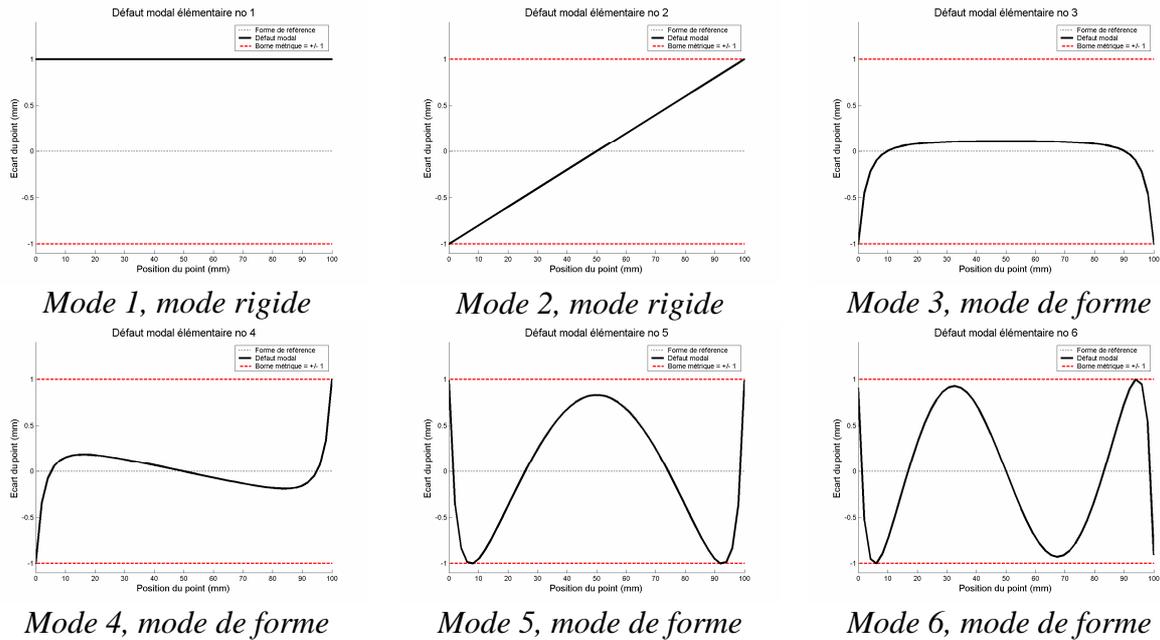


Figure a2-2 : Base modale métrique du modèle poutre

1.1.1.1 Dans la base modale technologie métrique

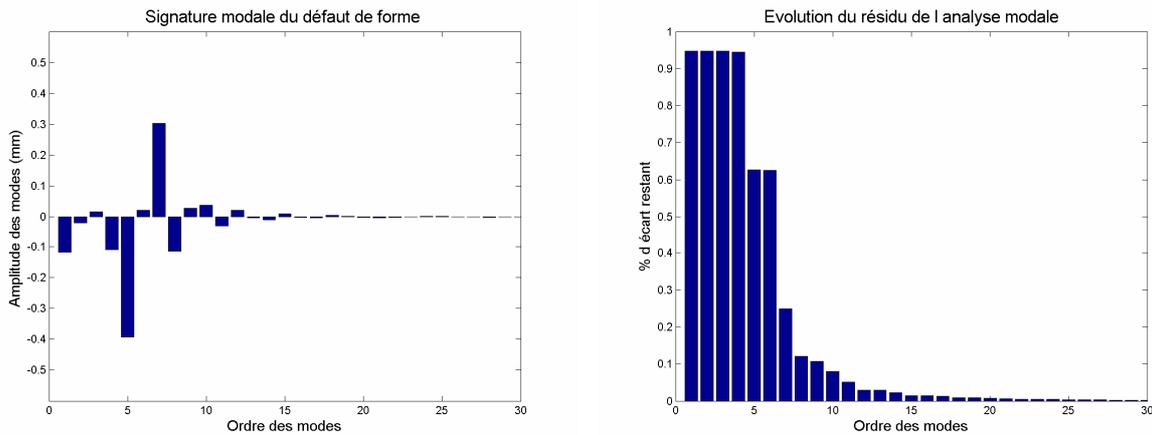


Figure a2-3 : Caractérisation de l'écart de forme dans la base technologique métrique

On se rend compte que la signature modale dans cette nouvelle base modale métrique incluant des défauts technologiques change d'aspect comparée à la signature modale initiale de la figure 3-3 de la page 108.

On peut constater que les deux modes technologiques intégrés ici ne sont pas très utiles à la description du défaut de forme. Bien que le coefficient modal du mode 4 ne soit du même ordre que celui du mode 1 (signature modale), son influence sur la caractérisation (décrite par le résidu) est faible (quasiment nulle) par rapport au même mode 1 (résidu de recomposition).

Résumé

Les travaux de recherche réalisés au cours de cette thèse ont été financés par le projet Européen Interreg IIIa : "Tolérancement des Systèmes Assemblés", conduit par l'Université de Savoie, l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne et plusieurs industriels Français et Suisse. Ce mémoire propose de traiter du tolérancement des systèmes assemblés qui est une problématique majeure dans la mise en production d'un produit résultant de l'assemblage de composant.

Le premier chapitre de ce rapport propose une modélisation unidimensionnelle ainsi qu'une présentation des méthodes majeures de tolérancement existantes dont deux approches traditionnelles de tolérancement par intervalle : au "pire des cas" et en "statistique", et une approche innovante : le tolérancement inertiel. Le tolérancement inertiel est une approche novatrice qui considère la conformité d'un lot en fonction de son écart quadratique par rapport à la valeur cible, similairement à la fonction de perte défini par Taguchi. Nouvellement introduit, le graphe (δ, σ^2) permet de faire l'analyse des tolérances des composants afin de vérifier le respect de la Condition Fonctionnelle sur la résultante de l'assemblage. Ce graphe (δ, σ^2) permet ainsi de définir l'ensemble des assemblages atteignable et d'évaluer la possibilité de ne pas respecter la Condition Fonctionnelle. Couplé à des simulations de Monte-Carlo, ce risque de non respect peut alors être estimé.

Le second chapitre est un développement du tolérancement inertiel dans le but de garantir le respect de la Condition Fonctionnelle. Cette dernière peut se présenter sous deux définitions : garantir un indice de capacité Cpk sur un intervalle de tolérance ou garantir un Taux de Non Conformité sur un intervalle de tolérance. La résolution de cette problématique donne une méthode simple qui permet de garantir la CF par l'utilisation d'un indice de capacité sur les composants. Des simulations de Monté-Carlo permettent de mettre en évidence le respect de la CF, et d'estimer un possible élargissement des tolérances tout en évaluant le risque de ne pas respecter la CF.

Le troisième chapitre propose une solution à la caractérisation des défauts de forme, la méthode modale. Cette approche permet de construire une base de défauts de forme élémentaires pour n'importe quelle géométrie en s'inspirant de l'analyse vibratoire des objets. L'approche subit des évolutions par rapport à sa définition initiale, et est appliquée sur un cas industriel, un tiroir de distributeur. Cette méthode modale permet aussi de caractériser les défauts d'accostages (jeux et affleurement), dont un cas d'application est l'analyse de l'écart de forme du profil d'accostage d'un capot plastique. La fin de ce chapitre 3 traite de l'assemblage de composants avec défauts de forme.

Le quatrième chapitre aborde l'aspect statistique de la caractérisation des écarts de forme. On présente ainsi la caractérisation moyenne d'un lot de forme ainsi que l'équivalence de l'écart-type. Enfin le critère Inertie de quantification des écarts est couplé à la méthode de qualification des formes. De cette fusion des deux approches, on propose une méthode de tolérancement 3D statistique sans défaut de forme ainsi qu'une représentation de ces écarts. Appliquées sur un cas théorique, cette modélisation semble prometteuse. Ce mémoire se termine par une conclusion et des perspectives de recherche.

Mots-clés Tolérancement, Chaîne de cotes, tolérancement inertiel, méthode modale, caractérisation des défauts de forme, tolérancement statistique, assemblage.