

Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète

Jacques-Olivier Lachaud

▶ **To cite this version:**

Jacques-Olivier Lachaud. Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2006. tel-00396332

HAL Id: tel-00396332

https://theses.hal.science/tel-00396332

Submitted on 17 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Bordeaux 1
Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

au titre de l'école doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux

soutenue et présentée publiquement le 6 décembre 2006

par Monsieur Jacques-Olivier LACHAUD

Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète

devant la commission d'examen formée de :

Monsieur Luc Brun,	Examinateur,	Professeur à l'ENSICAEN
Monsieur Srecko Brlek,	Examinateur,	Professeur à l'Université du Québec à Montréal
Monsieur Achille Braquelaire,	Examinateur,	Professeur à l'Université Bordeaux 1
Monsieur Jean-Marc Chassery,	Rapporteur,	DR CNRS au LIS, Grenoble
Monsieur Laurent Cohen,	Rapporteur,	DR CNRS au CEREMADE, Paris IX
Monsieur Jean-Pierre Reveillès,	Rapporteur,	Professeur à l'Université Clermont 1
Monsieur Pascal Lienhardt,	Examinateur,	Professeur à l'Université de Poitiers

Table des matières

Notations **1**

Introduction **5**

1 Modèles déformables et approches non-euclidiennes **9**
1.1 Introduction et positionnement . . . 9
1.2 Formulation des modèles hautement déformables . . . 10
1.2.1 Modèles déformables paramétriques . . . 10
1.2.2 Modèles déformables implicites . . . 13
1.2.3 Équivalences entre ces modèles . . . 15
1.2.4 Conclusion partielle . . . 16
1.3 Problématiques classiques . . . 16
1.3.1 Complexité dépendante de la résolution image . . . 17
1.3.2 Minimum local plutôt qu'optimum global . . . 18
1.4 Synthèse et approches non-euclidiennes . . . 19
1.4.1 Géométrie riemannienne et complexité . . . 19
1.4.2 Grille discrète et minimisation . . . 20
1.5 Conclusion . . . 21

2 Approche riemannienne des modèles déformables **23**
2.1 Introduction . . . 23
2.2 Modèle déformable à densité et topologie adaptative . . . 24
2.2.1 Représentation géométrique et adaptation de topologie . . . 24
2.2.2 Notions de géométrie riemannienne . . . 25
2.2.3 Interprétation géométrique . . . 26
2.2.4 Indications de mise en oeuvre . . . 27
2.2.5 Dynamique et forces . . . 28
2.2.6 Algorithme de segmentation/reconstruction . . . 28
2.3 Construction des métriques et géométrie de l'image . . . 29
2.3.1 Métrique pertinente pour une géométrie donnée . . . 30
2.3.2 Calcul de la géométrie des contours . . . 31
2.4 Validation expérimentale . . . 33
2.4.1 Indépendance vis-à-vis de la résolution image . . . 33
2.4.2 Analyse comparative des complexités en temps . . . 34
2.4.3 Segmentation d'images biomédicales . . . 36
2.5 Discussion . . . 39
2.5.1 Autres modèles adaptatifs . . . 39
2.5.2 Comparaison avec l'approche multirésolution . . . 40
2.5.3 Conclusion . . . 40

3 Approche discrète des modèles déformables **43**
3.1 Introduction et travaux connexes . . . 44

3.1.1 Segmentation par minimisation d'énergie . . . 44
3.1.2 Formulation probabiliste de la segmentation . . . 46
3.1.3 Segmentation par structuration en régions . . . 47
3.1.4 Variantes discrètes des modèles déformables . . . 48
3.1.5 Synthèse . . . 50
3.2 Formulation discrète des modèles déformables . . . 51
3.2.1 Définitions discrètes préliminaires . . . 52
3.2.2 Discrétisation de l'énergie . . . 53
3.2.3 Validité asymptotique dans le plan . . . 54
3.2.4 Modèle déformable discret . . . 56
3.3 Étude expérimentale . . . 57
3.3.1 Définition et calcul des énergies . . . 58
3.3.2 Segmentation par minimisation *a posteriori* . . . 58
3.3.3 Expérimentations sur des images 2D . . . 59
3.3.4 Lissage de contours 2D . . . 62
3.3.5 Expérimentations sur des images 3D . . . 62
3.3.6 Comparaison avec le modèle déformable euclidien . . . 63
3.4 Problématiques induites . . . 67

4 Représentation, déformation et géométrie des surfaces discrètes 69
4.1 Topologie et surfaces discrètes . . . 69
4.1.1 Introduction . . . 69
4.1.2 Topologie de la grille cellulaire et de Khalimsky . . . 71
4.1.3 Algébrisation : cellules orientées ; opérateurs bord . . . 72
4.1.4 Voisinage et parcours des surfaces discrètes . . . 74
4.2 Représentation et déformation des surfaces discrètes . . . 78
4.2.1 Codage des cellules et surfaces . . . 78
4.2.2 Déformation des surfaces . . . 79
4.3 Mesures géométriques . . . 80
4.3.1 Estimateurs géométriques discrets et convergence multigrille . . . 81
4.3.2 Tangente à une courbe 4-connexe du plan . . . 82
4.3.3 Estimation de la normale . . . 86
4.3.4 Périmètre du contour ou aire de la surface discrète . . . 87
4.3.5 Estimation de courbures . . . 89
4.4 Conclusion . . . 90

5 Géométrie discrète et convergence des estimateurs 93
5.1 Géométrie discrète linéaire . . . 93
5.1.1 Droites arithmétiques et segments discrets . . . 94
5.1.2 Représentation combinatoire des droites . . . 95
5.1.3 Résultats préliminaires sur les motifs . . . 97
5.1.4 Reconnaissance arithmétique des segments discrets . . . 97
5.1.5 Vision combinatoire de la reconnaissance . . . 98
5.1.6 Quelques propriétés des parties communes des segments maximaux . . . 100
5.2 Segments discrets sur un polygone convexe discret . . . 101
5.2.1 Polygones convexes discrets et discrétisation de formes convexes . . . 102
5.2.2 Segments maximaux et convexité . . . 103
5.2.3 Segments maximaux et arêtes de l'enveloppe convexe . . . 103
5.3 Propriétés asymptotiques des segments discrets . . . 106
5.3.1 Comportement asymptotique en nombre et en longueur moyenne . . . 106
5.3.2 Comportement asymptotique en longueur minimale . . . 107
5.3.3 Résultats expérimentaux sur les segments maximaux . . . 110
5.3.4 Etude asymptotique des coefficients des arêtes discrètes . . . 110
5.4 Convergence multigrille des estimateurs géométriques . . . 112

5.4.1 Estimation de la position de la courbe . . . 113
5.4.2 Estimation de la direction de la tangente . . . 114
5.4.3 Estimation de la longueur élémentaire et intégrale curviligne . . . 116
5.4.4 Mesure sur les contours discrets . . . 117
5.4.5 Estimation de la courbure . . . 118
5.5 Synthèse . . . 118

6 Conclusion et perspectives **121**
6.1 Synthèse des contributions . . . 121
6.2 Perspectives et projets . . . 123

A Bibliographie **131**

B Discrétisations **143**
B.1 Processus de discrétisation . . . 143
B.2 Ensembles du plan considérés pour la discrétisation . . . 144
B.3 Propriétés des ensembles parallèles réguliers . . . 145
B.4 Lien bord d'un ensemble et bord de son discrétisé . . . 148
B.5 Rétro-projection et bijectivité bord discret/continu . . . 150
B.6 Discrétisation d'une intégrale curviligne . . . 154

C Curriculum vitæ **157**
C.1 Cursus . . . 157
C.2 Activités pédagogiques et administratives . . . 157
C.2.1 Enseignements dispensés . . . 157
C.2.2 Responsabilités pédagogiques . . . 157
C.2.3 Écoles Jeunes Chercheurs . . . 158
C.2.4 Activités administratives . . . 158
C.3 Activités liées à la recherche . . . 159
C.3.1 Domaine de recherche . . . 159
C.3.2 Collaborations . . . 160
C.3.3 Projets de recherche et valorisation . . . 160
C.3.4 Organisation de conférence . . . 161
C.3.5 Animation scientifique . . . 161
C.3.6 Séminaires, cours et exposés invités . . . 161
C.4 Encadrement de la recherche . . . 162
C.4.1 Doctorants . . . 162
C.4.2 Etudiants en DEA ou Master . . . 163
C.4.3 Participation à des jurys de thèse . . . 163

D Publications **165**

Notations

Notations générales

$\stackrel{d}{=}$	Egalité par définition.
$\leftarrow$	Affectation.
$\wedge$	ET logique.
$\vee$	OU logique.
$\mathcal{O}$	Notation « Grand O ».
Θ	Notation « Grand Théta ».
Ω	Notation « Grand Oméga ».

Ensembles

$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des réels positifs ou nuls.
J_n	Entiers de 1 à n.
J	Ensemble d'entiers.
$\#J$	Cardinal de J.

Images, signaux

I	Fonction Image.
$\#I$	Taille en nombre de pixels/voxels d'une image I.
n	Dimension de l'espace image (pour une image bidimensionnelle $n = 2$, pour un volume de données $n = 3$).
G_σ	Fonction de Gauss d'écart-type σ.
$f * g$	Produit de convolution du signal f par le signal g.

Courbe, surface, forme, bord, familles de forme

$\mathbf{S}$	Courbe de $\mathbb{R}^2$ ou surface de $\mathbb{R}^3$.
ϕ	Champ scalaire définissant une forme implicite.
X	Forme, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
S	Forme convexe, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{bd}\, X$	Bord topologique de X dans $\mathbb{R}^n$.

$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ Famille des formes convexes compactes, de bord de classe C^3 à courbure strictement positive.

$\theta_X(x)$ Direction de la tangente au point x du bord de X.

$\kappa_X(x)$ Courbure au point x du bord de X (2D).

Vecteurs, Matrices

a-z Les vecteurs sont notés en gras.

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ Vecteurs de base.

${}^t\mathbf{x}$ Transposé du vecteur $\mathbf{x}$.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ Produit scalaire euclidien du vecteur $\mathbf{a}$ par le vecteur $\mathbf{b}$.

$\|\mathbf{v}\|$ ou $\|\mathbf{v}\|_E$ Norme euclidienne du vecteur $\mathbf{v}$.

$\|\mathbf{v}\|_R$ Norme riemannienne du vecteur $\mathbf{v}$. La dépendance par rapport à l'origine du vecteur est omise.

Opérateurs différentiels

f_x, $f_y \ldots$ Dérivées partielles de f par rapport aux variables x, $y \ldots$.

∇f Opérateur gradient.

$\nabla_\sigma f$ Opérateur gradient avec lissage de facteur σ.

Modèles déformables continus

$\mathbf{S}$ Courbe ou surface dans l'espace euclidien.

$E(\mathbf{S}, I)$ Energie de $\mathbf{S}$ dans l'image I.

$E_{\text{int}}(\mathbf{S})$ Energie interne de $\mathbf{S}$.

$E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I)$ Energie externe de $\mathbf{S}$ dans l'image I.

α, β, λ Paramètres classiques des modèles déformables.

Maillages, Géométrie différentielle et riemannienne

$\circledast$ Relation d'adjacence sur l'ensemble des sommets d'une maille.

g La métrique dont est muni l'espace.

Γ_{ij}^k Les coefficients de *Christoffel*.

$\mathcal{L}_E(\gamma)$ Longueur euclidienne d'un chemin γ.

$\mathcal{L}_R(\gamma)$ Longueur riemannienne d'un chemin γ.

$d_E(p, q)$ Distance euclidienne entre les deux points p et q.

$d_R(p, q)$ Distance riemannienne entre les deux points p et q.

$\mathbf{n}$ Vecteur normal à un contour, ou une isosurface.

$\mathbf{t}$ Vecteur tangent à un contour ou une isosurface.

κ_1, κ_2 Courbures principales d'une surface.

Modèles déformables discrets

O	Objet discret, sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$.
∂O	Bord de O comme ensemble de surfels.
$E(\partial O, I)$	Energie du bord discret de O dans l'image I.
$E_{\text{int}}(\partial O)$	Energie interne du bord discret de O.
$E_{\text{ext}}(\partial O, I)$	Energie externe du bord discret de O dans l'image I.
α, β, λ	Paramètres classiques des modèles déformables.
O^c	Complémentaire de l'objet O dans $\mathbb{Z}^n$.
β_O	Adjacence entre surfels du bord de O.
$\hat{l}(\sigma)$	Longueur élementaire estimée d'un surfel σ sur un bord discret.
$\hat{\kappa}(\sigma)$	Courbure estimée au surfel σ sur un bord discret.

Cellules, surfaces discrètes

$\mathbb{C}^n$	Grille cellulaire de dimension n.
$\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$	Espaces de Khalimsky.
$\text{Rg}(J, i)$	Rang de l'entier i dans l'ensemble d'entiers distincts ordonnés J.
$\|_s$	Ensembles des coordonnées ouvertes d'une cellule s (i.e. topologie de s).
$\perp_s$	Ensembles des coordonnées fermées d'une cellule s.
Δ	Opérateur bord inférieur.
∇	Opérateur bord supérieur.
$\langle s, t \rangle$	Produit scalaire entre deux chaînes de cellules s et t.
$\epsilon(s', i)$	Sens direct à partir de la cellule s' selon la coordonnée i.

Estimateurs géométriques

$\hat{x}$	Estimateur de position.
$\hat{\theta}$	Estimateur de la direction de la tangente.
$\hat{\mathbf{n}}$	Estimateur de vecteur normal.
$\hat{l}$	Estimateur de longueur ou aire élémentaire.
$\hat{\mathcal{A}}$	Estimateur d'aire.
$\hat{\kappa}$	Estimateur de courbure.

Géométrie discrète

C	Contour discret 4-connexe.
$n_{MS}(C)$	Nombre de segments maximaux du contour C.
C_i	i-ème point d'un contour discret.
$[C_i C_j]$	Chemin entre les i-ème et le j-ème points d'un contour discret.
Γ	Polygone convexe discret (CDP).
$n_e(\Gamma)$	Nombre d'arête du CDP Γ.
$\text{conv}(X)$	Enveloppe convexe de l'ensemble X dans $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{L}$	Longueur euclidienne d'un chemin dans le plan.
$\mathcal{L}^1$	Longueur L^1 de Minkowski d'un chemin dans le plan.
$\mathcal{L}^D$	Longueur discrète d'un chemin dans le plan discret (nombre de pas).
(a, b, μ)	Caractéristiques d'une droite standard de pente a/b et décalage μ.
$[0; u_1, \ldots, u_n]$	Fraction continue simple à coefficients partiels u_i.

Discrétisations

Dig	Un processus de discrétisation.
$\mathrm{Dig}_G(X,h)$	Discrétisation de Gauss de l'ensemble X avec le pas h.
$B_h^{\square}X$	Raccourci de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$.
$N_{X,h}$	Nombre d'arêtes de taille h de $B_h^{\square}X$ (i.e. nombre de surfels).
$\mathbf{n}_X(x)$	Vecteur normal extérieur sur le point $x \in \mathrm{bd}\,X$.
$\mathbf{w}_{X,h}(y)$	Vecteur normal extérieur au point y sur le bord discret $B_h^{\square}X$.
$\pi_{X,h}$	Rétroprojection du bord discret $B_h^{\square}X$ vers le bord $\mathrm{bd}\,X$.

Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation correspondent à des recherches effectuées depuis mon arrivée à Bordeaux en septembre 1999. J'ai choisi d'y présenter celles qui ont trait aux approches non-euclidiennes pour l'analyse d'image, la clé de voûte en étant la segmentation par modèle déformable. D'autres travaux plus amonts comme la topologie des espaces subdivisés et les invariants topologiques ou plus avals comme la reconstruction de colonne vertébrale en imagerie radiographique ne seront qu'évoqués. Ce choix, s'il peut sembler restrictif par rapport à une synthèse exhaustive de mes travaux, présente néanmoins une plus grande cohérence, à la fois dans les résultats et dans la démarche suivie. Ce mémoire montre notamment que l'utilisation d'autres géométries que la géométrie euclidienne classique, les géométries riemannienne et discrète, présente un intérêt certain en analyse d'images.

Les modèles déformables constituent une technique classique de segmentation et de reconstruction en analyse d'image. Dans ce cadre, le problème de la segmentation est exprimé sous forme variationnelle, où la solution est idéalement le minimum d'une fonctionnelle. Pendant ma thèse, je m'étais déjà intéressé aux modèles hautement déformables, qui ont la double caractéristique de se baser uniquement sur l'information image pour repérer ses composantes et de pouvoir extraire des formes de complexité arbitraire. Pour assurer l'initialisation du modèle déformable, j'avais aussi mis en évidence les liens entre surfaces discrètes et triangulations d'isosurfaces.

Ces premiers travaux expliquent le cheminement que j'ai suivi depuis dans mes recherches. En voulant attaquer deux problématiques fondamentales des modèles déformables (la minimisation du nombre de paramètres et de la complexité, la recherche d'une solution plus proche de l'optimale), j'ai été amené à changer l'espace de travail classique : l'*espace euclidien*. Le Chapitre 1 résume les approches classiques des modèles déformables, leurs différentes formulations, ainsi que les problématiques spécifiques auxquelles je me suis intéressé. Il montre enfin en quoi la formulation des modèles déformables dans des espaces non-euclidiens ouvre des pistes intéressantes pour les résoudre.

La première voie explorée et résumée dans le Chapitre 2 est d'introduire une *métrique riemannienne*, variable dans l'espace et dépendante de l'information image locale. L'utilisation d'une autre métrique permet de déformer virtuellement l'espace afin de concentrer l'effort de calcul sur les zones d'intérêt de l'image. Une métrique judicieusement choisie permet d'adapter le nombre de paramètres du modèle déformable à la géométrie de la forme recherchée. Le modèle pourra ainsi se déplacer très vite sur les zones homogènes, extraire les parties droites, planes ou peu courbées avec très peu de paramètres, et conserver une grande précision sur les contours significatifs très courbés. Une telle approche conserve voire améliore la qualité et la robustesse de la segmentation, et minimise à la fois la complexité en temps et le nombre d'itérations avant convergence.

La deuxième voie explorée parallèlement est le remplacement de l'espace euclidien continu par la *grille cellulaire discrète*. L'espace des formes possibles est alors fini tout en restant adapté à l'échantillonnage de l'image. D'autres techniques d'optimisation sont dès lors envisageables, la solution est bien définie et les problèmes numériques liés à la convergence d'un processus ne sont plus présents. Le Chapitre 3 décrit le principe suivi pour discrétiser le modèle déformable sur la grille cellulaire $\mathbb{Z}^n$. Il présente les premiers résultats obtenus avec un algorithme de segmentation *a posteriori*. Il met aussi en évidence les problématiques soulevées par le passage au discret, problématiques qui se sont révélées être des voies de recherche par elles-mêmes.

D'une part, il faut mettre au point des structures de données et des outils pour représenter les surfaces discrètes, pour mesurer leurs paramètres géométriques, et pour les faire évoluer. Le Chapitre 4 synthétise les travaux menés en ce sens. Cela nous conduit à proposer un nouveau formalisme algébrique pour représenter ces surfaces en dimension quelconque. Une étude précise des estimateurs géométriques discrets de tangente, de normale, de longueur et de courbure est ensuite conduite. Nous avons notamment évalué quantitativement leurs performances à basse échelle et proposé de nouveaux estimateurs pour les améliorer. Leurs propriétés asymptotiques lorsque la discrétisation est de plus en plus fine sont enfin discutées.

D'autre part, le modèle déformable discret doit approcher au mieux le comportement du modèle déformable euclidien à résolution donnée mais aussi simuler de plus en plus exactement ce comportement lorsque la résolution augmente asymptotiquement. Les estimateurs géométriques discrets se doivent dès lors d'être convergents. En analysant finement la décomposition des courbes discrètes en segments discrets maximaux, nous avons obtenu des théorèmes de convergence ou de non-convergence de certains estimateurs. Le Chapitre 5 résume cette étude de la géométrie des courbes discrètes 2D et des propriétés géométriques asymptotiques du bord d'une discrétisation.

Le mémoire se conclut par une synthèse des principaux résultats obtenus et montre les perspectives de recherche ouvertes par ces travaux.

Nouveaux résultats

La plupart des travaux rassemblés dans ce mémoire ont été publiés, et sont référencés en conséquence dans le texte pour le lecteur désireux de plus de détails. Cependant, ce mémoire comporte aussi de nouveaux résultats, car il représentait pour moi une opportunité pour établir formellement le lien entre modèles déformables discrets et continus. Cet objectif est finalement atteint dans ce mémoire, notamment grâce à de nouveaux résultats en géométrie discrète asymptotique. Ces contributions sont principalement :

Section 3.2.3. Cette partie établit des conditions sous lesquelles un modèle déformable discret a une énergie qui converge vers l'énergie de son homologue continu, lorsque le pas de discrétisation devient de plus en plus fin. En fait, nous établissons un théorème plus général d'approximation d'intégrale curviligne sur le bord d'un sous-ensemble du plan euclidien, le résultat précité étant alors un corollaire direct.

Section 4.3.1. Nous généralisons la définition formelle des estimateurs géométriques discrets pour des estimateurs de quantités géométriques locales comme la tangente ou la courbure. Ces estimateurs sont alors des fonctions du bord discret tout comme ces quantités géométriques étaient des fonctions de bord continu du sous-ensemble du plan.

Section 4.3.5. Cette section présente succinctement une analyse comparative de plusieurs estimateurs de courbure et pointe les faiblesses des analyses existantes. Définir un estimateur de courbure convergent apparaît alors comme un problème ouvert.

Section 5.3.2. Nous montrons ici que toutes les parties linéaires inextensibles des bords discrets, i.e. les segments maximaux, grandissent suivant une puissance du pas de discrétisation. Ce résultat permet de montrer ensuite la convergence multigrille *uniforme* de nombreux estimateurs géométriques.

Section 5.4. Cette section utilise les résultats précédents pour établir les premiers théorèmes de convergence multigrille d'estimateurs fonctionnels de quantités géométriques locales (tangente, normale). On s'intéresse à la fois aux vitesses de convergence uniforme et moyenne. On montre enfin que la convergence d'un estimateur de courbure est toujours un problème ouvert. Enfin, nous proposons une mesure (convergente) pour calculer des intégrales le long de bords discrétisés.

Annexe B. Cette annexe étudie en détail le problème de la discrétisation d'un ensemble du plan euclidien et du lien entre bord continu et bord de la forme discrétisée. Un premier résultat est que la projection de l'une sur l'autre n'est pas en général une bijection et que la partie non-bijective n'est pas de mesure nulle. Cela nous conduit à étudier plutôt la rétro-projection bord discrétisé vers bord discret, ce qui permet d'établir le théorème d'approximation d'intégrale curviligne ci-dessus.

A posteriori cette étude m'apparaît maintenant indispensable aussi pour une étude formelle de la convergence multigrille des estimateurs géométriques discrets de quantités géométriques locales.

Chapitre 1

Modèles déformables et approches non-euclidiennes

Ce chapitre vise à présenter de façon générale les modèles déformables, les principales variantes, et à mettre en lumière les problématiques qui m'ont particulièrement préoccupées. Il ne s'agit donc pas d'une bibliographie exhaustive, mais cette partie montre néanmoins l'étendue et la dynamique de ce domaine de recherche.

1.1 Introduction et positionnement

Le terme *modèle déformable* désigne un ensemble de techniques de segmentation et de reconstruction en analyse d'image. Quoique de très nombreuses formulations différentes ont été développés, on peut proposer le formalisme générique suivant, dont le principe général était déjà contenu dans l'article fondateur de Kass, Witkin et Terzoupolos [KWT88].

Définition 1.1. *Un* modèle déformable *est la donnée de : (i) un espace Σ de formes possibles plongées dans l'espace image, (ii) un critère $E : \Sigma \to \mathbb{R}$ caractérisant pour toute forme d'une part son adéquation avec la donnée image et d'autre part sa probabilité d'apparition, (iii) un processus itératif qui recherche la forme minimisant le critère.*

L'adjectif "déformable" provient du processus de minimisation, qui recherche la forme optimale par adaptation progressive d'une forme initiale. Cette formulation montre aussi que les modèles déformables font partie des *approches variationnelles*, cadre général pour le problème de la segmentation. D'ailleurs Morel et Solimini [MS95] ont montré que presque toutes les grandes méthodes de segmentation (grossissement de régions, division-fusion, détection de contours, approximation par morceaux) peuvent être rattachées à ce cadre.

Mes recherches se sont focalisées sur une famille particulière de modèles déformables, dotée des caractéristiques suivantes :

- méthodes applicables en dimensions 2 et 3, voire nD pour les approches discrètes ;
- extraction de composantes image de géométrie et topologie arbitrairement complexe ;
- composantes image définies par leurs contours (i.e. forts gradients de l'image).

Dans la suite, ces modèles seront appelées *hautement déformables*. Je me suis donc intéressé aux aspects fondamentaux des modèles déformables, et moins à leur utilisation dans des applications avec de fortes connaissances *a priori*. S'il est évident que des méthodes génériques donnent souvent des résultats moins précis et moins robustes que des méthodes dédiées, l'amélioration de modèles déformables génériques en amont permet souvent d'améliorer toute une famille de méthodes spécifiques. Ainsi, la déformation de l'espace image par une métrique riemannienne telle que présentée au Chapitre 2 permet

par exemple d'améliorer la complexité de la plupart des modèles déformables paramétriques. C'est dans cet esprit que j'ai mené mes recherches sur différentes familles de modèles déformables.

1.2 Formulation des modèles hautement déformables

Dans cette section nous rappelons les grandes approches de modèles hautement déformables proposées dans la littérature. Vu leur grande variété, une taxonomie est toujours délicate et sujette à controverse. Nous proposons ici de les découper en deux grandes familles : (i) les modèles déformables paramétriques où la géométrie du bord de la forme est décrite explicitement (approche Lagrangienne), (ii) les modèles déformables implicites où la forme est une isopotentielle d'un milieu (approche Eulérienne). Nous référons le lecteur au livre de Osher et Paragios [OP03] et au tour d'horizon de Fedkiw *et al.* [FSS03] pour un état des lieux assez complet des approches implicites, au tour d'horizon de Montagnat, Delingette et Ayache [MDA01] ou à la thèse de Taton [36] pour une synthèse de ces deux familles.

1.2.1 Modèles déformables paramétriques

Ils ont été introduits en segmentation d'images 2D et 3D par Kass, Witkin et Terzopoulos [KWT88, TWK88], sous le terme *snake*. Les formes sont les courbes ou surfaces paramétrées. Des formulations très proches existaient déjà pour la reconstruction à partir de nuage de points [Ter86].

1.2.1.1 Formulation variationnelle

La segmentation est réalisée en minimisant une fonctionnelle appelée *énergie*. Cette énergie associée à une forme paramétrique $\mathbf{S}$ plongée dans une image I est une somme de deux termes :

$$E(\mathbf{S}, I) = E_{\text{int}}(\mathbf{S}) + \lambda E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I), \tag{1.1}$$

le premier favorisant les formes lisses et régulières (terme de régularisation ou énergie interne), le second exprimant l'adéquation entre forme et image (énergie externe). Le paramètre λ permet de pondérer les énergies. On peut le voir comme un facteur d'échelle qui, selon sa valeur, extraira une approximation régulière mais peu précise de la forme recherchée ou au contraire capturera le moindre détail.

L'énergie interne s'écrit classiquement comme une énergie de tension et une énergie de rigidité, en 2D :

$$E_{\text{int}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\int \alpha(u)\|\mathbf{S}_u\|^2 + \beta(u)\|\mathbf{S}_{uu}\|^2 du, \tag{1.2}$$

et en 3D :

$$E_{\text{int}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\int \alpha(u,v)(\|\mathbf{S}_u\|^2 + \|\mathbf{S}_v\|^2) + \beta(u,v)(\|\mathbf{S}_{uu}\|^2 + 2\|\mathbf{S}_{uv}\|^2 + \|\mathbf{S}_{vv}\|^2) du dv. \tag{1.3}$$

En première approximation, le modèle déformable soumis aux seuls termes du premier ordre a le comportement d'une membrane élastique, qui cherche à minimiser sa longueur ou son aire. Soumis aux seuls termes du second ordre, il devient rigide et cherche à minimiser sa courbure. Les coefficients α et β permettent d'adapter localement le comportement du modèle.

L'énergie externe dépend complètement de l'application considérée. Elle dérive en général d'un potentiel P. La plus couramment utilisée dans le cadre de la segmentation se base sur l'information de gradient image :

$$E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I) = \int f(\|\nabla_\sigma I_{|\mathbf{S}(u)}\|) du, \text{ et en 3D, } E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I) = \int f(\|\nabla_\sigma I_{|\mathbf{S}(u,v)}\|) du dv. \tag{1.4}$$

avec f décroissante[1] et ∇_σ un opérateur gradient d'échelle σ. Cette énergie est donc faible lorsque la forme se situe essentiellement sur de forts gradients de l'image. Sa minimisation favorise donc les formes qui collent à des contours image.

Beaucoup d'autres énergies externes ont été proposées, notamment des énergies intégrant une information de région [CBA93, Ron94, CSD96, ZY96].

On peut déjà remarquer que, comme une forme peut être paramétrée de différentes manières, l'énergie d'une forme dépend aussi de sa paramétrisation. C'est un premier inconvénient de cette formulation extrinsèque, car la segmentation ne devrait pas être dépendante de la façon dont la forme est représentée.

1.2.1.2 Formulation cinétique et dynamique

Le problème variationnel précédent n'est pas soluble directement sauf cas particulier. Les équations d'Euler-Lagrange fournissent une condition nécessaire que tout extremum local de la fonctionnelle doit satisfaire. Pour le *snake 2D*, i.e. Eq. (1.2) et Eq. (1.4), les équations à l'équilibre sont :

$$\forall u, \underbrace{-\frac{\partial}{\partial u}(\alpha(u)\mathbf{S}_u)}_{\mathbf{F}_{\text{élastique}}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\beta(u)\mathbf{S}_{uu})}_{\mathbf{F}_{\text{rigide}}} - \underbrace{\lambda \nabla P_{|\mathbf{S}(u)}}_{\mathbf{F}_{\text{externe}}} = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

La dérivation est similaire pour le cas 3D [CC93]. La résolution de l'EDP précédente est souvent itérative, la forme $\mathbf{S}$ étant considérée dépendante du temps et partant d'une position initiale donnée. Chaque point de la forme suit donc une loi d'évolution

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{F}_{\text{interne}} + \mathbf{F}_{\text{externe}} + \cdots, \tag{1.6}$$

où $\mathbf{F}_{\text{interne}}$ est la somme des forces internes $\mathbf{F}_{\text{élastique}}$ et $\mathbf{F}_{\text{rigide}}$. A chaque pas la courbe ou la surface se déforme donc dans la direction de plus grande pente de l'énergie.

On peut aussi considérer le modèle comme étant un système physique soumis à des forces et une inertie induite par sa masse m. On rajoute un terme dissipatif de friction ρ pour empêcher le modèle d'osciller autour de sa position d'équilibre.

$$m\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{F}_{\text{interne}} + \mathbf{F}_{\text{externe}} + \cdots. \tag{1.7}$$

Les deux équations d'évolutions précédentes (Eq. (1.6) et Eq. (1.7)) indiquent déjà que la déformation s'arrêtera sur tout extremum *local* de la fonctionnelle. La formulation avec inertie peut éviter certains minima locaux non significatifs, mais impose le réglage d'un autre paramètre. Beaucoup de travaux ont porté sur la définition de forces permettant soit d'éviter les minima non significatifs, soit de réduire le nombre de minima locaux. On peut citer : force d'expansion [Coh91], force d'attraction vers des contours extraits par un détecteur type Canny [Coh91, CC93, Del94a], flux de vecteur gradient (GVF) [XP98, YB02] qui est une régularisation du champ de vecteur d'attraction aux contours, forces dérivant d'information région [CBA93, Ron94, CSD96, ZY96], forces dérivant d'un champ électrostatique induit par les contours [JWR04].

1.2.1.3 Géométrie et discrétisation

La forme $\mathbf{S}$ peut être paramétrée de différentes façons : sommets spécifiant la géométrie et discrétisation par différences finies [KWT88, TWK88, MBL+91, GSZPW98], éléments finis [CC93, MT95a], splines [MSMM93, Bas94], surface spline [LC91, Gué95]. En 2D Liang *et al.* [LMT99] ont proposé un modèle déformable unifiant la plupart des *snakes* précédents. D'autres approches sont possibles comme les Fourier *snakes* [CSD96, SD96, SKBG96] où la courbe/surface paramétrée est décomposée sur une base de Fourier.

[1] Typiquement, $f(x) = -x^2$.

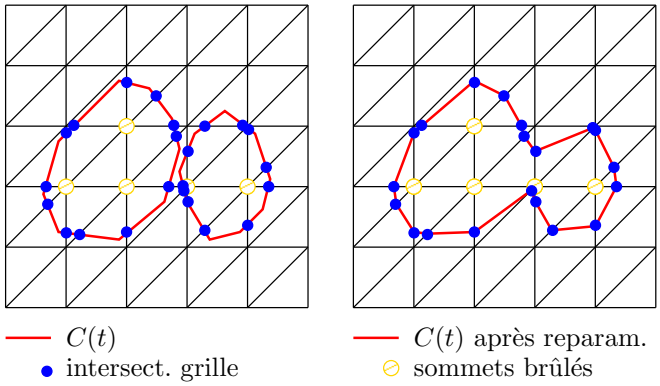


FIG. 1.1 – Changements de topologie par calcul de l'intersection du modèle avec une grille simpliciale.

En fait, à l'exception notable des surfaces B-splines déformables de Leitner et Cinquin [LC91, Lei93], les seuls modèles déformables paramétriques capable d'extraire des formes de topologie quelconque sont des discrétisations par différences finies de courbes ou surfaces paramétrées. La géométrie de la forme $\mathbf{S}$ est alors décrite explicitement par des sommets reliés par une relation de voisinages (courbe(s) polygonale(s) en 2D, maille ou surface triangulée en 3D). Pour une description plus complète des différents modèles géométriques proposés dans la littérature, le lecteur pourra se référer à [MDA01, 36].

1.2.1.4 Adaptation de la topologie

Rapidement après la création des modèles déformables, le besoin s'est fait sentir de disposer de modèles capable d'appréhender des formes arbitrairement complexes, notamment pour l'imagerie biomédicale [LC91]. Des extensions ont donc été proposées, en 2D et en 3D. Par ailleurs, cela a conduit au développement des modèles déformables implicites, pour lesquels les changements de topologie sont automatiques (voir Section 1.2.2).

Sur les images 2D, il est relativement aisé d'adapter la topologie du modèle à ses déformations géométriques. Il s'agit juste de détecter si deux segments d'un contour s'intersectent. Le changement de topologie peut se faire en mettant à jour les voisinages. La détection des intersections est parfois faite naïvement avec une complexité quadratique [Hor99], parfois en subdivisant l'espace par une grille pour obtenir une complexité quasi-linéaire [MT95b, DM00], parfois par une subdivision hiérarchique de l'espace [19, BLS03].

Sur les images 3D, la problématique est plus délicate. C'est pourquoi nous détaillons un peu plus les techniques proposées.

Leitner et Cinquin [LC91, Lei93] ont été les premiers à proposer des mailles B-splines capables d'adapter leur topologie, mais sur des images pré-segmentées. Sans rentrer dans les détails, le processus effectue d'abord les déformations convexes, puis des déformations hyperboliques ou concaves en observant si il y a auto-intersection. Ce processus, assez coûteux du fait des calculs d'intersection de surfaces splines, est ensuite itéré.

McInerney et Terzopoulos proposent une technique d'adaptation de topologie en 2D [MT95b] et 3D [MT97] pour les contours polygonaux ou surface triangulées : les *T-snakes*. L'idée est de laisser la maille se déformer puis d'examiner son intersection avec une grille simpliciale de résolution de l'ordre du pixel/voxel (voir Figure 1.1). L'examen de ces intersections et une stratégie de déformation uniquement expansionniste permet de déterminer à chaque étape l'ensemble des pixels/voxels intérieurs à la forme. Une nouvelle surface triangulée est alors recalculée. Ce principe est extensible en nD. On peut noter qu'il se rapproche clairement des méthodes implicites, tout en étant plus difficile à implémenter.

Lachaud et Montanvert [11, 14, 3] impose des contraintes de régularité sur les longueurs des arêtes de la surface triangulée afin de détecter les intersections en temps $P \log P$ pour P sommets. Des opérateurs

de retriangulation transforment la topologie à l'endroit détecté. A noter que ce modèle a été aussi adapté avec succès au suivi de cellules à topologie variable en imagerie biologique 4D [BDFCBL02]. Duan et Qin [DQ04] proposent une technique d'adaptation de topologie assez similaire mais leur modèle peut reconstruire des données non structurées type nuage de points.

Delingette [Del94a, Del94b, Del99] représente le modèle déformable par une maille simplexe 3D voire 4D (duale du complexe simplicial) et propose des opérateurs de changements de topologie, sans toutefois indiquer comment détecter automatiquement les collisions.

Bredno *et al.* [BLS03] propose un modèle déformable 2D/3D/4D défini par un complexe simplicial. Les intersections sont détectés en deux passes, d'abord par intersection de boîtes englobantes (environ $P \log P$) puis par résolution d'inéquations linéaires. Le complexe est ensuite reconstruit localement.

Enfin, certains auteurs [JWR04] proposent de ne pas déformer une maille mais plutôt un système de particules en interaction. L'avantage évident est de ne pas avoir à gérer les changements de topologie, les interactions étant en revanche plus lentes à calculer.

1.2.2 Modèles déformables implicites

Les modèles déformables implicites sont issus des travaux en physique portant sur la propagation d'interface dans un milieu. Ce genre de propagation a des liens très forts avec le flot de courbure moyenne et l'équation géométrique de la chaleur. Plus précisément, soit $\phi(\mathbf{x}, t)$ un champ scalaire 2D dont le niveau 0 définit une courbe $\mathbf{S}$ au temps $t = 0$. On cherche alors à simuler l'évolution de cette courbe à l'aide de l'évolution du champ ϕ, dont le niveau 0 doit avoir le même comportement qu'aurait la courbe au cours du temps. On comprend dès lors pourquoi on parle de modèle déformable défini implicitement. Une conséquence immédiate est que son évolution est indépendante de toute paramétrisation. Il n'y a pas de changements de topologie à gérer sur la courbe $\mathbf{S} = \{\phi = 0\}$, car le champ ϕ ne change en fait jamais de topologie. Les changements de topologie de son niveau 0 au cours du temps sont transparents pour le processus d'évolution.

1.2.2.1 La méthode level set

Osher et Sethian [OS88, Set99b] ont montré que si l'équation d'évolution de $\mathbf{S}$ s'exprimait sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}_{|t} = F(\kappa_{|\mathbf{S}(t)})\mathbf{n}_{|\mathbf{S}(t)}, \tag{1.8}$$

où F est une fonction de la courbure κ et $\mathbf{n}$ la normale unitaire orientée vers l'intérieur, alors son évolution est identique à l'évolution du niveau 0 de $\phi(\mathbf{x}, t)$ sous l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}_{|\mathbf{x},t} = F(\kappa_{|\mathbf{x},t})|\nabla \phi_{|\mathbf{x},t}|. \tag{1.9}$$

Cette transformation d'une évolution de courbe à une évolution de milieu est appelé *méthode level-set*. Cette approche est extensible en dimension quelconque, où l'(hyper-)surface est une isopotentielle d'un champ scalaire de même dimension que l'image. Néanmoins, son implantation numérique pour des dimensions ≥ 3 n'est pas triviale. On note aussi que la vitesse F a été étendue de la courbe à tout le domaine. L'extension classiquement utilisé définit la vitesse d'un point comme étant la vitesse du point le plus proche sur le niveau 0.

Historiquement deux familles de modèles déformables implicites ont été proposées pour la segmentation d'image : (i) les *modèles déformables géométriques* dont l'évolution est régie par une vitesse F tenant compte de l'image et de la géométrie locale, (ii) les *modèles déformables géodésiques* qui minimisent une fonctionnelle définie à partir de l'image et dont l'évolution résulte de la dérivation de cette fonctionnelle. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons ces deux approches, nous montrons quelques schémas numériques et nous évoquons les liens entre ces approches et les modèles explicites.

1.2.2.2 Modèles déformables géométriques

Les modèles déformables géométriques (ou contour actif géométrique) ont été proposés indépendamment par Caselles *et al.* [CCCD93] et Malladi *et al.* [MSV94, MSV95]. La vitesse F y est définie de manière intuitive. Elle croît avec la courbure et est freinée par les contours de l'image :

$$F(\mathbf{x}, t) = c(\mathbf{x})(V_0 + \kappa_{|\mathbf{x},t}), \tag{1.10}$$

où V_0 est une constante forçant la diffusion de la courbe et où c est une fonction décroissante de l'intensité du contour et tendant vers 0, e.g. $c(\mathbf{x}) = (1 + |\nabla_\sigma I_{|\mathbf{x}}|^2)^{-1}$. Il a été montré que ce modèle retrouve effectivement une forme si l'image de contours est parfaite (i.e. c est nulle sur ces points) [CCCD93]. De nombreuses extensions ont été proposées en 2D et en 3D [Whi94, SKS97, TK97]. En 3D, la courbure κ est remplacée par la courbure moyenne ou par des fonctions des courbures moyenne et gaussienne (voir par exemple [XYP01]).

Ces modèles ont un comportement similaire aux *snakes* car ils incorporent à la fois un terme d'accroche aux données (la fonction c) et un terme de lissage, matérialisé par la diffusion proportionnelle à la courbure qui a tendance à minimiser la longueur ou l'aire de la forme.

1.2.2.3 Modèles déformables géodésiques

Les contours actifs géométriques présentent deux inconvénients majeurs : (i) si l'image de contour n'est pas parfaite, la courbe va finir s'échapper par les trous dans le contour au bout d'un certain temps, (ii) l'équation d'évolution est *ad hoc* et ne dérive pas de la minimisation d'une fonctionnelle. Plusieurs auteurs [CKS97, CKSS97, YKK+97] ont donc proposé une fonctionnelle dont la minimisation est analogue au calcul d'une géodésique dans un espace déformé par l'image. La fonctionnelle s'écrit

$$J(\mathbf{S}) = \int c(\mathbf{S}(u))|\mathbf{S}_u(u)|du. \tag{1.11}$$

En paramétrant $\mathbf{S}$ par l'abscisse curviligne, on constate que $J(\mathbf{S})$ est la longueur de la courbe dans un espace riemannien de métrique déformée isotrope $c(\mathbf{x})^2$. Dans cet espace, à une position donnée, les distances sont d'autant plus affaiblies que les contours sous-jacents sont forts. Les courbes les plus courtes sont alors celles qui longent les contours forts. Les *géodésiques* entre paires de points sont exactement les courbes les plus courtes et longent ainsi les contours forts. Le même principe est applicable en dimension 3 [CKSS97, YKK+97], où l'objectif est de déterminer des surfaces minimales dans un espace déformé par les contours.

On peut s'intéresser alors à l'évolution de la courbe lorsqu'elle cherche à minimiser J. La théorie des variations montre que l'équation d'évolution résultante inclut un nouveau terme de rappel aux données (cf. Eq. (1.9) et Eq. (1.10)) tel que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}_{|\mathbf{x},t} = c(\mathbf{x})(V_0 + \kappa_{|\mathbf{x},t})|\nabla \phi_{|\mathbf{x},t}| + \nabla c_{|\mathbf{x}} \cdot \nabla \phi_{|\mathbf{x},t}. \tag{1.12}$$

Là encore, Caselles *et al.* [CKS97] montrent que pour une diffusion V_0 suffisante, la courbe convergera vers un contour parfait.

On peut aussi définir des contours actifs implicites dont l'évolution est guidée par la minimisation d'une fonctionnelle prenant en compte des informations de région (par exemple l'intensité moyenne et la variance de la région interne au contour). Cela peut se faire avec les dérivées de domaine, qui transforment ces énergies de région en champ de vitesse [ABFJB03, JB03, JBBA03].

1.2.2.4 Schémas numériques d'évolution

Si les modèles implicites sont naturellement hautement déformables, le calcul de l'évolution de tout le champ ϕ impose *a priori* une complexité de chaque itération au moins égale à la résolution de l'image

(notée $\#I$). Les temps de calcul sont donc en général supérieurs au modèles explicites. Delingette et Montagnat [DM00] indiquent des temps environ 7 fois plus importants pour l'évolution de courbes. Les livres de Sethian [Set99b] et Osher et Paragios [OP03] décrivent plusieurs schémas numériques, dont certains diminuent le temps de calcul de ϕ ou améliorent le pas d'intégration.

Dans le cas où F a toujours le même signe, l'évolution de la courbe est équivalente à une carte de distance (non euclidienne) à la courbe initiale. La méthode du *Fast Marching* [Set99a] permet de calculer en temps $\mathcal{O}(\#I \log \#I)$ la carte de distance sur tous les pixels de l'image. En élisant les pixels en groupe plutôt qu'un par un, on peut encore améliorer la complexité jusqu'à $\mathcal{O}(\#I)$ [Kim01].

Dans le cas général, la méthode de la bande étroite [AS95] réduit le domaine de calcul autour du niveau 0 de ϕ. Si d est la taille d'un élément de l'image et k la largeur de la bande, et si $|S|$ la longueur ou l'aire de la courbe ou surface, alors la complexité de mise à jour de ϕ devient $\mathcal{O}(\frac{k|S|}{d})$. On note néanmoins qu'il faut périodiquement réinitialiser la bande de calcul lorsque le niveau 0 de ϕ se rapproche du bord de la bande. Le recalcul de la carte de distance peut aussi être évité avec un choix judicieux de la fonction F hors du niveau 0 [GF00]. Une méthode similaire à la bande étroite est aussi proposée dans [Whi95]. Finalement, il est aussi possible d'utiliser une subdivision arborescente type *quadtree* adaptée à ϕ qui concentre les calculs autour de son niveau 0 [Str99b, Str99a].

Enfin, le pas d'intégration est souvent petit pour conserver une certaine stabilité dans les schémas numériques explicites. Le schéma AOS (*additive operator splitting*) [WK03] permet de discrétiser l'équation d'évolution sous forme semi-implicite et de la résoudre en temps linéaire en le nombre de variables. Le principe est de décomposer les équations axe par axe : les matrices à inverser sont alors tridiagonales et facilement inversibles. Le pas d'intégration peut alors être augmenté d'un facteur 20 avec un coût par itération seulement 3 ou 4 fois supérieur.

Toutes ces optimisations permettent de réduire fortement les temps de calcul des méthodes implicites. La segmentation du cortex à partir d'image IRM 3D peut ainsi être réalisé en seulement quelques minutes avec une précision raisonnable [GKRR02].

1.2.3 Équivalences entre ces modèles

Malgré les apparences, ces modèles partagent de nombreux points communs et peuvent même être équivalents sous certaines conditions.

Ainsi les surfaces implicites de Whitaker [Whi94] évoluent sous l'action des forces de tension et rigidité des *snakes*. Caselles *et al.* [CKS97] et Aubert et Blanc-Ferraud [ABF99] ont montré une équivalence [2] entre les deux minimisations suivantes :

$$J_1(\mathbf{S}) = \alpha \int |\mathbf{S}_u(u)|^2 du + \lambda \int c(|\nabla_\sigma I_{|\mathbf{S}(u)}|)^2 du, \tag{1.13}$$

$$J_2(\mathbf{S}) = 2\sqrt{\alpha\lambda} \int |\mathbf{S}_u(u)| c(|\nabla_\sigma I_{|\mathbf{S}(u)}|) du. \tag{1.14}$$

On reconnaît dans J_1 l'énergie d'un *snake* en omettant le terme de rigidité (Eq. (1.2) et Eq. (1.4)) et dans J_2 la fonctionnelle minimisée par les contours actifs géodésiques (Eq. (1.11)). Cette équivalence est aussi valable en dimension 3 [ABF99].

Xu, Yezzi et Prince [XYP00, XYP01] ont étendu le travail précédent pour inclure aussi le terme de rigidité et certaines forces externes des *snakes* dans l'équation d'évolution des contours actifs. Du moment que le *snake* est paramétré par son abscisse curviligne, le contour actif peut avoir un comportement similaire. Par exemple, cette équivalence permet d'inclure des forces région et les forces GVF.

[2] Ces deux problèmes de minimisations sont équivalents au sens où la direction de plus forte pente pour l'un est aussi une direction qui décroît le critère pour l'autre et vice-versa.

1.2.4 Conclusion partielle

On voit ainsi que les deux grandes familles de modèles déformables, malgré des origines distinctes et des mises en œuvre très différentes, ont une approche similaire de la segmentation. Elles sont aussi complémentaires, et l'application envisagée dicte souvent laquelle est la mieux adaptée.

Plus précisément, les modèles hautement déformables paramétriques permettent d'intégrer facilement des contraintes et des forces et donc de les spécialiser pour des applications précises. C'est d'ailleurs ce qui a fait leur succès dans de nombreux domaines de la vision et de l'analyse d'images. Comme la géométrie de la forme est définie explicitement par une approximation de son bord, le nombre de paramètres de ces modèles est significativement moindre par rapport à la résolution de l'image : $\mathcal{O}(N)$ en 2D pour une image $N \times N$ et $\mathcal{O}(N^2)$ en 3D pour une image $N \times N \times N$. Le calcul des forces et d'une itération de déformation du modèle a donc cette complexité. En revanche, le contrôle et/ou l'adaptation de la topologie reste faisable mais est assez coûteux, avec une complexité supérieure au nombre de paramètres du modèle. Il est aussi en général difficile de garantir théoriquement le bien fondé des techniques d'adaptation topologique proposées.

Les modèles hautement déformables implicites ont l'avantage de gérer naturellement les changements de topologie de la courbe ou de la surface en évolution. Ils disposent aussi d'un cadre théorique assez solide et de nombreux schémas numériques existent pour les mettre en œuvre. Avec certaines hypothèses, certains schémas numériques ont même une complexité par itération similaire à celle des modèles paramétriques. Mais leur implantation est alors beaucoup plus délicate. Enfin, comme souligné par un certain nombre d'auteurs (par exemple Xu *et al.* [XYP00, XYP01]), il est plus difficile d'intégrer de nouvelles forces dans ces modèles, ce qui les rend un peu moins souples que les modèles paramétriques.

1.3 Problématiques classiques

On a vu que les modèles hautement déformables ont une grande versatilité et peuvent segmenter des formes quelconques en ne se basant que sur des informations locales de l'image. Leurs contraintes de régularité les rendent aussi robustes à des bruits ou défauts de l'image lors de leur recherche d'une position d'équilibre. Ils conviennent aussi à la segmentation d'images 3D et sont donc utilisés intensément en imagerie biomédicale.

Néanmoins la grande majorité de ces modèles présente un certain nombre de défauts communs qui rend leur utilisation parfois délicate. On peut citer :

Paramétrage des coefficients. C'est un aspect très délicat pour l'utilisateur, souvent omis dans les articles (sauf rares exceptions comme [LL93, MK02]). Même en imaginant avoir une méthode extrayant le minimum global des énergies ou fonctionnelles, il n'y a pas une solution optimale mais un espace de solutions optimales. Le problème du paramétrage reflète en fait les questions relatives à la formulation de la segmentation en terme de minimisation.

Sensibilité à l'initialisation. Les modèles déformables transforment le problème de minimisation en une EDP avec condition initiale. La fonctionnelle étant non convexe, il est clair que l'initialisation peut changer fondamentalement la solution à l'équilibre. Suivant l'application, on effectue en général un pré-traitement, supervisé ou non-supervisé, qui définit une forme initiale que l'on espère proche de la solution. Par exemple, au cours de ma thèse [12, 15], je me suis intéressé à l'initialisation d'une surface triangulée déformable à l'aide d'une variante de l'algorithme du *marching-cube* [LC87]. Cela permet d'une part d'éviter des minima non significatifs et d'autre part d'avoir besoin de peu d'itérations pour converger. Néanmoins, cela impose d'avoir un critère pour discerner l'intérieur d'une région de son extérieur.

Complexité croissante avec la résolution image. Comme il a été indiqué précédemment, les modèles déformables ont une complexité qui croît aussi vite que la taille des images. Les volumes de données à traiter sont de plus en plus importants car d'une part la résolution des procédés

d'acquisition s'améliore et d'autre part de nouveaux types de données apparaissent (séquences vidéo, imagerie 3D + temps). Les temps de traitement sont donc de plus en plus importants. Nous discuterons plus en détail de cette problématique dans la Section 1.3.1.

Minimum local. A l'équilibre, un modèle déformable ne vérifie qu'une condition nécessaire de minimalité. En général, le modèle s'arrête donc sur le premier minimum local extrait par descente en gradient. Plusieurs approches ont été proposées pour limiter ce problème. Nous reviendrons dessus dans la Section 1.3.2.

Les deux derniers points sont à l'origine de plusieurs de mes axes de recherche. Je vais donc les détailler dans les deux sections qui suivent afin de justifier les travaux que j'ai entrepris pour attaquer ces problématiques.

1.3.1 Complexité dépendante de la résolution image

Les modèles hautement déformables capturent la géométrie de formes arbitrairement complexes. Cette complexité est directement dépendante de l'échantillonnage de l'image, qui déterminera le degré de détail possible. *A priori*, il faut donc une précision équivalente pour le modèle et pour l'image, c'est-à-dire de l'ordre du pixel ou voxel. Pour les modèles paramétriques, leur nombre de paramètres P est en $\mathcal{O}(\frac{|S|}{d})$, avec $|S|$ la longueur ou l'aire du modèle et d le pas d'échantillonnage de l'image. En général, cette complexité est d'environ un ordre de grandeur inférieur à la dimension de l'image, i.e. $P = \#I^{\frac{n-1}{n}}$. Pour les modèles implicites, le nombre de paramètres se situe aussi entre $\#I^{\frac{n-1}{n}}$ et $\#I$. Nous référons le lecteur à la thèse de Taton pour une comparaison plus précise des complexités ([36], Chap. 2).

Le nombre de paramètres définit la complexité minimum en temps et en espace par itération. La résolution de l'image a donc un impact très significatif sur les temps de calcul, mais aussi sur la taille mémoire de la forme reconstruite. La résolution de l'image influe aussi beaucoup sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la position d'équilibre. En effet, pour assurer la stabilité numérique, les déplacements de la courbe doivent être limités à chaque itération (en théorie bornés par la moitié de d). Le pas d'intégration est donc borné et un modèle déformable partiellement initialisé loin de l'objet à extraire (loin en nombre de pixels/voxels), mettra un nombre d'itération minimal pour être en mesure d'approcher la position d'équilibre. Enfin, un grand nombre de paramètres n'est pas souhaitable vis-à-vis du processus de segmentation car le nombre de minima locaux augmente avec le nombre de variables.

Un certain nombre de méthodes ont été proposée pour limiter les temps de calcul. Elles agissent sur différents points :

Initialisation. Il est évident que, pour un problème de minimisation bien posé, une initialisation proche de la solution est souhaitable. La littérature fourmille de méthodes pour obtenir de bonnes initialisations pour certains types d'image. Comme les solutions proposées sont spécifiques à l'application considérée, elles n'entrent pas dans le cadre de ce mémoire et nous ne détaillerons pas plus ce point.

Approche multirésolution. Afin de limiter les calculs, de nombreux auteurs recherchent une esquisse de la forme finale dans un sous-échantillonnage de l'image [MBL+91, LL93, Whi94, Elo94, Gué95, SKBG96, 3, MDSA00]. Une fois à l'équilibre, le modèle est raffiné puis le même processus est lancé sur un sous-échantillonnage plus fin de l'image. Et ainsi de suite, jusqu'à utiliser l'image original. Ce genre d'approche impose que les basses fréquences de l'image portent une information significative sur l'objet d'intérêt. Dans le cas d'approches contour comme les modèles déformables, cette hypothèse n'est pas vérifiée en général. De plus, si une approche multirésolution permet effectivement de limiter le nombre de paramètres dans ses premières étapes de calcul, la dernière étape nécessite elle un nombre de paramètre proportionnel à la résolution image. Le modèle peut donc perdre beaucoup de temps pour récupérer les derniers détails (e.g. en imagerie vasculaire, les vaisseaux n'apparaissent qu'au niveau le plus précis). Enfin, certains auteurs discutent même la pertinence d'une approche grossier vers fin [Ron94], qui peut amener le modèle à s'enfermer dans un minimum non significatif, et proposent une approche du fin au grossier.

Nous verrons au Chapitre 2 que la géométrie riemannienne donne aussi une réponse plus satisfaisante que la multirésolution.

Adaptabilité locale. Dans certaines situations, il est possible de diminuer le nombre de paramètres localement, lorsque ces paramètres sont redondants. Par exemple, les parties assez rectilignes ou plates ont besoin de peu de sommets pour être décrits avec précision. Au contraire, les zones très courbées doivent conserver toute la précision du modèle. Ce type de maille adaptative est très répandu dans d'autres domaines, comme la modélisation géométrique, la synthèse d'image ou les maillages. Delingette et Montagnat [Del94a, Del94b, DM00] ont ainsi proposé une maille déformable dont la densité de sommets dépend de la courbure. Malheureusement, le modèle risque de manquer des détails significatifs dans ses évolutions ou bien de raffiner exagérément la maille sur un artefact de l'image. Leur approche n'est donc parfaitement exploitable qu'*a posteriori*, une fois que le modèle est déjà à son position d'équilibre. Les autres méthodes à densité adaptative existantes [VT92, LKE00] ont une topologie préfixée. De plus, afin de respecter les équations d'évolution théoriques et d'augmenter la robustesse [BLS03], l'intégration des forces doit être faite sur tous les pixels ou voxels de l'image que traverse le modèle. On voit bien qu'un modèle adaptatif aura toujours une complexité dépendante de $\#I$.

Amélioration des forces. Il s'agit ici de diminuer le nombre d'itérations en faisant le moins possible de petits pas inutiles. L'idée de base est soit de propager au maximum la direction du contour le plus proche, soit de forcer le modèle à se déplacer sans information externe : force de gonflement [Coh91, CCCD93, MSV94], champ de gradient image fortement lissé (σ important) dans les premières itérations [KWT88], force contour défini comme gradient d'une carte de distance à des contours pré-segmentés [Coh91, CBA93, Del94a], flux de vecteur gradient [XP98], force dérivant d'un potentiel électrostatique [JWR04], forces issues d'une information région qui comblent une information contour manquante.

Augmentation du pas d'intégration. Enfin, on peut forcer le modèle à effectuer de plus grands pas. Afin de conserver la stabilité numérique, il est indispensable d'utiliser d'autres méthodes numériques que Euler explicite. Les méthodes semi-implicites sont plus stables [KWT88, WK03] mais ne sont pas adaptées aux modèles paramétriques à topologie variable. Il faudrait en effet inverser régulièrement la matrice d'évolution à chaque changement. Même pour les méthodes implicites, le déplacement maximal reste limité à $\frac{d}{2}$ [WK03]. De façon générale, comme la fonctionnelle à minimiser n'est pas analytique, les méthodes numériques évoluées sont souvent aussi coûteuses en temps que les méthodes standards, même si le nombre d'itération est significativement diminué.

1.3.2 Minimum local plutôt qu'optimum global

Les problèmes variationnels induits par les modèles déformables sont résolus par des heuristiques itératives qui, *grosso modo*, choisissent localement une direction de déplacement qui fait diminuer la fonctionnelle à minimiser. Cette « myopie » amène le modèle à glisser vers le premier minimum local, dont l'énergie peut être arbitrairement plus grande que l'optimum global. Nous listons ci-dessous les différentes réponses à ce problème que l'on peut trouver dans la littérature :

Initialisation Cf. section précédente.

« **Convexification** » **de la fonctionnelle.** L'ajout de certaines contraintes ou de nouvelles forces peut considérablement améliorer la forme de la fonctionnelle, en quelque sorte la rendre plus convexe. La façon la plus commune est de rajouter une énergie de région, qui va comparer l'information image de la région englobée à des statistiques attendues [CBA93, Ron94, CSD96, ZY96, ABFJB03, JB03, JBBA03]. Une autre manière est d'améliorer le potentiel d'attraction aux contours [Coh91, CBA93, Del94a, XP98, JWR04]. Bien entendu, rien ne garantit que la fonctionnelle devient effectivement convexe, même si en pratique les modèles déformables ont alors tendance à être moins sensible à l'initialisation et à converger vers des solutions cohérentes.

Optimum global dans des cas particuliers. On peut aussi restreindre l'espace des formes possibles et calculer l'optimum sur ce sous-espace. Cohen et Kimmel [CK97] utilisent la formulation géodésique des contours actifs implicites, pour trouver le contour optimal entre deux points fixés. La technique est très rapide car elle se base sur l'utilisation du *fast marching*. En utilisant des idées

similaires, il est possible d'extraire un réseau vasculaire en spécifiant un point de départ [DC01], ou une surface à bord en spécifiant deux courbes fermées [AC05]. En revanche, pour les deux dernières extensions, rien ne garantit que la surface reconstruite soit effectivement l'optimum.

Discrétisation partielle et programmation dynamique. L'espace des formes possibles autour d'une forme initiale peut être rendu fini. Ainsi, pour chacun des n sommets de la forme, on propose m positions différentes possibles. Si on restreint les énergies de lissage à ne dépendre que de deux sommets consécutifs, on peut utiliser des techniques de programmation dynamique pour extraire l'optimum en temps $\mathcal{O}(nm^3)$ [AWJ90, Tag97]. D'autres auteurs préfèrent rechercher en temps $\mathcal{O}(nm)$ une approximation de l'optimum [WS92, Hor99]. Une autre technique, assez équivalente, est de donner une double initialisation, une interne et une externe à la forme recherchée, et de déformer les deux formes l'une vers l'autre [GN97]. Sommets internes et externes sont en bijection et reliés par un chemin discrétisé en m points. La programmation dynamique permet alors aussi de trouver un optimum. Des extensions aux contours à topologie adaptative [GSO00] et aux surfaces (un certain nombre référencé dans [Toh03]) existent.

Discrétisation complète. Une dernière approche consiste à limiter l'espace des formes possibles aux sous-ensembles de la grille discrète image. Bien qu'il ne soit toujours pas possible d'examiner toutes les configurations possibles, d'autres algorithmes d'optimisations peuvent être envisagés. Parmi toutes les méthodes proposées, on retiendra notamment les approches bayesiennes, où la recherche du maximum *a posteriori* se fait par un processus stochastique [GG87, BYM91, Sto94]. Le contour est dynamique, au sens où le processus stochastique ne considère que des transitions très locales dans sa recherche. Quoique nous reviendrons plus en détails sur les méthodes discrètes de segmentation au Chapitre 3, nous pouvons d'ores et déjà indiquer que ces méthodes ont tendance à oublier la régularisation géométrique des contours actifs. Elles visent donc plutôt à classifier les pixels d'une image qu'à extraire une composante de géométrie régulière. Elles ne rentrent donc souvent pas dans le cadre des approches contours.

1.4 Synthèse et approches non-euclidiennes

Les modèles déformables constituent un domaine de recherche très actif en analyse d'image. Parmi ces modèles, je me suis plus spécialement intéressé aux modèles hautement déformables, qui ont une grande souplesse de représentation, qui nécessitent peu d'information *a priori*, et qui peuvent être ainsi déclinés dans de nombreuses applications. Les paragraphes qui précèdent ont néanmoins démontré que ces qualités impliquent une complexité importante du processus de segmentation. Le fait que ce processus de minimisation soit uniquement local en est une autre conséquence. Ces problématiques ont guidé mes recherches depuis 1999. J'ai cherché à m'y attaquer en changeant l'espace classique de déformation, i.e. l'*espace euclidien*. J'ai donc exploré parallèlement deux axes de recherche, correspondant aux problématiques précitées, et qui sont décrits dans les sections suivantes. Dans les deux cas, la contrainte a été de conserver au maximum la généricité et l'extensibilité des modèles hautement déformables.

1.4.1 Géométrie riemannienne et complexité

La géométrie euclidienne est isotrope et invariante par translation. Les plus courts chemins, ou *géodésiques*, y sont droits. La géométrie riemannienne est dépendante de la position dans l'espace. Les déplacements ont une mesure qui dépend à la fois de leur position et de leur orientation. Les géodésiques peuvent dès lors être courbées. Deux points apparemment très proches peuvent être éloignés suivant une mesure riemannienne.

On voit dès lors tout le potentiel de cette géométrie. Grâce à elle, certains zones de l'espace peuvent être mises en valeur en les grossissant artificiellement ; d'autres zones moins significative pour l'application en cours peuvent être réduites. Une fois cette géométrie définie en tout point de l'espace d'intérêt, un *œil* — un algorithme — analysant cet espace suivant un pas riemannien régulier, consacrerait naturellement

plus de ressources aux zones grossies qu'au zones réduites. L'algorithme devient donc adaptatif et peut voir sa complexité diminuée en fonction de l'image.

La géométrie riemannienne a déjà été utilisée dans le contexte des modèles déformables, notamment pour définir les contours actifs ou surfaces actives géodésiques [CKS97, CKSS97] comme des chemins minimaux dans un espace déformé par l'image. En revanche, cette utilisation est essentiellement formelle et sert notamment à montrer le lien entre modèles explicites et implicites. De plus, la métrique riemannienne proposée est conforme (i.e. ne dépend pas de la direction) et vise à réduire les zones de contours plutôt qu'à les étendre.

Le Chapitre 2 décrit le plongement d'un modèle hautement déformable paramétrique dans une géométrie riemannienne. On constate qu'en pratique seules les mesures de distance changent. La géométrie riemannienne est définie en tout point par un pré-calcul sur l'image qui extrait le *tenseur de structure*. Il indique où sont les contours forts de l'image, leur orientation et leurs courbures. Une bonne utilisation de ces informations permet de repérer les zones homogènes et de les réduire. Les distances autour des contours dépendent de la courbure et de l'alignement avec le contour. Le modèle se déplace ainsi très vite sur les zones homogènes, extrait les parties droites, planes ou peu courbées avec très peu de paramètres, et garde une grande précision sur les contours significatifs très courbés. Une telle approche conserve voire améliore la qualité et la robustesse de la segmentation, et minimise à la fois la complexité en temps et le nombre d'itérations avant convergence. Le nombre de paramètres du modèle est lui aussi minimisé tout en conservant une précision similaire au modèle euclidien. Il n'est dépendant que de la géométrie des composantes image et non plus de la résolution. La formulation énergétique du modèle est quant à elle inchangée et toutes les extensions classiques des *snakes* sont utilisables (notamment les forces région ou d'attraction vers un contour). Le calcul des métriques et le principe de modèle déformable riemannien sont valables en dimension quelconque. Le modèle a été mis en œuvre en 2D et en 3D et a été validé sur des images biomédicales.

1.4.2 Grille discrète et minimisation

La grille discrète $\mathbb{Z}^n$ est le domaine naturel de l'image nD. Sachant que l'échantillonnage de l'image est la seule donnée dont on dispose, il est raisonnable de penser qu'une approche purement discrète des modèles déformables peut extraire un résultat similaire aux approches classiques continues, paramétriques ou implicites. Si nécessaire, il sera toujours possible de reconstruire *a posteriori* une représentation géométrique continue de la forme discrète extraite.

Dans la grille discrète, l'espace de formes est constitué de tous les sous-ensembles du domaine de l'image et est donc fini. Une forme discrète est alors assimilable à une fonction caractéristique indiquant pour chaque élément de l'image son appartenance à la forme. En ce sens, un modèle déformable inclus dans la grille discrète ressemble aux modèles implicites. La *topologie discrète* nous permet aussi de définir toute forme de $\mathbb{Z}^n$ par son bord : une *surface discrète*. Il est alors possible par des outils de *géométrie discrète* de mesurer des quantités géométriques sur ces surfaces, globales comme la longueur ou l'aire, locale comme la normale ou la courbure. Dans ce second sens, un modèle déformable inclus dans la grille discrète ressemble aux modèles explicites. Les déformations élémentaires sont des simples ajouts ou retraits de pixels ou voxels, généralement pris autour du bord.

Les modèles déformables discrets présentent les avantages potentiels suivants. Puisque le problème de minimisation est dans un espace fini, d'autres algorithmes de minimisation sont envisageables : algorithmes de minimisation gloutons, algorithmes stochastiques de minimisation globale (e.g. recuit simulé et ses variantes), algorithmes déterministes basés sur des coupes dans le graphe ou sur une décomposition hiérarchique. Il n'y a pas de convergence d'un processus : les minima (locaux) sont identifiables et comparables et il n'y a pas de critère arbitraire d'arrêt. Enfin, les modèles déformables discrets adaptent naturellement leur topologie à leurs déformations élémentaires. La topologie des surfaces discrètes étant bien définie en dimension quelconque, on peut définir et mettre en œuvre ces modèles pour de l'imagerie nD.

Bien sûr, une définition purement discrète des modèles hautement déformables tels que présentés dans ce chapitre n'est pas directe. Dans un premier temps, le Chapitre 3 montre comment discrétiser

une version géométrique des *snakes* en dimension arbitraire. A toute forme discrète est alors associée une énergie, décomposée en énergies internes de régularisation et en énergies externes d'attache aux données. Similairement aux contours actifs géométriques, la première énergie interne pénalise la longueur ou l'aire de la forme. La deuxième énergie interne pénalise les courbures. Afin de valider l'approche, nous montrons d'abord une première mise en œuvre de ce modèle sur des images 2D, avec un algorithme de minimisation *a posteriori* et des estimateurs géométriques discrets simples. Les résultats expérimentaux sont encourageants. Ensuite, deux questions naturelles se dégagent.

- D'abord, comment représenter les surfaces discrètes en dimension arbitraire, comment les faire évoluer, et comment estimer des quantités géométriques comme l'aire ou la courbure moyenne ?
  Le Chapitre 4 propose de représenter des surfaces discrètes comme des ensembles d'éléments de dimension $n-1$ dans la grille cellulaire. L'analogie avec la grille de Khalimsky permet une représentation efficace de ces éléments par un code sur un seul entier. En utilisant des notions de topologie algébrique (opérateurs bords), toutes les opérations classiques de topologie discrète sont mises en œuvre efficacement, notamment le calcul des voisins ou le suivi de surface. L'évolution d'une surface est alors traduite en termes algébriques, sous forme de l'addition ou de la soustraction de bord de n-chaînes. Enfin, nous montrons comment calculer des quantités géométriques nD comme la normale ou l'aire élémentaire par des déplacements le long de chemins 4-connexes planaires. Il en résulte que la géométrie d'une surface dans une image nD peut être calculée à partir d'estimateurs géométriques sur des courbes discrètes 2D.
- Ensuite, un modèle déformable discret peut-il simuler le comportement d'un modèle déformable continu lorsque la résolution tend vers l'infini ?
  On trouve facilement une condition nécessaire pour avoir une équivalence des problèmes de minimisation discret et continu : les estimateurs géométriques de longueur/aire et de courbure(s) sur la surface discrète doivent *converger asymptotiquement* vers les quantités géométriques respectives continues lorsque la finesse de la discrétisation tend vers l'infini. Nous nous intéressons à cette problématique dans le Chapitre 5. Elle est montrée très liée au comportement asymptotique des segments de droites discrets maximaux définis sur les courbes discrètes. Des bornes en nombre et en longueur sont obtenus pour ces objets discrets, en utilisant notamment la décomposition combinatoire en mots des droites discrètes ainsi que les propriétés asymptotiques des polygones convexes discrets. Les résultats majeurs incluent : une preuve de convergence des estimateurs géométriques de tangentes basées sur les segments maximaux, l'infirmation d'une preuve précédemment publiée quant à la convergence d'un estimateur discret de courbure.

On voit que l'approche discrète des modèles déformables a suscité des questions assez fondamentales de topologie et géométrie discrète. La fusion de tous ces travaux montre que les modèles déformables soumis aux contraintes internes de longueur ou aire et aux contraintes externes sont simulables par un processus entièrement discret. Même si nous avons ouvert un certain nombre de pistes, il reste du travail à mener vis-à-vis des contraintes internes de courbure.

1.5 Conclusion

En conclusion à ce chapitre, nous avons introduit le contexte : les modèles hautement déformables pour la segmentation et reconstruction de composante image de topologie et géométrie arbitraire. Nous avons décrit les grandes approches et tenté d'en faire une comparaison objective. Nous avons ensuite présenté les problématiques associées pour en dégager deux qui sont à la base de ce travail de recherche. Enfin, nous avons expliqué en quoi des approches non-euclidiennes des modèles déformables sont des outils intéressants pour attaquer ces problématiques. La géométrie riemannienne permet de réduire la complexité en temps et en espace tandis que la géométrie discrète autorise d'autres techniques de minimisation à même d'extraire l'optimum global ou d'éviter certains minima locaux. Ces deux approches non-euclidiennes font l'objet des chapitres suivants et représentent le cœur de mes recherches.

Chapitre 2

Approche riemannienne des modèles déformables

Ce chapitre présente les recherches sur l'utilisation de la géométrie riemannienne pour définir des modèles hautement déformables à densité adaptative. Ces recherches ont été réalisées essentiellement avec Benjamin Taton durant sa thèse [36], sauf l'application à la segmentation d'images cérébrales, réalisée avec Martin Braure de Calignon durant son stage de Master [45]. Elles ont donné lieu à plusieurs publications : modèle déformable riemannien 2D [33, 19], extension en 3D [21], calcul des courbures des contours image [24], synthèse de ces travaux [6]. Ce chapitre présente seulement une vue synthétique de ces travaux.

2.1 Introduction

Ainsi qu'il a été dit au Chapitre 1, §1.3.1, la complexité en temps et en mémoire des modèles hautement déformables est très dépendante de la résolution. Une solution naturelle pour limiter ce coût est de concentrer l'effort de calcul là où il est utile, c'est-à-dire dans notre contexte dans les parties de l'image contenant des contours significatifs. Pour ce faire, le nombre de paramètres décrivant la géométrie du modèle doit être variable suivant sa position dans l'espace.

Nous proposons de déformer l'espace image à l'aide d'une métrique riemannienne pour définir un modèle hautement déformable à densité adaptative et capable de gérer les changements de topologie. Le principe, effectivement mis en œuvre en 2D et 3D, est le suivant :

- Le modèle déformable est une extension du modèle que j'avais proposé avec Annick Montanvert [3]. Ce modèle de maille déformable est une discrétisation classique des *snakes*. Sa capacité à adapter dynamiquement sa topologie provient uniquement de mesures de *distances* (euclidiennes), qui contraignent le modèle à garder une densité de maille régulière inversement proportionnelle à d, la taille d'un pixel/voxel.
- Pour adapter la densité en fonction de la position dans l'espace, l'espace image ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) est muni d'une *métrique riemannienne*. Toutes les distances sont alors calculées suivant la nouvelle métrique. Les distances entre sommets voisins sont alors artificiellement éloignées ou rapprochées. En cherchant à maintenir une densité de maille régulière dans l'espace riemannien, le modèle rajoute ou enlève automatiquement des sommets. La densité de la maille dans l'espace euclidien est alors variable. La dynamique et les forces du modèle sont quant à elles légèrement modifiées.
- La métrique riemannienne est déterminée localement en fonction de l'information image. Comme nous sommes dans le cadre d'une approche contour de la segmentation, la métrique est déterminée à partir de la force et de la géométrie des contours. Elle est en particulier alignée avec la normale et les directions principales du contour. Sa dilatation est déterminée quant à elle par les courbures.

– La géométrie des contours est calculée en tout point de l'image par un filtre qui extrait son *tenseur de structure*. Nous proposons une nouvelle technique de calcul des courbures des contours image, basée sur les valeurs propres du tenseur. Cette technique a l'avantage d'être stable sur les zones bruitées ou homogènes de l'image.

La Section 2.2 présente le modèle euclidien et son adaptation riemannienne. La Section 2.3 décrit la définition de la métrique en fonction des contours image et le calcul de la géométrie des contours. La Section 2.4 présente des résultats expérimentaux et analyse quantitativement le gain apporté par l'approche riemannienne. Ces résultats sont discutés dans la Section 2.5.

2.2 Modèle déformable à densité et topologie adaptative

2.2.1 Représentation géométrique et adaptation de topologie

Modèle initial

Nous décrivons brièvement le modèle [3] que l'on a étendu. La courbe en 2D ou la surface en 3D en évolution sont représentées géométriquement par une maille, polygonale en 2D et triangulée en 3D. En 2D, tout sommet connaît ses deux voisins. Et en 3D tout sommet a une liste ordonnée de ses voisins, ce qui définit une carte de la surface. La relation d'adjacence induite est notée $\circledast$.

Le modèle satisfait à tout moment les contraintes géométriques suivantes, pour chaque paire de sommet (u, v) :

$$u \circledast v \quad \Rightarrow \quad \delta \leq d_E(u, v) \leq \zeta\delta, \tag{2.1}$$

$$u \not\circledast v \quad \Rightarrow \quad \lambda\zeta\delta \leq d_E(u, v). \tag{2.2}$$

La distance euclidienne est notée $d_E(\cdot, \cdot)$. Le paramètre δ définit la densité de la maille puisque toutes les arêtes ont une longueur comprise dans $[\delta; \zeta\delta]$. Le paramètre ζ doit être choisi un peu supérieur à deux : en pratique $\zeta = 2,5$. Le coefficient λ, judicieusement choisi,[1] garantit que la courbe polygonale en 2D ou la surface triangulée en 3D sont bien *plongées* dans l'espace. Avec ces contraintes géométriques, le modèle a une densité de sommets régulière, comme le montre la Figure 2.1, parties gauche et droite. Normalement, δ doit être comparable à d pour garantir que tous les détails de l'image sont capturés.

Au fur et à mesure de ses évolutions, le modèle va changer sa géométrie et les contraintes Eq. (2.1) et Eq. (2.2) risquent de ne plus être satisfaites. Si P est le nombre de sommets du modèle, vérifier la contrainte Eq. (2.1) prend un temps $O(P)$, vérifier la contrainte Eq. (2.2) prend un temps $O(P \log P)$ avec une décomposition spatiale arborescente. Si jamais une contrainte n'est plus vérifiée, des reconfigurations locales de la surface sont effectuées [35] : division, fusion ou inversion d'arêtes ; séparation ou reconnexion de faces.

Modifications envisagées

Pour rendre le modèle à densité adaptative, nous allons simplement substituer, dans les équations Eq. (2.1) et Eq. (2.2), à la distance euclidienne d_E une nouvelle mesure de distance d_R, qui ne sera plus invariante par translation. Dès lors que cette nouvelle mesure satisfait certaines contraintes de régularité,[2] le modèle peut détecter et résoudre les changements de topologie en suivant exactement le même principe que dans le cas euclidien. De plus, sa densité de maille sera régulière pour la nouvelle distance, mais sera donc variable pour la distance euclidienne. Figure 2.1 au centre illustre l'approche proposée.

[1] On montre $\lambda > 1 - 1/\zeta$ en 2D et $\lambda^2 > 1 - 1/\zeta + 1/\zeta^2$ en 3D ([35],Proposition 5.4).

[2] Des variations trop brusques de la métrique créerait des « trous » dans les faces, où des sommets pourrait s'engouffrer.

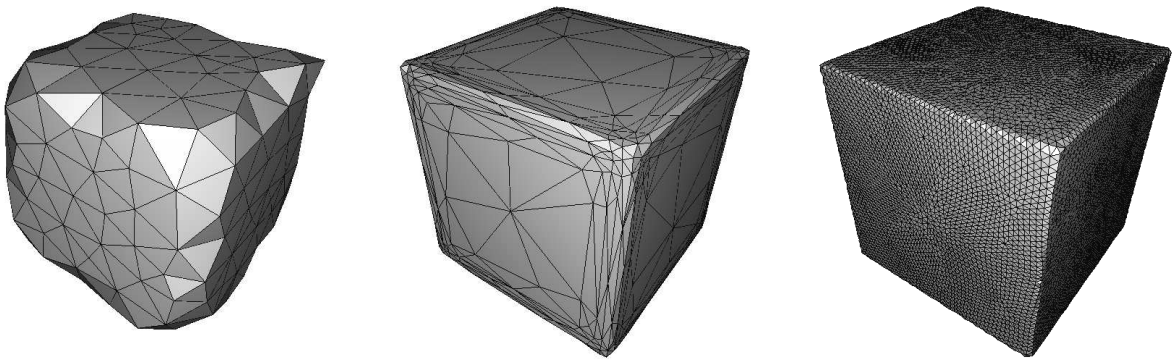


FIG. 2.1 – Illustration de l'approche proposée pour réduire la complexité de l'algorithme de segmentation. Plutôt que d'employer une résolution uniforme (grossière à gauche avec 171 sommets ou fine à droite avec 12 576 sommets), les sommets du modèle déformable sont accumulées dans les zones où ils sont utiles pour améliorer la qualité de la représentation géométrique (au centre). De cette manière le nombre de sommets (seulement 472 sommets), et donc la complexité des calculs sont significativement réduits, sans que la qualité soit altérée.

2.2.2 Notions de géométrie riemannienne

Dans l'espace euclidien, les notions de point et vecteur sont très voisines. La distance entre deux points x et y est à la fois la longueur du plus court chemin qui les relie, un segment de droite, et la norme du vecteur $y-x$. La structure de l'espace euclidien est isotrope et les vecteurs ont la même interprétation quelque soit leur origine.

La géométrie riemannienne fournit un cadre théorique pour définir des géométries sur des objets plus généraux que l'espace euclidien, les *variétés différentielles*. Un tel objet ne ressemble que localement à l'espace euclidien : les positions ne sont plus comparables directement et l'écriture $y-x$ n'a plus de sens. En fait, la géométrie riemannienne rajoute deux types d'éléments :

- Premièrement les *vecteurs tangents* à la variété. Ces vecteurs diffèrent des vecteurs de l'espace euclidien par le fait qu'ils sont attachés à leur origine. Ils ne correspondent pas à un déplacement qui, partant d'un point d'une variété, amène à un autre mais s'interprètent plutôt comme les vitesses le long de chemins sur la variété.
- En second lieu la *métrique riemannienne*, qui en chaque point d'une variété mesure les longueurs (et les angles) des vecteurs tangents à la variété en ce point.

Une fois la métrique définie, la longueur d'un chemin est décomposée en la somme des longueurs des déplacements élémentaires (les vecteurs tangents), mesurées à l'aide de la métrique.

Nous n'allons pas décrire formellement ici les notions de variétés différentielles, cartes et atlas, espace et fibré tangent, ou champ de tenseurs. Le lecteur intéressé pourra consulter le livre de Berger [Ber03]. Nous allons procéder de façon informelle et simplifiée. Notamment nous allons utilisé le fait que notre variété différentielle est bien particulière : c'est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. L'atlas, qui définit comment la variété est localement homéomorphe à l'espace euclidien, est donc réduit à une seule carte, la carte identité.

Les vecteurs, quoique attachés à une origine, peuvent être vus comme des éléments de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel formé des vecteurs qui ont même origine a exactement la structure de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (addition, produit scalaire, etc). On l'appelle l'*espace tangent* en ce point.

On appelle *métrique riemannienne* une application qui associe à tout point p de la variété un produit scalaire, noté $g_{|p}$, sur l'espace tangent en ce point.[3] On peut maintenant définir la longueur d'un chemin ou la distance entre deux points.

[3] Plus formellement, une métrique riemannienne est un champ de tenseurs $(0,2)$ sur la variété, c'est-à-dire une application bilinéaire sur l'espace tangent. Ce champ de tenseur est au moins de classe C^1.

Définition 2.1. *La* longueur riemannienne *d'un chemin* $\gamma : [t_0; t_1] \to \mathbb{R}^n$ *est la quantité*

$$\mathcal{L}_R(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{|\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt, \tag{2.3}$$

qui est indépendante du paramétrage choisi pour le chemin. La distance riemannienne $d_R(p, q)$ *entre deux points* p *et* q *est la longueur riemannienne d'un plus court chemin les reliant.*

Le produit scalaire $g_{|p}$ se définit naturellement par rapport à ses valeurs pour chaque paire de vecteurs de base de l'espace tangent. En d'autres termes, il se représente par une matrice symétrique définie positive $G_{|p}$, où chaque coefficient $g_{ij\,|p}$ est le produit scalaire du i-ème vecteur par le j-ème vecteur de base de l'espace tangent. Il est facile de voir que la base triviale de $\mathbb{R}^n$ constitue aussi la base de l'espace tangent en tout point pour la carte identité.

En résumé, il suffira donc de se donner $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions $g_{ij} : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour définir complètement la métrique riemannienne dans tout l'espace l'image. En pratique, la métrique est un champ de matrices symétriques échantillonné sur la grille image et interpolé linéairement.

2.2.3 Interprétation géométrique

Déterminer directement les coefficients g_{ij} n'est pas intuitif. On va se donner un moyen plus simple pour définir les métriques. Comme les matrices $G_{|p}$ sont symétriques et définies positives, elles sont diagonalisables dans des bases $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ orthonormées pour le produit scalaire euclidien :

$$G_{|p} = \begin{pmatrix} & & \\ \mathbf{v}_1(p) & \cdots & \mathbf{v}_n(p) \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1(p) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n(p) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & {}^t\mathbf{v}_1(p) & \\ & \vdots & \\ & {}^t\mathbf{v}_n(p) & \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

En se plaçant dans la base des vecteurs propres, la norme riemannienne d'un vecteur $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n w^i \, \mathbf{v}_i$ s'écrit donc :

$$\|\mathbf{w}\|_R^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(w^i\right)^2. \tag{2.5}$$

Cela permet par exemple d'obtenir des encadrements entre distances euclidiennes et riemanniennes. Si on adopte un point de vue local autour de p, l'ensemble des points x situé à une petite distance ϵ de p vérifie au premier ordre l'équation :

$$\|\mathbf{px}\|_R^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(x^i\right)^2 \simeq \epsilon^2. \tag{2.6}$$

où les x^i représentent les composantes de $\mathbf{px}$ sur la base $(\mathbf{v}_1(p), \ldots, \mathbf{v}_n(p))$. On reconnaît l'équation d'un ellipsoïde centré en p, dont les axes sont alignés avec les vecteurs propres de $G_{|p}$ et ont pour longueurs respectives $1/\sqrt{\mu_1}, \ldots, 1/\sqrt{\mu_n}$. Les boules « unités » riemanniennes sont donc des ellipsoïdes (voir Figure 2.2).

Remplacer la métrique euclidienne par la métrique G revient donc à contracter ou dilater localement l'espace dans les directions propres locales de G et avec des coefficients déterminés par les valeurs propres locales de G. Pour spécifier la métrique en un point p, on préférera donc choisir l'ensemble de valeurs et vecteurs propres de la matrice $G_{|p}$ et définir ainsi directement les directions et les proportions suivant lesquelles l'espace est localement étiré ou contracté.

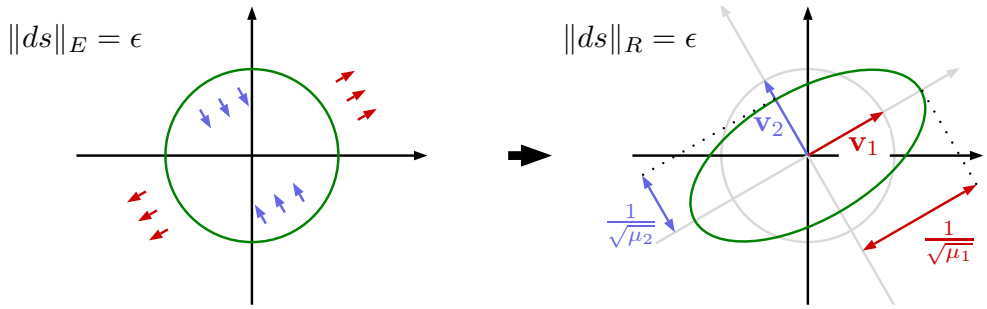


FIG. 2.2 – Boules unités locales en géométrie riemannienne : ellipsoïdes orientés selon $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, de demi-axes $1/\sqrt{\mu_1}, \ldots, 1/\sqrt{\mu_n}$, où les $(\mathbf{v}_i, \mu_i)$ sont les vecteurs et valeurs propres de la métrique G.

2.2.4 Indications de mise en oeuvre

La métrique doit rester définie et positive en tout point. Nous limiterons donc le domaine de variation de la métrique à l'intervalle $[1; \mu_{\max}]$, avec le majorant $\mu_{\max}$ déterminé conjointement par la géométrie des contours de l'image de travail et par la variabilité maximale souhaitée par l'utilisateur. Dans une zone où les valeurs propres sont proches de 1, le comportement du modèle est quasi-euclidien et les tailles d'arêtes sont dans $[\delta; \zeta\delta]$. Dans les zones où les valeurs propres sont très fortes et proches de $\mu_{\max}$, les arêtes sont très petites et comprises dans $[\delta/\sqrt{\mu_{\max}}; \zeta\delta/\sqrt{\mu_{\max}}]$. Dans les zones où cohabitent des valeurs propres faibles et fortes, la longueur des arêtes dépend de leur alignement avec les vecteurs propres de la métrique. Nous décrirons dans la Section 2.3 comment choisir valeurs et vecteurs propres en fonction des structures locales de l'image.

Le calcul exact de distance riemannienne est un problème difficile et les algorithmes numériques d'approximation sont souvent coûteux. Dans notre cas cependant, nous n'avons en général pas besoin de calculer la distance exacte entre deux points. Il suffit de pouvoir les comparer efficacement aux bornes δ, $\zeta\delta$ et $\lambda\zeta\delta$. Pour des points éloignés, donc non-voisins, calculer leur distance euclidienne suffit pour tester Eq. (2.2) sur une grande partie des points. Si un tel test ne suffit pas pour conclure, un calcul plus précis est nécessaire. Dans ce cas, les points sont assez proches et il est raisonnable d'approcher la géodésique par une droite. Si on suppose de plus que la métrique varie linéairement sur ce chemin, on obtient une approximation de la distance riemannienne entre 2 points p et q telle que

$$d_R(p,q) \simeq \frac{2\left({n_p}^2 + n_p\, n_q + {n_q}^2\right)}{3\,(n_p + n_q)}, \tag{2.7}$$

où n_p et n_q sont les normes du vecteur $\mathbf{pq}$ prises respectivement aux points p et q.

On peut déterminer le milieu riemannien entre deux points par un calcul similaire. On note que, expérimentalement, une variabilité de mesure d'un facteur 25 (i.e. $\mu_{\max} = 25^2$) permet encore de conserver un schéma numérique stable.

Enfin, on peut relâcher légèrement la contrainte détectant les collisions entre sommets non voisins (Eq. (2.2)) dans le cas d'une courbe ou surface déformable qui était *plongée* à l'itération précédente. Si a est un sommet en mouvement et si on suppose qu'il existe un déplacement maximum $2d_{\max}$ autorisé sur la maille, alors on peut vérifier que tester Eq. (2.2) entre a et tous ses sommets non-voisins u est équivalent au test

$$d_R(u,a) \geq \frac{\zeta\delta}{2} + d_{\max} \quad \text{en 2D}, \tag{2.8}$$

$$d_R(u,a) \geq \frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}} + d_{\max} \quad \text{en 3D}. \tag{2.9}$$

Le cas 3D est illustré sur la Figure 2.3.

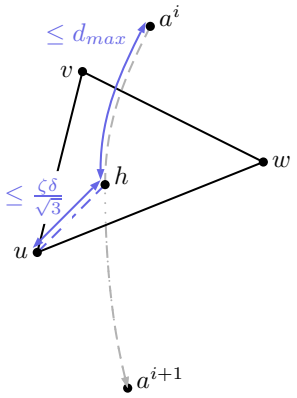


FIG. 2.3 – En trois dimensions, la détection des auto-collisions du modèle déformable fonctionne de manière identique au cas bidimensionnel. Le sommet a effectue un déplacement d'une longueur au plus $d_{\max}$ entre deux itérations. Il ne peut pas traverser la face (u, v, w) sans entrer dans une boule de rayon $\frac{\zeta\delta}{\sqrt{3}} + d_{\max}$ centrée en u, v ou w.

2.2.5 Dynamique et forces

La dynamique du modèle est une discrétisation classique des *snakes* (cf. formulation dynamique Eq. (1.7)). C'est un système masses-ressorts, où chaque sommet est une particule soumise à des forces régularisantes (modélisées par des ressorts avec des voisins) et des forces externes (e.g. attraction vers les contours). Cependant, dans une variété riemannienne, les équations du mouvement doivent tenir compte de la métrique et les équations de Newton ne sont pas utilisables directement. L'utilisation du formalisme Lagrangien pour décrire le mouvement des sommets du modèle permet de résoudre le problème. Pour une particule de position x et vitesse $\dot{\mathbf{x}}$ soumise à des forces $\sum \mathbf{F}$ conservatives ou non-conservatives, on obtient après calcul l'équation d'évolution

$$\forall k = 1, \ldots, n, \quad m\ddot{x}^k + m \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \, \dot{x}^i \, \dot{x}^j = \sum F^k. \tag{2.10}$$

Les Γ_{ij}^k représentent les symboles de Christoffel. Ils quantifient la variation de la métrique en tout point de l'espace : ils sont nuls si la métrique est invariante. Un terme additionnel vient donc s'ajouter aux équations de Newton. Le calcul de ces coefficients est néanmoins coûteux. En pratique, il n'est pas inclus dans l'évolution de notre modèle. Cela se justifie pour les raisons suivantes :

- un test en 2D n'a pas montré d'influence significative de ce terme sur l'évolution du modèle pour les métriques définies à partir de l'image ;
- il ne s'agit pas de simuler un phénomène physique et seul l'état d'équilibre nous intéresse : ce terme s'annule à l'équilibre ;
- il y a une force non conservative de friction dans Eq. (2.10) proportionnelle à $\dot{\mathbf{x}}$: pour des petites vitesses, le terme correctif du second ordre en la vitesse est donc négligeable.

Enfin, le modèle ne doit *localement* pas se rendre compte qu'il évolue dans un espace déformé. Les forces sont donc adaptées aux mesures riemanniennes. Les forces élastiques et de rigidité sont matérialisées par des ressorts. L'extension des ressorts est donc naturellement mesurée avec la métrique riemannienne. De même, les forces externes sont elles aussi renormalisées pour tenir compte de la métrique. Expérimentalement, on peut observer que cette adaptation des forces à l'espace riemannien améliore d'un facteur 1000 la stabilité du modèle à convergence.[4]

2.2.6 Algorithme de segmentation/reconstruction

L'algorithme de segmentation/reconstruction est ainsi le même que celui du modèle originel, avec toutefois une étape supplémentaire de pré-calculs (Figure 2.4). Cette première étape détermine les zones

[4] C'est le ratio entre l'énergie cinétique du modèle euclidien et celle du modèle riemannien pour un paramétrage identique.

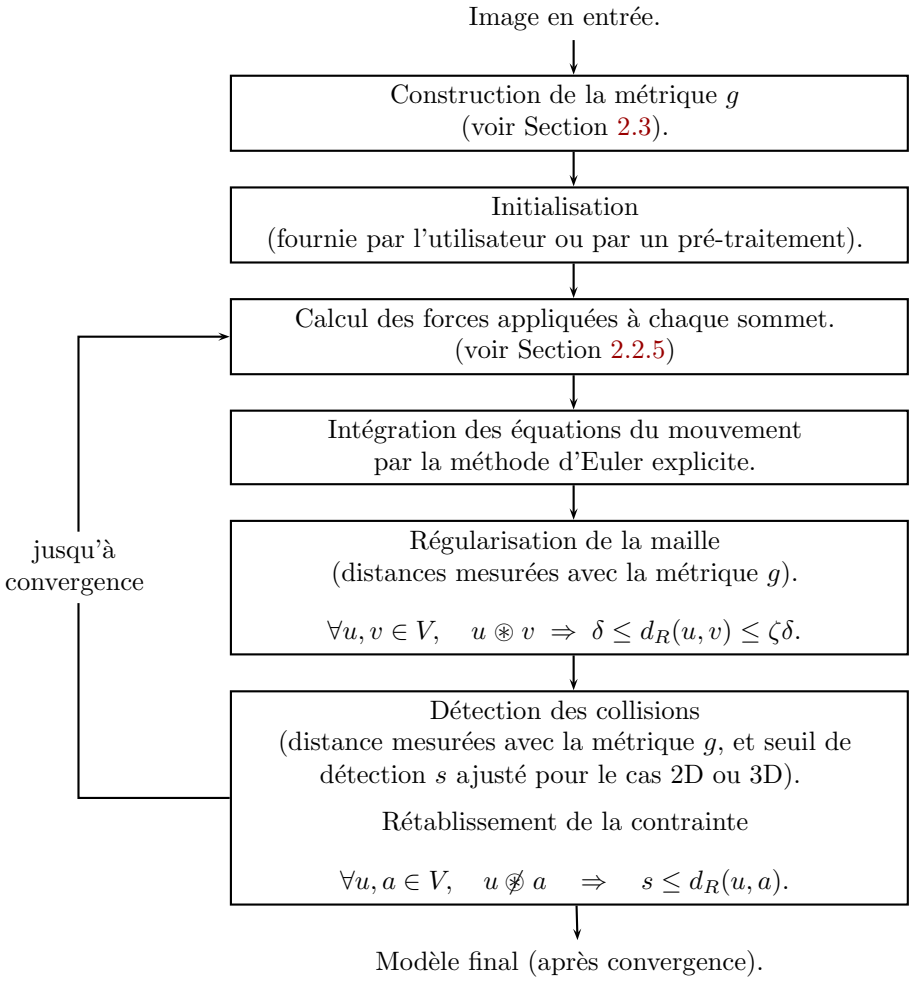


FIG. 2.4 – Résumé de l'algorithme de segmentation/reconstruction.

pertinentes de l'image et leur géométrie et en déduit les valeurs et vecteurs propres des métriques qui les reflètent le mieux (voir Section 2.3).

Ensuite, le modèle est initialisé par un processus automatique ou par l'utilisateur. A chaque itération, les forces appliquées sont évaluées en chaque sommet. L'équation différentielle Eq. (2.10) discrétisée détermine la nouvelle position de chacun d'eux, avec un déplacement riemannien maximum de $d_{\max}$. Les contraintes géométriques Eq. (2.1) et Eq. (2.2) sont ensuite vérifiées, et si elle ne sont plus satisfaites, des reconfigurations sont effectuées.

Enfin, ce processus est répété jusqu'à ce que la vitesse du plus rapide sommet soit inférieure à un certain seuil.

2.3 Construction des métriques et géométrie de l'image

Dans cette section, nous montrons d'abord comment définir localement au mieux la métrique en fonction de la géométrie d'une forme que l'on cherche à reconstruire avec le modèle déformable proposé. Dans un deuxième temps, nous proposons une nouvelle méthode non dérivative pour estimer de façon

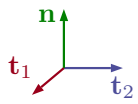
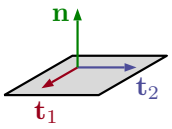
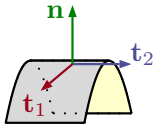
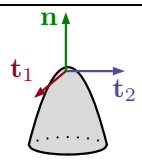
Géométrie locale du contour			
			
pas de contour $s \approx 0$	partie plane $s \gg 0, \kappa_1 \simeq \kappa_2 \simeq 0$	partie tubulaire $s \gg 0, \kappa_1 \gg \kappa_2 \simeq 0$	coin $s \gg 0, \kappa_1 \gg \kappa_2 \gg 0$
Densité de sommets sur le maille déformable			
réduite	réduite selon $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$	réduite selon $\mathbf{t}_2$, élevée selon $\mathbf{t}_2$	élevée

FIG. 2.5 – Densité souhaitée pour la maille selon la géométrie des contours de l'image.

robuste la géométrie locale de l'image (en fait la géométrie des contours). Seule la version 3D de la construction des métriques sera présentée ; le cas 2D est extrêmement similaire.

2.3.1 Métrique pertinente pour une géométrie donnée

Au final, le modèle déformable cherche à extraire une composante de l'image avec une certaine géométrie. Devenu de densité adaptative, il doit approcher au mieux la géométrie du bord de la composante tout en minimisant au maximum le nombre de paramètres utilisé (i.e. le nombre de sommets). La problématique de l'approximation de surfaces a été très étudiée depuis les années 1990, initiée par les travaux de Hoppe *et al.* [HDD+93, PH97]. En général, on définit une mesure d'erreur et on met au point un algorithme qui minimise cette erreur pour un nombre donné restreint de sommets. Avec la plupart des mesures proposées, on constate intuitivement que la densité de sommets locale doit varier en fonction des courbures principales, notées κ_1 et κ_2. Dans la suite, la normale à la forme sera notée $\mathbf{n}$ et les directions principales $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$.

Dans notre cas, où nous cherchons à extraire une forme en se basant sur les contours d'une image, nous devons aussi prendre en compte la fiabilité du contour, notée s et proportionnelle à l'intensité du gradient. Nous proposons les règles suivantes pour déterminer la densité de sommets sur la maille ou, de manière équivalente, la longueur des arêtes (voir aussi la Figure 2.5) :

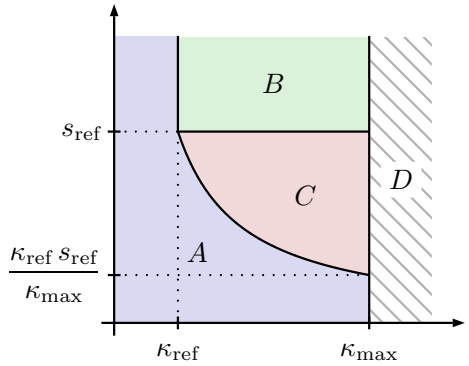
- La densité de sommets croît linéairement avec la fiabilité s du contour, tant qu'elle est inférieure à une fiabilité de référence s_{ref}, défini automatiquement ou par un utilisateur.
- Suivant la direction, elle est aussi linéaire avec la courbure principale correspondante, dans la mesure où celle-ci est supérieure à une courbure minimale κ_{ref}, fixée manuellement et qui définit la densité de sommet sur les parties quasi-planes.
- Lorsque la maille arrive orthogonalement à un contour au cours de sa déformation, sa densité est dépendante de la courbure maximale $\kappa_{\max}$ détectée automatiquement dans l'image.

On en déduit immédiatement que les vecteurs propres $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ doivent être alignés avec les directions caractéristiques du contour, tels que

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}, \ \mathbf{v}_2 = \mathbf{t}_1, \ \mathbf{v}_3 = \mathbf{t}_2. \tag{2.11}$$

En notant qu'une longueur d'arête alignée avec une direction propre suit une loi en carré de la valeur propre associée, les valeurs propres μ_1, μ_2, μ_3 sont alors obtenues par

$$\mu_1 = \left[\frac{s^2}{{s_{\text{ref}}}^2} \frac{{\kappa_{\max}}^2}{{\kappa_{\text{ref}}}^2} \right]_1^{\frac{{\kappa_{\max}}^2}{{\kappa_{\text{ref}}}^2}} \quad \mu_2 = \left[\frac{{\kappa_1}^2}{{\kappa_{\max}}^2} \mu_1 \right]_1^{\mu_1} \quad \text{et} \quad \mu_3 = \left[\frac{{\kappa_2}^2}{{\kappa_{\max}}^2} \mu_1 \right]_1^{\mu_1}, \tag{2.12}$$



Région	$L_E(e)$
A	δ
B	$\frac{\kappa_{\text{ref}}}{\kappa}\,\delta$
C	$\frac{s_{\text{ref}}}{s}\,\frac{\kappa_{\text{ref}}}{\kappa}\,\delta$
D	jamais atteint

FIG. 2.6 – Longueur euclidienne des arêtes d'un modèle déformable aligné avec un contour de courbure κ et d'intensité s. La frontière entre les régions A et C correspond aux contours dont l'intensité et la courbure sont liées par la relation $\frac{\kappa_{\text{ref}}}{\kappa} = \frac{s}{s_{\text{ref}}}$.

où la notation $[\,b\,]_a^c$ désigne a si $b \leq a$, b si $a \leq b \leq c$ ou enfin c si $c \leq b$.

En conclusion à cette section, la longueur euclidienne des arêtes de la maille déformable plongée dans cette nouvelle métrique suit alors les règles résumées dans la Figure 2.6. On note qu'une densité de sommet proportionnelle à la courbure permet de minimiser une mesure d'erreur d'approximation à la forme. En effet, ce choix minimise l'erreur quadratique du champ de normales à la surface (voir par exemple Cohen-Steiner *et al.* [CSAD04]). La section suivante montrera comment analyser l'image pour déterminer la géométrie des contours.

2.3.2 Calcul de la géométrie des contours

Nous cherchons maintenant à définir les six paramètres précités en tout point de l'image. Nous devons prendre en compte deux points : (i) les images sont potentiellement dégradées ou bruitées, (ii) la métrique est définie en tout point, même dans les zones homogènes sans contours. Les estimateurs de directions et de courbures doivent donc être robustes et donner une information pertinente même relativement loin des contours.

Travaux connexes

La détection de contours a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux. Le plus souvent une approche différentielle est privilégiée, et l'intensité des contours est mesurée par la norme du gradient de la fonction image, et le vecteur gradient lui-même sert classiquement d'estimateur pour la normale au contour. En revanche, peu de travaux s'intéressent à la recherche des directions principales et au calcul des courbures des structures directement à partir des images. Ces quantités sont en général calculées *a posteriori* sur des représentations géométriques des objets, plus faciles à filtrer et à manipuler. Dans notre contexte, il est nécessaire d'estimer ces quantités en tout point de l'image, donc sans reconstruction intermédiaire.

Monga et Benayoun [MB95] les estime en mesurant la courbure des lignes de niveau de l'image par une approche dérivative. Les dérivées partielles de la fonction image sont évaluées par des convolutions avec des filtres dérivatifs (e.g. dérivée de Gaussienne). Elles sont implémentées efficacement dans le domaine de Fourier ou par filtre récursif [Der92]. Les courbures nécessitent le calcul du Hessien de l'image, donc de ses dérivées secondes. Ce genre de technique fonctionne bien lorsque l'image est très régulière, par exemple sur la carte de distance utilisée dans la méthode *level set*. Sur des images réelles, cette méthode est instable sur les régions quasi-homogènes et est très sensible au bruit, du fait de la double dérivation

demandée. Augmenter le paramètre de lissage du filtre dérivatif améliore un peu le résultat, mais au prix d'une grande perte de précision.

Rieger et van Vliet [RvV02] se base sur une autre méthode dérivative, moins sensible au bruit que le gradient : le *tenseur de structure*. C'est un outil classique en analyse d'image, introduit par Kass et Witkin [KW87], et notamment utilisé pour analyser ou restaurer les structures locales de l'image [Wei95]. En un point, ses vecteurs propres indiquent notamment l'orientation locale de l'isopotentielle passant par ce point (i.e. normale et espace tangent). Ensuite, après avoir éliminé l'orientation des vecteurs par l'application de Knutsson, ils examinent la norme de la dérivée du premier vecteur propre (la normale donc) dans les directions des autres vecteurs propres. Ces dérivées sont à un facteur près les courbures principales. Cette méthode de calcul est très précise, assez robuste au bruit dans les endroits où un contour fort est présent. En revanche, dans les zones homogènes ou bruitées, ce calcul est encore très instable.

Tenseur de structure

Nous proposons une nouvelle méthode pour calculer les courbures, basée elle aussi sur le tenseur de structure, mais qui n'utilise que les valeurs propres du tenseur pour déterminer les courbures.

On se donne d'abord l'application suivante, qui mesure l'alignement d'un vecteur $\mathbf{v}$ avec le gradient image lissé d'un facteur σ :

$$Q^{\sigma}_{|p}(\mathbf{v}) = (\nabla_\sigma I_{|p} \cdot \mathbf{v})^2. \tag{2.13}$$

Cette application est maximale dans la direction du gradient et s'annule dans les directions orthogonales. On étudie le comportement local du champ de gradients en moyennant cette application sur un certain voisinage autour de p :

$$Q^{\rho,\sigma}_{|p}(\mathbf{v}) = (G_\rho * Q^{\sigma}_{|p}(\mathbf{v})), \tag{2.14}$$

où ρ définit la taille de la zone moyennée. Cette application se réécrit sous forme matricielle. Le scalaire $(\nabla_\sigma I_{|p} \cdot \mathbf{v})^2$ s'écrit aussi ${}^t\mathbf{v}(\nabla_\sigma I)^t(\nabla_\sigma I)\mathbf{v}$. En rentrant la convolution par G_ρ dans le terme central et en notant $\nabla_\sigma I = {}^t(I_x I_y I_z)$, on obtient

$$Q^{\rho,\sigma}(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v} \times \underbrace{\begin{pmatrix} G_\rho * ({I_x}^2) & G_\rho * (I_x\, I_y) & G_\rho * (I_x\, I_z) \\ G_\rho * (I_x\, I_y) & G_\rho * ({I_y}^2) & G_\rho * (I_y\, I_z) \\ G_\rho * (I_x\, I_z) & G_\rho * (I_y\, I_z) & G_\rho * ({I_z}^2) \end{pmatrix}}_{J^{\rho,\sigma}} \times \mathbf{v}. \tag{2.15}$$

L'application $p \mapsto J^{\rho,\sigma}_{|p}$ est appelée *tenseur de structure*. On peut là aussi calculer efficacement ce champ de tenseur sur tout l'image dans le domaine de Fourier ou par des filtres récursifs.

Estimation de la géométrie

On constate que les vecteurs propres $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ du tenseur de structure $J^{\rho,\sigma}$ indiquent les directions caractéristiques de la structure image locale. Le vecteur $\mathbf{w}_1$ est une approximation robuste de la normale $\mathbf{n}$ tandis que les deux autres sont alignés avec les directions principales. Nous définissons donc la géométrie locale du contour comme $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 \equiv \mathbf{w}_3$.

Il reste à déterminer la fiabilité s et les courbures principales κ_1 et κ_2 en fonction des valeurs propres ξ_1, ξ_2, ξ_3 de $J^{\rho,\sigma}$. Pour ce faire, nous nous donnons un contour idéal d'intensité s uniforme le long du contour, placé à l'origine, de normale alignée avec l'axe z, de directions principales alignées avec x et y et de courbures principales κ_1 et κ_2. Sous ces hypothèses, on déduit facilement une approximation au second ordre de l'image I :

$$I(x,y,z) = I(0,0,0) + s\,z + \frac{1}{2}\,s\,\kappa_1\,x^2 + \frac{1}{2}\,s\,\kappa_2\,y^2 + o(x^2, y^2, z^2). \tag{2.16}$$

On évalue alors les valeurs propres du tenseur de structure de I à l'origine. Pour des raisons de symétrie, la base choisie est exactement la base des vecteurs propres de $J^{\rho,\sigma}$, qui est alors diagonale. On a ainsi

$$(\xi_2, \xi_3, \xi_1) = (G_\rho * ({I_x}^2), G_\rho * ({I_y}^2), G_\rho * ({I_z}^2)). \tag{2.17}$$

En calculant les dérivées de I avec Eq. (2.16) et en intégrant les convolutions par les gaussiennes de Eq. (2.17), on obtient les identités :

$$\xi_1 \simeq s^2, \quad \xi_2 \simeq \rho^2 s^2 {\kappa_1}^2, \quad \xi_3 \simeq \rho^2 s^2 {\kappa_2}^2. \tag{2.18}$$

Nous pouvons donc déterminer la fiabilité et courbures principales — en valeur absolue — d'un contour à partir des seules valeurs propres du tenseur de structure. En pratique, nous écrivons Eq. (2.18) plutôt sous la forme ci-dessous en rajoutant une petite quantité ϵ pour gérer les cas où la première valeur propre s'annule :

$$s = \sqrt{\xi_1}, \quad |\kappa_1| = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1 + \epsilon}}, \quad \text{et} \quad |\kappa_2| = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\xi_3}{\xi_1 + \epsilon}}. \tag{2.19}$$

Dans toutes les expérimentations qui suivent, la constante ϵ a été déterminée automatiquement comme le dixième de la plus grande valeur propre trouvée dans l'image.

Précision et robustesse de l'estimateur de courbure

Ce nouvel estimateur a été testé de manière approfondie dans [24, 36]. Nous ne rappelons ici que les points essentiels. La méthode que nous proposons dépend principalement de deux paramètres, les échelles σ et ρ. Le paramètre σ est quasiment commun à toutes les méthodes d'analyse d'images. Il permet d'éliminer un peu le bruit présent dans les images. Les techniques classiques utilisées pour le déterminer sont donc applicables de la même manière ici.

Le paramètre ρ correspond peu ou prou à la fenêtre d'intégration du champ de gradients. Trop petit, cette fenêtre ne recouvre que très peu de pixels et l'évaluation risque d'être sensible au bruit. Trop grand, l'approximation de Eq. (2.16) ne tient plus et l'estimateur ne peut capturer les fortes courbures. Un choix raisonnable est de prendre $\rho = 2\sigma$, qui fournit de bons résultats expérimentaux (cf. Figure 2.7).

Lorsque cet estimateur est comparé aux estimateurs de courbures de (A) Monga et Benayoun [MB95] et de (B) Rieger et van Vliet [RvV02], il se comporte favorablement. Il est très légèrement moins précis que (B) pour un paramétrage équivalent, aussi robuste vis-à-vis du bruit mais il est stable en dehors des contours. Dès qu'il y a un bruit supérieur à 20dB, notre estimateur est meilleur que (A).

2.4 Validation expérimentale

Nous validons maintenant le modèle déformable riemannien sur quelques points clés. D'abord nous examinons l'influence de la résolution image sur la complexité du modèle. Ensuite nous présentons une étude expérimentale des temps de calcul. Enfin, nous montrons les potentialités de l'approche pour segmenter des images biomédicales.

2.4.1 Indépendance vis-à-vis de la résolution image

Dans la construction de la métrique, seules les grandeurs géométriques des objets sont prises en compte. Lors d'un ré-échantillonnage suffisamment précis pour préserver les structures étudiées, les estimations de ces quantités sont laissées invariantes. Pour un rééchantillonnage trop grossier, les détails les plus fins disparaissent et se regroupent pour former des structures d'une plus grande échelle. Les estimateurs mesurent donc la courbure des objets les plus petits qui puissent être correctement représentés avec

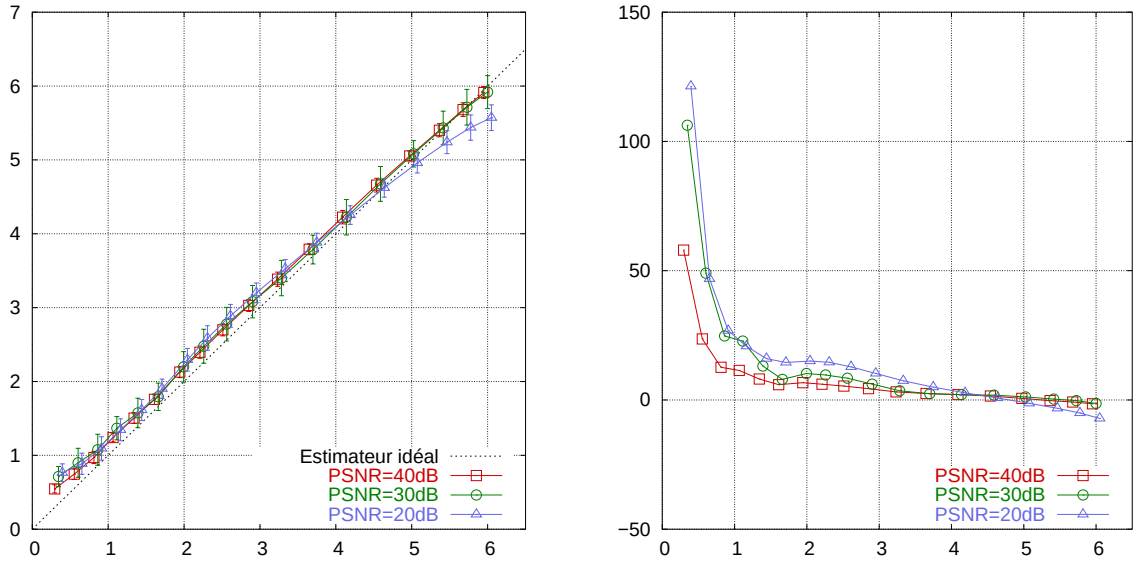


FIG. 2.7 – Gauche : moyenne et écart-type des courbures calculées avec l'estimateur du paragraphe 2.3.2 en fonction de la courbure réelle. Droite : pourcentage d'erreur. Pour chaque niveau de bruit, les paramètres σ et ρ sont choisis pour donner les meilleurs résultats. Ils sont donnés en pixels dans le tableau ci-contre.

$PSNR$	σ	ρ
40dB	2	5
30dB	3	5
20dB	5	10

la fréquence d'échantillonnage choisie pour l'image. Avec la construction de la métrique proposée précédemment, les arêtes du modèle adaptent leur taille en fonction de la géométrie des structures détectables dans l'image.

Si une même forme est représentée correctement dans deux images de résolutions différentes, les estimations de sa ou ses courbures sont identiques, aux approximations numériques près. Il en résulte que, pour les deux images, la métrique et donc la longueur des arêtes du modèle déformable seront identiques.

Partant d'un échantillonnage grossier, les reconstructions d'un objet obtenues pour des images de résolutions croissantes ne varie donc que dans les zones où l'accroissement de la fréquence d'échantillonnage laisse apparaître des structures plus fines. Pour un choix particulier des paramètres utilisés pour construire la métrique et paramétrer le modèle, la densité de sommets sur la maille déformable s'adapte donc de manière à exploiter au mieux l'information présente dans l'image. Elle ne s'accroît que dans les zones où des structures nouvelles deviennent discernables. Ces propriétés sont illustrées aux Figures 2.8 et 2.9. On constate que, passé une certaine résolution, le nombre de paramètres du modèle reste constant.

2.4.2 Analyse comparative des complexités en temps

Nous examinons ci-dessous les gains ou pertes en temps de calcul par sommet ou par itération, en nombre de sommets et en nombre d'itérations en comparant l'approche riemannienne à l'approche euclidienne.[5]

Temps de pré-calcul de la métrique. Le tenseur de structure est d'abord calculé dans le domaine de Fourier, puis il est diagonalisé sur chaque pixel/voxel de l'image. Avec cette implémentation, le temps de calcul est indépendant des choix de ρ et σ et 99% de ce temps est utilisé pour calculer le tenseur de structure. En 3D, le coût global est quasi-linéaire, de $12,45$ s pour une image 64^3, soit

[5] Toutes les expérimentations ont été réalisées sur une machine *Intel Pentium IV* à 2,53 GHz et 1 Go de mémoire vive.

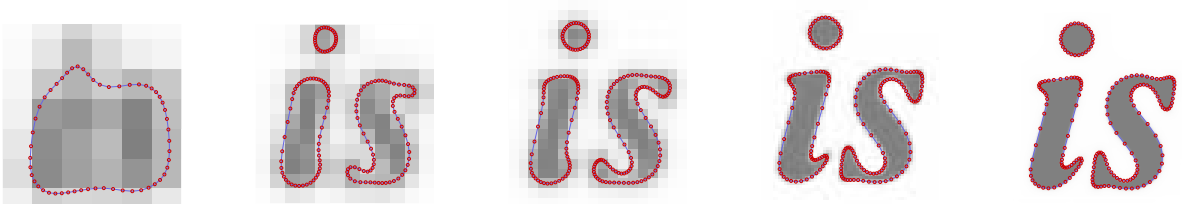


FIG. 2.8 – Illustration de l'invariance du modèle par changement de résolution de l'image à traiter. Les résolutions des images sont 10×10, 20×20, 30×30, 100×100 et 400×400, de gauche à droite et en pixels. Les paramètres utilisés pour construire la métrique et paramétrer le modèle sont les mêmes pour toutes les reconstructions. La Figure 2.9 trace le nombre de sommets en fonction de la résolution.

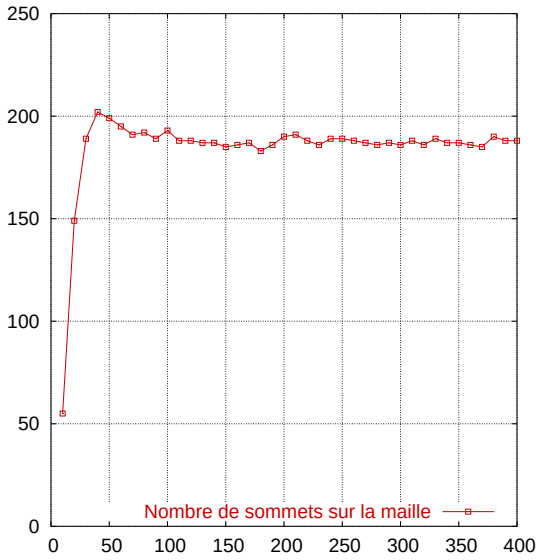


FIG. 2.9 – Évolution du nombre de sommets en fonction de la résolution de l'image (voir Fig. 2.8). Avec des fréquences d'échantillonnage suffisantes pour que toutes les structures de l'image soient correctement représentées, le nombre de sommets sur la courbe déformable est déterminé uniquement par la géométrie des objets.

		Nombre de sommets	Nombre d'itérations	Temps de calcul
Métrique euclidienne	a	3440	160	4min 10s
	b	142 340	900	3h 22min
Métrique riemannienne	a	314	60	2s (+43s)
	b	15 936	500	22min (+3min 49s)

TAB. 2.1 – Comparaison des complexités des segmentations et reconstructions de l'ellipsoïde (a) et du crâne (b) présentés aux Figures 2.10 et 2.11 avec une métrique euclidienne et une métrique riemannienne. Les valeurs entre parenthèses correspondent au temps de précalcul de la métrique. L'ellipsoïde est représenté par un volume de données de taille 100^3, la résolution de la tomodensitométrie du crâne est $256 \times 256 \times 68$.

plus de 260.000 voxels, à 530, 70 s pour une image 224^3, soit presque 11.240.000 voxels. Ces coûts sont très notablement inférieurs au coût du processus de segmentation.

Temps de calcul par itération, par sommet. Il est bien sûr plus coûteux de faire évoluer le modèle dans une géométrie riemannienne. Notamment, le calcul d'une distance riemannienne prend entre 10 et 50 fois plus de temps que la distance euclidienne. Globalement, le coût par itération et par sommet est entre 6 et 30 fois plus important. Il est néanmoins plus que compensé par la diminution du nombre de sommets et du nombre d'itération.

Nombre de sommets. Le nombre de sommets dépend beaucoup de la géométrie de l'image. Plus elle est simple, moins il y aura de sommets (e.g. sur le cube de la Figure 2.1, la métrique riemannienne induit 30 fois moins de sommets). Sur des images réelles issues de l'imagerie biomédicale, le nombre *final* de sommets est environ 4 fois inférieur en 2D et 8 à 10 fois inférieur en 3D. On note cependant que ce nombre est beaucoup plus réduit au cours de l'évolution.

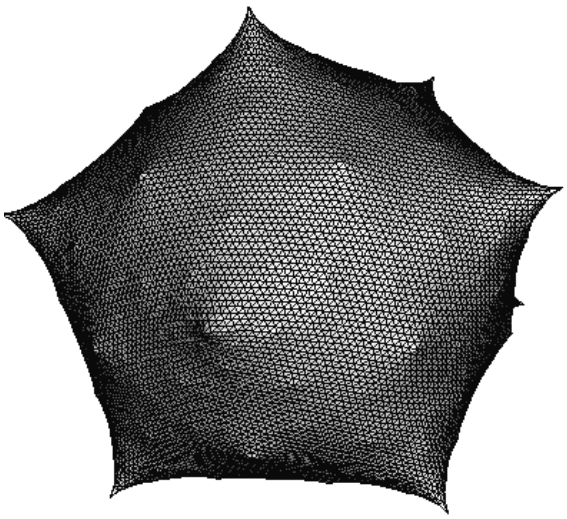
Nombre d'itérations jusqu'à convergence. Là encore, ce nombre est très dépendant de l'initialisation, des forces de régularisation et aussi de la géométrie de l'image. Les gains sont en général significatifs, surtout lorsque l'initialisation est manuelle et assez loin de la position d'équilibre. En effet, contrairement aux modèles euclidiens, le modèle se déplace vite sur les parties sans intérêt. De façon complémentaire, il est ralenti très fortement au voisinage des zones d'intérêt, ce qui accroît sa précision et sa stabilité à l'équilibre (d'un facteur 30 environ). Sur nos exemples, le nombre d'itérations est réduit d'un facteur 2 à 3.

Le Tableau 2.1 compare, pour un paramétrage identique, les temps de calcul globaux entre modèle euclidien et riemannien sur deux exemples : la reconstruction d'un ellipsoïde (Figure 2.10) et la segmentation d'une image tomodensitométrique de crâne (Figures 2.11 et 2.12). On constate sur ces exemples que non seulement les temps de calcul sont considérablement améliorés mais qu'en plus la reconstruction est de meilleure qualité. Ainsi, la géométrie riemannienne permet de mieux gérer l'*anisotropie* et les effets « *marches d'escalier* » souvent présents dans les images.

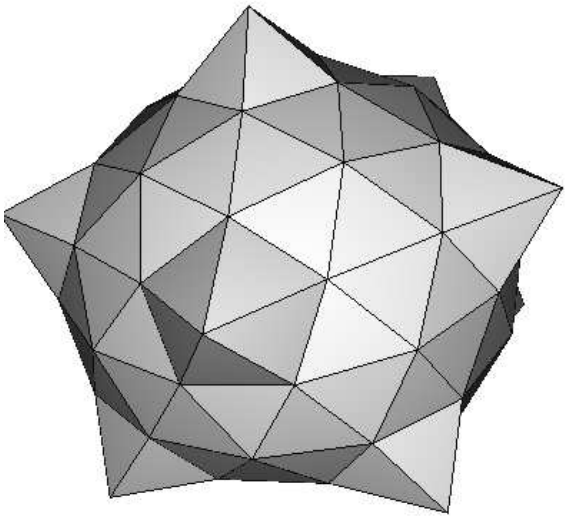
2.4.3 Segmentation d'images biomédicales

Ce modèle a été appliqué avec succès pour segmenter et reconstruire la structure osseuse du crâne sur une image tomodensitométrique 3D (cf. Figure 2.11 et Figure 2.12), le réseau vasculaire de la rétine sur une angiographie fluorescente 2D [24, 6], le réseau vasculaire cérébral sur une angiographie RM 3D à contraste de phase, l'arbre bronchique sur une image tomodensitométrique 3D du thorax et l'aorte abdominale et ses ramifications sur le même type d'image [36].

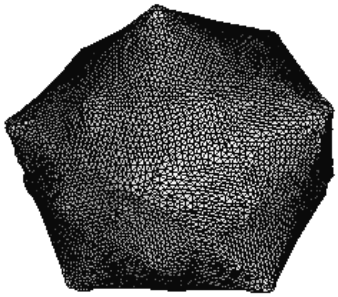
Ce modèle a été très récemment [45] appliqué à la segmentation du cortex sur des images RMN multimodales du cerveau (T1, T2, densité de proton). Des méthodes de seuillage et de morphologie mathématique extraient d'abord une approximation grossière de la matière blanche. Par une variante du *marching cube* [4], une surface triangulée est reconstruite qui sert d'initialisation au modèle. Parallèlement la métrique riemannienne et la force d'attraction sont calculées à partir d'une combinaison des images



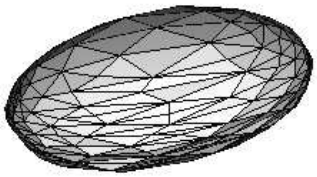
initialisation



initialisation



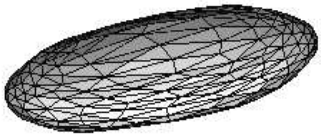
itération 60



itération 20



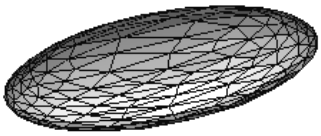
itération 120



itération 40



itération 160



itération 60

FIG. 2.10 – Différentes itérations de la reconstruction d'un même ellipsoïde avec une métrique euclidienne (à gauche) et une métrique riemannienne (à droite).

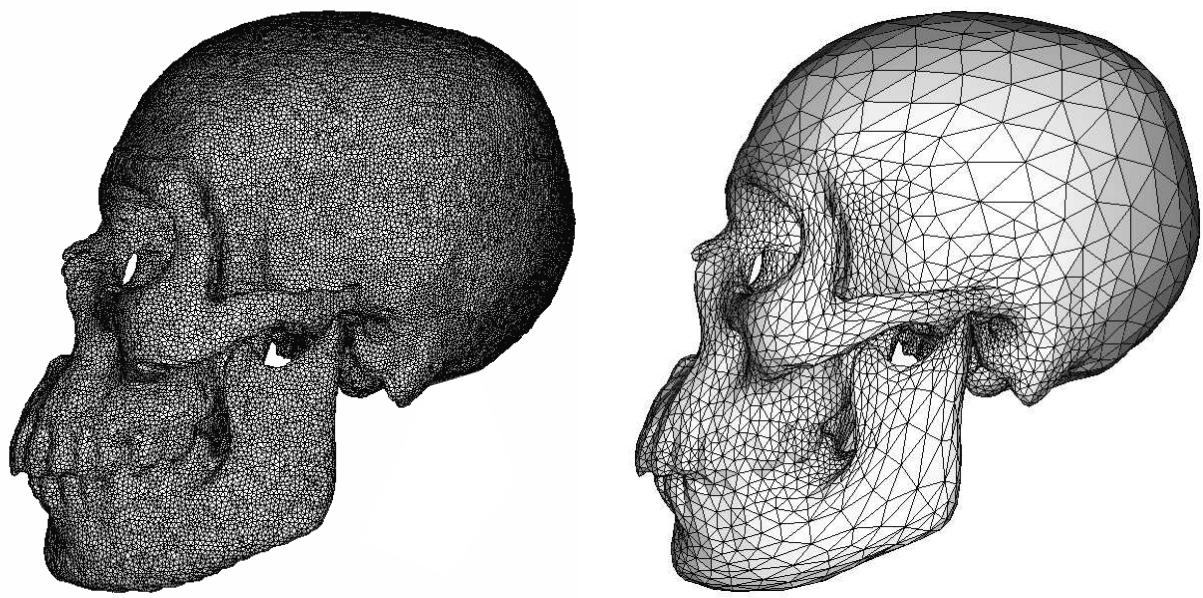


FIG. 2.11 – Vues de profil des reconstructions du crâne, segmenté et reconstruit avec une métrique euclidienne à gauche et une métrique riemannienne à droite. Les temps de calcul et les nombres de sommets associés sont donnés dans le Tableau 2.1.

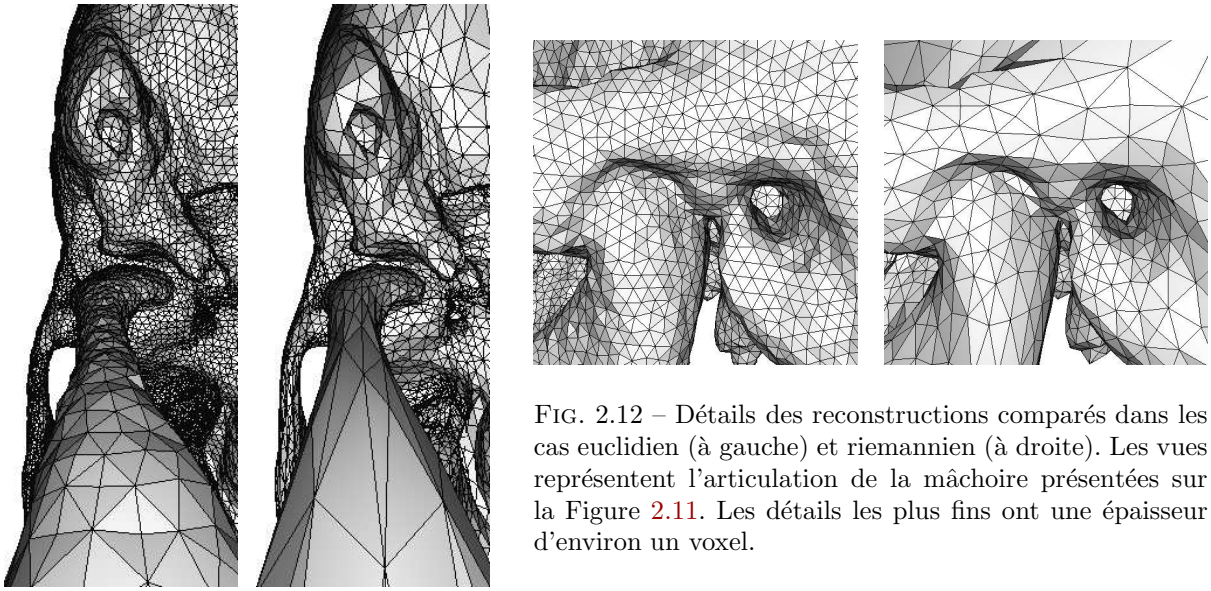


FIG. 2.12 – Détails des reconstructions comparés dans les cas euclidien (à gauche) et riemannien (à droite). Les vues représentent l'articulation de la mâchoire présentées sur la Figure 2.11. Les détails les plus fins ont une épaisseur d'environ un voxel.

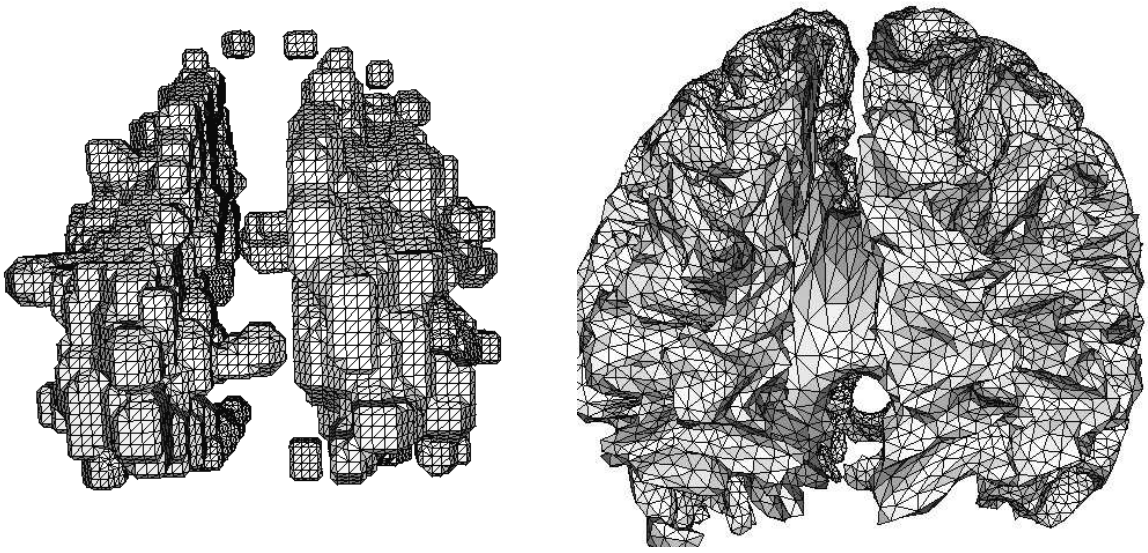


FIG. 2.13 – Initialisation et résultat de la segmentation de la matière blanche.

multimodales, chacune étant seuillée approximativement pour capturer la matière blanche. L'initialisation et le résultat après convergence du modèle déformable sont données sur la Figure 2.13. Dans un deuxième temps, la matière grise est extraite. Cette fois-ci, la métrique et la force d'attraction sont calculées à partir d'une combinaison et d'un seuillage adapté à la matière blanche. La surface initiale est la surface extraite pour la matière grise. On rajoute une contrainte anatomique qui pousse le modèle à rester dans un certain intervalle de distance à la surface initiale. On sait en effet que l'épaisseur de la matière grise est entre $1,5$ et $4,5$ mm. Le résultat est donné sur la Figure 2.14. On constate que les sillons principaux ont conservés leur profondeur grâce à la précison accrue donnée par la métrique riemannienne.

2.5 Discussion

Nous terminons ce chapitre en évoquant les autres modèles adaptatifs, en comparant l'approche proposée avec le paradigme classique de la multirésolution, puis nous concluons.

2.5.1 Autres modèles adaptatifs

Les modèles hautement déformables explicites sont dans leur quasi-totalité des mailles déformables (triangulées ou simplexes). Dès lors, pour en réduire la complexité, la densité de sommets sur la maille doit être variable. Même s'il existe un certain nombre de travaux présentant des mailles déformables à densité variable en 2D et 3D [VT92, Del94a, Del94b, DM00, LKE00], aucun ne permet de gérer en même temps automatiquement les changements de topologie. Parmi ces approches, certaines [VT92, LKE00] adaptent la densité de la maille en subdivisant certaines faces une ou plusieurs fois. Cela impose de définir les forces différemment selon les niveaux de subdivision. On note enfin que les nombreux travaux portant sur la simplification de maille ne sont applicables qu'*a posteriori* dans notre contexte, lorsque le modèle est à l'équilibre et a déjà extrait la composante image recherchée.

A notre connaissance, il n'existe pas de modèle déformable implicite qui utilise une densité de paramètres variable le long de la courbe ou surface en évolution, même si des méthodes *fast marching* adaptatives existent [Set99b, DMRS01]. La méthode de Strain [Str99b, Str99a] pourrait sans doute être adaptée pour tenir compte de l'information image, mais les méthodes de subdivision hiérarchiques sont

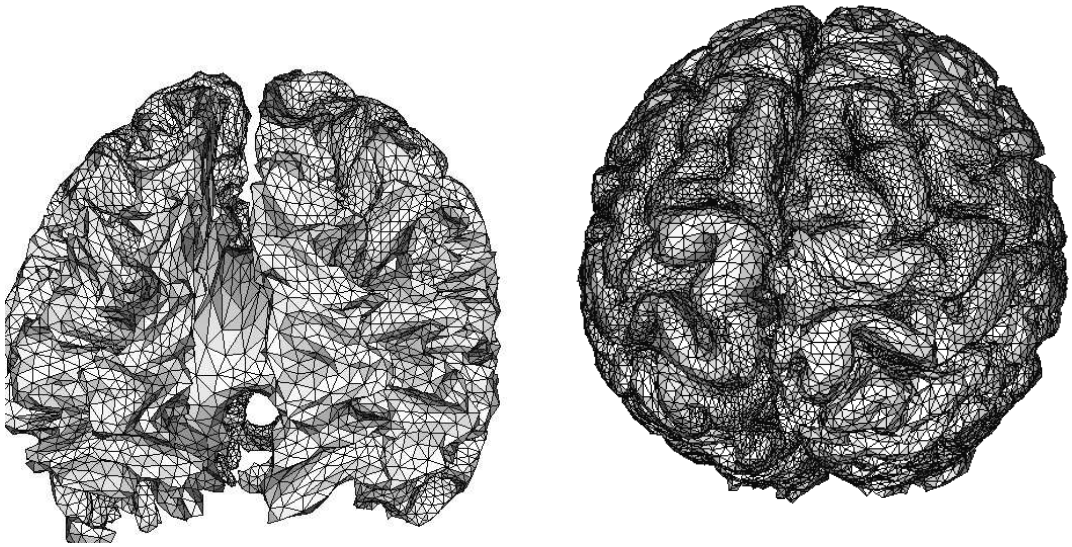


FIG. 2.14 – Initialisation et résultat de la segmentation de la matière grise.

plus adaptés à la modélisation de volumes qu'à la représentation de surfaces, et donc de contours. Des méthodes *level set* basés sur un découpage de l'espace en éléments finis ont aussi été envisagées [TE00], mais seulement dans le domaine de la simulation numérique.

2.5.2 Comparaison avec l'approche multirésolution

Comme dit précédemment dans la Section 1.3.1, les approches multirésolution sont très répandues. L'idée est d'extraire une approximation grossière de la forme recherchée sur un sous-échantillonnage de l'image, puis d'affiner progressivement le résultat en travaillant successivement sur des images de résolution de plus en plus grande. Par ce biais, on espère ainsi limiter les temps de calcul.

Nous montrons sur la Figure 2.15 que cette approche n'a pas forcément le résultat escompté. Premièrement, un sous-échantillonnage important de l'image est antinomique d'une approche contour, car le filtrage passe-bas risque d'éliminer tous les contours significatifs. Sur certains types d'image, la composante d'intérêt a alors complètement disparu sur son sous-échantillonnage. Deuxièmement, le modèle peut perdre beaucoup de temps sur le niveau le plus précis pour affiner les derniers détails. Il a à ce moment-là beaucoup de sommets/paramètres et chaque itération est coûteuse. Sur notre exemple, pour un paramètrage et des forces identiques, les temps de calcul des approches euclidienne et multirésolution sont très proches, alors qu'il est 6 fois plus faible avec l'approche riemannienne. Enfin, la géométrie du modèle extrait par l'approche riemannienne est aussi précise et beaucoup plus compacte que les autres.

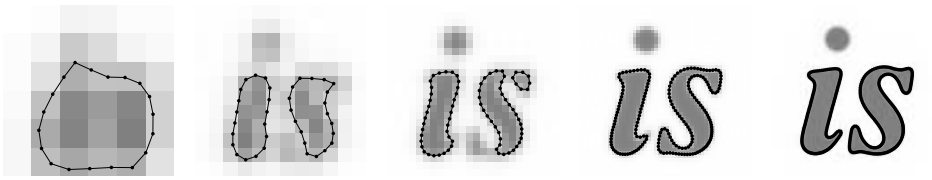
2.5.3 Conclusion

En conclusion à ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de la complexité (en temps et en mémoire) des modèles hautement déformables et nous avons cherché à la rendre plus indépendante de la résolution image. Notre approche a été de rendre la densité de la maille déformable *variable* selon la position dans l'image et *adaptée* à la géométrie locale des contours. Le plongement du modèle dans une géométrie riemannienne a permis de réaliser cet objectif tout en conservant au modèle sa capacité à *adapter automatiquement sa topologie*. En estimant précisément la géométrie des contours avec un nouvel *estimateur de courbure*, la maille déformable est une *approximation optimale* de la forme recherchée et sa densité est montrée *indépendante de la résolution de l'image en entrée*. On note que le modèle obtenu



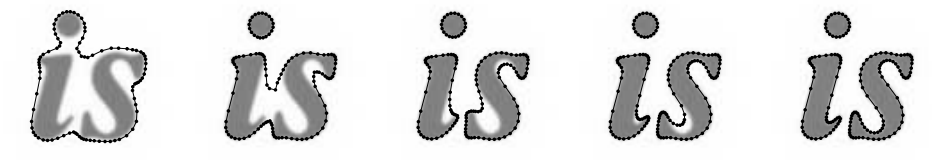
it. 100 it. 200 it. 300 it. 400 it. 910

Approche euclidienne : maillage uniforme et fin



res. 8×8 res. 16×16 res. 32×32 res. 64×64 res. 128×128

Approche euclidienne multirésolution, maillage grossier puis de plus en plus fin



it. 25 it. 50 it. 75 it. 100 it. 280

Approche riemannienne, maillage adaptatif

FIG. 2.15 – Comparaison entre les approches euclidienne, multirésolution et riemannienne. Ligne du haut : extraction avec une densité réguliere du modèle et une taille d'arête de l'ordre du pixel. Statistiques : 910 itérations, 10, 14 s, 458 sommets. Ligne du milieu : extraction multirésolution. A chaque niveau, la taille des arêtes est de l'ordre de la largeur d'un pixel. Statistiques : 310+810+760+1020+510 itérations, $9,23$ s $= 0,08 + 0,40 + 0,87 + 3,10 + 4,78,$ 392 sommets. Ligne du bas : extraction avec une densité adaptative. La taille d'arête est comprise entre un demi-pixel et 20 pixels. Statistiques : 280 itérations, $1,73$ s $= 0,31 + 1,42$ (précalcul + évolution), 150 sommets.

conserve toute la généricité et l'expressivité des modèles déformables explicites. Enfin, nous avons montré les potentialités de cette approche pour la segmentation d'images biomédicales 2D et 3D.

Chapitre 3

Approche discrète des modèles déformables

Ce chapitre présente les recherches que j'ai menées pour proposer une formulation discrète des modèles déformables. Contrairement aux discrétisations classiques des modèles déformables, la formulation est purement discrète : l'espace des solutions est fini. L'idée est d'utiliser la *géométrie discrète* pour calculer des caractéristiques géométriques de formes discrètes. Ces travaux ont été initiés avec Anne Vialard [17]. Ils ont aussi donné lieu à trois mémoires de DEA/master : Jean-François Taille [40], Céline Fouard [42], Aurélien Esnard [41]. L'utilisation de ces travaux pour de la segmentation d'images cardiaques a été faite en collaboration avec Christelle Cassen et Jean-Philippe Domenger [CDBB01, Cas01]. Enfin, une partie de ce travail a été approfondie dans le cadre d'un projet Jeunes Chercheurs du GdR ISIS "Modèle déformable discret" en collaboration avec Laure Tougne et David Cœurjolly du LIRIS (ex-ERIC).

Pour clarifier l'exposé de ce chapitre, qui explique les problématiques de recherche que j'ai attaquées dans les deux chapitres suivants, en voici le plan détaillé :

- Dans la Section 3.1 sont présentées les approches discrètes ou combinatoires de la segmentation d'images et aussi les variantes discrètes des modèles déformables qui ne visent l'extraction que d'une composante de l'image. Malgré la diversité et la richesse des différentes approches existantes, les contraintes géométriques guidant le processus sont souvent simplistes. Je me suis donc intéressé à définir un modèle déformable dans un cadre purement discret, mais qui prend en compte les critères géométriques des contours actifs géométriques de l'espace euclidien (longueur et courbures). Par ce biais, on peut combiner les qualités géométriques des modèles déformables continus avec les processus de minimisation plus évolués des approches combinatoires.
- Après quelques définitions de topologie discrète, la Section 3.2 propose une définition de modèle déformable discret (MDD) conçue par analogie avec le modèle continu (Eq. (3.13) et Définition 3.3) [17]. Cette définition est montrée consistante asymptotiquement avec les modèles déformables continus sous certaines hypothèses, au sens où l'énergie de la discrétisation d'une forme continue tend vers l'énergie de cette forme lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. On parlera de MDD *asymptotiquement euclidien*. L'hypothèse centrale garantissant cette propriété est de disposer d'estimateurs géométriques discrets *convergents*. Cette justification asymptotique de la définition d'un MDD est détaillée, car elle n'a pas été publiée.
- La Section 3.3 présente une mise en œuvre d'un MDD en 2D et 3D ainsi que différentes validations expérimentales. Les points suivants sont détaillés : calcul incrémental de l'énergie et deux heuristiques de segmentation [17], validation expérimentale de la segmentation sur des images 2D [40, 17, 42] et 3D [41], utilisation en lissage de contours 2D (collaboration avec Christelle Cassen et Jean-Philippe Domenger, LaBRI), comparaison à échelle fixée avec un modèle déformable euclidien (collaboration avec Laure Tougne et David Cœurjolly, LIRIS).
- La Section 3.4 synthétise les problématiques et perspectives de recherche qu'ont ouvert ces travaux. Si j'ai pu attaquer un certain nombre de ces problématiques au cours de mes recherches (représentation efficace des surfaces discrètes, estimateurs géométriques), d'autres pistes sont actuellement en développement (partition d'image par minimisation d'énergies comportant des critères géométriques discrets, estimation des courbures) ou restent ouvertes.

Ce chapitre réalise donc le lien entre mes différents domaines de recherche, des modèles déformables à la topologie et géométrie discrète. Pour ce faire, ce chapitre présente donc quelques propriétés et résultats nouveaux (notamment Section 3.2), qui établissent les bases théoriques concrètes de ce lien et justifient — en fin de compte *a posteriori* — ma démarche.

3.1 Introduction et travaux connexes

Les formulations des modèles déformables (*snake*, contours actifs géométriques ou géodésiques) sont continues (cf. Chapitre 1). Traduites sous forme d'équations aux dérivées partielles puis discrétisées avec un nombre fini de variables, des méthodes numériques sont utilisées pour trouver une solution. Cette discrétisation est partielle, car les variables sont en général réelles.

Nous nous intéressons ici aux méthodes de segmentation proches des modèles déformables dans lesquelles la formulation est entièrement discrète. Les variables ont un nombre fini d'état ; l'espace des solutions est fini. La recherche d'une forme optimale est alors un problème *combinatoire*. Le terme *discret* sera employé par la suite en ce dernier sens.

Il existe un nombre considérable de méthodes discrètes de segmentation, parmi lesquelles on peut citer les techniques de grossissement de régions à partir de germes [AB94, HK98], les techniques de division et fusion [HP76], les formulations bayesiennes [GG87, BYM91, Sto94, ZY96] ou de description minimale [Lec89], les algorithmes de coupes dans les graphes [GPS89, BVZ01, BFL06], certaines discrétisations de méthodes d'approximation par morceaux genre Mumford-Shah [MS89, AMG93, GLMC03], ou même des versions discrètes de modèles déformables. Nous n'allons pas dresser un tableau exhaustif de ces méthodes discrètes, mais plutôt en citer quelques unes de représentatives et dont la formulation du problème de segmentation est assez proche de celle des modèles déformables.

3.1.1 Segmentation par minimisation d'énergie

La donnée image est souvent bruitée. Une étape souvent nécessaire en analyse d'image est de tenter de grouper les pixels de l'image en région, en leur attribuant une même étiquette. On suppose en général que ce groupage doit à la fois tenir compte de similarité de valeurs mais qu'il doit aussi refléter des disparités fortes. On parle de problèmes inverses en vision comportant des discontinuités [BZ87]. Il est bien connu que ce genre de problème se modélise naturellement sous forme énergétique, en recherchant un compromis entre attache aux données et régularité de l'étiquetage.

3.1.1.1 Reconstruction par morceaux type Mumford-Shah

Une formulation très générale de cette approche est le modèle de Mumford et Shah [MS89]. Quoique continu dans sa formulation initiale, son optimisation est souvent entreprise avec des méthodes combinatoires, ce qui explique qu'elle soit décrite ici. Ce modèle vise à déterminer la fonction lisse par morceaux u qui approche une fonction image donnée I en minimisant l'énergie suivante (en 2D) :

$$E(u,\Gamma) = \underbrace{\mu^2 \iint_R (u-I)^2}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\iint_{R\setminus\Gamma} \|\nabla u\|^2 + \nu\mathcal{L}(\Gamma)}_{\text{régularisation}}, \tag{3.1}$$

avec Γ un ensemble de courbes qui partitionnent le domaine R de l'image I et $\mathcal{L}(\Gamma)$ est la longueur de ces courbes. On voit que u est une approximation de la fonction image I dont les discontinuités séparent des régions. Si on impose que u soit constante par morceaux, la solution de l'équation précédente est un étiquetage en régions d'intensités relativement homogènes. Les coefficients μ et ν permettent de régler les influences respectives des différents termes et sont assimilables à un facteur d'échelle pour analyser l'image. Il est très difficile de calculer effectivement l'optimum de Eq. (3.1). De nombreux travaux ont

porté sur la définition même du problème de minimisation : existence de solutions, courbes solutions rectifiables, etc (voir notamment [MS95]).

Dans le cadre de la segmentation d'image ou de la restauration d'image, la fonction image I n'est connue que sur un échantillonnage du domaine. Deux approches sont possibles.

- Soit on peut reconstruire une fonction I continue à partir de son échantillonnage discret, puis appliquer des techniques continues d'optimisation, comme une décomposition en éléments finis [BC00] ou même des contours actifs implicites [CV01]. Les solutions extraites ne sont alors en général pas des minima globaux de E.
- Ou, au contraire, l'écriture précédente est discrétisée et des algorithmes discrets d'optimisation sont appliqués, e.g. des techniques de division et fusion [AMG93] ou pyramidales [GLMC03]. Même si les optimisations sont elles aussi heuristiques, elles sont nettement moins sensibles aux minima locaux que les précédentes, et certaines garanties peuvent être obtenues vis-à-vis de l'optimum. La technique des *scale-sets* de [GLMC03] permet ainsi de trouver la partition optimale parmi toutes les partitions possibles d'une pyramide donnée.

Géométriquement, ce modèle tend à définir des solutions qui minimisent la longueur des courbes frontières entre régions. En un sens, cela ressemble au terme de minimisation du premier ordre des *snakes*. Néanmoins, les méthodes de calcul minimisent très souvent la longueur *discrète* des bords des régions de la partition. Comme il existe un grand nombre de chemins discrets de même longueur entre deux pixels, les bords des régions ne sont donc pas forcément lisses.

3.1.1.2 Minimisation d'énergie sur un graphe

Une formulation plus restrictive que la précédente est de ne considérer qu'un ensemble fini d'étiquettes pour les pixels. Dans la suite, $G = (V, W)$ est un graphe orienté ou non de sommets V et d'arêtes W. Très souvent, G est le graphe de 4-adjacence des pixels de l'image, mais il peut aussi représenter le graphe d'adjacence d'une partition du plan.

L'énergie à minimiser est encore la somme d'un terme d'attache aux données et d'un terme de régularisation. Si f est un étiquetage des sommets de V, ce critère $E(f)$ est de la forme :

$$E(f) = \underbrace{\sum_{p \in V} D_p(f_p)}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\sum_{(p,q) \in W} D_{p,q}(f_p, f_q)}_{\text{régularisation}} . \tag{3.2}$$

On constate que la valeur de la première énergie D_p ne dépend que du pixel considéré et de son étiquetage, tandis que la valeur de la seconde énergie $D_{p,q}$ ne dépend que des extrémités de l'arête considérée et de leurs étiquetages respectifs.

Comme indiqué par Boykov *et al.* [BVZ01], cette formulation énergétique se retrouve dans plusieurs approches très différentes de segmentation : étiquetage bayesien de champs de Markov du premier ordre [GG87, BYM91], longueur de description minimale [Lec89], méthode de non-convexité graduée [BZ87], coupes dans les graphes [GPS89, BVZ01, BFL06].

Une grande liberté est laissée dans le choix des fonctions D_p et $D_{p,q}$, même si en général la première est positive et la seconde est minimale lorsque les étiquettes sont identiques. Nous citons deux cas particuliers intéressants de cette énergie. Lorsqu'il n'y a que deux étiquettes, l'équation Eq. (3.2) est appelée *modèle d'Ising*. Greig *et al.* [GPS89] ont alors donné un algorithme basé sur les coupes minimales dans les graphes pour calculer l'optimum global. Lorsque qu'il y a plusieurs étiquettes et que $D_{p,q}$ vaut 0 pour des étiquettes identiques et 1 pour des étiquettes différentes, l'équation Eq. (3.2) est appelée *modèle de Potts*. Boykov *et al.* [BVZ01] prouve que son optimisation est équivalent à un problème NP-difficile. Il donne donc une heuristique quasi-linéaire pour extraire une solution dont l'énergie n'excède pas deux fois l'énergie de l'optimum. Cet algorithme est encore basé sur la recherche d'une coupe minimale dans un graphe.

On retrouve aussi une discrétisation simple du modèle constant par morceaux de Mumford et Shah en choisissant G comme le graphe de 4-adjacence de l'image et en choisissant $D_p(f_p) = \mu^2(I(p) - f_p)^2$

et $D_{p,q}(f_p, f_q) = \lambda \frac{1}{2} 1_{f_p \neq f_q}$. La longueur des frontières entre régions est la mesure de la longueur des chemins discrets séparants les régions. On voit que cette mesure n'est pas invariante par rotation. De plus, cette vision du modèle de Mumford et Shah implique de connaître *a priori* le nombre d'étiquettes possibles.

3.1.2 Formulation probabiliste de la segmentation

D'autres auteurs préfèrent une formulation probabiliste du problème de la segmentation. Les *champs de Markov* se prêtent bien à cette fonction. En effet, on considère alors que l'image x est la réalisation d'un champ aléatoire X. Pour chaque *site* s (ou pixel), le niveau de gris observé x_s est la réalisation de la variable aléatoire X_s. X est un champ de Markov ssi « la probabilité conditionnelle locale en un site n'est fonction que de la configuration du voisinage du site considéré » [Maî03].

En d'autres termes, les sites éloignés ont peu d'influence les uns sur les autres alors que les sites proches ne sont pas indépendants. La notion de proche ou éloigné ne dépend plus alors que du système de voisinage choisi pour les sites. Comme celui-ci a une très forte incidence sur les temps de calcul, le système de voisinage est très souvent le graphe de 4- ou 8-adjacence des pixels.

Sous certaines hypothèses on peut alors montrer que X est un *champ de Gibbs* de potentiel associé au système de voisinage choisi. En d'autres termes la probabilité de réalisation de x est définie par une mesure de Gibbs de fonction d'énergie U, cette énergie étant la somme de *potentiels* définis sur chaque clique du système de voisinage. Cela s'écrit sous la forme :

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x)), \tag{3.3}$$

avec

$$U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x),$$

où $\mathcal{C}$ est le système de cliques associé au système de voisinage choisi et Z est la constante de normalisation.

Si le système de voisinage choisi est le graphe de 4-adjacence, on retrouve la formulation énergétique précédente sur les graphes (Eq. (3.2)). Les cliques sont alors exactement les pixels et les paires horizontales ou verticales de pixels 4-adjacents. Le potentiel U s'écrit ainsi simplement sous la forme reconnaissable suivante

$$U(x) = \sum_{s} U_{\{s\}}(x_s) + \sum_{\{s,t\}\ 4\text{-adjacent}} U_{\{s,t\}}(x_s, x_t). \tag{3.4}$$

Si l'on veut tirer aléatoirement des images suivant la probabilité donnée par Eq. (3.3), l'échantillonneur de Gibbs [GG87] ou l'algorithme de Metropolis sont classiquement utilisés. Parfois on cherche plutôt la configuration la plus probable. Ces configurations correspondent clairement aux minima de l'énergie U. Les algorithmes stochastiques les plus employés sont :

- le *recuit simulé* [KGV83, GG87]. Le principe est d'utiliser à chaque étape l'échantillonneur de Gibbs d'énergie $\frac{U(x)}{T_n}$ où T_n est la température à l'itération n. Si la suite T_n décroît très lentement vers 0 (inverse du logarithme), alors les configurations limites sont exactement les optimums de U. Cette technique d'optimisation extrait donc bien en théorie le ou les optimum(s) de la fonctionnelle, mais en pratique, la décroissance de température est beaucoup trop lente pour que les solutions optimales soient extraites sur des images de taille usuelle.
- les *modes conditionnels itérés* [BYM91]. Cet algorithme est sous-optimal mais beaucoup plus rapide. A chaque étape et pour chaque site, l'algorithme calcule l'étiquette qui maximise la probabilité conditionnelle locale (donc les énergies conditionnelles locales associées aux cliques contenant le site) et l'affecte au site. Il est évident que l'énergie globale ne fait que diminuer, mais la qualité du résultat dépend alors très fortement de l'initialisation, car l'algorithme converge vers un minimum local.

La problématique de la segmentation d'image peut dès lors être abordée dans un *cadre bayesien*. Le champ markovien X (les étiquettes) est alors différent du champ markovien Y (l'image). On peut supposer que le procédé d'acquisition a généré l'image y en fonction des étiquettes x. Il s'agit alors d'inverser le processus pour, étant donnée une image y, extraire le champ d'étiquettes x le plus probable (ou *maximum a posteriori*). On montre alors que la distribution *a posteriori* $P(X = x|Y = y)$ est une distribution de Gibbs d'énergie

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_s -\ln p(x_s|y_s) + \sum_{c\in\mathcal{C}} U_c(x) \tag{3.5}$$

Pour illustrer cette approche, prenons le cas où chaque classe i a une distribution gaussienne des niveaux de gris de moyenne μ_i et de variance σ_i, et où on se limite aux cliques données par la 4-adjacence. On obtient l'énergie suivante :

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_s \frac{(y_s - \mu_{x_s})^2}{2\sigma_{x_s}^2} + \ln\sqrt{2\pi}\sigma_{x_s} + \beta \sum_{\{s,t\}\ 4\text{-adjacents}} \phi_{\{s,t\}}(x_s, x_t). \tag{3.6}$$

Les premiers termes modélisent l'adéquation étiquettes et données. Le dernier terme exprime une probabilité marginale sur les étiquettes, qui favorise en général des étiquettes identiques côte à côte. On peut noter la forte similitude entre cette formulation et l'énergie classiquement associée à un graphe (Eq. (3.2)). La fonction ϕ est en général invariante par translation. Elle permet d'une part de favoriser des étiquetages réguliers et d'autre part de pénaliser fortement la coexistence de certaines étiquettes.

3.1.3 Segmentation par structuration en régions

Contrairement aux précédentes, cette famille de techniques a une approche plus algorithmique de la segmentation. Leur principe commun est de modéliser une ou des partitions d'images puis d'effectuer des transformations élémentaires en vue d'améliorer l'homogénéité relatives des régions. Le critère optimisé n'est alors pas toujours explicite.

3.1.3.1 Algorithmes divisions / fusions

Les techniques de divisions et fusions [HP76] fonctionnent en général sur le principe suivant. Dans un premier temps, la ou les régions initiales sont divisées tant qu'elles ne satisfont pas un critère d'homogénéité. Le résultat est une sur-segmentation de l'image initiale que l'on va chercher à simplifier. Des regroupements de régions sont alors envisagés en commençant par les fusions de régions adjacentes aux caractéristiques les plus proches. Un critère d'hétérogénéité à la frontière des régions est parfois considéré.

Le choix des critères de fusion et de division est donc déterminant et de nombreux ont été proposés. À noter qu'on peut très souvent exprimer ces critères dans une formulation énergétique [MS95] : les algorithmes de division et fusion constituent alors des heuristiques de minimisation. Un exemple est l'algorithme de divisions et fusions de Ackah-Miezan et Gagalowicz [AMG93] qui optimise une énergie de type Mumford-Shah. Les développements récents de ces algorithmes vont dans deux directions : diminution de la complexité par utilisation de cartes discrètes [BB98, Köt02], extension à l'imagerie 3D [DR03].

3.1.3.2 Pyramides irrégulières

Ces approches fournissent une vision hiérarchique d'une image. Une pyramide est un ensemble causal de partitions, où chaque niveau fournit un découpage plus ou moins détaillé de l'image. La construction d'une telle pyramide est souvent basée sur des critères d'homogénéité et sur un calcul d'ensembles maximaux indépendants [MMR91, JM92]. Avec cette vision hiérarchique de l'image, d'autres algorithmes de segmentation peuvent se servir de la structure pour extraire une segmentation adaptée [Ber95]. Du point

de vue de la recherche d'un optimum global, on peut citer les *scale-sets* de Guigues *et al.* [GLMC03] qui, dans un modèle type Mumford-Shah, extraient la partition optimale d'une pyramide en fonction de l'échelle considérée. Les développements récents dans ce domaine visent à optimiser la structure de données représentant la hiérarchie [BK03b, GSDL05, BK06, GSDL06] et à combiner cette approche de la segmentation avec des approches contour comme la ligne de partage des eaux [BMM05].

3.1.3.3 Grossissement de régions

Ces techniques nécessitent une initialisation plus poussée que les précédentes : un ensemble de germes qui indique approximativement la localisation de chaque région. Le principe est d'agréger progressivement des pixels ou des petites régions à ces germes en privilégiant les pixels ou bouts de régions les plus ressemblants [Zuc76, AB94, HK98]. Là encore, ces techniques peuvent être reliées aux approches variationnelles, car le critère d'agrégation peut souvent se réécrire sous forme d'une énergie. Ce sont néanmoins des heuristiques qui ne garantissent aucun optimum global.

L'algorithme de ligne de partage des eaux ou *watershed* peut aussi être considéré comme un algorithme de grossissement de régions, où chaque région est un bassin d'écoulement [VS91]. Plusieurs auteurs ont montré que la ligne de partage des eaux se calculait de manière équivalente avec une distance topographique [Mey94]. La partition de ligne de partage des eaux est alors la partition qui minimise les distances aux minima de chaque bassin [NWvdB03], ce qui montre que cet algorithme classique appartient aussi au cadre des méthodes de minimisation d'énergie. Nguyen *et al.* [NWvdB03] montrent que l'on peut rajouter une pénalisation de longueur sur les bords des bassins, ce qui les régularise. Néanmoins, l'algorithme de calcul n'extrait plus alors forcément la partition optimale, mais plutôt un minimum local.

3.1.4 Variantes discrètes des modèles déformables

Les approches précédentes de la segmentation ont généralement une vision globale du problème de la segmentation, qui tient difficilement compte de critères géométriques, qui sont une information typiquement locale. Les modèles déformables mettent au contraire l'accent sur ce point, en adaptant progressivement le contour d'une forme aux hétérogénéités locales de l'image. Du fait des contraintes géométriques qui leur sont propres, leur formulation est intrinsèquement continue. Néanmoins, un certain nombre de travaux présentent des versions discrètes des modèles déformables. Nous les classons ici en deux catégories, suivant qu'ils se rapprochent plutôt des *snakes* ou des méthodes *level-sets*. Ces modèles seront un peu plus détaillés que les modèles des sections précédentes, du fait de leur plus forte similitude avec les travaux que j'ai entrepris.

3.1.4.1 Modèles discrets apparentés aux snakes

Afin de simplifier la discrétisation des *snakes*, d'accélérer les temps de calcul et aussi pour disposer d'algorithmes combinatoires d'optimisation, certains auteurs imposent un nombre fini de positions possibles d'évolution pour le contour déformable.

Une première approche est d'imposer aux sommets d'avoir des coordonnées entières. Ainsi Williams et Shah [WS92] proposent un modèle déformable dont les n sommets ont des coordonnées entières et n'ont qu'un nombre limité m de déplacements possibles à chaque itération. Les auteurs ne calculent pas le déplacement d'énergie minimal mais déterminent une approximation en un temps en $\mathcal{O}(nm)$. Horritt [Hor99] a une approche similaire pour l'analyse d'images radar, mais détecte aussi les auto-intersections. Cette approximation est itérée plusieurs fois jusqu'à convergence.

De façon assez similaire, Tagare [Tag97], reprenant des idées d'Amini *et al.* [AWJ90], propose d'associer à une courbe polygonale fermée de référence un ensemble de courbes orthogonales. Chacun des n sommets de la courbe dispose alors de m positions possibles sur sa courbe orthogonale propre. Une formulation énergétique des *snakes* réduite aux contraintes de longueur permet à l'auteur d'utiliser des techniques de programmation dynamique pour extraire la courbe optimale en $\mathcal{O}(nm^3)$.

Elomary et Chassery [Elo94, EC95] ont présenté un modèle de « bulle » déformable pour segmenter des images 2D, dont l'énergie est similaire à celle des *snakes*. L'originalité de l'approche réside dans l'évolution de la bulle, qui est une courbe polygonale en expansion. A chaque itération, pour chaque sommet déplacé d'un pas fixe donné dans la direction de sa normale, la nouvelle énergie du modèle est calculée. Ensuite, le sommet qui minimise l'énergie sera effectivement déplacé de ce pas. *Un tel modèle ne converge donc pas vers une solution.* En revanche, on peut examiner *a posteriori* l'évolution de l'énergie du modèle au cours du temps. Le minimum donnera alors l'instant où la bulle répondait au mieux aux critères de régularité et d'adéquation aux contours de l'image. Nous utiliserons par la suite ce principe de minimisation *a posteriori*.

Certains auteurs proposent d'utiliser une sur-segmentation de l'image comme espace discret de déformation pour le *snake*. Ce processus est notamment intéressant lorsque l'information de contours est peu fiable mais reste la seule possible comme attache aux données. Pour segmenter des échographies, Chen *et al.* [CHSLH02] découpent l'image en petites cellules à l'aide d'un algorithme de ligne de partage des eaux [VS91]. Ensuite, ils utilisent l'algorithme des *snakes duaux* [GN97] pour trouver le meilleur contour. L'idée est de se donner une double initialisation, une interne et une externe, et de déformer progressivement les deux contours l'un vers l'autre. Au lieu d'utiliser la longueur comme contrainte interne, c'est l'aire entre les deux contours qui est minimisée. À chaque itération, le contour interne absorbe une cellule et le contour externe rejette une cellule. La cellule choisie est celle qui est la plus favorable pour l'énergie globale. L'algorithme s'arrête lorsque les contours coïncident. Le contour obtenu est en général très irrégulier, et il est donc lissé par interpolation spline à la fin du processus.

Ashton *et al.* [APBC97] proposent une technique de modèle déformable discret assimilable à une bulle de voxels sous pression. Des germes initiaux définissent les points d'expansion des bulles, qui sont soumises à une pression interne (type gaz parfait), à une tension de surface et à des points de blocage (des points de contours repérés dans l'image). A chaque pas, tous les voxels qui subissent une force d'expansion rajoutent les voxels sur leur bord à la forme. Cette technique s'apparente donc au grossissement de régions, mais les contraintes s'apparentent à celles des *snakes*. La méthode est notamment efficace lorsque le volume de la forme à extraire est connu à l'avance, car le réglage de la pression interne est déterminant.

Contrairement à la plupart des approches stochastiques de la segmentation, Storvik [Sto94] suggère un cadre bayesien pour l'extraction d'un *contour* discret dans une image. L'espace des modèles est alors un ensemble de points (situés sur la grille et voisins les uns des autres) dont le nombre est variable. Dans ce cadre, on peut aussi associer des *potentiels* locaux à chaque sommet. Ces potentiels intègrent une information géométrique calculée sur un voisinage. En appliquant des principes similaires à ceux décrits dans la Section 3.1.2, l'auteur construit une chaîne de Markov qui a la distribution désirée à la limite. Les transitions sur le modèle sont des simples ajouts ou suppression de pixels autour du contour. Ensuite, il propose l'algorithme de Metropolis pour calculer un échantillonnage de la distribution *a posteriori* et l'algorithme de recuit simulé pour trouver le maximum *a posteriori*. Les avantages de cette approche par rapport aux approches stochastiques région sont : (i) moins de paramètres à chaque itération, (ii) intégration plus aisée de paramètres géométriques. Néanmoins, la mise en œuvre proposée est assez limitée du fait du nombre d'itérations nécessaire : contrainte géométrique réduite à une estimation globale de la convexité, attache aux données définie par des critères région.

3.1.4.2 Modèles discrets apparentés aux méthodes level-set

D'autres auteurs ont transposé les méthodes *level-set* d'évolution — et notamment le flot de courbure moyenne — dans un cadre discret, soit pour accélérer les temps de calcul, soit pour les adapter à des applications différentes de la segmentation d'image, comme l'amincissement ou la reconstruction.

Certains auteurs constatent que la technique d'évolution des *level-sets* peut être grandement accélérée, sous l'hypothèse que l'attache aux données est guidée par un critère région. Ainsi, Shi et Karl [SK05] proposent une évolution tout ou rien de chaque nœud proche du niveau 0. L'idée clé est qu'un iso-contour peut être approché par un contour discret. On a donc pour chaque nœud 4 états possibles : intérieur strict, intérieur et touche le niveau 0, extérieur et touche le niveau 0, extérieur strict. A chaque itération, le *signe* de la vitesse calculée en chaque nœud qui touche le niveau 0 indique s'il conserve ou non son

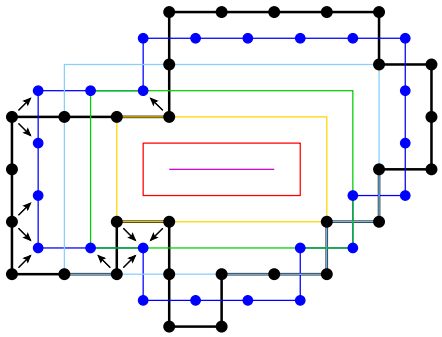


FIG. 3.1 – Version discrète du flot de courbure de moyenne [Imi01, ISN04]. Chaque itération déplace les sommets de $\mathbb{Z}^2$ dans $(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})^2$. Les flèches indiquent comment se déplacent certains sommets. On constate que le contour évolue vers un rectangle, puis vers un segment.

état. A stabilisation de ce processus, une étape de lissage par simple filtrage gaussien confirme ou non l'état de chaque nœud. Si tel n'est pas le cas, on relance le processus d'évolution tout ou rien précédent. Cette technique est donc rapide, mais cependant assez approximative. Par exemple, on perd la garantie que la segmentation par level-set est correcte dans des conditions idéales.

Imiya [Imi01] transpose dans la grille discrète le flot de courbure moyenne, défini usuellement par équation différentielle et implémenté par méthode *level-set*. L'auteur associe des indexes de courbure à chacun des sommets du contour ou de la surface discrète. Ils sont reliés à la variation de la normale en ces points. Ces indexes ont une définition locale, liée au voisinage immédiat du sommet : il y en a 9 distincts en 3D. Ce sont les ombrelles définies par François [Fra95] avec un signe. Une version discrète du théorème de Gauss-Bonnet fait le lien entre une combinaison linéaire de ces indexes et le nombre de trous de l'objet discret. Ensuite, l'auteur propose un mouvement des sommets de l'objet de $\mathbb{Z}^n$ dans $(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})^n$, $n \in \{2,3\}$, qui conserve la courbure (gaussienne en fait). Ce mouvement n'est pas complètement local, puisqu'il implique un découpage de l'objet en zones concaves et convexes. Répété, ce flot préserve la topologie, réduit toute forme à des segments en 2D ou à des rectangles planaires en 3D (voir la Figure 3.1). Cette technique d'évolution de forme discrète a des applications en amincissement [ISN04].

Fejes et Rosenfeld [FR97] proposent aussi une version purement discrète du flot de courbure moyenne : les *processus en migration*. L'idée est simple : tout pixel/voxel a un voisinage dans l'ensemble P considéré (opérateur $\mathcal{N}$). Tout voisinage définit une position, calculée par moyennage (opérateur $\mathcal{P}$). Si $\mathcal{F} \equiv \mathcal{P} \circ \mathcal{N}$, alors le processus de migration est la répétition de la fonction de mouvement $\mathcal{F}$ sur tous les points considérés jusqu'à stabilisation. Des contraintes de continuité sont aussi imposées à la fonction de mouvement. Les auteurs indiquent l'analogie avec le flot de courbure minimale et montrent que les courbes complexes tendent à se réduire à un cercle, puis à un seul point. Il est aussi possible d'introduire des points fixes ou d'imposer le mouvement sur une hypersurface donnée. Le processus de migration permet alors de reconstruire des surfaces qui s'apparentent aux surfaces minimales, de calculer des chemins minimaux (voir la Figure 3.2). Le processus de migration est définissable en dimension quelconque, mais la définition exacte de l'opérateur de moyennage n'est pas claire, notamment pour garantir l'existence d'une position de repos. Puisque les contraintes de points fixes sont « dures », ce genre d'approche n'est pas utilisable pour la segmentation d'images en niveau de gris ou couleur.

3.1.5 Synthèse

Vis-à-vis des modèles présentés ci-dessus, nous pouvons faire les remarques suivantes. Premièrement, les critères d'attache aux données peuvent être très élaborés, notamment dans les approches probabilistes où la notion d'homogénéité peut être finement modélisée. Ensuite, le problème des discontinuités entre régions a aussi été beaucoup étudié, et il est pris en compte dans toutes les approches précédentes de la segmentation. En revanche, les critères géométriques sont très souvent ignorés ou simplistes dans les

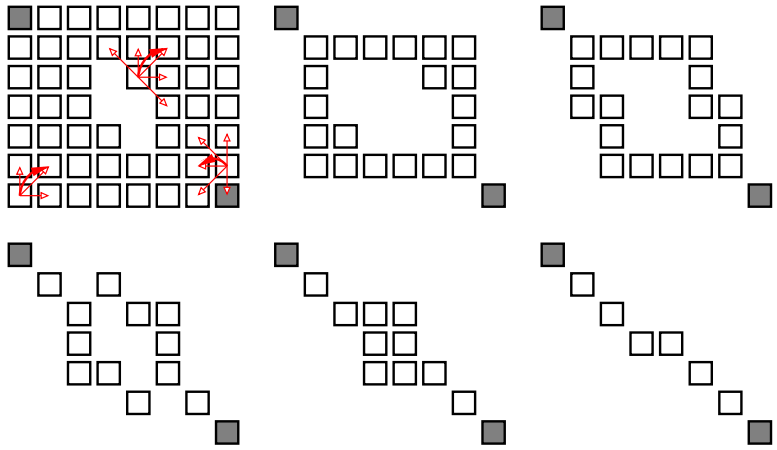


FIG. 3.2 – Processus de migration par moyennage [FR97]. Chaque itération déplace les sommets vers le centroïde (discrétisé) de ses voisins. Des points fixes peuvent être introduit comme ici où ils sont dessinés en noir. Les flèches indiquent comment se déplacent certains sommets. On constate que l'ensemble de pixels initial évolue vers la droite joignant les deux points fixes.

approches combinatoires de la segmentation. Le plus souvent seule la longueur discrète des bords des régions est prise en compte, ce qui ne garantit pas un découpage lisse et régulier entre régions.

Le terme d'élasticité des *snakes* ou le terme d'évolution par la courbure des méthodes *level-sets* est donc souvent approché de façon trop grossière pour garantir le lissage des formes extraites. Le terme de rigidité n'est jamais inclus dans les méthodes discrètes.

L'introduction de critères géométriques précis dans les modèles déformables discrets sera donc à la base des travaux présentés dans ce chapitre et les chapitres qui suivent.

3.2 Formulation discrète des modèles déformables

Dans la suite de ce mémoire, nous proposons une formulation discrète des modèles déformables, qui a les caractéristiques suivantes :

- L'espace des formes possibles est le domaine discret de l'image, c'est-à-dire un parallélépipède inclus dans $\mathbb{Z}^n$.
- Similairement aux modèles déformables explicites, toute forme a une énergie, somme d'un terme d'adéquation bord de la forme et contour de l'image et d'un ou plusieurs termes de régularisation. De plus l'énergie ne dépend que du bord de la forme et est décomposable en une somme d'énergies élémentaires, définies par calcul local.
- Similairement aux modèles déformables implicites, les termes de régularisation sont géométriques : longueur/aire et courbure(s).
- La formulation est nD et le modèle est mis en œuvre en nD.
- Le comportement du modèle doit approcher le comportement du modèle continu lorsque la résolution tend vers l'infini.

Après quelques définitions préliminaires de topologie discrète (Section 3.2.1), nous exposons une formulation d'un modèle déformable discret, obtenu par analogie avec le modèle déformable classique type *snake* (Section 3.2.2). Cette démarche est justifiée par le comportement asymptotique du modèle discret proposé, qui est montré équivalent à celui de son pendant continu (Section 3.2.3). Puis, dans la Section 3.3, nous validons l'approche sur des images 2D, avec un algorithme de minimisation *a posteriori* et des estimateurs géométriques simples. Ensuite, nous comparons le comportement de notre modèle avec celui du modèle continu dans la Section 3.3.6 et nous établissons les conditions nécessaires pour que ces comportements soient asymptotiquement similaires. Dans la Section 3.4, nous concluons ce chapitre en

listant les problématiques liées à la mise en œuvre de ce modèle et les points que nous avons par la suite particulièrement approfondis.

3.2.1 Définitions discrètes préliminaires

Nous rappelons d'abord quelques notions classiques de topologie discrète. L'approche choisie ici pour définir les surfaces est celle de Herman et Udupa [Her92, Her93, Udu94] : une surface est un sous-ensemble d'arêtes du graphe d'adjacence de l'image. Cette approche, en fait assez générale, est suffisante pour définir et présenter le modèle déformable plongé dans la grille régulière. On verra dans le Chapitre 4, § 4.1, une autre approche pour définir les surfaces, basée sur la grille cellulaire. Elle est spécifique aux grilles régulières mais plus efficace pour mettre en œuvre des surfaces discrètes évolutives. Elle réalisera concrètement toutes les définitions données dans ce chapitre.

3.2.1.1 Image, objet, adjacence, surface discrète, bord

Nous appelons *voxel* un élément de l'espace discret $\mathbb{Z}^n$, pour $n \geq 2$. Soit P un parallélépipède discret de $\mathbb{Z}^n$. Une *image* I sur Z^n est une application de P, appelé *domaine* de I, à valeur dans un espace de nombres. Une *image binaire* est à valeur dans $\{0, 1\}$. La *valeur* du voxel u dans l'image I est le nombre $I(u)$. Un *objet* est un sous-ensemble non vide du domaine P. Le *complément* d'un objet O dans P est noté O^c.

Nous utilisons les notions classiques de voisinages dans la grille discrète de dimension n : ω_n est la relation d'adjacence induite par la norme L_1 et α_n est celle induite par la norme L_∞. Naturellement, en 2D ω_2 et α_2 sont respectivement la 4- et la 8-adjacence, et en 3D ω_3 et α_3 sont respectivement la 6- et la 26-adjacence. Une *relation d'adjacence* ρ sur $\mathbb{Z}^n$ satisfait par définition à la contrainte $\omega_n \subseteq \rho \subseteq \alpha_n$. Un *$\rho$-chemin* d'un voxel v vers un voxel w dans un objet A est une séquence $u_0 = v, \ldots, u_m = w$ de voxels de A deux à deux ρ-adjacents. Sa *longueur* est m.

Nous définissons maintenant les surfaces discrètes et leurs composants élémentaires : les surfels. Un *surfel* est une paire de voxels ω_n-adjacent. Géométriquement, cette paire représente la face de dimension $n-1$ située entre les deux voxels, doublée d'une orientation intérieur vers extérieur. Tout sous-ensemble non vide de surfels est une *surface discrète*. Si Σ est une surface discrète, l'ensemble de voxels $\{v \in P \mid (u, v) \in \Sigma\}$ est appelé l'*extérieur immédiat* de cette surface et est noté $\mathrm{IE}(\Sigma)$. L'*intérieur immédiat* $\mathrm{II}(\Sigma)$ est défini symétriquement. Le *bord* ∂O d'un objet O est la surface discrète entre O et son complémentaire dans M, i.e. $\partial O = \{(u, v) \mid \omega_n(u, v) \wedge u \in O \wedge v \in O^c\}$.

Les définitions précédentes sont des transpositions discrètes des définitions usuelles de l'espace euclidien. Un objet discret est aussi un sous-ensemble de l'espace. L'adjacence définit un système de voisinage (mais il existe un plus petit voisinage). Une surface est aussi un ensemble de « dimension » $n-1$. Le bord d'un objet est défini comme les éléments dont tout voisinage est à cheval sur l'intérieur et l'extérieur de l'objet. On verra aussi par la suite qu'un déplacement sur une surface discrète a aussi $n-1$ degrés de liberté.

3.2.1.2 Adjacence sur surface discrète

Pour le moment, cette définition de surface n'est qu'ensembliste et non topologique : aucun voisinage n'y est défini. Nous allons avoir besoin de définir les voisins des surfels sur une surface pour définir des zones connexes sur les bords, pour extraire un bord par suivi et pour faire des calculs géométriques. Par ailleurs, on pourra alors définir et représenter un objet uniquement par son bord, ce qui économise un ordre de grandeur dans les algorithmes.

Définir une notion consistante d'*adjacence entre surfels* n'est pas aussi directe que pour les voxels, surtout en dimension supérieure à 3. En effet, on souhaite en général qu'elle ait la propriété suivante : chaque composante connexe de surfels extraite sur un bord d'un objet doit séparer une composante connexe de l'objet et une composante connexe de son complémentaire. Un certain nombre d'auteurs se

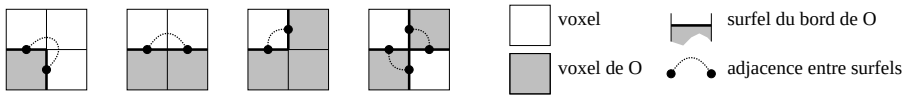


FIG. 3.3 – Calcul local d'une adjacence de surfel sur le bord d'un objet 2D. Celle-ci correspond à un choix de 4-adjacence pour l'objet et de 8-adjacence pour le fond. On constate que la configuration de 4 pixels côte à côte détermine complètement l'adjacence entre surfels.

sont intéressés à ce problème, car il a des implications concrètes pour l'extraction de surface discrète par suivi [AFH81, HW83, Udu94, 4, BK04]. Les relations d'adjacences qui satisfont à cette propriété sont appelées *triplets de Jordan* [Udu94].

Dans ce chapitre, nous admettrons juste qu'il est possible de définir *localement* des adjacences entre surfels sur le bord d'un objet O, consistante avec des adjacences κ, λ bien choisies pour l'objet et pour le fond. Nous noterons la relation d'adjacence choisie $\beta_O^{\kappa,\lambda}$ ou simplement β_O, lorsqu'il n'y pas de confusion possible.[1] En 2D, la Figure 3.3 illustre la définition d'une adjacence de surfel sur le bord d'un ensemble de pixels. Dans le contexte des modèles déformables discrets, le choix des adjacences pour l'objet et pour le fond n'a que peu d'incidence sur le résultat final.

Comme toute relation, la β_O-adjacence induit des β_O-*composantes* de surfels sur ∂O. Il est aussi possible de définir des β_O-*chemins* sur ∂O qui ont pour longueur leur nombre d'éléments moins 1. Cette relation permet aussi de définir une β_O-*distance* sur ∂O définie comme le plus court β_O-chemin entre les deux éléments ou $+\infty$ s'ils n'appartiennent pas à la même composante. Les surfels de ∂O de distance inférieure à r à un surfel σ forment la β_O-*boule* de taille r autour de σ.

3.2.2 Discrétisation de l'énergie

Nous rappelons maintenant la formulation énergétique des snakes (cf. Eq. (1.2) et Eq. (1.4)) :

$$E(\mathbf{S}, I) = E_{\text{int}}(\mathbf{S}) + \lambda E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I), \tag{3.7}$$

$$E_{\text{int}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2}\int \alpha(u)\|\mathbf{S}_u(u)\|^2 + \beta(u)\|\mathbf{S}_{uu}(u)\|^2 du, \tag{3.8}$$

$$E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I) = \int P(I, \mathbf{S}(u))du. \tag{3.9}$$

Elle est clairement dépendante du paramétrage, ce qui a peu de sens dans un espace discret, mais aussi dans le contexte de la segmentation. Similairement aux contours actifs géométriques, nous adoptons une formulation intrinsèque de la régularisation en choisissant le paramétrage par l'abscisse curviligne. Les contraintes d'élasticité et de rigidité deviennent alors des pénalisations de la longueur et des courbures (notée κ) : $\|\mathbf{S}_s(s)\| = 1$ et $\|\mathbf{S}_{ss}(s)\| = |\kappa(s)|$. Par ailleurs, les fonctions α et β seront considérées constantes ou dépendantes de la position dans l'espace. On obtient :

$$E_{\text{int}}(\mathbf{S}) \quad = \quad \frac{1}{2}\int \alpha + \beta\kappa^2(s)ds. \tag{3.10}$$

En supposant que l'on recherche une forme dans l'image et non un morceau de courbe, la courbe $\mathbf{S}$ est le bord d'une région de l'espace euclidien. Discrétisée, cette région est un objet discret O de bord ∂O. L'intégrale de Eq. (3.10) peut se décomposer sur chaque morceau élémentaire de l'approximation discrète ∂O de $\mathbf{S}$.

[1] Si une des adjacences κ ou λ est ω_n ou α_n, on sait alors qu'il existe un triplet de Jordan valide $(\kappa, \lambda, \beta_O^{\kappa,\lambda})$ [Udu94, 4].

$$E_{\text{int}}(\partial O) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\partial O}(\alpha+\beta\hat{\kappa}^2(\sigma))\hat{l}(\sigma), \tag{3.11}$$

où $\hat{\kappa}(\sigma)$ est une estimation de la courbure en σ. Le discrétisé $\hat{l}(\sigma)$ de la mesure élémentaire ds est une mesure de la longueur du surfel. On verra par la suite comment l'estimer. L'énergie externe se discrétise simplement sous la forme :

$$E_{\text{ext}}(\partial O, I) = \sum_{\sigma\in\partial O} P(I,\sigma)\hat{l}(\sigma). \tag{3.12}$$

Les écritures précédentes sont en fait extensibles simplement en dimension arbitraire, en notant $(\hat{\kappa_i})$ les estimations des $n-1$ courbures principales et en supposant que $\hat{l}(\sigma)$ est une mesure de l'aire élémentaire d'un surfel.

$$E(\partial O, I) = \sum_{\sigma\in\partial O}\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\left(\sum\hat{\kappa}_i^2(\sigma)\right)\right]\hat{l}(\sigma) + \lambda\sum_{\sigma\in\partial O}P(I,\sigma)\hat{l}(\sigma). \tag{3.13}$$

La formulation précédente sera appelée *énergie de la forme discrète O sur I*. Elle est décomposée sur chaque élément du bord de la forme et a une écriture homogène en toute dimension.

3.2.3 Validité asymptotique dans le plan

Cette section, essentiellement technique, montre la validité de la discrétisation de l'énergie continue de **S** (Eq. (3.10)) à sa version discrète sur ∂O (Eq. (3.11)). Nous montrons en fait un résultat plus général sur la discrétisation d'intégrales définies le long du bord d'une forme du plan. Les preuves sont données *in extenso* car elles n'ont pas été publiées.

La principale difficulté réside dans l'impossibilité d'établir une bijection « naturelle » entre le bord d'une forme continue et le bord de son discrétisé. Ainsi la projection du premier sur le second n'est pas bien définie (non mono-valuée) et ce, quelle que soit la finesse du pas de discrétisation (cf. Figure B.2, page 149 de l'Annexe B). Nous avons donc étudié plus en détails ce problème dans l'Annexe B, à laquelle le lecteur peut se référer pour plus de précisions. Nous synthétisons rapidement les définitions requises et les résultats obtenus avant de les utiliser pour montrer que le modèle déformable discret a la même énergie que le modèle déformable continu en asymptotique, sous certaines conditions.

Dans la suite X désigne un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ dont le bord topologique $\operatorname{bd} X$ est une courbe C^2 de courbure bornée par κ_M. X est donc *par(r)-régulier* (pour un certain r). La *discrétisation de Gauss* de X de pas $h>0$ est l'ensemble des points de $h\mathbb{Z}\times h\mathbb{Z}$ qui sont dans X. Si on identifie tout point de $h\mathbb{Z}\times h\mathbb{Z}$ a un carré fermé aligné avec les axes, de côté h et dont il est le centre (i.e. un pixel), alors la discrétisation de Gauss est une partie de $\mathbb{R}^2$. On la note alors $\operatorname{Dig}_G(X,h)$. Son bord topologique $\operatorname{bd}\operatorname{Dig}_G(X,h)$ (comme partie de $\mathbb{R}^2$) sera noté $B_h^{\square}X$. Il peut être vu soit comme une courbe du plan constituée de pas horizontaux ou verticaux de taille h, soit comme un chemin discret 4-connexe dans $(h(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}))^2$ formé de surfels.

Théorème B.6 Il existe un pas de discrétisation $h_0 \le r$ à partir duquel l'image discrète $\operatorname{Dig}_G(X,h)$ est *bien-composée* au sens de Latecki *et al.* [GL95, LCG98]. Son bord est une 1-variété compacte.

Comme $\operatorname{Dig}_G(X,h)$ ne contient alors pas de configurations croisées ( ou ), l'énergie de la forme discrète $\operatorname{Dig}_G(X,h)$ sur I (Eq. (3.13)) ne dépend plus du choix de la relation d'adjacence entre surfels.

De plus, comme X est simplement connexe, $\operatorname{bd} X$ et $B_h^{\square}X$ sont des courbes paramétrables par leur abscisse curviligne. On note alors (y_i^h) la séquence des $N_{X,h}$ sommets espacés de h de $B_h^{\square}X$.

Rétro-projection La *rétro-projection* $\pi_{X,h}$ de $B_h^\square X$ sur $\mathrm{bd}\, X$ est définie comme l'application qui associe à un point $y \in B_h^\square X$ le point $x \in \mathrm{bd}\, X$ tel que y appartient au segment normal à $\mathrm{bd}\, X$ en x de longueur $\sqrt{2}h$ centré en x.

Lemme B.10 La rétro-projection est mono-valuée, surjective et continue.

Ainsi, même si la projection n'induit pas de bijection, la rétro-projection nous permet quand même d'établir le lien entre le bord discrétisé et le bord de l'ensemble.

Théorème B.14 La partie non bijective $\mathrm{bd}_h^* X$ de $\mathrm{bd}\, X$ pour la discrétisation $B_h^\square X$ (éléments ayant plusieurs antécédents par la rétro-projection) est fermée pour la topologie induite de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathrm{bd}\, X$. La longueur de $\mathrm{bd}_h^* X$ est au pire un $\mathcal{O}(h)$ et souvent un $\mathcal{O}(h^2)$.

La rétro-projection n'est pas toujours bijective, mais la partie non bijective se réduit avec le pas de discrétisation, ce qui sera suffisant pour montrer notre résultat.

Définition B.15 et Théorème B.16 On peut approcher une intégrale curviligne le long de $\mathrm{bd}\, X$ par une intégrale curviligne le long de $B_h^\square X$ en appliquant une mesure correctrice.

On notera de plus $\mathbf{n}_X(x)$ le vecteur unitaire normal à $\mathrm{bd}\, X$ au point x et $\mathbf{w}_{X,h}(y)$ le vecteur unitaire normal à $B_h^\square X$ au point y,[2] vecteurs que l'on prendra tous deux orientés vers l'extérieur.

Théorème 3.1. *Soit g une fonction C^2 définie sur le bord de la forme X. Soit $(y^h_{i+\frac{1}{2}})$ les milieux des surfels $[y_i^h y_{i+1}^h]$ de $B_h^\square X$. Alors, pour un pas h suffisamment petit, l'intégrale curviligne de g le long de ce bord est approchable par une somme de valeur de g sur son discrétisé de pas h :*

$$\int_{\mathrm{bd}\, X} g\, dx = \sum_{i=0}^{N_{X,h}-1} \left[g(\pi_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}))\, l_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) \right] + \mathcal{O}(h^n), \tag{3.14}$$

$$\text{avec } l_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) = h \left| \mathbf{n}_X(\pi_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}})) \cdot \mathbf{w}_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) \right|. \tag{3.15}$$

L'entier n vaut 2 si X est convexe ou si son bord possède un nombre fini de points d'inflexion, sinon n vaut 1.

Démonstration. D'après la Proposition B.1, il existe un $r > 0$ pour lequel X est par(r)-régulier. En prenant un pas de discrétisation h inférieur ou égal à $\frac{\sqrt{10}}{5} r$, le Théorème B.16 s'applique et

$$\int_{\mathrm{bd}\, X} g\, dx = \mathcal{I}_{B_h^\square X}(g) + \mathcal{O}(h^n), \tag{3.16}$$

où $\mathcal{I}_{B_h^\square X}(g)$ est l'intégrale curviligne h-discrétisée de g autour de $\mathrm{bd}\, X$ et l'entier n est tel que spécifié dans l'énoncé du théorème. Or, par définition, on a

$$\mathcal{I}_{B_h^\square X}(g) = \int_{B_h^\square X} g \circ \pi_{X,h} |\mathbf{n}_X \circ \pi_{X,h} \cdot \mathbf{w}_{X,h}| dy,$$

qui est une intégrale curviligne. On peut l'approcher numériquement par la règle des points milieux étendue (e.g. cf. [PTVF92]), en notant que ces points sont exactement la séquence $(y^h_{i+\frac{1}{2}})$:

$$\mathcal{I}_{B_h^\square X}(g) = \sum_{i=0}^{N_{X,h}-1} \left[g(\pi_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}))\, l_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) \right] + \mathcal{O}(h^2). \tag{3.17}$$

La combinaison de Eq. (3.16) et Eq. (3.17) permet de conclure. ∎

La quantité $l_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}})$ est appelée naturellement *longueur élémentaire* du surfel $[y_i^h y_{i+1}^h]$, car elle estime la contribution de tout le surfel à la longueur totale (en prenant g égal à la fonction identité

[2] Si y est sur un coin, alors on prend arbitrairement la médiane des normales de part et d'autre.

dans Eq. (3.14)). On peut aussi utiliser d'autres estimateurs de longueur de surfel dans Eq. (3.14). En dimension quelconque, cette quantité devient une estimation de l'aire du surfel, que l'on obtient par produit scalaire de la normale avec la normale triviale du surfel, multipliée par l'aire d'un surfel. On note que l'on retrouve l'approximation de l'aire par produit scalaire normale estimée et normale du surfel, suggérée par certains auteurs [EPRR79, Len99, Coe02].

Maintenant nous sommes en mesure de justifier la discrétisation de l'énergie d'un modèle déformable continu sous la forme donnée dans Eq. (3.13). Le théorème suivant montre que l'énergie discrétisée est asymptotiquement égale à l'énergie continue lorsque le pas de résolution tend vers 0, *du moment que les estimateurs discrets de normale, de longueur et de courbure convergent vers leur analogue continu.*

Théorème 3.2. *Soit* $\mathbf{S}$ *une courbe simple du plan de classe* C^2 *et de longueur* $\mathcal{L}(\mathbf{S})$*, qui délimite une région* X *du plan (donc par(r)-régulière). Soit* O_h *l'objet discret égal à la discrétisation de Gauss de* X *de pas* h*. Alors, pour un pas de discrétisation suffisamment petit, les énergies internes et externes du modèle déformable continu de géométrie* $\mathbf{S}$ *et de paramètres* (α, β) *sont liées respectivement aux énergies internes et externes du modèle déformable discret de géométrie* ∂O_h *sous la forme :*

$$E_{\text{int}}(\partial O_h) = E_{\text{int}}(\mathbf{S}) + \mathcal{O}(h^n) + \mathcal{L}(\mathbf{S}) \left[(\alpha+\beta)\mathcal{O}(h^{\alpha'-1}) + \beta\mathcal{O}(h^{\beta'}) \right], \tag{3.18}$$

$$E_{\text{ext}}(\partial O_h, I) = E_{\text{ext}}(\mathbf{S}, I) + \mathcal{O}(h^n) + \mathcal{L}(\mathbf{S}) \left[\mathcal{O}(h^{\min(\alpha'-1,1)}) \right], \tag{3.19}$$

avec

- *l'entier* n *vaut 1 ou 2 selon les propriétés de* X *(cf Théorème 3.1),*
- *la longueur estimée d'un surfel* σ^h *suit* $\hat{l}(\sigma^h) = l_{X,h}(\pi_{X,h}(\sigma^h)) + O(h^{\alpha'})$*,*
- *la courbure estimée en ce surfel suit* $\hat{\kappa}(\sigma^h) = \kappa(\pi_{X,h}(\sigma^h)) + O(h^{\beta'})$*,*
- *et le champ scalaire* $P(I,x)$ *est borné et de gradient borné au moins sur la dilatation morphologique de* $\mathbf{S}$ *par la boule de rayon* $\frac{\sqrt{2}}{2}h$*.*

Démonstration. La géométrie de ∂O_h dans le plan est exactement l'ensemble $B_h^{\square} X$. Tout surfel σ_h sur ∂O_h est alors identifié à son point milieu dans $B_h^{\square} X$. Son projeté sur $\mathbf{S} = \operatorname{bd} X$ est alors $\pi_{X,h}(\sigma^h)$. Nous sommes dans les hypothèses du Théorème 3.1 en choisissant $g(x) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\kappa^2(x)$ pour l'énergie interne d'une part et $g(x) = P(I,x)$ pour l'énergie externe d'autre part. Nous développons ici juste le terme en α, les autres sont similaires.

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{bd} X} \frac{\alpha}{2} dx &= \sum_{i=0}^{N_{X,h}-1} \frac{\alpha}{2}\, l_{X,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^n) \\ &= \sum_{\sigma^h \in \partial O_h} \frac{\alpha}{2} \hat{l}(\sigma^h) + N_{X,h}\mathcal{O}(h^{\alpha'}) + \mathcal{O}(h^n). \end{aligned}$$

Or la Proposition B.7 indique que $hN_{X,h} = \mathcal{O}(\mathcal{L}(\mathbf{S}))$, ce qui conclut pour le terme en α. ∎

D'après les bornes spécifiées, il est facile de voir que l'énergie discrétisée ne peut pas s'approcher de l'énergie continue plus rapidement que $\mathcal{O}(h)$, dès lors que $\lambda \neq 0$, et pas plus rapidement que $\mathcal{O}(h^2)$ sinon. On verra en fait dans le Chapitre 5 que le plus grand α' connu vaut $\frac{5}{3}$, et qu'il n'existe pas actuellement d'estimateur de courbure tel que la relation $\beta' > 0$ soit prouvée.

3.2.4 Modèle déformable discret

La discrétisation de l'énergie des snakes de la Section 3.2.2 et sa justification dans la Section 3.2.3 vont nous permettre de définir un modèle déformable discret, indépendamment de toute forme continue sous-jacente.

Définition 3.3. *Soit I une image sur le domaine $P \subset \mathbb{Z}^n$. Nous appellerons* modèle déformable discret (MDD) *sur l'image I tout processus qui recherche la (ou une) forme discrète $O \subset P$ d'énergie $E(\partial O, I)$ minimale. L'énergie est définie ainsi (cf. Eq. (3.13)) :*

$$E(\partial O, I) = \underbrace{\sum_{\sigma \in \partial O} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \left(\sum \hat{\kappa}_i^2(\sigma) \right) \right] \hat{l}(\sigma)}_{\text{énergie interne}} + \lambda \underbrace{\sum_{\sigma \in \partial O} P(I, \sigma) \hat{l}(\sigma)}_{\text{énergie externe}}, \tag{3.20}$$

où $\hat{\kappa}_i(\sigma)$ est une estimation de la i-ème courbure principale au voisinage de σ. L'aire élémentaire $\hat{l}(\sigma)$ est définie comme $\hat{\mathbf{n}}(\sigma) \cdot \mathbf{v}_\sigma$ où $\hat{\mathbf{n}}(\sigma)$ approche la normale unitaire au voisinage de σ et $\mathbf{v}_\sigma$ est la normale triviale au surfel σ de norme égale à l'aire du surfel.

Si l'on veut simuler le *snake* classique, on peut choisir le potentiel P comme la fonction $(I, \mathbf{x}) \mapsto \|\nabla I(\mathbf{x})\|^2$. Le modèle est alors guidé vers les forts gradients de l'image. D'autres potentiels peuvent être proposés pour s'adapter au jeu de données à segmenter. Cependant, dans ce mémoire, nous n'utiliserons que cette définition d'énergie externe.

Dans l'idéal, on souhaiterait que, si l'objet O est le discrétisé d'une forme continue, alors l'énergie de O tende vers l'énergie de la forme continue lorsque le pas de discrétisation s'affine. Ainsi, les minima des MDD tendent vers les minima du modèle déformable continu. Cette propriété souhaitée est décrite par la définition qui suit.

Définition 3.4. *Soit une courbe ou surface $\mathbf{S}$ qui est le bord d'une région S de l'espace euclidien de dimension n. Soit une suite de pas de discrétisation (h_i) qui tend vers 0. On note O_h le discrétisé de Gauss de S de pas h. On dira que le MDD est* asymptotiquement euclidien *si son énergie tend vers l'énergie de la courbe ou surface euclidienne lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 :*

$$\lim_{i \to +\infty} E(\partial O_{h_i}, I) = E(\mathbf{S}, I). \tag{3.21}$$

D'après la section précédente, deux conditions nécessaires émergent pour qu'un MDD soit asymptotiquement euclidien :

1. L'écriture de $\hat{l}$ impose que l'estimateur de normale sur un contour ou une surface discrète converge vers la normale de la courbe ou surface continue.
2. Si $\beta \neq 0$, il faut disposer d'estimateurs de courbures principales qui sont aussi convergents.

Si ces conditions sont respectées, alors le Théorème 3.1 s'applique et l'énergie discrète est bien une approximation de l'énergie continue à un facteur près du pas de discrétisation.

La problématique de définir des estimateurs géométriques discrets *convergents* est donc essentielle pour mettre au point des MDD asymptotiquement euclidiens. Elle m'a profondément guidée dans mes recherches. Dans un premier temps, elle m'a naturellement conduit à étudier les estimateurs géométriques discrets de longueur, aire et courbure(s) (cf. Chapitre 4). Dans un deuxième temps, j'ai vérifié ou infirmé leur convergence (cf. Chapitre 5).

Néanmoins, avant de s'intéresser au comportement *asymptotique* d'un MDD, il aussi essentiel d'examiner son comportement à basse échelle, par exemple lorsque sa discrétisation correspond à celle de l'image. C'est ce que nous allons faire dans la suite de ce chapitre en testant un MDD sur des images 2D et 3D.

3.3 Étude expérimentale

Dans cette section, nous expérimentons un modèle déformable discret dont l'énergie est calculable incrémentalement. Un minimum est extrait par expansion forcée puis recherche *a posteriori*. Nous montrons des résultats de segmentation sur des images 2D et 3D. Enfin, nous étudions le comportement du modèle déformable discret soumis à ses seules contraintes internes.

3.3.1 Définition et calcul des énergies

L'écriture de l'énergie du modèle déformable discret permet de décomposer son calcul sur chaque surfel du bord de O. Cependant, les estimateurs géométriques de longueur ou de courbure observent en général un voisinage sur la surface autour du point de calcul. On spécifie donc dans l'écriture de l'énergie d'un surfel qu'elle dépend de la géométrie du bord de O autour de σ :

$$E(\partial O, I) = \sum_{\sigma \in \partial O} E^{\text{int}}(\sigma; \partial O) + \lambda E^{\text{ext}}(\sigma; \partial O, I). \tag{3.22}$$

Sous l'hypothèse que le calcul d'énergie de chaque surfel σ ne dépende que d'un voisinage de taille bornée par p sur ∂O autour de σ, l'énergie d'une forme O' peut être déduite directement de l'énergie de O avec un coût réduit. On note Φ les surfels (orientés) communs aux deux bords. On note Φ_p l'ensemble des surfels de Φ à β_O-distance inférieure à p d'un surfel de Φ. Seuls ces pixels peuvent avoir une énergie différente selon qu'on les considère sur ∂O ou $\partial O'$. On établit alors

$$\underbrace{E(\partial O') - E(\partial O)}_{\text{variation}} = \underbrace{E(\partial O' \setminus \Phi; \partial O')}_{\text{surfels créés}} - \underbrace{E(\partial O \setminus \Phi; \partial O)}_{\text{surfels détruits}} + \underbrace{E(\Phi_p; \partial O') - E(\Phi_p; \partial O)}_{\text{surfels proches des différences}}.$$

Cette relation est particulièrement intéressante lorsque la nouvelle forme O' n'est qu'une faible variation de la forme O : les trois ensembles $\partial O' \setminus \Phi$, $\partial O \setminus \Phi$ et Φ_p sont alors de taille très réduite, et la complexité de calcul de l'énergie totale de O' est largement indépendant de sa taille. En pratique, en mémorisant l'énergie de chaque surfel, seuls les énergies des surfels créés ou proches d'une variation doivent être (re)calculées.

3.3.2 Segmentation par minimisation a posteriori

Maintenant que l'espace des formes et le critère à minimiser sont définis, il faut déterminer un algorithme qui recherche une forme optimale. Comme il n'est pas concevable d'examiner toutes les combinaisons possibles, différentes heuristiques sont envisageables. Le comportement d'un *snake* est d'observer son voisinage local pour déterminer une faible perturbation qui fait diminuer son énergie. Pour émuler ce comportement, il est dans un premier temps naturel d'introduire des déformations *élémentaires* d'une forme discrète O.

Soit σ un surfel de ∂O et soit $V_k(\sigma)$ la β_O-boule de rayon k autour de σ, k positif. Une *k-expansion élémentaire de O en σ* est la forme $O \cup \text{IE}(V_k(\sigma))$. Une *$k$-contraction élémentaire de O en σ* est la forme $O \setminus \text{II}(V_k(\sigma))$.

On peut noter que toute forme peut être atteinte à partir d'expansions ou contractions. Cette propriété serait déterminante si l'on souhaitait optimiser l'énergie par un processus stochastique basé sur une chaîne de Markov. Nous présentons ici deux heuristiques déterministes de minimisation :

1. *Minimisation gloutonne (voir Algorithme 3.1).* Cet algorithme adapte progressivement une forme initiale en testant toutes les expansions ou contractions possibles et en choisissant celle d'énergie minimale. Il s'arrête au premier minimum *local* (vis-à-vis d'*une* déformation élémentaire). Il est donc similaire à l'algorithme stochastique d'optimisation des modes conditionnels itérés [BYM91]. Il donne aussi au MDD un comportement similaire à l'évolution d'un *snake*, qui « coule » dans la direction d'énergie minimale.
2. *Minimisation a posteriori (voir Algorithme 3.2).* Cet algorithme fait grossir une forme en suivant de façon gloutonne le chemin d'énergie minimale. Il se termine lorsque la forme occupe toute l'image, même si d'autres critères de terminaison sont possibles. Ensuite, en regardant *a posteriori* la courbe des énergies de la forme à chaque itération, un utilisateur ou un algorithme peut déterminer quelle est la forme la plus pertinente. Un tel algorithme extrait donc un ensemble de formes qui ont une forte probabilité d'être des composantes significatives de l'image. Ce type de minimisation se rapproche très fortement de la « bulle discrète » d'Elomary et Chassery [Elo94, EC95] mais aussi

de certains algorithmes de grossissement de régions [HK98]. La Figure 3.4 illustre une étape de cet algorithme dans le cas 2D.

Entrées : image I de support P, forme initiale $O \subset P$ **proche** de la composante à extraire, J un ensemble d'entiers positifs contenant 0.
Sorties : un couple forme/énergie $(O_i, E(\partial O_i, I))$.

1. $i \leftarrow 0$, $O_0 \leftarrow O$
2. $E_i \leftarrow E(\partial O_i, I)$
3. Pour tout surfel $\sigma \in \partial O_i$, pour tout $k \in J$, faire
   (a) $O^e_{\sigma,k} \leftarrow k$-*expansion* élémentaire de O_i en σ
   (b) Calcul de $E(\partial O^e_{\sigma,k}, I)$ à partir de E_i (Eq. (3.3.1))
   (c) $O^c_{\sigma,k} \leftarrow k$-*contraction* élémentaire de O_i en σ
   (d) Calcul de $E(\partial O^c_{\sigma,k}, I)$ à partir de E_i (Eq. (3.3.1))
4. Sélection de la forme $O^e_{\sigma',k'}$ ou $O^c_{\sigma'',k''}$ d'énergie minimale.
5. Si cette énergie est inférieure à E_i, alors affecter cette forme à O_{i+1}, $i \leftarrow i+1$, revenir à l'étape 2.
6. Retourner (O_i, E_i).

Algorithme 3.1: Algorithme de segmentation glouton par déformations élémentaires et arrêt sur premier minimum. La forme initiale O doit être proche de la composante à extraire car l'algorithme extrait le premier minimum local. En sortie, retourne la forme d'énergie minimale par rapport à toute déformation élémentaire.

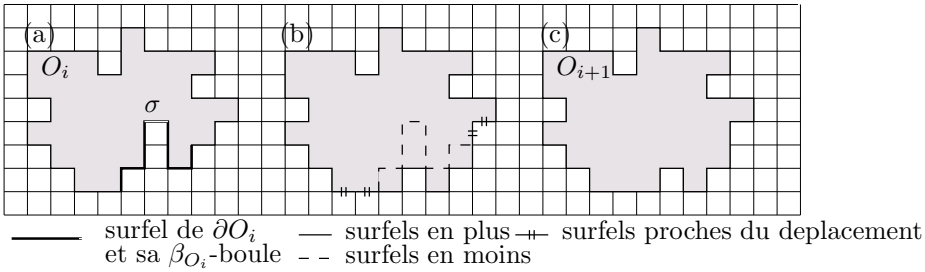


FIG. 3.4 – Une étape dans l'expansion du MDD. (a) σ est un surfel du bord à l'étape i. (b) Une 4-expansion autour de σ est réalisée. (c) Nouvelle forme du MDD à l'étape $i+1$ si cette expansion minimisait l'énergie.

3.3.3 Expérimentations sur des images 2D

Pour ces expérimentations, nous avons choisi des estimateurs géométriques discrets simples, qui n'observent qu'un petit voisinage autour de chaque surfel. D'autres estimateurs plus évolués seront utilisés dans la comparaison avec le modèle euclidien. De nouveaux seront proposés dans les deux derniers chapitres.

Ainsi l'estimateur de longueur est une adaptation de celui de Rosen-Profitt (e.g voir [KB89]), qui attribue une longueur élémentaire différente aux coins ($\psi_c = 0.670$) et aux parties longilignes du contour discret ($\psi_{nc} = 0.948$). L'estimateur $\hat{l}(\sigma)$ est la moyenne des longueurs élémentaires des deux sommets du surfel σ. Il examine donc une boule de taille 1 autour du surfel pour son calcul.

Entrées : image I de support P, forme initiale $O \subset P$ **incluse** dans la composante à extraire, J un ensemble d'entiers positifs contenant 0.
Sorties : par itération, couple forme/énergie $i \mapsto (O_i, E(\partial O_i, I))$.

1. $i \leftarrow 0$, $O_0 \leftarrow O$
2. $E_i \leftarrow E(\partial O_i, I)$
3. Pour tout surfel $\sigma \in \partial O_i$, pour tout $k \in J$, faire
   (a) $O_{\sigma,k} \leftarrow k$-expansion élémentaire de O_i en σ
   (b) Calcul de $E(\partial O_{\sigma,k}, I)$ à partir de E_i (Eq. (3.3.1))
4. Sélection de la forme $0_{\sigma',k'}$ d'énergie minimale.
5. $O_{i+1} \leftarrow O_{\sigma',k'}$, $i \leftarrow i+1$.
6. Revenir à l'étape 2 jusqu'à réalisation d'une condition de fin (e.g., $O_i = P$, interaction de l'utilisateur, détection automatique de minimum).

Algorithme 3.2: Algorithme de segmentation par expansion et minimisation *a posteriori*. La forme initiale O doit être incluse dans la composante à extraire. En sortie, retourne l'historique des évolutions du modèle. Les minima de la fonction d'énergie $i \mapsto E_i$ sont des bons candidats de la forme recherchée.

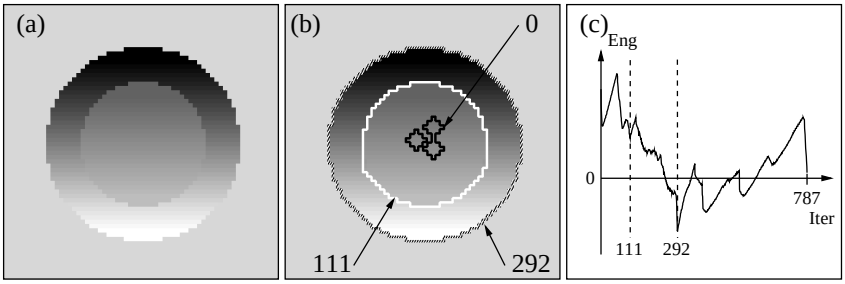


FIG. 3.5 – Segmentation de composantes inhomogènes (Extrait de [17]). Paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, J) = (0.5, 0.5, 1, \{0, \ldots, 3\})$. (a) Image test : un disque avec un dégradé inscris sur un autre disque aussi en dégradé, le tout sur un fond gris. (b) Trois étapes dans l'expansion du modèle par minimisation *a posteriori* : initialisation, premier bord, deuxième bord. (c) Courbe d'énergie de cette évolution : les deux bords sont des minima locaux.

En 2D, il n'y a qu'une courbure à déterminer. Elle sera calculée à partir de la longueur l d'un voisinage de taille p autour de σ estimée par l'estimateur de Rosen-Profitt et de la distance euclidienne D entre les deux extrémités de ce voisinage. L'estimateur $\hat{\kappa}(\sigma)$ est défini comme

$$\hat{\kappa}(\sigma) = \max\left(0, \frac{\sqrt{2}\pi}{\pi - 2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{l}\right)\right).$$

Il présente l'avantage d'être nul lorsque le contour est presque droit et que les longueurs coïncident et, dans le cas d'une forme en quart-de-cercle, est égal à l'inverse de son rayon. Néanmoins, il sous-estime la courbure pour des parties circulaires d'angle plus petit. Dans nos expériences, nous prenons $p = 4$.

Enfin, l'énergie externe est une fonction quadratique du gradient de l'image, calculée comme différence de valeurs entre intérieur et extérieur : $E^{\text{ext}}(\sigma \overset{d}{=} (u, v); \partial O, I) = (I(u) - I(v))^2$.

Dans les expériences présentées ici, nous utilisons l'Algorithme 3.2 de minimisation *a posteriori*. La capacité à segmenter des composantes inhomogènes est illustrée sur la Figure 3.5. On constate que les deux minima significatifs de la courbe d'énergie délimitent chacun une région intéressante de l'image.

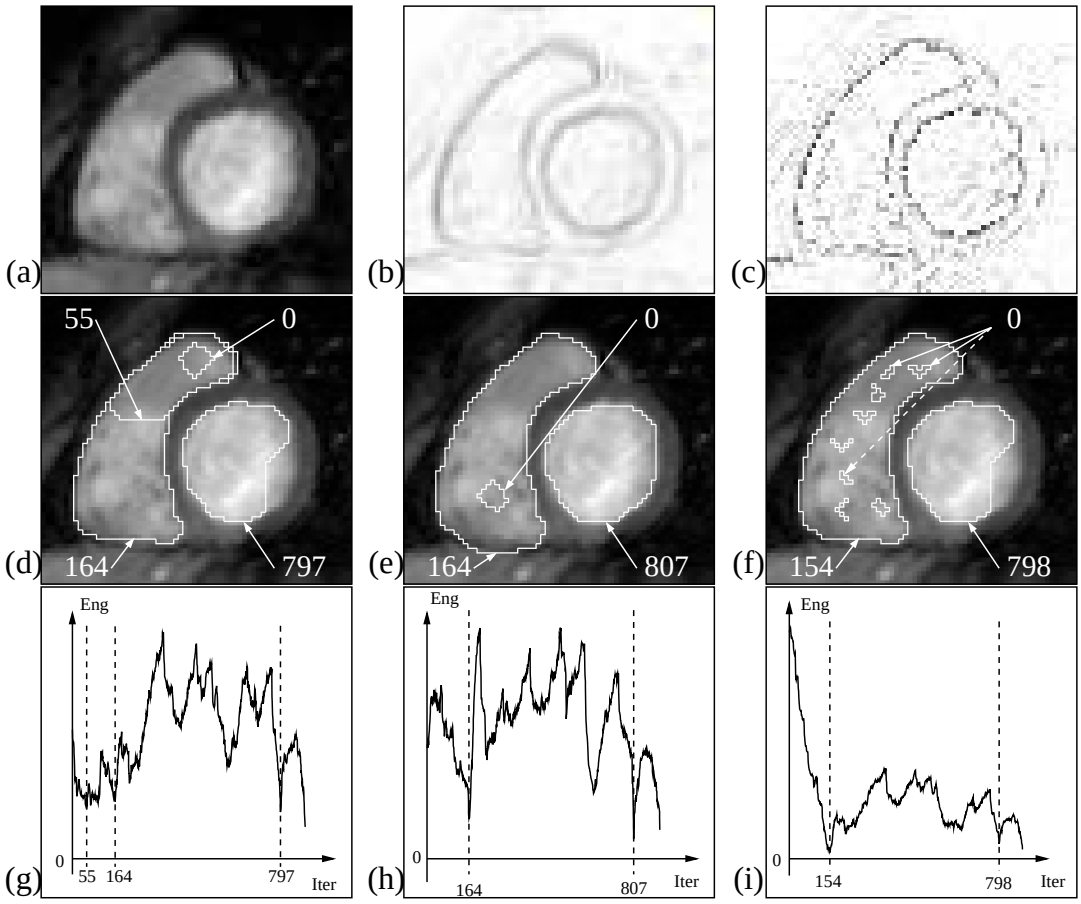


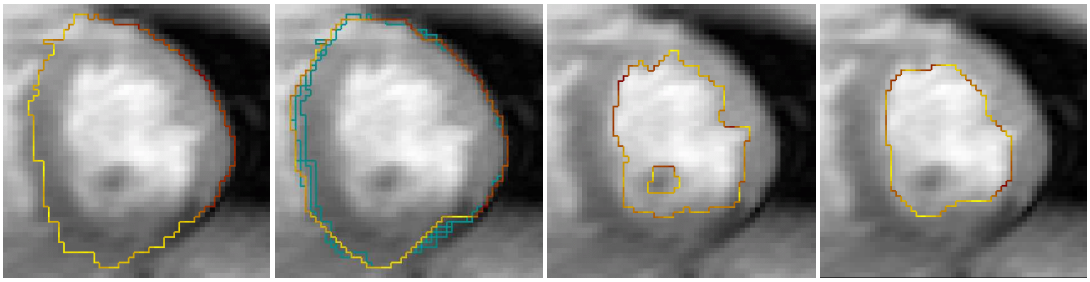
FIG. 3.6 – Robustesse du MDD vis-à-vis de son initialisation (Extrait de [17]). Paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, J) = (0.25, 0.25, 1, \{0, 3\})$. (a) Image test : IRM de cœur en diastole. (b) Filtrage de Sobel. (c) Détecteur de contour par Laplacien. (d-f) Etapes de la segmentation pour différentes initialisations. (g-i) Courbes d'énergies correspondantes.

La deuxième expérience montre la robustesse de la segmentation vis-à-vis de la forme initiale sur des images médicales. L'image test est une IRM d'un cœur humain en diastole (Figure 3.6a).[3] L'objectif est de délimiter le ventricule droit (à gauche sur l'image) : il est assez inhomogène sur sa partie basse et ses contours sont faibles et fragmentés sur cette même partie (Figure 3.6b-c). Le MDD, dans son évolution, parvient néanmoins à dessiner son contour, et ce pour des initialisations très différentes (Figure 3.6d-f). Les courbes d'énergies correspondantes sont tracées sur la dernière ligne (Figure 3.6g-i).

Globalement, le MDD se comporte assez similairement à un modèle déformable euclidien soumis à une force de pression et à des contraintes de lissage. Cependant, la segmentation *a posteriori* permet de quitter certains minima locaux et donc de rendre ce type de modèle déformable beaucoup moins sensible à l'initialisation que les modèles classiques, alors même que les forces externes — et donc la connaissance *a priori* — sont réduites à leur plus simple expression.

Par ailleurs, l'exemple de la Figure 3.6d,g montre un problème commun à toutes les techniques de segmentation par minimisation et en particulier les modèles déformables. la modélisation de la segmentation par optimisation est parfois loin de la réalité. Le contour de l'itération 55 a une énergie inférieure au contour de l'itération 164 (ventricule droit). Cela indique que chercher l'optimum global n'est pas for-

[3] Remerciements aux Pr. Ducassou and Pr. Barat, Service de Médecine Nucléaire Hôpital du Haut Levêque, Bordeaux, France.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 3.7 – Lissage de courbes discrètes. Contours endo-cardique (a) et épi-cardique (c) après segmentation par division/fusion. Lissage par modèle déformable discret de ces contours (b) et (d).

cément *la* bonne réponse à une problématique de segmentation. Il faut donc rajouter de l'information : ici, l'initialisation joue ce rôle, mais le choix des paramètres α, β, λ est aussi déterminant.

3.3.4 Lissage de contours 2D

Un MDD est aussi utile dans une étape de post-segmentation, notamment pour lisser les contours des régions obtenus par un autre algorithme. Nous présentons ici l'enchaînement d'une segmentation division/fusion avec contrainte topologique suivi d'un lissage du contour obtenu par MDD :

1. *Entrée :* IRM temporel de cœur au temps $t+1$. Contours endo- et épi-cardiques au temps t.
   Sortie : Contours endo- et épi-cardiques au temps $t+1$.
2. 1ère phase : algorithme de division/fusion basé sur les cartes discrètes [CDBB01]. La division fait un découpage en zones homogènes. Ensuite, elles sont regroupées de manière à respecter la topologie (contour endocardique intérieur au contour épicardique) et à suivre les forts contours. La Figure 3.7ab illustre le résultat de l'algorithme. Les contours sont correctement localisés mais très accidentés.
3. 2ème phase : MDD avec minimisation gloutonne (Algorithme 3.1). Les paramètres sont réglés de manière à conserver l'attache aux données tout en forçant un comportement élastique et rigide $(\alpha, \beta, \lambda, J) = (0.25, 0.25, 1, \{0, \ldots, 6\})$. Les minima extraits sont donnés sur la Figure 3.7b. On constate une meilleur qualité géométrique des contours, plus en accord avec la donnée anatomique. On voit aussi que le MDD gère sans problème les changements de topologie.

3.3.5 Expérimentations sur des images 3D

Ce principe de modèle déformable discret a été aussi investigué en 3D [41, 53]. Là encore, pour ces expérimentations, nous avons choisi des estimateurs géométriques discrets simples, qui n'observent qu'un petit voisinage autour de chaque surfel. L'aire élémentaire de chaque surfel est estimée systématiquement à 1 : cube et sphère ont donc ici même aire. Les courbures sont estimées qualitativement telles que décrit sur la Figure 3.8.

Nous présentons ici deux résultats de segmentation dans des images synthétiques 3D. Ils sont tous les deux basés sur l'Algorithme 3.2 de minimisation *a posteriori*. L'expérience de la Figure 3.9 teste la capacité du modèle à extraire des formes dont le contour est incomplet. L'expérience de la Figure 3.10 estime la capacité du modèle à extraire des composantes inhomogènes avec un faible contraste. Dans les deux cas, le MDD dessine à un moment de son évolution la forme recherchée. Et son énergie présente bien un minimum marqué à ce moment précis de son expansion. Contrairement au cas 2D, les formes extraites contiennent quelques irrégularités : cela est du à l'estimateur d'aire des surfels, trop simpliste.

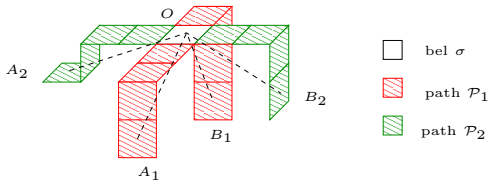


FIG. 3.8 – Estimation qualitative des courbures principales pour le MDD 3D. Elles sont proportionnelles aux angles estimés sur les deux chemins orthogonaux $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ qui traversent le point de mesure.

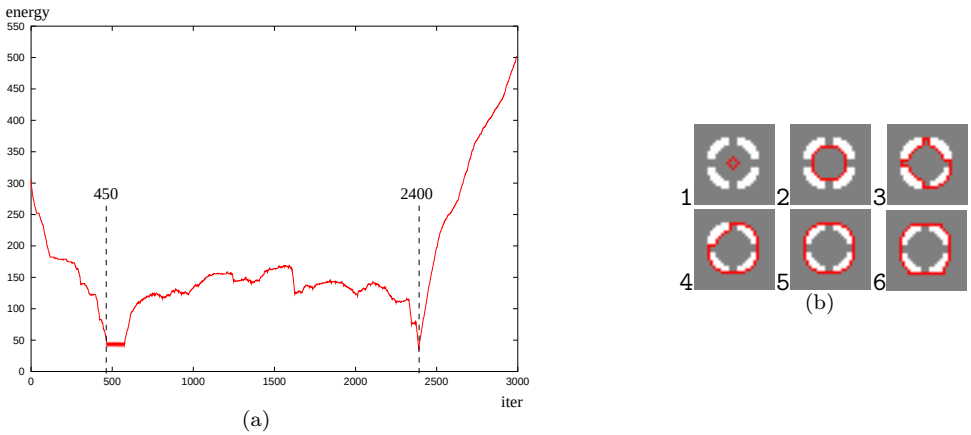


FIG. 3.9 – Expérience 1 : extraction d'une forme de contour incomplet (Extrait de [53]). L'image représente une boule creuse percée de six trous dans les 3 axes de l'espace. On recherche le contour de la cavité intérieure ainsi que le contour extérieur de la boule. (a) Évolution de l'énergie du modèle, qui indique deux minima aux itérations 450 (b2) et 2400 (b5). (b) Six coupes médianes représentant le MDD à différentes étapes de son évolution. Les lignes rouges tracent le bord du modèle dans cette coupe de l'image.

Le principal problème mis en évidence par ce prototype de MDD 3D est le temps de calcul par itération. Les calculs géométriques nécessitent de nombreux parcours de la surface discrète. Il est donc indispensable de disposer de structures de données et d'algorithmes qui codent efficacement les surface discrètes, mais aussi de définir des estimateurs géométriques à la fois précis et calculables efficacement. Ces problématiques seront abordées au Chapitre 4.

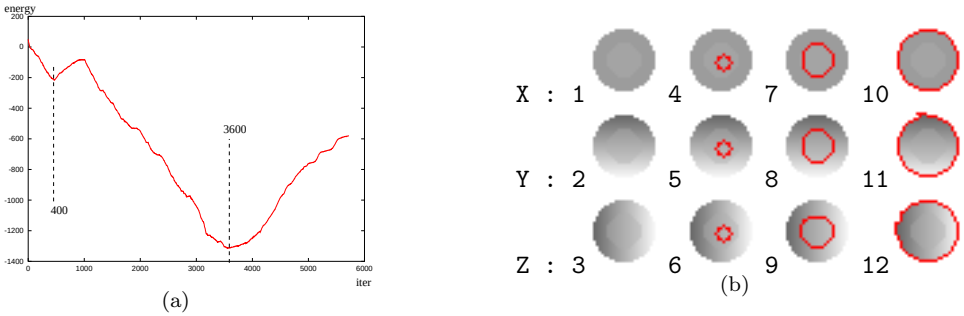
3.3.6 Comparaison avec le modèle déformable euclidien

Les expérimentations précédentes montrent l'intérêt pratique des MDD pour des applications de segmentation 2D et 3D et pour du lissage d'objets discrets 2D. Nous allons maintenant comparer le comportement du MDD avec sa contrepartie euclidienne.

La comparaison porte sur le comportement du modèle, à une échelle donnée, soumis à ses seules contraintes internes de régularisation : d'abord la pénalisation de longueur (§ 3.3.6.1) puis la pénalisation de courbure (§ 3.3.6.2).

3.3.6.1 Modèle soumis à la pénalisation de longueur

Un *snake* euclidien, soumis à sa seule contrainte de régularisation du premier ordre, a le comportement d'un élastique, qui cherche à se rétracter. Par exemple, si le *snake* est initialisé comme un cercle de rayon



(a) (b)

FIG. 3.10 – Expérience 1 : extraction d'une forme inhomogène avec un faible contraste avec le fond. (Extrait de [53]). L'image représente une boule dont l'intensité passe du sombre au clair. Cette boule a une cavité d'intensité moyenne. On recherche le contour de la cavité intérieur et celui de la boule extérieure. (a) Évolution de l'énergie du modèle, qui indique deux minima aux itérations 400 (b7-9) et 3600 (b10-12). (b) La première, deuxième et troisième ligne montrent la géométrie du MDD dans les 3 coupes orthogonales aux axes x, y et z. La première colonne ne montre que des coupes de l'image, tandis que les deuxièmes, troisièmes et quatrièmes colonnes représentent respectivement les positions du MDD aux itérations 0, 400 et 3600.

R paramétré par l'abscisse curviligne, alors son vecteur déplacement en tout point est

$$\forall s, \rho \mathbf{x}_t(s) = -\frac{\alpha}{R}\mathbf{n}(s), \tag{3.23}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la courbe orientée vers l'extérieur.

En d'autres termes, la courbe a tendance à se réduire en un point. On peut montrer aussi que son comportement est analogue à celui d'un flot de courbure moyenne. La courbe, avant de s'effondrer en un point, tend à ressembler à un cercle, quelle que soit son initialisation (voir Figure 3.11a).

D'après la Section 3.2.4, un comportement analogue peut être obtenu pour le MDD si nous choisissons un estimateur géométrique de tangente convergent (en nD, un estimateur de normale convergent). Comme on le verra dans le Chapitre 5, il n'existait pas dans la littérature d'estimateurs de tangente dont la convergence est prouvée. En fait, nous n'avons besoin ici que de la convergence de l'estimation de *longueur* totale de la courbe, car les paramètres β et λ sont nuls.[4]

Or, il existe un certain nombre d'estimateurs de longueur prouvés convergents pour certaines familles de formes : longueur de la polygonalisation par reconnaissance de segment de droite discrète [KŽ00], longueur du "saucisson" d'approximation [KF92], longueur du polygone de longueur minimale [SS94, SZK98, SZS98]. En fait, la longueur estimée par sommation des longueurs élémentaires $\hat{l}(\sigma)$ est aussi convergente, pour des estimateurs de tangentes bien choisis (voir le Chapitre 5). C'est cet estimateur de longueur que nous avons choisi pour nos expérimentations. La Figure 3.11 montre l'évolution des modèles déformables euclidien et discret avec un paramétrage identique. Le MDD a un comportement très similaire à son pendant euclidien. Il se réduit en cercle avant de dégénérer et de disparaître. La différence essentielle est que le MDD n'évolue pas en fonction d'un pas de temps et que, dans certaines situations, il doit choisir arbitrairement ses mises à jour. Cela le conduit à ne pas se réduire de manière toujours symétrique.

3.3.6.2 Modèle soumis à la pénalisation de courbure

Un *snake* euclidien, soumis à sa seule contrainte de régularisation du deuxième ordre, a le comportement d'une barre rigide, qui cherche à diminuer localement sa torsion. Par exemple, si le *snake* est

[4] En effet $\alpha \sum_{\sigma \in \partial O} \hat{l}(\sigma) = \alpha \hat{L}(\partial O)$, où $\hat{L}$ estime le périmètre de l'objet.

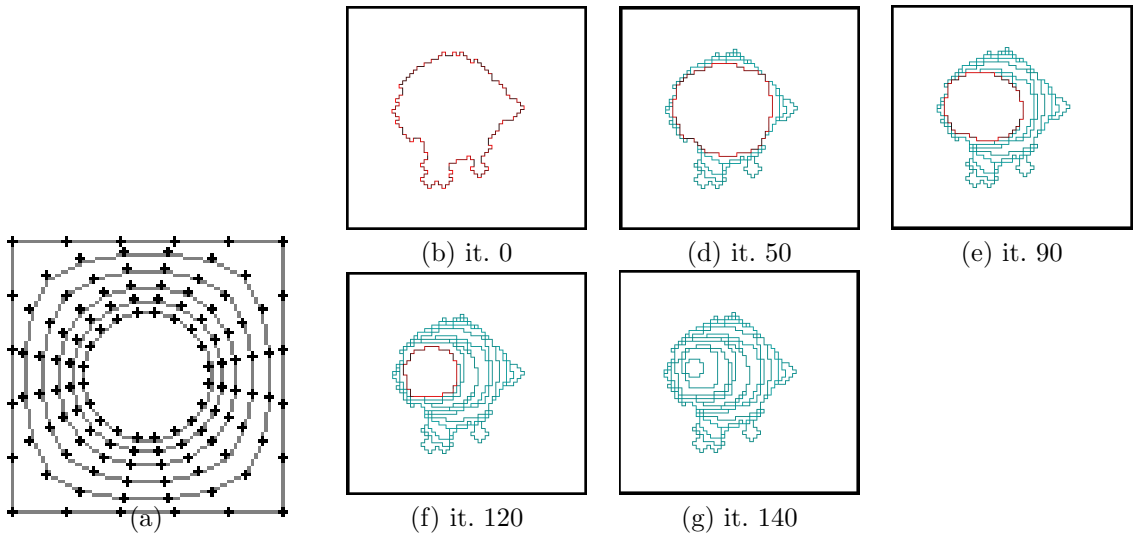


FIG. 3.11 – Évolution d'un modèle déformable soumis à la seule contrainte du premier ordre. (a) Évolutions successives du modèle euclidien de paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, \rho) = (1, 0, 0, 0.5)$. (b-f) Évolutions successives du MDD de paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, J) = (1, 0, 0, \{0, \ldots, 6\})$.

initialisé comme un cercle de rayon R paramétré par l'abscisse curviligne, alors son vecteur déplacement en tout point est

$$\forall s, \rho \mathbf{x}_t(s) = -\frac{\beta}{R^3}\mathbf{n}(s), \tag{3.24}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la courbe orientée vers l'extérieur. On remarque que les équations d'Euler-Lagrange conduisent aussi le modèle à dégénérer en un point, alors même que l'énergie augmentera au cours de l'évolution (voir Figure 3.12a).

D'après la Section 3.2.4, le MDD devrait présenter un comportement analogue si nous disposons d'un estimateur géométrique de courbure convergent. Nous avons donc choisi d'estimer la courbure par cercle circonscris aux demi-tangentes, telle que proposé dans [Coe02, CS03] (voir la Figure 3.13). Selon [Coe02] (Théorème B.4, p. 247), cet estimateur est convergent sous certaines hypothèses de croissance des demi-tangentes en asymptotique. C'est d'ailleurs à notre connaissance le seul pour lequel une preuve de convergence a été proposé.

Ainsi que le montre la Figure 3.12b-d, le comportement du MDD n'est en rien semblable à celui de son homologue euclidien. Une nette tendance à la polygonalisation de la courbe discrète est observable sur tous les exemples. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ce phénomène :

1. L'erreur sur l'estimation à une échelle donnée, même petite, pourrait fausser le comportement à cette échelle. Néanmoins, plus l'échelle augmente, plus ce faux comportement devrait s'estomper, ce qui n'a pas été observé. Cela reste une explication possible car il n'y a pas de bornes connues sur les erreurs de l'estimateur en fonction de l'échelle.
2. L'estimateur de courbure utilisé est censé être convergent sur les discrétisations de courbes C^3 de courbure finie. Il sous-estime très largement (et même infiniment) la courbure sur des parties anguleuses de la courbe (voir la Figure 3.14). Le MDD, pour minimiser la somme des carrés de ses courbures, préfère se déformer en des morceaux de parties rectilignes, de très faible courbure, avec quelques angles forts, mais de courbure très sous-estimée. La polygonalisation est alors un comportement naturel.
3. L'hypothèse centrale de convergence de cet estimateur de courbure repose sur la croissance des parties linéaires du contour discrétisé en racine du pas de discrétisation. Nous montrerons dans le

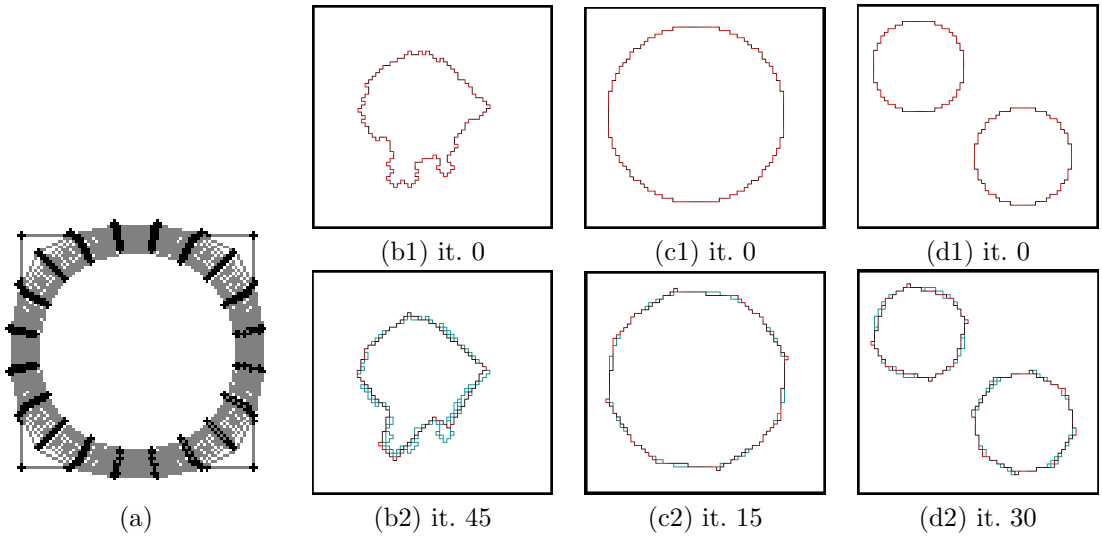


FIG. 3.12 – Évolution d'un modèle déformable soumis à la seule contrainte du second ordre. (a) Évolutions successives du modèle euclidien de paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, \rho) = (0, 1, 0, 0.5)$. (b-d) Évolutions successives du MDD de paramètres $(\alpha, \beta, \lambda, J) = (0, 1, 0, \{0, \ldots, 6\})$ à partir de 3 initialisations distinctes.

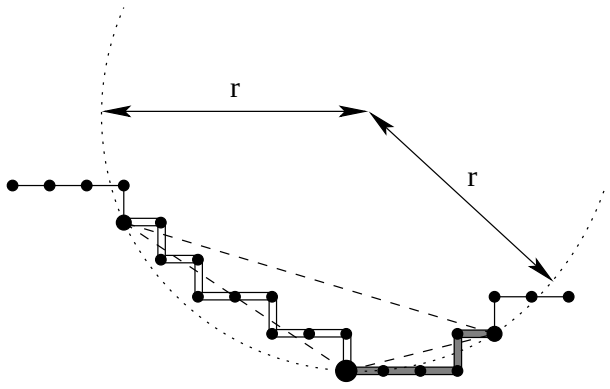
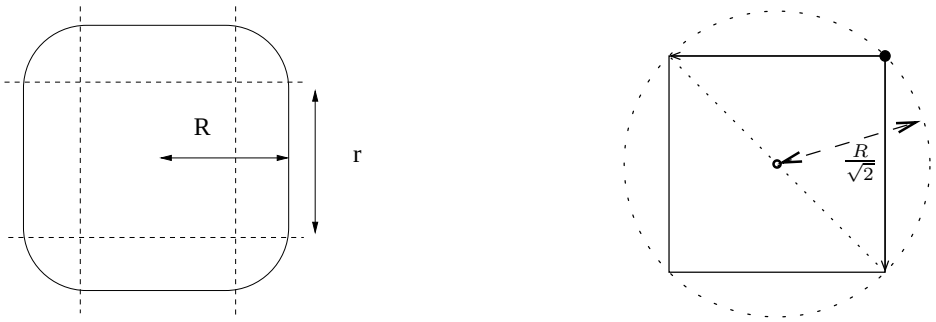


FIG. 3.13 – Estimation de la courbure par estimation d'un cercle osculateur. Au point d'intérêt sur le contour discret, les deux segments de droites discrètes les plus longs sont calculés de chaque côté. La courbure est estimée comme l'inverse du rayon du cercle circonscris aux extrémités de ces deux segments et au point d'intérêt.



(a) (b)

FIG. 3.14 – Sous-estimation de la courbure sur les « sommets » de courbes quasi-polygonales avec l'estimateur par cercle circonscris. (a) En faisant tendre r vers R, la courbure aux coins ($\frac{1}{R-r}$) comme l'énergie du MD ($\frac{2\pi}{R-r}$) tendent vers l'infini. (b) L'estimation de la courbure aux coins est elle bornée par $\frac{\sqrt{2}}{2R}$, quels que soient r et le pas de discrétisation.

Chapitre 5 que cette hypothèse — naturelle dans le continu — n'est pas vérifiée. Il n'y a donc finalement pas d'estimateur discret de courbure prouvé convergent. D'autres estimateurs de courbure pourrait être envisagés (variation d'angle, déviation par rapport à la tangente, ajustement d'un arc de cercle, e.g. cf. [WS93]). En pratique cependant, l'estimateur par cercle circonscris semble être un des plus précis à basse résolution.

4. Une infinité de courbes se discrétise de la même manière à une échelle donnée. La notion d'estimation de courbure est donc très difficile à justifier. Dans le cadre des MDD, il faudrait donc plutôt envisager d'estimer les quantités géométriques en fonction de *toutes* les courbes continues qui se discrétisent de la même façon. Ces considérations nous amèneront à envisager dans nos perspectives un nouvel estimateur de courbure avec une approche de type optimisation.

Ces questions ouvertes m'ont conduit à étudier plus en détails l'estimation de quantités géométriques sur les discrétisations de formes, études qui sont synthétisées dans le Chapitre 5.

3.4 Problématiques induites

Comme ce chapitre a pu le montrer, cette volonté de transformer un problème variationnel en un problème combinatoire a eu un impact fort sur la direction des recherches que j'ai entreprises par la suite. Cette volonté est née naturellement au moment de mon intégration au LaBRI, dans une équipe spécialisée en géométrie discrète et structuration d'images.

Au delà de la simple proposition d'une discrétisation des modèles déformables, cette problématique a soulevé un grand nombre de questions ouvertes et créé des pistes de recherche. Les principales sont listées ci-dessous, certaines ont été abordées au cours de mes travaux de recherche, d'autres sont encore des pistes à explorer.

- *Comment représenter des surfaces dans l'espace discret* $\mathbb{Z}^n$ *?* Il est facile de définir un objet discret en dimension quelconque. Il est plus délicat de représenter directement son bord. Il faut pouvoir le parcourir en tous sens, pointer un endroit particulier, savoir où est l'intérieur. Il faut pouvoir par exemple déformer localement le bord. Toutes ces opérations doivent être réalisées le plus rapidement possible, car elles déterminent la complexité des algorithmes de recherche de la forme minimale. Nous avons attaqué ce problème et les résultats sont présentés dans le Chapitre 4, Section 4.2.
- *Comment estimer des quantités géométriques sur des contours ou surfaces discrètes ?* Pour les contours discrets, la littérature offre un grand nombre de techniques pour estimer la tangente ou la courbure en tout point. Nous avons néanmoins comparé expérimentalement plusieurs estimateurs,

afin d'extraire le plus robuste. Pour les surfaces nD, la littérature est moins fournie en 3D et quasi-inexistante en dimensions supérieures. Nous avons proposé une méthode par croisement de $n-1$ chemins 2D, qui exploite les estimateurs géométriques 2D et qui se met en œuvre efficacement avec notre modèle de représentation de surfaces. Ces travaux sont synthétisés dans le Chapitre 4, Section 4.3.

– *Peut-on joindre à l'infini la géométrie discrète et la géométrie euclidienne ? Comment intégrer une quantité sur le bord d'une forme discrétisée ?* Le Théorème 3.2 montre une condition nécessaire pour qu'un MDD soit asymptotiquement euclidien. Les estimateurs géométriques de longueur, normale et courbure doivent être convergents. Plus généralement, cela nous a conduit à étudier la géométrie des droites discrètes, leur représentation combinatoire, leurs liens avec les enveloppes convexes discrètes, mais aussi les propriétés asymptotiques des discrétisations. Grâce à ces travaux fondamentaux, nous avons pu étudier la convergence des estimateurs géométriques. Nous avons aussi établi quelques résultats de vitesse de convergence, ce qui a des aspects applicatifs intéressants. Ces recherches sont présentées dans le Chapitre 5 ainsi que dans l'Annexe B.

Les deux questions soulevées ci-dessous seront abordées dans les perspectives (Chapitre 6).

– *Doit-on rajouter de nouveaux critères dans la définition des estimateurs géométriques, notamment lorsqu'on s'intéresse à une courbe continue sous-jacente avec certaines propriétés ?*
– *Comment rechercher un minimum global d'énergie dans un espace combinatoire ? Peut-on transformer d'autres problèmes variationnels (e.g. Mumford-Shah) en un problème combinatoire équivalent à l'infini ?*

Les deux chapitres suivants répondent partiellement à quelques-unes des questions posées ci-dessus, certaines de nature assez fondamentale et d'autres de nature plus expérimentale.

Chapitre 4

Représentation, déformation et géométrie des surfaces discrètes

Ce chapitre traite essentiellement des aspects pratiques pour représenter et traiter les surfaces discrètes dans un contexte d'analyse d'image et de mesures géométriques. Le Chapitre 3 a montré qu'il était possible théoriquement de construire des équivalents discrets aux modèles déformables. Nous allons montrer dans ce chapitre que les surfaces discrètes sont définissables en dimension quelconque, que l'on peut les représenter de manière compacte et les parcourir efficacement, que l'on peut les déformer localement rapidement et que l'on peut mesurer des quantités géométriques globales (e.g. aire) ou locales (e.g. normales) de façon précise et rapide. En d'autres termes, ce chapitre démontre la faisabilité pratique d'une mise en œuvre efficace des modèles déformables discrets. Il rassemble essentiellement les travaux sur la représentation et le codage des surfaces discrètes [55, 20, 57], sur la mise au point et l'évaluation expérimentale de nouveaux estimateurs géométriques sur les courbes 4-connexes [26, 62, 8], et enfin sur les estimateurs géométriques nD par croisement de contours 2D [22, 58]. Une partie de ces travaux a été réalisée en collaboration avec Anne Vialard et François de Vieilleville du LaBRI.

4.1 Topologie et surfaces discrètes

4.1.1 Introduction

Pour représenter des surfaces dans des espaces discrets, il est nécessaire d'étudier la topologie de l'espace considéré. La définition classique d'espace topologique ne s'applique pas sur ces espaces, car les intersections infinies d'ouverts sont encore des ouverts.[1] Si l'on se restreint au plan discret $\mathbb{Z}^n$, de très nombreuses approches ont été proposées pour lui associer une structure topologique. Nous n'allons pas ici décrire toutes ces approches ; pour plus de détails, nous référons le lecteur à la récente thèse de Sylvie Alayrangues [37] et au tour d'horizon de Kong et Rosenfeld [KR89]. Tout élément de $\mathbb{Z}^n$ sera désormais appelé *voxel*. Tout ensemble de voxels sera appelé un *objet discret*. La notion usuelle de surface est la variété, ensemble localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Comme elle n'est pas transposable à des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$, la plupart des auteurs entendent par le terme « surface discrète » un ensemble discret *séparant* (il coupe $\mathbb{Z}^n$ en deux composantes connexes) et *fin* (la suppression d'un élément rend connexe le complémentaire). Quatre approches se distinguent pour définir la topologie de $\mathbb{Z}^n$ et les surfaces associées :

Surface = sommets dans un graphe d'adjacence de $\mathbb{Z}^n$. La première catégorie se base sur des relations métriques de voisinage entre voxels et a été initiée essentiellement par Rosenfeld [Ros70, Ros79] dans le cas $n = 2$. On montre qu'en choisissant des adjacences bien choisies et différentes pour l'objet et pour le fond, on peut définir des ensembles de voxels séparants et fins [MR81, HW83, RKW91], des sortes de surfaces qui vérifient un théorème type Jordan-Brouwer,

[1] Ces espaces sont souvent appelés *espaces discrets d'Alexandroff* [Kov89].

pour $n = 2$ et $n = 3$. Malheureusement, il est difficile de capturer tous les ensembles fins et séparants [Mal96], et de nombreux auteurs ont cherché à étendre la définition précédente de surface dans le cas $n = 3$ [Mal97, Mal98, BM99, CDF02, CDMD+04]. Dans $\mathbb{Z}^n$, une approche similaire est présentée dans [Mal93].

Cette façon de définir les surfaces est intéressante pour deux raisons. D'une part, ce sont des définitions uniquement combinatoires qui restent dans le plan discret. D'autre part de telles surfaces sont faciles à représenter et mémoriser car ce sont de simples sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$. Dans notre contexte, nous nous intéressons à des bords d'objets discrets. Or, quelle que soit la définition de bord choisie, il est des objets discrets dont le bord n'est pas une surface aux sens proposés ci-dessus. Même dans le cas où l'on disposerait d'un objet initial dont le bord est une surface, définir des déformations opérant dans cette classe de surfaces reste un problème ouvert.

Surface = arcs dans un graphe d'adjacence. Dans ces approches, une surface n'est plus un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$, mais un ensemble d'arcs du graphe d'adjacence par face entre voxels. Deux voxels adjacents par face partagent une face de dimension $n-1$ ou *surfel*. Parler d'arc ou de surfel est donc équivalent. L'objectif initial était de proposer des algorithmes d'extraction de bord d'objet 3D par suivi [Liu77, AFH81, HW83, GU89] en garantissant des propriétés sur la surface extraite [HW83, KU92] (séparation, connexité de l'intérieur et de l'extérieur). On montre alors qu'à chaque surfel du bord d'un objet est associé un voisinage de surfels, calculable localement : le bord d'un objet connexe peut donc être reconstruit par suivi. Ces approches sont aussi définissables en dimension quelconque dans $\mathbb{Z}^n$ [Her92, Udu94, Her98b, 4]. Elles ont aussi été étendues à d'autres espaces discrets plus exotiques [Her93, AHL96, Her98a].

Ces approches sont intéressantes dans notre contexte, car tout bord d'objet discret est une surface, séparante et fine, dont la topologie est calculablement localement. Ces approches sont suffisantes pour calculer les énergies proposées dans le Chapitre 3, Définition 3.3, page 57, car la géométrie locale de la surface est accessible au travers des voisinages.

Surface = complexe cellulaire. C'est l'approche classique des mathématiciens, qui utilisent une subdivision cellulaire de l'espace considéré pour déterminer des propriétés combinatoires. Une surface de dimension $n-1$ est alors une collection de cellules (boules ouvertes) de dimensions 0 à $n-1$, recollées en respectant certaines règles. La topologie de la surface est bien alors une topologie discrète au sens d'Aleksandrov. Même si toutes les variétés ne sont pas triangulables[2] et même s'il n'existe pas de définition purement combinatoire des surfaces au sens subdivision d'une variété, on connait un ensemble de propriétés que toute subdivision de surface satisfait.[3] La décomposition cellulaire associée à $\mathbb{Z}^n$ est naturellement la subdivision cellulaire de $\mathbb{R}^n$ en cubes unité de dimension n avec toutes leurs faces. Chaque voxel est alors un n-cube. Un surfel est un $n-1$-cube, incident à deux n-cubes. Un *complexe cartésien* est un assemblage de telles cellules. Les complexes cellulaires ont été introduits en analyse d'image par Kovalevsky [Kov89] pour résoudre le fameux paradoxe de la connexité de Rosenfeld. Le bord d'un complexe cartésien est alors l'ensemble de ses cellules dont l'étoile touche le complexe et son complémentaire. Néanmoins, dès que l'objet discret contient certaines configurations, le complexe bord n'est en général plus une surface au sens combinatoire. Pour résoudre ce problème, les ensembles bien-composés ont été introduits par Latecki *et al.* [LER95, Lat97] : leur bord est effectivement une surface au sens combinatoire.

Le recours à des complexes cellulaires permet donc d'utiliser toute la richesse des outils topologiques développés en topologie combinatoire.[4] En revanche, les complexes cartésiens sont plus coûteux à représenter que les surfaces des autres approches, car les cellules de toutes dimensions doivent être représentées explicitement.

Surface = sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$ muni d'une topologie. On peut munir $\mathbb{Z}^n$ d'une topologie discrète, les voisinages variant d'un voxel à un autre. La topologie de Khalimsky [KKM90] en est l'instance la plus connue. Sur $\mathbb{Z}$, le plus petit ouvert de chaque voxel est soit lui-même, soit lui-même

[2] Un exemple d'une telle 4-variété est donné dans [DJ91].

[3] Par exemple toute $n-2$-cellule d'une surface de dimension $n-1$ touche exactement deux $n-1$-cellules.

[4] Le calcul des groupes d'homologie sur un complexe cartésien permettrait sans doute de caractériser et reconnaître les formes dans les images discrètes. Même si ce sujet n'est pas développé dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à cette problématique en proposant des algorithmes de calcul effectif de ces groupes et des générateurs associés [37, 27, 9].

et ses deux proches voisins. La topologie définie sur $\mathbb{Z}^n$ est le produit cartésien de ces topologies. On peut définir des courbes de Jordan et des surfaces de Jordan dans ces espaces [KKM91]. En fait, cette topologie est équivalente à la topologie des complexes cartésiens de même dimension [KKM91].
Cette approche est élégante mais pose le problème de la non-invariance par translation des propriétés des voxels. Une solution est de doubler l'échantillonnage de l'image, mais cela rend l'approche aussi coûteuse que les complexes cellulaires.

Dans notre contexte, nous choisirons de définir les surfaces comme des sous-ensembles des arcs du graphe d'adjacence entre voxels, c'est-à-dire comme des ensembles de surfels sur lesquels on définit localement des relations de voisinage. Cependant, pour une mise en œuvre simple et efficace de ces surfaces, nous allons aussi utiliser le complexe cartésien associé à $\mathbb{Z}^n$ tout entier, car il permet de représenter les voxels, les surfels, mais aussi toutes les autres cellules de dimension inférieure. Nous procéderons en trois étapes :

1. Nous rappelerons brièvement la topologie de la grille cellulaire et montrerons une façon simple d'identifier ses cellules (Section 4.1.2).
2. Nous utiliserons la topologie algébrique pour définir des opérations sur les cellules (Section 4.1.3), notamment les opérateurs bord. Ces opérateurs permettent de définir proprement le bord d'un objet discret comme un ensemble de surfels orientés. On retrouvera ainsi la définition de surface choisie au chapitre précédent.
3. Ces opérateurs permettront enfin de définir formellement, en dimension quelconque, les voisinages sur une surface discrète (Section 4.1.4).

Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à [55, 20, 57].

4.1.2 Topologie de la grille cellulaire et de Khalimsky

On appelera *grille cellulaire de dimension* n et on notera $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des parties c de l'espace $\mathbb{R}^n$, telles que $c = I_1 \times \cdots \times I_n$, où chaque $I_i \subset \mathbb{R}$ est soit un point à coordonnée entière, soit un intervalle ouvert entre deux points entiers consécutifs. Chaque élément de $\mathbb{C}^n$ est appelé *cellule* (ou k-cellule) et sa *dimension* k est définie naturellement par le nombre d'intervalles ouverts qui le composent. Une partie de la grille cellulaire est représentée pour $n = 2$ sur la Figure 4.1, gauche. On munit $\mathbb{C}^n$ de la relation d'*incidence*, avec pour deux cellules c et d la relation $c \leq d$ ssi c appartient à la fermeture de d dans $\mathbb{R}^n$. Un *complexe cartésien* est alors un sous-complexe de $\mathbb{C}^n$.

Rappelons maintenant que la *droite de Khalimsky* $\mathbb{K}$ est l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de la topologie suivante : si j est une entier pair, alors son plus petit voisinage fermé est $\{j\}$, sinon son plus petit voisinage fermé est $\{j-1, j, j+1\}$. La *grille de Khalimsky de dimension* n $\mathbb{K}^n$ est alors le produit cartésien de n droites $\mathbb{K}$. La Figure 4.1, droite, illustre $\mathbb{K}^n$ ainsi que les plus petits fermés autour de certains points. On montre alors que $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{K}^n$ sont homéomorphes [KKM91]. Pour $n = 1$, l'application f qui à $\{j\} \in \mathbb{C}^1$ associe le point $2j$ de $\mathbb{K}$ et qui à $]j, j+1[$ associe le point $2j+1$, réalise cet homéomorphisme. L'application $f^n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{K}^n$ s'obtient par produit cartésien. La Figure 4.1 illustre cette équivalence entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{K}^n$.

Une cellule c est donc identifiable par les coordonnées entières de $f^n(c)$ dans $\mathbb{K}^n$. On voit facilement que la parité d'une coordonnée i de $f^n(c)$ définit si la cellule est ouverte (impaire) ou fermée (paire) selon cet axe. On introduit les notations suivantes. Soient J_n les entiers de 1 à n et $(\mathbf{e}_i)_{i \in J_n}$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Nous reformulons la définition de cellule, en exploitant l'identification avec $\mathbb{K}^n$.

Définition 4.1. *Une* cellule non-orientée c *est un couple* $(J, \mathbf{x})$*, où l'ensemble* $J \subset J_n$ *est la* topologie *de* c *et le point* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ *forme les* coordonnées discrètes *de* c*.*

Le point c^K dans la grille de Khalimsky associé à c est $(\ldots, 2\mathbf{x}^i + 1_{i \in J}, \ldots)$, ce qui établit trivialement une bijection. Cette définition de cellule est donc équivalente à la précédente. La *dimension* de c est alors le cardinal $\#J$. Cette cellule est *ouverte* (resp. fermée) dans la coordonnée i ssi $i \in J$ (resp. $i \notin J$). Un

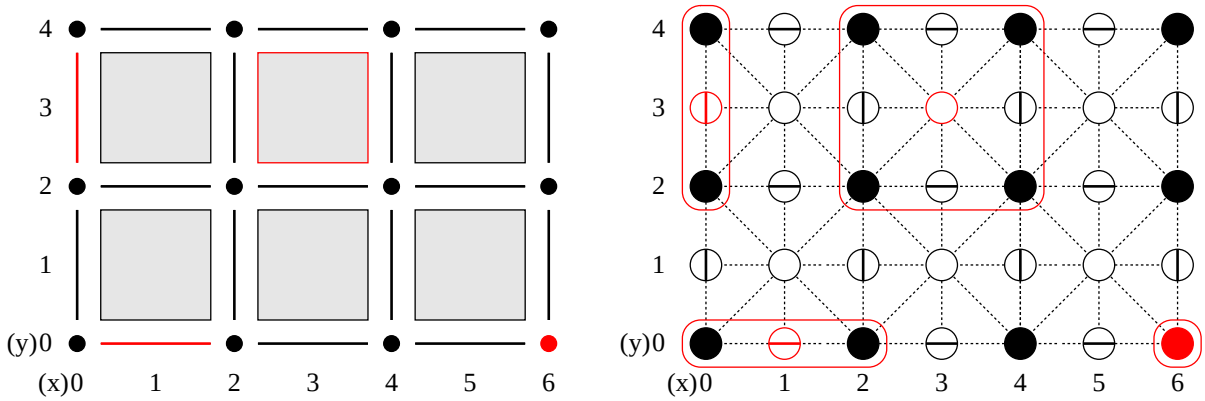


FIG. 4.1 – Equivalence entre grille cellulaire $\mathbb{C}^2$ (gauche) et grille de Khalimsky $\mathbb{K}^n$. A droite, $\mathbb{Z}^2$ est muni d'une topologie non invariante par translation, avec des points ouverts $\circ$, fermés $\bullet$, et mixtes (les autres). Autour de chaque point rouge sont entourés les points définissant le plus petit fermé le contenant.

voxel est alors une cellule de topologie J_n. Un *surfel* s est une cellule de dimenson $n-1$, donc de topologie $J_n \setminus j$ où $j \in J_n$ est la coordonnée *orthogonale* au surfel s. On la notera par la suite $\perp_s$. De même on notera $\|_s$ la topologie de la cellule s, qui regroupe les coordonnées où la cellule s est ouverte (autrement dit l'ensemble $J_n \setminus \perp_s$).

On peut redéfinir de façon simple sur les cellules l'adjacence ou l'incidence. Ainsi l'adjacence ω_n (la proto-adjacence de [Her92, Udu94]) relie deux voxels $(J_n, \mathbf{x})$ et $(J_n, \mathbf{y})$ lorsque $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = 1$. La notion de *chemin* suit.

4.1.3 Algébrisation : cellules orientées ; opérateurs bord

Nous allons « algébriser » le formalisme classique des complexes cartésiens et des relations d'incidence afin (i) d'exprimer calculatoirement les différentes relations et opérations, (ii) de retrouver le formalisme des surfaces orientées de $\mathbb{Z}^n$ de Herman et Udupa [Her92, Udu94], (iii) d'obtenir une implémentation concise et efficace de ces ensembles et des algorithmes associés. Cette « algébrisation » est faite en orientant les cellules et en construisant des groupes sur les cellules de même dimension.

Une *cellule orientée* est un couple (c, ϵ) où c est une cellule non-orientée et $\epsilon = \pm 1$ est son *orientation*. Pour rester concis, nous utiliserons la notation c' pour désigner la cellule c orientée mais d'une manière non précisée, et les notations $c^+ \stackrel{d}{=} (c, +1)$, $c^- \stackrel{d}{=} (c, -1)$, et $c^\epsilon \stackrel{d}{=} (c, \epsilon)$. La cellule *opposée* à c^ϵ est la cellule $-c^\epsilon \stackrel{d}{=} c^{-\epsilon}$.

Les ensembles K^r de r-cellules d'un complexe cartésien K sont transformés en groupes de la manière suivante. Si U est un groupe abélien non nul (en général $\mathbb{Z}$), alors on appelle *r-chaîne* de K sur U la somme formelle $\sum_{c_i \in K^r} a_i c_i^+$, où chaque $a_i \in U$. On dira que cette chaîne a la valeur a_i sur la r-cellule c_i^+ et par convention la valeur $-a_i$ sur la r-cellule opposée c_i^-. Les r-chaînes munis de l'opération d'addition terme à terme forment clairement un groupe, noté $L^r(K, U)$. On définit aussi un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $L^r(K, U)$, tel que $\langle \sum a_i c_i^+, \sum b_i c_i^+ \rangle = \sum a_i b_i$.

On note qu'une $n-1$-chaîne de $\mathbb{C}^n$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ définit une *surface orientée*. En effet, cette chaîne s'écrit comme $\sum_i s_i^+ + \sum_j t_j^-$, ce qui définit une fonction caractéristique sur les surfels orientés de la grille cellulaire. Similairement, une $n-1$-chaîne de $\mathbb{C}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ détermine une *surface non-orientée*. De plus, toute r-cellule orientée c' peut être identifiée à sa r-chaîne triviale, dont le seul coefficient non nul vaut 1 sur c'.

Nous définissons la notion de bord comme un homomorphisme entre deux groupes de chaînes de dimensions consécutives. On notera $\mathrm{Rg}(J, i)$ le rang de l'entier i dans le sous-ensemble J de J_n trié par

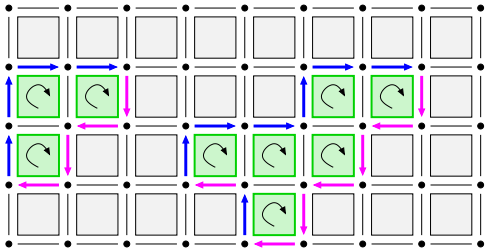


FIG. 4.2 – Illustration de l'opérateur bord inférieur Δ. Les pixels verts désignent une 2-chaîne de cellules orientées toute positivement (mettons). Le bord de cette 2-chaîne est une 1-chaîne de surfels qui sépare ces pixels de leur complémentaire.

ordre croissant.

Définition 4.2. *Soit $c^\epsilon = ((J,\mathbf{x}),\epsilon)$ une $\#J$-cellule orientée de $\mathbb{C}^n$. On définit les* opérateurs bord inférieurs $\Delta_\cdot$ *et* supérieurs $\nabla_\cdot$ *avec $\forall j \in \{0,1\}$,*

$$\begin{aligned}
\forall i \in J, \Delta_i^j((J,\mathbf{x}),\epsilon) &= ((J\setminus\{i\},\mathbf{x}+j\mathbf{e}_i),\epsilon(-1)^{\#J-\mathrm{Rg}(J,i)+j}),\\
\forall i \notin J, \Delta_i^j((J,\mathbf{x}),\epsilon) &= 0\\
\forall i \in J, \nabla_i^j((J,\mathbf{x}),\epsilon) &= 0\\
\forall i \notin J, \nabla_i^j((J,\mathbf{x}),\epsilon) &= ((J\cup\{i\},\mathbf{x}-(1-j)\mathbf{e}_i),\epsilon(-1)^{\#J-\mathrm{Rg}(J\cup\{i\},i)+j}).
\end{aligned}$$

Ces opérateurs s'étendent par linéarité à des homomorphismes de $L^r(K,U)$ vers $L^{r-1}(K,U)$ ou inversement, en restreignant les chaînes aux cellules du complexe K considéré. On définit enfin $\Delta_i = \Delta_i^0 + \Delta_i^1$, $\nabla_i = \nabla_i^0 + \nabla_i^1$, puis $\Delta = \sum_{i\in J_n}\Delta_i$ et $\nabla = \sum_{i\in J_n}\nabla_i$.

Les opérateurs bord inférieur transforment les r-chaînes en $r-1$-chaînes. Pour une r-cellule donnée c', son bord $\Delta c'$ est une somme de r-cellules, chacune étant incidente à c'. Les opérateurs bord supérieur transforment les r-chaînes en $r+1$-chaînes. Le bord $\nabla c'$ est une somme de $r+1$-cellules, c' étant incidente à chacune d'entre elles. La Figure 4.2 illustre l'intérêt de l'opérateur bord : si on considère un objet discret O, c'est-à-dire un ensemble de voxels $\{p_k\}$, alors le bord inférieur $\Delta\sum p_k^+$ est l'ensemble des surfels qui sont face d'exactement un voxel de $\{p_k\}$, avec une certaine orientation. On retrouve la notion de bord définie comme arc orienté du graphe de ω_n-adjacence, mais étendue aux cellules de toute dimension. Le *bord* de O, noté ∂O, sera donc défini par $\Delta\sum p_k^+$. Tout surfel orienté de ∂O sera appelé un *bel* de O.

On montre par calcul les propriétés suivantes pour toute cellule c' de topologie J et $\forall j,j' \in \{0,1\}$:

$$\forall i \in J, \quad \nabla_i^{1-j}\Delta_i^j c' = c', \tag{4.1}$$

$$\forall i \notin J, \quad \Delta_i^{1-j}\nabla_i^j c' = c', \tag{4.2}$$

$$\forall i,i' \in J, i\neq i', \quad \Delta_i^j\Delta_{i'}^{j'}c' = -\Delta_{i'}^{j'}\Delta_i^j c', \tag{4.3}$$

$$\forall i,i' \notin J, i\neq i', \quad \nabla_i^j\nabla_{i'}^{j'}c' = -\nabla_{i'}^{j'}\nabla_i^j c'. \tag{4.4}$$

Ces propriétés permettent de montrer qu'un bord a bien les propriétés attendues :

Proposition 4.3. *Soit O un objet discret. La $n-1$-chaîne ∂O a valeur dans $\{-1,0,1\}$. Soit s' un bel de O (i.e. $\langle \partial O, s'\rangle = \pm 1$), alors $\nabla s' = p^+ + q^-$, où p est un voxel de O et q est un voxel n'appartenant pas à O. Tout chemin ω_n-adjacent d'un élément de O à un élément de son complémentaire traverse ∂O.*

On en déduit aussi la proposition suivante, qui traduit la propriété naturelle que le bord d'un objet n'a lui-même pas de bord.

Proposition 4.4. *Les homomorphismes $\Delta\Delta$ et $\nabla\nabla$ sont nuls sur tout complexe fermé (ou ouvert).*

Démonstration. Sur chaque cellule c' de topologie J, la fermeture du complexe garantit l'existence de cellules incidentes et

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta c' &= \sum_{\substack{i,i'\in J, i\neq i' \\ j,j'\in\{0,1\}}} \Delta_i^j \Delta_{i'}^{j'} c' \\
&= \sum_{j,j'\in\{0,1\}} \left(\sum_{i,i'\in J, i'<i} \Delta_i^j \Delta_{i'}^{j'} c' + \sum_{i,i'\in J, i'>i} \Delta_i^j \Delta_{i'}^{j'} c' \right) \\
(i \text{ et } i' \text{ sont muettes}) &= \sum_{j,j'\in\{0,1\}} \sum_{i,i'\in J, i'<i} \Delta_i^j \Delta_{i'}^{j'} c' + \sum_{j,j'\in\{0,1\}} \sum_{i,i'\in J, i'<i} \Delta_{i'}^{j} \Delta_{i}^{j'} c' \\
(\text{avec Eq. (4.3)}) &= \sum_{j,j'\in\{0,1\}} \sum_{i,i'\in J, i'<i} \Delta_i^j \Delta_{i'}^{j'} c' - \sum_{j,j'\in\{0,1\}} \sum_{i,i'\in J, i'<i} \Delta_{i}^{j'} \Delta_{i'}^{j} c' \\
(j \text{ et } j' \text{ sont muettes}) &= 0.
\end{aligned}$$

On conclut par linéarité de Δ. Pour l'opérateur bord supérieur, on utilise Eq. (4.4). ■

Cette propriété permet entre autres de définir une homologie sur tout complexe cartésien et donc de caractériser en partie sa topologie. Nous ne présenterons pas ici les travaux menés sur le calcul effectif des groupes d'homologie (cf. [37, 27, 9]). Dans notre contexte, cela permet de garantir que le bord d'un objet discret peut s'extraire par simple suivi. On peut noter aussi que l'on peut définir de façon plus générale des complexes formés de cube, par des ensembles simpliciaux cubiques [Fuc97]. Ces assemblages de cubes ne sont alors pas limités par la régularité de la grille.

4.1.4 Voisinage et parcours des surfaces discrètes

Nous allons maintenant définir le voisinage d'un bel d'un objet O, c'est-à-dire les bels de O qui lui sont adjacents. La notion de « bel-adjacence » est très utile pour extraire une surface par suivi. Herman et Udupa [Her92, Udu94, Her98b] l'ont définie dans $\mathbb{Z}^n$. Nous proposons une définition équivalente, mais basée sur les opérateurs de bord et non sur des *digraphes*. Outre le fait que cette définition offre une autre vision possible de l'adjacence sur une surface, elle simplifie aussi significativement son écriture.

4.1.4.1 Adjacences entre bels sur un bord d'objet

On partitionne les $2n$ directions de déplacements par bord autour d'une cellule en deux classes, les directions directes et les directions indirectes. On appelera *sens direct d'une cellule s' selon la coordonnée i* la direction $\epsilon(s',i) \in \{0,1\}$ telle que, si i appartient à la topologie de s', $\Delta_i^{\epsilon(s',i)} s' = c^+$, sinon $\nabla_i^{\epsilon(s',i)} s' = d^+$.[5] Il est clair que le sens direct de la cellule opposée $-s'$ est inversé.

Une r-cellule q' est un *suivant direct selon i* d'une r-cellule distincte p' ssi il existe une $r-1$-cellule c telle que $\langle \Delta_i p', c^+ \rangle = 1 = \langle \Delta_i q', c^- \rangle$. La cellule c^+ est appelée *lien de p' à q'*. Le *suivant indirect* est défini similairement avec la valeur -1. On montre qu'un *surfel* a 3 suivants directs (et indirects) selon chacune de ses coordonnées ouvertes, qui vérifient (cf. Figure 4.3) :

Proposition 4.5. *Soit s' un surfel et $i \in \|_{s'}$. Soit $\mu = \epsilon(s',i)$ et $\nu = \epsilon(s', \perp_{s'})$. Soit $c^+ = \Delta_i^\mu s'$. Les trois suivants directs de s' le long de i sont : (1) $\nabla_{\perp_s}^{\nu} c^-$, (2) $\nabla_i^{\mu} c^-$, (3) $\nabla_{\perp_s}^{1-\nu} c^-$.*

Nous sommes maintenant en mesure de définir différentes adjacences entre bels sur un objet, en choisissant un suivant direct parmi les trois possibles en fonction de l'appartenance de certains voxels à cet objet.

[5] On vérifie que, pour une cellule s de topologie J, $\forall i \in J, 2\epsilon(s^\epsilon, i) - 1 = -\epsilon(-1)^{\#J - \mathrm{Rg}(J,i)}$.

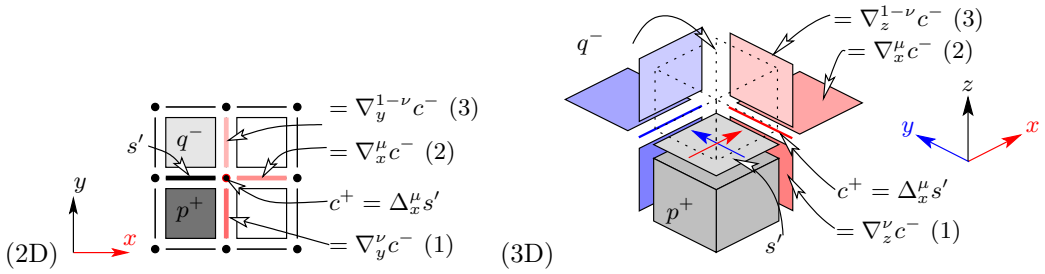


FIG. 4.3 – Suivants directs d'un surfel s' le long des coordonnées ouvertes de s'. Les voxels p et q entourent le surfel s' tels que $p^+ = \nabla^{\nu}_{\perp_{s'}} s'$ et $q^- = \nabla^{1-\nu}_{\perp_{s'}} s'$.

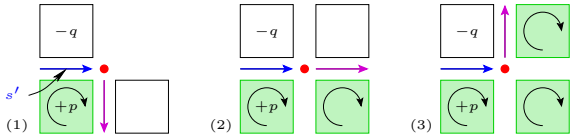


FIG. 4.4 – Différents cas possibles pour déterminer le bel b' qui est adjacent direct intérieur à un bel s' selon une direction i. On note $\mu = \epsilon(s', i)$ et $\nu = \epsilon(s', \perp_{s'})$. On note p^+ le voxel $\nabla^{\nu}_{\perp_{s'}} s'$ et q^- le voxel $\nabla^{1-\nu}_{\perp_{s'}} s'$. (1) b' est le premier suivant direct de s' ssi le voxel translaté de p par $(2\mu - 1)\mathbf{e}_i$ n'est pas dans O. Sinon (2) b' est le deuxième suivant direct de s' ssi le voxel translaté de q par $(2\mu - 1)\mathbf{e}_i$ n'est pas dans O. Sinon (3) b' est le troisième suivant direct de s'.

Définition 4.6. *Si b' est un bel de O alors, $\forall i \in \|_{b'}$, le bel* adjacent intérieur direct selon i *(resp.* adjacent extérieur direct selon i*) est le premier (resp. dernier) des suivants directs de b' qui est aussi un bel de O. On le notera $\sigma^0_{i,+}(b'; O)$ (resp. $\sigma^1_{i,+}(b'; O)$). Le bel* adjacent intérieur indirect $\sigma^0_{i,-}(b'; O)$ *et le bel* adjacent extérieur indirect $\sigma^1_{i,-}(b'; O)$ *sont définis identiquement dans le sens indirect. Les bels* adjacents intérieurs *forment la $n-1$-chaîne $\sigma^0(b'; O) \stackrel{d}{=} \sum_{i \in \|_{b'}} \sigma^0_{i,+}(b'; O) + \sigma^0_{i,-}(b'; O)$. Les bels* adjacents extérieurs *définissent une $n-1$-chaîne similaire.*

La notion d'intérieur (resp. extérieur) s'interprète lors d'un déplacement sur le bord comme un suivi strict de l'objet (resp. de son complémentaire), comme illustré sur la Figure 4.4. De plus, on établit la relation $\sigma^0(b'; O) = -\sigma^1(-b'; O^c)$, qui exprime que le suivi intérieur d'un bord est équivalent au suivi extérieur de l'inverse de ce bord.

Lorsque l'on définit une bel-adjacence sur un objet O, il faut donc choisir pour chaque couple de coordonnées (i, j) si la bel-adjacence est intérieure ou extérieure. Si on choisit systématiquement la bel-adjacence intérieure, on montre alors qu'elle induit les couples classiques d'adjacence (4,8) en 2D et (6,18) en 3D. On sait donc que cette adjacence de bord reconstruira en 2D toute la surface orientée entre une 4-composante de l'objet et une 8-composante du fond et en 3D toute la surface orientée entre une 6-composante de l'objet et une 18-composante du fond. Udupa a montré aussi que cette propriété s'étend en dimension quelconque [Udu94]. La bel-adjacence extérieure induit les couples symétriques (8,4) et (18,6).

Nous rappelons le théorème suivant, qui découle de $\Delta\Delta O = 0$ [57], et dont on peut trouver une autre démonstration dans [Her98b], Corollaire 8.3.3 :

Théorème 4.7 ([20], Théorème 9)**.** *Soit b' un bel de O. La fermeture transitive de la bel adjacence intérieure (resp. extérieure) de b' est identique à celle de la bel adjacence intérieure (resp. extérieure) directe de b'.*

Il suffit donc de suivre les bels adjacents directs pour extraire toute la surface (cf. Figure 4.5). Herman [Her98b] montre que la validité de l'algorithme de suivi de surface en 3D d'Artzy *et al.* [AFH81] en découle

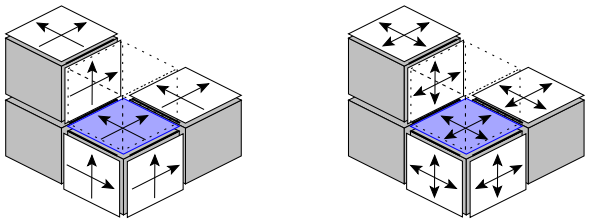


FIG. 4.5 – Pour extraire une surface par suivi, il est équivalent de faire un parcours du graphe de bel-adjacence que de faire un parcours du graphe de bel-adjacence directe.

directement. L'Algorithme 4.1 montre un exemple d'écriture d'algorithme de suivi de bord dans notre formalisme. Enfin, d'après la définition de la bel-adjacence, nous déduisons :

Théorème 4.8. *Les bel-adjacences intérieure et extérieure coïncident lorsque l'image discrète est* bien composée *au sens de Latecki* et al. *[LER95, Lat97].*[6] *Le suivi d'un bord d'objet discret devient alors indépendant de tout choix de bel-adjacence.*

En corroborant ce résultat avec le Théorème B.6, cela indique que la topologie — et donc la géométrie — du bord d'un objet discrétisé est indépendante du choix d'adjacence entre bels, pour peu que le pas de discrétisation soit suffisamment petit.

Fonction **suiviIntérieurDirect.**
Entrées : Objet O, Bel b'.
Sorties : La $n-1$-chaîne ∂O.

1. chaîne $S \leftarrow 0$
2. Queue L ; L.enfile(b')
3. Tant que non L.vide()
   (a) Bel $c' \leftarrow L$.défile() ;
   (b) Pour tout $i \in \|_{c'}$
      i. Bel $d' \leftarrow \sigma^0_{i,+}(d'; O)$
      ii. Si $\langle d', S \rangle = 0$
      alors $S \leftarrow S + d'$, L.enfile(d')
4. Retourne S

Algorithme 4.1: Algorithme général d'extraction de surface par suivi de la bel adjacence intérieure directe.

4.1.4.2 Chemins planaires orthogonaux

Nous montrons ici que tout bel est le point de croisement de $n-1$ chemins 4-connexes planaires. Cette propriété sera utile pour calculer des quantités géométriques à partir de mesures géométriques 2D faites indépendamment sur chaque chemin.

Définition 4.9. *Une suite* $(s'_l)_{l=0\ldots k}$ *de surfels est appelé un* $\{i,j\}$-contour direct *ssi (i)* $\forall l, 0 \leq l \leq k, \perp_{s'_l} \in \{i,j\}$ *et (ii)* $\forall l, 0 \leq l < k$, s'_{l+1} *est un suivant direct de* s'_l *le long de* $\{i,j\} \setminus \perp_{s'_l}$. *La notion de* $\{i,j\}$*-contour indirect est similaire.*

[6] Dans une telle image, toute configuration de 4 voxels incidents à une même $n-2$-cellule ne peut contenir exactement deux voxels de l'objet placés en diagonal.

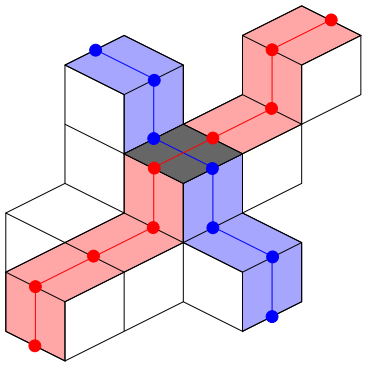


FIG. 4.6 – Tout bel d'un bord est le croisement de $n-1$ chemins de bels, qui forment des chemins 4-connexes dans un plan.

Si b' est un bel de O et i une de ses coordonnées ouvertes alors, d'après la définition de bel adjacence (Définition 4.6), la séquence de bels obtenue par bel-adjacence directe intérieure (ou extérieure) en partant de ce bel b' et en suivant soit la direction i, soit la direction $\perp_{b'}$, est un $\{i, \perp_{b'}\}$-contour direct. Cela montre que tout bel b' définit exactement $n-1$ $\{i, \perp_{b'}\}$-contours directs (car $i \neq \perp_{b'}$).

La proposition suivante montre que tout $\{i,j\}$-contour trace un chemin 4-connexe dans un plan.

Proposition 4.10. *Si $(s'_l)_{l=0\ldots k}$ est un $\{i,j\}$-contour (direct ou indirect), alors la suite $(t_l^+)_{0\leq l<k}$ de liens de s'_l à s'_{l+1} a les propriétés suivantes :*

(i) chaque lien t_l^+ est fermé uniquement selon i et j (i.e. $\perp_{t_l} = \{i,j\}$),
(ii) pour toute coordonnée dans $\|_{t_l}$, les coordonnées de t_l et t_{l+1} coïncident,
(iii) soit les coordonnées de t_l et t_{l+1} diffèrent de ± 1 sur i et coïncident sur j, soit diffèrent de ± 1 sur j et coïncident sur i.

Démonstration. Si $\perp_{s'_l} = i$ alors $t_l^+ = \Delta_j^{\epsilon(s'_l,j)} s'_l$ ce qui implique que la topologie de t_l^+ est la topologie de s'_l privée de j. Ce qui conclut (i). Par définition des suivants, le lien direct de s'_{l+1} à s'_{l+2} est t_{l+1}^+ et son lien indirect à s'_l est t_l^-. Si $\perp_{s'_{l+1}} = i$, cela implique que $\Delta_j s'_{l+1} = t_l^- + t_{l+1}^+$. Par définition de l'opérateur bord Δ_j (Définition 4.2), ces deux cellules ont la même topologie et leurs coordonnées discrètes ne diffèrent de 1 que sur la j-ème coordonnée. Le résultat est similaire pour $\perp_{s'_{l+1}} = j$. Ce qui conclut (ii) et (iii). ■

En ne gardant que les deux coordonnées i et j de tous les liens du $\{i,j\}$-contour, le chemin tracé est 4-connexe dans ce plan. En corroborant ce résultat avec la remarque précédente, on obtient le corrolaire suivant.

Corollaire 4.11. *Si b' est un bel sur le bord d'un objet O, alors $n-1$ courbes planaires 4-connexes incluses dans ∂O traversent b', chacune selon un plan parallèle à $\mathbf{e}_{\perp_{b'}}\mathbf{e}_i$, avec $i \in J_n \setminus \perp_{b'}$, traversant le centroïde de b' dans $\mathbb{R}^n$.*

La Figure 4.6 montre les deux chemins traversant un bel donné, dans le cas 3D. Ainsi, le Corollaire 4.11 montre que l'on dispose de $n-1$ degrés de liberté pour se déplacer autour de tout point d'une surface discrète, similairement à la géométrie euclidienne où un bord de volume est paramétrable par $n-1$ axes de coordonnées en tout point.

nombre d'ops	$\mathfrak{c}(c')$	topo($\mathfrak{c}(c')$)	égalité	set x_i	adj.	est l-adj. ?	∇_j^μ ou Δ_j^μ	est l-inc.
bits-à-bits	0	1	0	2	0	$\leq 2n$	1	≤ 3
décalages	n	1	0	1	0	0	0	≤ 6
additions	n	0	1	0	1	$\leq 2n$	≤ 1	$\leq 7+4$
accès table	n	1	0	2	1	$\leq n$	≤ 2	$\leq l+2$
tests cond.	0	0	0	0	1	$\leq 2n$	1	$\leq 3l+1$

TAB. 4.1 – Nombre d'opérations requises pour réaliser les calculs suivants : (i) codage d'une cellule de $\mathbb{C}^n$, (ii) extraire la topologie d'un code, (iii) tester l'égalité de deux codes, (iv) changer une coordonnée d'un code, (v) calculer le code d'une cellule 1-adjacente, (vi) tester si deux codes sont l-adjacents, (vii) calculer les codes des cellules dans le bord inférieur ou supérieur, (viii) tester si deux codes sont l-incidents.

4.2 Représentation et déformation des surfaces discrètes

4.2.1 Codage des cellules et surfaces

Le formalisme proposé pour représenter les cellules et les incidences dans la grille régulière autorise une mise en œuvre efficace dans un langage de programmation. En effet, nous proposons de coder toute cellule par un seul entier. Les opérateurs bord sont alors de simples opérations bits à bits avec un accès à une table précalculée ; les ensembles de cellules et les chaînes sont des tableaux de bits de taille raisonnable. Pour ce faire, nous restreignons l'espace $\mathbb{Z}^n$ à un parallélépipède P de côté (M_i) selon la coordonnée i et de coin inférieur $\mathbf{0}$. Cette restriction est naturelle lorsque l'on travaille sur une image donnée.

Définition 4.12. *Le* code *d'une cellule $c = (J, \mathbf{x})$, éventuellement orientée par ϵ, est le mot binaire formé de la concaténation des mots binaires suivants :*

- *chaque entier x_i est codé en binaire sur $N_i \stackrel{d}{=} \lfloor \log_2(M_i - 1) \rfloor + 1$ bits.*
- *si la cellule est orientée, on rajoute un bit de valeur $\frac{\epsilon+1}{2}$.*
- *la topologie J est le codage binaire de l'entier $\sum_{i \in J} 2^{i-1}$.*

Il est clair que toute cellule de P est identifiable par son code, qui contient toutes les informations sur la cellule. Pour donner une idée de la taille des entiers manipulés dans le cadre d'une application d'analyse d'image, toute cellule d'une image de taille $1024 \times 1024 \times 512$ est codable sur un entier de 32 bits. Pour les applications biomédicales usuelles, un processeur 32 bits standard peut donc stocker une cellule dans un registre.

La translation suivant une direction de l'espace est une addition ou soustraction binaire. Les opérateurs de bords, si la quantité $(-1)^{\#J - \mathrm{Rg}(J,i)+j}$ est précalculée dans une table de taille $2n2^n$, se calculent par masquage et addition. La Table 4.1 donne le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour réaliser certains calculs et tests avec des cellules codées. D'une part, on constate que la plupart d'entre eux nécessitent très peu d'opérations et sont plus efficaces qu'une implémentation classique avec n coordonnées dans l'espace de Khalimsky. D'autre part, la mise en œuvre est entièrement générique et le code produit est indépendant de la dimension de l'espace. Par exemple, l'Algorithme 4.1 est effectivement implanté en C++ en dimension quelconque. Une telle généricité garantit une bonne maintenabilité du code en même temps qu'elle économise du développement.

Le codage des cellules induit aussi des structures de données plus compactes pour représenter des ensembles de cellules ou des fonctions sur les cellules. D'une part, le code d'une cellule est en soi un index utilisable directement dans n'importe quelle structure de données classique représentant une collection d'éléments. D'autre part, on peut modéliser un ensemble de r-cellules par une fonction caractéristique sur l'ensemble de toutes les r-cellules du domaine P de l'image. Or, comme la topologie de la cellule est bien séparée de sa position, cette fonction caractéristique est mémorisable sous forme d'un tableau de bits de taille adaptée.

Par exemple, une surface discrète n'occupe alors que la fraction $\frac{n}{2^n}$ de l'espace qu'elle occuperait si on utiliserait sa représentation dans l'espace de Khalimsky. L'espace de Khalimsky contiendrait en effet des vides pour toutes les cellules de dimension différente de $n-1$. La Table 4.2 résument les gains obtenus par notre approche, en comparaison avec les deux représentations classiques de $\mathbb{Z}^n$: (1) seuls les voxels

représentation	voxel	surfel	r-cellule	ensemble de voxels	ens. de r-cellules
classique $\mathbb{Z}^n$	n entiers	$n+1$ entiers		$2^{\sum N_i}$ bits	
Khalimsky $\mathbb{K}^n$	n entiers	n entiers	n entiers	$2^n 2^{\sum N_i}$ bits	$2^n 2^{\sum N_i}$ bits
couple $(J, \mathbf{x})$	1 entier	1 entier	1 entier	$2^{\sum N_i}$ bits	$\binom{n}{r} 2^{\sum N_i}$ bits

TAB. 4.2 – Comparaison de la taille mémoire occupée par les cellules et ensembles de cellules de $\mathbb{C}^n$ selon la représentation choisie du plan discret $\mathbb{Z}^n$. Les ensembles de cellules sont stockées comme des tableaux de bits. La représentation de Khalimsky et celle que nous proposons sont plus expressives que la représentation classique. Notre représentation est cependant moins coûteuse que les deux autres, et cette différence s'accentue lorsqu'on monte en dimension.

Tailles P_i	Rayon	Nb voxels	Nb surfels.	Scan (A)	Scan (B)	Suivi (A)	Suivi (B)
4096^2	2000	12566345	16004	2.07s	2.00s	< 0.01s	< 0.01s
128^3	30	113081	16926	0.38s	0.03s	0.01s	0.01s
128^3	60	904089	67734	0.39s	0.34s	0.07s	0.05s
256^3	120	7236577	271350	3.15s	2.70s	0.36s	0.32s
512^3	240	57902533	1085502	25.1s	21.2s	1.88s	1.85s
64^4	30	4000425	904648	4.26s	4.00s	1.91s	1.37s

TAB. 4.3 – Temps de calcul du bord d'une boule discrète de rayon donné sur un Celeron 450 Mhz (128Mo de cache). Le nombre de voxels de la boule et le nombre de surfels de son bord sont donnés. Différents algorithmes de calcul du bord sont testés. *Scan (A)* parcourt tout l'espace tandis que *Scan (B)* parcourt seulement la boîte englobante de la boule. Les algorithmes *Suivi* extrait par suivi le bord en partant d'un bel initial. *Suivi (A)* suit les adjacences directes et indirectes tandis que *Suivi (B)* ne suit que les adjacences directes.

sont identifiés par leurs coordonnées, les surfels sont identifiés par un voxel incident et une direction (représentation usuelle de $\mathbb{Z}^n$), (2) l'espace est dédoublé dans toutes les directions et chaque cellule est identifiée par ses coordonnées (représentation Khalimsky $\mathbb{K}^n$).

Tout le formalisme présenté ainsi que les structures de données ont été implantés (en C++). Les algorithmes écrits dans ce formalisme sont non seulement génériques mais sont aussi efficaces, comme l'illustre la Table 4.3 qui liste les temps de calcul de divers algorithmes d'extraction du bord d'un objet en dimension quelconque. Tous les calculs géométriques présentés dans cette thèse ont aussi été écrits dans ce formalisme.

Pour finir, on peut noter que Cointepas *et al.* [CBG99] ont développé une idée assez similaire pour stocker un complexe cartésien, en choisissant de le représenter sur toute une image par un tableau de bits, et en l'indexant par les coordonnées de la cellule et son « nombre », sorte d'équivalent de la topologie de la cellule. Leur idée coïncide avec la nôtre lorsque que nous représentons un complexe cartésien, le coût mémoire de notre tableau étant alors exactement de $2^n 2^{\sum N_i}$ bits. Pour plus de détails sur la mise en œuvre des structures de données et des algorithmes, le lecteur peut se référer à [57].

4.2.2 Déformation des surfaces

Le formalisme algébrique sur la grille cellulaire permet de calculer efficacement des « déformations » sur le bord d'un objet discret.

En effet, on suppose que l'on dispose d'un objet discret $O_t = \cup_m \{o_m\}$ à l'instant t dont on connaît le bord ∂O_t. On veut calculer son bord à l'instant $t+1$ après *déformation* par ajouts de $(p_k)_k$ voxels et suppression de $(q_l)_l$ voxels. Une possibilité est de calculer directement $\partial O_{t+1} = \partial((O_t \setminus \cup_l \{q_l\}) \cup (\cup_m \{p_m\}))$. Néanmoins, le coût de ce calcul est directement relié à la taille des données.

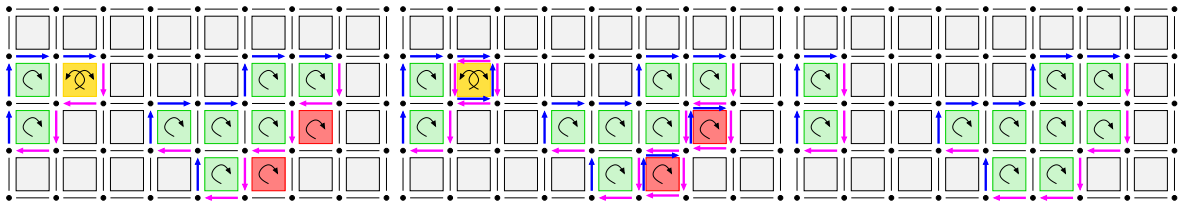


FIG. 4.7 – Calcul du nouveau bord d'un objet discret auquel on rajoute des voxels et supprime d'autres. Gauche : objet discret (vert), voxels ajoutés (rouge) et supprimés (jaune). Milieu : calcul des bords des voxels ajoutés et des voxels supprimés. Droite : sommation de tous les bords.

Nous proposons d'utiliser la linéarité de l'opérateur Δ pour limiter le coût de calcul. En effet,

$$\begin{aligned} \partial O_{t+1} &= \Delta(\sum_m o_m^+ - \sum_l q_l^+ + \sum_k p_k^+) \\ &= \Delta \sum_m o_m^+ - \Delta \sum_l q_l^+ + \Delta \sum_k p_k^+ \\ &= \partial O_t - \partial \cup_l q_l + \partial \cup_k p_k. \end{aligned}$$

La Figure 4.7 illustre le calcul du bord déformé par calcul des bords des voxels ajoutés et enlevés. Le calcul de ces deux bords a une complexité linéaire en le nombre des voxels ajoutés ou enlevés. Leurs sommations à ∂O_{t+1} a la même complexité.

Les algorithmes de minimisation présentés au Chapitre 3 (Algorithmes 3.1 et 3.4) requièrent le calcul de k-expansions ou k-contractions élémentaires autour de bels s' (cf. Section 3.3.2). Elles sont réalisées ainsi :

1. La boule $V_k(b')$ de rayon k autour de s' sur le bord de O est calculée par propagation de la bel-adjacence intérieure (mettons) : $V_1(b') = \sigma^0(b'; O)$, $V_{i+1}(b') = \cup_{s' \in V_i(b')} \sigma^0(s'; O)$.
2. L'intérieur immédiat de $V_k(b')$ est composé des voxels positifs dans son cobord : $\mathrm{II}(V_k(b')) = \{v_m, \langle v_m^+, \nabla V_k(b') \rangle > 0\}$.
3. L'extérieur immédiat de $V_k(b')$ est composé des voxels négatifs dans son cobord : $\mathrm{IE}(V_k(b')) = \{v_m, \langle v_m^+, \nabla V_k(b') \rangle < 0\}$.
4. La k-contraction de O en s' est la déformation de O en supprimant les voxels de $\mathrm{II}(V_k(b'))$.
5. La k-expansion de O en s' est la déformation de O en ajoutant les voxels de $\mathrm{IE}(V_k(b'))$.

Pour conclure cette section, nous avons montré comment mettre en œuvre effectivement le modèle déformable discret général présenté au Chapitre 3 (Définition 3.3, page 57). Nous pouvons représenter, parcourir et déformer tout bord d'un objet discret dans $\mathbb{Z}^n$. Il reste maintenant à estimer certaines quantités géométriques comme la longueur/aire de sa surface, sa normale, ou ses courbures. C'est le propos de la section suivante.

4.3 Mesures géométriques

Estimer des quantités géométriques sur des bords d'objets discrétisés est un problème classique en géométrie discrète mais aussi en analyse d'images et reconnaissance de formes. Comme l'atteste le récent ouvrage de Klette et Rosenfeld [KR04a], ce problème a été très étudié en 2D et significativement en 3D. Les quantités mesurées les plus courantes sont soit globales comme le volume, le périmètre ou l'aire, les moments, soit locales comme la normale, la tangente ou le plan tangent, les courbures. Les autres quantités les plus étudiées sont les points caractéristiques ou dominants, qui sont par essence moins géométriques et plus qualitatifs, et ne seront pas abordés ici.

La notion d'estimateur géométrique est *a priori* assez floue. Comme une infinité de formes ont même discrétisation, il est en effet difficile de comparer objectivement la précision de différents estimateurs d'une même quantité. Potentiellement en effet, quasiment toutes les estimations peuvent être correctes par rapport à une certaine forme. Plutôt que de comparer deux estimateurs à une résolution donnée, une manière objective d'évaluer la qualité d'un estimateur est de se poser la question de sa *convergence asymptotique* pour des pas de discrétisations de plus en plus fin.

Nous présenterons donc d'abord dans la première sous-section une définition formelle des estimateurs géométriques ainsi que de la convergence multigrille. Dans le contexte des MDD (Définition 3.3, page 57), nous nous intéressons plus particulièrement aux estimateurs de périmètre en 2D ou aire en nD (terme de régularisation α), aux estimateurs de courbure(s) (terme de régularisation β) et aux estimateurs de vecteur normal (terme β et énergies externes). Nous envisagerons plus particulièrement ceux qui peuvent être convergents et ceux qui peuvent mener à des mesures sur des objets nD. L'estimation de ces quantités géométriques sera abordée dans les sous-sections qui suivent.

4.3.1 Estimateurs géométriques discrets et convergence multigrille

Nous présentons ici une définition formelle des *estimateurs géométriques discrets*, reprise de [KR04a] pour les quantités géométriques globales et adaptées aux quantités géométriques locales. On pourra se référer à l'Annexe B pour plus de détails sur les processus de discrétisation.

Définition 4.13. *Soit $\mathbb{F}$ une famille d'ensembles X dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathrm{Dig}(X,h)$, une discrétisation de X de pas h. Soit une quantité géométrique $\mathcal{Q}$ définie pour tout $X \in \mathbb{F}$. On appelle* estimateur discret de $\mathcal{Q}$ *toute application qui associe à $\mathrm{Dig}(X,h)$ une valeur estimée de $\mathcal{Q}(X)$. Soit maintenant une fonction géométrique $\mathcal{T}$ définie pour tout $X \in \mathbb{F}$ et en tout point $x \in \mathrm{bd}\, X$, continue et dérivable sur $\mathrm{bd}\, X$, indépendante de tout paramétrage du bord. On appelle* estimateur fonctionnel discret de $\mathcal{T}$ *toute application qui associe à $\mathrm{Dig}(X,h)$ et à un point y de son bord $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}(X,h)$ une valeur estimée de $\mathcal{T}(X,x)$, avec $x \in \mathrm{bd}\, X$ et $\|y-x\| \leq h$.*

La convergence multigrille est alors définie ainsi[7] :

Définition 4.14. *Un estimateur discret $E_{\mathcal{Q}}$ est* multigrille-convergent *pour une famille de formes $\mathbb{F}$ et un processus de discrétisation $\mathrm{Dig}(\cdot,\cdot)$ ssi, pour tout $X \in \mathbb{F}$, il existe un pas de discrétisation $h_X > 0$ tel que la valeur estimée $E_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Dig}(X,h))$ est définie pour tout pas $h < h_X$ et*

$$|E_{\mathcal{Q}}(\mathrm{Dig}(X,h)) - \mathcal{Q}(X)| \leq \tau(h),$$

où τ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ de limite nulle au point 0. Cette fonction définit la vitesse de convergence *de $E_{\mathcal{Q}}$ vers $\mathcal{Q}$.*

La convergence multigrille d'estimateurs de quantités géométriques locales est en revanche assez mal définie à notre connaissance dans la littérature.[8] Nous proposons de définir aussi la convergence multigrille d'estimateurs géométriques fonctionnels de quantités géométriques locales.

Définition 4.15. *Un estimateur fonctionnel discret $E_{\mathcal{T}}$ est* multigrille-convergent *pour une famille de formes $\mathbb{F}$ et un processus de discrétisation $\mathrm{Dig}(\cdot,\cdot)$ ssi, pour tout $X \in \mathbb{F}$, pour tout point $x \in \mathrm{bd}\, X$, il existe un pas de discrétisation $h_X > 0$ tel que la fonction estimée $E_{\mathcal{T}}(\mathrm{Dig}(X,h),\cdot)$ est définie en tout point de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}(X,h)$ pour tout pas $h < h_X$ et*

[7] Cette définition reprend essentiellement celle du livre de Klette et Rosenfeld ([KR04a], Definition 2.10), en considérant toutefois h comme étant le pas de discrétisation et non la résolution de la grille. Ainsi, les comportements asymptotiques des discrétisations seront observés pour h tendant vers 0.

[8] En effet, certains auteurs se donnent un point $\mathbf{x}$ et une famille de formes $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}$ dont le bord contient ce point. La quantité géométrique estimée est alors $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ et ils observent si l'estimateur discret de $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ est multigrille convergent pour la famille $\mathbb{F}_{\mathbf{x}}$. Cela introduit un biais car l'estimateur a alors connaissance du point où il doit faire son estimation. En quelque sorte, l'estimateur sait où passe le bord, ce qui ne correspond pas au cas réel.

$$\forall y \in \mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}(X,h) \text{ avec } \|y-x\|_1 \leq h, |E_{\mathcal{T}}(\mathrm{Dig}(X,h),y) - \mathcal{T}(X,x)| \leq \tau_x(h),$$

où τ_x est une fonction, dépendante de x, définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ de limite nulle au point 0. Cette fonction définit la vitesse de convergence *de $E_{\mathcal{T}}$ vers $\mathcal{T}$ au point x. L'estimateur converge* uniformément *si il existe une fonction τ indépendante de x à valeur dans $\mathbb{R}^{+*}$ de limite nulle au point 0, telle que $\forall x \in \mathrm{bd}\,X, \tau_x(h) \leq \tau(h)$.*

La définition précedente indique que la suite de fonctions $(E_{\mathcal{T}}(\mathrm{Dig}(X,h_i),\cdot))_i$, avec $(h_i)_i$ séquence arbitraire positive décroissante vers 0, converge point à point vers la fonction $\mathcal{T}(X,\cdot)$, avec la subtilité que ces fonctions ne sont pas définies sur le même domaine. Du fait de l'imprécision sur la position de x par rapport au point discret où l'estimation est faite, la vitesse de convergence $\tau_x(h)$ d'un estimateur fonctionnel est bornée par un $\mathcal{O}(h)$.

4.3.2 Tangente à une courbe 4-connexe du plan

On cherche à estimer la fonction géométrique θ définie en tout point x du bord d'une forme X de $\mathbb{R}^2$ comme étant l'angle entre le vecteur tangent au point x et l'axe des abscisses lorsqu'on parcourt le bord dans le sens anti-trigonométrique.

Nous commençons par examiner les méthodes possibles pour déterminer la tangente en tout point d'une courbe du plan $\mathbb{Z}^2$. Dans le cas euclidien, connaître la tangente en tout point d'une courbe permet de déterminer complètement toutes les mesures souhaitées (périmètre, tangente, normale, courbure). Dans le cas discret, même si la tangente demeure un des moyens possibles pour estimer les autres quantités géométriques, on verra dans les paragraphes suivants que d'autres méthodes d'estimation sont aussi envisageables.

Les premières méthodes d'estimation de la tangente se basent principalement sur des techniques d'approximation, par exemple en construisant un polynôme qui approche un ensemble de points voisins autour du point d'intérêt. Ainsi Anderson et Bezdek [AB84] définissent la tangente comme la droite qui minimise la distance au carré des points dans un voinage borné. Une approche similaire est de lisser la courbe discrète, par exemple par convolution par une Gaussienne. Toutes ces techniques n'exploitent pas la spécificité de la grille discrète et il est connu qu'elles échouent même sur des formes simples comme des bords de demi-plans : la tangente estimée oscille alors. Pour les mêmes raisons, de façon générale, toutes les techniques qui se basent sur une fenêtre de calcul de taille fixée [MSK95, LF98] ou sur un coefficient de lissage indépendant de la géométrie de la courbe [LMR96] ne peuvent estimer correctement les tangentes à une courbe discrète. Ces estimateurs ne peuvent être multigrille convergents.

D'autres auteurs proposent donc de tenir compte du *contexte* autour du point d'intérêt pour déterminer la taille de la fenêtre de calcul. Par exemple, Yagel *et al.* [YCK92] détectent ainsi les discontinuités dans une première passe, puis déterminent la normale par lissage dans chaque zone ainsi délimitée. Leur approche nécessite néanmoins de fixer de façon *ad hoc* des paramètres, ce qui l'empêche d'être convergente.

D'autres méthodes préfèrent exploiter la géométrie particulière des courbes du plan discret. Il existe en effet un certain nombre d'algorithmes pour détecter les segments de droites discrètes et pour extraire leurs caractéristiques (voir en particulier le tour d'horizon très complet de Klette et Rosenfeld [KR04b]). Or, ces segments discrets ont une longueur qui dépend de la géométrie locale de la courbe discrète. Ils permettent donc de définir une fenêtre de calcul adaptative pour estimer la tangente. L'idée de reconnaître les droites discrètes autour du point d'intérêt permet d'envisager la convergence multigrille de ces estimateurs de tangente. Si la courbe étudiée est une droite, il est clair que tous ces estimateurs retournent la tangente exacte en tout point. C'est pourquoi nous avons étudié en détails ces différents estimateurs et nous les avons comparés de manière qualitative et comparative [26, 8]. Les définitions formelles des droites discrètes et des segments maximaux seront données dans le Chapitre 5, § 5.1.1.

Vialard [Via96] définit ainsi la tangente en un point discret comme étant la direction du plus long segment discret centré autour de ce point (*tangente symétrique (ST)*. Feschet et Tougne [FT99] définissent

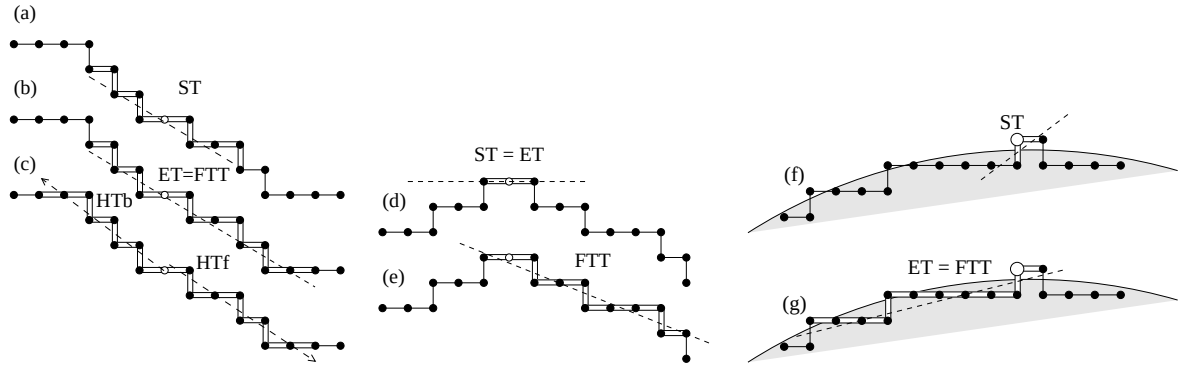


FIG. 4.8 – Illustration des différents estimateurs de tangentes basés sur les droites discrètes. Le point d'intérêt et la droite discrète définissant la tangente sont en blanc. (a) Tangente symétrique. (b) Tangente étendue, équivalente sur cette exemple à la tangente de Feschet-Tougne. (c) Demi-tangentes formant la tangente médiane. Les sous-figures (d) et (e) mettent en évidence l'ambiguïté possible de la définition de FTT : la tangente est équilibrée pour ET et arbitrairement étendue à droite pour FTT. Les sous-figures (f) et (g) montrent que l'estimateur ST détecte de fausses concavités sur des discrétisations de formes convexes : (a) ST, (b) ET et FTT donnent en revanche un résultat correct.

la tangente comme étant la direction du segment le plus long possible, qui contient la tangente symétrique et étendu vers l'avant si le segment peut être étendu des deux côtés (*tangente de Feschet-Tougne (FTT)*). La *tangente étendue (ET)* [26] est une variante non-ambiguë de la précédente, où le segment n'est pas étendu lorsqu'il peut être étendu des deux côtés. Enfin, la *tangente médiane (HT)* est obtenue en calculant la direction médiane aux deux segments discrets les plus longs partant du point vers l'avant et vers l'arrière. Ces définitions de tangentes sont illustrées sur la Figure 4.8.

Nous avons retenu les critères suivants pour comparer ces différents estimateurs géométriques :

Précision à différentes échelles. Il s'agit de comparer l'erreur d'estimation de direction angulaire de la tangente en valeur absolue, en moyenne, en maximum, et en variance, sur différentes formes, à des échelles de plus en plus précises.

Isotropie. La discrétisation sur une grille a tendance à rendre plus difficile l'estimation de la tangente dans certaines directions. On vérifie donc sur des discrétisations de cercle, l'erreur absolue d'estimation en fonction de la direction.

Détection de la convexité. Il est naturel qu'un estimateur de tangente ne crée pas de fausses concavités sur des discrétisations de formes convexes (connues pour être des ensembles convexes discrets). On vérifie donc que la direction de tangente estimée est une fonction monotone de l'abscisse curviligne.

Détection de zones caractéristiques. On vérifie le comportement des estimateurs sur des parties de courbe présentant une géométrie caractéristique : parties droites, coins, tendance à la polygonalisation sur des parties courbes et lisses.

Convergence asymptotique. On se pose enfin la question de leur convergence multigrille, mais ce problème sera abordé précisément au Chapitre 5.

Après étude comparative [26], il s'est avéré qu'aucun n'était le plus performant sur tous les points précités. Les estimateurs basés segments maximaux (FTT et ET) sont en effet plus robustes, mais ont une nette tendance à la polygonalisation avec des erreurs moyennes médiocres. Nous avons donc proposé un nouvel estimateur de tangente, appelé *tangente par λ-combinaison de segments maximaux (λ-MST)*, qui combine les qualités des estimateurs précités.

La Figure 4.9 en résume le principe. Soit un point de la courbe discrète (éventuellement situé sur le segment entre deux points discrets). Les directions θ_i de tous les segments maximaux qui le contiennent

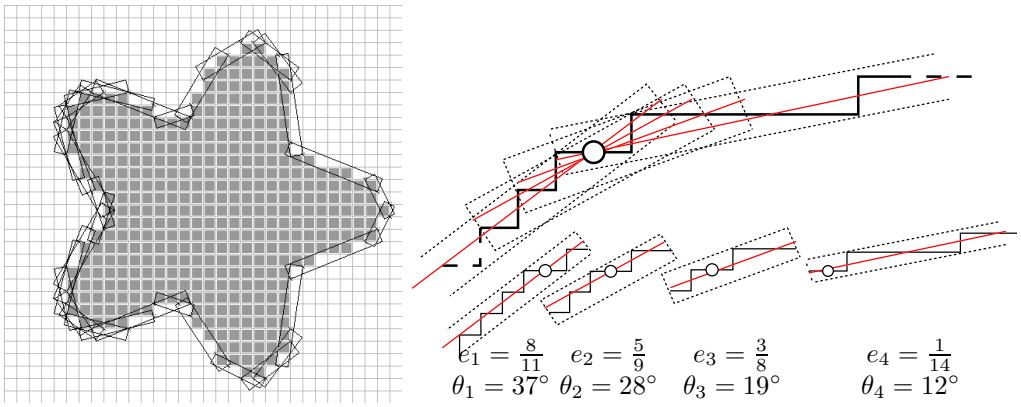


FIG. 4.9 – Gauche : chaque segment maximal du contour discret est tracé selon sa boîte englobante. Droite : principe de l'estimateur de tangente λ-MST par combinaison linéaire des directions des segments maximaux contenant le point d'intérêt.

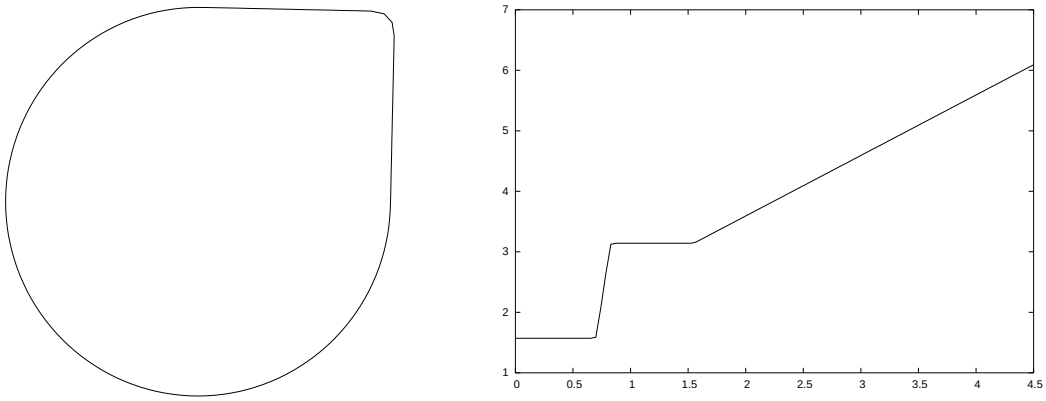


FIG. 4.10 – Le bord de la forme « Coin » (gauche) et sa fonction direction de tangente (droite). La forme est un trois-quart de cercle de rayon 10 complété par deux segments orthogonaux terminés par un coin en arc de cercle de courbure 10.

sont calculés (angles entre 0 et 2π). La position relative e_i de ce point dans le segment maximal (entre 0 à gauche et 1 à droite) est aussi déterminée.

Définition 4.16. *L'estimation λ-MST de la direction de tangente en ce point est une combinaison convexe des paramètres précédents suivant des poids déterminés par une fonction $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, avec $\lambda(0) = \lambda(1) = 0$ et $\lambda > 0$ sinon, telle que :*

$$\hat{\theta}^{\lambda MST} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_i \lambda(e_i)\theta_i}{\sum_i \lambda(e_i)}.$$

Le Théorème 1 de [26] précise les conditions sous lesquelles cet estimateur respecte la convexité de la forme sous-jacente. Par exemple, les fonctions en forme de « cloche » type Gaussiennes ou binomiaux les satisfont. Dans nos expérimentations, la fonction λ était définie comme la fonction triangle symétrique autour de $\frac{1}{2}$ et de pic 1. Il apparaît aussi expérimentalement que cet estimateur est finalement peu sensible au choix de cette fonction. Cela provient sans doute du fait que tous les segments maximaux couvrant un point constituent de bonnes approximations de sa tangente. Cela sera d'ailleurs prouvé au Chapitre 5.

Nous ne montrons ici qu'un extrait de l'évaluation de ces estimateurs de tangente. La Figure 4.10 montre la forme étudiée, qui présente des parties rectilignes, des parties lisses en arc de cercle, un coin avec

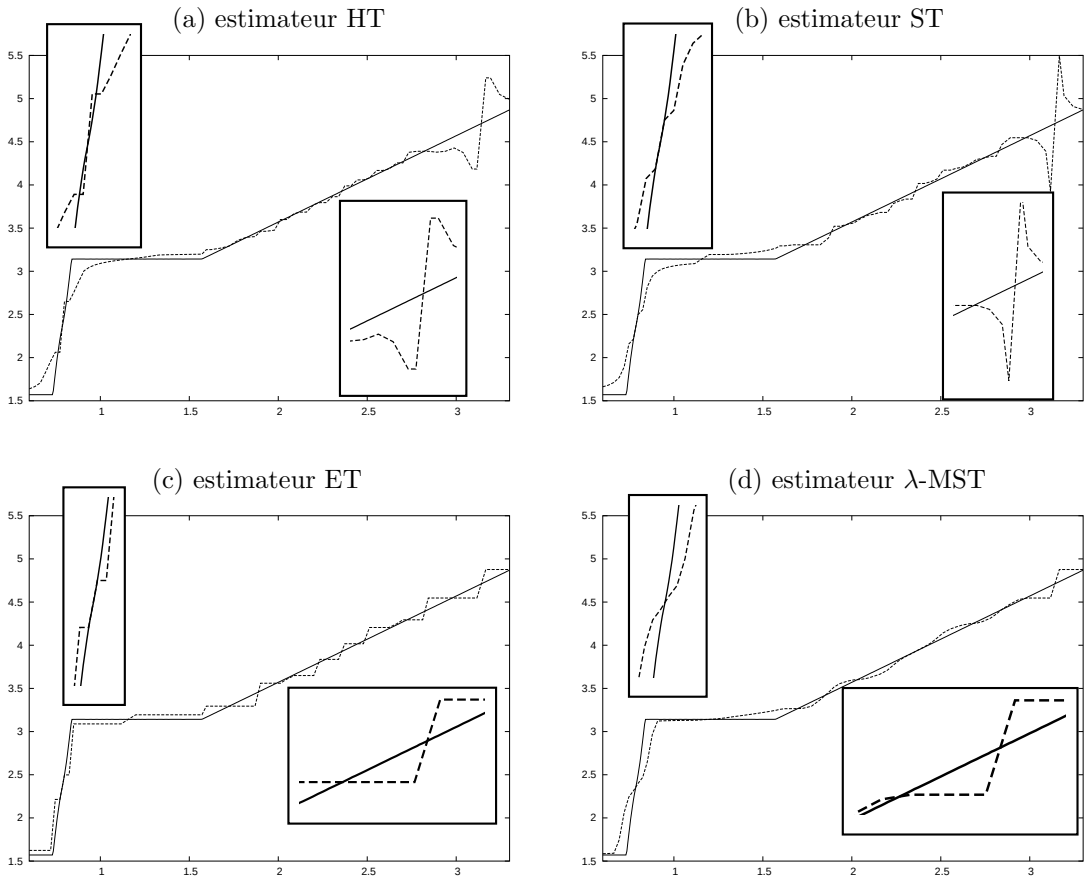


FIG. 4.11 – Graphes des estimations de tangente sur la forme « Coin » (Figure 4.10) en fonction de l'angle polaire du point. Les tracés pleins correspondent à la fonction θ, les tracés en tirets correspondent aux estimations sur une discrétisation de pas 0.5, ceux en pointillés aux estimations sur une discrétisation deux fois plus fine de 0.25.

très forte courbure. La Figure 4.11 trace les graphes des estimations de tangentes, pour les estimateurs ST, ET, HT, et λ-MST (i.e. $\hat{\theta}^{\lambda\text{MST}}$). FTT n'est pas représenté car quasi-identique à ET. On constate que seuls les estimateurs ET/FTT et λ-MST respectent la convexité de la forme : ST et HT ne sont quant à elles pas monotones. Sur les parties rectilignes, HT puis λ-MST parviennent à avoir une estimation de tangente presque exacte. Sur les parties lisses, HT, ST et λ-MST sont assez comparables, ET/FTT ayant une nette tendance à polygonaliser la forme. ET est l'estimateur qui détecte le mieux les coins. D'autres expérimentations montrent que λ-MST est l'estimateur qui minimise l'erreur absolue moyenne d'approximation, l'erreur absolue maximum et l'écart type de l'erreur absolue, quasiment sur toutes les formes étudiées, que l'échelle soit grossière ou très fine.

La convergence multigrille de la tangente symétrique a été étudiée par Coeurjolly *et al.* [CDRT01, Coe02]. Démontrée, elle entraînerait la convergence de tous les autres estimateurs précités. Malheureusement, cette première étude ne permet pas d'établir en toute rigueur sa convergence, pour deux raisons : (i) il n'y a pas de définition correcte de convergence multigrille d'estimateur *fonctionnel*, (ii) la preuve de croissance asymptotique des segments discrets de la tangente symétrique n'est pas donnée. En fait, nous avons montré qu'il existe des points critiques[9] pour lesquels les tangentes symétriques dans un certain voisinage sont toujours bornées. Si cela n'empêche pas une convergence point à point, la convergence uniforme est réfutée. Nous montrerons au Chapitre 5 la convergence des estimateurs basés segments

[9] Les points du bord de la forme dont les coordonnées et le vecteur tangent sont rationnels.

maximaux (FTT, ET, λ-MST) et établirons leur vitesse de convergence.

4.3.3 Estimation de la normale

On cherche à estimer le champ de vecteurs normaux unitaires $\mathbf{n}_X(x)$ défini en tout point x du bord d'une forme X de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. En 2D, l'estimation de la direction de tangente donne une estimation directe de ce champ.

Similairement à l'estimation des tangentes, l'estimation du champ de vecteur normal d'une surface discrète 3D peut se faire par des méthodes d'approximation classiques, avec les défauts d'oscillation habituels [LF98]. Pour remédier à ces défauts, certains auteurs suggèrent de détecter les zones où la normale varient progressivement et les lignes de discontinuités. Ainsi Yagel *et al.* [YCK92] examinent en chaque voxel bord les trois coupes de l'objet suivant les trois plans orthogonaux de la base standard, identifient les voxels discontinus suivant chacune des coupes et reconstruisent des lignes de discontinuités. Les zones de continuité sont ainsi délimitées. Dans chacune de ces zones, les normales peuvent être moyennées. Cette technique nécessite néanmoins de nombreux paramétrages manuels. Dans un même ordre d'idée, Thürmer [Thü01] utilise une première estimation de la normale en chaque voxel bord pour déterminer les voxels de normales similaires dans son voisinage. Les voxels qui n'appartiennent pas au plan tangent ou dont la normale est trop différente ne sont alors pas pris en compte dans le lissage du champ de normales.

Dans une approche plus géométrie discrète, la normale peut être évaluée en reconnaissant dans un voisinage un plan discret « tangent ». Plusieurs de ces techniques sont recensés et comparés dans [KR04a], Chap. 11.4 ou dans la thèse de Sivignon [Siv04]. On peut citer aussi [KS01] où les auteurs utilisent une approche gloutonne incrémentale pour déterminer un tel plan en agglutinant progressivement les surfels voisins extraits par un parcours en largeur du graphe de bel-adjacence, et en ne conservant que les surfels pouvant déterminer un plan discret. La normale est alors estimée directement à partir des coefficients du plan discret de taille maximale. La reconnaissance de plan discret reste néanmoins une technique assez coûteuse, et rien ne permet de déterminer quel est le meilleur plan discret possible contenant le point d'intérêt. Un résultat récent [Bri06] montre d'ailleurs que le découpage d'une surface discrète en un nombre minimum de plans est NP-difficile.

On peut enfin réduire le problème d'estimer la normale à la surface en plusieurs estimations de tangentes sur des courbes dessinées sur la surface et passant par le point considéré. On voit facilement que 2 contours 4-connexes planaires passent par tout bel de l'objet discret en 3D (cf. Figure 4.6, page 77). C'est l'approche proposée par Lenoir *et al.* [LMR96]. La tangente est estimée sur chaque contour par filtrage de la courbe 4-connexe par une gaussienne de variance donnée puis les directions de tangentes obtenues sont combinées pour estimer le vecteur normal. Cela nécessite néanmoins un paramètre externe (la variance) qui n'est pas adapté à la géométrie locale de l'objet. Tellier et Debled-Rennesson [TDR99] corrigent ce problème en calculant sur chaque contour 2D la tangente symétrique (similairement à [Via96] en 2D).

Nous avons étendu l'approche précédente en dimension quelconque [22, 58]. Le Corollaire 4.11 indique en effet que $n-1$ contours discrets 4-connexes, définis sur la surface discrète, traversent chaque bel. Sur chaque contour, un estimateur de tangente discrète (comme ST ou λ-MST) calcule la direction de la tangente dans ce plan. La normale est alors le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à ces $n-1$ vecteurs tangents. Comme on peut le voir dans la définition qui suit, le passage à la dimension n nécessite des précautions importantes pour orienter correctement les vecteurs. Notre définition algébrique des opérateurs bord résoud efficacement ce problème en introduisant des sens de déplacements suivant chacune des coordonnées.

Définition 4.17. *Si b' est un bel d'un objet O et $i = \perp_{b'}$. Alors, pour tout $j \in \|_{b'}$ on note $\hat{\theta}_j(b')$ la direction de la tangente estimée en parcourant le $\{i,j\}$-contour direct traversant b'.*[10] *La normale estimée en b'*

[10] Sur chaque plan, le vecteur aligné avec $\mathbf{e}_j$ orienté vers le lien direct défini l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées est quant à lui aligné avec $\mathbf{e}_i$ orienté vers l'extérieur de l'objet. L'angle $\hat{\theta}_j$ est donc entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ exclus.

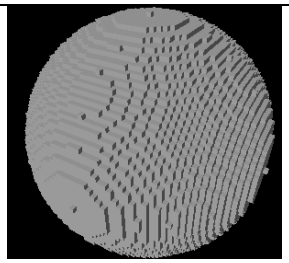
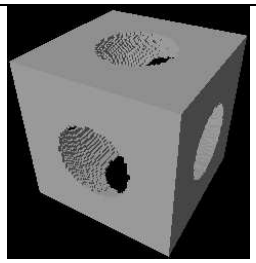
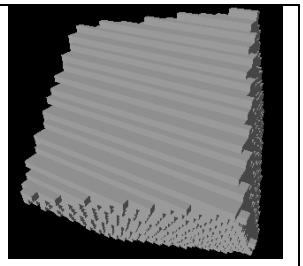
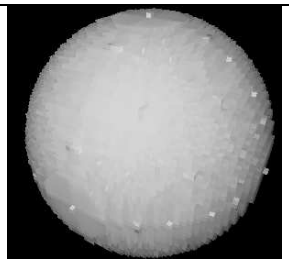
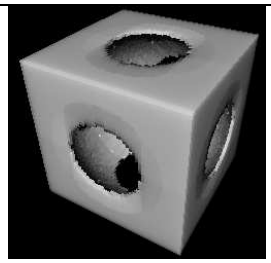
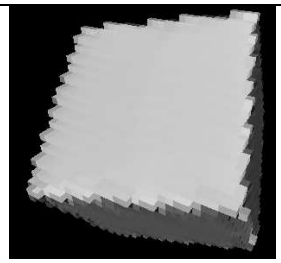
Surface discrète représentée selon ses normales triviales.			
Surface discrète représentée selon les normales estimées $\hat{\mathbf{n}}$ (ST sur chaque contour).			

FIG. 4.12 – Illustration de l'estimateur de champ de vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$ (Définition 4.17) et application à la visualisation d'objets discrets. En haut, les normales sur les objets discrets correspondent à une des six directions de l'espace. En bas, les normales sont estimées selon $\hat{\mathbf{n}}$. Le rendu de chaque facette de la surface est plat.

orientée vers l'intérieur de O est définie ainsi :

$$\hat{\mathbf{n}}(b') \stackrel{d}{=} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \text{ avec } \begin{cases} \forall j \in J_n \setminus i, \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j = \tan(\hat{\theta}_j(b'))(2\epsilon(b', j) - 1) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = 2\epsilon(b', i) - 1 \end{cases}$$

Pour des raisons historiques, la tangente symétrique a été utilisée dans la plupart des expérimentations. La Figure 4.12 montre la qualité de l'estimateur proposé. Les trois objets présentent des parties planes, courbes et des arêtes franches. La reconnaissance des segments discrets permet de détecter naturellement ces géométries sans le moindre paramètrage externe. Une analyse numérique de la qualité de cet estimateur de normale est dans [58], Table 2, en 2D, 3D et 4D. Il est clair que ces résultats pourraient être améliorés en utilisant l'estimateur de tangente λ-MST et cela reste une perspective de travail.

Pour conclure cette section, on voit facilement que la convergence multigrille de l'estimateur de normale dépend uniquement de celle de l'estimateur de tangente 2D. De plus les deux estimateurs ont même taux de convergence.

4.3.4 Périmètre du contour ou aire de la surface discrète

On cherche à estimer le périmètre ou l'aire $\mathcal{L}(X)$ du bord d'une forme X de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, à partir d'une discrétisation de X. Le cas $n = 2$ a été très étudié. Coeurjolly et Klette [CK04] les classent en quatre catégories.

La première, dite *locale*, compte sur le bord de la forme discrète un certain nombre de configurations (plats, coins, etc) et attribue à chacune de ces configurations un poids qui détermine sa contribution au périmètre total. Par exemple, Dorst et Smeulders [DS87] ont proposé des poids qui donnent les meilleurs estimations possibles pour des discrétisations de segments. Quoique rapides et faciles à mettre en œuvre, ces techniques ne peuvent espérer converger vers le périmètre réel dans la plupart des cas [TD03].

La deuxième catégorie effectue une reconstruction continue du contour discret, en général polygonale. Des algorithmes de reconnaissance de droites discrètes sont utilisés pour faire ce découpage, l'estimation de longueur étant immédiate une fois le polygone reconstruit. Une des premières approches de cette

catégorie est celle présentée dans [KF92]. La convergence multigrille de ces estimateurs a été prouvée [KF92, KŽ00] pour des familles de formes polygonales, avec une vitesse de convergence en $\mathcal{O}(h)$.

La troisième catégorie construit un polygone de longueur minimale (MLP) situé entre une courbe interne à la forme et une autre externe à la forme. Il s'agit donc de construire une certaine enveloppe convexe relative. Asano *et al.* [AKKO01] construisent ces courbes internes et externes en décalant légèrement vers l'avant et vers l'arrière tous les coins du contour discret. Ils montrent alors que le périmètre du MLP obtenu converge vers $\mathcal{L}(X)$ avec une vitesse de $\mathcal{O}(h)$ pour des familles de formes polygonales. Sloboda *et al.* [SS94, SZS98, SZK98] utilisent la théorie des *grid continua* pour définir les courbes internes et externes : elles sont respectivement les bords de la discrétisation par sous-ensemble et de la discrétisation par intersection ($\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_{\subset}(X,h)$ et $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_{\cap}(X,h)$ avec les notations de l'Annexe B). La convergence vers $\mathcal{L}(X)$ est aussi obtenue avec une vitesse $\mathcal{O}(h)$ mais pour la famille des formes convexes (pas forcément polygonales).

La quatrième catégorie utilise la définition continue de la longueur comme intégrale de longueurs élémentaires. Cette méthode a été initialement proposée par Ellis *et al.* [EPRR79]. Coeurjolly *et al.* [CDRT01, Coe02] calculent ainsi le périmètre par sommation de la longueur élementaire de chaque surfel, la longueur élémentaire étant définie comme le produit scalaire de la normale estimée (via la tangente ST) avec la normale triviale. Ils proposent une preuve de convergence multigrille ([Coe02], Corollaire B.4), mais celle-ci n'est applicable que pour une convergence uniforme de l'estimateur de normales (cf. [Coe02], Eq. (B.2), p. 271), fausse dans le cas de la tangente symétrique (ST) [61]. L'estimateur semble néanmoins converger en pratique.

Pour le cas $n \geq 3$, les techniques d'estimation d'aire peuvent aussi être classées suivant ces quatre catégories, même s'il n'existe pas actuellement de technique équivalente au polygone de longueur minimale. Comme technique locale d'estimation d'aire en 3D et 4D, on peut citer les travaux de Lindblad et Nyström [LN02, Lin03, Lin05], qui énumèrent les configurations possibles dans un cube de 2^n voxels et attribuent à chaque configuration un poids correspondant à sa contribution moyenne à l'aire totale.

Klette et Sun [KS01] estiment l'aire d'un objet 3D par polyédrisation de la surface discrète, avec un algorithme glouton de reconnaissance de plans discrets (cf. sous-section précédente). Expérimentalement, l'aire estimée est très proche de l'aire réelle (pour une sphère discrète de rayon 100, l'erreur relative est de 0.67%), meilleure qu'une estimation d'aire par mesure de l'aire de l'enveloppe convexe (3% d'erreur). La complexité en temps de l'algorithme est quadratique en le nombre de bels. Enfin, Coeurjolly [Coe02] estime l'aire par intégration du champ de vecteur normal avec de bons résultats pratiques. La convergence multigrille n'est prouvée que pour un estimateur de normale convergent uniformément ([Coe02], Théorème B.6 et Corollaire B.3).

Nous proposons deux mesures d'aire de surface discrète nD, toutes les deux basées sur l'évaluation d'une mesure d'aire élémentaire et son intégration.

Définition 4.18 ([22])**.** *Soit* $\hat{\mathbf{n}}$ *un estimateur fonctionnel discret de champ de normales. Pour tout bel* b' *d'un objet discret* O*, on définit*

$$\begin{aligned} \text{longueur ou aire élémentaire corrigés :} \quad & \hat{ds}(b') \quad \stackrel{d}{=} |\hat{\mathbf{n}}(b') \cdot \mathbf{e}_{\perp_{b'}}| \\ \text{longueur ou aire élémentaire moyennés :} \quad & \hat{ds}_m(b') \quad \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} |\hat{\mathbf{n}}(b') \cdot \mathbf{e}_j|\right)^{-1} \end{aligned}$$

*L'*aire corrigée $\hat{\mathcal{A}}(O)$ *est la somme* $\sum_{b' \in \partial O} \hat{ds}(b')$ *et l'*aire moyennée $\hat{\mathcal{A}}_m(O)$ *est la somme* $\sum_{b' \in \partial O} \hat{ds}_m(b')$.

Le périmètre ou l'aire corrigés correspondent exactement à l'approche de Cœurjolly, qui s'étend naturellement en dimension quelconque. Deux bels ayant même normale estimée peuvent ne pas fournir la même contribution à l'aire totale en fonction de leur direction. La définition de l'aire moyennée est originale. Deux bels ayant même normale ont alors même aire élémentaire. Sa justification provient du dénombrement des surfels sur un morceau de plan discret en fonction de leur direction triviale. L'aire de ce morceau de plan est alors répartie sur tous ses surfels, et peut s'écrire analytiquement comme ci-dessus (cf. [58], Théorème 1).

Objet	boule 2D		boule 3D			boule 4D	
	r=50	r=2000	r=20	r=100	r=250	r=10	r=30
nb bels	404	16004	7542	188502	1177926	33352	904648
temps de calcul (ms)	0	380	170	1230	6210	1070	29960
$\frac{\text{aire moyenne}}{\text{aire}}$	1.001	1.000	0.992	0.997	0.999	1.003	0.998
$\frac{\text{aire corrige}}{\text{aire}}$	1.018	1.001	1.016	1.004	1.002	1.041	1.012

TAB. 4.4 – Ratios aire estimée sur aire réelle, sur des boules de rayon croissant, en dimensions 2, 3 et 4. Tests effectués sur un Celeron 450 Mhz (128Mo de cache).

La Table 4.4 montre la précision de ces estimateurs (se référer sinon à [22, 58]). Par exemple, pour une sphère 3D de rayon 100, l'erreur de l'aire corrigée est de 0.3% et celle de l'erreur moyennée 0.4% : sur cet exemple, leur estimation est donc meilleure que la technique de Klette et Sun [KS01]. De plus, la complexité de calcul est bien moindre. En effet, si N est le nombre de bels et si l'objet est inscrit dans une boîte de taille P^n, alors $N = \Theta(P^{n-1})$. En tout bel, l'estimateur de normale parcourt $n-1$ chemins sur une longueur proportionnelle à la longueur moyenne M des segments discrets planaires sur la surface de l'objet. On verra au Chapitre 5 que $M = \mathcal{O}(D^{\frac{1}{3}})$. On déduit facilement la complexité du calcul de $\hat{\mathcal{A}}$ ou $\hat{\mathcal{A}}_m$, qui est de $(n-1)\mathcal{O}(N^{1+\frac{1}{3n-3}})$, soit dans les premières dimensions $N^{4/3}$, $N^{7/6}$ et $N^{10/9}$. En 2D, l'utilisation de l'algorithme de calcul des tangentes discrètes de Feschet et Tougne [FT99] permet même de ramener cette complexité à N.

La convergence multigrille des estimateurs de tangente basés segments maximaux, montrée au Chapitre 5 montrera la convergence de ces estimateurs d'aire.

4.3.5 Estimation de courbures

On cherche à estimer la courbure $\kappa_X(x)$ définie en tout point x du bord d'une forme X de $\mathbb{R}^2$. En 3D il s'agit d'estimer les deux courbures principales ainsi que les directions propres. En nD, il s'agit d'estimer les $n-1$ courbures et directions principales.

En 2D, de nombreux articles ont été consacrés à l'évaluation *qualitative* de la courbure, notamment pour détecter ses points caractéristiques (points dominants, points de coubure maximale, points d'inflexion). La thèse de Marji [Mar03] en recense et compare un très grand nombre. Les méthodes d'estimation *quantitative* de la courbure peuvent être regroupées en quatre catégories. Nous ne décrirons ici que quelques unes de ces techniques et référons le lecteur à [WS93, KR04a].

La première estime la courbure par sa définition analytique, en évaluant les dérivées premières et seconde d'une paramétrisation de la courbe. En général, un polynôme d'approximation est construit autour d'un voisinage du point d'intérêt, la courbure est alors directement obtenue. Ces techniques prennent difficilement en compte la particularité des données discrètes, et les oscillations, déjà perceptibles pour l'estimation de tangentes, sont encore plus marquées pour la courbure.

La deuxième catégorie estime la courbure en calculant la variation de la direction de la tangente. La direction de la tangente peut être estimée par des algorithmes de reconnaissance de droites discrètes (cf. Section 4.3.2). La variation de sa direction est par exemple obtenue par simple convolution avec une dérivée de Gaussienne [LMR96, Via96]. On peut aussi dériver directement l'estimateur $\hat{\theta}^{\lambda\text{MST}}$, si λ est une fonction différentiable.

La troisième catégorie estime la courbure en recherchant un cercle osculateur et en prenant l'inverse de son rayon. Coeurjolly *et al.* [CDRT01] utilisent le lien entre longueur d'une corde sur une bande circulaire et longueur de son rayon. La longueur de la tangente symétrique définit ainsi directement une courbure. Coeurjolly et Svensson [CS03] ont également proposé d'estimer le cercle osculateur comme le cercle circonscrit au point considéré et aux deux extrémités de ses demi-tangentes (cf. Figure 3.13, page 66). Nous l'appellerons par la suite estimateur CC.

Une quatrième catégorie cherche à reconstruire un ensemble séparant entre intérieur et extérieur de la courbe discrète. Coeurjolly *et al.* [CGRT04] proposent ainsi de déterminer un cercle séparant, en adaptant un algorithme de géométrie algorithmique. L'idée essentielle est que le centre de ce cercle séparant se situe toujours du même côté d'une médiatrice entre un point intérieur et un point extérieur à la courbe. L'intersection de tous ces demi-plans détermine l'ensemble des positions possibles pour le centre du cercle séparant. Ils en déduisent un pseudo-estimateur de courbure en inversant un des rayons possibles. Les résultats expérimentaux sont néanmoins assez décevants, probablement car il faudrait tester beaucoup de cercles séparants autour du point d'intérêt, selon qu'ils soient plus ou moins centrés.

A notre connaissance, seul Coeurjolly [Coe02] a cherché à démontrer la convergence multigrille d'un estimateur de courbure, plus précisément l'estimateur CC. On montrera au Chapitre 5 que l'hypothèse centrale du théorème de convergence n'est pas vérifiée sur la plupart des discrétisation de formes du plan. De façon étonnante, les analyses expérimentales portant sur la convergence possible des estimateurs de courbure n'ont souvent pas été conduites correctement dans la littérature [CDRT01, HK03, KR04a]. Ainsi, cette convergence est vérifiée en traçant l'erreur moyenne (!) de $|\kappa - \hat{\kappa}|$ sur un cercle discrétisé de rayon $1/\kappa$, κ tendant vers 0. La quantité réelle tendant de toute façon vers 0, il est normal que cette « erreur » tende aussi vers 0. Mais cela ne prouve bien sûr en rien la convergence de $\hat{\kappa}$.

Les Figures 4.13 et 4.14 comparent l'estimateur de courbure CC avec l'estimation de courbure par simple différentiation de l'estimation de tangente (i.e. $\hat{\kappa}(t) = \frac{\hat{\theta}(t+1)-\hat{\theta}(t-1)}{2}$). Sur la Figure 4.13, on constate que l'estimateur CC sous-estime généralement la courbure (et gomme notamment les coins) et qu'il peut même repérer de fausses concavités (courbure négative sur forme convexe). L'estimateur de courbure par différentiation de $\hat{\theta}^{\lambda\mathrm{MST}}$ est beaucoup plus stable, avec une précision similaire à CC sur les parties courbes, et repère fidèlement les coins comme les passages de parties rectilignes à courbes. La Figure 4.14 montre que tous les estimateurs de courbure ne convergent pas. Diminuer le pas de discrétisation ne diminue pas vraiment l'erreur relative, tracée ici en coordonnées polaires comme la fonction $1 + \frac{\hat{\kappa}-\kappa}{\hat{\kappa}+\kappa}$, bornée entre $[0, 2]$. Un bon estimateur s'écraserait autour de 1. Tous les estimateurs ont un comportement assez chaotique, et l'estimateur CC beaucoup plus que les deux autres. La courbure par différentiation de $\hat{\theta}^{\lambda\mathrm{MST}}$ est aussi plus stable que la différentiation de la tangente symétrique. Par ailleurs, nous avons aussi essayé de lisser l'estimation de courbures par filtrage Gaussien ou par filtrage adaptatif. Ce procédé améliore les résultats sur le disque, mais ce procédé devient très criticable sur d'autres formes, où les détails de la courbe sont alors fortement lissés et les courbures très souvent sous-estimées.

Pour terminer sur les estimateurs de courbure 2D, une analyse comparative récente de plusieurs de ces estimateurs a été menée par Hermann et Klette dans [HK06]. Elle montre bien que l'erreur d'approximation ne diminue pas avec le pas de discrétisation et qu'aucun ne semble être multigrille convergent. Cela confirme les résultats théoriques et les expérimentations pratiques que nous avons pu mener de notre côté.

En 3D, peu de travaux ont été menés pour estimer les courbures. Lenoir [Len97] a étendu ses travaux sur l'estimation de normales pour estimer les courbures principales. Il calcule en effet les courbures des deux contours discrets qui traversent le bel d'intérêt par des techniques 2D classiques. Si les deux contours ne sont pas orthogonaux, il cherche un troisième contour proche et reconstruit les directions et courbures principales à partir des trois courbures calculées. S'ils sont orthogonaux, alors ils définissent déjà les directions et courbures principales. La plupart des autres travaux sur la courbure de surfaces discrètes portent en fait sur la géométrie des surfaces triangulées avec des points à coordonnées réelles. Elles ne sont pas adaptées à l'estimation des courbures sur des surfaces incluses dans la grille discrète $\mathbb{Z}^3$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les surfaces discrètes vues comme un ensemble de surfels bordant un objet discret. Nous avons présenté un formalisme algébrique pour décrire les cellules et la topologie de la grille cellulaire en introduisant notamment les homomorphismes bord. Cela nous a permis de définir formellement les voisinages sur une surface en dimension quelconque. Les déformations d'une surface

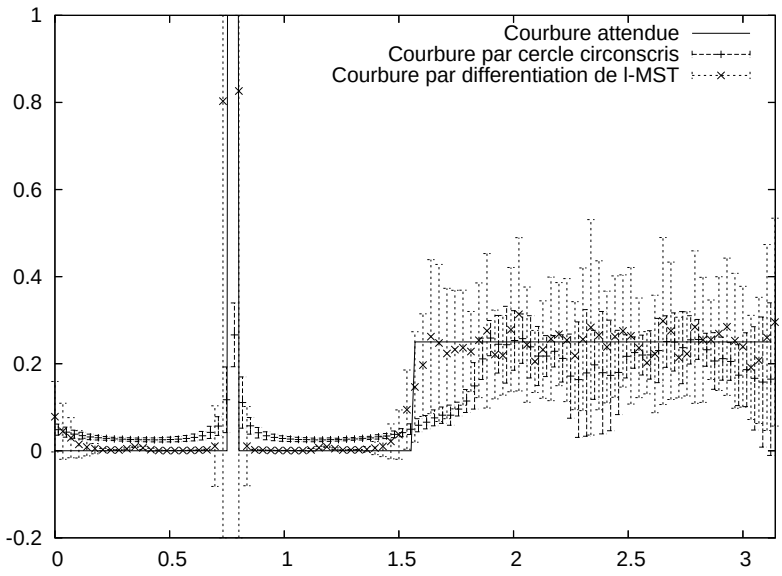


FIG. 4.13 – Comparaison de deux estimateurs de courbure. L'objet discret est la discrétisation $h = 0.1$ de la forme « Coin » (rayon 4, coin de courbure 10, cf. Figure 4.10, page 84), avec une perturbation aléatoire de son centre. La moyenne et la variance de l'estimation de courbure est tracée sur 100 discrétisations pour deux estimateurs : celui par cercle circonscrit et celui par différentiation de la tangente λ-MST.

s'écrivent naturellement et efficacement dans ce formalisme. Nous avons ensuite proposé une mise en œuvre efficace des surfaces discrètes par simple codage des cellules sur un entier. Cela a conduit au développement d'une bibliothèque de manipulation d'objets et surfaces discrètes, générique et rapide, où l'écriture d'algorithmes est indépendante de la dimension de l'espace considéré. Nous nous sommes enfin intéressés à la géométrie de ces surfaces. Nous avons ainsi comparé un certain nombre d'estimateurs géométriques, en examinant tout particulièrement ceux dont on peut espérer une convergence multigrille.

Ce chapitre a tenté d'apporter des réponses à deux questions posées dans la conclusion du Chapitre 3 et qui était déterminantes dans la mise en œuvre d'un modèle déformable discret : *Comment représenter des surfaces dans l'espace discret $\mathbb{Z}^n$?* et *Comment estimer des quantités géométriques sur des contours ou surfaces discrètes ?* Il est clair qu'il est désormais envisageable de développer un MDD en nD, modulo quelques interrogations restantes sur l'estimation de courbure pour $n > 3$.

Néanmoins, ce chapitre a aussi mis en évidence les zones d'ombre demeurantes pour la mise au point d'un MDD *asymptotiquement euclidien*. Rappelons qu'il faut disposer d'estimateurs de tangente/normale (pour le terme d'énergie externe), de longueur (pour le terme de régularisation d'ordre 1), et de courbure(s) (pour le terme de régularisation d'ordre 2) multigrille convergents. Or, si des estimateurs convergents de longueur existent dans la littérature, l'estimation des tangentes/normales et des courbures a soulevé beaucoup de questions. Notre étude nous a permis de mettre au point un estimateur de tangente précis et robuste, qui respecte la convexité des objets, et dont la preuve de convergence sera donné dans le prochain chapitre. Pour l'estimation de courbure, nous avons remis en question certains résultats de convergence publiés dans la littérature. Expérimentalement, aucun des estimateurs de courbure testés et/ou publiés ne semble être convergent. Selon nous, l'existence d'un estimateur de courbure convergent reste un problème ouvert.

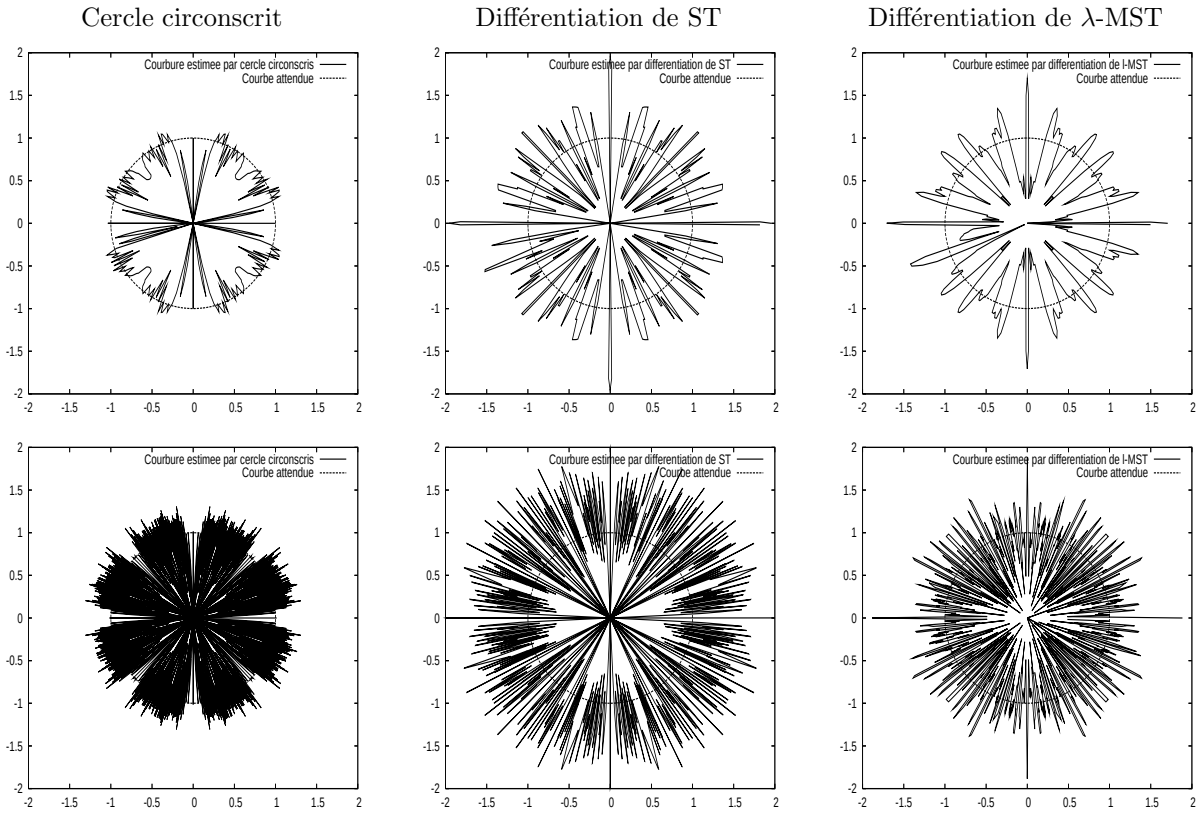


FIG. 4.14 – Comparaison de trois estimateurs de courbures sur un disque discret de rayon 50. Chaque tracé est le graphe de la fonction $1 + \frac{\hat{\kappa}-\kappa}{\hat{\kappa}+\kappa}$ en coordonnées polaires. Rangée du haut : pas de discrétisation $h = 1$. Rangée du bas : pas de discrétisation $h = 0.1$. Colonne de gauche : la courbure $\hat{\kappa}$ est estimée par cercle circonscrit aux demi-tangentes [CS03]. Colonne du milieu : la courbure $\hat{\kappa}$ est estimée par différentiation de l'estimateur ST. Colonne de droite : la courbure $\hat{\kappa}$ est estimée par différentiation de l'estimateur λ-MST.

Chapitre 5

Géométrie discrète linéaire et convergence des estimateurs géométriques

Ce chapitre s'intéresse à la géométrie dans le plan discret et plus spécifiquement à la géométrie de ses parties linéaires, comme les droites et segments discrets. L'objectif est d'établir des propriétés asymptotiques d'estimateurs géométriques discrets telles que la convergence multigrille. Comme l'avait remarqué Coeurjolly [Coe02], la croissance des segments discrets sur des bords de discrétisations de plus en plus fines est reliée à la convergence multigrille des estimateurs géométriques utilisant des algorithmes des reconnaissance de droites discrètes. Notre contribution a été de préciser cette croissance pour établir de nouveaux résultats de convergence multigrille.

La première section présente quelques notions classiques de la géométrie discrète linéaire, indépendamment de toute discrétisation. Elle présente aussi quelques contributions liées à la reconnaissance des droites discrètes et à la géométrie des segments maximaux.

La deuxième section étudie la géométrie des discrétisations de formes convexes, ou de manière équivalente la géométrie des polygones convexes discrets. Les segments maximaux définis sur ces bord discrets ont alors des propriétés géométriques particulières. On montre ainsi le lien étroit existant ces segments et les arêtes de l'enveloppe convexe de la forme discrète, en exploitant à la fois les représentations arithmétiques et combinatoires des droites discrètes.

Ces propriétés établies à échelle fixée, nous nous penchons sur leurs comportements asymptotiques dans la troisième section. Nous établissons ainsi des bornes sur la croissance en nombre et en longueur des segments maximaux.

La quatrième section combine les résultats asymptotiques précédents avec les définitions de certains estimateurs géométriques pour infirmer ou confirmer leur convergence multigrille et dans ce dernier cas pour estimer leur vitesse de convergence.

Ce chapitre rassemble ainsi un ensemble de travaux et de contributions réalisés en collaboration avec François de Vieilleville et, pour une part, avec Fabien Feschet (LLAIC, Clermont-Ferrand). Plus spécifiquement, les propriétés asymptotiques en nombre et en longueur des segments maximaux ont été établies dans [25, 7] et infirment ainsi la preuve de convergence de la courbure par cercle circonscris. L'analyse combinatoire de la reconnaissance des droites discrètes est faite dans [30] et donne des formules analytiques (non-algorithmiques) sur leurs géométries. La croissance des segments maximaux et la convergence multigrille de la tangente basée segment maximal a été prouvée dans [8] et sa vitesse de convergence moyenne améliorée dans [29]. Nous donnons ici une première preuve de sa convergence uniforme.

5.1 Géométrie discrète linéaire

Comme l'ont souligné Klette et Rosenfeld [KR04b], les droites discrètes ont été extrêmement étudiées depuis près d'un demi-siècle. Nous n'allons pas ici tenter de faire un tour d'horizon des travaux réalisés,

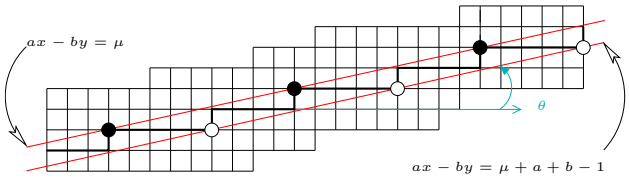


FIG. 5.1 – Droite standard de pente $\frac{2}{9}$. Les droites d'appui sont tracées en rouge. Les points d'appui supérieurs sont les • et les points d'appui inférieurs sont les ∘.

mais nous allons plutôt nous concentrer sur les définitions et propriétés des droites discrètes qui se sont révélées pertinentes dans notre problématique. Deux approches se sont révélées fructueuses, notamment une fois combinées : l'approche arithmétique et l'approche combinatoire reliée aux fractions continues. La première est particulièrement adaptée au traitement algorithmique des droites. La deuxième permet elle de déduire des formules analytiques pour décrire la géométrie des premières. Ces résultats sont synthétisés dans les sous-sections qui suivent. Notons que nous n'utiliserons ici que les courbes, droites ou segments 4-connexes, mais la plupart des propriétés sont transférables sur leurs variantes 8-connexes.

5.1.1 Droites arithmétiques et segments discrets

Nous commençons par la définition ensembliste arithmétique des droites standards (cf. Figure 5.1) :

Définition 5.1. *(Reveillès [Rev91]) L'ensemble des points* (x, y) *de* $\mathbb{Z}^2$ *qui vérifient les inégalités*

$$\mu \leq ax - by < \mu + |a| + |b|, \tag{5.1}$$

avec a*,* b *et* μ *entiers, est appelé la* droite standard *de pente* a/b *et décalage* μ*.*

Les droites standards sont les droites 4-connexes. La quantité $ax - by$ est appelée *reste* de la droite. Les points de reste μ (resp. $\mu + |a| + |b| - 1$) sont les *points d'appui supérieurs* (resp. *points d'appui inférieurs*) de la droite. Dans la suite, les points d'appui supérieurs (resp. inférieurs) seront désignés par la lettre U (resp. L). Toute portion finie (4-)connexe d'une droite discrète est un *segment de droite discrète* ou plus simplement *segment discret*.

On suppose maintenant qu'on dispose d'un chemin fermé de points 4-connexes dans le plan discret, dont tous les points sont distincts deux à deux. Un tel chemin sera simplement appelé *contour discret* et la lettre C désignera dans la suite un tel contour. Clairement, les points de C peuvent être numérotés consécutivement par exemple en tournant autour du contour dans le sens anti-trigonométrique. Un ensemble de points consécutifs numérotés par ordre croissant de i à j sur C sera noté $[C_i C_j]$.

Tout ensemble de points $[C_i C_j]$ de C est alors un segment discret ssi il existe une droite standard qui les contient. Le prédicat « $[C_i C_j]$ est un segment discret » s'écrira $S(i, j)$. La droite standard de caractéristique (a, b, μ) minimale pour $|a| + |b|$ contenant $[C_i C_j]$ définit alors les *caractéristiques* du segment discret : sa *pente* a/b, son *décalage* μ, ses *points d'appui principaux* U_1, U_2 et L_1, L_2 (de coordonnées extrémales). La *direction* d'un segment discret est l'angle entre l'axe des abscisses et une droite d'appui. Cet angle est défini entre 0 et 2π sur un contour discret en utilisant le fait que le contour (donc ses segments) est orienté. On vérifie facilement qu'un segment discret possède au moins trois points d'appui dont deux du même type.

Feschet et Tougne [FT99, Fes05] se sont intéressés à des segments particuliers sur les contours, les *segments maximaux*, d'abord pour estimer la tangente et ensuite pour caractériser les courbes discrètes. Les *segments maximaux* de C sont ses segments discrets qui ne sont inclus strictement dans aucun autre segment discret. Aussi appelés segments fondamentaux, ils se sont révélés depuis être un outil important pour caractériser la géométrie des courbes discrètes : lien avec la convexité [DRDR04, DRDR06], extraction du polygone minimal [FT05], mesures géométriques [FT99, 26].

Pour obtenir plusieurs caractérisations de ces segments, on introduit deux applications F et B sur les indices du contour : le *front* $F(i)$ de i est le premier j, $i < j$, tel que $S(i,j) \wedge \neg S(i,j+1)$ et la *queue* $B(j)$ de j est le premier i, $i < j$, tel que $S(i,j) \wedge \neg S(i-1,j)$. On a alors

Proposition 5.2. *L'ensemble de points $[C_iC_j]$ est un segment maximal de C ssi une des caractérisations suivantes tient : (1) $S(i,j) \wedge \neg S(i,j+1) \wedge \neg S(i-1,j)$, (2) $B(j) = i \wedge F(i) = j$, (3) $\exists k, i = B(k) \wedge j = F(B(k))$, (4) $\exists k', i = B(F(k')) \wedge j = F(k')$.*

La Figure 5.2 dessine tous les segments maximaux de deux contours. Les segments maximaux d'un contour le couvrent complètement et forment sa *couverture tangentielle* [FT99]. Le nombre de segments maximaux d'un contour C sera noté $n_{MS}(C)$. On constate que la longueur des segments maximaux et leur répartition ont un lien avec la géométrie du contour, sans qu'il soit cependant possible de le formaliser trivialement.

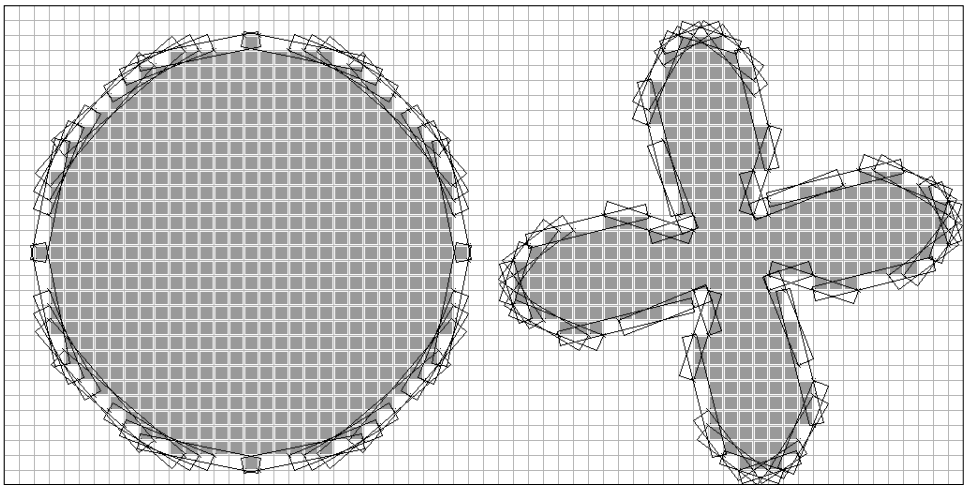


FIG. 5.2 – Segments maximaux formant la couverture tangentielle de deux contours discrets.

5.1.2 Représentation combinatoire des droites

Nous nous restreignons désormais au premier octant, ceci sans perte de généralité. Il est possible d'adopter une toute autre démarche pour définir les segments et droites discrets, démarche dite combinatoire. Ces représentations ont été très étudiées (cf. [KR04b]) mais nous nous appuierons principalement sur la décomposition combinatoire de Berstel [Ber90]. Dans le premier octant, seuls deux pas sont possibles entre deux points consécutifs d'un contour discret, le pas horizontal et le pas vertical, codés respectivement 0 et 1. Les mots définis sur l'alphabet $\{0,1\}$ peuvent donc décrire des segments discrets (ou des droites standards s'ils sont infinis).

Nous nous limitons au cas des droites discrètes de pente rationnelle, c'est-à-dire les mots de Christoffel, les pentes irrationnelles conduisant aux mots de Sturm. On appellera alors *motif de caractéristique* (a,b) le mot fini dans $\{0,1\}^*$ formé par la succession de pas entre deux points d'appui supérieurs consécutifs d'une droite discrète (a,b,μ). Le *motif inversé* de même caractéristique est le motif lu de droite à gauche. Tout motif tracé dans le plan discret est donc un segment discret et inversement, tout segment discret de caractéristiques (a,b,μ) contient au moins soit un motif (a,b) soit ce motif inversé. Le nombre de motifs (resp. motifs inversés) d'un segment discret est égal au nombre de points d'appui supérieurs (resp. inférieurs) diminué de un.

Si on peut déduire un motif des équations arithmétiques d'un segment discret ou de la discrétisation d'une droite réelle, on peut aussi construire le motif récursivement à partir de la décomposition en fraction

continue simple de sa pente. Rappelons qu'une fraction continue simple est une expression de la forme

$$z = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{u_n + \ldots}}},$$

et notée $[u_0; u_1, \ldots, u_n, \ldots]$. Les nombres u_i sont les *coefficients partiels* de la fraction continue. Comme nous sommes dans le premier octant et que la pente z est rationnelle, la fraction continue est finie et constituée de $n+1$ coefficients partiels avec $u_0 = 0$ et ses coefficients partiels sont entiers. Pour avoir une décomposition unique en fraction continue de z, on imposera de plus que le dernier coefficient est supérieur ou égal à 2, à l'exception de la pente 1 où $u_1 = 1$. L'entier n sera appelé la *profondeur* de la fraction continue. La fraction continue réduite à ses $k+1$ premiers coefficients partiels est un k-*ème convergent* de z et définit un rationnel z_k, écrit sous forme irréductible $\frac{p_k}{q_k}$.

Des résultats classiques de numération sur les fractions continues (voir par exemple [HW60]) établissent des relations récursives entre coefficients partiels et numérateurs et dénominateurs des convergents :

$$\forall k \geq 1 \qquad p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1} \tag{5.2}$$

$$p_0 = 0 \quad p_{-1} = 1 \qquad \forall k \geq 1 \qquad p_k = u_k p_{k-1} + p_{k-2} \tag{5.3}$$

$$q_0 = 1 \quad q_{-1} = 0 \qquad \forall k \geq 1 \qquad q_k = u_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{5.4}$$

$$z_0 < z_2 < \ldots < z_{2i} < \quad \ldots < z < \ldots \quad < z_{2i+1} < \ldots < z_3 < z_1 \tag{5.5}$$

Eq. (5.2) indique que les convergents successifs suivent l'identité de Bezout. Ces relations reflètent aussi le lien entre fractions continues et algorithme d'Euclide de calcul du pgcd. Par exemple, le calcul du pgcd du rationnel $\frac{10}{23} = [0; 2, 3, 3]$ par l'algorithme d'Euclide induit les étapes suivantes :

p		u		q		r	coefs. partiels
10	=	$\underline{0}$	×	23	+	10	$u_0 = 0$
23	=	$\underline{2}$	×	10	+	3	$u_1 = 2$
10	=	$\underline{3}$	×	3	+	1	$u_2 = 3$
3	=	$\underline{3}$	×	1	+	$\boxed{0}$	$u_3 = 3$

Tout motif d'un segment discret se construit alors récursivement à partir de la décomposition en fraction continue de sa pente. Plus précisément, on définit l'application E, qui associe à tout rationnel irréductible $a/b = z = [0; u_1, \ldots, u_n]$ dans $[0, 1]$ le motif de caractéristique (a, b), telle que $E(z_0) = 0$, $E(z_1) = 0^{u_1}1$ et les relations récursives

$$E(z_{2i+1}) = E(z_{2i})^{u_{2i+1}} E(z_{2i-1}), \tag{5.6}$$

$$E(z_{2i}) = E(z_{2i-2}) E(z_{2i-1})^{u_{2i}}. \tag{5.7}$$

La Figure 5.3 montre la construction du motif $(10, 23)$ qui trace le chemin entre deux points d'appui supérieurs d'un segment discret de pente $10/23$. Il est intéressant de voir que les convergents impairs sont des approximations par valeurs supérieures, les pairs par valeurs inférieures (Eq. (5.5)), et ceci explique comment deux convergents consécutifs sont combinés pour obtenir un nouveau convergent plus proche. D'autres décompositions combinatoires pour déterminer un motif sont données dans [Vos93] Chap. 4 et [KR04a] Chap. 9.[1]

[1] La plus classique est la *formule de découpage*, qui est une application F telle que $F([0; u_1]) = 0^{u_1}1$ et

$$F([0; u_1, \ldots, u_{2i+1}]) = F([0; u_1, \ldots, u_{2i}])^{u_{2i+1}-1} F([0; u_1, \ldots, u_{2i} + 1]),$$
$$F([0; u_1, \ldots, u_{2i}]) = F([0; u_1, \ldots, u_{2i-1} + 1]) F([0; u_1, \ldots, u_{2i-1}])^{u_{2i}-1}.$$

Elle est très similaire aux formules des Eq. (5.6) et Eq. (5.7), mais repose sur la concaténation de motifs de même profondeurs.

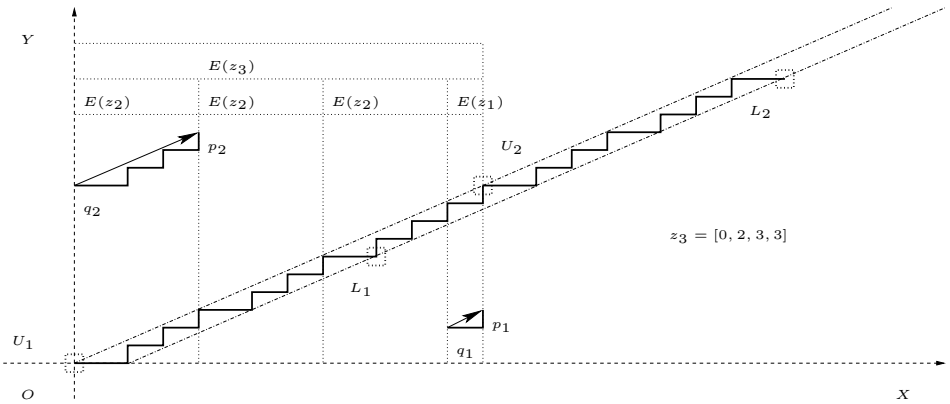


FIG. 5.3 – Un segment discret de caractéristiques $(10, 23, 0)$, de profondeur impaire, tracé entre l'origine et son second point d'appui inférieur.

Enfin, la *longueur discrète* $\mathcal{L}^D$ du motif $E(z_k)$ est égale à $p_k + q_k$ et s'exprime récursivement avec Eq. (5.3) et (5.4). On parlera de *pente paire* (resp. *impaire*) pour désigner une pente dont la profondeur de sa décomposition en fraction continue est paire (resp. impaire).

5.1.3 Résultats préliminaires sur les motifs

Les motifs permettent par exemple de positionner les points d'appui les uns par rapport aux autres. Ils décrivent aussi la géométrie des motifs inclus dans un autre motif. On montre ainsi (les preuves sont dans [60]) :

Proposition 5.3. *Soient un motif* $E(z'_n)$ *avec* $z'_n = [0; u'_1, \ldots, u'_n]$ *et un motif* $E(z_k)$ *avec* $z_k = [0; u_1, \ldots, u_k]$.

- *Si* $n = 2p+1$ *impair et* $E(z'_n)$ *est un facteur droit de* $E(z_k)$*, les relations* $z'_{2p} = z_{2p}$ *et* $u'_{2p+1} \leq u_{2p+1}$ *tiennent.*
- *Si* $n = 2p$ *pair et* $E(z'_n)$ *est un facteur gauche de* $E(z_k)$*, les relations* $z'_{2p-1} = z_{2p-1}$ *et* $u'_{2p} \leq u_{2p}$ *tiennent.*

Par exemple cela montre que deux segments maximaux qui se recouvrent partiellement ont des pentes proches.

5.1.4 Reconnaissance arithmétique des segments discrets

De nombreux algorithmes existent pour reconnaître si un chemin dans le plan discret est un segment discret et en calculer ses caractéristiques [KR04b]. L'algorithme **DR95** de Debled-Rennesson et Reveillès [DRR95] est un exemple d'algorithme de reconnaissance basé sur la définition arithmétique des segments. De complexité optimale, il extrait aussi les caractéristiques des segments.

Sa méthode est incrémentale. A chaque pas, le test effectué est très simple, ce qui le rend très efficace. Si on connaît les caractéristiques (a, b, μ) et les points d'appui principaux d'un segment discret $[C_i C_j]$, alors on vérifie si $[C_i C_{j+1}]$ est un segment discret en calculant le reste $r = ax_{C_{j+1}} - by_{C_{j+1}}$ du point C_{j+1} dans le segment (a, b, μ) et en le comparant ainsi :

1. si $\mu \leq r < \mu + |a| + |b|$ alors $S(i, j+1)$ et $[C_i C_{j+1}]$ de mêmes caractéristiques.
2. si $r = \mu - 1$ alors $S(i, j+1)$ mais les caractéristiques de $[C_i C_{j+1}]$ sont modifiées.
3. si $r = \mu + |a| + |b|$ alors $S(i, j+1)$ mais les caractéristiques de $[C_i C_{j+1}]$ sont modifiées.
4. si $r < \mu - 1$ ou $\mu + |a| + |b| < r$ alors $\neg S(i, j+1)$.

	$C_i = U_m \wedge \mathbf{C_i U_M} = (b,a) \wedge L_m = L_M$	$C_i = L_m \wedge \mathbf{C_i L_M} = (b,a) \wedge U_m = U_M$
a'	$y_{L_m} - (y_{C_i} - 1)$	$y_{U_m} - (y_{C_i} + 1)$
b'	$x_{L_m} - (x_{C_i} + 1)$	$x_{U_m} - (x_{C_i} - 1)$
μ'	$a'x_{U_M} - b'y_{U_M}$	$a'x_{U_m} - b'y_{U_m}$
U'_m	$U_M - \left\lvert \frac{x_{U_M} - x_{C_i} - 1}{b'} \right\rvert (b', a')$	U_m
U'_M	U_M	$U_m + \left\lvert \frac{y_{C_j} - y_{C_i} - 1}{a' - 1} \right\rvert (b', a')$
L'_m	L_m	$L_M - \left\lvert \frac{y_{L_M} - y_{C_i} - 1}{a'} \right\rvert (b', a')$
L'_M	$L_m + \left\lvert \frac{x_{C_j} - x_{C_i} - 1}{b' - 1} \right\rvert (b', a')$	L_M

TAB. 5.1 – Retrait d'un point extrémal C_i d'un segment discret $[C_iC_j]$ et calcul des caractéristiques (a', b', μ') et des points d'appui U'_m, U'_M, L'_m, L'_M du segment $[C_{i+1}C_j]$. On ne considère que le cas délicat où ce point retiré est un point d'appui du segment. Les notations sont reprises de la Figure 5.4.

Le recalcul des pentes utilise la position des points d'appui principaux. L'ajout du point C_{i-1} induit un calcul symétrique.

En utilisant ce principe, on peut calculer un segment maximal autour d'un point en un temps linéaire avec sa longueur. Néanmoins, calculer toute la couverture tangentielle pourrait être coûteux. Feschet et Tougne [FT99] ont montré qu'on pouvait retirer un point à droite ou à gauche d'un segment discret et mettre à jour les caractéristiques de ce segment réduit, aussi en un temps constant.

Nous avons explicité le calcul de ces caractéristiques dans [26, 8] pour prendre en compte le cas des segments comportant plusieurs motifs (ou plusieurs motifs inversés). Notre contribution est résumée dans la Table 5.1 et illustrée sur la Figure 5.4. Elle a été validée aussi par une mise en œuvre dans un langage de programmation.

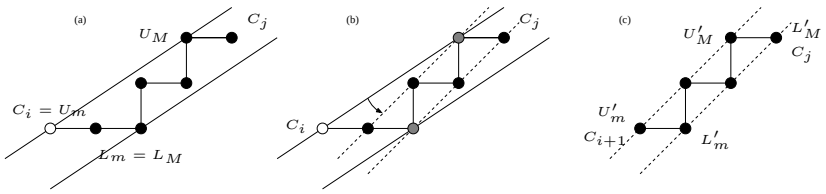


FIG. 5.4 – Retrait d'un point extrémal d'un segment discret. (a) Segment discret $[C_iC_j]$ et ses points d'appui. Le point C_i est un point d'appui supérieur et son retrait va augmenter la pente du segment. (b) Rotation des droites d'appui autour des points pivots (en gris) pendant le retrait de C_i. (c) Le segment $[C_{i+1}C_j]$. Sa pente et ses points d'appui U'_m et L'_M doivent être recalculés.

Comme ajouter ou retirer un point à un segment discret se fait en temps constant, il est facile d'en déduire un algorithme qui calcule tous les segments maximaux en un temps proportionnel au nombre d'ajout et de retrait de points, c'est-à-dire le nombre de points du contour discret. Une conséquence immédiate est que l'on peut estimer la fonction tangente en un temps linéaire avec le nombre de points N du contour discret, pour peu que l'on utilise un des estimateurs de tangentes basés segments maximaux (FTT, ET, λ-MST).

Les mêmes considérations induisent que le calcul du faisceau de segments maximaux contenant un point C_i se fait en temps proportionnel à $F(i) - B(i)$, quantité en moyenne de l'ordre de $N^{\frac{1}{3}}$ comme on le verra au § 5.3. Le calcul d'une tangente aura donc la même complexité en moyenne.

5.1.5 Vision combinatoire de la reconnaissance

Étant donné un segment ou une droite discrète de caractéristiques (a, b, μ), tout point de reste $\mu - 1$ est appelé *point supérieur faiblement extérieur* et tout point de reste $|a| + |b|$ *point inférieur faiblement*

extérieur. D'après le paragraphe précédent, on sait que l'ajout d'un point faiblement extérieur à une extrémité d'un segment construit un segment plus long dont la pente est différente. En reprenant les notations de la section précédente, l'algorithme **DR95** recalcule la pente ainsi :

Point / segment $[C_iC_j]$	A gauche (C_{i-1})	A droite (C_{j+1})
Supérieur faiblement ext.	$\frac{y_{U_M}-y_{C_{i-1}}}{x_{U_M}-x_{C_{i-1}}}$	$\frac{y_{C_{j+1}}-y_{U_m}}{x_{C_{j+1}}-x_{U_m}}$
Inférieur faiblement ext.	$\frac{y_{L_M}-y_{C_{i-1}}}{x_{L_M}-x_{C_{i-1}}}$	$\frac{y_{C_{j+1}}-y_{L_m}}{x_{C_{j+1}}-x_{L_m}}$

Nous avons donc une réponse algorithmique au problème de la mise à jour des caractéristiques du segment $[C_iC_j]$ après ajout. Néanmoins, ces formules ne sont pas des expressions analytiques. Il est par exemple difficile de borner la différence de pentes entre $[C_iC_j]$ et $[C_iC_{j+1}]$. Une étude plus arithmétique des coordonnées des points faiblement extérieurs permet de préciser l'expression de la nouvelle pente en fonction de (a, b), des nombres de Bezout u, v tel que $au - bv = 1$, et du nombre de motifs contenus dans le segment. Là encore, cela ne donne pas l'expression analytique de u et v.

Dans [30], nous proposons de déterminer la nouvelle pente en fonction de la décomposition en fraction continue de la pente a/b. Nous obtenons le résultat suivant, dont la preuve est basée sur Eq. (5.2), (5.3) et (5.4) et sur le calcul des coordonnées des points d'appui.

Proposition 5.4. *L'évolution de la pente d'un segment par l'algorithme* **DR95** *dépend non seulement de la pente, mais aussi de la parité de sa profondeur, du type de point faiblement extérieur ajouté et du côté où ce point est ajouté. Si $[C_iC_j]$ est un segment discret de pente $[0; u_1, \ldots, u_n]$, contenant δ motifs et δ' motifs inversés, alors la pente de $[C_{i-1}C_j]$ ou $[C_iC_{j+1}]$ vaut*

n pair	*Point / segment $[C_iC_j]$*	*A gauche (C_{i-1})*	*A droite (C_{j+1})*
	Supérieur faiblement ext.	$[0; u_1, \ldots, u_n - 1, 1, \delta]$	$[0; u_1, \ldots, u_n, \delta]$
	Inférieur faiblement ext.	$[0; u_1, \ldots, u_n, \delta']$	$[0; u_1, \ldots, u_n - 1, 1, \delta']$

n impair	*Point / segment $[C_iC_j]$*	*A gauche (C_{i-1})*	*A droite (C_{j+1})*
	Supérieur faiblement ext.	$[0; u_1, \ldots, u_n, \delta]$	$[0; u_1, \ldots, u_n - 1, 1, \delta]$
	Inférieur faiblement ext.	$[0; u_1, \ldots, u_n - 1, 1, \delta']$	$[0; u_1, \ldots, u_n, \delta']$

On rappelle qu'une fraction continue $[0; \ldots, v, 1]$ s'écrit plutôt $[0; \ldots, v + 1]$.

On en déduit que la nouvelle pente a soit la même profondeur, soit une profondeur augmentée de un ou deux. L'évolution de la pente par reconnaissance progressive se lit donc mieux sur sa fraction continue. Or, Debled-Rennesson [DR95], dans sa thèse, a établi un lien entre les fractions de l'arbre de Stern-Brocot et les pentes reconnues successives $\frac{a_i}{b_i}$. Lors de la reconnaissance de la discrétisation d'une droite passant par l'origine de pente $\frac{a}{b}$, elle a notamment montrée que le passage de $\frac{a_k}{b_k}$ à $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ correspond à un pas droit R et un nombre positif j de pas gauches L dans cet arbre. Ce sont aussi les points discrets de l'enveloppe convexe des points discrets situés sous la droite réelle $\frac{a}{b}x$. La Figure 5.5 dessine une partie de l'arbre de Stern-Brocot et indique les pentes successives reconnues sur un segment de pente $\frac{5}{8}$.

Nous pouvons aller un peu plus loin que le résultat précédent. Un résultat connu relie les coefficients partiels au pas dans l'arbre de Stern-Brocot, en partant du nœud $\frac{1}{1}$:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(pair)} & [0; u_1, \ldots, u_{2k}, u_{2k+1}, \ldots, u_{2i-1}, u_{2i}] & \equiv & R^0L^{u_1} \ldots R^{u_{2k}}L^{u_{2k+1}} \ldots L^{u_{2i-1}}R^{u_{2i}-1} \\ \text{(impair)} & [0; u_1, \ldots, u_{2k}, u_{2k+1}, \ldots, u_{2i}, u_{2i+1}] & \equiv & R^0L^{u_1} \ldots R^{u_{2k}}L^{u_{2k+1}} \ldots R^{u_{2i}}L^{u_{2i+1}-1} \end{array} \tag{5.8}$$

En combinant Eq. (5.8) et notre Proposition 5.4, on dessine facilement le chemin des pentes dans l'arbre de Stern-Brocot si l'on connaît le type de point faiblement extérieur et les nombres de motifs et motifs inversés contenus dans le segment. On retrouve par exemple le résultat de Debled-Rennesson [DR95] des pas R^1L^j lorsque le segment reconnu est la discrétisation d'une droite passant par l'origine. En effet, le segment final a les caractéristiques $(a, b, 0)$, ce qui implique que seuls des points supérieurs faiblement extérieurs U' ont été ajoutés. Suivant le nombre de motifs δ, le chemin définissant la pente mise à jour suit les règles suivantes :

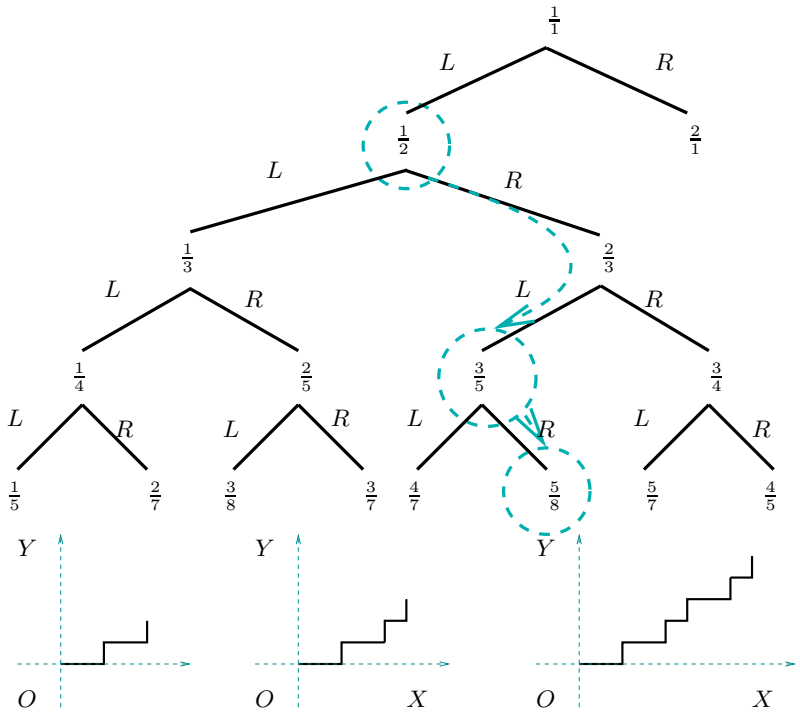


FIG. 5.5 – Arbre de Stern-Brocot et évolution des pentes lors de la reconnaissance d'un segment discret de pente $\frac{5}{8}$. Les pentes successives sont $\frac{1}{2} = [0;2]$, $\frac{3}{5} = [0;1,1,2]$ and $\frac{5}{8} = [0;1,1,1,2]$. Chaque modification a été déclenchée par l'ajout à droite d'un point supérieur faiblement extérieur. On note que la profondeur d'un nœud dans l'arbre n'est pas la profondeur de sa fraction continue. Sur ce sous-arbre, en regardant la profondeur de la fraction continue, les nœuds $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ sont de profondeur 1, les nœuds $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$ sont de profondeur 2, les nœuds $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$ sont de profondeurs 3 et le nœud $\frac{5}{8}$ est le seul de profondeur 4. On retrouve une propriété classique des fractions de deux éléments successifs de la suite de Fibonacci.

pente z du segment D	pente z' du segment $D \cup \{U'\}$
$[0; u_1, \ldots, u_{2i}]$	$[0; u_1, \ldots, u_{2i}, \delta]$
$R^0 L^{u_1} \ldots L^{u_{2i-1}} R^{u_{2i}-1}$	$R^0 L^{u_1} \ldots L^{u_{2i-1}} R^{u_{2i}-1}$ $\boxed{R^1 L^{\delta-1}}$
$[0; u_1, \ldots, u_{2i+1}]$	$[0; u_1, \ldots, u_{2i+1} - 1, 1, \delta]$
$R^0 L^{u_1} \ldots L^{u_{2i+1}-1}$	$R^0 L^{u_1} \ldots L^{u_{2i+1}-1}$ $\boxed{R^1 L^{\delta-1}}$

Ce travail a donc permis de compléter celui de Debled-Rennesson en tenant compte de la reconnaissance de segments quelconques (pour plus de détails voir [30]). Les segments qui ne sont pas des motifs ont d'ailleurs un lien beaucoup plus complexe avec l'enveloppe convexe des points discrets situés dessous. Une partie de cette complexité apparaîtra dans les sections suivantes, dans l'étude du lien entre arête de polygone convexe discret et segment maximal.

5.1.6 Quelques propriétés des parties communes des segments maximaux

Nous examinons maintenant quelques propriétés des segments maximaux, qui sont développées dans [30]. Nous appellerons *partie commune* la partie de chemin discret commune à deux segments maximaux consécutifs. Si on note $(M_k)_{k=1\ldots n_{MS}(C)}$ tous les segments maximaux d'un contour C, et que chaque segment maximal M_k est constitué des points $[C_{m_k} C_{n_k}]$, alors les parties communes sont les chemins

$[C_{m_{k+1}}C_{n_k}]$. Il y en a bien sûr autant que de segments maximaux. Le lemme suivant précise la position des points autour d'une partie commune.

Lemme 5.5. *Si $[C_iC_j]$ est une partie commune à deux segments maximaux consécutifs alors les points C_{i-1} et C_{j+1} sont soit tous deux supérieurs faiblement extérieurs soit tous deux inférieurs faiblement extérieurs au segment $[C_iC_j]$.*

Cela provient du fait que ses deux segments maximaux sont alors $[C_{B(j)}C_j]$ et $[C_iC_{F(i)}]$ et que $[C_{i-1}C_{j+1}]$ n'est pas un segment discret. En combinant ce lemme avec les formules de variation des pentes lors de la reconnaissance de droite (Proposition 5.4), on peut alors déterminer les pentes minimales et maximales des deux segments maximaux consécutifs.

Théorème 5.6. *Soient deux segments maximaux consécutifs de partie commune $[C_iC_j]$ (i.e. ce sont les segments $[C_{B(j)}C_j]$ et $[C_iC_{F(i)}]$). Leurs pentes sont bornées ainsi :*

		C_{i-1} et C_{j+1} *inf. faible. ext.*		C_{i-1} et C_{j+1} *sup. faible. ext.*	
Pente $[C_iC_j]$	*Segm. max.*	*pente minimale*	*pente maximale*	*pente minimale*	*pente maximale*
paire $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$	$[C_iC_{F(i)}]$	$\frac{\delta' p_{2k}-p_{2k-1}}{\delta' q_{2k}-q_{2k-1}}$	$\frac{(\delta'+2)p_{2k}-p_{2k-1}}{(\delta'+2)q_{2k}-q_{2k-1}}$	$\frac{(\delta+1)p_{2k}+p_{2k-1}}{(\delta+1)q_{2k}+q_{2k-1}}$	$\frac{(\delta-1)p_{2k}+p_{2k-1}}{(\delta-1)q_{2k}+q_{2k-1}}$
	$[C_{B(j)}C_j]$	$\frac{(\delta'+1)p_{2k}+p_{2k-1}}{(\delta'+1)q_{2k}+q_{2k-1}}$	$\frac{(\delta'-1)p_{2k}+p_{2k-1}}{(\delta'-1)q_{2k}+q_{2k-1}}$	$\frac{\delta p_{2k}-p_{2k-1}}{\delta q_{2k}-q_{2k-1}}$	$\frac{(\delta+2)p_{2k}-p_{2k-1}}{(\delta+2)q_{2k}-q_{2k-1}}$
impaire $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$	$[C_iC_{F(i)}]$	$\frac{(\delta'+1)p_{2k+1}+p_{2k}}{(\delta'+1)q_{2k+1}+q_{2k}}$	$\frac{(\delta'-1)p_{2k+1}+p_{2k}}{(\delta'-1)q_{2k+1}+q_{2k}}$	$\frac{\delta p_{2k+1}-p_{2k}}{\delta q_{2k+1}-q_{2k}}$	$\frac{(\delta+2)p_{2k+1}-p_{2k}}{(\delta+2)q_{2k+1}-q_{2k}}$
	$[C_{B(j)}C_j]$	$\frac{\delta' p_{2k+1}-p_{2k}}{\delta' q_{2k+1}-q_{2k}}$	$\frac{(\delta'+2)p_{2k+1}-p_{2k}}{(\delta'+2)q_{2k+1}-q_{2k}}$	$\frac{(\delta+1)p_{2k+1}+p_{2k}}{(\delta+1)q_{2k+1}+q_{2k}}$	$\frac{(\delta-1)p_{2k+1}+p_{2k}}{(\delta-1)q_{2k+1}+q_{2k}}$

Ces relations donnent aussi les variation minimales et maximales de pente entre deux segments maximaux consécutifs sous forme analytique. Par exemple, après calcul, on trouve que la variation $|\Delta z|$ dans le cas d'une pente paire et des points inférieurs faiblement extérieurs est bornée selon

$$\frac{2\delta'+3}{(\delta'^2+3\delta'+2)q_{2i}^2+q_{2i}q_{2i-1}-q_{2i-1}^2} < |\Delta z| < \frac{2\delta'-1}{(\delta'^2-\delta')q_{2i}^2+q_{2i}q_{2i-1}-q_{2i-1}^2}.$$

En examinant tous les cas possibles, on constate que la variation de pente suit globalement $\Theta(\frac{1}{\delta q_n^2})$, si $\frac{p_n}{q_n}$ est la pente de la partie commune et δ le nombre de motifs (égal à $\delta' \pm 1$). La longueur d'un tel segment est alors environ de $\delta(p_n+q_n)$. La richesse de pentes possibles autour d'une partie commune ne dépend donc pas seulement de sa longueur : si δ est important, la pente est de profondeur faible et les pentes autour sont assez différentes, si δ est petit, la pente a une profondeur plus grande et les pentes autour sont très proches.

Ces contraintes entre segments maximaux consécutifs ont une influence importante sur la géométrie des parties linéaires des courbes discrètes et sur les estimateurs géométriques discrets basés dessus. Par exemple, les estimateurs de courbure par variation de la tangente discrète vont donc être sensibles à ces paramètres. On aura ainsi de la difficulté à estimer finement la courbure autour des zones où les motifs se répètent beaucoup et l'approximation obtenue sera médiocre. Enfin, il est intéressant d'étudier le comportement de ces paramètres sur des discrétisations de plus en plus fines d'un sous-ensemble du plan euclidien. On verra au § 5.4 qu'ils ont une influence sur la précision des estimations géométriques.

5.2 Segments discrets sur un polygone convexe discret

Dans cette partie, nous exhibons des propriétés sur les segments discrets appartenant au contour des polygones convexes discrets. Ces objets sont des discrétisations d'ensembles convexes. Cela justifie donc l'étude précise des segments définis sur le contour de tels objets. On montre ainsi le lien fort existant entre segments maximaux et arêtes ou sommets du polygone, en nombre et en longueur. La géométrie des enveloppes convexes étant assez particulière, elle introduit par ce lien des propriétés géométriques sur les segments maximaux.

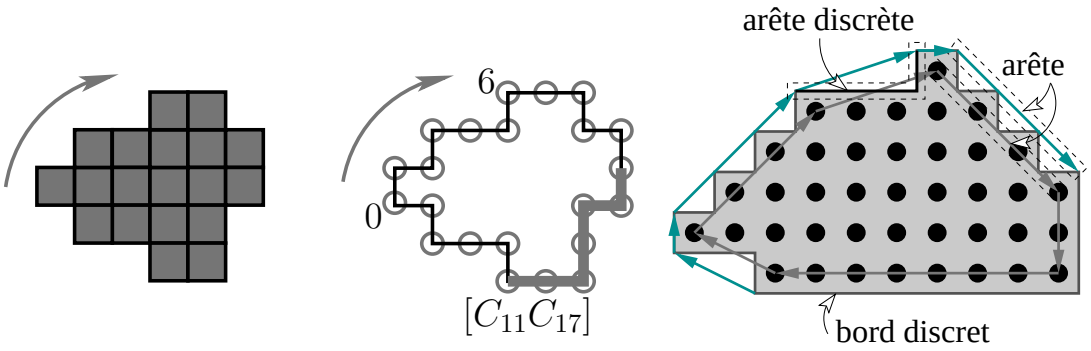


FIG. 5.6 – A gauche, un objet discret considéré dans le modèle de grille cellulaire (un pixel est un carré fermé) et son bord discret. A droite, un polygone convexe (ensemble de points noirs), sa discrétisation dans le modèle de grille cellulaire et son contour discret. Une arête discrète et une arête sont aussi représentées.

5.2.1 Polygones convexes discrets et discrétisation de formes convexes

Nous proposons ici une définition des ensembles convexes discrets. Il existe d'autres définitions équivalentes, plusieurs étant listées dans [KR04a], Théorème 13.2. On rappelle que la *discrétisation de Gauss de pas 1* d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathrm{Dig}_G(S) \stackrel{d}{=} S \cap \mathbb{Z}^2$. Celle de pas h est définie par $\mathrm{Dig}_G(S,h) \stackrel{d}{=} S \cap (h\mathbb{Z})^2$. On peut se référer à l'Annexe B pour plus de détails. La notation $\mathcal{L}(S)$ désignera la longueur euclidienne du bord de S lorsqu'il est rectifiable. On rappelle que la longueur discrète $\mathcal{L}^D$ entre deux points A et B sur un chemin discret 4-connexe est son nombre de pas. La longueur $\mathcal{L}^1$ de Minkowski d'un chemin discret est égal à sa longueur discrète multipliée par le pas de discrétisation h.

Définition 5.7. *Un* polygone convexe discret Γ (CDP)[2] *est un sous-ensemble 4-connexe non vide de* $\mathbb{Z}^2$ *égal à la discrétisation de Gauss de pas 1 de son enveloppe convexe (euclidienne), i.e.* $\Gamma = \mathrm{Dig}_G(\mathrm{conv}(\Gamma))$.

Ses *sommets* $(V_i)_{i=1\ldots e}$ sont les sommets de $\mathrm{conv}(\Gamma)$. Ils forment aussi le sous-ensemble minimal de Γ tel que $\Gamma = \mathrm{Dig}_G(\mathrm{conv}(\{V_1,\ldots,V_e\}))$. Le nombre de sommets/arêtes e est noté $n_e(\Gamma)$.

Il est clair que tout CDP est la discrétisation d'une forme convexe $S \subset \mathbb{R}^2$: il est par exemple la discrétisation de son enveloppe convexe. Inversement, tout ensemble convexe S vérifie $\mathrm{Dig}_G(S) = \mathrm{Dig}_G(\mathrm{conv}(\mathrm{Dig}_G(S)))$. En revanche, sa discrétisation peut ne pas être 4-connexe ou être vide. Certaines familles d'ensembles convexes ont néanmoins de bonnes propriétés vis-à-vis de la discrétisation de Gauss ([7], Lemme 3.2) :

Lemme 5.8. *Pour toute forme convexe S du plan de bord C^3 et courbure strictement positive,*[3] *il existe un pas $h_S > 0$ tel que pour tout pas h, $0 < h \leq h_S$, $\mathrm{Dig}_G(S,h)$ est 4-connexe. Un corollaire est que $\mathrm{Dig}_G(S,h)$ est un CDP.*

Le *bord* $\partial\Gamma$ d'un polygone convexe discret Γ est le bord topologique de ses points considérés avec le modèle de grille cellulaire (cf. [KR04a], Chapitre 2) : les points de Γ sont assimilés à des carrés fermés de côté 1. Ce bord est donc un contour discret (4-connexe).

Comme le montre la Figure 5.6, les ensembles convexes $\mathrm{conv}(\partial\Gamma)$ et $\mathrm{conv}(\Gamma)$ ont une géométrie très similaire. En effet, toutes les arêtes non parallèles à un axe sont identiques à une translation $(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ près. Chacune des quatre arêtes parallèles à un axe de $\mathrm{conv}(\partial\Gamma)$ est de 1 plus longue que son homologue dans $\mathrm{conv}(\Gamma)$ si elle existe. Le nombre d'arêtes de ces deux ensembles convexes ne diffèrent pas plus de 4, tandis que $\mathcal{L}(\mathrm{conv}(\partial\Gamma)) = \mathcal{L}(\mathrm{conv}(\Gamma)) + 4$.

[2] En anglais, *convex digital polygon* ou *lattice convex polygon* [Vos93].
[3] i.e. $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ avec les notations de l'Annexe B.

Comme on se placera à chaque fois dans un quadrant ou un octant donné, conv($\partial\Gamma$) et conv(Γ) auront la même géométrie. On utilisera alors indifféremment la notation (V_i) pour désigner les sommets sur ces deux ensembles. Une *arête* de Γ sera donc le segment euclidien joignant deux sommets consécutifs de Γ, une *arête discrète* sera le chemin discret entre deux sommets consécutifs tracé sur le contour discret. En utilisant un résultat classique [Kim82], on établit

Proposition 5.9. *Dans chaque octant, toute arête discrète V_iV_{i+1} d'un CDP est un motif ou une succession du même motif, de caractéristiques (a, b) telles que a/b est la pente de l'arête V_iV_{i+1}. En d'autres termes, l'arête discrète V_iV_{i+1} est un segment discret dont V_i et V_{i+1} sont tous deux points d'appui supérieurs.*

Comme les arêtes discrètes d'un CDP définissent un contour discret, il est légitime de s'intéresser aux segments maximaux de ce contour. Si on est capable de relier la géométrie des segments maximaux à la géométrie des arêtes du polygone convexe, alors on disposera d'un outil pour expliquer la qualité des estimateurs géométriques basés segments maximaux.

5.2.2 Segments maximaux et convexité

Les pentes des segments maximaux sont reliés à la convexité discrète. En effet, Debled-Rennesson *et al.* [DRRRD03] ont montré que la monotonie de certains segments sur un contour discret suffisait à déterminer la convexité discrète. Puis Reiter-Doerksen et Debled-Renesson [DRDR04, DRDR06] ont établit que la monotonie des pentes des segments maximaux est équivalente à la convexité discrète.

Théorème 5.10 ([DRDR04], Theorem 4.1)**.** *Un ensemble $O \subset \mathbb{Z}^2$ est un ensemble convexe discret ssi les directions des segments maximaux successifs de son bord discret sont monotones.*

En quelque sorte, la géométrie des segments maximaux d'un contour est caractéristique de sa convexité. Si jamais la séquence de directions des segments maximaux n'est pas monotone, alors nécessairement O ne peut être la discrétisation d'un ensemble convexe. On peut ainsi repérer les points d'inflexion. La Figure 5.2, page 95 illustre cette propriété des segments maximaux, à gauche sur une forme convexe, à droite sur une forme non-convexe.

Les segments maximaux sont aussi caractéristiques de la convexité locale d'un contour, car le contour se poursuit des deux côtés sous le segment maximal.

Lemme 5.11 (Adapté de [8], Lemme 1)**.** *Soit un polygone convexe discret de bord C et soit $M = [C_iC_j]$ un segment maximal dans le premier octant, de caractéristiques (a, b, μ). Alors les restes des deux points bordant M, i.e. C_{i-1} et C_{j+1}, sont tous deux strictement supérieurs à $\mu + |a| + |b|$, lorsque le contour est orienté dans le sens anti-trigonométrique.*

5.2.3 Segments maximaux et arêtes de l'enveloppe convexe

Les résultats précédents relatifs à la convexité montrent une certaine similitude entre segments maximaux et arêtes du CDP. Néanmoins, on sait aussi qu'ils ne partagent pas certaines propriétés. Ainsi, les segments maximaux peuvent se recouvrir. Un point est expérimentalement traversé par trois ou quatre segments maximaux sur des discrétisations de cercle. Feschet [Fes05] a montré comment construire une courbe discrète (convexe) où un point est traversé par un nombre arbitrairement grand de segments maximaux. Le lien entre ces deux classes de segments discrets restait donc à expliciter.

Comme tout point d'appui supérieur principal d'un segment maximal est sommet du CDP [DRDR04], on déduit aisément que tout segment maximal est soit associé à une seule arête du CDP, soit associé à un seul sommet du CDP.

On appelle *segment maximal ULU* un segment maximal d'un CDP tel qu'il existe une arête du CDP de même pente. Quand elle existe, cet arête est unique, ses deux sommets sont les deux points d'appui supérieurs principaux du segment maximal et on l'appelle l'*arête support* de ce segment. Quand un

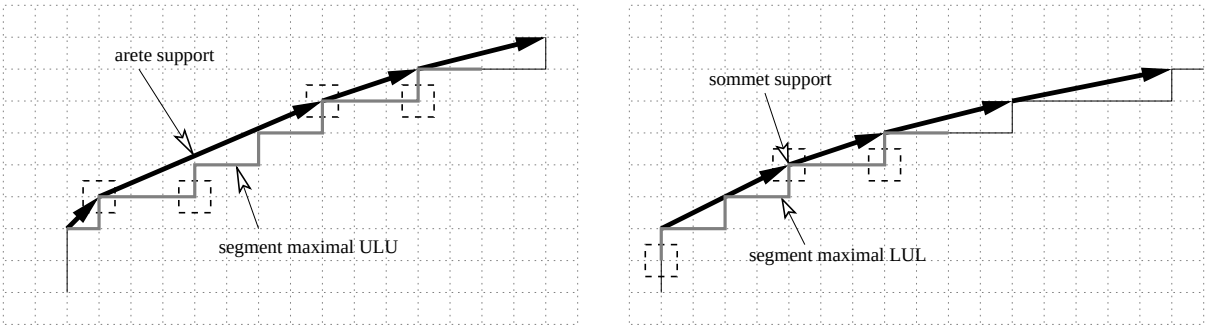


FIG. 5.7 – Segments maximaux ULU (gauche) et LUL (droite) d'un CDP.

segment maximal n'est pas ULU, on dit qu'il est *LUL*. En effet, il n'a alors qu'un seul point d'appui supérieur, qui est nécessairement un sommet du CDP. Ce sommet est appelé *sommet support* de ce segment. Enfin, un segment LUL a sa pente définie par ses deux (seuls) points d'appui inférieurs. La Figure 5.7 représente les deux types de segments maximaux.

D'après sa définition même, il ne peut y avoir plus de segments maximaux ULU que d'arêtes. En revanche, rien n'interdit *a priori* qu'un sommet soit le support de nombreux segments maximaux LUL. Tel n'est pas le cas car on montre :

Proposition 5.12 ([59, 7])**.** *Un sommet d'un CDP n'est support au maximum que d'un segment maximal de pente paire et que d'un segment maximal de pente impaire.*

Démonstration. Nous esquissons juste le squelette de la preuve dans le cas pair. Elle est assez représentative des mécanismes de preuves basés sur les motifs. La preuve est par contradiction en prenant deux segments maximaux LUL M et M' de profondeurs paires z_{2i} et z'_{2j}, chacun ayant le même sommet support U. Si M' est avant M, leurs premiers points d'appui inférieurs respectifs L_1 et L'_1 sont dans cet ordre aussi. Donc le mot $[L_1U]$ est un facteur droit de $[L'_1U]$. On rappelle que le motif inversé $[L_1L_2]$ se découpe en les mots $[L_1U]$ et $[UL_2]$. D'après la définition récursive des motifs (Eq. (5.7)), il n'est pas difficile de voir que $E(z_{2i-1})^{u_{2i}-1}$ est facteur droit de $[L_1U]$ et donc de $[L'_1U]$. La Proposition 5.3 implique que la pente z'_{2j} de M' a z_{2i-2} comme $2i-2$-convergent, avec $u'_{2i-1} \geq u_{2i-1}$. En mesurant maintenant la longueur discrète de $[UL_2]$ et de $[UL'_2]$ avec Eq. (5.3) et Eq. (5.4), on trouve que $[UL'_2]$ est au moins aussi long que $[UL_2]$. Cela implique que $[L'_1L'_2]$ contient le segment discret $[L_1L_2]$. Or, on montre assez facilement que deux segments maximaux LUL ne peuvent avoir leurs points d'appui inférieurs ordonnés ainsi. ■

En fait, dans le cas pair, le sous-motif à gauche du point d'appui supérieur d'un segment maximal LUL détermine le sous-motif à droite de ce point, ce qui explique l'impossibilité d'en avoir deux autour du même point sans que l'un n'inclut complètement l'autre. Le cas impair est symétrique.

On en déduit que le nombre de segments maximaux ne peut excéder trois fois le nombre d'arêtes. Pour obtenir une borne inférieure, c'est plus délicat. En effet, il apparaît que les segments maximaux peuvent contenir un nombre arbitrairement grand d'arêtes, qui grandit linéairement avec la profondeur de la fraction continue de leur pente.

Théorème 5.13 ([25], Théorème 6)**.** *Un segment maximal ULU d'arête support A, dont la pente est de profondeur $n \geq 2$, contient au maximum n arêtes supplémentaires de chaque côté de A.*

Démonstration. La preuve détaillée est dans [60], Théorème 2. ■

Théorème 5.14 ([7], Théorème 6)**.** *Un segment maximal LUL de sommet support V, dont la pente est de profondeur n, contient au maximum n arêtes de chaque côté de V.*

Démonstration. La preuve détaillée est dans [59], Théorème 3. ■

Les preuves sont là encore basées sur les propriétés des motifs et leur parité. On prolonge en effet chaque côté de la première arête par des sous-motifs (pour des raisons de compatibilité) de profondeurs inférieures (sinon ils ne formeraient pas de nouvelles arêtes). D'après les propriétés sur les pentes des fractions continues (Eq. (5.5)), on voit que les pentes des arêtes à gauche sont forcément impaires (leur pente est plus grande) et celles des arêtes à droite sont paires (pente plus petite).

Le nombre d'arêtes du CDP et le nombre de segments maximaux satisfont la relation suivante :

Théorème 5.15. *Le nombre de segments maximaux sur un CDP Γ inscrits dans une grille $m \times m$ est borné ainsi :*

$$\frac{n_e(\Gamma)}{K_1 \log m + K_2} \leq n_{MS}(\partial\Gamma) \leq 3n_e(\Gamma),$$

avec $K_1 = \frac{2}{\log\left(1+\sqrt{2}\right)}$ *et* $K_2 = \frac{\log 8(\sqrt{2}-1)}{\log(1+\sqrt{2})}$.

Démonstration. La preuve détaillée est dans [25, 7]. On vérifie que le motif de profondeur maximale inclus dans une grille $m \times m$ a une pente de la forme $z_n = [0; 2, 2, \ldots, 2]$, n restant à être déterminé. Sachant que la longueur de l'arête est $p_n + q_n$ et que $0 < q_n < p_n \leq m$, on déduit n. Les Théorèmes 5.13 et 5.14 permettent alors de conclure sur le nombre maximal d'arêtes absorbées par un segment maximal. En couplant ce résultat avec le fait que les segments maximaux recouvrent Γ, on obtient la borne minimale. La borne supérieure est déduite de Proposition 5.12 et du fait qu'une arête n'est support que d'au plus un segment maximal. ■

Nous établissons aussi des relations entre les longueurs des segments maximaux et certaines arêtes du CDP. Les preuves font aussi appel aux motifs.

Proposition 5.16. *Soit M un segment maximal ULU et $[V_kV_{k+1}]$ son arête support. Leurs longueurs satisfont*

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}^D(M) < \mathcal{L}^D([V_kV_{k+1}]) \leq \mathcal{L}^D(M) < 3\mathcal{L}^D([V_kV_{k+1}])$$

Proposition 5.17. *Soit M' un segment maximal LUL et V_k son sommet support. La longueur de M est bornée ainsi :*

$$\mathcal{L}^D(M') \leq 4\left(\mathcal{L}^D([V_{k-1}V_k]) + \mathcal{L}^D([V_kV_{k+1}])\right)$$

En décomposant les longueurs des segments maximaux par arête pour les segments maximaux ULU et par sommets et parité pour les segments maximaux LUL et en utilisant l'unicité de l'arête support et du sommet support pair/impair par segment maximal, on déduit facilement ([7], Proposition 4.3) que la somme de toutes les longueurs des segments maximaux est bornée par 19 fois le périmètre du CDP. Les bornes sur longueur moyenne sont obtenues en divisant le résultat précédent par les bornes du Théorème 5.15.

Théorème 5.18 ([7], Proposition 4.3 et Théorème 4.4)**.** *Soit un CDP Γ de périmètre discret $\mathrm{Per}^D(\Gamma)$. Soient $(M_k)_{k=1\ldots n_{MS}(\partial\Gamma)}$ ses segments maximaux. On a*

$$\sum_{k=1\ldots n_{MS}(\partial\Gamma)} \mathcal{L}^D(M_k) \leq 19\mathrm{Per}^D(\Gamma),$$

et si Γ est inclus dans une grille $m \times m$, la longueur discrète moyenne de ses segments maximaux est bornée selon :

$$\frac{\mathrm{Per}^D(\Gamma)}{3n_e(\Gamma)} \leq \frac{\sum_{k=1\ldots n_{MS}(\partial\Gamma)} \mathcal{L}^D(M_k)}{n_{MS}(\Gamma)} \leq \frac{19\mathrm{Per}^D(\Gamma)(K_1 \log m + K_2)}{n_e(\Gamma)}$$

Pour clore cette section sur les liens segments maximaux et arêtes, nous indiquons le résultat récent suivant, qui non seulement confirme que tout segment maximal contient au moins une arête,[4] mais aussi précise la géométrie de l'une par rapport à l'autre.

Proposition 5.19 ([29], Proposition 8)**.** *Tout segment maximal sur le bord d'un CDP, dont la pente est* $z = \frac{p_n}{q_n}$*, inclut au moins une arête qui a soit la même pente (arête support) soit son* $n-1$*-ème convergent* $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ *(si* n *pair, arête à gauche du sommet support, si* n *impair arête à droite de ce sommet).*

Cette dernière proposition explique *a posteriori* le lien étroit entre segments maximaux et arêtes du CDP. On comprend mieux la qualité d'estimation de la tangente par segments maximaux ainsi que son lien fort avec la convexité de la forme étudiée. Le Théorème 5.10 de monotonie des pentes des segments maximaux sur les CDP est un corollaire presque immédiat de ce dernier résultat.

5.3 Propriétés asymptotiques des segments discrets

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les propriétés asymptotiques des segments discrets sur le bord de discrétisations de plus en plus fines d'une forme du plan. Nous allons essentiellement nous appuyer sur un résultat de Balog et Bárány sur les propriétés asymptotiques des enveloppes convexes et sur les relations établies dans la section précédente pour étudier le comportement asymptotique moyen des segments maximaux. Nous montrerons aussi que la longueur minimale des segments maximaux n'est pas bornée. Enfin, nous vérifierons ces résultats par une analyse expérimentale asymptotique des segments maximaux.

5.3.1 Comportement asymptotique en nombre et en longueur moyenne

Nous rappelons d'abord un résultat de Balog et Bárány sur les enveloppes convexes de discrétisations de Gauss de formes convexes du plan de bord C^3 et courbure strictement positive (i.e. forme de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$).

Théorème 5.20 (Balog et Bárány [BB91], Théorème 2)**.** *Soit* $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$*,* $m \cdot S$ *son homothétie de rapport* m*, alors*

$$c_1(S)m^{\frac{2}{3}} \leq \text{Nb de sommets conv}(\mathbb{Z}^2 \cap m \cdot S) \leq c_2(S)m^{\frac{2}{3}}$$

pour des valeurs suffisamment importantes de m*,* $c_1(S)$ *et* $c_2(S)$ *sont des constantes dépendant des extremums de courbure de* S*. La longueur moyenne des arêtes est alors un* $\Theta(m^{\frac{1}{3}})$*.*

En utilisant le Lemme 5.8, on déduit qu'il existe un pas de discrétisation en dessous duquel la discrétisation de S est un CDP. Le Théorème 5.20 se réécrit alors

Théorème 5.21 (adapté de Balog et Bárány [BB91], Théorème 2)**.** *Soit* $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$*, alors* $\exists h_S > 0$ *tel que* $\forall 0 < h \leq h_S, \text{Dig}_G(S, h)$ *est un CDP et*

$$c_1(S)\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \leq n_e(\text{Dig}_G(S, h)) \leq c_2(S)\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}},$$

$c_1(S)$ *et* $c_2(S)$ *sont des constantes dépendant des extremums de courbure de* S*.*

Le Théorème 5.15 relie le nombre de segments de maximaux d'un CDP à son nombre d'arêtes. En le combinant avec Théorème 5.21, on obtient

[4] En effet, il était encore possible d'avoir un segment maximal à cheval entre deux arêtes sans pour autant en inclure l'une ou l'autre.

Théorème 5.22. *Soit $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$, alors $\exists h_S > 0$ tel que le nombre de segments maximaux de sa discrétisation suit*

$$\forall 0 < h \leq h_S, \Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}} \log \frac{1}{h}}\right) \leq n_{MS}(\partial \text{Dig}_G(S,h)) \leq \Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Dans [25], nous montrons que la longueur (en nombre de pas) du plus petit segment maximal ne peut grandir plus vite que $\frac{1}{h^{\frac{1}{3}} \log \frac{1}{h}}$. Le Théorème 5.18 détermine la longueur moyenne des segments maximaux. En le combinant lui aussi avec le Théorème 5.21, on déduit leur longueur moyenne asymptotique en fonction de la résolution.

Théorème 5.23 ([7], Théorème 5.1)**.** *Soit $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$. On note S_h le CDP $\text{Dig}_G(S,h)$. On note de plus $\overline{\mathcal{L}}^D_{MS}(\partial S_h)$ la longueur discrète moyenne (en nombre de pas) des segments maximaux du CDP S_h et $\overline{\mathcal{L}}^1_{MS}(\partial S_h)$ la longueur $\mathcal{L}^1$ de Minkowski moyenne. Alors il existe $h_S > 0$ tel que les quantités précédentes suivent les bornes suivantes :*

$$\Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}) \leq \overline{\mathcal{L}}^D_{MS}(\partial S_h) \leq \Theta(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \log \frac{1}{h}), \tag{5.9}$$

$$\Theta(h^{\frac{2}{3}}) \leq \overline{\mathcal{L}}^1_{MS}(\partial S_h) \leq \Theta(h^{\frac{2}{3}} \log \frac{1}{h}). \tag{5.10}$$

Démonstration. Le Théorème 5.18 précise la longueur moyenne des segments maximaux pour un CDP inscrit dans une grille $m \times m$. Si S est inclus dans un carré $K \times K$ du plan euclidien, alors S_h est un CDP inscrit dans une grille $K/h \times K/h$. On obtient

$$\frac{\text{Per}^D(S_h)}{3n_e(S_h)} \leq \frac{\sum_{k=1\ldots n_{MS}(\partial S_h)} \mathcal{L}^D(M_k)}{n_{MS}(S_h)} \leq \frac{19\text{Per}^D(S_h)(K_1 \log \frac{K}{h} + K_2)}{n_e(S_h)}. \tag{5.11}$$

Les constantes K, K_1 et K_2 ne dépendent que de S. Comme S_h est convexe et inscrit dans une grille $K/h \times K/h$, son périmètre discret ne peut excéder $4K/h$. Comme S est fermé, sa plus petite boîte englobante $W \times H$ existe. Pour un h suffisamment petit et parce que S est convexe de courbure bornée, le périmètre discret de S_h ne peut être plus petit que $\lfloor 2(W+H)/h \rfloor$. On déduit que $\text{Per}^D(S_h) = \Theta(\frac{1}{h})$. Enfin, le Théorème 5.21 donne le comportement de $n_e(S_h)$ en $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\right)$. En reportant ces deux dernières relations asymptotiques dans Eq. (5.11), on obtient Eq. (5.9). Eq. (5.10) s'obtient immédiatement par multiplication par le pas h. ■

Ce résultat est intéressant à plus d'un titre. D'une part il indique que les comportements asymptotiques des arêtes d'enveloppe convexe de points discrets et des segments maximaux sont très similaires. D'autre part il va contre l'intuition euclidienne. En effet, un segment discret a une épaisseur, verticale ou orthogonale, de l'ordre du pas h. Sur un cercle de rayon r, une corde à distance h de cercle a une longueur de l'ordre de $(rh)^{\frac{1}{2}}$. Sur une discrétisation de pas h d'un disque, on pourrait donc s'attendre à ce que les segments maximaux de son bord se comportent comme des cordes à distance h du bord du disque. Or, cette intuition est erronée dans le cas des segments maximaux qui évoluent essentiellement en $\Theta(h^{\frac{2}{3}})$. D'un point de vue discret, ils ne grandissent donc pas assez vite. Ce résultat s'applique bien sûr à tout segment défini sur le contour discret, en particulier les tangentes symétriques et les demi-tangentes.

5.3.2 Comportement asymptotique en longueur minimale

Le Théorème 5.23 nous indique déjà une borne supérieure pour le comportement de la longueur du plus petit segment maximal en asymptotique. En effet, sa longueur ne peut excéder la moyenne des longueurs des segments maximaux. Nous montrons ici que la longueur discrète du plus petit segment maximal ne peut pas être bornée sur des discrétisations de plus en plus fines. Les preuves détaillées des résultats suivants sont dans [8]. On utilise la notion de cercle séparant, déjà utilisée dans [CGRT04] pour la segmentation en arcs de courbes discrètes.

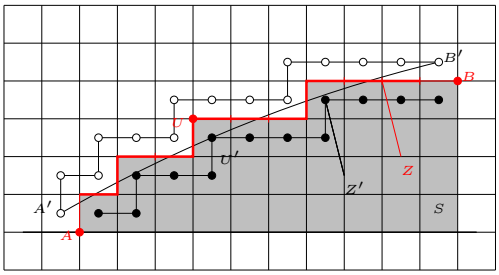


FIG. 5.8 – Polygone convexe discret et cercle séparant sur segment maximal. A et B sont les points C_{i-1} et C_{j+1} du segment maximal. Tout cercle séparant l'intérieur de l'extérieur du CDP a un rayon fini borné par le rayon du cercle circonscrit à A', U' et B'.

Lemme 5.24 ([8], Lemme 2)**.** *Soit Γ la discrétisation de Gauss d'une forme convexe et soit C sont bord. Soit $Z = [C_iC_j]$ un de ses segments maximaux. Tout cercle séparant les pixels extérieurs à Γ touchant $[C_{i-1}C_{j+1}]$ des pixels intérieurs à Γ touchant $[C_{i-1}C_{j+1}]$ a un rayon fini.*

Démonstration. La situation est résumée sur la Figure 5.8 en notant $A = C_{i-1}$ et $B = C_{j+1}$ et U un point d'appui supérieur au segment. Par convexité et du fait du processus de discrétisation choisi, les pixels A' et B' sont extérieurs à Γ, tandis que le pixel U' lui est intérieur. Le Lemme 5.11 donne les restes des points A et B, donc des pixels A' et B', par rapport à une droite de pente similaire à celle de Z. Le reste du point U' se calcule aussi. On trouve facilement que ces trois points ne sont pas alignés, que U' est au-dessus de la droite joignant A' et B'. Tout cercle séparant doit donc passer en-dessous de ces deux points et au-dessus de U', ce qui conclut. ■

On en déduit facilement que toute forme convexe dont la discrétisation de Gauss contient le chemin $[C_{i-1}C_{j+1}]$ décrit ci-dessus a localement un maximum de courbure sur son bord au moins égal à l'inverse du rayon du cercle séparant précité, car le cercle est la courbe passant par trois points qui minimise la courbure. En utilisant cet argument, nous montrons :

Proposition 5.25. *Soit S une forme convexe du plan de bord C^2 et courbure continue.*[5] *La longueur discrète des segments maximaux du bord du CDP $\mathrm{Dig}_G(S,h)$ n'est pas bornée lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0.*

Démonstration. Tout d'abord, le résultat du Lemme 5.24 est indépendant de la position dans le plan du chemin $[C_{i-1}C_{j+1}]$. Il y a un nombre fini de chemins de longueur discrète l qui sont des discrétisations de pas 1 de formes convexes. Pour chacun, il existe un rayon maximal pour ses cercles séparants. On construit donc une application $\kappa_1 : \mathbb{Z}^{+*} \to \mathbb{R}^+$ qui associe à l l'inverse du plus grand rayon possible de cercle séparant parmi toutes les configurations possibles de ces chemins de longueur l. La remarque ci-dessus implique que la forme S a localement un maximum de courbure supérieur ou égal à $\kappa_1(l)$, si elle contient un tel chemin.

Raisonnons par contradiction et supposons maintenant que pour une séquence décroissante de pas h_i, il y ait toujours un segment maximal M_i sur le contour $\partial\mathrm{Dig}_G(S,h_i)$ de longueur discrète bornée par un entier constant L. On utilise alors le fait que $\mathrm{Dig}_G(S,h_i)$ est équivalent à $\mathrm{Dig}_G(\frac{1}{h_i}\cdot S, 1)$. Il existe donc un point du bord de $\frac{1}{h_i}\cdot S$ où la courbure est supérieure ou égale à $\kappa_1(\mathcal{L}^D(M_i))$. La courbure maximale $\kappa_{\max}(S)$ de S suit donc

$$\kappa_{\max}(S) = \frac{1}{h_i}\kappa_{\max}(\frac{1}{h_i}\cdot S) \geq \frac{1}{h_i}\kappa_1(\mathcal{L}^D(M_i)) \geq \frac{1}{h_i}\min_{1\ldots L}\kappa_1(l).$$

Le dernier terme étant une constante divisée par une quantité tendant vers 0, la courbure maximale de S apparaît donc comme non bornée, ce qui est une contradiction. ■

[5] Ce sont les ensembles convexes de $C^2(\mathbb{R}^2)$. Tous les ensembles de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ en font partie.

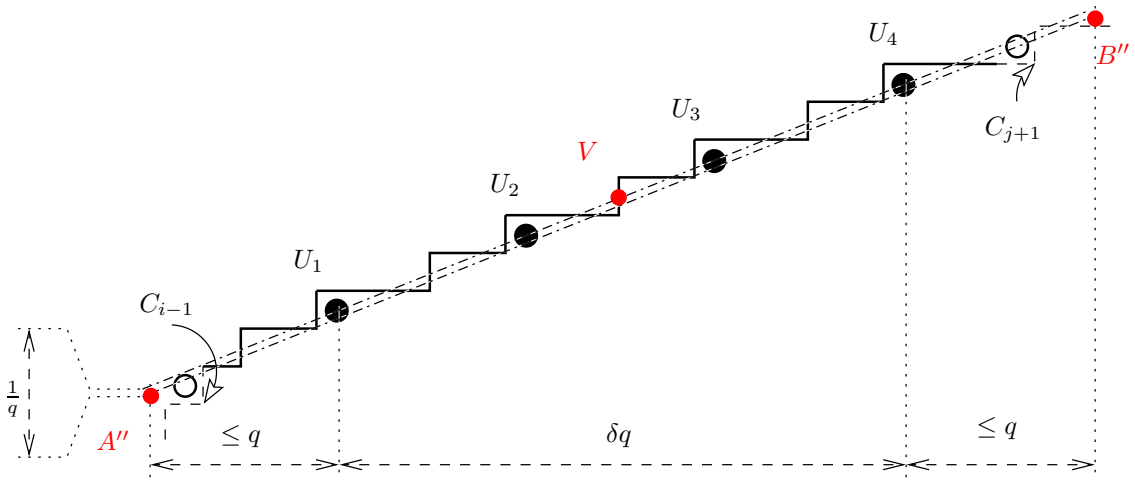


FIG. 5.9 – Illustration de la preuve de la Théorème 5.26. La plus petite courbure possible pour $\mathrm{bd}\, S$ est l'inverse du rayon du plus grand cercle séparant. Ce rayon est majoré par les cercles circonscrits aux points $\circ$ et à n'importe quel point $\bullet$.

On vient de montrer que les segments maximaux croissent tous lorsque la discrétisation se raffine. On note que ce n'est pas le cas des tangentes symétriques ou des demi-tangentes : il existe des points autour desquels ces segments sont bornés quelle que soit la finesse du pas [61]. Pour conclure cette section, nous démontrons un nouveau résultat qui, en affinant la preuve de la proposition précédente, donne une borne inférieure sur la longueur des segments maximaux. Ce résultat permettra de montrer l'uniforme convergence des estimateurs de tangente et de longueur élémentaire.

Théorème 5.26. *Soit S une forme convexe du plan de bord C^2 et courbure continue. La longueur discrète des segments maximaux du bord du CDP $\mathrm{Dig}_G(S,h)$ est minorée par $\Omega(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}})$. Plus précisément, ce minorant, qui est non atteint, s'écrit*

$$\frac{3}{4}5^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{h\kappa_{\max}(S)}-3\right)^{\frac{1}{3}},$$

où $\kappa_{\max}(S)$ est la courbure maximale de $\mathrm{bd}\, S$.

Démonstration. On reprend les notations de la preuve précédente, la preuve étant illustrée sur la Figure 5.9. On calcule un majorant du rayon du plus grand cercle séparant les points extérieurs des points intérieurs du segment maximal $[C_iC_j]$. Ce segment est de longueur discrète l, de pente p/q avec δ motifs.[6] On note A' et B' les deux points/pixels situés respectivement à $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ de C_{i-1} et C_{j+1}, et U'_k les translatés de $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ des points d'appui supérieurs U_k. Les pixels U'_k sont dans $\mathrm{Dig}_G(S,h)$, les pixels A' et B' sont dans son complémentaire. On centre le repère sur U'_1 et on note $r(x,y)$ le reste de la droite $px-qy=0$. On vérifie que $\forall k, r(U'_k)=0$, $r(A')\geq 1$, $r(B')\geq 1$ (d'après Lemme 5.11).

Comme on souhaite trouver le plus grand rayon possible, le pire cas est obtenu pour $r(A')=1$ et $r(B')=1$. De même A' et B' doivent être à la limite de créer de nouveaux motifs. On choisit donc deux points A'' et B'' avec les coordonnées suivantes : $A''=(-q,-p-\frac{1}{q})$ et $B''=((\delta+1)q,(\delta+1)p-\frac{1}{q})$. Ils garantissent l'obtention d'un rayon majorant du rayon cherché. Le plus grand cercle séparant est obtenu en calculant le rayon du cercle circonscrit à tous les triplets (A'',U'_k,B''). Un majorant (strict en général) de ce rayon est obtenu en choisissant le point V sur la droite $px-qy=0$ situé à égale distance de A'' et B''. Si O est le point milieu de A'' et B'' et sachant que la distance verticale de V à la droite $(A''B'')$ est $\frac{1}{q}$, la distance OV vaut $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

[6] On suppose $\delta\geq 1$. Le cas $\delta=0$ implique que le nombre de motifs inversés vaut 1, la preuve est alors similaire.

En utilisant des relations géométriques élémentaires, le rayon R du cercle circonscrit à (A'', V, B'') vérifie

$$\begin{aligned} R^2 = &\quad (R - OV)^2 + \left(\frac{A''B''}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad R = &\quad \frac{1}{8\sqrt{p^2+q^2}}\left((\delta+2)^2(p^2+q^2)^2+4\right). \end{aligned}$$

On sait de plus que les quantités l, p, q et δ sont liées ainsi : $(2+\delta)(p+q) > l \geq \delta(p+q)$ et $0 \leq p \leq q$. On en déduit des majorants et des minorants de p et q, $0 \leq p \leq \frac{l}{2\delta}$ et $\frac{l}{2\delta+4} < q \leq \frac{l}{\delta}$, que l'on introduit dans l'équation précédente. On trouve :

$$R \leq \frac{25(\delta+2)^3}{64\delta^4} l^3 + \frac{\delta+2}{l}.$$

Cette fonction de l et δ, à l fixée, est maximale pour $\delta = 1$ car sa dérivée partielle par rapport à δ est toujours négative. On obtient alors le majorant de R suivant

$$R \leq \frac{2025}{64} l^3 + \frac{3}{l}. \tag{5.12}$$

D'après la preuve précédente, la courbure maximale de bd S satisfait :

$$\kappa_{\max}(S) = \frac{1}{h}\kappa_{\max}(\frac{1}{h} \cdot S) \geq \frac{1}{hR}. \tag{5.13}$$

En combinant Eq. (5.12) et Eq. (5.13), on déduit le minorant de l en fonction de h. ■

5.3.3 Résultats expérimentaux sur les segments maximaux

Nous traçons sur la Figure 5.10 les longueurs discrètes de deux types de segments discrets sur des CDP qui sont des discrétisations de plus en plus fines d'un disque : les arêtes du CDP et les segments maximaux sur son bord. On constate que les deux suivent en moyenne une loi en $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)$. Leurs longueurs maximales sont bornées par $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\right)$ (cf. [8], Lemme 4). On vérifie aussi que la longueur discrète du plus petit segment maximal croît selon une loi en $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)$, comme prévu par le Théorème 5.26. En revanche, expérimentalement rien ne confirme le fait que la plus petite arête ait une taille non bornée.

Nous avons aussi étudié le recouvrement entre segments maximaux et tracé le nombre de segments maximaux traversant un point du contour discret. La Figure 5.11 indique que le faisceau de segments maximaux en contient en moyenne entre 3 et 4. Jusqu'à des cercles de rayon 3000, aucun point n'appartenait à plus de 7 segments maximaux. Certains points (par exemple autour des changements d'octants) n'appartiennent qu'à un seul segment maximal. On constate que la moyenne de recouvrement des segments maximaux semble converger vers la constante de Khinchin-Lévy, égale à $e^{\pi^2/(12\ln 2)} \approx 3.275823$.[7]

Enfin, on peut vérifier que le nombre de segments maximaux suit $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\right)$ tout comme le nombre d'arêtes. Les expérimentations menées confirment donc les bornes asymptotiques théoriques établies dans les sections précédentes.

5.3.4 Etude asymptotique des coefficients des arêtes discrètes

Le Théorème 5.21 nous donne le comportement moyen des longueurs discrètes l des arêtes. Or, pour une pente p/q dont le motif est répété δ fois, nous avons $l = \delta(p+q)$. La question qui se pose alors est le comportement asymptotique des coefficients δ, p et q, sachant que l grandit en $\Theta\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}\right)$.

[7] Si x est un réel, alors la suite des racines n-èmes du dénominateur q_n du n-ème convergent de x tend vers cette constante presque toujours.

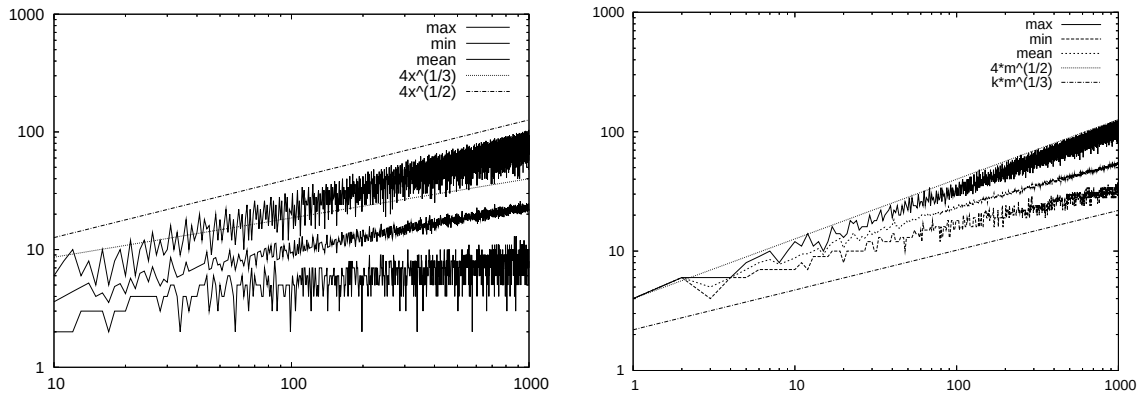


FIG. 5.10 – Graphe en échelle logarithmique de la longueur $\mathcal{L}^D$ des arêtes d'une forme discrétisée (gauche) et des segments maximaux (droite). La forme discrétisée est un disque de rayon 1 et l'abscisse est l'inverse du pas de discrétisation.

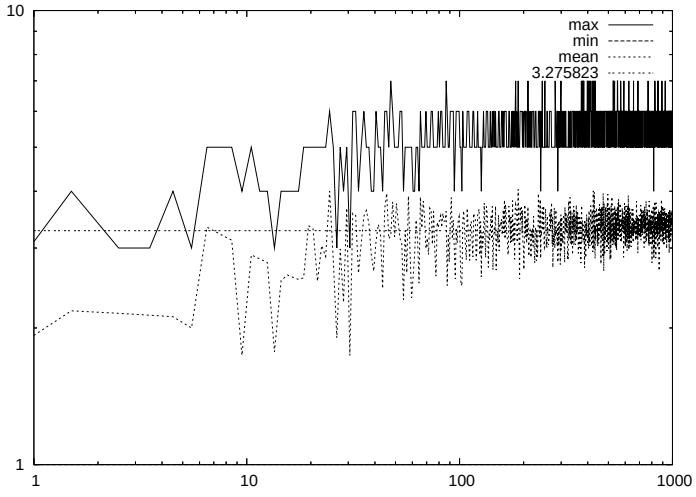


FIG. 5.11 – Nombre de segments maximaux traversant un surfel du contour discret sur des discrétisations d'un disque de rayon 1. L'abscisse est l'inverse du pas de discrétisation.

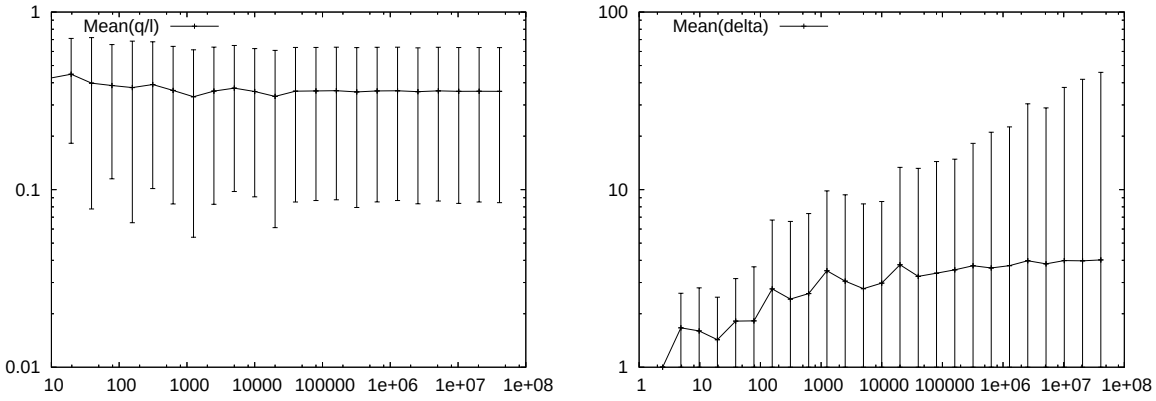


FIG. 5.12 – Graphes en échelle logarithmique des moyennes des paramètres $\frac{q}{l}$ (gauche) et δ (droite) pour les arêtes de discrétisations de Gauss d'un disque de rayon 1. En abscisse, l'inverse $\frac{1}{h}$ du pas de discrétisation. Les écarts-type sont symbolisés par des barres d'erreurs.

Supposons que le CDP provient de la discrétisation d'une forme de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$. Comme la pente de l'arête discrète tend vers la pente du bord de la forme dans son voisinage et comme presque partout ces points ont une tangente de pente irrationnelle, il est naturel de supposer que les coefficients p et q tendent tous deux vers l'infini pour approcher un irrationnel tandis que le coefficient δ reste borné. Cette observation est confirmée par des expérimentations sur des discrétisations de disque (Figure 5.12).

Soit $x \in \text{bd}\, S$ et soit y un point de $\text{bd}\, \text{Dig}_G(S, h)$ dont la rétro-projection est x. On note alors $l(x, h)$, $p(x, h)$, $q(x, h)$ et $\delta(x, h)$ les paramètres discrets de l'arête du CDP $\text{Dig}_G(S, h)$ qui contient y. Nous proposons la conjecture suivante, qui sera utilisée pour déterminer la vitesse de convergence de certains estimateurs.

Conjecture 5.27. *Pour toute forme de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$, les paramètres discrets $p(x, h)$ et $q(x, h)$ suivent presque partout une loi en $\Theta(l(x, h))$, tandis que $\delta(x, h)$ reste borné presque partout.*

La conjecture suivante, appuyée par les expérimentations (cf. Figure 5.13), indique que la longueur des arêtes est proche de la moyenne $h^{-\frac{1}{3}}$ avec une forte probabilité.[8] L'espace de probabilité considéré est l'espace naturel induit par la mesure de longueur géodésique sur $\text{bd}\, S$.

Conjecture 5.28. *Pour toute forme de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$, la variable aléatoire $l(x, h)h^{\frac{1}{3}}$ est de moyenne et de variance finies, pour un h suffisamment petit.*

On note que le résultat sur la moyenne des longueurs d'arêtes (Théorème 5.20) ne s'applique pas directement. Il indique en fait que la variable aléatoire $l(x, h)h^{\frac{1}{3}}$ est de moyenne finie, mais pour l'espace de probabilité accordant la même mesure à chaque morceau de $\text{bd}\, S$ image d'une arête du CDP $\text{Dig}_G(S, h)$.

5.4 Convergence multigrille des estimateurs géométriques

Les résultats obtenus sur le comportement asymptotique de plusieurs caractéristiques discrètes vont maintenant nous permettre d'attaquer le problème de la convergence multigrille de certains estimateurs géométriques (cf. Definitions 4.13, 4.14 et 4.15, page 81). Nous allons établir des résultats de convergence pour la position, la direction de la tangente, la longueur, et au contraire infirmer un résultat de convergence sur la courbure. Certains résultats de vitesse de convergence seront soumis à une hypothèse sur le comportement asymptotique des motifs. Les résultats obtenus tiennent le plus souvent pour des

[8] Par exemple, l'inégalité de Chebyshev s'applique.

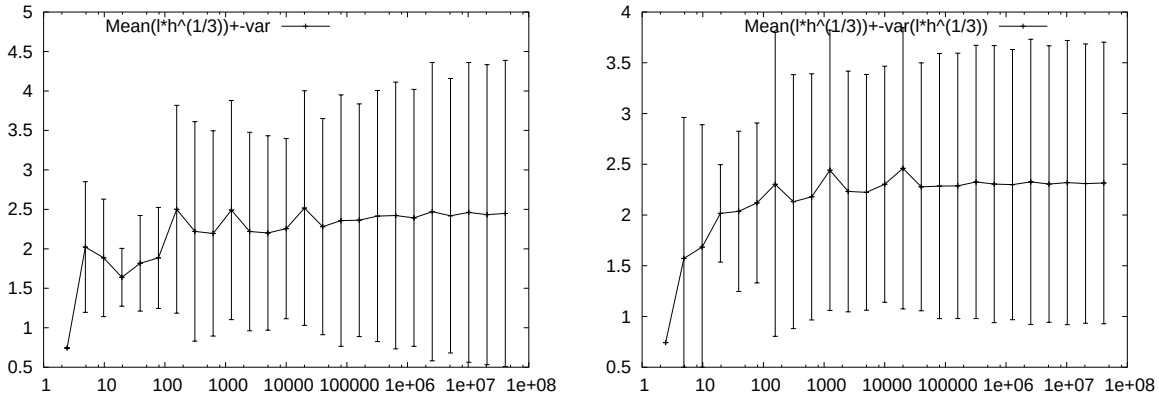


FIG. 5.13 – Tracé de la moyenne et écart-type de $l(x,h)h^{\frac{1}{3}}$ sur des discrétisations de cercle. A gauche, la mesure naturelle des longueurs le long de $\operatorname{bd} S$. A droite, la mesure « discrète » où chaque arête induit une mesure identique sur $\operatorname{bd} S$. L'abscisse est l'inverse $\frac{1}{h}$ du pas de discrétisation.

discrétisations de formes C^3-convexes (i.e. dans $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$). Néanmoins, ils restent valables « par morceaux » sur des formes ayant un nombre fini de points d'inflexion. Dans toute la section, S désigne une forme élément de $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$. Les pas de discrétisations h seront toujours choisis de façon à ce que $\operatorname{Dig}_G(S,h)$ soit un CDP.

5.4.1 Estimation de la position de la courbe

La quantité géométrique locale que l'on cherche à estimer est la position x d'un point du bord de S, soit $\mathcal{T}(X,x) \stackrel{d}{=} x$.

D'après les résultats de l'Annexe B, notamment le Lemme B.9, page 149, nous savons que le bord discret $\operatorname{bd}\operatorname{Dig}_G(S,h)$ est une approximation de la courbe $\operatorname{bd} S$ de l'ordre de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. On peut considérer alors que l'application $\hat{x}$, défini par $\hat{x}(\operatorname{Dig}_G(S,h), y) \stackrel{d}{=} y$ pour $y \in \operatorname{bd}\operatorname{Dig}_G(S,h)$, est un estimateur de la fonction position sur $\operatorname{bd} S$.

On vérifie alors trivialement que cet estimateur est uniformément convergent, de vitesse de convergence $\tau(h) = h$, car

$$\|\hat{x}(\operatorname{Dig}_G(S,h), y) - \mathcal{T}(X,x)\| = \|y - x\| \leq \|y - x\|_1 \leq h. \tag{5.14}$$

La convexité d'une forme permet d'estimer plus précisément la position de la courbe. Le bord de la forme ne peut en effet passer au-dessous du segment euclidien joignant deux sommets consécutifs du CDP (i.e. l'arête), ni au-dessus de segments joignant les sommets à un point supérieur faiblement extérieur. La situation est illustrée sur la Figure 5.14. On déduit dès lors le résultat suivant :

Proposition 5.29 ([29], Proposition 3)**.** *Soit S une forme convexe telle que $\operatorname{Dig}_G(S,h)$ est un CDP Γ pour un h donné. Soit une arête discrète $[V_iV_{i+1}]$ de Γ dont la pente irréductible $\frac{p_n}{q_n}$ est dans le premier octant. Alors tout point du bord de S au-dessus du segment euclidien V_iV_{i+1} lui est distant verticalement d'au plus $\frac{h}{q_{n-1}}$. Si cette arête contient δ fois le motif $E(\frac{p_n}{q_n})$ alors cette distante est réduite à $\frac{\delta h}{(\delta-1)q_n+q_{n-1}}$.*

Grâce à ce résultat nous construisons l'estimateur fonctionnel discret de position $\hat{x}^{\text{conv}}$ ainsi

Définition 5.30. *Soit un CDP Γ de sommets (V_k). Soit $y \in \partial\Gamma$. Le point y appartient nécessairement à une arête discrète $[V_iV_{i+1}]$. On associe alors à $\hat{x}^{\text{conv}}(\Gamma, y)$ le point projeté orthogonal de y sur la droite euclidienne (V_iV_{i+1}).*

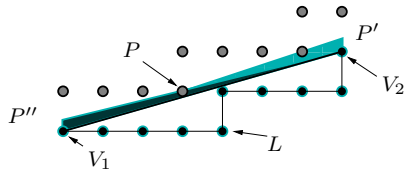


FIG. 5.14 – Estimation de la position du bord d'une forme convexe. Le point d'appui supérieur faiblement extérieur P est situé à $(-1,+1)$ du point d'appui inférieur L de l'arête $[V_1V_2]$ du DCP. Il définit avec les sommets V_1 et V_2 deux zones triangulaires, dont l'union inclut nécessairement le bord de la forme convexe.

Comme pour tout sommet V_k de Γ, $\hat{x}^{\text{conv}}(\Gamma, V_k) = V_k$, l'application $\hat{x}^{\text{conv}}$ est continue sur $\partial\Gamma$. Si la conjecture sur la croissance des quantités δ, p_n, q_n est vérifiée, l'application $\hat{x}^{\text{conv}}$ estime en moyenne assez précisément la position du contour :

Proposition 5.31. *L'estimateur de position $\hat{x}^{\text{conv}}$ est multigrille convergent pour les formes $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ et pour la discrétisation de Gauss. Il est uniformément convergent de vitesse $\mathcal{O}(h)$. Cet estimateur vérifie aussi presque partout la relation suivante, pour un h suffisamment petit :*

$$\begin{aligned} \forall y \in \text{bd}\,\text{Dig}(S,h), \exists x \in \text{bd}\,S, |\hat{x}^{\text{conv}}(\text{Dig}(S,h),y) - x| &\leq \mathcal{O}\left(\frac{h}{q_{n-1}(x,h)}\right), \\ &\leq \mathcal{O}\left(h^{\frac{4}{3}}\right), \end{aligned}$$

si $l(x,h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes et si la Conjecture 5.27 est vraie.

Démonstration. La première partie de la proposition est une conséquence direct du fait que $\|\hat{x}^{\text{conv}}(\text{Dig}(S,h),y) - \hat{x}(\text{Dig}(S,h),y)\| \leq \sqrt{2}h$ et Eq. (5.14) conclut sur l'uniforme convergence.

Pour la deuxième propriété, soit $[V_iV_i+1]$ l'arête discrète contenant y. La Proposition 5.29 implique que le bord de S passe au-dessus de $\hat{x}^{\text{conv}}(\text{Dig}(S,h),y)$ à distance inférieure à $\frac{h}{q_{n-1}}$.

Si on admet la conjecture, alors q_{n-1} et q_n sont du même ordre que l, soit $\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$ en moyenne, ce qui permet de conclure. ■

En quelque sorte, ce résultat indique que la précision du positionnement augmente presque partout plus vite que la résolution. Ce n'est par exemple pas le cas autour des changements d'octants, où les pentes ont une profondeur bornée.

5.4.2 Estimation de la direction de la tangente

La quantité géométrique locale que l'on cherche à estimer est la tangente $\theta(x)$ en tout point x du bord de S, soit $\mathcal{T}(X,x) \stackrel{d}{=} \theta(x)$.

Au chapitre précédent, nous avons comparé différents estimateurs de tangente. Ceux basés sur les segments maximaux présentaient un comportement intéressant, notamment vis-à-vis de l'erreur d'estimation maximale. Nous allons d'abord montrer qu'ils sont effectivement multigrille convergents. Nous étudierons ensuite leur vitesse de convergence, en examinant la convergence de la pente des arêtes du CDP vers la pente de la tangente.

On note $\hat{\theta}^{\text{MS}}$ tout estimateur de direction de tangente, qui la calcule par combinaison convexe des directions de segments maximaux qui contiennent le point d'intérêt. On note que l'estimateur FTT et l'estimateur λ-MST en sont deux cas particuliers. On montre :

Théorème 5.32 ([8], Théorème 4)**.** *L'estimateur fonctionnel de tangente $\hat{\theta}^{MS}$ est multigrille convergent pour $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ et la discrétisation de Gauss. Il est même uniformément convergent de vitesse bornée par $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$.*

Démonstration. Soit $x \in \text{bd}\, S$. Soit $y \in \text{bd}\, \text{Dig}_G(S,h)$ avec $\|x-y\| \leq h$. Soit M un segment maximal sur ce bord discret contenant y. Le bord de S est coincé entre les deux droites d'appui du segment maximal. Comme x est proche de y, il est aussi entre ces deux droites, ou il existe un point $x' \in \text{bd}\, S$ très proche ($\leq h$) qui l'est. Conclure sur la tangente en x' ou en x ne change le résultat que de $\mathcal{O}(h)$.

Nous suivons le schéma de preuve de [8], Théorème 3. Son principe est de remarquer que le point w sur $\text{bd}\, S$ de l'autre côté du segment maximal par rapport à x est coincé entre les droites d'appui, puis d'exprimer en w le développement de Taylor au point x de la courbe $\text{bd}\, S$. On déduit facilement que la pente de M est la pente de la tangente en x, plus ou moins deux termes d'erreurs :

1. Le premier terme traduit l'incertitude sur la position qui est de l'ordre de $\frac{h}{\mathcal{L}^1(M)} = \frac{1}{\mathcal{L}^D(M)}$. D'après le Théorème 5.26, la longueur discrète $\mathcal{L}^D(M)$ est minorée par $\Omega(h^{-\frac{1}{3}})$, quantité non bornée. Ce terme suit donc $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$.
2. Le deuxième est l'erreur au second ordre du développement qui est en $h\mathcal{L}^D(M)$. Le Lemme 4 [8] assure de son côté que $\mathcal{L}^D(M) \leq \Theta(h^{\frac{1}{2}})$. Ce terme suit donc $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$.

On vient de montrer $\|\theta(M) - \theta(x)\| \leq \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}}) + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$. Ce résultat est valable pour tout segment maximal couvrant y, donc aussi pour toute combinaison convexe de leurs directions. D'où $\|\hat{\theta}^{\text{MS}}(\text{Dig}_G(S,h), y) - \theta(x)\| \leq \mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$, ce qui conclut. ■

En fait, les estimateurs de tangente basés segments maximaux ont de bonnes propriétés car ils ont un lien fort avec les arêtes du CDP dans le cas où la forme est convexe. Un estimateur de tangente basé arête a les propriétés suivantes :

Définition 5.33. *On note $\hat{\theta}^{conv}$ l'estimateur fonctionnel discret de tangente à un CDP Γ, défini pour tout point $y \in \partial\Gamma$ comme la direction de l'arête discrète $[V_k V_{k+1}[$ contenant y.*

Proposition 5.34. *Soit $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$. Pour un pas h suffisamment petit, $\forall x \in \text{bd}\, S, \forall y \in \text{bd}\, \text{Dig}_G(S,h), \|x-y\| \leq h$,*

$$\|\hat{\theta}^{conv}(\text{bd}\, \text{Dig}_G(S,h), y) - \theta(S,x)\| \leq \frac{2}{\delta(x,h) q_n(x,h) q_{n-1}(x,h)} + \mathcal{O}(h\delta(x,h) q_n(x,h)).$$

Si $l(x,h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes et si la Conjecture 5.27 est vraie, on a de plus

$$\|\hat{\theta}^{conv}(\text{bd}\, \text{Dig}_G(S,h), y) - \theta(S,x)\| \leq \mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right).$$

Démonstration. Le principe de preuve repose aussi sur un développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction traçant le bord de S, et applique le développement au sommet V_k ou V_{k+1} le plus loin de x. L'incertitude sur la position est de $\frac{2h}{\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}])q_{n-1}}$ d'après la Proposition 5.29. L'erreur due au développement est de l'ordre de $\mathcal{L}^1([V_k V_{k+1}])$. Le terme en $\mathcal{O}(h)$ induit par $\|x-y\| \leq h$ est négligeable devant les deux autres. Sachant que $\delta(x,h)q_n(x,h) \leq l(x,h) = \mathcal{L}^D([V_k V_{k+1}]) \leq (2+\delta(x,h))q_n(x,h)$, on obtient les inégalités ci-dessus avec la conjecture précitée. Pour plus de détails, voir [29], preuve de la Proposition 7. ■

L'estimateur $\hat{\theta}^{\text{conv}}$ est donc multigrille convergent sur les parties où les arêtes grandissent, ce qui semble être le cas expérimentalement presque partout. Il ne semble pas uniformément convergent. En moyenne, sa vitesse de convergence est de $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$.

Or la Proposition 5.19 indique que tout segment maximal sur un CDP inclut une arête, arête de la même pente z_n que le segment maximal ou son $n-1$-ème convergent z_{n-1}. On en déduit que $\hat{\theta}^{\text{MS}}$ doit avoir le même comportement moyen que $\hat{\theta}^{\text{conv}}$:

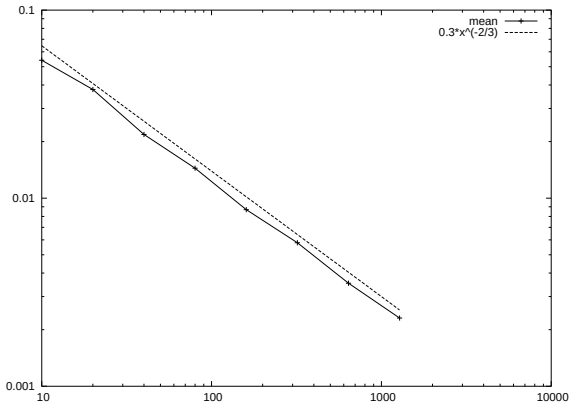


FIG. 5.15 – Graphe en échelle logarithmique de l'erreur absolue moyenne d'estimation de tangente $\|\hat{\theta}^{\lambda\mathrm{MST}}(\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h),y)-\theta(S,x)\|$, avec $x=\pi_{S,h}(y)$, sur des discrétisations de cercle de plus en plus fines.

Proposition 5.35. *Soit $S\in C^3(\mathbb{R}^2,\text{convexe})$. Pour un pas h suffisamment petit, $\forall x\in\mathrm{bd}\,S,\forall y\in\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h)$, avec $\|x-y\|\leq h$. Si $l(x,h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes et si la Conjecture 5.27 est vraie, on a*

$$\|\hat{\theta}^{MS}(\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h),y)-\theta(S,x)\|\leq\mathcal{O}\left(h^{\frac{2}{3}}\right).$$

Démonstration. Soit M le segment maximal contenant y, de pente z_n. Soit A l'arête incluse dans M. Sa pente vaut z_n aussi ou z_{n-1} (pire cas). Le point x peut ne pas être dans A, mais un point x' l'est. Soit y' tel que $\pi_{S,h}(y')=x'$. Pour raccourcir, on notera $B_h^{\square}S$ le bord $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h)$. La Proposition 5.34 implique

$$\begin{aligned}
&\|\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}(B_h^{\square}S,y)-\theta(S,x)\|\\
\leq\ &\|\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}(B_h^{\square}S,y)-\hat{\theta}^{\mathrm{conv}}(B_h^{\square}S,y')\|+\|\hat{\theta}^{\mathrm{conv}}(B_h^{\square}S,y')-\theta(S,x')\|+\|\theta(S,x)-\theta(S,x')\|\\
\leq\ &\underbrace{\|z_n-z_{n-1}\|}_{=\frac{1}{q_n(x,h)q_{n-1}(x,h)}}+\frac{2}{\delta(x',h)q_n(x',h)q_{n-1}(x',h)}+\mathcal{O}(h\delta(x',h)q_n(x',h))+\underbrace{\mathcal{O}(\|x'-x\|)}_{\leq\mathcal{L}^1(M)=h\mathcal{L}^D(M)}
\end{aligned}$$

Si $l(x,h)$ suit le comportement moyen des longueurs d'arêtes, le premier terme est en $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$. Le troisième terme est aussi en $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ (Théorème 5.23). Enfin $l(x',h)>l(x,h)/2$ et a donc le même comportement à une constante près. La Proposition 5.34 conclut. ■

L'avantage des estimateurs de tangente basés segments maximaux sur l'estimateur $\hat{\theta}^{\mathrm{conv}}$ est qu'ils sont prouvés uniformément multigrille convergents (Théorème 5.32) pour la famille des formes convexes lisses $C^3(\mathbb{R}^2,\text{convexe})$ avec une vitesse $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$, qu'ils bénéficient de la même vitesse de convergence moyenne $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$, et qu'ils sont eux définis sur tout contour discret. On peut donc les utiliser sur des objets discrets non convexes. La Figure 5.15 confirme qu'en pratique l'erreur absolue moyenne d'estimation de $\hat{\theta}^{\lambda\mathrm{MST}}$ vérifie la borne ci-dessus.

5.4.3 Estimation de la longueur élémentaire et intégrale curviligne

Si (y_i^h) désigne la suite des pointels du bord discrétisé $\mathrm{Dig}_G(S,h)$, on rappelle que la longueur élémentaire du surfel $[y_i^h y_{i+1}^h]$, notée $l_{S,h}(y_{i+\frac{1}{2}}^h)$, est définie par $h\left|\mathbf{n}_S(\pi_{S,h}(y_{i+\frac{1}{2}}^h))\cdot\mathbf{w}_{S,h}(y_{i+\frac{1}{2}}^h)\right|$ (cf. Théorème 3.1).

On définit l'estimateur de longueur élémentaire $\hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}})$ comme $h|\cos\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}(\mathrm{Dig}_G(S,h), y^h_{i+\frac{1}{2}})|$ pour $[y^h_i y^h_{i+1}]$ horizontal, et $h|\sin\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}(\mathrm{Dig}_G(S,h), y^h_{i+\frac{1}{2}})|$ sinon. Comme $\hat{\theta}^{\mathrm{MS}}$ est uniformément multigrille convergent (Théorème 5.32), on a

$$|\hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) - l_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}})| \leq \mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}}). \tag{5.15}$$

Si on suppose que les segments maximaux ont le comportement moyen autour de $y^h_{i+\frac{1}{2}}$, alors

$$\hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) = l_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(h^{\frac{5}{3}}). \tag{5.16}$$

En appliquant le Théorème 3.1, toute intégrale curviligne le long de $\mathrm{bd}\, S$ est donc approchable par sommation d'un échantillon de valeurs.

Théorème 5.36. *Si $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ et $(y^h_{i+\frac{1}{2}})$ désigne les milieux des surfels de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h)$, alors l'intégrale curviligne de g le long du bord de S s'approche ainsi*

$$\int_{\mathrm{bd}\ S} g\, dx = \sum_{i=0}^{N_{S,h}-1} \left[g(\pi_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}))\, \hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) \right] + \mathcal{L}(S)\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}}). \tag{5.17}$$

Si la Conjecture 5.27 est vrai, la borne d'erreur devient

$$\int_{\mathrm{bd}\ S} g\, dx = \sum_{i=0}^{N_{S,h}-1} \left[g(\pi_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}))\, \hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) \right] + \mathcal{L}(S)\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}}). \tag{5.18}$$

Démonstration. Le Théorème 3.1 s'applique. On utilise alors la Proposition B.7 qui détermine le nombre de fois où on somme le terme d'erreur sur l'estimation de longueur élémentaire. Si on note cette erreur $h\epsilon(y^h_{i+\frac{1}{2}})$, l'erreur totale s'écrit $\sum_{\mathcal{O}(\mathcal{L}(S)/h)} h\epsilon(y^h_{i+\frac{1}{2}}))$, c'est-à-dire la moyenne des $\epsilon(y^h_{i+\frac{1}{2}})$ multipliée par la constante $\mathcal{L}(S)$, qui est la longueur euclidienne du bord de S. Cette erreur moyenne est proportionnelle à l'erreur moyenne d'estimation de tangente. Celle-ci étant uniformément convergente de vitesse $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$, son comportement asymptotique est au pire identique. Le comportement moyen est quant à lui autour de $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ (Proposition 5.35). ■

Un corollaire est que l'on peut approcher le périmètre de S par simple sommation des longueurs élémentaires (en prenant l'identité pour g). On obtient ainsi un estimateur de périmètre basé intégration des tangentes (cf. § 4.3.4), dont la vitesse de convergence est dans le pire cas en $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$, et vraissemblablement en moyenne de $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$. Or, l'estimateur de périmètre basé sur les *grid continua* [SS94, SZS98, SZK98] est multigrille convergent pour $\mathrm{Dig}_G(\cdot,\cdot)$ et pour $C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$, avec une vitesse de $\mathcal{O}(h)$, et donc plus rapide. Visiblement, des facteurs autres que la vitesse de convergence des tangentes jouent pour estimer la longueur, qui est une quantité géométrique globale.

5.4.4 Mesure sur les contours discrets

Le paragraphe précédent permet en fait de définir proprement des intégrales sur des bords discrets. On note y^h_i les coordonnées des pointels sur $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h)$ où S est une forme du plan. On définit alors une mesure sur ce bord en associant un poids différent à chaque surfel selon sa direction estimée.

Définition 5.37. *On définit la mesure $\mu_{S,h}$ sur le bord discrétisé $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(S,h)$ ainsi. Soient y à y' deux points de ce bord. Soient i et j les indices tels que $y \in [y^h_i y^h_{i+1}[$ et $y' \in]y^h_j y^h_{j+1}]$. Alors,*

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \mu_{S,h}([yy']) = \frac{\|y^h_{i+1} - y\|}{h} \hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}) + \sum_{k=i+1}^{j-1} \hat{l}_{S,h}(y^h_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\|y' - y^h_j\|}{h} \hat{l}_{S,h}(y^h_{j+\frac{1}{2}}), \tag{5.19}$$

$$i = j \quad \Rightarrow \quad \mu_{S,h}([yy']) = \frac{\|y' - y\|}{h} \hat{l}_{S,h}(y^h_{i+\frac{1}{2}}). \tag{5.20}$$

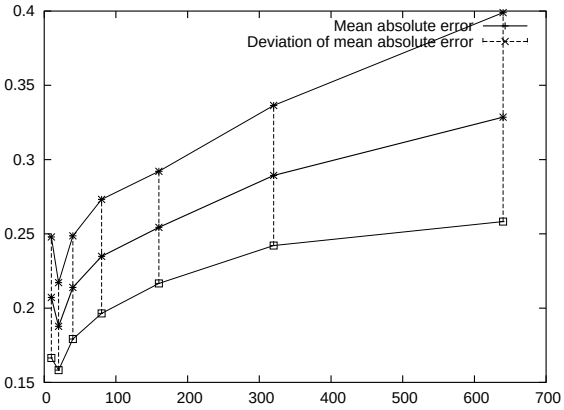


FIG. 5.16 – Erreur absolue moyenne et déviation standard de l'estimateur de courbure par cercle circonscrit sur un cercle de rayon 1. En abscisse, l'inverse du pas de discrétisation.

Le Théorème 5.36 nous permet d'affirmer :

Théorème 5.38. *Soit $S \in C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$ et h un pas suffisamment petit. Soit g une fonction intégrable sur* bd S. *Alors*

$$\int_{\text{bd } S} g dx = \int_{\text{bd Dig}_G(S,h)} g \circ \pi_{S,h} d\mu_{S,h} + \mathcal{L}(S)\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}}). \tag{5.21}$$

Cela nous donne *a posteriori* un moyen de discrétiser directement la fonctionnelle des modèles déformables, mais potentiellement aussi toute méthode variationnelle. Enfin, cette mesure est définissable de façon quasi-identique sur des contours discrets, indépendamment de toute discrétisation.

5.4.5 Estimation de la courbure

Le Chapitre 4 a montré qu'en pratique aucun estimateur de courbure proposé dans la littérature ne semblait convergent. Nos travaux sur les segments maximaux vont confirmer partiellement ce constat. Nous infirmons en effet une hypothèse utilisée dans le seul théorème connu de convergence multigrille d'un estimateur de courbure. L'estimateur de courbure en question est celui par cercle circonscrit aux demi-tangentes (cf. Figure 3.13, page 66 et [CS03]). Le Théorème B.4 de ([Coe02], p. 247) indique

« *Soit une courbe γ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ vérifiant les hypothèses ..., l'estimateur de courbure basé sur les demi-tangentes discrètes ... converge asymptotiquement.* »

L'hypothèse centrale est que la longueur discrète de chaque demi-tangente suit $\Theta(h^{-\frac{1}{2}})$.

Comme les demi-tangentes discrètes sont incluses dans les segments maximaux et que la longueur discrète moyenne des segments maximaux est majorée par $\Theta(h^{-\frac{1}{3}} \log \frac{1}{h})$ (Théorème 5.23), nous pouvons infirmer le théorème précédent.

Nous n'avons pas montré que cet estimateur n'est pas convergent, mais les expérimentations semblent indiquer qu'il ne l'est effectivement pas (Figure 5.16). A notre connaissance, l'existence d'un estimateur de courbure convergent (uniformément ou non) reste un problème ouvert.

5.5 Synthèse

Ce chapitre a établi des liens entre géométrie discrète et géométrie euclidienne, géométries trop souvent explorées indépendamment l'une de l'autre. Cela s'est fait en plusieurs étapes. La première étape a combiné les représentations arithmétiques et combinatoires des segments de droites discrètes. Elle a

débouché sur de nouveaux résultats sur la reconnaissance de droites et des propriétés géométriques sur les recouvrements entre segments maximaux. La deuxième étape a étudié les polygones convexes discrets. Elle a mis en évidence des relations entre arêtes de ces polygones et segments maximaux. Des bornes en nombre et en longueur sur les segments maximaux en découlent. La troisième étape a prolongé ces résultats en asymptotique, c'est-à-dire sur des discrétisations de plus en plus fines de formes du plan. On en a déduit des bornes asymptotiques en nombre et en longueur sur les segments maximaux. La quatrième étape a réalisé la synthèse des étapes précédentes pour déterminer la convergence multigrille d'un certain nombre d'estimateurs géométriques discrets. La convergence multigrille d'estimateurs de position, tangente, longueur, et intégrale curviligne a été établie. A notre connaissance, ce sont les premiers résultats de convergence multigrille pour des estimateurs de quantités géométriques locales. La preuve de convergence d'un estimateur de courbure a été infirmée. Une nouvelle mesure sur les bords discrets a été proposée. L'intégration sur des formes discrètes est donc maintenant non seulement possible mais aussi consistante avec l'intégration sur le bord de la forme réelle.

Ce chapitre a donc donné des réponses concrètes pour définir des estimateurs géométriques qui rendent un modèle déformable discret asymptotiquement euclidien, pour les contraintes internes du premier ordre et sur les énergies externes. Le problème des courbures a été défriché mais n'a pas encore été résolu.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Synthèse des contributions

Ce mémoire a tenté de présenter une approche originale de la segmentation et reconstruction en analyse d'image, approche basée sur l'utilisation de géométries non-euclidiennes en lieu et place de la géométrie euclidienne habituelle. Nous nous sommes principalement concentrés sur les techniques de segmentation par modèles (hautement) déformables, mais le principe du changement de géométrie est applicable sur d'autres méthodes d'analyse d'image.

Chapitre 2. Nous avons d'abord proposé d'utiliser des concepts de géométrie riemannienne pour réduire la complexité des algorithmes itératifs d'optimisation des modèles déformables. L'idée est simple : il s'agit de mettre en valeur les zones d'intérêt de l'image en les dilatant et de réduire les zones homogènes ou bruitées. La géométrie riemannienne, en transformant la notion de distance permet exactement d'atteindre ce but. Un pré-traitement analysant la géométrie des contours de l'image par calcul du tenseur de structure construit les métriques en tout point de l'image. Nous avons mis au point un nouvel estimateur des courbures des isophotes de l'image, robuste car basé sur un principe d'intégration. Le maille déformable a une densité dépendante de la métrique, ce qui la rend adaptative. L'effort de calcul est alors adapté à la géométrie des contours de l'image : faible dans les zones peu significatives ou sur les parties plates des contours, important sur les contours forts et très courbés. Le nombre de sommets de la maille, donc le nombre de paramètres à optimiser, comme le nombre d'itérations avant convergence, sont fortement diminués. Ce plongement de la maille dans une géométrie riemannienne a aussi un effet de bord intéressant. La géométrie de la maille est adaptée à la géométrie des contours recherchés. La seconde étant indépendante de la résolution image (si celle-ci est suffisante), la maille déformable a alors une densité indépendante de la résolution image. En quelque sorte, la métrique choisie induit le nombre de paramètres idéal pour la maille déformable. Nous montrons enfin que notre paradigme de modèle déformable adaptatif est plus efficace que le paradigme classique de segmentation multi-résolution. Pour conclure sur le modèle déformable riemannien, son formalisme ne change en rien la fonctionnelle minimisée, seulement son schéma numérique discrétisé. La plupart des perfectionnements apportés aux modèles déformables classiques sont donc parfaitement exploitables.

Chapitre 3. Nous avons ensuite suggéré d'inscrire les modèles déformables classiques dans un cadre purement discret, en utilisant notamment des outils de topologie et géométrie discrète. La minimisation de la fonctionnelle des modèles déformables devient un problème d'optimisation combinatoire. L'originalité de notre transformation en problème combinatoire est que nous cherchons à conserver le comportement du modèle déformable continu, notamment ses qualités géométriques. Nous proposons un modèle déformable discret (Définition 3.3) et nous montrons que son énergie tend vers l'énergie du modèle continu en asymptotique (Théorème 3.2), si l'on dispose d'estimateurs géométriques multigrille convergents. Contrairement à d'autres formulations combinatoires

de la segmentation, nous avons alors l'assurance que nous résolvons le même problème variationnel que les modèles déformables, asymptotiquement. Nous étudions aussi le comportement de ce modèle discret pour un pas de discrétisation égal à celui de l'image, sur des images 2D et 3D. Nous montrons ainsi l'intérêt d'un algorithme de minimisation *a posteriori*, qui rend la qualité de la segmentation assez indépendante de l'initialisation. Enfin, l'évolution de ce modèle est comparée avec celle du modèle déformable continu, lorsqu'il est soumis à ses seules contraintes internes. On constate que le terme de pénalisation de longueur est bien simulé, mais que celui de courbure induit un comportement aberrant. Ce dernier point illustre la difficulté de mettre au point des estimateurs de courbure multigrille convergents.

Chapitre 4. Un intérêt majeur de plonger les modèles déformables dans la grille discrète est de pouvoir les définir en dimension arbitraire. Les formes de $\mathbb{Z}^n$ en sont de simples sous-ensembles et les changements de topologie sont implicites. Pour mettre en œuvre un tel modèle déformable discret, il faut pouvoir représenter et parcourir les bords de forme discrète. Nous avons proposé un nouveau formalisme pour représenter, parcourir et déformer ces surfaces discrètes. Le principe est d'associer le formalisme de Herman et Udupa des surfaces discrètes avec la représentation cellulaire du plan discret. Cet espace est ensuite « algébrisé » de façon classique avec des opérateurs bord. Ce formalisme permet alors d'exprimer simplement les parcours de bord discret en dimension quelconque et de montrer que l'on a bien $n-1$ degrés de liberté sur une surface discrète dans $\mathbb{Z}^n$. Ce formalisme induit aussi une mise en œuvre très compacte et efficace des surfaces discrètes dans des langages de programmation classiques. Les déformations de la forme s'expriment aussi de manière concise. Nous avons ensuite cherché à mesurer et estimer des quantités géométriques sur ces surfaces discrètes. Cela s'est fait en deux temps. D'une part nous avons amélioré les estimateurs usuels de tangente à une courbe discrète 2D, principalement en utilisant les segments maximaux de la courbe. L'estimateur obtenu repère les points d'inflexion, a une erreur moyenne et maximale faible, n'induit pas de polygonalisation de la courbe et reste assez isotrope, tout en ayant une complexité de calcul linéaire en la taille de l'entrée. D'autre part, nous avons proposé des estimateurs nD de normale et d'aire élémentaire, calculés par croisement de $n-1$ estimations géométriques 2D. Les estimateurs obtenus sont non seulement rapides, mais précis et convergents asymptotiquement.

Chapitre 5. Nous nous sommes enfin attaqués au problème de la convergence multigrille d'estimateurs géométriques discrets. En d'autres termes, est-ce que la géométrie discrète peut rejoindre à l'infini la géométrie euclidienne. Nous avons d'abord combiné l'approche arithmétique et l'approche combinatoire des droites discrètes pour établir de nouvelles propriétés sur les parties linéaires des courbes discrètes. Lorsque la courbe est le contour d'un polygone convexe discret, nous avons établi des liens entre segments maximaux et arêtes de ce polygone. Il est clair maintenant qu'un segment maximal inclut toujours une arête, de pente identique ou le convergent de profondeur inférieure. Nous avons ensuite utilisé un résultat connu de comportement asymptotique sur les polygones convexes discrets pour déterminer le comportement asymptotique des segments maximaux. Leur longueur discrète grandit en moyenne entre $\Theta(h^{-\frac{1}{3}})$ et $\Theta(h^{-\frac{1}{3}}\log(h^{-1}))$ (Théorème 5.23), ce qui est comparable à la croissance des arêtes. Avec des techniques de cercle séparant, nous avons pu aussi déterminer une borne inférieure sur leur longueur discrète, elle aussi en $\Theta(h^{-\frac{1}{3}})$ (Théorème 5.26). Ce résultat, plus surprenant, pointe les différences entre segments maximaux et arêtes : on ne sait pas si la longueur de la plus petite arête croît forcément avec la résolution. Ces propriétés sur les segments maximaux permettent alors de déterminer la convergence multigrille de plusieurs estimateurs géométriques, notamment des estimateurs de tangente basés sur les segments maximaux (Théorème 5.32). La convergence uniforme est prouvée, et une vitesse de convergence moyenne est suggérée. On en déduit la convergence de l'estimateur de longueur élémentaire, qui garantit alors la convergence des intégrales discrétisées. Nous avons donc construit des estimateurs géométriques pour les modèles déformables discrets de telle façon à ce qu'ils soient asymptotiquement euclidiens (cf. Théorème 3.2). La seule incertitude qui reste concerne l'estimation de(s) courbure(s). Nos travaux ont seulement pu infirmer la seule preuve existante de convergence d'un estimateur de courbure.

Annexe B. Enfin, nous avons étudié les propriétés de la discrétisation de Gauss, qui reste à ce jour la seule utilisée pour la convergence multigrille. Nous avons montré que pour certaines familles de

formes, leur discrétisation était bien composée, complétant ainsi les travaux de Latecki. Nous avons ensuite défini une application entre le bord discrétisé et le bord continu, appelé rétro-projection, dont on montre qu'elle est continue, surjective et que sa partie non bijective se réduit avec le pas de discrétisation. Une fois définie, cette application permet d'étudier proprement les estimateurs géométriques fonctionnels.

L'ensemble de ces travaux montre que des concepts théoriques avancés (géométrie riemannienne, topologie algébrique, combinatoire des droites discrètes) permettent des avancées pratiques significatives : réduction des temps de calcul, algorithmes de parcours de surfaces discrètes, mise au point d'estimateurs géométriques. Inversement, ces besoins pratiques ont posé des questions assez fondamentales et provoqué ainsi des avancées théoriques, notamment dans l'étude des parties linéaires des courbes discrètes.

6.2 Perspectives et projets

Ces recherches suscitent un certain nombre de perspectives intéressantes, d'une part car elles posent un certain nombre de questions ouvertes tout en laissant entrevoir des pistes pour les attaquer, et d'autre part car elles présentent un certain potentiel applicatif qui reste encore à démontrer pleinement. Dans la suite, nous mettons en valeur quelques-unes de ces voies de recherche, certaines étant d'ailleurs déjà démarrées.

Optimisation des modèles déformables discrets

Maintenant que nous avons donné des bases théoriques solides à notre modèle déformable discret, sa minimisation effective peut se faire avec des techniques d'optimisation pour les problèmes combinatoires. Pour le moment, nous n'avons testé que des heuristiques simples d'optimisation, comme la minimisation gloutonne ou celle *a posteriori*.

Les méthodes d'optimisation stochastiques semblent être des candidats intéressants. Le *recuit simulé* [KGV83, GG87, Sto94] est le plus intéressant en théorie, mais son efficacité pratique est parfois critiquée dans la littérature [BZ87]. Les *modes conditionnels itérés* [BYM91] constitueraient une heuristique alternative, dont l'efficacité par rapport à une simple descente en gradient doit être testée. Il est probable que ces algorithmes stochastiques donnent leur pleine mesure sur des énergies comportant des termes « région », qui rendent plus convexe la fonctionnelle à minimiser.

L'heuristique d'optimisation des *snakes duaux* [GN97, CHSLH02] présente aussi un potentiel intéressant. La grille discrète est particulièrement adaptée pour représenter deux surfaces discrètes s'écrasant l'une sur l'autre, chacune suivant un algorithme glouton d'optimisation. Cet algorithme s'adapte aussi pour un découpage plus grossier de l'image. L'utilisation de cartes discrètes [BB98, Köt02, DR03] permettrait sans doute de représenter efficacement ces partitions déformables.

Les techniques de coupes de graphes semblent très prometteuses [GPS89, BVZ01, GLMC03], car elles peuvent extraire l'optimum global (ou un facteur près de l'optimal) dans des cas particuliers. Elles intègrent *a priori* assez difficilement des critères géométriques évolués. Cependant, des développements récents de ces techniques [BK03a] montrent qu'elles sont capables d'intégrer des critères géométriques plus évolués, comme la minimisation de longueur ou l'aire. L'idée est de multiplier les liens de voisinages de la grille discrète et affecter des poids bien choisis aux arêtes. Le poids de la coupe minimale devient alors une bonne approximation de l'aire de la surface séparante. Ce principe ressemble fortement à un dual des distances de Chanfrein. Les auteurs démontrent la convergence asymptotique de leur technique, sans toutefois préciser la vitesse de convergence. Ces travaux sont intéressants car ils illustrent le potentiel de certaines méthodes combinatoires à résoudre en asymptotique des problèmes typiquement variationnels comme la minimisation de surface. Ils montrent aussi une similitude avec les techniques de calcul de géodésiques par *fast marching* [CK97, AC05].

Les pyramides constituent une dernière piste intéressante pour l'optimisation de la fonctionnelle, car elles permettent d'obtenir non pas une solution mais un espace causal de solutions, paramétré par

Q. géom.	Forme de $\mathbb{R}^2$	technique	B. sup. erreur	Réf.
aire	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	Huxley [Hux90]
moments	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	comptage	$O(h^{\frac{15}{11}+\epsilon})$	Klette et Žunić [KŽ00]
longueur	polygone convexe	polygonalisation	$\approx 4.5h$	Kovalevsky et Fuchs [KF92]
longueur	polygone convexe	"saucissonnage"	$\approx 5.844h$	Asano *et al.* [AKKO01]
longueur	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	"Grid continuum"	$\approx 8h$	Sloboda *et al.* [SZS98]
longueur	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	$\int$ normales	?	Cœurjolly [Coe02][1]
longueur	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	$\int \hat{\theta}^{\text{MS}}$	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$	ici.
intégrale	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	mesure discrète	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$	ici.

TAB. 6.1 – Estimateurs discrets de quantités géométriques globales et convergence multigrille.

Q. géom.	Forme de $\mathbb{R}^2$	estimateur	Unif. convergent	Conv. moyenne	Réf.
position	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	$\hat{x}^{\text{conv}}$	$\mathcal{O}(h)$	$\mathcal{O}(h^{\frac{4}{3}})$	[29]
tangente	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	tan. sym.	non	?	[61]
tangente	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	$\hat{\theta}^{\text{conv}}$	?	$\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$	[29]
tangente	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	$\hat{\theta}^{\text{MS}}$	$\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$	$\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$	ici et [8]
courbure	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	Cercle circ.	non [61]	exp. non	infirmé [25, 7]
courbure	$C^3(\mathbb{R}^2, \text{convexe})$	Variation tang. sym.	non	non	[61]

TAB. 6.2 – Estimateurs fonctionnels discrets de quantités géométriques locales et convergence multigrille.

l'échelle. Guigues *et al.* [GLMC03] ont montré ainsi que l'on peut extraire la meilleure partition possible dans la combinatoire d'une pyramide donnée, pour une version simplifiée des énergies de Mumford-Shah. Il reste à voir si ces approches sont applicables dans notre contexte.

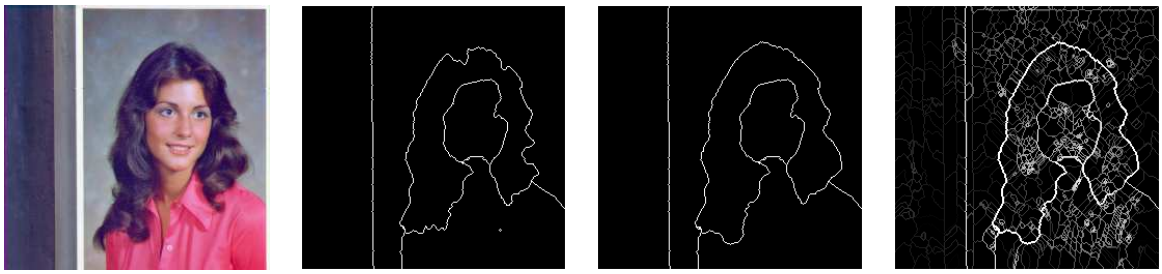
Convergence multigrille d'estimateurs géométriques

Ce mémoire a montré l'importance de la convergence multigrille dans la définition d'estimateurs géométriques. La Table 6.1 liste les principaux estimateurs de quantités géométriques globales démontrés convergents dans la littérature. La Table 6.2 liste les résultats obtenus sur les estimateurs fonctionnels de quantités géométriques locales.

Si l'on dispose maintenant d'estimateurs uniformément convergents de position et de direction de tangente, le problème de l'estimation de courbure reste difficile. Il semble maintenant probable que la restriction aux parties linéaires autour du point d'intérêt ne puisse conduire à un estimateur convergent de courbure. On pourrait sans doute utiliser des algorithmes de reconnaissance d'arcs ou de paraboles discrets pour obtenir une estimation convergente [CGRT04]. L'inconvénient est que ces techniques sont assez coûteuses et expérimentalement peu convaincantes. Nous travaillons actuellement sur un estimateur de courbure, qui dérive les directions de tangente dans une fenêtre de calcul élargie de façon à assurer une convergence multigrille. Nous espérons ainsi obtenir le premier estimateur convergent de courbure, de complexité linéaire.

Segmentation et pyramides

Il est connu qu'il est délicat d'appréhender une image à une seule échelle et que très souvent l'analyse doit se faire à plusieurs échelles pour en extraire un contenu sémantique significatif. Les approches de type pyramide adaptative [MMR91, JM92] construisent une hiérarchie causale d'image qui permet effectivement de considérer une image à plusieurs échelles. Dans ces pyramides, suivant le niveau, une région peut n'être qu'un simple pixel/voxel ou au contraire représenter une zone très grande de l'image.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 6.1 – Influence de la pénalisation de longueur sur la pyramide construite : (a) image « Girl », (b) Un niveau de la pyramide avec la longueur élémentaire d'un surfel égale à 1, (c) Même niveau de la pyramide avec la longueur élémentaire corrigée. Tous les bords des régions de la pyramide incluses dans la partition (c) sont superposés sur l'image (d). Les bords les plus clairs sont ceux qui survivent au plus haut niveau dans la pyramide.

A chaque niveau, l'image est partitionnée en régions, chaque région ayant des caractéristiques photométriques, topologiques et géométriques propres. Dans tout processus de construction de pyramides, ces caractéristiques doivent pouvoir être évaluées rapidement et si possible précisément, pour réaliser les fusions de régions de la manière la plus pertinente possible.

Nous explorons actuellement les techniques de hiérarchisation de l'espace discret à la fois pour analyser l'image à différentes échelles mais aussi pour diriger un processus de minimisation. La thèse de Martin Braure de Calignon démarre sur ce sujet et se fait en collaboration avec Luc Brun (GREYC, Caen) [28, 63]. L'énergie est définie pour toute partition, similairement à une énergie de Mumford-Shah. Une pyramide combinatoire [BK03b, BK06] code toute la hiérarchie de partition, topologiquement et géométriquement. Des estimateurs géométriques discrets sont utilisés pour définir les énergies du modèle. La recherche du minimum se fait par fusion gloutonne de régions adjacentes. Des premiers résultats sont donnés sur la Figure 6.1. Ces travaux pourrait aussi être étendus à la dimension 3, en utilisant le formalisme des pyramides généralisées [GSDL05, GSDL06].

Enfin, on peut noter noter que la mesure discrète d'intégrale (Définition 5.37, page 117) montre que le modèle d'énergie de Mumford-Shah se transforme aussi naturellement en problème combinatoire, comme le modèle des contours actifs. Il est aussi asymptotiquement équivalent à son pendant continu.

Géométrie discrète bruitée - ANR Blanche GéoDiB

Notre projet d'ANR Blanche GéoDiB portant sur la géométrie des objets discrets bruités vient d'être accepté pour une durée de 4 ans. Il regroupe quatre laboratoires spécialistes de la géométrie discrète : le LORIA, le LIRIS, le LLAIC, le LaBRI. L'objectif est de traiter le bruit (binaire) dans l'acquisition d'objets avec des outils de géométrie discrète. La couverture tangentielle et les segments maximaux se sont révélés être des primitives très puissantes pour analyser les objets discrets classiques. Les techniques de droites épaisses et de couverture tangentielle épaisse semblent donc très prometteuses. L'étude de ces segments maximaux épais, de leurs propriétés à échelle fixée comme en asymptotique, permettra sans doute de définir des estimateurs multigrille convergents. Il faudra très certainement proposer de nouveaux modèles combinatoires des segments épais, avant de pouvoir déduire leur comportement asymptotique. Des techniques d'optimisation basées sur le principe des modèles déformables discrets pourraient aussi donner des moyens d'approximer les contours discrets bruités. Enfin, une multi-résolution sur la couverture tangentielle déterminerait un espace échelle qui met en valeur les points significatifs du contour discret, de manière assez similaire avec les *scale spaces* classiques en traitement du signal et des images.

Applications biomédicales - ANR MDCA FoGRIMI

Les modèles déformables discrets ont montré aussi des potentialités intéressantes sur des applications très concrètes d'imagerie. Le lissage sous contraintes de contours cardiaques dans les IRM en est une bonne illustration. D'autres applications sont actuellement à l'étude, notamment l'utilisation de partitions déformables 3D qui combineraient les contraintes géométriques des modèles déformables discrets avec des techniques de structuration d'images par division et fusion. La thèse de Fabien Baldacci (dirigée par Pascal Desbarats et Achille Braquelaire) démarre sur ce sujet, avec pour objectif le recalage élastique dans les atlas anatomiques, sous contrainte topologique.

Un autre domaine d'application où ces techniques sont prometteuses est l'analyse de très grandes images, obtenues en microscopie virtuelle par Imagerie d'une Lame Entière (ILE). Une seule de ces images occupe 30 Go et a une résolution de l'ordre de 10^{12} pixels. Des applications en cytologie et en histologie sont envisageables avec ces images, mais nécessitent de nouvelles techniques. Les estimateurs géométriques discrets seraient alors intéressants pour de la mesure quantitative et les modèles déformables discrets permettraient de mettre des contraintes géométriques (type forme lisse) sur les segmentations obtenus par d'autres méthodes. Nous avons déposé un projet ANR Masse de données et connaissances ambiantes sur ce sujet, dénommé FoGRIMMI, avec le centre anti-cancéreux François Baclesse, le LUSAC (Cherbourg), le GREYC (Caen), le SIC (Poitiers).

Critère de minimisation pour l'estimation de courbure

Au Chapitre 3, le problème de l'estimation des courbures dans les modèles déformables discrets avait induit une question naturelle : *Doit-on rajouter de nouveaux critères dans la définition des estimateurs géométriques ?*

Il est clair qu'à un pas de discrétisation fixé, il existe une infinité de formes ayant même discrétisation. De fait, à part la convergence asymptotique, on voit peu de critères objectifs pour comparer les estimateurs géométriques à échelle fixée. Un défaut de ce critère est qu'il ne donne des garanties (presque) qu'à l'infini, ce qui ne correspond pas vraiment aux cas d'utilisation réels des estimateurs discrets.

En fait, les modèles déformables discrets suggèrent un critère objectif :

1. un estimateur géométrique doit tenir compte de *toutes* les formes continues sous-jacentes,
2. la bonne estimation est celle correspondant à la forme la plus probable,
3. la forme la plus probable est celle de moindre énergie.

Le meilleur estimateur de longueur serait donc celui qui minimise une énergie : c'est exactement l'estimateur proposé par Sloboda *et al.* [SS94, SZS98], si on enlève la contrainte d'être C^2. La longueur estimée d'une courbe discrète est la longueur de la courbe réelle la plus courte avec la même discrétisation. Elle minimise effectivement $\alpha \int ds$.

Le meilleur estimateur de courbure serait donc celui minimise $\beta \int \kappa^2 ds$. Si on s'intéresse à la famille des courbes C^2 par morceaux et C^1 partout, alors on peut prédire que la meilleure courbe sera une séquence d'arcs de cercle qui se touchent avec une jonction à tangente continue. On remarque que les algorithmes de segmentation en arcs de cercle [CGRT04] ne permettent pas d'obtenir une continuité de tangente. Une solution serait d'utiliser un contour actif classique sous contrainte pour déterminer cette courbe d'énergie minimale. Nous travaillons actuellement sur un algorithme discret, basé sur la couverture tangentielle, qui calcule effectivement cette courbe d'énergie minimale. Les premiers résultats sont donnés sur la Figure 6.2 et sur la Figure 6.3. C'est à notre connaissance l'estimateur le plus précis à ce jour. Les irrégularités observées sont dues à l'imprécision sur l'approximation de l'abscisse curviligne, qui est un paramètre utilisé dans l'algorithme.

Codage multi-résolution des cellules et ondelettes de surface discrète

Le principe de codage des cellules de la grille régulière s'étend naturellement à des cellules de taille variable, plus précisément des puissances de 2 comme on les trouve dans les pyramides multi-résolution

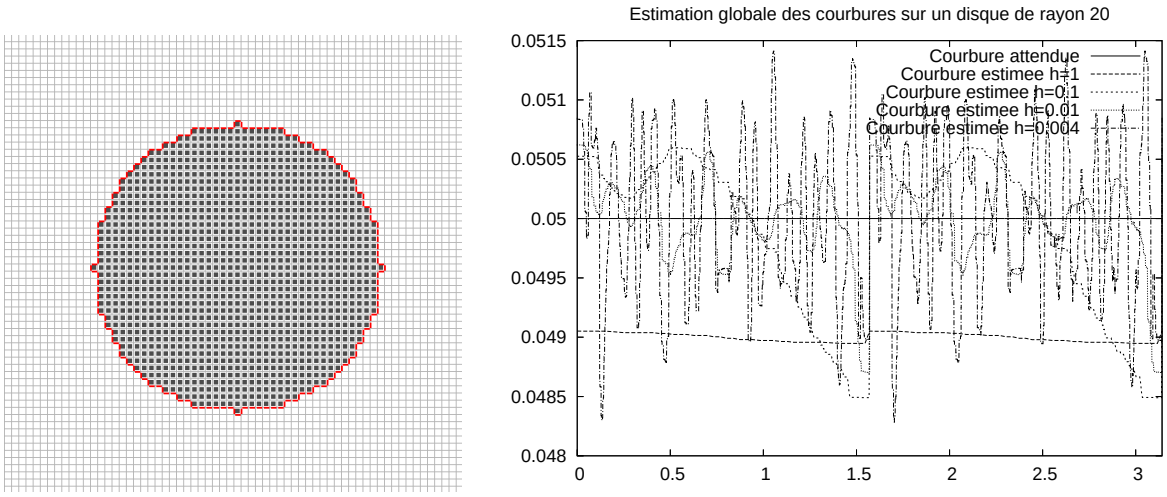


FIG. 6.2 – Estimation des courbures par minimisation de $\int \kappa^2 ds$. La forme discrétisée est un disque de rayon 20. L'erreur absolue relative est de l'ordre de 5%.

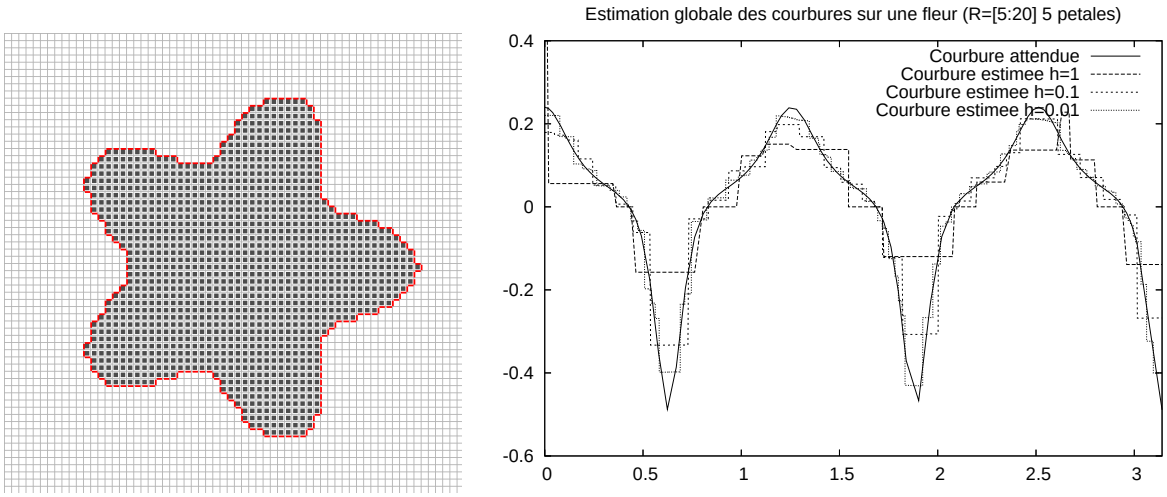


FIG. 6.3 – Estimation des courbures par minimisation de $\int \kappa^2 ds$. La forme discrétisée est une fleur à 5 pétales ($\kappa_{\min} \approx -0.5$, $\kappa_{\max} \approx 0.25$).

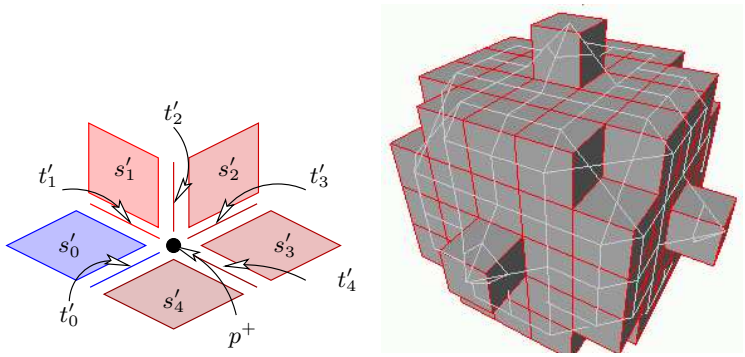


FIG. 6.4 – Ombrelle sur surface discrète et reconstruction polyédrique de surface discrète en 3D. A gauche est représentée la boucle autour de la 0-cellule p^+ traversant le bel s'_0. Cette boucle forme le chemin de bels $s'_0, \ldots, s'_4$, séparés par les 1-cellules (t'_i). A droite, le graphe de bel-adjacence est surimposée sur le dessin de la surface discrète. On vérifie que les boucles ou ombrelles définissent les faces polyédriques de ce graphe.

classiques. Il suffit en effet d'ordonner les cellules en tas suivant leurs coordonnées. En 1D, deux cellules de coordonnées $2x$ et $2x+1$ auront alors la même cellule mère de coordonnée x, qui sera donc géométriquement une cellule deux fois plus grande égale à l'union de ses deux filles. En nD, l'argument se généralise par produit cartésien. Enfin, la topologie et les coordonnées d'une cellule sont naturellement séparés dans notre formalisme. On définira donc la topologie d'une cellule mère à l'identique de ses cellules filles.

D'un point de vue codage, représenter une cellule d'un espace multi-résolution prend donc n bits supplémentaires (1 bit de plus par coordonnée). Ce qui est intéressant, c'est que tous les opérateurs (adjacence, incidence, bord, etc) s'écrivent strictement à l'identique dans cet espace discret multi-résolution, les bits de poids fort d'une coordonnée exprimant juste le niveau de la cellule dans sa hiérarchie binaire. Tous ces éléments constituent donc une base solide pour représenter des surfaces discrètes multi-résolution et offriraient par exemple une alternative aux travaux de Burguet et Malgouyres [BM02].

Enfin, nous étudions actuellement les opérateurs multi-résolution qui opèrent sur des chaînes de cellules, sortes de filtres projetant des cellules sur leurs cellules mères avec des coefficients choisis. Nous cherchons plus spécifiquement à définir ces opérateurs de manière analogue aux fonction d'ondelette et d'échelle de la théorie des ondelettes, avec la condition supplémentaire de commuter avec un opérateur bord. La construction de tels opérateurs permettrait alors d'analyser/synthétiser des surfaces qui sont bord d'objet discret, sans passer par des transformées en ondelette de l'espace tout entier. En effet, la commutation garantit alors que le bord de l'objet sous-échantillonné sera égal au sous-échantillonnage du bord de l'objet.

Ombrelles, reconstruction et intersection d'iso-surfaces.

D'une manière assez similaire au fait que $n-1$ chemins traversent tout bel sur une surface, il y a $n-2$ boucles qui traversent tout bel et qui tournent autour d'une même $n-3$-cellule, pour $n \geq 3$. En 3D, on constate que ces boucles définissent les *ombrelles* de Françon sur la surface discrète [Fra95]. Un exemple d'ombrelle en 3D est donné sur la Figure 6.4.

Un exemple d'application en 3D des ombrelles est la reconstruction d'une surface polyédrique qui est une 2-variété à partir de la surface discrète. Les ombrelles définissent exactement les faces orientées sur la graphe de bel-adjacence : ce graphe muni de ces faces est trivialement triangulable et définit une triangulation dans l'espace euclidien. On retrouve en fait la dualité entre surface discrète et iso-surface construite par « marching-cube », dualité que nous avions déjà mise en évidence dans des travaux antérieurs [12, 15, 4]. Une des conséquences majeures était un algorithme d'extraction d'iso-surface de complexité proportionnelle à la taille des données en sortie.

Un autre exemple d'application, plus novateur, est le calcul rapide d'intersection de surfaces discrètes. Les ombrelles permettent en effet d'extraire l'ensemble d'intersection (des cellules de dimension $n-2$) par suivi à partir d'une cellule initiale. Le calcul de telles intersections est notamment utilisé en analyse multi-échelle d'image 3D pour détecter de manière robuste les contours caractéristiques [Fid96]. L'intersection d'iso-surface est aussi utilisée en visualisation de surfaces implicites comportant des angles marqués [OB02].

Topologie des partitions et invariants topologiques

D'un point de vue plus fondamental, tout calcul géométrique nécessite une structure topologique. Ainsi, tout processus de segmentation doit pouvoir intégrer des outils pour contrôler la topologie des régions qu'il extrait. En 2D, cela ne cause guère de difficultés même pour des subdivisions du plan en cellules irrégulières. En 3D déjà, cela devient plus délicat et pourtant l'information topologique est importante. Par exemple, elle donne des contraintes de localisation entre composantes anatomiques (en imagerie cérébrale, on sait que le liquide céphalo-rachidien ne touche pas la matière blanche). Elle donne aussi les caractéristiques attendues des composantes recherchées (est-ce un objet avec ou sans trous/cavités ?). Enfin, un processus hiérarchique de segmentation comme les pyramides adaptatives doit aussi effectuer un contrôle topologique de ses fusions.

Même si ces travaux n'ont pas été directement évoqués dans ce mémoire, nous avons étudié cette problématique en l'attaquant sous deux angles, dans le cadre de la thèse de Sylvie Alayrangues. D'une part nous avons étudié et comparé les modèles topologiques de subdivision de surfaces et établi des équivalences entre les n-G-cartes, n-surfaces des ordres, et certains graphes d'incidence [18, 23]. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pascal Lienhardt (SIC, Poitiers) et Xavier Daragon (ESIEE, Marne-La-Vallée). D'autre part nous avons proposé des algorithmes de calcul de groupe d'homologie, un invariant topologique sur les complexes cellulaires [27, 9]. Ces recherches ont été réalisées en collaboration avec Laurent Fuchs et Samuel Peltier (SIC, Poitiers). Cet invariant a l'avantage d'être défini en dimension quelconque et est assez discriminant notamment en basses dimensions. Il reste encore à prolonger ces travaux et à les intégrer à un processus de segmentation qui utilise le contrôle topologique.

Autres curiosités

Enfin, ce mémoire a mis en lumière quelques petites curiosités et problèmes ouverts, dont la portée et la résolution dépassent sans doute le cadre de la géométrie discrète.

Une première question ouverte est la longueur de la plus petite arête d'une discrétisation de forme convexe lisse. Peut-on affirmer qu'elle grandira systématiquement pour des pas de plus en plus petits ? On a beaucoup d'information sur le comportement moyen asymptotique et sur la longueur maximale, mais cet aspect reste un problème ouvert. Par exemple, le disque de rayon 1.000.270 a une arête de longueur 8. Si jamais ces arêtes ne grandissent pas, un certain nombre d'estimations géométriques ne pourront être uniformes ou auront des vitesses de convergence réduites. Il faudra sans doute introduire la notion de vitesse de convergence uniforme presque partout.

Un résultat expérimental surprenant montre que, pour une discrétisation de disque, le nombre moyen de segments maximaux qui traversent un point semble osciller (converger ?) autour de la constante de Khinchin-Lévy. Celle-ci est définie par les racines n-èmes des n-èmes convergents des réels. Y a-t-il un lien caché ?

Enfin, on observe un décalage (théorique) entre la vitesse de convergence des estimateurs de longueur par polygone de longueur minimal (i.e. basé arêtes du CDP) et de ceux par intégration de normales alignées avec les segments maximaux. Elle est de $\mathcal{O}(h)$ pour les premiers et de $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{3}})$ (uniforme) ou $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{3}})$ (moyen). C'est assez étonnant car on sait que les arêtes et les segments maximaux ont la même qualité moyenne d'estimation de la tangente et que seule celle par segments maximaux est uniformément convergente. Il y a donc d'autres facteurs qui jouent pour déterminer une borne supérieure de la vitesse de convergence des estimateurs de longueur.

Annexe A

Bibliographie

[AB84] I. M. Anderson and J. C. Bezdek. Curvature and tangential deflection of discrete arcs : a theory based on the commutator of scatter matrix pairs and its application to vertex detection in planar shape data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :27–40, 1984.

[AB94] R. Adams and L. Bischof. Seeded region growing. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 16(6) :641–647, 1994.

[ABF99] G. Aubert and L. Blanc-Féraud. Some remarks on the equivalence between 2d and 3d classical snakes and geodesic active contours. *Int. Journal of Computer Vision*, 34(1) :19–28, 1999.

[ABFJB03] G. Aubert, M. Barlaud, O. Faugeras, and S. Jehan-Besson. Image segmentation using active contours : Calculus of variations or shape gradients ? *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(6) :2128–2154, 2003.

[AC05] R. Ardon and L. D. Cohen. Fast constrained surface extraction by minimal paths. *International Journal on Computer Vision. Special Issue on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, 2005. To appear.

[AFH81] E. Artzy, G. Frieder, and G.T. Herman. The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, 15 :1–24, 1981.

[AHL96] R. Aharoni, G. T. Herman, and M. Loebl. Jordan graphs. *Graphical Models and Image Processing*, 58(4) :345–359, July 1996.

[AKKO01] T. Asano, Y. Kawamura, R. Klette, and K. Obokata. Minimum-length polygons in approximation sausages. In C. Arcelli, L. P. Cordella, and G. Sanniti di Baja, editors, *Proc. 4th Int. Workshop on Visual Form (IWVF4), Capri, Italy*, volume 2059 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 103–112. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[AMG93] A. Ackah-Miezan and A. Gagalowicz. Discrete models for energy-minimizing segmentation. In *Proc of Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV93)*, pages 200–207, 1993.

[APBC97] E. A. Ashton, K. J. Parker, M. J. Berg, and C.W. Chen. A Novel Volumetric Feature Extraction Technique with Applications to MR Images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(4) :365–371, August 1997.

[AS95] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2) :269–277, 1995.

[AWJ90] A. A. Amini, T. E. Weymouth, and R. C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(9) :855–867, 1990.

[Bas94] B. Bascle. *Contributions et applications des modèles déformables en vision par ordinateur*. PhD thesis, Université de Nice, Sophia Antipolis, France, July 1994.

[BB91] A. Balog and I. Bárány. On the convex hull of the integer points in a disc. In *SCG '91 : Proceedings of the seventh annual symposium on Computational geometry*, pages 162–165. ACM Press, 1991.

[BB98] J.-P. Braquelaire and L. Brun. Image segmentation with topological maps and inter-pixel representation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 9(1) :62–79, 1998.

[BC00] B. Bourdin and A. Chambolle. Implementation of an adaptive finite-element approximation of the mumford-shah functional. *Numerische Mathematik*, 85(4) :609–646, 2000.

[BDFCBL02] A. Benassarou, J. De Freitas Caires, E. Bittar, and L. Lucas. An integrated framework to analyze and visualize the evolution of multiple topology-changing objects in 4d image datasets. In T. Ertl B. Girod H.-P. Seidel G. Greiner, H. Niemann, editor, *Proc. 7th Int. Fall Workshop on Vision, Modeling and Visualization (VMV'02), Erlangen, Germany*, pages 147–154, November 2002.

[Ber90] J. Berstel. *Mots, Mélanges offerts a M.P. Schützenberger*, chapter Tracé de droites, fractions continues et morphisme itérés, pages 298–309. Hermès, 1990. In french.

[Ber95] P. Bertolino. *Contribution des pyramides irrégulières en segmentation d'images multirésolution.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), France, 1995. (In french.).

[Ber03] M. Berger. *A Panoramic View of Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, 2003.

[BFL06] Y. Boykov and G. Funka-Lea. Graph cuts and efficient n-D image segmentation. *Int. J. Comput. Vis.*, 70(2) :109–131, 2006.

[BK03a] Y. Boykov and V. Kolmogorov. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts. In *Proc. Int. Cof. Comput. Vis. (ICCV'2003), Nice, France*, volume 1, pages 26–33, November 2003.

[BK03b] L. Brun and W. Kropatsch. Receptive fields within the combinatorial pyramid framework. *Graphical Models*, 65 :23–42, 2003.

[BK04] V. Brimkov and R. Klette. Curves, hypersurfaces, and good pairs of adjacency relations. In R. Klette and J. Žunić, editors, *Proc. Int. Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2004), Auckland, New Zealand, December 1-3*, volume 3322 of *LNCS*, pages 276–290. Springer, 2004.

[BK06] L. Brun and W. Kropatsch. Contains and inside relationships within combinatorial pyramids. *Pattern Recognition*, 39(4) :515–526, April 2006.

[BLS03] J. Bredno, T. M. Lehmann, and K. Spitzer. A general discrete contour model in two, three, and four dimensions for topology-adaptive multichannel segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 25(5) :550–563, 2003.

[BM99] G. Bertrand and R. Malgouyres. Some topological properties of surfaces in z^3. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11(3) :207–221, 1999.

[BM02] J. Burguet and R. Malgouyres. Multi-scale discrete surfaces. In A. Braquelaire, J.-O. Lachaud, and A. Vialard, editors, *Proc. 10th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2002), Bordeaux, France*, volume 2301 of *LNCS*, pages 338–349. Springer, April 2002.

[BMM05] L. Brun, M. Mokhtari, and F. Meyer. Hierarchical watersheds within the combinatorial pyramid framework. In *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France)*, volume 3429 of *LNCS*, pages 34–44. Springer, 2005.

[Bri06] V. E. Brimkov. Discrete volume polyhedrization is strongly np-hard. Research report CITR-TR-179, CITR, The University of Auckland, New Zealand, March 2006.

[BVZ01] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11) :1222–1239, November 2001.

[BYM91] J. Besag, J. York, and A. Mollié. Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics (Historical Archive)*, 43 :1–20, March 1991.

[BZ87] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987.

[Cas01] C. Cassen. *Développement d'une méthode de segmentation applicable aux images d'IRM cardiaque*. PhD thesis, Université Bordeaux 1. Ecole doctorale Mathématiques et Informatique., 2001.

[CBA93] L. Cohen, E. Bardinet, and N. Ayache. Surface reconstruction using active contour models. In *SPIE 93 Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1993.

[CBG99] Y. Cointepas, I. Bloch, and L. Garnero. A discrete homotopic deformable model dealing with objects with different local dimensions. In *Proc 8th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99)*, number 1568 in Lecture Notes in Computer Science, pages 259–271. Springer Verlag, 1999.

[CC93] L. D. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, November 1993.

[CCCD93] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.

[CDBB01] C. Cassen, J.-P. Domenger, J.-P. Braquelaire, and J.-L. Barat. Left ventricular segmentation in mri images. In *Proc. 2nd Int. Symp. on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001), Pula, Croatia*, pages 244–249, 2001.

[CDF02] J. C. Ciria, E. Domínguez, and A. R. Francés. Separation theorems for simplicity 26-surfaces. In A. Braquelaire, J.-O. Lachaud, and A. Vialard, editors, *Proc. 10th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2002), Bordeaux, France*, volume 2301 of *LNCS*, pages 45–56. Springer, April 2002.

[CDMD+04] J. C. Ciria, A. De Miguel, E. Domínguez, A. R. Francés, and A. Quintero. A maximum set of (26,6)-connected digital surfaces. In R. Klette and J. Žunić, editors, *Proc. Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2004), Auckland, New Zealand*, volume 3322 of *LNCS*, pages 291–306. Springer, December 2004.

[CDRT01] D. Coeurjolly, I. Debled-Rennesson, and O. Teytaud. Segmentation and length estimation of 3d discrete curves. pages 299–317, 2001.

[CGRT04] D. Coeurjolly, Y. Gérard, J.-P. Reveillès, and L. Tougne. An elementary algorithm for digital arc segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 139 :31–50, 2004.

[CHSLH02] C.-M. Chen, H. Horng-Shing Lu, and Y.-S. Huang. Cell-based dual snake model : a new approach to extracting highly winding boundaries in the ultrasound images. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 28(8) :1061–1073, 2002.

[CK97] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models : a minimal path approach. *Int. Journal of Computer Vision*, 24(1) :57–78, August 1997.

[CK04] D. Coeurjolly and R. Klette. A comparative evaluation of length estimators of digital curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2) :252–258, 2004.

[CKS97] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *Int. Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.

[CKSS97] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro, and C. Sbert. Minimal surfaces based object segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 19(4) :394–398, 1997.

[Coe02] D. Coeurjolly. *Algorithmique et géométrie pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. PhD thesis, Université Lyon 2, December 2002.

[Coh91] L. D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53(2) :211–218, March 1991.

[CS03] D. Coeurjolly and S. Svensson. Estimation of curvature along curves with application to fibres in 3d images of paper. In *Proc. Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'2003)*, volume 2749 of *LNCS*, pages 247–254, January 2003.

[CSAD04] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, and M. Desbrun. Variational shape approximation. *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, pages 905–914, 2004.

[CSD96] A. Chakraborty, L.H. Staib, and J.S. Duncan. Deformable boundary finding in medical images by integrating gradient and region information. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(6) :859–870, December 1996.

[CV01] T. F. Chan and L. A. Vese. A level set algorithm for minimizing the mumford-shah functional in image processing. In *Proc. IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods (VLSM'01)*, pages 161–168. IEEE Computer Society, 2001.

[DC01] T. Deschamps and L. D. Cohen. Fast extraction of minimal paths in 3d images and applications to virtual endoscopy. *Medical Image Analysis*, 5(4) :281–299, December 2001.

[Del94a] H. Delingette. Simplex Meshes : a General Representation for 3D Shape Reconstruction. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, Seattle WA, USA, 1994.

[Del94b] H. Delingette. Simplex Meshes : a General Representation for 3D Shape Reconstruction. Research Report 2214, INRIA, Sophia Antipolis, France, March 1994.

[Del99] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2) :111–146, September 1999.

[Der92] R. Deriche. Recursively implementing the gaussian filter and its derivatives. In *Proc. 2nd Int. Conference on Image Processing*, pages 263–267, Singapore, September 1992.

[DJ91] M. W. Davis and T. Januszkiewicz. Hyperbolization of polyhedra. *Journal of Differentiel Geometry*, 34 :347–388, 1991.

[DM00] H. Delingette and J. Montagnat. New algorithms for controlling active contours shape and topology. In D. Vernon, editor, *Proc. of European Conf. on Comput. Vision (ECCV'2000), Dublin, Ireland*, Lecture Notes in Computer Science, pages 381–395. Springer-Verlag, Berlin, June 2000.

[DMRS01] M. Droske, B. Meyer, M. Rumpf, and C. Schaller. An adaptive level set method for medical image segmentation. In R. Leahy and M. Insana, editors, *Proc. of the Annual Symposium on Information Processing in Medical Imaging*. Springer, Lecture Notes Computer Science, 2001.

[DQ04] Y. Duan and H. Qin. A subdivision-based deformable model for surface reconstruction of unknown topology. *Graph. Models*, 66(4) :181–202, 2004.

[DR95] I. Debled-Rennesson. *Etude et reconnaissance des droites et plans discrets*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, December 1995. In french.

[DR03] G. Damiand and P. Resch. Split-and-merge algorithms defined on topological maps for 3d image segmentation. *Graph. Models*, 65(1-3) :149–167, 2003.

[DRDR04] H. Doerksen-Reiter and I. Debled-Rennesson. Convex and concave parts of digital curves. In *Dagstuhl Seminar "Geometric Properties from Incomplete Data"*, March 2004.

[DRDR06] H. Doerksen-Reiter and I. Debled-Rennesson. Convex and concave parts of digital curves. In R. Klette, R. Kozera, L. Noakes, and J. Weickert, editors, *Geometric Properties for Incomplete Data*, volume 31 of *Computational Imaging and Vision*, pages 145–160, 2006.

[DRR95] I. Debled-Rennesson and J.-P. Reveillès. A linear algorithm for segmentation of discrete curves. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9 :635–662, 1995.

[DRRRD03] I. Debled-Rennesson, J.-L. Rémy, and J. Rouyer-Degli. Detection of discrete convexity of polyominos. *Discrete Applied Mathematics*, 125 :115–133, 2003.

[DS87] L. Dorst and A. W. M. Smeulders. Length estimators for digitized contours. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 40(3) :311–333, 1987.

[EC95] Y. Elomary and J.-M. Chassery. Contours actifs discrets en segmentation. In *Proc. 5th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'95), Clermont-Ferrand, September 25-27*, 1995. In french.

[Elo94] Y. Elomary. *Modèles déformables et multirésolution pour la détection de contours en traitement d'images*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, October 1994.

[EPRR79] T. J. Ellis, D. Proffitt, D. Rosen, and W. Rutkowski. Measurement of the lengths of digitized curved lines. *Computer Graphics and Image Processing*, 10(4) :333–347, August 1979.

[Fes05] F. Feschet. Canonical representations of discrete curves. *Pattern Analysis & Applications*, 8(1) :84–94, 2005.

[Fid96] M. Fidrich. Iso-Surface Extraction in 4D with Applications Related to Scale Space. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–268, Lyon, France, 1996. Springer-Verlag.

[FR97] S. Fejes and A. Rosenfeld. Discrete active models and applications. *Pattern Recognition*, 30(5) :817–835, 1997.

[Fra95] J. Françon. Discrete Combinatorial Surfaces. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 57(1) :20–26, January 1995.

[FSS03] R. P. Fedkiw, G. Sapiro, and C.-W. Shu. Shock capturing, level sets, and pde based methods in computer vision and image processing : a review of osher's contributions. *J. Comput. Phys.*, 185(2) :309–341, 2003.

[FT99] F. Feschet and L. Tougne. Optimal time computation of the tangent of a discrete curve : Application to the curvature. In *Proc 8th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99)*, number 1568 in Lecture Notes in Computer Science, pages 31–40. Springer Verlag, 1999.

[FT05] F. Feschet and L. Tougne. On the min dss problem of closed discrete curves. *Discrete Applied Mathematics*, 151(1-3) :138–153, 2005.

[Fuc97] L. Fuchs. *Une spécification formelle des modèles de courbes et de surfaces de forme libre*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1997.

[GF00] J. Gomes and O. Faugeras. Reconciling distances functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2) :209–223, June 2000.

[GG87] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. pages 564–584, 1987.

[GKRR02] R. Goldenberg, R. Kimmel, E. Rivlin, and M. Rudzsky. Cortex segmentation : a fast variational geometric approach. *IEEE Trans Med Imaging.*, 21(12) :1544–1551, 2002.

[GL95] A. Gross and L. Latecki. Digitizations preserving topological and differential geometric properties. *Comput. Vis. Image Underst.*, 62(3) :370–381, 1995.

[GLMC03] L. Guigues, H. Le Men, and J.-P. Cocquerez. Scale-sets image analysis. In *Int. Conf. on Image Processing (ICIP'2003)*, volume 2, pages 45–48. IEEE, 2003.

[GN97] S. R. Gunn and M. S. Nixon. A robust snake implementation ; a dual active contour. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 19(1) :63–68, 1997.

[God71] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, France, 1971.

[GPS89] D. Greig, B. Porteous, and A. Seheult. Exact maximum a posteriori estimation for binary images. *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 51(2) :271–279, 1989.

[GSDL05] C. Grasset-Simon, G. Damiand, and P. Lienhardt. Receptive fields for generalized map pyramids : the notion of generalized orbit. In *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France)*, volume 3429 of *LNCS*, pages 56–67. Springer, 2005.

[GSDL06] C. Grasset-Simon, G. Damiand, and P. Lienhardt. nd generalized map pyramids : Definition, representations and basic operations. *Pattern Recognition*, 39(4) :527–538, 2006.

[GSO00] G. A. Giraldi, E. Strauss, and A. A. Oliveira. A boundary extraction method based on dual-t-snakes and dynamic programming. In *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'00)*, volume 1, pages 1044–1049, 2000.

[GSZPW98] A. Ghanei, Hamid Soltanian-Zadeh, and J. P. Windham. A 3D deformable surface model for segmentation of objects from volumetric data in medical images. *Computers in Biology and Medicine*, 28 :239–253, 1998.

[GU89] D. Gordon and J. K. Udupa. Fast surface tracking in three-dimensional binary images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 45(2) :196–241, February 1989.

[Gué95] A. Guéziec. Surface representation with deformable splines : Using decoupled variables. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2(1) :69–80, March 1995.

[HDD+93] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Mesh Optimization. *Computer Graphics, Annual Conference Series (SIGGRAPH'93 Proceedings)*, pages 19–26, August 1993.

[Her92] G. T. Herman. Discrete Multidimensional Jordan Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54(6) :507–515, November 1992.

[Her93] G.T. Herman. Oriented Surfaces in Digital Spaces. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 55(5) :381–396, September 1993.

[Her98a] G. T. Herman. Finitary 1-simply connected digital spaces. *Graphical Models and Image Processing*, 60(1) :46–56, January 1998.

[Her98b] G. T. Herman. *Geometry of digital spaces.* Birkhäuser, Boston, 1998.

[HK98] S. A. Hojjatoleslami and J. Kittler. Region growing : A new approach. *IEEE Trans. Image Process.*, 7(7) :1079–1084, July 1998.

[HK03] S. Hermann and R. Klette. Multigrid analysis of curvature estimators. In *Proc. Image Vision Computing, New Zealand*, 2003.

[HK06] S. Hermann and R. Klette. A comparative study on 2d curvature estimators. Research report CITR-TR-183, CITR, The University of Auckland, New Zealand, 2006.

[Hor99] M. S. Horritt. A statistical active contour model for sar image segmentation. *Image Vision Comput.*, 17(3-4) :213–224, 1999.

[HP76] S. L. Horowitz and T. Pavlidis. Picture segmentation by a tree traversal algorithm. *J. ACM*, 23(2) :368–388, 1976.

[Hux90] M. N. Huxley. Exponential sums and lattice points. *Proc. London Math. Soc.*, 60 :471–502, 1990.

[HW60] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press, fourth edition, 1960.

[HW83] G.T. Herman and D. Webster. A topological proof of a surface tracking algorithm. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 23 :162–177, 1983.

[Imi01] A. Imiya. Curvature flow in discrete space. In G. Bertrand, A. Imiya, and R. Klette, editors, *Digital and image geometry : advanced lectures*, pages 229–249. Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[ISN04] A. Imiya, M. Saito, and K. Nakamura. Thinning by curvature flow. In R. Klette and J. Žunić, editors, *Proc. Int. Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2004), Auckland, New Zealand, December 1-3*, volume 3322 of *LNCS*, pages 432–442. Springer, 2004.

[JB03] S. Jehan-Besson. *Modèles de contours actifs basés régions pour la segmentation d'images et de vidéos*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, January 2003. in french.

[JBBA03] S. Jehan-Besson, M. Barlaud, and G. Aubert. Dream2s : Deformable regions driven by an eulerian accurate minimization method for image and video segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53 :45–70, June 2003.

[JM92] J. M. Jolion and A. Montanvert. The adaptive pyramid : a framework for 2D image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing : Image Understanding*, 55(3) :339–349, May 1992.

[JWR04] A. C. Jalba, M. H. F. Wilkinson, and J. B. T. M. Roerdink. Cpm : a deformable model for shape recovery and segmentation based on charged particles. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(10) :1–16, 2004.

[KB89] J. Koplowitz and A. M. Bruckstein. Design of perimeter estimators for digitized planar shapes. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6) :611–622, 1989.

[KF92] V. Kovalevsky and S. Fuchs. Theoretical and experimental analysis of the accuracy of perimeter estimates. In Förster and Ruwiedel, editors, *Proc. Robust Computer Vision*, pages 218–242, 1992.

[KGV83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598) :671–680, 1983.

[Kim82] C. E. Kim. Digital convexity, straightness, and convex polygons. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 6(6) :618–626, 1982.

[Kim01] S. Kim. A O(n) level set method for eikonal equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(6) :2178–2193, April 2001.

[KKM90] E. Khalimsky, R. Kopperman, and P. R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36 :1–17, 1990.

[KKM91] T. Y. Kong, R. D. Kopperman, and P. R. Meyer. A topological approach to digital topology. *Am. Math. Monthly*, 98 :901–917, 1991.

[Köt02] Ullrich Köthe. Xpmaps and topological segmentation - a unified approach to finite topologies in the plane. In *Proc. 10th Int. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'02)*, pages 22–33. Springer-Verlag, 2002.

[Kov89] V. A. Kovalevsky. Finite Topology as Applied to Image Analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(2) :141–161, May 1989.

[KR89] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital Topology : Introduction and Survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3) :357–393, December 1989.

[KR04a] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry - Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.

[KR04b] R. Klette and A. Rosenfeld. Digital straightness – a review. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3) :197–230, April 2004.

[KS01] R. Klette and H. J. Sun. Digital planar segment based polyhedrization for surface area estimation. In C. Arcelli, L. P. Cordella, and G. Sanniti di Baja, editors, *Proc. 4th Int. Workshop on Visual Form (IWVF4), Capri, Italy*, volume 2059 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 356–366. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[KU92] T.Y. Kong and J.K. Udupa. A justification of a fast surface tracking algorithm. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 54(6) :507–515, November 1992.

[KW87] M. Kass and A. Witkin. Analyzing oriented patterns. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 37(3) :362–385, March 1987.

[KWT88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1988.

[KŽ00] R. Klette and J. Žunić. Multigrid convergence of calculated features in image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13 :173–191, 2000.

[Lat97] L. J. Latecki. 3D well-composed pictures. *Graphical Models and Image Processing*, 59(3) :164–172, May 1997.

[LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching Cubes : A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, July 1987.

[LC91] F. Leitner and P. Cinquin. Complex topology 3D objects segmentation. In *Proc. of Advances in Intelligent Robotics Systems*, volume 1609 of *SPIE*, Boston, November 1991.

[LCG98] L. J. Latecki, C. Conrad, and A. Gross. Preserving topology by a digitization process. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 8(2) :131–159, March 1998.

[Lec89] Y. G. Leclerc. Constructing simple stable descriptions for image partitioning. *International Journal of Computer Vision*, 3(1) :73–102, May 1989.

[Lei93] F. Leitner. *Segmentation dynamique d'images 3D.* PhD thesis, Université J. Fourier, Grenoble, France, September 1993.

[Len97] A. Lenoir. Fast estimation of mean curvature on the surface of a 3d discrete object. In *Proc. 7th Int. Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'97), Montpellier, France*, pages 175–186, London, UK, 1997. Springer-Verlag.

[Len99] A. Lenoir. *Des Outils pour les Surfaces Discrètes. Estimation d'Invariants Géométriques. Préservation de la Topologie. Tracé de Géodésiques. Visualisation.* PhD thesis, Université de Caen, France, September 1999.

[LER95] L. Latecki, U. Eckhardt, and A. Rosenfeld. Well-composed sets. *Comput. Vis. Image Underst.*, 61(1) :70–83, 1995.

[LF98] Papier L. and J. Françon. Evaluation de la normale au bord d'un objet discret 3d. *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, 13(2) :205–226, 1998. In french.

[Lin03] J. Lindblad. Surface area estimation of digitized planes using weighted local configurations. In I. Nyström, G. Sanniti Di Baja, and S. Svensson, editors, *Proc. 11th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2003), Naples, Italy*, volume 2886 of *LNCS*, pages 348–357. Springer, 2003.

[Lin05] J. Lindblad. Surface volume estimation of digitized hyperplanes using weighted local configurations. In *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France)*, volume 3429 of *LNCS*, pages 252–262. Springer, 2005.

[Liu77] H.K. Liu. Two and three dimensional boundary detection. *Computer Graphics and Image Processing*, 6(2) :123–134, April 1977.

[LKE00] C. Lürig, L. Kobbelt, and T. Ertl. Hierarchical solutions for the deformable surface problem in visualization. *Graphical Models*, 62(1) :2–18, January 2000.

[LL93] F. Leymarie and M.D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6) :617–634, June 1993.

[LMR96] A. Lenoir, R. Malgouyres, and M. Revenu. Fast computation of the normal vector field of the surface of a 3D discrete object. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'96), Lyon, France*, volume 1176 of *LNCS*, pages 101–112. Springer-Verlag, 1996.

[LMT99] J. Liang, T. McInerney, and D. Terzopoulos. United snakes. In *Proc International Conference on Computer Vision (ICCV '99)*, volume 2, page 933. IEEE Computer Society, 1999.

[LN02] J. Lindblad and I. Nyström. Surface area estimation of digitized 3D objects using local computations. In A. Braquelaire, J.-O. Lachaud, and A. Vialard, editors, *Proc. 10th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2002), Bordeaux, France*, volume 2301 of *LNCS*, pages 267–278. Springer, April 2002.

[Maî03] H. Maître. *Le traitement des images.* Hermès Science Publications, Paris, 2003.

[Mal93] G. Malandain. On topology in multidimensional discrete spaces. Research Report 2098, INRIA, France, 1993.

[Mal96] R. Malgouyres. There is no local characterization of separating and thin objects in z^3. *Theoretical Computer Science*, 163 :303–308, August 1996.

[Mal97] R. Malgouyres. A definition of surfaces of z^3 ; a new 3d discrete jordan theorem. *Theoretical Computer Science*, 186 :1–41, October 1997.

[Mal98] R. Malgouyres. Local characterization of strong surfaces within strongly separating objects. *Pattern Recognition Letters*, 19 :341–349, March 1998.

[Mar03] M. Marji. *On the detection of dominant points on digital planar curves*. PhD thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan, 2003.

[MB95] O. Monga and S. Benayoun. Using partial derivatives of 3d images to extract typical surface features. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(2) :171–189, March 1995.

[MBL+91] J. V. Miller, D. E. Breen, W. E. Lorensen, R. M. O'Barnes, and M. J. Wozny. Geometrically deformed models : A method for extracting closed geometric models from volume data. *Computer Graphics (SIGGRAPH'91 Proceedings)*, 25(4), July 1991.

[MDA01] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A review of deformable surfaces : topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19(14) :1023–1040, December 2001.

[MDSA00] J. Montagnat, H. Delingette, N. Scapel, and N. Ayache. Surface simplex meshes for 3d medical image segmentation. In *Proc. IEEE Int. Conf. Rob. Autom.*, volume 1, pages 864–869, 2000.

[Mey94] F. Meyer. Topographic distance and watershed lines. *Signal Process.*, 38(1) :113–125, 1994.

[MK02] D. N. Metaxas and I. A. Kakadiaris. Elastically adaptive deformable models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 24(10) :1310–1321, 2002.

[MMR91] A. Montanvert, P. Meer, and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 13(4) :307–316, 1991.

[MR81] D. G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in Three-Dimensional Digital Images. *Information and Control*, 51(3) :227–247, December 1981.

[MS89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 :577–684, 1989.

[MS95] J.-M. Morel and S. Solimini. *Variational methods in image segmentation*, volume 14 of *Progress in Nonlinear Differentiel Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.

[MSK95] J. Matas, Z. Shao, and J. Kittler. Estimation of curvature and tangent direction by median filtered differencing. In *Proc. of 8th International Conference on Image Analysis and Processing*, pages 83–88, 1995.

[MSMM93] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models : Overview, implementation and applications. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, pages 194–199, 1993.

[MSV94] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. In J-O. Eklundh, editor, *Proc. of 3rd European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, volume 800 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–13. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[MSV95] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape Modelling with Front Propagation : A Level Set Approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :158–174, February 1995.

[MT95a] T. McInerney and D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1) :69–83, January 1995.

[MT95b] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Snakes. In *Proc. of Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, pages 92–101, Nice, France, 1995. Springer-Verlag.

[MT97] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Surfaces. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 23–32, Grenoble, France, March 1997. Springer-Verlag.

[NWvdB03] H. T. Nguyen, M. Worring, and R. van den Boomgaard. Watersnakes : Energy-driven watershed segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(3) :330–342, 2003.

[OB02] Y. Ohtake and A. G. Belyaev. Dual/primal mesh optimization for polygonized implicit surfaces. In *Proc. 7th ACM symposium on Solid modeling and applications (SMA'02), Saarbrücken, Germany*, pages 171–178, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.

[OP03] S. Osher and N. Paragios, editors. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag, 2003.

[OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.

[PH97] J. Popović and H. Hoppe. Progressive simplicial complexes. In Turner Whitted, editor, *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, Annual Conference Series, pages 217–224. ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1997. ISBN 0-89791-896-7.

[PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.

[Rev91] J.-P. Reveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d'etat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991. In french.

[RKW91] A. Rosenfeld, T.Y. Kong, and A.Y. Wu. Digital Surfaces. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 53(4) :305–312, July 1991.

[Ron94] R. Ronfard. Region-based strategies for active contour models. *Int. J. Comput. Vision*, 13(2) :229–251, 1994.

[Ros70] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *J. ACM*, 17(1) :146–160, 1970.

[Ros79] A. Rosenfeld. Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86(8) :621–630, 1979.

[RvV02] B. Rieger and L. J. van Vliet. Curvature of n-dimensionnal space curves in grey-value images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 11(7) :738–745, July 2002.

[SD96] L.H. Staib and J.S. Duncan. Model-based deformable surface finding for medical images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(5) :720–731, October 1996.

[Set99a] J. A. Sethian. Fast marching methods. *SIAM Rev.*, 41(2) :199–235, 1999.

[Set99b] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, volume 3 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 1999.

[Siv04] I. Sivignon. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surfaces en géométrie discrète*. PhD thesis, Laboratoire des Images et Signaux (LIS), INPG, Grenoble, November 2004.

[SK05] Y. Shi and W. C. Karl. Real-time tracking using level sets. In *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, volume 2, pages 34–41, 2005.

[SKBG96] G. Székely, A. Kelemen, C. Brechbühler, and G. Gerig. Segmentation of 2-D and 3-D objects from mri volume data using constrained elastic deformations of flexible fourier contour and surface models. *Medical Image Analysis*, 1(1) :19–34, March 1996.

[SKS97] K. Siddiqi, B. B. Kimia, and C.-W. Shu. Geometric shock-capturing ENO schemes for subpixel interpolation, computation and curve evolution. *Graph. Models Image Process.*, 59(5) :278–301, 1997.

[SS94] F. Sloboda and J. Stoer. On piecewise linear approximation of planar Jordan curves. *J. Comput. Appl. Math.*, 55(3) :369–383, 1994.

[Sto94] G. Storvik. A bayesian approach to dynamic contours through stochastic sampling and simulated annealing. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 16(10) :976–986, 1994.

[Str99a] J. Strain. Fast tree-based redistancing for level set computations. *Journal of Computational Physics*, 152(2) :664–686, July 1999.

[Str99b] J. Strain. Tree methods for moving interfaces. *Journal of Computational Physics*, 151(2) :616–648, May 1999.

[SZK98] F. Sloboda, B. Zat'ko, and R. Klette. Topology of grid continua. In R. A. Melter, A. Y. Wu, and L. J. Latecki, editors, *Vision Geometry VII*, volume 3454, pages 52–63. SPIE, 1998.

[SZS98] F. Sloboda, B. Zat'ko, and J. Stoer. On approximation of planar one-dimensional continua. In R. Klette, A. Rosenfeld, and F. Sloboda, editors, *Advances in Digital and Computational Geometry*, pages 113–160, 1998.

[Tag97] H. D. Tagare. Deformable 2-D template matching using orthogonal curves. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(1) :108–117, February 1997.

[TD03] M. Tajine and A. Daurat. On local definitions of length of digital curves. In I. Nyström, G. Sanniti Di Baja, and S. Svensson, editors, *Proc. 11th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2003), Naples, Italy*, volume 2886 of *LNCS*, pages 114–123. Springer, 2003.

[TDR99] P. Tellier and I. Debled-Rennesson. 3D discrete normal vectors. In *Proc. of 8th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'99), Marne-la-Vallée, France*, volume 1568 of *LNCS*, pages 447–457. Springer-Verlag, 1999.

[TE00] A.-K. Tornberg and B. Engquist. A finite element based level-set method for multiphase flow applications. *Computing and Visualization in Science*, 3 :93–101, May 2000.

[Ter86] D. Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(4) :413–424, 1986.

[Thü01] G. Thürmer. Smoothing normal vectors on discrete surfaces while preserving slope discontinuities. *Computer Graphics Forum*, 20(2) :103–113, June 2001.

[TK97] H. Tek and B. B. Kimia. Volumetric segmentation of medical images by three-dimensional bubbles. *Computer Vision and Image Understanding*, 65(2) :246–258, February 1997.

[Toh03] J. Tohka. *Global optimization-based deformable meshes for surface extraction from medical images*. PhD thesis, Tampere University of Technology, Finland, 2003.

[TWK88] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Symmetry-seeking models and 3d object reconstruction. *International Journal of Computer Vision*, 1 :211–221, October 1988.

[Udu94] J. K. Udupa. Multidimensional Digital Boundaries. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 56(4) :311–323, July 1994.

[Via96] A. Vialard. Geometrical parameters extraction from discrete paths. In *Proc. of 6th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'96), Lyon, France*, volume 1176 of *LNCS*, pages 24–35. Springer, 1996.

[Vos93] K. Voss. *Discrete Images, Objects, and Functions in* $\mathbb{Z}^n$. Springer-Verlag, 1993.

[VS91] L. Vincent and P. Soille. Watersheds in digital spaces : An efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 13(6) :583–598, 1991.

[VT92] M. Vasilescu and D. Terzopoulos. Adaptive meshes and shells : Irregular triangulation, discontinuities and hierarchical subdivision. In *Proc. of Conf. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'92)*, pages 829–832, Urbana, IL, June 1992. IEEE Computer Society Press.

[Wei95] J. Weickert. Multiscale texture enhancement. In V. Hlaváč and R. Šára, editors, *Proc. of Computer Analysis of Images and Patterns, Prague, Czech Republic*, volume 970 of *LNCS*, pages 230–237. Springer, 1995.

[Whi94] R. T. Whitaker. Volumetric deformable models : active blobs. In R.A. Robb, editor, *Proc. Third Conf. on Visualization in Biomedical Computing (VBC'94)*, volume 2359 of *SPIE Proc.*, pages 122–134, Rochester, MN, October 1994. SPIE.

[Whi95] R. T. Whitaker. Algorithms for implicit deformable models. In *Proc. Int. Conf. Computer Vision (ICCV'95)*, pages 822–827, 1995.

[WK03] J. Weickert and G. Kühne. *Fast Methods for Implicit Active Contour Models. In Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*, chapter 3, pages 43–57. Springer-Verlag, 2003.

[WS92] D. J. Williams and M. Shah. A fast algorithm for active contours and curvature estimation. *CVGIP : Image Underst.*, 55(1) :14–26, 1992.

[WS93] M. Worring and A. Smeulders. Digital curvature estimation. *Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 58(3) :366–382, 1993.

[XP98] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3) :359–369, March 1998.

[XYP00] C. Xu, A. Yezzi, and J. L. Prince. On the relationship between parametric and geometric active contours. In *Proc. 34th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, volume 1, pages 483–489, October 2000.

[XYP01] C. Xu, A. Yezzi, and J. L. Prince. A summary of geometric level-set analogues for a general class of parametric active contour and surface models. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods (VLSM'01)*, pages 104–111, 2001.

[YB02] Z. Yu and C. Bajaj. Normalized gradient vector diffusion and image segmentation. In A. Heyden, G. Sparr, M. Nielsen, and P. Johansen, editors, *Proc. of 7th European Conference on Computer Vision (ECCV'02)*, volume 2352 of *LNCS*, pages 517–531, Copenhagen, May 2002. Springer.

[YCK92] R. Yagel, D. Cohen, and A. Kaufman. Normal estimation in 3D discrete space. *The Visual Computer*, 8(5) :278–291, January 1992.

[YKK+97] A. Yezzi, Jr., S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, and A. Tannenbaum. A geometric snake model for segmentation of medical imagery. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 16(2) :199–209, April 1997.

[Zuc76] S. Zucker. Region growing : childhood and adolescence. *Computer Graphics and Image Processing*, 5 :382–392, 1976.

[ZY96] S.C. Zhu and A. Yuille. Region competition : Unifying snakes, region growing, and bayes/mdl for multiband image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, September 1996.

Annexe B

Discrétisations

Cette annexe décrit plus en détail le problème de la *discrétisation* d'un sous-ensemble du plan ou de l'espace euclidien sous forme d'un ensemble de points du plan discret, ainsi que les propriétés des ensembles discrétisés. Ces résultats sont notamment utilisés pour valider le comportement asymptotique des modèles déformables discrets (cf. Chapitre 3). Les deux principales difficultés abordées dans cette annexe sont :

1. l'existence d'un homéomorphisme entre un ensemble euclidien et le plongement de son discrétisé pour un pas de discrétisation suffisamment fin ;
2. le problème d'établir concrètement une bijection entre bord de l'ensemble euclidien et plongement du bord de l'ensemble discrétisé.

Un certain nombre de définitions sont issues de [GL95, LCG98], d'autres de [KR04a]. Nous choisissons de présenter le cas bidimensionnel, mais la plupart des définitions et certaines des propriétés s'étendent assez naturellement en dimension quelconque.

B.1 Processus de discrétisation

Une *image discrète* est souvent définie comme une partie du plan discret $\mathbb{Z}^2$. Lorsque l'on donne une taille h à chaque côté d'un pixel, une image discrète est alors définie comme une partie de $h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}$. De manière équivalente, on peut identifier tout pixel à un carré fermé du plan de côté h centré sur le pixel. Une image discrète est alors considérée comme une partie du plan euclidien constituée uniquement de carrés, chacun centré sur un sommet d'une grille régulière dont les points sont espacés de h. L'ensemble de tous ces carrés forme un recouvrement fermé $\mathcal{Q}_h$ du plan tel que si deux carrés s'intersectent, leur intersection est soit un côté commun ou un de leurs sommets.

Un *processus de discrétisation* est une application associant à un ensemble de $\mathbb{R}^2$ une image discrète. Une *discrétisation de côté h* d'un sous-ensemble X du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est une union d'éléments de $\mathcal{Q}_h$ (ou de manière équivalente une partie de $h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}$). De façon générale, nous noterons les processus de discrétisation $\mathrm{Dig}(X, h)$.

La *discrétisation de Gauss* [KR04a] est certainement la plus commune. Elle est définie ainsi : $\mathrm{Dig}_G(X, h) = X \cap (h\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z})$.[1] Un pixel est donc allumé si son centre est dans X. Quoique simple, cette définition de la discrétisation induit des ensembles discrets parfois peu représentatifs de l'ensemble continu. De plus, les capteurs classiques CCD font généralement une moyenne de leur champ de vision et la discrétisation de Gauss est donc de ce point de vue peu réaliste. En revanche, cette méthode de discrétisation est à la base de nombreuses propriétés asymptotiques de formes discrètes, ce qui justifie son étude et en partie son utilisation.

[1] Une définition équivalente, préférée par [KR04a], est de la voir comme l'intersection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec l'agrandissement de X par $1/h$. L'image discrète produite est la même, à un facteur h près.

Gross *et al.* [GL95, LCG98] proposent trois mécanismes de discrétisation, qui vont induire des propriétés intéressantes sur les ensembles discrétisés :

- *discrétisation par intersection* $\mathrm{Dig}_\cap(X,h)=\bigcup\{p\in\mathcal{Q}_h, p\cap X\neq\emptyset\}$;
- *discrétisation par sous-ensemble carré* $\mathrm{Dig}_\subset(X,h)=\bigcup\{p\in\mathcal{Q}_h, p\subset X\}$;
- *discrétisation de seuil* v, $0\leq v<1$, $\mathrm{Dig}_v(X,h)=\bigcup\{p\in\mathcal{Q}_h, \mathrm{aire}(X\cap p)/\mathrm{aire}(p)>v\}$.

Il est clair que

$$\mathrm{Dig}_\subset(X,h)\subseteq\mathrm{Dig}_v(X,h)\subseteq\mathrm{Dig}_\cap(X,h), \tag{B.1}$$
$$\mathrm{Dig}_\subset(X,h)\subseteq\mathrm{Dig}_G(X,h)\subseteq\mathrm{Dig}_\cap(X,h). \tag{B.2}$$

B.2 Ensembles du plan considérés pour la discrétisation

De manière évidente, la discrétisation de la majorité des sous-ensembles du plan a peu de sens. Ainsi, les ensembles de mesure nulle auront des discrétisations peu représentatives, quelle que soit l'échelle considérée. C'est pourquoi on s'intéresse à la discrétisation de classes particulières d'ensembles de $\mathbb{R}^2$. Nous en présentons trois, de la plus générale à la plus spécifique, qui seront utilisées dans ce mémoire.

Dans la suite l'ensemble X est un sous-ensemble fermé du plan $\mathbb{R}^2$ tel que son bord $\mathrm{bd}\,X$ est compact. L'intérieur topologique de X est noté $\mathrm{int}\,X$.

Nous allons définir les ensembles par(r)-réguliers, pour $r>0$ [LCG98]. Nous avons besoin de quelques définitions préliminaires. Une boule fermée B de rayon $r>0$ est *tangente* à $\mathrm{bd}\,X$ au point $x\in\mathrm{bd}\,X$ si $\mathrm{bd}\,X\cap\mathrm{bd}\,B=\{x\}$. Cette boule B est une *boule tangente intérieure* à $\mathrm{bd}\,X$ au point $x\in\mathrm{bd}\,X$ si en plus $B\subseteq\mathrm{int}\,X\cup\{x\}$. Sinon, B est une *boule tangente extérieure* à $\mathrm{bd}\,X$ au point $x\in\mathrm{bd}\,X$ si cette fois-ci $B\subseteq(\mathbb{R}^2\setminus X)\cup\{x\}$. Un ensemble X est dit *par(r)-régulier* si en tout point $x\in\mathrm{bd}\,X$ il existe une boule tangente intérieure et une boule tangente extérieure de rayons tous deux égaux à r. La classe des ensembles par(r)-réguliers sera notée $\mathrm{Par}(\mathbb{R}^2,r)$. Tout ensemble par$(r)$-régulier est bien sûr par(r')-régulier pour $0<r'\leq r$. La classe de tous les ensembles par(r)-régulier pour un $r>0$ sera notée $\mathrm{Par}(\mathbb{R}^2)$. Ses éléments sont appelés les ensembles *parallèles réguliers*.

Gross et Latecki [GL95] avaient d'abord proposé une définition plus géométrique des ensembles par(r)-réguliers, qui sont les ensembles dont pour tout couple de points du bord, les segments de longueur r orientés suivant la normale ne s'intersectent pas. Ils ont ensuite montré l'équivalence entre ces deux définitions d'un ensemble par(r)-régulier.

Nous notons $C^2(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ qui sont la fermeture d'un ouvert dont le bord est l'union finie de courbes simples fermées de classe C^2. Ses éléments seront simplement appelés les *parties C^2 du plan*.

Enfin, nous notons $C^3(\mathbb{R}^2,\text{convexe})$ l'ensemble des parties convexes fermées du plan $\mathbb{R}^2$ dont le bord est une courbe de classe C^3 avec courbure strictement positive. Ses éléments seront simplement appelés les *parties strictement C^3-convexes du plan*.

Nous pouvons imbriquer ces ensembles de parties de $\mathbb{R}^2$ comme suit :

Proposition B.1. *$C^3(\mathbb{R}^2,\text{convexe})\subset C^2(\mathbb{R}^2)\subset\mathrm{Par}(\mathbb{R}^2)$. Toute partie strictement C^3-convexe du plan est une partie C^2 du plan. Toute partie C^2 du plan est un ensemble par(r)-régulier, pour un certain $r>0$.*

Démonstration. La première inclusion est immédiate. La deuxième provient de ([LCG98], preuve du Théorème 7 ou [GL95], Théorème 6). ■

Remarque. *En particulier, les modèles déformables continus fermés délimitent toujours des parties C^2 du plan, qui sont donc des ensembles parallèles réguliers. Les théorèmes liées à la discrétisation d'ensembles parallèles réguliers leur seront donc applicables directement.*

B.3 Propriétés des ensembles parallèles réguliers

Nous rappelons un théorème important sur la préservation de la topologie lors d'un processus de discrétisation, qui justifie l'utilisation de certains des processus de discrétisation précités.

Théorème B.2 (extrait de [GL95], Théorème 10)**.** *Si X est un ensemble par(r)-régulier alors X et* $\mathrm{Dig}(X,r)$ *sont des équivalents homotopiques,*[2] *où* $\mathrm{Dig}(X,r)$ *est l'une des discrétisations* $\mathrm{Dig}_\cap(X,r)$, $\mathrm{Dig}_\subset(X,r)$ *ou* $\mathrm{Dig}_v(X,r)$.

Un corollaire immédiat de Théorème B.2 et de Proposition B.1 est que pour toute partie C^2 du plan, il existe un pas de discrétisation r en dessous duquel toutes ses discrétisations seront des équivalents homotopiques.

Un autre théorème utile précise les configurations locales possibles de pixels dans le cas de discrétisation d'ensembles parallèles réguliers.

Définition B.3 (Latecki *et al.* [LER95])**.** *Une image discrète est* bien composée *ssi elle ne contient pas les configurations croisées* ■ *et* ■, *où deux pixels allumés se touchent sur un sommet, sans que l'un au moins des deux autres pixels soit allumé.*

Cette définition s'étend naturellement en 3D [Lat97].

Théorème B.4 (extrait de [GL95], Théorème 13 et [LCG98], Théorème 8)**.** *Si X est un ensemble par(r)-régulier alors l'image discrète* $\mathrm{Dig}(X,r)$ *est* bien composée*, où* $\mathrm{Dig}(X,r)$ *est l'une des discrétisations* $\mathrm{Dig}_\cap(X,r)$, $\mathrm{Dig}_\subset(X,r)$ *ou* $\mathrm{Dig}_v(X,r)$.

Nous montrons ci-dessous que cette propriété a son pendant pour la discrétisation de Gauss, mais pour une discrétisation légèrement plus fine.

Théorème B.5. *Si X est un ensemble par(r)-régulier alors l'image discrète* $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ *est* bien composée*, pour* $h \leq \frac{\sqrt{10}}{5} r \approx 0.632r$.

Démonstration. L'argument principal de la preuve de ([GL95], Théorème 13) ne peut être employé. Il repose sur le fait que le point x intersection des quatre pixels ne peut être dans X, car sinon les quatre pixels serait tous allumés dans $\mathrm{Dig}_\cap(X,r)$. Latecki *et al.* proposent une autre preuve tenant en compte les 3 discrétisations $\mathrm{Dig}_\cap(X,r)$, $\mathrm{Dig}_\subset(X,r)$ ou $\mathrm{Dig}_v(X,r)$ ([LCG98], Théorème 8), mais là encore, l'argument principal repose sur des critères d'aires, que l'on ne peut utiliser pour la discrétisation de Gauss.

Nous montrons cette propriété par l'absurde, en supposant qu'une telle configuration existe dans $\mathrm{Dig}_G(X,h)$. Sans perte de généralité, nous considérons donc une configuration croisée ■ telle que dessinée sur la Figure B.1 (les pixels P et S sont allumés et éléments de X, les pixels Q et R sont éteints et n'appartiennent pas à X). Le carré fermé de sommets $PQRS$ sera noté $\mathcal{C}$. Nous allons considérer deux cas selon qu'il existe ou non un arc dans $X \cap \mathcal{C}$ reliant P à S.

Si tel est le cas, cet arc intersecte nécessairement la diagonale $[QR]$ en un point b. En se déplaçant le long de cette diagonale à partir de b vers le point R (mettons), on tombera avant R sur un point x élément de $\mathrm{bd}\, X$, car X est fermé. Comme X est par(r)-régulier, il existe une boule tangente intérieure $B_i(x,r)$ de rayon r en x. Soit θ l'angle entre le vecteur $\mathbf{PQ}$ et la normale extérieure à $B_i(x,r)$ en x (cf. Figure B.1a). Pour $h \leq r$, l'angle θ ne peut appartenir à $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ car sinon $B_i(x,r)$ inclus nécessairement le point Q, qui n'est pas dans X. Ceci contredit l'hypothèse que $B_i(x,r)$ est une boule intérieure, sous-ensemble de $\mathrm{int}\, X \cup \{x\}$. Un raisonnement similaire avec le point R indique que $\theta \notin [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. La normale extérieure en x à X ne peut donc pointer que dans les directions grisées de la Figure B.1a. Sans perte de généralité (on raisonne symétriquement à $[QR]$ sinon), on supposera dans la suite que la normale pointe en haut à droite, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On se place dans le cas où x est infiniment proche de R, ce qui sera en fait le pire cas, avec $h \leq r$. Par par(r)-régularité, les boules tangentes intérieure $B_i(x,r)$ et extérieur $B_e(x,r)$ au point x ont leurs

[2] Pour une définition d'équivalent homotopique, on peut se référer par exemple à [God71].

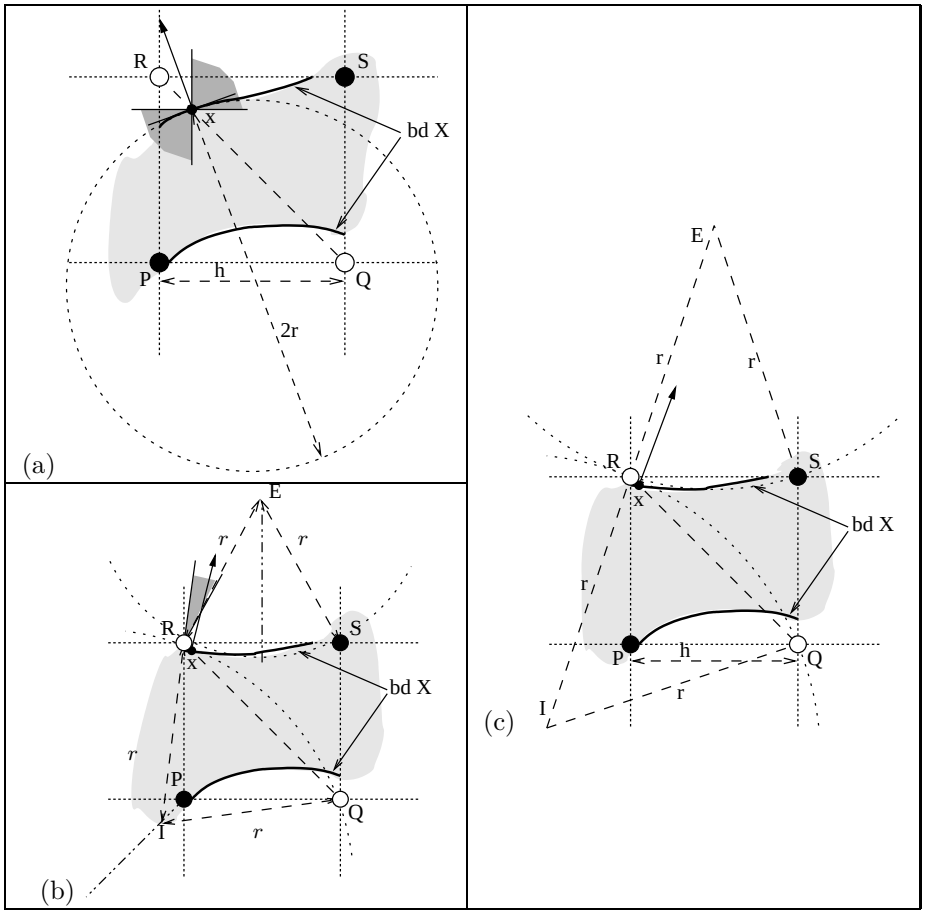


FIG. B.1 – Illustration de la démonstration du Théorème B.5. P, Q, R, S sont quatre pixels en configuration croisée. Chaque pixel est de côté h. (a) La partie grisée indique l'intervalle d'angle de normales possibles au point x, dans le meilleur des cas pour $h \leq r$. La normale dessinée n'est pas possible, car la boule tangente intérieure en x contiendrait alors le point Q, censé ne pas être dans X. (b) Lorsqu'on augmente le paramètre r de par(r)-régularité de X par rapport à la discrétisation h, on s'aperçoit que l'intervalle d'angles se réduit, jusqu'à disparaître exactement pour un angle de arctan(3), c'est-à-dire une pente 3. Cette situation est présentée en (c).

normales en x alignées et d'angle θ avec $\mathbf{PQ}$. Comme $B_i(x,r)$ ne peut toucher Q, l'angle θ ne peut excéder ou égaler l'angle $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{IR})$, où I est le centre de la boule de rayon r passant par Q et $x \approx R$ (voir Figure B.1b). De manière similaire, comme $B_e(x,r)$ ne touche pas le point $S \in X$, l'angle θ ne peut être plus petit ou égal à $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{RE})$, si E est le centre du cercle de rayon r passant par $x \approx R$ et S. On a donc

$$\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{RE}) < \theta < \angle(\mathbf{PQ},\mathbf{IR}). \tag{B.3}$$

Nous augmentons maintenant r progressivement à partir de h. L'angle $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{RE})$ grandit avec r tandis que l'angle $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{IR})$ diminue avec r. On montre facilement que ces angles deviennent égaux pour l'angle $\arctan(3)$ (Figure B.1c). Le rayon r vaut alors $\sqrt{\frac{5}{2}}h$.

Maintenant si x s'éloigne de R, alors l'angle $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{RE})$ grandit tandis que l'angle $\angle(\mathbf{PQ},\mathbf{IR})$ diminue, ce qui indique que le pire cas était bien x proche de R. Pour tout rayon $r \geq \sqrt{\frac{5}{2}}h$, on voit qu'il n'existe pas de direction de normale possible au point x, ce qui indique que la configuration croisée considérée ne peut exister avec un arc contenu dans $X \cap \mathcal{C}$ reliant P à S.

Si on suppose maintenant qu'un tel arc n'existe pas, alors le segment diagonal $[PS]$ intersecte nécessairement $\operatorname{bd} X$ en un point x. Un raisonnement complètement similaire au précédent conduit à la même contradiction, ce qui indique que toute discrétisation de Gauss $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ de X ne contient pas de configuration croisée pour $h \leq \frac{\sqrt{10}}{5}r$. ■

Toute image bien composée a un bord (en tant qu'ensemble de segments dans le plan euclidien) qui est une 1-variété compacte, autrement dit un ensemble de courbes fermées simples disjointes (cf. [Lat97], Théorème 6.2). Nous arrivons au théorème suivant, qui sera utilisé au Chapitre 3 pour montrer que l'énergie d'un modèle déformable discret ne dépend pas de la connexité choisie sur sa surface discrète.

Théorème B.6. *Si X est une partie C^2 du plan, alors il existe un pas de discrétisation h_0 tel que pour tous les pas h plus petits, sa discrétisation $\mathrm{Dig}(X,h)$ est une image bien composée. De plus son bord $\operatorname{bd}\mathrm{Dig}(X,h)$ est une 1-variété compacte. Ici $\mathrm{Dig}(X,h)$ est une des discrétisations $\mathrm{Dig}_G(X,h)$, $\mathrm{Dig}_\cap(X,h)$, $\mathrm{Dig}_\subset(X,h)$ et $\mathrm{Dig}_v(X,h)$.*

Démonstration. D'après Proposition B.1, il existe un r pour lequel X est par(r)-régulier. Le Théorème B.4 et le Théorème B.5 permettent de conclure. ■

Enfin, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui borne la longueur du bord discrétisé par rapport à la longueur de $\operatorname{bd} X$.

Proposition B.7. *Si X est un ensemble par(r)-régulier et si $N_{X,h}$ est le nombre d'arêtes de pixels de $\operatorname{bd}\mathrm{Dig}_G(X,h)$, alors la quantité $hN_{X,h}$ est majorée par une constante fois la longueur de $\operatorname{bd} X$. La longueur de $\operatorname{bd}\mathrm{Dig}_G(X,h)$ est donc majorée par une constante fois la longueur de $\operatorname{bd} X$.*

Démonstration. Comme X est par(r)-régulier à bord compact, il a un nombre fini de composantes connexes et son bord est rectifiable de longueur finie $\mathcal{L}(X)$. On se place sur un point de $\operatorname{bd} X$ et on calcule une majoration u_i du nombre maximum de pixels intersectés après un déplacement de ih le long de $\operatorname{bd} X$. On a $u_0 = 4$ et $\forall i > 0, u_{i+1} = u_i + 4$. Le nombre d'arêtes de pixels de $\operatorname{bd}\mathrm{Dig}_G(X,h)$ ne peut excéder quatre fois le nombre de pixels traversés par $\operatorname{bd} X$. On en déduit

$$N_{X,h} \leq 4u_{\lceil \frac{\mathcal{L}(X)}{h} \rceil} \leq 16\lceil \frac{\mathcal{L}(X)}{h} \rceil + 16 = \mathcal{O}(\mathcal{L}(X)/h).$$

■

B.4 Lien bord d'un ensemble et bord de son discrétisé

Dans cette section, nous mettons en relation le bord d'un ensemble par(r)-régulier et le bord de son discrétisé au travers de la projection suivant la normale. Cette relation nous permettra de montrer une condition nécessaire pour que l'énergie d'un modèle déformable continu soit égal à la limite de l'énergie de son homologue discret.

Soit X une partie C^2 du plan simplement connexe. Elle est par(r)-régulière pour un certain r (Proposition B.1). Son bord $\mathrm{bd}\, X$ est une courbe fermée de classe C^2. Soit h un pas de discrétisation inférieur à $\frac{\sqrt{10}}{5}r$. Soit $B_h^{\square}X$ le bord de l'image discrète $\mathrm{Dig}(X,h)$, défini comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. C'est une courbe fermée simple d'après le théorème précédent (Théorème B.6). Les espaces $\mathrm{bd}\, X$ et $B_h^{\square}X$ (munis de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$) sont donc homéomorphes et il existe une bijection bicontinue qui les relie. Malheureusement, cette bijection n'est pas en général la simple projection suivant la normale au bord $\mathrm{bd}\, X$. Ainsi que le montre la Figure B.2, la projection ne définit pas une bijection autour du point x. Cela reste vrai même en se restreignant aux parties C^3-convexes du plan (même figure, partie droite).

On va néanmoins montrer que la longueur de la partie non bijective est proportionnelle au pas de discrétisation, ce qui sera suffisant pour atteindre notre objectif. On se limite ici à la discrétisation de Gauss.

Nous montrons d'abord que le bord discret d'une forme n'est jamais loin du bord continu dans la direction de sa normale. Dans la suite, pour $x \in \mathrm{bd}\, X$, $n(x,w)$ désigne le segment de longueur $2w$, centré en x et dirigé suivant la normale à $\mathrm{bd}\, X$ en x.

Lemme B.8. *Soit X par(r)-régulier. Soit $0 < h \leq r$. Alors pour tout point x du bord $\mathrm{bd}\, X$, son segment normal $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ touche le bord discret $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$ en au moins un point.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{bd}\, X$. Comme X est par(r)-régulier, il est aussi par($\frac{\sqrt{2}}{2}h$)-régulier et, au point x, il y a une boule tangente intérieure $B_i(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ (resp. boule tangente extérieure $B_e(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$. Soit I et E les centres respectifs de ces boules. Le point I appartient à au moins un pixel de centre p_i (pixel vu en tant que carré fermé de côté h). La distance de I à p_i est inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}h$, ce qui implique que p_i est inclus dans la boule fermée de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}h$, i.e. $B_i(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$. Par définition des boules tangentes intérieures, le point/pixel p_i appartient à $\mathrm{int}\, X \cup \{x\} \subset X$, d'où $p_i \in \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Similairement, le point E appartient à au moins un pixel de centre p_e (pixel vu en tant que carré fermé de côté h). Une argumentation entièrement symétrique à la précédente conduit à $p_e \notin \mathrm{Dig}_G(X,h)$ (si $p_e = x$, il existe un pixel différent qui contient aussi E).

Le segment $[IE]$ est exactement le segment $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$. Nous allons montrer par l'absurde que ce segment touche $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble des carrés de $\mathcal{Q}_h$ qui touchent $[IE]$. Comme $[IE]$ n'est jamais strictement inclus dans un seul élément de $\mathcal{D}$ (il est trop long), cela veut dire que $\mathcal{D}$ contient au moins 2 éléments et $\forall p \in \mathcal{D}, \mathrm{bd}\, p \cap [IE] \neq \emptyset$. Soit q une de ces intersections. Il existe alors au moins deux carrés p_1 et p_2 de $\mathcal{D}$ dont les bords contiennent q. Comme le segment $n(x,h)$ ne touche pas $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$, le point q n'appartient pas non plus au bord discret $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Ceci implique que p_1 et p_2 sont tous deux dans $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ ou tous deux dans son complémentaire. On a juste montré que toute paire de carrés de $\mathcal{D}$ dont l'intersection est non vide a ses deux éléments soit dans la discrétisation soit en dehors. Toute composante connexe de $\mathcal{D}$ a donc tous ses éléments soit dans $\mathrm{Dig}_G(X,h)$, soit dans son complémentaire. Or $\mathcal{D}$ est connexe car le segment $[IE]$ relie bien tous ses éléments. Les pixels de $\mathcal{D}$ sont donc tous dans $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ ou tous dans son complémentaire. Mais p_i et p_e sont tous deux dans $\mathcal{D}$ et $p_i \in \mathrm{Dig}_G(X,h)$ et $p_e \notin \mathrm{Dig}_G(X,h)$, ce qui constitue une contradiction. Nous concluons donc que le segment $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ intersecte $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$ au moins une fois. ■

Montrons maintenant que les ensembles $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}(X,h)$ et $\mathrm{bd}\, X$ sont proches, au sens où la dilatation morphologique de l'un par une boule de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ contient l'autre.

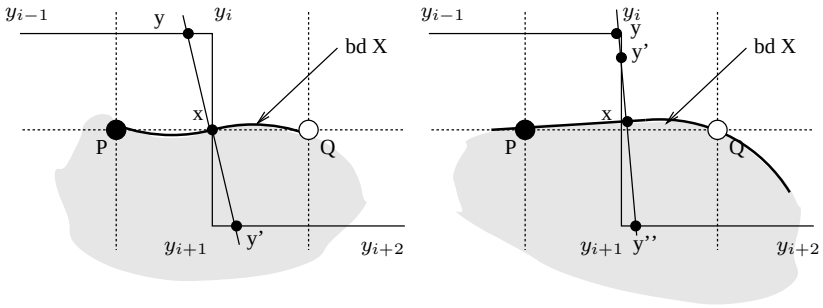


FIG. B.2 – La projection de $\mathrm{bd}\, X$ sur $B_h^{\square} X$ n'est pas une bijection en général.

Lemme B.9. *Soit X par(r)-régulier. Soit $0 < h \leq r$. Tout point $x \in \mathrm{bd}\, X$ est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$ (dans la direction de sa normale). Tout point $y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$ est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de $\mathrm{bd}\, X$ (aussi dans la direction de la normale de ce point le plus près). Autrement dit :*

$$\forall x \in \mathrm{bd}\, X, \exists y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h), \|x-y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h). \tag{B.4}$$

$$\forall y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h), \exists x \in \mathrm{bd}\, X, \|x-y\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h \text{ et } y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h). \tag{B.5}$$

Démonstration. La première partie de la preuve est une conséquence directe du Lemme B.8. Soit $x \in \mathrm{bd}\, X$, on a alors $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h) \cap \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h) \neq \emptyset$. Soit y un élément de cette intersection. Il est à distance inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de x car le segment $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ est centré en x et s'étend de part et d'autre en lignes droites chacune de longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}h$.

Soit $y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Par définition de la discrétisation de Gauss, y est sur un segment de longueur h qui sépare un pixel allumé $p \in X$ d'un pixel éteint $q \notin X$. Le segment $[pq]$ traverse alors forcément $\mathrm{bd}\, X$ en un point x'. Ce point est au pire à distance $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de y. Le Lemme 2 de [GL95] indique que le point de $\mathrm{bd}\, X$ le plus proche de y est un point $s \in \mathrm{bd}\, X$ tel que $y \in n(s,r)$. Comme s est plus proche de y que ne l'est x', on vient de montrer que la distance de y à s est inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. ■

Si la projection du bord continu sur le bord discret suivant la normale n'est pas bijective en général, nous pouvons cependant montrer que la projection réciproque du bord discrétisé sur le bord continu est bien une application, de plus surjective et continue.

Lemme B.10. *Soit X un ensemble par(r)-régulier et $0 < h \leq r$. Soit l'application $\pi : \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h) \to \mathrm{bd}\, X$ qui à un point $y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$ associe le point x de $\mathrm{bd}\, X$ tel que $y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$. L'application π est bien définie (monovaluée), surjective et est continue.*

Démonstration. Soit $y \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Eq. (B.5) du Lemme B.9 indique qu'il existe au moins un point x sur $\mathrm{bd}\, X$ tel que $y \in n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ (et distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de x). Il ne peut y avoir un autre $x' \in \mathrm{bd}\, X$ avec $y \in n(x', \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ car, par définition des ensembles par(r)-réguliers, $\forall u, v \in \mathrm{bd}\, X, n(u,r) \cap n(v,r) \neq \emptyset \Rightarrow u = v$. On peut donc définir $\pi(y) = x$ et l'application π est bien définie (monovaluée). Elle est de plus surjective car Eq. (B.4) du Lemme B.9 indique que le segment normal de tout point de $\mathrm{bd}\, X$ touche au moins un point de $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$.

On montre maintenant que cette application est continue. Soit $y_0 \in \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Soit y dans un voisinage de y_0, $y \in B(y_0, \epsilon) \cap \mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$, et notons $x = \pi(y)$ et $x_0 = \pi(y_0)$. Les distances euclidiennes $\|x-y\|_2$ et $\|x_0 - y_0\|_2$ sont inférieures à $w = \frac{\sqrt{2}}{2}h$, donc $w < r$.

Si x et x_0 n'appartiennent pas à la même composante de $\mathrm{bd}\, X$, alors $\|x - x_0\|_2 > 2r$ ([LCG98], Proposition 5). On en déduit que $\|y - y_0\|_2 > 2r - 2w$. On choisit donc $\epsilon < 2r - 2w$, ce qui impose que x

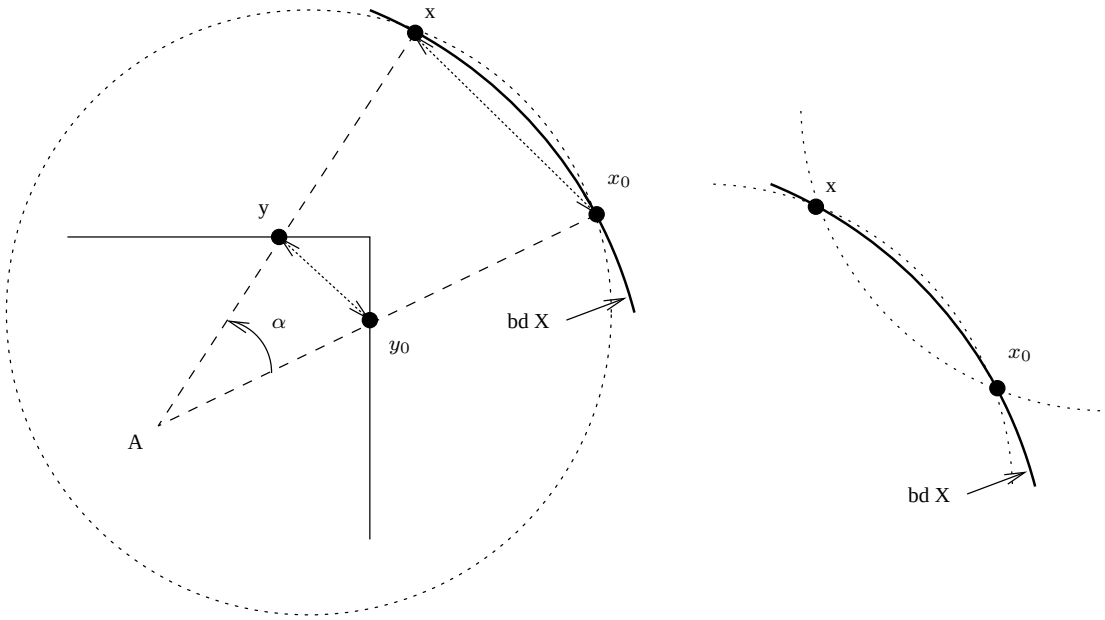


FIG. B.3 – Illustration de la preuve de continuité du Lemme B.10. A droite, le bord bd X est coincé entre les deux arcs de cercle de rayon r qui traversent x et x_0.

et x_0 appartiennent à la même composante de X. La longueur du chemin sur bd X entre x et x_0 existe alors et nous la notons l. La Figure B.3 illustre la situation et les notations. Comme les segments $n(x,r)$ et $n(x_0,r)$ ont une intersection vide, le point A intersection de leurs droites support est situé à distance supérieure à r de x ou x_0. L'angle α entre les normales $n(x,r)$ et $n(x_0,r)$ (supposé positif) peut être alors majoré par $2\arcsin(\frac{\epsilon}{2(r-w)})$ (en rapprochant au maximum l'intersection A des segments normaux et en éloignant au maximum y de y_0, y de x et y_0 de x_0).

Cet angle α peut être rendu aussi petit que l'on veut, en diminuant ϵ. Pour α suffisamment petit, le chemin de x à x_0 sur bd X est coincé entre les deux arcs de cercle de rayon r qui traversent x et x_0 (Figure B.3) avec une courbure bornée par r. Sa longueur, notée $l(x,x_0)$, ne peut donc excéder la longueur de l'arc de cercle de rayon r, qui est inférieure à αr. D'où

$$l(x,x_0) \leq \alpha r = 2r \arcsin \frac{\epsilon}{2(r-w)} \leq \epsilon \frac{2r}{2(r-w)}.$$

On conclut que x tend vers x_0 lorsque ϵ tend vers 0. ■

B.5 Rétro-projection et bijectivité bord discret/continu

L'application continue π du Lemme B.10 sera appelée *rétro-projection* de bd $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ sur bd X. On la notera soit précisément $\pi_{X,h}$ car elle dépend de X et de h, soit simplement π lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible.

On montre dans cette section sous quelles conditions la rétro-projection est effectivement bijective mais aussi, si tel n'est pas le cas, on caractérisera et mesurera les lieux où elle n'est pas bijective. Dans toute la section, X un ensemble par(r)-régulier et le pas de discrétisation h est inférieur à $\frac{\sqrt{10}}{5}r$.

On notera $\mathbf{n}(x)$ le vecteur unitaire aligné avec $n(x,r)$ et orienté vers l'extérieur de X.[3] Pour tout $y \in$ bd $\mathrm{Dig}(X,h)$ tel que y n'est pas un sommet, on note $\mathbf{w}(y)$ le vecteur unitaire normal au bord discrétisé

[3] Cette notation est valide car ce vecteur est indépendant de la valeur de r, $\forall r > 0$.

et orienté vers l'extérieur. On note que $\mathbf{w}(y)$ est alors aligné avec un axe. Si y est un sommet, alors $\mathbf{w}(y)$ est défini comme le vecteur unitaire orienté dans la direction médiane aux normales des deux segments qu'il touche.

De plus, d'après le Théorème B.6, l'image discrète $\mathrm{Dig}_G(X,h)$ est bien composée et son bord est un ensemble de courbes fermées simples. Dans toutes les preuves, on raisonnera donc composante de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ par composante, car elles sont suffisamment distantes pour ne pas interférer entre elles. Sur chaque composante, on numérote de manière consécutive les sommets (y_i) des arêtes de longueur h de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$, par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre. On notera x_i l'image $\pi_{X,h}(y_i)$, et $x_{i+\frac{1}{2}}$ l'image $\pi_{X,h}(\frac{y_i+y_{i+1}}{2})$.

On montre ci-dessous une condition nécessaire pour qu'une rétro-projection soit bijective.

Proposition B.11. *Si pour tout $y \in \mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$, l'angle $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, alors la rétro-projection $\pi_{X,h}$ est bijective, de classe C^2 par morceaux (sur chaque arête ouverte de la discrétisation).*

Démonstration. Sur chaque morceau $]y_{i-1}, y_i[$ de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$, $\mathbf{w}(y)$ est constant donc de classe C^∞. Comme la fonction normale $n(x)$ est de classe C^2 (en tant que vecteur unitaire), la fonction $\arcsin(\mathbf{n}(\pi(y)) \times \mathbf{w}(y))$ est elle aussi de classe C^2 sur cet intervalle.

Il est ensuite évident que π (i.e. $\pi_{X,h}$) est bijective entre $]y_{i-1}, y_i[$ et $]x_{i-1}, x_i[$. Reste à montrer que le segment normal $n(x, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ d'un $x \in]x_{i-1}, x_i[$ ne peut toucher une autre arête de la discrétisation.

Regardons les deux arêtes autour de $[y_{i-1}y_i]$. Si elles ont la même orientation, et si pour $y \in [y_{i-1}y_i]$, le segment $n(\pi(y), \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ en touche une, mettons en y'. Alors $\mathbf{n}(\pi(y))$ est aligné avec $[yy']$ ce qui implique que l'angle $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est égal à $\pm\frac{\pi}{2}$, en contradiction avec l'hypothèse. Si maintenant $[y_{i-1}y_i]$ et $[y_iy_{i+1}]$ forment un coin. Alors en utilisant la contrainte sur l'angle de chaque côté de y_i, l'angle au sommet $\angle(\mathbf{w}(y_i), \mathbf{n}(x_i))$ appartient à $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}[$. Par continuité de n autour de x_i, si $\mathbf{n}(\pi(y))$ touche y puis y', cela imposerait que la courbure de $\mathrm{bd}\,X$ entre y et y_i soit supérieure à $\frac{1}{h}$ donc à $\frac{1}{r}$. Ceci contredit la par(r)-régularité de X.

Pour les arêtes à distance 2 de $[y_{i-1}y_i]$ (du point de vue du chemin), il y a 2 cas à considérer, qui conduisent aux mêmes observations. Le premier cas est décrit sur la Figure B.4, gauche. La pente en $[y_i]$ étant au minimum de $\frac{1}{3}$ (en fait si $r = h$, ce qui n'est jamais le cas), la normale en y ne peut toucher un point y' de $[y_{i+1}y_{i+2}]$. La dernière configuration est constituée de deux coins consécutifs (Figure B.4, droite). Le même type de raisonnement permet de conclure.

La configuration où une arête serait parallèle à $[y_{i-1}y_i]$ à distance h ne peut se produire sauf si elle lui est reliée directement par une troisième arête (comme sur la Figure B.4, droite). Pour les arêtes à distance strictement supérieure à 2, elles sont distantes de plus de $\sqrt{2}h$ de $[y_{i-1}y_i]$, ce qui interdit toute intersection.

On vient de montrer que $n(\pi(y), \frac{\sqrt{2}}{2}h) \cap \mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h) = \{y\}$, ce qui indique que π est injective. On conclut car π est surjective d'après Lemme B.10. ■

Dans le cas général, la rétro-projection n'est pas bijective. On montre ci-dessous que les endroits où elle peut ne pas être bijective appartiennent nécessairement à des *configurations décrochement* (trois arêtes formant un zig-zag, cf. Figure B.2).

Lemme B.12. *Soit $y \in \mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$. Alors l'angle $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi_{X,h}(y)))$ est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} - \alpha(h), \frac{\pi}{2} + \alpha(h)[$, avec $\alpha(h) = \arcsin(\frac{h}{4r})$. De plus, si y ne touche pas une configuration décrochement, alors $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi_{X,h}(y)))$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

Démonstration. La Figure B.5 montre que, autour d'un sommet y_i plat, l'angle $\angle(\mathbf{w}(y_i), \mathbf{n}(\pi(y_i)))$ est entre $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Sur $]y_{i-1}, y_{i+1}[$, cet angle reste nécessairement entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Si y_i est un sommet coin, sans appartenir à une configuration décrochement (Figure B.2), deux cas sont possibles et illustrés sur la Figure B.4. On en déduit facilement que $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ est entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $y \in]y_{i-1}, y_{i+2}[$.

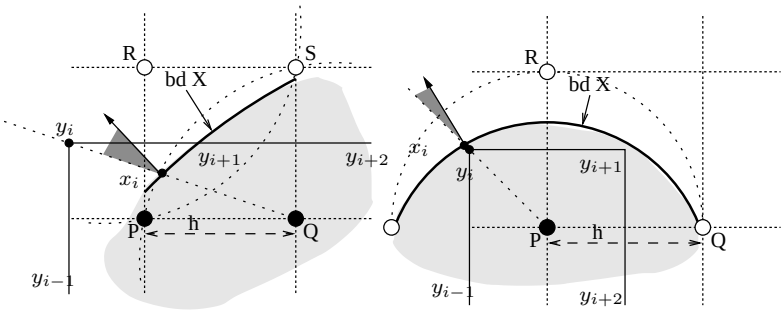


FIG. B.4 – Gauche : configuration avec un arête verticale puis deux arêtes de la discrétisation consécutivement horizontales. La pente en y_i est au minimum $\frac{1}{3}$. Droite : configuration avec un arête verticale puis une arête horizontale puis une arête verticale d'orientation opposée. La pente en y_i est au minimum 1.

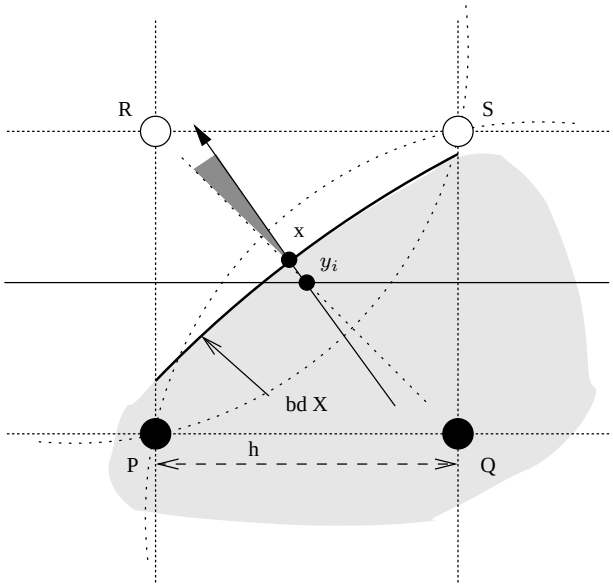


FIG. B.5 – Configuration avec deux arêtes de la discrétisation consécutivement horizontales ou verticales. L'angle $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ au sommet commun est entre $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

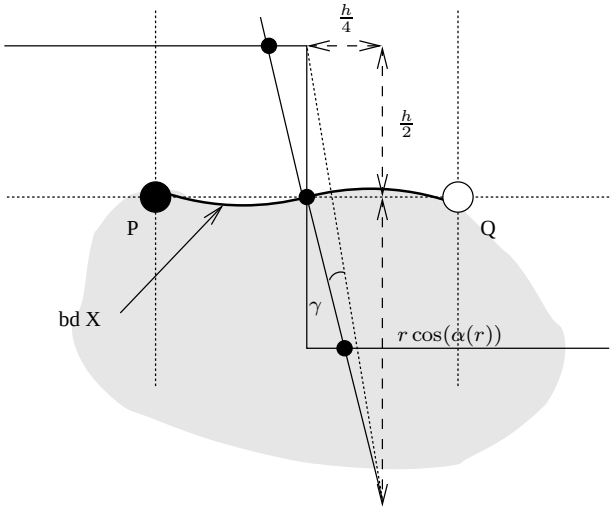


FIG. B.6 – Configuration décrochement où la rétro-projection $\pi_{X,h}$ n'est plus bijective. Notations de la preuve du Lemme B.13.

Comme $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ ne contient pas de configuration croisée, la seule configuration qui reste est celle de la Figure B.2. Le pire cas possible pour les orientations des normales est sur la partie gauche. La courbe doit en effet passer au dessus de P et en dessous de Q. Sachant que la courbure est limitée par $1/r$, les angles minimaux et maximaux sont facilement déduits. Le cas particulier où y est un sommet est aussi immédiat. ■

On montre maintenant que les parties non-bijectives de la rétro-projection sont limitées dans l'espace, et ont une longueur qui diminue avec le pas de discrétisation.

Lemme B.13. *S'il existe $y \in \mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ tel que $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi_{X,h}(y)))$ n'est pas dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors y appartient à une configuration décrochement impliquant trois arêtes consécutives : $[y_{i-1}y_i]$, $[y_iy_{i+1}]$ et $[y_{i+1}y_{i+2}]$ (Figure B.6). De plus tous les éléments de l'arc $[x_i, x_{i+1}]$ ont plusieurs antécedents par la rétro-projection $\pi_{X,h}$. La longueur de $[x_i, x_{i+1}]$ est alors un $\mathcal{O}(h^2)$. Les arcs $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}[$ et $]x_i, x_{i+\frac{3}{2}}]$ n'ont qu'un seul antécédent par la rétro-projection.*

Démonstration. D'après le Lemme B.12, le point y appartient nécessairement à une configuration décrochement tel qu'illustré sur la Figure B.6.

Soit $[y_iy_{i+1}]$ l'arête portant y. Comme $\angle(\mathbf{w}(y), \mathbf{n}(\pi(y)))$ n'est pas dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, 2 cas sont possibles. Si cet angle vaut exactement $\pm\frac{\pi}{2}$, alors l'arc $[x_ix_{i+1}]$ est réduit à un point avec une infinité d'antécédent par $\pi_{X,h}$. Si cet angle est encore plus important, alors $\pi_{X,h}$ est bijective entre $[y_iy_{i+1}]$ et $[x_ix_{i+1}]$. Les vecteurs $\mathbf{w}(\cdot)$ et $\mathbf{n}(\pi_{X,h}(\cdot))$ pointent en directions opposées sur tout cet intervalle. L'argument de bijectivité local implique alors que les points de rebroussement de la rétro-projection sont aux sommets y_i et y_{i+1}. On obtient donc que tous les éléments de $[x_i, x_{i+1}]$ ont plusieurs antécédents. Ces antécédents peuvent alors appartenir aussi aux arêtes $[y_{i-1}y_i]$ et $[y_{i+1}y_{i+2}]$.

La longueur maximale de $[x_ix_{i+1}]$ est obtenue pour la configuration de la Figure B.6. En la notant l, on obtient

$$l = 2r(\alpha(r) - \gamma) = 2r(\alpha(r) - \arctan(\frac{h/4}{r\cos(\alpha(r)) + h/2}). \tag{B.6}$$

En utilisant le Lemme B.12, on obtient une expression qui se développe en série autour de $h = 0$ en

$$\frac{1}{4}\frac{h^2}{r} - \frac{1}{8}\frac{h^3}{r^2} + \frac{1}{16}\frac{h^4}{r^3} - \frac{7}{256}\frac{h^5}{r^4} + O\left(h^6\right) \tag{B.7}$$

Pour conclure le lemme, même dans le cas où $r = h$, le point y' sur $[y_{i-1}y_i]$ tel que $\pi(y') = x_{i+1}$ est situé strictement entre $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$ et y_i. C'est la même situation de l'autre côté. Tous les points strictement entre $\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$ et y' ont une image par π dont ils sont les seuls antécedents sur $[y_{i-1}, y_{i+2}]$. Par un raisonnement identique à la preuve de Proposition B.11, on en déduit aussi que cette assertion s'étend à $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ tout entier. ■

On appelle *partie non bijective* de $\mathrm{bd}\,X$ pour la discrétisation $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$, et on note bd_h^*X, ses éléments qui ont plusieurs antécédents par la rétro-projection $\pi_{X,h}$. On montre alors

Théorème B.14. *Soit X un ensemble par(r)-régulier et $0 < h < \frac{\sqrt{10}}{5}r$. La partie non bijective bd_h^*X de $\mathrm{bd}\,X$ pour la discrétisation $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ est fermée pour la topologie induite de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathrm{bd}\,X$. La longueur de bd_h^*X est un $\mathcal{O}(h)$. Si X est de plus convexe, la longueur de bd_h^*X est un $\mathcal{O}(h^2)$. Si X possède un nombre fini de points d'inflexion alors la longueur de bd_h^*X est aussi un $\mathcal{O}(h^2)$.*

Démonstration. D'après le Lemme B.12, seules les configurations décrochement peuvent induire des parties non bijectives. La partie non bijective bd_h^*X est fermée comme union finie d'arcs fermés. Pour chaque configuration décrochement où la rétro-projection $\pi_{X,h}$ est non bijective, le Lemme B.13 indique que la longueur de l'arc non bijectif est un $\mathcal{O}(h^2)$. Au maximum, une arête sur deux de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ présente une configuration décrochement qui induit une partie non bijective. Le nombre d'arêtes $N_{X,h}$ de $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ multiplié par h est inférieur à une constante fois la longueur totale de $\mathrm{bd}\,X$ (Proposition B.7), la somme des longueurs des arcs non bijectifs est donc un $\mathcal{O}(h)$. Si de plus X est convexe, les configurations décrochement non bijectives ne peuvent exister qu'autour d'un changement de quadrant de la normale. Comme il y en a 4, la longueur de bd_h^*X reste un $\mathcal{O}(h^2)$. Enfin, les configurations décrochement nécessitent soit un changement de quadrant, soit un rebroussement de la direction de la normale. Si k est le nombre de points d'inflexion, on a donc au plus $k+4$ configurations décrochement, ce qui permet de conclure. ■

Ainsi, plus la discrétisation est fine, plus une partie significative de $\mathrm{bd}\,X$ est en bijection avec son discrétisé $\mathrm{bd}\,\mathrm{Dig}_G(X,h)$ suivant sa normale.

B.6 Discrétisation d'une intégrale curviligne

Nous sommes maintenant en mesure de calculer une approximation d'une intégrale curviligne sur le bord d'une forme à partir d'une intégrale sur son bord discrétisé. Nous proposons la définition d'intégrale suivante :

Définition B.15. *Soit X un ensemble par(r)-régulier et soit un pas de discrétisation h, $0 < h \leq r$. Si g est une fonction intégrable définie (au moins) sur le bord de X. Alors, on appelle* intégrale curviligne *h-discrétisée de g autour de $\mathrm{bd}\,X$, et on note $\mathcal{I}_{B_h^\square X}(g)$, l'intégrale curviligne suivante :*

$$\mathcal{I}_{B_h^\square X}(g) = \int_{B_h^\square X} g \circ \pi_{X,h} |\mathbf{n}_X \circ \pi_{X,h} \cdot \mathbf{w}_{X,h}| dy.$$

Cette définition est valide car le Lemme B.10 indique que la rétro-projection $\pi_{X,h}$ est une application continue par intervalle et l'application $\mathbf{w}_{X,h}$ est aussi continue par intervalle.

Nous avons le résultat suivant, qui relie intégrale curviligne et son pendant discrétisé :

Théorème B.16. *Soit X un ensemble par(r)-régulier et soit un pas de discrétisation h, $0 < h \leq \frac{\sqrt{10}}{5}r$. Si g est une fonction intégrable définie (au moins) sur le bord de X, alors l'équation ci-dessous est vérifiée :*

$$\int_{\mathrm{bd}\,X} g\, dx = \mathcal{I}_{B_h^\square X}(g) + \mathcal{O}(h^n), \tag{B.8}$$

avec $n = 2$ si X est convexe ou si son bord possède un nombre fini de points d'inflexion, $n = 1$ sinon.

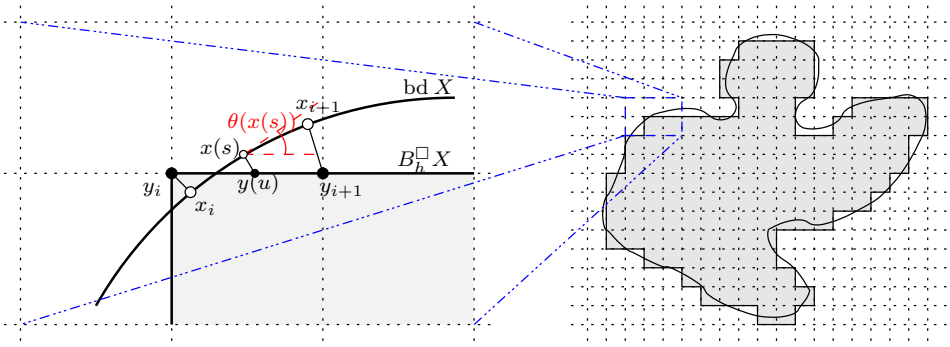


FIG. B.7 – Notations utilisées pour la preuve du Théorème B.16.

Démonstration. On considère la paramétrisation par l'abscisse curviligne de $\mathrm{bd}\, X$, d'où $\int_{\mathrm{bd}\, X} g\, dx = \int_{\mathrm{bd}\, X} g(x(s))\, ds$. Considérons la suite de points $(y_i)_{i=0\ldots N_{X,h}-1}$ sur le bord discret $\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)$. Elle définit une suite de points $(x_i)_{i=0\ldots N_{X,h}-1}$ sur $\mathrm{bd}\, X$. Sur chaque segment $[y_i y_{i+1}]$ tel que $x_i \neq x_{i+1}$, la rétro-projection est bijective avec $[x_i x_{i+1}]$.

La situation est illustrée sur la Figure B.7. Autour d'un point d'abscisse s, un déplacement élémentaire du sur $[y_i y_{i+1}]$ induit donc un déplacement élémentaire $\frac{1}{|\cos\theta(s)|} ds$ sur $\mathrm{bd}\, X$, où $\theta(s)$ est l'angle au point d'abscisse s sur $\mathrm{bd}\, X$ entre le segment $[y_i y_{i+1}]$ et la tangente en s. Cet angle est différent de $\pm\frac{\pi}{2}$ car $x_i \neq x_{i+1}$.

En notant que $x(s) = \pi_{X,h}(y(u))$ et que $\cos\theta(s) = \mathbf{n}_X(x(s)) \cdot \mathbf{y_i y_{i+1}} = \mathbf{n}_X(\pi_{X,h}(y(u))) \cdot \mathbf{w}_{X,h}(y(u))$, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{x_i \widehat{x}_{i+1}} g\, dx = \int_{s(x_i)}^{s(x_{i+1})} g(x(s))\, ds &= \int_{u(y_i)}^{u(y_{i+1})} g(\pi_{X,h}(y(u)))\, |\mathbf{n}_X(\pi_{X,h}(y(u))) \cdot \mathbf{w}_{X,h}(y(u))|\, du, \\ &= \int_{[y_i y_{i+1}]} g \circ \pi_{X,h}\, |\mathbf{n}_X \circ \pi_{X,h} \cdot \mathbf{w}_{X,h}|\, dy. \end{aligned} \tag{B.9}$$

Si la rétro-projection est partout bijective, alors on a la relation suivante par sommation de Eq. (B.9) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{bd}\, X} g\, dx &= \sum_{i=0}^{N_{X,h}-1} \int_{x_i \widehat{x}_{i+1}} g\, dx = \int_{\mathrm{bd}\, \mathrm{Dig}_G(X,h)} g \circ \pi_{X,h}\, |\mathbf{n}_X \circ \pi_{X,h} \cdot \mathbf{w}_{X,h}|\, dy, \\ &= \mathcal{I}_{B_h^{\square} X}(g). \end{aligned}$$

Si la partie non bijective $\mathrm{bd}_h^* X$ de $\mathrm{bd}\, X$ n'est pas réduite à l'ensemble vide, alors elle correspond à des séquences de points (x_j) dont l'abscisse curviligne ne suit pas le même ordre. D'après les configurations décrochement, les parties non-bijectives sont alors parcourues trois fois (au lieu d'une) lorsqu'on se déplace le long du bord discrétisé de X. En notant M la valeur maximale prise par g sur $\mathrm{bd}\, X$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{B_h^{\square} X}(g) &= \int_{\mathrm{bd}\, X \setminus \mathrm{bd}_h^* X} g\, ds + 3 \int_{\mathrm{bd}_h^* X} g\, ds, \\ &= \int_{\mathrm{bd}\, X} g\, ds + 2 \int_{\mathrm{bd}_h^* X} g\, ds, \\ &= \int_{\mathrm{bd}\, X} g\, ds + O\left(M \int_{\mathrm{bd}_h^* X} ds \right). \end{aligned}$$

Le dernier terme est la longueur de $\mathrm{bd}_h^* X$. En appliquant le Théorème B.14, on obtient le résultat voulu. ■

Annexe C

Curriculum vitæ

C.1 Cursus

J'ai pris mes fonctions de Maître de Conférences à l'IUT Bordeaux 1 le 1er Septembre 1999. Depuis, je travaille dans l'équipe Image et Son du LaBRI et plus précisément dans le thème « Structuration et Analyse d'Images » dirigé par le Prof. Achille Braquelaire. Je suis ingénieur ENSIMAG et docteur de l'Université Joseph Fourier. J'ai réalisé ma thèse sous la direction d'Annick Montanvert dans les laboratoires LIP (ENS-Lyon) et TIMC (IMAG, Grenoble). Le Tableau C.1 présente de manière synthétique mon cursus.

C.2 Activités pédagogiques et administratives

C.2.1 Enseignements dispensés

Depuis que je suis en poste à l'IUT Bordeaux 1, j'y effectue la majeure partie de mon service statutaire d'enseignement. Les disciplines que j'enseigne sont : algorithmique et structures de données avec programmation en C++, concepts objets avancés en C++, programmation objet et utilisation de bibliothèques en JAVA, programmation d'applications sous Windows avec Visual C++, méthodes d'analyse et conception objet avec UML, utilisation des systèmes informatiques sous Unix et programmation en shell, initiation à l'imagerie numérique. Je donne aussi des cours/TD/TP en analyse d'image et modélisation géométrique dans la Licence Image et Son de l'IUT.

Parallèlement, je donne quelques cours en Master 2 de l'UFR Math-Info sur la segmentation d'images par modèles déformables. Cette année 2005, je vais assurer le cours et les TDs d'analyse d'images de Master 2 IMM.

Le Tableau C.2 liste les modules que j'ai enseignés, en précisant pour chacun l'établissement, le niveau, l'année universitaire, et le volume.

C.2.2 Responsabilités pédagogiques

Je participe à la vie de l'IUT en m'occupant des tâches pédagogiques et administratives courantes en IUT : encadrements et soutenances de projets tuteurés, encadrements et soutenances de stages, examen des dossiers d'admission, participation aux jurys, participation aux réunions pédagogiques nationales, responsabilité de modules, surveillance d'examens, etc.

J'ai aussi collaboré au montage de la Licence Professionnelle Image et Son à l'IUT. Cette participation a porté sur la réflexion globale du contenu et objectifs de cette formation et sur la rédaction d'une partie du programme pédagogique. J'ai recherché aussi des intervenants extérieurs professionnels et universitaires

TAB. C.1 – Tableau récapitulatif de mon cursus.

09/1994 – 08/1996 09/1997 – 08/1998	Thèse dans les laboratoires LIP (ENS-Lyon) et TIMC (IMAG, Grenoble). *Directeur :* Annick Montanvert. *Intitulé :* extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles, approche discrète et approche par modèle déformable. Soutenue le 9/07/1998, mention Très Honorable avec les Félicitations. (Interruption d'un an due au service militaire.)
09/1998 – 08/1999	Post-doctorat à l'Université de Toronto. *Responsable :* Demetri Terzopoulos. *Thème :* modélisation solide pour la simulation de chirurgie maxillofaciale.
depuis 09/1999	Maître de Conférences à l'IUT Bordeaux 1 Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI). Equipe Image et Son, thématique Structuration et analyse d'image.
depuis 9/2005 depuis 12/2003 depuis 2002 depuis 06/2001	- responsable pédagogique de la License Image et Son de l'IUT Bordeaux 1. - membre du CA de l'Université Bordeaux 1 - membre de la CS 27ème section de l'université - correspondant du LaBRI auprès de la BMI (Bibliothèque de recherche en Mathématiques et Informatique)
10/2003 – 9/2005	En délégation auprès du CNRS (au LaBRI).

pour assurer la qualité de la formation. La licence a ouvert en septembre 2004 avec une promotion de 19 étudiants. La promotion 2005 devrait avoir entre 16 et 18 étudiants. Depuis cette rentrée, je suis le *responsable pédagogique de cette licence* et j'assure notamment le lien avec les intervenants extérieurs.

C.2.3 Écoles Jeunes Chercheurs

En avril 2005, j'ai été invité à donner un cours à l'École Jeunes Chercheurs en Algorithme et Calcul Formel de Montpellier. Le thème du cours était la topologie et géométrie des surfaces discrètes et ses applications. Suite à des discussions, Bordeaux a été choisi pour organiser la prochaine édition. Je fais partie du comité d'organisation de cette nouvelle école, qui aura lieu en avril 2006 et qui est portée par Arnaud Pêcher du LaBRI.

C.2.4 Activités administratives

Depuis juin 2001, je suis *correspondant du LaBRI auprès de la Bibliothèque de recherche Mathématiques et Informatique (BMI)* de Bordeaux. Je fais le lien avec la BMI pour recenser et centraliser les demandes documentaires du LaBRI, et inversement je synthétise et transmets les informations à la direction du LaBRI. Je participe aussi aux décisions documentaires ou budgétaires de la BMI. Une grosse partie de ce travail est liée aux périodiques électroniques et aux nouveaux portails des éditeurs, car le paysage documentaire français et mondial est en train de subir une mutation complète. J'ai été ainsi amené à rencontrer d'autres responsables de bibliothèques ou documentalistes dans le domaine des STIC, afin de partager notre expérience commune et de voir comment améliorer l'offre documentaire pour la discipline informatique. Au niveau de l'établissement, je participe aussi à cette réflexion.

Depuis 2002, je fais partie de la *commission de spécialistes* 27ème section de l'université, qui s'occupe du recrutement des nouveaux maîtres de conférences et ATER.

Depuis décembre 2003, je suis élu au *Conseil d'Administration* de l'Université Bordeaux 1. Toutes les questions pédagogiques, scientifiques, budgétaires et de ressources humaines passent par ce conseil, où

TAB. C.2 – Tableau récapitulatif de mes enseignements (heures effectuées devant les étudiants).

Niveau	Module	1999	2000	2001	2002	2005
IUT Informatique						
Année 1	ASD-Prog	128	128	2 × 64	64	
	USI Unix	2 × 32	32		16	
	Méthodes Objet I					2 × 26
Année 2	Prog. JAVA		20	20	20	
	Prog. C++ avancée			2 × 8	2 × 8	
	Imagerie Num.	2 × 16	16	16	16	
	Méthodes Objet II			26	26	32
	Prog. Windows				32	32
	Projets Tuteurés			12	12	12
License Image & Son	Analyse d'images I					32
	Modélisation Géom.					8 (Cours)
UFR Math-Info, dép. Informatique						
DEA Info.	Analyse d'images II		5	5	5	
Master 2 IMM	Analyse d'images III					10 (Cours)
						2 × 10 (TD)

elles sont présentées, débattues et votées. La participation à ce conseil permet de mieux comprendre le fonctionnement et les rouages de l'université, ce qui est très enrichissant. En plein accord avec mon rôle de correspondant de la Bibliothèque de recherche Math-Info, je fais aussi partie de la sous-commission documentation, qui examine le budget de la documentation au niveau de l'université et qui discute des nouvelles orientations documentaires. En tant que membre du CA, je suis invité aux commissions *ad hoc* de l'université sur l'avancement des personnels.

C.3 Activités liées à la recherche

C.3.1 Domaine de recherche

Contexte : modèles déformables pour la segmentation d'images.

Mots-clés : analyse d'image, segmentation, modèles déformables, minimisation d'une énergie, géométries euclidienne et riemannienne, topologie et géométrie discrète, pyramides irrégulières.

Un modèle déformable extrait une forme optimisant un certain critère par adaptations successives. Pour définir un modèle déformable, il faut donc se donner un espace de formes possibles, une fonction coût, appelée *énergie*, associant une valeur scalaire à chaque forme, et une technique d'optimisation qui va rechercher la forme d'énergie minimale parmi toutes les formes possibles. Dans le cadre de la segmentation d'images, le modèle déformable recherche la frontière d'une composante de l'image. Sa forme est une courbe en 2D ou une surface en 3D. Son énergie est définie de façon à être minimale sur un fort contour. L'énergie intègre aussi des contraintes internes qui pénalisent les formes trop étirées ou trop courbées (contraintes de régularisation ou de lissage).

Mes thèmes de recherche sont fortement liés aux modèles déformables. D'une part, je cherche à réduire la complexité de ces modèles en déformant l'espace par une géométrie riemannienne en fonction d'une analyse préalable de l'image. D'autre part, je recherche un analogue purement discret à ces modèles pour permettre une approche combinatoire du problème de minimisation. La définition de cet analogue nécessite l'étude et l'approfondissement d'outils de topologie et géométrie discrète comme : les modèles topologiques de subdivision de variétés, les surfaces dans la grille discrète, les estimateurs géométriques et leur convergence.

C.3.2 Collaborations

Mes différents thèmes de recherche m'ont amené à travailler avec un ensemble de personnalités scientifiques de ma communauté.

- Collaboration avec Laure Tougne et David Cœurjolly (LIRIS, Lyon) sur les estimateurs géométriques discrets. Nous avons monté un projet de recherche commun (projet Jeune Chercheur du GdR ISIS) sur les modèles déformables discrets. Ce projet nous a permis notamment d'avancer sur la convergence des estimateurs géométriques.
- Collaboration avec Pascal Lienhardt (SIC, Poitiers) et Xavier Daragon (ESIEE, Maine-la-Vallée) sur les problèmes de représentation de partitions d'image. Nous avons établi de nouvelles équivalences entre des structures topologiques de subdivision de variété (ordres et cartes). Ces travaux ont été publiés [23] et une version journal est en préparation.
- Collaboration avec Laurent Fuchs et Samuel Peltier (SIC, Poitiers) sur les invariants topologiques en imagerie. Nous avons proposé une nouvelle technique pour calculer toute l'information homologique de sous-ensembles d'images nD et d'ensembles semi-simpliciaux. Ces travaux ont été publiés dans [27, 9].
- Collaboration avec Fabien Feschet (LLAIC1, Clermont-Ferrand) sur les propriétés asymptotiques des segments discrets définis sur les bords de formes discrétisées. Nous avons réussi à donner des bornes sur la croissance des segments maximaux, résultats qui ont permis d'infirmer un théorème de convergence d'estimateur de courbure. Ces travaux ont été publiés [25] et une version étendue est actuellement en soumission à un journal [7].

Depuis février 2005, je travaille avec Luc Brun (GREYC, Caen) sur l'utilisation de pyramides combinatoires pour optimiser les modèles déformables discrets. Nous venons de publier la première étape de ce travail qui construit une pyramide optimisant une énergie de Mumford-Shah dont les longueurs sont mesurées avec des estimateurs discrets [28].

Par ailleurs, une collaboration se met en place avec Rémi Mégret et Yannick Berthoumieu (LAPS, Bordeaux) sur l'utilisation de surfaces déformables dans la reconstruction de failles dans les images sismiques. Pour le moment, cette collaboration s'est traduite par un encadrement commun du stage de Master de Loïc Martin [46].

Enfin, depuis cette année un PICS a été obtenu entre le LaBRI et le LaCIM (Université du Québec à Montréal). Nous avons identifié des sujets communs d'intérêt : avec Srecko Brlek et Annie Lacasse sur une version discrète du théorème de Green et avec Christophe Reutenauer sur la combinatoire des droites discrètes.

C.3.3 Projets de recherche et valorisation

Je suis actuellement ou j'ai été impliqué dans les projets et actions suivants :

- coordinateur LaBRI du projet ANR blanche GéoDIB. Ce projet ANR vient d'être accepté et doit durer 4 ans. Il est porté par Isabelle Debled-Rennesson et rassemble quatre laboratoires (LaBRI, LIRIS, LLAIC, LORIA) sur le thème de la géométrie des objets discrets bruités. L'objectif est d'étendre la géométrie discrète classique aux objets dont le contour discret a été potentiellement perturbé. Cela permettra d'ancrer un peu plus la communauté géométrie discrète en analyse d'image, vision et reconnaissance des formes, où les images sont souvent bruitées. (voir aussi les perspectives du Chapitre 6).
- porteur côté LaBRI du projet Jeune Chercheur du GdR-ISIS « Modèles déformables discrets ». Ce projet s'est fait en collaboration avec Laure Tougne et David Cœurjolly du LIRIS de Lyon en 2003. Ils complétaient notre savoir–faire sur les modèles déformables avec leur connaissances des estimateurs géométriques discrets (voir Chapitre 3).
- Action Spécifique STIC « Géométrie discrète pour l'analyse spatio-temporelle d'images ». Cette action nous permet de tisser des liens forts avec de nombreux laboratoires spécialistes en topologie et géométrie discrète (LIS, SIC, A2SI, LIRIS, LERI, LIRMM). Je me suis fortement impliqué dans

cette action, en donnant un exposé de mes travaux à chacune des trois journées de travail organisées, et en participant à la rédaction du rapport final de cette action.
- Action Spécifique STIC « Géométrie algorithmique et discrète ». Cette action nous permet d'examiner les liens existants entre ces deux géométries et de travailler avec des laboratoires spécialistes en géométrie algorithmique (LIENS, LMC-IMAG, LORIA, INRIA Sophia-Antipolis). Deux exposés de mes travaux sont prévus pour la prochaine journée organisée.
- participation au *technical committee* TC18 de l'IAPR (International Association for Pattern Recognition) dont le thème est la géométrie discrète.

Sur des aspects plus applicatifs, j'ai participé activement au projet suivant :

- projet RNTS « B3S » : collaboration avec AXS Ingénierie sur le traitement d'images radiographiques. L'objectif est de reconstruire un modèle tridimensionnel de colonne vertébrale à partir de deux radiographies (face et profil). Nous avons proposé d'utiliser des modèles déformables paramétriques pour résoudre ce problème. Les premiers résultats sont encourageants : avec une initialisation manuelle raisonnable, la colonne vertébrale est reconstruite avec une meilleure précision dans la plupart des cas.

J'ai également soumis deux années consécutives avec Anne Vialard un projet d'ACI Jeune Chercheur sur le thème des « Images généralisées ». Même si la commission a jugé ce projet intéressant en le sélectionnant par deux fois pour la seconde phase, ces soumissions n'ont malheureusement pas pu aboutir. Néanmoins, ce travail conséquent n'a pas été perdu et nous a permis de réfléchir sur nos objectifs de recherche à plus long terme.

C.3.4 Organisation de conférence

J'ai été co-organisateur de la dixième édition de la conférence internationale *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*, qui a eu lieu à Bordeaux en avril 2002. Cette conférence réunit chaque année plus de 80 participants venant d'une vingtaine de pays différents. De plus, je suis co-éditeur des actes de la conférence, qui ont été publiés par Springer dans les *Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 2301) [1].

C.3.5 Animation scientifique

J'ai organisé, avec l'aide d'Anne Vialard, un numéro spécial de la revue Graphical Models (Academic Press) intitulé « Discrete topology and geometry for image and object representation ». Ce numéro comporte 9 contributions qui sont des versions étendues d'articles sélectionnés parmi ceux acceptés à la conférence DGCI'2002. Le numéro spécial est paru en 2003 [2].

Je fais partie du comité de programme de la conférence DGCI depuis l'édition 2002. De plus, mon activité scientifique se traduit par le travail d'arbitrage pour des revues (Theoretical Computer Science, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Graphical Models and Image Processing, Medical Image Analysis, Pattern Recognition Letters, Discrete Applied Mathematics, Computer Vision and Image Understanding, Visual Computer, IEEE Trans. Visualization & Computer Graphics, IEEE Trans. on Information Technology in Biomedicine, Int. Journal on Shape Modeling, Traitement du Signal et des Images) et pour des conférences (DGCI, SIGGRAPH, IWPIA, Symposium on Geometry Processing).

C.3.6 Séminaires, cours et exposés invités

Cette liste regroupe par ordre inversement chronologique les différents séminaires, cours ou exposés invités que j'ai donné à l'extérieur du LaBRI.

- exposé invité, Groupe de travail ARITH, Montpellier, 16 mars 2006. *Polygones convexes, segments maximaux et convergence d'estimateurs géométriques discrets*
- exposé invité, Journée GdR ISIS / MSVC, ENST, Paris. 9 juin 2005. *Modèle déformable de complexité indépendante de la résolution image*

Etudiant(e)	Titre	Début	Fin	Taux	Financ.	Devenir
Sylvie Alayrangues	Modèles et Invariants Topologiques en Imagerie Numérique	10/2000	8/07/2005	80%	BDI	MdC (Poitiers)
Benjamin Taton	Modèle déformable à densité adaptative : application à la segmentation d'images	10/2001	10/10/2004	80%	BDI	étudiant médecine 3ème année
François de Vieilleville	Géométrie discrète multirésolutions	10/2003		60%	MNESR	en cours
Martin Braure de Calignon	Modèles discrets évolutifs et structuration région. Application à la segmentation d'images biomédicales	10/2005		80%	BDI	en cours

TAB. C.3 – Récapitulatif de mes encadrements doctoraux avec le taux d'encadrement et le financement de la thèse.

- cours invité, Ecole Jeunes Chercheurs, LIRMM laboratory, Montpellier. 4 avril 2005. *Surfaces discrètes : définition, extraction et géométrie*
- exposé invité, GREYC laboratory, Caen. 24 février 2005. *Modèles déformables, surfaces, et estimateurs géométriques discrets*
- exposé invité, LIS laboratory, Grenoble. 26 janvier 2004. *Deformable models with adaptive mesh and automated topology changes*
- séminaire, Journée de l'AS Géométrie discrète, LIS laboratory, Grenoble. 16 octobre 2003. *Mesures géométriques sur des surfaces nD*
- séminaire, Journée de l'AS Géométrie discrète, SIC laboratory, Poitiers. 9 juillet 2003. *Calcul des groupes d'homologie d'objets discrets*
- exposé invité, SIC laboratory, Poitiers. 13 juin 2002. *Equivalence entre les représentations d'images à l'aide de complexes et d'ordres*
- exposé invité, ERIC laboratory, Lyon. 26 novembre 2001. *Modèles hautement déformables pour la segmentation / reconstruction d'images : approche discrète.*

C.4 Encadrement de la recherche

C.4.1 Doctorants

Le Tableau C.3 résume mon activité d'encadrement d'étudiants en doctorat. Pour toutes les thèses co-encadrées, Achille Braquelaire (LaBRI) était le directeur officiel.

De octobre 2000 à juillet 2005, j'ai été le *co-directeur de thèse de Sylvie Alayrangues* sur le problème des représentations topologiques d'images et de frontières dans les images. Ces travaux ont permis de montrer les liens existants entre différents modèles topologiques utilisés en imagerie. De plus, elle a travaillée aussi sur le problème du calcul effectif d'invariants topologiques. Ces recherches ont donné lieu à trois publications dans des conférences internationales [18, 23, 27] ainsi qu'à un séminaire invité au SIC, Poitiers. Un article vient d'être accepté pour publication dans un journal international [9]. Un autre article est en préparation. Sylvie a soutenu sa thèse le 8 juillet 2005, mention très honorable [37]. Elle vient d'optenir un poste de Maître de Conférences en Informatique à l'Université de Poitiers, laboratoire SIC, dans l'équipe du Prof. Pascal Lienhardt.

De octobre 2001 à octobre 2004, j'ai été également le *co-directeur de thèse de Benjamin Taton* sur le thème des modèles déformables riemanniens. Ces travaux ont été publiés dans un journal interna-

tional (CVIU, [6]), trois conférences internationales (ECCV [19], 3DIM [21], ICPR [24], une conférence nationale (RFIA, [33]) et présentés aux journées AFIG 2001. Benjamin a soutenu sa thèse le 10 octobre 2004, mention très honorable [36]. Il a décidé de démarrer des études de médecine. Après avoir réussi brillamment son concours de fin de première année, il est maintenant en troixième année d'étude.

Depuis octobre 2003, avec Anne Vialard, je *co-encadre en thèse François de Vieilleville* sur la géométrie multirésolution et asymptotique des objets discrets. Ces travaux ont déjà donné lieu à quatre publications dans des conférences internationales (DGCI'2005 [26], SCIA'2005 [25], DGCI'2006 [30], ISVC'2006 [29]). Un article dans la revue *Image and Vision Computing* [8] vient d'être accepté, tandis qu'une soumission à une revue est en cours [7].

Depuis cette rentrée 2005, je suis le *co-directeur de thèse de Martin Braure de Calignon* sur les modèles discrets évolutifs et la structuration région appliqués à la segmentation d'images biomédicales. Ses travaux réalisés aussi en collaboration avec Luc Brun (GREYC, Caen) viennent de donner lieu à une première communication [28].

C.4.2 Etudiants en DEA ou Master

Enfin, j'ai déjà encadré ou co-encadré neuf étudiants de DEA de l'université Bordeaux 1 [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47], deux étudiants en Master de l'université de Toronto, et un étudiant de DEA de l'ENS Lyon [38]. Tous ces étudiants ont obtenus leur master, neuf d'entre eux ont poursuivi en thèse. Ces encadrements ont été très enrichissants et m'ont permis d'avancer significativement dans mes recherches.

C.4.3 Participation à des jurys de thèse

Samuel PELTIER	
Thèse de l'Université de Poitiers, spécialité Informatique	
Intitulé : Calcul de groupes d'homologie sur des structures simpliciales, simploïdales et cellulaires	
Soutenue le 3 juillet 2006 à Poitiers	
Jury	
Jean-François DUFOURD, Professeur, LSIIT, Université de Strasbourg	Rapporteur
Rémy MALGOUYRES, Professeur, LLAIC, IUT Clermont-Ferrand	Rapporteur
Bernard LACOLLE, Professeur, LMC – IMAG, Université Grenoble 1	Rapporteur
Jacques-Olivier LACHAUD, Maître de Conférences, LaBRI, IUT Bordeaux 1	Examinateur
Pascal LIENHARDT, Professeur, SIC, Université de Poitiers	Directeur de thèse
Laurent FUCHS, Maître de Conférences, SIC, Université de Poitiers	Directeur de thèse

Xavier DARAGON	
Thèse de l'Université de Marne-la-Vallée, spécialité Informatique	
Intitulé : Surfaces discrètes et frontières d'objets dans les ordres	
Soutenue le 14 octobre 2005 à Paris	
Jury	
Christian RONSE, Professeur, LSIIT, Université de Strasbourg	Président
Pascal LIENHARDT, Professeur, SIC, Université de Poitiers	Rapporteur
Rémy MALGOUYRES, Professeur, LLAIC, IUT Clermont-Ferrand	Rapporteur
Gilles BERTRAND, Professeur, A2SI, ESIEE Marne-la-Vallée	Examinateur
Maxime CROCHEMORE, Professeur, Inst. G. Monge, Univ. Marne-la-Vallée	Examinateur
Jacques-Olivier LACHAUD, Maître de Conférences, LaBRI, IUT Bordeaux 1	Examinateur
Michel COUPRIE, Professeur, A2SI, ESIEE Marne-la-Vallée	Directeur de thèse

Sylvie Alayrangues	
Thèse de l'Université Bordeaux 1, spécialité Informatique	
Intitulé : Modèles et invariants topologiques en imagerie numérique	
Soutenue le 8 juillet 2005 à Bordeaux	
Jury	
Robert Cori, Professeur, LaBRI, Université Bordeaux 1	Président
Gilles Bertrand, Professeur, A2SI, ESIEE Marne-la-Vallée	Rapporteur
Rémy Malgouyres, Professeur, LLAIC, IUT Clermont-Ferrand	Rapporteur
Pascal Lienhardt, Professeur, SIC, Université de Poitiers	Examinateur
Achille Braquelaire, Professeur, LaBRI, Université Bordeaux 1	Directeur de thèse
Jacques-Olivier Lachaud, Maître de Conférences, LaBRI, IUT Bordeaux 1	Co-directeur de thèse

Benjamin Taton	
Thèse de l'Université Bordeaux 1, spécialité Informatique	
Intitulé : Modèle déformable à densité adaptative, application à la segmentation d'images	
Soutenue le 14 octobre 2004 à Bordeaux	
Jury	
Christophe Schlick, Professeur, LaBRI, Université Bordeaux 1	Président
Laurent Cohen, Directeur de recherche, CEREMADE	Rapporteur
Francis Schmitt, Professeur, ENST	Rapporteur
Jacques Henry, Directeur de recherche, MAB	Examinateur
Achille Braquelaire, Professeur, LaBRI, Université Bordeaux 1	Directeur de thèse
Jacques-Olivier Lachaud, Maître de Conférences, LaBRI, IUT Bordeaux 1	Co-directeur de thèse

Annexe D

Publications

Tableau récapitulatif

Ce tableau présente les éditions, publications et communications d'audience *internationale* effectuées depuis que je suis en poste à Bordeaux (septembre 1999).

Année	Edition actes/revue	Revue int.	Conférence int.
2006		IVC, JMIV, C & G	2 × ISVC, DGCI
2005		CVIU	2 × DGCI, SCIA
2004			ICPR, IWCIA
2003	numéro GMod		IWCIA, DGCI, 3DIM
2002	actes DGCI		ECCV, CVWW
2001		CGTA	IWVF
2000		GMod	
1999		MIA	ICIAP
	2	7	15

DGCI, IWCIA, SCIA, ECCV, ISVC et IWVF sont des conférences dont les actes sont publiés dans LNCS.

Edition d'actes de conférences et numéros spéciaux de revues internationales

[1] A. Braquelaire, J.-O. Lachaud, and A. Vialard, editors. *10th Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2002), Bordeaux, France*, volume 2301 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, April 2002.

[2] J.-O. Lachaud and A. Vialard, editors. *Special issue : discrete topology and geometry for image and object representation*, volume 65(1-3) of *Graphical Models*. Academic Press, may 2003.

Publications dans des revues internationales

[3] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Deformable meshes with automated topology changes for coarse-to-fine 3D surface extraction. *Medical Image Analysis*, 3(2) :187–207, 1999.

[4] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Continuous analogs of digital boundaries : A topological approach to iso-surfaces. *Graphical Models*, 62 :129–164, 2000.

[5] D. Attali and J.-O. Lachaud. Delaunay conforming iso-surface ; skeleton extraction and noise removal. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 19(2-3) :175–189, 2001.

[6] J.-O. Lachaud and B. Taton. Deformable model with a complexity independent from image resolution. *Computer Vision and Image Understanding*, 99(3) :453–475, 2005.

[7] F. de Vieilleville, J.-O. Lachaud, and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. *Journal of Mathematical Image and Vision*, 2006. Accepted. To appear.

[8] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours. *Image and Vision Computing*, 2006. Accepted. To appear.

[9] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs, and J.-O. Lachaud. Computation of homology groups and generators. *Computers & Graphics*, 30(1) :62–69, 2006.

Publications dans des revues nationales

[10] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Segmentation tridimensionnelle hiérarchique par triangulation de surface. *Traitement du Signal*, 13(6) :619–634, 1996.

Communications dans des conférences internationales avec comité de lecture

[11] J.-O. Lachaud and E. Bainville. A discrete adaptive model following topological modifications of volumes. In *Proc. 4th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'94), Grenoble, France*, pages 183–194, September 1994.

[12] J.-O. Lachaud. Topologically Defined Iso-surfaces. In *Proc. 6th Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'96), Lyon, France*, volume 1176 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 245–256. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. A hierarchic and dynamic method for modeling surfaces : application to segmentation of 3D data. In *Proc. Theoretical Foundations of Computer Vision, DagStuhl, Germany*, March 1996.

[14] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Volumic Segmentation using Hierarchical Representation and Triangulated Surface. In *Proc. 4th European Conference on Computer Vision (ECCV'96), Cambridge, UK*, volume 1064 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–146. Springer-Verlag, Berlin, April 1996.

[15] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Digital Surfaces as a Basis for Building Iso-surfaces. In *Proc. 5th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'98), Chicago, Illinois, Oct 4-7*, volume 2, pages 977–981, 1998.

[16] D. Attali and J.-O. Lachaud. Constructing iso-surfaces satisfying the Delaunay constraint ; application to the skeleton computation. In *Proc. 10th Int. Conf. on Image Analysis and Processing (ICIAP'99), Venice, Italy, Sept. 27-29*, pages 382–387, 1999.

[17] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Discrete deformable boundaries for the segmentation of multidimensional images. In C. Arcelli, L. P. Cordella, and G. Sanniti di Baja, editors, *Proc. 4th Int. Workshop on Visual Form (IWVF4), Capri, Italy*, volume 2059 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 542–551. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[18] S. Alayrangues and J.-O. Lachaud. Equivalence between order and cell complex representations. In H. Wildenauer and W. Kropatsch, editors, *Proc. Computer Vision Winter Workshop (CVWW), Bad Aussee, Austria*, pages 222–233, feb 2002.

[19] B. Taton and J.-O. Lachaud. Deformable model with non-euclidean metrics. In A. Heyden, G. Sparr, M. Nielsen, and P. Johansen, editors, *Proc. 7th European Conference on Computer Vision (ECCV'2002), Copenhagen, Denmark*, volume 2352 (part III) of *LNCS*, pages 438–453. Springer, Berlin, 2002.

[20] J.-O. Lachaud. Coding cells of digital spaces : a framework to write generic digital topology algorithms. In A. Del Lungo, V. Di Gesù, and A. Kuba, editors, *Proc. Int. Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2003), Palermo, Italy*, volume 12 of *ENDM*. Elsevier, 2003.

[21] J.-O. Lachaud and B. Taton. Deformable model with adaptive mesh and automated topology changes. In M. Rioux, P. Boulanger, and G. Godin, editors, *Proc. 4th int. Conf. 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM'2003), Banff, Alberta, Canada*. IEEE Computer Society Press, 2003.

[22] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Geometric measures on arbitrary dimensional digital surfaces. In G. Sanniti di Baja, S. Svensson, and I. Nyström, editors, *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2003), Napoli, Italy*, volume 2886 of *LNCS*, pages 434–443. Springer, 2003.

[23] S. Alayrangues, X. Daragon, J.-O. Lachaud, and P. Lienhardt. Equivalence between regular n-g-maps and n-surfaces. In R. Klette and J. Žunić, editors, *Proc. Int. Work. Combinatorial Image Analysis (IWCIA'2004), Auckland, New Zealand, December 1-3*, volume 3322 of *LNCS*, pages 122–136. Elsevier, 2004.

[24] J.-O. Lachaud and B. Taton. Resolution independent deformable model. In *Proc. 17th int. Conf. on Pattern Recognition (ICPR'2004), Cambridge, United Kingdom, 23-26 August*, volume II, pages 237–240. IEEE Computer Society Press, 2004.

[25] F. de Vieilleville, J.-O. Lachaud, and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. In *Proc. 14th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'2005), Joensuu, Finland*, volume 3540 of *LNCS*, pages 988–1003. Springer, 2005.

[26] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In E. Andrès, G. Damiand, and P. Lienhardt, editors, *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France*, volume 3429 of *LNCS*, pages 140–251. Springer, 2005.

[27] S. Peltier, S. Alayrangues, L. Fuchs, and J.-O. Lachaud. Computation of homology groups and generators. In E. Andrès, G. Damiand, and P. Lienhardt, editors, *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2005), Poitiers, France*, volume 3429 of *LNCS*, pages 195–205. Springer, 2005.

[28] M. Braure de Calignon, L. Brun, and J.-O. Lachaud. Combinatorial pyramids and discrete geometry for energy-minimizing segmentation. In *Proc. Int. Symposium on Visual Computing (ISVC'2006), Lake Tahoe, Nevada*, LNCS. Springer, November 2006. Accepted. To appear.

[29] F. de Vieilleville and J.-O. Lachaud. Convex shapes and convergence speed of discrete tangent estimators. In *Proc. Int. Symposium on Visual Computing (ISVC'2006), Lake Tahoe, Nevada*, LNCS. Springer, November 2006. Accepted. To appear.

[30] F. de Vieilleville and J.-O. Lachaud. Revisiting digital straight segment recognition. In A. Kuba, K. Palágyi, and L.G. Nyúl, editors, *Proc. Int. Conf. Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI'2006), Szeged, Hungary*, LNCS. Springer, October 2006. Accepted. To appear.

Communications dans des conférences nationales avec comité de lecture

[31] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Segmentation tridimensionnelle hiérarchique par triangulation de surface. In *Proc. 10th Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'96), Rennes, France*, pages 13–22, January 1996.

[32] D. Attali and J.-O. Lachaud. Construction d'iso-surfaces sous contraintes de Delaunay, codage par squelettes et filtrage. In *Proc. GRETSI'99, Vannes, France, Sept. 13-17*, pages 403–406, 1999.

[33] B. Taton and J.-O. Lachaud. Modèle déformable en métrique non euclidienne. In *Actes du 13ème Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'02), Angers, France*, pages 425–434, jan 2002.

Communications dans des ateliers nationaux

[34] B. Taton and J.-O. Lachaud. Modèle déformable en métrique non euclidienne. In *Actes des 14èmes journées AFIG, Limoges, France*, nov 2001.

Thèse soutenue ou thèses encadrées

[35] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998. (en français).

[36] B. Taton. *Modèle déformable à densité adaptative : application à la segmentation d'images*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, oct 2004.

[37] S. Alayrangues. *Modèles et Invariants Topologiques en Imagerie Numérique*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, jul 2005.

Encadrement de mémoires de Master

[38] F. Feschet. Ondelettes appliquées à l'analyse d'images volumiques. Master's thesis, Département Informatique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France, 1996.

[39] S. Alayrangues. Parallélisation d'un modèle de surface déformable à topologie variable. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2000.

[40] J.-F. Taille. Segmentation d'images par modèles déformables discrets 2d. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2000.

[41] A. Esnard. Modèle déformable discret appliqué à la segmentation d'images volumiques. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2001.

[42] C. Fouard. Heuristiques pour les modèles déformables discrets. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2001.

[43] B. Taton. Modèles déformables non-euclidiens pour la segmentation d'images. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2001.

[44] F. de Vieilleville. Segmentation et reconstruction de colonnes vertébrales à partir de radiographies. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2003.

[45] M. Braure de Calignon. Modèle déformable riemannien appliqué à la segmentation d'irm multimodales de cerveaux. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[46] L. Martin. Reconstruction supervisée d'un réseau de fractures. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[47] N. Hatami. Renal cortex segmentation on perfusion mri using deformable models. Master's thesis, Département Informatique, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2006.

Rapports de recherche

[48] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Volumetric Segmentation using Hierarchical Representation and Triangulated Surface. Research Report 95-37, Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, ENS Lyon, France, November 1995.

[49] J.-O. Lachaud. Topologically Defined Iso-surfaces. Research Report 96-20, Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, ENS Lyon, France, 1996.

[50] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Discrete deformable boundaries for image segmentation. Research Report 1244-00, LaBRI, Talence, France, 2000.

[51] B. Taton and J.-O. Lachaud. Deformable model with non-euclidean metrics. Research Report 1269-01, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2001.

[52] S. Alayrangues and J.-O. Lachaud. Equivalence between order and cell complex representations. Research Report 1272-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.

[53] A. Esnard, J.-O. Lachaud, and A. Vialard. Discrete deformable boundaries for 3d image segmentation. Research Report 1270-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.

[54] A. Esnard, J.-O. Lachaud, and A. Vialard. Discrete deformable boundaries for 3d image segmentation. Research Report 1270-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.

[55] J.-O. Lachaud. Coding cells of multidimensional digital spaces to write generic digital topology and geometry algorithms. Research Report 1283-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.

[56] B. Taton and J.-O. Lachaud. Deformable models with locally adaptive resolution using riemannian metrics defined from image structure tensor. Research Report 1280-02, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2002.

[57] J.-O. Lachaud. Writing generic digital topology and geometry algorithms. Research Report 1320-04, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2004.

[58] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Normal vector estimation on arbitrary dimensional digital surfaces and applications. Research Report 1321-04, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2004.

[59] F. de Vieilleville and J.-O. Lachaud. New bounds on the number and length of maximal segments on a convex digital polygon. Research Report 1364-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[60] F. de Vieilleville, J.-O. Lachaud, and F. Feschet. Maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators. Research Report 1350-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[61] J.-O. Lachaud. On the convergence of some local geometric estimators on digitized curves. Research Report 1347-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[62] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. de Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. Research Report 1340-05, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2005.

[63] M. Braure de Calignon, L. Brun, and J.-O. Lachaud. Combinatorial pyramids and discrete geometry for energy-minimizing segmentation. Research Report XXXX-06, LaBRI, University Bordeaux 1, Talence, France, 2006.