Etudes combinatoires sur les permutations et partitions d'ensemble

Anisse Kasraoui

N° d'ordre : 040-2009 Année 2009

THÈSE

présentée devant

l'**UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLÔME DE DOCTORAT**
(arrêté du 7 août 2006)

présentée et soutenue publiquement le 12 Mars 2009

par

Anisse KASRAOUI

ÉTUDES COMBINATOIRES SUR LES PERMUTATIONS ET PARTITIONS D'ENSEMBLE

Après avis des rapporteurs :

M. Ira GESSEL, professor (Brandeis University)
M. Guoniu HAN, chargé de recherche CNRS (Strasbourg 1)
M. Xavier Gérard VIENNOT, directeur de recherche CNRS (Bordeaux 1)

Devant le jury composé de :

Mme Sylvie CORTEEL, chargée de recherche CNRS (Paris XI)
M. Laurent HABSIEGER, directeur de recherche CNRS (Lyon1), président du jury
M. Guoniu HAN, chargé de recherche CNRS (Strasbourg 1)
M. Jean-Christophe NOVELLI, professeur (Marne-La-Vallée)
M. Xavier Gérard VIENNOT, directeur de recherche CNRS (Bordeaux 1)
M. Jiang ZENG, Professeur (Lyon 1), directeur de thèse

N° d'ordre : 040-2009 Année 2009

THÈSE

présentée devant

l'**UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLÔME DE DOCTORAT**
(arrêté du 7 août 2006)

présentée et soutenue publiquement le 12 Mars 2009

par

Anisse KASRAOUI

ÉTUDES COMBINATOIRES SUR LES PERMUTATIONS ET PARTITIONS D'ENSEMBLE

Après avis des rapporteurs :

M. Ira GESSEL, professor (Brandeis University)
M. Guoniu HAN, chargé de recherche CNRS (Strasbourg 1)
M. Xavier Gérard VIENNOT, directeur de recherche CNRS (Bordeaux 1)

Devant le jury composé de :

Mme Sylvie CORTEEL, chargée de recherche CNRS (Paris XI)
M. Laurent HABSIEGER, directeur de recherche CNRS (Lyon1), président du jury
M. Guoniu HAN, chargé de recherche CNRS (Strasbourg 1)
M. Jean-Christophe NOVELLI, professeur (Marne-La-Vallée)
M. Xavier Gérard VIENNOT, directeur de recherche CNRS (Bordeaux 1)
M. Jiang ZENG, Professeur (Lyon 1), directeur de thèse

à mon père et ma mère...

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude envers mes parents, mes frères et ma soeur pour leur patience et leur soutien sans faille durant la réalisation de ce travail. Il est certain que je n'aurai pu mener ce travail à terme sans leur appui.

Vient ensuite Jiang Zeng. Je tiens à le remercier, non seulement pour m'avoir encadré et dirigé lors de ce travail, mais également pour sa patience et sa très grande disponibilité. Ce fût une chance et un réel plaisir de travailler sous sa direction durant ces années. Qu'il soit remercié pour toute l'aide qu'il m'a apportée et toute la science qu'il m'a transmise. Que ces quelques lignes expriment toute la gratitude que je lui porte et qu'il sache que je le regretterai.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Ira Gessel, Guoniu Han et Xavier G. Viennot pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Que Xavier Viennot, l'auteur de mon premier ouvrage de combinatoire, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, sur lequel s'appuie une grande partie des travaux présentés dans ce mémoire, ait accepté de siéger dans mon jury me touche particulièrement.

Laurent Habsieger m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je l'en remercie vivement. Je tiens également à remercier chaleureusement Sylvie Corteel, Guoniu Han (une fois de plus) et Jean-Christophe Novelli pour avoir accepté de siéger dans mon jury.

Finalement, je remercie mes coauteurs : Masao Ishikawa, Dennis Stanton et Jiang Zeng.

Résumé

Ce mémoire se divise en 4 parties. Dans la première partie, nous répondons aux conjectures de Steingrimsson sur les partitions ordonnées d'ensemble. Plus précisément, nous montrons que les statistiques de Steingrimsson sur les partitions ordonnées d'ensemble ont la distribution euler-mahonienne.

Dans la deuxième partie, nous introduisons et étudions une nouvelle classe de statistiques sur les mots : les statistiques "maj-inv". Ces dernières sont des interpolations graphiques des célèbres statistisques "indice majeur" et "nombre d'inversions".

Dans la troisième partie, nous montrons que la distribution conjointe des statistiques "nombre de croisements" et "nombre d'imbrications" sur les partitions d'ensemble est symétrique. Nous étendrons aussi ce dernier résultat dans le cadre beaucoup plus large des 01-remplissages de "polyominoes lunaires".

La quatrième et dernière partie est consacrée à l'étude combinatoire des q-polynômes de Laguerre d'Al-Salam-Chihara. Nous donnerons une interprétation combinatoire de la suite de moments et des coefficients de linéarisations de ces polynômes.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire de thèse intitulé "*Études combinatoires sur les partitions d'ensemble et les permutations*" regroupe plusieurs travaux de combinatoire classique, dite aussi énumérative, sur les partitions d'ensemble et les permutations. Elle se divise en quatre parties.

Chap.1 : Statistiques Euler-Mahoniennes sur les partitions ordonnées d'ensemble. L'étude systématique des statistiques sur les permutations et mots a ses origines dans les travaux [**64**] du Major Percy Alexander MacMahon (1854-1929) au début du dernier siècle. C'est aujourd'hui l'un des domaines les plus actifs de la combinatoire moderne. Ce chapitre est consacré à l'étude de statistiques, introduites par Steingrímsson [**85**], sur les partitions ordonnées (compositions) d'ensemble.

Les *nombres eulériens* $A(n,k)$, $0 \leq k \leq n-1$, et les *nombres de Stirling de seconde espèce* $S(n,k)$, $1 \leq k \leq n$, peuvent être définis [**13**] par leur fonction génératrice :

$$1 + \sum_{0 \leq k \leq n-1} A(n,k) t^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+e^{x(t-1)}}. \tag{0.1}$$

et

$$1 + \sum_{1 \leq k \leq n} k! S(n,k) u^k \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1-u(e^z-1)}. \tag{0.2}$$

Soit $A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\, t^k$, $n \geq 1$, le n-ième *polynôme eulérien* (cf. [**28**] pour une étude combinatoire détaillée de ce polynôme). En posant $u = 1/t - 1$ et $z = x(t-1)$ dans (0.2), on obtient la formule de Frobenius [**34**]

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)!\, (t-1)^k\, S(n, n-k), \tag{0.3}$$

à partir de laquelle il est facile d'obtenir l'identité suivante reliant les nombres eulériens et les nombres de Stirling de seconde espèce

$$k!\, S(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{n-j}{n-k} A(n, j-1). \tag{0.4}$$

Cette dernière identité possède une preuve combinatoire simple (voir chapitre 1) en utilisant les interprétations combinatoires suivantes : $k!S(n,k)$ compte le nombre de partitions ordonnées de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ en k blocs (classes) et le nombre eulérien $A(n,k)$ compte le nombre de permutations de $[n]$ avec exactement k *descentes* [**5**].

Durant la seconde moitié du dernier siècle, de nombreux auteurs ont introduit et étudié, analytiquement et combinatoirement, des q-analogues de suites combinatoires classiques.

Les q-nombres eulériens $A_q(n,k)$ introduits par Carlitz [**6, 7**] peuvent être définis récursivementpar

$$A_q(n,k) = [k+1]_q A_q(n-1,k) + q^k [n-k]_q A_q(n-1,k-1) \qquad (n-1 \geq k \geq 0), \tag{0.5}$$

avec $A_q(n,0) = 1$ et $A_q(0,k) = \delta_{k\,0}$.

Les q-nombres de Stirling de seconde espèce $S_q(n,k)$ décrits par Gould [**41**] peuvent être définis récursivement par

$$S_q(n,\,k) = q^{k-1} S_q(n-1,\,k-1) + [k]_q S_q(n-1,\,k) \qquad (n \geq k \geq 0), \tag{0.6}$$

avec $S_q(n,k) = \delta_{n\,k}$ si $n = 0$ ou $k = 0$.

Un intérêt considérable a été accordé aux propriétés et à l'interprétation combinatoire des q-nombres de Stirling de seconde espèce et des q-nombres eulériens (voir e.g. [**6, 7, 12, 35, 36, 37, 40, 61, 67, 74, 77, 79, 81, 85, 88, 89, 90**]). Garsia [**35**] a notamment obtenu un q-analogue de la formule de Frobenius (0.3) reliant les q-nombres eulériens et les q-nombres de Stirling de seconde espèce :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} A_q(n,k-1)x^k}{(x;q)_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]_q!\, S_q(n,k)x^k}{(x;q)_{k+1}}. \tag{0.7}$$

À partir de cette dernière identité, Zeng et Zhang [**96**] ont obtenu le q-analogue suivant de (0.4) :

$$[k]_q!\, S_q(n,k) = \sum_{j=1}^{k} q^{k(k-j)} \begin{bmatrix} n-j \\ n-k \end{bmatrix}_q A_q(n,j-1). \tag{0.8}$$

Alors que (0.4) admet une preuve combinatoire simple, aucune preuve combinatoire de son q-analogue (0.8) n'est connue à ce jour. Ceci est d'autant plus frustrant que de nombreuses interprétations combinatoires des q-nombres de Stirling et des q-nombres eulériens sont connues. Steingrímsson qualifia de *euler-mahonienne* toute statistique "STAT" sur l'ensemble $\bigsqcup_{n\geq k\geq 1} \mathcal{OP}_n^k$ des partitions ordonnées dont la fonction génératrice sur $\mathcal{OP}_n^k$ est égale à $[k]_q!\, S_q(n,k)$, i.e.,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} q^{\mathrm{STAT}(\pi)} = [k]_q!\, S_q(n,k).$$

Cette définition provient de l'"analogie" entre le développement (0.4) de $[k]_q! S_q(n,k)$ en fonction des q-nombres eulériens et le polynôme $\sum_{k\geq 0} A_q(n,k)t^k$, ce dernier étant la série génératrice sur $\mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique d'ordre n, de la paire euler-mahonienne $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ [**7**], où "des" est la statistique nombre de descentes et "maj" l'indice majeur de MacMahon [**64**]. Dans le but de donner une preuve combinatoire de (0.8), Steingrímsson [**85**] a construit de nombreuses statistiques sur les partitions ordonnées qu'il conjectura euler-mahoniennes.

L'objectif principal du premier chapitre est de répondre à toutes ces conjectures. Nous avons pour cela construit un modèle combinatoire pour les partitions ordonnées dans lequel les statistiques de Steingrímsson s'interprétent naturellement. Nous avons ainsi obtenu de nombreuses fonctions génératrices sur les partitions, confirmant ainsi les conjectures de Steingrímsson ainsi que de nombreuses généralisations. En particulier, des liens étroits avec les travaux antérieurs de Wachs et White [**88, 89**] sur les partitions d'ensemble ainsi qu'une extension "partitionnelle" du célèbre résultat de MacMahon établissant l'équidistribution des statistiques nombre d'inversions et indice majeur sur le groupe symétrique sont présentés. Cette version partitionnelle du résultat de MacMahon nous a d'ailleurs conduit à introduire et étudier de nouvelles statistiques sur les mots : les *statistiques maj-inv*. C'est l'objet du chapitre 2. Les résultats présentés dans le premier chapitre ont fait l'objet de deux publications, l'une en commun avec Masao Ishikawa et Jiang Zeng [**44**], l'autre avec Jiang Zeng [**52**].

Chap.2 : Classification des statistiques mahoniennes maj-inv. On sait depuis MacMahon [**65, 66**] que les statistiques indice majeur ("maj") et nombre d'inversions ("inv") sont équidistribuées sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et même, plus généralement, sur toute *classe de réarrangements* d'un mot. Plus précisément, pour une séquence d'entiers positifs $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ et v le mot croissant $v = 1^{n_1}2^{n_2}\ldots k^{n_k}$, MacMahon montra que la distribution des statistiques "maj" et "inv" sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(v)$ du mot v est donnée par

$$\sum_{w\in\mathcal{R}(v)} q^{\mathrm{inv}(w)} = \sum_{w\in\mathcal{R}(v)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \begin{bmatrix} n_1+n_2+\cdots+n_k \\ n_1, n_2, \cdots, n_k \end{bmatrix}_q . \tag{0.9}$$

Une statistique équidistribuée avec "maj" (ou "inv") sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(v)$ est dite *mahonienne* en honneur de MacMahon.

En 1996, Foata et Zeilberger [**31**] ont introduit des généralisations des statistiques "inv" et "maj". Soit X un ensemble fini et X^* le monoïde libre engendré par X. Sans perte de généralités, on peut assumer $X := \{1, 2, \ldots, k\}$. À toute *relation* U sur X, Foata et Zeilberger ont associé les statistiques maj'_U et inv'_U appelées respectivement *indice majeur graphique* et *nombre d'inversions graphique* et définies sur les mots $w = x_1\cdots x_n \in X^*$ par

$$\mathrm{inv}'_U(w) = \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i \mathrm{U} x_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{maj}'_U(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i \mathrm{U} x_{i+1}).$$

Pour $U = " > "$ l'ordre naturel sur X, on obtient $\mathrm{maj}'_> = \mathrm{maj}$ et $\mathrm{inv}'_> = \mathrm{inv}$.

L'identité de MacMahon (0.9) poussa Foata et Zeilberger à soulever et résoudre [**31**, Théorème 2] le problème suivant : *Quelles sont les relations U sur X pour lesquelles les statistiques* maj'_U *et* inv'_U *sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements* $\mathcal{R}(v)$ *?*

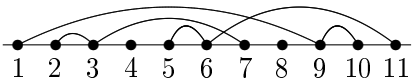
Motivé par une statistique rencontrée sur les partitions ordonnées, nous étudions dans le chapitre 2 une "interpolation graphique" des indices majeurs et nombres d'inversions graphiques. Pour cela, nous nous intéressons aux statistiques qui s'écrivent comme la

somme d'un indice majeur graphique et d'un nombre d'inversion graphique. Nous dirons qu'une statistique "STAT" sur X^* est une *statistique maj-inv* si il existe deux relations U et V sur X telles que $\mathrm{STAT} = \mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$. Il est clair que l'indice majeur et le nombre d'inversions sont des statistiques maj-inv. Un autre exemple de statistique maj-inv est donné par l'*indice majeur de Rawlings*. Dans notre étude sur les statistiques maj-inv, nous répondrons aux questions suivantes : *Pour quelles relations U et V sur X les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ et $\mathrm{inv}'_{U\cup V}$ sont*

– *équidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(v)$?*
– *mahoniennes ?*

Nous verrons notamment que nos résultats unifient le résultat de Foata et Zeilberger sur l'équidistribution des statistiques indice majeur graphique et nombre d'inversions graphique, le résultat de Rawlings sur les statistiques r-indices majeurs ainsi que la version partitionelle (obtenue dans le chapitre 1) de l'identité de MacMahon (0.9). Nous construirons aussi de nouvelles statistiques mahoniennes originales sur les mots et permutations. Les résultats présentés dans le deuxième chapitre ont fait l'objet d'une publication [**48**].

Chap.3 : Croisements et imbrications de deux arcs dans les partitions d'ensemble. Généralisations. Toute partition π de $[n]$ peut être représentée par un graphe dont les sommets sont indéxés par $[n]$. Il suffit pour cela de placer n points sur une ligne numérotés de gauche à droite par $1, 2, \ldots, n$ et de tracer un arc reliant les points i et j au dessus de cette ligne si et seulement si les points i et j sont deux éléments adjacents d'un même bloc. Par exemple, la partition $\pi = 1\ 9\ 10/2\ 3\ 7/4/5\ 6\ 11/8$ est représentée par le graphe suivant :



Apparait alors deux statistiques naturels qui sont les *nombre de croisements* ("cros_2") et *nombre d'imbrications* ("nest_2") de deux arcs. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des partitions de $[n]$ et $M_n \subseteq \mathcal{P}_n$ l'ensemble des couplages parfaits (partitions dont chaque bloc contient exactement 2 éléments) de $[n]$. L'étude coinjointe des croisements et imbrications d'arcs dans les partitions et couplages a reçu un regain d'intérêt ces dernières années (cf. e.g. [**3, 10, 9, 14, 16, 17, 23, 53, 56, 60, 68, 76**]).

Il est bien connu que le nombre de couplages parfaits de $[2n]$ sans croisements est égal au nombre de couplages parfaits de $[2n]$ sans imbrications (qui est le n-ième *nombre de Catalan* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$). Ceci est d'autant plus vrai que Sainte-Catherine [**18**] a montré l'équidistribution des statistiques "cros_2" et "nest_2" sur l'ensemble des couplages parfaits de $[2n]$. Récemment, Klazar et Noy [**56**] ont généralisé ce résultat en montrant que la distribution conjointe sur $\mathcal{M}_{2n}$ du couple $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ est symétrique, i.e.

$$\sum_{M\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(\mathrm{M})} q^{\mathrm{nest}_2(\mathrm{M})} = \sum_{M\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(\mathrm{M})} q^{\mathrm{cros}_2(\mathrm{M})}. \tag{0.10}$$

Sachant que le nombre de partitions de $[n]$ sans croisements est égal au nombre de partitions de $[n]$ sans imbrications (qui est aussi le n-ième nombre de Catalan C_n), il est

naturel de se demander si les statistiques cros_2 et nest_2 sont équidistribuées sur $\mathcal{P}_n$ et même plus généralement si leur distribution conjointe est symétrique.

Dans la première partie du chapitre 3, nous répondons à ces questions par l'affirmatif. Pour $S, T \subseteq [n]$, désignons par $\mathcal{P}_n(S,T)$ l'ensemble des partitions π de $[n]$ dont l'ensemble des extrémités gauche (resp. droite) des arcs de π est donné par S (resp. T). Nous établissons la symétrie de la distribution coinjointe du couple $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ sur chaque $\mathcal{P}_n(S,T)$ (et donc sur $\mathcal{P}_n$), i.e.

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}, \tag{0.11}$$

généralisant, en particulier, le résultat de Klazar et Noy.

Comme l'a remarqué Krattenthaler [**60**] en généralisant certains résultats sur les k-croisements et k-imbrications de Chen-Deng-Du-Stanley-Yan [**9**], l'étude des croisements et imbrications d'arcs dans les partitions s'injecte dans un cadre plus large, à savoir l'énumération des chaines croissantes et décroissantes dans les 01-polyominos (01-remplissages de polyominos). En effet à tout graphe simple G sur $[n]$, on peut associer le 01-remplissage du diagramme de Ferrers triangulaire Δ_n de forme $(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Il suffit pour cela de numéroter les lignes de Δ_n de haut en bas par $2, 3, \ldots, n$ et les colonnes de gauche à droite par $1, 2, \ldots, n-1$, et d'attribuer à la cellule située à l'intersection de la colonne étiquetée i et la ligne étiquetée j la valeur 1 si (i,j) est un arc de G, 0 sinon. Une illustration est donnée ci-dessous.

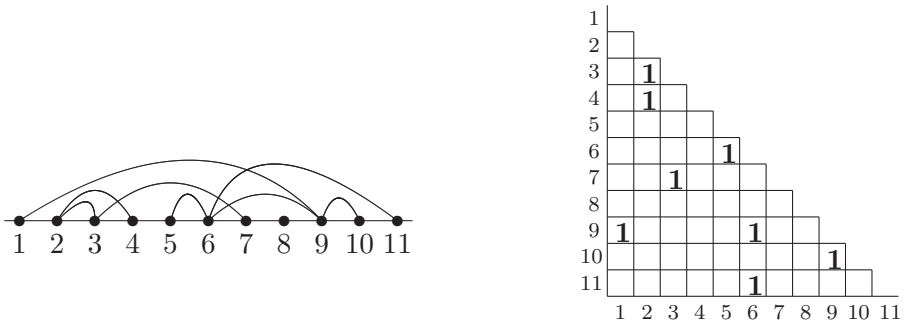


FIG. 0.1. Un graphe et le 01-remplissage correspondant

Cette correspondance "envoie" les croisements (resp. imbrications) de deux arcs dans les partitions de $[n]$ sur les *descentes* (resp. *montées*) de 01-remplissages de Δ_n. Une montée ou *chaine nord-est de longueur 2*, (resp., descente ou *chaine sud-est de longueur 2*) dans un 01-polyomino est un ensemble de deux cellules contenant les valeurs 1 et telles que l'une d'elle est strictement au dessus et à droite (resp., en dessous et à droite) de l'autre et telles que le plus petit rectangle contenant les deux cases est contenue dans le polyomino. L'identité (0.11) se traduit alors en une propriété de symétrie des nombres de descentes et montées dans les 01-tableaux de forme Δ_n. Dans la deuxième partie du chapitre 3, nous étendrons ce résultat non seulement aux diagrammes de Ferrers quelconque mais plus généralement à l'ensemble des " *polyominos lunaires*". Ceci généralise et unifie les résultats énoncés ci-dessus ainsi qu'un récent résultat de Chen-Wu-Yan [**10**] sur les partitions liées d'ensemble.

Nous terminerons le chapitre 3 par trois notes, la première dédiée à la réduction des partitions d-régulières, la deuxième à l'énumération des croisements d'arcs dans les partitions et la dernière au calcul du nombre moyen de croisements dans une partition. Les résultats présentés dans le troisième chapitre ont fait l'objet de trois publications [**49, 50, 53**], dont une en commun avec Jiang Zeng [**53**].

Chap.4 : Combinatoire des q-polynômes orthogonaux de Laguerre. La théorie combinatoire des polynômes orthogonaux a reçu un interêt considérable ces 3 dernières décénnies. Ainsi, nous connaissons aujourd'hui des modèles combinatoires (interprétation combinatoire des polynômes, suite de moments et coefficients de linéarisation associés) pour chacun des 5 polynômes de Sheffer définis-positifs : Hermite, Charlier, Laguerre, Meixner et Meixner-Pollaczek. Comme souvent en combinatoire, de nombreux q-analogues ont fait l'objet d'investigations (le but ultime étant de construire une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux de Askey-Wilson, la séquence de polynômes orthogonaux hypergéométriques la plus générale qui soit). Cependant, l'un des problèmes que l'on rencontre en "q-théorie", c'est qu'il y a plusieurs q-versions possibles pour un problème donné (certaines n'ayant aucun intérêt car inexploitables tant combinatoirement qu'analytiquement). On peut alors naturellement se demander ce que pourrait être un bon q-analogue d'un point de vue combinatoire. Pour une suite de polynômes orthogonaux de sheffer $(p_n(x))_{n\geq 0}$, ce serait une suite de q-polynômes orthogonaux $(p_n(x;q))_{n\geq 0}$ dont la suite de moments et les coefficients de linéarisation sont des polynômes en q à coefficients positifs (à un changement de variable près), i.e. des q-comptages, dont on a une interprétation combinatoire ainsi qu'une expression analytique.

Un q-analogue des polynômes d'Hermite possédant ces propriétés fut donné par Ismail, Stanton et Viennot [**45**] en 1987. Ce n'est que très récemment qu'un "bon" q-analogue des polynômes de Charlier a été découvert en 2005 par Anshelevich [**1**] à l'aide de processus stochastiques élaborés. Le principal objectif du chapitre 4 est d'introduire un "bon" q-analogue des polynômes de Laguerre simple. Nous donnerons les formules explicites ainsi que l'interprétation combinatoire pour la suite de moments et les coefficients de linéarisation. Les résultats présentés dans le dernier chapitre ont été obtenu en collaboration avec Dennis Stanton et Jiang Zeng [**51**].

CHAPITRE 1

Statistiques Euler-Mahoniennes sur les partitions ordonnées d'ensemble

En 1997, Einar Steingrímsson a introduit plusieurs statistiques "complexes" sur les partitions ordonnées et a conjecturé que leur distribution est reliée aux q-nombres de Stirling de seconde espèce introduits par Gould. Dans ce chapitre, nous démontrons toutes les conjectures de Steingrímsson, ainsi que de nombreuses généralisations. L'idée de base est de coder les partitions ordonnées par des chemins pondérés dans lesquels les statistiques de Steingrímsson s'interprétent naturellement.

1. Introduction et résultats principaux

1.1. Introduction.

L'étude systématique des statistiques sur les permutations et mots a ses origines dans les travaux du Major Percy Alexander MacMahon (1854-1929) au début du dernier siècle. C'est aujourd'hui l'un des domaines les plus actifs de la combinatoire moderne. Ce chapitre est consacré à l'étude de statistiques, introduites par Steingrímsson, sur les partitions ordonnées d'ensemble, appelées aussi compositions d'ensemble.

Une partition d'un ensemble S est une collection d'ensembles disjoints deux à deux et non vides, que nous appelerons *blocs*, dont l'union est S. Une partition ordonnée de S est une partition dont on a ordonné les blocs, i.e., une séquence dont les éléments sont les blocs d'une partition de S. Dans la suite, nous prendrons toujours $S = [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Par convention, on écrira toujours les partitions (non ordonnées) sous *forme standard*, i.e., les blocs séparés par un "/" et classés par ordre croissant de leur minima. Par exemple, l'objet $1\,4\,8/2\,3/5\,6\,7/9$ est l'écriture sous forme standard de la partition $\{\{1,4,8\},\{5,6,7\},\{2,3\},\{9\}\}$ de [9]. Nous dénoterons par $\mathcal{P}_n^k$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k blocs et par $\mathcal{OP}_n^k$ l'ensemble des partitions ordonnées de $[n]$ en k blocs. Il est bien connu que le nombre de partitions de $[n]$ en k blocs est le *nombre de Stirling de seconde espèce* $S(n,k)$, et donc $|\mathcal{OP}_n^k| = k!\,S(n,k)$. Rappelons que les nombres de Stirling de seconde espèce peuvent être définis récursivement par

$$S(n,\,k) = S(n-1,\,k-1) + k\,S(n-1,\,k) \qquad (n \geq k \geq 1), \tag{1.1}$$

avec $S(n,k) = \delta_{n\,k}$ si $n = 0$ ou $k = 0$.

L'étude de statistiques sur les objets combinatoires est souvent liée à l'analyse, particulièrement l'interprétation, de q-analogues de suites et identités combinatoires. Les

polynômes eulériens $A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\, t^k$ (cf. [**28**]) peuvent être définies par la relation

$$\sum_{n\geq 0} A_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+e^{x(t-1)}}. \tag{1.2}$$

Frobenius [**34**] a donné la formule

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)!\,(t-1)^k\, S(n,n-k), \tag{1.3}$$

à partir de laquelle il est facile d'obtenir la relation suivante reliant les nombres eulériens et les nombres de Stirling de seconde espèce

$$k!\, S(n,k) = \sum_{j=1}^{k}\binom{n-j}{n-k} A(n,j-1). \tag{1.4}$$

Notons que cette dernière identité possède une preuve combinatoire simple. En effet, on sait depuis Carlitz et Riordan [**5**] que le nombre eulérien $A(n,k)$ compte le nombre de permutations de $[n]$ avec exactement k *descentes*. Rappelons qu'une descente dans une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique d'ordre n, est un indice $i \in [n-1]$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Un *arrangement préférentiel* est une permutation σ de $[n]$ dont chaque *valeur de montée* ($\sigma(i)$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$) peut être soulignée ou non. Par exemple, l'objet $\sigma = \underline{2}\,9\,3\,1\,4\,8\,5\,\underline{6}\,7$ est un arrangement préférentiel de [9]. Ainsi, le membre droit de l'identité (1.4) compte le nombre d'*arrangements préférentiels* de $[n]$ avec exactement $k-1$ descentes et éléments soulignés. Étant donné un arrangement préférentiel $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ de $[n]$, insérons une barre verticale entre a_i et a_{i+1} si $a_i > a_{i+1}$ ou si a_i est souligné. Par exemple, nous avons la correspondance suivante :

$$\sigma = \underline{2}\,9\,3\,1\,4\,8\,5\,\underline{6}\,7 \longrightarrow \pi = 2/9/3/1\,4\,8/5\,6/7.$$

On peut donc associer à tout arrangement préférentiel de $[n]$ une partition ordonnée de $[n]$ et il est facile de voir que cette correspondance est inversible, ce qui constitue une preuve combinatoire de l'identité (1.4).

Durant ces dernières décennies, un intérêt considérable a été accordé aux propriétés et à l'interprétation combinatoire de q-analogues de suites combinatoires classiques, en particulier les q-nombres de Stirling de seconde espèce et les q-nombres eulériens (cf. e.g. [**6, 7, 12, 35, 36, 37, 40, 61, 67, 74, 77, 79, 81, 85, 88, 89, 90**]).

Définissons le *p,q-entier* $[n]_{p,q} = \frac{p^n-q^n}{p-q} = p^{n-1}+p^{n-2}q+\cdots+pq^{n-2}+q^{n-1}$, le p,q-factoriel $[n]_{p,q}! = [1]_{p,q}[2]_{p,q}\cdots[n]_{p,q}$ et le *p,q-coefficient binomial*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{cases} \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $p=1$, nous écrirons $[n]_q$, $[n]_q!$ and $\left[{n \atop k}\right]_q$ pour $[n]_{1,q}$, $[n]_{1,q}!$ and $\left[{n \atop k}\right]_{1,q}$, et appelerons ces valeurs *q-entier*, *q-factoriel* et *q-coefficient binomial*, respectivement.

Les q-nombres Eulériens $A_q(n,k)$ $(n \geq k \geq 0)$ introduits par Carlitz [**6, 7**] peuvent être définis récursivement par

$$A_q(n,k) = q^k[n-k]_q A_q(n-1,k-1) + [k+1]_q A_q(n-1,k). \tag{1.5}$$

Les premières valeurs des $A_q(n,k)$ sont données dans le tableau suivant.

$n \setminus k$	0	1	2	3
1	1			
2	1	q		
3	1	$2q+2q^2$	q^3	
4	1	$3q+5q^2+3q^3$	$3q^3+5q^4+3q^5$	q^6.

Les q-nombres de Stirling de seconde espèce $S_q(n,k)$ et $\widetilde{S}_q(n,k)$ introduits par Gould [**41**] peuvent être définis par un q-analogue de la récurrence (1.1) :

$$S_q(n,\,k) = q^{k-1}S_q(n-1,\,k-1) + [k]_q S_q(n-1,\,k) \qquad (n \geq k \geq 1), \tag{1.6}$$

et

$$\widetilde{S}_q(n,\,k) = \widetilde{S}_q(n-1,\,k-1) + [k]_q \widetilde{S}_q(n-1,\,k) \qquad (n \geq k \geq 1), \tag{1.7}$$

avec $S_q(n,k) = \widetilde{S}_q(n,k) = \delta_{n\,k}$ si $n=0$ ou $k=0$. Il est facile de voir que $S_q(n,k) = q^{\binom{k}{2}}\widetilde{S}_q(n,k)$. Les premières valeurs des $S_q(n,\,k)$ sont données dans le tableau suivant.

$n \setminus k$	1	2	3	4
1	1			
2	1	q		
3	1	$2q+q^2$	q^3	
4	1	$3q+3q^2+q^3$	$3q^3+2q^4+q^5$	q^6.

Garsia [**35**] a obtenu un q-analogue de la formule de Frobenius reliant les q-nombres eulériens et les q-nombres de Stirling de seconde espèce :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} A_q(n,k-1)x^k}{(x;q)_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{[k]!\,S_q(n,k)x^k}{(x;q)_{k+1}}, \tag{1.8}$$

où l'on a posé $(x;q)_n = (1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{n-1})$, et Zeng et Zhang [**96**] ont obtenu le q-analogue suivant de (1.4) :

$$[k]_q!\,S_q(n,k) = \sum_{i=1}^{k} q^{k(k-i)} \begin{bmatrix} n-i \\ n-k \end{bmatrix}_q A_q(n,i-1). \tag{1.9}$$

Alors que (1.4) admet une preuve combinatoire simple, aucune preuve combinatoire de (1.9) n'est connue à ce jour. Ceci est d'autant plus frustrant que de nombreuses interprétations combinatoires des q-nombres de Stirling $S_q(n,k)$ et des q-nombres eulériens sont connues. Rappelons par exemple que Carlitz [**7**] donna l'interprétation combinatoire suivante des q-nombres eulériens :

$$A_q(n,k) = \sum_{\sigma} q^{\mathrm{maj}(\sigma)},$$

où la sommation porte sur toutes les permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ avec exactement k descentes et la statistique "maj" est l'*indice majeur* de MacMahon [**64**, chap. 6].

Dans le but de résoudre ce problème (interprétation combinatoire de (1.9)), Steingrímsson [**85**] a entrepris une étude systématique de statistiques sur les partitions ordonnées dont la distribution est donnée par $[k]_q! S_q(n,k)$. Toute statistique équidistribuée avec "maj" est dite *mahonienne* en honneur de MacMahon, alors que toute statistique équidistribuée avec "des" est dite eulérienne (la fonction génératrice "des" sur $\mathfrak{S}_n$ est donnée par le n-ème polynôme eulérien $A_n(t)$). Ainsi Foata donna l'attribut de *euler-mahonienne* à toute paire de statistiques $(\mathrm{eul}, \mathrm{mah})$ sur les permutations équidistribuée avec $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$. La distribution sur $\mathfrak{S}_n$ de la paire $(\mathrm{des}, \mathrm{maj})$ est donnée par $\sum_{k\geq 0} A_q(n,k)t^k$. Par analogie et d'après le développement (1.9) de $[k]_q! S_q(n,k)$ en fonction des q-nombres eulériens, Steingrímsson [**85**] a introduit la définition suivante.

DÉFINITION 1.1. *Une statistique* stat *sur* $\mathcal{OP}_n^k$ *est dite Euler-Mahonienne si sa fonction génératrice sur* $\mathcal{OP}_n^k$ *est égale à* $[k]_q!\, S_q(n,k)$, *i.e.,*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{OP}_n^k} q^{\mathrm{stat}(\pi)} = [k]_q!\, S_q(n,k).$$

Steingrímsson [**85**] a construit de nombreuses statistiques sur les partitions ordonnées qu'il conjectura comme étant Euler-Mahoniennes. Le principal objectif de ce chapitre est de répondre à ces conjectures.

1.2. Les conjectures de Steingrímsson.

Soit B une partie finie de $\mathbb{N}$. L'*ouvrant* de B est son plus petit élément alors que le *fermant* de B est son plus grand élément. Soit $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k$ une partition ordonnée de $[n]$. Nous dénoterons par $\mathrm{open}(\pi)$ et $\mathrm{clos}(\pi)$ les ensembles d'ouvrants et fermants des blocs de π, respectivement. Les lettres (entiers) de π sont réparties en 4 classes. On dira que l'entier i est un

- un *ouvrant strict* de π si il est le plus petit élément d'un bloc de cardinal ≥ 2,
- un *fermant strict* de π si il est le plus grand élément d'un bloc de cardinal ≥ 2,
- un *singleton* de π si il est l'(unique) élément d'un bloc de cardinal égal à 1,
- un *passant* de π si il n'est ni le plus petit, ni le plus grand élément d'un bloc de cardinal ≥ 2.

Les ensembles d'ouvrants stricts, fermants stricts, singletons et passants de π seront notés respectivement $\mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{C}(\pi)$, $\mathcal{S}(\pi)$ et $\mathcal{T}(\pi)$. Le 4-uple $(\mathcal{O}(\pi), \mathcal{C}(\pi), \mathcal{S}(\pi), \mathcal{T}(\pi))$ est appelé *type* de π et dénoté $\mathrm{type}(\pi)$.

Par exemple si $\pi = 3\,5/2\,4\,6/1/7\,8$, alors $\mathrm{open}(\pi) = \{1,2,3,7\}$, $\mathrm{clos}(\pi) = \{1,5,6,8\}$ et

$$\mathrm{type}(\pi) = (\{2,3,7\}, \{5,6,8\}, \{1\}, \{4\}).$$

Notons que pour toute partition π, on a

$$\mathrm{open}(\pi) = \mathcal{O}(\pi) \cup \mathcal{S}(\pi), \quad \mathrm{clos}(\pi) = \mathcal{C}(\pi) \cup \mathcal{S}(\pi), \quad \mathcal{S}(\pi) = \mathrm{open}(\pi) \cap \mathrm{clos}(\pi).$$

Dans [**85**], Steingrímsson a défini un système de 10 statistiques sur les partitions ordonnées. Ces statistiques sont essentiellement des *statistiques d'inversion* et la plupart d'entre elles ont déja été étudiées dans le cas des partitions (non ordonnées) d'ensemble [**67, 89**]. On peut noter que les deux dernières lsb et rsb sont inspirées de statistiques définies par Foata et Zeilberger [**32**] sur les permutations. Le lecteur se reportera aux articles [**61, 85, 88**] pour plus d'informations sur ces statistiques.

Étant donnée une partition $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k \in \mathcal{OP}_n^k$, on dénote par w_i l'indice du bloc (compté de gauche à droite) contenant i, i.e., w_i est l'entier j tel que $i \in B_j$. Commençons par définir des statistiques dites "coordonnées". Pour $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$\begin{aligned}
\mathrm{los}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{open}(\pi) \,|\, j < i,\, w_j < w_i\},\\
\mathrm{ros}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{open}(\pi) \,|\, j < i,\, w_j > w_i\},\\
\mathrm{lob}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{open}(\pi) \,|\, j > i,\, w_j < w_i\},\\
\mathrm{rob}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{open}(\pi) \,|\, j > i,\, w_j > w_i\},\\
\mathrm{lcs}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{clos}(\pi) \,|\, j < i,\, w_j < w_i\},\\
\mathrm{rcs}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{clos}(\pi) \,|\, j < i,\, w_j > w_i\},\\
\mathrm{lcb}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{clos}(\pi) \,|\, j > i,\, w_j < w_i\},\\
\mathrm{rcb}_i(\pi) &= \#\{j \in \mathrm{clos}(\pi) \,|\, j > i,\, w_j > w_i\}.
\end{aligned}$$

De plus, soit $\mathrm{rsb}_i(\pi)$ (resp. $\mathrm{lsb}_i(\pi)$) le nombre de blocs de π à droite (resp. gauche) du bloc contenant i dont l'ouvrant est plus petit que i et le fermant plus grand que i. Remarquons que lsb_i et rsb_i sont en fait chacunes égales à la différence de deux des huit premières statistiques. En effet, il est facile de voir que

$$\mathrm{lsb}_i = \mathrm{los}_i - \mathrm{lcs}_i = \mathrm{lcb}_i - \mathrm{lob}_i \quad \text{et} \quad \mathrm{rsb}_i = \mathrm{ros}_i - \mathrm{rcs}_i = \mathrm{rcb}_i - \mathrm{rob}_i\,. \tag{1.10}$$

Remarque 1.2. *Dans chacune des statistiques définies précédemment, les lettres l/r, o/c et s/b sont les abbréviations des termes anglophones "left/right", "opener/closer" et "smaller/bigger". Par exemple,* ros_i *et* lcs_i *sont les abbréviations de "right opener smaller than i", et "left closer bigger than i", qu'on traduirait par "ouvrant plus petit et à droite de i" et "fermant plus grand et à gauche de i".*

Le tableau suivant donne les valeurs prises par les statistiques coordonnées lorque $\pi = 6\ 8/5/1\ 4\ 7/3\ 9/2$:

i	6 8	/ 5	/ 1 4 7	/ 3 9	/ 2
$\mathrm{los}_i(\pi)$	0 0	0	0 0 2	1 3	1
$\mathrm{ros}_i(\pi)$	4 4	3	0 2 2	1 1	0
$\mathrm{lob}_i(\pi)$	0 0	1	2 2 0	2 0	3
$\mathrm{rob}_i(\pi)$	0 0	0	2 0 0	0 0	0
$\mathrm{lcs}_i(\pi)$	0 0	0	0 0 1	0 3	0
$\mathrm{rcs}_i(\pi)$	2 3	1	0 1 1	1 1	0
$\mathrm{lcb}_i(\pi)$	0 0	1	2 2 1	3 0	4
$\mathrm{rcb}_i(\pi)$	2 1	2	2 1 1	0 0	0
$\mathrm{lsb}_i(\pi)$	0 0	0	0 0 1	1 0	1
$\mathrm{rsb}_i(\pi)$	2 1	2	0 1 1	0 0	0

On définit alors les 10 statistiques ros, rob, rcs, rcb, lob, los, lcs, lcb, lsb et rsb comme la somme des statistiques coordonnées correspondantes. Par exemple, la statistique ros est définie sur les partitions ordonnées de $[n]$ par

$$\mathrm{ros} = \mathrm{ros}_1 + \cdots + \mathrm{ros}_n\,.$$

Dans notre étude, nous avons introduit des restrictions de ces 10 statistiques. Pour toute partition π, dénotons les restrictions de ces statistiques sur les ouvrants par $\mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}$, $\mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}}$, ... et sur les non-ouvrants par $\mathrm{ros}_{\mathcal{TC}}$, $\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}$, ... Par exemple, les statistiques $\mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}$ et $\mathrm{ros}_{\mathcal{TC}}$ sont définies sur les partitions ordonnées π par

$$\mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}(\pi) = \sum_{i\in\,\mathcal{O}\cup\mathcal{S}(\pi)} \mathrm{ros}_i(\pi) \quad \text{et} \quad \mathrm{ros}_{\mathcal{TC}}(\pi) = \sum_{i\in\,\mathcal{T}\cup\mathcal{C}(\pi)} \mathrm{ros}_i(\pi). \tag{1.11}$$

Notons que pour toute statistique $\mathrm{STAT} \in \{\mathrm{ros}, \mathrm{los}, \mathrm{rob}, \mathrm{lob}, \ldots\}$, on a

$$\mathrm{STAT} = \mathrm{STAT}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{STAT}_{\mathcal{TC}}. \tag{1.12}$$

Soit $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k \in \mathcal{OP}_n^k$. On peut définir un ordre partiel $\succ$ sur les blocs de π de la manière suivante : $B_i \succ B_j$ si toutes les lettres (entiers) de B_i sont plus grandes que celles de B_j, i.e., si $\min(B_i) > \max(B_j)$. On définit alors une *inversion de blocs* dans π comme une paire (i,j) telle que $i<j$ et $B_i \succ B_j$. Nous dénoterons par $\mathrm{bInv}(\pi)$ le nombre d'inversions de blocs dans π. Une *descente de bloc* est un entier i telle que $B_i \succ B_{i+1}$. L'ensemble des descentes de bloc de π est dénoté $\mathrm{bDes}(\pi)$. L'*indice majeur de bloc* de π, dénoté par $\mathrm{bMaj}(\pi)$, est la somme des descentes de blocs de π.

Par exemple, considérons la partition $\pi = 6\ 8/5/1\ 4\ 7/3\ 9/2$. Comme $\{6,8\} \succ \{5\}$, $\{6,8\} \succ \{2\}$, $\{5\} \succ \{2\}$ et $\{3,9\} \succ \{2\}$, on a $\mathrm{bInv}(\pi) = 4$ et $\mathrm{bMaj}(\pi) = 1+4 = 5$.

Définissons aussi les complémentaires à $\binom{k}{2}$ des statistiques bInv et bMaj :

$$\mathrm{cbInv} = \binom{k}{2} - \mathrm{bInv} \quad \text{et} \quad \mathrm{cbMaj} = \binom{k}{2} - \mathrm{bMaj} \tag{1.13}$$

et les deux statistiques composées suivantes :

$$\text{cinvLSB} = \text{lsb} + \text{cbInv} + \binom{k}{2} \quad \text{et} \quad \text{cmajLSB} = \text{lsb} + \text{cbMaj} + \binom{k}{2}. \tag{1.14}$$

Notons que la statistique bInv peut se récrire de la manière suivante

$$\text{bInv} = \text{rcs}_{\mathcal{OS}}\,. \tag{1.15}$$

Les deux statistiques suivantes ont leur analogue sur les permutations [**85**, p.13] :

$$\text{Mak} = \text{ros} + \text{lcs}, \qquad \text{Mak}' = \text{lob} + \text{rcb}\,. \tag{1.16}$$

On peut maintenant présenter les conjectures de Steingrímsson qui ont motivé ce travail.

Conjecture 1.3 (Steingrímsson). *Les statistiques suivantes sont Euler-Mahoniennes sur $\mathcal{OP}_n^k$:*

$$\begin{aligned} &\text{Mak} + \text{bInv}, \quad \text{Mak}' + \text{bInv}, \quad \text{cinvLSB}, \\ &\text{Mak} + \text{bMaj}, \quad \text{Mak}' + \text{bMaj}, \quad \text{cmajLSB}\,. \end{aligned}$$

1.3. Résultats principaux.

Soit $\mu = (\mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ un type de partition et dénotons par $\mathcal{OP}_n^k(\mu)$ l'ensemble des partitions ordonnées dans $\mathcal{OP}_n^k$ dont le type est égale à μ, i.e.,

$$\mathcal{OP}_n^k(\mu) = \{\pi \in \mathcal{OP}_n^k \mid \text{type}(\pi) = \mu\}.$$

Les deux statistiques suivantes que l'on notera Maj et Inv, qui peuvent être vues comme des extensions des statistiques permutationnelles maj et inv et définies par

$$\text{Inv} = \text{rsb}_{\mathcal{OS}} + \text{bInv} = \text{ros}_{\mathcal{OS}} \quad \text{et} \quad \text{Maj} = \text{rsb}_{\mathcal{OS}} + \text{bMaj}, \tag{1.17}$$

jouent un rôle important dans notre étude. Notons que l'égalité $\text{rsb}_{\mathcal{OS}} + \text{bInv} = \text{ros}_{\mathcal{OS}}$ découle de (1.10) et (1.15).

1.3.1. *Équidistribution des statistiques de type "*bMaj*" et "*bInv*".* Notre premier résultat établit l'équidistribution des statistiques de Steingrímsson de "type bMaj" et celles de "type bInv". Ce résultat permet donc d'une certaine manière de "diviser le nombre de conjectures par 2".

Théorème 1.4. *Les statistiques quadruples*

$$(\text{Mak} + \text{bMaj}, \text{Mak}' + \text{bMaj}, \text{cmajLSB}, \text{Maj}) \text{ et } (\text{Mak} + \text{bInv}, \text{Mak}' + \text{bInv}, \text{cinvLSB}, \text{Inv})$$

sont équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k(\lambda)$ pour tout type de partition λ.

Par conséquent, elles sont équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k$.

Remarquons que le Théorème 1.4 peut être vu comme une extension d'un célèbre résultat de MacMahon qui établit que les statistiques indice majeur (maj) et nombre d'inversions (inv) sont équidistribuées sur $\mathfrak{S}_n$, i.e.,

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}. \tag{1.18}$$

Rappelons que le nombre d'inversions et l'indice majeur d'une permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ sont définis par

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \sum_{1\le i<j\le n} \chi(\sigma_i > \sigma_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(\sigma_i > \sigma_{i+1}),$$

À toute partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^n$, on peut trivalement associer la permutation $\sigma^\pi \in \mathfrak{S}_n$ obtenue à partir de π en enlevant les "/" ; e.g. $\pi = 4/2/3/1 \in \mathcal{OP}_4^4 \mapsto \sigma^\pi = 4231 \in \mathfrak{S}_4$. Il est alors immédiat de vérifier que pour tout $\pi \in \mathcal{OP}_n^n$, on a

$$\mathrm{bMaj}(\pi) = \mathrm{maj}(\sigma^\pi) \quad \text{et} \quad \mathrm{bInv}(\pi) = \mathrm{inv}(\sigma^\pi). \tag{1.19}$$

Comme $\mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} = 0$ sur $\mathcal{OP}_n^n$, l'équidistribution des statistiques Maj et Inv sur $\mathcal{OP}_n^n$ combinée avec (1.19) impliquent alors (1.18).

1.3.2. *Solutions aux conjectures de Steingrímsson.* Le résultat suivant est un raffinement de la première partie des conjectures de Steingrímsson. Il donne la distribution sur $\mathcal{OP}_n^k$ des statistiques triples $(\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$ et $(\mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$ en fonction des p,q-nombres de Stirling de seconde espèce $S_{p,q}(n,k)$ introduits par Wachs et White [**89**]. Ces p,q-nombres sont définis récursivement par :

$$S_{p,q}(n,\,k) = \begin{cases} p^{k-1}S_{p,q}(n-1,\,k-1) + [k]_{p,q}\,S_{p,q}(n-1,\,k), & \text{si } 0<k\le n\,; \\ 1, & \text{si } n=k=0\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.20}$$

Lorsque $p=1$ ou $q=1$, on obtient les deux q-nombres de Stirling de seconde espèce usuels décrits par Gould. Plus précisément, on a

$$S_q(n,k) = S_{q,1}(n,k) \quad \text{et} \quad \widetilde{S}_q(n,\,k) = S_{1,q}(n,k). \tag{1.21}$$

Théorème 1.5. *Pour* $\mathrm{Maf} \in \{\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}'\}$, *on a*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{OP}_n^k} p^{(\mathrm{Maf}+\mathrm{bInv})\,(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} t^{\mathrm{Inv}(\pi)} = (tpq)^{\binom{k}{2}}[k]_{tp,q}!\,S_{p,q}(n,k). \tag{1.22}$$

En combinant les Théorème 1.4 et Théorème 1.5, on obtient le résultat suivant, qui est un raffinement de la seconde partie des conjectures de Steingrímsson.

Théorème 1.6. *Pour* $\mathrm{Maf} \in \{\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}'\}$, *on a*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{OP}_n^k} p^{(\mathrm{Maf}+\mathrm{bMaj})\,(\pi)} q^{\mathrm{cmajLSB}(\pi)} t^{\mathrm{Maj}(\pi)} = (tpq)^{\binom{k}{2}}[k]_{tp,q}!\,S_{p,q}(n,k). \tag{1.23}$$

Comme corollaire, nous confirmons les conjectures de Steingrímsson.

COROLLAIRE 1.7. *Les statistiques suivantes sont Euler-Mahoniennes sur* $\mathcal{OP}_n^k$ *:*

$$\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv},\quad \mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv},\quad \mathrm{cinvLSB},$$
$$\mathrm{Mak}+\mathrm{bMaj},\quad \mathrm{Mak}'+\mathrm{bMaj},\quad \mathrm{cmajLSB}\,.$$

1.3.3. *Raffinements.* Notre deuxième approche est purement bijective. Comme souvent, elle permet d'obtenir des raffinements. Cependant, on peut dire qu'elle n'est pas indépendante car elle s'appuie sur le résultat (non trivial) suivant de Wachs et White [**89**] :

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} p^{\mathrm{rcb}(\pi)}q^{\mathrm{lsb}(\pi)} = S_{p,q}(n,k). \tag{1.24}$$

Soit $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$. Il existe alors une unique partition $\pi_0 = B_1/B_2/\cdots/B_k \in \mathcal{P}_n^k$ et une unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ telle que $\pi = B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)}$. Nous dirons que π est une *σ-partition*. La notion de σ-partition est équivalente à celle de *σ-fonction à croissance restreinte* introduite par Wachs [**88**]. L'ensemble des σ-partitions de $[n]$ en k blocks est dénoté $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$. Par exemple, la partition $\pi = 6\ 8/5/1\ 4\ 7/3\ 9/2$ appartient à $\mathcal{P}_9^5(\sigma)$ avec $\sigma = 54132$. Il est clair que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ on a $|\mathcal{P}_n^k(\sigma)| = |\mathcal{P}_n^k| = S(n,k)$ et que $\mathcal{P}_n^k = \mathcal{P}_n^k(\mathrm{Id})$, où Id est la *permutation identité*, i.e., $\mathrm{Id} = 12\cdots k$.

Le résultat principal de cette section est un raffinement du Théorème 1.5. Il donne la distribution sur $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ des paires de statistiques $(\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB})$ et $(\mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB})$.

THÉORÈME 1.8. *Pour* $\mathrm{Maf} \in \{\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}'\}$ *et toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_k$*, on a*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{Maf}+\mathrm{bInv})(\pi)}q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} = q^{k(k-1)}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{inv}(\sigma)} S_{p,q}(n,k). \tag{1.25}$$

En prenant $\sigma = Id$ dans le résultat précédent et en remarquant que $\mathrm{bInv} = 0$ sur $\mathcal{P}_n^k$, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.9. *On a*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} p^{\mathrm{Mak}(\pi)}q^{\mathrm{lsb}(\pi)} = S_{p,q}(n,k) \tag{1.26}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} p^{\mathrm{Mak}'(\pi)}q^{\mathrm{lsb}(\pi)} = S_{p,q}(n,k). \tag{1.27}$$

Notons que l'identité (1.27) est une récriture de (1.24) (on a $\mathrm{Mak}' = \mathrm{rcb}$) alors que (1.26) est nouvelle.

Comme la distribution sur $\mathfrak{S}_k$ de la statistique nombre d'inversions (inv) est donnée par

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = [k]_q!, \tag{1.28}$$

que pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$, on a $\mathrm{Inv}(\pi) = \mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}(\pi) = \mathrm{inv}(\sigma)$, et que $[k]_{x/y} = y^{1-k}[k]_{x,y}$, on retrouve, en sommant sur toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ les deux membres de l'équation (1.25), le Théorème 1.5, et donc en utilisant le Théorème 1.4, le Théorème 1.6.

Pus généralement, pour toute statistique mahonienne stat sur les permutations on peut définir une statistique STAT sur les partitions ordonnées par $\mathrm{STAT}(\pi) = \mathrm{stat}(\sigma)$ si $\pi \in \mathcal{OP}_n^k(\sigma)$. Par exemple, en prenant stat = inv le nombre d'inversions on obtient STAT = INV = Inv mais lorsque on prend stat = maj on a STAT = MAJ $\neq$ Maj. Le résultat suivant qui généralise le Théorème 1.5 est une conséquence directe du Théorème 1.8.

THÉORÈME 1.10. *Pour* $\mathrm{Maf} \in \{\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}'\}$ *et toute statistique permutationelle mahonienne* stat, *on a*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} p^{(\mathrm{Maf}+\mathrm{bInv})(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} t^{\mathrm{STAT}(\pi)} = (tpq)^{\binom{k}{2}} [k]_{tp,q}!\, S_{p,q}(n,k). \tag{1.29}$$

1.3.4. *Une extension de l'identité de MacMahon* (1.18). Il découle du Théorème 1.4 que les statistiques Maj et Inv sont équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k(\lambda)$ pour tout type de partition λ. Nous avons en fait un résultat encore plus fin.

Soit $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k$ une partition dans $\mathcal{P}_n^k$. La *classe de réarrangements* $\mathcal{R}(\pi)$ de π est l'ensemble des partitions de $\mathcal{OP}_n^k$ obtenues en permutant les B_i's, i.e.,

$$\mathcal{R}(\pi) = \{B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_k\}.$$

Par exemple, si $\pi = 1\,4/2\,3/5$, alors

$$\mathcal{R}(\pi) = \{1\,4/2\,3/5\,,\ 1\,4/5/2\,3\,,\ 5/2\,3/1\,4\,,\ 2\,3/1\,4/5\,,\ 2\,3/5/1\,4\,,\ 5/1\,4/2\,3\}.$$

Il est clair que $|\mathcal{R}(\pi)| = k!$ si π est une partition en k blocs. Nous avons obtenu le résultat suivant, qui est une généralisation de l'identité de MacMahon (1.18).

THÉORÈME 1.11. *Pour toute partition* $\pi \in \mathcal{P}_n^k$, *les statistiques* Inv *et* Maj *sont équidistribuées sur* $\mathcal{R}(\pi)$ *et*

$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Maj}(\tau)} = \sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Inv}(\tau)} = [k]_q!. \tag{1.30}$$

En prenant $\pi = 1/2/\cdots/k$ dans (1.30), on retrouve l'identité de MacMahon (1.18). Nous verrons dans le deuxième chapitre de ce manuscript que le Théorème 1.11 est en fait un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général sur les mots.

1.3.5. *Quelques résultats de symètrie.* Il découle des Théorème 1.5 et Théorème 1.6 que d'une part les statistiques triples

$$(\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv}),$$

d'autre part

$$(\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj}),$$

sont équidistribées sur $\mathcal{OP}_n^k$. Nous donnerons une preuve directe ("bijective") de ces résultats (et même de généralisations).

THÉORÈME 1.12. *Les statistiques quadruples*

$$(\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$$
$$\textit{et}\ (\mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}+\mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$$

sont équidistribuées sur $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Par conséquent, la distribution sur $\mathcal{OP}_n^k$ de la paire de statistiques $(\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv})$ *est symétrique.*

En prenant $\sigma = \mathrm{Id}$ dans le résultat précédent et en remarquant que $\mathrm{bInv} = 0$ sur $\mathcal{P}_n^k$, on obtient le résultat précédent.

COROLLAIRE 1.13. *La distribution sur $\mathcal{P}_n^k$ de la paire de statistiques* $(\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}')$ *est symétrique et donc,* Mak *et* Mak′ *sont équidistribuées sur $\mathcal{P}_n^k$.*

REMARQUE 1.14. *L'équidistribution sur $\mathcal{P}_n^k$ des statistiques* Mak *et* Mak′ *a été conjecturée par Steingrímsson. Ksavrelof et Zeng* [**61**] *ont présenté une preuve de ce résultat, mais on peut vérifier que leur démonstration n'est pas valide (voir* [**44**].

THÉORÈME 1.15. *Les statistiques quadruples*

$$(\mathrm{Mak}+\mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}'+\mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})$$
$$\textit{et}\ (\mathrm{Mak}'+\mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}+\mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})$$

sont équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k$. En particulier, la distribution sur $\mathcal{OP}_n^k$ de la paire de statistiques $(\mathrm{Mak}+\mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}'+\mathrm{bMaj})$ *est symétrique.*

1.3.6. *Récriture des Théorème 1.5, Théorème 1.6 et Théorème 1.8.* Il est intéressant de noter que les Théorème 1.8, Théorème 1.5 et Théorème 1.6 sont équivalents aux égalités suivantes. Posons

$$\mathrm{cls} := \mathrm{lcs}+\mathrm{rcs}, \quad \mathrm{opb} := \mathrm{lob}+\mathrm{rob}, \quad \mathrm{sb} := \mathrm{lsb}+\mathrm{rsb}\,. \tag{1.31}$$

THÉORÈME 1.16. *Pour* $\mathrm{Mah} \in \{\mathrm{Inv}, \mathrm{Maj}\}$ *et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a*

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{cls}+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, q^{(\mathrm{sb}-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)} = S_{p,q}(n,k),$$
$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{opb}+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, q^{(\mathrm{sb}-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)} = S_{p,q}(n,k),$$
$$\sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} p^{(\mathrm{cls}+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, q^{(\mathrm{sb}-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, t^{\mathrm{Mah}(\pi)} = [k]_t!\, S_{p,q}(n,k),$$
$$\sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} p^{(\mathrm{opb}+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, q^{(\mathrm{sb}-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}})(\pi)}\, t^{\mathrm{Mah}(\pi)} = [k]_t!\, S_{p,q}(n,k).$$

Cette reformulation repose sur une décomposition appropriée des statistiques de Steingrímsson (cf. Lemme 1.29 et Lemme 1.30).

1.4. Plan du chapitre.

L'utilité de coder les objets combinatoires par des histoires [**22, 87**] (chemins de Motkin pondérés) a été démontré à maintes reprises ces deux dernières décénnies (en témoigne le nombre d'articles publiés utilisant ces objets). Dans la deuxième section de ce chapitre, nous introduisons une nouvelle classe de chemins pondérés, les D-histoires et présentons deux bijections entre les partitions ordonnées et les D-histoires. Comme conséquence immédiate, nous obtenons le Théorème 1.4. Dans la troisième section, nous utilisons la matrice de transfert pour démontrer le Théorème 1.5. Dans la quatrième section, nous proposons une approche entièrement bijective. Nous présentons plusieurs bijections sur les partitions ordonnées et les D-histoires, démontrant ainsi les Théorème 1.8, Théorème 1.12 et Théorème 1.11. Enfin, nous terminons le chapitre avec des remarques et des problèmes ouverts.

2. Partitions ordonnées et D-histoires : deux bijections

Nous introduisons la notion de D-histoires et présentons deux bijections entre les partitions ordonnées et les D-histoires, l'une "codant" les statistiques de type "bInv", l'autre les statistiques de type "bMaj". Comme conséquence immédiate, nous démontrons le Théorème 1.4.

2.1. Type et trace de partitions, et D-histoire.

2.1.1. *Type de partition et D-chemin.* Rappelons que le type d'une partition π est le 4-uple $(\mathcal{O}(\pi), \mathcal{C}(\pi), \mathcal{S}(\pi), \mathcal{T}(\pi))$, où $\mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{C}(\pi)$, $\mathcal{S}(\pi)$ et $\mathcal{T}(\pi)$ sont respectivement les ensembles d'ouvrants stricts, fermants stricts, singletons et passants de π. Il est classique de "visualiser" (coder) le type d'une partition par un chemin de Motzkin bicoloré (cf. e.g. [**22, 87**]). Nous allons dans notre étude utiliser une classe de chemins, que nous appelerons *D-chemins*, en bijection avec les chemins de Motzkin bicolorés.

Dans tout ce travail, on désignera par *chemin* une suite $w = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ de points $s_i = (x_i, y_i)$ de $\mathbb{N}^2$. Les éléments s_i sont appelés *sommets* du chemin et nous dirons que w va de s_0 à s_n. L'entier n est la *longueur* du chemin, que nous noterons $|w|$. Les couples (s_i, s_{i+1}) sont les *pas élémentaires* du chemin. La *hauteur* (resp., l'*abscisse*) du pas (s_i, s_{i+1}) est l'ordonnée y_i (resp., l'abscisse x_i) du sommet s_i. L'abscisse et la hauteur du i-ième pas de w seront notées respectivement $\mathrm{x}_i(w)$ et $\mathrm{y}_i(w)$. Notons que la longueur d'un chemin est son nombre de pas élémentaires.

On dira d'un pas élémentaire (s_i, s_{i+1}) qu'il est *Nord* si $s_{i+1} = s_i + (0,1)$, *Est* si $s_{i+1} = s_i + (1,0)$, *Sud-Est* si $s_{i+1} = s_i + (1,-1)$ et *Nul* si $s_{i+1} = s_i$.

DÉFINITION 1.17. *Un* D-chemin de profondeur k *est un chemin* $w = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ *qui satisfait les deux conditions suivantes :*
(i) $s_0 = (0,0)$ *et* $s_n = (k,0)$,
(ii) les pas élémentaires ont l'un des types suivants : Nord, Est, Sud-Est, Nul.

L'ensemble des D-chemins de longueur n et de profondeur k est dénoté Ω_n^k. On note aussi $\Omega^k = \bigcup_{n \geq k} \Omega_n^k$. La profondeur d'un D-chemin w sera notée $\|w\|$.

On peut représenter graphiquement un D-chemin par une ligne brisée dont les sommets sont les s_i à laquelle on ajoute des "loops" représentant les pas élémentaires Nuls, avec la convention que lorsqu'il y a plusieurs pas Nuls consécutifs, on trace un unique loop indéxé par le nombre de loops consécutifs. Par exemple, la représentation graphique du D-chemin

$$w = ((0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (0,3),\ (0,3),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ (4,1),\ (5,0))$$

est donnée dans la Figure 1.1.

On peut montrer (ce que nous ne ferons pas ici) que le nombre de D-chemins de profondeur k et longueur n est donné par

$$|\Omega_n^k| = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1} = \mathcal{N}ar(n+1, k+1), \tag{1.32}$$

où $\mathcal{N}ar(n,k)$ désigne le nombre de Narayana d'indice (n,k).

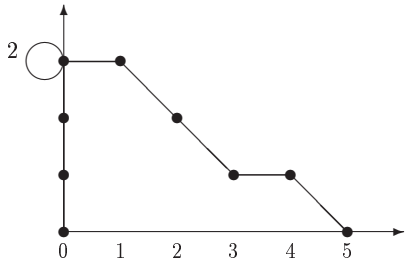


FIG. 1.1. Un D-chemin dans Ω_{10}^5 avec deux pas Nuls consécutifs de $(0,3)$ à $(0,3)$

On peut représenter le type d'une partition par un D-chemin qui "code" certaines de nos statistiques d'inversion. Il suffit pour cela d'associer à toute partition π de $[n]$ le chemin $w(\pi) = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ défini par

– $s_0 = (0,0)$,

– le i-ième pas de $w(\pi)$ est $\begin{cases} Nord & \text{si } i \in \mathcal{O}(\pi), \\ Est & \text{si } i \in \mathcal{S}(\pi), \\ Sud-Est & \text{si } i \in \mathcal{C}(\pi), \\ Nul & \text{si } i \in \mathcal{T}(\pi). \end{cases}$

Par exemple, si $\pi = 6/3\,5\,7/1\,4\,10/9/2\,8$, on a

$$\mathcal{O}(\pi) = \{1,2,3\}, \quad \mathcal{C}(\pi) = \{7,8,10\}, \quad \mathcal{S}(\pi) = \{6,9\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(\pi) = \{4,5\}$$

et le chemin $w(\pi)$ correspond au chemin représenté dans la Figure 1.1.

Par abus de notation, les ensembles des indices des pas Nord, Sud-Est, Est et Nuls d'un D-chemin w sont notés respectivement $\mathcal{O}(w)$, $\mathcal{C}(w)$, $\mathcal{S}(w)$ et $\mathcal{T}(w)$. Ainsi, pour toute partition π, on a $\mathcal{O}(w(\pi)) = \mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{C}(w(\pi)) = \mathcal{C}(\pi)$, $\mathcal{S}(w(\pi)) = \mathcal{S}(\pi)$ et $\mathcal{T}(w(\pi)) = \mathcal{T}(\pi)$.

Soit ${}^0\Omega_n^k$ l'ensemble des D-chemins de profondeur k et de longueur n n'ayant pas de pas élémentaire Nul de hauteur 0. Il est facile de montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 1.18. *L'application w qui à une partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ associe le D-chemin $w(\pi)$ associé au type de π est une surjection de $\mathcal{OP}_n^k$ dans ${}^0\Omega_n^k$.*

De plus, pour tout $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ et $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\mathrm{cls}_i(\pi) = \mathrm{x}_i(w) \quad \textit{et} \quad \mathrm{sb}_i(\pi) = \begin{cases} \mathrm{y}_i(w), & \textit{si } i \in \mathcal{O}(\pi) \cup \mathcal{S}(\pi)\,; \\ \mathrm{y}_i(w) - 1, & \textit{si } i \in \mathcal{T}(\pi) \cup \mathcal{C}(\pi). \end{cases}$$

PROPOSITION 1.19. *Les statistiques* cls, opb *et* sb *ne dépendent que du type, i.e., si $\pi, \pi' \in \mathcal{OP}_n^k$ ont le même type, on a* $\mathrm{cls}(\pi) = \mathrm{cls}(\pi')$, $\mathrm{opb}(\pi) = \mathrm{opb}(\pi')$ *et* $\mathrm{sb}(\pi) = \mathrm{sb}(\pi')$.

Le résultat suivant sur les D-chemins sera utile par la suite.

LEMME 1.20. *Soit $w \in {}^0\Omega_n^k$ et supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$. Alors*
(i) $\mathrm{x}_i(w) + \mathrm{y}_i(w) = \mathrm{x}_{i-1}(w) + \mathrm{y}_{i-1}(w) + \chi(i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w))$ *pour $i = 2, \ldots, n$.*
(ii) $\mathrm{x}_{i_j}(w) + \mathrm{y}_{i_j}(w) + 1 = j$ *pour $j = 1, 2, \ldots, k$.*

Il est facile de montrer que pour tout chemin w de ${}^0\Omega_n^k$, il existe plusieurs partitions $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ satisfaisant $w(\pi) = w$. En particulier, l'application w n'est pas injective et

donc pas bijective. Nous allons introduire dans la section suivante des raffinements des notions de type et D-chemin.

2.1.2. *Trace d'une partition.* Comme dans le cas des partitions d'ensembles et des permutations [**22, 87, 32**], on peut introduire une notion de *trace* (ou *squelette*) pour les partitions ordonnées. Nous allons à cette fin ajouter l'élément ∞ à $\mathbb{P}$ avec la convention $i < \infty$ pour tout entier positif i. On notera $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \cup \{\infty\}$.

DÉFINITION 1.21. *Un* bloc *est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{P}}$ distinct de $\{\infty\}$. Nous dirons d'un bloc B qu'il est*
– actif *si $\infty \in B$,*
– complet *si $B \neq \emptyset$ et $\infty \notin B$,*
– vide *si $B = \emptyset$.*

Soit $A \subseteq \mathbb{P}$ un ensemble d'entiers positifs et $i \in \mathbb{P}$ un entier. La i-ième *trace* de A, dénoté $A(\leq i)$, est le bloc défini par

$$A(\leq i) = \begin{cases} A, & \text{si } A = \emptyset \text{ ou } \max A \leq i\,; \\ (A \cap [i]) \cup \{\infty\}, & \text{si } \max A > i. \end{cases}$$

Par exemple, si $A = \{2, 4, 7\}$ alors $A(\leq 1) = \emptyset$, $A(\leq 2) = A(\leq 3) = \{2, \infty\}$, $A(\leq 4) = A(\leq 5) = A(\leq 6) = \{2, 4, \infty\}$ et $A(\leq p) = A$ pour tout $p \geq 7$.

DÉFINITION 1.22. *Soit $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k$ une partition ordonnée de $[n]$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on définit la i-ième* trace *de π, dénoté $T_i(\pi)$, par*

$$T_i(\pi) = B_1(\leq i) - B_2(\leq i) - \cdots - B_k(\leq i),$$

où, par convention, tous les blocs vides sont omis.

Réciproquement, on dira qu'une suite de blocs $T = B_1 - B_2 - \cdots - B_\ell$ est une trace sur $[i]$ si :
– *pour tout $i \neq j$, $B_i \cap B_j \subseteq \{\infty\}$,*
– $[i] \subseteq \bigcup_{r=1}^{\ell} B_r \subseteq [i] \cup \{\infty\}$.

En d'autres termes, T est une trace sur $[i]$ si et seulement si il existe une partition π tel que $T = T_i(\pi)$.

EXEMPLE 1.1. *Si $\pi = 3\ 5\ 7/1\ 4\ 10/9/6/2\ 8$, alors la 7-ième trace de π est $T_7(\pi) = 3\ 5\ 7/1\ 4\,\infty/6/2\,\infty$.*

Inversement, l'élément $T = 3\ 5/1\ 4\,\infty/6/2\,\infty$ est une trace sur $[6]$.

REMARQUE 1.23. *Il est facile de retrouver $w(\pi)$ à partir de la trace $(T_i(\pi))_{i=1\cdots n}$. Soient $\mathrm{act}_i(\pi)$ et $\mathrm{com}_i(\pi)$ les nombres de blocs actifs et complets de π. Alors on a $w(\pi) = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$, où l'on a posé $s_i = (\mathrm{com}_i(\pi), \mathrm{act}_i(\pi))$.*

2.2. La première bijection Φ entre partitions ordonnées et D-histoires.

2.2.1. *Préliminaires.* Étant donnée la trace $(T_i(\pi))_{i=1\cdots n}$ d'une partition π, il est facile de déterminer son type ainsi que les quantités $\mathrm{ros}_i(\pi)$ et $\mathrm{rsb}_i(\pi)$. Le lemme suivant donne une interprétation "géométrique" des quantités $\mathrm{ros}_i(\pi)$ et $\mathrm{rsb}_i(\pi)$.

LEMME 1.24. *Soit $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$. Pour $i = 1, \ldots, n$,*
- $\mathrm{ros}_i(\pi)$ *(resp.* $\mathrm{los}_i(\pi)$*) est le nombre de blocs à droite (resp. à gauche) du bloc contenant i dans la i-ième trace $T_i(\pi)$ de π.*
- $\mathrm{rsb}_i(\pi)$ *(resp.* $\mathrm{lsb}_i(\pi)$*) est le nombre de blocs actifs à droite (resp. à gauche) du bloc contenant i dans la i-ième trace $T_i(\pi)$ de π.*

En particulier,
- *pour $i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)$, $0 \leq \mathrm{ros}_i(\pi) \leq \mathrm{act}_{i-1}(\pi) + \mathrm{com}_{i-1}(\pi)$,*
- *pour $i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi)$, $0 \leq \mathrm{rsb}_i(\pi) \leq \mathrm{act}_{i-1}(\pi) - 1$.*

i	$T_i(\pi)$	$\mathrm{act}_{i-1}(\pi)$	$\mathrm{com}_{i-1}(\pi)$	$\mathrm{ros}_i(\pi)$	$\mathrm{rsb}_i(\pi)$
1	$\mathbf{1}\,\infty$	0	0	0	
2	$1\,\infty/\mathbf{2}\,\infty$	1	0	0	
3	$\mathbf{3}\,\infty/1\,\infty/2\,\infty$	2	0	2	
4	$3\,\infty/1\,\mathbf{4}\,\infty/2\,\infty$	3	0		1
5	$3\,\mathbf{5}\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$	3	0		2
6	$\mathbf{6}/3\,5\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$	3	0	3	
7	$6/3\,5\,\mathbf{7}/1\,4\,\infty/2\,\infty$	3	1		2
8	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/2\,\mathbf{8}$	2	2		0
9	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/\mathbf{9}/2\,8$	1	3	1	
10	$6/3\,5\,7/1\,4\,\mathbf{10}/9/2\,8$	1	4		0

TAB. 1.1. Traces de $\pi = 6/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10/9/2\ 8$ et calcul des $\mathrm{ros}_i(\pi)$ et $\mathrm{rsb}_i(\pi)$.

Nous allons voir que la donnée des type de π, $(\mathrm{ros}_i(\pi))_{i\in\mathcal{O}\cup\mathcal{S}(\pi)}$ et $(\mathrm{rsb}_i(\pi))_{i\in\mathcal{T}\cup\mathcal{C}(\pi)}$ détermine uniquement π en établissant une bijection entre partitions ordonnées et une classe de D-chemins pondérés, les *D-histoires*. Ces dernières peuvent être vues comme un "D-analogue" des histoires (de Charlier, Laguerre,...) associées aux chemins de Motzkin [**22, 33, 87**].

DÉFINITION 1.25. *Une D-*histoire *de profondeur k et de longueur n est un couple (w, γ), où w est un D-chemin dans ${}^0\Omega_n^k$ et $\gamma = (\gamma_i)_{1 \le i \le n}$ est une suite d'entiers satisfaisant :*

– $0 \le \gamma_i \le y_i(w) - 1$ *si le i-ième pas de w est Nul ou Sud-Est,*

– $0 \le \gamma_i \le x_i(w) + y_i(w)$ *si le i-ième pas de w est Nord ou Est.*

*L'ensemble des D-*histoires *de profondeur k et de longueur n sera dénoté Δ_n^k.*

Il sera commode de représenter graphiquement une D-histoire $h = (w, \gamma)$ en pondérant le i-ième pas de w par γ_i. Par exemple, la représentation graphique de $h = (w, \gamma) \in \Delta_{10}^5$,
avec $w = ((0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,3), (0,3), (1,3), (2,2), (3,1), (4,1), (5,0))$
et $\gamma = (0,0,2,1,2,3,2,0,1,0)$ est donnée dans la Figure 1.2.

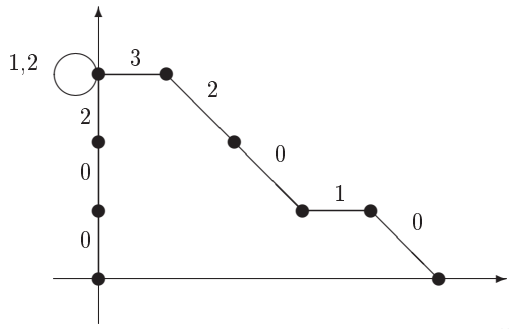


FIG. 1.2. une D-histoire de Δ_{10}^5

Nous présentons maintenant notre première bijection entre partitions ordonnées et D-histoires.

2.2.2. *L'application* Φ. Soit Φ l'application qui à toute partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ associe le couple $\Phi(\pi) := (w(\pi), \gamma)$, où $w(\pi)$ est le D-chemin associé à la trace de π et $\gamma = (\gamma_i)_{1 \le i \le n}$ est la suite d'entiers γ_i définis pour $i = 1, \ldots, n$ par

$$\gamma_i = \begin{cases} \mathrm{ros}_i(\pi), & \text{si } i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)\,; \\ \mathrm{rsb}_i(\pi), & \text{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi). \end{cases}$$

Il découle immédiatement des Proposition 1.18, Remarque 1.23 et Lemme 1.24 que l'application Φ est bien définie de $\mathcal{OP}_n^k$ dans Δ_n^k. Pour montrer que Φ est bien une bijection de Δ_n^k dans $\mathcal{OP}_n^k$, nous allons expliciter son inverse (application réciproque).

Étant donnée une D-histoire $h = (w, \gamma) \in \Delta_n^k$, nous construisons une suite de traces $(T_i)_{1 \le i \le n}$ satisfaisant la propriété suivante :

(A) pour $i = 1, \ldots, n$, T_i est une trace sur $[i]$ avec $\mathrm{y}_{i+1}(w)$ blocs actifs et $x_{i+1}(w)$ blocs complets.

Comme $\mathrm{x}_{n+1}(w) = k$ et $\mathrm{y}_{n+1}(w) = 0$, la trace T_n est une trace sur $[n]$ avec 0 blocs actifs et k blocs complets ; autrement dit, T_n sera une partition ordonnée de $\mathcal{OP}_n^k$.

La construction des T_i est définie récursivement par le procédé suivant :

(1) On pose $T_1 = \begin{cases} 1\,\infty & \text{si le premier pas de } w \text{ est Nord}\,; \\ 1 & \text{si le premier pas de } w \text{ est Est.} \end{cases}$

(2) Pour $i = 1, \ldots, n$, la trace T_i est obtenue de T_{i-1} comme suit. Supposons que $T_{i-1} = B_1/B_2/\cdots/B_\ell$:
   - Si le i-ième pas de w est Nord (resp. Est) : on étiquette les espaces avant B_1, entre B_j et B_{j+1}, pour $1 \leq j \leq \ell - 1$, et après B_ℓ de gauche à droite par $\ell, \ldots, 1, 0$, puis on insére le bloc actif $\{i, \infty\}$ (resp. le singleton {i}) dans l'espace de T_{i-1} étiqueté γ_i ;
   - Si le i-ième pas de w est Nul (resp. Sud-Est) : on étiquette les blocs actifs de T_{i-1} de gauche à droite par $\mathrm{y}_i(w) - 1, \ldots, 1, 0$, puis on ajoute i (resp. remplaçons ∞ par i) dans le bloc actif de T_{i-1} étiqueté γ_i.

Il est facile de vérifier que l'application qui à $h \in \Delta_n^k$ associe la partition $T_n \in \mathcal{OP}_n^k$ est bien définie et que c'est l'application inverse de Φ.

Exemple 1.2. *Soit* $T = 6\ 11\ \infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\ \infty/9/2\ 8$. *On peut "créer" un bloc dans* T *dans 6 positions numérotées de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcccccccccccc} T = & & 6\ 11\ \infty & - & 3\ 5\ 7 & - & 1\ 4\ 10\ \infty & - & 9 & - & 2\ 8 & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \textit{positions}: & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

On peut aussi "insérer" un élément dans deux blocs actifs de T *numérotées de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcccccccccc} T = & 6\ 11\ \infty & - & 3\ 5\ 7 & - & 1\ 4\ 10\ \infty & - & 9 & - & 2\ 8 \\ & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \\ \textit{positions}: & 1 & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Exemple 1.3. *Soit* $h = (w, \gamma) \in \Delta_{10}^5$ *la* D*-histoire de la Figure 1.2, alors* $\Phi^{-1}(h) = 6/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10/9/2\ 8$. *La construction pas à pas de* $\Phi^{-1}(h)$ *est donnée dans la Figure 1.3.*

Nous résumons les principales propriétés de l'application Φ dans le résultat suivant.

Théorème 1.26. *L'application* $\Phi : \mathcal{OP}_n^k \mapsto \Delta_n^k$ *est une bijection. Par ailleurs, pour toute partition* $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$, *la* D*-histoire* $\Phi(\pi) = (w, \gamma)$ *satisfait les propriétés suivantes :*

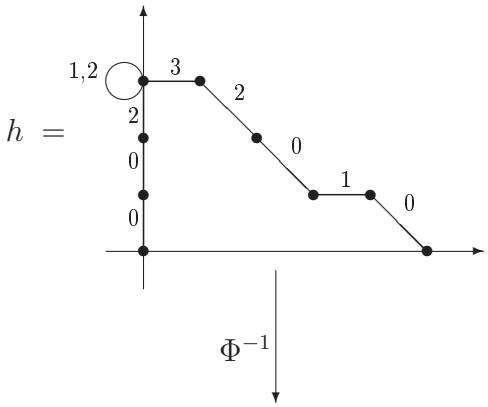
(a) le i*-ième pas de* w *est Nord (resp. Est, Sud-Est, Nul) si et seulement si* $i \in \mathcal{O}(\pi)$ *(resp.* $i \in \mathcal{S}(\pi)$, $i \in \mathcal{C}(\pi)$, $i \in \mathcal{T}(\pi)$*),*

(b) pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\gamma_i = \begin{cases} \mathrm{ros}_i(\pi), & \textit{si } i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)\,; \\ \mathrm{rsb}_i(\pi), & \textit{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi). \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Inv}(\pi) = \mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \gamma_i \quad \textit{et} \quad \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \gamma_i. \tag{1.33}$$



i	step$_i$	γ_i	T_i
1	*Nord*	0	$\mathbf{1}\,\infty$
2	*Nord*	0	$1\,\infty/\mathbf{2}\,\infty$
3	*Nord*	2	$\mathbf{3}\,\infty/1\,\infty/2\,\infty$
4	*Null*	1	$3\,\infty/1\,\mathbf{4}\,\infty/2\,\infty$
5	*Null*	2	$3\,\mathbf{5}\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
6	*Est*	3	$\mathbf{6}/3\,5\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
7	*Sud-Est*	2	$6/3\,5\,\mathbf{7}/1\,4\,\infty/2\,\infty$
8	*Sud-Est*	0	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/2\,\mathbf{8}$
9	*Est*	1	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/\mathbf{9}/2\,8$
10	*Sud-Est*	0	$6/3\,5\,7/1\,4\,\mathbf{10}/9/2\,8$

FIG. 1.3. L'application Φ^{-1}

2.3. La seconde bijection Ψ entre partitions ordonnées et D-histoires.

2.3.1. *Préliminaires.* Rappelons qu'un bloc B est une partie de $\overline{\mathbb{P}}$ distincte de $\{\infty\}$. Comme on a convenu que $\infty > a$ pout tout entier a, il s'ensuit que $\max(B) = \infty$ si $\infty \in B$. On peut donc étendre les statistiques bDes, bMaj et rsb$_i$ sur les traces.

Notre seconde bijection entre partitions ordonnées et D-histoires repose sur le lemme suivant qui peut être vu comme une extension de la maj-table ("maj-code") des permutations [**7, 82**].

Soit $T = B_1/\cdots/B_r$ une trace sur $[i-1]$ $(i \geq 1)$. On peut alors insérer $\{i\}$ (ou $\{i, \infty\}$) avant B_1, entre deux blocs adjacents B_j et B_{j+1}, $1 \leq j \leq r-1$, ou après B_r. Étiquetons ces positions d'insertion de gauche à droite par $0, 1, \ldots, r$. Nous dirons que la position j est *active* si le bloc B_{j+1} est actif. Soit A l'ensemble des positions actives de T et $D = \mathrm{bDes}(T)$ l'ensemble des descentes de blocs de T. Soit $c(T) = (c_i(T))_{0 \leq i \leq r}$ la suite définie par :

- $c_0(T) = r$,
- $c_1(T) > c_2(T) > \cdots > c_t(T)$ est le réarrangement décroissant des éléments de $A \cup D$,
- $c_{t+1}(T) < \ldots < c_r(T)$ est le réarrangement croissant des éléments restants, i.e. le réarrangement croissant des éléments de $[r-1] \setminus (A \cup D)$.

Lemme 1.27. *Soit $\ell \in \{0, 1, \ldots, r\}$ et T^ℓ la trace obtenue en insérant le bloc $\{i, \infty\}$ ou $\{i\}$ à la position $c_\ell(T)$ dans T. Alors, pour tout $\ell \in 0, 1, \ldots, r$ on a*

$$\mathrm{rsb}_i(T^\ell) + \mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T) = \ell. \tag{1.34}$$

Exemple 1.4. *Soit $T = 6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/9/2\ 8$. On peut insérer un bloc dans T dans exactement 6 positions numérotées de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcccccccccccc} T = & & 6\ 11\,\infty & - & 3\ 5\ 7 & - & 1\ 4\ 10\,\infty & - & 9 & - & 2\ 8 & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \textit{positions}: & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \end{array}$$

L'ensemble A des positions actives de T est $A = \{0, 2\}$ et l'ensemble D des descentes de blocs de T est $D = \mathrm{bDes}(T) = \{4\}$. On a alors $c_0(T) = 5$, $\{c_1(T) > c_2(T) > c_3(T)\} = A \cup D = \{4, 2, 0\}$ et $\{c_4(T) < c_5(T)\} = \{1, 3\}$, et donc $c(T) = (c_i(T))_{0 \leq i \leq 5} = (5, 4, 2, 0, 1, 3)$.

Si on dénote T^ℓ la trace sur $[12]$ obtenue en insérant le bloc $\{12\}$ dans T à la position $c_\ell(T)$, on obtient le tableau suivant :

ℓ	$c_\ell(T)$	T^ℓ	$\mathrm{rsb}_{12}(T^\ell) + \mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T)$
0	5	$6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/9/2\ 8/\mathbf{12}$	$0 + 4 - 4 = 0$
1	4	$6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/9/\mathbf{12}/2\ 8$	$0 + 5 - 4 = 1$
2	2	$6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/\mathbf{12}/1\ 4\ 10\,\infty/9/2\ 8$	$1 + 5 - 4 = 2$
3	0	$\mathbf{12}/6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/9/2\ 8$	$2 + 5 - 4 = 3$
4	1	$6\ 11\,\infty/\mathbf{12}/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/9/2\ 8$	$1 + 7 - 4 = 4$
5	3	$6\ 11\,\infty/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10\,\infty/\mathbf{12}/9/2\ 8$	$0 + 9 - 4 = 5$

Démonstration. Il n'est pas difficile de voir que A et D sont disjoints (si $i \in A$, alors le bloc B_{i+1} est actif, donc $\infty \in B_{i+1}$ et on ne peut pas avoir $B_i > B_{i+1}$, i.e. $i \notin D$). Supposons que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}_>$ et $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_p\}_>$. On a donc $t := |A \cup D| = m + p$.

Soit B l'un des blocs $\{i, \infty\}$ ou $\{i\}$. Comme T est une trace sur $[i-1]$, les ouvrants de T sont plus petits que i. Ceci implique que $\mathrm{rsb}_i(T^\ell)$ est le nombre de blocs actifs dans T^ℓ à droite de B. Nous distinguons quatre cas :

(1) $\ell = 0$. Comme $c_0(T) = r$, on a $T^\ell = B_1/B_2/\ldots/B_r/B$ et l'identité (1.34) est évidente.

(2) $1 \leq \ell \leq t$ et $c_\ell \in D$. Dans ce cas, $c_\ell = d_j$ pour un certain j, $1 \leq j \leq p$. On a donc $\mathrm{bDes}(T^\ell) = \{d_p < \cdots < d_{j+1} < d_j + 1 < d_{j-1} + 1 < \cdots < d_1 + 1\}$ et il s'ensuit $\mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T) = j$.

Par ailleurs, on a $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) = q$, où $q = \begin{cases} 0 \text{ si tous les } a_i < c_\ell, \\ \text{le plus grand entier tel que } a_q > c_\ell \text{ sinon.} \end{cases}$

Finalement, $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) + \mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T) = q + j$ et on obtient l'identité (1.34) en remarquant que $\ell = j + q$.

(3) $1 \leq \ell \leq t$ et $c_\ell \in A$. Dans ce cas, $c_\ell = a_j$ pour un certain j, $1 \leq j \leq m$. Clairement, $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) = j$. Soit $q = \begin{cases} 0 \text{ si tous les } d_i < c_\ell, \\ \text{le plus grand entier tel que } d_q > c_\ell \text{ sinon.} \end{cases}$

On a alors

$$\mathrm{bDes}(T^\ell) = \begin{cases} \mathrm{bDes}(T), & \text{si } q = 0\,; \\ \{d_p < \cdots < d_{q+1} < d_q + 1 < d_{q-1} + 1 < \cdots < d_1 + 1\}, & \text{si } q \geq 1. \end{cases}$$

Il en découle que $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) + \mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T) = q + j$ et on obtient l'identité (1.34) en remarquant que $\ell = j + q$.

(4) $t + 1 \leq \ell \leq r$. Dans ce cas, c_ℓ est une position avant un bloc complet. Soient q et s définis par

$$q = \begin{cases} 0 \text{ si tous les } d_i < c_\ell, \\ \text{le plus grand entier tel que } d_q > c_\ell \text{ sinon,} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si tous les } a_i < c_\ell, \\ \text{le plus grand entier tel que } a_s > c_\ell \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) = s$ et

$$\mathrm{bDes}(T^\ell) = \begin{cases} \mathrm{bDes}(T), & \text{si } q = 0\,; \\ \{d_p < \cdots < d_{q+1} < c_\ell + 1 < d_q + 1 < d_{q-1} + 1 < \cdots < d_1 + 1\}, & \text{si } q \geq 1. \end{cases}$$

et donc $\mathrm{rsb}_i(T^\ell) + \mathrm{bMaj}(T^\ell) - \mathrm{bMaj}(T) = s + q + c_\ell + 1$. Pour obtenir l'identité (1.34), il reste à montrer que $c_\ell = \ell - (s + q) - 1$. Or c_ℓ est égal au nombre de positions à gauche de la position c_ℓ dans T, qui est $(p - q) + (m - s) + (\ell - t - 1)$, qui est aussi égal à $\ell - (q + s) - 1$ car $t = p + m$. $\square$

2.3.2. *L'application* Ψ. Soit Ψ l'application qui à toute partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ associe le couple $\Psi(\pi) := (w(\pi), \gamma)$, où $w(\pi)$ est le chemin associé à la trace de π et $\gamma = (\gamma_i)_{1\leq i\leq n}$ est la suite d'entiers γ_i définis pour $i = 1, \ldots, n$ par

$$\gamma_i = \begin{cases} \mathrm{rsb}_i(\pi) + \mathrm{bMaj}(T_i(\pi)) - \mathrm{bMaj}(T_{i-1}(\pi)), & \text{si } i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)\,; \\ \mathrm{rsb}_i(\pi), & \text{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi). \end{cases}$$

Il découle immédiatement des Proposition 1.18, Remarque 1.23 et Lemme 1.27 que l'application Ψ est bien définie de $\mathcal{OP}_n^k$ dans Δ_n^k. Pour montrer que Ψ est une bijection de $\mathcal{OP}_n^k$ dans Δ_n^k, nous allons construire la procédure inverse.

Étant donnée une D-histoire $h = (w, \gamma) \in \Delta_n^k$, nous construisons une suite de traces $(T_i)_{1\leq i\leq n}$ satisfaisant la propriété suivante :

(A) pour $i = 1, \ldots, n$, T_i est une trace sur $[i]$ avec $\mathrm{y}_{i+1}(w)$ blocs actifs et $x_{i+1}(w)$ blocs complets.

Comme $\mathrm{x}_{n+1}(w) = k$ et $\mathrm{y}_{n+1}(w) = 0$, la trace T_n est une trace sur $[n]$ avec 0 blocs actifs et k blocs complets ; autrement dit, T_n sera une partition ordonnée de $\mathcal{OP}_n^k$.

La construction des T_i est définie récursivement par le procédé suivant :

(1) On pose $T_1 = \begin{cases} 1\,\infty & \text{si le premier pas de } w \text{ est Nord}\,; \\ 1 & \text{si le premier pas de } w \text{ est Est.} \end{cases}$

(2) Pour $i = 1, \ldots, n$, la trace T_i est obtenue à partir de T_{i-1} de la manière suivante. Supposons que $T_{i-1} = B_1/B_2/\cdots/B_\ell$:
   - Si le i-ième pas de w est Nord (resp. Est) : on étiquette les espaces avant B_1, entre B_j et B_{j+1}, pour $1 \leq j \leq \ell-1$, et après B_ℓ de gauche à droite par $0, 1, \ldots, \ell$, alors nous ajoutons à T_{i-1} le bloc actif $\{i\,\infty\}$ (resp. le singleton $\{\mathrm{i}\}$) en position $c_{\gamma_i}(T_i)$, où $c_{\gamma_i}(T_i)$ est défini comme dans le Lemme 1.27 ;
   - Si le i-ième pas de w est Nul (resp. Sud-Est) : on étiquette les blocs actifs de T_{i-1} de gauche à droite par $\mathrm{y}_i(w) - 1, \ldots, 1, 0$. On ajoute alors i (resp. remplaçons ∞ par i) dans le bloc actif étiqueté γ_i.

Il est facile de vérifier que l'application qui à $h \in \Delta_n^k$ associe la partition $T_n \in \mathcal{OP}_n^k$ est bien définie et que c'est l'application inverse de Ψ.

Exemple 1.5. *Soit $h = (w, \gamma) \in \Delta_{10}^5$ la D-histoire de la Figure 1.2, alors $\Psi^{-1}(h) =$ 6/3 5 7/9/1 4 10/2 8. La construction pas à pas de $\Psi^{-1}(h)$ est donnée dans la Figure 1.4.*

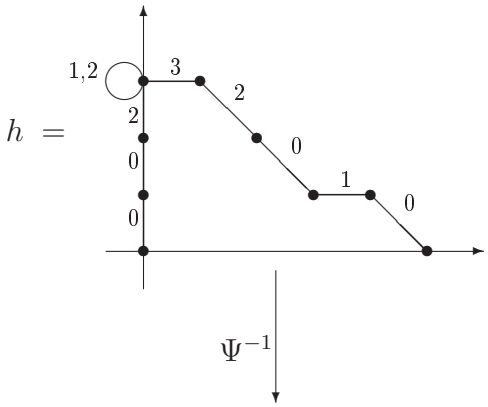
Nous résumons les principales propriétés de l'application Ψ dans le théorème suivant.

Théorème 1.28. *L'application $\Psi : \mathcal{OP}_n^k \mapsto \Delta_n^k$ est une bijection. Par ailleurs, pour toute partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$, la D-histoire $\Psi(h) = (w, \gamma)$ satisfait les propriétés suivantes :*

(a) le i-ième pas de w est Nord (resp. Est, Sud-Est, Nul) si et seulement si $i \in \mathcal{O}(\pi)$ (resp. $i \in \mathcal{S}(\pi)$, $i \in \mathcal{C}(\pi)$, $i \in \mathcal{T}(\pi)$),

(b) pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\gamma_i = \begin{cases} \mathrm{rsb}_i(\pi) + \mathrm{bMaj}(T_i(\pi)) - \mathrm{bMaj}(T_{i-1}(\pi)), & \textit{si } i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)\,; \\ \mathrm{rsb}_i(\pi), & \textit{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi). \end{cases}$$



i	step_i	γ_i	T_i
1	*Nord*	0	$\mathbf{1}\,\infty$
2	*Nord*	0	$1\,\infty/\mathbf{2}\,\infty$
3	*Nord*	2	$\mathbf{3}\,\infty/1\,\infty/2\,\infty$
4	*Null*	1	$3\,\infty/1\,\mathbf{4}\,\infty/2\,\infty$
5	*Null*	2	$3\,\mathbf{5}\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
6	*Est*	3	$\mathbf{6}/3\,5\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
7	*Sud-Est*	2	$6/3\,5\,\mathbf{7}/1\,4\,\infty/2\,\infty$
8	*Sud-Est*	0	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/2\,\mathbf{8}$
9	*Est*	1	$6/3\,5\,7/\mathbf{9}/1\,4\,\infty/2\,8$
10	*Sud-Est*	0	$6/3\,5\,7/9/1\,4\,\mathbf{10}/2\,8$

FIG. 1.4. L'application Ψ^{-1}

Par conséquent,

$$\mathrm{Maj}(\pi) = (\mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{bMaj})(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \gamma_i \quad \textit{et} \quad \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi) = \sum_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \gamma_i. \tag{1.35}$$

2.4. Équidistribution des statistiques de type bMaj et bInv : preuve du Théorème 1.4.

En utilisant les deux "codages" précédents des partitions ordonnées par des D-histoires, il devient facile de démontrer le Théorème 1.4. Nous avons cependant besoin au préalable de décomposer les statistiques de Steingrímsson.

2.4.1. *Décomposition des statistiques de Steingrímsson.*

LEMME 1.29. *Les identités fonctionnelles suivantes sont valables sur $\mathcal{OP}_n^k$:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv} &= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Inv},\\ \mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv} &= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Inv},\\ \mathrm{cinvLSB} &= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{Inv}\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Par une suite d'opérations élémentaires, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv} &= \mathrm{ros} + \mathrm{lcs} + \mathrm{bInv} \quad \text{par définition de Mak},\\ &= \mathrm{rsb} + \mathrm{rcs} + \mathrm{lcs} + \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.10)},\\ &= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.12)},\\ &= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Inv} \quad \text{par définition de Inv.}\end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv} &= \mathrm{lob} + \mathrm{rcb} + \mathrm{bInv} \quad \text{par définition de Mak}',\\ &= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb} + \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.31) et (1.10)},\\ &= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.12)},\\ &= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Inv} \quad \text{par définition de Inv},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cinvLSB} &= \binom{k}{2} + \mathrm{lsb} + \mathrm{cbInv} \quad \text{par définition de cinvLSB},\\ &= k(k-1) + \mathrm{lsb} - \mathrm{bInv} \quad \text{par définition de cbInv},\\ &= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb} - \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.31)},\\ &= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} - \mathrm{bInv} \quad \text{par (1.12)},\\ &= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{Inv} \quad \text{par définition de Inv.}\end{aligned}$$

□

LEMME 1.30. *Les identités fonctionnelles suivantes sont valables sur $\mathcal{OP}_n^k$:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj} &= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Maj},\\ \mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj} &= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Maj},\\ \mathrm{cmajLSB} &= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{Maj}\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Par une suite d'opérations élémentaires (cf. preuve du Lemme 1.29), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj} &= \mathrm{ros} + \mathrm{lcs} + \mathrm{bMaj} \\
&= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb} + \mathrm{bMaj} \\
&= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{bMaj} \\
&= \mathrm{cls} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Maj} \quad \text{par définition de Maj},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj} &= \mathrm{lob} + \mathrm{rcb} + \mathrm{bMaj} \quad \text{par définition de Mak}', \\
&= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb} + \mathrm{bMaj} \\
&= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} + \mathrm{bMaj} \\
&= \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{Maj},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{cmajLSB} &= \binom{k}{2} + \mathrm{lsb} + \mathrm{cbMaj} \\
&= k(k-1) + \mathrm{lsb} - \mathrm{bMaj} \\
&= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb} - \mathrm{bMaj} \\
&= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} - \mathrm{bMaj} \\
&= k(k-1) + \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} - \mathrm{Maj}\,.
\end{aligned}$$

□

2.4.2. *L'application* Υ. Considérons l'application $\Upsilon : \mathcal{OP}_n^k \to \mathcal{OP}_n^k$ définie par

$$\Upsilon := \Psi^{-1} \circ \Phi. \tag{1.36}$$

Par exemple, si $\pi = 6/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10/9/2\ 8$, alors (voir Figure 1.3 et Figure 1.4), on a $\Upsilon(\pi) = 6/3\ 5\ 7/9/1\ 4\ 10/2\ 8$. Notons que $\Upsilon(\pi)$ n'est en général pas un réarrangement de blocs de π.

Le résultat suivant est une conséquence directe des Théorème 1.26 et Théorème 1.28.

THÉORÈME 1.31. *L'application* $\Upsilon : \mathcal{OP}_n^k \to \mathcal{OP}_n^k$ *est une bijection. Par ailleurs, pour tout* $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$*, on a*

(i) $\mathrm{type}(\Upsilon(\pi)) = \mathrm{type}(\pi)$*, (ii)* $\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\Upsilon(\pi)) = \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)$*, (iii)* $\mathrm{Maj}(\Upsilon(\pi)) = \mathrm{Inv}(\pi)$*.*

En combinant le résultat précédent, les Lemme 1.29 et Lemme 1.30, et la Proposition 1.19, on obtient le résultat suivant qui implique le Théorème 1.4.

THÉORÈME 1.32. *L'application* $\Upsilon : \mathcal{OP}_n^k \mapsto \mathcal{OP}_n^k$ *est une bijection telle que pour tout* $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$*, on a*

$$\mathrm{type}(\Upsilon(\pi)) = \mathrm{type}(\pi)$$

et

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})(\Upsilon(\pi)) \\
&= (\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})(\pi).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Par conséquent, pour tout type de partition λ, les statistiques quadruples

$$(\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})$$

$$\textit{et}\ (\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$$

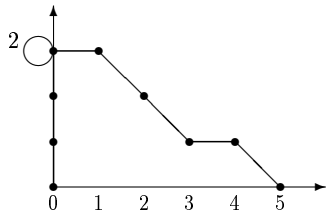
sont équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k(\lambda)$.

3. Première approche : preuve "algébrique" du Théorème 1.5

Les deux bijections entre partitions ordonnées et D-histoires introduites précédemment permettent de transformer les q-comptages des partitions ordonnées selon les statistiques de Steingrímsson en un q-comptage de D-histoires, qui ne sont rien d'autre que des chemins pondérés. Nous disposons pour cela d'un outil élémentaire mais fort utile : la matrice de transfert.

3.1. Énumération des D-chemins.

3.1.1. *Valuation des D-chemins.* Soient $(a_{x,h})_{x,h\geq 0}$, $(b_{x,h})_{x,h\geq 0}$, $(c_{x,h})_{x\geq 0,h\geq 1}$ et $(d_{x,h})_{x,h\geq 0}$ quatre suites d'un anneau commutatif K. Nous définissons alors une valuation v sur les D-chemins comme suit : la valuation d'un pas élémentaire Nord (resp. Est, Sud-Est, Nul) d'abscisse x et de hauteur h est $a_{x,h}$ (resp. $b_{x,h}$, $c_{x,h}$, $d_{x,h}$). La valuation d'un D-chemin est alors le produit des valuations de ses pas élémentaires. Par exemple, la valuation du D-chemin w donné ci-dessous



est $\mathrm{v}(w) = a_{0,0}\, a_{0,1}\, a_{0,2}\, (d_{0,2})^2\, b_{0,2}\, c_{1,2}\, c_{2,2}\, b_{3,1}\, c_{4,1}$.

Nous nous intéressons ici à la suite $(\mu_n^k)_{n,k\geq 0}$ d'éléments de K définis par

$$\mu_n^k := \sum_{w\in\,\Omega_n^k} \mathrm{v}(w). \tag{1.38}$$

Pour cela, nous introduisons les séries génératrices $Q_k(z)$, $k \geq 0$, définies par

$$Q_k(z) := \sum_{w\in\,\Omega^k} \mathrm{v}(\omega)\, z^{|w|} = \sum_{n\geq k} \mu_n^k\, z^n. \tag{1.39}$$

Les premières valeurs sont :

$$Q_0(z) = \frac{1}{1-d_{0,0}z},$$
$$Q_1(z) = \frac{z(a_{0,0}c_{0,1}z - b_{0,0}d_{0,1}z + b_{0,0})}{(1-d_{0,0}z)(1-d_{0,1}z)(1-d_{1,0}z)}.$$

Nous allons ici utiliser la "méthode de matrice de transfert" (en anglais "transfer-matrix method") pour obtenir une formule générale pour les $Q_k(z)$, $k \geq 0$. L'idée est d'identifier les D-chemins de profondeur k avec certaines *marches* sur un graphe orienté (digraphe), puis d'utiliser la matrice de transfert de ce graphe.

Pour $k \geq 0$, on désigne par $D_k = (V_k, E_k)$ le graphe orienté dont l'ensemble des sommets V_k est défini par $V_k := \{(i,j) \in V \mid i+j \leq k\}$ et dont l'ensemble des arêtes E_k

est donné par

$$E_k := \{(u,v) \in V_k^2 \mid v - u = (0,0), (0,1), (1,0), (1,-1)\}.$$

Une représentation graphique de D_k est donnée dans la Figure 1.5.

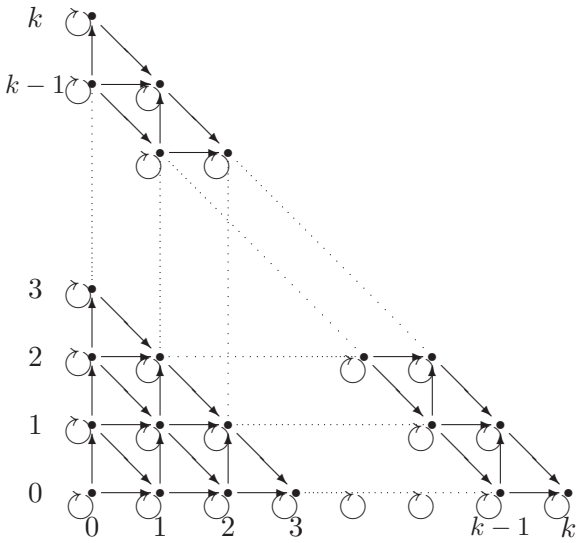


FIG. 1.5. Le graphe orienté D_k

Il est clair que le nombre de sommets de D_k est égal à

$$1 + 2 + \ldots + (k+1) = \binom{k+2}{2} := \widehat{k}. \tag{1.40}$$

Etiquetons les sommets de D_k, i.e. les éléments de V_k, par leur rang par rapport à l'ordre total suivant :

$$(i,j) \leq (i',j') \Longleftrightarrow i + j < i' + j' \quad \text{ou} \quad (i + j = i' + j' \text{ et } j \geq j').$$

Par exemple, $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,0)$, $v_4 = (0,2)$, $v_5 = (1,1)$, $v_6 = (2,0)$,..., $v_{\widehat{k}} = (k,0)$.

Soit $D = (V,E)$ un graphe orienté. Une *marche* de D est une suite $M = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ de sommets de D telle que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $(s_{i-1}, s_i) \in E$. Nous dirons que la marche va de s_0 à s_n. L'entier n est appelé la longueur de la marche et est noté $|w|$.

Il est facile d'identifier les D-chemins de profondeur k avec certaines marches dans D_k.

REMARQUE 1.33. *Les D-chemins de profondeur k sont exactement les marches de D_k qui vont de $v_1 = (0,0)$ à $v_{\widehat{k}} = (k,0)$.*

On peut donc considérer la valuation v comme une valuation sur les D-chemins ou les D-histoires : la valuation d'une arête est la valuation du pas élémentaire correspondant

et donc la valuation d'une marche est le produit des valuations des arêtes la composant, i.e., si $M = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une marche de D_k,

$$\mathrm{v}(M) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{v}(s_{i-1}, s_i).$$

On peut donc réinterpréter $Q_k(z)$ (cf. (1.52)) comme une série génératrice sur certaines marches de D_k ; plus précisément,

$$Q_k(z) = \sum_{\Gamma} \mathrm{v}(\Gamma)\, z^{|\Gamma|}, \tag{1.41}$$

où la sommation est effectuée sur toutes les marches de D_k qui vont de v_1 à $v_{\widehat{k}}$.

Pour $k \geq 0$, désignons par A_k la *matrice de transfert* de D_k relativement à la valuation v, i.e., A_k est la matrice $\widehat{k} \times \widehat{k}$ définie par

$$A_k(i,j) = \begin{cases} \mathrm{v}(v_i, v_j) & \text{si } (v_i, v_j) \text{ est un arc de } D_k\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.42}$$

Les trois premiers termes de la suite $(A_k)_{k\geq 0}$ sont $A_0 = (d_{0,0})$,

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|cc} d_{0,0} & a_{0,0} & b_{0,0} \\ \hline 0 & d_{0,1} & c_{0,1} \\ 0 & 0 & d_{1,0} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad A_2 = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} d_{0,0} & a_{0,0} & b_{0,0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & d_{0,1} & c_{0,1} & a_{0,1} & b_{0,1} & 0 \\ 0 & 0 & d_{1,0} & 0 & a_{1,0} & b_{1,0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & d_{0,2} & c_{0,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{1,1} & c_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{2,0} \end{array}\right).$$

D'après le théorème de la matrice de transfert (voir par exemple [**83**, Theorem 4.7.2]) et l'interprétation (1.41), on obtient

$$Q_k(z) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(I_k - z\, A_k; \widehat{k}, 1)}{\det(I_k - z\, A_k)}, \tag{1.43}$$

où I_k est la matrice identité de dimension $\widehat{k} \times \widehat{k}$, et $(A; i, j)$ dénote la sous matrice de A obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. Par ailleurs, A_k est une matrice triangulaire supérieure (par construction de D_k, il n'existe aucune arête $(v_i, v_j) \in E_k$, $i > j$) dont les éléments diagonaux sont les $d_{x,h}$, $0 \leq x, h \leq k$, et donc

$$\det(I_k - z\, A_k) = \prod_{0 \leq x,h \leq k} (1 - d_{x,h}\, z). \tag{1.44}$$

En résumé, nous avons prouvé le résultat suivant :

Proposition 1.34. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$Q_k(z) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(I_k - z\, A_k; \widehat{k}, 1)}{\prod_{0 \leq x,h \leq k} (1 - d_{x,h}\, z)}. \tag{1.45}$$

3.1.2. *Description des matrices* $M_k = I_k - z\,A_k$. Remarquons (cf. Figure 1.5) que le graphe D_k est "obtenue" de D_{k-1} en "ajoutant la k-ème antidiagonal de $\mathbb{N}^2$"

$$\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x+y=k\} = \{v_{\widehat{k-1}+1}, \ldots, v_{\widehat{k}}\}.$$

Plus formellement, on a

$$V_k \setminus V_{k-1} = \{v_{\widehat{k-1}+1}, \ldots, v_{\widehat{k}}\}$$

et

$$E_k \backslash E_{k-1} = \left(\bigcup_{j=\widehat{k-2}+1}^{\widehat{k-1}} \{(v_j, v_{k+j}), (v_j, v_{k+1+j})\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=\widehat{k-1}+1}^{\widehat{k}-1} \{(v_j, v_j), (v_j, v_{j+1})\} \right) \cup \{(v_{\widehat{k}}, v_{\widehat{k}})\}.$$

Il est alors facile de vérifier, les détails sont laissés au lecteur, que les matrices A_k, $k \geq 0$, peuvent être définies récursivement par,

$$A_0 = (d_{0,0})\,, \quad A_k = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & \overline{A}_{k-1} \\ \hline O_{k+1,\widehat{k-1}} & \widehat{A}_{k-1} \end{array} \right) \quad \text{pour } k \geq 1, \tag{1.46}$$

où l'on a posé

$$\widehat{A}_{k-1} = (d_{i-1,k+1-i}\,\delta_{ij} + c_{i-1,k+1-i}\,\delta_{i+1,j})_{1 \leq i,j \leq k+1}\,,$$

et

$$\overline{A}_{k-1} = \left(\begin{array}{c} O_{\widehat{k-2},k+1} \\ \hline \check{A}_{k-1} \end{array} \right)$$

avec

$$\check{A}_{k-1} = (a_{i-1,k-i}\,\delta_{ij} + b_{i-1,k-i}\,\delta_{i+1,j})_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq k+1}\,.$$

Les matrices $M_k = I_k - z\,A_k$, $k \geq 0$, peuvent donc être définies récursivement par

$$M_0 = (1 - d_{0,0}\,z)\,, \quad M_k = \left(\begin{array}{c|c} M_{k-1} & \overline{M}_{k-1} \\ \hline O_{k+1,\widehat{k-1}} & \widehat{M}_{k-1} \end{array} \right) \quad \text{pour } k \geq 1, \tag{1.47}$$

où

$$\widehat{M}_{k-1} = (\delta_{ij} - z\,(d_{i-1,k+1-i}\,\delta_{ij} + c_{i-1,k+1-i}\,\delta_{i+1,j}))_{1 \leq i,j \leq k+1}\,,$$

et $\overline{M}_{k-1}$ est la matrice de dimension $\widehat{k-1} \times (k+1)$

$$\overline{M}_{k-1} = \left(\begin{array}{c} O_{\widehat{k-2},k+1} \\ \hline \check{M}_{k-1} \end{array} \right)$$

avec

$$\check{M}_{k-1} = (-z(a_{i-1,k-i}\,\delta_{ij} + b_{i-1,k-i}\,\delta_{i+1,j}))_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq k+1}\,.$$

Par exemple, la matrice M_3 est donnée ci-dessous :

$$\left(\begin{array}{c|cc|ccc|ccc|c}
1-d_{0,0}\,z & -a_{0,0}\,z & -b_{0,0}\,z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1-d_{0,1}\,z & -c_{0,1}\,z & -a_{0,1}\,z & -b_{0,1}\,z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1-d_{1,0}\,z & 0 & -a_{1,0}\,z & -b_{1,0}\,z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1-d_{0,2}\,z & -c_{0,2}\,z & 0 & -a_{0,2}\,z & -b_{0,2}\,z & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{1,1}\,z & -c_{1,1}\,z & 0 & -a_{1,1}\,z & -b_{1,1}\,z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{2,0}\,z & 0 & 0 & -a_{2,0}\,z & -b_{2,0}\,z \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{0,3}\,z & -c_{0,3}\,z & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{1,2}\,z & -c_{1,2}\,z & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{2,1}\,z & -c_{2,1}\,z \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-d_{3,0}\,z
\end{array}\right).$$

3.2. Applications : preuve du Théorème 1.5.

Nous allons ici donner une démonstration du Théorème 1.5 en utilisant les résultats de la section précédente. Il est facile de voir en utilisant le Lemme 1.29 et quelques manipulations algébriques triviales que le Théorème 1.5 est équivalent au résultat suivant.

THÉORÈME 1.35.

$$\sum_{\pi\in\mathcal{OP}_n^k} x^{\mathrm{cls}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, y^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t^{\mathrm{Inv}(\pi)} a^{|\pi|} = [k]_t! S_{p,q}(n,k),$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{OP}_n^k} x^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, y^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t^{\mathrm{Inv}(\pi)} a^{|\pi|} = [k]_t! S_{p,q}(n,k).$$

Soit $\mathcal{OP}^k := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{OP}_n^k$ l'ensemble des partitions ordonnées en k blocs et considérons les fonctions génératrices sur $\mathcal{OP}^k$, $k \geq 1$, définies par

$$f_k(a;x,y,t) = \sum_{\pi\in\mathcal{OP}^k} x^{\mathrm{cls}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, y^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t^{\mathrm{Inv}(\pi)} a^{|\pi|},$$

$$f'_k(a;x,y,t) = \sum_{\pi\in\mathcal{OP}^k} x^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, y^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t^{\mathrm{Inv}(\pi)} a^{|\pi|}.$$

En utilisant la définition (1.20) des p,q-nombres de Stirling de seconde espèce $S_{p,q}(n,k)$, il est facile de montrer que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\sum_{n\geq 0} S_{p,q}(n,k)\, a^n = \frac{a^k p^{\binom{k}{2}}}{\prod_{i=1}^k (1-a[i]_{p,q})}, \tag{1.48}$$

et donc, le Théorème 1.35 est équivalent au résultat suivant.

THÉORÈME 1.36. *Pour tout $k \geq 1$, on a*

$$f_k(a;x,y,t) = f'_k(a;x,y,t) = \frac{a^k\, x^{\binom{k}{2}} [k]_t!}{\prod_{i=1}^k (1-a[i]_{x,y})}.$$

C'est ce dernier résultat que nous allons démontrer.

Soient $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$ et $Q_n^k(\boldsymbol{t})$ la série génératrice sur $\mathcal{OP}_n^k$ définie par

$$Q_n^k(\boldsymbol{t}) = \sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} t_1^{\mathrm{cls}_{\mathcal{OS}}(\pi)}\, t_2^{\mathrm{cls}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t_3^{\mathrm{sb}_{\mathcal{OS}}(\pi)}\, t_4^{\mathrm{sb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t_5^{\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}\, t_6^{\mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}(\pi)}. \tag{1.49}$$

A l'aide du Théorème 1.26, on peut réécrire $Q_n^k(\boldsymbol{t})$ comme une série génératrice sur Ω_n^k. En effet, par définition de $Q_n^k(\boldsymbol{t})$, on a

$$Q_n^k(\boldsymbol{t}) = \sum_{\pi \in \mathcal{OP}_n^k} \prod_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi)} \left(t_1^{\mathrm{cls}_i(\pi)}\, t_3^{\mathrm{sb}_i(\pi)}\, t_6^{\mathrm{ros}_i(\pi)} \right) \prod_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\pi)} \left(t_2^{\mathrm{cls}_i(\pi)}\, t_4^{\mathrm{sb}_i(\pi)}\, t_5^{\mathrm{rsb}_i(\pi)} \right).$$

Il découle alors du Théorème 1.26 et de la Proposition 1.18 que l'on a

$$Q_n^k(\boldsymbol{t}) = \sum_{(w,\gamma) \in \Delta_n^k} \prod_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \left(t_1^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_3^{\mathrm{y}_i(w)}\, t_6^{\gamma_i} \right) \prod_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \left(t_2^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_4^{\mathrm{y}_i(w)-1}\, t_5^{\gamma_i} \right).$$

Par des manipulations triviales et en utilisant la définition d'une D-histoire, on obtient

$$\begin{aligned} Q_n^k(\boldsymbol{t}) &= \sum_{w \in {}^0\Omega_n^k} \prod_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \left(t_1^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_3^{\mathrm{y}_i(w)} \left(\sum_{a=0}^{\mathrm{x}_i(w)+\mathrm{y}_i(w)} t_6^a \right) \right) \\ &\qquad \times \prod_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \left(t_2^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_4^{\mathrm{y}_i(w)-1} \left(\sum_{b=0}^{\mathrm{y}_i(w)-1} t_5^b \right) \right) \\ &= \sum_{w \in {}^0\Omega_n^k} \prod_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \left(t_1^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_3^{\mathrm{y}_i(w)} [\mathrm{x}_i(w) + \mathrm{y}_i(w) + 1]_{t_6} \right) \\ &\qquad \times \prod_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \left(t_2^{\mathrm{x}_i(w)}\, t_4^{\mathrm{y}_i(w)-1} [\mathrm{y}_i(w)]_{t_5} \right). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Considérons la valuation v sur les D-chemins (cf. Section 3.1.1) obtenues en prenant

$$a_{x,h} = b_{x,h} = t_1^x\, t_3^h\, [x+h+1]_{t_6} \quad \text{et} \quad c_{x,h} = d_{x,h} = t_2^x\, t_4^{h-1} [h]_{t_5}.$$

Autrement dit, la valuation d'un chemin est le produit des valuations de ses pas élémentaires et la valuation d'un pas élémentaire (s_i, s_{i+1}) d'abscisse p et hauteur q est donnée par

$$\mathrm{v}(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} t_1^p\, t_3^q\, [p+q+1]_{t_6} & \text{si le pas est Nord ou Est ;} \\ t_2^p\, t_4^{q-1} [q]_{t_5} & \text{si le pas est Null ou Sud-Est.} \end{cases} \tag{1.51}$$

Il découle alors de (1.50) que

$$Q_n^k(\boldsymbol{t}) = \sum_{w \in {}^0\Omega_n^k} \mathrm{v}(w) = \sum_{w \in \Omega_n^k} \mathrm{v}(w),$$

où la dernière égalité découle du fait que pour tout pas Nul (s_i, s_{i+1}) de hauteur 0, on a $\mathrm{v}(s_i, s_{i+1}) = 0$. On peut maintenant appliquer notre Proposition 1.34. Posons

$$Q^k(a;\boldsymbol{t}) := \sum_{n\geq 0} Q_n^k(\boldsymbol{t})\, a^n = \sum_{w\in\,\Omega^k} \mathrm{v}(w)\, a^{|w|} \tag{1.52}$$

et soit $A_k(\boldsymbol{t})$, $k \geq 1$, la matrice de transfert (cf. (1.42)) du graphe D_k relativement à la valuation v définie par (1.51). On a alors, d'après la Proposition 1.34,

$$Q^k(a;\boldsymbol{t}) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(I_k - aA_k(\boldsymbol{t}); \widehat{k}, 1)}{\prod_{p=0}^{k}\prod_{q=1}^{k}(1 - t_2^p\, t_4^{q-1}[q]_{t_5}\, a)}. \tag{1.53}$$

Par exemple, pour $k = 2$, on a

$$A_2(\boldsymbol{t}) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc}
0 & [1]_{t_6} & [1]_{t_6} & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & [1]_{t_5} & [1]_{t_5} & t_3\,[2]_{t_6} & t_3\,[2]_{t_6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t_1\,[2]_{t_6} & t_1\,[2]_{t_6} \\ \hline
0 & 0 & 0 & t_4[2]_{t_5} & t_4[2]_{t_5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t_2[1]_{t_5} & t_2[1]_{t_5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

et donc

$$Q_2(a;\boldsymbol{t}) = -\frac{\det(I_2 - aA_2(\boldsymbol{t}); 6, 1)}{(1-a)(1-t_4[2]_{t_5}a)(1-t_2a)} = \frac{a^2[2]_{t_6}(t_1 - a(t_1t_4 + t_2t_3 + t_1t_4t_5))}{(1-a)(1-t_4[2]_{t_5}a)(1-t_2a)}.$$

Nous n'avons pas trouver d'expression "agréable" pour le dénominateur du membre droit de l'égalité (1.53). Néanmoins, pour prouver le Théorème 1.36 (et donc le Théorème 1.5), il suffit d'évaluer certaines spécialisations de $Q_k(a;\boldsymbol{t})$.

Proposition 1.37. *Pour $k \geq 1$, on a*

$$f_k(a;x,y,t) = Q_k(a;x,x,y,y,x/y,t), \tag{1.54}$$

$$f'_k(a;x,y,t) = x^{-\binom{k}{2}} Q_k(ax^{k-1};1,1/x,y,y/x,x/y,t). \tag{1.55}$$

Démonstration. La première identité est immédiate. Montrons la seconde. Commençons par remarquer que sur $\mathcal{OP}_n^k$, nous avons l'identité fonctionnelle suivante :

$$\mathrm{opb} = n(k-1) - \mathrm{ops} = n(k-1) - \mathrm{ops}_{\mathcal{OS}} - \mathrm{ops}_{\mathcal{TC}}.$$

Il est par ailleurs facile de voir que $\mathrm{ops}_{\mathcal{OS}} = \binom{k}{2}$ sur $\mathcal{OP}^k$. En notant alors que $\mathrm{ops}_{\mathcal{TC}} = \mathrm{cls}_{\mathcal{TC}} + \mathrm{sb}_{\mathcal{TC}}$ (cf. (1.10)), on obtient le résultat souhaité. □

Posons $g_k(x,y,t;a) := Q_k(1,x,y,xy,1/xy,t;a)$. On a alors

$$f'_k(a;x,y,t) = x^{-\binom{k}{2}} g_k(ax^{k-1};1/x,y,t). \tag{1.56}$$

Soient A'_k et A''_k, $k \geq 1$, les matrices définies par

$$A'_k = A_k(x,x,y,y,x/y,t) \quad \text{et} \quad A''_k = A_k(1,x,y,xy,1/xy,t).$$

Posons, pour tout $k \geq 1$,

$$M_k = I_k - aA'_k \quad \text{et} \quad N_k = I_k - aA''_k.$$

On a alors d'après (1.53), (1.54) et la définition de $g_k(x,y,t;a)$ que pour tout $k \geq 1$,

$$f_k(a;x,y,t) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(M_k;\widehat{k},1)}{\prod_{m=1}^{k}\prod_{i=0}^{m}(1-ax^i[m-i]_{x,y})}, \tag{1.57}$$

$$g_k(a;x,y,t) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(N_k;\widehat{k},1)}{\prod_{m=1}^{k}\prod_{i=0}^{k-m}(1-ax^i[m]_{xy})}. \tag{1.58}$$

Nous avons fait le choix de ne pas reproduire les calculs (une dizaine de pages) des déterminants $\det(M_k;\widehat{k},1)$ et $\det(N_k;\widehat{k},1)$ pour ne pas "assomer" le lecteur. Cependant, nous renvoyons le lecteur intéressé par ces calculs à [**44**].

THÉORÈME 1.38. *Pout tout entier $k \geq 1$, on a*

$$\det(M_k;\widehat{k},1) = (-1)^{\binom{k}{2}} a^k x^{\binom{k}{2}} [k]_t! \prod_{m=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{m}(1-ax^i[m-i+1]_{x,y}), \tag{1.59}$$

THÉORÈME 1.39. *Pout tout entier $k \geq 1$, on a*

$$\det(N_k;\widehat{k},1) = (-1)^{\binom{k}{2}} a^k\, [k]_t! \prod_{m=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{k-m}(1-ax^{i-1}[m]_{xy}). \tag{1.60}$$

Comme $\widehat{k} = \binom{k+2}{2}$ (cf. (1.40)), on obtient, en combinant (1.57), (1.58), (1.59) et (1.60) et après quelques manipulations algébriques élémentaires, les égalités suivantes dont la première correspond à la première partie du Théorème 1.36 :

$$f_k(a;x,y,t) = \frac{a^k\, x^{\binom{k}{2}} [k]_t!}{\prod_{i=1}^{k}(1-a[i]_{x,y})}, \tag{1.61}$$

$$g_k(a;x,y,t) = \frac{a^k [k]_t!}{\prod_{i=1}^{k}(1-ax^{k-i}[i]_{xy})}. \tag{1.62}$$

Il découle alors de (1.56) et (1.62)

$$\begin{aligned} f'_k(a;x,y,t) &= x^{-\binom{k}{2}} g_k(ax^{k-1};1/x,y,t) \\ &= \frac{x^{-\binom{k}{2}}(ax^{k-1})^k [k]_t!}{\prod_{i=1}^{k}(1-ax^{k-1}x^{i-k}[i]_{y/x})} \\ &= \frac{a^k\, x^{\binom{k}{2}} [k]_t!}{\prod_{i=1}^{k}(1-ax^{i-1}[i]_{y/x})} \\ &= \frac{a^k\, x^{\binom{k}{2}} [k]_t!}{\prod_{i=1}^{k}(1-a[i]_{x,y})}, \end{aligned} \tag{1.63}$$

où la dernière égalité, qui correspond à la seconde égalité du Théorème 1.36, est une conséquence directe de l'identité $[n]_{p,q} = q^{n-1}[n]_{p/q}$. Ceci termine la preuve du Théorème 1.36 et donc du Théorème 1.5.

4. Une approche bijective

Nous présentons plusieurs bijections sur les partitions ordonnées, démontrant ainsi les Théorème 1.8, Théorème 1.11, Théorème 1.12 et Théorème 1.15.

4.1. σ-partitions et D-histoires.

4.1.1. *Préliminaires.* Le codage des permutations par des séquences d'entiers positifs est souvent attribué à Lehmer [**62**]. Le *code de Lehmer* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la séquence $c(\sigma) = (c_1, \ldots, c_n)$ d'entiers positifs où c_i est défini par

$$c_i = \#\{j > i \,|\, \sigma(j) < \sigma(i)\}.$$

On peut facilement retrouver une permutation à partir de son code de Lehmer. Il suffit en effet de remarquer que $\sigma(i)$ est égale au $(c_i + 1)$-ème élément (dans l'ordre croissant) de l'ensemble $[n] \setminus \{\sigma(1), ..., \sigma(i-1)\}$. Il en découle que l'application c qui associe à chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ son code de Lehmer est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur $C_n = \{(c_1, \ldots, c_n) : \ 0 \leq c_i \leq i-1\}$. Notons que par définition de la statistique nombre d'inversions inv, on a $\mathrm{inv}(\sigma) = c_1 + \ldots + c_n$.

Nous aurons besoin dans ce chapitre d'un codage de permutations par des entiers positifs, que nous appelerons *d-code*, étroitement lié au code de Lehmer. Le *d-code* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la séquence

$$d(\sigma) := (d_1, \ldots, d_n) = (c_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, c_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Autrement dit, la coordonnée d_i est le nombre d'entrées $\sigma(j)$ plus petites et à droite de i dans la séquence $\sigma(1) \ldots \sigma(n)$, i.e.

$$d_i = \#\{j > \sigma^{-1}(i) \,|\, \sigma(j) < i\}.$$

La preuve du lemme suivant est laissée au lecteur.

Lemme 1.40. *L'application d qui à chaque permutation de $\mathfrak{S}_n$ associe son d-code est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur $C_k = \{(c_1, \ldots, c_k) : \ 0 \leq c_i \leq i-1\}$. De plus,* $\mathrm{inv}(\sigma) = d_1 + \ldots + d_n$.

Par exemple, si $\sigma = 8\,6\,3\,4\,7\,5\,2\,1 \in \mathfrak{S}_8$, alors

$$c(\sigma) = 7\,5\,2\,2\,3\,2\,1\,0,$$
$$d(\sigma) = 0\,1\,2\,2\,2\,5\,3\,7.$$

L'intérêt du d-code réside dans le lemme suivant.

Lemme 1.41. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ et π une partition dans $\mathcal{OP}_n^k$ avec $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$,

(ii) $(\mathrm{ros}_{i_1}, \mathrm{ros}_{i_2}, \ldots, \mathrm{ros}_{i_k})(\pi) = d(\sigma)$.

Démonstration. Supposons $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$ et $d(\sigma) = (d_1, \ldots, d_k)$. Par définition de $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$, il existe une unique partition $B_1/B_2/\ldots/B_k$ dans $\mathcal{P}_n^k$ telle que $\pi = B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)}$. Comme $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$, on a alors $\min(B_j) = i_j$ pour $j \in [k]$. Soit $s \in [k]$. Par définition de $\mathrm{ros}_{i_s}(\pi)$ et comme $\min(B_j) = i_j$ pour $j \in [k]$, $\mathrm{ros}_{i_s}(\pi)$ est égale

au nombre de blocs $B_{\sigma(j)}$ à droite de B_s dans $\pi = B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)}$ satisfaisant $\sigma(j) < s$. De manière équivalente, $\mathrm{ros}_{i_s}(\pi)$ est le nombre d'entrées $\sigma(j)$ plus petites et à droite de s dans la séquence $\sigma(1)\ldots\sigma(n)$. Or, cette dernière quantité est exactement d_s. On a bien $\mathrm{ros}_{i_s}(\pi) = d_s$, et donc (i) implique (ii).

Réciproquement, supposons $(\mathrm{ros}_{i_1}, \mathrm{ros}_{i_2}, \ldots, \mathrm{ros}_{i_k})(\pi) = d(\sigma)$ et $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$. Comme (i) implique (ii), on a alors $(\mathrm{ros}_{i_1}, \mathrm{ros}_{i_2}, \ldots, \mathrm{ros}_{i_k})(\pi) = d(\tau)$ et donc $d(\sigma) = d(\tau)$. L'application d étant bijective, on obtient $\sigma = \tau$, et donc $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$. On a bien (ii) implique (i). □

LEMME 1.42. *Soit (w, γ) une D-histoire dans Δ_n^k et supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$. Alors la séquence $(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k})$ est le d-code d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $0 \leq \gamma_{i_j} \leq j - 1$ pour $j = 1, \ldots, k$, ce qui est immédiat d'après la définition d'une D-histoire et le Lemme 1.20. □

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, nous dénoterons par $\Delta_n^k(\sigma)$ l'ensemble des histoires $(w, \gamma) \in \Delta_n^k$ vérifiant $(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}) = d(\sigma)$, où $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_< = \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)$. Il est clair que $(\Delta_n^k(\gamma))_{\gamma \in \mathfrak{S}_k}$ est une partition de Δ_n^k.

LEMME 1.43. *Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, la restriction de Φ sur $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ est une bijection de $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ sur $\Delta_n^k(\sigma)$.*

Démonstration. Comme Φ est une bijection de $\mathcal{OP}_n^k$ sur Δ_n^k, il suffit de montrer $\Phi(\mathcal{P}_n^k(\sigma)) = \Delta_n^k(\sigma)$. Soit $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$ et $h = (w, \gamma) = \Phi(\pi)$. Supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$. Par définition de Φ, on a $(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}) = (\mathrm{ros}_{i_1}, \mathrm{ros}_{i_2}, \ldots, \mathrm{ros}_{i_k})(\pi)$ et donc en utilisant le Lemme 1.41, on obtient $(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_k}) = d(\sigma)$, i.e., $h \in \Delta_n^k(\sigma)$. On a donc $\Phi(\mathcal{P}_n^k(\sigma)) \subseteq \Delta_n^k(\sigma)$. Il reste à montrer $\Delta_n^k(\sigma) \subseteq \Phi(\mathcal{P}_n^k(\sigma))$.

Soit $h = (w, \gamma) \in \Delta_n^k(\sigma)$. Comme Φ est une bijection de $\mathcal{OP}_n^k$ sur Δ_n^k, il existe une unique partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$ telle que $\Phi(\pi) = h$. Supposons $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\tau)$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$. Comme $\Phi(\mathcal{P}_n^k(\tau)) \subseteq \Delta_n^k(\tau)$, on a alors $h \in \Delta_n^k(\tau)$. Or $h \in \Delta_n^k(\sigma)$ par hypothèse et $(\Delta_n^k(\gamma))_{\gamma \in \mathfrak{S}_k}$ est une partition de Δ_n^k. On a donc $\Delta_n^k(\tau) = \Delta_n^k(\sigma)$ et donc $\tau = \sigma$. En particulier, $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$. On a bien montré $\Delta_n^k(\sigma) \subseteq \Phi(\mathcal{P}_n^k(\sigma))$. □

Nous sommes maintenant en mesure de présenter les applications $\Gamma_\sigma : \mathcal{P}_n^k \mapsto \mathcal{P}_n^k(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, qui jouent un rôle capital dans la démonstration du Théorème 1.8.

4.1.2. *Les applications Γ_σ de $\mathcal{P}_n^k$ à $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$.* Soient σ, τ deux permutations de $\mathfrak{S}_k$, avec $d(\tau) = (d_1, \ldots, d_k)$. À toute histoire $(w, \gamma) \in \Delta_n^k(\tau)$ on associe une histoire $g_{\tau,\sigma}(w, \gamma) = (w, \gamma') \in \Delta_n^k(\sigma)$, où γ' est définie par :

$$\gamma'_i = \begin{cases} d_j, & \text{si } i = i_j \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)\,; \\ \gamma_i, & \text{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w). \end{cases} \tag{1.64}$$

Il est clair que l'application $g_{\sigma,\tau} : \Delta_n^k(\sigma) \to \Delta_n^k(\tau)$ est bien définie et bijective (on a $g_{\sigma,\tau}^{-1} = g_{\tau,\sigma}$). En particulier, dans le cas $\tau = \mathrm{Id}$ (la permutation identité), l'application $g_\sigma := g_{\mathrm{Id},\sigma}$ est une bijection de $\Delta_n^k(\mathrm{Id})$ sur $\Delta_n^k(\sigma)$.

Définition de l'application Γ_σ. Soit Γ_σ, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, l'application définie sur les partitions de $\mathcal{P}_n^k$ par

$$\Gamma_\sigma := \Phi^{-1} \circ g_\sigma \circ \Phi. \tag{1.65}$$

Le résultat suivant est une conséquence directe des Théorème 1.26, Lemme 1.43 et définition de g_σ.

THÉORÈME 1.44. *Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, *l'application* Γ_σ *est une bijection de* $\mathcal{P}_n^k$ *sur* $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ *telle que pour tout* $\pi \in \mathcal{P}_n^k$,

$$\textit{(i)}\ \mathrm{type}(\Gamma_\sigma(\pi)) = \mathrm{type}(\pi),\ \textit{(ii)}\ \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\Gamma_\sigma(\pi)) = \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi).$$

EXEMPLE 1.6. *Supposons que* $\pi = 1\ 5\ 7/2\ 4\ 10/3\ 8/6/9 \in \mathcal{P}_{10}^5$ *et* $\sigma = 4\,3\,1\,5\,2$. *Supposons que l'application de* Γ_σ *à* π *donne le diagramme suivant :*

$$\Gamma_\sigma :\ \pi \overset{\Phi}{\longmapsto} h = (w, \gamma) \overset{g_\sigma}{\longmapsto} g = (w, \gamma') \overset{\Phi^{-1}}{\longmapsto} \pi'.$$

Alors $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi) = \{1, 2, 3, 6, 9\}_<$ *et* $d(\sigma) = 0\,0\,2\,3\,1$. *Les histoires correspondantes* (w, γ) *et* (w, γ') *sont données par*

$$w = (0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (0,3),\ (0,3),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ (4,1),\ (5,0),$$
$$\gamma = (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{0},\ 1,\ 2,\ \mathbf{0},\ 2,\ 0,\ \mathbf{0},\ 0),$$
$$\gamma' = (\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2},\ 1,\ 2,\ \mathbf{3},\ 2,\ 0,\ \mathbf{1},\ 0).$$

Une illustration graphique de la construction de $h' = g_\sigma(h)$ *est donnée dans la Figure 1.6. Finallement, on obtient* $\Gamma_\sigma(\pi) = \Phi^{-1}(h') = 6/3\ 5\ 7/1\ 4\ 10/9/2\ 8 \in \mathcal{P}_{10}^5(\sigma)$. *Notons que* $\Gamma_\sigma(\pi)$ *n'est en général pas un réarrangement des blocs de* π.

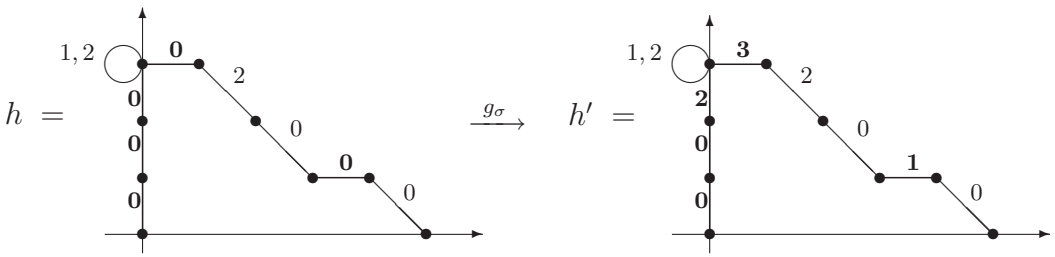


FIG. 1.6. L'application g_σ

4.2. Preuve des Théorème 1.12 et Théorème 1.15.

4.2.1. *L'involution* φ *sur les D-histoires.* À tout chemin $w \in \Omega_n^k$, on peut associer une bijection naturelle entre les pas Nord et les pas Sud-Est de w. Supposons que les indices des pas Nord et pas Sud-Est de w sont donnés par

$$\mathcal{O}(w) = \{o_1, o_2, \cdots, o_r\}_< \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(w) = \{c_1, c_2, \cdots, c_r\}_<.$$

On définit alors une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_r$, qu'on appelera *permutation associée* à w, de la manière suivante. Soit $1 \leq i \leq r$ et supposons que la hauteur du i-ème pas Nord

de w (i.e. le o_i-ème pas de w) est t. Comme $w_n = (k, 0)$, il doit forcèment exister un pas Sud-Est de hauteur $t+1$ à droite de notre pas Nord. Si ce premier pas Sud-Est est le j-ème pas Sud-Est (i.e. le c_j-ème pas) de w, on pose $\sigma(i) = j$. Comme il y a toujours au moins un pas Sud-Est de hauteur $t+1$ entre deux pas Nord de hauteur t, il s'ensuit que σ est une injection, et donc une bijection (car $|\mathcal{O}(w)| = |\mathcal{C}(w)|$).

Par exemple, si w est le chemin représenté dans la Figure 1.7, alors la permutation σ associée à w est dans $\mathfrak{S}_4$ et on a $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$. Une illustration graphique de la construction de σ est donnée dans la Figure 1.7.

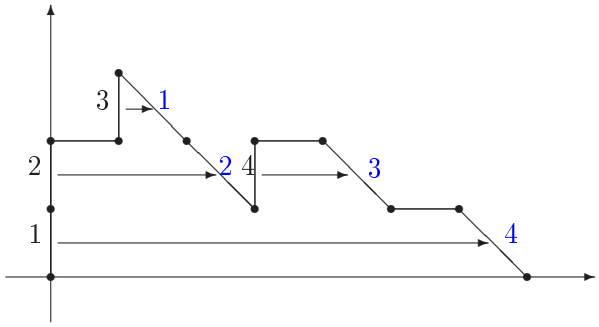


FIG. 1.7. Permutation associée à un chemin

Soit A un sous-ensemble de $[n]$. Le *complémenté* $\overline{A}$ *de* A *à* $[n]$ est l'ensemble obtenu en remplaçant chaque $i \in A$ par $\bar{i} := n+1-i$. Le *chemin inverse* $\overline{w}$ de w est alors l' (unique) chemin dont le i-ième pas est Nord (resp. Est, Null, Sud-Est) si et seulement si le $\bar{i}$-ième pas de w est Sud-Est (resp. Est, Null, Nord). Clairement, si $w \in \Omega_n^k$ avec $\mathrm{type}(w) = (\mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$, on peut aussi définir $\overline{w}$ comme l'(unique) chemin satisfaisant $\mathrm{type}(\overline{w}) = \overline{\mathrm{type}(w)} := (\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{T}})$.

LEMME 1.45. *L'application* $w \mapsto \overline{w}$ *est une involution sur* Ω_n^k. *De plus,*

(1) *Pour* $i \in [n]$, $\mathrm{y}_i(\overline{w}) = y_{\bar{i}+1}(w)$. *En particulier, nous avons :*

$$\mathrm{y}_i(\overline{w}) = \begin{cases} \mathrm{y}_{\bar{i}}(w) - 1, & si\ i \in \mathcal{O}(\overline{w})\,; \\ \mathrm{y}_{\bar{i}}(w), & si\ i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{S}(\overline{w})\,; \\ \mathrm{y}_{\bar{i}}(w) + 1, & si\ i \in \mathcal{C}(\overline{w}). \end{cases} \tag{1.66}$$

(2) *Supposons* $|\mathcal{O}(w)| = r$ *et soient* σ *et* σ' *les permutations associées à* w *et* $\overline{w}$ *respectivement. Alors, pour tout* $j \in [r]$,

$$\sigma'(j) = r + 1 - \sigma^{-1}(r + 1 - j). \tag{1.67}$$

Démonstration. Le fait que $w \mapsto \bar{w}$ soit une involution sur Ω_n^k découle de l'identité triviale $\bar{\bar{i}} = i$.

(1) Par définition de $\overline{w}$, la hauteur du i-ième pas de $\overline{w}$ est égale à la hauteur du $(\bar{i}+1)$-ième pas de w, i.e. $\mathrm{y}_i(\overline{w}) = \mathrm{y}_{\bar{i}+1}(w)$. L'équation (1.66) découle alors du fait que

$\mathrm{type}(\overline{w}) = \overline{\mathrm{type}(w)}$ et des égalités :

$$\mathrm{y}_{i+1}(w) = \begin{cases} \mathrm{y}_i(w) + 1 & \text{si } i \in \mathcal{O}(w)\,; \\ \mathrm{y}_i(w) & \text{si } i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{S}(w)\,; \\ \mathrm{y}_i(w) - 1 & \text{si } i \in \mathcal{C}(w). \end{cases}$$

(2) Toujours par définition, pour tout $i \in [r]$, la permutation σ "envoie" le i-ième pas Nord de w sur le $\sigma(i)$-ième pas Sud-Est de w. En passant à $\overline{w}$, on obtient la formulation équivalente : σ' envoie le $(r+1-\sigma(i))$-ième pas Nord de $\overline{w}$ sur le $(r+1-i)$-ième pas Sud-Est de $\overline{w}$. En d'autres termes, on a $\sigma'(r+1-\sigma(i)) = r+1-i$. On obtient le résultat escompté en effectuant le changement de variable $j = r+1-\sigma(i)$. □

Désormais, nous disposons de tous les ingrédients pour définir notre involution φ sur Δ_n^k.

L'involution φ. Soit $h = (w, \gamma) \in \Delta_n^k$ avec $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_<$, $\mathcal{T}(w) = \{t_1, t_2, \cdots, t_u\}_<$ et $\mathcal{C}(w) = \{c_1, c_2, \cdots, c_r\}_<$. Supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\overline{w}) = \{i'_1, i'_2, \cdots, i'_k\}_<$, $\mathcal{T}(\overline{w}) = \{t'_1, t'_2, \cdots, t'_u\}_<$ et $\mathcal{C}(\overline{w}) = \{c'_1, c'_2, \cdots, c'_r\}_<$.

On pose alors $\varphi(h) = (\overline{w}, \xi)$, où $\xi = (\xi_i)_{1 \le i \le n}$ est définie par :

$$\xi_i = \begin{cases} \gamma_{i_m}, & \text{si } i = i'_m \text{ pour } m \in [k], \\ \gamma_{t_{u+1-m}}, & \text{si } i = t'_m \text{ pour } m \in [u], \\ \gamma_{c_{\sigma(r+1-m)}}, & \text{si } i = c'_m \text{ pour } m \in [r], \end{cases} \tag{1.68}$$

avec σ la permutation associée à w.

Exemple 1.7. *Considérons l'histoire $h = (w, \gamma)$ à gauche dans la Figure 1.8. Il est facile de voir que la permutation associée à w est $\sigma = 321$. Il s'ensuit que $\xi_{c'_1} = \gamma_{c_{\sigma(3)}} = \gamma_{c_1}$, $\xi_{c'_2} = \gamma_{c_{\sigma(2)}} = \gamma_{c_2}$ et $\xi_{c'_3} = \gamma_{c_{\sigma(1)}} = \gamma_{c_3}$. L'image $\varphi(h)$ de h est donnée à droite de la même figure.*

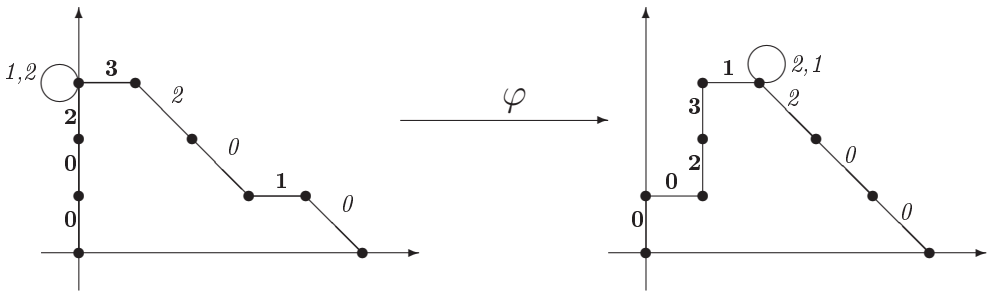


Fig. 1.8. L'application φ

Montrer que l'application φ est bien définie de Δ_n^k dans Δ_n^k demande un peu de travail. Il faut pour cela montrer que $(\overline{w}, \xi) \in \Delta_n^k$, i.e.,

(a) $0 \le \xi_{i'_m} \le \mathrm{x}_{i'_m}(\overline{w}) + \mathrm{y}_{i'_m}(\overline{w})$ pour $m \in [k]$,

(b) $0 \le \xi_{t'_m} \le \mathrm{y}_{t'_m}(\overline{w}) - 1$ pour $m \in [u]$, et

(c) $0 \le \xi_{c'_m} \le \mathrm{y}_{c'_m}(\overline{w}) - 1$ pour $m \in [r]$.

Par construction de $\overline{w}$, on a $t'_m = \overline{t_{u+1-m}}$ et $c'_m = \overline{o_{r+1-m}}$ et donc

$$\overline{t'_m} = \overline{\overline{t_{u+1-m}}} = t_{u+1-m} \quad \text{et} \quad \overline{c'_m} = \overline{\overline{o_{r+1-m}}} = o_{r+1-m},$$

où l'on a posé $\mathcal{O}(w) = \{o_1, o_2, \cdots, o_r\}_<$.

(a) Pour $m \in [k]$, le Lemme 1.20 implique que $\mathrm{x}_{i'_m}(\overline{w}) + \mathrm{y}_{i'_m}(\overline{w}) = \mathrm{x}_{i_m}(w) + \mathrm{y}_{i_m}(w)$ (les deux membres sont égaux à $m-1$). On obtient (a) en utilisant le fait que $\xi_{i'_m} = \gamma_{i_m}$ et $0 \leq \gamma_{i_m} \leq \mathrm{x}_{i_m}(w) + \mathrm{y}_{i_m}(w)$.

(b) Pour $m \in [u]$, le Lemme 1.45 implique que $\mathrm{y}_{t'_m}(\overline{w}) = \mathrm{y}_{\overline{t'_m}}(w) = \mathrm{y}_{t_{u+1-m}}(w)$. On obtient (b) en utilisant le fait que $\xi_{t'_m} = \gamma_{t_{u+1-m}}$, $0 \leq \gamma_{t_{u+1-m}} \leq \mathrm{y}_{t_{u+1-m}}(w) - 1$ et $\mathrm{y}_{t_{u+1-m}}(w) = \mathrm{y}_{t'_m}(\overline{w})$.

(c) Pour $m \in [r]$, le Lemme 1.45 implique $\mathrm{y}_{c'_m}(\overline{w}) = \mathrm{y}_{c_{\sigma(r+1-m)}}(w)$ parce que $\mathrm{y}_{c'_m}(\overline{w}) = \mathrm{y}_{\overline{c'_m}}(w) + 1 = \mathrm{y}_{o_{r+1-m}}(w) + 1$, qui est égal à $\mathrm{y}_{c_{\sigma(r+1-m)}}(w)$ par définition de σ. On obtient (c) en utilsant le fait que $\xi_{c'_m} = \gamma_{c_{\sigma(r+1-m)}}$ et $0 \leq \gamma_{c_{\sigma(r+1-m)}} \leq \mathrm{y}_{c_{\sigma(r+1-m)}}(w) - 1$.

Nous donnons maintenant le principal résultat de cette section.

THÉORÈME 1.46. (1) *L'application* $\varphi : (w, \gamma) \mapsto (\overline{w}, \xi)$ *est une involution sur* Δ_n^k *satisfaisant*

$$\sum_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\overline{w})} \xi_i = \sum_{i \in \mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w)} \gamma_i \quad \textit{et} \quad \sum_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(\overline{w})} \xi_i = \sum_{i \in \mathcal{T} \cup \mathcal{C}(w)} \gamma_i. \tag{1.69}$$

(2) *Pour tout* $\tau \in \mathfrak{S}_k$, *la restriction de* φ *sur* $\Delta_n^k(\tau)$ *est une involution sur* $\Delta_n^k(\tau)$.

Démonstration. Supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(w) = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}_<$, $\mathcal{T}(w) = \{t_1, t_2, \cdots, t_u\}_<$ et $\mathcal{C}(w) = \{c_1, c_2, \cdots, c_r\}_<$. Supposons $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\overline{w}) = \{i'_1, i'_2, \cdots, i'_k\}_<$, $\mathcal{T}(\overline{w}) = \{t'_1, t'_2, \cdots, t'_u\}_<$ et $\mathcal{C}(\overline{w}) = \{c'_1, c'_2, \cdots, c'_r\}_<$.

L'application de φ^2 à (w, γ) donne le diagramme suivant :

$$\varphi^2 : \ (w, \gamma) \overset{\varphi}{\longmapsto} (\overline{w}, \xi) \overset{\varphi}{\longmapsto} (\overline{\overline{w}}, \mu) = (w, \mu),$$

où $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est définie par

$$\xi_i = \begin{cases} \gamma_{i_m}, & \text{si } i = i'_m \text{ pour } m \in [k], \\ \gamma_{t_{u+1-m}}, & \text{si } i = t'_m \text{ pour } m \in [u], \\ \gamma_{c_{\sigma(r+1-m)}}, & \text{si } i = c'_m \text{ pour } m \in [r], \end{cases} \tag{1.70}$$

et $\mu = (\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ par

$$\mu_i = \begin{cases} \xi_{i'_m}, & \text{si } i = i_m \text{ pour } m \in [k], \\ \xi_{t'_{u+1-m}}, & \text{si } i = t_m \text{ pour } m \in [u], \\ \xi_{c'_{\sigma'(r+1-m)}}, & \text{si } i = c_m \text{ pour } m \in [r], \end{cases} \tag{1.71}$$

avec σ et σ' les permutations associées respectivement à w et $\overline{w}$.

(1) Il nous faut montrer $\varphi^2 = \mathrm{Id}$, i.e., $\mu = \gamma$. D'après (1.70) et (1.71), on a $\mu_{i_m} = \xi_{i'_m} = \gamma_{i_m}$ pour $m \in [k]$ et $\mu_{t_m} = \xi_{t'_{u+1-m}} = \gamma_{t_m}$ pour $m \in [u]$. Par (1.67) on a $\sigma(r+1-\sigma'(j)) =$

$r+1-j$ et donc pour $m \in [r]$, on a d'après (1.70) et (1.71),

$$\mu_{c_m} = \xi_{c'_{\sigma'(r+1-m)}} = \gamma_{c_{\sigma(r+1-\sigma'(r+1-m))}} = \gamma_{c_m}.$$

En résumé, on a bien $\mu = \gamma$.

L'équation (1.69) est une conséquence directe de (1.68) et de la définition de $\overline{w}$.

(2) L'application φ étant involutive, il suffit de montrer $\varphi(\Delta_n^k(\tau)) \subseteq \Delta_n^k(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_k$. Supposons $(w,\gamma) \in \Delta_n^k(\tau)$. Par définition de $\Delta_n^k(\tau)$, on a $d(\tau) = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_k})$ mais par définition de φ, on a $(\xi_{i'_1}, \xi_{i'_2}, \ldots, \xi_{i'_k}) = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \ldots, \gamma_{i_k})$, et donc $(\xi_{i'_1}, \xi_{i'_2}, \ldots, \xi_{i'_k}) = d(\tau)$, i.e., $\varphi(w,\gamma) = (\overline{w}, \xi) \in \Delta_n^k(\tau)$.

□

4.2.2. *Les applications* Θ *et* Σ. Soit Θ et Σ les applications définies de $\mathcal{OP}_n^k$ dans $\mathcal{OP}_n^k$ par

$$\Theta = \Phi^{-1} \circ \varphi \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Sigma = \Psi^{-1} \circ \varphi \circ \Psi. \tag{1.72}$$

Il découle directement des Théorème 1.26, Théorème 1.28, Théorème 1.46 et Lemme 1.43 que les applicatons Θ et Σ sont des involutions sur $\mathcal{OP}_n^k$ satisfaisant pour tout $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$,

(i) $\mathrm{type}(\Theta(\pi)) = \mathrm{type}(\Sigma(\pi)) = \overline{\mathrm{type}(\pi)}$,
(ii) $\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\Theta(\pi)) = \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\Sigma(\pi)) = \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)$,
(iii) $\mathrm{Inv}(\Theta(\pi)) = \mathrm{Inv}(\pi)$ et $\mathrm{Maj}(\Sigma(\pi)) = \mathrm{Maj}(\pi)$,
(iv) $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma) \implies \Theta(\pi) \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$.

Par ailleurs, une conséquence directe de la Proposition 1.47 (voir ci-dessous) est que pour tout type de partition λ et pour toute partition $\pi \in \mathcal{OP}_n^k(\lambda)$ et $\tau \in \mathcal{OP}_n^k(\overline{\lambda})$, on a

$$\mathrm{opb}(\tau) = \mathrm{cls}(\pi), \quad \mathrm{cls}(\tau) = \mathrm{opb}(\pi), \quad \mathrm{sb}(\tau) = \mathrm{sb}(\pi). \tag{1.73}$$

Proposition 1.47. *Pour toute partition* $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$,

$$\mathrm{cls}(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{clos}(\pi)} (n-i), \tag{1.74}$$

$$\mathrm{opb}(\pi) = \sum_{i \in \mathrm{open}(\pi)} (i-1), \tag{1.75}$$

$$\mathrm{sb}(\pi) = k - n + \sum_{i \in \mathcal{C}(\pi)} i - \sum_{i \in O(\pi)} i. \tag{1.76}$$

Démonstration. Les identités (1.74) et (1.75) sont immédiates. Supposons $\pi = B_1/\cdots/B_k$, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{sb}(\pi) &= \sum_{i=1}^{k} \#\{j \ : \min(B_i) < j < \max(B_i),\ j \notin B_i\} \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\max(B_i) - \min(B_i) + 1 - |B_i|) \\ &= k - n + \sum_{i=1}^{k} \max(B_i) - \sum_{i=1}^{k} \min(B_i).\end{aligned}$$

□

En utilisant les décompositions des statistiques de Steingrímsson (cf. Lemme 1.29 et Lemme 1.30) et les résultats de cette sous-section, on obtient les deux résultats suivants, qui concluent les preuves des Théorème 1.12 et Théorème 1.15.

THÉORÈME 1.48. *L'application Θ est une involution sur $\mathcal{OP}_n^k$ telle que pour tout $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$, $\mathrm{type}(\Theta(\pi)) = \overline{\mathrm{type}(\pi)}$, $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma) \implies \Theta(\pi) \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$ et*

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})(\Theta(\pi)) \\ &= (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})(\pi).\end{aligned} \tag{1.77}$$

En particulier, les statistiques

$$(\mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$$
$$\textit{et}\ (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bInv}, \mathrm{Mak} + \mathrm{bInv}, \mathrm{cinvLSB}, \mathrm{Inv})$$

sont équidistribuées sur $\mathcal{P}_n^k(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, et donc sur $\mathcal{OP}_n^k$.

THÉORÈME 1.49. *L'application $\Sigma : \mathcal{OP}_n^k \mapsto \mathcal{OP}_n^k$ est une involution sur $\mathcal{OP}_n^k$ telle que pour tout $\pi \in \mathcal{OP}_n^k$, $\mathrm{type}(\Sigma(\pi)) = \overline{\mathrm{type}(\pi)}$ et*

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})(\Sigma(\pi)) \\ &= (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})(\pi).\end{aligned} \tag{1.78}$$

En particulier, les statistiques

$$(\mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj}))$$
$$\textit{et}\ (\mathrm{Mak}' + \mathrm{bMaj}, \mathrm{Mak} + \mathrm{bMaj}, \mathrm{cmajLSB}, \mathrm{Maj})$$

équidistribuées sur $\mathcal{OP}_n^k$.

4.3. Preuve du Théorème 1.8.

On doit montrer que pour $\mathrm{Maf} \in \{\mathrm{Mak}, \mathrm{Mak}'\}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{Maf}+\mathrm{bInv})(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} = q^{k(k-1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{inv}(\sigma)} S_{p,q}(n,k). \tag{1.79}$$

L'identité suivante est une conséquence directe du Théorème 1.48 :

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{Mak}+\mathrm{bInv})(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv})(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)}. \tag{1.80}$$

En utilisant la décomposition des statistiques de Steingrímsson et le fait que pour tout $\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)$, on a $\mathrm{Inv}(\pi) = \mathrm{inv}(\sigma)$, on obtient

(1.81)

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{(\mathrm{Mak}'+\mathrm{bInv})(\pi)} q^{\mathrm{cinvLSB}(\pi)} = q^{k(k-1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} q^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} q^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} = S_{p,q}(n,k). \tag{1.82}$$

Une conséquence directe du Théorème 1.44 est que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k(\sigma)} p^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} q^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} p^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} q^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)}. \tag{1.83}$$

Or on a

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n^k} p^{\mathrm{opb}(\pi)+\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} q^{\mathrm{sb}(\pi)-\mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}}(\pi)} = S_{p,q}(n,k). \tag{1.84}$$

En effet, $\mathrm{lob} = \mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}} = 0$ sur $\mathcal{P}_n^k$, d'où l'on tire les identités fonctionnelles suivantes valables sur $\mathcal{P}_n^k$:

$$\begin{aligned} \mathrm{opb} + \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} &= \mathrm{rob} + \mathrm{rsb} = \mathrm{rcb}, \\ \mathrm{sb} - \mathrm{rsb}_{\mathcal{TC}} &= \mathrm{lsb} = \mathrm{lsb} + \mathrm{lob} = \mathrm{lcb}\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'identité (1.84) est exactement l'identité (1.24) de Wachs et White, ce qui conclut la preuve.

4.4. Preuve du Théorème 1.11.

Soit $\pi = B_1/B_2/\cdots/B_k$ une partition dans $\mathcal{P}_n^k$ avec $\mathcal{O} \cup \mathcal{S}(\pi) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}_<$. Rappelons que la *classe de réarrangements* $\mathcal{R}(\pi)$ de π est l'ensemble des partitions de $\mathcal{OP}_n^k$ obtenues en permutant les B_i's, i.e.,

$$\mathcal{R}(\pi) = \{B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_k\}.$$

L'objet de cette section est de montrer le Théorème 1.11, i.e., de démontrer que

$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Maj}(\tau)} = \sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Inv}(\tau)} = [k]_q!. \tag{1.85}$$

En utilisant le fait que $\mathrm{Inv} = \mathrm{ros}_{\mathcal{OS}}$, on obtient $\mathrm{Inv}(B_{\sigma(1)}/B_{\sigma(2)}/\cdots/B_{\sigma(k)}) = \mathrm{inv}(\sigma)$ d'où l'on déduit

$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Inv}(\tau)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = [k]_q!. \tag{1.86}$$

Il reste donc à montrer l'identité suivante :

$$\sum_{\tau \in \mathcal{R}(\pi)} q^{\mathrm{Maj}(\tau)} = [k]_q!. \tag{1.87}$$

Soit $C_k = \{(c_1, \ldots, c_k) : \ 0 \leq c_i \leq i-1\}$. Nous allons construire une bijection $\delta : \mathcal{R}(\pi) \mapsto C_k$ telle que pour tout $\tau \in \mathcal{R}(\pi)$ si $\delta(\tau) = \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in C_k$, on a $\mathrm{Maj}(\tau) = \sum_{i=1}^k c_i$. Il est clair qu'une telle correspondance implique (1.87).

Soit $\tau \in \mathcal{R}(\pi)$. On pose $\delta(\tau) = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ où l'entier c_j, $1 \leq j \leq k$, est défini par

$$c_j = \mathrm{rsb}_{i_j}(\tau) + \mathrm{bMaj}(T_{i_j}(\tau)) - \mathrm{bMaj}(T_{i_{j-1}}(\tau)).$$

Par définition de Maj, on a alors $\mathrm{Maj}(\tau) = \sum_i c_i$. Il est facile de montrer en utilisant le Lemme 1.27 que δ est bien définie de $\mathcal{R}(\pi)$ dans C_k. Pour montrer que δ est bijective, nous décrivons l'application inverse β.

Soit $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in C_k$. Nous allons construire une suite de traces $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que pour $i = 1, \ldots, n$, T_i est un réarrangement de la i-ième trace $T_i(\pi)$ de π. On aura alors $T_n \in \mathcal{R}(\pi)$ et on posera $\beta(\mathbf{c}) = T_n$.

La construction des T_i est définie récursivement par le procédé suivant :

(1) On pose $T_1 = T_1(\pi)$.

(2) Pour $i = 2, \ldots, n$, la trace T_i est obtenue de T_{i-1} de la manière suivante.
   - Si $i \in \mathcal{O}(\pi)$ (resp. $i \in \mathcal{S}(\pi)$), alors $i = i_j$. On ajoute alors le bloc $\{i, \infty\}$ (resp., $\{i\}$) dans T_{i-1} de telle sorte que $\mathrm{rsb}_i(T_i) + \mathrm{bMaj}(T_i) - \mathrm{bMaj}(T_{i-1}) = c_j$ (on utilise pour cette opération le Lemme 1.27).
   - Si $i \in \mathcal{T}(\pi)$ (resp. $i \in \mathcal{C}(\pi)$), on ajoute i (resp., remplace ∞ par i) dans le bloc actif de T_{i-1} dont l'ouvrant est égale à l'ouvrant du bloc de π qui contient i.

Il est facile de montrer que la construction des T_i, i.e. que l'application β, est bien définie et $\beta = \delta^{-1}$.

EXEMPLE 1.8. *Supposons* $\pi = 1\,4\,10/2\,8/3\,5\,7/6/9 \in \mathcal{P}_{10}^5$ *et* $\mathbf{c} = (0,0,2,3,4)$. *Alors* $\beta(\mathbf{c}) = 6/3\,5\,7/1\,4\,10/9/2\,8$. *On peut vérifier que* $\mathrm{rsb}_{\mathcal{OS}}(\beta(\mathbf{c})) = 5$ *et* $\mathrm{bMaj}(\beta(\mathbf{c})) = 4$ *et donc* $\mathrm{Maj}(\beta(\mathbf{c})) = 9$. *D'autre part, on a bien* $\sum_i c_i = 2+3+4 = 9$.

La suite des T_i *est donnée dans le tableau suivant.*

i	T_i
$1 = i_1 \quad c_1 = 0$	$\mathbf{1}\,\infty$
$2 = i_2 \quad c_2 = 0$	$1\,\infty/\mathbf{2}\,\infty$
$3 = i_3 \quad c_3 = 2$	$\mathbf{3}\,\infty/1\,\infty/2\,\infty$
4	$3\,\infty/1\,\mathbf{4}\,\infty/2\,\infty$
5	$3\,\mathbf{5}\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
$6 = i_4 \quad c_4 = 3$	$\mathbf{6}/3\,5\,\infty/1\,4\,\infty/2\,\infty$
7	$6/3\,5\,\mathbf{7}/1\,4\,\infty/2\,\infty$
8	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/2\,\mathbf{8}$
$9 = i_5 \quad c_5 = 4$	$6/3\,5\,7/1\,4\,\infty/\mathbf{9}/2\,8$
10	$6/3\,5\,7/1\,4\,\mathbf{10}/9/2\,8$

REMARQUE 1.50. *La preuve du Théorème 1.11 présentée dans cette section peut être vue comme une extension de la preuve de l'identité de MacMahon* (1.18) *utilisant les "table-*inv*" et "table-*maj*"* [**7, 82**] *des permutations.*

Foata (cf. [**25, 63**]*) donna la première preuve combinatoire directe de* (1.18) *par le biais de la* "seconde transformation fondamentale". *Nous présenterons dans la deuxième partie de ce travail (voir aussi* [**48**]*) une extension de la* "seconde transformation fondamentale", *ce qui fournira une nouvelle preuve combinatoire directe du Théorème 1.11.*

5. Remarques et conclusion

Il est possible, par exemple à l'aide d'une méthode de contraction (cf. e.g. [**44**]), d'obtenir le développement en fraction continue suivant :

$$\sum_{n,k} [k]_q! S_q(n,k)\, u^k\, z^n = \cfrac{1}{1 - b_0\, z - \cfrac{\lambda_1\, z^2}{1 - b_1\, z - \cfrac{\lambda_2\, z^2}{\ddots}}}, \tag{1.88}$$

où $b_n = uq^n[n+1]_q + [n]_q(1+uq^n)$, $\quad \lambda_n = uq^{n-1}[n]_q^2(1+uq^n)$.

Le cas $q = 1$ du développement (1.88) peut être démontrée en utilisant la théorie combinatoire des fractions continues [**22, 87**] et une bijection, que nous attribuons à Viennot [**87**, II 37-38], entre les arrangements préférentiels et certains chemins de Motzkin pondérés, les histoires de Meixner. En utilisant cette bijection, nous avons obtenu [**44**] de nouvelles statistiques (complexes) Euler-Mahoniennes sur les partitions ordonnées, mais il semble qu'elles appartiennent à une classe distincte des statistiques de Steingrímsson : elles sont définies en utilisant le modèle des arrangements préférentiels.

Une solution "naturelle" aux conjectures de Steingrímsson serait de déterminer des bijections entre les histoires de Meixner et les partitions ordonnées qui codent les statistiques de Steingrímsson. Ce problème reste ouvert. Notons toutefois que cette approche ne nous permettrait pas de retrouver les résultats obtenus dans ce chapitre. En effet, il n'y a pas de développements en fraction continue "agréable" pour la série génératrice des $[k]_t! S_{p,q}(n,k)$ (et même pour $[k]_p! S_{p,q}(n,k)$ ou $[k]_q! S_{p,q}(n,k)$). Enfin, signalons que le problème de déterminer une preuve combinatoire de (1.9) reste ouvert.

CHAPITRE 2

Classification des statistiques maj-inv mahoniennes sur les mots

Deux statistiques mahoniennes *par excellence* sur les mots et les permutations sont l'indice majeur et le nombre d'inversion. En 1996, Foata et Zeilberger ont introduit des généralisations de ces deux statistiques : les indices majeurs et les nombres d'inversions graphiques. Dans ce chapitre, nous étudions certains aspects des statistiques obtenues en un indice majeur et un nombre d'inversion graphiques. Ceci conduit à quelques extensions de résultats classiques. En particulier, nous caractériserons toutes les telles statistiques qui sont mahoniennes.

1. Introduction et résultats principaux

Soit X un alphabet fini. Sans perte de généralités, on peut supposer que $X = [r] := \{1, 2, \ldots, r\}$. Soit X^* le monoïde libre engendré par X, i.e., l'ensemble des mots dont les lettres appartiennent à X. Deux des statistiques les plus connues et étudiées sur les mots (et permutations) sont probablement le *nombre d'inversion* (inv) et l'*indice majeur* (maj). Elles sont définies sur les mots $w = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$ par

$$\mathrm{inv}(w) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i > x_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{maj}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1}),$$

où, pour une assertion A, $\chi(A) = 1$ si A est vraie et $\chi(A) = 0$ sinon, et " $>$ " est l'ordre naturel sur X, i.e. $r > r-1 > \cdots > 2 > 1$.

L'indice majeur a été introduit par MacMahon [**66**]. L'origine de la statistique nombre d'inversions sur les permutations n'est pas très clair (cf. [**27**] pour une discussion), mais d'après Foata et Krattenthaler, il semblerait que MacMahon [**66**] fut le premier à considerer les inversions de mots.

Soit $\mathbf{c} = (c(1), c(2), \ldots, c(r))$ une séquence d'entiers ≥ 0 et soit v le mot croissant $v = 1^{c(1)}2^{c(2)}\ldots r^{c(r)}$. Nous noterons $\mathcal{R}(v)$ (ou $\mathcal{R}(\mathbf{c})$ si il n'y a pas d'ambiguïté) la *classe de réarrangements* de v, i.e. l'ensemble de tous les mots obtenues en permutant les lettres de v. Un célèbre résultat de MacMahon établit que l'indice majeur et le nombre d'inversion sont équidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(\mathbf{c})$. Plus précisément, MacMahon montra que la distribution des statistiques maj et inv sur chaque $\mathcal{R}(\mathbf{c})$ est donnée par

$$\sum_{w\in\mathcal{R}(\mathbf{c})} q^{\mathrm{inv}(w)} = \sum_{w\in\mathcal{R}(\mathbf{c})} q^{\mathrm{maj}(w)} = \begin{bmatrix} c(1)+c(2)+\cdots+c(r) \\ c(1), c(2), \cdots, c(r) \end{bmatrix}_q \tag{2.1}$$

où, comme d'habitude en q-théorie, le coefficient q-multinomial est donné par

$$\begin{bmatrix} n_1+n_2+\cdots+n_k \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \end{bmatrix}_q = \frac{[n_1+n_2+\ldots+n_k]_q!}{[n_1]_q![n_2]_q!\cdots[n_k]_q!},$$

et le q-factoriel $[n]_q!$ par $[n]_q! := (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$. En particulier, en considérant le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r = \mathcal{R}(1\,2\cdots r) = \mathcal{R}(1,1,\ldots,1)$, on obtient le résultat suivant :

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = [r]_q! = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} q^{\mathrm{maj}(\sigma)}. \tag{2.2}$$

En l'honneur de MacMahon, une statistique équidistribuée avec inv (ou maj) sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(\mathbf{c})$ (ou chaque $\mathcal{R}(w)$) est dite *mahonienne*.

En 1996, Foata et Zeilberger [**31**] ont introduit des généralisations, indéxées par les relations sur X, des statistiques inv et maj. Rappelons qu'une *relation* U sur X est une partie du produit cartésien $X\times X$. Pour $a,b\in X$, si on a $(a,b)\in U$, on dit que a est en relation U à b, et on utilisera aussi la notation $a\mathrm{U}b$. Pour chaque relation U, associons les statistiques inv'_U et maj'_U définies sur les mots $w = x_1\ldots x_n$ de X^* par

$$\mathrm{inv}'_U(w) = \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i\mathrm{U}x_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{maj}'_U(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i\mathrm{U}x_{i+1}).$$

Par exemple, pour $U = \text{" } > \text{"}$ l'ordre naturel sur X, $\mathrm{maj}'_> = \mathrm{maj}$ et $\mathrm{inv}'_> = \mathrm{inv}$. Les statistiques maj'_U et inv'_U sont appelées *indice majeur graphique* et *nombre d'inversions graphique* car une relation sur X peut être représentée par un graphe orienté (digraphe) sur X.

Le résulat de MacMahon (2.1) motiva Foata et Zeilberger [**31**] à poser la question suivante :

Quelles sont les relations U sur X pour lesquelles les statistiques maj'_U *et* inv'_U *sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(\mathbf{c})$?*

Généralisant le résultat de MacMahon, Foata et Zeilberger ont entièrement caractérisé de telles relations. Pour présenter leur résultat, nous commençons par rappeler la définition suivante due à Foata et Zeilberger [**31**].

Définition 2.1. *Une relation U sur X est dite* bipartitionnable *si il existe une partition ordonnée $(B_1,B_2,\ldots,B_k)$ de X et une séquence $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$, $\beta_i\in\{0,1\}$, telles que $x\mathrm{U}y$ si et et seulement si (1) $x\in B_l$, $y\in B_{l'}$ et $l<l'$, ou (2) $x,y\in B_l$ et $\beta_l = 1$.*

On doit à Han [**42**] l'axiomatisation suivante des relations bipartitionnables.

Proposition 2.2. *Une relation U sur X est bipartitionnable si et seulement si (1) elle est transitive, i.e. $x\mathrm{U}y$ et $y\mathrm{U}z$ impliquent $x\mathrm{U}z$, et (2) pour tous $x,y,z\in X$, $x\mathrm{U}y$ et $z\not\mathrm{U}y$ impliquent $x\mathrm{U}z$.*

Foata et Zeilberger [**31**, Théorème 2] ont alors obtenu le résultat suivant.

Théorème A. *Soit U une relation sur X. Les statistiques* maj'_U *et* inv'_U *sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(\boldsymbol{c})$ si et seulement si U est bipartitionnable.*

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux statistiques obtenues en sommant un indice majeur graphique et un nombre d'inversion graphique. Pour motiver nos travaux, nous donnons deux exemples de telles statistiques. Le premier est l'*indice majeur de Rawlings*. Rawlings [**71**] a introduit des statistiques, dénotées k-maj ($k \geq 1$), interpolant l'indice majeur et le nombre d'inversion et définies pour les mots $w = x_1 \cdots x_n \in X^*$ par

$$k\text{-maj}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i \geq x_{i+1} + k) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi(x_j + k > x_i > x_j).$$

Notons que 1-maj = maj alors que r-maj = inv. Soient U_k et V_k, $k \geq 1$, les relations sur X définies par

$$U_k = \{(x, y) \in X^2 \,/\, x \geq y + k\} \quad \text{et} \quad V_k = \{(x, y) \in X^2 \,/\, y + k > x > y\}.$$

On a alors k-maj $= \mathrm{maj}'_{U_k} + \mathrm{inv}'_{V_k}$. Rawlings [**72**] montra que pour chaque entier $k \geq 1$, k-maj est une statistique mahonienne. En remarquant que $U_k \cup V_k$ correspond à l'ordre naturel "$>$" sur X, le résultat de Rawlings peut se récrire $\mathrm{maj}'_{U_k} + \mathrm{inv}'_{V_k}$ et $\mathrm{inv}'_{U_k \cup V_k}$ sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements.

La deuxième statistique est plus récente et définie sur les mots avec des lettres sur un alphabet différent. Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ une collection d'ensembles non-vide, finis et deux à deux disjoints, d'entiers positifs. En combinant deux statistiques introduites par Steingrïmsson [**85**], Zeng et l'auteur [**52**] (cf. Chapitre 1 de ce manuscript) ont défini une statistique, appelée Maj, sur les mots $\pi = B_1 B_2 \cdots B_k$ dont les lettres appartiennent à $\mathcal{A}$ par

$$\mathrm{Maj}(\pi) = \sum_{i=1}^{k-1} i.\chi(\min(B_i) > \max(B_{i+1})) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \chi(\max(B_j) \geq \min(B_i) > \min(B_j)).$$

Soient $U_{\mathcal{A}}$ et $V_{\mathcal{A}}$ les relations définies sur $\mathcal{A}$ par

$$(B, B') \in U_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \min(B) > \max(B'),$$
$$(B, B') \in V_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \max(B') \geq \min(B) > \min(B').$$

On a alors $\mathrm{Maj} = \mathrm{maj}'_{U_{\mathcal{A}}} + \mathrm{inv}'_{V_{\mathcal{A}}}$. Nous avons montré [**52**, Théorème 3.5] (voir aussi, chapitre 1, Théorème 1.11 de ce manuscript) que

$$\sum_{\pi \in \mathcal{R}(A_1 A_2 \cdots A_r)} q^{\mathrm{Maj}(\pi)} = [r]_q!. \tag{2.3}$$

Comme $U_{\mathcal{A}} \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}$ est un ordre total sur $\mathcal{A}$, il découle de (2.2) que la distribution de $\mathrm{inv}'_{U_{\mathcal{A}} \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}}}$ sur $\mathcal{R}(A_1 A_2 \cdots A_r)$ est égale au second membre de (2.3). On peut donc naturellement se demander si $\mathrm{maj}'_{U_{\mathcal{A}}} + \mathrm{inv}'_{V_{\mathcal{A}}}$ et $\mathrm{inv}'_{U_{\mathcal{A}} \cup V_{\mathcal{A}}}$ sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(w)$, $w \in \mathcal{A}^*$.

Plus généralement, en considérant les deux exemples précédents, on est conduit à se demander : *Pour quelles relations U et V sur X les statistiques* $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ *et* $\mathrm{inv}'_{U\cup V}$ *sont*

– *équidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(\boldsymbol{c})$?*

– *mahoniennes ?*

Nous allons répondre à ces questions en caractérisant entièrement de telles relations.

Pour alléger les notations, on introduit la définition suivante.

Définition 2.3. *Une statistique* stat *sur X^* est dite* statistique maj-inv *si il existe deux relations U et V sur X telles que* $\mathrm{stat} = \mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$.

Clairement, les statistiques inv, maj et k-maj sont des statistiques maj-inv sur X^*, alors que la statistique Maj est une statistique maj-inv sur $\mathcal{A}^*$.

Dans cette article, certaines relations sur X occupent un rôle central. Nous les appellerons *relations κ-extensibles.*

Définition 2.4. *Une relation U sur X est dite* κ-extensible *si il existe une relation S sur X telle que (1) $U \subseteq S$ et (2) pour tous $x, y, z \in X$, $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y \implies x\mathrm{S}z$ et $z \not\mathrm{S} x$.*

Une relation S sur X vérifiant les conditions (1) et (2) est appelée κ-extension *de U sur X.*

Exemple 2.1. *(a) Supposons $X = \{x, y, z\}$ et $U = \{(x, y)\}$. Alors $S = \{(x, y), (x, z)\}$ est une κ-extension de U sur X.*

(b) L'ordre naturel "$>$" est une κ-extension de la relation $U_k = \{(x, y) \in X^2 \,/\, x \geq y + k\}$ sur X pour tout $k \geq 1$.

(c) Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ une collection d'ensembles non-vides et finis d'entiers positifs, et soit $U_{\mathcal{A}}$ et $S_{\mathcal{A}}$ les relations définies sur $\mathcal{A}$ par $(B, B') \in U_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \min(B) > \max(B')$ et $(B, B') \in S_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \min(B) > \min(B')$. Alors on peut vérifier que $S_{\mathcal{A}}$ est une κ-extension de $U_{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A}$.

(d)Tout ordre total est une κ-extension de lui-même.

La notion de relation κ-extensible peut être vue comme une généralisation de la notion de relation bipartitionnable par le biais du résultat suivant.

Proposition 2.5. *Une relation U sur X est bipartitionnable si et seulement si elle est une κ-extension de elle-même.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.2, il suffit de montrer qu'une relation U est transitive si et seulement si $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$ impliquent $z \not\mathrm{U} x$.

Supposons que U soit transitive et soient x, y, z satisfaisant $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$. Supposons $z\mathrm{U}x$. Comme $x\mathrm{U}y$, on a par transitivité $z\mathrm{U}y$ ce qui contredit $z \not\mathrm{U} y$. On a donc bien $z \not\mathrm{U} x$.

Réciproquement, supposons que pour tous $x, y, z \in X$, $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$ impliquent $z \not\mathrm{U} x$. Soient $x_1, x_2, x_3 \in X$ vérifiant $x_1\mathrm{U}x_2$ et $x_2\mathrm{U}x_3$. Supposons $x_1 \not\mathrm{U} x_3$. Comme $x_2\mathrm{U}x_3$, on a alors $x_1 \not\mathrm{U} x_2$ ce qui est impossible. Donc $x_1\mathrm{U}x_3$ et U est transitive. □

On peut maintenant présenter le résultat clé de cette article, qui est une extension du Théorème A (par le biais de la proposition précédente).

THÉORÈME 2.6. *Soient U et S deux relations sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ *et* $\mathrm{inv}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U} = \mathrm{inv}'_S$ *sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements* $\mathcal{R}(\boldsymbol{c})$.

(ii) S est une κ-extension de U.

Soient U et V deux relations sur X non disjointes et soit $(x, y) \in U \cap V$. Par définition, $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V)(xy) = 1 + 1 = 2 > 1 \geq \mathrm{inv}'_{U\cup V}(xy)$. Il en résulte que si $U \cap V \neq \emptyset$, les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ et $\mathrm{inv}'_{U\cup V}$ ne sont pas équidistribuées sur $\mathcal{R}(xy)$. En combinant cette remarque et le Théorème 2.6, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2.7. *Soient U et V deux relations sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ *et* $\mathrm{inv}'_{U\cup V}$ *sont équidistribuées sur chaque classe de réarrangements* $\mathcal{R}(\boldsymbol{c})$.

(ii) $U \cap V = \emptyset$ et $\mathrm{U} \cup V$ *est une κ-extension de U.*

En remarquant que la statistique nombre d'inversion graphique inv'_S, S étant une relation sur X, est mahonienne si et seulement si S est un ordre total sur X, nous avons obtenu la caractérisation suivante des statistiques maj-inv mahoniennes.

THÉORÈME 2.8 (Classification des statistiques maj-inv mahoniennes I). *Les statistiques maj-inv mahoniennes sur X^* sont exactement celles qui s'écrivent* $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$, *où U et S satisfont les conditions suivantes :*

– *S est un ordre total sur X,*

– *S est une κ-extension de U.*

De plus, deux statistiques maj-inv mahoniennes $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ *et* $\mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T\setminus V}$ *sont égales sur X^* si et seulement si $S = T$ et $U = V$.*

EXEMPLE 2.2. *(a) D'après l'Exemple 2.1(b) et le Théorème 2.8, les statistiques k-*maj, *$k \geq 1$, sont mahoniennes. Ce résultat est due à Rawlings* [**72**].

(b) Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$ une collection d'ensembles non-vides et finis d'entiers positifs, et soient $U_{\mathcal{A}}$ et $S_{\mathcal{A}}$ les relations sur $\mathcal{A}$ définies dans l'Exemple 2.1(c). Il découle de l'Exemple 2.1(c) et le Théorème 2.8 que Maj *est mahonienne sur $\mathcal{A}^*$. Ce résultat est une extension de* (2.3) *(et donc du Théorème 1.11).*

En caractérisant les relations κ-extensibles (voir Proposition 2.19 et la Proposition 2.24), nous avons obtenu des résultats plus précis sur les statistiques maj-inv mahoniennes.

THÉORÈME 2.9 (Classification des statistiques maj-inv mahoniennes II). *Les statistiques maj-inv mahoniennes sur X^* sont exactement les statistiques* $\mathrm{stat}_{f,g}$ *definies sur les mots $w = x_1 \cdots x_n \in X^*$ par*

$$\mathrm{stat}_{f,g}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(\, f(x_i) \geq g(f(x_{i+1}))\,) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(\, g(f(x_j)) > f(x_i) > f(x_j)\,),$$

où f est une permutation de X et $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ une application satisfaisant $g(y) > y$ pour tout $y \in X$.

En prenant $f = Id$, où Id est l'application identité de X, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.10. *Les statistiques* stat_g *définies sur les mots $w = x_1 \cdots x_n \in X^*$ par*

$$\mathrm{stat}_g(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(\, x_i \geq g(x_{i+1})\,) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi(\, g(x_j) > x_i > x_j\,),$$

où $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ est une application satisfaisant $g(y) > y$ pour tout $y \in X$, sont mahoniennes sur X^*.

Par exemple, l'indice majeur de Rawlings k-maj est obtenu en prenant $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ définie par $g(x) = x + k$ si $x + k \leq r$ et $g(x) = \infty$ sinon.

Il est maintenant facile d'énumérer les statistiques maj-inv mahoniennes sur X^*. En effet, il y a exactement $|X|!$ ordres totaux sur X et $|X|!$ applications $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ satisfaisant $g(y) > y$. On a donc le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.11. *Il y a exactement $(|X|!)^2$ statistiques maj-inv mahoniennes sur X^*.*

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Les section 2 et section 3 sont dédiées à la preuve du Théorème 2.6. Dans la section 4, nous démontrons le Théorème 2.8. Dans la section 5, nous étudierons les relations κ-extensible sur X. On en obtiendra une caractérisation d'où découlera, voir section 6, le Théorème 2.9. Finallement, dans la section 7, nous appliquons les résultats de cet aticle pour présenter de nouvelles statistiques mahoniennes "originales" sur les permutations et mots.

2. Preuve de la partie 'si' du Theorème 2.6

La première preuve combinatoire directe du résultat de MacMahon (2.1) sur l'équidistribution des statistiques maj et inv, c'est à dire une bijection qui envoie chaque mot sur un mot dont le nombre d'inversions est égal à l'indice majeur de l'original, est due à Foata [**25**].

Soit U une relation κ-extensible sur X. Dans cette section, nous allons adapter la transformation de Foata, aussi appelée *"seconde transformation fondamentale"* (voir e.g. [**63**]), pour construire une bijection Ψ^U de chaque classe de réarrangements sur elle-même telle que pour chaque κ-extension S de U, on a

$$\mathrm{inv}'_S(\Psi^U(w)) = (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w). \tag{2.4}$$

2.1. Notations. La *longueur* d'un mot $w \in X^*$, dénotée par $\lambda(w)$, est son nombre de lettres. Par convention, il existe un unique mot de longueur 0, *le mot vide* ϵ. Si Y et Z sont deux parties de X^*, nous désignerons par YZ l'ensemble des mots w qui s'écrivent sous la forme $w = w'w''$, avec $w' \in Y$ et $w'' \in Z$.

Chaque $x \in X$ détermine une partition de X en deux sous-ensembles L_x et R_x, où l'ensemble R_x est formé des éléments $y \in X$ satisfaisant $y\mathrm{U}x$, et l'ensemble L_x est formé des $y \in X$ satisfaisant $y \not\mathrm{U} x$.

Soit $w \in X^*$. On dira que la séquence $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$, $w_i \in X^*$, est une *factorisation* de w si $w = w_1 w_2 \cdots w_k$.

2.2. L'application Ψ^U. Soit w un mot de X^*. Si $\lambda(w) \leq 1$, on pose $\gamma_x^U(w) = w$. Sinon, on considére deux cas :

(i) la dernière lettre de w appartient à R_x,

(ii) la dernière lettre de w appartient à L_x.

Soit $(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_hx_h)$ la factorisation de w ayant les propriétés suivantes :

- Dans le cas (i), $x_1, x_2, \ldots, x_h$ appartiennent à R_x et $w_1, w_2, \ldots, w_h$ sont des mots de L_x^*.
- Dans le cas (ii), $x_1, x_2, \ldots, x_h$ appartiennent à L_x et $w_1, w_2, \ldots, w_h$ sont des mots de R_x^*.

On appellera *x-factorisation* la factorisation décrite ci-dessus. Il est clair que tout mot admet une unique x-factorisation. Dans les deux cas, nous avons $w = w_1x_1w_2x_2 \ldots w_sx_s$. On définit alors

$$\gamma_x^U(w) = x_1w_1x_2w_2 \ldots x_sw_s.$$

L'application Ψ^U est alors définie par récurrence sur la longueur des mots de la manière suivante :

$$\Psi^U(\epsilon) = \epsilon\ , \tag{2.5}$$

$$\Psi^U(wx) = \gamma_x^U(\Psi^U(w))\, x \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } w \in X^*. \tag{2.6}$$

REMARQUE 2.12. *La seconde transformation fondamentale correspond au cas où U est un ordre total sur X.*

THÉORÈME 2.13. *L'application $\Psi^U : X^* \mapsto X^*$ est une bijection telle que pour tout $w \in X^*$,*

(a) $\Psi^U(w) \in \mathcal{R}(w)$,

(b) les mots w et $\Psi^U(w)$ finissent par la même lettre,

(c) pour chaque κ-extension S de U,

$$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(\Psi^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(w). \tag{2.7}$$

La preuve du théorème précédent est essentiellement (par la méthode) la même que celle concernant la seconde transformation fondamentale [**25, 63**]. Elle est basée sur le lemme suivant.

Soit S une κ-extension de U. Pour chaque $w = x_1 \ldots x_n \in X^*$, le nombre d'indices j pour lesquels $x_j \in L_x$ (resp. $x_j \in R_x$) sera noté $l_x(w)$ (resp. $r_x(w)$) et $t_x(w)$ désignera le nombre d'indices j pour lesquels $x_j \not\mathrm{U} x$ et $x_j\mathrm{S}x$. Remarquons que l'on a toujours

$l_x(w) + r_x(w) = \lambda(w)$, alors que $r_x(w) + t_x(w)$ est le nombre d'indices j pour lesquels $x_j \mathrm{S} x$.

LEMME 2.14. *Pour tout $w \in X^*$ et $x \in X$, on a :*

$$\mathrm{inv}'_S(wx) = \mathrm{inv}'_S(w) + r_x(w) + t_x(w), \tag{2.8}$$

$$\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(w) - r_x(w) \qquad si\ w \in X^*L_x,, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(w) + l_x(w) \qquad si\ w \in X^*R_x. \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(wx) = (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) + t_x(w) \qquad si\ w \in X^*L_x, \tag{2.11}$$

$$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(wx) = (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) + t_x(w) + \lambda(w)\ si\ w \in X^*R_x. \tag{2.12}$$

Démonstration. Par définition des statistiques graphiques, on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}'_U(wx) &= \mathrm{inv}'_U(w) + r_x(w) \\
\mathrm{inv}'_{S\setminus U}(wx) &= \mathrm{inv}'_{S\setminus U}(w) + t_x(w) \\
\mathrm{maj}'_U(wx) &= \mathrm{maj}'_U(w) \qquad \text{si } w \in X^*L_x, \\
\mathrm{maj}'_U(wx) &= \mathrm{maj}'_U(w) + \lambda(w) \quad \text{si } w \in X^*R_x,
\end{aligned}$$

d'où découlent immédiatement (2.11) et (2.12). Pour obtenir (2.8), il suffit de remarquer que $\mathrm{inv}'_S = \mathrm{inv}'_U + \mathrm{inv}_{S\setminus U}$ (car $U \cap (S \setminus U) = \emptyset$ et $U \subseteq S$). Il reste donc à montrer (2.9) et (2.10).

Supposons $w \in X^*L_x$ et soit $(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_sx_s)$ la x-factorisation de w. Admettons que l'on ait

$$\mathrm{inv}'_S(x_iw_i) = \mathrm{inv}'_S(w_ix_i) - \lambda(w_i) \quad \text{pour } 1 \le i \le s. \tag{2.13}$$

Par définition, $\gamma_x^U(w) = x_1w_1x_2w_2 \cdots x_hw_h$. Il n'est pas alors difficile de montrer que $\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(w))$ est égal à $\mathrm{inv}'_S(wx)$ moins $\lambda(w_1) + \lambda(w_2) + \cdots + \lambda(w_s) = \lambda(w) - s$. Comme $s = l_x(w)$, on obtient

$$\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(wx) - (\lambda(w) - l_x(w)) = \mathrm{inv}'_S(wx) - r_x(w),$$

qui est exactement (2.9). Nous allons maintenant prouver (2.13). Soit $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_m \in R_x^*$ et $y \in L_x$. Par définition, on a $\tau_i \mathrm{U} x$ pour chaque i et $y \not\mathrm{U} x$. Comme S est une κ-extension de U, pour chaque i, on a $\tau_i \mathrm{S} y$ et $y \not\mathrm{S} \tau_i$. Il en découle que $\mathrm{inv}'_S(y\tau) = \mathrm{inv}'_S(\tau)$ et $\mathrm{inv}'_S(\tau y) = \mathrm{inv}'_S(\tau) + m = \mathrm{inv}'_S(y\tau) + \lambda(\tau)$. L'équation (2.13) est alors obtenue en remarquant que dans la x-factorisation de $w \in X^*L_x$, les mots $w_1, \ldots, w_h$ sont dans R_x^* et les lettres $x_1, \ldots, x_h$ dans L_x.

L'équation (2.10) a une preuve similaire. Supposons $w \in X^*R_x$ et soit $(w_1x_1, w_2x_2, \ldots, w_hx_h)$ la x-factorisation de w. Admettons que l'on ait

$$\mathrm{inv}'_S(x_iw_i) = \mathrm{inv}'_S(w_ix_i) + \lambda(w_i) \quad \text{pour } 1 \le i \le h. \tag{2.14}$$

Par définition, $\gamma_x^U(w) = x_1w_1x_2w_2 \cdots x_hw_h$. Il n'est pas alors difficile de montrer que $\mathrm{inv}'_S(\gamma_x(w))$ est égal à $\mathrm{inv}'_S(wx)$ moins $\lambda(w_1) + \lambda(w_2) + \cdots + \lambda(w_h) = \lambda(w) - h$. Comme

$h = r_x(w)$, on obtient

$$\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(wx) - (\lambda(w) - r_x(w)) = \mathrm{inv}'_S(wx) + l_x(w),$$

qui est exactement (2.10). Nous allons maintenant prouver (2.14). Soit $\tau = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m \in L_x^*$ et $y \in R_x$. Par définition, on a $y\mathrm{U}x$ et $\tau_i \not\mathrm{U} x$ pour chaque i. Comme S est une κ-extension de U, pour chaque i, $y\mathrm{S}\tau_\mathrm{i}$. Il en découle que $\mathrm{inv}'_S(\tau y) = \mathrm{inv}'_S(\tau)$ et $\mathrm{inv}'_S(y\tau) = \mathrm{inv}'_S(\tau) + m = \mathrm{inv}'_S(\tau y) + m$. L'équation (2.14) est obtenue en remarquant que dans la x-factorisation de $w \in X^*R_x$, les mots $w_1, \ldots, w_h$ sont dans L_x^* et les lettres $x_1, \ldots, x_h$ dans R_x.

□

Preuve du Théorème 2.13. Il est immédiat, par définition de Ψ^U (voir (2.5)-(2.6)), que pour tout $w \in X^*$, les mots w et $\Psi^U(w)$ ont leur dernière lettre en commun. Il est aussi facile de montrer que pour tout $x \in X^*$, on a $\gamma_x^U(\mathcal{R}(w)) = \mathcal{R}(w)$ et donc, par une récurrence dont nous laissons les détails au lecteur, on a $\Psi^U(w) \in \mathcal{R}(w)$.

Soit X_n l'ensemble des mots de X^* de longueur n. Il reste à montrer que pout tout $n \geq 0$, la restriction Ψ_n^U de Ψ^U sur X_n est une permutation de X_n telle que

$$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(\Psi_n^U(w)) = \mathrm{inv}'_S(w) \quad \text{pour tout } w \in X_n. \tag{2.15}$$

Par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est évident. Soit $n \geq 0$. Supposons que Ψ_n^U est une permutation de X_n satisfaisant (2.15). Par définition de Ψ^U,

$$\Psi_{n+1}^U(wx) = \gamma_x^U(\Psi_n^U(w))\, x \quad \text{pour tout w} \in X_n \text{ et } x \in X. \tag{2.16}$$

Comme les γ_x^U, $x \in X$, sont des permutations de X^* qui conservent la longueur (on peut facilement construire une bijection inverse, les détails étant laissés au lecteur), et que Ψ_n^U est une permutation de X_n (hypothèse de récurrence), il découle facilement de (2.16) que Ψ_{n+1} est une permutation de X_{n+1}.

Soit $w \in X_{n+1}$. Il existe alors $\tau \in X_n$ et $x \in X$ tel que $w = \tau x$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}'_S(\Psi_{n+1}^U(w) &= \mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))x) \quad \text{par (2.16)} \\
&= \mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))) + t_x(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))) + r_x(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))) \quad \text{par (2.8)} \\
&= \mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))) + t_x(\tau) + r_x(\tau) \quad \text{car } \gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau)) \in \mathcal{R}(\tau).
\end{aligned}$$

Deux cas doivent être considérés :

(i) $\tau \in X^*L_x$,

(ii) $\tau \in X^*R_x$.

Cas (i). Supposons que $\tau \in X^*L_x$. Comme τ et $\Psi_n^U(\tau) = \Psi^U(\tau)$ finissent par la même lettre, $\Psi_n^U(\tau) \in X^*L_x$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}'_S(\gamma_x^U(\Psi_n^U(\tau))) &= \mathrm{inv}'_S(\Psi_n^U(\tau)) - r_x(\Psi_n^U(\tau)) \quad \text{par (2.9)} \\
&= \mathrm{inv}'_S(\Psi_n^U(\tau)) - r_x(\tau) \quad \text{car } \Psi_n^U(\tau) \in \mathcal{R}(\tau).
\end{aligned}$$

Finallement, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}'_S(\Psi^U_{n+1}(w)) &= \mathrm{inv}'_S(\Psi^U_n(\tau)) + t_x(\tau)\\ &= (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(\tau) + t_x(\tau) \quad \text{par récurrence}\\ &= (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) \quad \text{par (2.11).}\end{aligned}$$

Cas (ii). Supposons que $\tau \in X^*R_x$. Alors, de la même manière que dans le cas (i), on a $\Psi_n(\tau) \in X^*R_x$ et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}'_S(\gamma^U_x(\Psi^U_n(\tau))) &= \mathrm{inv}'_S(\Psi^U_n(\tau)) + l_x(\Psi^U_n(\tau)) \quad \text{par (2.10)}\\ &= \mathrm{inv}'_S(\Psi^U_n(\tau)) + l_x(\tau) \quad \text{car } \Psi^U_n(\tau) \in \mathcal{R}(\tau).\end{aligned}$$

Finallement, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}'_S(\Psi^U_{n+1}(w)) &= \mathrm{inv}'_S(\Psi^U_n(\tau)) + t_x(\tau) + l_x(\tau) + r_x(\tau)\\ &= \mathrm{inv}'_S(\Psi^U_n(\tau)) + t_x(\tau) + \lambda(\tau)\\ &= (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(\tau) + t_x(\tau) + \lambda(\tau) \quad \text{par récurrence}\\ &= (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) \quad \text{par (2.12).}\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

3. Preuve de la partie 'seulement si' du Théorème 2.6

Soient U et S deux relations sur X telles que les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sont equidistribuées sur chaque classe de réarrangements $\mathcal{R}(w)$, $w \in X^*$. Nous allons montrer que ceci implique que S est une κ-extension de U.

3.1. La relation U est contenue dans S. Par définition des statistiques graphiques, on a $\mathrm{maj}'_U(w) = \mathrm{inv}'_U(w)$ pour tout mot w de longueur 2. Par ailleurs, pour toute paire (A, B) de relations disjointes, on a $\mathrm{inv}'_A + \mathrm{inv}'_B = \mathrm{inv}'_{A\cup B}$. Il en découle que pour tout tout mot w de longueur 2,

$$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) = (\mathrm{inv}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w) = \mathrm{inv}'_{S\cup U}(w) = (\mathrm{inv}'_S + \mathrm{inv}'_{U\setminus S})(w).$$

L'équidistribution des statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur les classes de réarrangements $\mathcal{R}(w)$, $\lambda(w) = 2$, entraîne alors que $\mathrm{inv}'_{U\setminus S}(w) = 0$ pour tout $w \in X^*$, $\lambda(w) = 2$, et donc $U \setminus S = \emptyset$, i.e., $U \subseteq S$.

3.2. Si $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$, alors $x\mathrm{S}z$ et $z \not\mathrm{S} x$. Posons $V := S \setminus U$, i.e. $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = S$ (car $U \subseteq S$). Pour tout $x_1, x_2 \in X$, on a donc

$$\chi(x_1\mathrm{S}x_2) = \chi(\mathrm{x_1Ux_2}) + \chi(\mathrm{x_1Vx_2}) \quad \text{et} \quad \chi(\mathrm{x_1Ux_2}).\chi(\mathrm{x_1Vx_2}) = 0. \tag{2.17}$$

Soit $x, y, z \in X$ satisfaisant $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$. D'abord, on peut remarquer que x et z sont distincts (sinon $x\mathrm{U}y$ et $x \not\mathrm{U} y$), i.e. $x \neq z$. On distingue plusieurs cas.

3.2.1. *Le cas $x = y$.* On a alors $x\mathrm{U}x$ (donc $x \not\mathrm{V} x$) et $z \not\mathrm{U} x$. Il s'ensuit que $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxx) = \chi(z\mathrm{U}x) + 2\chi(x\mathrm{U}x) + 2\chi(z\mathrm{V}x) + \chi(x\mathrm{V}x) = 2 + 2\chi(z\mathrm{V}x)$. Comme $\mathrm{inv}'_S(w) \leq 3$ pour tout mot w de longueur 3, l'équidistribution de nos statistiques implique que $\chi(z\mathrm{V}x) = 0$, i.e. $z \not\mathrm{V} x$. Or $z \not\mathrm{U} x$, et donc $z \not\mathrm{S} x$.

Supposons $x \not\mathrm{S} z$. On a alors $\mathrm{inv}'_S(xxz) = \mathrm{inv}'_S(xzx) = \mathrm{inv}'_S(zxx) = 1 < 2 = (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxx)$, ce qui contredit l'équidistribution de $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(x^2z)$. On a donc $x\mathrm{S}z$ et $z \not\mathrm{S} x$, comme voulue.

3.2.2. *Le cas $x \neq y$.* On distingue deux cas.

Supposons $y = z$. On a alors $x\mathrm{U}z$ et $z \not\mathrm{U} z$. Comme $U \subseteq S$, on a $x\mathrm{S}z$. Il suffit donc de montrer $z \not\mathrm{S} x$. Par l'absurde. Supposons $z\mathrm{S}x$. On a alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxz) &= \chi(z\mathrm{U}x) + 2\chi(x\mathrm{U}z) + \chi(z\mathrm{V}x) + \chi(z\mathrm{V}z) + \chi(x\mathrm{V}z)\\ &= 2 + \chi(z\mathrm{U}x) + \chi(z\mathrm{V}x) + \chi(z\mathrm{V}z) = 2 + \chi(z\mathrm{S}x) + \chi(z\mathrm{V}z)\\ &= 3 + \chi(z\mathrm{V}z).\end{aligned}$$

Il s'ensuit $z \not\mathrm{V} z$, et comme $z \not\mathrm{U} z$, on a $z \not\mathrm{S} z$. Il en découle que $\mathrm{inv}'_S \leq 2$ sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(xz^2)$ ce qui, en considérant l'identité $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxz) = 3$, contredit l'équidistribution de $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(xz^2)$. On a donc bien $z \not\mathrm{S} x$, comme voulue. Il reste donc à considérer le dernier cas.

Supposons $y \neq z$. Alors *x, y, z sont 3 éléments distincts* satisfaisant $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$. Le tableau suivant donne la distribution des statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(xyz)$ après quelques simplifications obtenues en utilisant (2.17).

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathrm{S}z) + \chi(y\mathrm{U}z) + \chi(x\mathrm{V}z)$	$1 + \chi(x\mathrm{S}z) + \chi(y\mathrm{S}z)$
xzy	$\chi(x\mathrm{S}z) + \chi(z\mathrm{V}y)$	$1 + \chi(x\mathrm{S}z) + \chi(z\mathrm{V}y)$
yxz	$\chi(y\mathrm{S}x) + \chi(x\mathrm{S}z) + \chi(x\mathrm{U}z) + \chi(y\mathrm{V}z)$	$\chi(y\mathrm{S}x) + \chi(y\mathrm{S}z) + \chi(x\mathrm{S}z)$
yzx	$\chi(y\mathrm{S}z) + \chi(z\mathrm{S}x) + \chi(z\mathrm{U}x) + \chi(y\mathrm{V}x)$	$\chi(y\mathrm{S}z) + \chi(y\mathrm{S}x) + \chi(z\mathrm{S}x)$
zxy	$2 + \chi(z\mathrm{S}x) + \chi(z\mathrm{V}y)$	$1 + \chi(z\mathrm{S}x) + \chi(z\mathrm{V}y)$
zyx	$\chi(y\mathrm{S}x) + \chi(y\mathrm{U}x) + \chi(z\mathrm{V}y) + \chi(z\mathrm{V}x)$	$\chi(z\mathrm{V}y) + \chi(z\mathrm{S}x) + \chi(y\mathrm{S}x)$

(a) Supposons que $x\mathrm{S}z$ et $z\mathrm{S}x$. On a alors $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxy) = 3 + \chi(z\mathrm{V}y)$ et comme $\mathrm{inv}'_S \leq 3$ sur $\mathcal{R}(xyz)$, on en déduit $z \not\mathrm{V} y$ et donc $z \not\mathrm{S} y$. En utilisant les identités $x\mathrm{S}z$, $z\mathrm{S}x$ et $z \not\mathrm{S} y$, on obtient le tableau suivant.

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{yUz}) + \chi(\mathrm{xVz})$	$2 + \chi(y\mathrm{Sz})$
xzy	1	2
yxz	$1 + \chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{xUz}) + \chi(\mathrm{yVz})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
yzx	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{zUx}) + \chi(\mathrm{yVx})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
zxy	3	2
zyx	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yUx}) + \chi(\mathrm{zVx})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sx})$

Supposons $y\mathrm{Sx}$. Alors, ceci implique d'après le tableau ci-dessus que $\mathrm{inv}'_S \geq 2$ sur $\mathcal{R}(xyz)$ et $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(xzy) = 1$, ce qui contredit l'équidistribution de $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur la classe de réarrangements $\mathcal{R}(xyz)$. On a donc $y \not\mathcal{S} x$. On obtient alors le tableau suivant.

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{yUz}) + \chi(\mathrm{xVz})$	$2 + \chi(y\mathrm{Sz})$
xzy	1	2
yxz	$1 + \chi(x\mathrm{U}z) + \chi(y\mathrm{V}z)$	$1 + \chi(y\mathrm{Sz})$
yzx	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{zUx}) + \chi(\mathrm{yVx})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sz})$
zxy	3	2
zyx	$\chi(z\mathrm{V}x)$	1

Comme $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxy) = 3$, on obtient, en utilisant l'équidistribution des statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et inv'_S sur $\mathcal{R}(xyz)$, $y\mathrm{Sz}$. Il en découle que zyx est le seul mot de $\mathcal{R}(xyz)$ pour lequel $\mathrm{inv}'_S(zyx) = 1$, alors que $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zyx) \leq (\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(xzy) \leq 1$, ce qui contredit l'équidistribution de nos deux statistiques sur $\mathcal{R}(xyz)$. On ne peut donc pas avoir $x\mathrm{Sz}$ et $z\mathrm{Sx}$.

(b) Supposons $x \not\mathcal{S} z$ et $z\mathrm{Sx}$. Par un raisonnement analogue au cas (a), on obtient $z \not\mathcal{V} y$, et donc $z \not\mathcal{S} y$. On obtient alors le tableau suivant.

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathcal{S}z) + \chi(y\mathrm{U}z)$	$1 + \chi(y\mathrm{Sz})$
xzy	0	1
yxz	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yVz})$	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
yzx	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{zUx}) + \chi(\mathrm{yVx})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
zxy	3	2
zyx	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yUx}) + \chi(\mathrm{zVx})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sx})$

Comme $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxy) = 3$, on doit avoir $y\mathrm{Sz}$ et $y\mathrm{Sx}$, et donc $\mathrm{inv}'_S \geq 1$ sur $\mathcal{R}(xyz)$. Par ailleurs, on a $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(xzy) = 0$, ce qui contredit l'équidistribution de nos deux statistiques sur $\mathcal{R}(xyz)$. On ne peut donc pas avoir $x \not\mathcal{S} z$ et $z\mathrm{Sx}$.

(c) Supposons $x \not S z$ et $z \not S x$. On a alors le tableau suivant.

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{yUz})$	$1 + \chi(y\mathrm{Sz})$
xzy	$\chi(z\mathrm{V}y)$	$1 + \chi(z\mathrm{V}y)$
yxz	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yVz})$	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
yzx	$\chi(y\mathrm{Sz}) + \chi(\mathrm{yVx})$	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{ySz})$
zxy	$2 + \chi(z\mathrm{V}y)$	$1 + \chi(z\mathrm{V}y)$
zyx	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yUx}) + \chi(\mathrm{zVy})$	$\chi(z\mathrm{V}y) + \chi(y\mathrm{Sx})$

On en déduit $\mathrm{inv}'_S \leq 2$ sur $\mathcal{R}(xyz)$, et donc, en considérant $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxy)$ et $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(xyz) = 1 + 2\chi(y\mathrm{U}z) + \chi(y\mathrm{V}z)$, on doit avoir $y \not U z$ et $z \not V y$, ce qui conduit au tableau suivant.

w	$(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(w)$	$\mathrm{inv}'_S(w)$
xyz	$1 + \chi(y\mathrm{V}z)$	$1 + \chi(y\mathrm{V}z)$
xzy	0	1
yxz	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yVz})$	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yVz})$
yzx	$\chi(y\mathrm{V}z) + \chi(y\mathrm{V}x)$	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yVz})$
zxy	2	1
zyx	$\chi(y\mathrm{Sx}) + \chi(\mathrm{yUx})$	$\chi(y\mathrm{Sx})$

Comme $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(xzy) = 0$, on doit avoir $y \not S x$, et donc $\mathrm{inv}'_S \leq 1$ sur $\mathcal{R}(xyz)$. Par ailleurs, on a $(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U})(zxy) = 2$, contredit l'équidistribution de nos deux statistiques sur $\mathcal{R}(xyz)$. On ne peut donc pas avoir $x \not S z$ et $z \not S x$.

(d) On a donc forcément $x\mathrm{Sz}$ et $z \not S x$. La relation S est donc bien une κ-extension de U. Ceci conclut la preuve de la partie "seulement si" du Théorème 2.6.

4. Statistiques maj-inv mahoniennes I

Dans cette section, nous démontrons le Théorème 2.8. La preuve repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 2.15. *Soit S une relation sur X. La statistique* inv'_S *est mahonienne sur X^* si et seulement si S est un ordre total.*

Démonstration. Il suffit de montrer que inv'_S est mahonienne implique que S est un ordre total car la réciproque est une conséquence immédiate de (2.1). Supposons donc que inv'_S est mahonienne, i.e. pour chaque $\mathbf{c}$,

$$\sum_{\mathrm{w}\in\mathcal{R}(\mathbf{c})} q^{\mathrm{inv}'_S(\mathrm{w})} = \begin{bmatrix} c(1) + c(2) + \cdots + c(r) \\ c(1), c(2), \cdots, c(r) \end{bmatrix}_q . \tag{2.18}$$

(a) S est total. Par l'absurde. Supposons qu'ils existent $x, y \in X$, $x \neq y$, tels que $x \not S y$ et $y \not S x$. On a alors $\mathrm{inv}'_S(xy) = \mathrm{inv}'_S(yx) = 0$, ce qui contredit (2.18) (prendre $\mathrm{w} = xy$). Il s'ensuit que pour chaque $x, y \in X$, nous avons $x\mathrm{Sy}$ ou $y\mathrm{Sx}$, i.e. S est total.

(b) S est irréflexive. Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $x\mathrm{Sx}$. Alors $\mathrm{inv}'_S(xx) = 1$ ce qui contredit (2.18) (prendre $\mathrm{w} = x^2$). Donc $x \not S x$ et S est irréflexive.

(c) S est antisymétrique. Par l'absurde. Supposons qu'ils existent $x, y \in X$, $x \neq y$, tels que $x\mathrm{Sy}$ et $y\mathrm{Sx}$. On a alors $\mathrm{inv}'_S(xy) = \mathrm{inv}'_S(yx) = 1$ ce qui contredit (2.18) (pendre $\mathrm{w} = xy$). S est donc antisymétrique.

(d) S est transitive. Par l'absurde. Soient $x, y \in X$ satisfaisant $x\mathrm{Sy}$ et $y\mathrm{Sz}$. Supposons que $x \not S z$. Comme S est irréflexive, on a $x \neq y$ et $y \neq z$. Comme S est antisymétrique, on a aussi $x \neq z$ (sinon on aurait $x\mathrm{Sy}$ et $y\mathrm{Sx}$). On a donc que les éléments x, y, z sont distincts. Par antisymétrie de S, on a $y \not S x$ et $z \not S y$, et comme S est total, on a $z\mathrm{Sx}$. Après quelques calculs simples, dont les détails sont omis, on obtient

$$\sum_{\mathrm{w} \in \mathcal{R}(xyz)} q^{\mathrm{inv}'_S(\mathrm{w})} = 3q + 3q^2 \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 1, 1, 1 \end{bmatrix}_q = 1 + 2q + 2q^2 + q^3,$$

ce qui contredit (2.18) (prendre $\mathrm{w} = xyz$). On a donc $x\mathrm{Sz}$, et donc S est transitive.

□

Lemme 2.16. *Soient U et V deux relations sur X. Supposons que la statistique $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ est mahonienne sur X^*. Alors, $U \cap V = \emptyset$, $S := U \cup V$ est un ordre total et une κ-extension de U.*

Démonstration. Supposons que $U \cap V \neq \emptyset$ et soit $(x, y) \in U \cap V$. On a alors $\mathrm{maj}'_U(xy) + \mathrm{inv}'_V(xy) = 1 + 1 = 2$, ce qui contredit (2.18) (prendre $\mathrm{w} = xy$ si $x \neq y$ et $\mathrm{w} = xx$ si $x = y$). Les relations U et V sont bien disjointes.

La preuve de "S est un ordre total sur X" est essentiellement la même que celle du Lemme 2.15. Les détails sont donc laissés au lecteur.

Il reste donc à montrer $S = U \cup V$ est une κ-extension de U. Comme S est total, il découle du Lemme 2.15 que inv'_S est mahonienne sur X^*. En appliquant la partie "(i) implique (ii)" du Théorème 2.6 aux statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ et inv'_S, on obtient alors que S est une κ-extension de U, comme souhaité.

□

Il est maintenant facile de démontrer notre Théorème 2.8, que nous rappelons ci-dessous par commodité.

Théorème 2.17. *Les statistiques maj-inv mahoniennes sur X^* sont exactement celles qui s'écrivent $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S \setminus U}$, où U et S satisfont les conditions suivantes :*

- *S est un ordre total sur X,*
- *S est une κ-extension de U.*

De plus, deux statistiques maj-inv mahoniennes $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S \setminus U}$ et $\mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T \setminus V}$ sont égales sur X^* si et seulement si $S = T$ et $U = V$.

Démonstration. L'équivalence est une conséquence des Lemmes 2.15 et 2.16. En effet, supposons que S est un ordre total sur X et une κ-extension de U. Alors, il découle du

Théorème 2.6 que $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ est equidistribuée avec inv'_S, qui est mahonienne par le Lemme 2.15. La statistique $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ est donc mahonienne. Réciproquement, supposons que $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_V$ est mahonienne sur X^*. D'après le Lemme 2.16, la relation $V = S \setminus U$, où $S := U \cup V$, est un ordre total sur X et une κ-extension de U.

Nous démontrons maintenant la seconde partie de notre Théorème 2.8. Soient $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}$ et $\mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T\setminus V}$ deux statistiques mahoniennes sur X^* telles que $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U} = \mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T\setminus V}$. D'après la première partie, S (resp. T) est un ordre total sur X et une κ-extension de U (resp. V). Supposons que $S \neq T$. Alors on peut assumer sans perte de généralités qu'ils existent $x, y \in X$ tels que $x\mathrm{S}y$ et $x \not\mathrm{T} y$. Comme $U \subseteq S$ et $V \subseteq T$, on a alors $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}(xy) = 1 \neq 0 = \mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T\setminus V}(xy)$, ce qui contredit l'égalité de nos deux statistiques. Il s'ensuit que $S = T$.

Supposons maintenant $U \neq V$. On peut assumer sans perte de généralités qu'ils existent $x, y \in X$ tels que $x\mathrm{U}y$ et $x \not\mathrm{V} y$. Comme $S = T$ est un ordre total et une extension de U et V, on a $x\mathrm{S}y$, $(x, y) \in S \setminus V$ et $y \not\mathrm{S} y$. Il en découle que $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{S\setminus U}(xy^2) = 1 \neq 2 = \mathrm{maj}'_V + \mathrm{inv}'_{T\setminus V}(xy^2)$, ce qui contredit l'égalité de nos deux statistiques. On a donc $U = V$, comme voulue.

□

5. Relations κ-extensibles : quelques propriétés

Les Théorème 2.6 et Théorème 2.8 nous conduisent naturellement à la question suivante : *Quand est-ce que une relation est κ-extensible ?*

Supposons que $X = \{x, y, z\}$ et considérons la relation $U = \{(x, y), (y, z))\}$ sur X. Alors, on peut vérifier en considérant toutes les relations sur X contenant U (elles sont au nombre de $2^{3^2-2} = 128$) que U n'a pas de κ-extension. Dans cette section, nous allons caractériser les relations κ-extensibles.

Définition 2.18. *La κ-clôture d'une relation U sur un ensemble X est la relation, notée $cl_\kappa(U)$, définie par*

$$cl_\kappa(U) := U \cup \{(x, y) / \quad \exists\, z \in X \text{ tels que } x\mathrm{U}z \text{ et } y \not\mathrm{U} z\}. \tag{2.19}$$

Proposition 2.19 (Caractérisation des relations κ-extensibles). *Soit U une relation sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) U est κ-extensible.

(ii) $cl_\kappa(U)$ est une κ-extension de U.

(iii) U est transitive et $\nexists\, x, y, z, t \in X$ tels que

$$\begin{aligned} x\mathrm{U}y \quad z \not\mathrm{U} y \\ x \not\mathrm{U} t \quad z\mathrm{U}t. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Par exemple, soit $U = \{(x, y), (y, z))\}$ la relation sur $X = \{x, y, z\}$ considéré dans le paragraphe précédent. On a $x\mathrm{U}y$, $y \not\mathrm{U} y$, $x \not\mathrm{U} z$ et $y\mathrm{U}z$. Il découle donc de la Proposition 2.19 que U n'a pas de κ-extension. On peut aussi vérifier que la relation "$|$" ("divise") (sur $X = [r]$), définie par $x \mid y$ si et seulement si "x divise y", n'a pas de

κ-extension. En effet, les éléments $3, 9, 2, 4$ vérifient $3 \mid 9$, $2 \nmid 9$, $3 \nmid 4$ et $2 \mid 4$.

Démonstration. La partie (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) : Soit S une κ-extension de U. Alors

(a) U est transitive. Par l'absurde. Soient $x, y, z \in X$ tels que $x\mathrm{U}y$ et $y\mathrm{U}z$. Supposons $x \not U z$. Comme S est une κ-extension de U et $y\mathrm{U}z$, on a alors $y\mathrm{S}x$ et $x \not S y$. Nous avons donc $x\mathrm{U}y$ et $x \not S y$, ce qui est impossible car $U \subseteq S$. On a donc $x\mathrm{U}z$ et U est transitive.

(b) $\nexists\, x, y, z, t \in X$ satisfaisant $x\mathrm{U}y$, $z \not U y$, $z\mathrm{U}t$ et $x \not U t$. Par l'absurde. Supposons le contraire. Par définition d'une κ-extension, on a $x\mathrm{S}z$ (car $x\mathrm{U}y$ et $z \not U y$) et $x \not S z$ ($z\mathrm{U}t$ et $x \not U t$), ce qui est impossible.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que U vérifie la condition (iii). On veut montrer que $H := cl_\kappa(U)$ est une κ-extension de U.

Par définition de $cl_\kappa(U)$, on a $U \subseteq H$. Soient $x, y, z \in X$ satisfaisant $x\mathrm{U}y$ et $z \not U y$. Toujours par définition d'une κ-clôture, on a $x\mathrm{H}z$. Il nous faut donc montrer $z \not H x$. Supposons le contraire, i.e. $z\mathrm{H}x$. Nous distinguons deux cas :

(a) $z\mathrm{U}x$: comme U est transitive et $x\mathrm{U}y$, on a $z\mathrm{U}y$, ce qui contredit l'hypothèse $z \not U y$.

(b) $z \not U x$ et $z\mathrm{H}x$: par définition de H, il existe $t \in X$ telle que $z\mathrm{U}t$ et $x \not U t$. Nous avons donc quatre éléments x, y, z, t satisfaisant $x\mathrm{U}y, z \not U y$, $x \not U t$ et $z\mathrm{U}t$, ce qui contredit (2.20).

Nous avons donc $z \not H x$ et donc $cl_\kappa(U)$ est bien une κ-extension de U.

□

Quelques propriétés des κ-clôtures, qui seront utiles par la suite, sont données dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.20. *Soit U une relation κ-extensible sur X. Alors*

- *$cl_\kappa(U)$ est la plus petite κ-extension de U (au sens de l'inclusion), i.e. toute κ-extension de U contient $cl_\kappa(U)$.*
- *$cl_\kappa(U)$ est une relation bipartitionnable.*

Démonstration. La première affirmation est une conséquence triviale de la définition de $cl_\kappa(U)$. Soit $H := cl_\kappa(U)$. Remarquons que U étant κ-extensible, il découle de la Proposition 2.19 que U est transitive et satisfait (2.20). Nous allons montrer que H est bipartitionnable. On commence par la transitivité. Soient $x, y, z \in X$ vérifiant $x\mathrm{H}y$ and $y\mathrm{H}z$. Nous distinguons 4 cas :

(i) $x\mathrm{U}y$, $y\mathrm{U}z$: la transitivité de U implique $x\mathrm{U}z$ et donc, comme $U \subseteq H$, on a $x\mathrm{H}z$.

(ii) $x\mathrm{U}y$, $(y, z) \in H \setminus U$: par définition de H, il existe $t \in X$ tel que $y\mathrm{U}t$ et $z \not U t$. On obtient alors, par transitivité de U, $x\mathrm{U}t$. Nous avons donc $x\mathrm{U}t$ et $z \not U t$, ce qui implique par définition de H, $x\mathrm{H}z$.

(iii) $(x, y) \in H \setminus U$ et $y\mathrm{U}z$: il existe alors $t \in X$ tel que $x\mathrm{U}t$ and $y \not U t$. Supposons $x \not U z$, alors les éléments x, t, y, z satisfont $x\mathrm{U}t$, $y \not U t$, $x \not U z$, $y\mathrm{U}z$, ce qui contredit (2.20). On a donc $x\mathrm{U}z$, et donc $x\mathrm{H}z$.

(iv) $(x, y) \in H \setminus U$ et $(y, z) \in H \setminus U$: il existe alors $t, v \in X$ tels que $x\mathrm{U}t$, $y \not U t$, $y\mathrm{U}v$ et $z \not U v$. Supposons $x \not U v$. Alors les éléments x, t, y, v satisfont $x\mathrm{U}t$, $y \not U t$, $x \not U v$

$y \not U v$, ce qui contredit (2.20). On a donc $x \mathrm{U} v$, et comme $z \not U v$, on a par définition de H, $x \mathrm{H} z$.

On a bien montré que H est transitive. Il reste donc à montrer que pour tous $x, y, z \in X$ vérifiant $x \mathrm{H} y$ et $z \not H y$, on a $x \mathrm{H} z$. Soient $x, y, z \in X$ vérifiant $x \mathrm{H} y$ et $z \not H y$. On distingue deux cas :

(i) $x \mathrm{U} y$: on a $z \not H y$ et donc $z \not U y$ ($U \subseteq H$). On a donc $x \mathrm{U} y$ et $z \not U y$, ce qui implique $x \mathrm{H} z$.

(ii) $(x, y) \in H \setminus U$: il existe alors $t \in X$ tel que $x \mathrm{U} t$ et $y \not U t$. Supposons $z \mathrm{U} t$. Comme $y \not U t$, on aurait alors $z \mathrm{H} y$. Mais $z \not H y$. Contradiction. On a donc $z \not U t$, et comme $x \mathrm{U} t$, on a alors $x \mathrm{H} z$.

□

Soit V une relation bipartitionnable sur X et $(B_1, \ldots, B_k), (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ la bipartition associée à V (voir Définition 2.1). Si $B_l = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, on notera $c(B_l)$ la séquence $c(i_1), c(i_2), \ldots, c(i_p)$ et $m(B_l) = m_l$ pour la somme $c(i_1)+c(i_2)+\ldots+c(i_p)$. En particulier, $\binom{m_l}{c(B_l)}$ dénotera le coefficient multinomial $\binom{c(i_1)+c(i_2)+\cdots+c(i_p)}{c(i_1),c(i_2),\ldots,c(i_p)}$.

Proposition 2.21. *Soit U une relation κ-extensible. Il découle du résultat précédent que $H := cl_\kappa(U)$ est bipartitionnable. Soit $(B_1, \ldots, B_k), (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ la bipartition associée à H. Alors*

$$\sum_{w \in \mathcal{R}(\boldsymbol{c})} q^{(\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{H \setminus U})(w)} = \begin{bmatrix} c(1) + c(2) + \cdots + c(r) \\ m_1, m_2, \cdots, m_k \end{bmatrix}_q \prod_{l=1}^{k} \binom{m_l}{c(B_l)} q^{\beta_l \binom{m_l}{c(B_l)}}. \tag{2.21}$$

Plus généralement, l'identité (2.21) *est valable pour toute relation H satisfaisant (1) H est une κ-extension de U et (2) H est bipartitionnable.*

Démonstration. Soit U une relation κ-extensible. D'après la Proposition 2.19, la relation $H := cl_\kappa(U)$ est une κ-extension de U. Il découle alors du Théorème 2.6 que les statistiques $\mathrm{maj}'_U + \mathrm{inv}'_{H \setminus U}$ et inv'_H sont équidistribuées sur chaque $\mathcal{R}(\mathbf{c})$. Il suffit donc de montrer que la distribution de inv'_H sur $\mathcal{R}(\mathbf{c})$ est donnée par le membre droit de (2.21), ce qui est une application directe du résultat de Foata et Zeilberger [**31**, Proposition 2.1]. □

6. Statistiques maj-inv mahoniennes II

Le Théorème 2.8 nous amène naturellement à la question suivante : *Étant donné un ordre total S sur X, quelles sont les relations U sur X telles que S est une κ-extension de U ?*

Proposition 2.22. *Soit U une relation sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'ordre naturel "$>$" est une κ-extension de U.

(ii) Il existe une application $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$, satisfaisant $g(y) > y$ pour tout $y \in X$, telle que

$$x \mathrm{U} y \Leftrightarrow x \geq g(y).$$

De plus, si U satisfait la condition (i), l'application g est unique et définie par

$$g(y) = \begin{cases} \min(\{x : x\mathrm{U}y\}), & \textit{si } \exists x \textit{ tel que } x\mathrm{U}y\,; \\ \infty, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que "$>$" est une κ-extension de U et soit $y \in X$. On définit alors $g(y) \in X \cup \{\infty\}$ par

– $g(y) = \min(\{x; x\mathrm{U}y\})$ si $\exists x \in X$ satisfaisant $x\mathrm{U}y$,

– $g(y) = \infty$ otherwise.

Il est clair que $g(y) > y$ pour chaque $y \in X$ car $U \subseteq$ " $>$ ". Soient $x, y \in X$. Par définition de $g(y)$, on a "$x\mathrm{U}y \implies x \geq g(y)$". Supposons maintenant $x \geq g(y)$. Comme $x < \infty$, on a $g(y) < \infty$ et donc, il existe $z \in X$ tel que $z\mathrm{U}y$. On peut prendre $z = g(y)$. Supposons que $x \not\mathrm{U} y$. Comme $z\mathrm{U}y$ et $x \not\mathrm{U} y$, et " $>$ " est une κ-extension de U, on a alors $z = g(y) > x$ ce qui contredit le fait que $x \geq g(y)$. Il en découle que $x\mathrm{U}y$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Soient $x, y, z \in X$ satisfaisant $x\mathrm{U}y$ et $z \not\mathrm{U} y$. On déduit de (ii) que $x \geq g(y)$ et $z < g(y)$, et donc $x > z$. La relation " $>$ " est donc bien une κ-extension de U.

□

La preuve du résultat suivant est laissée au lecteur.

Lemme 2.23. *La κ-extensibilité sur X est préservée par isomorphisme d'ordre. En d'autres termes, si S et T sont deux ordres totaux sur X et h est l'unique isomorphisme d'ordre $h : (X, S) \mapsto (X, T)$, i.e, h est une permutation de X et $x\mathrm{S}y \Leftrightarrow \mathrm{h(x)}\,T\,\mathrm{h(y)}$. Alors S est une κ-extension de la relation U sur X si et seulement si T est une κ-extension de la relation $V :=$ "$h(U)$" définie par $x\mathrm{V}y \Leftrightarrow h^{-1}(x)\mathrm{U}h^{-1}(y)$.*

En combinant le Lemme 2.23 et la Proposition 2.22, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Proposition 2.24. *Soit S un ordre total sur X et U une relation sur X. On dénote par f l'(unique) isomorphisme d'ordre de $(X,$" $>$ "$)$ sur (X, S). Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) S est une κ-extension de U.

(ii) Il existe une (unique) application $g : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ satisfaisant $g(z) > z$ pour tout $z \in X$ telle que

$$x\mathrm{U}y \Leftrightarrow f(x) \geq g(f(y)).$$

Le Théorème 2.9 est alors une conséquence immédiate du Théorème 2.8 et de la Proposition 2.24.

7. Applications : nouvelles statistiques mahoniennes

Dans cette section, nous construisons des statistiques maj-inv mahoniennes à l'aide des résultats obtenus dans ce chapitre. De telles statistiques sont entièrement déterminées par les Théorème 2.8 et Théorème 2.9.

Soient g_k et h_k, ($k \in]1, \infty[$) et τ les applications $X \mapsto X \cup \{\infty\}$ définies pour $x \in X$ par

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \lfloor kx+1 \rfloor.\chi(kx < r) + \infty.\chi(kx \geq r) \\ h_k(x) &= \lfloor x^k+1 \rfloor.\chi(x^k < r) + \infty.\chi(x^k \geq r) \\ \tau(x) &= \lceil \exp(x) \rceil.\chi(\exp(x) < r) + \infty.\chi(\exp(x) \geq r)\,. \end{aligned}$$

Clairement, pour tout $x \in X$, on a $g_k(x)$, $h_k(x)$, $\tau(x) > x$. En appliquant le Corollaire 2.10 (ou Théorème 2.9 avec $f = Id$), on obtient immédiatement le résultat suivant.

PROPOSITION 2.25. *Les statistiques* stat_{g_k}, stat_{h_k} *et* stat_τ *définies pour* $w = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$ *par*

$$\begin{aligned} \mathrm{stat}_{g_k}(w) &= \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(\frac{x_i}{x_{i+1}} > k) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(k \geq \frac{x_i}{x_j} > 1), \\ \mathrm{stat}_{h_k}(w) &= \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > (x_{i+1})^k) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi((x_j)^k \geq x_i > x_j), \\ \mathrm{stat}_{\exp}(w) &= \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > \exp(x_{i+1})) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(\exp(x_j) \geq x_i > x_j) \end{aligned}$$

sont mahoniennes sur X^*.

Maintenant, pour chaque $B \subseteq X$, soit $H_B : X \mapsto X \cup \{\infty\}$ l'application définie pour $x \in X$ par $H_B(x) = (x+1).\chi(x \in B,\ x \neq r) + \infty.\chi(x \notin B$ ou $x = r)$. Comme $H_B(x) > x$ pour tout $x \in X$, on obtient, par le Corollaire 2.10, le résultat suivant.

PROPOSITION 2.26. *Les statistiques* stat_{H_B}, $B \subseteq X$, *définies pour* $w = x_1x_2\ldots x_n \in X^*$ *par*

$$\mathrm{stat}_{H_B}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\ x_{i+1} \in B) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i > x_j,\ x_j \notin B)$$

sont mahoniennes sur X^*.

En particulier, si $B_1 = 2\mathbb{P} \cap X$, $B_2 = (k\mathbb{N}+t) \cap X$ pour $k, t \in \mathbb{N}$, et $B_3 = \{$nombres premiers $\leq r\}$, alors les statistiques $\mathrm{stat}_{H_{B_1}}$, $\mathrm{stat}_{H_{B_2}}$ et $\mathrm{stat}_{H_{B_3}}$ définies pour

$w = x_1x_2\dots x_n \in X^*$ par

$$\mathrm{stat}_{H_{B_1}}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\ x_{i+1} \text{ pair}) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j,\ x_j \text{ impair})$$

$$\mathrm{stat}_{H_{B_2}}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\ x_{i+1} \equiv t\ [k]) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j,\ x_j \not\equiv t\ [k])$$

$$\mathrm{stat}_{H_{B_3}}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\ x_{i+1} \text{ premier}) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j,\ x_j \text{ pas premier})$$

sont mahoniennes sur X^*.

Plus généralement, pour $A, B \subseteq X$, soit $U_{A,B}$ la relation sur X définie par

$$(x,y) \in U_{A,B} \Longleftrightarrow x \in A\ ,\ y \in B \text{ et } x > y\,.$$

Supposons $(x,y),(y,z) \in U_{A,B}$. Par définition de $U_{A,B}$, on a $x,y \in A$, $y,z \in B$ et $x > y$ et $y > z$. En particulier, $x \in A$, $y \in B$ et $x > z$, i.e. $(x,z) \in U_{A,B}$. La relation $U_{A,B}$ est donc transitive. Maintenant, supposons qu'ils exitent $x,y,z,t \in X$ tels que $(x,y),(z,t) \in U_{A,B}$ et $(x,t),(z,y) \notin U_{A,B}$. Par définition de $U_{A,B}$, on a $x,z \in A$, $y,t \in B$ et $x > y$, $z \le y$, $x \le t$, $z > t$. En particulier, $x \le t$ et $x > t$, ce qui est impossible. Il en découle, d'après la Proposition 2.19, que $U_{A,B}$ est une relation κ-extensible sur X. Soient $S_{A,B}$ et $S'_{A,B}$ les relations définies sur X par

$$S_{A,B} = \{(x,y) \in X^2 \,|\, x \in A,\ y \notin A\} \cup \{(x,y) \in A^2 \,|\, x > y\}$$
$$S'_{A,B} = S_{A,B} \cup \{(x,y) \in (A^c)^2 \,|\, x > y\}.$$

Le lecteur vérifiera que $S'_{A,B}$ et $S_{A,B}$ sont deux κ-extensions de $U_{A,B}$. Supposons que $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}_>$. It est facile de voir que $S_{A,B}$ est une relation bipartitionnable et que la bipartition associée est le couple formé de la partition $(\{a_1\},\{a_2\},\dots,\{a_k\},A^c)$, et du vecteur nul $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0,0)$.

Posons $\mathrm{stat}_{A,B} := \mathrm{maj}'_{U_{A,B}} + \mathrm{inv}'_{S_{A,B}\setminus U_{A,B}}$ et $\mathrm{stat}'_{A,B} := \mathrm{maj}'_{U_{A,B}} + \mathrm{inv}'_{S'_{A,B}\setminus U_{A,B}}$. Par définition, les statistiques $\mathrm{stat}_{A,B}$ et $\mathrm{stat}'_{A,B}$ sont définies pour les mots $w = x_1\dots x_n \in X^*$ par

$$\mathrm{stat}_{A,B}(w) = \sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\ x_i \in A,\ x_{i+1} \in B) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j,\ x_i \in A,\ x_j \in A\setminus B)$$
$$+ \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i \le x_j,\ x_i \in A,\ x_j \in B\setminus A) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i \in A,\ x_j \notin A\cup B),$$
$$\mathrm{stat}'_{A,B}(w) = \mathrm{stat}_{A,B}(w) + \sum_{1\le i<j\le n} \chi(x_i > x_j,\ x_i \,\mathrm{et}\, x_j \notin A\,).$$

En appliquant les Théorème 2.8 et Proposition 2.21, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION 2.27. *La statistique* $\mathrm{stat}'_{A,B}$ *est mahonienne sur* X^* *et pour chaque* $\mathbf{c}$,

$$\sum_{\mathrm{w}\in\mathcal{R}(\mathbf{c})} q^{\mathrm{stat}_{A,B}(w)} = \binom{m(A^c)}{c(A^c)} \begin{bmatrix} c(1)+c(2)+\cdots+c(r) \\ c(a_1), c(a_2), \ldots, c(a_k), m(A^c) \end{bmatrix}_q .$$

Par exemple, si $E = \{\text{entiers pairs} \leq r\}$ et $O = \{\text{entiers impairs} \leq r\}$, alors les statistiques $\mathrm{stat}_{E,O}$ et $\mathrm{stat}'_{E,O}$ sont définies pour $w = x_1 \ldots x_n \in X^*$ par

$$\begin{aligned}\mathrm{stat}_{E,O}(w) = &\sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\, x_i \text{ pair},\, x_{i+1} \text{ impair}) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i > x_j,\, x_i \text{ et } x_j \text{ pair}) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i \leq x_j,\, x_i \text{ pair},\, x_j \text{ impair}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{stat}'_{E,O}(w) = &\sum_{i=1}^{n-1} i.\chi(x_i > x_{i+1},\, x_i \text{ pair},\, x_{i+1} \text{ impair}) + \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i \leq x_j,\, x_i \text{ pair},\, x_j \text{ impair}) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq n} \chi(x_i > x_j,\, x_i \text{ et } x_j \text{ de même parité}).\end{aligned}$$

Il découle de la Proposition 2.27 que $\mathrm{stat}'_{E,O}$ est mahonienne et pour chaque $\mathbf{c}$,

$$\begin{aligned}\sum_{w\in\mathcal{R}(\mathbf{c})} q^{\mathrm{stat}_{E,O}(w)} = &\binom{c(1)+c(3)+\ldots+c(2\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1)}{c(1), c(3), \ldots, c(2\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1)} \\ &\times \begin{bmatrix} c(1)+c(2)+\cdots+c(r) \\ c(2), c(4), \ldots, c(2\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor), c(1)+c(3)+\ldots+c(2\left\lfloor\frac{r-1}{2}\right\rfloor+1) \end{bmatrix}_q .\end{aligned}$$

En particulier, en considérant le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r = \mathcal{R}(12\cdots r)$, alors

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} q^{\mathrm{stat}_{E,O}(\sigma)} = \left(\left\lfloor\frac{r+1}{2}\right\rfloor\right)! \times \frac{[r]_q!}{[(\left\lfloor\frac{r+1}{2}\right\rfloor)]_q!}.$$

CHAPITRE 3

Symétrie des croisements et imbrications d'arcs dans les partitions. Généralisations.

Ce chapitre est consacré à l'étude des croisements et imbrications dans les partitions. Il est composée de 5 parties qui peuvent, à l'exception de la quatrième, être lue indépendamment. Dans la première partie, nous montrons que la distribution conjointe sur les partitions de $[n]$ des statistiques nombre de croisements et nombre d'imbrications est symétrique. Dans la deuxième partie, nous généralisons ce résultat dans le cadre de certains 01-remplissages de polyominos. Dans la troisième partie, nous donnons une version graphique de l'algorithme de réduction qui transforme une partition m-régulière de $[n]$ en une partition $(m-1)$-régulière de $[n-1]$ et nous décrivons le comportement des croisements et imbrications face à cet algorithme. Dans la quatrième partie, nous rassemblons quelques formules concernant l'énumération des croisements dans les partitions. La dernière partie est consacrée au calcul du nombre moyen de croisements dans une partition.

1. Symmetry of crossings and nestings of two edges in matchings and set partitions

We construct an involution on set partitions which keeps track of the numbers of crossings, nestings and alignments of two edges. We derive then the symmetric distribution of the numbers of crossings and nestings in partitions, which generalizes a recent result of Klazar and Noy in perfect matchings. By factorizing our involution through bijections between set partitions and some path diagrams we obtain the continued fraction expansions of the corresponding ordinary generating functions.

1.1. Introduction. A *partition* of $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$ is a collection of disjoint nonempty subsets of $[n]$, called *blocs*, whose union is $[n]$. A (perfect) *matching* of $[2n]$ is a partition of $[2n]$ in n two-element blocs. The set of partitions (resp. matchings) of $[n]$ will be denoted by $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{M}_n$). A standard way of writing a partition π with k blocs is $\pi = B_1 - B_2 - \cdots - B_k$, where the blocs are ordered in the increasing order of their minimum elements and, within each bloc, the elements are written in the numerical order.

It is convenient to identify a partition of $[n]$ with a *partition graph* on the vertex set $[n]$ such that there is an edge joining i and j if and only if i and j are *adjacent elements* in a same bloc. We note such an edge e as a pair (i, j) with $i < j$, and say that i is the *left-hand endpoint* of e and j is the *right-hand endpoint* of e. A *singleton* is the element of a bloc which has only one element, so a *singleton* corresponds to an isolated vertex in the graph. Conversely, a graph on the vertex set $[n]$ is a partition graph if and only if each vertex is the left-hand (resp. right-hand) endpoint of at most one edge. By convention, the vertices $1, 2, \cdots, n$ are arranged on a line in the increasing order from left to right and an edge (i, j) is drawn as an arc above the line. An illustration is given in Figure 3.1.

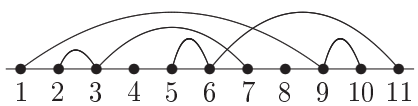


FIG. 3.1. Graph of the partition 1 9 10/2 3 7/4/5 6 11/8

Given a partition π of $[n]$, two edges $e_1 = (i_1, j_1)$ and $e_2 = (i_2, j_2)$ of π are said to form :

(i) a *crossing* with e_1 as the *initial edge* if $i_1 < i_2 < j_1 < j_2$;

(ii) a *nesting* with e_2 as *interior edge* if $i_1 < i_2 < j_2 < j_1$;

(iii) an *alignment* with e_1 as *initial edge* if $i_1 < j_1 \leq i_2 < j_2$.

These notions have the obvious geometrical meaning (see Figure 3.2).

We denote by $\mathrm{cros}_2(\pi)$, $\mathrm{nest}_2(\pi)$ and $\mathrm{al}_2(\pi)$ the numbers of crossings, nestings and alignments of two edges in π, respectively. The letters (integers) of π fall into 4 classes. The integer i is said to be :

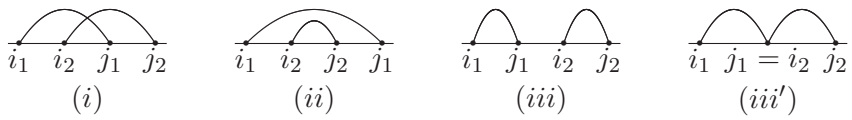


FIG. 3.2. Crossing, nesting and alignment of two edges

(i) a *(strict) opener* if it is the least element of a bloc of cardinal ≥ 2,
(ii) a *(strict) closer* if it is the greatest element of a bloc of cardinal ≥ 2,
(iii) a *singleton* if it is the unique element of a bloc of cardinal 1,
(iv) a *transient* if it is neither the least nor greatest element of a bloc of cardinal ≥ 2.

In the graph of π, the edges around an strict opener, strict closer, singleton or transient are illustrated in Figure 3.3.

FIG. 3.3. strict opener, strict closer, singleton and transient in a partition graph

The sets of strict openers, strict closers, singletons and transients of π will be denoted by $\mathcal{O}(\pi)$, $\mathcal{C}(\pi)$, $\mathcal{S}(\pi)$ and $\mathcal{T}(\pi)$, respectively. The 4-tuple $(\mathcal{O}(\pi), \mathcal{C}(\pi), \mathcal{S}(\pi), \mathcal{T}(\pi))$ is called the *type* of π and denoted $\mathrm{type}(\pi)$.

For the partition π in Figure 3.1, we have $\mathrm{cros}_2(\pi) = 2$, $\mathrm{nest}_2(\pi) = 5$ and $\mathrm{al}_2(\pi) = 8$. Moreover, $\mathcal{O}(\pi) = \{1, 2, 5\}$, $\mathcal{C}(\pi) = \{7, 10, 11\}$, $\mathcal{S}(\pi) = \{4, 8\}$ and $\mathcal{T}(\pi) = \{3, 6, 9\}$.

DEFINITION 3.1. *A 4-tuple $\lambda = (\mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ of subsets of $[n]$ is a* partition type *of $[n]$ if there exists a partition of $[n]$ whose type is λ. Denote by $\mathcal{P}_n(\lambda)$ the set of partitions of type λ, i.e.,*

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = \{\pi \in \mathcal{P}_n : \ \mathrm{type}(\pi) = \lambda\}.$$

In particular, a partition type λ is a matching type if $\lambda = (\mathcal{O}, \mathcal{C}) := (\mathcal{O}, \mathcal{C}, \emptyset, \emptyset)$. Denote by $\mathcal{M}_{2n}(\gamma)$ the set of matchings of type γ, i.e.,

$$\mathcal{M}_{2n}(\gamma) = \{\alpha \in \mathcal{M}_{2n} : \ \mathcal{O}(\alpha) = \mathcal{O} \text{ and } \mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}\}.$$

Our main result is the construction of an explicit involution φ on the set of partitions $\mathcal{P}_n$.

THEOREM 3.2. *There is an involution $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ preserving the type of partitions and number of alignments, and exchanging the numbers of crossings and nestings. In other words, for each $\pi \in \mathcal{P}_n$, we have* $\mathrm{type}(\pi) = \mathrm{type}(\varphi(\pi))$ *and*

$$\mathrm{al}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{al}_2(\pi), \ \mathrm{cros}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{nest}_2(\pi), \ \mathrm{nest}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{cros}_2(\pi). \tag{3.1}$$

We derive immediately the following equality of the corresponding generating functions.

COROLLARY 3.3. *For each partition type λ of $[n]$, we have*

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(\lambda)} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)}q^{\mathrm{nest}_2(\pi)}t^{\mathrm{al}_2(\pi)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(\lambda)} p^{\mathrm{nest}_2(\mathcal{P})}q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}t^{\mathrm{al}_2(\pi)}, \tag{3.2}$$

and for each matching type γ of $[2n]$,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}(\gamma)} p^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}q^{\mathrm{nest}_2(\alpha)}t^{\mathrm{al}_2(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}(\gamma)} p^{\mathrm{nest}_2(\alpha)}q^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}t^{\mathrm{al}_2(\alpha)}. \tag{3.3}$$

Summing over all partition types λ or matching types γ we get

COROLLARY 3.4.

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)}q^{\mathrm{nest}_2(\pi)}t^{\mathrm{al}_2(\pi)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)}q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}t^{\mathrm{al}_2(\pi)}, \tag{3.4}$$

and

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}q^{\mathrm{nest}_2(\alpha)}t^{\mathrm{al}_2(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(\alpha)}q^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}t^{\mathrm{al}_2(\alpha)}. \tag{3.5}$$

By specializing $t = 1$ in the above corollary, we obtain

COROLLARY 3.5.

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)}q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)}q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}, \tag{3.6}$$

and

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}q^{\mathrm{nest}_2(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(\alpha)}q^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}. \tag{3.7}$$

Note that equality (3.7) is due to Klazar and Noy (see [**56**]). The $p = 1$ case of (3.7) had been previously proved by De Sainte-Catherine [**18**] and also by De Médicis and Viennot [**15**].

Our approach can be considered as an application of the combinatorial theory of orthogonal polynomials developed by Viennot [**87**] and Flajolet [**22**]. In fact, our involution φ is a direct generalization of that used by De Médicis and Viennot [**15**] for matchings. A variant of this bijection on partitions has been used by Ksavrelof and Zeng [**61**] to prove other equinumerous results on partitions.

The rest of this part is organized as follows : we shall present the involution φ and the proof of theorem 3.2 in section 2; in section 3 we factorize our involution through two bijections φ_l and φ_r between partitions and *Charlier diagrams*; in section 4, we apply φ_l or φ_r to derive continued fraction expansions of the ordinary generating functions with respect to the numbers of crossings and nestings of two edges in matchings and partitions.

1.2. Proof of Theorem 3.2. Let $\pi = B_1 - B_2 - \cdots - B_k$ be a partition of $[n]$ and i an integer in $[n]$. The i-th *trace* of π is defined by

$$T_i(\pi) = B_1(\leq i) - B_2(\leq i) - \cdots - B_k(\leq i),$$

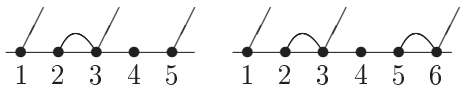
where $B_j(\leq i) := B_j \cap [i]$ is the restriction of the bloc B_j on $[i]$. One says that $B_j(\leq i)$ is *active* (resp. *closed* and *empty*) if $B_j \not\subseteq [i]$ (resp. $B_j \subseteq [i]$ and $B_j \cap [i] = \emptyset$).

We shall identify $T_i(\pi)$ with the subgraph $D_i(\pi)$ of the graph $D(\pi)$ induced by the vertex set $[i]$, with the additional condition that for any edge (x, y) of π such that $x \leq i < y$, we attach a "half-edge" to the vertex x, called *vacant vertex*. Denote by $l_i(\pi)$ the number of vacant vertices in $D_{i-1}(\pi)$, with $D_0 = \emptyset$. Moreover, if i is a strict closer or a transient, there is an edge (j, i) with $j < i$, we denote by $\gamma_i(\pi)$ the rank of the vertex j among the vacant vertices of $D_{i-1}(\pi)$, the vacant vertices being arranged from left to right in the order of their creation, namely, in increasing order.

For instance, if π is the partition given in Figure 3.1, then

$$T_5(\pi) = \{1.\} - \{2, 3.\} - \{4\} - \{5.\},$$
$$T_6(\pi) = \{1.\} - \{2, 3.\} - \{4\} - \{5, 6.\},$$

where each active bloc is ended with a dot. Hence $l_6(\pi) = 3$ and $\gamma_6(\pi) = 3$. The corresponding graphs $D_5(\pi)$ and $D_6(\pi)$ are given as follows :



Now, we can describe our fundamental bijection φ on $\mathcal{P}_n$ using the graphs of traces. In the following, by "declare the vertex i vacant" we mean "attach a half-edge to the vertex i". Let $\pi \in \mathcal{P}_n$ then $\varphi(\pi) \in \mathcal{P}_n$ is defined by the following algorithm :

(1) Set $D'_0 = \emptyset$.

(2) For $1 \leq i \leq n$, the graph D'_i is obtained from D'_{i-1} by adding i as follows :
  (i) if $i \in \mathcal{O}(\pi)$, declare the vertex i vacant.
  (ii) if $i \in \mathcal{S}(\pi)$, add i as an isolated vertex.
  (iii) if $i \in \mathcal{C}(\pi) \cup \mathcal{T}(\pi)$, join i to the $\gamma_i(\pi)$-th (from right to left) vacant vertex of D'_{i-1}. Moreover, if $i \in T$, declare the vertex i vacant.

(3) Set $\varphi(\pi) := D'_n$.

For instance, if π is as before, then the step-by-step construction of $\varphi(\pi)$ is given in Figure 3.4 and $\varphi(\pi) = \{1, 3, 10\} - \{2, 6, 9, 11\} - \{4\} - \{5, 7\} - \{8\}$. As a check, we note that $\mathrm{cros}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{nest}_2(\pi) = 5$, $\mathrm{nest}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{cros}_2(\pi) = 2$ and $\mathrm{al}_2(\varphi(\pi)) = \mathrm{al}_2(\pi) = 8$.

We shall decompose the proof of the theorem in two lemmas.

LEMMA 3.6. *The mapping $\varphi : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ is an involution which preserves the type.*

Proof. By induction on i $(0 \leq i \leq n)$, it is easy to see that D'_i has the same vacant vertices as $D_i(\pi)$. So *(iii)* is valid and the algorithm is well defined. By inspecting the algorithm, we see that $\varphi(\pi)$ has the same type as π. To see φ is an involution, it suffices

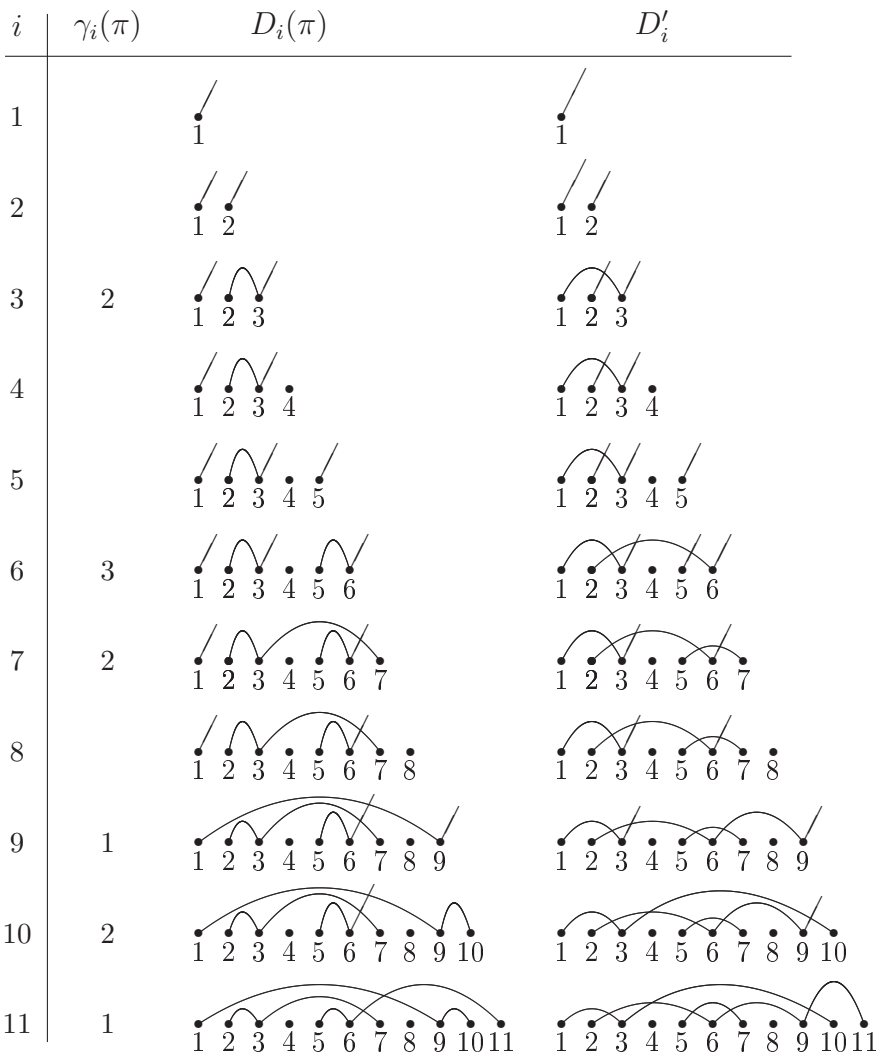


FIG. 3.4. Construction of $\varphi(\pi) = \{1, 3, 10\} - \{2, 6, 9, 11\} - \{4\} - \{5, 7\} - \{8\}$

to notice that applying the operation "reverse the order of the vacant vertices in (iii)" twice is equal to keep the original order. □

REMARK 3.7. *The graph D'_i corresponds with the graph of i-th trace of $\varphi(\pi)$.*

To complete the proof of Theorem 3.2 it remains to verify (3.1). In fact we shall prove a stronger result. For any strict closer or transient j of a partition π, let $\mathrm{cros}_2(\pi; \mathrm{j})$ (resp. $\mathrm{nest}_2(\pi; \mathrm{j})$ and $\mathrm{al}_2(\pi; \mathrm{j})$) be the number of crossings (resp. nestings and alignments) whose initial (resp. interior and initial) edge has j as the right-hand endpoint. Clearly

$$\mathrm{cros}_2(\pi) = \sum \mathrm{cros}_2(\pi; \mathrm{j}), \qquad \mathrm{nest}_2(\pi) = \sum \mathrm{nest}_2(\pi; \mathrm{j}), \qquad \mathrm{al}_2(\pi) = \sum \mathrm{al}_2(\pi; \mathrm{j}),$$

where the summations are over $j \in C(\pi) \cup T(\pi)$.

LEMMA 3.8. *Let π be a partition of $[n]$ and j a strict closer or transient of π. Then*

$$\mathrm{al}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \mathrm{al}_2(\pi;\mathrm{j}), \quad \mathrm{cros}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \mathrm{nest}_2(\pi;\mathrm{j}), \quad \mathrm{nest}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \mathrm{cros}_2(\pi;\mathrm{j}).$$

Proof. For any partition π, the number of alignments with j as the right-hand endpoint, i.e. $\mathrm{al}_2(\pi;\mathrm{j})$, is equal to the number of openers and transients which are $\geq j$. Now, as $\varphi(\pi)$ has the same openers and transients as π, we get immediately $\mathrm{al}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \mathrm{al}_2(\pi;\mathrm{j})$.

Next, in the j-th ($1 \leq j \leq n-1$) step of the construction of $\varphi(\pi)$, we add the vertex j to D'_{j-1} for obtaining D'_j. There are exactly $l_j := l_j(\pi)$ vacant vertices in D'_{j-1} (resp. D_{j-1}). These vertices are smaller than j and arranged from left to right in increasing order. Suppose that j is linked with the γ_j-th vacant vertex $\bar{j}$ of D_{j-1} in D_j (resp.

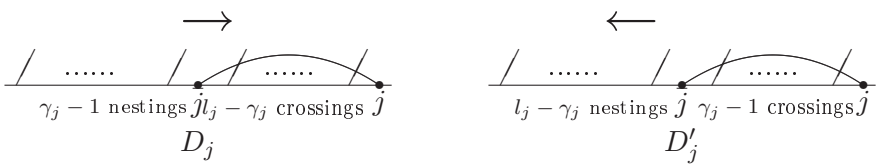


FIG. 3.5. Counting of $\mathrm{cros}_2(\pi;\mathrm{j})$ and $\mathrm{cros}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j})$

$D'_{j-1}(\pi)$ in D'_j). Recall that the rank of vacant vertices is counted from left to right in D_{j-1} and from right to left in D'_{j-1}.

- Any vacant vertex α on the left of the vertex $\bar{j}$ in D_j (resp. D'_j) will be linked to a vertex β on the right of the vertex j ; thus (α, β) will form a nesting with $(\bar{j}, j)$ as an interior edge in D_n(resp. D'_n). Conversely, if (a, b) forms a nesting with interior edge $(\bar{j}, j)$, then a must be a vacant vertex on the left of the vertex $\bar{j}$ in D_j (resp. D'_j) . We deduce that $\mathrm{nest}(\pi;\mathrm{j}) = \gamma_\mathrm{j} - 1$ and $\mathrm{nest}(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \mathrm{l_j} - \gamma_\mathrm{j}$.
- Any vacant vertex α between $\bar{j}$ and j in D_j (resp. D'_j) will be linked to a vertex β on the right of the vertex j ; thus (α, β) will form a crossing with initial edge $(\bar{j}, j)$. Conversely, if (a, b) forms a crossing with initial edge $(\bar{j}, j)$, then the vertex a must be a vacant vertex on the right of the vertex $\bar{j}$ in D_j (resp. D'_j). We deduce that $\mathrm{cros}_2(\pi;\mathrm{j}) = \mathrm{l_j} - \gamma_\mathrm{j}$ and $\mathrm{cros}_2(\varphi(\pi);\mathrm{j}) = \gamma_\mathrm{j} - 1$.

The proof is completed by comparing the above counting results. □

1.3. Factorization of φ via Charlier diagrams. A *path* of length n is a finite sequence $w = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ of points $s_i = (x_i, y_i)$ in the plan $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. A step (s_i, s_{i+1}) of w is *East* (resp. *North-East* and *South-East*) if $s_{i+1} = (x_i+1, y_i)$ (resp. $s_{i+1} = (x_i+1, y_i+1)$ and $s_{i+1} = (x_i+1, y_i-1)$). The number y_i is the *height* of the step (s_i, s_{i+1}). The integer $i+1$ is the *index* of the step (s_i, s_{i+1}).

A *Motzkin path* is a path $w = (s_0, s_1, \cdots, s_n)$ such that : $s_0 = (0, 0)$, $s_n = (n, 0)$, each step is East or North-East or South-East and the height of each step is nonnegative. A *bicolored Motzkin* (BM) path is a Motzkin path whose East steps are colored with *red* or *blue*. A *restricted bicolored Motzkin* (RBM) path is a BM path whose blue East steps are of positive height.

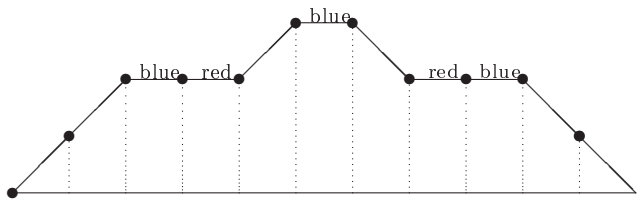
In the following, we shall write BE, RE, NE and SE as abbreviations of Blue East, Red East, North-East and South-East.

DEFINITION 3.9. *A Charlier diagram of length n is a pair $h = (w, \xi)$ where $w = (s_0, \ldots, s_n)$ is a RBM path and $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is a sequence of integers such that $\xi_i = 1$ if the i-th step is NE or RE, and $1 \leq \xi_i \leq h_i$ if the i-th step is SE or BE of height h_i. The set of Charlier diagrams of length n is denoted by Γ_n.*

A Charlier diagram is given in Figure 3.6. The *type* of a BM path w is the 4-tuple $\mathrm{type}(w) = (\mathcal{O}(w), \mathcal{C}(w), \mathcal{S}(w), \mathcal{T}(w))$, where $\mathcal{O}(w)$ (resp. $\mathcal{C}(w)$, $\mathcal{S}(w)$, $\mathcal{T}(w)$) is the set of indices of NE (resp. SE, RE, BE) steps of w. For instance, if w is the path in Figure 3.6, then

$$\mathrm{type}(w) = (\{1, 2, 5\}, \{7, 10, 11\}, \{4, 8\}, \{3, 6, 9\}).$$

Denote by $M_b(n)$ (resp. $M_{rb}(n)$) the set of BM (resp. RBM) paths of length n.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h_i			2			3	3		2	2	1
ξ_i			2			3	2		1	2	1

FIG. 3.6. A Charlier diagram of length 11

There is a well-known bijection (see [**22, 87**]) from Γ_n to $\mathcal{P}_n$. For our purpose, we present two variants φ_l and φ_r of this bijection, which keep the track of crossings and nestings. The description of the bijection φ_l (resp. φ_r)is based on the fact that a partition π of $[n]$ is completely determined by its type $\lambda = (\mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ and the integers $\gamma_i(\pi)$, $i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$.

Given a Charlier diagram $h = (w, \xi)$ of length n, we define the partition $\pi = \varphi_l(h)$ as follows : the type of π is that of w and $\gamma_j(\pi) := \xi_j$, for $j \in \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$.

In the definition of φ_l, we take ξ_j as the rank from left to right of the vacant vertex linked to j in the j-th step of the construction of π. If we take ξ_j as the rank from right to left of the vacant vertex linked to j in the j-th step of the construction of π, then we get the bijection φ_r. That is, we have $\varphi_r := \varphi \circ \varphi_l$. In other words, the following diagram is commutative.

Denote, respectively, by $\mathrm{sg}(\pi)$, $\mathrm{bl}(\pi)$ and $\mathrm{tr}(\pi)$ the numbers of singletons, blocs whose cardinality is ≥ 2 and transients of a partition π. The following result is clear (cf. [**22, 87**]).

PROPOSITION 3.10. *The mapping φ_l (resp. φ_r) : $\Gamma_n \to \mathcal{P}_n$ is a bijection. Moreover, if $h = (w, \xi) \in \Gamma_n$ and $\pi = \varphi_l(h)$ (resp. $\pi = \varphi_r(h)$), then $\mathrm{sg}(\pi)$ (resp. $\mathrm{bl}(\pi)$ and $\mathrm{tr}(\pi)$) is equal to the number of red East (resp. North-East and blue East) steps of w.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_r^{-1}"'] & & \mathcal{P}_n \\ & \Gamma_n \arrow[ur, "\varphi_l"'] & \end{tikzcd}$$

FIG. 3.7. factorization of φ

For instance, if $h = (w, \xi)$ is the Charlier diagram of Figure 3.6, the construction of $\varphi_l(h)$ (resp. $\varphi_r(h)$) corresponds with the traces sequence $D_i(\pi_0)$ (resp. D'_i) in Figure 3.4. In other words, we have

$$\varphi_l(h) = \{1, 9, 10\} - \{2, 3, 7\} - \{4\} - \{5, 6, 11\} - \{8\},$$
$$\varphi_r(h) = \{1, 3, 10\} - \{2, 6, 9, 11\} - \{4\} - \{5, 7\} - \{8\}.$$

PROPOSITION 3.11. *Let $h = (w, \xi)$ be a Charlier diagram such that the j-th step of w is blue East or South-East of height k, then*

$$\mathrm{cros_2(\varphi_r(h); j) = nest_2(\varphi_l(h); j) = \xi_j - 1}$$
$$\mathrm{nest_2(\varphi_r(h); j) = cros_2(\varphi_l(h); j) = k - \xi_j}$$

Proof. This follows from the proof of Lemma 4.12 by replacing $\varphi_l(h)$ by π, $\varphi_r(h)$ by $\varphi(\pi)$, l_j by k and γ_j by ξ_j. □

A partition π is *noncrossing* (resp. *nonnesting*) if $\mathrm{cros}_2(\pi) = 0$ (resp. $\mathrm{nest}_2(\pi) = 0$). Let NC_n (resp. NN_n) be the set of noncrossing (resp. nonnesting) partitions of $[n]$.

COROLLARY 3.12. *Let* $\mathbf{1}$ *denote the n-tuple* $(1, 1, \ldots, 1)$. *Then*
(i) The mapping $w \mapsto \varphi_r((w, \mathbf{1}))$ is a bijection from $M_{rb}(n)$ to NC_n.
(ii) The mapping $w \mapsto \varphi_l((w, \mathbf{1}))$ is a bijection from $M_{rb}(n)$ to NN_n.

Proof. Let $h = (w, \xi)$ a restricted diagram and suppose that the j-th step of w is blue East or South-East. Then, Proposition 3.11 implies that $\mathrm{cros_2(\varphi_r(h); j) = nest_2(\varphi_l(h); j) = \xi_j - 1}$. Thus the partition $\varphi_r(h)$ (resp. $\varphi_l(h)$) is noncrossing (resp. nonnesting) if and only if $\xi_i = 1$ for each i. □

Note that Corollary 3.12 gives another proof of the well-known fact (see [**78**] and [**84**, p.226]) that the cardinals of NC_n and NN_n are equal to the n-th Catalan number $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Moreover, the mapping $\varphi = \varphi_l \circ \varphi_r^{-1} : NC_n \to NN_n$ is a bijection.

1.4. Continued fraction expansions. Consider the enumerating polynomial of $\mathcal{P}_n$:

$$B_n(p, q, u_1, u_2, v) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} u_1^{sg(\pi)} u_2^{\mathrm{bl}(\pi)} v^{\mathrm{tr}(\pi)},$$

which is a generalization of *n-th Bell numbers*. Let

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}, \qquad [n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

It follows from Proposition 3.11 that

$$\begin{aligned} & B_n(p,q,u_1,u_2,v) \\ (3.8) \quad &= \sum_{(w,\xi)\in\Gamma_n} \left(\prod_{j\in\mathcal{O}(w)} u_2\right)\left(\prod_{j\in\mathcal{S}(w)} u_1\right)\left(\prod_{j\in\mathcal{C}(w)} p^{\xi_j-1}q^{k_j-\xi_j}\right)\left(\prod_{j\in\mathcal{T}(w)} p^{\xi_j-1}q^{k_j-\xi_j}v\right), \end{aligned}$$

where k_j is the height of the j-th step of w.

We can rewrite the double sums in (3.8) as a single sum on bicolored Motzkin paths. For any BM path w, define the *weight* of a step of w at height k by u_2 (resp. $[k]_{p,q}$, $v[k]_{p,q}(1-\delta_{0k})$, u_1) if it is NE (resp. SE, BE, RE) and the weight $P(w)$ of w as the product of weights of its steps. It follows from (3.8) that

$$B_n(p,q,u_1,u_2,v) = \sum_{w\in M_b(n)} P(w).$$

Applying a well-known result of Flajolet [**22**, Propositions 7A and 7B], we derive immediately the continued fraction expansion from the above correspondence.

PROPOSITION 3.13. *The generating function* $\sum_{n\geq 0} B_n(p,q,u_1,u_2,v)z^n$ *has the following continued fraction expansion :*

$$\cfrac{1}{1-u_1z-\cfrac{u_2z^2}{1-(u_1+v)z-\cfrac{u_2[2]_{p,q}z^2}{1-(u_1+[2]_{p,q}v)z-\cfrac{u_2[3]_{p,q}z^2}{1-(u_1+[3]_{p,q}v)z-\cfrac{u_2[4]_{p,q}z^2}{\cdots}}}}}.$$

Note that the $q=v=1$ case of Proposition 3.13 has been given by Biane [**2**]. Taking $u_1=u_2=v=1$, we have :

COROLLARY 3.14. *The generating function*

$$\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)}q^{\mathrm{nest}_2(\pi)}\Big)z^n = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}p^{\mathrm{nest}_2(\pi)}\Big)z^n$$

has the following continued fraction expansion :

$$\cfrac{1}{1-z-\cfrac{z^2}{1-([1]_{p,q}+1)z-\cfrac{[2]_{p,q}z^2}{1-([2]_{p,q}+1)z-\cfrac{[3]_{p,q}z^2}{1-([3]_{p,q}+1)z-\cfrac{[4]_{p,q}z^2}{\cdots}}}}}.$$

For any $\pi \in \mathcal{P}_n$, denote by $\mathrm{ed}(\pi)$ the number of edges of π. Clearly we have $\mathrm{ed}(\pi) = \mathrm{bl}(\pi) + \mathrm{tr}(\pi)$ and $\mathrm{cros}_2(\pi) + \mathrm{nest}_2(\pi) + \mathrm{al}_2(\pi) = \binom{\mathrm{ed}(\pi)}{2}$. Let

$$E_n(v,q) := \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)+\mathrm{nest}_2(\pi)} v^{ed(\pi)}.$$

Setting $p = q$, $u_1 = 1$ and $u_2 = v$ in Proposition 3.13, we get

COROLLARY 3.15. *The generating function* $\sum_{n\geq 0} E_n(v,q)z^n$ *has the following continued fraction expansion :*

$$\cfrac{1}{1 - z - \cfrac{vz^2}{1-(1+v)z - \cfrac{2qvz^2}{1-(2qv+1)z - \cfrac{3q^2vz^2}{1-(3q^2v+1)z - \cfrac{4q^3vz^2}{\cdots}}}}}.$$

Let $E_n(v,q) = \sum_{k\geq 0} e_k(q)v^k$. Then

$$F_n(q) := \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} q^{\mathrm{al}(\pi)} = \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} e_k(1/q).$$

Finally consider the enumerating polynomials of crossings and nestings of $\mathcal{M}_{2n}$:

$$L_n(p,q) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(\alpha)} q^{\mathrm{nest}_2(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(\alpha)} q^{\mathrm{cros}_2(\alpha)}.$$

Setting $u_2 = 1$, $u_1 = v = 0$ in Proposition 3.13 and replacing z^2 by z we get

PROPOSITION 3.16.

$$\sum_{n\geq 0} L_n(p,q)z^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 - \cfrac{[2]_{p,q}z}{1 - \cfrac{[3]_{p,q}z}{1 - \cfrac{[4]_{p,q}z}{\cdots}}}}}.$$

Note that the $p = 1$ case of Proposition 3.16 corresponds to a result of Touchard [**86**]. Since a matching of $[2n]$ has exactly n edges, we get $\mathrm{cros}_2(\alpha) + \mathrm{nest}_2(\alpha) + \mathrm{al}_2(\alpha) = \binom{n}{2}$ for any $\alpha \in \mathcal{M}_{2n}$. Therefore

$$T_n(q) := \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_{2n}} q^{\mathrm{al}_2(\alpha)} = q^{\binom{n}{2}} L_n(1/q, 1/q).$$

The first terms of the above sequences are given as follows :

$T_0(q) = T_1(q) = 1$	$L_0(p,q) = L_1(p,q) = 1$
$T_2(q) = 2 + q$	$L_2(p,q) = 1 + p + q$
$T_3(q) = 6 + 4q + 4q^2 + q^3$	$L_3(p,q) = 1 + 2p + 2q + 2pq + p^2 + q^2 + 2p^2q + 2pq^2 + p^3 + q^3.$

2. Ascents and descents in 01-fillings of moon polyominoes

We put recent results on the symmetry of the joint distribution of the numbers of crossings and nestings of two edges over matchings, set partitions and linked partitions in the larger context of the enumeration of increasing and decreasing sequences of length 2 in fillings of moon polyominoes.

2.1. Introduction.

The main purpose of this section is to put recent results of Klazar and Noy [**56**], Kasraoui and Zeng [**53**], and Chen, Wu and Yan [**10**], on the enumeration of 2-crossings and 2-nestings in matchings, set partitions and linked partitions in the larger context of enumeration of increasing and decreasing chains in fillings of arrangements of cells. Our work is motivated by the paper of Krattenthaler [**60**] in which results of Chen et al. [**9**] on the symmetry of the crossing number and nesting number in matchings and set partitions have been extended in a such context.

Let G be a *simple graph* (no multiple edges and loops) on $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. A graph will be represented by its set of edges where the edge $\{i, j\}$ is written (i, j) if $i < j$.

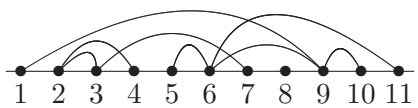


FIG. 3.8. The graph $\{(1,9),(2,3),(2,4),(3,7),(5,6),(6,9),(6,11),(9,10)\}$

A sequence $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)$ of edges of G is said to be a *k-crossing* if $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ and a *k-nesting* if $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < j_k < \cdots < j_2 < j_1$. If we draw the vertices of G in increasing order on a line and draw the arcs above the line (see Figure 3.8 for an illustration), k-crossings and k-nestings have a nice geometrical meaning. The largest k for which a graph G has a k-crossing (resp., a k-nesting) is denoted $\mathrm{cros}(G)$ (resp., $\mathrm{nest}(G)$) and called [**9**] the *crossing number* (resp., *nesting number*) of G. The number of k-crossings (resp., k-nestings) of G will be denoted by $\mathrm{cros}_k(G)$ (resp., $\mathrm{nest}_k(G)$). A graph with no k-crossing is called *k-noncrossing* and a graph with no k-nesting is called *k-nonnesting*. As usual, a 2-noncrossing (resp., 2-nonnesting) graph is just said to be *noncrossing* (resp., *nonnesting*). Recently, there has been an increasing interest in studying crossings and nestings in matchings, set partitions, linked partitions and permutations (see e.g. [**3, 10, 9, 14, 16, 17, 53, 56, 68**]).

A (*set*) *partition* of $[n]$ is a collection of non-empty pairwise disjoint sets, called blocks, whose union is $[n]$. A (*complete*) *matching* of $[n]$ is just a set partition whose each block contains exactly two elements. The set of all set partitions and matchings of $[n]$ will be denoted respectively by $\mathcal{P}_n$ and $\mathcal{M}_n$. Set partitions (and thus matchings) have a natural graphical representation, called *standard representation*. To each set partition π of $[n]$, one associates the graph St_π on $[n]$ whose edge set consists of arcs joining

the elements of each block in numerical order. For instance, the standard representation of the set partition $\pi = \{\{1,9,10\},\{2,3,7\},\{4\},\{5,6,11\},\{8\}\}$ is the graph on $\{1,2,\ldots,11\}$ $St_\pi = \{(1,9),(9,10),(2,3),(3,7),(5,6),(6,11)\}$ drawn in Figure 3.9.

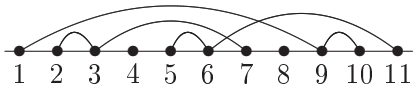


FIG. 3.9. Standard representation of $\pi = \{1,9,10\}\{2,3,7\}\{4\}\{5,6,11\}\{8\}$

Throughout this paper, set partitions (and matchings) will be identified with their standard representation. It is well-known that the number of noncrossing matchings of $[2n]$ equals the number of nonnesting matchings of $[2n]$, and that the number of noncrossing partitions of $[n]$ equals the number of nonnesting partitions of $[n]$ (and these are the n-th Catalan number), i.e.

$$|\{M \in \mathcal{M}_{2n} : \mathrm{cros}_2(M) = 0\}| = |\{M \in \mathcal{M}_{2n} : \mathrm{nest}_2(M) = 0\}|, \tag{3.9}$$

$$|\{\pi \in \mathcal{P}_n : \mathrm{cros}_2(\pi) = 0\}| = |\{\pi \in \mathcal{P}_n : \mathrm{nest}_2(\pi) = 0\}|. \tag{3.10}$$

In recent works, two generalizations of the latter identities have been investigated. The first one is an extension of results obtained by Sainte-Catherine, and Klazar and Noy on the distributions of 2-crossings and 2-nestings on matchings. In her thesis [**18**], Sainte-Catherine has shown that the statistics cros_2 and nest_2 are equidistributed over all matchings of $[2n]$, that is for any integer $\ell \geq 0$,

$$|\{M \in \mathcal{M}_{2n} : \mathrm{cros}_2(M) = \ell\}| = |\{M \in \mathcal{M}_{2n} : \mathrm{nest}_2(M) = \ell\}|, \tag{3.11}$$

i.e. in other words,

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(M)} = \sum_{M \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(M)}. \tag{3.12}$$

Klazar and Noy [**56**] have shown that actually a refinement of (3.12) is true, because the distribution of the joint statistic $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ is symmetric over $\mathcal{M}_{2n}$ that is

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{cros}_2(M)} q^{\mathrm{nest}_2(M)} = \sum_{M \in \mathcal{M}_{2n}} p^{\mathrm{nest}_2(M)} q^{\mathrm{cros}_2(M)}. \tag{3.13}$$

Equations (3.10) and (3.12)(3.13) motivated Kasraoui and Zeng to pose and solve the following questions : are the statistics cros_2 and nest_2 equidistributed over all partitions of $[n]$? Is the distribution of the joint statistic $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ symmetric over all partitions of $[n]$?

In the paper [**53**], Zeng and the author proved the following variant of (3.13) for set partitions. For S, T two subsets of $[n]$ satisfying $|S| = |T|$, let $\mathcal{P}_n(S,T)$ be the set of all partitions of $[n]$ whose set of lefthand (resp., righthand) endpoints of the arcs of π is equal to S (resp., T). For instance, the set partition drawn in Figure 3.9 belongs to $\mathcal{P}_n(S,T)$, with $S = \{1,2,3,5,6,9\}$ and $T = \{3,6,7,9,10,11\}$. Then Kasraoui and Zeng [**53**] have

proved that the distribution of the joint statistic $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ is symmetric over each $\mathcal{P}_n(S,T)$, that is

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}. \tag{3.14}$$

Summing over all pairs (S,T) in (3.14) we get

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}. \tag{3.15}$$

Also, summing over all pairs (S,T) satisfying $S\cap T=\emptyset$ and $S\cup T=[n]$ in (3.14) we recover Klazar and Noy's result (3.13). Note that recently, Chen, Wu and Yan [**10**] have generalized (3.14) (although it is not explicitly stated) by considering linked set partitions (see (3.29)).

The second generalization of (3.9) and (3.10) is due to Chen, Deng, Du, Stanley and Yan [**9**]. It states, remarkably, that for any $k\geq 2$ the number of k-noncrossing partitions (resp. matchings) of $[n]$ equals the number of k-nonnesting partitions (resp. matchings) of $[n]$. More generally, Chen et al. [**9**] proved that the distribution of the joint statistic $(\mathrm{cros}, \mathrm{nest})$ is symmetric over each $\mathcal{P}_n(S,T)$, that is

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}(\pi)} q^{\mathrm{nest}(\pi)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}(\pi)} q^{\mathrm{cros}(\pi)}. \tag{3.16}$$

In the paper [**60**], Krattenthaler has put Chen et al's result (3.16) in the larger context of the enumeration of increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes. Before stating his theorem, we recall the correspondence between simple graphs G with vertex set $[n]$ and 01-fillings of Δ_n, the triangular shape with $n-1$ cells in the bottom row, $n-2$ cells in the row above, etc., and 1 cell in the top-most row. See Figure 3.10 for an example in which $n=11$ (the filling and labeling of the corners should be ignored at this point). The correspondence consists in labeling in increasing order columns from left to right by $\{1,2,\ldots,n-1\}$ and rows from top to bottom by $\{2,\ldots,n\}$. Then assign the value 1 to the cell on column labeled i and row labeled j if and only if (i,j) is an edge of G. An illustration is given in Figure 3.10.

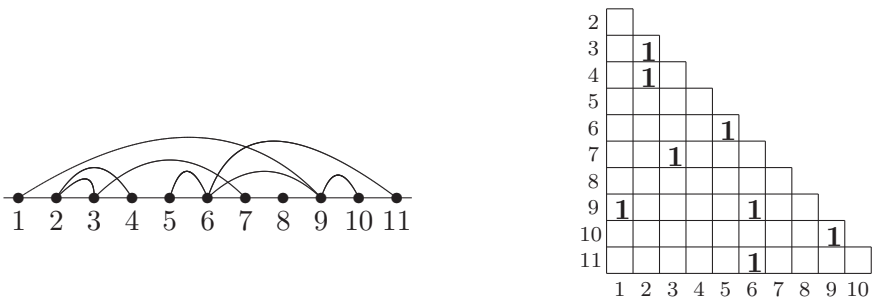


FIG. 3.10. A graph and the corresponding 01-filling

It is obvious that in this correspondence a k-crossing (resp., k-nesting) corresponds to a SE-chain (resp., NE-chain) of length k such that the smallest rectangle containing

the chain is contained in Δ_n. Here, a SE-chain (resp., NE-chain) of length k is a sequence of k 1's in the filling such that any 1 in the sequence is strictly below and to the right (resp., above and to the right) of the preceding 1 in the sequence. Moreover, it is obvious that this correspondence establishes a bijection between set partitions of $[n]$ and $\mathcal{N}(\Delta_n)$, the set of all 01-fillings of Δ_n in which every row and every column contains at most one 1. Therefore, Kasraoui and Zeng's result (3.14) and Chen et al's result (3.16) can be viewed as a property of symmetry of NE-chains and SE-chains over $\mathcal{N}(\Delta_n)$. Given a 01-filling F of Δ_n, denote by $\mathrm{se}(F)$ (resp., $\mathrm{ne}(F)$) the maximal k such that F has a SE-chain (resp., NE-chain) of length k, the smallest rectangle containing the chain being contained in F and by $\mathrm{se}_2(F)$ (resp., $\mathrm{ne}_2(F)$) the number of SE-chains (resp., NE-chains) of length 2 such that the smallest rectangle containing the chain is contained in F. Then the symmetry of the distributions of the joint statistics $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ and $(\mathrm{cros}, \mathrm{nest})$ over set partitions can be reformulated respectively as follows :

$$\sum_{F\in\mathcal{N}(\Delta_n)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)} = \sum_{F\in\mathcal{N}(\Delta_n)} p^{\mathrm{se}_2(F)}q^{\mathrm{ne}_2(F)} \tag{3.17}$$

$$\sum_{F\in\mathcal{N}(\Delta_n)} p^{\mathrm{ne}(F)}q^{\mathrm{se}(F)} = \sum_{F\in\mathcal{N}(\Delta_n)} p^{\mathrm{se}(F)}q^{\mathrm{ne}(F)}. \tag{3.18}$$

In the paper [**60**], Krattenthaler has shown that (3.18) remains true if we replace Δ_n by any Ferrers shape and he proposed to investigate more general arrangements. This was done successfully by Rubey [**76**] for moon polyominoes. It is thus natural to ask if (3.17) remains true when we replace Δ_n by any Ferrers shape or, more generally by any moon polyomino (we will answer this question by the affirmative) : this is the original motivation of our paper.

2.2. The main results.

A *polyomino* is an arrangement of square cells. It is *convex* if along any row of cells and along any column of cells there is no hole. It is *intersection free* if any two rows are comparable, i.e., one row can be embedded in the other by applying a vertical shift. Equivalently, it is *intersection free* if any two columns are comparable, i.e., one row can be embedded in the other by applying an horizontal shift. A *moon polyomino* is a convex and intersection free polyomino. An illustration is given in Figure 3.11.

Let T be a moon polyomino. A 01-*filling* F of T is an assignment of 0 or 1 to each cell of T. For convenience, we will omit the 0's when we draw the fillings. See Figure 3.11. The set of all 01-fillings of T will be denoted $\mathcal{N}^{01}(T)$. Recall that a SE-chain (resp., NE-chain) of length k in a 01-filling F of T is a sequence of k 1's in the filling such that any 1 in the sequence is strictly below and to the right (resp., above and to the right) of the preceding 1 in the sequence. A SE-chain (resp., NE-chain) of length 2 such that the smallest rectangle containing the chain is contained in F is said to be a *descent* (resp., an *ascent*). We will denote by $\mathrm{se}_2(F)$ and $\mathrm{ne}_2(F)$ the number of descents and ascents in F. For instance, if F is the filling drawn in Figure 3.10, we have $\mathrm{ne}_2(F) = 6$

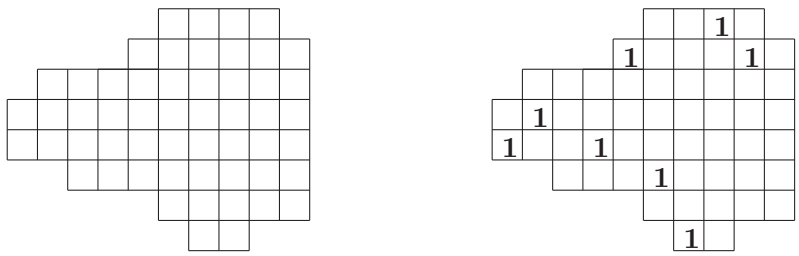


FIG. 3.11. A moon polyomino T and a 01-filling of T.

and $\mathrm{se}_2(F) = 4$, while for the filling in Figure 3.11 we have $\mathrm{ne}_2(F) = \mathrm{se}_2(F) = 4$. It is natural in view of the results presented in the introduction to ask if the statistics cros_2 and nest_2 are equidistributed over all simple graphs of $[n]$, or equivalently, if the statistics se_2 and ne_2 are equidistributed over $\mathcal{N}^{01}(\Delta_n)$ for any positive integer n. More generally, one can ask if the statistics se_2 and ne_2 are equidistributed over $\mathcal{N}^{01}(T)$ for any moon polyomino T. The answer to these questions is no by means of Proposition 3.32. However, it appears that for particular 01-fillings we have such an equidistribution and even more, namely the symmetry of the distribution of the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$. Let $\mathcal{N}^c(T)$ (resp., $\mathcal{N}^r(T)$) be the set of all 01-fillings of T with at most one 1 in each column (resp., row), and $\mathcal{N}(T) := \mathcal{N}^c(T) \cap \mathcal{N}^r(T)$ the set of all 01-fillings of T with at most one 1 in each column and in each row. Then our main result can be stated as follows.

THEOREM 3.17. *For any moon polyomino T, the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ is symmetrically distributed over $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{N}^c(T)$ and $\mathcal{N}^r(T)$, that is*

$$\sum_{F \in \mathcal{N}(T)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \sum_{F \in \mathcal{N}(T)} p^{\mathrm{se}_2(F)} q^{\mathrm{ne}_2(F)}, \tag{3.19}$$

$$\sum_{F \in \mathcal{N}^c(T)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \sum_{F \in \mathcal{N}^c(T)} p^{\mathrm{se}_2(F)} q^{\mathrm{ne}_2(F)}, \tag{3.20}$$

$$\sum_{F \in \mathcal{N}^r(T)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \sum_{F \in \mathcal{N}^r(T)} p^{\mathrm{se}_2(F)} q^{\mathrm{ne}_2(F)}. \tag{3.21}$$

It is worth noting that (3.20) and (3.21) are equivalent after a 90 degrees rotation or after a reflection across the NW-SE diagonal. In fact we have obtained much stronger results. Before stating these results, we need to introduce some definitions.

Let T be a moon polyomino with s rows and t columns. By convention, we always label the rows of T from top to bottom in increasing order by $\{1, 2, \ldots, s\}$ and the columns of T from left to right in increasing order by $\{1, 2, \ldots, t\}$. The row labeled i and the column labeled j will be denoted respectively by R_i and C_j. The *row-length sequence* of T, denoted $r(T)$, is the sequence $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ where r_i is the length (i.e., the number of cells) of the row R_i. Similarly, the *column-length sequence* of T, denoted $c(T)$, is the sequence $(c_1, c_2, \ldots, c_t)$ where c_i is the length of the column C_i. Clearly, the row-length and column-length sequences of any moon polyomino are always unimodal

sequences, that is there exist (unique) integers i_0 and j_0 such that $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_{i_0} > r_{i_0+1} \geq \cdots \geq r_s$ and $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{j_0} > c_{j_0+1} \geq \cdots \geq c_t$. The *upper part of* T, denoted $Up(T)$, is the set of rows R_i with $1 \leq i \leq i_0$, and the *lower part*, denoted $Low(T)$, the set of rows R_i, $i_0 + 1 \leq i \leq s$. Similarly, the *left part* of T, denoted $Left(T)$, is the set of columns C_i with $1 \leq i \leq j_0$, and the *right part*, denoted $Right(T)$, the set of columns C_i, $j_0+1 \leq i \leq t$. For instance, if T is the moon polyomino in Figure 3.11, we have $r(T) = (4, 6, 9, 10, 10, 8, 5, 2)$, $Up(T) = \{R_i : 1 \leq i \leq 5\}$ and $Low(T) = \{R_6, R_7, R_8\}$, and $c(T) = (2, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 7, 6)$, $Left(T) = \{C_i : 1 \leq i \leq 8\}$ and $Right(T) = \{C_9, C_{10}\}$. Define the relation $\prec$ on the rows of T as follows : $R_i \prec R_j$ if and only if

- $r_i < r_j$, or
- $r_i = r_j$, $R_i \in Up(T)$ and $R_j \in Low(T)$, or
- $r_i = r_j$, $R_i, R_j \in Up(T)$ and R_i is above R_j, or
- $r_i = r_j$, $R_i, R_j \in Low(T)$ and R_i is *below* R_j.

Similarly, define the relation $\prec$ (for convenience, we use the same symbol as for rows) on the columns of T defined by $C_i \prec C_j$ if and only if

- $c_i < c_j$, or
- $c_i = c_j$, $C_i \in Left(T)$ and $C_j \in Right(T)$, or
- $c_i = c_j$, $C_i, C_j \in Left(T)$ and C_i is to the left of C_j, or
- $c_i = c_j$, $C_i, C_j \in Right(T)$ and C_i is *to the right* of C_j.

It is easy to check that the relation $\prec$ is a total order both on rows and columns of T. For instance, if T is the moon polyomino in Figure 3.11 we have $R_8 \prec R_1 \prec R_7 \prec R_2 \prec R_6 \prec R_3 \prec R_4 \prec R_5$ and $C_1 \prec C_2 \prec C_3 \prec C_4 \prec C_5 \prec C_{10} \prec C_6 \prec C_9 \prec C_7 \prec C_8$.

Let F be a 01-filling of T. A cell of F is said to be *empty* if it has been assigned the value 0. We also say that a row (resp., column) of F is empty if all its cells are empty. The indices of the empty rows and columns of F are denoted $\mathrm{ER}(F)$ and $\mathrm{EC}(F)$, respectively. For instance if F is the 01-filling given in Figure 3.11, then $\mathrm{ER}(F) = \{3, 7\}$ and $\mathrm{EC}(F) = \{3, 10\}$.

Given an s-tuple $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ of nonnegative integers and A a subset of $[t]$, we denote by $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m})$ the set of 01-fillings in $\mathcal{N}^c(T)$ with exactly m_i 1's in row R_i and by $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ the set of fillings F in $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m})$ such that $\mathrm{EC}(F) = A$. For instance, the filling F given in Figure 3.11 belongs to $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, with $\mathbf{m} = (1, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 1)$ and $A = \{3, 10\}$. Similarly, given a t-tuple $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_t)$ of nonnegative integers and a subset B of $[s]$, we denote by $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n})$ the set of 01-fillings in $\mathcal{N}^r(T)$ with exactly n_i 1's in column C_i and by $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)$ the set of fillings F in $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n})$ such that $\mathrm{ER}(F) = B$. Also, for A, B two subsets of $[t]$ and $[s]$ respectively, we denote by $\mathcal{N}(T; A, B)$ the set of 01-fillings in $\mathcal{N}(T)$ such that $\mathrm{EC}(F) = A$ and $\mathrm{ER}(F) = B$.

For nonnegative integers n and k, let $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}$ be the p, q-Gaussian coefficient defined by

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{cases} \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!\,[n-k]_{p,q}!}, & \text{if } 0 \leq k \leq n\,; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where, as usual in p,q-theory, the p,q-integer $[r]_{p,q}$ is given by

$$[r]_{p,q} := \frac{p^i - q^i}{p-q} = (p^{i-1} + p^{i-2}q + \cdots + p^j q^{i-j-1} + \cdots + pq^{i-2} + q^{i-1}),$$

and the p,q-factorial $[r]_{p,q}!$ by $[r]_{p,q}! := \prod_{i=1}^{r} [i]_{p,q}$.

Let T be a moon polyomino with s rows and t columns, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ an s-tuple of nonnegative integers, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_t)$ a t-tuple of nonnegative integers, and A, B two subsets of $[t]$ and $[s]$ respectively. Suppose $R_{i_1} \prec R_{i_2} \prec \cdots \prec R_{i_s}$ and $C_{j_1} \prec C_{j_2} \prec \cdots \prec C_{j_t}$, where $\prec$ is the total order on rows and columns we have defined previously. Then for $u \in [s]$ and $v \in [t]$, define $h_{i_u}(T, \mathbf{m}; A)$ and $h'_{j_v}(T, \mathbf{n}; B)$ by

$$h_{i_u}(T, \mathbf{m}; A) = r_{i_u} - a_{i_u} - (m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_{u-1}}), \tag{3.22}$$

$$h'_{j_v}(T, \mathbf{n}; B) = c_{j_v} - b_{j_v} - (n_{j_1} + n_{j_2} + \cdots + n_{j_{v-1}}), \tag{3.23}$$

where r_i is the length of the row R_i and a_i is the number of indices $k \in A$ such that the column C_k intersect the row R_i, and c_j is the length of the column C_j and b_j is the number of indices $k \in B$ such that the row R_k intersect the column C_j. If there is no ambiguity, we will set $h_i = h_i(T, \mathbf{m}; A)$ and $h'_j = h'_j(T, \mathbf{n}; B)$. An example will be given at the end of the section, as the definitions are a bit heavy to digest.

The following result gives the distribution of the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ over $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ and $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)$.

THEOREM 3.18. *For any moon polyomino T with s rows and t columns, the distributions of the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ over each $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ and $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)$ are given by*

$$\sum_{F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \prod_{d=1}^{s} \begin{bmatrix} h_d(T, \mathbf{m}; A) \\ m_d \end{bmatrix}_{p,q}, \tag{3.24}$$

$$\sum_{F \in \mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \prod_{d=1}^{t} \begin{bmatrix} h'_d(T, \mathbf{n}; B) \\ n_d \end{bmatrix}_{p,q}, \tag{3.25}$$

where h_d and h'_d are defined by (3.22) *and* (3.23).

As an immediate consequence (take $\mathbf{m} \in \{0,1\}^s$ or $\mathbf{n} \in \{0,1\}^t$ in Theorem 3.18), we obtain the following result.

COROLLARY 3.19. *For any moon polyomino T with s rows and t columns, the distribution of the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ over $\mathcal{N}(T; A, B)$ is given by*

$$\sum_{F \in \mathcal{N}(T; A, B)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \prod_{d \in [s] \setminus B} [h_d]_{p,q} = \prod_{d \in [t] \setminus A} [h'_d]_{p,q}, \tag{3.26}$$

where h_d and h'_d are defined by (3.22) *and* (3.23).

Actually, it is not difficult to show that (3.25) is the exact counterpart of (3.24) after a reflection across the NW-SE diagonal. Indeed, if T is a moon polyomino with

s rows and t columns, then the reflected arrangement of cells T' is also a moon polyomino but with t rows and s columns and we have $h_d(T, \mathbf{m}; A) = h'_d(T', \mathbf{m}; A)$ for any positive integer d. Moreover the "reflection across the NW-SE diagonal" establishes a bijection between $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ onto $\mathcal{N}^r(T', \mathbf{m}; A)$ which sends the joint statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ onto $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$. See Figure 3.12 for an illustration.

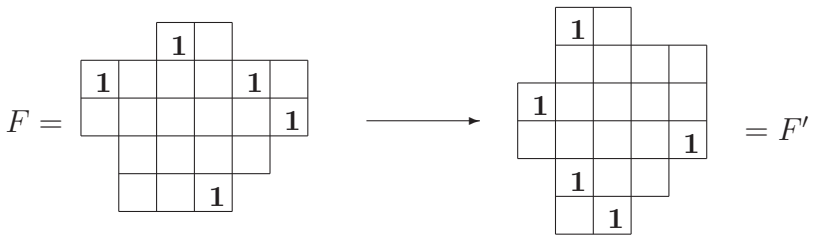


FIG. 3.12. A filling and its image after a reflection across the NW-SE diagonal.

Since the p, q-integer $[n]_{p,q}$ is symmetric in the variables p and q for any nonnegative integer n, we have the following results.

COROLLARY 3.20. *For any moon polyomino T, the joint statistic* $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ *is symmetrically distributed over* $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)$ *and* $\mathcal{N}(T; A, B)$.

Summing over all $\mathbf{m}$ and $\mathbf{n}$ in Corollary 3.20, we get the following result.

COROLLARY 3.21. *For any moon polyomino T, the joint statistic* $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ *is symmetrically distributed over* $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m})$ *and* $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n})$.

For any nonnegative integer k denote by $\mathcal{N}^c(T; k)$, $\mathcal{N}^r(T; k)$ and $\mathcal{N}(T; k)$ the set of 01-fillings in $\mathcal{N}^c(T)$, $\mathcal{N}^r(T)$ and $\mathcal{N}(T)$ with exactly k ones, respectively. Summing in Corollary 3.21 over all $\mathbf{m}$ such that $\sum_i m_i = k$ and over all $\mathbf{n}$ such that $\sum_i n_i = k$, we get the following result.

COROLLARY 3.22. *For any moon polyomino T and nonnegative integer k, the joint statistic* $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ *is symmetrically distributed over* $\mathcal{N}^c(T; k)$ *and* $\mathcal{N}^r(T; k)$.

By a similar reasoning, we also get the following result.

COROLLARY 3.23. *For any moon polyomino T and nonnegative integer k, the joint statistic* $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ *is symmetrically distributed over* $\mathcal{N}(T; k)$.

Summing over all nonnegative integers k in Corollary 3.22 and Corollary 3.23, we recover Theorem 3.17.

Finally, it is worth noting that one can derive (the details are left to the reader) from Theorem 3.18 the following enumerative results in the spirit of works of Johnsson [**47**] and Rubey [**76**] (see the last section of this paper).

COROLLARY 3.24. *Let T be a moon polyomino. For any moon polyomino T^* obtained from T by permuting the rows (or the columns) of T and any nonnegative integers j, k and ℓ, we have*

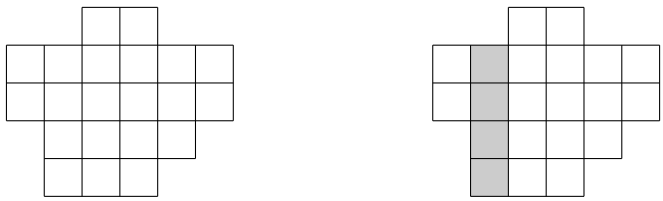
$$\begin{aligned}&|\{F \in \mathcal{N}^c(T) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\,,\ \mathrm{se}_2(F) = \ell\}|\\ =&|\{F \in \mathcal{N}^c(T^*) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\,,\ \mathrm{se}_2(F) = \ell\}|\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&|\{F \in \mathcal{N}(T) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\,,\ \mathrm{se}_2(F) = \ell\}|\\ =&|\{F \in \mathcal{N}(T^*) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\,,\ \mathrm{se}_2(F) = \ell\}|.\end{aligned}$$

The paper is organized as follows. In Section 3, we show how the results on the symmetry of the joint statistic $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ presented in the introduction can be obtained from the above results. In Section 4, we prove Theorem 3.17 and in Section 5, we present a bijective proof of Corollary 3.20. Finally, we conclude this paper with some remarks.

We end this section by illustrating Theorem 3.18. Suppose T is the moon polyomino given below and $A = \{2\}$.



Then we have

- $R_{i_1} \prec R_{i_2} \prec R_{i_3} \prec R_{i_4} \prec R_{i_5}$ with $i_1 = 1$, $i_2 = 5$, $i_3 = 4$, $i_4 = 2$, $i_5 = 3$.
- The column C_2 intersect the rows R_2, R_3, R_4, R_5, thus $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$.

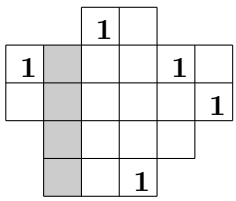
Suppose $\mathbf{m} = (1, 2, 1, 0, 1)$. We then have

$$\begin{aligned}h_{i_1} &= h_1 = r_1 - a_1 = 2,\\ h_{i_2} &= h_5 = r_5 - a_5 - m_1 = 1,\\ h_{i_3} &= h_4 = r_4 - a_4 - (m_1 + m_5) = 1,\\ h_{i_4} &= h_2 = r_2 - a_2 - (m_1 + m_5 + m_4) = 3,\\ h_{i_5} &= h_3 = r_3 - a_3 - (m_1 + m_5 + m_4 + m_2) = 1.\end{aligned}$$

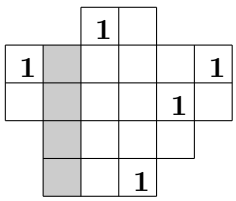
It then follows from Theorem 3.18 that

$$\sum_{F \in \mathcal{N}^c(T,\mathbf{m};A)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)} = \prod_{j=1}^{5} \begin{bmatrix} h_j \\ m_j \end{bmatrix}_{p,q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,q} = p^3 + 2p^2q + 2pq^2 + q^3.$$

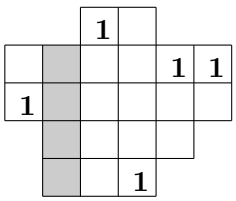
The fillings in $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ and the corresponding values of ne_2 and se_2 are listed below.



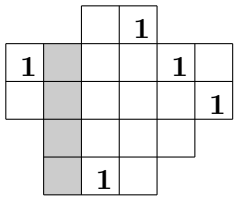
$\mathrm{ne}_2 = 0$, $\mathrm{se}_2 = 3$



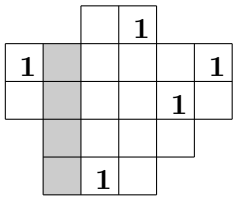
$\mathrm{ne}_2 = 1$, $\mathrm{se}_2 = 2$



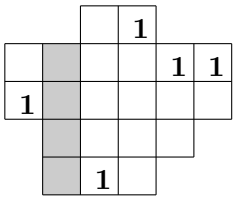
$\mathrm{ne}_2 = 2$, $\mathrm{se}_2 = 1$



$\mathrm{ne}_2 = 1$, $\mathrm{se}_2 = 2$



$\mathrm{ne}_2 = 2$, $\mathrm{se}_2 = 1$



$\mathrm{ne}_2 = 3$, $\mathrm{se}_2 = 0$

Summing up we get $\sum_{F\in\mathcal{N}^c(T,\mathbf{m};A)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)} = p^3 + 2p^2q + 2pq^2 + q^3$, as desired.

2.3. Symmetry of 2-crossings and 2-nestings in linked partitions,set partitions and matchings.

In this section we show how results on the enumeration of 2-crossings and 2-nestings can be recovered from the results obtained in this paper. Let G be a simple graph on $[n]$. The multiset of lefthand (resp., righthand) endpoints of the arcs of G will be denoted by left(G) (resp., right(G)). For instance, if G is the graph drawn in Figure 3.10, we have left(G) $= \{1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 9\}$ and right(G) $= \{3, 4, 6, 7, 9, 9, 10, 11\}$. For S and T two multisubsets of $[n]$, we will denote by $\mathcal{G}_n(S,T)$ the set of simple graphs G on $[n]$ satisfying left(G) = S and right(G) = T. Also, if H is a set, the multiplicity of i in H will be denoted $mul_i(H)$. For (U,V) a pair of multisubsets of $[n]$ and $i = 1..n$, set

$$h_i(U,V) = |\{j \in U \mid j < i\}| - |\{j \in V \mid j < i\}|$$
$$h'_i(U,V) = |\{j \in V \mid j > i\}| - |\{j \in U \mid j > i\}|.$$

We now enounce the main result of this section.

COROLLARY 3.25. *Let (S,T) be a pair of multisubsets of $[n]$.*

(1) *If all elements of S have multiplicity 1, then*

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(F)}q^{\mathrm{cros}_2(F)} = \sum_{G\in\mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(F)}q^{\mathrm{nest}_2(F)} = \prod_{i=2}^{n} \begin{bmatrix} h_i(S,T) \\ mul_i(T) \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.27}$$

(2) *If all elements of T have multiplicity 1, then*

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(F)}q^{\mathrm{cros}_2(F)} = \sum_{G\in\mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(F)}q^{\mathrm{nest}_2(F)} = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} h'_i(S,T) \\ mul_i(S) \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.28}$$

Consequently, the joint statistic $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ *is symmetrically distributed over* $\mathcal{G}_n(S,T)$ *if*

– *either all elements of S have multiplicity* 1,
– *either all elements of T have multiplicity* 1.

Proof. We will only prove (3.27), leaving the "dual version" (3.28) to the reader.

Let Γ be the map, described in the introduction (see Figure 3.10 for an illustration), which associates to each simple graph G with vertex set $[n]$ the 01-filling $F = \Gamma(G)$ of Δ_n. It is obvious that the number of 1's in the column C_i (resp., row R_j) of F is equal to the multiplicity of i in left(G) (resp., $j+1$ in right(G)) (as usual, columns are labeled from left to right by C_1, C_2,..., C_{n-1} and rows from top to bottom by R_1, R_2,..., R_{n-1}). Therefore, if S is a subset of $[n]$ and T a multisubset of $[n]$, the map Γ establishes a bijection from $\mathcal{G}_n(S,T)$ onto $R := \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, with $\mathbf{m} = (mul_i(T))_{i=2\ldots n}$ and $A := [n-1] \setminus S$. Since Γ sends the joint statistic $(\mathrm{nest}_2, \mathrm{cros}_2)$ onto $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$, we then have

$$\sum_{G \in \mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(F)} q^{\mathrm{cros}_2(F)} = \sum_{F \in \mathcal{N}^c(\Delta_n, \mathbf{m}; A)} p^{\mathrm{ne}_2(F)} q^{\mathrm{se}_2(F)},$$

and then by applying Theorem 3.18, we get

$$\begin{aligned}\sum_{G \in \mathcal{G}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(F)} q^{\mathrm{cros}_2(F)} &= \prod_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A) \\ m_i \end{bmatrix}_{p,q} = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A) \\ mul_{i+1}(T) \end{bmatrix}_{p,q} \\ &= \prod_{i=2}^{n} \begin{bmatrix} h_{i-1}(\Delta_n, \mathbf{m}; A) \\ mul_i(T) \end{bmatrix}_{p,q}.\end{aligned}$$

It then remains to show in view of the latter equality that for $i = 1 \ldots n-1$, we have $h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A) = h_{i+1}(S,T)$. Since the rows of Δ_n are ordered as follows "$R_1 \prec R_2 \prec \cdots \prec R_{n-1}$", where " $\prec$ " is the order on rows defined previously in Section 2, and $r_i = i$ for any i, $1 \le i \le n-1$, we have by definition of $h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A)$,

$$h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A) = i - a_i - (m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-1}),$$

where a_i is the number of indices $k \in A$ such that the column C_k of Δ_n intersect the row R_i of Δ_n. Now, it is immediate to see that for any k the row C_k of Δ_n intersects exactly the rows R_j, $j = k \ldots n-1$, of Δ_n. It follows that for $i = 1 \ldots n-1$:

$$a_i = |\{k \in A\,;\ k \le i\}| = |\{k \notin S\,;\ k \le i\}| = i - |\{k \in S\,;\ k \le i\}|.$$

We also have that $\sum_{j=1}^{i-1} m_j = \sum_{j=1}^{i-1} mul_{j+1}(T) = \sum_{j=2}^{i} mul_j(T)$ is the number of elements of the multiset T which are smaller or equal to i, that is

$$\sum_{j=1}^{i-1} m_j = |\{k \in T\,;\ k \le i\}|.$$

Finally, we have

$$h_i(\Delta_n, \mathbf{m}; A) = |\{k \in S\,;\ k \le i\}| - |\{k \in T\,;\ k \le i\}|,$$

which is exactly $h_{i+1}(S,T)$. This concludes the proof of (3.27). $\square$

It is worth noting that Equation (3.28) is actually equivalent to a result of Chen et al. [**10**, Theorem 3.5] on the enumeration of 2-crossings and 2-nestings in linked set partitions. Let E and F be two finite sets of positive integers. We say that E and F are *nearly disjoint* if for every $i \in E \cap F$, one of the following holds :

(a) $i = \min(E)$, $|E| > 1$ and $i \neq \min(F)$, or

(b) $i = \min(F)$, $|F| > 1$ and $i \neq \min(E)$.

A *linked partition* (see [**10**]) of $[n]$ is a collection of non-empty and pairwise nearly disjoint subsets whose union is $[n]$. The set of all linked partitions of $[n]$ will be denoted by $\mathcal{LP}_n$. The linear representation G_π of a linked partition $\pi \in \mathcal{LP}_n$ is the graph on $[n]$ where i and j are connected by an arc if and only if j lies in a block B with $i = \mathrm{Min}(B)$. An illustration is given in Figure 3.13. Clearly, the map $\pi \mapsto G_\pi$ establishes a bijection

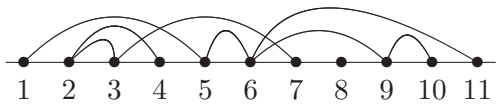


FIG. 3.13. Linear representation of $\pi = \{1,5\}\{2,3,4\}\{3,7\}\{5,6\}\{6,9,11\}\{8\}\{9,10\}$

between linked set partitions and simple graphs G such that all elements of right(G) have multiplicity one. For S a multisubset of $[n]$ and T a subset of $[n]$, denote by $\mathcal{LP}_n(S,T)$ the set $\{\pi \in \mathcal{LP}_n \,:\, \mathrm{left(G_\pi) = S}\,,\, \mathrm{right(G_\pi) = T}\}$. Then (3.28) can be rewritten

$$\sum_{\pi \in \mathcal{LP}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(G_\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(G_\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{LP}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(G_\pi)} q^{\mathrm{cros}_2(G_\pi)} = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{bmatrix} h'_i(S,T) \\ mul_i(S) \end{bmatrix}_{p,q}, \tag{3.29}$$

which is equivalent to a result of Chen et al. [**10**, Theorem 3.5].

Now consider the map $\pi \mapsto St_\pi$ which associates to each set partition its standard representation (see Figure 3.9). Clearly, this map establishes a bijection between set partitions and simple graphs G such that all elements of right(G) and left(G) have multiplicity one. Applying (3.27) with T a set (i.e. $mul_i(T) \in \{0,1\}$ for any i) we recover (3.14) and the following identity which is implicit in [**53**, Section 4] :

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{cros}_2(\pi)} q^{\mathrm{nest}_2(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n(S,T)} p^{\mathrm{nest}_2(\pi)} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)} = \prod_{i \in T} [h_i(S,T)]_{p,q} = \prod_{i \in \mathcal{S}} [h'_i(S,T)]_{p,q}. \tag{3.30}$$

2.4. Proof of Theorem 3.18.

As explained in Section 2, it suffices to prove the first part of Theorem 3.18 that is the identity (3.24). Throughout this section, T is a moon polyomino with s rows and t columns, row-length sequence $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ is an s-tuple of nonnegative integers and A is a subset of $[t]$. Also, for convenience we will set $h_i := h_i(T, \mathbf{m}; A)$ for any $i \in [s]$.

2.4.1. *Preliminaries.* Let i, $1 \leq i \leq s$, be an integer. The *i-th rectangle of T*, is the greatest rectangle contained in T whose top (resp., bottom) row is R_i if $R_i \in Up(T)$ (resp., $R_i \in Low(T)$). An illustration is given in Figure 3.14.

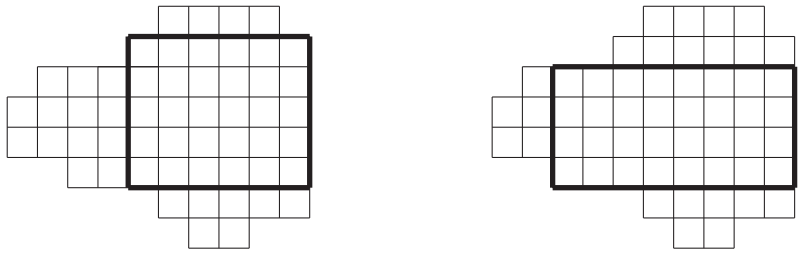


FIG. 3.14. *left* : the second rectangle, *right* : the 6-th rectangle.

The following result will be useful for the rest of the paper. It is not difficult (the proof relies on the convexity of a moon polyomino) but heavy. Therefore, it is left to the reader.

LEMMA 3.26. *Let R_i and R_j be two rows of T. Then, all the columns of the j-th rectangle of T intersect the row R_i if and only if $R_j \prec R_i$.*

As an illustration of the above result, one can check that all the columns of the second rectangle of the moon polyomino T drawn in Figure 3.14 intersect the row R_6 of T and that $R_2 \prec R_6$ (since $r_2 < r_6$).

Let F be a 01-filling of T in $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m})$. The *coloring of F* is the colored filling obtained from F by :

– coloring the cells of the empty columns,
– for $i = 1, \ldots, s$, coloring the cells that are contained in the i-th rectangle and
  – if $R_i \in Up(T)$, below a 1 of R_i.
  – if $R_i \in Low(T)$, above a 1 of R_i.

An illustration is given in Figure 3.15. Throughout this paper, we identify a filling with its coloring. For instance, "the cell c of the filling F is uncolored" means that "the cell c is uncolored in the coloring of F".

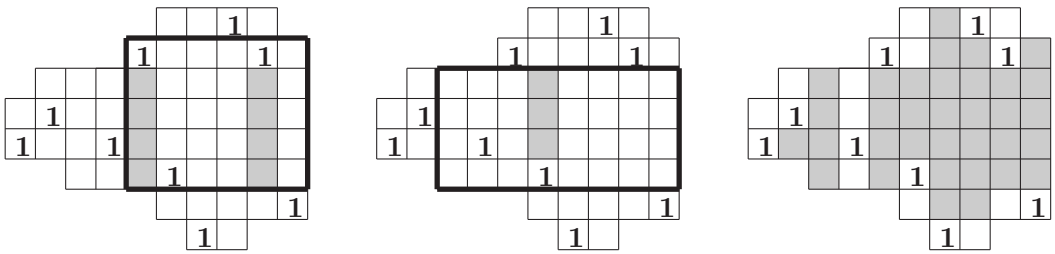


FIG. 3.15. *left* : coloring induced by R_2, *center* : coloring induced by R_6, *right* : full coloring.

The interest of coloring a 01-filling relies on the following result. Let c be a cell of F. If c contains a 1 denote by $\mathrm{luc}(c;F)$ (resp., $\mathrm{ruc}(c;F)$) the number of uncolored empty cells which are both to the left (resp., right) and in the same row as the cell c in F. If c is empty, set $\mathrm{luc}(c;F) = \mathrm{ruc}(c;F) = 0$.

PROPOSITION 3.27. *Let $F \in \mathcal{N}^c(T)$ and c be a cell of R_i containing a 1. Then* $\mathrm{luc}(c;F)$ *(resp.,* $\mathrm{ruc}(c;F)$*) is equal to*

- *if $R_i \in Up(T)$: the number of ascents (resp., descents) contained in the i-th rectangle of F whose North-east (resp., North-west)* 1 *is in c,*
- *if $R_i \in Low(T)$: the number of descents (resp. ascents) contained in the i-th rectangle of F whose South-east (resp., South-west)* 1 *is in c.*

Proof of Proposition 3.27. Suppose $R_i \in Up(T)$ and let c be a cell of R_i containing a 1.

Let c' be an empty uncolored cell in R_i to the left (resp., right) of c. Suppose c' belongs to the column C_k. By the definition of the coloring of polyominoes, the column C_k contains a 1 (otherwise all the cells of C_k, in particular c', would be colored). Moreover, the cell c'' of C_k containing a 1 must belong to a row R_j with $R_i \prec R_j$ (otherwise all the cells of C_k in the i-th rectangle of T, in particular c', would be colored), and thus c'' belongs to the i-th rectangle. Since $R_i \in Up(T)$, the row R_i is the top row of the i-th rectangle of T, and thus the cell c'' is to the South-west (resp., South-east) of the cell c. Finally, the sequence $c''c$ (resp., cc'') is an ascent (resp., a descent) contained in the i-th rectangle of F.

Conversely, let c'' be a cell of F such that the pair $c''c$ (resp., cc'') is an ascent (resp., descent) of F contained in the i-th rectangle of F. Suppose c'' belongs to C_k and let c' be the cell of F at the intersection of the column C_k and the row R_i. Clearly, C_k is empty (there is at most one 1 in each column). It remains to show that the cell c' is uncolored. This follows from the fact that c'' belongs to a row R_j with $R_i \prec R_j$ (since c'' is in the i-th rectangle). We thus have proved the first part of Proposition 3.27.

The second part can be proved by a similar reasoning. Therefore, the details are left to the reader.

□

Note that Proposition 3.27 lead to the following decompositions of ne_2 and se_2 :

$$\mathrm{ne}_2(F) = \sum_{c \in Up(F)} \mathrm{luc}(c;F) + \sum_{c \in Low(F)} \mathrm{ruc}(c;F), \tag{3.31}$$

$$\mathrm{se}_2(F) = \sum_{c \in Up(F)} \mathrm{ruc}(c;F) + \sum_{c \in Low(F)} \mathrm{luc}(c;F). \tag{3.32}$$

We will need the following result in the next section.

LEMMA 3.28. *Let $F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$. Then, there are exactly h_i uncolored cells in row R_i of (the coloring of) F. Consequently, the row R_i of F has exactly $h_i - m_i$ uncolored empty cells.*

Proof. Recall that

$$h_i = r_i - a_i - \sum_{j\,:\,R_j \prec R_i} m_j,$$

where r_i is the length of R_i and a_i is the number of indices $k \in A$ such that the column C_k intersect the row R_i. Therefore, it suffices to show that the row R_i has exactly $a_i + \sum_{j:R_j \prec R_i} m_j$ colored cells. By definition of the coloring of F, a cell c of R_i can be colored for only two reasons :

- the cell c belongs to a column c_k with $k \in A$: there are exactly a_i such cells c in R_i.
- the cell c is above or below a cell, containing a 1, which belongs to a row R_j such that the j-th rectangle of T contains the cell c. By Lemma 3.26, this is possible if and only if $R_j \prec R_i$. Therefore, there are exactly $\sum_{j:R_j \prec R_i} m_j$ such cells c in R_i.

Finally, the row R_i has exactly $a_i + \sum_{j:R_j \prec R_i} m_j$ colored cells as claimed. □

2.4.2. *A correspondence between* 01*-fillings and sequences of compositions.* If n and k are nonnegative integers, we will denote by $\mathcal{C}_k(n)$ the set of compositions of n into k nonnegative parts. Recall that a element in $\mathcal{C}_k(n)$ is just a k-tuple $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ of nonnegative integers such that $b_1 + b_2 + \cdots + b_k = n$. The proof of Theorem 3.18 is based on a bijection

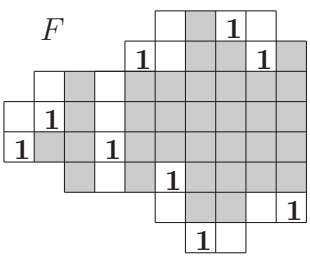
$$\Psi : \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A) \to \mathcal{C}_{m_1+1}(h_1 - m_1) \times \mathcal{C}_{m_2+1}(h_2 - m_2) \times \cdots \times \mathcal{C}_{m_s+1}(h_s - m_s)$$

which keeps track of the statistics ne_2 and se_2.

Algorithm for Ψ. For $F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ associate the sequence of compositions $\Psi(F) := (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \ldots, \mathrm{c}^{(s)})$, where for $i = 1, \ldots, s$, the composition $\mathrm{c}^{(i)}$ is defined by

- $\mathrm{c}^{(i)} = (h_i)$ if $m_i = 0$, otherwise
- $\mathrm{c}^{(i)} = (\mathrm{c}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{c}_{m_i+1}^{(i)})$ where $\mathrm{c}_1^{(i)}$ (resp., $\mathrm{c}_j^{(i)}$ for $2 \le j \le m_i$, $\mathrm{c}_{m_i+1}^{(i)}$) is the number of uncolored empty cells in R_i to the left of the first 1 (resp., between the j-th 1 and the $(j+1)$-th 1, to the right of the last 1) of R_i in the coloring of F.

An illustration is given in Figure 3.21.



$\xrightarrow{\Psi}$

$\mathrm{c}^{(1)} = (1, 1)$
$\mathrm{c}^{(2)} = (0, 1, 0)$
$\mathrm{c}^{(3)} = (2)$
$\mathrm{c}^{(4)} = (1, 1)$
$\mathrm{c}^{(5)} = (0, 0, 0)$
$\mathrm{c}^{(6)} = (1, 0)$
$\mathrm{c}^{(7)} = (2, 0)$
$\mathrm{c}^{(8)} = (0, 1)$

FIG. 3.16. The mapping Ψ

It follows immediately from Lemma 3.28 that Ψ is well defined. In order to show that Ψ is bijective, we describe its inverse. Let $\mathbf{c} = (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \ldots, \mathrm{c}^{(s)})$ in $\mathcal{C}_{m_1+1}(h_1 - m_1) \times \mathcal{C}_{m_2+1}(h_2 - m_2) \times \cdots \times \mathcal{C}_{m_s+1}(h_s - m_s)$. Then define the 01-filling $\Upsilon(\mathbf{c})$ of T by the following process.

(1) Color the columns indexed by the set A of the polyomino T. Denote by F_0 the colored polyomino obtained.

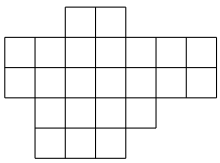
(2) Construct a sequence of colored fillings $(F_j)_{j=1\dots s}$ of T as follows. Suppose $R_{i_1} \prec R_{i_2} \prec \cdots \prec R_{i_s}$. Then for j from 1 to s, the (colored) filling F_j is obtained from F_{j-1} as follows :

- if $m_{i_j} = 0$, do nothing,
- else, insert m_{i_j} 1's in the i_j-th row of F_{j-1} in such a way that the number of uncolored empty cells
  - to the left of the first 1 is $\mathrm{c}_1^{(i_j)}$,
  - between the u-th 1 and the $(u+1)$-th 1, $1 \le u \le m_{i_j} - 1$, is $\mathrm{c}_{u+1}^{(i_j)}$,
  - to the right of the last 1 is $\mathrm{c}_{m_{i_j}+1}^{(i_j)}$.

  Next, color the cells which are both below (resp., above) the new 1's inserted in R_{i_j} and contained in the i_j-th rectangle if $R_{i_j} \in Up(T)$ (resp., $R_{i_j} \in Low(T)$).

(3) Set $\Upsilon(\mathbf{c}) = F_s$.

For a better understanding, we give an example. Suppose T is the moon polyomino given below, $A = \{2\}$ and $\mathbf{m} = (1, 2, 1, 0, 1)$. Note that $R_1 \prec R_5 \prec R_4 \prec R_2 \prec R_3$.



Suppose $\mathbf{c} = (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \mathrm{c}^{(3)}, \mathrm{c}^{(4)}, \mathrm{c}^{(5)})$ with $\mathrm{c}^{(1)} = (1, 0)$, $\mathrm{c}^{(2)} = (1, 0, 1)$, $\mathrm{c}^{(3)} = (0, 0, 0)$, $\mathrm{c}^{(4)} = (0)$ and $\mathrm{c}^{(5)} = (0, 0)$, then the step by step construction of $\Upsilon(\mathbf{c})$ is given in Figure 3.17.

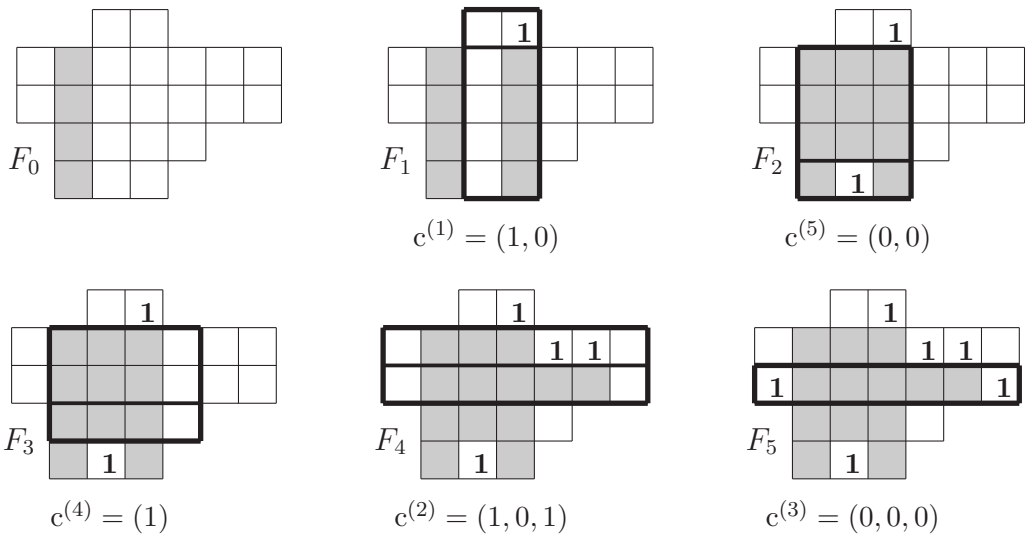


FIG. 3.17. The step-by-step construction of $\Upsilon(\mathbf{c})$

In order to prove that Υ is well defined, it suffices to show that for any j such that $m_{i_j} \neq 0$ the construction of F_j is possible. Again, this follows from Lemma 3.28. Indeed, by applying Lemma 3.28 to F_{j-1}, we get that the cell R_{i_j} in F_{j-1} has exactly h_i uncolored cells and thus the construction of F_j is possible since $c^{(i_j)} \in \mathcal{C}_{m_{i_j}+1}(h_{i_j} - m_{i_j})$. It is easily seen that Υ is the inverse of Ψ, and thus Ψ is bijective. Now let $\mathbf{c} = (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \ldots, \mathrm{c}^{(s)}) \in \mathcal{C}_{m_1+1}(h_1-m_1)\times\mathcal{C}_{m_2+1}(h_2-m_2)\times\cdots\times\mathcal{C}_{m_s+1}(h_s-m_s)$ and $F = \Upsilon(\mathbf{c})$ be the corresponding 01-filling. Let i be an integer in $[s]$ and x be the cell of the i-th row R_i of F which contains the j-th 1 of R_i (from left to right as usual). It then follows from the definition of Υ that

$$\mathrm{luc}(x; F) = \mathrm{c}_1^{(i)} + \mathrm{c}_2^{(i)} + \cdots + \mathrm{c}_j^{(i)} \quad \text{and} \quad \mathrm{ruc}(x; F) = \mathrm{c}_{j+1}^{(i)} + \mathrm{c}_{j+2}^{(i)} + \cdots + \mathrm{c}_{m_i+1}^{(i)}.$$

We summarize the main properties of Ψ in Theorem 3.29.

THEOREM 3.29. *The map $\Psi : \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A) \to \mathcal{C}_{m_1+1}(h_1 - m_1) \times \cdots \times \mathcal{C}_{m_s+1}(h_s - m_s)$ is a bijection. Moreover, for any $F \in \mathcal{N}^c(T, \boldsymbol{m}; A)$, if x is the cell of F that contains the j-th 1 (from left to right) of the row R_i and $\Psi(F) = (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \cdots, \mathrm{c}^{(s)})$, we have*

$$\mathrm{luc}(x; F) = \mathrm{c}_1^{(i)} + \mathrm{c}_2^{(i)} + \cdots + \mathrm{c}_j^{(i)} \quad \textit{and} \quad \mathrm{ruc}(x; F) = \mathrm{c}_{j+1}^{(i)} + \mathrm{c}_{j+2}^{(i)} + \cdots + \mathrm{c}_{m_i+1}^{(i)}.$$

2.4.3. *Proof of* (3.24). The proof is based on the correspondence Ψ and the following identity.

LEMMA 3.30. *For any integers $n \geq 1$, $k \geq 0$,*

$$\sum_{(\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,\ldots,\mathrm{c}_{k+1})\in\mathcal{C}_{k+1}(n)} \prod_{j=1}^{k} p^{\sum_{r=1}^{j} \mathrm{c}_r} q^{\sum_{r=j+1}^{k+1} \mathrm{c}_r} = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.33}$$

Proof. Denote the lefthand side of (3.33) by $c_{k+1}(n)$, and for a composition $\pi = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_{k+1}) \in \mathcal{C}_{k+1}(n)$, set

$$w(\pi) = \prod_{j=1}^{k} p^{\sum_{r=1}^{j} \mathrm{c}_r} q^{\sum_{r=j+1}^{k+1} \mathrm{c}_r}.$$

Let $\mathcal{C}'_k(n)$ (resp., $\mathcal{C}''_k(n)$) consist of those $\pi \in \mathcal{C}_k(n)$ whose last part is zero (resp., positive). Therefore, we have

$$c_{k+1}(n) = \sum_{\pi\in\mathcal{C}'_{k+1}(n)} w(\pi) + \sum_{\pi\in\mathcal{C}''_{k+1}(n)} w(\pi) \tag{3.34}$$

It is obvious that

$$\sum_{\pi\in\mathcal{C}'_{k+1}(n)} w(\pi) = p^n c_k(n) \quad \text{and} \quad \sum_{\pi\in\mathcal{C}''_{k+1}(n)} w(\pi) = q^k c_{k+1}(n-1),$$

and hence in view of (3.34), we have

$$c_{k+1}(n) = p^n c_k(n) + q^k c_{k+1}(n-1). \tag{3.35}$$

Now, it is straightforward to verify that

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} + q^k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.36}$$

From the equations (3.35) and (3.36), and the "initial conditions" $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_{p,q} = c_1(n) = 1$, Lemma 3.30 follows by induction. $\square$

Suppose $Up(T) = \{R_1, R_2, \ldots, R_{i_0}\}$ and $Low(T) = \{R_{i_0+1}, \ldots, R_s\}$. By (3.31) and (3.32) we have

$$\begin{aligned}\sum_{F\in\mathcal{N}^c(T,\mathbf{m};A)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)} &= \sum_{F\in\mathcal{N}^c(T,\mathbf{m};A)} \prod_{x\in Up(T)} p^{\mathrm{luc}(x;F)}q^{\mathrm{ruc}(x;F)} \prod_{x\in Low(T)} p^{\mathrm{ruc}(x;F)}q^{\mathrm{luc}(x;F)} \\ &= \sum_{F\in\mathcal{N}^c(T,\mathbf{m};A)} \prod_{i=1}^{i_0}\prod_{x\in R_i} p^{\mathrm{luc}(x;F)}q^{\mathrm{ruc}(x;F)} \prod_{i=i_0+1}^{s}\prod_{x\in R_i} p^{\mathrm{ruc}(x;F)}q^{\mathrm{luc}(x;F)}.\end{aligned}$$

Let $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{m_1+1}(h_1 - m_1) \times \cdots \times \mathcal{C}_{m_s+1}(h_s - m_s)$. It follows from Theorem 3.29 that the right-hand side of the last equality can be rewritten

$$\begin{aligned}&\sum_{(\mathrm{c}^{(1)},\mathrm{c}^{(2)},\ldots,\mathrm{c}^{(s)})\in\mathcal{C}} \prod_{i=1}^{i_0}\left(\prod_{j=1}^{m_i} p^{\sum_{r=1}^{j}\mathrm{c}_r^{(i)}}\, q^{\sum_{r=j+1}^{m_i+1}\mathrm{c}_r^{(i)}}\right) \prod_{i=i_0+1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{m_i} p^{\sum_{r=j+1}^{m_i+1}\mathrm{c}_r^{(i)}}\, q^{\sum_{r=1}^{j}\mathrm{c}_r^{(i)}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{i_0}\left(\sum_{\mathrm{c}^{(i)}\in\mathcal{C}_{m_i+1}(h_i-m_i)} \prod_{j=1}^{m_i} p^{\sum_{r=1}^{j}\mathrm{c}_r^{(i)}}\, q^{\sum_{r=j+1}^{m_i+1}\mathrm{c}_r^{(i)}}\right) \\ &\qquad \times \prod_{i=i_0+1}^{s}\left(\sum_{\mathrm{c}^{(i)}\in\mathcal{C}_{m_i+1}(h_i-m_i)} \prod_{j=1}^{m_i} p^{\sum_{r=j+1}^{m_i+1}\mathrm{c}_r^{(i)}}\, q^{\sum_{r=1}^{j}\mathrm{c}_r^{(i)}}\right).\end{aligned}$$

Applying Lemma 3.30 conclude the proof of (3.24) and thus of Theorem 3.18.

2.5. A bijective proof of Corollary 3.20.

Let T be a moon polyomino with s rows and t columns. In this section, we present a mapping Φ such that for any s-tuple of nonnegative integers $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ and any subset A of $[t]$, the map Φ is a bijection $\Phi : \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A) \to \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ such that for any $F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, we have

$$(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)(\Phi(F)) = (\mathrm{se}_2, \mathrm{ne}_2)(F).$$

This gives a direct combinatorial proof of the symmetry of the joint distribution of $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ over each $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, $\mathcal{N}(T; A, B)$ (set $m_i = 0$ for $i \in B$ and 1 otherwise), and $\mathcal{N}^r(T, \mathbf{n}; B)$ ("compose" with the rotation of 90° or the reflection across a NW-SE diagonal).

In fact, the map Φ is just a byproduct of the constructions given in the previous section. It is also a generalization of an involution presented in [**53**] to prove the symmetry of $(\mathrm{cros}_2, \mathrm{nest}_2)$ over set partitions and matchings.

Let $\mathrm{c} = (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_k)$ be a composition. Define the *reverse* $\mathrm{rev}(\mathrm{c})$ of c as the composition $\mathrm{rev}(\mathrm{c}) = (\mathrm{c}_k, \mathrm{c}_{k-1}, \ldots, \mathrm{c}_1)$. Given a sequence of compositions $\mathrm{c} = (\mathrm{c}^{(1)}, \mathrm{c}^{(2)}, \ldots, \mathrm{c}^{(s)})$, we set $\mathrm{Rev}(\mathrm{c}) = (\mathrm{rev}(\mathrm{c}^{(1)}), \mathrm{rev}(\mathrm{c}^{(2)}), \ldots, \mathrm{rev}(\mathrm{c}^{(s)}))$.

Let $\Phi : \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A) \mapsto \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$ be the map defined by

$$\Phi = \Psi^{-1} \circ \mathrm{Rev} \circ \Psi = \Upsilon \circ \mathrm{Rev} \circ \Psi.$$

The following proposition is an immediate consequence of the properties of Ψ (see Theorem 3.29).

PROPOSITION 3.31. *The map Φ is an involution on $\mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$. Moreover, for any $F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$, if c is the cell of F that contains the j-th 1 from left to right of the row R_i of F and c' is the cell of $\Phi(F)$ that contains the j-th 1 from right to left of the row R_i of $\Phi(F)$, we have*

$$\mathrm{luc}(c'; \Phi(F)) = \mathrm{ruc}(c; F) \quad \textit{and} \quad \mathrm{ruc}(c'; \Phi(F)) = \mathrm{luc}(c; F).$$

Consequently, we have $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)(\Phi(F)) = (\mathrm{se}_2, \mathrm{ne}_2)(F)$.

It could be useful to give a "graphical description" of Φ. Let $F \in \mathcal{N}^c(T, \mathbf{m}; A)$.

(1) Color the columns of polyomino T indexed by the set A. Denote by F'_0 the colored polyomino obtained.

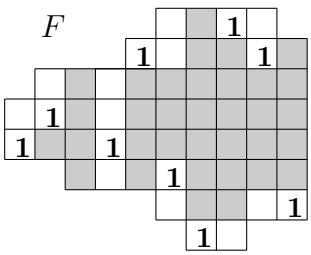
(2) Contruct a sequence of colored fillings $(F'_j)_{j=1\ldots s}$ of T as follows. Suppose $R_{i_1} \prec R_{i_2} \prec \cdots \prec R_{i_s}$. Then for j from 1 to s, the (colored) filling F'_j is obtained from F'_{j-1} as follows :

- if $m_{i_j} = 0$, do nothing,
- else, read the m_{i_j} 1's in the i_j-th row of F from left to right and denote the number of uncolored cells (in the coloring of F) strictly
  - to the left of the first 1 by t_0,
  - between the u-th 1 and the $(u+1)$-th 1, $1 \leq u \leq m_{i_j} - 1$, by t_u,
  - to the right of the last 1 by $t_{m_{i_j}}$.

  Then insert m_{i_j} 1's in the i_j-th row of F'_{j-1} in such a way that the number of uncolored cells on this row strictly
  - to the left of the first 1 is $t_{m_{i_j}}$,
  - between the u-th 1 and the $(u+1)$-th 1, $1 \leq u \leq m_{i_j} - 1$, is $t_{m_{i_j} - u}$,
  - to the right of the last 1 is t_0.

  Next, color the cells which are both contained in the i_j-th rectangle and below (resp., above) the new 1's inserted in R_{i_j} if $R_{i_j} \in Up(T)$ (resp., $R_{i_j} \in Low(T)$).

(3) Set $\Phi(F) = F'_s$. For a better understanding, we give an illustration. Suppose F is the filling given below.



Then the step-by-step construction of $\Phi(F)$ goes as follows.

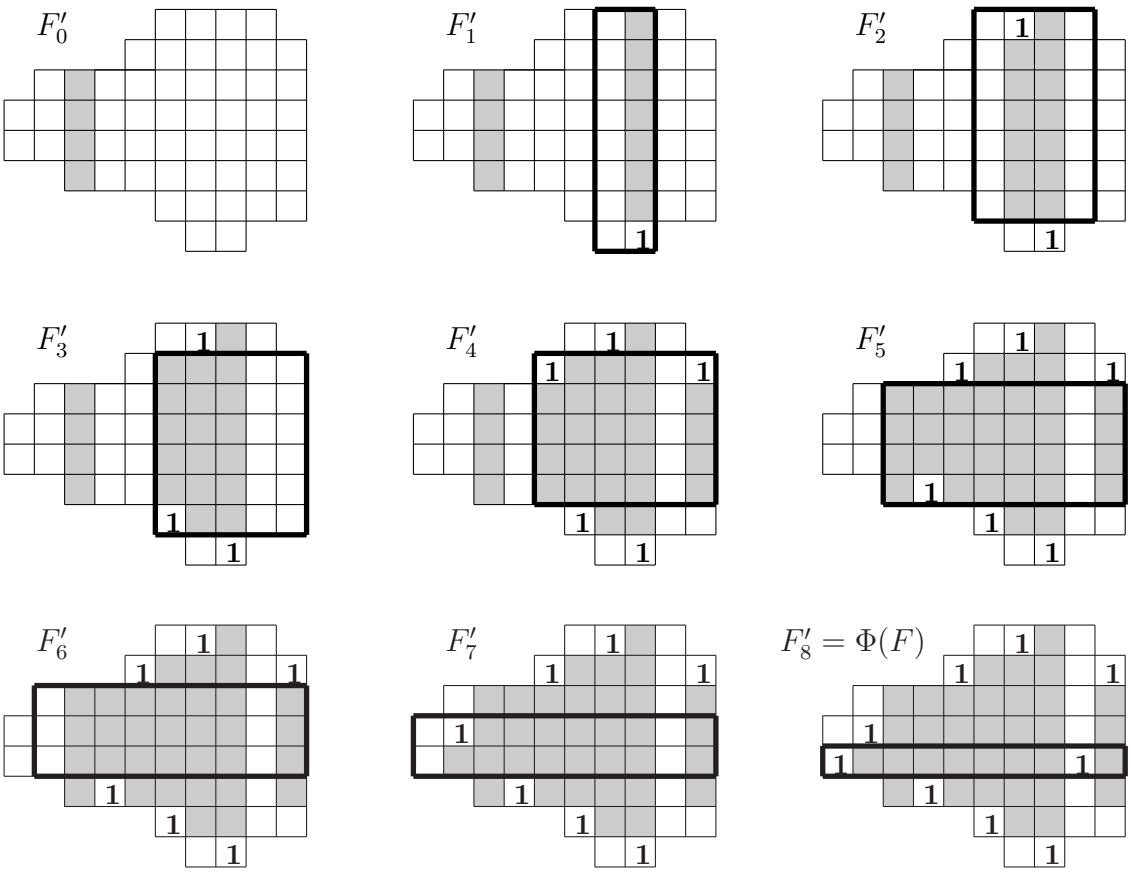


FIG. 3.18. The step-by-step construction of $\Phi(F)$

2.6. Concluding remarks.

It is natural, in view of the results obtained in this paper, to ask if the joint distribution of the statistic $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ is symmetric over arbitrary 01-fillings of moon polyominoes, i.e., there are no restrictions on the number of 1's in columns and rows. The answer is no by means of the following result. Given a moon polyomino T, recall that $\mathcal{N}^{01}(T)$ is the set of all 01-fillings of T.

PROPOSITION 3.32. *For any $n \geq 5$ the numbers of arbitrary 01-fillings of Δ_n*
– with exactly $\binom{n}{4}$ descents is equal to 2^n,
– with exactly $\binom{n}{4}$ ascents is equal to 16.
In particular, for any $n \geq 5$, the statistics ne_2 and se_2 are not equidistributed over $\mathcal{N}^{01}(\Delta_n)$, and thus the joint distribution of $(\mathrm{ne}_2, \mathrm{se}_2)$ over $\mathcal{N}^{01}(\Delta_n)$ is not symmetric.

This also implies that the statistics cros_2 and nest_2 are not equidistributed over all simple graphs of $[n]$.

Proof. We give the proof for $n = 5, 6$ since the reasoning can be generalized for arbitrary n. Suppose $n = 5$. Then one can check that the arbitrary 01-fillings of Δ_5 with exactly 5 descents and those with exactly 5 ascents have respectively the following "form"

1					
2	0|1				
3	**1**	0|1			
4	**1**	**1**	0|1		
5	0|1	**1**	**1**	0|1	
	1	2	3	4	5

1					
2	0|1				
3	0|1	**1**			
4	**1**	**1**	**1**		
5	**1**	**1**	0|1	0|1	
	1	2	3	4	5

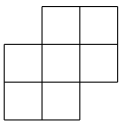
from which it is easy to obtain the result. Similarly, for $n = 6$, the arbitrary 01-fillings of Δ_6 with exactly 15 descents and those with exactly 15 ascents have respectively the following "form"

1						
2	0|1					
3	**1**	0|1				
4	**1**	**1**	0|1			
5	**1**	**1**	**1**	0|1		
6	0|1	**1**	**1**	**1**	0|1	
	1	2	3	4	5	6

1						
2	0|1					
3	0|1	**1**				
4	**1**	**1**	**1**			
5	**1**	**1**	**1**	**1**		
6	**1**	**1**	**1**	0|1	0|1	
	1	2	3	4	5	6

□

One can also ask if Theorem 3.17, or more generally Corollary 3.20 or Corollary 3.22, can be extended to arbitrary larger classes of polyominoes. We note that the condition of intersection free is necessary. Indeed, the polyomino T represented below is convex but not intersection free,



and

$$\sum_{F\in\mathcal{N}^c(T,(1,1,1))} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)} = \sum_{F\in\mathcal{N}(T;3)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)} = p^2 + 2q$$

is not symmetric. One can also check that $\sum_{F\in\mathcal{N}^c(T)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)}$ and $\sum_{F\in\mathcal{N}(T)} p^{\mathrm{ne}_2(F)}q^{\mathrm{se}_2(F)}$ are not symmetric either.

Let T be a moon polyomino and F be a 01-filling a T. Recall that $\mathrm{ne}(F)$ (resp., $\mathrm{se}(F)$) is the largest k for which F has a NE-chain (resp., SE-chain) of length k such that the smallest rectangle containing the chain is contained in F. Rubey [**76**], answering a conjecture of Jonsson [**47**], has proved that for any nonnegative integers j and k, we have

$$|\{F \in \mathcal{N}^{01}(T) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}(F) = k\}| = |\{F \in \mathcal{N}^{01}(T^*) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}(F) = k\}| \tag{3.37}$$

for any moon polyomino T^* obtained from T by permuting the columns (or equivalently the rows) of T.

Clearly, Corollary 3.24 and Rubey's result (3.37) motivate us to consider the following problem : is it true that for any moon polyomino T and nonnegative integers j and k we have

$$|\{F \in \mathcal{N}^{01}(T) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\}| = |\{F \in \mathcal{N}^{01}(T^*) : |F| = j\,,\ \mathrm{ne}_2(F) = k\}|$$

for any moon polyomino T^* obtained from T by permuting the rows of T ? The answer is no. Indeed, if such a result holds, then by reflecting each moon polyomino in a vertical line and applying the result, we would obtain that the statistics ne_2 and se_2 are equidistributed over $\mathcal{N}^{01}(T)$ for any moon polyomino T, which contradicts Proposition 3.32.

3. Reduction of d-regular set partitions and Rook placements

We use a classical correspondence between rook placements on the triangular board and set partitions to give a quick picture understanding of the "reduction identity"

$$|\mathcal{P}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{P}^{(d-j)}(n-j,k-j)|,$$

where $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ is the collection of all set partitions of $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ into k blocks such that for any two distinct elements x,y in the same block, we have $|y-x| \geq d$. We also generalize an identity of Klazar on d-regular noncrossing partitions. Namely, we show that the number of d-regular ℓ-noncrossing partitions of $[n]$ is equal to the number of $(d-1)$-regular enhanced ℓ-noncrossing partitions of $[n-1]$.

3.1. Introduction. A *partition* of $[n]$:=$\{1,2,\ldots,n\}$ is a collection of disjoint and nonempty subsets of $[n]$, called *blocks*, whose union is $[n]$. We will denote by $\mathcal{P}(n,k)$ the set of partitions of $[n]$ into k blocks and by $\mathcal{P}_n$ the set of all partitions of $[n]$. It is well-known that $|\mathcal{P}_n| = \mathcal{B}_n$ and $|\mathcal{P}(n,k)| = \mathcal{S}(n,k)$ where, as usual, $|.|$ denotes cardinality, $\mathcal{B}_n$ is the n-th *Bell number* and $\mathcal{S}(n,k)$ is the (n,k)-th *Stirling number of the second kind* [**13**].

A partition of $[n]$ is said to be d-regular, d being a nonnegative integer, if for any two distinct elements x,y in the same block, we have $|y-x| \geq d$. We will denote by $\mathcal{P}_n^{(d)}$ the set of d-regular partitions of $[n]$ and by $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ the set of d-regular partitions of $[n]$ into k blocks. Note that $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}$ and $\mathcal{P}(n,k) = \mathcal{P}^{(1)}(n,k)$. It seems that d-regular partitions were first considered by Prodinger [**69**] who called them *d-Fibonacci partitions*. A natural question that arises for a "combinatorialist" is how many d-regular partitions of $[n]$ there are? Prodinger [**69**] solved this question by showing that the number of d-regular partitions of $[n]$ equals the number of partitions of $[n-d+1]$, that is

$$|\mathcal{P}_n^{(d)}| = |\mathcal{P}_{n-d+1}| = \mathcal{B}_{n-d+1}. \tag{3.38}$$

Later, Yang [**93**] obtained a refinement of Prodinger's result by showing (see the proof of [**93**, Theorem 2]) that the number of d-regular partitions in $\mathcal{P}(n,k)$ is equal to the number of partitions in $\mathcal{P}(n-d+1,k-d+1)$, i.e.

$$|\mathcal{P}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{P}(n-d+1,k-d+1)| = \mathcal{S}(n-d+1,k-d+1). \tag{3.39}$$

Note that Prodinger's "algebraic proof" [**69**] of (3.38) can be extended to prove (3.39) and that Chu and Wei [**11**] have recently rediscovered (3.39) with a generating function proof. At this time, it is legitimate to ask of a bijection between $\mathcal{P}_n^{(d)}$ and $\mathcal{P}_{n-d+1}$. In the case $d=2$, Prodinger [**69**] has given such a bijection that he attributed to F. J. Urbanek. He also said that Urbanek's bijection can be extended for arbitrary d but he adds that "*this is more complicated to describe and therefore is omitted*". Yang [**93**] also gave another bijection in the case $d=2$. The unique explicit bijective explanation of (3.39) that we have found in the literature is due to Chen et al. [**8**] by means of a simple *reduction algorithm* which transforms d-regular partitions of $[n]$ into k blocks to $(d-1)$-regular partitions of $[n-1]$ into $k-1$ blocks.

The main purpose of this short note is to give a quick "*picture understanding*" of (3.39), and thus of (3.38). More precisely, we will show in Section 2 that the model of rook placements on the triangular board for set partitions provides, according to the author, an elegant and quick explanation of (3.39). It must be noted that, although it appears that our picture proof is equivalent to the *reduction algorithm* of Chen et al. [**8**], the "picture approach" has its own interest. In particular, we hope that this approach permits to the reader to never forget why these identities hold. We will also generalize an identity of Klazar on the enumeration of noncrossing d-regular partitions in Section 3. Finally, we will conclude the paper by studying the behavior of nestings "under reduction".

3.2. Picture proof of (3.39). The *n-th triangular board* Δ_n is the board consisting of $n-1$ columns with $n-1$ cells in the first (leftmost) column, $n-2$ in the second, ..., and 1 in the rightmost column. For convenience, we also joined pending edges at the right and at the top of Δ_n. See Figure 3.19 for an illustration of Δ_9 (the rooks should be ignored at this point). A *rook placement* is a way of placing non-attacking rooks on such a board, i.e. putting no two rooks in the same row or column. Let $\mathcal{RR}(n,k)$ be the set of all rook placements of $n-k$ rooks on the triangular shape Δ_n. Figure 3.19 gives an example of an element of $\mathcal{RR}(9,4)$, where a rook is indicated by an R.

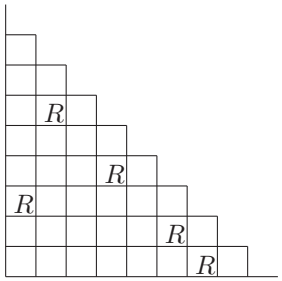


FIG. 3.19. A rook placement

It is well-known that $|\mathcal{RR}(n,k)| = \mathcal{S}(n,k)$. We will show this with a classical bijection (see e.g. [**83**, p.75]). Define

$$\Delta : \mathcal{P}(n,k) \mapsto \mathcal{RR}(n,k)$$

as follows. First, label the rows (including the pending edge) of Δ_n from bottom to top in decreasing order by $n, n-1, \ldots, 1$ and columns (including the pending edge) from left to right in increasing order by $1, 2, \ldots, n$. Then, if $\pi \in \mathcal{P}(n,k)$ we construct $\Delta(\pi)$ by placing a rook in the cell on the column labeled by i and the row labeled by j if and only if (i,j) is an *arc* of π, that is $i < j$, i and j belong to the same bloc B of π, and there are no element in B between i and j. An illustration is given in Figure 3.20.

It is easy to show that the function Δ is well defined and bijective. Moreover, this function translates the d-regularity into a nice property of rook placements. Let $\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)$ be the set of rook placements in $\mathcal{RR}(n,k)$ such that there are no rooks in the $(d-1)$ highest cells on each column. Note that $\mathcal{RR}(n,k) = \mathcal{RR}^{(1)}(n,k)$. Then it is immediate to check the following result.

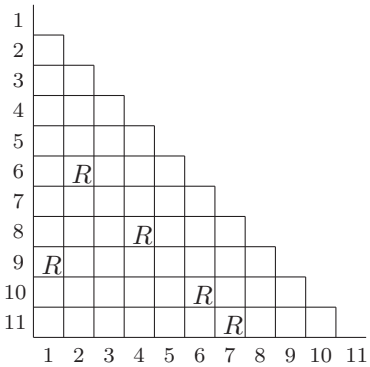
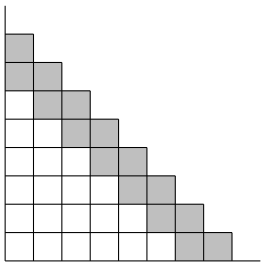


FIG. 3.20. The rook placement $\Delta(1\ 9/2\ 6\ 10/3/4\ 8/5/7\ 11)$.

PROPOSITION 3.33. *The map Δ establishes a bijection between $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ and $\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)$. In particular, we have $|\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{P}^{(d)}(n,k)|$.*

For illustration, a partition π of [9] is 3-regular if and only if its corresponding placement $\Delta(\pi)$ contains no rook in the dashed zone of Δ_9 drawn in the following picture.



For instance, the partition $\pi_1 = 1\ 9/2\ 6\ 10/3/4\ 8/5/7\ 11$ belongs to $\mathcal{P}^{(4)}(11,6)$ and the corresponding rook placement $\Delta(\pi_1)$ (given in Figure 3.20) belongs to $\mathcal{RR}^{(4)}(11,6)$. Similarly, the partition $\pi_2 = 1\ 7\ 9/2\ 4\ 6\ 8/3/5$ belongs to $\mathcal{P}^{(2)}(9,4)$ and the corresponding rook placement $\Delta(\pi)$ (given in Figure 3.19) belongs to $\mathcal{RR}^{(2)}(9,4)$.

It is now immediate to recover (3.39). Indeed, invoking Proposition 3.33, it suffices to show that $|\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{RR}(n-d+1,k-d+1)|$, which is obvious. For $d \geq 2$ and $1 \leq j \leq d-1$, let

$$\Psi_j : \mathcal{RR}^{(d)}(n,k) \mapsto \mathcal{RR}^{(d-j)}(n-j,k-j)$$

the map which associates to a placement $\rho \in RR(n,k)$ the rook placement $\Psi_j(\rho)$ obtained from ρ by deleting the j highest cells on each column of ρ. An illustration is given in Figure 3.21.

It is immediate to check that the map Ψ_j is well defined and establishes a bijection between $\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)$ and $\mathcal{RR}^{(d-j)}(n-j,k-j)$, and thus $|\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{RR}^{(d-j)}(n-j,k-j)|$, i.e. by Proposition 3.33,

$$|\mathcal{P}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{P}^{(d-j)}(n-j,k-j)|, \tag{3.40}$$

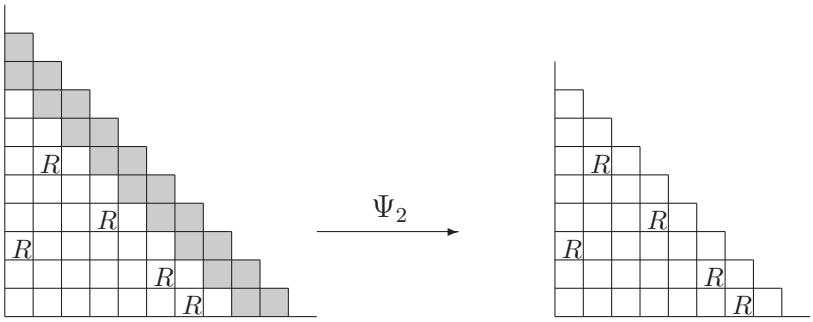


FIG. 3.21. The mapping Ψ_2.

which yields (in fact is equivalent) to (3.39) (set $j = d - 1$).

In the paper [**8**], Chen et al. have introduced a "*reduction algorithm*" (described in the next section), Φ, which transforms bijectively d-regular partitions in $\mathcal{P}(n,k)$ to $(d-1)$-regular partitions in $\mathcal{P}(n-1,k-1)$. It is worth noting that the map Ψ_1 is in fact equivalent to the reduction algorithm Φ since it can be factorized as

$$\Psi_1 = \Delta \circ \Phi \circ \Delta^{-1}. \tag{3.41}$$

However, as explained in the introduction, the "picture approach" leads to a quick and obvious explanation of (3.39) and (3.38), and we hope that this approach permits to the reader to never forget why these identities hold.

3.3. Reduction of ℓ-noncrossing d-regular partitions. A partition of $[n]$ is said to be *noncrossing* (or *abab*-free) if whenever four elements $1 \leq a < b < c < d \leq n$ are such that a, c are in the same block and b, d are in the same block, then the two blocks coincide. The terminology corresponds to the fact that a noncrossing partition admits a *linear representation* in which the arcs intersect only at elements of $[n]$. Recall that the linear representation, sometimes called *standard representation*, of a partition of $[n]$ is the graph obtained by arranging the integers $1, 2, \ldots, n$ on a line in increasing order from left to right and then joining two integers i and j by an arc drawn above the line if and only if i and j belong to the same bloc B and there are no element in B between i and j (see Figure 3.22).

FIG. 3.22. Two partitions in linear representation. *Left* : 1 6 7/2 3 5 8/4 is crossing, *Right* : 1/2 5 6/3 4/7 8 is noncrossing.

In the paper [**57**], Klazar has investigated noncrossing d-regular partitions, more precisely their comportment "under reduction". We will denote by $\mathcal{NC}^{(d)}(n,k)$ the set of noncrossing partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$. Set $\mathcal{NC}(n,k) := \mathcal{NC}^{(1)}(n,k)$, so that $\mathcal{NC}(n,k)$ is the

collection of noncrossing partitions of $[n]$ into k blocks. It is well known that the number of noncrossing partitions of $[n]$ is given by the n-th Catalan number $C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ and that

$$|\mathcal{NC}(n,k)| = N(n,k),$$

where $N(n,k)$ is the (n,k)-th Narayana number

$$N(n,k) = \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k-1}.$$

A set partition is said to be *poor* if each part has at most two elements. Let $\mathcal{NC}^{(d)}_{\leq 2}(n,k)$ be the set of poor partitions in $\mathcal{NC}^{(d)}(n,k)$. Then Klazar proved, first with a generating function proof [**57**], later bijectively [**58**], that

$$|\mathcal{NC}^{(d)}(n,k)| = |\mathcal{NC}^{(d-1)}_{\leq 2}(n-1,k-1)|. \tag{3.42}$$

An interest of (3.42) is that the enumeration of $\mathcal{NC}^{(d)}(n,k)$ reduces to the enumeration of $\mathcal{NC}^{(d-1)}_{\leq 2}(n-1,k-1)$, the later being easier than the first ; Klazar [**57**, Theorem 2.6] uses it to write $|\mathcal{NC}^{(d)}(n,k)|$ as a sum of binomial coefficients. Note that the specialization $d=2$ of (3.42) was first obtained by Simion and Ullman [**80**]. By using terminology introduced recently by Chen et al [**9**], we now establish a generalization of (3.42).

Let π be a partition of $[n]$. A sequence $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_r,j_r)$ of arcs of π is said to be an *enhanced r-crossing* if $i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r$; if in addition $i_r < j_1$, it is a *r-crossing*. Illustrations are given in Figure 3.23. Note that a r-crossing is just a particular enhanced r-crossing but the reverse is not true in general.

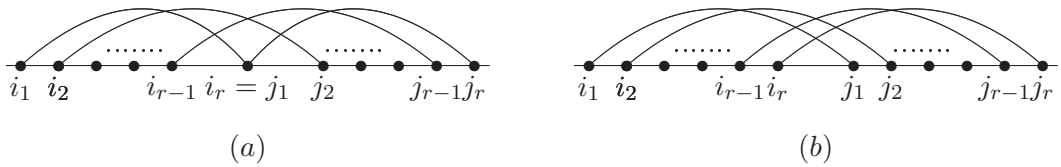


FIG. 3.23. (a)(b) : two enhanced r-crossings, (b) : a r-crossing.

A set partition with no r-crossing (resp., enhanced r-crossing) is called *r-noncrossing* (resp., *enhanced r-noncrossing*). With this terminology, a set partition is noncrossing if and only if it is 2-noncrossing ; it is poor and noncrossing if and only if it is enhanced 2-noncrossing. In particular, Klazar's result can be rewritten as follows : *The number of 2-noncrossing partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ is equal to the number of enhanced 2-noncrossing partitions in $\mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1)$*. It is the particular case $r=2$ of the following more general result.

THEOREM 3.34. *Let r,d be two integers ≥ 2. The following quantities are equal :*
– the number of r-noncrossing partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$,
– the number of enhanced r-noncrossing partitions in $\mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1)$.

The *reduction algorithm* of Chen et al., Φ, provides a simple bijective proof of Klazar's result (3.42), and this is the main result of the paper [**8**]. This proof can be easily generalized to prove Theorem 3.34.

First, recall the original description of the reduction algorithm of Chen et al. [**8**],

$$\Phi : \mathcal{P}^{(d)}(n,k) \mapsto \mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1), \quad d \geq 2.$$

If $\pi \in \mathcal{P}^{(d)}(n,k)$, then construct the linear representation of $\tau = \Phi(\pi)$ from the linear representation of π by :

– Replacing each arc (i,j) of the linear representation of π by the arc $(i,j-1)$.

– Deleting the vertex n.

An exemple is given in Figure 3.24. Identifying a set partition with its linear representation, it is not difficult to see that $\Phi : \mathcal{P}^{(d)}(n,k) \mapsto \mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1)$ is well defined and bijective, and that Φ and Ψ_1 are related by the identity (3.41) given in the previous section.

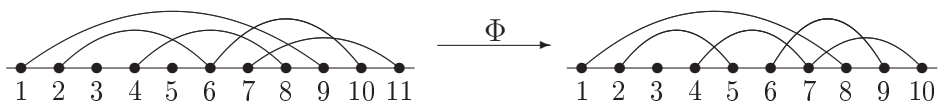


FIG. 3.24. The map Φ send 1 9/2 6 10/3/4 8/5/7 11 onto 1 8/2 5 /3/4 7 10/6 9.

Proof of Theorem 3.34. It suffices to show that the reduction algorithm Φ establishes a bijection between r-noncrossing partitions of $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ and enhanced r-noncrossing partitions of $\mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1)$. Since Φ is a bijection between $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ and $\mathcal{P}^{(d-1)}(n-1,k-1)$, it suffices to show that a partition π is r-noncrossing if and only if $\Phi(\pi)$ is enhanced r-noncrossing.

Let π be a set partition of $[n]$ and set $\tau = \Phi(\pi)$. Suppose τ has an enhanced r-crossing, that is there exists a sequence $(i_1,j_1),\ldots,(i_r,j_r)$ of arcs of τ such that $i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. By definition of Φ, the pairs $(i_1,j_1+1),\ldots,(i_r,j_r+1)$ are arcs of π, and thus form a r-crossing of π (since $i_1 < i_2 < \cdots < i_r < j_1+1 < j_2+1 < \cdots < j_r+1$). We thus have proved that $\Phi(\pi)$ has an enhanced r-crossing implies π is r-crossing, or equivalently, π is r-noncrossing implies $\Phi(\pi)$ is enhanced r-noncrossing. The converse can be justified in the same manner.

□

3.4. Concluding remarks. A natural partner of the notion of crossing is, by several aspects (see e.g. [**9, 53, 56**]), the notion of *nesting*. It is thus natural to study the behavior of nestings "under reduction". Let π be a partition of $[n]$. A sequence $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_r,j_r)$ of arcs of π is said to be a *r-nesting* if $i_1 < i_2 < \cdots < i_r < j_r < \cdots < j_2 < j_1$. This means a subgraph as drawn in Figure 3.25.

A set partition with no r-nesting is called *r-nonnesting*. We will denote by $\mathcal{NN}^{(d)}(n,k)$ the set of 2-nonnesting partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$. Set $\mathcal{NN}(n,k) := \mathcal{NN}^{(1)}(n,k)$, so that

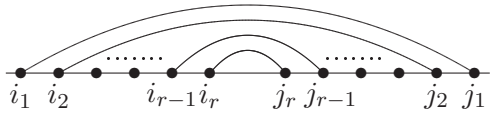


FIG. 3.25. A r-nesting

$\mathcal{NN}(n,k)$ is just the set of 2-nonnesting partitions, also called nonnesting partitions, of $[n]$ into k blocks. It is well known that

$$|\mathcal{NN}(n,k)| = |\mathcal{NC}(n,k)| = N(n,k),$$

where $N(n,k)$ is the (n,k)-th Narayana number.

THEOREM 3.35. *Let r be an integer ≥ 2. Then, for any nonnegative integer $j \leq d-1$, the following quantities are equal :*
– the number of r-nonnesting partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$,
– the number of r-nonnesting partitions in $\mathcal{P}^{(d-j)}(n-j,k-j)$.

It follows, by setting $j = d-1$ in Theorem 3.35, that the number of r-nonnesting partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ equals the number of r-nonnesting partitions in $\mathcal{P}(n-d+1, k-d+1)$. In particular we get (set $r=2$) that the cardinality of $\mathcal{NN}^{(d)}(n,k)$ is given by

$$|\mathcal{NN}^{(d)}(n,k)| = N(n-d+1, k-d+1) = \frac{1}{k-d+1}\binom{n-d+1}{k-d}\binom{n-d}{k-d},$$

and thus, the number of d-regular 2-nonnesting partitions of $[n]$ is the Catalan number C_{n-d+1}.

Theorem 3.35 can be proved easily by using the reduction algorithm (similarly to the proof of Theorem 3.34), but we will use here the model of rook placement which leads to a quick picture proof. Indeed, it is obvious to see that, in the correspondence $\Delta : \mathcal{P}(n,k) \mapsto \mathcal{RR}(n,k)$, a r-nesting of a set partition π corresponds to a *NE-chain* of length r in the rook placement $\Delta(\pi)$ (see e.g. [**48, 60**]), that is a sequence of r rooks in $\Delta(\pi)$ such that any rook in the sequence is above and to the right of the preceding rook in the sequence. It follows that the number of r-nonnesting partitions in $\mathcal{P}^{(d)}(n,k)$ is equal to the number of rook placements in $\mathcal{RR}^{(d)}(n,k)$ whose length of longest *NE-chain* is $\leq r-1$. Applying $\Psi_j : \mathcal{RR}^{(d)}(n,k) \mapsto \mathcal{RR}^{(d-j)}(n-j,k-j)$ which conserve obviously the length of longest *NE-chain* lead to the desired result.

Annexe 1 : Enumeration of crossings in set partitions

In a series of papers Touchard studied the problem of counting chord diagrams (or equivalently matchings) according to the number of crossings of the chords and found the corresponding generating function in the form of a continued fraction. A remarkable exact formula in terms of the ballot numbers was implicit in the work of Touchard [**86**] and made explicit later by Riordan [**75**] (see also [**45, 73**]), namely

$$T_n(q) := \sum_{M\in\mathcal{M}_{2n}} q^{\mathrm{cros}_2(M)} = \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k q^{k(k-1)/2}\binom{2n}{n+k}.$$

The purpose of this section is to give formulas for the enumeration of crossings in set partitions. Let $\mu_n^{(c)}(a,q)$ be the generating function of partitions of $[n]$ by number of blocks and crossings, i.e.

$$\mu_n^{(c)}(a,q) := \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)} a^{\mathrm{bl}(\pi)}.$$

3.5. Continued fraction expansion. We have given in the first part of this chapter the formal continued fraction expansion (first obtained by Biane [**2**]) associated to the sequence $(\mu_n^{(c)}(a,q))_n$. Namely, there holds

$$\sum_{n\geq 0}\mu_n^{(c)}(a,q)\,z^n = \cfrac{1}{1-b_0\,z-\cfrac{\lambda_1\,z^2}{1-b_1\,z-\cfrac{\lambda_2\,z^2}{\ddots}}},$$

où $b_n = a+[n]_q, \quad \lambda_n = a[n]_q$.

It follows from the combinatorial theory of orthogonal polynomials [**87**] that $(\mu_n^{(c)}(a,q))_n$ is the moment sequence of the q-charlier polynomials $C_n(x,a;q)$ defined recursively by

$$C_{n+1}(x,a;q) = (x-a-[n]_q)\,C_n(x,a;q) - a\,[n]_q C_{n-1}(x,a;q).$$

This is a re-scaled version of the Al-Salam-Chihara polynomials $Q_n(x,\alpha,\beta;q)$. In chapter 4, we will give a new expression for the measure for the Al-Salam-Chihara polynomials, from which we derive the following explicit formula for the polynomials $\mu_n^{(c)}(a,q)$.

3.6. Explicit formulas. Define the y-versions of the q-Stirling numbers of the second kind by

$$X^n = \sum_{k=1}^{n} S_q(n,k,y)\prod_{j=0}^{k-1}(X-[j]_q(1-yq^{-j})).$$

Then

$$\mu_n^{(c)}(a,q) = \sum_{k=1}^{n} S_q(n,k,a(1-q))\,q^{-\binom{k}{2}}\,a^k.$$

Using the following expansion

$$S_q(n,k,y) = \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{k!_q} \sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q y^{i-k} q^{k^2-i^2} \frac{([i]_q(1-q^{-i}y))^n}{(q^{1-2i}y;q)_i (q^{1+2i}/y;q)_{k-i}},$$

one can then express $\mu_n^{(c)}(a,q)$ as a finite double sum. We will also obtain the following generating function :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(c)}(a,q)t^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(qt)^k}{\prod_{i=1}^{k}(q^i - q^i[i]_q t + a(1-q)[i]_q t)}, \\ &= \sum_{i\geq 0} \frac{a^i(1-a(1-q)p^{2i})/(a(1-q)p^i;p)_\infty}{i!_q q^{i^2}(q^i - q^i[i]_q t + a[i]_q t(1-q))}.\end{aligned}$$

All the details of the above calculations will be given in chapter 4.

3.7. Determinantal formula. Translating the bijection between charlier diagrams and set partitions given in the first part of the present chapter into a bijection between "D-histoires" (chapter 1) and set partitions, we can apply the results on the enumeration of "D-histoires" to obtain determinantal formula for the enumeration of crossings in set partitions. We don't give the details of this calculation.

Denote by $O_{i,j}$ the $i \times j$ zero matrix and set $\widehat{k} := \binom{k+2}{2}$. Let $(R_k)_{k\geq 0}$ be the sequence of $\widehat{k} \times \widehat{k}$ matrices defined recursively by :

$$R_0 = (1)\,, \quad R_k = \left(\begin{array}{c|c} R_{k-1} & \overline{R}_{k-1} \\ \hline O_{k+1,\widehat{k-1}} & \widehat{R}_{k-1} \end{array}\right) \quad \text{for } k \geq 1\,, \tag{3.43}$$

where $\widehat{R}_{k-1}$ is the $(k+1)\times(k+1)$ matrix

$$\widehat{R}_{k-1} = (\delta_{ij} - [k+1-i]_q\, z\, (\delta_{ij} + \delta_{i+1,j}))_{1\leq i,j\leq k+1}\,,$$

and $\overline{R}_{k-1}$ is the $\widehat{k-1} \times (k+1)$ block matrix

$$\overline{R}_{k-1} = \left(\begin{array}{c} O_{\widehat{k-2},k+1} \\ \hline \check{R}_{k-1} \end{array}\right)$$

where $\check{R}_{k-1}$ is the $k \times (k+1)$ matrix

$$\check{R}_{k-1} = (-z(\delta_{ij} + \delta_{i+1,j}))_{1\leq i\leq k,\, 1\leq j\leq k+1}\,.$$

For instance, we have

$$R_2 = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & -z & -z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1-[1]_q z & -[1]_q z & -z & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -z & -z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-[2]_q z & -[2]_q z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-[1]_q z & -[1]_q z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

For a matrix B and two integers i, j, denote by $(B; i, j)$ the matrix obtained by removing the i-th row and j-th column of B.

THEOREM 3.36. *For $k \geq 1$, let $F_k(z;q)$ be the generating function of set partitions into k blocks by number of crossings, that is*

$$F_k(z;q) := \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}. \tag{3.44}$$

Then

$$F_k(z;q) = \frac{(-1)^{1+\widehat{k}} \det(R_k; \widehat{k}, 1)}{\prod_{i=1}^{k}(1-[i]_q\, z)^{k+1-i}}. \tag{3.45}$$

In particular, for any $k \geq 1$, $F_k(z;q) \in \mathbb{Z}(z,q)$ and the sequence $\left(\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}\right)_{n\geq k}$ satisfy a recurrence relation of order $\widehat{k}$ with coefficients in $Z[q]$ (see [**83**, chapter 4]*).*

With a computer algebra system like Maple one can compute $F_k(z;p,q)$ for a reasonable given k and then, by extracting the coefficient of z^n, obtain a formula for $\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^k} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)}$. For instance, for $k = 2$, we get, which can be obtained directly, that for any $n \geq 2$,

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^2} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)} = \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n-3}\binom{n-1}{k+2} q^k. \tag{3.46}$$

Unfortunately, the formulas become quickly cumbersome. For instance, for $k = 3$, we get that for any $n \geq 11$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n^3} q^{\mathrm{cros}_2(\pi)} &= \frac{n-1}{2}\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5}q + 9\binom{n}{6}q^2 + \frac{n^2-5n-3}{3}\binom{n-1}{5}q^3 \\
&+ \sum_{k=4}^{2n-9} q^k \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n-1}{j+6}\binom{j+5}{k-j}\right) \\
&- \sum_{k=4}^{n-8} q^k \left(\binom{n-2}{k+6} + (n-1)\binom{n-2}{k+4} + \binom{n-2}{k+3} + (1-n)\binom{n-2}{k+2}\right) \\
&+ \frac{(n-2)(n^3-8n^2+10n+3)}{6} q^{n-7} + \frac{n(n^2-6n+7)}{2} q^{n-6} \\
&+ (n^2-3n+1)q^{n-5} + (n-1)q^{n-4}.
\end{aligned}$$

Annexe 2 : Mean number of crossings in a set partition

The expectation of the number of crossings (which is also the expectation of the number of nestings) in a random complete matching of $[2n]$ is equal to $n(n-1)/6$ (see e.g. [**23, 75**]). In this section, we compute the expectation of the number of crossings (or nestings) in a random partition of $[n]$.

THEOREM 3.37. *Let Z_n be the random variable equal to the value of* cros_2 *(or* nest_2*) over $\mathcal{P}_n$ endowed with the uniform probability distribution. Then,*

$$\mu_n := E(Z_n) = \frac{(2n+9)B_{n+1} - 5B_{n+2}}{4B_n} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \tag{3.47}$$

where B_n is the n-th Bell number.

THEOREM 3.38. *Let $Z_{n,k}$ be the random variable equal to the value of* cros_2 *(or* nest_2*) over $\mathcal{P}_n^k$ endowed with the uniform probability distribution. Then,*

$$\begin{aligned}\mu_n^k := E(Z_{n,k}) = n\binom{k}{2}\frac{S(n-1,k)}{S(n,k)} - \frac{5}{2}\binom{k}{2} + 2n(k-1)\frac{S(n-1,k-1)}{S(n,k)} \\ - \frac{3}{2}(k-1)\frac{S(n,k-1)}{S(n,k)} + \frac{3n}{2}\frac{S(n-1,k-2)}{S(n,k)}.\end{aligned} \tag{3.48}$$

In particular,

$$\mu_n^k = \binom{k}{2}\left(\frac{n}{k} - \frac{5}{2}\right) + o(1), \quad n \to \infty. \tag{3.49}$$

The exact value of the mean number in a random matching is mentioned by Riordan [**75**] who says that he does not take place to prove the result. A proof was subsequently given by Flajolet, Puech and Vuillemin [**24**] using orthogonality properties of q-Hermite polynomials. A direct elegant proof was proposed by Flajolet and Noy [**23**]. It is based on the decomposition of the number of crossings X_n, the random variable equal to the value of cros_2 taken over all matchings of $[2n]$, as

$$X_n = \sum_{1 \le a < b < c < d \le 2n} Y_n(a,b,c,d),$$

where $Y_n(a,b,c,d)$ is the random variable defined on the matchings M of $[2n]$ by

$$Y_n(a,b,c,d)(M) = \begin{cases} 1, & \text{if } (a,c) \text{ and } (b,d) \text{ are two arcs of } M\,; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We use here a similar reasoning for the random variables Z_n and $Z_{n,k}$.

Proof of Theorem 3.38. Let A, B be two disjoint subsets of $\mathbb{P}$. The number of crossings between arcs of A and B will be denoted by $\mathrm{cros}_2(\mathrm{A},\mathrm{B})$. For instance, if $A = \{3,7,10\}$ and $B = \{4,6,9\}$, then $\mathrm{cros}_2(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 2$ in view of the crossings $(3,7)(6,9)$ and $(6,9)(7,10)$. For a set partition π and a set B, "$B \in \pi$" means "B is a bloc of π". Let L_n be the set of pairs of nonempty and disjoints subsets of $[n]$, i.e.

$$L_n = \{\{A,B\} \,/\, A,B \subseteq [n],\ A,B \neq \emptyset,\ A \cap B = \emptyset\}.$$

The proof is based on the decomposition of $Z_{n,k}$ as

$$Z_{n,k} = \sum_{\{A,B\}\in L_n} Z_{n,k}(A,B), \tag{3.50}$$

where $Z_{n,k}(A,B)$ is the random variable (endowed with the uniform probability distribution) defined for $\pi \in \mathcal{P}_n^k$ by

$$Z_{n,k}(A,B)(\pi) = \begin{cases} \mathrm{cros_2(A,B)}, & \text{if } A,B \in \pi\,; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is not hard to prove that for any $\{A,B\} \in L_n$, we have

$$E(Z_{n,k}(A,B)) = \frac{\mathrm{cros_2(A,B)\,p_{n,k}(A,B)}}{S(n,k)}, \tag{3.51}$$

where $p_{n,k}(A,B)$ is the number of partitions π in $\mathcal{P}_n^k$ such that $A,B \in \pi$, that is

$$p_{n,k}(A,B) = S(n - |A \cup B|, k-2).$$

Set $A_{n,k} := S(n,k)\,E(Z_{n,k})$ and $v_m := \sum_{\pi\in\mathcal{P}_m^2} \mathrm{cros_2}(\pi)$, where $\mathcal{P}_m^2$ is as usual the set of partitions of m into two blocks. We claim that

$$A_{n,k} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} S(n-m,k-2)\,v_m. \tag{3.52}$$

Indeed, since the expectation of a sum of random variables is the sum of the expectations of the variables, it then follows from (3.50) and (3.51) that

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \sum_{\{A,B\}\in L_n} \mathrm{cros_2(A,B)\ p_{n,k}(A,B)} = \sum_{\{\mathrm{A,B}\}\in \mathrm{L_n}} \mathrm{cros_2(A,B)\,S(n-|A\cup B|,k-2)} \\ &= \sum_{C\subseteq[n]} S(n-|C|,k-2) \sum_{\{A,B\}\in L_n; A\cup B=C} \mathrm{cros_2(A,B)}. \end{aligned}$$

Suppose $|C| = m$. It is easy to show that

$$\sum_{\{A,B\}\in L_n; A\cup B=C} \mathrm{cros_2(A,B)} = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_m^2} \mathrm{cros_2}(\pi,$$

and thus

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \sum_{C\subseteq[n]} S(n-|C|,k-2) \sum_{\pi\in\mathcal{P}_{|C|}^2} \mathrm{cros_2}(\pi) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{C\subseteq[n],|C|=m} S(n-|C|,k-2) \sum_{\pi\in\mathcal{P}_m^2} \mathrm{cros_2}(\pi) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} S(n-m,k-2) \sum_{\pi\in\mathcal{P}_m^2} \mathrm{cros_2}(\pi), \end{aligned}$$

which is exactly (3.52).

We now use the "calculus of exponential generating functions" (see e.g. [**91**]) to simplify $A_{n,k}$. We assume that the reader is familiar with this technique.

Let $A_k(x)$ be the exponential generating function (e.g.f. for short) of the sequence $(A_{n,k})_{n\geq 0}$, that is

$$A_k(x) = \sum_{n\geq 0} A_{n,k}\,\frac{x^n}{n!}. \tag{3.53}$$

By definition of the product of two e.g.f., it follows from (3.52) that

$$A_k(x) = V(x)S_{k-2}(x), \tag{3.54}$$

where $V(x)$ is the e.g.f. of the sequence $(v_n)_{n\geq 0}$ and $S_k(x)$ denotes the e.g.f. of the sequence $(S(n,k))_{n\geq 0}$ for $k \geq 0$.

It is well known that

$$\sum_{n\geq k\geq 0} S(n,k)\,u^k\frac{x^n}{n!} = e^{u(e^x-1)}, \tag{3.55}$$

which imply that for each $k \geq 0$,

$$S_k(x) := \sum_{n\geq 0} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = (e^x-1)^k/k!. \tag{3.56}$$

One can easily deduce from (3.46), the details are left to the reader, that

$$v_m := \sum_{\pi\in\mathcal{P}_m^2} \mathrm{cros}_2(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{if } m \leq 1\,; \\ (m-1)2^{m-2} - 2^m + m + 1, & \text{if } m \geq 2. \end{cases}$$

A straightforward calculus then lead to

$$V(x) = e^{2x}\,(x/2 - 5/4) + e^x(1+x) + 1/4, \tag{3.57}$$

which can be rewritten

$$V(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right)(e^x-1)^2 + \left(2x - \frac{3}{2}\right)(e^x-1) + \frac{3x}{2}. \tag{3.58}$$

Finally, inserting (3.58) and (3.56) in (3.54) we obtain

$$A_k(x) = \binom{k}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)S_k(x) + (k-1)\left(2x - \frac{3}{2}\right)S_{k-1}(x) + \frac{3x}{2}S_{k-2}(x). \tag{3.59}$$

Extracting the coefficient of $x^n/n!$ in $A_k(x)$ and then dividing by $S(n,k)$ led to the desired result (3.48).

Note that equation (3.49) can easily derived from (3.48) by using the following asymptotic value of $S(n,k)$

$$S(n,k) = k^{n-1} + O(k^{n-2}), \quad n \to \infty,$$

which can be obtained from the well known formula

$$S(n,k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{j^n}{j!(k-j)!}.$$

3.7.1. *Proof of Theorem 3.37.* The proof is similar to the previous and it is based on the decomposition of Z_n as

$$Z_n = \sum_{\{A,B\} \in L_n} Z_n(A,B), \tag{3.60}$$

where $Z_n(A,B)$ is the random variable (endowed with the uniform probability distribution) defined for $\pi \in \mathcal{P}_n$ by

$$Z_n(A,B)(\pi) = \begin{cases} \mathrm{cros_2(A,B)}, & \text{if } A, B \in \pi\,; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Obviously, for $\{A,B\} \in L_n$, we have

$$E(Z_n(A,B)) = \frac{\mathrm{cros_2(A,B)\, p_n(A,B)}}{B_n}, \tag{3.61}$$

where $p_n(A,B)$ is the number of partitions π in $\mathcal{P}_n$ such that $A, B \in \pi$, that is

$$p_n(A,B) = B_{n-|A \cup B|}.$$

Set $A_n = B_n\, E(Z_n)$. By the same reasoning practiced to obtain (3.52), we get

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_{n-m}\, v_m. \tag{3.62}$$

Now, let $A(x)$ be the e.g.f. of the sequence $(A_n)_{n \geq 0}$, that is

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{x^n}{n!}. \tag{3.63}$$

By definition of the product of two e.g.f., it follows from (3.62) and (3.65) that

$$A(x) = V(x)B(x), \tag{3.64}$$

where $B(x)$, the e.g.f. of the bell numbers $(B_n)_{n \geq 0}$, is given (set $u = 1$ in (3.55)) by

$$B(x) := \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}. \tag{3.65}$$

Remarking that $B'(x) = e^x B(x)$, $B''(x) = (e^{2x} + e^x)B(x)$, and that $V(x)$ (see (3.57)) can be rewritten

$$V(x) = (\frac{x}{2} - \frac{5}{4})(e^{2x} + e^x) + (\frac{x}{2} + \frac{9}{4})e^x + \frac{1}{4},$$

we then obtain by inserting the latter identity in (3.64) that

$$A(x) = (\frac{x}{2} - \frac{5}{4})B''(x) + (\frac{x}{2} + \frac{9}{4})B'(x) + \frac{1}{4}B(x). \tag{3.66}$$

Extracting the coefficient of $x^n/n!$ in $A(x)$ and then dividing by B_n led to the desired result (3.47).

CHAPITRE 4

Aspects combinatoires des q-polynômes de Laguerre d'Al-Salam-Chihara

Nous décrivons plusieurs aspects des q-polynômes de Laguerre d'Al-Salam-Chihara. Nous donnons en particulier les interprétations combinatoires des polynômes, moments, relation d'orthogonalité et coefficients de linéarisation.

1. Introduction

The monic simple Laguerre polynomials $L_n(x)$ may be defined by the explicit formula :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n}{k} x^k, \tag{4.1}$$

or by the three-term recurrence relation

$$L_{n+1}(x) = (x - (2n+1))L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x). \tag{4.2}$$

The moments are

$$\mu_n = \mathcal{L}(x^n) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!. \tag{4.3}$$

The linearization formula reads as follows :

$$L_{n_1}(x) L_{n_2}(x) = \sum_{n_3} C_{n_1\, n_2}^{n_3} L_{n_3}(x),$$

where

$$C_{n_1\, n_2}^{n_3} = \sum_{s \geq 0} \frac{n_1!\, n_2!\, 2^{N_2+n_3-2s}\, s!}{(s-n_1)!(s-n_2)!(s-n_3)!(N_2+n_3-2s)! n_3!}.$$

Equivalently we have

$$\mathcal{L}(L_{n_1}(x) L_{n_2}(x) L_{n_3}(x)) = \sum_{s \geq 0} \frac{n_1!\, n_2!\, n_3!\, 2^{N_2+n_3-2s}\, s!}{(s-n_1)!(s-n_2)!(s-n_3)!(N_2+n_3-2s)!}. \tag{4.4}$$

Given positive integers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ such that $n = n_1 + \cdots + n_k$, let S_i be the consecutive integer segment $\{n_1 + \cdots n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_i\}$ with $n_0 = 0$, then $S_1 \cup \ldots \cup S_k = [n]$. A permutation σ of $[n]$ is said to be a *generalized derangement* if

i and $\sigma(i)$ do not belong to a same segment S_j for all $i \in [n]$. Let $\mathcal{D}_n$ be the set of generalized derangements of $[n]$ then we have

$$\mathcal{L}(L_{n_1}(x)\dots L_{n_k}(x)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} 1. \tag{4.5}$$

A q-version of (4.1) was studied by Garsia and Remmel [**37**] in 1980. Several q-analogues of the recurrence relation (4.2) and moments (4.3) were investigated in the last two decades (see [**79, 81, 12**]) in order to obtain new *mahonian* statistics on the symmetric groups. On the other hand, in view of the unified combinatorial interpretations of several aspects of Sheffer orthogonal polynomials (moments, polynomials, and the linearization coefficients)(see [**87, 94, 52**]) it is natural to seek for a q-version of this picture.

As one can expect, the first result in this direction was the linearization formula for q-Hermite polynomials due to Ismail, Stanton and Viennot [**45**], dated back to 1987. In particular, their formula provides a combinatorial evaluation of the Askey-Wilson integral. However, a similar formula for q-Charlier polynomials was discovered only recently by Anshelevich [**1**], who used the machinery of q-Levy stochastic processes. Short later, Kim, Stanton and Zeng [**55**] gave a combinatorial proof of Anshelevich's result.

The object of this paper is to give a q-version of all the above formulas for simple Laguerre polynomials. It is interesting to note that the corresponding moment sequence appears in the recent work on enumeration of totally positive Grassmann cells [**91, 14**].

The rest of this paper is organized as follows : We recall the definition of Al-Salam-Chihara polynomials and prove their linearization formula in Section 2. We introduce the new q-Laguerre polynomials and present their combinatorial interpretation in Section 3. In Section 4 we study the moment sequence of the q-Laguerre polynomials. In particular we shall give a new proof of Williams' formula for the corresponding moment sequence. We derive then the linearization coefficients of our q-Laguerre polynomials in Section 5. Finally two technical lemmas will be proved in Sections 8 and 9, respectively.

2. Al-Salam-Chihara polynomials revisited

The Al-Salam-Chihara polynomials $Q_n(x) := Q_n(x;\alpha,\beta|q)$ may be defined by the recurrence relation [**59**, Chapter 3] :

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \quad Q_{-1}(x) = 0, \\ Q_{n+1}(x) = (2x - (\alpha+\beta)q^n)Q_n(x) - (1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n-1})Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Let $Q_n(x) = 2^n p_n(x)$ then

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)q^n p_n(x) + \frac{1}{4}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n-1})p_{n-1}(x). \tag{4.7}$$

They also have the following explicit expressions :

$$\begin{aligned} Q_n(x;\alpha,\beta|q) &= \frac{(\alpha\beta;\,q)_n}{\alpha^n}\,{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},\alpha u,\alpha u^{-1} \\ \alpha\beta, 0 \end{matrix}\middle|\, q;\, q\right) \\ &= (\alpha u;\,q)_n u^{-n}\,{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n},\beta u^{-1} \\ \alpha^{-1}q^{-n+1}u^{-1} \end{matrix}\middle|\, q;\alpha^{-1}qu\right) \\ &= (\beta u^{-1};\,q)_n u^{n}\,{}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n},\alpha u \\ \beta^{-1}q^{-n+1}u \end{matrix}\middle|\, q;\beta^{-1}qu^{-1}\right), \end{aligned}$$

where $x=\frac{u+u^{-1}}{2}$ or $x=\cos\theta$ if $u=e^{i\theta}$.

The Al-Salam-Chihara polynomials have the following generating function

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x;\alpha,\beta|q)\frac{t^n}{(q;\,q)_n}=\frac{(\alpha t,\beta t;\,q)_\infty}{(te^{i\theta},te^{-i\theta};\,q)_\infty}.$$

They are orthogonal with respect to the linear functional $\hat{\mathcal{L}}_q$:

$$\hat{\mathcal{L}}_q(x^n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi(\cos\theta)^n\frac{(q,\alpha\beta,e^{2i\theta},e^{-2i\theta};\,q)_\infty}{(\alpha e^{i\theta},\alpha e^{-i\theta},\beta e^{i\theta},\beta e^{-i\theta};\,q)_\infty}d\theta, \tag{4.8}$$

where $x=\cos\theta$. Note that

$$\hat{\mathcal{L}}_q(Q_n(x)^2)=(q;\,q)_n(\alpha\beta;\,q)_n.$$

THEOREM 4.1. *We have*

$$Q_{n_1}(x)Q_{n_2}(x)=\sum_{n_3\geq 0}C_{n_1,n_2}^{n_3}(\alpha,\beta;\,q)Q_{n_3}(x), \tag{4.9}$$

where

$$\begin{aligned} C_{n_1,n_2}^{n_3}(\alpha,\beta;\,q) &= (-1)^{N_2+n_3}\frac{(q;\,q)_{n_1}(q;\,q)_{n_2}}{(\alpha\beta;\,q)_{n_3}} \\ &\times\sum_{m_2,m_3}\frac{(\alpha\beta;\,q)_{n_1+m_3}\alpha^{m_2}\beta^{n_3+n_2-n_1-m_2-2m_3}q^{\binom{m_2}{2}+\binom{n_3+n_2-n_1-m_2-2m_3}{2}}}{(q;\,q)_{n_3+n_2-n_1-m_2-2m_3}(q;\,q)_{m_2}(q;\,q)_{m_3+n_1-n_3}(q;\,q)_{m_3+n_1-n_2}(q;\,q)_{m_3}}. \end{aligned}$$

Proof. Clearly $C_{n_1,n_2}^{n_3}(\alpha,\beta;\,q)=\hat{\mathcal{L}}_q(Q_{n_1}(x)Q_{n_2}(x)Q_{n_3}(x))/\hat{\mathcal{L}}_q(Q_{n_3}(x)Q_{n_3}(x))$. Using the Askey-Wilson integral :

$$\frac{(q;\,q)_\infty}{2\pi}\int_0^\pi\frac{(e^{2i\theta},e^{-2i\theta};\,q)_\infty}{\prod_{j=1}^4(t_je^{i\theta},t_je^{-i\theta};\,q)_\infty}d\theta=\frac{(t_1t_2t_3t_4;\,q)_\infty}{\prod_{1\leq j<k\leq 4}(t_jt_k;\,q)_\infty},$$

one can prove [**45**, Theorem 3.5] that

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{L}}_q(G(t_1,x)G(t_2,x)G(t_3,x)) \\ &\quad=\frac{(\alpha t_1t_2t_3,\beta qt_1t_2t_3,\alpha\beta q;\,q)_\infty}{(t_1t_2,t_1t_3,t_2t_3;\,q)_\infty}{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} t_1t_2, & t_1t_3, & t_2t_3 \\ & \alpha t_1t_2t_3, & \beta t_1t_2t_3 \end{matrix}\,|q;\alpha\beta\right). \end{aligned}$$

Therefore

$$\sum_{n_1,n_2,n_3} \hat{\mathcal{L}}_q(Q_{n_1}(x)Q_{n_2}(x)Q_{n_3}(x))\frac{t_1^{n_1}}{(q;\,q)_{n_1}}\frac{t_2^{n_2}}{(q;\,q)_{n_2}}\frac{t_3^{n_3}}{(q;\,q)_{n_3}}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(\alpha t_1t_2t_3q^k,\, \beta t_1t_2t_3q^k,\, \alpha\beta; q)_\infty}{(t_1t_2q^k,\, t_1t_3q^k,\, t_2t_3q^k; q)_\infty}\frac{(\alpha\beta)^k}{(q;\,q)_k}. \tag{4.10}$$

Using the Euler formulas :

$$(t;\,q)_\infty = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q;\,q)_n}t^n; \qquad \frac{1}{(t;\,q)_\infty} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(q;\,q)_n}t^n,$$

we can rewrite the sum in (4.10) as follows :

$$(\alpha\beta;\,q)_\infty \sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha\beta)^k}{(q;\,q)_k}\sum_{l_1,l_2\geq 0}\frac{\alpha^{l_1}\beta^{l_2}q^{k(l_1+l_2)}(-t_1t_2t_3)^{l_1+l_2}q^{\binom{l_1}{2}+\binom{l_2}{2}}}{(q;\,q)_{l_1}(q;\,q)_{l_2}}$$

$$\times \sum_{m_1,m_2,m_3\geq 0}\frac{q^{(m_1+m_2+m_3)k}t_1^{m_1+m_2}t_2^{m_1+m_3}t_3^{m_1+m_3}}{(q;\,q)_{m_1}(q;\,q)_{m_2}(q;\,q)_{m_3}}. \tag{4.11}$$

Substituting

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha\beta q^{l_1+l_2+m_1+m_2+m_3})^k}{(q;\,q)_k} = \frac{1}{(\alpha\beta q^{l_1+l_2+m_1+m_2+m_3};q)_\infty}$$

in (4.11), we get

$$\sum_{l_1,l_2,m_1,m_2,m_3} t_1^{n_1}t_2^{n_2}t_3^{n_3}\frac{(\alpha\beta)_{n_1+m_3}\alpha^{l_1}\beta^{l_2}q^{\binom{l_1}{2}+\binom{l_2}{2}}}{(q;\,q)_{m_1}(q;\,q)_{m_2}(q;\,q)_{m_3}(q;\,q)_{l_1}(q;\,q)_{l_2}}(-1)^{l_1+l_2}, \tag{4.12}$$

where $l_1+l_2+m_1+m_2=n_1$, $l_1+l_2+m_1+m_3=n_2$ and $l_1+l_2+m_2+m_3=n_3$.

Since $l_1+l_2\equiv N_2+n_3 \pmod 2$, extracting the coefficient of $\frac{t_1^{n_1}t_2^{n_2}t_3^{n_3}}{(q;q)_{n_1}(q;q)_{n_2}(q;q)_{n_3}}$ in (4.12) and dividing by $(q,\alpha\beta;\,q)_{n_3}$ we obtain (4.9) where l_1 is replaced by m_2.

□

3. The new q-Laguerre polynomials

We define the new q-Laguerre polynomials $L_n(x;\,q)$ by re-scaling Al-Salam-Chihara polynomials :

$$L_n(x;\,q) = \left(\frac{\sqrt{y}}{q-1}\right)^n Q_n\left(\frac{(q-1)x+y+1}{2\sqrt{y}};\frac{1}{\sqrt{y}},\sqrt{y}q|q\right). \tag{4.13}$$

It follows from (4.7) that the polynomials $L_n(x;\,q)$ satisfy the recurrence :

$$L_{n+1}(x;\,q) = (x-y[n+1]_q-[n]_q)L_n(x;\,q) - y[n]_q^2L_{n-1}(x;\,q). \tag{4.14}$$

We derive then the explicit formula for $L_n(x)$:

$$L_n(x;\, q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!_q}{k!_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-n)} y^{n-k} \prod_{j=0}^{k-1} \left(x - (1 - yq^{-j})[j]_q\right). \tag{4.15}$$

Thus

$$\begin{aligned} L_1(x;\, q) &= x - y, \\ L_2(x;\, q) &= x^2 - (1 + 2y + qy)x + (1 + q)y^2, \\ L_3(x;\, q) &= x^3 - (q^2 y + 3\, y + q + 2 + 2\, qy)x^2 \\ &\qquad + (q^3 y^2 + yq^2 + q + 2\, qy + 3\, q^2 y^2 + 1 + 4\, qy^2 + 2\, y + 3\, y^2)x \\ &\qquad\quad - (2\, q^2 + 2\, q + q^3 + 1)y^3 \end{aligned}$$

A combinatorial interpretation of these q-Laguerres polynomials can be derived from the Simion and Stanton's combinatorial model for octabasic Laguerre polynomials [**81**]. For a subset A of $[n]$, the *functional digraph* of an injection $f : A \to [n]$ consists of disjoint paths and cycles. Each path P is of the form $a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_l$, where $f(a_j) = a_{j+1}$ for $0 \le j < l$, with $f^{-1}(a_0)$ empty, and $a_l \in [n] - A$. We put $\mathrm{last}(P) = a_l$ and if $i = a_k \in P$ we write $\mathrm{ind}(i, P) = k$ for the index of i on the path P. For any path P in the digraph and two integers $i < j$, we put

$$n_P(i, j) = |\{a \in P : i < a < j\}|.$$

For $p \in P$ and two integers $i < j$, we define

$$m_P(p; i, j) = |\{a \in P : i < a < j, \mathrm{ind}(p, P) < \mathrm{ind}(a, P)\}|,$$

that is, the number of points on the path "to the right" of p, whose values are strictly between i and j. And finally, for $i \in A$, we denote by $F(i)$ the "first forward iterate" of f which is smaller than i, i.e.,

$$F(i) = \begin{cases} f^p(i), & \text{where } p = \min\{m \ge 1, f^m(i) < i \text{ if such } m \text{ exists}\}\,; \\ i, & \text{if } \{m \ge 1, f^m(i) < i\} \text{ is empty.} \end{cases}$$

For instance, suppose that the path $P = 2 \to 7 \to 1 \to 5 \to 3$ is a connected component of the functional diagraph of f. Then $n_P(1, 4) = |\{2, 3\}| = 2$, $m_P(7; 1, 4) = |\{3\}| = 1$, and $F(2) = F(7) = 1$, $F(1) = 1$, and $F(5) = 3$.

For any $k \in [n]$, let $\alpha(k) = w(k) = 0$ if $k \notin A$, otherwise if k is on a cycle or a path P such that $k > \mathrm{last}(P)$, then $\alpha(k) = 1$ and

$$w(k) = F(k) - 1 - \sum_{\mathrm{last}(Q) > k} n_Q(0, F(k));$$

if k is on a path P such that $k < \mathrm{last}(P)$, then $\alpha(k) = 0$ and

$$w(k) = k - 1 - m_P(k; 0, k) - \sum_{\mathrm{last}(Q) > \mathrm{last}(P)} n_Q(0, k),$$

where Q ranges over all paths in the functional digraphs of f. Let

$$w(A,f)=\sum_{k\in A} w(k) \quad \text{and} \quad \alpha(A,f)=\sum_{k\in A}\alpha(k).$$

EXAMPLE 4.1. *Let $n=9$, $A=\{2,9\}$ and $\sigma=(6)(4\,7)(3\,5\,1\,8)$ (in cycle notation with maximum at last). Then we have $cyc(\sigma)=3$ and*

$$w(A,\sigma)=(3-1-1)+(5-1-1)+(1-1)+(4-1-2)=5.$$

THEOREM 4.2. *The q-Laguerre polynomials have the following interpretation :*

$$L_n(x;\,q)=\sum_{A\subset[n],f:A\to[n]}(-1)^{|A|}x^{n-|A|}y^{\alpha(A,f)}q^{w(A,f)},$$

where f is injective.

Proof. This is the $a=1$, $s=u=1$ and $r=t=q$ special case of the quadrabasic Laguerre polynomials [**81**, p.313]. □

REMARK 4.3. *It is easy to see that the constant term $L_n(0)$ is equal to*

$$L_n(0)=(-1)^n y^n n!_q.$$

So the restriction of the statistic on permutations is a Mahonian statistic.

4. Moments of the q-Laguerre polynomials

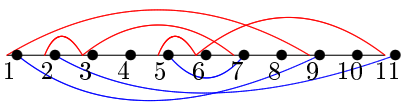
Let $\mathcal{S}_n$ be the set of permutations of $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$. For $\sigma\in\mathcal{S}_n$ the *crossing number* of σ is defined by

$$\mathrm{cros}(\sigma)=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\#\{\mathrm{j}|\mathrm{j}<\mathrm{i}\le\sigma(\mathrm{j})<\sigma(\mathrm{i})\}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\#\{\mathrm{j}|\mathrm{j}>\mathrm{i}>\sigma(\mathrm{j})>\sigma(\mathrm{i})\},$$

while the number of *weak excedances* of σ is defined by

$$wex(\sigma)=\#\{i|1\le i\le n \text{ and } i\le\sigma(i)\}.$$

We can depict these statistics by associating with each permutation σ of $[n]$ a diagram by drawing an arc $i\to\sigma(i)$ above (resp. under) the segment $1\to2\to\cdots\to n$ if $i\le\sigma(i)$ (resp. $i>\sigma(i)$). For example, the permutation $\sigma=9\,3\,7\,4\,6\,11\,5\,8\,1\,10\,2$ can be depicted as follows :



Let $\mu_n^{(\ell)}(y,q)$ be the enumerating polynomial of permutations in $\mathcal{S}_n$ with respect to weak excedances and crossing numbers :

$$\mu_n^{(\ell)}(y,q):=\sum_{\sigma\in S_n}y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

Randrianarivony [**70**] and Corteel [**14**] have proved the following continued fraction expansion :

$$E(y,q,t) := \sum_{n\geq 0} \mu_n^{(\ell)}(y,q)t^n = \cfrac{1}{1 - b_0 t - \cfrac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \cfrac{\lambda_2 t^2}{\ddots}}}, \tag{4.16}$$

where $b_n = y[n+1]_q + [n]_q$ and $\lambda_n = y[n]_q^2$.

We derive then from the classical theory of orthogonal polynomials the following interpretation of the moments of the q-Laguerre polynomials.

THEOREM 4.4. *The n-th moment of the q-Laguerre polynomials is equal to $\mu_n^{(\ell)}(y,q)$. More precisely, let $\mathcal{L}_q$ be the linear functional defined by $\mathcal{L}_q(x^n) = \mu_n^{(\ell)}(y,q)$, then*

$$\mathcal{L}_q(L_{n_1}(x;\, q)L_{n_2}(x;\, q)) = y^{n_1}(n_1!_q)^2\delta_{n_1\, n_2}. \tag{4.17}$$

The first values of the moment sequence are as follows :

$$\begin{aligned}
\mu_1^{(\ell)}(y,q) &= y,\\
\mu_2^{(\ell)}(y,q) &= y + y^2,\\
\mu_3^{(\ell)}(y,q) &= y + (3+q)y^2 + y^3,\\
\mu_4^{(\ell)}(y,q) &= y + (6+4q+q^2)y + (6+4q+q^2)y^3 + y^4.
\end{aligned}$$

Combining the results of Corteel [**14**], Williams [**91**, Proposition 4.11] and the classical theory of orthogonal polynomials, one can write the moments of the above q-Laguerre polynomials as a finite double sum (cf. (4.28)). Here we propose a direct proof of this result. Actually we shall give such a formula for the moments of Al-Salam-Chihara polynomials.

DEFINITION 4.5. *Define the y-versions of the q-Stirling numbers of the second kind by*

$$X^n = \sum_{k=1}^{n} S_q(n,k,y) \prod_{j=0}^{k-1}(X - [j]_q(1 - yq^{-j})). \tag{4.18}$$

The y-versions of q-Stirling numbers of the first kind can be defined by the inverse matrix or equivalently

$$\prod_{j=0}^{n-1}(X - [j]_q(1 - yq^{-j})) = \sum_{k=1} s_q(n,k,y)X^k.$$

REMARK 4.6. *We have*

$$S_q(n,k,y)|_{q=1} = S(n,k)(1-y)^{n-k}, \quad S_q(n,k,0) = S_q(n,k),$$

where $S(n,k)$ and $S_q(n,k)$ are, respectively, the Stirling numbers of the second kind and their well-known q-analogues, see [**41**].

Consider the rescaled Al-Salam-Chihara polynomials $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} P_n(X) &= Q_n(((q-1)X + 1/\alpha^2 + 1)\alpha/2;\, \alpha, \beta|q) \\ &= \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};\, q)_k}{(q;\, q)_k} q^k (\alpha\beta q^k;\, q)_{n-k} (1-q)^k q^{\binom{k}{2}} \alpha^{2k} \\ &\qquad \times \prod_{i=0}^{k-1} \left(X - [i]_q (1 - q^{-i}/\alpha^2)\right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

THEOREM 4.7. *The moments of the rescaled Al-Salam-Chihara polynomials $P_n(X)$ are*

$$\mu_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} S_q(n, k, 1/\alpha^2)(\alpha\beta;\, q)_k q^{-\binom{k}{2}} (1-q)^{-k} \alpha^{-2k}.$$

Proof. Let $L : X^n \mapsto \mu_n(\alpha, \beta)$ be the linear functional. We check that these moments do satisfy $L(P_n(X)) = 0$ for $n > 0$. Let a_k be the coefficients in front of the product in (4.19), then we have, using y-Stirling orthogonality,

$$\begin{aligned} L(P_n(X)) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=1}^{k} s_q(k, j, 1/\alpha^2) \sum_{t=1}^{j} S_q(j, t, 1/\alpha^2)(\alpha\beta;\, q)_t q^{-\binom{t}{2}} (1-q)^{-t} \alpha^{-2t} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\alpha\beta;\, q)_k q^{-\binom{k}{2}} (1-q)^{-k} \alpha^{-2k} \\ &= \alpha^{-n} (\alpha\beta;\, q)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};\, q)_k}{(q;\, q)_k} q^k = 0. \end{aligned}$$

Note that the last equality follows by applying the q-binomial formula. □

THEOREM 4.8. *The generating function for the moments $\mu_n(\alpha, \beta)$ is*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(\alpha, \beta) t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta;\, q)_k q^{-\binom{k}{2}} (1-q)^{-k} \alpha^{-2k} t^k}{\prod_{i=1}^{k} (1 - [i]_q t (1 - q^{-i}/\alpha^2))}. \tag{4.20}$$

Proof. By definition (4.18) we have

$$S_q(n, k, y) = S_q(n-1, k-1, y) + [k]_q (1 - yq^{-k}) S_q(n-1, k, y).$$

It follows that (4.18) is equivalent to

$$\sum_{n \geq k} S_q(n, k, y) t^n = \frac{t^k}{\prod_{i=1}^{k} (1 - [i]_q t (1 - q^{-i} y))}, \tag{4.21}$$

which yields immediately (4.20) in view of Theorem 4.7. □

The moment of q-Charlier polynomials corresponds to the $\beta = 0$, $\alpha = -1/\sqrt{a(1-q)}$ case, while that of q-Laguerre polynomials corresponds to the $\alpha = 1/\sqrt{y}$, $\alpha\beta = q$ case.

Therefore,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(c)}(a,q)t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(qt)^k}{\prod_{i=1}^{k}(q^i - q^i[i]_q t + a(1-q)[i]_q t)}, \tag{4.22}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(\ell)}(y,q)t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!_q (qty)^k}{\prod_{i=1}^{k}(q^i - q^i[i]_q t + [i]_q ty)}. \tag{4.23}$$

THEOREM 4.9. *Let $p = 1/q$. We have*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\beta;\, q)_k q^{-\binom{k}{2}}(1-q)^{-k}\alpha^{-2k}t^k}{\prod_{i=1}^{k}(1-[i]_q t(1-q^{-i}/\alpha^2))} = \sum_{i\geq 0} \frac{c_i(\alpha,\beta)}{1-[i]_q t(1-q^{-i}/\alpha^2)}, \tag{4.24}$$

where

$$c_i(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha\beta;q)_i}{(q;q)_i} \frac{q^{i-i^2}\alpha^{-2i}}{(q^{1-2i}/\alpha^2;q)_i} \frac{(p^{1+i}\alpha\beta/\alpha^2;p)_\infty}{(p^{1+2i}/\alpha^2;p)_\infty}.$$

Proof. Note the following partial fraction decomposition formula :

$$\frac{t^k}{(1-a_1t)(1-a_2t)\dots(1-a_kt)} = \frac{(-1)^k}{a_1\cdots a_k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^{-1}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}(a_i-a_j)^{-1}}{1-a_it}.$$

Therefore

$$\frac{t^k}{\prod_{i=1}^{k}(1-[i]_q t(1-q^{-i}/\alpha^2))} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\gamma_k(i)}{1-[i]_q t(1-q^{-i}/\alpha^2)}, \tag{4.25}$$

where

$$\gamma_k(i) = \frac{1}{k!_q}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \frac{\alpha^{2(k-i)}q^{\binom{k}{2}+k-i^2}}{(q^{1-2i}/\alpha^2;q)_i(q^{1+2i}\alpha^2;q)_{k-i}} \qquad (0\leq i\leq k).$$

Substituting this in (4.24) yields

$$\begin{aligned} c_i(\alpha,\beta) &= \sum_{k\geq i} \frac{(\alpha\beta;q)_k}{(q;q)_k}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \frac{q^{k-i^2}\alpha^{-2i}}{(q^{1-2i}/\alpha^2;q)_i(q^{1+2i}\alpha^2;q)_{k-i}} \\ &= \frac{(\alpha\beta;q)_i}{(q;q)_i}\frac{q^{i-i^2}\alpha^{-2i}}{(q^{1-2i}/\alpha^2;q)_i}\sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha\beta q^i;q)_k}{(q;q)_k}\frac{q^k}{(q^{1+2i}\alpha^2;q)_k}. \end{aligned}$$

The theorem follows then by applying the ${}_1\Phi_1$ summation formula (see [**39**, II.5]). □

By partial fraction decomposition (see [**91**, Theorem 4.12]), we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(c)}(a,q)t^n = \sum_{i\geq 0} \frac{a^i(1-a(1-q)p^{2i})/(a(1-q)p^i;p)_\infty}{i!_q q^{i^2}(q^i - q^i[i]_q t + a[i]_q t(1-q))}, \tag{4.26}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{(\ell)}(y,q)t^n = \sum_{i\geq 0} \frac{y^i(q^{2i}-y)}{q^{i^2}(q^i - q^i[i]t + [i]ty)}. \tag{4.27}$$

Note that (4.27) yields the following polynomial formula in y for $\mu_n^{(\ell)}(y,q)$:

$$\mu_n^{(\ell)}(y,q) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i[k-i]_q^n q^{k(i-k)}\left(\binom{n}{i}q^{k-i}+\binom{n}{i-1}\right)y^k, \tag{4.28}$$

while (4.26) does not yield such a polynomial formula in a for $\mu_n^{(c)}(a,q)$.

On the other hand, it follows from (4.25) and (4.21) that

$$S_q(n,k,y) = \frac{q^{-\binom{k}{2}}}{k!_q}\sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}_q y^{i-k}q^{k^2-i^2}\frac{([i]_q(1-q^{-i}y))^n}{(q^{1-2i}y;q)_i(q^{1+2i}/y;q)_{k-i}}. \tag{4.29}$$

Using Theorem 1 and the above explicit formula for q-Stirling numbers we can also write the moments $\mu_n(\alpha,\beta)$ as a double sum.

5. Linearization coefficients of the q-Laguerre polynomials

The following is our main result of this section.

THEOREM 4.10. *The linearization coefficients of the q-Laguerre polynomials are*

$$\mathcal{L}_q(L_{n_1}(x;q)\dots L_{n_k}(x;q)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_1,\dots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}. \tag{4.30}$$

A proof à la Viennot (cf. [**45, 55**]) of (4.30) would use the combinatorial interpretations for the moments and q-Laguerre polynomials to rewrite the left-hand side of (4.30) and then construct an adequate *killing involution* on the resulting set. For the time being we do not have such a proof to offer, instead we provide an inductive proof.

We first show that the above result is true for $(n_1,\dots,n_k)=(1,\dots,1)$.

LEMMA 4.11. *Let $d_n(y,q)=\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_n} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}$. Then $\mathcal{L}_q((x-y)^n)=d_n(y,q)$.*

Proof. Note that

$$\mathcal{L}_q((x-y)^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y^{n-k}\mu_k^{(\ell)}(y,q).$$

By binomial inversion, it suffices to prove that

$$\mu_n^{(\ell)}(y,q) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k d_{n-k}(y,q).$$

But the latter identity is obvious. □

The invariance of $\sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_1,n_2,\dots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}$ by permutating the $n_i's$ is a direct consequence of Theorem 4.10, but for our proof we need to first establish this property.

THEOREM 4.12. *For any permutation $\gamma\in\mathcal{S}_k$ we have*

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_1,n_2\dots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_{\gamma(1)},n_{\gamma(2)},\dots,n_{\gamma(k)})} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

Since the two cyclic permutations $(1,2)$ and $(1,2,3,\ldots,k)$ generate the symmetric group $\mathcal{S}_k$, Theorem 4.12 is a corollary of the following two lemmas (proved in the next two sections).

LEMMA 4.13.

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_1,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_2,n_3,\ldots,n_k,n_1)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

LEMMA 4.14.

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_1,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n_2,n_1,n_3\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

Proof of Theorem 4.10. Writing (4.14) as

$$(x-y)L_n(x) = L_{n+1}(x) + (yq+1)[n]_qL_n(x) + y[n]_q^2L_{n-1}(x),$$

we derive that

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{D}(1,n,n_2,\ldots,n_k)} w(\pi) = \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n+1,n_2,\ldots,n_k)} w(\pi) + (yq+1)[n]_q \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n,n_2,\ldots,n_k)} w(\pi) + y[n]_q^2 \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n-1,n_2,\ldots,n_k)} w(\pi), \tag{4.31}$$

where $w(\pi) = y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}$. In view of Lemma 4.11 it suffices to prove (4.31).

We distinguish four cases for permutations $\pi\in\mathcal{D}(1,n,n_2,\ldots,n_k)$.

a) $\pi(1),\pi^{-1}(1)\in\{2,\ldots,n+1\}$. Let $\pi(1)=i$ and $\pi(j)=1$ with $i,j\in\{2,\ldots,n+1\}$.

Then we define the mapping $\pi\to\pi'\in\mathcal{D}(n-1,n_2,\ldots,n_k)$ by deleting 1 and j and adding the edge $\pi^{-1}(j)\to i$ if $i\neq j$. Clearly

$$w(\pi) = yq^{(i-1)+(j-1)-2}w(\pi').$$

Summing over all $i,j\in\{2,\ldots,n+1\}$ yields the generating function :

$$y[n]_q^2 \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n-1,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

b) $\pi(1)\in\{2,\ldots,n+1\}$ and $\pi^{-1}(1)>n+1$. We define the mapping $\pi\to\pi'\in\mathcal{D}(n,n_2,\ldots,n_k)$ by deleting $i:=\pi(1)$ and replace the two edges $1\to\pi(1)\to\pi^2(1)$ by $1\to\pi^2(1)$. Clearly $w(\pi)=yq^{i-1}w(\pi')$. Summing over all $i=2,\ldots,n+1$ yields the generating function :

$$qy[n]_q \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

c) $\pi^{-1}(1)\in\{2,\ldots,n+1\}$ and $\pi(1)>n+1$. We define the mapping $\pi\to\pi'\in\mathcal{D}(n,n_2,\ldots,n_k)$ by deleting $i:=\pi^{-1}(1)$ and replace the two edges $1\leftarrow\pi^{-1}(1)\leftarrow\pi^{-2}(1)$ by $1\leftarrow\pi^{-2}(1)$. Clearly $w(\pi)=q^{i-2}w(\pi')$. Summing over all $i=2,\ldots,n+1$ yields the generating function :

$$[n]_q \sum_{\sigma\in\mathcal{D}(n,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)}q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

d) $\pi(1) > n+1$ and $\pi^{-1}(1) > n+1$. Clearly we can consider π as a permutation in $\mathcal{D}(n+1, n_2, \ldots, n_k)$. The generating function is

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}(n+1,n_2,\ldots,n_k)} y^{wex(\sigma)} q^{\mathrm{cros}(\sigma)}.$$

Summing up we obtain (4.31). □

When $k = 2$, Theorem 4.10 reduces to the orthogonality of the q-Laguerre polynomials (4.17). When $k = 3$ we can derive the following explicit formula from Theorem 4.1.

THEOREM 4.15. *We have*

$$\mathcal{L}_q(L_{n_1}(x;\, q)L_{n_2}(x;\, q)L_{n_3}(x;\, q)) = \sum_s \frac{n_1!_q\, n_2!_q\, n_3!_q\, s!_q\, y^s}{(n_1+n_2+n_3-2s)!_q (s-n_3)!_q (s-n_2)!_q (s-n_1)!_q} \times \sum_k \begin{bmatrix} n_1+n_2+n_3-2s \\ k \end{bmatrix}_q y^k q^{\binom{k+1}{2}+\binom{n_1+n_2+n_3-2s-k}{2}}.$$

Proof. By Theorem 4.1 with $a = \frac{1}{\sqrt{y}}$ and $b = \sqrt{y}q$ we have

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_q(L_{n_1}(x;\, q)L_{n_2}(x;\, q)L_{n_3}(x;\, q)) \\
&= \mathcal{L}_q(L_{n_3}(x;\, q)^2) \left(\frac{\sqrt{y}}{q-1}\right)^{n_1+n_2-n_3} C^{n_3}_{n_1,n_2}(a, b;\, q) \\
&= \sum_{m_2,m_3} \frac{n_1!_q\, n_2!_q\, n_3!_q\, (n_1+m_3)!_q\, y^{n_2+n_3-m_2-m_3}\, q^{\binom{m_2}{2}+\binom{n_3+n_2-n_1-m_2-2m_3+1}{2}}}{(n_3+n_2-n_1-m_2-2m_3)!_q\, m_2!_q\, (m_3+n_1-n_3)!_q\, (m_3+n_1-n_2)!_q\, m_3!_q}.
\end{aligned}$$

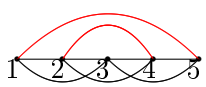
Substituting $s = n_1 + m_3$ and $k = n_3 + n_2 - n_1 - m_2 - 2m_3$ in the last sum yields the desired formula. □

REMARK 4.16. *It would be interesting to give a combinatorial proof of the above result as in* [**45, 55**]. *When $q = 1$ such a proof was given in* [**95**].

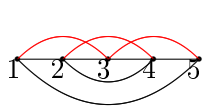
We end this section with an example. If $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$, by Theorem 4.15 we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q(L_2(x;\, q)L_2(x;\, q)L_1(x;\, q)) &= \sum_s \frac{2!_q 2!_q 1!_q s!_q y^s}{(5-2s)!_q (s-1)!_q (s-2)!_q (s-2)!_q} \\
&\quad \times \sum_{k\geq 0} \begin{bmatrix} 5-2s \\ k \end{bmatrix}_q y^k q^{\binom{k+1}{2}+\binom{5-2s-k}{2}} \\
&= (1+q)^3(1+qy)y^2. \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

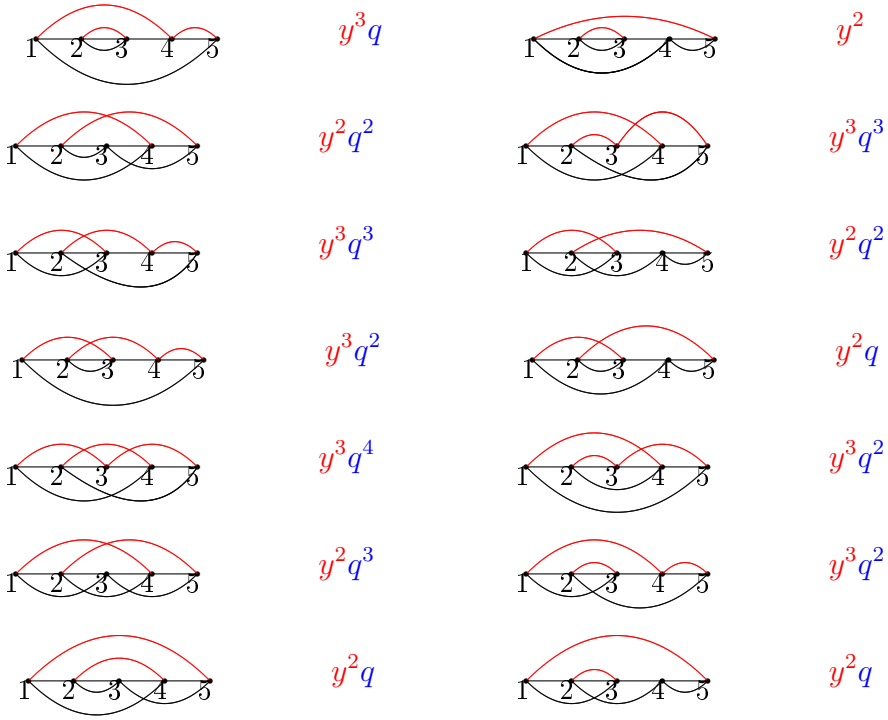
On the other hand, the sixteen derangements, depicted by their diagrams and the corresponding weights are tabulated as follows :



y^2q^2



y^3q^3



Summing up we get $\sum_{\sigma\in D(2,2,1)} y^{wex\,\sigma} q^{\mathrm{cros}\sigma} = y^2(1+qy)(1+q)^3$, which coincides with (4.32).

6. Proof of Lemma 4.13

For each fixed $k \in [n]$ define the two subsets of $\mathcal{S}_n$:

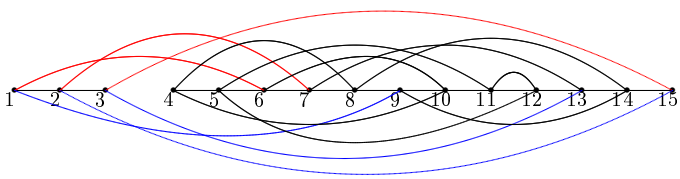
$$^k\mathcal{S}_n = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(i) > k \quad \text{for } 1 \le i \le k\},$$
$$\mathcal{S}_n^k = \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(n+1-i) < n+1-k \quad \text{for } 1 \le i \le k\}.$$

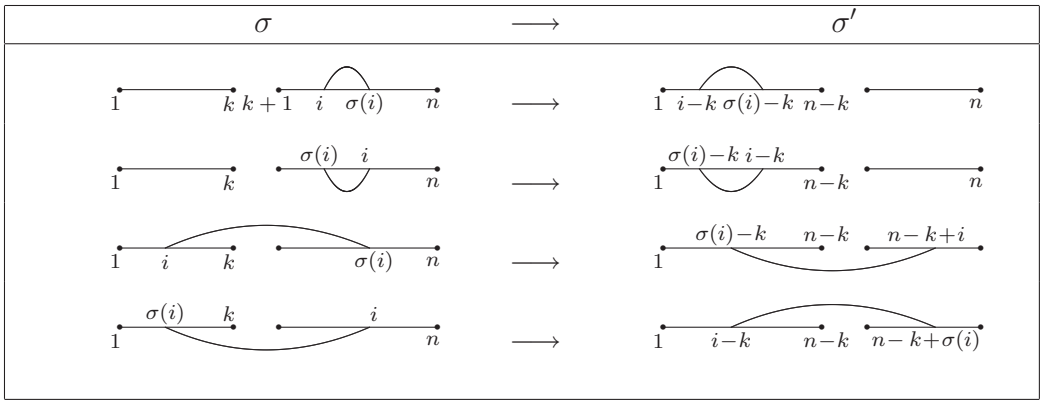
We first construct a simple bijection $\Phi_k : {}^k\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n^k$. Let $\sigma \in \mathcal{S}_n^k$. For $1 \le i \le n$ we define $\sigma'(i) := \Phi_k(\sigma)(i)$ as follows :

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i+k) - k, & \text{if } 1 \le i \le n-k \text{ and } \sigma(i+k) > k\,; \\ \sigma(i+k) + n - k, & \text{if } 1 \le i \le n-k \text{ and } \sigma(i+k) \le k\,; \\ \sigma(i+k-n) - k, & \text{if } n-k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

We can illustrate the map by the diagrams of permutations.

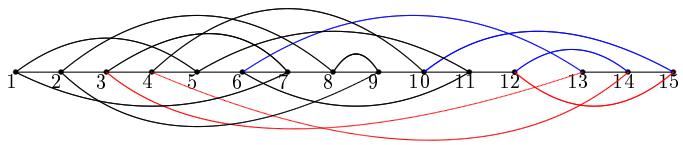
For example, consider the permutation $\sigma \in {}^3\mathcal{S}_{15}$, whose diagram is given below.





TAB. 4.1. The mapping $\Phi_k : \sigma \to \sigma'$.

Then the diagram of $\Phi_3(\sigma)$ is given by



The main properties of Φ_k are summarized in the following result.

PROPOSITION 4.17. *For each positive integer $k \in [n]$, the map $\Phi_k : {}^k\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n^k$ is a bijection such that for any $\sigma \in {}^k\mathcal{S}_n$ there holds*

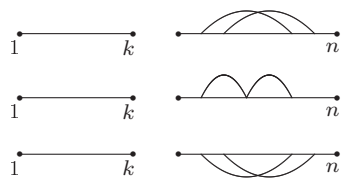
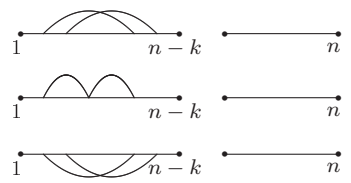
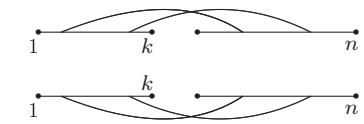
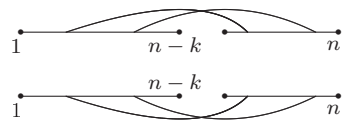
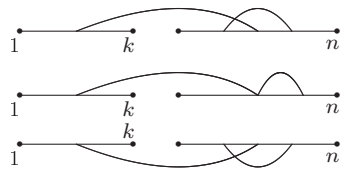
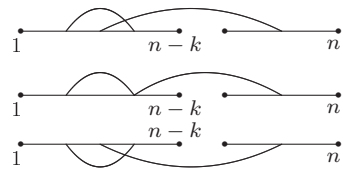
$$(wex, \mathrm{cros})\Phi_{\mathrm{k}}(\sigma) = (\mathrm{wex}, \mathrm{cros})\sigma. \tag{4.33}$$

Now, Lemma 4.13 is an immediate consequence of Lemma 4.17. Let $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Then $\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \subseteq {}^{n_1}\mathcal{S}_n$. By definition of Φ_{n_1}, for any $\sigma \in {}^{n_1}\mathcal{S}_n$ and $i \in [n - n_1]$ satisfying $\sigma(i + n_1) > n_1$, we have $i - \Phi_{n_1}(\sigma)(i) = i + n_1 - \sigma(i + n_1)$, so $\Phi_{n_1}(\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)) \subseteq \mathcal{D}(n_2, n_3, \ldots, n_k, n_1)$. Since the cardinality of $\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ is invariant by permutations of the n_i's and Φ_{n_1} is bijective, we have $\Phi_{n_1}(\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)) = \mathcal{D}(n_2, n_3, \ldots, n_k, n_1)$. The result follows then by applying (4.33).

Proof of Proposition 4.17. It is easy to see that Φ_k is a bijection. Let $\sigma \in {}^k\mathcal{S}_n$ and $\sigma' = \Phi_k(\sigma)$. The equality $wex(\sigma') = wex(\sigma)$ follows directly from the definition of Φ_k. It then remains to prove that $\mathrm{cros}(\sigma') = \mathrm{cros}(\sigma)$. We first decompose the crossings of σ and σ' into three subsets. Set

$$\begin{aligned}
L_1(\sigma) &= \{(i,j) \mid k < i < j \le \sigma(i) < \sigma(j) \quad \text{or} \quad i > j > \sigma(i) > \sigma(j) > k\},\\
L_2(\sigma) &= \{(i,j) \mid i < j \le k < \sigma(i) < \sigma(j) \quad \text{or} \quad i > j > k \ge \sigma(i) > \sigma(j)\},\\
L_3(\sigma) &= \{(i,j) \mid i \le k < j \le \sigma(i) < \sigma(j) \quad \text{or} \quad i > j > \sigma(i) > k \ge \sigma(j)\},
\end{aligned}$$

and

i	$L_i(\sigma)$	$R_i(\sigma')$
1		
2		
3		

TAB. 4.2. Forms of crossings in $L_i(\sigma)$ and $R_i(\sigma')$.

$$R_1(\sigma') = \{(i,j) \mid i < j \le \sigma'(i) < \sigma'(j) \le n-k \quad \text{or} \quad n-k \ge i > j > \sigma'(i) > \sigma'(j)\},$$
$$R_2(\sigma') = \{(i,j) \mid i < j \le n-k < \sigma'(i) < \sigma'(j) \quad \text{or} \quad i > j > n-k \ge \sigma'(i) > \sigma'(j)\},$$
$$R_3(\sigma') = \{(i,j) \mid i < j \le \sigma'(i) \le n-k < \sigma'(j) \quad \text{or} \quad i > n-k \ge j > \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

The "forms" of the crossings in the L_i's and R_i's is given in Table 4.2. Clearly, we have $\mathrm{cros}(\sigma) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} |\mathrm{L_i}(\sigma)|$ and $\mathrm{cros}(\sigma') = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} |\mathrm{R_i}(\sigma')|$ since $\sigma \in {}^k\mathcal{S}_n$ and $\sigma' \in \mathcal{S}_n^k$.

By the definition of Φ_k, it is readily seen (see Row 1 in Table 4.3) that $(i,j) \in L_1(\sigma)$ if and only if $(i-k, j-k) \in R_1(\sigma')$, and thus $|L_1(\sigma)| = |R_1(\sigma')|$. Similarly, we have (see Row 2 in Table 4.3) that $|L_2(\sigma)| = |R_2(\sigma')|$. It then remains to prove that $|L_3(\sigma)| = |R_3(\sigma')|$. Let

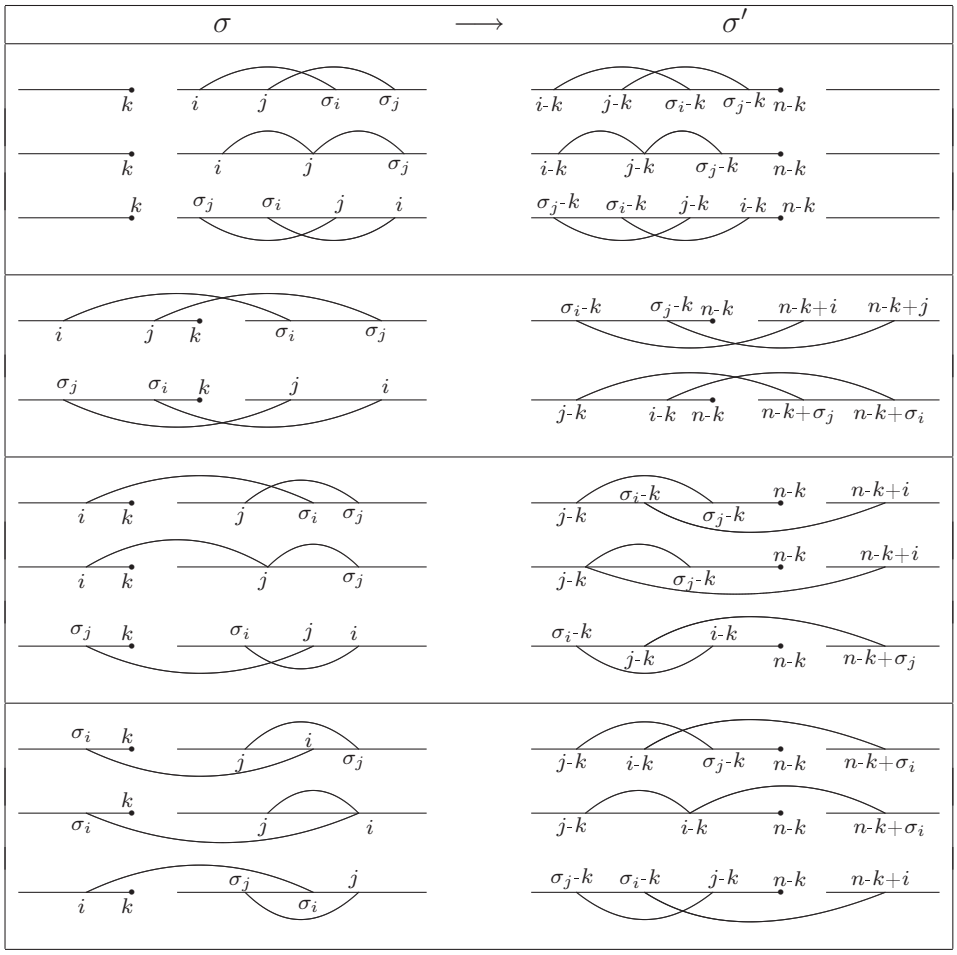
$$L_4(\sigma) = \{(i,j) \mid \sigma(i) \le k < j < i \le \sigma(j) \quad \text{or} \quad i \le k < \sigma(j) < \sigma(i) < j\}.$$

Then it is not difficult to show (see Row 4 of Table 4.3) that $|R_3(\sigma')| = |L_4(\sigma)|$. It then suffices to prove that $|L_3(\sigma)| = |L_4(\sigma)|$.

Suppose $\sigma([1,k]) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ and $\sigma^{-1}([1,k]) = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$. Then by definition of $L_3(\sigma)$ and $L_4(\sigma)$ we have

$$|L_3(\sigma)| = \sum_{s=1}^{k} |\{\ell \mid k < \ell \le i_s < \sigma(\ell)\}| + |\{\ell \mid \ell > j_s > \sigma(\ell) > k\}|, \tag{4.34}$$

$$|L_4(\sigma)| = \sum_{s=1}^{k} |\{\ell \mid \ell > i_s > \sigma(\ell) > k\}| + |\{\ell \mid k < \ell < j_s \le \sigma(\ell)\}|. \tag{4.35}$$



TAB. 4.3. Effects of the mapping Φ_k on the crossings of σ and σ'.

For any integer $i \in [n]$ set $A_i(\sigma) = \{j \mid j < i < \sigma(j)\}$. Note that it is easily seen that

$$|A_i(\sigma)| = |\{j \mid j < i < \sigma(j)\}| = |\{j \mid j > i > \sigma(j)\}| = |A_i(\sigma^{-1})|. \tag{4.36}$$

Let $s \in [k]$. By elementary manipulations we get

$$\begin{aligned} |\{\ell \mid k < \ell \leq i_s < \sigma(\ell)\}| &= |\{\ell \mid \ell \leq i_s < \sigma(\ell)\}| - |\{\ell \mid \ell \leq k < i_s < \sigma(\ell)\}| \\ &= |A_{i_s}(\sigma)| + \chi(i_s < \sigma(i_s)) - |\{\ell \mid \ell \leq k < i_s < \sigma(\ell)\}| \\ &= |A_{i_s}(\sigma)| + \chi(i_s < \sigma(i_s)) - |\{t \mid i_t > i_s\}|. \end{aligned} \tag{4.37}$$

By a similar reasoning, we obtain the following identities :

$$|\{\ell \mid \ell > j_s > \sigma(\ell) > k\}| = |A_{j_s}(\sigma^{-1})| - |\{t \mid j_t > j_s\}|. \tag{4.38}$$

$$|\{\ell \mid \ell > i_s > \sigma(\ell) > k\}| = |A_{i_s}(\sigma^{-1})| - |\{t \mid j_t > i_s\}| \tag{4.39}$$

$$|\{\ell \mid k \leq \ell < j_s \leq \sigma(\ell)\}| = |A_{j_s}(\sigma)| + \chi(k < \sigma^{-1}(j_s) < j_s) - |\{t \mid i_t > j_s\}|. \tag{4.40}$$

Inserting (4.37) and (4.38) in (4.34) and using (4.36), we get

(4.41)
$$|L_3(\sigma)| = \sum_{s=1}^{k} |A_{i_s}(\sigma)| + |A_{j_s}(\sigma)| + \chi(i_s < \sigma(i_s)) - |\{t \mid i_t > i_s\}| - |\{t \mid j_t > j_s\}|.$$

Similarly, inserting (4.39) and (4.40) in (4.35) and using (4.36), we get

(4.42)
$$|L_4(\sigma)| = \sum_{s=1}^{k} |A_{i_s}(\sigma)| + |A_{j_s}(\sigma)| + \chi(k < \sigma^{-1}(j_s) < j_s) - |\{t \mid j_t > i_s\}| - |\{t \mid i_t > j_s\}|.$$

Since the i_t's and j_t's are distinct we have $\sum_{s=1}^{k} |\{t \mid i_t > i_s\}| = \sum_{s=1}^{k} |\{t \mid j_t > j_s\}| = \binom{k}{2}$ and thus

$$\sum_{s=1}^{k} |\{t \mid i_t > i_s\}| + |\{t \mid j_t > j_s\}| = k(k-1). \tag{4.43}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k} |\{t \mid j_t > i_s\}| + |\{t \mid i_t > j_s\}| &= \sum_{s=1}^{k} |\{t \mid i_t \neq j_s\}| \\ &= k^2 - \sum_{s=1}^{k} \chi(j_s \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) \\ &= k^2 - \sum_{s=1}^{k} \chi(\sigma^{-1}(j_s) \leq k\}). \qquad (4.44)\end{aligned}$$

Also, it follows from the definition of the j_t's that for any $s \in [k]$, we have $j_s > k$ and $\sigma^{-1}(j_s) \neq j_s$, and thus

$$\chi(k < \sigma^{-1}(j_s) < j_s) + \chi(\sigma^{-1}(j_s) > j_s) = \chi(\sigma^{-1}(j_s) > k). \tag{4.45}$$

Inserting (4.53), (4.54) and (4.45) in (4.41) and (4.42) lead to $|L_3(\sigma)| = |L_4(\sigma)|$ as desired.

7. Proof of Lemma 4.14

For any two integers n_1, n_2 satisfying $N_2 := n_1 + n_2 \leq n$ we denote by $\mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ the set of permutations σ in $\mathcal{S}_n$ such that

$$(i, \sigma(i)) \notin [1, n_1]^2 \cup [n_1 + 1, N_2]^2.$$

In other words, any two integers in $[1, n_1]$ or $[n_1 + 1,\ N_2]$ are not connected by an arc in its graph.

We now construct a map $\Gamma^{(n_1,n_2)} : \sigma \mapsto \sigma'$ from $\mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ to $\mathcal{S}_n^{(n_2,n_1)}$ as follows. For $i = 1, \ldots, n$,

(1) If $i > N_2$ and $\sigma(i) > N_2$, set $\sigma'(i) = \sigma(i)$.

(2) Suppose

$$\{(i, \sigma(i)) \mid i < \sigma(i) \leq N_2\} = \{(i_1, N_2 + 1 - j_1), (i_2, N_2 + 1 - j_2), \ldots, (i_p, N_2 + 1 - j_p)\}$$
$$\{(\sigma(i), i) \mid \sigma(i) < i \leq N_2\} = \{(k_1, N_2 + 1 - \ell_1), (k_2, N_2 + 1 - \ell_2), \ldots, (k_q, N_2 + 1 - \ell_q)\}.$$

Then set $\sigma'(j_s) = N_2 + 1 - i_s$ and $\sigma'(N_2 + 1 - k_t) = \ell_t$ for any $s \in [p]$ and $t \in [q]$.

(3) Let

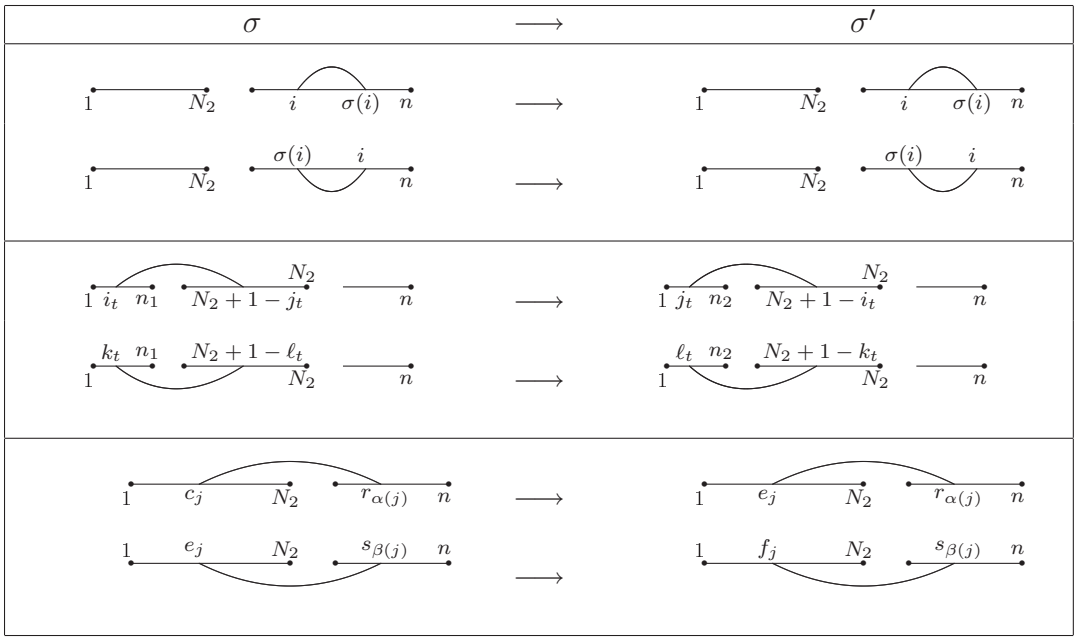
$$C = \{i \in [1, N_2] \; ; \; \sigma(i) > N_2\} \quad \text{and} \quad D = \{i \in [1, N_2] \; ; \; \sigma^{-1}(i) > N_2\}.$$

It is easy to see that $|C| = |D|$. Suppose $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_u\}_<$, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_u\}_<$, $\sigma(C) = \{r_1, r_2, \ldots, r_u\}_<$ and $\sigma^{-1}(D) = \{s_1, s_2, \ldots, s_u\}_<$. Let $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_u$ be the (unique) permutations satisfying $\sigma(c_i) = r_{\alpha(i)}$ and $\sigma^{-1}(d_i) = s_{\beta(i)}$ for each $1 \leq i \leq u$. Let

$$E = [1, N_2] \setminus \{j_1, \ldots, j_p, N_2 + 1 - k_1, \ldots, N_2 + 1 - k_q\}$$
$$F = [1, N_2] \setminus \{N_2 + 1 - i_1, \ldots, N_2 + 1 - i_p, \ell_1, \ldots, \ell_q\}.$$

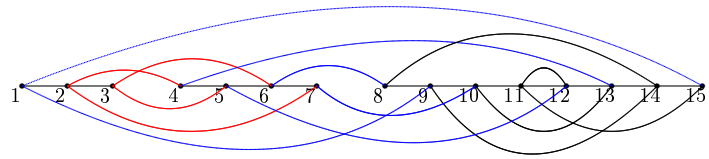
Clearly, we have $|E| = |C|$ and $|F| = |D|$. Suppose $E = \{e_1, \ldots, e_u\}_<$ and $F = \{f_1, \ldots, f_u\}_<$. Then set $\sigma'(e_i) = r_{\alpha(i)}$ and $\sigma'(s_i) = f_{\beta(i)}$ for each $1 \leq i \leq u$.

We can illustrate the map through the diagrams of permutations. See Table 4.4.

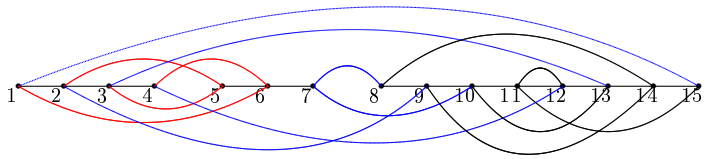


TAB. 4.4. The mapping $\Gamma^{(n_1,n_2)} : \sigma \mapsto \sigma'$

For example, if we consider the permutation in $\mathcal{S}_{15}^{(3,4)}$ whose diagram is given by



then the diagram of $\Gamma^{(n_1,n_2)}(\sigma)$ is given by



It is not hard to check that $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is well defined from $\mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ to $\mathcal{S}_n^{(n_2,n_1)}$. Since each step of the construction of $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is reversible, the map $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is bijective. Actually we can prove, the details are left to the reader, that $(\Gamma^{(n_1,n_2)})^{-1} = \Gamma^{(n_2,n_1)}$.

PROPOSITION 4.18. *For each positive integers n_1, n_2, n, with $N_2 \leq n$, the map $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is a bijection from $\mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ to $\mathcal{S}_n^{(n_2,n_1)}$ such that for each $\sigma \in \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$, we have*

$$(wex, \mathrm{cros})\Gamma^{(\mathrm{n_1,n_2})}(\sigma) = (\mathrm{wex}, \mathrm{cros})\sigma. \tag{4.46}$$

As an immediate consequence, we obtain Lemma 4.14. Let $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Then $\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \subseteq \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$. By definition of $\Gamma^{(n_1,n_2)}$, for any $\sigma \in \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ and $i > N_2$ satisfying $\sigma(i) > N_2$, we have

$$i - \Gamma^{(n_1,n_2)}(\sigma)(i) = i - \sigma(i),$$

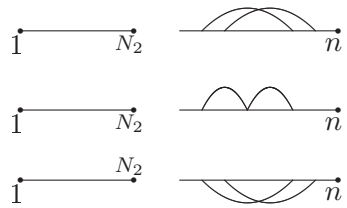
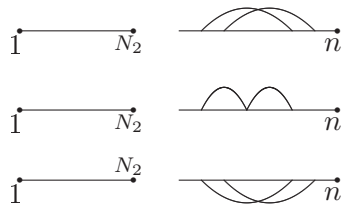
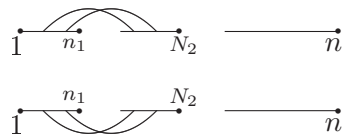
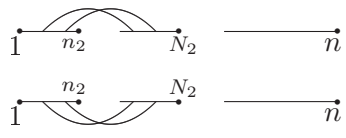
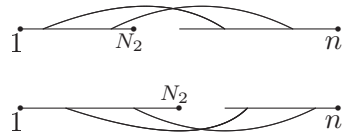
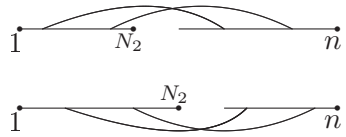
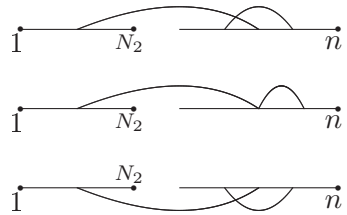
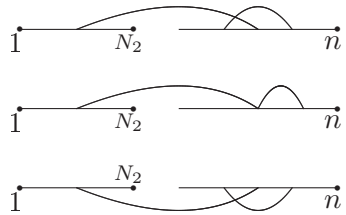
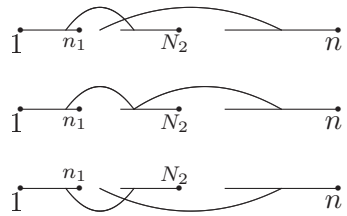
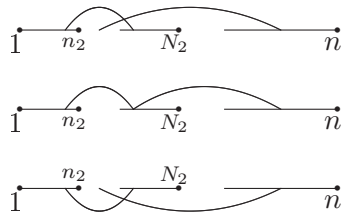
so $\Gamma^{(n_1,n_2)}(\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)) \subseteq \mathcal{D}(n_2, n_3, \ldots, n_k, n_1)$. Since the cardinality of $\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ doesn't depend of the order of the n_i's and $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is a bijection, we have

$$\Gamma^{(n_1,n_2)}(\mathcal{D}(n_1, n_2, \ldots, n_k)) = \mathcal{D}(n_2, n_3, \ldots, n_k, n_1).$$

Lemma 4.14 then follows from (4.46).

Proof of Proposition 4.18. It was shown above that $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ is bijective. Let $\sigma \in \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ and $\sigma' := \Gamma^{(n_1,n_2)}(\sigma)$. The equality $wex(\sigma') = wex(\sigma)$ is an immediate consequence of the definition of $\Gamma^{(n_1,n_2)}$. It then remains to prove that $\mathrm{cros}(\sigma') = \mathrm{cros}(\sigma)$. The idea is the same than for the proof of Lemma 4.13. We first decompose the number of crossings of σ and σ'. For each permutation $\gamma \in \mathcal{S}_n$, set

$$G_1^{(n_1,n_2)}(\gamma) = \{(i,j) \mid N_2 < i < j \leq \gamma(i) < \gamma(j) \quad \text{or} \quad i > j > \gamma(i) > \gamma(j) > N_2\},$$
$$G_2^{(n_1,n_2)}(\gamma) = \{(i,j) \mid i < j < \gamma(i) < \gamma(j) \leq N_2 \quad \text{or} \quad N_2 \geq i > j > \gamma(i) > \gamma(j)\},$$
$$G_3^{(n_1,n_2)}(\gamma) = \{(i,j) \mid i < j \leq N_2 < \gamma(i) < \gamma(j) \quad \text{or} \quad i > j > N_2 \geq \gamma(i) > \gamma(j)\},$$
$$G_4^{(n_1,n_2)}(\gamma) = \{(i,j) \mid i \leq N_2 < j \leq \gamma(i) < \gamma(j) \quad \text{or} \quad i > j > \gamma(i) > N_2 \geq \gamma(j)\},$$
$$G_5^{(n_1,n_2)}(\gamma) = \{(i,j) \mid i < j \leq \gamma(i) \leq N_2 < \gamma(j) \quad \text{or} \quad i > N_2 \geq j > \gamma(i) > \gamma(j)\}.$$

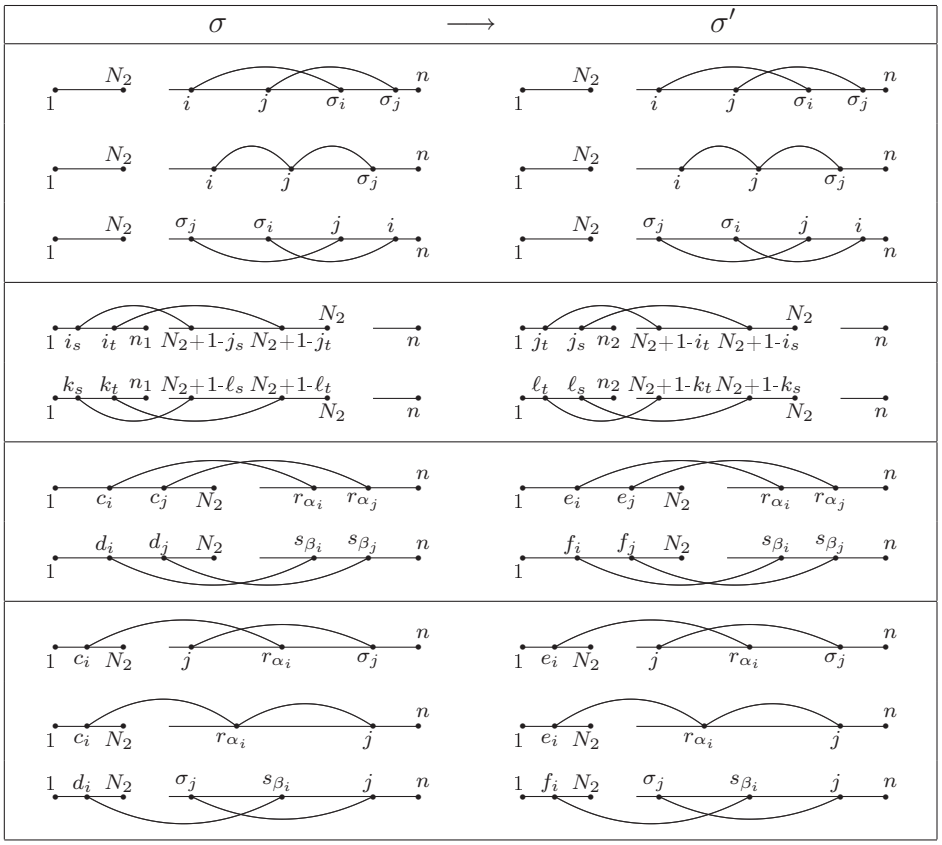
i	$G_i^{(n_1,n_2)}(\gamma)$	$G_i^{(n_2,n_1)}(\gamma)$
1		
2		
3		
4		
5		

TAB. 4.5. Forms of the crossings in $G_i^{(n_1,n_2)}(\gamma)$ and $G_i^{(n_2,n_1)}(\gamma)$.

Clearly, for any $\gamma \in \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$, we have $\mathrm{cros}(\gamma) = \sum_{i=1}^{5} |G_i^{(n_1,n_2)}(\gamma)|$. In particular,

$$\mathrm{cros}(\sigma) = \sum_{i=1}^{5} |G_i^{(n_1,n_2)}(\sigma)| \quad \text{and} \quad \mathrm{cros}(\sigma') = \sum_{i=1}^{5} |G_i^{(n_2,n_1)}(\sigma')|. \tag{4.47}$$

The "forms" of the crossings in the $G_i^{(n_1,n_2)}$'s and $G_i^{(n_2,n_1)}$'s are given in Table 4.5. By the definition of $\Gamma^{(n_1,n_2)}$, it is readily seen (see Row 1 in Table 4.6) that $G_1^{(n_1,n_2)}(\sigma) = G_1^{(n_2,n_1)}(\sigma')$ and thus $|G_1^{(n_1,n_2)}(\sigma)| = |G_1^{(n_2,n_1)}(\sigma')|$. By similar considerations we can prove (see Table 4.6) that $|G_i^{(n_1,n_2)}(\sigma)| = |G_i^{(n_2,n_1)}(\sigma')|$ for $i = 2, 3, 4$. It then suffices to prove that $|G_5^{(n_1,n_2)}(\sigma)| = |G_5^{(n_2,n_1)}(\sigma')|$ which will follow from the following lemma.



TAB. 4.6. Effects of the mapping $\Gamma^{(n_1,n_2)}$ on the crossings of σ and σ'.

LEMMA 4.19. *Let n_1, n_2, n be positive integers with $N_2 \le n$ and $\gamma \in \mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$. Suppose that*

$$\begin{aligned} B(\gamma) :=& \{(i, \gamma(i)) \mid i < \gamma(i) \le N_2\} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)\} \\ B(\gamma^{-1}) =& \{(\gamma(i), i) \mid \gamma(i) < i \le N_2\} = \{(k_1, \ell_1), (k_2, \ell_2), \dots, (k_q, \ell_q)\}, \end{aligned}$$

with $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ and $k_1 < k_2 < \cdots < k_q$. Then we have

$$|G_5^{(n_1,n_2)}(\gamma)| = \sum_{r=1}^{p}(j_r - i_r) + \sum_{r=1}^{q}(\ell_r - k_r - 1) - \binom{p+q}{2}. \tag{4.48}$$

Suppose

$$\begin{aligned} B(\sigma) &= \{(i_1, N_2 + 1 - j_1), \dots, (i_p, N_2 + 1 - j_p)\} \\ B(\sigma^{-1}) &= \{(k_1, N_2 + 1 - \ell_1), \dots, (k_q, N_2 + 1 - \ell_q)\}, \end{aligned}$$

then, by construction of σ', we have

$$B(\sigma') = \{(j_1, N_2+1-i_1), \dots, (j_p, N_2+1-i_p)\}$$
$$B(\sigma'^{-1}) = \{(\ell_1, N_2+1-k_1), \dots, (\ell_q, N_2+1-k_q)\}.$$

By symmetry, the identity (4.48) is also valid on $\mathcal{S}_n^{(n_2,n_1)}$. Applying (4.48) to σ' and σ lead to $|G_5^{(n_1,n_2)}(\sigma)| = |G_5^{(n_1,n_2)}(\sigma')|$. This conclude the proof of Lemma 4.18. It then remains to prove Lemma 4.19.

Proof of Lemma 4.19. By definition of $G_5^{(n_1,n_2)}(\gamma)$, we have

$$\begin{aligned}|G_5^{(n_1,n_2)}(\gamma)| &= |\{(i,j) \mid i<j<\gamma(i)\le N_2<\gamma(j)\}| + |\{(i,j) \mid \gamma(j)<\gamma(i)<j\le N_2<i\}| \\ &\quad + |\{i \mid i<\gamma(i)\le N_2<\gamma^2(i)\}|. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Now, by elementary manipulations and the definition of $B(\gamma)$ we get

$$\begin{aligned}|\{(i,j) \mid i<j<\gamma(i)\le N_2<\gamma(j)\}| &= \sum_{r=1}^{p} |\{x \mid i_r<x<j_r\le N_2<\gamma(x)\}| \\ &= \sum_{r=1}^{p} |\{x \mid i_r<x<j_r\}| - |\{x \mid i_r<x<j_r\,,\ \gamma(x)\le N_2\}|.\end{aligned}$$

But for any $r\in[1,p]$, we have $|\{x \mid i_r<x<j_r\}| = j_r-i_r-1$ and

$$\begin{aligned}&|\{x \mid i_r<x<j_r\,,\ \gamma(x)\le N_2\}| \\ =&|\{x \mid i_r<x<j_r\,,\ x<\gamma(x)\le N_2\}| + |\{x \mid i_r<x<j_r\,,\ \gamma(x)<x\le N_2\}| \\ =&|\{t \mid i_r<i_t<j_r\}| + |\{t \mid i_r<\ell_t<j_r\}| \quad \text{by definition of } B(\gamma) \text{ and } B(\gamma^{-1}), \\ =&|\{t \mid i_r<i_t\}| + |\{t \mid \ell_t<j_r\}|,\end{aligned}$$

since by definition of $\mathcal{S}_n^{(n_1,n_2)}$ we have that for any integers r and t, $i_r\le n_1$, $k_t\le n_1$, $j_r>n_1$ and $\ell_t>n_1$, and thus $i_r<j_t$ and $i_r<\ell_t$.

Summing over all r yields

$$|\{(i,j) \mid i<j<\gamma(i)\le N_2<\gamma(j)\}| = \sum_{r=1}^{p}(j_r-i_r-1) - \sum_{r=1}^{p}|\{t \mid i_r<i_t\}| - \sum_{r=1}^{p}|\{t \mid \ell_t<j_r\}|. \tag{4.50}$$

Since $|\{(i,j) \mid \gamma(j)<\gamma(i)<j\le N_2<i\}| = |\{(i,j) \mid i<j<\gamma^{-1}(i)\le N_2<\gamma^{-1}(j)\}|$, it follows from (4.50) that

$$|\{(i,j) \mid \gamma(j)<\gamma(i)<j\le N_2<i\}| = \sum_{r=1}^{q}(\ell_r-k_r-1) - \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid k_r<k_t\}| - \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid j_t<\ell_r\}|. \tag{4.51}$$

Remarking that $|\{i \mid i < \gamma(i) \leq N_2 < \gamma^2(i)\}| = |\{t \mid \gamma(j_t) > N_2\}|$ and inserting (4.50) and (4.51) in (4.49) lead to

(4.52)

$$|G_5^{(n_1,n_2)}(\gamma)| = \sum_{r=1}^{p}(j_r - i_r - 1) + \sum_{r=1}^{q}(\ell_r - k_r - 1) + |\{t \mid \gamma(j_t) > N_2\}| - \sum_{r=1}^{p}|\{t \mid i_r < i_t\}|$$
$$- \sum_{r=1}^{p}|\{t \mid \ell_t < j_r\}| - \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid k_r < k_t\}| - \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid j_t < \ell_r\}|.$$

Since the i_r's and k_r's are distinct we have

$$\sum_{r=1}^{p}|\{t \mid i_r < i_t\}| = \binom{p}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid k_r < k_t\}| = \binom{q}{2}. \tag{4.53}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{p}|\{t \mid \ell_t < j_r\}| + \sum_{r=1}^{q}|\{t \mid j_t < \ell_r\}| &= \sum_{r=1}^{p}|\{t \mid \ell_t \neq j_r\}| \\ &= pq - |\{t \mid j_t \in \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_q\}| \\ &= pq - \sum_{s=1}^{k}|\{t \mid \gamma(j_t) \leq N_2\}|, \end{aligned} \tag{4.54}$$

where the last identity follows from the definitions of $B(\gamma)$ and $B(\gamma^{-1})$. Inserting (4.53) and (4.54) in (4.52) lead to (4.48). This concludes the proof of Lemma 4.19. □

Bibliographie

[1] M. Anshelevich, Linearization coefficients for orthogonal polynomials using stochastic processes, The Annals of Probability 33 (2005), No. 1, 114-136.

[2] P. Biane, Some properties of crossings and partitions, Discrete Math. 175 (1997), 41–53.

[3] M. Bousquet-Mélou et G. Xin, On partitions avoiding 3-crossings, Sém. Lothar. Combin. 54 (2005/07), Art. B54e, 21 pp.

[4] K. S. Briggs et J. B. Remmel, A p, q-analogue of a formula of Frobenius, Electron. J. Combin. 10 (2003), Research Paper 9.

[5] L. Carlitz et J. Riordan, Congruences for Eulerian Numbers, Duke Math. J. 20 (1953), 339–343.

[6] L. Carlitz, q-Bernoulli and Eulerian numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954), 332–350.

[7] L. Carlitz, A combinatorial property of q-Eulerian numbers, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 51–54.

[8] W.Y.C. Chen, E.Y.P. Deng and R. R. X. Du, Reduction of m-regular noncrossing partitions, European J. of Combinatorics 26 (2005) 237–243.

[9] W.Y.C. Chen, E.Y.P. Deng, R.R.X. Du, R.P. Stanley et C.H. Yan, Crossings and nestings of matchings and partitions, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 1555-1575.

[10] W.Y.C. Chen, S.Y.J. Wu et C.H. Yan, Linked partitions and linked cycles, European Journal of combinatorics, Volume 29 (2008), Issue 6, 1377-1520.

[11] W. Chu et C. Wei, Set partitions with restrictions, Discrete Math. 308 (2008), Issue 15, 3163–3168.

[12] R. Clarke, E. Steingrímsson et J. Zeng, New Euler-Mahonian statistics on permutations and words, Adv. in Appl. Math. 18 (1997), no. 3, 237–270.

[13] L. Comtet, Analyse combinatoire, Presses universitaires de France (1970).

[14] S. Corteel, Crossings and alignments of permutations, Adv. in Appl. Math. 38 (2007), no. 2, 149–163.

[15] A. De Médicis et X. G. Viennot, Moments des q-polynômes de Laguerre et la bijection de Foata-Zeilberger, Adv. in Appl. Math. 15 (1994), no. 3, 262–304.

[16] A. De Mier, k-noncrossing and k-nonnesting graphs and fillings of Ferrers diagrams, Combinatorica 27 (2007), no. 6, 699–720.

[17] A. De Mier, On the symmetry of the distribution of crossings and nestings in graphs, Electron. J. Combin. 13 (2006), Note #21.

[18] M. de Sainte-Catherine, Couplage et Pfaffiens en combinatoire, physique et informatique, Thèse de 3ème cycle, Université de Bordeaux I, 1983.

[19] M. De Sainte-Catherine et X. G. Viennot, Combinatorial interpretation of integrals of products of Hermite, Laguerre and Tchebycheff polynomials. Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc, 1984), 120–128, Lecture Notes in Math., 1171, Springer, Berlin, 1985.

[20] R. Ehrenborg et M. Readdy, Juggling and applications to q-analogues, Discrete Math. 157 (1996), no. 1-3, 107–125.

[21] S. Even et J. Gillis, Derangements and Laguerre polynomials, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 79(1976), 135–143.

[22] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, Discrete Math. 41 (1982), 145–153.

[23] P. Flajolet et M. Noy, Analytic combinatorics of chord diagrams, Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow, 2000), 191–201, Springer, Berlin, 2000.

[24] P. Flajolet, C. Puech et J. Vuillemin, The analysis of simple list structures, Inform. Sci. 38 (1986), 121–1146.

[25] D. Foata, On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math. Soc 19 (1968), 236–240.

[26] D. Foata, Distribution Eulériennes et Mahoniennes sur le groupe des permutations, in M. Aigner (ed.), Higher Combinatorics, 27-49, D. Reidel, Boston, Berlin Combinatorics Symposium, 1976.

[27] D. Foata et C. Krattenthaler, Graphical major indices II, Sém. Lothar. Combin. 34 (1995) (electronic).

[28] D. Foata et M.P. Schützenberger, Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math., 138, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1970.

[29] D. Foata et V. Strehl, Combinatorics of Laguerre polynomials, Enumeration and design (Waterloo, Ont., 1982), Academic Press, Toronto, 1984, 123–140.

[30] D. Foata et D. Zeilberger, Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity, SIAM J. Disc. Math. 1 (1996), 425–433.

[31] D. Foata et D. Zeilberger, Graphical major indices, J. Comput. Appl. Math. 68 (1996), no. 1-2, 79–101.

[32] D. Foata et D. Zeilberger, Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian, Studies in Appl. Math. 83 (1990), 31–59.

[33] J. Françon et G. Viennot, Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi, Discrete Math. 28 (1979), 21–35.

[34] G. Frobenius, Uber die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome, Sitz. Berichte Preuss. Akad. Wiss., 1910, 808–847.

[35] A. Garsia, On the "maj" and "inv" q-analogue of Eulerian numbers, J. Lin. Multilin. Alg. 8 (1979), 21–34.

[36] A. Garsia and I. Gessel, Permutation statistics and partitions, Adv. in Math. 31 (1979), 288–305.

[37] A. M. Garsia et J. Remmel, A combinatorial interpretation of q-derangement and q-Laguerre numbers, European J. Combin. 1 (1980), 47–59.

[38] A. Garsia et J. B. Remmel, Q-counting rook configurations and a formula of Frobenius, J. Combin. Theory Ser. A 41 (1986), 246–275.

[39] G. Gasper et M. Rahman, Basic hypergeometric series, Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[40] I. Gessel, Generating functions and enumeration of sequences, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1977.

[41] H. W. Gould, The q-Stirling numbers of the first and second kinds, Duke Math. J. 28 (1961), 281–289.

[42] G.N. Han, Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots, (French) [Bipartition orders and statistics on words] The Foata Festschrift. Electron. J. Combin. 3 (1996), no. 2, Research Paper 3, (electronic)

[43] G.N. Han, Une démonstration "vérificative" d'un résultat de Foata-Zeilberger sur les relations bipartitionnaires, J. Computational and Applied Math. 68 (1996), pp. 159-162.

[44] M. Ishikawa, A. Kasraoui et J. Zeng, Euler-Mahonian statistics on ordered set partitions I, SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), Issue 3, 1105–1137.

[45] M. Ismail, D. Stanton et X.G. Viennot, The Combinatorics of q-Hermite polynomials and the Askey-Wilson integral, Europ. J. Combinatorics 8 (1987), 379-392.

[46] D. M. Jackson, Laguerre polynomials and derangements, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 80 (1976), 213–214.

[47] J. Jonsson, Generalized triangulations and diagonal-free subsets of stack polyominoes, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 112 (2005), no. 1, 117–142.

[48] A. Kasraoui, A classification of Mahonian maj-inv statitics, Advances in Applied Mathematics, Volume 42 (2009), Issue 3, 342–357.

[49] A. Kasraoui, Ascents and descents in 01-fillings of moon polyominoes, to appear in European Journal of combinatorics, arXiv :0807.0914.

[50] A. Kasraoui, d-regular set partitions and rook placements, to appear in Séminaire Lotharingien de combinatoire.

[51] A. Kasraoui, D. Stanton et J. Zeng, The combinatorics of Al-Salam-Chihara q-Laguerre polynomials, preprint (2008), arXiv :0810.3232.

[52] A. Kasraoui et J. Zeng, Euler-Mahonian statistics on ordered set partitions II, Journal of combinatorial theory, series A, Volume 116 (2009), Issue 3, 539–563.

[53] A. Kasraoui et J. Zeng, Distribution of crossings, nestings and alignments of two edges in matchings and partitions, Electron. J. Combin. 13 (2006), no. 1, Research Paper 33.

[54] D. Kim et J. Zeng, A combinatorial formula for the linearization coefficients of general Sheffer polynomials, European J. Combin., 22(2001), 313-332.

[55] D. Kim, D. Stanton et J. Zeng, The combinatorics of the Al-Salam-Chihara q-Charlier polynomials, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 54 (2006), Article B54i.

[56] M. Klazar, On identities concerning the numbers of crossings and nestings of two edges in matchings, SIAM J. Discrete Math. 20 (2006), no. 4, 960–976.

[57] M. Klazar, On *abab*-free and *abba*-free set partitions, European J. Combin. 17 (1996) 53–68.

[58] M. Klazar, On trees and noncrossing partitions, Discrete Appl. Math. 82 (1998) 263–269.

[59] R. Koekoek et R. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Report 98-17, Delft University of Thechnology, 1998.

[60] C. Krattenthaler, Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes, Adv. in Appl. Math. 37 (2006), no. 3, 404–431.

[61] G. Ksavrelof et J. Zeng, Nouvelles statistiques de partitions pour les q-nombres de Stirling de seconde espèce, Discrete Math. 256 (2002), Issue 3, 743–758.

[62] D. H. Lehmer, "Teaching combinatorial tricks to a computer", Proc. Sympos. Appl. Math. 10 (1960), 179–193, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[63] M. Lothaire, "Combinatorics on words." Reading, Addison-Wesley, 1983. Encyclopedia of Math. and its Appl. 17.

[64] P.A. MacMahon, Combinatory Analysis, vols. 1 et 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1915 (reprinted by Chelsea, New York, 1955).

[65] P.A. MacMahon, Two applications of general theorems in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. 15 , 314–321 (1916).

[66] P.A. MacMahon, The indices of permutations and the derivation therefrom of functions of a single variable associated with the permutations of any assemblage of objects, Amer. J. Math. 35 (1913), 281–322.

[67] S. Milne, Restricted growth functions, rank row matching of partition lattices, and q-Stirling numbers, Adv. Math. 43 , 173-196 (1982).

[68] S. Poznanovik et C. Yan, Crossings and Nestings of Two Edges in Set Partitions, to apper in SIAM J. Discrete Math., arXiv :0710.1816.

[69] H. Prodinger, On the number of Fibonacci partitions of a set, Fibonacci Quart. 19 (1981) 463–465.

[70] A. Randrianarivony, Moments des polynômes orthogonaux unitaires de Sheffer généralisés et spécialisations, European J. Combin. 19 (1998), no. 4, 507–518.

[71] D. Rawlings, The r-major index, J. Combin. Theory Ser. A 31 (1981), no. 2, 175–183.

[72] D. Rawlings, The (q, r)-Simon Newcomb problem, Linear and Multilinear Algebra 10 (1981), no. 3, 253–260.

[73] R. Read, The chord intersection paper, Annals of the New-York Academy of Science 319 (1979), 444–454.

[74] J.B. Remmel et M. Wachs, Rook theory, generalized Stirling numbers and (p, q)-analogues, Electron. J. Combin. 11 (2004), no.1, Research paper 84.

[75] J. Riordan, The distribution of crossings chords joining pairs of $2n$ points on a circle, Math. Computation 29 (1975), 215–222.

[76] M. Rubey, Increasing and Decreasing Sequences in Fillings of Moon Polyominoes, preprint arXiv : math.CO/0604140

[77] B. Sagan, A maj statistic for set partitions, European J. Combin. 12, 69-79 (1991).

[78] R. Simion, Non crossing partitions, Discrete Math. 217 (2000), 367–409.

[79] S. Simion et D. Stanton, Specializations of generalized Laguerre polynomials, SIAM J. Math. Anal. 25 (1994), 712-719.

[80] R. Simion, D. Ullman, On the structure of the lattice of noncrossing partitions, Discrete Math. 98 (1991) 193–206.

[81] S. Simion et D. Stanton, Octabasic Laguerre polynomials and permutation statistics, J. of Computational and Applied Math. 68 (1996), 297-329.

[82] M. Skandera, Chain polynomials and permutation statistics, Ph. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[83] R.P. Stanley, Enumerative combinatorics I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49, 1997.

[84] R. Stanley, Enumerative combinatorics II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1999.

[85] E. Steingrímsson, Statistics on ordered partitions of sets, preprint (1999), Arxiv :math.CO/0605670.

[86] J. Touchard, Sur un problème de configurations et sur les fractions continus, Canad. J. Math 4 (1952), 2–25.

[87] X. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes de conférences à l'UQAM, Montréal, 1983.

[88] M. Wachs, σ-Restricted Growth Functions and p, q-stirling numbers, J. Combin. Theory Ser. A 68 (1994), 470-480.

[89] M. Wachs et D. White, p, q-Stirling numbers and set partition statistics, J. Combin. Theory Ser. A 56 (1991), 27-46.

[90] D. White, Interpolating Set Partition Statistics, J. Combin. Theory Ser. A 68 (1994), 262-295.

[91] H. Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press, 1994.

[92] L. K. Williams, Enumeration of totally positive Grassmann cells, Adv. Math., 190 (2005), 319–342.

[93] W. Yang, Bell numbers and k-trees, Discrete Math. 156 (1996) 247–252.

[94] J. Zeng, Weighted derangements and the linearization coefficients of orthogonal Sheffer polynomials, Proc. London Math. Soc. (3), 65 (1992), 1-22.

[95] J. Zeng, Calcul Saalschützien des partitions et des dérangements colorés, SIAM J. Disc. Math. 3 (1990), No. 1, 149-156.

[96] J. Zeng et C.G. Zhang, A q-analog of Newton's series, Stirling functions and Eulerian functions, Results in Math. 25 (1994), 370-391.