THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité : **Physique Théorique**

Présentée par

Raphael Benichou

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

Supercordes, théories conformes et dualité holographique.

Soutenue le 5 juin 2009 devant le jury composé de :

MM. Costas Bachas,
Jan de Boer, Rapporteur,
Matthias Gaberdiel,
Marios Petropoulos,
Volker Schomerus, Rapporteur,
Alex Sevrin,
Jan Troost,
et Jean-Bernard Zuber.

Remerciements

Je suis extrêmement reconnaissant envers Jan Troost, pour le sérieux avec lequel il a pris son rôle de directeur de thèse, ainsi que pour la quantité impressionnante de temps qu'il m'a consacrée au cours de ces trois années. J'espère que la lecture de cet ouvrage ne lui fera pas regretter cet investissement.

Au cours de cette thèse, j'ai eu la chance de collaborer avec Giuseppe Policastro et Sujay Ashok. Je les remercie d'avoir accepté de travailler avec moi ; ces expériences ont été très enrichissantes. Je remercie également Costas Bachas et tous les membres permanents du LPTENS, pour avoir toujours répondu de bon cœur à mes nombreuses questions. L'ambiance scientifique chaleureuse et les efforts faits pour intégrer les étudiants à la vie du laboratoire, ont été très précieux pour moi. Merci à Christine, Mireille et bien sûr Nicole, pour leur travail indispensable.

Je remercie les membres du jury pour avoir accepté la tâche délicate de juger mon travail de thèse. C'est un grand honneur qu'ils me font.

Grâce aux thésards et post-docs du LPTENS, cette thèse s'est déroulée dans une ambiance très agréable. Je remercie particulièrement Giuseppe Policastro, Davide Cassani, Christian Hagendorf et Pedro Vieira pour de nombreuses discussions plaisantes et instructives. J'ai également beaucoup appris au contact d'étudiants en théorie des cordes travaillant dans d'autres laboratoires européens. Je pense en particulier à Daniel Persson, Christoph Keller, Cornelius Schmidt-Colinet et Balt van Rees.

J'ai eu la chance de participer à la première école doctorale Paris-Bruxelles-Amsterdam, qui a été d'une grande aide au début de ma thèse. Je tiens à en remercier les organisateurs. J'aimerais également exprimer ma gratitude envers les enseignants qui, tout au long de ma scolarité, m'ont initié à la beauté des mathématiques et de la physique.

Un immense merci à mes parents, qui ont toujours encouragé et stimulé ma curiosité scientifique, et qui m'ont offert les moyens de poursuivre mes études dans les meilleures conditions possibles. Je remercie également l'ensemble de ma famille pour son soutien permanent et sa confiance inébranlable. Merci à tous mes amis pour avoir été présents au cours de ces trois années et m'avoir permis de garder un contact tangible avec la réalité.

Un merci tout particulier à Jan, Zaara, Maxime et Elisabeth pour avoir lu, commenté et corrigé une première version de cet ouvrage.

Enfin et surtout, merci à Zaara pour avoir passé ces années auprès de moi, pour m'avoir soutenu dans mes choix, pour sa patience, pour ne pas être partie en courant quand je parlais de physique pendant mon sommeil, et pour son amour qui a tellement compté dans la réussite de cette thèse.

Avant-propos

Ce mémoire présente le travail que j'ai effectué au cours de ma thèse. Le premier chapitre est une introduction générale destinée à un large public. Il contient une présentation élémentaire des problématiques qui ont motivé mon travail, ainsi que des résultats obtenus. Le deuxième chapitre décrit brièvement les fondements de la théorie des cordes, et présente les méthodes et les outils utilisés au cours de cette thèse. Les quatre chapitres suivants introduisent les quatre articles scientifiques publiés au cours de cette thèse. Ces chapitres décrivent les motivations qui ont conduit à ces travaux, et mettent en relief certains résultats. J'espère que ces chapitres seront des compléments utiles à la lecture des publications scientifiques qui les accompagnent. Enfin, le septième chapitre résume l'ensemble des résultats obtenus, et présente certaines idées que j'aimerais approfondir dans un futur proche.

Table des matières

I Préambule **9**

1 Pourquoi la théorie des cordes ? **11**
1.1 Phénomènes et théories 11
1.2 L'espoir d'une théorie unique 13
1.3 La théorie des cordes 15
1.4 Présentation du travail de thèse 17

II Théorie des cordes en espaces-temps courbes et non-compacts **19**

2 Cordes quantiques en espaces-temps courbes **21**
2.1 Quantification de la corde fermée 21
2.2 Théories conformes bidimensionnelles 23
2.3 Supercordes et théories conformes supersymétriques 26
2.4 Exemples de théories conformes 28

3 Solutions exactes de la théorie des cordes **33**
3.1 Modèles de Gepner 33
3.2 Modèles de Gepner non-compacts 37

Première publication : "Non-compact Gepner Models, Landau-Ginzburg Orbifolds and Mirror Symmetry." **41**

4 D-branes en espace courbe **95**
4.1 Solitons gravitationnels et cordes ouvertes 95
4.2 États de bord 96
4.3 D-branes dans des solutions critiques de la théorie des cordes 98
4.4 D-branes et théories de jauge 100

Deuxième publication : "Bound states in N=2 Liouville theory with boundary and Deep throat D-branes." **103**

III Dualité holographique et supercordes en présence de flux Ramond-Ramond **155**

5 Flux Ramond-Ramond et T-dualité **157**
5.1 Quantification de la supercorde en présence de flux Ramond-Ramond 157

5.2 T-dualité 159

Troisième publication : " T-duality in Ramond-Ramond backgrounds." 162

6 L'espace-temps AdS_3 169
6.1 La correspondance AdS/CFT 169
6.2 Gravité quantique dans l'espace-temps AdS_3 171
6.3 AdS_3 supporté par des flux Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz 173
6.4 Supercordes dans $AdS_3 \times S^3$ 174

Quatrième publication : " Conformal Current Algebra in Two Dimensions." 178

IV Conclusion 215

7 Résultats et perspectives 217
7.1 Modèles de Gepner non-compacts et phénoménologie 217
7.2 Dualité holographique et algèbres de courants 218

Première partie

Préambule

Chapitre 1

Pourquoi la théorie des cordes ?

Le thème de cette thèse est la théorie des cordes. Avant de présenter les détails de mon travail, j'aimerais commencer par une introduction générale au sujet et aux problématiques qui ont motivé ma recherche au cours de ces trois années. Ce chapitre a l'ambition d'être accessible aux non-spécialistes.

1.1 Phénomènes et théories

Le monde qui nous entoure se comporte de façon étonnamment prévisible. Les mêmes causes produisent invariablement les mêmes effets. Cette régularité est la clé qui permet d'appréhender la réalité de façon rationnelle. Pour raisonner plus efficacement, il faut classifier les phénomènes que l'on observe, et les décrire dans un langage adapté. C'est l'ambition de la Science. La physique théorique s'intéresse, entre autres, aux processus élémentaires. Dans ce domaine, le langage qui s'avère le plus efficace est celui des mathématiques.

Une théorie est une liste de règles qui s'appliquent à un ensemble de phénomènes. Les théories les plus intéressantes décrivent de larges classes de phénomènes. La théorie des cordes, qui est au centre de cette thèse, pourrait même décrire toutes les observations jamais réalisées.

L'expérience des siècles passés montre que l'on peut comprendre les phénomènes physiques que l'on observe en termes d'interactions entre composants élémentaires. Cette approche, souvent qualifiée de réductionniste, n'a jamais été mise en défaut. Dans la théorie des cordes, cette philosophie est pleinement respectée : tout objet est compris comme un assemblage de minuscules cordes.

Avant d'en dire plus au sujet de la théorie des cordes, précisons que la pertinence de cette théorie pour décrire notre univers n'a pas encore été prouvée expérimentalement. La théorie des cordes n'est pour l'instant qu'une construction mathématique attrayante et prometteuse. Dans la suite de ce chapitre, nous essaierons de comprendre pourquoi de nombreux physiciens placent leurs espoirs dans cette théorie.

Les résultats expérimentaux accumulés par le passé ont permis d'obtenir une compréhension avancée des processus élémentaires à l'œuvre dans notre univers. Nous allons maintenant résumer cet édifice théorique sur lequel s'appuie la théorie des cordes. Pour cela, il est judicieux d'introduire trois concepts : la matière, les forces, et l'espace-temps. Si l'on pense à une théorie physique comme à une pièce de théâtre, alors les particules de matière sont les acteurs, les forces représentent les dialogues grâce auxquels les acteurs interagissent, et l'espace-temps constitue la scène.

La matière

La matière est sans doute le concept le plus simple à appréhender. Les objets qui nous entourent sont formés d'atomes. Les atomes eux-mêmes sont composés de particules plus petites, les électrons et les quarks. Il semble que ces particules soient élémentaires : on ne peut pas les décomposer en objets plus petits.

D'autres formes de matière existent dans notre univers. Les neutrinos, par exemple, sont des particules très discrètes. A chaque instant, des milliers d'entre eux nous traversent sans que l'on s'en aperçoive. On trouve également de nombreuses particules de matière un peu plus exotiques, mais elles sont généralement instables et se désintègrent rapidement. En outre, il existe pour chaque particule de matière une particule d'anti-matière. Ces dernières ont la propriété bien connue de s'annihiler avec les particules de matière. On peut étudier les propriétés de ces diverses formes de matière grâce aux accélérateurs de particules.

Citons enfin une forme de matière encore mal comprise, baptisée "matière noire". Il semble que cette forme de matière soit présente en très grande quantité dans notre univers : elle serait responsable de près d'un tiers de sa masse totale. Pour l'instant, on ne peut détecter la matière noire que grâce à son influence sur le mouvement des galaxies. Nous n'avons encore jamais réussi à identifier des particules de matière noire dans les accélérateurs de particules actuels. De grands espoirs reposent sur le LHC ("Large Hadron Collider"), un nouvel accélérateur qui entre en ce moment en service au Centre Européen pour la Recherche Nucléaire.

Les forces

Les forces donnent de l'intérêt à notre univers : elles permettent aux particules de matière d'interagir les unes avec les autres. La force la plus familière est la gravité. Paradoxalement, nous verrons que c'est celle qui cause le plus de soucis aux théoriciens. La force électromagnétique se manifeste également dans l'expérience quotidienne. Elle nous évite par exemple de nous enfoncer dans le sol. Les deux autres forces connues sont les interactions forte et faible. La première est reponsable de la cohésion des noyaux atomiques. La seconde est à l'origine des désintégrations radioactives.

L'avènement de la physique quantique au vingtième siècle a permis de comprendre la façon dont les forces agissent sur la matière. À chaque force, on peut associer un ensemble de particules messagères qui sont échangées par les particules de matières. Ce transfert est le processus microscopique qui se manisfeste comme une force. Par exemple, la particule qui transporte la force électromagnétique est le photon. Le processus de vision résulte donc d'une interaction électromagnétique entre un atome d'un récepteur de l'oeil, et un atome extérieur.

L'ensemble des particules de matière et de forces connues sont assemblées dans une construction théorique appelée "Modèle Standard". Seule la force de gravitation n'entre pas dans ce cadre. Le Modèle Standard décrit l'ensemble des phénomènes non-gravitationnels jamais observés avec une précision remarquable.

L'espace-temps

L'espace-temps est la scène sur laquelle se déroulent les interactions entre particules. Jusqu'au début du vingtième siècle, les physiciens décrivaient l'espace-temps comme un cadre fixe. Mais la théorie de la relativité générale d'Einstein a profondément changé cette image. Cette théorie

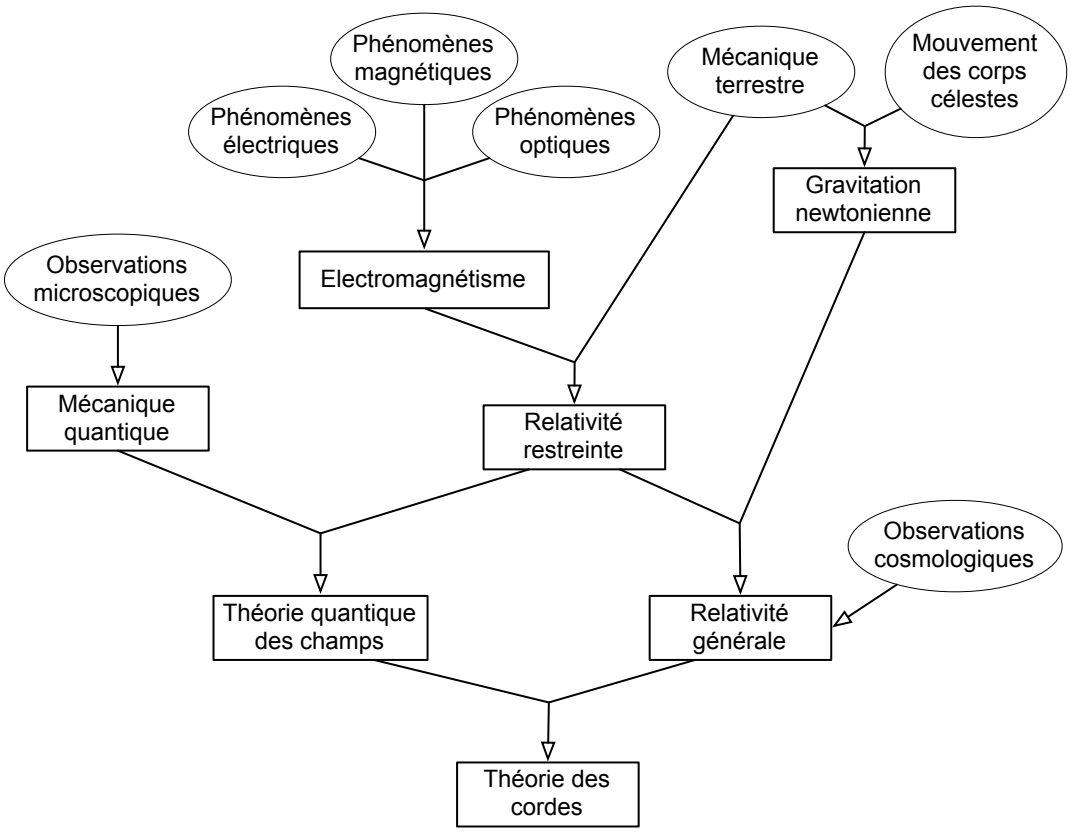


FIG. 1.1 – Schéma des différentes théories décrivant les processus élémentaires connus, et de leurs unifications successives.

implique que la structure de l'espace-temps est modifiée par les objets qui s'y trouvent : l'espace-temps est un objet dynamique. La relativité générale montre également que la force de gravitation est la manifestation des irrégularités de l'espace-temps. Cela donne une idée des raisons pour lesquelles le statut théorique de la gravité est différent de celui des autres forces.

1.2 L'espoir d'une théorie unique

Chaque théorie décrit un ensemble donné de phénomènes. Pour étudier des situations complexes dans lesquelles plusieurs mécanismes élémentaires sont à l'œuvre, on doit disposer d'une théorie unique capable de décrire l'ensemble des processus impliqués. L'unification de différentes théories permet également de comprendre de vastes classes de phénomènes comme des manifestations diverses des mêmes principes fondamentaux. La figure 1.1 propose un schéma simplifié des unifications successives des théories décrivant des processus élémentaires.

L'unification de deux théories s'accompagne généralement de répercussions inattendues dans de nombreux domaines. La découverte par Newton de la loi de la gravitation est un premier exemple d'unification fructueuse. Les deux familles de phénomènes décrits de façon unifiée par cette théorie, sont la chute des corps terrestres d'une part, et le mouvement des corps célestes d'autre part. Les conséquences scientifiques de cette découverte ont été multiples. Citons par

exemple l'invention du calcul différentiel dans le domaine des mathématiques (en parallèle avec les travaux de Leibniz). Cette théorie a également induit des progrès technologiques importants : encore aujourd'hui, elle est au coeur des constructions de bâtiments, de la conception des véhicules, etc.

La quête d'unification est également motivée par une recherche d'esthétisme. En effet, la beauté et la simplicité des constructions mathématiques obtenues est souvent spectaculaire. Cette affirmation peut surprendre, car les mathématiques sont un langage qu'il n'est pas facile de maîtriser. Une théorie est simple si elle s'énonce par des phrases courtes et harmonieuses dans la langue des mathématiques. L'élégance mathématique des structures révélées est telle, que l'on a parfois le sentiment de découvrir les règles qui régissent l'univers, plutôt que d'inventer un système d'organisation de nos connaissances. Cette impression est renforcée quand une unification réussie entraîne la prédiction, puis la découverte, de phénomènes jamais observés jusque-là ! Ces surprises sont tellement systématiques, que les prédictions théoriques inédites sont devenues un critère de validité pour les nouvelles théories.

L'unification par Maxwell des phénomènes magnétiques et électriques est un autre exemple instructif. L'élégance mathématique de la théorie obtenue est manifeste : quatre équations suffisent à résumer l'ensemble des connaissances dans ce domaine. Ces équations ont permis de comprendre que les phénomènes optiques sont également de nature électromagnétique. En outre, la théorie de Maxwell a initié le développement de technologies qui sont aujourd'hui au cœur de notre civilisation. Par exemple, la télécommunication par ondes, qui inclut la téléphonie et la télévision, a été inventée grâce à cette théorie.

La recherche d'une théorie unifiée peut être motivée par la découverte de résultats expérimentaux nouveaux, qui sortent du cadre des théories précédentes. Mais il arrive aussi que cette recherche soit guidée uniquement par des considérations formelles. C'est ainsi que la théorie de la relativité générale a été découverte.

Au début du vingtième siècle, la découverte de la mécanique quantique et des propriétés très surprenantes de la matière à petite échelle, offrait une source d'investigation passionnante pour les physiciens. Pourtant, Einstein choisit de s'attaquer à un autre problème. La théorie de la relativité restreinte, qu'il venait d'inventer, stipule que rien ne peut se déplacer plus vite que la lumière. Or, ceci est en contradiction avec les principes de la gravitation newtonienne, qui suppposent que l'interaction gravitationnelle entre deux corps est instantanée. Cette incompatibilité est purement théorique : à l'époque, il n'existait aucune expérience en tension avec l'une de ces théories. Néanmoins, Einstein consacra de nombreuses années à résoudre ce problème et découvrit la théorie de la relativité générale. La révolution associée à cette unification fut, entre autres, d'ordre philosophique. La relativité générale implique que l'univers n'est pas immuable : il possède une histoire, qui inclut un début et probablement une fin. Les applications concrètes ont mis un peu plus de temps à se développer. La plus célèbre est le GPS, qui n'atteint une précision suffisante que grâce aux calculs que permettent la relativité générale.

Nous sommes aujourd'hui dans une situation semblable à celle d'Einstein : nous possédons deux théories validées par toutes les expériences connues, mais qui sont incompatibles entre elles. Ces deux théories sont la relativité générale, et la théorie quantique des champs, qui sert de cadre mathématique au Modèle Standard. Comme Einstein, beaucoup de physiciens contemporains pensent qu'il est important de réconcilier ces deux théories. C'est le programme de la théorie des cordes.

Le Modèle Standard, malgré tous ses succès, ne décrit sans doute pas l'ensemble des particules

de notre univers. Mis à part le problème de la gravitation, il existe d'autres indices qui suggèrent que cette construction est incomplète. La mystérieuse matière noire, par exemple, ne semble pas trouver sa place dans cet édifice. D'autres problèmes sont d'un ordre plus technique. L'un d'eux concerne le boson de Higgs, qui semble avoir une masse étonnamment petite. Ce genre d'anomalie trahit généralement une structure sous-jacente. Il est probable que la résolution des problèmes du Modèle Standard nécessite l'unification de la matière avec les forces. Cette idée est connue sous le nom de "supersymétrie". Cette symétrie hypothétique permet d'expliquer la valeur faible de la masse du boson de Higgs, et possède également d'autres vertus : elle propose un candidat naturel pour la matière noire ; elle autorise également l'unification des forces électromagnétique, forte et faible. L'hypothèse de la supersymétrie est sur le point d'être testée. En effet, le LHC a de grandes chances de découvrir les particules supersymétriques, si elles existent.

L'unification du Modèle Standard avec la gravitation est un problème d'un autre ordre. Il s'agit maintenant d'unifier les forces et la matière avec l'espace-temps. La difficulté principale remonte à la tension entre la mécanique quantique et la relativité générale. Pour transformer une théorie classique en une théorie quantique, les physiciens ont développé des procédures de quantification. Malheureusement, ces procédures échouent quand on essaie de les appliquer à la relativité générale. Pour résoudre ce problème, une stratégie pourrait être de perfectionner les procédures de quantification, afin d'en construire une qui puisse s'appliquer à la gravitation. Cette approche a conduit, entre autres, à la formulation d'une théorie nommée "gravitation quantique à boucles". Il n'a pas encore été démontré que cette théorie reproduit le comportement classique de la gravitation générale, ce qui est un test crucial. La théorie des cordes propose une approche moins directe, mais d'une efficacité surprenante.

1.3 La théorie des cordes

La théorie quantique des champs, qui sert de cadre mathématique à la formulation du Modèle Standard, décrit les particules élémentaires comme des objets ponctuels. Cette idée fonctionne très bien pour décrire tous les phénomèmes connus, à l'exception de la gravitation. Lorsque l'on essaie de décrire la force gravitationnelle au moyen d'une théorie d'objets ponctuels, les interactions à très petite distance sont explosives, et les calculs produisent des résultats infinis.

Une idée, pour résoudre ce problème de petites distances, est de construire une théorie décrivant des objets de taille finie. Les objets étendus les plus simples sont les cordes. Lorsque l'on essaie de définir une théorie quantique décrivant la dynamique d'une corde, on réalise que la cohérence mathématique nous laisse très peu de liberté. En fait, il ne reste essentiellement qu'un unique paramètre : la longueur de la corde. Dans les années 1980, cinq théories de cordes quantiques cohérentes ont été construites. Mais on a compris plus tard, en 1995, que ces cinq théories décrivent en fait différents régimes d'une théorie unique, baptisée "théorie M". Une observation surprenante est que la théorie M décrit également des objets quantiques plus complexes que les cordes. Ces objets sont appelés "branes". Il existe un grand nombre de branes, qui peuvent être étendues dans un nombre de dimensions quelconque. Ainsi, s'il existe de nombreuses théories d'objets quantiques ponctuels, il semble qu'il n'existe qu'une seule théorie quantique décrivant des objets dynamiques étendus. Cette observation est très encourageante ; c'est une propriété qui contribue à l'élégance mathématique de la théorie.

La théorie des cordes est une théorie de gravitation quantique cohérente. Les effets explosifs de courte distance associés à la gravité sont effacés par la nature étendue des cordes. En outre, on peut

montrer que la théorie des cordes reproduit à grande distance les équations de la relativité générale. Nous sommes donc en présence d'une théorie qui parvient à réconcilier la relativité générale et la mécanique quantique. Néanmoins, il reste à montrer que cette théorie décrit bien notre univers et n'est pas simplement une construction abstraite. Pour cela, il faut au minimum prouver que le Modèle Standard est inclus dans la théorie des cordes. Il serait également souhaitable d'extraire des prédictions inédites de cette théorie et de les soumettre à l'épreuve de l'expérience.

La façon dont une théorie quantique de champs peut être immergée dans la théorie des cordes est assez intuitive. Lorsque l'on regarde une petite corde très éloignée, elle ressemble à un point. Ce raisonnement montre que les théories d'objets ponctuels sont des approximations naturelles de la théorie des cordes. Les phénomènes que l'on observe dans les accélérateurs de particules se déroulent sur une échelle de distance très grande devant la taille minuscule des cordes. En conséquence, ces événements sont décrits de façon satisfaisante par des théories de champs. Cette image est confirmée par des calculs explicites : on retrouve dans la théorie des cordes tous les constituants élémentaires du Modèle Standard. Le problème est désormais d'assembler ces différents éléments pour reconstruire exactement le Modèle Standard. Les progrès dans cette entreprise sont réguliers, mais l'ampleur de la tâche est telle que plusieurs années de travail sont sans doute encore nécessaires.

La complexité de ce problème vient du fait que la théorie des cordes ne décrit pas seulement notre univers, mais, dans un certain sens, *tous* les univers possibles. Une corde élémentaire se comporte de façon un peu différente dans chacun de ces univers. Les diverses particules proviennent des différents modes de vibration d'une corde. A l'image d'une corde de violon, qui peut en vibrant produire différentes notes, la corde fondamentale donne naissance à différentes particules. Chaque univers correspond à une solution de la théorie des cordes. Le nombre de ces solutions est extrêmement grand ; parmi cette myriade d'univers, on espère que se cache le nôtre.

Nous avons précédemment argumenté que l'unification de théories s'accompagne de progrès inattendus. Qu'en est-il de la théories des cordes ? Cette question est un peu prématurée, en raison du manque de preuves expérimentales en faveur de la théorie des cordes, mais également de notre compréhension lacunaire de la théorie elle-même. Malgré cela, des résultats surprenants sont déjà apparus. Par exemple, la théorie des cordes suggère que l'espace-temps possède plus de dimensions que les quatre qui nous sont familières. L'univers que l'on observe serait donc immergé dans une structure plus vaste. Même si notre champ d'investigation est pour l'instant limité aux dimensions visibles de l'univers, il n'est pas exclu que les progrès technologiques nous permettent un jour de construire des accélérateurs de particules capables de sonder ces dimensions supplémentaires.

La théorie des cordes a également contribué aux développements récents en mathématiques, à la fois comme un outil de calcul puissant et comme une source d'inspiration. Citons, par exemple, la découverte de la symétrie miroir pour les variétés Calabi-Yau, qui est détaillée dans le chapitre 3 de cet ouvrage.

Un autre résultat spectaculaire issu de la théorie des cordes est connu sous le nom de "correspondance AdS/CFT". Cette correspondance montre que certains univers solutions de la théorie des cordes, sont équivalents à des univers possédant moins de dimensions, et dans lequels vit une théorie de champs. La correspondance AdS/CFT n'est bien comprise que pour une famille d'univers, appelés "espaces-temps Anti-de Sitter". Si cette dualité est vraie pour notre univers, alors notre espace-temps n'est en un sens qu'une illusion ; nous vivons en réalité dans un espace-temps à deux dimensions spatiales et une dimension temporelle, sans force gravitationnelle. Cette idée

est parfois appelée “principe holographique". Comme pour un hologramme, l'image visible en trois dimensions est codée sur une surface à deux dimensions.

Les exemples d'espaces-temps pour lesquels cette dualité est bien comprise ont déja permis de faire des progrès remarquables en physique théorique. Certaines théories des champs sont difficiles à utiliser, car les interactions entre particules sont très intenses. C'est le cas par exemple de l'interaction forte, lorsque l'on étudie son effet à des distances supérieures à la taille du noyau atomique. Pour étudier de telles théories, on peut essayer d'utiliser le principe holographique : la théorie des champs problématique en quatre dimensions est équivalente à une théorie gravitationnelle en cinq dimensions. Dans certains cas, la description gravitationnelle est plus simple, et permet de comprendre le comportement de la théorie des champs. Cette stratégie a été appliquée avec succès à l'étude de l'interaction forte. Elle a permis de comprendre les propriétés surprenantes des plasmas composés de quarks et de gluons, qui ont été observés au cours de l'expérience RHIC à Brookhaven. Des travaux intenses se poursuivent dans cette direction, avec pour ambition d'appliquer les méthodes holographiques à l'étude d'autres systèmes physiques d'intérêt, par exemple aux superconducteurs.

1.4 Présentation du travail de thèse

Lorsque l'on étudie des phénomènes se produisant sur des distances suffisamment grandes, les cordes se comportent généralement comme des objets ponctuels, et il est alors possible d'utiliser une théorie de champs pour décrire la dynamique des cordes. Mais il existe de nombreuses situations dans lesquelles cette approximation n'est pas fiable. En outre, il est toujours utile de comprendre les mécanismes microscopiques à l'œuvre. Pour ces raisons, dans l'ensemble de cette thèse, nous étudierons la théorie des cordes au moyen de méthodes exactes. La suite de cet ouvrage se divise en deux parties. La première décrit l'étude d'une famille de solutions de la théorie des cordes, appelées “Modèles de Gepner non-compact”. La seconde partie considère des espaces-temps dans lesquels certaines forces prennent une valeur non nulle dans le vide. Ces forces sont appelées “champs de Ramond-Ramond”.

Le travail présenté dans la première partie de cette thèse a pour but de développer la compréhension de la théorie des cordes dans des espaces-temps courbes. De tels espaces-temps ont une géométrie non euclidienne : des droites parallèles peuvent se croiser, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à 180 degrés, etc. La géométrie non euclidienne apparaît systématiquement dans le cadre de la relativité générale et de la théorie des cordes. En effet, la matière et l'énergie courbent l'espace-temps. Dans cette thèse, l'accent sera mis sur l'étude de la théorie des cordes dans des espaces-temps courbes et non-compacts. Une motivation provient d'une observation cosmologique récente : même en l'absence de matière, notre espace-temps est courbe. Notre univers se comporte comme si le vide possédait une densité d'énergie non nulle ; on parle d'énergie noire, ou encore de constante cosmologique. Cette constante est extrêmement petite, et pourtant elle gouverne la dynamique de l'univers à l'échelle cosmique. Elle est responsable de l'accélération de l'expansion de l'univers. La constante cosmologique a été mesurée grâce à l'étude des supernovae lointaines [1] [2]. Cette observation a ensuite été confirmée par l'étude du fond diffus cosmologique [3], aussi connu comme “l'écho du big bang”.

Comprendre la théorie des cordes dans un univers comme le nôtre est un problème très difficile. Pour s'attaquer à un tel problème, il est utile d'étudier en premier lieu des configurations plus

simples, qui isolent une partie de la difficulté. La première moitié de cette thèse est dédiée à l'étude d'une famille de solutions de la théorie de cordes, les modèles de Gepner non-compacts. Ces modèles décrivent des espaces-temps non-compacts et courbes, et sont suffisamment simples pour qu'on puisse les étudier de façon efficace. La particularité de ces modèles est la suivante : l'intensité des interactions varie quand on se déplace le long de certaines directions, ce qui a un effet intéressant sur la façon dont les cordes se comportent. En particulier, cela empêche les cordes vibrant dans certains modes de se propager dans ces directions. Dans un premier article, nous nous concentrons sur l'étude de ces modes de vibration associés à des cordes localisées.

Nous étudierons dans un deuxième article les branes qui vivent dans ces espaces-temps. Les branes sont des objets étendus auxquels sont attachés des cordes ouvertes. Pour se représenter une brane, on peut penser à une feuille de papier qui flotte dans l'espace. Peut-être que notre univers est l'une de ces feuilles, et évolue dans un espace-temps plus vaste. Les particules du Modèle Standard seraient alors les cordes ouvertes attachées à cette brane. Certaines branes, dans les modèles de Gepner non-compacts, permettent justement d'obtenir des théories qui ressemblent à celles du Modèle Standard. Notre étude a permis d'approfondir la compréhension de ces théories.

La deuxième partie de cette thèse traite d'un problème différent. La théorie des cordes décrit plusieurs types de forces. Ces forces peuvent prendre une valeur non nulle dans le vide : on parle alors de "flux". Or, la procédure usuelle de quantification de la théorie des cordes ne fonctionne pas quand l'espace-temps contient des flux de type "Ramond-Ramond". De tels espaces-temps jouent un rôle central dans le contexte de la correspondance AdS/CFT. En effet, dans la plupart des exemples où la dualité holographique est sous contrôle, des flux de type Ramond-Ramond sont présents. L'approximation de la théorie des cordes par une théorie de champs n'est pas toujours justifiée dans ce contexte. Par exemple, cette approximation n'est pas fiable lorsque l'on cherche à décrire l'interaction forte de façon holographique. Il est donc important de comprendre comment décrire la théorie des cordes en présence de flux de type Ramond-Ramond.

Des formalismes alternatifs ont été proposés pour résoudre ce problème. Le troisième article présenté dans cette thèse utilise un formalisme prometteur, le formalisme des spineurs purs, pour étudier une propriété de la théorie des cordes appelée "T-dualité". La T-dualité est une symétrie importante de la théorie des cordes. Elle implique que des espaces-temps très différents conduisent en fait aux mêmes phénomènes physiques. Par exemple, la théorie des cordes dans un espace-temps extrêmement petit peut être équivalente à la théorie des cordes dans un espace-temps très vaste. La T-dualité permet donc de comprendre ce qui se passe à très petite échelle, là où les fluctuations quantiques rendent inutile notre intuition géométrique. Cette dualité est une propriété profondément liée au caractère étendu des cordes : elle ne possède pas d'équivalent en théorie des champs. Notre travail a permis de montrer que la T-dualité est toujours valable quand les champs de Ramond-Ramond sont allumés, et ce même dans des espaces-temps fortement courbés. Cet article s'est également inscrit dans une entreprise plus vaste, visant à comprendre des propriétés étonnantes constatées dans les interactions entre gluons dans certaines théories de champs.

Les espaces-temps de type Anti-de Sitter avec des flux Ramond-Ramond permettent de réaliser explicitement la dualité holographique. Le quatrième article vise à faciliter la quantification de la théorie des cordes dans de tels espaces-temps. Notre travail se concentre sur l'analyse des symétries quantiques des théories pertinentes. En effet, comprendre les symétries d'un problème est toujours un objectif prioritaire. Nous avons étudié un objet mathématique appelé "algèbre des courants", qui définit la façon dont les symétries agissent sur la théorie quantique. Nous pensons que cette construction sera utile pour mieux comprendre certains aspects de la dualité holographique.

Deuxième partie

Théorie des cordes en espaces-temps courbes et non-compacts

Chapitre 2

Cordes quantiques en espaces-temps courbes

Dans ce chapitre, nous allons présenter des résultats génériques concernant la théorie des cordes en espaces-temps courbes. Le but est d'introduire les outils utilisés au cours de cette thèse. Nous mettrons l'accent sur la description des solutions de la théorie des cordes en termes de théories conformes bidimensionnelles.

2.1 Quantification de la corde fermée

Pour commencer, nous allons étudier brièvement la quantification de la corde bosonique dans un espace-temps courbe. Une présentation plus détaillée peut être trouvée dans les ouvrages de références [4] [5] [6] [7] [8] [9].

Considérons une corde classique, évoluant dans un espace-temps paramétré par les coordonnées X^μ. La métrique de cet espace-temps est notée $G_{\mu\nu}$. On associe à cette corde une action proportionnelle à la surface que décrit la corde dans l'espace-temps. C'est l'action de Nambu-Goto :

$$S_{NG} = -T \int d^2\xi \sqrt{-\det\left(G_{\mu\nu}(X^\rho)\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu\right)} \tag{2.1}$$

Les coordonnées ξ^i paramétrisent la feuille d'univers. La constante T est la tension de la corde. On l'exprime souvent en terme de la constante α', qui est le carré de la longueur de la corde (dans un système d'unités adapté) :

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{2.2}$$

L'action de Nambu-Goto est malheureusement difficile à quantifier. Il est plus simple de travailler avec l'action de Polyakov :

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-\det g} g^{ij} G_{\mu\nu}(X^\rho)\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \tag{2.3}$$

On a introduit une métrique dynamique g_{ij} sur la feuille d'univers. Les équations du mouvement pour cette métrique impliquent que l'action de Polyakov est classiquement équivalente à l'action de Nambu-Goto. L'action de Polyakov possède des symétries locales : l'invariance par difféomorphismes, et l'invariance sous les transformations de Weyl. Cette action peut se généraliser

ainsi :

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi \left[\left(\sqrt{-\det g}g^{ij}G_{\mu\nu}(X^\rho)+\varepsilon^{ij}B_{\mu\nu}(X^\rho)\right)\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu + \alpha'\sqrt{-\det g}R^{(2)}\Phi(X^\rho)\right] \tag{2.4}$$

Le tenseur $B_{\mu\nu}$ est anti-symétrique dans ses indices. L'ajout de ce couplage à l'action de Polyakov est naturel, car il respecte toutes les symétries. Le deuxième terme est plus subtil : en effet il viole l'invariance conforme classiquement. Cependant, ce terme est multiplié par un facteur α', ce qui impliqe que l'anomalie conforme classique de ce terme peut eventuellement s'annuler avec les anomalies quantiques des autres couplages.

Il est capital que les symétries locales de l'action de Polyakov soient préservées dans la théorie quantique. L'invariance conforme quantique nécéssite que les fonctions béta associées à chacun des couplages s'annulent. On peut calculer ces fonctions béta en théorie des perturbations : le petit paramètre utilisé pour le développement perturbatif est la longueur de la corde ($\sqrt{\alpha'}$) divisée par l'échelle de longueur caractéristique de l'espace-temps (typiquement la courbure scalaire). Ce développement perturbatif n'est valable que si l'espace-temps est faiblement courbé à l'échelle de la corde. Le calcul des fonctions béta donne [10] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta^G_{\mu\nu} &=& \alpha'\left(R_{\mu\nu}-H_{\mu\rho\sigma}H_\nu^{\rho\sigma}+2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi\right)+\mathscr{O}(\alpha'^2) \\ \beta^B_{\mu\nu} &=& \alpha'-\frac{1}{2}\nabla^\rho\left(e^{-2\Phi}H_{\mu\rho\sigma}\right)+\mathscr{O}(\alpha'^2) \\ \beta^\Phi &=& D-26+\frac{3}{2}\alpha'\left(4(\nabla\Phi)^2-4\nabla^2\Phi-R+\frac{1}{12}H^2\right)+\mathscr{O}(\alpha'^2) \end{array}\right. \tag{2.5}$$

On a noté $H_{\mu\nu\rho}=\partial_{[\mu}B_{\nu\rho]}$, et ∇ est la derivée covariante dans l'espace-temps, $R_{\mu\nu}$ et R sont respectivement le tenseur et le scalaire de Ricci, et D est la dimension de l'espace-temps.

Il est remarquable que l'invariance conforme sur la feuille d'univers implique les équations d'Einstein (généralisées) dans l'espace-temps. En conséquence, la dynamique des cordes à basse énergie est codée par l'action d'Einstein-Hilbert (généralisée).

La quantification de la corde peut s'effectuer de plusieurs façons. Dans la première partie de cette thèse, nous utiliserons principalement la procédure de quantification dans la jauge du cône de lumière. Lorsque l'espace-temps possède comme sous-espace l'espace-temps de Minkowski à deux dimensions, cette procédure est très efficace pour calculer le spectre d'excitations de la corde. L'idée est de résoudre au maximum les contraintes issues de l'action de Polyakov avant de procéder à la quantification. On utilise l'invariance par difféomorphisme pour s'assurer que l'une des coordonnées du cône de lumière dans l'espace-temps est proportionnelle à la coordonnée temporelle sur la feuille d'univers. Les équations du mouvement de la métrique sur la feuille d'univers (appelées aussi contraintes de Virasoro) permettent ensuite d'éliminer la deuxième coordonnée du cône de lumière. Cette procédure nous laisse avec un nombre minimal de contraintes à imposer sur les états de la théorie quantique. En fait, la seule contrainte restante est une condition de couche de masse :

$$L_0 - 1 = \bar{L}_0 - 1 = 0 \tag{2.6}$$

Les opérateurs L_0 et $\bar{L}_0$ sont les modes zéro des composantes du tenseur énergie-impulsion sur la feuille d'univers. Les solutions de ces équations génèrent l'espace des états quantiques de la corde.

Une seconde procédure de quantification à laquelle nous ferons référence utilise le formalisme d'intégrale de chemin. Cette procédure a l'avantage de préserver toutes les symétries de l'espace-temps. Le choix d'une jauge pour la métrique de la feuille d'univers implique l'apparition d'un système de fantômes (b,c) de Faddeev-Popov dans l'action de Polyakov. La nouvelle action est

alors invariante sous une symétrie BRST, qui est une relique de l'invariance par difféomorphismes. Les états physiques de la théorie sont alors definis comme les éléments de la cohomologie de la charge associée à la symétrie BRST.

Ces deux procédures permettent de calculer le spectre de la théorie des cordes. On trouve généralement une particule de masse carrée négative, le tachyon, associée à un couplage renormalisable $T(X)$ sur la feuille d'univers. Cette particule trahit une instabilité de la théorie des cordes bosonique. Les couplages marginaux $G_{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu}$ sont associés à des modes de masse nulle pour la corde. En particulier, on trouve une excitation sans masse de spin deux, le graviton. La théorie des cordes est une théorie de gravitation quantique. Enfin il existe une tour infinie de modes de plus en plus massifs, associés aux couplages non-renormalisables sur la feuille d'univers.

Le couplage Φ, appelé dilaton, joue un rôle très spécial. Lorsqu'il prend une valeur moyenne constante dans l'espace-temps, il est associé à un mode de masse nulle. Par contre lorsque ce champ prend un profil non-trivial, tout le spectre de la théorie des cordes se trouve perturbé. Un gradient spatial pour le dilaton augmente les masses de tous les états de la théorie, alors qu'un gradient temporel les diminue.

Les amplitudes de diffusion dans la théorie des cordes sont définies par une série perturbative. Le terme d'ordre n dans cette série est une fonction de corrélation pour les opérateurs pertinents, calculée dans la théorie conforme définie par l'action de Polyakov sur une surface de Riemann de genre n. Le mode zéro du dilaton associe un poids différent à chacun de ces termes. En effet, le théorème de Gauss-Bonnet stipule que l'intégrale de la courbure scalaire sur une surface de Riemann est proportionnelle au genre de cette surface. On peut donc interpréter le mode zéro du dilaton comme la constante de couplage de la théorie des cordes. Les divergences ultraviolettes qui apparaissent lors des calculs perturbatifs en théorie des champs sont absentes de la théorie des cordes. Intuitivement, c'est une conséquence de la taille non-nulle de la corde fondamentale, qui efface les effets de très courte distance. D'un point de vue plus formel, la raison est que les regions de l'espace des modules des surfaces de Riemann qui décrivent des processus ultraviolets sont équivalentes sous l'action du groupe modulaire à d'autres régions décrivant des processus infrarouges.

2.2 Théories conformes bidimensionnelles

Nous avons vu précédemment que l'action de Polyakov gouverne la dynamique de la corde dans un espace-temps défini par une métrique $G_{\mu\nu}$, un tenseur anti-symétrique $B_{\mu\nu}$ et un dilaton Φ. La cohérence de la théorie quantique requiert l'invariance conforme de ce modèle sigma. En conséquence les espaces-temps solutions de la théorie des cordes vérifient les équations d'Einstein généralisées (2.5).

Dans la suite, nous allons changer de perspective. Plutôt que d'étudier des solutions des équations d'Einstein, nous considérerons directement des théories conformes bidimensionnelles. Cette approche a l'avantage de ne pas reposer sur un développement perturbatif en α'. Ainsi, nous pourrons également étudier des espaces-temps dont la courbure est de l'ordre de l'échelle de corde. Dans l'ensemble de cette thèse, nous utiliserons principalement des outils développés dans le cadre des théories conformes bidimensionnelles. Pour une introduction plus detaillée à ces techniques, nous nous référerons à l'ouvrage [11]. Notons que les théories conformes bidimensionnelles donnent les “points selles" de la théorie des cordes. Pour vérifier qu'une solution est stable, il faut calculer le spectre de la corde et prouver qu'il ne contient pas d'excitation tachyonique.

Les théories conformes en deux dimensions sont particulières, car le groupe des transformations conformes bidimensionnelles est de dimension infinie. Pour étudier ces théories, il est pratique de travailler avec des coordonées complexes sur la feuille d'univers. Les transformations conformes, c'est-à-dire les changements de coordonnées qui préservent localement les angles, sont les reparamétrisations indépendantes des coordonnées holomorphe et anti-holomorphe :

$$z \to f(z), \quad \bar{z} \to \bar{f}(\bar{z}) \tag{2.7}$$

Dans une théorie conforme, certains opérateurs jouent un rôle particulier : les opérateurs primaires. Ils se transforment de façon naturelle sous l'action des transformations conformes (2.7) :

$$\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z}) \to (\partial f)^{\Delta}(\bar{\partial}\bar{f})^{\bar{\Delta}}\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(f(z),\bar{f}(\bar{z})) \tag{2.8}$$

Les nombres réels Δ et $\bar{\Delta}$ sont les dimensions conformes de l'opérateur primaire $\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}$. Il est souvent pratique de décomposer un champ en modes. Pour un champ holomorphe de dimension Δ, on définit les modes de la façon suivante :

$$\Phi_{\Delta}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n z^{-n-\Delta} \tag{2.9}$$

L'invariance conforme a pour conséquence l'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion. En coordonnées complexes, cela signifie que les composantes mixtes du tenseur énergie-impulsion s'annulent. La conservation du tenseur énergie-impulsion implique alors :

$$\bar{\partial}T_{zz} = 0, \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{2.10}$$

Les modes de la partie holomorphe (respectivement anti-holomorphe) du tenseur énergie-impulsion sont traditionnellement notés L_n (respectivement $\bar{L}_n$). Ils satisfont l'algèbre de Virasoro :

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{2.11}$$

La constante c est la charge centrale de la théorie conforme. Elle trahit une anomalie quantique dans l'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion. Quand la courbure scalaire $R^{(2)}$ de la feuille d'univers est non-nulle, la trace du tenseur énergie-impulsion devient :

$$Tr(T) = T_{z\bar{z}} = -i\frac{c}{12}R^{(2)} \tag{2.12}$$

La définition perturbative de la théorie des cordes introduit des surfaces de Riemann de genre arbitraire, et donc de courbure scalaire non-nulle. Pour éviter une anomalie conforme quantique, il est nécessaire que la théorie conforme vivant sur la feuille d'univers ait une charge centrale nulle. Dans la procédure de quantification BRST de la corde bosonique, le système de fantômes (b,c) est une théorie conforme avec charge centrale $c = -26$. Il faut donc que les autres champs vivant sur la feuille d'univers décrivent une théorie conforme avec charge centrale $c = +26$. De cette condition vient l'idée que la corde bosonique vit en 26 dimensions. En effet, un boson libre, qui décrit une dimension de l'espace-temps de Minkowski, a une charge centrale unité. Par la suite, nous rencontrerons des théories conformes avec interactions, auxquelles on ne peut pas toujours associer une description géométrique.

Les champs non-primaires d'une théorie conforme peuvent être obtenus en agissant avec les modes de Virasoro sur les champs primaires. En conséquence, une théorie conforme est définie

par la donnée de ses champs primaires, et par le développement en opérateurs du produit de ces champs (OPE) :

$$\Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(0,0) = \sum_{p,(k,\bar{k})} C_{12}^{p,(k,\bar{k})} z^{\Delta_p-\Delta_1-\Delta_2+k} \bar{z}^{\bar{\Delta}_p-\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2+\bar{k}} \Phi_p^{(k,\bar{k})}(0,0) \tag{2.13}$$

Dans la formule précédente, l'indice p décrit l'ensemble des opérateurs primaires, et les indices $(k,\bar{k})$ codent les modes de Virasoro qui agissent sur ces opérateurs. Les coefficients $C_{ij}^{p,(k,\bar{k})}$ définissent la théorie conforme. Ces OPE permettent de calculer les fonctions de corrélation de la théorie.

Théorie conforme sur le tore

Les théories conformes utilisées comme solutions de la théorie des cordes se doivent d'être bien définies sur toute surface de Riemann. Parmi ces surfaces, le tore joue un rôle particulier. Le tore à deux dimensions peut être défini comme le quotient du plan complexe par les transformations :

$$z \to z+1, \quad z \to z+\tau \tag{2.14}$$

Le paramètre complexe τ ne peut pas être modifié par des difféomorphismes infinitésimaux. Le tore est invariant sous l'action du groupe modulaire $PSL(2,\mathbb{Z})$, généré par les transformations T et S :

$$T:\ \tau \to \tau+1, \quad S:\ \tau \to -1/\tau. \tag{2.15}$$

Ces transformations correspondent à des difféomorphismes globaux sur la feuille d'univers.

La fonction de partition de la théorie conforme sur le tore code le spectre des excitations de la corde :

$$Z = \int_{T^2} e^{iS_P} = Tr\left(q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-\bar{c}/24}\right) \tag{2.16}$$

où le paramètre q est égal à $e^{2\pi i\tau}$.

L'invariance de la théorie sous l'action des difféomorphismes globaux nécessite que la fonction de partition soit invariante sous l'action du groupe modulaire.

Orbifolds

Considérons une théorie conforme définie sur le tore. Supposons qu'il existe un groupe de symétrie fini Γ qui agit sur les états de la théorie. On peut alors définir une nouvelle théorie conforme par une procédure dite d'"orbifold". La première étape consiste à supprimer tous les états de la théorie conforme initiale qui ne sont pas invariants sous l'action du groupe Γ. La théorie que l'on obtient alors est généralement incomplète : l'invariance modulaire par exemple est perdue. Pour obtenir une théorie satisfaisante, il faut ajouter de nouveaux opérateurs "twistés", qui satisfont des conditions de périodicité modifiées :

$$\phi(z+1) = \gamma_1\phi(z), \quad \phi(z+\tau) = \gamma_2\phi(z) \tag{2.17}$$

où γ_1 et γ_2 sont des éléments commutants du groupe Γ. La fonction de partition de la nouvelle théorie est alors :

$$Z = \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma^2} Z_{\gamma_1,\gamma_2} \tag{2.18}$$

Dans la formule précédente, Z_{γ_1,γ_2} est la fonction de partition du secteur twisté par les éléments de groupe γ_1 et γ_2. L'équation (2.18) implique que l'invariance modulaire est rétablie par l'ajout des secteurs twistés.

Cette procédure d'orbifold est très utile dans la théorie des cordes. D'une part, elle permet de générer facilement de nouvelles théories conformes, et donc de nouvelles solutions de la théorie. D'autre part, elle joue un rôle important dans la construction de solutions stables des théories de supercordes.

2.3 Supercordes et théories conformes supersymétriques

La corde bosonique possède généralement dans son spectre une particule scalaire dont le carré de la masse est négatif : le tachyon. Cette particule induit une instabilité dans la théorie. En outre, la théorie des cordes bosonique ne contient que des exitations... bosoniques. Dans l'espoir d'obtenir une théorie qui puisse décrire notre univers, nous devons construire une théorie de cordes qui possède également des excitations fermioniques. Il se trouve que ces deux problèmes sont résolus simultanément par l'introduction de la supersymétrie.

La supersymétrie est une symétrie qui tranforme les particules bosoniques en particules fermioniques, et vice-versa. Les transformations de supersymétrie sont liées aux translations dans l'espace-temps. Par exemple, dans l'espace-temps de Minkowski, l'algèbre de supersymétrie implique la relation suivante :

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2\sigma^\mu P_\mu \tag{2.19}$$

où Q est une supercharge, les matrices σ^μ sont les matrices de Pauli, et P_μ est le générateur des translations. En particulier, l'équation précédente implique que l'énergie est toujours positive dans une théorie supersymétrique unitaire dans l'espace-temps de Minkowski. Il est donc clair que si l'on parvient à implémenter la supersymétrie dans la théorie des cordes, le tachyon ne sera plus présent dans le spectre.

Pour construire des excitations fermioniques de la corde, on commence par introduire des champs fermioniques sur la feuille d'univers. La première subtilité concerne les conditions de périodicité pour les fermions. On peut imposer des conditions de périodicité ou d'anti-périodicité. Ce choix est libre dans le secteur holomorphe, et également dans le secteur anti-holomorphe. On obtient donc quatre secteurs différents dans la théorie : les secteurs NS-NS, NS-R, R-NS et R-R. Les initiales traduisent les conditions de périodicité choisies pour les fermions dans les secteurs holomorphe et anti-holomorphe : NS fait référence à Neveu et Schwarz, et R à Ramond.

L'invariance par difféomorphismes sur la feuille d'univers est étendue à une invariance par super-difféomorphismes. Lors de la quantification de la corde par la méthode de l'intégrale de chemin, le choix d'une jauge pour les difféomorphismes fermioniques provoque l'apparition d'un système de fantômes (β,γ), qui vient s'ajouter aux fantômes (b,c) de la corde bosonique. La charge centrale totale pour ces deux systèmes de fantômes est : $c = -15$.

L'algèbre de supersymétrie minimale en deux dimensions est l'algèbre superconforme $\mathcal{N} = 1$, générée par le tenseur énergie-impulsion T et le supercourant G :

$$
\begin{aligned}
G(z)G(w) &= \frac{2c}{3(z-w)^3} + 2\frac{T(w)}{z-w} + ... \\
T(z)G(w) &= \frac{3}{2}\frac{G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w} + ... \\
T(z)T(w) &= \frac{c}{2(z-w)^4} + 2\frac{T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + ...
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Dans la suite, nous nous intéresserons aux théories dans lesquelles l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=1$ est étendue en une algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$. Cette algèbre est générée par deux supercourants $G^{\pm}$ et un courant $U(1)$ bosonique J, en plus du tenseur énergie-impulsion T :

$$
\begin{aligned}
J(z)J(w) &= \frac{c}{3(z-w)^2} + ... \\
J(z)G^{\pm}(w) &= \pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w} + ... \\
T(z)J(w) &= \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} + ... \\
G^{+}(z)G^{-}(w) &= \frac{2c}{3(z-w)^3} + +2\frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} + 2\frac{T(w)}{z-w} + ... \\
T(z)G^{\pm}(w) &= \frac{3}{2}\frac{G^{\pm}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^{\pm}(w)}{z-w} + ...
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Les algèbres de supersymétrie contiennent des générateurs fermioniques dont il faut préciser les conditions de périodicité. Cependant, les algèbres superconformes $\mathscr{N}=2$ associées à des conditions de périodicité différentes sont en fait équivalentes. L'automorphisme qui change de façon continue les conditions de périodicité des fermions est appelé "flot spectral". Il induit en particulier une bijection entre les secteurs NS et R de la théorie. Commes les secteurs NS et R sont respectivement associés aux représentations vectorielles et spinorielles dans l'espace-temps, cela explique pourquoi la supersymétrie d'espace-temps est intimement liée à l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ sur la feuille d'univers.

Lorsque l'on réécrit l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ en termes de modes, on trouve en particulier la relation suivante (dans le secteur NS) :

$$\{G^{+}_{\pm 1/2}, G^{-}_{\mp 1/2}\} = 2L_0 \pm J_0 \tag{2.22}$$

Dans une théorie unitaire, cette équation implique une contrainte sur la dimension conforme holomorphe Δ et la charge Q des opérateurs de la théorie :

$$|Q| \leq 2\Delta \tag{2.23}$$

Les opérateurs saturant l'inégalité précédente jouent un rôle particulier [12]. Les états satisfaisant $Q = 2\Delta$ (respectivement $Q = -2\Delta$) forment l'anneau chiral (respectivement anti-chiral). La structure d'anneau se rapporte au développement du produit en opérateurs (OPE), tronqué aux opérateurs (anti-)chiraux.

L'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ permet d'implémenter systématiquement une procédure qui garantit la supersymétrie dans l'espace-temps. Réciproquement, on peut montrer que la supersymétrie dans l'espace-temps nécessite la réalisation de cette algèbre sur la feuille d'univers [13]. Voyons donc comment construire une théorie de cordes supersymétrique à partir d'une théorie réalisant l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$. La première étape consiste à effectuer un orbifold de la théorie conforme, en utilisant un sous-groupe discret du groupe de symétrie $U(1)$ généré par le courant J. Ce sous-groupe est choisi de façon à ne garder que les états dont la charge est entière. La deuxième étape consiste à projeter tous les états du secteur NS dont la charge $U(1)$ est paire. Cette étape s'accompagne d'une projection semblable dans le secteur R de la théorie, mais le choix est libre de projeter les états de charge paire ou impaire. Ce choix donne naissance à deux théories de supercordes différentes : on obtient la théorie de type IIA lorsque la parité choisie dans le secteur R est différente pour les secteurs holomorphe et anti-holomorphe, et la théorie de type IIB dans le cas contraire. Cette procédure est connue sous le nom de projection GSO.

On peut démontrer que la théorie obtenue ne contient que des particules dont le carré de la masse est positif. Dans le secteur NS, la masse d'un mode de la supercorde associé à un opérateur de dimension Δ est donnée par :

$$M^2 = \Delta - \frac{1}{2} \tag{2.24}$$

Comme toutes les charges $U(1)$ du secteur NS sont entières et impaires, l'inégalité (2.23) implique que toutes les masses élevées au carré sont positives. En particulier, le tachyon de la corde bosonique n'est plus présent dans le spectre de la supercorde. Ces équations montrent également pourquoi les anneaux chiraux et anti-chiraux jouent un rôle particulier dans la théorie des cordes : ils contiennent les excitations de masse nulle de la corde, et codent donc la physique de basse énergie de la théorie.

Le spectre de la supercorde diffère notablement du spectre de la corde bosonique. Les excitations de la corde bosonique qui survivent à la projection GSO appartiennent au secteur NS-NS. En particulier, le graviton et le dilaton sont toujours présents dans le spectre de la supercorde. Le secteur R-R contient d'autres excitations bosoniques, les champs de Ramond-Ramond. Enfin les secteurs mixtes NS-R et R-NS contiennent les modes fermioniques de la supercorde.

2.4 Exemples de théories conformes

Dans la première partie de cette thèse, nous travaillerons avec des solutions de la théorie des cordes construites à partir de théories bidimensionnelles réalisant l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$. Nous allons maintenant introduire les différentes théories conformes que nous utiliserons.

Bosons et fermions libres

L'exemple canonique d'une théorie réalisant l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ est le système libre composé d'un boson complexe X et d'un fermion complexe ψ. L'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ est réalisée avec une charge centrale égale à 3. Les générateurs de cette algèbre sont :

$$J = -\psi\bar{\psi} \qquad T = -\partial X \partial \bar{X} - \frac{1}{2}(\psi \partial \bar{\psi} + \bar{\psi} \partial \psi) \tag{2.25}$$

$$G^+ = i\sqrt{2}\bar{\psi}\partial X \qquad G^- = i\sqrt{2}\psi\partial\bar{X} \tag{2.26}$$

Cette théorie conforme permet de définir la théorie des supercordes dans l'espace-temps de Minkowski. Chaque paire (X,ψ) correspond à deux dimensions de cet espace-temps.

Modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten

Considérons un groupe de Lie G. On peut construire une théorie conforme dont l'espace-cible est la variété du groupe G. Ces théories sont appelées modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten. L'action s'écrit :

$$S_{WZW} = \frac{k}{16\pi}\int d^2x Tr[-\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g] + k\Gamma \tag{2.27}$$

où le champ g envoie la feuille d'univers dans le groupe G, et Γ est le terme de Wess-Zumino :

$$\Gamma = -i\frac{k}{24\pi}\int_B d^3y \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} Tr(g^{-1}\partial_\alpha g g^{-1}\partial_\beta g g^{-1}\partial_\gamma g) \tag{2.28}$$

La variété tridimensionnelle B a pour bord la feuille d'univers. On peut montrer que l'intégrale de chemin pour cette théorie est bien définie si le paramètre k est un entier. La théorie possède un groupe de symétrie $G_L \times G_R$ qui agit par multiplication à gauche et à droite sur le champ g. Les courants associés aux symétries gauche et droite sont respectivement :

$$J(z) = -k\partial g g^{-1} \qquad \text{et} \qquad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1}\bar{\partial} g\,. \tag{2.29}$$

L'opérateur $J(z)$ (respectivement $\bar{J}(\bar{z})$) est invariant sous l'action du groupe de symétrie G_R (respectivement G_L), et génère la symétrie G_L (respectivement G_R). Les équations du mouvement impliquent que cet opérateur est holomorphe (respectivement anti-holomorphe). On peut développer les courants sur une base t_a de l'algèbre de Lie du groupe G : $J = J^a t_a$, $\bar{J} = \bar{J}^a t_a$. Les indices de groupe a sont contractés à l'aide de la métrique de Kiling κ^{ab} .

Les identités de Ward pour la symétrie G_L permettent de calculer les OPEs entre composantes du courant gauche J :

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)}{z-w}. \tag{2.30}$$

Les composantes du courant droit $\bar{J}(\bar{z})$ satisfont la même algèbre, en termes des coordonnées anti-holomorphes. Ces OPE impliquent que les modes des courants génèrent une algèbre de Lie affine :

$$[J^a_n, J^b_m] = kn\kappa^{ab}\delta_{n+m,0} + if^{ab}{}_c J^c_{n+m} \tag{2.31}$$

L'algèbre de Virasoro, qui implique l'invariance conforme, suit de la réalisation de l'algèbre de Lie affine [14]. Le tenseur énergie impulsion peut s'écrire en termes des courants :

$$T = \frac{1}{k+\check{h}} : J^a J_a :, \qquad \bar{T} = \frac{1}{k+\check{h}} : \bar{J}^a \bar{J}_a : \tag{2.32}$$

où $\check{h}$ est le nombre dual de Coxeter de l'algèbre de Lie :

$$f^{abc} f^d{}_{bc} = 2\check{h}\kappa^{ad}. \tag{2.33}$$

Dans la définition (2.32), le produit d'opérateurs $J^a J_a$ est régularisé ainsi :

$$: J^a J_a : (z) = \frac{1}{2\pi i}\oint dw \frac{1}{w-z} J^a(w) J_a(z) \tag{2.34}$$

L'OPE (2.30) implique pour le tenseur énergie-impulsion :

$$T(z)T(w) = \frac{k\ dim\ G}{2(k+\check{h})(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.35}$$

L'équation précédente donne la charge centrale de la théorie conforme :

$$c = \frac{k\ dim\ G}{k+\check{h}} \tag{2.36}$$

On peut rendre ces modèles supersymétriques en ajoutant autant de fermions réels libres que l'algèbre de lie du groupe G a de dimensions. Cette opération s'accompagne d'un changement du niveau k en $k-\check{h}$.

Modèles quotients

Il est possible de construire d'autres théories conformes à partir des modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten, en jaugeant une partie du groupe de symétrie de ces modèles. Considérons un groupe de Lie G, et H un sous-groupe de G. Le jaugeage de la symétrie vectorielle : $g \to h^{-1}gh$ conduit à une théorie sans anomalie. On peut quantifier la théorie jaugée en utilisant une procédure BRST. Le tenseur énergie-impulsion de cette théorie s'écrit :

$$T(z) = T^{G/H}(z) + T'(z) \tag{2.37}$$

La seconde partie commute avec la première, et est BRST-exacte. La première partie peut s'écrire en termes des courants du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten. C'est le tenseur énergie-impulsion GKO [15] :

$$T^{G/H}(z) = \frac{1}{k+\check{h}_G} : J^a J_a : - \frac{1}{k+\check{h}_H} : J^A J_A : \tag{2.38}$$

où l'indice A désigne uniquement les dimensions de l'algèbre de Lie du groupe H. Les modes de ce tenseur énergie-impulsion réalisent l'algèbre de Virasoro avec une charge centrale égale à :

$$c = \frac{k\ dim\ G}{k+\check{h}_G} - \frac{k\ dim\ H}{k+\check{h}_H} \tag{2.39}$$

Cette construction se généralise aux modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten supersymétriques. En fait, dans certains de ces modèles quotients, l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=1$ est automatiquement étendue à l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$. C'est la cas quand le quotient géométrique associé est un espace symétrique hermitien [16].

Un exemple d'une telle théorie est le superquotient $SU(2)_k/U(1)$. On obtient une théorie qui réalise l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ avec charge centrale $c=3-6/k$. Il existe des représentations unitaires de l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ précisément pour ces valeurs de la charge centrale. Cette famille de modèles quotients correspond donc aux modèles minimaux réalisant l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ avec charge centrale inférieure à trois.

Le dilaton linéaire

Le dilaton linéaire est un premier exemple de théorie conforme non-triviale avec un espace cible non-compact. Ce modèle résulte du couplage d'un boson libre à la courbure de la feuille d'univers. L'action s'écrit :

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{g}g^{ij}\partial_i X\partial_j X + \frac{Q}{4\pi}\int d^2\xi\,\sqrt{g}R^{(2)}X \tag{2.40}$$

Le tenseur énergie-impulsion de cette théorie est :

$$T = -\partial X\partial X + Q\partial^2 X \tag{2.41}$$

La charge centrale de cette théorie conforme est égale à :

$$c = 1 + 6Q^2 \tag{2.42}$$

Comme pour le boson libre, on peut supersymétriser cette théorie en complexifiant le boson X, et en ajoutant un fermion complexe libre. La théorie obtenue réalise l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$.

En comparant l'action (2.40) avec l'action de Polyakov (2.4), on constate que le couplage à la courbure de la feuille d'univers s'interprète dans l'espace-temps comme un profile linéaire pour le dilaton. En conséquence, il existe une région de l'espace-temps où la constante de couplage de la théorie des cordes explose. La définition perturbative de la théorie des cordes perd alors son sens dans cette région.

Le cigare

Cette théorie conforme est le quotient du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten supersymétrique sur le groupe $Sl(2,\mathbb{R})$ par un sous-groupe $U(1)$. Ce modèle réalise l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Il doit son nom à la géométrie de l'espace-temps :

$$\begin{cases} ds^2 = k\alpha'\left[dr^2 + \tanh^2 r d\theta^2\right] \\ \Phi = \Phi_0 - \log(\cosh r) \end{cases} \tag{2.43}$$

où r est une coordonnée radiale positive, et θ est une coordonnée angulaire. Le comportement asymptotique des champs montre que ce modèle correspond à une résolution géométrique de la singularité de fort couplage du dilaton linéaire. Le niveau k du modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten est relié à la charge Q du dilaton linéaire par la relation : $k = 1/Q^2$.

La théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$

Une deuxième façon de résoudre le problème de fort couplage du dilaton linéaire consiste à allumer un potentiel qui écrante la région où le couplage diverge. Cette opération conduit à la théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$. L'action de cette théorie s'écrit :

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2z\Bigg[&\partial r\bar\partial r + \partial\theta\bar\partial\theta - \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\alpha'}{4}R^{(2)}r + \psi_+\bar\partial\psi_- + \bar\psi_+\partial\bar\psi_- \\ &+ ik\mu|\psi_+|^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{k}}(r+i\theta)} + ik\bar\mu|\psi_-|^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{k}}(r-i\theta)}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.44}$$

Les auteurs de [17] ont montré que la théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$ est T-duale au cigare.

Chapitre 3

Solutions exactes de la théorie des cordes

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux familles de solutions de la théorie des cordes. La première famille est composée des modèles de Gepner. Ces modèles décrivent des vides semi-réalistes, dans lesquels la théorie des cordes est compactifiée. La deuxième famille décrit des espaces-temps très différents, qui contiennent des dimensions non-compactes courbées. La construction de ces solutions en termes de théories conformes généralise celle des modèles de Gepner. C'est pourquoi les modèles de la deuxième famille sont appelés "modèles de Gepner non-compacts". Ces sont des vides intéressants pour étudier certaines propriétés de la théorie des cordes en espace-temps courbe et non-compact. Ce chapitre a pour objectif de mettre en perspective les résultats obtenus lors de ma première collaboration avec Sujay Ashok et Jan Troost [18].

3.1 Modèles de Gepner

Les modèles de Gepner ont été introduits et étudiés dans la deuxième moitié des années 1980 [20] [21] [22] [23]. Pour une introduction, on pourra se reporter à [19]. Ces modèles décrivent des compactifications de la théorie des cordes sur certaines variétés Calabi-Yau.

Variétés Calabi-Yau et compactifications de la théorie des cordes

La théorie des supercordes vit dans un nombre de dimensions supérieur à celui que l'on observe. Cette constatation nous conduit à considérer les compactifications possibles de la théorie des cordes. L'idée la plus simple est de décomposer l'espace-temps en une partie quadridimensionnelle (qui représente l'espace-temps que nous observons), et une partie compacte indépendante de faible volume qui est invisible à basse énergie. Si l'espace-temps se factorise de cette façon, alors chaque facteur doit vérifier séparément les équations d'Einstein. En outre, on demande que la supersymétrie soit préservée par la compactification. Les variétés compactes qui vérifient ces deux conditions sont appelées variétés Calabi-Yau. Elles sont définies comme étant les variétés compactes Kähleriennes dont le groupe d'holonomie est $SU(3)$. Il a été conjecturé par Calabi, puis démontré par Yau, que ces variétés admettent une métrique dont le tenseur de Ricci s'annule. Cette métrique vérifie donc les équations d'Einstein.

Les modèles de Gepner décrivent une famille de variétés Calabi-Yau que nous allons maintenant introduire. Considérons l'espace projectif complexe pondéré $W\mathbb{C}P^4_{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}$. Cet espace est défini comme l'espace $\mathbb{C}^5$ modulo l'identification : $(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) \sim (\lambda^{a_1}z_1, \lambda^{a_2}z_2, \lambda^{a_3}z_3, \lambda^{a_4}z_4, \lambda^{a_5}z_5)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On peut prouver le théorème suivant (voir par exemple [24]). L'hypersurface de $W\mathbb{C}P^4_{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}$ définie par l'équation :

$$z_1^{\frac{1}{a_1}} + z_2^{\frac{1}{a_2}} + z_3^{\frac{1}{a_3}} + z_4^{\frac{1}{a_4}} + z_5^{\frac{1}{a_5}} = 0 \tag{3.1}$$

est une variété Calabi-Yaui si et seulement si les coefficients (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) vérifient :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \tag{3.2}$$

Les compactifications de la théorie des cordes sur des variétés Calabi-Yau produisent une physique intéressante à basse énergie. On obtient une théorie de supergravité dans l'espace de Minkowski à quatre dimensions, qui inclut des interactions de jauge non-abéliennes, plusieurs générations de fermions, etc. Les caractéristiques précises de cette théorie se déduisent des invariants topologiques de la variété Calabi-Yau. Cependant, ces modèles phénoménologiques souffrent d'un défaut. Les variétés Calabi-Yau possèdent génériquement un nombre infini de métriques dont le tenseur de Ricci s'annule. La dimension de cet espace, appelé espace des modules, est donné par les nombres de Hodge du Calabi-Yau. Or les déformations de la métrique du Calabi-Yau qui préservent les équations d'Einstein donnent naissance à des scalaires de masse nulle dans l'espace-temps de Minkowski. De telles particules n'ont jamais été observées. On peut raffiner ces modèles en allumant des flux pour les champs de Ramond-Ramond, qui induisent une masse pour les modules (pour un compte-rendu des travaux réalisés dans cette direction, voir par exemple [25]). Malgré cela, il est difficile de combiner tous les éléments nécessaires pour obtenir une phénoménologie, et en particulier une cosmologie, raisonnable.

Construction des modèles de Gepner

Nous cherchons maintenant à décrire des compactifications de la théorie des cordes grâce à une théorie bidimensionnelle réalisant l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. La partie non-compacte de l'espace-temps sera l'espace-temps de Minkowski à quatre dimensions. Nous savons comment réaliser cet espace en termes de théorie conforme : il suffit d'introduire sur la feuille d'univers deux bosons et deux fermions complexes libres. Ce choix nous permet d'utiliser la procédure de quantification dans la jauge du cône de lumière de façon efficace.

Pour construire la théorie conforme associée à la partie compacte de l'espace-temps, nous allons utiliser les modèles minimaux $\mathscr{N} = 2$. Ces modèles décrivent un espace-temps compact, car ils sont obtenus en jaugeant un modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten sur un groupe compact. Rappelons que les modèles minimaux $\mathscr{N} = 2$ sont paramétrés par un entier positif k, que l'on appelle le niveau du modèle. La charge centrale du modèle minimal $\mathscr{N} = 2$ à niveau k est :

$$c = \frac{3(k-2)}{k} \tag{3.3}$$

La contribution de l'espace-temps de Minkowski à la charge centrale totale sur la feuille d'univers est égale à six. Pour obtenir une solution exacte de la théorie des cordes, la théorie conforme décrivant la partie compacte de l'espace-temps doit donc avoir une charge centrale égale à neuf. Cette théorie conforme est un produit de modèles minimaux $\mathscr{N} = 2$. Nous allons nous restreindre

au cas où le nombre de ces modèles minimaux est inférieur où égal à cinq. En fait, on peut supposer que ce nombre est exactement égal à cinq, quitte à rajouter des facteurs triviaux (c'est-à-dire des modèles minimaux à niveau deux). Dans ce cas la charge centrale de la théorie conforme est critique si et seulement si les niveaux des cinq modèles minimaux satisfont :

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_5}=1 \tag{3.4}$$

Cette équation rappelle bien sûr la condition de Calabi-Yau (3.2) pour une hypersurface dans un espace projectif complexe pondéré. Nous pouvons en fait rendre cette correspondance très précise. Pour cela, il nous faut introduire une autre description des modèles minimaux $\mathscr{N}=2$.

Modèles de Landau-Ginzburg $\mathscr{N}=2$

Considérons une théorie bidimensionnelle avec $\mathscr{N}=2$ supersymétries, qui décrit la dynamique d'un superchamp Φ. L'action de cette théorie s'écrit, dans une notation de superespace :

$$S=\int d^2z d^4\theta K(\Phi,\bar{\Phi})+\left(\int d^2z d^2\theta W(\Phi)+c.c.\right) \tag{3.5}$$

Ces modèles sont connus sous le nom de "modèles de Landau-Ginzburg $\mathscr{N}=2$". La première partie de l'action contient les termes D, et la seconde partie les termes F. L'intérêt de cette distinction est la suivante : on peut montrer que les termes F ne sont pas renormalisés. La théorie décrite par l'action précédente n'a aucune raison d'être invariante conforme. Cependant, elle évolue sous l'action du groupe de renormalisation vers une théorie conforme. Ce point fixe infra-rouge est déterminé par le superpotentiel W.

Il se trouve que le point fixe infra-rouge des modèles de Landau-Ginzburg $\mathscr{N}=2$ avec superpotentiel $W=\Phi^k$ est précisément le modèle minimal $\mathscr{N}=2$ à niveau k. On le démontre par exemple en calculant la charge centrale du point fixe infra-rouge du modèle de Landau-Ginzburg [12]. Une autre méthode consiste à montrer que les genres elliptiques de ces deux théories sont identiques [26].

Correspondance entre modèles de Gepner et variétés Calabi-Yau

Voyons maintenant comment relier la théorie conforme critique obtenue par le produit de modèles minimaux $\mathscr{N}=2$ à une variété Calabi-Yau. L'argument suivant provient de [27] (une discussion plus approfondie se trouve dans [28]). Considérons le modèle de Landau-Ginzburg $\mathscr{N}=2$ avec superpotentiel $W=\Phi_1^{k_1}+...+\Phi_5^{k_5}$, et dont les termes D s'annulent. Cette théorie évolue sous l'action du groupe de renormalisation vers le produit des modèles minimaux $\mathscr{N}=2$ $MM_{k_1}\times...\times MM_{k_5}$. L'intégrale de chemin pour le modèle de Landau-Ginzburg s'écrit :

$$\int \mathscr{D}\Phi_i e^{i\int d^2z d^2\theta (W(\Phi_1,...,\Phi_5))+c.c.} \tag{3.6}$$

On redéfinit maintenant les champs de la façon suivante :

$$\xi_1=\Phi_1^{k_1},\quad \xi_i=\Phi_i/\Phi_1^{\frac{k_1}{k_i}} \tag{3.7}$$

Le jacobien qui apparaît dans l'intégrale de chemin est étonnement simple quand la condition de criticalité (3.4) est satisfaite : $\det\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_j}\right)=\frac{1}{k_1}$. L'intégrale de chemin devient alors :

$$\int \mathscr{D}\xi_i e^{i\int d^2z d^2\theta(\xi_1 W(1,\xi_2,\ldots,\xi_5))+c.c.} = \int \mathscr{D}\xi_{i\neq 1}\delta(W(1,\xi_2,\ldots,\xi_5)). \tag{3.8}$$

La fonction delta dans l'intégrale de chemin implique que le modèle de Landau-Ginzburg est un modèle sigma vers la variété de Calabi-Yau définie par l'équation (3.1). Sous l'action du groupe de renormalisation, la géométrie de l'espace cible va changer (la métrique évolue vers une métrique Ricci-plate), mais pas sa topologie. Le produit des modèles minimaux $\mathscr{N} = 2$ a donc pour espace cible une variété Calabi-Yau, définie comme une hypersurface dans un espace projectif complexe pondéré.

Il y a une subtilité importante dans la discussion précédente. Le changement de variables (3.7) n'est pas bijectif. Plus précisément, les variables ξ_i sont invariantes si l'on agit sur les variables Φ_i ainsi :

$$\Phi_i \to e^{\frac{2\pi i}{k_i}}\Phi_i \tag{3.9}$$

En toute rigueur, c'est donc l'orbifold du modèle Landau-Ginzburg par le groupe discret généré par la transformation (3.9) qui décrit la variété Calabi-Yau. Il se trouve que cet orbifold est indispensable pour obtenir une solution stable de la théorie des cordes : il correspond précisément à la première étape de la projection GSO.

La construction de Gepner fournit une description microscopique exacte de la théorie des cordes compactifiée sur une variété Calabi-Yau. Cette description en termes de modèles minimaux $\mathscr{N} = 2$ est très puissante, car ces modèles sont complètement résolus. On peut ainsi calculer n'importe quelle quantité physique dans l'espace-temps, comme le spectre d'excitations de la corde, ou les couplages de Yukawa. Cette construction a également aider à dévoiler une propriété surprenante des variétés Calabi-Yau : la symétrie miroir, que nous allons maintenant introduire. Cette découverte constitue un accomplissement notable de la théorie des cordes, et une avancée remarquable en mathématiques.

Symétrie miroir

Pour comprendre d'où vient l'idée de la symétrie miroir, revenons aux modules des variétés Calabi-Yau. Ceux-ci correspondent aux différentes déformations possibles de la métrique qui préservent la nullité du tenseur de Ricci. Pour une variété complexe Kählerienne, on peut classer les données géométriques en deux catégories : celles qui concernent la structure complexe de la variété, et celles qui concernent la forme de Kähler. De même, les modules peuvent être de deux types : les modules de la structure complexe, et les modules de Kähler. Ces deux familles de modules correspondent à des déformations très différentes de la géométrie. On peut caricaturer leur effet ainsi : les modules de Kähler changent la taille de la variété, alors que les modules de la structure complexe en changent la forme. Plus formellement, ces deux types de modules correspondent à des formes harmoniques de dimensions différentes.

Ces modules donnent naissance à des scalaires de masse nulle dans le spectre de la théorie des cordes. Or, nous savons que les excitations de masse nulle de la corde sont liées aux opérateurs chiraux et anti-chiraux de la théorie superconforme. Plus précisément, les deux types de modules proviennent de différentes combinaisons entre les champs holomorphes et anti-holomorphes : les modules de la structure complexe viennent de la combinaison d'éléments de l'anneau chiral holomorphe avec des éléments de l'anneau chiral holomorphe (combinaison que l'on note (c,c)), ou de la combinaison d'éléments des deux anneaux anti-holomorphes ((a,a)). À l'inverse, les

modules de Kähler viennent des combinaisons (c,a) et (a,c) [29]. Sur la feuille d'univers, la différence entre modules de Kähler et modules de la structure complexe est moins frappante que dans l'espace-temps. En effet, si l'on inverse le signe de toutes les charges dans la partie anti-holomorphe de la théorie sans changer la partie holomorphe, on transforme tous les modules de Kähler en modules de la structure complexe et vice-versa. Or le signe de la charge n'est en fait qu'une convention. D'où l'idée de la symétrie miroir pour les variétés Calabi-Yau :

Pour chaque variété Calabi-Yau, il existe une variété Calabi-Yau miroir qui possède autant de modules de la structure complexe que la première possède de modules de Kähler et vice-versa.

Construction de paires de variétés Calabi-Yau miroirs

Les auteurs de [30] ont montré que l'on peut construire explicitement un grand nombre de paires de variétés miroirs, en utilisant les modèles de Gepner. Considérons une compactification de la théorie des cordes sur une variété Calabi-Yau, décrite par un produit de modèles minimaux $\mathscr{N}=2$. Nous voulons maintenant construire une théorie conforme qui ne diffère de la première que par le signe de la charge des opérateurs anti-holomorphes. Si elle existe, cette seconde théorie conforme décrira la variété Calabi-Yau miroir.

Commençons avec un unique modèle minimal $\mathscr{N}=2$ à niveau k. Cette théorie est invariante sous l'action du groupe $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_k)^2$. Le carré indique qu'une copie de ce groupe agit sur la partie holomorphe de la théorie, et qu'une autre copie agit sur la partie anti-holomorphe. Le facteur $\mathbb{Z}_2$ agit essentiellement comme la conjugaison de la charge. Le facteur $\mathbb{Z}_k$ agit par la multiplication par $e^{2i\pi Q/k}$. L'observation clé est la suivante [20] : si l'on effectue l'orbifold du modèle minimal $\mathscr{N}=2$ par le groupe de symétrie diagonal $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_k$, on obtient une théorie isomorphe à la première, qui ne diffère que par le signe des opérateurs dans le secteur anti-holomorphe.

Il est ensuite naturel d'étendre cet orbifold au produit de modèles minimaux. Comme attendu, l'orbifold du produit par le groupe de symétrie diagonal donne naissance à la théorie conforme miroir. On peut encore généraliser cette construction de la façon suivante : l'orbifold par un sous-groupe Γ du groupe de symétrie diagonal, et l'orbifold par le complémentaire de Γ, génèrent deux théories miroirs.

Dans l'article [18], nous avons étendu cette construction à une généralisation des modèles de Gepner que nous introduirons dans le paragraphe suivant. Notre étude concerne des variétés Calabi-Yau non-compactes. Nous avons obtenu une infinité de paires de variétés miroirs non-compactes.

3.2 Modèles de Gepner non-compacts

Un de nos objectifs dans cette thèse est de progresser dans la compréhension de la théorie des cordes en espaces-temps courbes et non-compacts. On peut construire de telles solutions de la théorie des cordes en généralisant la construction de Gepner. Pour celà, on associe aux modèles minimaux $\mathscr{N}=2$ des théories conformes avec un espace cible non-compact. Nous allons utiliser le superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$, ainsi que la théorie de Liouville $\mathscr{N}=2$ qui lui est reliée par T-dualité.

L'idée de combiner le superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ (le cigare) avec les modèles minimaux $\mathscr{N}=2$ est naturelle, car ces théories ont une structure similaire. En effet, les algèbres de Lie réelles $su(2)$ et $sl(2,\mathbb{R})$ sont deux formes réelles de l'algèbre de Lie complexe $sl(2,\mathbb{C})$. Cependant, le groupe de Lie $Sl(2,\mathbb{R})$ n'est pas compact, contrairement à $SU(2)$, ce qui induit bien sûr une

grande différence dans la physique issue de ces modèles. On s'attend par exemple à ce que le spectre des opérateurs soit continu dans le cigare.

Représentations de l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ avec $c>3$

La différence entre les modèles compacts et non-compacts se manifeste par exemple dans le spectre des valeurs prises par la charge centrale de ces théories. Le modèle jaugé de Wess-Zumino-Novikov-Witten basé sur le superquotient $Sl(2,\mathbb{R})_k/U(1)$ réalise l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$ avec charge centrale :

$$c = 3 + \frac{6}{k} \tag{3.10}$$

Les représentations de l'algèbre $\mathscr{N}=2$ avec charge centrale supérieure à trois peuvent être construites à partir des représentations de l'algèbre $sl(2,\mathbb{R})$ [31]. On trouve essentiellement trois familles de représentations :

- Les représentations **continues** : cette famille est décrite par un paramètre continu P. Elle se scinde en deux sous-familles : les représentations continues principales, pour lesquelles le paramètre P est réel, et les représentations continues complémentaires, pour lesquelles P prend des valeurs complexes. Ces représentations n'ont pas de vecteurs nuls, et ne contiennent aucun élément de l'anneau (anti-)chiral.
- Les représentations **discrètes** : elles sont paramétrées par un nombre demi-entier J. Elles possèdent un vecteur nul, et peuvent contenir un état (anti-)chiral.
- Les représentations **finies** : elles sont également paramétrées par un nombre demi-entier J. Elles possèdent deux vecteurs nuls, et peuvent contenir un état (anti-)chiral. La représentation identité appartient à cette famille.

Spectre du superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ et de la théorie de Liouville $\mathscr{N}=2$

Le spectre des excitations dans le cigare peut être déduit du spectre du modèle bosonique associé [32]. Les opérateurs de vertex pour ce modèle ont été construits dans [33]. Une étude plus précise du spectre, basée sur l'intégrale de chemin, a été effectuée dans [34]. Le spectre se décompose en deux parties distinctes.

On trouve tout d'abord un continuum d'états dans des représentations continues principales de l'algèbre superconforme $\mathscr{N}=2$. La fonction d'onde associée à ces états montre qu'ils se propagent dans la direction non-compacte du cigare, avec une impulsion donnée par le paramètre P de la représentation :

$$\Psi_{continue} \propto e^{iPr} \tag{3.11}$$

où r est la coordonnée non-compacte paramétrant le cigare. Dans la théorie des cordes, ces opérateurs donnent naissance à des modes massifs de la corde.

On trouve ensuite des états dans des représentations discrètes de l'algèbre superconforme. Ces états sont localisés à l'extrémité du cigare, et ne se propagent pas dans la direction non-compacte :

$$\Psi_{discrete} \propto e^{-Jr} \tag{3.12}$$

Dans la théorie des cordes, certains de ces opérateurs donnent des modes de masse nulle. L'existence de ces états localisés est l'une des principales motivations pour étudier ces modèles.

On peut déduire le spectre de la théorie de Liouville $\mathcal{N}=2$ à partir du spectre du superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$, car ces deux théories sont T-duales.

Le spectre d'une théorie conforme est codé dans sa fonction de partition sur le tore. Or la fonction de partition est proportionnelle au volume de l'espace cible de la théorie. Une conséquence est que les états localisés disparaissent de la fonction de partition : leur contribution est divisée par le volume infini de l'espace cible. Pour étudier le spectre des états localisés, il faut donc avoir recours à d'autres outils. Dans la publication [18], nous utilisons le fait que la théorie de Liouville $\mathcal{N}=2$ à niveau k est le point fixe infra-rouge d'un modèle de Landau-Ginzburg avec le superpotentiel : $W=\Phi^{-k}$. Cette correspondance a été proposée dans [35], puis démontrée dans [36] [37]. Notons que les flots du groupe de renormalisation sont ici définis en gardant les conditions asymptotiques fixes pour la direction non-compacte. Le langage des modèles de Landau-Ginzburg nous permet ensuite de généraliser les méthodes développées dans le contexte des modèles compacts [38] [39]. Ces outils nous ont permis de dénombrer de façon systématique et efficace les états localisés de masse nulle dans les modèles de Gepner non-compacts.

Solutions critiques de la théorie des cordes

Contrairement aux modèles de Gepner compacts, il existe une infinité de modèles de Gepner non-compacts. Les modèles les plus simples n'impliquent qu'un modèle minimal et un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$, au même niveau k. On obtient une théorie conforme critique lorsque l'on combine ces deux facteurs avec la théorie libre décrivant l'espace-temps de Minkowski à six dimensions. Une seconde famille infinie est obtenue en combinant deux modèles minimaux à niveau $2k$, avec un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ à niveau k, et la théorie libre associée à l'espace-temps de Minkowski quadridimensionnel. Enfin, une troisième famille associe deux superquotients $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ à niveau $2k$ et un modèle minimal à niveau k avec la théorie libre quadridimensionnelle. De nombreuses autres combinaisons produisent une charge centrale totale critique.

Nous avons calculé [18] le nombre de modules de type (c,c), (a,a), (a,c) et (c,a) pour les modèles appartenant à ces trois familles, ainsi que pour leurs différents orbifolds. Cela nous a permis de démontrer que, comme dans le cas compact, l'orbifold de chacun de ces modèles par son groupe de symétrie diagonal maximal produit la théorie conforme miroir. La subtilité supplémentaire est qu'il faut, en plus de l'orbifold, remplacer les facteurs $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ par des théories de Liouville $N=2$, et vice-versa.

Les modèles de Gepner non-compacts apparaissent génériquement au voisinage de configurations de branes NS5. Les branes $NS5$ sont des solitons de la théorie des cordes. Ce sont des objets étendus dans six dimensions, et extrêment massifs : leur tension est proportionnelle à l'inverse du carré du couplage de corde. En raison de leur masse importante, ils modifient l'espace-temps dans lequel ils se trouvent. Ce sont également des sources pour le dilaton et le champ B. Considérons par exemple k branes $NS5$ parallèles arrangées régulièrement sur un cercle, dans l'espace-temps de Minkovski à dix dimensions. Au voisinage de ces branes, la théorie conforme qui vit sur la feuille d'univers des cordes est le modèle de Gepner non-compact composé d'un modèle minimal et d'un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ à niveau k [41] [32].

Excitations localisées

L'étude des états localisés dans le spectre des modèles de Gepner non-compacts est très instructive. Dans toute théorie de gravitation, on s'attend à trouver des états localisés. Autour d'une

étoile par exemple, on trouve des objets massifs en orbite. Les différentes orbites correspondent à des niveaux d'énergie différents, et donnent donc le spectre des états localisés autour de l'étoile. Cette observation a donné naissance à un scénario phénoménologique intéressant, dans lequel il n'est plus nécessaire de compactifier les dimensions supplémentaires de la théorie des cordes. L'image est la suivante : notre univers est une D-brane immergée dans un espace-temps plus vaste. Les particules du Modèle Standard sont les cordes ouvertes attachées à la D-brane. L'idée centrale est que la force de gravitation est transmise par des cordes fermées localisées au voisinage de la D-brane [40]. Le fait que les gravitons soient dans un état localisé est nécessaire pour reproduire par exemple la décroissance en $1/r$ du potentiel newtonien.

Malheureusement, il semble très difficile d'immerger ce scénario dans la théorie des cordes. D'une certaine façon, le problème vient du fait que les gravitons sont des particules de masse nulle. Il faut une quantité d'énergie très importante pour piéger une particule de masse nulle au moyen de l'attraction gravitationnelle. En fait, il faut placer cette particule à l'intérieur d'un trou noir.

Les modèles de Gepner non-compacts possèdent des excitations de masse nulle localisées. Le mécanisme à l'œuvre est différent de celui mentionné précédemment : c'est le gradient du dilaton dans la partie asymptotique de l'espace-temps qui est responsable de la localisation. En effet, un dilaton linéaire a pour effet de générer une masse supplémentaire pour toutes les excitations de la corde. Les états de masse nulle sont donc confinés au centre de l'espace-temps, où le gradient du dilaton s'annule. Dans les théories des cordes de type IIA et IIB, les excitations de masse nulle dans les modèles de Gepner non-compacts sont de type scalaire. Dans les théories des cordes hétérotiques [42], on trouve également des bosons de jauges non-abéliens [43]. On s'attend à ce que le mécanisme de localisation proposé puisse s'appliquer au graviton, dans des modèles plus élaborés.

Lien avec les variétés Calabi-Yau non-compactes

On peut associer à la théorie de Liouville $N = 2$ un modèle de Landau-Ginzburg dont elle est le point fixe infra-rouge. Ce modèle a un superpotentiel donné par : $W = \Phi^{-k}$, où k est le niveau de la théorie. Il est donc très tentant [35] [44] [45] d'associer aux modèles de Gepner non-compactes des variétés Calabi-Yau non-compactes définies comme des hypersurfaces dans des espaces projectifs complexes pondérés. En effet, l'argument basé sur l'intégrale de chemin [27] que nous avons présenté précédemment se généralise au cas non-compact. Par exemple, considérons le modèle de Gepner non-compact formé d'un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ à niveau k, et de deux modèles minimaux à niveau $2k$. Le Calabi-Yau canoniquement associé est défini par l'équation :

$$z_1^{-k} + z_2^{2k} + z_3^{2k} + z_4^2 + z_5^2 = 0 \tag{3.13}$$

dans l'espace projectif complexe pondéré $W\mathbb{C}P^4_{\frac{-1}{k},\frac{1}{2k},\frac{1}{2k},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Comme la coordonnée z_1 ne peut pas s'annuler, on utilise l'invariance par changement d'échelle de l'espace projectif pour fixer cette coordonnée à une valeur arbitraire μ, et réécrire le Calabi-Yau précédent comme une hypersurface de $\mathbb{C}^4$:

$$z_2^{2k} + z_3^{2k} + z_4^2 + z_5^2 = \mu \tag{3.14}$$

Pour $k = 1$, on reconnaît dans cette équation le conifold déformé [46].

Le conifold et ses généralisations jouent un rôle important dans la théorie des cordes. Ce sont des variétés non-compactes, qui fournissent de façon générique une description locale des singularités qui peuvent apparaître sur les variétés Calabi-Yau compactes. En plaçant des D-branes dans

ces variétés, on peut construire des modèles prometteurs aussi bien pour la physique des particules que pour la cosmologie. Ces espaces donnent également des descriptions holographiques de théories de jauge intéressantes (voir par exemple [47] [48]).

L'étude réalisée dans [18] permet de comprendre plus en détail la relation entre les modèles de Gepner non-compacts et les variétés Calabi-Yau non-compactes. En particulier, on trouve que le nombre de scalaires de masse nulle dans un modèle de Gepner non-compact est généralement inférieur au nombre de modules du Calabi-Yau non-compact qui lui est associé. La raison de cette différence est la suivante : le modèle de Gepner non-compact décrit un espace-cible qui possède la topologie d'une variété Calabi-Yau non-compacte, mais la métrique dans cet espace-temps n'est pas Ricci-plate. En effet, le dilaton n'est pas constant, il varie linéairement dans la région asymptotique. Le gradient du dilaton a pour effet de donner une masse à certains modules du Calabi-Yau. Une discussion plus approfondie se trouve dans [18].

Première publication : “Non-compact Gepner Models, Landau-Ginzburg Orbifolds and Mirror Symmetry.”

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA

Received: *November 7, 2007*
Accepted: *January 9, 2008*
Published: *January 22, 2008*

Non-compact Gepner models, Landau-Ginzburg orbifolds and mirror symmetry

Sujay K. Ashok

Institute of Mathematical Sciences, C.I.T Campus,
Taramani, Chennai, 600113 India, and
Perimeter Institute for Theoretical Physics,
Waterloo, Ontario, ON N2L2Y5, Canada
E-mail: sujay.ashok@gmail.com

Raphael Benichou and Jan Troost

*Laboratoire de Physique Théorique,*Ecole Normale Supérieure,*
24 Rue Lhomond Paris 75005, France
E-mail: raphael.benichou@gmail.com, troost@lpt.ens.fr

Abstract: We study non-compact Gepner models that preserve sixteen or eight supercharges in type II string theories. In particular, we develop an orbifolded Landau-Ginzburg description of these models analogous to the Landau-Ginzburg formulation of compact Gepner models. The Landau-Ginzburg description provides an easy and direct access to the geometry of the singularity associated to the non-compact Gepner models. Using these tools, we are able to give an intuitive account of the chiral rings of the models, and of the massless moduli in particular. By studying orbifolds of the singular linear dilaton models, we describe mirror pairs of non-compact Gepner models by suitably adapting the Greene-Plesser construction of mirror pairs for the compact case. For particular models, we take a large level, low curvature limit in which we can analyze corrections to a flat space orbifold approximation of the non-compact Gepner models. This gives rise to a counting of moduli which differs from the toric counting in a subtle way.

Keywords: Conformal Field Models in String Theory, String Duality, Superstring Vacua.

*Unité Mixte du CRNS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'université Pierre et Marie Curie 6, UMR 8549. Preprint LPTENS-07/51.

© SISSA 2008

JHEP01(2008)050

Contents

1. Introduction **2**

2. Non-compact Gepner models **4**
- 2.1 The asymptotic non-compact Gepner models 4
  - 2.1.1 Levels and charge lattice 5
  - 2.1.2 A canonical vector 6
  - 2.1.3 Products of θ-functions 6
  - 2.1.4 Locality orbifold 7
  - 2.1.5 Integer R-charge orbifold 8
  - 2.1.6 The standard GSO projection 8
  - 2.1.7 Discrete symmetries 9
- 2.2 The deep-throat region of non-compact Gepner models 10

3. Landau-Ginzburg models **11**
- 3.1 Landau-Ginzburg potentials for minimal models 11
- 3.2 Non-compact Landau-Ginzburg models 12

4. Landau-Ginzburg orbifolds **14**
- 4.1 R-charges of Ramond-Ramond ground states 15
- 4.2 Spectral flow to the NS-NS sector 17
- 4.3 Normalizability of non-compact twisted states 17

5. Concrete models **18**
- 5.1 Gepner points at large level 18
- 5.2 The $(k;k)$ model 19
- 5.3 The $(2k,2k;k)$ model 21
  - 5.3.1 Orbifolds 23
- 5.4 The $(k;2k,2k)$ model 25
  - 5.4.1 Orbifolds 26
- 5.5 The $(3,3,3;2)$ model 26

6. Mirror symmetry for non-compact Gepner models **27**
- 6.1 Sixteen supercharges 28
- 6.2 Eight supercharges 29
  - 6.2.1 The $(k;2k,2k)$ model 29
  - 6.2.2 The orbifolded $(2k,2k;k)$ models 30

JHEP01(2008)050

7. Mirror non-compact geometries and their relation to $\mathbb{C}^n/\Gamma$ orbifolds 30
7.1 The $(k;k)$ model 31
7.1.1 The mirror theory 31
7.2 The $(k;2k,2k)$ model 32
7.2.1 The mirror theory 32
7.2.2 The $(2k,2k;k)$ model 34
7.2.3 The $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(k;2k,2k)$ model 35
7.2.4 The $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(2k,2k;k)$ model 36
7.3 Relation to NS5-brane set-ups 37

8. Conclusions and future directions 38

A. Non-compact Gepner model analysis 39
A.1 The $(k;k)$ model 40
A.2 The $(2k,2k;k)$ model 41
A.3 The $(k;2k,2k)$ model 41
A.4 The $(3,3,3;2)$ model 42

B. T-duality to NS5-branes revisited 42

C. The consequences of unitarity 45

JHEP01(2008)050

1. Introduction

Mirror symmetry for Calabi-Yau 3-folds is a subject of great interest to physicists as well as mathematicians [1, 2]. Mirror pairs were first exhibited [3] by studying orbifolds of the quintic at the Gepner point [4] in the Calabi-Yau moduli space. This was explored in more detail in [5] which contained the first mathematical predictions from mirror symmetry. Many generalizations were found using the Landau-Ginzburg formulation that were applicable in non-geometric regimes [6].

In this paper, we wish to extend the study of mirror symmetry to non-compact Gepner models. Various approaches towards this problem have been followed. Toric Calabi-Yau manifolds have been very well studied in the literature following the construction of mirror pairs for hypersurfaces in toric varieties [7] and for non-compact Calabi-Yau manifolds (see [8] and references therein). In the physics literature, this has been reformulated using a gauged linear sigma model [9 – 11]. Progress has also been made for more general $c = 9$ theories via conformal field theory techniques [12]. In particular, the work on T-duality for the $N = 2$ cigar and the Liouville conformal field theories is relevant in this context [13 – 16].

One of the gaps we aim to fill in this paper is to clarify the link between non-compact Gepner models and their Landau-Ginzburg description. For compact Calabi-Yau manifolds that are hypersurfaces in weighted projective space, the Landau-Ginzburg description is

closely tied to the geometry [17]. These are two of the many phases in a gauged linear sigma-model description [9]. The Landau-Ginzburg model is also extremely useful for providing a simple setting to do computations. For instance, it has served well in the past for establishing the link between compact Gepner models and compact Calabi-Yau manifolds [17] as well as to provide the first list of Calabi-Yau hypersurfaces in $W\mathbb{CP}^4$ [18].

Our approach in this paper is to stress the ingredients of the analysis of Gepner models that survive the transition from going from the compact to the non-compact case. We alo point out the characteristics that differ in the two cases. Moreover we study in detail the orbifolded Landau-Ginzburg description of these models [19, 20]. This allows us to compare our models with geometric backgrounds which can be used as internal spaces for type II strings on $\mathbb{R}^{3,1}$.

In section 2 we will review the asymptotic partition function of non-compact Gepner models [12, 21 – 24]. The asymptotic partition function, which is proportional to the divergent volume of space-time, otherwise behaves much as the partition function in the compact case. In particular we show here that the β-method of Gepner [4] for constructing modular invariants can be adapted to the non-compact case. We then start the discussion of the localized spectrum [22, 12, 24], which is characteristic of non-compact models.

In section 3 we will link the non-compact Gepner models to Landau-Ginzburg models. We briefly remark on the difference between the compact and non-compact Landau-Ginzburg model [25]. For instance, the former gives rise to a unital chiral ring, while the latter gives rise to a ring without unit element. We continue the analysis in section 4 with a discussion of the orbifolds of the Landau-Ginzburg models that are necessary to implement the GSO projection, and other orbifold groups. We will see that the formalism for counting chiral ring elements largely carries over from the compact case [19, 20]. However, it will become intuitive that the Landau-Ginzburg potentials with negative powers exclude some of the (anti-)chiral ring elements as the potential renders them non-normalizable. Continuing the formal counting exercise will turn out to be useful nevertheless. It gives rise to a natural picture of mirror symmetry in conformal field theories, that is strongly reminiscent of its compact counterpart [3, 12]. We will discuss this point in section 6.

In section 5 we provide new examples of mirror conformal field theories. The techniques developed to analyze orbifolded Landau-Ginzburg models come in handy when treating these more complicated models. The mirror pairs of conformal field theories are best understood as linear dilaton backgrounds with $N = 2$ superconformal symmetry. These can be deformed or resolved, to give rise to perturbatively well-defined mirror string backgrounds. Finally, in section 7, we discuss examples in which we can relate the mirror conformal field theories to geometries. It will turn out that we can approximate certain conformal field theories at large level with orbifold singularities that admit a toric description. At infinite level, we find agreement between the conformal field theory and the geometric results. At finite level, we find that the conformal field theory description takes into account various modifications to the background that can lift some moduli. In section 8 we discuss further applications of our results.

JHEP01(2008)050

2. Non-compact Gepner models

We start out with a rather brief but technical review of non-compact Gepner models (see e.g. [12, 21, 23, 24]) in order to clarify the fact that the asymptotic partition function of non-compact Gepner models can be constructed using the same tools as in the compact case. We can then lay bare properties of the models along the same lines as in the compact Gepner models. In the second part of this section we give a preview of the ingredients that go into analyzing the localized part of the partition function.

2.1 The asymptotic non-compact Gepner models

For simplicity we will work with type II string theory on $\mathbb{R}^{3,1}$ times an internal (non-compact) conformal field theory of central charge nine.[1] The internal conformal field theory is built from a product of $N = 2$ superconformal field theories. These can be split into three classes depending on whether their central charge is smaller, larger than or equal to three.

- The minimal $N = 2$ superconformal field theories (see e.g. [27]) have central charge smaller than three. They can be viewed as coset conformal field theories of the form $\mathrm{SU}(2)_{k-2} \times \mathrm{U}(1)_2/\,\mathrm{U}(1)_k$ of central charge $c_{\mathrm{MM}} = 3 - \frac{6}{k}$. The level k is the supersymmetric level of the total SU(2) current algebra present in the parent $N = 1$ Wess-Zumino-Witten model. It is a positive integer larger than or equal to two.

  Since the minimal $N = 2$ superconformal models have been reviewed frequently ([28, 29]), and since they are standard in the construction of Gepner models [4], we only very briefly recall some of their properties. The primaries of the model can be labeled by three quantum numbers: the spin j under the $\mathrm{SU}(2)_{k-2}$ current algebra, the $\mathbb{Z}_{2k}$ valued chiral momentum n under the $\mathrm{U}(1)_k$ current algebra and the $\mathbb{Z}_4$ valued chiral momentum s labeling a representation of the $\mathrm{U}(1)_2$ current algebra. They satisfy the selection rule: $2j \equiv n + s$ [2]. We moreover have an equivalence between the following representations: $(j, n, s) \equiv (\frac{k-2}{2} - j, n-k, s+2)$. The left-moving $\mathrm{U}(1)_R$ charge Q_{MM} for a primary is equal to $Q_{\mathrm{MM}} = \frac{n}{k} + \frac{s}{2}$.

- The second class of theories has central charge larger than three. An example in this class is an $N = 2$ linear dilaton theory with a slope such that the central charge is equal to $c = 3 + \frac{6}{l}$ with positive and real values for the parameter l. The superconformal algebra with central charge larger than three has continuous unitary representations which are conveniently labeled [30] by a Casimir $j = 1/2 + ip$ where $p \in \mathbb{R}^+$, by an integer momentum $2m \in \mathbb{Z}$ and a $\mathbb{Z}_4$ fermionic quantum number s. The left-moving R-charge Q_{nc} of a primary is $Q_{\mathrm{nc}} = \frac{2m}{l} + \frac{s}{2}$. (See e.g. [16] for a detailed discussion.)

[1] The constructions can be extended to lower-dimensional flat spaces and to heterotic string theories, with little effort and lots of indices.

JHEP01(2008)050

- The $N = 2$ superconformal algebra with $c = 3$ is exceptional, and can be represented for instance by free scalars (which can realize compact or non-compact target space directions).

In order to mimic the Gepner construction, we will assume that in the case $c > 3$, the chiral algebra has some more structure (see e.g. [21]). For simplicity we will work under the assumption that the parameter l is a positive integer.[2] We can then add to the chiral algebra the generator of spectral flow on the $N = 2$ superconformal algebra by $2l$ units. The characters of the extended $N = 2$ superconformal algebra in the continuous representations are given by:

$$Ch_{\rm cont}(j, 2m, s) = q^{\frac{p^2}{l}} \frac{1}{\eta^3(\tau)} \Theta_{s,2}(\tau)\Theta_{2m,l}(\tau). \tag{2.1}$$

It is crucial to us that the modular transformation properties of the characters hinge upon the presence of the θ-functions at levels 2 and l.

2.1.1 Levels and charge lattice

We observe that the characters of the $N = 2$ minimal models at level k transform as θ-functions at levels 2 and $-k$, while the extended characters of the $N = 2$ models with central charge $c = 3 + \frac{6}{l}$ transform as θ-functions at level 2 and $+l$. We thus note a first important sign difference in the transformation rules of the characters. Modular invariants in the continuous sector of the theory can be based on modular invariants of θ-functions. For one $\mathrm{U}(1)_k$ current algebra at level k these are well-known to correspond to the divisors of k via orbifolding of the diagonal modular invariant. For a product of θ-functions, the analysis is more complicated, but a large class of modular invariants can be constructed by taking products of modular invariants of the factors, and then orbifolding.

In order to write down the modular invariant partition functions, it is useful to introduce a charge lattice for the various $\mathrm{U}(1)$ current algebras in the theory. We introduce a vector of levels $(2, 2, \ldots, 2; k_1, \ldots, k_p; l_1, \ldots, l_q)$ where p is the number of minimal model factors, q is the number of non-compact factors, while the number of fermionic levels equal to 2 is $1 + q + p$. Indeed, we work in light-cone gauge on $\mathbb{R}^{3,1}$ such that there is one complex fermion associated to the flat space directions (and there is one complex fermion per factor model). The charge lattice is periodic. In each direction, the periodicity is twice the level. A point in the lattice is defined by a charge vector $r = (s_0, s_1, \ldots, s_{p+q}; n_1, \ldots, n_p; 2m_1, \ldots, 2m_q)$ where we used the notation s_0 for the charge of the flat space fermions under the $\mathrm{U}(1)_2$ current algebra, and similarly for the other fermions, while we copy the traditional notation for the chiral momentum quantum numbers of compact and non-compact factors that we introduced above (including their

[2] It is sufficient to suppose that the central charge is parameterized by a positive fractional level l [21].

JHEP01(2008)050

normalization). The scalar product on the charge lattice is defined as follows:

$$\begin{aligned} r^{(1)}\cdot r^{(2)} = &-\frac{s_0^{(1)}s_0^{(2)}}{4}-\frac{s_1^{(1)}s_1^{(2)}}{4}-\cdots-\frac{s_{p+q}^{(1)}s_{p+q}^{(2)}}{4} \\ &+\frac{n_1^{(1)}n_1^{(2)}}{2k_1}+\cdots+\frac{n_p^{(1)}n_p^{(2)}}{2k_p} \\ &-\frac{(2m_1^{(1)})(2m_1^{(2)})}{2l_1}-\cdots-\frac{(2m_q^{(1)})(2m_q^{(2)})}{2l_q}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

The contribution of the chiral momenta corresponding to the non-compact factors comes with an opposite sign from those of the compact factors. The all-important signature of the quadratic form is therefore $(-,\ldots,-;+,\ldots,+;-,\ldots,-)$.

2.1.2 A canonical vector

We introduce the following vector β_0 in the charge lattice:[3]

$$\beta_0 = (-1,-1,\ldots,-1;1,1,\ldots,1;-1,-1,\ldots,-1). \tag{2.3}$$

We have that the left-moving R-charge Q for a primary state with charge vector r is equal to $Q = 2\beta_0\cdot r$. We moreover have that

$$\begin{aligned} \beta_0\cdot\beta_0 &= -\frac{1+p+q}{4}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2k_i}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{2l_i} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

where we used that the total central charge of the light-cone gauge conformal field theory is equal to

$$12 = 3(1+p+q)-\sum_{i=1}^{p}\frac{6}{k_i}+\sum_{j=1}^{q}\frac{6}{l_i}\,. \tag{2.5}$$

In summary, the vector β_0 is useful to measure the R-charge, and squares to minus one.

For the right-movers we will always take identical conventions to the left-movers. In particular, the $N=2$ superconformal algebras have the same structure constants. We will also define the right-moving R-charge of the minimal model factors to be $\tilde{Q}_{\rm MM} = \frac{\tilde{n}}{k}+\frac{\tilde{s}}{2}$ and for the non-compact factors $\tilde{Q}_{\rm nc} = \frac{2\tilde{m}}{k}+\frac{\tilde{s}}{2}$, while the charge vector for the right-movers is $\tilde{r} = (\tilde{s}_0,\ldots,;\ldots;\ldots,2\tilde{m}_{p+q})$. So, for the right-movers as well we have that the total $\mathrm{U}(1)_R$ charge is given by $\tilde{Q} = 2\beta_0\cdot\tilde{r}$ with the same vector β_0.

2.1.3 Products of θ-functions

We define the following notation for the product of characters of the flat space fermions, the minimal model and the non-minimal $N=2$ superconformal field theories. Since the characters transform like θ-functions, we introduce the symbol:

$$\Theta_r(\tau) = \Theta_{s_0,2}(\tau)\prod_{i=1}^{p}\chi_{j_i,n_i,s_i}(\tau)\prod_{i=1}^{q}Ch_{\rm cont}(j_{p+i},2m_i,s_{p+i})(\tau) \tag{2.6}$$

[3]We take the entries for the fermions to be minus one, in order to accord with the convention that the left-moving $\mathrm{U}(1)_R$ charge is given for instance for a minimal model factor by $Q_{\rm MM} = \frac{n}{k}+\frac{s}{2}$.

JHEP01(2008)050

where r is the total charge vector, and the first factor corresponds to the flat space fermions, while the following p factors correspond to minimal model characters, and the final q factors to the non-compact continuous extended characters. In the Θ symbol we have left implicit the labels corresponding to the levels, as well as those corresponding to the Casimirs of the minimal and non-minimal models. The important point is that the Θ-functions transform as a product of ordinary θ-functions under modular transformations.

We introduce now the first modular invariant partition function which is the diagonal modular invariant:

$$Z_{\rm diag} = \sum_r \Theta_r(\tau)\Theta_r(\overline{\tau})\,, \tag{2.7}$$

where the diagonal sum over r is over all inequivalent charges in the charge lattice. Implicitly, we take a diagonal A-type modular invariant for the Casimir invariants j for all factors.[4] We have suppressed the divergent non-compact volume factor in the formula for the asymptotic partition function.

2.1.4 Locality orbifold

Now that we have set-up our theory in a way which is very analogous to [4], we can follow that reference closely. Along the way, we reformulate a few minor points in a more modern orbifold language.

Locality in string theory only allows for fermions having either Neveu-Schwarz (NS) or Ramond (R) boundary conditions for all factors simultaneously for the left- or the right-movers. We implement that locality constraint by orbifolding the diagonal partition function by a diagonal $(\mathbb{Z}_2)^{p+q}$ group. The i'th $\mathbb{Z}_2$ acts on a state with charge vectors r and $\tilde{r}$ as $(-1)^{(s_0+s_i+\tilde{s}_0+\tilde{s}_i)/2}$ for $i = 1, \ldots, p+q$. The action can be summarized by introducing vectors β_i which have a 2 as the first and the $i+1$'th entry for $i = 1, \ldots, p+q$. Then the action can equivalently be written as $(-1)^{\beta_i\cdot(r+\tilde{r})}$. On an untwisted state with charges s_0 and s_i, the action is the multiplication by a phase $(-1)^{s_0+s_i}$.

The states invariant under $(\mathbb{Z}_2)^{p+q}$ will be purely NS or purely R for the left-movers. Since the partition function was diagonal, the same condition will hold for the right-movers. The orbifold also introduces twisted states. These have left- and right-moving charge vectors that differ by multiples of the vectors β_i [4]. Indeed, since the fermion number s_i is defined modulo four, this introduces a twisted state sector for each $\mathbb{Z}_2$ orbifold factor, and moreover, since $\beta_i^2 = 2$, we have that the twisted states we introduce in this fashion are also orbifold invariant [4]. Each of the $\mathbb{Z}_2$ orbifolds introduces twisted states, which renders the sum over left- and right-moving fermion numbers s_i and $\tilde{s}_i$ independent, except for the fact that they need to be of the same parity as the flat space fermion numbers s_0 and $\tilde{s}_0$ respectively. The above prescription is equivalent to the standard orbifold procedure and produces a new modular invariant partition function. Note that the flat space fermion quantum numbers s_0 and $\tilde{s}_0$ are still of equal parity. We therefore only have NSNS and RR states at this

[4] It would be interesting to study the more general modular invariants of type D and/or type E for the compact factors.

JHEP01(2008)050

point. The sum over the left- and right-moving worldsheet fermion numbers s_0 and $\tilde{s}_0$ will become decoupled after performing a final $\mathbb{Z}_2$ GSO projection, thus introducing fermions.

2.1.5 Integer R-charge orbifold

The standard GSO projection in string theory is based on the fact that the partition function only has integer R-charges. In order to ensure this condition in a Gepner model, we perform yet another orbifold. The orbifold action on a state with charge r and $\tilde{r}$ will be $exp(2\pi i\beta_0 \cdot (r + \tilde{r}))$. We first note that $\beta_0 \cdot \beta_i$ is an integer, such that the action of the orbifold on β_i twisted sectors is identical to the action on β_i untwisted sectors. The order of the $2\beta_0$ orbifold is therefore the order of the operator $e^{2\pi iQ}$ in the untwisted theory (where Q is the total left-moving R-charge in light-cone gauge).[5] The order of that orbifold is the least common multiple d of all the levels in the theory (including the fermionic level 2 when $p + q$ is even and not when $p + q$ is odd).

It is clear in the untwisted sector that the orbifold forces the left-moving (and right-moving) $\mathrm{U}(1)_R$ charge to be integer. There are also $d-1$ twisted sectors which have charge vectors which differ by multiples of $2\beta_0$. Since $\beta_0^2 = -1$, we have that these twisted sectors also have integer left- and right-moving R-charges. Thus, the orbifold has provided us with a new modular invariant partition function with integer R-charges for both left- and right-movers. If we introduce the lattice Λ generated by the vectors β_i and $2\beta_0$, then we can write the partition function of the theory as:[6]

$$Z_0 = \sum_{r-\tilde{r}\in\Lambda} \Theta_r(\tau)\Theta_{\tilde{r}}(\overline{\tau})\,, \tag{2.8}$$

where we restrict the sum to invariant states, namely states obeying the conditions $r\cdot\beta_i \in \mathbb{Z}$ (purely NS or purely R) and $r \cdot 2\beta_0 \in \mathbb{Z}$ (integer R-charges). Again we have left implicit the diagonal A-type invariant for the minimal models as well as the diagonal integral over radial momenta for the compact factors that diverges like the volume of space-time.

2.1.6 The standard GSO projection

The partition function now has integer R-charges for all states, and can be GSO projected in the same manner as the flat space partition function. We project onto odd R-charges, i.e. we satisfy the condition $2\beta_0 \cdot r \in 2\mathbb{Z} + 1$ as well as $2\beta_0 \cdot \tilde{r} \in 2\mathbb{Z} + 1$. The charge difference between left- and right-movers for the twisted states is proportional to an odd multiple of β_0. The twisted sectors are the NS-R and R-NS sectors of the theory, which correspond to space-time fermions, and contribute negatively to the space-time partition function thus implementing space-time statistics. For type II theories, we have obtained an asymptotic supersymmetric partition function in the Gepner formalism. Strictly speaking we have a type IIB partition function, since we have made no distinction between left- and right-movers. It can be transformed easily into a type IIA partition function by flipping the chirality of the final GSO projection for the right-movers in the R-sector.

[5] The theory we start out with obeys the charge relation $r = \tilde{r}$. Since $\beta_0 \cdot \beta_i \in \mathbb{Z}$, we still have the relation $e^{2\pi i(Q+\tilde{Q})/2} = e^{2\pi iQ}$ after the $(\mathbb{Z}_2^{p+q})$ orbifold.

[6] This partition function for non-compact models is the analogue of Z_0 in [3] for compact Gepner models.

JHEP01(2008)050

2.1.7 Discrete symmetries

In this subsection, we can follow [3] closely since we have set up our model as in the compact case. It is interesting to single out a particular symmetry group of the model.

The symmetry of the compact models contains a $\mathbb{Z}_{k_i} \times \mathbb{Z}_{k_i}$ group. Only the diagonal $\mathbb{Z}_{k_i}$ subgroup has a non-trivial action on a model with diagonal spectrum. This subgroup acts as

$$\Phi_{r,\tilde{r}} \to exp(2\pi i(n_i + \tilde{n}_i)/2k_i)\Phi_{r,\tilde{r}}\,. \tag{2.9}$$

We can introduce a vector

$$\gamma_i = (0,\ldots,0;0,\ldots,0,2,0,\ldots,0;0,\ldots,0) \tag{2.10}$$

where 2 is in the i'th entry after the first semi-column. The vector codes the action of the symmetry group as follows:

$$\Phi_{r,\tilde{r}} \to exp(\pi i\gamma_i \cdot (r+\tilde{r}))\Phi_{r,\tilde{r}}\,. \tag{2.11}$$

We have a similar action in the non-compact theories. There is a symmetry group $\mathbb{Z}_{l_i} \times \mathbb{Z}_{l_i}$, of which only the diagonal subgroup acts nontrivially on the states. In the full Gepner model, we can think of the product of the diagonal subgroups

$$D = \prod_{i=1}^{p} \mathbb{Z}_{k_i} \times \prod_{j=1}^{q} \mathbb{Z}_{l_j} \tag{2.12}$$

as mapped into the charge lattice via the maps $\gamma_{i=1,\ldots,p+q}$.

Now we define the operator g_0 that acts by multiplication by $\exp(2\pi i\beta_0 \cdot (r+\tilde{r}))$. It generates a group $\mathbb{Z}_d$, that we used previously to perform the integer R-charge orbifold. This orbifold group $\mathbb{Z}_d$ contains a subgroup generated by g_0^2, which is a subgroup of D. Indeed, the element g_0^2 corresponds to a β-vector that has zero fermionic entries. When the order d of the group $\mathbb{Z}_d$ is even, the subgroup generated by g_0^2 has order $n = d/2$ and it has order $n = d$ when d is odd (see also [3]). The part of the diagonal symmetry group D that still acts after the projection onto integer R-charges is

$$G = \left(\prod_{i=1}^{p} \mathbb{Z}_{k_i} \times \prod_{j=1}^{q} \mathbb{Z}_{l_j} \right) / \mathbb{Z}_n\,. \tag{2.13}$$

Following [3] we then define the maximal subgroup H of G which preserves supersymmetry in space-time. This is the subgroup corresponding to all vectors β_m in the charge lattice that satisfy the equation $2\beta_m \cdot \beta_0 \in 2\mathbb{Z}$. This condition ensures that the left- and right-moving R-charges only differ by even integers, as required by supersymmetry. If we write

$$\beta_m = \sum_i c_m^i \gamma_i\,, \tag{2.14}$$

then this condition boils down to the condition that [3]

$$\sum \frac{c_m^i}{k_i} + \sum \frac{c_m^j}{l_j} \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.15}$$

JHEP01(2008)050

The subgroup H generated by the vectors β_m that satisfy this condition is the maximal orbifold group consistent with space-time supersymmetry.

Any subgroup F of H can be used to generate new supersymmetric orbifold models. Precisely as in the compact case, modding out the original model by the maximal subgroup H generates the mirror model (in the conformal field theory sense). Moreover, orbifolding by a subgroup F will generate a model that is mirror to the orbifold of the original model by H/F. This was argued in [3] for the compact case, and we will show in section 6 that it is also true for the non-compact models. Note that the mirror symmetry in the conformal field theory that we have set up above holds for *undeformed* models. We will see that deformations of a model are mapped to resolutions of the mirror. We will discuss this important point in greater detail later on.

2.2 The deep-throat region of non-compact Gepner models

Until now we have discussed only the continuous part of the spectrum of the non-compact Gepner models. The contribution of these states to the partition function is proportional to the volume of the target space.

A good starting point for the rest of our discussion will be to think of the initial model as based on a product of $N = 2$ superconformal minimal models and $N = 2$ linear dilaton theories.

It is important to observe that although the exact torus partition function exists for these conformal field theories, they only describe the asymptotic spectrum of the corresponding string theory. Indeed, there is a region in space-time that is strongly coupled (due to the linearly growing dilaton in one or several directions). In that region, the one-loop spectrum is not a meaningful quantity.

Nevertheless, we can get a handle on possible deformations of that singular string theory by working under the following hypotheses. We look for local deformations in the strongly coupled region deep in the throat(s). Secondly, we focus on marginal deformations of the worldsheet theory that preserve supersymmetry in space-time. The $N = 2$ superconformal algebra on the worldsheet will be preserved, and the deformations will be based on chiral (or anti-chiral) primaries. Morever, we suppose that the deformations cannot have $\mathrm{U}(1)_R$ quantum numbers that differ from those already appearing in the asymptotic partition function, namely, the charges are quantized as in the asymptotic partition function. We believe all of these are mild assumptions, given space-time supersymmetry. (See e.g. [31, 32] for similar reasonings, mostly from a space-time perspective.)

Using the fact that there is a map between $N = 2$ superconformal algebra representations and reprentations of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ [30], we can reformulate the above conditions as saying that the marginal operators in the full theory should be based on chiral primaries of dimension smaller or equal to one half in the linear dilaton factors. The operator in the linear dilaton factor should have a conformal dimension equal to $h = |m|/k$ where the $\mathrm{U}(1)_R$ charge is given by $Q = 2m/k$, and where $2m$ is an allowed $\mathrm{U}(1)_R$ quantum number given the (fixed) asymptotic partition function. We get an upper cut-off: $2|m| \leq k$ from the requirement of relevance on the worldsheet. Moreover, we want to study operators that are normalizable at weak coupling. Strict normalisability requires $2|m| > 1$. In particular

JHEP01(2008)050

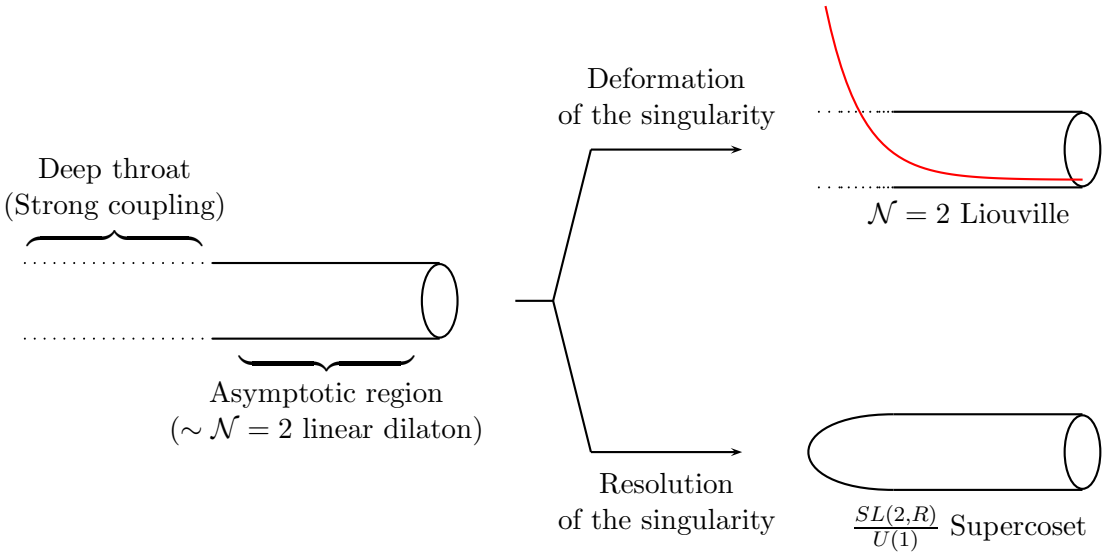


Figure 1: The asymptotic region in a non-compact Gepner model is identical to that of a linear dilaton conformal field theory. The strong coupling singularity can be cured either by turning on a Liouville potential, or by capping the cylinder with a cigar type deformation.

the value $2m = 0$ is excluded in the non-compact factors, since this would correspond to a non-normalizable operator for a conformal field theory with a non-compact target space. In summary, the quantum number $2|m|$ has to lie in the range $1 < 2|m| \leq k$. It should be noted that the operator with $2|m| = 1$ is on the border of being normalizable in the sense that it lies at the endpoint of a line of delta-function normalizable operators [30]. It will play a special role in what follows, and we will call this type of operator almost-normalizable. We will flesh out the above analysis considerably in the following sections.

3. Landau-Ginzburg models

One of our goals in this section is to obtain, in a simple manner, the chiral ring of localized operators in the non-compact Gepner models we described in section 2. For the compact case, this is most carried out by associating a Landau-Ginzburg model to each of the factor conformal field theories. The underlying idea is that at low energies, the Landau-Ginzburg model flows to the conformal field theory that corresponds to the minimal model.

Furthermore, the GSO projection that we discussed for the non-compact Gepner models maps to an orbifold of the Landau-Ginzburg theory. Therefore the techniques derived in [19, 20] to obtain the spectrum in the Landau-Ginzburg models and orbifolds thereof will be crucial for our analysis.

In this section and the next, we give a similar Landau-Ginzburg description of our non-compact Gepner models. We will find that much of the technology used in the compact case can be used for the non-compact case as well. However there are subtle differences in reading off the spectrum, because some of the operators are not normalizable.

3.1 Landau-Ginzburg potentials for minimal models

For $N = 2$ superconformal minimal models, the flow between Landau-Ginzburg and su-

JHEP01(2008)050

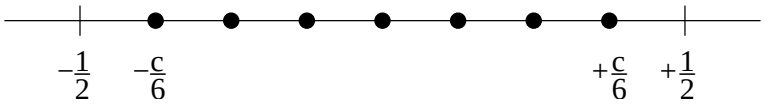


Figure 2: The R-charges of the ground states in the Ramond sector for a $N = 2$ superconformal theory with central charge $c < 3$.

perconformal minimal models is well-studied [33, 34] and we merely give a brief reminder. A Landau-Ginzburg model with $N = (2, 2)$ supersymmetry and a chiral superfield Φ with superpotential

$$W_{\rm MM} = \Phi^k \tag{3.1}$$

flows in the infrared to an $N = 2$ superconformal minimal model. The chiral ring of both models match one-to-one. The chiral unital ring of the Landau-Ginzburg model is $\mathbb{C}[\Phi]/\partial_\Phi W$ which is linearly generated by the $k-1$ elements $\Phi^0, \Phi^1, \ldots, \Phi^{k-2}$, which have (both left- and right-moving) R-charge equal to $0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-2}{k}$. These match one-to-one to the chiral-chiral primaries of the diagonal minimal model. Further evidence for this identification of the Landau-Ginzburg model fixed point is provided by the matching of the elliptic genus of these models [35].

The T-dual or mirror Landau-Ginzburg model based on an twisted chiral superfield [36] flows to the anti-diagonal minimal model. This can be written as a $\mathbb{Z}_k$ orbifold of the model in equation (3.1). We will discuss such orbifolding methods to compute mirrors in later sections.

We can summarize the chiral ring of the Landau-Ginzburg model by specifying a Poincare polynomial which is the trace over the chiral-chiral ring weighted by the U(1) R-charges [37]:

$$\begin{aligned} Tr_{(c,c)} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} &= 1 + (t\tilde{t})^{\frac{1}{k}} + (t\tilde{t})^{\frac{2}{k}} + \cdots + (t\tilde{t})^{\frac{k-2}{k}} \\ &= \frac{1 - (t\tilde{t})^{\frac{k-1}{k}}}{1 - (t\tilde{t})^{\frac{1}{k}}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

In the Ramond sector, this gives rise to a polynomial that keeps track of the R-charges of the Ramond-Ramond ground states:

$$Tr_{\rm RR} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} = (t\tilde{t})^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}} + (t\tilde{t})^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{k}} + \cdots + (t\tilde{t})^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}. \tag{3.3}$$

Note that the charges fill out the range from $-c/6$ to $+c/6$, and lie inside the interval $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$. See figure 2.

3.2 Non-compact Landau-Ginzburg models

Now we want to discuss the link between the non-compact $N = 2$ superconformal field theories and the IR fixed point of Landau-Ginzburg models with a superpotential of the form:

$$W_{\rm nc} = \Phi^{-l} \tag{3.4}$$

JHEP01(2008)050

where l is a positive integer. This was introduced[7] in [25] and we would like to understand how far we can argue for a formal analogy with the compact case, and if possible borrow the techniques that have been extensively used in that context. See also [10, 11] for a more detailed analysis of the renormalization group flow with fixed asymptotics. The central charge of this theory with fixed asympotics is $c = 3 + \frac{6}{l}$.

It is natural to assume that the field Φ cannot take the value zero, and that moreover the point at infinity should remain a regular point. We can then associate to the model an operator ring $\mathbb{C}[\Phi^{-1}]$ which should again be divided by the ideal generated by the derivative of the superpotential. This gives rise to a ring spanned by the $l+1$ elements $\Phi^0, \Phi^{-1}, \ldots, \Phi^{-l}$. Because the target-space is non-compact, Φ^0 is not normalizable. We exclude the operator from the ring. The ring of elements spanned by $\Phi^{-1}, \Phi^{-2}, \ldots, \Phi^{-l}$ is a ring without unit element. This fact contrasts with the compact case, and it is associated to the non-existence of an $\mathrm{SL}(2,R)$ invariant ground state in the conformal field theory. The operators $\Phi^{-1}, \Phi^{-2}, \ldots, \Phi^{-l}$ have R-charge $\frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \ldots, \frac{l}{l}$. We can match the operators $\Phi^{-2}, \ldots, \Phi^{-l}$ onto the chiral ring of the diagonal linear dilaton theory with $N = 2$ superconformal symmetry (under the assumptions of relevance and normalizability, as discussed in section 2.2). We moreover expect the operator Φ^{-1} to become the almost-normalizable chiral-chiral primary in the infra-red fixed point theory.

Again, we can summarize the chiral-chiral spectrum in a Poincaré polynomial for the (c,c) ring which for the case of (almost-)normalizable elements is:

$$\begin{aligned} Tr_{(c,c)} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} &= (t\tilde{t})^{\frac{1}{l}} + (t\tilde{t})^{\frac{2}{l}} + \cdots + (t\tilde{t})^{\frac{l}{l}} \\ &= (t\tilde{t})^{\frac{1}{l}} \frac{1-(t\tilde{t})}{1-(t\tilde{t})^{\frac{1}{l}}}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

For the strictly normalizable elements, we should use:

$$\begin{aligned} Tr_{(c,c)} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} &= (t\tilde{t})^{\frac{2}{l}} + (t\tilde{t})^{\frac{3}{l}} + \cdots + (t\tilde{t})^{\frac{l}{l}} \\ &= (t\tilde{t})^{\frac{2}{l}} \frac{1-(t\tilde{t})^{\frac{l-1}{l}}}{1-(t\tilde{t})^{\frac{1}{l}}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Moreover, the normalizable Ramond ground states now have charges that go from $-1/2 + 1/l$ to $+1/2 - 1/l$ which again lie inside the interval $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$. The almost-normalizable ground state is an outlier at charge $-1/2$. It has a spectrally flowed partner at opposite charge $+1/2$. The Ramond ground states do not reach the charge $-c/6$ and $+c/6$. See figure 3. The R-charges of the strictly normalizable Ramond-Ramond ground states can be coded in the polynomial:

$$Tr_{\mathrm{RR}} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} = (t\tilde{t})^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{l}} + (t\tilde{t})^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{l}} + \cdots + (t\tilde{t})^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{l}}. \tag{3.7}$$

To summarize, we can associate a Landau-Ginzburg model to each factor of a non-compact Gepner model. The total superpotential will be the sum of the individual superpotentials. The Landau-Ginzburg models we discuss will be of the Fermat type. However, we

[7] See also e.g. [38, 39] for an older and related use of these models in the context of two-dimensional gravity.

JHEP01(2008)050

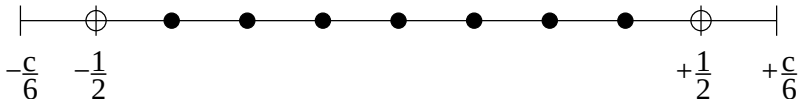


Figure 3: The R-charges of the ground states in the Ramond sector for a $N = 2$ superconformal theory with central charge $c > 3$. There are almost-normalizable ground states at charges $\pm\frac{1}{2}$.

note at this stage that there is a difference between the product of minimal and linear dilaton theories and the corresponding product of Landau-Ginzburg theories. Indeed, while the diagonal A-type minimal models are identified as infra-red fixed points of Landau-Ginzburg models, the non-compact Landau-Ginzburg model gives rise to a deformation of the $N = 2$ linear dilaton theory. To the linear dilaton asymptotics, we add a deforming potential.

So far we have studied simple Landau-Ginzburg theories (and their direct product theories). However, to provide Landau-Ginzburg analogues of the Gepner conformal field theories, we need to discuss orbifolded Landau-Ginzburg models.

4. Landau-Ginzburg orbifolds

Our discussion of orbifolded Landau-Ginzburg models is mainly based on [19, 20]. The orbifolding can arise due to the GSO projection in string theory, or due to a further geometric orbifolding of the resulting theory. In this section, we start out by discussing the orbifold action as being independent of possible actions on flat space factors, following [20]. We will comment on the relation to the full GSO projection (which also acts on the flat space factors) in the appendix. Since our discussion will be closely related to the long discussion in the literature of the compact case, we will briefly review that discussion and we will only treat in more detail the crucial differences that exist in the non-compact case.

For each compact Landau-Ginzburg model with superpotential $\Phi_i^{k_i}$, there is a canonical diagonal action

$$\Phi_i \to e^{\frac{2\pi i}{k_i}} \Phi_i \,, \tag{4.1}$$

which generates a $\mathbb{Z}_{k_i}$ group. The exponent is determined by the $\mathrm{U}(1)_R$ charge of the field Φ_i. For every non-compact factor with superpotential $\Phi_j^{-l_j}$, the canonical action is

$$\Phi_j \to e^{-\frac{2\pi i}{l_j}} \Phi_j \,. \tag{4.2}$$

We act with the opposite phase, since the $\mathrm{U}(1)_R$ charge of the field Φ_j is negative (becuase of the negative power in the superpotential). We introduce the charges q_i for the fields Φ_i for both compact and non-compact factors, which are equal to

$$\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots; -\frac{1}{l_1}, -\frac{1}{l_2}, \ldots\right) . \tag{4.3}$$

Then the above actions on the fields can be written as

$$\Phi_i \to e^{2\pi i q_i} \Phi_i \,. \tag{4.4}$$

JHEP01(2008)050

The full symmetry group is then

$$D = \prod_i \mathbb{Z}_{k_i} \times \prod_j \mathbb{Z}_{l_j} \,. \tag{4.5}$$

Note that it is identical to the group we identified previously in the context of non-compact Gepner models in section 2.1.7.

We study orbifolds of the theory by a subgroup of the above diagonal group D. For instance, we can choose to orbifold by a group generated by a single element, which has different weights in each of the factors, or by a product of such groups. For an element h of the orbifold group, the action on each superfield can be written as

$$\Phi_i \to e^{2\pi i \Theta_i^h} \Phi_i \,. \tag{4.6}$$

The phases Θ_i^h parameterize the group elements h.

The integer R-charge orbifold discussed in section 2.1.5 is special, since it is part of the GSO projection. In this case, we orbifold by the group generated by g_0. The action of this operator on the superfields is coded as $\Theta_i^{g_0} = q_i$.

Our main objective is to compute the number and charges of the chiral/chiral (c,c) and anti-chiral/chiral (a,c) states, as well as their (a,a) and (c,a) partners, in the orbifolded Landau-Ginzburg theory. In particular, those with $\mathrm{U}(1)_R$ charges ± 1 will lead to massless fields in spacetime. In the case where the geometric approximation is valid, marginal (c,c) states correspond to complex structure deformations, and marginal (a,c) states to Kähler moduli.

A crucial observation is that for the Calabi-Yau examples we consider in this paper, (c,c) states are in one-to-one correspondence with Ramond-Ramond ground states [37]. More precisely, a Ramond-Ramond ground state becomes a (c,c) state under the action of half-unit left-right symmetric spectral flow. Similarly, (a,c) states are derived from Ramond-Ramond ground states by half-unit left-right antisymmetric spectral flow. It will prove a good strategy to work in the R-R sector rather than in the NS-NS sector. The procedure we will use is the following [20]:

- First identify the unprojected Ramond-Ramond ground states in each twisted sector and compute their R-charge.

- Then flow these states to the NS-NS sector, and keep those that are invariant under the orbifold action.

Let us study the two steps of this procedure in greater detail.

4.1 R-charges of Ramond-Ramond ground states

We first extend a result of reference [19] for the twisted sector Ramond-Ramond ground states. Consider the sector of the theory twisted by h (the following is also valid in the untwisted sector, with $h = 1$). We define a particular Ramond-Ramond ground state $|0\rangle_R^h$, which is the Ramond-Ramond ground state with the lowest left-moving R-charge for the compact factors, and the highest left-moving R-charge for the non-compact factors.

JHEP01(2008)050

The left-moving R-charges with respect to the individual factors of that Ramond-Ramond ground state is:

$$Q = + \sum_{\Theta_i^h \notin Z} \left(\Theta_i^h - \left[\Theta_i^h \right] - \frac{1}{2} \right) + \sum_{\Theta_i^h \in Z} \left(q_i - \frac{1}{2} \right) , \tag{4.7}$$

and the right-moving R-charge is:

$$\tilde{Q} = - \sum_{\Theta_i^h \notin Z} \left(\Theta_i^h - \left[\Theta_i^h \right] - \frac{1}{2} \right) + \sum_{\Theta_i^h \in Z} \left(q_i - \frac{1}{2} \right) . \tag{4.8}$$

Here, the expression $[\Theta]$ is defined as the greatest integer smaller than Θ (for Θ not an integer). Remember that Θ_i^h is the phase that defines the action of h on Φ_i, and q_i is the R-charge of Φ_i.

The arguments leading to the first line of these formulae are elaborate [19]. We refer to that reference for details. Note that it is natural to look for the Ramond-Ramond ground state in the h-twisted sector by twisting the left-movers half-way in one direction, and twisting the right-movers half-way in the other direction, due to the symmetry between left- and right-movers in the original theory. The subtraction of the integer part of the twist arises because of the fact that we can otherwise find a state with smaller R-charge, between $-1/2$ and $+1/2$ that will have lower conformal dimension. See also figures 2 and 3. Furthermore, as argued in [19], the R-charges behave very much like fermion number, which is indeed lifted from $-1/2$ in the compact sector, by the contribution of Θ_i^h. The crucial difference with the compact sector is only that for the non-compact sector we need to keep in mind that Θ_i^h is negative, and that therefore it is more natural to think of the state with fermion number or $\mathrm{U}(1)_R$ charge moving *down* to a charge just below $+1/2$. That is precisely what is automatically coded in the above formula, since for Θ negative but bigger than -1, we have that $\Theta - [\Theta] - 1/2 = +1/2 + \Theta$.

The second line in each of these formulae (4.7) and (4.8) arises from spectral flowing the untwisted factor NS-NS ground state to the R-R sector. Note that the superfield living in an untwisted factor can be given a nonzero vev. This is not possible in the twisted factor, since a constant does not satisfy the twisted boundary conditions. In this way, other Ramond-Ramond ground states can be generated in the same sector. For example, if the i-th factor is untwisted, the state $\Phi_i^p|0\rangle_R^h$ (p integer) is another valid Ramond-Ramond ground state. It has left- and right-moving R-charge $(Q + p|q_i|, \tilde{Q} + p|q_i|)$, where we took into account the contribution of Φ_i^p. In a compact factor, p is restricted to the bounds $0 \leq p \leq k_i - 2$. In a non-compact factor, strictly normalizable states have $2 \leq -p \leq l_i$, and almost-normalizable states have $p = -1$. These bounds follow from our discussion in section 3.

The upshot is that the formulas 4.7 and 4.8, derived in [19] for compact models, are also valid for non-compact models.

JHEP01(2008)050

Once this hurdle is ovecome, one can extend the reasoning of [20] to cover the non-compact case as well. We will not repeat the whole analysis here. Let us observe that all the information about the unprojected Ramond-Ramond ground states in the h-twisted sector is conveniently encoded in a Poincare polynomial equal to:

$$\mathrm{Tr}_{R,\text{twisted, unprojected}} t^Q \tilde{t}^{\tilde{Q}} = \left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{\sum_{\Theta_i^h \notin Z} (\Theta_i^h - [\Theta_i^h] - 1/2)} (t\tilde{t})^{\sum_{\Theta_i^h \in Z} (q_i - 1/2)} \tag{4.9}$$
$$\times \prod_{\substack{\Theta_i^h \in Z \\ compact \\ factors}} \frac{1 - (t\tilde{t})^{\frac{k_i - 1}{k_i}}}{1 - (t\tilde{t})^{\frac{1}{k_i}}} \prod_{\substack{\Theta_i^h \in Z \\ noncompact \\ factors}} (t\tilde{t})^{\frac{2}{l_i}} \frac{1 - (t\tilde{t})^{\frac{l_i - 1}{l_i}}}{1 - (t\tilde{t})^{\frac{1}{l_i}}}.$$

In the untwisted sector, the above analysis simplifies. The particular Ramond-Ramond ground state we discussed earlier had charges $(-c/6, -c/6)$. It is the state one gets by half-unit spectral flow of the NS-NS vacuum. All the superfields are untwisted, and can be given constant values. The relevant Poincaré polynomial is simply the product of the Poincaré polynomials of each factors.

4.2 Spectral flow to the NS-NS sector

In this way we can enumerate all the Ramond-Ramond ground states, and their R-charges. Then we can generate all the NS-NS (anti-)chiral states, by spectral flow.

We obtain (c, c) states by symmetric half-unit spectral flow. Their R-charges are easily computed from those of the Ramond-Ramond ground state: we add $(\frac{c}{6}, \frac{c}{6})$ to the R-charges of the ground state. This operation does not change the twist: h-twisted Ramond-Ramond ground states flow to h-twisted (c, c) states.

In a similar way, we get (a, c) states by anti-symmetric half-unit spectral flow. This time, the Ramond-Ramond ground state R-charges are shifted by $(-\frac{c}{6}, \frac{c}{6})$. Note that anti-symmetric spectral flow changes the twist [19] such that h-twisted Ramond-Ramond ground states flow to hg_0-twisted (a, c) states.

Among all these states, we keep only those that are invariant under the orbifold action. In the case of the integer R-charge orbifold, the selection is easy: we keep the states that have integer R-charges. But in other cases, the procedure is harder. We refer to [20] for a generic discussion of this projection.

4.3 Normalizability of non-compact twisted states

For the twisted Ramond-Ramond ground states, we encounter a subtle point and this is the crucial difference between the compact and the non-compact case. When we twist a coordinate, and restrict to constant modes, the field is set to zero. This will not give rise to a normalizable state when the Landau-Ginzburg potential has a negative power, since the potential blows up at zero. Although we could therefore immediately discard the states that have a non-compact twisted factor as not being contained in the normalizable spectrum, we advocate keeping an open mind — we will continue the investigation into

JHEP01(2008)050

these non-normalizable states, in view of the possibility that we can tune the coefficient of the negative power potential to zero, which will render these states normalizable.

Strictly speaking, the models where we do take into account such twisted sector deformations should be thought of as existing in the well-defined linear dilaton conformal field theories (which give rise to locally strongly coupled string theory backgrounds). We believe we provide ample justification for this procedure later on. In particular in section 6 we will find that these states are needed in the construction of mirror pairs of conformal field theories, by generalizing the Greene-Plesser prescription of finding mirrors by orbifolding. More precisely, states untwisted in the non-compact directions will be mapped in the mirror model to states twisted in the non-compact directions.

To summarize, the full set of chiral and anti-chiral ring elements of the Landau-Ginzburg orbifold, including those arising in both the untwisted and twisted sectors, is interpreted as the spectrum of the linear dilaton theory. The Landau-Ginzburg model is a complex structure deformation of this linear dilaton background. This deformation removes from the spectrum the RR states twisted in the non-compact directions and the de-singularized string background only contains purely untwisted states. As we will see later on, in the mirror model, the deformation is mapped to a resolution of the theory. The spectrum of the resolved theory will, instead, only contain the states twisted in the non-compact directions.

5. Concrete models

In this section we will apply what we have learned in the previous sections to some concrete models. We supplement the analysis of the asymptotic partition function of section 2.1 with an analysis of the localized states (which we briefly touched upon in section 2.2). We start out with some observations on the nature of non-compact Gepner models, and how they differ from their compact counterparts. We will then compute the allowed deformations of (c, c) and (a, c) type in particular examples, in the language of orbifolded Landau-Ginzburg models. In the conformal field theory language, the conditions to be satisfied for chiral primaries have been written out in a series of papers [52, 12, 43]. We compare our results with the conformal field theory formalism in appendix A.

5.1 Gepner points at large level

We start out with some comments that allow us to single out some particularly interesting models. Compact Gepner models have factors with a central charge which is always smaller than three. A large level limit for all factors necessarily increases the central charge of the Gepner model, and therefore is not consistent with the criticality condition for string theory. Thus, compact Gepner models are necessarily at large curvature (and small volume).

Non-compact Gepner models are of a different type. In particular we can have non-compact Gepner models that contain factor conformal field theories at central charge smaller *and* larger than three. We can therefore cancel off the difference in a large level limit, if we wish. Assuming that we demand the existence of a limit in which all levels

JHEP01(2008)050

are large, we immediately conclude that such a non-compact Gepner model necessarily has three factors (since the total central charge is $c = 9 = 3 \times 3$).

There are two such classes of models (if we do not admit models with central charge precisely equal to three). One is where we have two minimal model factors and one non-compact factor, and the other has one minimal model factor and two non-compact factors. There are no other possibilities at central charge $c = 9$. (When we consider a non-compact Gepner model at central charge $c = 3.D$, with D an integer different from $D = 3$, there are other possibilities which can also easily be classified.)

The class of models with two minimal models can be parameterized by the integer levels k_1 and k_2 of the minimal models, up to an initial choice of ADE modular invariant and a possible orbifold by a symmetry group. The level l of the non-compact factor is then fixed to be $l = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$ which can be integer or fractional.

The other class of models is parameterized by two levels l_1 and l_2 for the non-compact models, and the combination $k = \frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}$ then needs to be integer, in order for the compact model at level k to exist. The levels l_i can a priori be fractional or real. As we have indicated before, we concentrate on the case where all levels are integer.

Remarks

- We note that a general class of models can be found by demanding $\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$ to be integer (with k_1 and k_2 positive integers). Suppose we isolate the greatest common divisor d of $k_1 = d\tilde{k}_1$ and $k_2 = d\tilde{k}_2$ (with $\tilde{k}_1$ and $\tilde{k}_2$ mutually prime). Then it can be shown that the level $\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$ is integer if and only if d is a divisor of $\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2$. That easily generates a large class of models of which we will only study a few.

- We note that although the local curvature would seem to become small in the large level limit, this reasoning does not take into account the GSO orbifold that still needs to be performed. In specific examples it can be checked that the GSO orbifold recreates small radii in the geometry (see e.g. [24, 16] for a detailed discussion). We can therefore generically expect the large level limit to correspond to an *orbifolded* weakly curved background.

In the following we will mainly concentrate on the set of models that have the special property of allowing for a large level limit (although our formalism does apply more widely). We study in detail the set of models with three factors and levels $(2k, 2k; k)$ or $(k; 2k, 2k)$ for the minimal model and non-compact factors respectively, and orbifolds thereof. As a warm-up exercise however, we treat the instructive example at complex dimension $D = 2$ with the compact model at level k and the non-compact model at the same level k.

5.2 The $(k; k)$ model

Let us apply the formalism for orbifolded Landau-Ginzburg models of section 4 to the case of two factors, one compact and one non-compact at equal levels k. We refer to the model as the $(k; k)$ model.

The Landau-Ginzburg model has a potential

$$W_{\mathrm{LG}} = \Phi_1^k + \Phi_2^{-k} \tag{5.1}$$

JHEP01(2008)050

α	RR	(c,c)	(a,c)
0	$(-1,-1)*$	$(0,0)*$	$(-1,+1)$
1	$(0,0)$	$(+1,+1)$	$(-2,0)*$
$2 \leq \alpha \leq k-1$	$(0,0)$	$(+1,+1)$	$(-1,+1)$

Table 1: R-charges of ground states. α labels the sector twisted by g_0^α. A star indicates that non-zero constant modes can be given to the fields.

for two chiral superfields Φ_1 and Φ_2. The orbifold group that is necessary to implement GSO is generated by

$$g_0 : (\Phi_1, \Phi_2) \to \left(e^{2\pi i/k}\Phi_1, e^{-2\pi i/k}\Phi_2 \right) . \tag{5.2}$$

We will be mostly interested in obtaining the numbers and types of deformations of the conformal field theory. In order to do this, one computes the left and right R-charges of the Ramond-Ramond ground states in all the twisted sectors using equations (4.7) and (4.8). Then, after spectral flow, one can compute the R-charges of the operators in the (c,c) and (a,c) rings. For this $c = 6$ theory, half-unit spectral flow amounts to adding ± 1 unit of R-charge to the RR states.

We recall that for the (a, c) states, asymmetric spectral flow from the RR sector adds a twist by g_0. We tabulate the R-charges of the relevant states in table 1.

We summarize the results:

- In the untwisted sector, the fields can have non-zero constant modes. The Ramond-Ramond ground state flows in the (c,c) ring to the identity operator, with charges $(0,0)$. We moreover find $k-1$ marginal (c,c) states in this sector. These arise from the monomials $\Phi_1^n \Phi_2^{-k+n}$ for $n = 0, 1, \ldots, k-2$. They can be checked to be invariant under the orbifold projection.

- Asymmetric spectral flow from the RR untwisted sector gives g_0-twisted (a,c) states. Therefore we get $k-1$ marginal (a,c) states in this sector. The fact that these states are marginal is a consequence of the special value of the central charge, $c = 6$.

- For any value of the twist $\alpha = 1, \ldots, k-1$, we have no untwisted fields in the RR sector. Namely the fields Φ_1 and Φ_2 always have twisted boundary conditions in any twisted sector. Using the formula (4.7), we find that the R-charges of the α-twisted sector Ramond ground states is $(\alpha/k - 0 - 1/2) + (-\alpha/k + 1 - 1/2) = 0$ on the left and 0 on the right. We already see a phenomenon typical to our non-compact Gepner models. The twist contribution to the Ramond sector charges can cancel between compact and non-compact factors. We are in a special case, in which the twisted R-charges of all ground states are zero.

- After flowing symmetrically to the NS-NS sector, we find a single (c,c) state with charges $(+1,+1)$ in each twisted sector. They give $k-1$ marginal (c,c) states in total in the twisted sectors.

- Asymmetric spectral flow of the twisted RR ground states leads to $k-1$ (a,c) deformations, one in each sector (except for $\alpha = 1$).

JHEP01(2008)050

Therefore we have a total of $k-1$ marginal (c,c) and $k-1$ marginal (a,c) states from the spectral flow of the untwisted RR sector ground states. In the Landau-Ginzburg model with potential $W_{\rm LG}=\Phi_1^k+\Phi_2^{-k}$ these are the only admissible localized modes. The potential term Φ_2^{-k} makes sure that the untwisted polynomials are allowed in the sense that they are normalizable at weak coupling, and have a mild behaviour at the $\Phi_2\approx 0$ end compared to the potential. These give rise to a $4(k-1)$ real-dimensional moduli space of backgrounds in string theory with sixteen supercharges. In contrast, the twisted operators are not normalizable in the Liouville deformed model.

5.3 The $(2k,2k;k)$ model

For this slightly more complicated example, we list the full set of (unprojected) (c,c) and (a,c) states and their charges, and then pick out those that are marginal (and invariant with respect to the orbifold projection). Again, we perform this exercise in the formalism of section 4 for orbifolded Landau-Ginzburg models. We consider a Landau-Ginzburg model with fields $\Phi_{1,2,3}$ and superpotential

$$W_{\rm LG}=\Phi_1^{2k}+\Phi_2^{2k}+\Phi_3^{-k}\,. \tag{5.3}$$

We perform the integer R-charge orbifold, generated by the g_0:

$$g_0:(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)\to\left(e^{2\pi i/2k}\Phi_1,e^{2\pi i/2k}\Phi_2,e^{-2\pi i/k}\Phi_3\right)\,. \tag{5.4}$$

In order to consider all the marginal operators, we will write down the relevant Poincare polynomials in each sector. First of all, in the untwisted sector we have the (unprojected, strictly normalizable) Poincare polynomial:

$$\left(\frac{1-(t\tilde{t})^{(2k-1)/2k}}{1-(t\tilde{t})^{\frac{1}{2k}}}\right)^2(t\tilde{t})^{\frac{2}{k}}\frac{1-(t\tilde{t})^{\frac{k-1}{k}}}{1-(t\tilde{t})^{\frac{1}{k}}} \tag{5.5}$$

which contains (c,c) states only. When we label the twisted sectors by $\alpha=1,2,\ldots,2k-1$, we find that for α smaller than k there are further twisted (c,c) states in the NSNS sector determined by the polynomials:

$$\left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{-1/2}(t\tilde{t})^{3/2} \tag{5.6}$$

and when α is larger than k by the polynomial

$$\left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{+1/2}(t\tilde{t})^{3/2}, \tag{5.7}$$

while at $\alpha=k$ we find the polynomial

$$(t\tilde{t})^{-1/k-1/2}(t\tilde{t})^{+3/2}(t\tilde{t})^{\frac{2}{k}}\frac{(1-(t\tilde{t}))^{\frac{k-1}{k}}}{(1-(t\tilde{t}))^{\frac{1}{k}}}. \tag{5.8}$$

where the last factor is due to the fact that Φ_3 is untwisted in this sector. The twisted (a,c) states are determined by the polynomials:

$$\left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{-2}(t\tilde{t})^0.1 \tag{5.9}$$

JHEP01(2008)050

α	RR	(c,c)	(a,c)
0	$(-3/2,-3/2)*$	$(0,0)*$	$(-1,1)$
1	$(-1/2,1/2)$	$(1,2)$	$(-3,0)*$
$2 \leq \alpha < k$	$(-1/2,1/2)$	$(1,2)$	$(-2,2)$
k	$(-1/k-1/2,-1/k-1/2)*$	$(-1/k+1,-1/k+1)*$	$(-2,2)$
$k+1$	$(1/2,-1/2)$	$(2,1)$	$(-1/k-2,-1/k+1)*$
$\alpha > k+1$	$(1/2,-1/2)$	$(2,1)$	$(-1,1)$

Table 2: R-charges of ground states. α labels the sector twisted by g_0^α. A star indicates that non-zero constant modes can be given to the fields.

when α is smaller than k and

$$\left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{-1} (t\tilde{t})^0.1 \tag{5.10}$$

when α is larger than k. When $\alpha = k$, we get

$$(t\tilde{t})^{-1/k-1/2} \left(\frac{t}{\tilde{t}}\right)^{-3/2} (t\tilde{t})^{\frac{2}{k}} \frac{(1-(t\tilde{t}))^{\frac{k-1}{k}}}{(1-(t\tilde{t}))^{\frac{1}{k}}}. \tag{5.11}$$

One can straightforwardly determine amongst these the states that are invariant under the orbifold action: they have integer R-charges.

Marginal deformations We now want to look for exactly marginal deformations in these rings. These need to have left- and right R-charge equal to 1. As for the (k; k) example, we tabulate the R-charges of the ground states and their images under spectral flow in table 2.

The table agrees with the Poincaré polynomials listed previously. We find the following marginal deformations:

- The untwisted (c,c) marginal states are straightforwardly enumerated. They are given by invariant combinations of the Φ_i acting on the vacuum: $\Phi_1^a \Phi_2^b \Phi_3^{-c} |0\rangle_{\rm NS}$, with the bounds $0 \leq a,b \leq 2k-2$ and $2 \leq c \leq k$. The marginality condition is: $a+b+2c = 2k$.
  Let's count these states. For a given c, each a in the range $0 \leq a \leq 2k-2c$ gives exactly one solution. So the total number of states is:

$$\sharp(c,c) = \sum_{c=2}^{k} (2k-2c+1) = (k-1)^2 \tag{5.12}$$

- A further search for marginal (c,c) states gives a negative result. When α is smaller than k, we have (c,c) states that survive projection, but they are not marginal since they have charges $(1,2)$. When $\alpha = k$, the charges left and right can also never be both equal to one. When α is larger than k, the charges are $(2,1)$ which also never leads to marginality.

JHEP01(2008)050

- Let us look for marginal (a,c) states in the twisted sector. We get charges $(-2,2)$ when $\alpha-1$ is smaller than k, and therefore no marginal states in these sectors. When $\alpha-1$ is larger than k, we get charges $(-1,+1)$ which are marginal. So we get $(k-1)$ (a,c) states from the twisted sectors, labeled by $\{k+2,\dots 2k\}$. There are no other marginal states in this theory.

In summary, we find $(k-1)^2$ untwisted marginal (c,c) states, and we find $k-1$ marginal (a,c) states. Once again, only those states that arise from the spectral flow of RR ground states with untwisted non-compact factors are retained in the theory deformed with the Liouville potential. So all the (c,c) states are in the spectrum of the deformed theory, but none of the (a,c) states are.

5.3.1 Orbifolds

We will now consider orbifolds of the above model. As we will discuss in detail in the next section, this exercise is useful since it generates an infinite number of mirror theories. The logic will be analogous to the Greene-Plesser analysis for the Gepner point in the quintic Calabi-Yau. Under the hypothesis that the level k is not prime, we can write the level as a product $k=k_1.k_2$ for two positive integers k_1 and k_2. Then we can perform a $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the three-factor model that we discussed above.

The Landau-Ginzburg model has superpotential

$$W_{\rm LG}=\Phi_1^{2k}+\Phi_2^{2k}+\Phi_3^{-k}.$$

The full symmetry group of $W_{\rm LG}$ is $D=\mathbb{Z}_{2k}\times\mathbb{Z}_{2k}\times\mathbb{Z}_k$, where each factor acts by phase multiplication on one of the superfields. The integer R-charge operator g_0 generates a $\mathbb{Z}_{2k}$ subgroup. It acts as:

$$g_0:(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)\to\left(e^{\frac{2i\pi}{2k}}\Phi_1,e^{\frac{2i\pi}{2k}}\Phi_2,e^{-\frac{2i\pi}{k}}\Phi_3\right). \tag{5.13}$$

Now consider the g_1 operator with the following action:

$$g_1:(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)\to\left(e^{+\frac{2i\pi k_2}{2k}}\Phi_1,e^{-\frac{2i\pi k_2}{2k}}\Phi_2,\Phi_3\right). \tag{5.14}$$

Earlier we orbifolded the Landau-Ginzburg model by the group generated by g_0. Consider the group of order $2kk_1$ generated by g_0 and g_1. We now orbifold the Landau-Ginzburg theory by that group. This is compatible with supersymmetry. Let us find marginal deformations in this orbifold model, following the Landau-Ginzburg method. We tabulate the R-charges of the ground states and their images under spectral flow in table 3.

Let us count the marginal operators:

- In the untwisted sector, we find (c,c) chiral primaries. Remember that in the model orbifolded by g_0, the $(k-1)^2$ (c,c) states are labeled by three integers a,b,c, such that $0\le a,b\le 2k-2$, $2\le c\le k$ and $a+b+2c=2k$. The g_1 projection keeps only those that have $a\equiv b\ [2k_1]$.

  Let us work at given c. We want to count the number of solutions to the equation

JHEP01(2008)050

α	β	RR
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$(-3/2, -3/2)*$
$0 < \alpha < k$	$\beta k_2 < \alpha$	$(-1/2, 1/2)$
$0 < \alpha < k$	$\alpha < \beta k_2$	$(1/2, -1/2)$
$k < \alpha$	$\beta k_2 < 2k - \alpha$	$(1/2, -1/2)$
$k < \alpha$	$2k - \alpha < \beta k_2$	$(-1/2, 1/2)$
$\alpha = 0$	$\beta \neq 0$	$(-1/2 - 1/k, -1/2 - 1/k)*$
$\alpha = k$	β	$(-1/2 - 1/k, -1/2 - 1/k)*$
$\alpha = \beta k_2$	$\beta \neq 0$	$(-1/2 + 1/2k, -1/2 + 1/2k)*$
$\alpha = 2k - \beta k_2$	$\beta \neq 0$	$(-1/2 + 1/2k, -1/2 + 1/2k)*$

Table 3: R-charges of ground states. α and β label the sector twisted by $g_0^\alpha g_1^\beta$, with $0 \leq \alpha \leq 2k-1$ and $0 \leq \beta \leq k_1 - 1$. A star indicates that non-zero constant modes can be given to the fields.

$a + b = 2k - 2c$, with $a \equiv b\ [2k_1]$. We write $b = a + 2dk_1$, with d integer. Then we express a and b in terms of c and d only: $a = k - c - dk_1$, and $b = k - c + dk_1$. The bounds on a and b imply $-k + c \leq dk_1 \leq k - c$. Thus we have one solution for each integer d between $\frac{c-k}{k_1}$ and $\frac{k-c}{k_1}$.
So the total number of (c, c) states is:

$$\sharp(c,c) = \sum_{c=2}^{k} \left(\left\lfloor \frac{k-c}{k_1} \right\rfloor - \left\lceil \frac{c-k}{k_1} \right\rceil + 1 \right) \tag{5.15}$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the largest integer smaller or equal to x, and $\lceil x \rceil$ is the smallest integer bigger or equal to x.
This sum can be evaluated explicitly:

$$\sharp(c,c) = 2 \left((k_2 - 1)(k_1 - 1) + \sum_{\check{c}=2}^{k_2} (k_2 - \check{c}) k_1 \right) + k - 1 = k_1 k_2^2 - 2k_2 + 1 \tag{5.16}$$

- In the sector twisted by $g_0^{\alpha \mp 1}\ g_1^\beta$, we find (c, a) and (a, c) states:[8]
  - If $0 \leq \beta k_2 < \alpha < k$, or $\alpha > 2k - \beta k_2$, we find one marginal (c, a) state. Let's count the number of such twisted sectors. It can be written as:

$$\sharp(c,a) = \sum_{\alpha=1}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{\alpha}{k_2} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{\alpha=k+1}^{2k-1} \left(k_1 - 1 - \left\lfloor \frac{2k-\alpha}{k_2} \right\rfloor \right) \tag{5.17}$$

    This sum can be computed explicitly as:

$$\sharp(c,a) = \left((k_2 - 1) \sum_{\hat{\alpha}=1}^{k_1} \hat{\alpha} \right) + \left((k_1 - 1)(k-1) - (k_2 - 1) \sum_{\check{\alpha}=0}^{k_1 - 1} \check{\alpha} \right) = k_2 k_1^2 - 2k_1 + 1 \tag{5.18}$$

[8] The $\alpha \mp 1$ occurs due to the shift in the labeling of the twisted sectors when flowing asymmetrically from the RR to the (c, a) or (a, c) sectors.

JHEP01(2008)050

α	RR	(c,c)	(a,c)
0	$(-3/2,-3/2)*$	$(0,0)*$	$(-2,2)$
1	$(1/2,-1/2)$	$(2,1)$	$(-3,0)*$
$2 \leq \alpha < k$	$(1/2,-1/2)$	$(2,1)$	$(-1,1)$
k	$(1/k-1/2,1/k-1/2)*$	$(1/k+1,1/k+1)*$	$(-1,1)$
$k+1$	$(-1/2,1/2)$	$(1,2)$	$(1/k-2,1/k+1)*$
$\alpha > k+1$	$(-1/2,1/2)$	$(1,2)$	$(-2,2)$

Table 4: R-charges of ground states. α labels the sector twisted by g_0^α. A star indicates that non-zero constant modes can be given to the fields.

- Symmetrically, if $0 < \alpha < \beta k_2$, or $k < \alpha < 2k - \beta k_2$, we find one (a,c) state. The same counting shows that there are also $k_2 k_1^2 - 2k_1 + 1$ such sectors.
- Eventually, if $\alpha = 0$, $\alpha = k$ or $\beta k_2 = \pm\alpha\ [2k]$, we find no marginal deformation.

In summary, we have in this orbifold model:

- $k_1 k_2^2 - 2k_2 + 1$ marginal (c,c) states.
- $k_2 k_1^2 - 2k_1 + 1$ marinal (a,c) states.

Once again, only the (c,c) states are present in the spectrum of the deformed theory.

5.4 The $(k; 2k, 2k)$ model

This example will be very similar to the previous one. For this reason our discussion will be brief and we will focus on marginal deformations. The Landau-Ginzburg model has superpotential

$$W_{\rm LG} = \Phi_1^k + \Phi_2^{-2k} + \Phi_3^{-2k}\,. \tag{5.19}$$

The integer R-charge operator g_0 acts on the superfields as:

$$g_0 : (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \left(e^{\frac{2i\pi}{k}}\Phi_1, e^{-\frac{2i\pi}{2k}}\Phi_2, e^{-\frac{2i\pi}{2k}}\Phi_3\right)\,. \tag{5.20}$$

We tabulate the R-charges of the Ramond ground states and their spectral flows in table 4.

- In the untwisted sector, we find $(k-1)^2$ (c,c) states.
- In the sector twisted by g_0^α $(0 < \alpha < 2k-1)$, we find one (a,c) state if $2 \leq \alpha \leq k$, and one (c,a) state if $k \leq \alpha \leq 2k-2$.

To summarize, this model has $(k-1)^2$ marginal (c,c) deformations and $k-1$ margial (a,c) deformations.

JHEP01(2008)050

5.4.1 Orbifolds

We repeat the analysis of section 5.3.1, and study the orbifolds of this model. The Landau-Ginzburg model has superpotential $W_{\rm LG} = \Phi_1^k + \Phi_2^{-2k} + \Phi_3^{-2k}$. The full group of symmetries of $W_{\rm LG}$ is $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_{2k} \times \mathbb{Z}_{2k}$, where each factor acts by phase multiplication on one superfield.

The integer R-charge operator g_0 generates a $\mathbb{Z}_{2k}$ subgroup and acts as follows:

$$g_0 : (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \to \left(e^{\frac{2i\pi}{k}} \Phi_1, e^{-\frac{2i\pi}{2k}} \Phi_2, e^{-\frac{2i\pi}{2k}} \Phi_3 \right) \tag{5.21}$$

Now we consider the g_1 operator with the following action:

$$g_1 : (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \to \left(\Phi_1, e^{-\frac{2i\pi k_2}{2k}} \Phi_2, e^{+\frac{2i\pi k_2}{2k}} \Phi_3 \right) \tag{5.22}$$

As in the $(2k, 2k; k)$ model, we assume that $k = k_1.k_2$, orbifold the theory by the subgroup generated by g_0 and g_1 and look for marginal deformations. The counting is very similar to the $(2k, 2k; k)$ case. We find

- $k_1 k_2^2 - 2k_2 + 1$ marginal (c, c) states.
- $k_2 k_1^2 - 2k_1 + 1$ marginal (a, c) states.

5.5 The $(3, 3, 3; 2)$ model

All our previous examples share an interesting feature. The marginal (c, c) operators are obtained by half-unit spectral flow of untwisted RR-ground states. On the other hand, the marginal (a, c) operators are obtained by half-unit asymetric spectral flow of twisted RR-ground states. A direct consequence is that in these examples, the deformed theory only has (c, c) moduli in its spectrum. This statement looks general, since untwisted ground states have equal left and right R-charges, and tend to flow to chiral operators. Similarly, twisted ground states have different left and right R-charges, and would be expected to flow to anti-chiral operators. However, we will show in the present example that there are exceptions to this rule.

We consider the Gepner model with three compact factors at level 3, and one non-compact factor at level 2. The superpotential of the corresponding Landau-Ginzburg model is

$$W = \Phi_1^3 + \Phi_2^3 + \Phi_3^3 + \Phi_4^{-2} + \Phi_5^2 \,, \tag{5.23}$$

and the model is orbifolded by the group generated by g_0:

$$g_0 : (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5) \to \left(e^{\frac{2i\pi}{3}} \Phi_1, e^{\frac{2i\pi}{3}} \Phi_2, e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Phi_3, e^{-i\pi} \Phi_4, e^{i\pi} \Phi_5 \right) . \tag{5.24}$$

The addition of Φ_5 is the simplest means to ensure that the Calabi-Yau condition is maintained while setting all the phase factors in [20] to zero. Using the by now familiar techniques, we tabulate the R-charges of the ground states in various sectors in table 5.

Notice that $\Phi_{1,2,3}$ can have zero modes in the $\alpha = 0, 3$ twisted sectors for the (c, c) ring while they can have zero modes in the $\alpha = 1, 4$ twisted sectors in the (a, c) ring. Similarly, $\Phi_{4,5}$ can have zero modes in the $\alpha = 0, 2, 4$ sectors in the (c, c) ring, while it can have zero modes in the $\alpha = 1, 3, 5$ sectors in the (a, c) ring.

JHEP01(2008)050

α	RR	(c,c)	(a,c)
0	$(-3/2,-3/2)*\diamond$	$(0,0)*\diamond$	$(-1,1)$
1	$(-1/2,1/2)$	$(1,2)$	$(-3,0)*\diamond$
2	$(-1/2,-3/2)*$	$(1,0)*$	$(-2,2)$
3	$(-1/2,-1/2)\diamond$	$(1,1)\diamond$	$(-2,0)*$
4	$(-3/2,-1/2)*$	$(0,1)*$	$(-2,1)\diamond$
5	$(1/2,-1/2)$	$(2,1)$	$(-3,1)*$

Table 5: R-charges of ground states. α labels the sector twisted by g_0^α. A star indicates that non-zero constant modes can be given to the non-compact field. A diamond indicates that non-zero constant modes can be given to the compact fields.

From this, we see that there are 2 (c,c) moduli:

$$\Phi_4^{-2}|0\rangle_{c,c}^{\alpha=0} \quad \text{and} \quad |0\rangle_{c,c}^{\alpha=3} \tag{5.25}$$

and 2 (a,c) moduli:

$$|0\rangle_{a,c}^{\alpha=0} \quad \text{and} \quad \Phi_4^{-2}|0\rangle_{a,c}^{\alpha=3}\,. \tag{5.26}$$

Notice that the (c,c) modulus in the third twisted sector occurs in a sector in which the fields that corresponds to the non-compact direction, Φ_4, is twisted. Moreover, the (a,c) modulus in the third twisted sector appears while the non-compact direction is untwisted. As a consequence, the theory deformed by the Liouville potential has only one (c,c) modulus in its spectrum, *and* it also has one (a,c) modulus. (On the other hand, the resolved theory will have one (a,c) modulus, together with one (c,c) modulus.) It can be checked by direct calculation that this is consistent with the equations analyzed in [12]. The Gepner model analysis of this model is discussed briefly in appendix A.4.

6. Mirror symmetry for non-compact Gepner models

In this section we address the question of identifying mirror pairs. In the case of compact Gepner models, when we specify the diagonal model as our starting point, we obtain the mirror model by modding out by the maximal discrete subgroup H of the diagonal group G that is consistent with space-time supersymmetry [3]. Subgroups F of H give rise to models that are mirror to models modded out by H/F.

In the following we will argue that non-compact Gepner models behave very similarly, in their undeformed guise. In particular, we shall show that modding out by the maximal subgroup consistent with supersymmetry, we exchange (c,c) and (c,a) deformations of the undeformed theory.

A corollary of this statement is that a theory deformed by a given operator, will map after mirror symmetry to the mirror theory, deformed by the mirror operator. Thus, mirror symmetry applies to the deformed, regular theories as well.

The main difference with the compact models is therefore that the mirror map includes the specification of the action of the mirror map on the deforming operator(s). Naturally,

JHEP01(2008)050

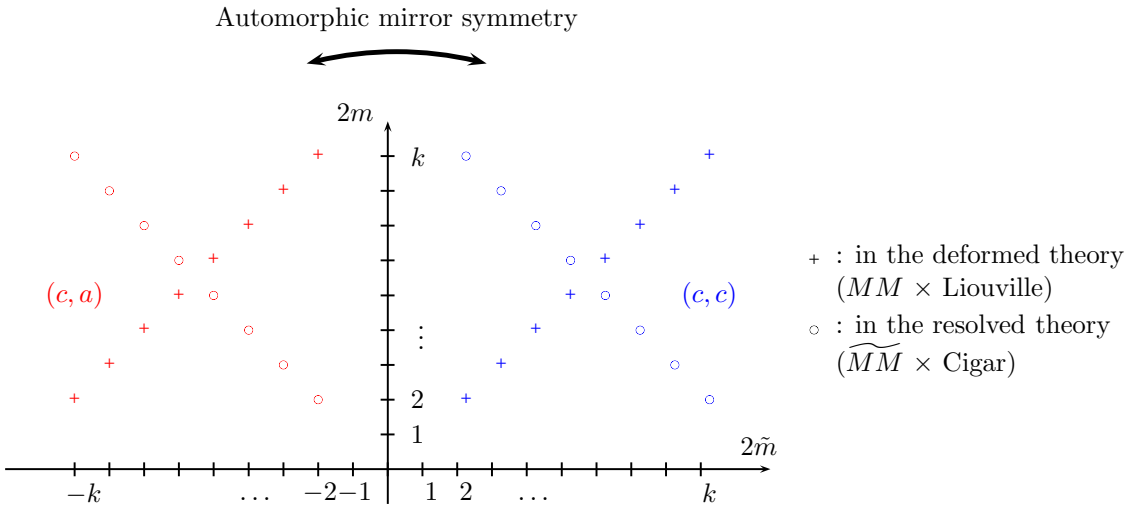


Figure 4: Chiral-chiral and chiral-anti-chiral primaries in the $(k;k)$ model. Each dot corresponds to one chiral primary, identified by its non-compact left- and right-moving quantum numbers $2m$ and $2\tilde{m}$.

the specification is that one changes the right-moving R-charge of the deforming operator to find the mirror deformation. The mirror map extends to subgroups of H as in the compact case.

We believe it is best to illustrate the above general framework in a few examples. In the following section, we will then revisit these examples and see to what extent we can interpret mirror symmetry of the conformal field theories in a geometric framework.

6.1 Sixteen supercharges

We recall that compact Gepner models at central charge $c = 6$ lie in the moduli space of $K3$ compactifications of string theory. It is well-known [41] that the mirror transform acts as an automorphism of the K3 moduli space and there are special points in the moduli space where there are fixed points. For our non-compact $(k;k)$ model at central charge $c = 6$, we see that in its singular guise, the particular $8(k-1)$ deformations that we identified are indeed self-mirror. This can be seen in figure 4. Changing the sign of the right-moving R-charge exchanges the two individual sets of $4(k-1)$ deformation parameters that we distinguished previously. We note that this property of self-mirroring holds only for the singular model.[9]

As a consequence, we can discuss mirror symmetry for the weakly coupled deformed model. When we deform the $(k;k)$ model with a Liouville potential (consistent with sixteen supercharges), we are left with $4(k-1)$ deformation parameters and a regular theory. It is mirror dual to the singular theory deformed by the winding potential (which geometrically gives rise to the cigar theory). The latter theory also has $4(k-1)$ deformation parameters,

[9]We do not advocate that the reader take the undeformed (well-defined) conformal field theory as a good description of the strongly coupled string background. We use it as a formal tool in arguing for the precise points of analogy and difference with compact Gepner models.

JHEP01(2008)050

which can be mapped individually to their mirror images (using their worldsheet R-charges for each factor of the model).

6.2 Eight supercharges

For compact Gepner models at central charge $c = 9$, mirror symmetry maps one model onto another, exchanging (c, c) and (c, a) states. We will illustrate that this is the case for non-compact Gepner models as well. First we will treat a case in which we simply mod out by the maximal group, and thus obtain the mirror theory. Then we will show that one can mod out by a subgroup of the maximal subgroup and obtain mirror pairs. We will thus provide large classes of mirror non-compact Gepner models.

6.2.1 The $(k; 2k, 2k)$ model

We note that the $(k; 2k, 2k)$ model, which is modded out only by the GSO $\mathbb{Z}_{2k}$ group (in the Landau-Ginzburg formulation) has $(k-1)^2$ marginal (c, c) deformations and $k-1$ marginal (a, c) deformations, as discussed in section 5.4. Orbifolds of this model were treated in section 5.4.1. The maximal group that we can divide out by consistent with supersymmetry is the orbifold group when $k_1 = k$ and $k_2 = 1$. Then, substituting in the formulae for the massless moduli computed in that section, we get $k-1$ marginal (c, c) deformations and $(k-1)^2$ marginal (a, c) deformations. The orbifold indeed gives rise to the mirror theory. This is exactly analogous to the Greene-Plesser discussion of mirror conformal field theories associated to compact Calabi-Yau threefolds at a Gepner point.

We want to compare these models to those in the literature. The $(k; 2k, 2k)$ model modded out by the maximal group and deformed by the sum of Liouville potentials corresponds to the non-compact Calabi-Yau studied in [42] to geometrically engineer pure SU(k) gauge theory. The orbifold group restricts all the possible (c, c) deformations to the $k-1$ moduli studied in that paper which span the Coulomb branch of the SU(k) gauge theory. We will discuss the relation between our non-compact Gepner model, the associated Landau-Ginzburg model and this geometry in more detail in the next section.

Moreover, we find that this model is mirror to a model that has no orbifold except the GSO projection, and deformed by the winding condensates in the two non-compact directions. That gives rise to the two-cigar model of [43], as argued in that reference. From our perspective, we see that the double cigar deformations disallow all $(k-1)^2$ marginal (c, c) deformations in the unorbifolded model, and leaves only $k-1$ Kähler deformations. That matches precisely the analysis in [43]. Note that this gives a confirmation of our methodology: the counting in [43] is based on the spectrum identified by considering a regularized partition function [26, 24, 22, 12]. Thus we find that the regularized partition function agrees with our intuitive arguments which find their basis in the Landau-Ginzburg model with negative power potentials (see sections 3 and 4).

As an example of the power of our simple description, we note that the model with Liouville deformations and no orbifold action is not directly related to the known models described in [42, 43]. Nevertheless, we readily identify its mirror to be the orbifolded theory with cigar deformations in both the non-compact factors.

JHEP01(2008)050

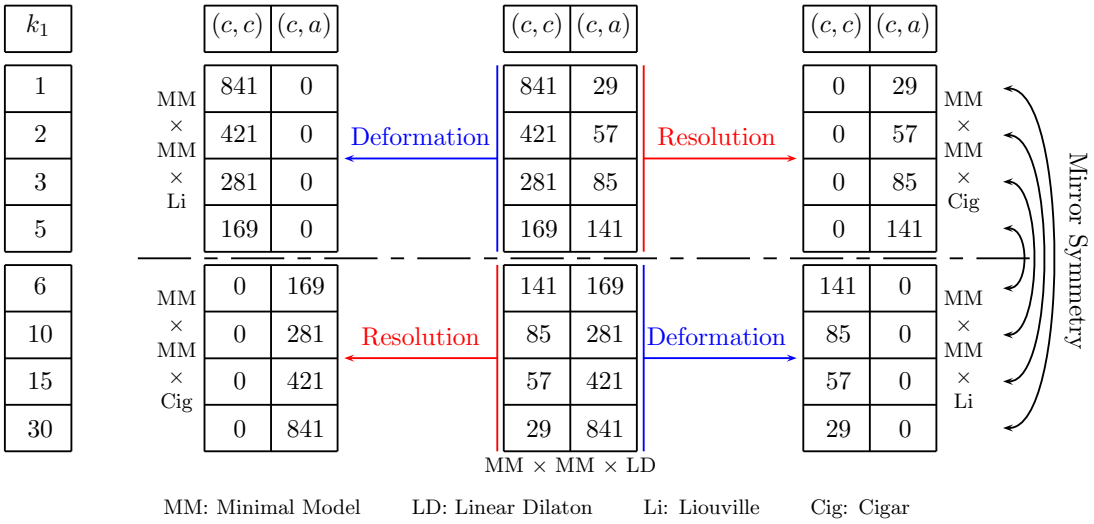


Figure 5: An explicit example: the $(2k, 2k; k)$ models and its orbifolds by $\mathbb{Z}_{k_1}$, with $k = 30$.

6.2.2 The orbifolded $(2k, 2k; k)$ models

It should be clear now that the examples in sections 5.3.1 and 5.4.1 give rise to two infinite classes of mirror non-compact Gepner models. We will illustrate this for one of the two classes since the other class behaves in almost every respect analogously.[10]

Recall that the $(2k, 2k; k)$ model allows for a maximal $\mathbb{Z}_k$ orbifold consistent with supersymmetry. When the level k is a product of two positive integers $k = k_1 k_2$, we can orbifold by a non-maximal subgroup $F = \mathbb{Z}_{k_1}$ which gives rise to a model which is mirror to a $\mathbb{Z}_{k_2}$ orbifold of the same model. Indeed, the counting of $(k_1 k_2^2 - 2k_2 + 1)$ marginal (c, c) operators and $(k_2^2 k_1 - 2k_1 + 1)$ marginal (c, a) states in the first model (the $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold) is precisely the mirror of the counting of the model with $\mathbb{Z}_{k_2}$ orbifold group, as can be seen by a exchanging the role of k_1 and k_2 (see figure 5). Thus, we have very simply but explicitly demonstrated the existence of an infinite number of mirror pairs of singular non-compact Gepner models.

We note that the model $(k; 2k, 2k)$ can be treated analogously. The proof of the generic fact that models modded out by a subgroup F of H are mirror to models modded out by H/F runs along very much the same lines as in the compact case [3], for the undeformed theory. For the deformed theory we need to remember that the mirror map will mirror the deformation as well.

7. Mirror non-compact geometries and their relation to $\mathbb{C}^n/\Gamma$ orbifolds

In this section we want to discuss some geometric realizations of the mirror map that we identified in the non-compact Gepner models above. We will see that we can identify various models with non-compact Calabi-Yau geometries, and approximate their mirror

[10] We will signal the exception in the next section.

JHEP01(2008)050

duals with abelian orbifolds of $\mathbb{C}^3$ at large levels. At finite level, we find that the results of toric geometry acquire important modifications that lift certain moduli in our models.

7.1 The $(k;k)$ model

In this model, the space-time background has sixteen supercharges. In analogy with the compact case, we identify the Calabi-Yau manifold that corresponds to the Landau-Ginzburg model by writing down the superpotential (augmented with the appropriate number of quadratic coordinates) in the non-compact weighted projective space $W\mathbb{CP}^4$:

$$w_1^k + w_2^2 + w_3^2 + cw_4^{-k} = 0. \tag{7.1}$$

The constant c (multiplied by the coefficient of the first monomial) measures the strength of the Liouville deformation. By scaling the $\mathbb{C}^*$ valued coordinate w_4 to one, we recuperate the equation:

$$z_1^k + z_2^2 + z_3^2 + c = 0, \tag{7.2}$$

which describes an ALE space which is deformed by c from its singular orbifold limit. We thus associate that geometry to the Landau-Ginzburg model, but we should keep in mind that this association is local, i.e. near the singularity. Asymptotically the spaces differ. We will see an example of the consequences of this difference later on. The matching of the $4(k-1)$ marginal deformations to the geometric moduli is well-known.

7.1.1 The mirror theory

The conformal field theory mirror to the above theory was argued to be the $(k;k)$ model with cigar deformation. In the appendix we recall, following [25, 44], that after a single T-duality, this model is mapped to a configuration of NS5-branes spread on a circle in a transverse plane. Moreover, using the explicit geometric description, it can be argued in great detail (see the appendix) that the NS5-branes spread on the circle map under that T-duality to an orbifold singularity of the type $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ at the tip of the cigar and the center of the minimal model disc. In particular, we see that the $\mathbb{Z}_k$ orbifold that arises from the GSO projection on the side of the cigar mirror conformal field theory acts *geometrically* on the cigar and minimal model coordinates close to the tip of the cigar and the center of the disc.

One should contrast this geometric action to the lack of such an action in the mirror geometry. Moreover, in this example, it becomes manifest that when the cigar/winding deformation is turned on in the singular theory, the deformation caps off the linear dilaton cylinder. As a consequence it gives rise to a (geometric) fixed point which allows for the localization of twisted sector states. That agrees with our prescription for keeping the $4(k-1)$ twisted sector states when turning on the cigar deformation.

Note that there is a one-to-one match of the marginal supersymmetric deformations of the cigar times minimal model conformal field theory to the marginal supersymmetric deformations of the $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ orbifold (with B-field on the vanishing cycles) [25].

In the strictly infinite level limit, the match is expected, since then the cigar and disc flatten out completely. The two models become identical in that limit. However, at finite

JHEP01(2008)050

level k, the match is due to the rigidity of the sixteen supercharge construction, as will become clear when we discuss models with less supersymmetry.

7.2 The $(k; 2k, 2k)$ model

Models with eight supercharges will show various new and interesting features. We will discuss two models in detail with increasing level of complexity. The model with levels $(k; 2k, 2k)$ and double Liouville deformation has a singularity that is well-described by a hypersurface in the (non-compact)weighted projective space of the form [43]:

$$w_1^k + w_2^2 + w_3^2 + w_4^{-2k} + w_5^{-2k} = 0, \tag{7.3}$$

where the two coordinates $w_{4,5}$ are $\mathbb{C}^*$ valued. The deforming monomials are in one-to-one correspondence with the $(k-1)^2$ marginal (c, c) deformations that we identified previously. After performing the $\mathbb{Z}_k$ orbifold, we find that only the complex structure deformations of the form $w_1^n(w_4 w_5)^{-k+n}$ for $n = 0, 1, \ldots, k-2$ are invariant under the orbifold action. As mentioned earlier, this is precisely the geometry discussed in [42, 11, 43].

7.2.1 The mirror theory

Let us now turn to the mirror conformal field theory and see whether we can count the number of Kähler deformations of the mirror theory using geometric means. The first observation we make is that, just as in the case with sixteen supercharges, there is an infinite level limit in which the model flattens out, up to an overall orbifold action. We refer the reader to appendix B for the basic arguments in favour of such a description. In that (strict) limit, the model, locally, near the tips of the cigars and the center of the minimal model disc becomes equivalent to the orbifold $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{2k}$. Again, we use that on this side of the mirror symmetry, the GSO projection acts geometrically and infer that the action of the $\mathbb{Z}_{2k}$ on the three factors of $\mathbb{C}^3$ is weighted as $\frac{1}{2k}(2k-1, 2k-1, 2)$. This orbifold is toric and the number of Kähler deformations of the geometry can be counted using toric geometry techniques[11] as follows.

Consider the supersymmetric orbifold $\mathbb{C}^3/\Gamma$, where the orbifold group of order N is generated by

$$\theta : (z_1, z_2, z_3) \longrightarrow (\omega^{a_1} z_1, \omega^{a_2} z_2, \omega^{a_3} z_3) \quad \text{such that} \quad \sum_i a_i = 0 \mod N\,. \tag{7.4}$$

The counting of Kähler deformations proceeds as follows.

- Consider all powers of θ and list their exponents in multiples of $2\pi i$ such that they fall in the range $1/N \times (0, N-1)$. Label them (g_1, g_2, g_3).
- The Kähler moduli are in one to one correspondence with those powers of θ that satisfy the following conditions:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1 \quad \text{with} \quad 0 \leq g_i < 1\,. \tag{7.5}$$

The power of θ tells you in which twisted sector the modulus appears.

[11] See, for instance, [45, 46] and references therein for a review of these methods.

JHEP01(2008)050

Before we proceed further let us also briefly recall how one draws the toric diagram corresponding to the non-compact orbifold. This will turn out to be useful to compare and contrast the spectrum of these non-compact toric orbifolds with the Landau-Ginzburg computation of the spectrum of moduli for the non-compact Gepner models.

Given an action of $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ on $\mathbb{C}^3$ as above, we first find basis vectors $\{D_1, D_2, D_3\}$ that satisfy

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i \, (D_i)_a = 0 \mod N \,. \tag{7.6}$$

These three basis vectors generate the toric fan. One solution is $(D_i)_3 = 1 \; \forall \; i$. One can find two other linearly independent solutions to this equation. Thus, neglecting the third coordinate of the vectors and plotting only the other two solutions to the above equation, one gets points on a plane. That this must be so follows from the Calabi-Yau condition. These points define the Newton polyhedron corresponding to the non-compact Calabi-Yau. The basis vectors D_i form a cone over the polyhedron which allows one to draw the toric diagram for the Calabi-Yau threefold in the plane. Now, for each power of $\theta^n = (g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)})$ that satisfies the above two constraints (i.e. for every Kähler deformation),we add another vector (interior or boundary point in the toric diagram) E_n given by

$$E_n = \sum_{i=1}^{3} g_i^{(n)} D_i \,. \tag{7.7}$$

Let us apply the above algorithm to compute the Kähler moduli and draw the toric diagram, for our case where $\Gamma = \mathbb{Z}_{2k}$ (i.e. $N = 2k$) and

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \left(\frac{2k-1}{2k}, \frac{2k-1}{2k}, \frac{2}{2k} \right) \,. \tag{7.8}$$

One can check that there are k Kähler deformations which arise from the twisted sectors $k, k+1, \ldots, 2k-1$. This is one more than the number of (c,c) deformations we obtained from the Landau-Ginzburg computation in section 5.4.1. Let us draw the toric diagram corresponding to this orbifold. We choose a basis of vectors

$$D_1 = (0,1,1) \quad D_2 = (0,-1,1) \quad D_3 = (k,0,1) \,. \tag{7.9}$$

We add k points, corresponding to the k Kähler deformations, which are elements in the (c,a) ring, in the twisted sectors, whose coordinates are given by

$$E_k = (0,0,1) \,, \quad E_{k+1} = (1,0,1) \,, \quad E_{k+2} = (2,0,1) \,, \quad \ldots \quad E_{2k-1} = (k-1,0,1) \,. \tag{7.10}$$

These points are plotted in figure 6. Since $E_k = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$ in our $\mathbb{Z}_{2k}$ orbifold it follows that this point will always be on the boundary of the toric diagram.

When we compare the two calculations of the moduli, we see that the difference arises in the $2k-1$st twisted sector of the GSO orbifold, since, in the conformal field theory, we did not find a marginal Kähler deformation in this twisted sector. Let us study in somewhat more detail how this difference comes about.

JHEP01(2008)050

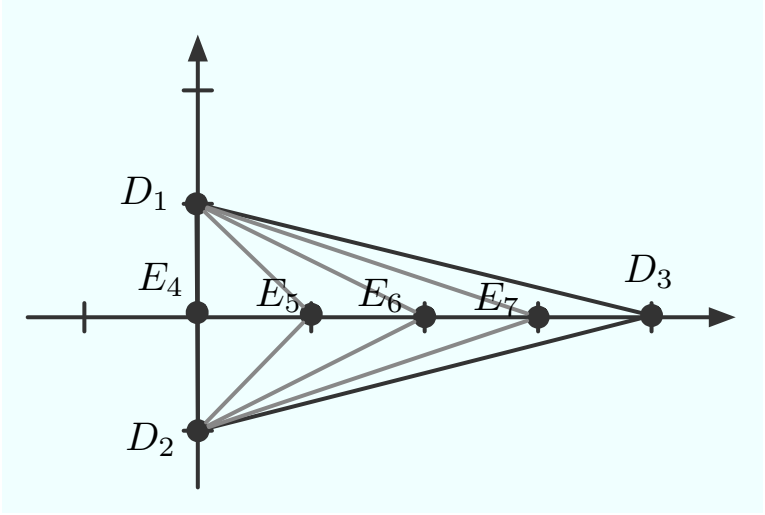


Figure 6: The toric diagram for $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{2k}$ for $k = 4$. Note hat $E_{k=4}$ corresponds to a boundary point while all other added points lie in the interior of the Newton polyhedron. We have also shown a possible triangulation of the polygon, corresponding to a particular resolution of the singularity.

It is well known that the points in the toric diagram can also be associated to exceptional divisors of the resolution of the orbifold. This is the twist-field-divisor map discussed in [45]. The topology and intersection numbers of these divisors can be obtained in a straightforward manner by using the dual toric diagram. The boundary point corresponds to non-compact divisors and have the topology $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$. Therefore, the existence of the resolution corresponding to E_k in the conformal field theory might seem surprising, given that the (strictly) normalizable deformations in the conformal field theory can be associated to compact cycles in the geometry. This can be understood as follows: the kth power of the orbifold action is trivial on one of the three complex directions in $\mathbb{C}^3$, and creates a singularity that stretches along a complex line in $\mathbb{C}^3$. The deformation is therefore akin to a Kähler deformation of a $\mathbb{C}^2/\Gamma$ orbifold, embedded in $\mathbb{C}^3$. However, it is important to note that the $\mathbb{C}$ direction that is left invariant in the kth twisted sector, is the direction that is compactified in the conformal field theory by the addition of the Landau-Ginzburg potential. So in the conformal field theory, all the exceptional divisors become compact. A second effect of the compactification is that only $k-1$ of the deformations are linearly independent. The Landau-Ginzburg counting of chiral primaries gives an easy method to understand which of the exceptional divisors are chosen as a basis in the conformal field theory.

Note that the (c, a) deformation which is the identity operator in the minimal model, sets the volume of the compact factor and simultaneously the volume of the two-cycle at the $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ singularity. The operator has charges $r = (0, 0, 0; 0; k, k)$ and $\tilde{r} = (0, 0, 0; 0; -k, -k)$ as can be seen from the Landau-Ginzburg model description, or appendix A.3.

7.2.2 The $(2k, 2k; k)$ model

The toric abelian orbifold that is related to the $(2k, 2k; k)$ model is the same as the one we discussed before. The differences with the previous model lie in the fact that we now

JHEP01(2008)050

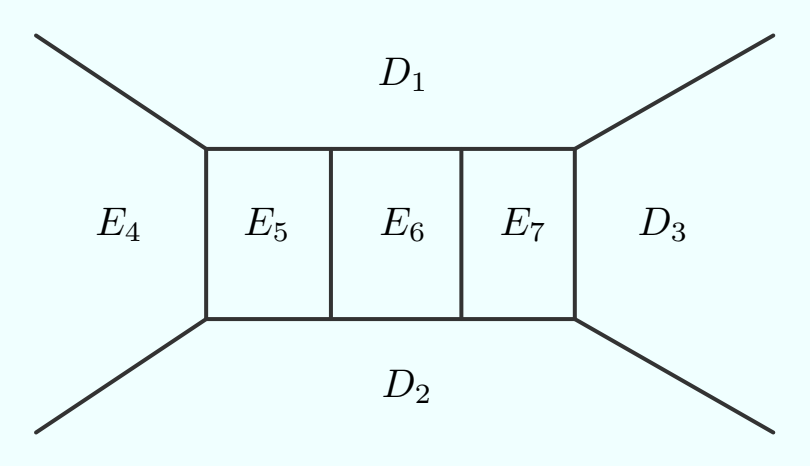


Figure 7: The dual toric diagram for $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_{2k}$ with $k = 4$. We use the same alphabet to denote the point in the toric diagram and the divisor corresponding to it in the dual toric diagram. Note that E_k (which is E_4 in our case) is non-compact while all the other exceptional divisors are compact.

compactify two coordinates, which reduces the number of Kähler moduli by two. By analyzing the spectrum of the conformal field theory as before, we find that in the toric diagram corresponding to the flat space orbifold, the twist fields associated to the divisors E_k and E_{k+1} are excluded in the conformal field theory.

However, we gain a Kähler modulus in the 0th twisted sector which sets the overall volume of the two compact factors. It is the identity operator in the minimal model factors, and the winding operator in the cigar factor. It has charges $r = (0, 0, 0; 0, 0; k)$ and $\tilde{r} = (0, 0, 0; 0, 0; -k)$ as can be seen from the Landau-Ginzburg description or from appendix A.2. This is consistent with the picture developed in [13]: the effective string coupling at the tip of the cigar sets the volume of the resolved cycles.

Note that in the previous example, we had a slight refinement of the picture developed in [13]. Namely, in the presence of the two non-compact directions, it is the modulus associated to the $\mathbb{Z}_2$ orbifold singularity at the tips of the cigars that sets the volume of the internal compact space.

7.2.3 The $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(k; 2k, 2k)$ model

In order to understand some more general features of the spectra of the conformal field theory and how they fit into the spectrum of the flat space orbifold approximation, let us study the orbifold models studied in sections 5.3.1 and 5.4.1.

The flat space approximation to the conformal field theory is given by a $\mathbb{C}^3/\Gamma$ orbifold, generated by the elements

$$g_0 = \frac{1}{2k}(2k-1, 2k-1, 2) \quad \text{and}$$
$$g_1 = \frac{1}{2k}(k_2, 2k-k_2, 0)\,. \tag{7.11}$$

Using the algorithm discussed earlier, one can easily draw the toric diagram associated to this singularity as in figure 8. The spectrum of the exact conformal field theory has

JHEP01(2008)050

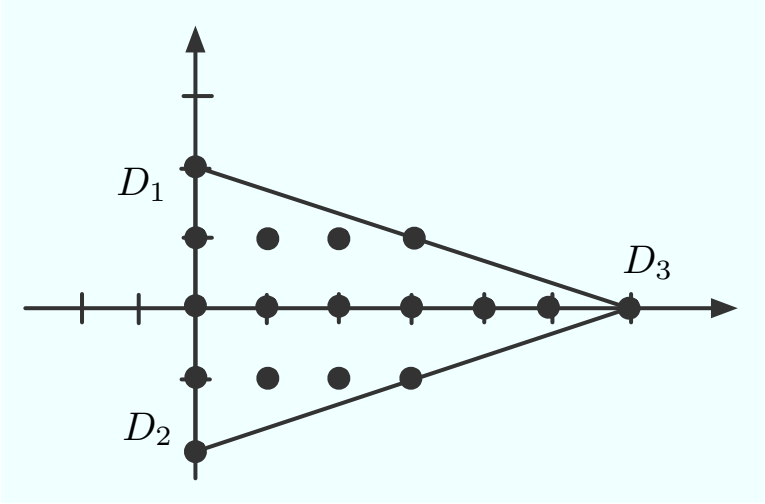


Figure 8: The toric diagram for $\mathbb{C}^3/\Gamma$ with $k = 6$ and $k_1 = 2$.

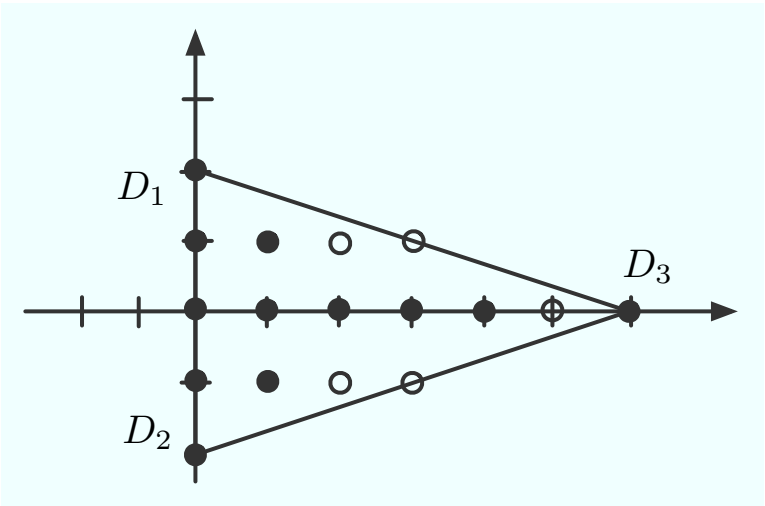


Figure 9: Spectrum of the $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(k; 2k, 2k)$ conformal field theory for $k = 6$ and $k_1 = 2$ are denoted by the filled dots. The unfilled dots show those points in the flat space approximation which are not included in the conformal field theory.

already been discussed in the main part of the paper. If we now plot the spectrum of the exact conformal field theory that corresponds to the $(k; 2k, 2k)$ model along the same lines, we get figure 9. We have shown which elements of the flat space approximation get lifted in going to the exact conformal field theory description.

7.2.4 The $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(2k, 2k; k)$ model

For this model the flat space approximation is identical to the one discussed above[12] and it is drawn in figure 8. The conformal field theory analysis is, however, different and the

[12]For the $(2k, 2k; k)$ example, the canonical group element g_0 is given by the inverse of the one we have written here but the group generated and the orbifold of $\mathbb{C}^3$ associated to it is unchanged.

JHEP01(2008)050

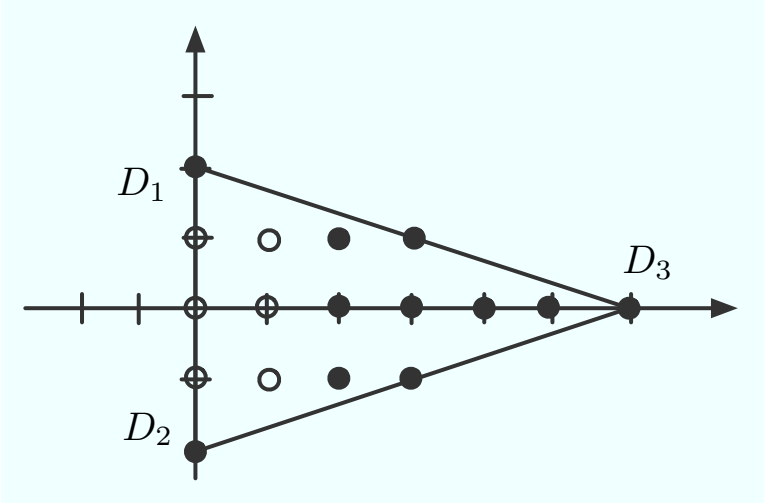


Figure 10: Spectrum of the $\mathbb{Z}_{k_1}$ orbifold of the $(2k, 2k; k)$ conformal field theory for $k = 6$ and $k_1 = 2$ are denoted by the filled dots. The unfilled dots show those points in the flat space approximation which are not included in the conformal field theory.

Kähler deformations which are kept are shown in the figure 10.

We mentioned before that in the toric diagram for the flat space orbifolds, the boundary points correspond to non-compact divisors. Nevertheless as we saw in the simpler orbifold example, in the exact conformal field theory description, some of these directions are compactified. These directions are those along which a potential of the form Φ^n, $n > 0$ is turned on and which flow into a minimal model in the IR. However, the twist fields that correspond to divisors (via the twist-field-divisor map) which extend along directions that remain non-compact should be excluded in the conformal field theory as these do not lead to normalizable deformations. That this is so can be checked in our examples.

For instance, in the $(2k, 2k; k)$ model, in figure 10, the excluded points on the boundary of the toric diagram correspond to Kähler deformations which are in the twisted sectors g_1^β and $g_0^k g_1^\beta$, with $\beta = 1, \ldots k_1 - 1$. Their respective $\mathrm{U}(1)$ charges are given by

$$\frac{1}{2k}(\beta k_2, 2k - \beta k_2, 0) \quad \text{and} \quad \frac{1}{2k}(k + \beta k_2, k - \beta k_2, 0) \quad \text{for} \quad n \in \{1, \ldots, k_1 - 1\}\,. \tag{7.12}$$

As one can see, the twist fields are uncharged under the $\mathrm{U}(1)$ that acts on the non-compact direction and the divisors that correspond to these fields are non-compact. These are subsequently excluded from the conformal field theory spectrum.

However, further work is required to understand in full generality which states of the flat space orbifold are retained in a given conformal field theory of the type studied in this article.

7.3 Relation to NS5-brane set-ups

The relation of the above orbifold approximations to NS5-brane set-ups has been discussed in the literature. These toric abelian orbifolds of $\mathbb{C}^3$ can be mapped one-to-one to NS5-brane configurations that wrap holomorphic curves. The holomorphic curves can in turn

JHEP01(2008)050

be described by dimers that are systematically reconstructed from the abelian orbifold group. In the particular case above, one obtains hexagon tilings of the plane with labelings determined by the weights of the GSO projection and further orbifolding. They can be determined by straightforwardly generalizing the examples in [47, 48].

In the sixteen supercharge case, one can show explicitly that the non-compact Gepner model captures the near-horizon doubly scaled limit of the backreacted NS5-brane geometry (as we have recalled in the appendix). In the case of eight supercharges, our non-compact Gepner models capture a near-horizon doubly scaled limit of the backreaction of NS5-branes wrapped on the holomorphic curves coded by the dimer corresponding to our non-compact Gepner model.

8. Conclusions and future directions

We have shown that the Gepner formalism for constructing modular invariant partition functions carries over to the asymptotic partition function of non-compact Gepner models. The analogy was then further developed in a discussion of the symmetry groups of the Gepner models, a classification of subgroups consistent with supersymmetry, and the discussion of how orbifolding by the maximal group can give rise to mirror models.

Secondly, we discussed the deep throat region of the non-compact Gepner models and how to obtain the chiral primary states that are normalizable at weak coupling from the conformal field theory. We then discussed Landau-Ginzburg descriptions of both compact and non-compact Gepner models and extended the existing techniques to analyze Landau-Ginzburg orbifolds such that they applied to the non-compact models under discussion. This led to an intuitive understanding of which modes become normalizable, and which modes are lifted by a momentum or winding potential. The counting of deformations becomes very tractable in the Landau-Ginzburg formalism. For completeness, we matched it onto a more intricate conformal field theory counting.

We used these results to argue that mirror symmetry can be implemented in non-compact Gepner models. When taking into account all possible deformations of the linear dilaton theory, it becomes analogous to the compact case. However, one always needs to keep in mind that the choice of deformation needs to be mirrored when discussing the deformed theories. As expected, we saw that in conformal field theory, mirror symmetry is implemented by a change in sign of the right-moving R-charge. The systematic treatment of symmetry groups allowed us to generate infinite classes of mirror pairs.

Indeed, in non-compact Gepner models, one can cancel off positive and negative contributions to the central charges of the individual factors, thus allowing for infinite classes of models that also have a small curvature limit. In such small curvature limits, we argued that one recuperates flat space with an overall orbifold action. We identified such a limit, along with the orbifold, and showed that the conformal field theory matches with a flat space orbifold in the infinite level limit. At finite level, we identified subtle differences in the spectrum of the conformal field theory and the toric abelian orbifold singularity. It would be interesting to find a general rule that tells us, a priori, which modes of the toric orbifold are retained in the conformal field theory.

JHEP01(2008)050

There are a large number of future directions that one can pursue. For instance, one can generalize the Landau-Ginzburg models to models with fractional levels in the non-compact directions. One can also apply these conformal field theory techniques to describe the spectrum of chiral primaries and mirror theories for the heterotic string on non-compact Landau-Ginzburg orbifolds.

Another direction that we had in mind while embarking upon this investigation is the following. We have an orbifold approximation to particular non-compact Gepner models. Setting fractional or regular (i.e. physical) branes at such toric orbifold singularities is one way to engineer interesting gauge theories. The toric data allows us to compute the superpotential on the brane at the orbifold singularity using techniques that are very well developed. Extending these results to determine the worldvolume superpotentials for branes in non-compact Gepner models would be extremely interesting as such results are not yet available using the exact boundary state description of D-branes in these models.

Furthermore, Seiberg duality is well-understood in the context of the toric gauge theories [49 – 51]. We would like to study whether one can understand Seiberg duality for D-branes in these almost toric spaces [52 – 54] microscopically, as in [55, 56]. The fact that we have a microscopic description of the near-horizon doubly scaled limit of these backgrounds as well as a tunable level, should give us further computational control.

Acknowledgments

We are grateful to Agostino Butti, Eleonora Dell'Aquila, Bogdan Florea, Davide Forcella, Amihay Hanany and Ruben Minasian for helpful conversations. Our work was supported in part by the EU under the contract MRTN-CT-2004-005104.

A. Non-compact Gepner model analysis

In this appendix we relate the counting of marginal deformations that we performed in a Landau-Ginzburg language to a more elaborate enumeration of states in a standard conformal field theory formalism. See [43] for a detailed discussion and further examples.

A state in the $(k_1, \ldots, k_p; l_1, \ldots, l_q)$ model (restricted to the internal conformal field theory only) is associated to the left and right charges

$$r = (s_1, \ldots, s_{p+q}; n_1, \ldots, n_p; 2m_1, \ldots, 2m_q)$$

$$\tilde{r} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{p+q}; \tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_p; 2\tilde{m}_1, \ldots, 2\tilde{m}_q)$$

as well as the compact spins $j_1, \ldots, j_p$ and the non-compact spins $j_{p+1}, \ldots, j_{p+q}$. The spins are the same on the left and on the right, since we consider diagonal partition functions. The $2\beta_0$-orbifold imposes integral R-charges, and allows the difference of left and right charges $r - \tilde{r}$ to be an even multiple of the Gepner vector β_0. The orbifolds β_i that align the periodicities of the fermions allow additional even differences between the left fermion numbers s_i and the right fermion numbers $\tilde{s}_i$.

Chiral primary operators are chiral primaries in each conformal field theory factor. From unitarity of the non-compact Gepner models (see appendix C) it follows that in each

JHEP01(2008)050

factor separately we satisfy the equation $\pm Q_i = 2h_i$ for chiral (respectively anti-chiral) primaries and similarly for the right-movers. Marginality of the deformations implies that we need to satisfy the equations

$$Q = 2\beta_0 \cdot r = \pm 1 \quad \tilde{Q} = 2\beta_0 \cdot \tilde{r} = \pm 1.$$

Solving this set of equations is straightforward but tedious because of the equivalences that exist for the minimal model quantum numbers:

$$n_i \equiv n_i + 2k_i, \quad s_i \equiv s_i + 4, \quad (j, n, s) \equiv \left(\frac{k-2}{2} - j, n-k, s+2\right)$$

The same kind of equivalences hold in the non-compact factor:

$$2m_i \equiv 2m_i + 2l_i, \quad s_i \equiv s_i + 4, \quad (j, 2m, s) \equiv \left(\frac{k+2}{2} - j, 2m-k, s+2\right)$$

That is one technical reason why the Landau-Ginzurg method is more efficient to count (anti)chiral operators. However it is possible to perform the counting in each individual example that we treated in the bulk of the paper. We do this analysis example by example.

A.1 The $(k;k)$ model

In the $(k;k)$ model, the Gepner vector is $\beta_0 = (-1,-1;1;-1)$. Looking for chiral primary operators, we find

- $k-1$ (c,c) states in the untwisted sector with charges:

$$r = (0,0;n;k-n) = \tilde{r}, \quad j_1 = n, \quad j_2 = k-n, \quad 0 \le n \le k-2$$

- $k-1$ (a,c) states in the first twisted sector:

$$r = (0,0;-n;-k+n), \quad \tilde{r} = r - 2\beta_0, \quad j_1 = n, \quad j_2 = k-n, \quad 0 \le n \le k-2$$

- 1 (c,c) state in each α-twisted sector $(1 \le \alpha \le k-1)$:

$$r = (0,0;\alpha-1;k-\alpha+1), \quad \tilde{r} = r - 2\alpha\beta_0, \quad j_1 = \alpha - 1, \quad j_2 = k-\alpha+1$$

- 1 (a,c) state in each $(\alpha+1)$-twisted sector $(1 \le \alpha \le k-1)$:

$$r = (0,0;-\alpha+1;-k+\alpha-1), \quad \tilde{r} = r - 2(\alpha+1)\beta_0, \quad j_1 = \alpha - 1, \quad j_2 = k-\alpha+1$$

For each (c,c) state we also find a (a,a) state and each (c,a) state is similarly paired with an (a,c) state. It is straightforward to match all these states with the ones we found more fluently in the bulk of the paper with the Landau-Ginzburg methods.

For each state, described by its quantum numbers r, $\tilde{r}$, j_1 and j_2, we can write the corresponding closed string vertex operator:

$$V_{r,\tilde{r}}^{j_1,j_2} = V_{n,s_1;\tilde{n},\tilde{s}_1}^{j_1} V_{2m,s_2;2\tilde{m},\tilde{s}_2}^{j_2}\,. \tag{A.1}$$

JHEP01(2008)050

Here $V^{j_1}_{n,s_1;\tilde{n},\tilde{s}_1}$ is a vertex operator of quantum numbers (j_1, n, s_1) in the minimal model, while $V^{j_2}_{2m,s_2;2\tilde{m},\tilde{s}_2}$ is a vertex operator of quantum numbers (j_2, n, s_2) in the noncompact factor. If we denote the asymptotic coordinates along the cylinder as ρ and θ and the bosonized complex fermion by H, we have the asympotic expression for the vertex operators (see e.g. [57]):

$$V^{j}_{2m,s;2\tilde{m},\tilde{s}} = \exp\left[\sqrt{\frac{2}{k}}\left((j-1)\rho + im\theta_L + i\tilde{m}\theta_R\right) + isH_L + i\tilde{s}H_R\right]. \tag{A.2}$$

A.2 The $(2k, 2k; k)$ model

Let us briefly mention the subtlety that the β_0 vector of Gepner is defined in principle in all factors of the models. The reason we can consider its action separately in the internal factors only without encountering further difficulties lies in the fact that we first of all only consider even multiples of β_0, and that moreover an even multiple of β_0 is equivalent to the same vector with only non-zero internal entries, up to the vectors β_i. That is true for all three-factor models we consider (and it is therefore also true for the two-factor model when we incorporate two further flat directions).

Having dispensed of that subtlety in comparing the two methods, we can again find the marginal deformations directly in the non-compact Gepner model:

- The $(k-1)^2$ untwisted (c,c) states have quantum numbers:

$$r = (0,0,0;a,b;c) = \tilde{r}, \quad j_1 = a, \quad j_2 = b, \quad j_3 = c$$

$$0 \le a, b \le 2k-2, \quad 2 \le c \le k, \quad a+b+2c = 2k$$

- The $k-1$ twisted (a,c) states have quantum numbers:

$$r = (0,0,0;-2k+\alpha,-2k+\alpha;k-\alpha), \quad \tilde{r} = r - 2\alpha\beta_0$$

$$j_1 = 2k-\alpha, \quad j_2 = 2k-\alpha, \quad j_3 = \alpha - k, \quad k+2 \le \alpha \le 2k\,.$$

  where α labels the twisted sector in which these states live.

The corresponding closed string vertex operators are given by

$$V^{j_1,j_2,j_3}_{r,\tilde{r}} = V^{j_1}_{n_1,s_1;\tilde{n}_1,\tilde{s}_1} V^{j_2}_{n_2,s_2;\tilde{n}_2,\tilde{s}_2} V^{j_3}_{2m,s_3;2\tilde{m},\tilde{s}_3}\,. \tag{A.3}$$

A.3 The $(k; 2k, 2k)$ model

The marginal deformations are written as follows:

- The $(k-1)^2$ untwisted (c,c) states have quantum numbers:

$$r = (0,0,0;a;b,c) = \tilde{r}, \quad j_1 = a, \quad j_2 = b, \quad j_3 = c$$

$$0 \le a \le k-2, \quad 2 \le b, c \le 2k, \quad 2a+b+c = 2k$$

JHEP01(2008)050

- The $k-1$ twisted (a,c) states have quantum numbers:

$$r = (0,0,0;-k+\alpha;-\alpha,-\alpha), \quad \tilde{r} = r - 2\alpha\beta_0$$

$$j_1 = k-\alpha, \quad j_2 = \alpha, \quad j_3 = \alpha, \quad 2 \leq \alpha \leq k$$

  where α labels the twisted sectors as before.

The corresponding closed string vertex operators are given by:

$$V^{j_1,j_2,j_3}_{r,\tilde{r}} = V^{j_1}_{n,s_1;\tilde{n},\tilde{s}_1} V^{j_2}_{2m_1,s_2;2\tilde{m}_1,\tilde{s}_2} V^{j_3}_{2m_2,s_3;2\tilde{m}_2,\tilde{s}_3} \,. \tag{A.4}$$

For the orbifold models as well, one can perform the tedious exercise, thus affirming that the Landau-Ginzburg formalism is indeed more efficient.

A.4 The $(3,3,3;2)$ model

There is an extra subtlety that we need to address for this model. From the conformal field theory point of view, it is easiest to ignore the quadratic Landau-Ginzburg model with a trivial infra-red fixed point, and to work with an even number of internal conformal field theory factors. It then follows that the vector

$$2\beta_0 = (-2,-2,-2,-2,-2;2,2,2;-2) \tag{A.5}$$

in the full light-cone conformal field theory is not equivalent modulo the vectors β_i to the vector $2\gamma_0 = (0,0,0,0,0;2,2,2;-2)$ which represents the g_0 action on the Landau-Ginzburg internal conformal field theory. Yet, it can be show that the Landau-Ginzburg model does correctly count the conformal field theory chiral-chiral and chiral-anti-chiral states. Since it is only the (c,a) state in the 3-twisted sector that is crucial to us in this example, let us show how to identify that state in the conformal field theory. It corresponds to the state with charges $r = (0,0,0,0,0;0,0;2)$ on the left, as indicated by the Landau-Ginzburg model. The right-moving charges are computed by observing that we are in the 3-twisted sector. We obtain the charge (up to equivalences in the charge lattice) $\tilde{r} = (0,0,0,0,-2;0,0;0)$ (and we remain diagonal in the non-compact quantum number $j=1$). Indeed, the state with these charges is in the spectrum of the theory.

Note that we had to adjust the precise identification of the state in the conformal field theory. This is typical of the model with an even number of factors. The final vertex operator is chiral and bosonic on the left, and anti-chiral and purely made of fermions on the right.

B. T-duality to NS5-branes revisited

In this appendix, we recall the relation of the $(\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SL}(2,R)/\mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_k$ coset model to the near-horizon geometry of a particular constellation of NS5-branes [25, 58, 13]. It is useful to revisit this exercise because we will be able to explicitly identify the region of space-time in which the NS5-branes reside with the presence of a patch isomorphic to $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ in the T-dual. This fact is used as an argument in section 7.

JHEP01(2008)050

We recall that the supergravity background generated by parallel NS5-branes stretching in the $x^{\mu=0,1,2,3,4,5}$-directions in the string frame is:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(x^i) dx^i dx_i \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 \, H(x^i) \\ H_{ijk} &= -\epsilon^l{}_{ijk} \partial_l H(x^i) \end{aligned} \tag{B.1}$$

where the harmonic function H is determined by the positions of the NS5-branes $x_a^{i=6,7,8,9}$:

$$H(x^i) = 1 + \sum_{a=1}^{k} \frac{\alpha'}{|x^i - x_a^i|^2} \tag{B.2}$$

We concentrate on k NS5-branes spread evenly on a topologically trivial circle of coordinate radius ρ_0 in the (x^6, x^7) plane (see figure 11). We recall from [58, 59] that after the coordinate change $r \geq 0$ and $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} (x^6, x^7) &= \rho_0 \cosh r \sin\theta \, (\cos\psi, \sin\psi) \\ (x^8, x^9) &= \rho_0 \sinh r \cos\theta \, (\cos\phi, \sin\phi) \end{aligned} \tag{B.3}$$

and taking a near-horizon doubly scaled limit in which $\rho_0 \to 0$ and $g_s \to 0$ and in which $\rho_0 g_s / \sqrt{\alpha'}$ (and α') is kept fixed [13], and after neglecting the localization of the NS5-branes on the circle, we obtain the NS5-brane background:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^\mu dx_\mu + \alpha' k \left[dr^2 + d\theta^2 + \frac{\tanh^2 r \; d\phi^2 + \tan^2\theta \; d\psi^2}{1 + \tan^2\theta \tanh^2 r} \right], \\ e^{2\Phi} &= \frac{g_{\rm EFF}^2}{\cosh^2 r - \sin^2\theta}, \\ B &= \frac{\alpha' k}{1 + \tan^2\theta \tanh^2 r} \; d\phi \wedge d\psi \end{aligned} \tag{B.4}$$

where the effective string coupling constant is

$$g_{\rm EFF} = \frac{\sqrt{k\alpha'} g_s}{\rho_0}. \tag{B.5}$$

We refer to [59] for the detailed calculation.

A first observation to make is that the NS5-branes are located at $r = 0$ and $\theta = \pi/2$. Moreover, the fact that the coordinate radius of the NS5-brane ring has gone to zero, has been compensated by the fact that the harmonic function and radial metric component has blown up and in such a way that the interior of the NS5-brane ring still has a proper size of order $\sqrt{k\alpha'}$. It is difficult to press together NS5-branes. That's an important aspect of the solution, since in the interior, near $r = 0$ and $\theta = 0$, we simply find a portion of flat space.

After T-duality in the angular direction ψ around which the NS5-branes have been sprinkled, we found the T-dual geometry:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha' k \left[dr^2 + \tanh^2 r \left(\frac{d\chi}{k} \right)^2 + d\theta^2 + \mathrm{cotan}^2\theta \left(\frac{d\chi}{k} - d\phi \right)^2 \right], \\ e^{2\Psi} &= \frac{g_{\rm EFF}}{k} \frac{1}{\cosh^2 r \; \sin^2\theta} \end{aligned} \tag{B.6}$$

JHEP01(2008)050

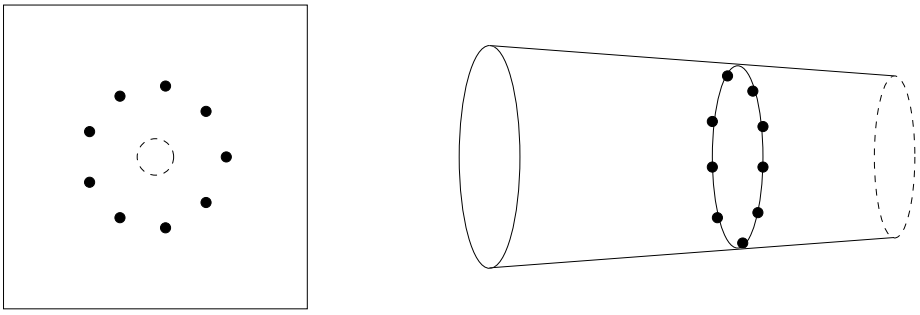


Figure 11: NS5-branes spread on a topologically trivial circle (drawn on the left). When we cut out a little disc at the center, the configuration becomes topologically equivalent to NS5-branes spread on a topologically non-trivial circle (drawn on the right).

where χ is an angle parameterizing the T-dual circle. The background is recognized as a vector $\mathbb{Z}_k$ orbifold of the product of coset conformal field theory geometries $\mathrm{SU}(2)_k/\,\mathrm{U}(1)\,\times \mathrm{SL}(2,R)_k/\,\mathrm{U}(1)$.

We want to add a couple of remarks to the analysis in [59] to which we refer the reader for further comments. In particular, we first note the singularity in both the metric and the dilaton at $\theta = 0$. The origin of this singularity is the fact that we have performed an angular T-duality with a fixed point. Around the fixed point, as we have pointed out, the original background behaves like flat space. Thus, the T-dual behavior is recognized as the same type of singularity that one obtains in T-dualizing flat space in cylindrical coordinates. Since the original theory was regular near the origin, we expect the T-dual theory to behave well at this point as well.

On the other hand, we observe that the region at $\theta = \pi/2$ and $r = 0$ where the NS5-branes resides has locally become identical to a $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ orbifold. Thus, it is the orbifold singularity of order k that codes the presence of the NS5-branes in the T-dual.

We can make the above analysis more precise by performing the following mental exercise. Cut out from the $6-7$ plane a little disc at the origin. Topologically, the space transverse to the NS5-branes has become $\mathbb{R}^3 \times S^1$, with NS5-branes spread on the S^1 (see figure 11). When we neglect the localization of the NS5-branes on the circle, the configuration is T-dual to an ALF space [25, 44], which in the particular case where the NS5-branes coincide in $\mathbb{R}^3$ develops a $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ orbifold singularity. That reasoning is another version of the one above, which uses local fiberwise T-duality. Localizing the NS5-branes in the original geometry on the circle is known to be equivalent to taking into account worldsheet instanton corrections for the ALF space [60 – 62], and this equivalence is conjectured to be valid for the NS5-branes on a topologically trivial circle as well [59].

We take away several facts from this analysis. Firstly, the $\mathbb{Z}_k$ orbifold projection acting on the $\mathrm{SU}(2)/\,\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SL}(2,R)/\,\mathrm{U}(1)$ coset has fixed points and gives rise locally to a physical $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ singularity that is T-dual to the presence of k NS5-branes. And secondly, in the geometry of the coset conformal field theory, the $\mathbb{Z}_k$ GSO projection acts geometrically on the cigar coordinates, and this in contrast to the fact that the GSO projection in Gepner models does not orbifold the coordinates of weighted projective space. We recalled the

JHEP01(2008)050

above detailed example because we will use these facts as arguments in section 7 and they are particularly manifest in the above example.

C. The consequences of unitarity

We list in this appendix a number of properties that hold in unitary modules of the $N = 2$ superconformal algebra, irrespective of the value of the central charge (and in particular also when the central charge is equal or greater than three). Our conventions for the $N = 2$ superconformal algebra coincide with those of [63, 37].

Properties The following properties hold — the proofs in the references that we give depends only on the unitarity of the representation spaces as we checked on a case-by-case basis:

1. All states in the NS-sector with conformal dimension h and R-charge Q satisfy the inequality $h \geq |Q|/2$ [37].

2. An NS-sector field of conformal dimension h and R-charge Q is a chiral primary if and only if $h = Q/2$ and anti-chiral if and only if $h = -Q/2$ [37].

3. Chiral primary fields satisfy the inequality $h \leq c/6$ [37].

4. Ramond sector ground states have R-charges Q in the range $-c/6 \leq Q \leq +c/6$ [37].

5. An NS-sector state $|\phi\rangle$ satisfies the equations $G^+_{-l-1/2}|\phi\rangle = 0 = G^-_{l+1/2}|\phi\rangle$ if and only if its conformal dimension h and R-charge Q satisfy the relation $h = (l + 1/2)Q - c(l^2 + l)/6$ [19].

6. A chiral ring exists [37].

Remarks Note that we performed a non-trivial exercise. For instance, for conformal field theories with central charge $c < 3$, it is argued in [37] that there always exist a chiral primary field in the conformal field theory with conformal dimension $h = c/6$. That is a consequence of the existence of the unit operator in the theory (combined with spectral flow). In other words, there is a normalizable $\mathrm{SL}(2, R)$ invariant ground state in these conformal field theories. That is not a consequence of unitarity only, and it does *not* hold generically for unitary $N = 2$ superconformal field theories. In fact, the situation is subtle. For instance there are examples of bulk $N = 2$ superconformal field theories with central charge $c > 3$ for which the unit operator does not exist when the conformal field theory is defined on a Riemann surface without boundary, while it does exist for instance on the boundary of a disc with particular boundary conditions (see e.g. [52, 16]). It is due to these kind of subtleties that it is useful to have a (partial) list of properties that we can indiscriminantly use for unitary $N = 2$ theories with any central charge.

JHEP01(2008)050

References

[1] S.T. Yau, *Mirror symmetry I*, *Amer. Math. Soc.*, Providence U.S.A. (1998).

[2] B. Greene and S.T. Yau, *Mirror symmetry II*, *Amer. Math. Soc.*, Providence U.S.A. (1997).

[3] B.R. Greene and M.R. Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, *Nucl. Phys.* **B 338** (1990) 15.

[4] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[5] P. Candelas, X.C. De La Ossa, P.S. Green and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, *Nucl. Phys.* **B 359** (1991) 21.

[6] P. Berglund and T. Hubsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, *Nucl. Phys.* **B 393** (1993) 377 [hep-th/9201014].

[7] V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, alg-geom/9310003.

[8] T.M. Chiang, A. Klemm, S.-T. Yau and E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 495 [hep-th/9903053].

[9] E. Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, *Nucl. Phys.* **B 403** (1993) 159 [hep-th/9301042].

[10] K. Hori and C. Vafa, *Mirror symmetry*, hep-th/0002222.

[11] K. Hori and A. Kapustin, *Worldsheet descriptions of wrapped ns five-branes*, *JHEP* **11** (2002) 038 [hep-th/0203147].

[12] T. Eguchi and Y. Sugawara, $\mathrm{SL}(2,R)/\mathrm{U}(1)$ *supercoset and elliptic genera of non-compact Calabi-Yau manifolds*, *JHEP* **05** (2004) 014 [hep-th/0403193].

[13] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *JHEP* **10** (1999) 034 [hep-th/9909110].

[14] K. Hori and A. Kapustin, *Duality of the fermionic $2D$ black hole and $N = 2$ Liouville theory as mirror symmetry*, *JHEP* **08** (2001) 045 [hep-th/0104202].

[15] D. Tong, *Mirror mirror on the wall: on two-dimensional black holes and Liouville theory*, *JHEP* **04** (2003) 031 [hep-th/0303151].

[16] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, *D-branes in $N = 2$ Liouville theory and its mirror*, *Nucl. Phys.* **B 710** (2005) 529 [hep-th/0405259].

[17] B.R. Greene, C. Vafa and N.P. Warner, *Calabi-Yau manifolds and renormalization group flows*, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 371.

[18] P. Candelas, M. Lynker and R. Schimmrigk, *Calabi-Yau manifolds in weighted P_4*, *Nucl. Phys.* **B 341** (1990) 383.

[19] C. Vafa, *String vacua and orbifoldized L-G models*, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989) 1169.

[20] K.A. Intriligator and C. Vafa, *Landau-Ginzburg orbifolds*, *Nucl. Phys.* **B 339** (1990) 95.

[21] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular invariance in superstring on Calabi-Yau n-fold with A-D-E singularity*, *Nucl. Phys.* **B 577** (2000) 3 [hep-th/0002100].

JHEP01(2008)050

[22] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *JHEP* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

[23] S. Murthy, *Notes on non-critical superstrings in various dimensions*, *JHEP* **11** (2003) 056 [hep-th/0305197].

[24] D. Israel, C. Kounnas, A. Pakman and J. Troost, *The partition function of the supersymmetric two-dimensional black hole and little string theory*, *JHEP* **06** (2004) 033 [hep-th/0403237].

[25] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*, *Nucl. Phys.* **B 463** (1996) 55 [hep-th/9511164].

[26] J.M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in AdS_3 and the* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *WZW model. II: euclidean black hole*, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2961 [hep-th/0005183].

[27] D. Gepner and Z.-a. Qiu, *Modular invariant partition functions for parafermionic field theories*, *Nucl. Phys.* **B 285** (1987) 423.

[28] B.R. Greene, *String theory on Calabi-Yau manifolds*, hep-th/9702155.

[29] J.M. Maldacena, G.W. Moore and N. Seiberg, *Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models*, *JHEP* **07** (2001) 046 [hep-th/0105038].

[30] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J.D. Lykken, $N = 2$ *superconformal symmetry and* $\mathrm{SO}(2,1)$ *current algebra*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 329.

[31] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, *CFT's from Calabi-Yau four-folds*, *Nucl. Phys.* **B 584** (2000) 69 [*Erratum ibid.* **B 608** (2001) 477] [hep-th/9906070].

[32] A.D. Shapere and C. Vafa, *BPS structure of Argyres-Douglas superconformal theories*, hep-th/9910182.

[33] E.J. Martinec, *Algebraic geometry and effective lagrangians*, *Phys. Lett.* **B 217** (1989) 431.

[34] C. Vafa and N.P. Warner, *Catastrophes and the classification of conformal theories*, *Phys. Lett.* **B 218** (1989) 51.

[35] E. Witten, *On the Landau-Ginzburg description of* $N = 2$ *minimal models*, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9** (1994) 4783 [hep-th/9304026].

[36] M. Roček and E.P. Verlinde, *Duality, quotients and currents*, *Nucl. Phys.* **B 373** (1992) 630 [hep-th/9110053].

[37] W. Lerche, C. Vafa and N.P. Warner, *Chiral rings in* $N = 2$ *superconformal theories*, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 427.

[38] D. Ghoshal and S. Mukhi, *Topological Landau-Ginzburg model of two-dimensional string theory*, *Nucl. Phys.* **B 425** (1994) 173 [hep-th/9312189].

[39] A. Hanany, Y. Oz and M. Ronen Plesser, *Topological Landau-Ginzburg formulation and integrable structure of* $2D$ *string theory*, *Nucl. Phys.* **B 425** (1994) 150 [hep-th/9401030].

[40] D. Ghoshal and C. Vafa, $C = 1$ *string as the topological theory of the conifold*, *Nucl. Phys.* **B 453** (1995) 121 [hep-th/9506122].

[41] P.S. Aspinwall and D.R. Morrison, *String theory on* $K3$ *surfaces*, hep-th/9404151.

[42] W. Lerche, *On a boundary CFT description of nonperturbative* $N = 2$ *Yang-Mills theory*, hep-th/0006100.

JHEP01(2008)050

[43] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Conifold type singularities, $N = 2$ Liouville and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{U}(1)$ theories*, *JHEP* **01** (2005) 027 [hep-th/0411041].

[44] D. Kutasov, *Orbifolds and solitons*, *Phys. Lett.* **B 383** (1996) 48 [hep-th/9512145].

[45] P.S. Aspinwall, *Resolution of orbifold singularities in string theory*, hep-th/9403123.

[46] D. Lüst, S. Reffert, E. Scheidegger and S. Stieberger, *Resolved toroidal orbifolds and their orientifolds*, hep-th/0609014.

[47] A. Hanany and K.D. Kennaway, *Dimer models and toric diagrams*, hep-th/0503149.

[48] S. Franco, A. Hanany, K.D. Kennaway, D. Vegh and B. Wecht, *Brane dimers and quiver gauge theories*, *JHEP* **01** (2006) 096 [hep-th/0504110].

[49] B. Feng, A. Hanany and Y.-H. He, *D-brane gauge theories from toric singularities and toric duality*, *Nucl. Phys.* **B 595** (2001) 165 [hep-th/0003085].

[50] C.E. Beasley and M.R. Plesser, *Toric duality is Seiberg duality*, *JHEP* **12** (2001) 001 [hep-th/0109053].

[51] F. Cachazo, B. Fiol, K.A. Intriligator, S. Katz and C. Vafa, *A geometric unification of dualities*, *Nucl. Phys.* **B 628** (2002) 3 [hep-th/0110028].

[52] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular bootstrap for boundary $N = 2$ Liouville theory*, *JHEP* **01** (2004) 025 [hep-th/0311141].

[53] S.K. Ashok, S. Murthy and J. Troost, *D-branes in non-critical superstrings and minimal super Yang-Mills in various dimensions*, *Nucl. Phys.* **B 749** (2006) 172 [hep-th/0504079].

[54] A. Fotopoulos, V. Niarchos and N. Prezas, *D-branes and SQCD in non-critical superstring theory*, *JHEP* **10** (2005) 081 [hep-th/0504010].

[55] S. Murthy and J. Troost, *D-branes in non-critical superstrings and duality in $N = 1$ gauge theories with flavor*, *JHEP* **10** (2006) 019 [hep-th/0606203].

[56] S.K. Ashok, S. Murthy and J. Troost, *D-branes in unoriented non-critical strings and duality in $\mathrm{SO}(N)$ and $\mathrm{Sp}(N)$ gauge theories*, *JHEP* **06** (2007) 047 [hep-th/0703148].

[57] K. Hosomichi, *$N = 2$ Liouville theory with boundary*, *JHEP* **12** (2006) 061 [hep-th/0408172].

[58] K. Sfetsos, *Branes for Higgs phases and exact conformal field theories*, *JHEP* **01** (1999) 015 [hep-th/9811167].

[59] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, *D-branes in little string theory*, *Nucl. Phys.* **B 722** (2005) 3 [hep-th/0502073].

[60] R. Gregory, J.A. Harvey and G.W. Moore, *Unwinding strings and T-duality of Kaluza-Klein and H-monopoles*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **1** (1997) 283 [hep-th/9708086].

[61] D. Tong, *NS5-branes, T-duality and worldsheet instantons*, *JHEP* **07** (2002) 013 [hep-th/0204186].

[62] K. Okuyama, *Linear σ-models of H and KK monopoles*, *JHEP* **08** (2005) 089 [hep-th/0508097].

[63] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: superstring theory and beyond*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1998).

JHEP01(2008)050

Chapitre 4

D-branes en espace courbe

Nous avons décrit dans le chapitre précédent des solutions exactes de la théorie des cordes. Notre objectif est désormais d'étudier les différentes D-branes qui vivent dans ces espaces-temps. Dans ce chapitre, nous allons introduire les outils utilisés au cours de ma collaboration avec Jan Troost, qui a conduit à la publication [49]. Nous présenterons également certains résultats obtenus.

4.1 Solitons gravitationnels et cordes ouvertes

Les D-branes sont des objets centraux dans la théorie des cordes. Historiquement, les premières D-branes ont été construites comme des solitons de la supergravité. Ces objets ont acquis leurs lettres de noblesse en 1995, lorsque Polchinski a montré que les D-branes sont des objets dynamiques de la théorie des cordes [50]. Leurs degrés de liberté sont des cordes ouvertes qui leur sont attachées. Les D-branes sont les sources des champs de Ramond-Ramond ; en ce sens, ce sont des objets fondamentaux. Dans le régime perturbatif de la théorie des cordes, les D-branes sont des objets très lourds par rapport à la corde fondamentale : leur tension est proportionnelle à l'inverse du couplage des cordes. L'étude des propriétés des D-branes a déjà permis d'apprendre beaucoup sur le comportement non-perturbatif de la théorie des cordes [51]. Par exemple, les degrés de liberté élémentaires de la théorie M sont des membranes, dont le volume d'univers est de dimension trois ou six.

Il est utile de représenter une D-brane comme un objet massif étendu dans l'espace-temps. Cependant, cette image géométrique est limitée. En particulier, lorsque l'on considère des espaces-temps fortement courbés, les outils géométriques perdent leur sens. On doit alors décrire les D-branes au moyen de la théorie conforme qui vit sur les cordes ouvertes qui leur sont attachées.

Considérons une solution exacte de la théorie des cordes. Nous cherchons à construire les différentes D-branes que l'on peut placer dans cet espace-temps. On peut associer à toute solution de la théorie des cordes une théorie conforme bidimensionnelle qui vit sur la feuille d'univers des cordes fermées. D'autre part, les degrés de liberté élémentaires d'une D-brane sont les cordes ouvertes qui vivent sur son volume. Sur la feuille d'univers de ces cordes ouvertes est définie la même théorie conforme que sur la feuille d'univers des cordes fermées. La différence est que la feuille d'univers d'une corde ouverte possède un bord, qui correspond aux extrémités de la corde dans l'espace-temps. Pour définir la théorie qui vit sur la feuille d'univers d'une corde ouverte, il faut donc préciser des conditions de bord. Les différentes D-branes correspondent donc aux différentes conditions de bord que l'on peut imposer sur la théorie conforme vivant sur la feuille

d'univers.

4.2 États de bord

Nous cherchons à décrire les D-branes dans le langage des théories conformes bidimensionnelles. Le concept pertinent est celui d'état de bord, que nous allons introduire dans ce paragraphe. Pour plus de détails, on pourra consulter les références [52] et [53].

Considérons une solution exacte de la théorie des cordes, décrite par une théorie conforme bidimensionnelle. Cette théorie réalise une algèbre chirale et une algèbre anti-chirale. Au minimum, ce sont deux algèbres de Virasoro. Mais elles peuvent être étendues en algèbres plus vastes. On appellera l'algèbre chirale maximale "algèbre $\mathscr{W}$". Dans le cadre de la théorie des supercordes, on s'attend à ce que l'algèbre de Virasoro soit étendue à l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Les opérateurs de la théorie sont organisés en représentations de l'algèbre $\mathscr{W}$. À chaque représentation i de l'algèbre $\mathscr{W}$, on associe un caractère χ_i :

$$\chi_i(q) = Tr_i\left(q^{L_0 - c/24}\right) \tag{4.1}$$

Dans la formule précédente, la trace s'effectue sur tous les états de la représentation i. Quand la théorie est définie sur un tore, on relie le paramètre q à la structure complexe τ du tore : $q = e^{2\pi i\tau}$. Cela a l'avantage de rendre les caractères manifestement invariants sous l'action de la transformation T du groupe modulaire du tore. Les caractères se transforment de la façon suivante sous l'action de la transformation S :

$$S: \quad \chi_i(q) \to \chi_i(\tilde{q}) = \sum_j S_{ij}\chi_j(q) \tag{4.2}$$

où $\tilde{q} = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}$. L'équation précédente définit la matrice S_{ij} de la théorie conforme.

Formule de Verlinde

On suppose dans la suite de ce paragraphe que la théorie conforme est rationnelle. Cela implique que le nombre de représentations de l'algèbre $\mathscr{W}$ qui apparaissent dans la théorie est fini. On peut alors démontrer la formule de Verlinde [54] :

$$\sum_l \frac{S_{il}S_{jl}S^*_{kl}}{S_{0l}} = N^k_{ij} \tag{4.3}$$

Les nombres N^k_{ij} sont des entiers positifs appelés règles de fusions : N^k_{ij} donne le nombre de couplages indépendants entre les représentations i, j et k dans la théorie conforme. Nous allons voir que la formule de Verlinde joue un rôle central dans la construction des D-branes.

Conditions de bord

Considérons maintenant la question des conditions de bord que l'on peut imposer sur une théorie conforme. De façon générique, les conditions de bord vont relier les secteurs holomorphe et anti-holomorphe de la théorie. On suppose que la théorie est définie sur un espace dont la topologie est celle du disque. Par une transformation conforme, on peut toujours envoyer un tel espace vers

le demi-plan supérieur. Nous voulons que les conditions de bord préservent l'invariance conforme. Cela implique que le tenseur énergie-impulsion vérifie :

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}) \mid_{z=\bar{z}} \tag{4.4}$$

Nous voulons également que l'algèbre de symétrie $\mathscr{W}$ soit préservée. Cette condition est satisfaite s'il existe un automorphisme local Ω de l'algèbre $\mathscr{W}$ tel que, pour tout générateur $\mathscr{W}$ de l'algèbre $\mathscr{W}$:

$$w(z) = \Omega\bar{w}(\bar{z}) \mid_{z=\bar{z}} \tag{4.5}$$

États d'Ishibashi

Introduisons maintenant le concept d'état de bord. L'idée est de définir un état formel de la théorie conforme qui code le choix des conditions de bord. On note cet état $|\alpha\rangle$, où l'indice α désigne les conditions de bord. Cet état doit satisfaire la propriété suivante :

$$\langle 0|\phi_1(z_1)...\phi_p(z_p)|0\rangle_\alpha = \langle\alpha|\phi_1(z_1)...\phi_p(z_p)|0\rangle \tag{4.6}$$

Le côté gauche de l'équation précédente désigne une fonction de corrélation calculée sur le disque, avec les conditions de bord α. Le côté droit désigne une fonction de corrélation calculée sur la *sphère*, mais avec un état asymptotique non-trivial : l'état de bord $|\alpha\rangle$.

Les états de bord doivent satisfaire les contraintes (4.4) et (4.5). Il existe une solution à ces contraintes pour chaque représentation de l'algèbre $\mathscr{W}$. Ces solutions sont connues sous le nom d'états d'Ishibashi [55]. L'état d'Ishibashi associé à la représentation i est noté $|i\rangle\rangle$. Ces états satisfont :

$$\langle\langle j|q^{L_0-c/24}|i\rangle\rangle = \delta_{i,j}\chi_i(q) \tag{4.7}$$

Les états d'Ishibashi forment une base de l'espace des états de bord.

La construction de Cardy

Les D-branes de la théorie des cordes sont définies par les conditions de bord que l'on impose sur la théorie conforme vivant sur la feuille d'univers. On peut donc décrire une D-brane par un état de bord, qui est une combinaison linéaire d'états d'Ishibashi :

$$|D\rangle = \sum_i A_i|i\rangle\rangle \tag{4.8}$$

Le choix des coefficients A_i n'est pas libre. La contrainte principale est connue sous le nom de "condition de Cardy". Pour comprendre cette condition, considérons la fonction de partition de la théorie conforme sur un anneau. On choisit les conditions aux bords D_1 et D_2 pour les deux bords de l'anneau. La fonction de partition est alors :

$$\langle D_1|q^{L_0-c/24}|D_2\rangle = \sum_l {A_l^{D_1}}^* A_l^{D_2}\chi_l(q) \tag{4.9}$$

Le langage des états de bords est un langage de cordes fermées : la quantité précédente décrit l'amplitude de diffusion d'une corde fermée entre les D-branes D_1 et D_2, au niveau des arbres.

Pour passer à un langage de cordes ouvertes, on effectue une transformation modulaire S. On obtient alors la fonction de partition à une boucle de la théorie des cordes ouvertes suspendues entre les branes D_1 et D_2 :

$$Z_{D_1-D_2}(\tilde{q}) = \sum_{i,l} {A_l^{D_1}}^* A_l^{D_2} S_{li}\, \chi_i(\tilde{q}) \tag{4.10}$$

Cette fonction de partition n'a de sens que si les coefficients qui multiplient les caractères sont des entiers positifs : c'est la condition de Cardy. Cette condition est difficile à satisfaire en toute généralité. Heureusement, la formule de Verlinde (4.3) permet de construire des D-branes de façon systématique dans les théories conformes rationnelles. En effet, cette formule nous dit comment produire des nombres entiers à partir des coefficients (complexes) de la matrice S. Il apparaît donc que l'on peut construire au moins une D-brane D_i par représentation i de l'algèbre chirale $\mathscr{W}$. L'état de bord pour cette D-brane est [56] :

$$|D_i\rangle = \sum_j \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{0j}}} |j\rangle\rangle \tag{4.11}$$

Les coefficients qui apparaissent dans la décomposition de l'état de bord sur la base d'Ishibashi ont une interprétation physique intéressante. Ils décrivent les couplages entre la D-brane et les états de cordes fermées. Plus précisement, ces coefficients donnent les fonctions à un point pour les états de cordes fermées. Ils codent donc la réaction de la D-brane sur l'espace-temps dans lequel elle est immergée.

4.3 D-branes dans des solutions critiques de la théorie des cordes

L'image géométrique des D-branes offre une bonne intuition pour travailler avec ces objets. Cependant, il est parfois préférable d'utiliser une description microscopique exacte des D-branes. Cette description est donnée par les états de bord que nous avons introduits précédemment. Nous allons maintenant voir comment construire explicitement des D-branes dans certaines solutions de la théorie des cordes.

L'algèbre chirale des théories conformes que nous considérons contient l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Cette algèbre possède un automorphisme extérieur ω qui la laisse invariante. Il agit sur les générateurs ainsi : $T \to T$, $J \to -J$, $G^{\pm} \to G^{\mp}$. Nous avons donc deux choix de conditions de bord (4.5) qui préservent l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Pour relier les générateurs holomorphes et anti-holomorphes sur le bord, nous pouvons utiliser soit l'automorphisme ω (conditions de type A), soit l'opérateur identité (conditions de type B).

D-branes dans l'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski est décrit par un ensemble de bosons et de fermions libres. Cette théorie conforme n'est pas rationnelle, mais elle est suffisamment simple pour qu'on puisse utiliser sans complication les outils adaptés aux théories conformes rationnelles.

L'analyse des solutions des équations de supergravité indique que les D-branes sont des hyperplans de dimensions arbitraires. Voyons comment cette image est codée dans les données de la théorie superconforme.

On choisit tout d'abord des conditions de bord de type A ou B pour l'algèbre superconforme $\mathcal{N}=2$. Ce choix fixe les conditions de bord pour les fermions, et détermine quelles transformations de supersymétrie sont préservées par cette D-brane. Dans cette théorie conforme, l'algèbre chirale est plus grande que l'algèbre superconforme $\mathcal{N}=2$, car chaque boson réel génère une algèbre chirale et une algèbre anti-chirale $u(1)$. Les générateurs de ces algèbres sont simplement les dérivées holomorphe et anti-holomorphe du champ bosonique : $j=\partial X$ et $\bar{j}=\bar{\partial}X$. Nous devons choisir des conditions de bord pour ces courants $U(1)$. Ce choix est indépendant du choix précédent. Nous avons deux possibilités : $\bar{j}=\pm j|_{bord}$. Le choix du signe positif implémente des conditions de Neumann sur les extrémités de la corde ouverte, alors que le choix opposé implémente des conditions de Dirichlet. Dans le premier cas, on obtient une D-brane étendue, alors qu'elle est localisée dans le second cas. Ce choix est libre pour chaque dimension de l'espace-temps. On peut donc construire des D-branes de dimension quelconque.

On s'attend ensuite à obtenir une D-brane différente par représentation de l'algèbre chirale. Dans le cas présent, les représentations de l'algèbre $u(1)$ sont paramétrées par un nombre réel. Ce nombre est simplement interprété comme la position de la D-brane dans l'espace-temps si la D-brane est localisée, et comme une ligne de Wilson dans le cas contraire.

D-branes dans les modèles de Gepner

Considérons maintenant le cas plus élaboré des modèles de Gepner. On s'attend à ce que les D-branes sur une variété Calabi-Yau soient associées aux cycles de la variété. Cependant les modèles de Gepner décrivent des variétes Calabi-Yau dont l'échelle caractéristique est la longueur de la corde fondamentale, les outils géométriques ne sont donc pas fiables.

Un modèle de Gepner est défini par un produit de théories conformes. Pour construire un état de bord dans cette théorie produit, il suffit de multiplier des états de bord provenant des différents facteurs. Les états de bord pour les facteurs décrivant l'espace-temps de Minkowski ont déjà été introduits. Les états de bord pour les modèles minimaux $\mathcal{N}=2$ ont étés décrits par exemple dans [57]. Ils peuvent être de type A ou B, et sont paramétrés par trois nombres quantiques (j,n,s). Ces nombres se rapportent à une représentation de l'algèbre chirale réalisée dans les modèles minimaux $\mathcal{N}=2$.

La subtilité principale dans la construction des états de bord du modèle de Gepner vient de la projection GSO. La façon d'implémenter cette procédure sur les états de bord a été décrite dans [58]. L'essentiel est de supprimer les produits d'états d'Ishibashi correspondant à des états de cordes fermées que la projection GSO élimine du spectre. Après cette projection, nous n'avons plus de garantie que l'état de bord tronqué satisfasse encore la condition de Cardy. On peut cependant vérifier que, moyennant une renormalisation globale, les états de bord obtenus sont cohérents.

Il existe aussi des D-branes que l'on ne peut pas factoriser en états de bord dans les différents facteurs de la théorie conforme. On peut les obtenir par des méthodes dites de factorisation de matrices (voir par exemple [59]).

D-branes dans les modèles de Gepner non-compacts

La construction de Cardy est très puissante pour obtenir les D-branes dans les théories conformes rationnelles. Malheureusement, les théories conformes avec un espace cible non compact sont non-rationnelles. L'application de la construction de Cardy à ces théories n'est pas immédiat. En effet, il est difficile de construire un équivalent de la formule de Verlinde dans ces théories (voir [60]).

On peut cependant s'inspirer de la construction de Cardy pour obtenir les D-branes d'une théorie conforme non-rationnelle. L'idée est essentiellement de suivre la procédure malgré tout, et de vérifier ensuite au cas par cas que les états de bord obtenus satisfont la condition de Cardy. Cette approche a été utilisée avec succès pour construire des états de bord cohérents dans la théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$ et dans le cigare [61] [62].

Parmi les différentes représentations de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$ avec charge centrale supérieure à trois, seules les représentations continues et la représentation identité conduisent à des états de bord convenables. Les D-branes associées aux représentations continues s'étendent dans la direction non-compacte de l'espace cible. Au contraire, les D-branes associées à la représentation identité sont compactes.

On peut construire [44] [49] des D-branes dans les modèles de Gepner non-compacts en généralisant la méthode utilisée dans le cas compact [58]. En particulier, la procédure de projection GSO pour les états de bord s'effectue de la même façon. Les deux types de D-branes dans la théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$ donnent naissance à des familles de D-branes dans la solution critique de la théories des cordes. On trouve des D-branes étendues dans la (ou les) direction(s) où le dilaton varie, qui proviennent des états de bord associés aux représentations continues. D'autres D-branes sont localisées dans la région de l'espace-temps où le dilaton est maximal. Ce sont les D-branes issues de l'état de bord associé à la représentation identité.

D-branes au voisinage de branes NS5

Les modèles de Gepner non-compacts apparaissent génériquement au voisinage de configurations de branes NS5. Par exemple, le modèle de Gepner défini par un modèle minimal $\mathscr{N} = 2$ et un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ décrit l'espace-temps au voisinage de branes NS5 parallèles disposées sur un cercle. Les états de bord du modèle de Gepner non-compact décrivent donc des D-branes au voisinage de ces branes NS5.

La dualité S de la théorie des cordes implique qu'une D-brane peut se terminer sur une brane NS5, de la même façon qu'une corde ouverte se termine sur une D-brane. Les D-branes compactes du modèle de Gepner non-compact correspondent à des D-branes suspendues entre deux branes NS5. À l'inverse, les D-branes non-compactes peuvent se déplacer librement dans l'espace-temps. Lorsqu'une D-brane non-compacte rencontre une brane NS5, elle se divise en deux parties. Lorsqu'elle rencontre deux branes NS5, elle se divise en trois parties. La partie centrale compacte devient alors une brane compacte. On peut décrire ces phénomènes de façon exacte grâce aux états de bord du modèle de Gepner non-compact [49]. Au niveau de la théorie conforme, la division d'une D-brane en plusieurs morceaux se traduit par une relation d'addition entre caractères associés à des représentations différentes de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$.

4.4 D-branes et théories de jauge

Les théories de cordes ouvertes qui vivent sur le volume des D-branes sont intéressantes d'un point de vue phénoménologique. On peut en effet construire des configurations de D-branes sur lesquelles vivent des théories qui, à basse énergie, ressemblent au Modèle Standard (voir par exemple [63]). Cette observation conduit à une nouvelle façon d'envisager l'immersion de notre univers dans la théorie des cordes.

D'autre part, les D-branes jouent un rôle central dans la correspondance AdS/CFT. C'est l'étude de la théorie des cordes ouvertes vivant sur les D-branes qui a révélé cette remarquable

dualité.

Dans ce paragraphe, nous allons discuter certains aspects des théories de cordes ouvertes qui vivent sur le volume des D-branes. Comme pour les cordes fermées, le spectre est génériquement composé d'états de masse nulle, et d'une tour infinie d'états de plus en plus massifs. Les états de masse nulle comprennent généralement au moins un multiplet vectoriel : à basse énergie, les théories de cordes ouvertes se réduisent à des théories de jauge.

Configurations de Hanany-Witten

Les D-branes peuvent finir sur des branes NS5. Les configurations de D-branes suspendues entre des branes NS5 permettent de construire et d'étudier un grand nombre de théories de jauge supersymétriques. Ces configurations sont appelées configurations de Hanany-Witten [64]. Pour plus de détails concernant ces constructions, on pourra consulter la référence [65].

Dans ces modèles, on traite les branes NS5 comme des conditions de bord pour les D-branes. En particulier, on ignore la réaction des branes NS5 sur l'espace-temps. Cette approximation est justifiée lorsque la distance séparant deux branes NS5 est grande devant l'échelle de la corde.

Plaçons-nous par exemple dans la théorie de type IIA. On considère des D4-branes suspendues entre deux branes NS5 parallèles. La théorie des cordes ouvertes vivant sur les D4-branes se réduit à basse énergie à une théorie de jauge quadri-dimensionnelle avec $N = 2$ supersymétries. Le groupe de jauge est $SU(N)$. Le nombre de couleurs N est simplement le nombre de D4-branes. On peut introduire des saveurs dans cette théorie de jauge en ajoutant des D4-branes semi-infinies, qui se terminent sur l'une des branes NS5. Chacune de ces branes ajoute une saveur à la théorie.

Pour obtenir des théories de jauge avec $N = 1$ supersymétrie en quatre dimensions, on peut généraliser ces constructions en utilisant des branes NS5 perpendiculaires [66]. Le reste de la construction est ensuite semblable.

Ces configurations codent de façon très simple un grand nombre d'informations non-triviales sur la théorie de jauge. Pour ne citer que quelques exemples, l'espace des modules peut être étudié en déplaçant les D-branes le long des branes NS5. La dualité de Seiberg [67] pour les théories de jauge $N = 1$ découle d'un réarrangement des branes NS5. La solution de Seiberg et Witten [68] pour les théories de jauge $N = 2$ se comprend également de façon géométrique dans ces constructions.

Théories de jauge dans les modèles de Gepner non-compacts

À partir des états de bord, on obtient aisément le spectre des théories de cordes ouvertes vivant sur le volume des D-branes dans les modèles de Gepner non-compacts. On trouve ainsi des multiplets vectoriels de masse nulle sur les D-branes compactes. On peut donc construire des théories de jauge dans ces modèles. En raison du gradient du dilaton dans l'espace-temps, les excitations des cordes ouvertes vivant sur des D-branes non-compactes sont en général massives. Les cordes ouvertes suspendues entre une D-brane compacte et une D-brane non-compacte donnent des saveurs à la théorie de jauge vivant sur les D-branes compactes. La masse de ces saveurs est donnée par un paramètre ajustable définissant la D-brane non-compacte. En outre, il existe des D-branes non-compactes, construites à partir de représentations continues *complémentaires* de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$, sur lesquelles on trouve des modes de masse nulle. Ces excitations donnent naissance à des bosons de jauge, et des saveurs de masse nulle. Les différentes D-branes que nous

avons construites permettent de réaliser des théories de jauge avec $N = 1$ ou $N = 2$ supersymétries en quatre dimensions, et des saveurs de masses quelconques.

Comme les modèles de Gepner non-compacts décrivent des configurations de branes NS5, on pourrait s'attendre à ce que les théories de jauge que l'on vient de construire soient les théories décrites par les constructions de Hanany-Witten. Cependant, on peut montrer que ce n'est pas le cas. Prenons par exemple le modèle de Gepner non-compact défini par un modèle minimal $\mathscr{N} = 2$ et un superquotient $Sl(2,\mathbb{R})/U(1)$ à niveau deux. Ce modèle décrit l'espace-temps au voisinage de deux branes NS5, proches l'une de l'autre. On peut construire dans ce modèle une D-brane infinie, qui intersecte les deux branes NS5. On trouve que la théorie de cordes ouvertes devient à basse énergie une théorie de jauge $N = 2$ avec un multiplet vectoriel et un hypermultiplet. La même image, dans une construction de Hanany-Witten, produit une théorie de jauge $N = 2$ avec un multiplet vectoriel et deux hypermultiplets.

La raison de cette différence est la suivante. Dans les modèles de Gepner non-compacts, les branes NS5 sont très proches l'une de l'autre, et leur réaction sur l'espace-temps est capitale. À l'inverse, les constructions de Hanany-Witten se placent dans un régime où les branes NS5 sont éloignées, et leur réaction est négligeable.

En fait, les modèles de Gepner non-compacts permettent d'immerger des nouvelles théories de jauge dans la théorie des cordes. Par exemple, on peut facilement construire une théorie de jauge $N = 2$ qui réalise un mécanisme de Higgs au cours duquel un multiplet de jauge se combine avec un hypermultiplet pour donner un multiplet vectoriel massif [72]. Ce mécanisme n'avait encore jamais été réalisé dans la théorie des cordes.

Notons pour finir que les modèles de Gepner non-compacts offrent une description microscopique et complète des théories de jauge. Les outils développés dans le cadre des théories conformes bidimensionnelles peuvent donc être utilisés pour étudier ces théories de jauge. Des résultats intéressants ont déja été obtenus grâce à cette approche. Par exemple, la dualité de Seiberg pour une théorie de jauge $N = 1$ peut se comprendre comme une monodromie dans l'espace des modules pour un paramètre d'un état de bord [69].

Vers une description holographique de la chromodynamique quantique ?

La correspondance AdS/CFT permet d'étudier des théories de jauge à couplage fort, grâce à une description duale en terme d'une théorie de gravition quantique faiblement couplée. Il serait très intéressant de construire une description holographique duale des théories de jauge du Modèle Standard. Le dictionnaire AdS/CFT stipule que le rayon de courbure de la solution gravitationnelle est donné par le produit entre le couplage de corde et le nombre de couleurs de la théorie de jauge. La description holographique faiblement couplée d'une théorie de jauge avec un petit nombre de couleurs nécessite donc un espace-temps fortement courbé. L'approximation de supergravité n'est pas fiable dans ce contexte. Pour obtenir une description duale d'une théorie de jauge avec un petit nombre de couleurs, il faut utiliser la définition de la théorie des cordes en termes de théories conformes bidimensionnelles.

Dans cette optique, les modèles de Gepner non-compacts offrent un point de départ prometteur. En effet, ils sont définis par une théorie conforme bidimensionnelle. Ils possèdent également des D-branes sur lesquelles vivent des théories de jauge intéressantes. Pour obtenir une description holographique de ces théories, il est nécessaire de comprendre la réaction des D-branes sur l'espace-temps. Dans le langage de la théorie conforme, cette réaction correspond à une déformation de la théorie provoquant un flot du groupe de renormalisation vers un nouveau point fixe

conforme. Un premier pas dans cette direction a été effectué dans [70], où les auteurs ont calculé la réaction linéaire des D-branes compactes sur le cigare.

Excitations localisées des cordes ouvertes

Lors de notre étude des modèles de Gepner non-compacts, nous avons rencontré des excitations localisées et de masse nulle. L'étude des D-branes dans les modèles de Gepner non-compacts enrichit notre compréhension des propriétés de ces modes. En effet, il existe des D-branes non-compactes sur lesquelles on trouve des excitations de cordes ouvertes localisées, en plus du continuum de modes massifs non-localisés. Le formalisme des états de bord nous permet d'avoir un grand contrôle sur ces états localisés. On peut utiliser en particulier des méthodes développées dans le cadre de la théorie de Liouville bosonique avec bord [71]. Ainsi, on peut suivre l'apparition de ces modes, et l'évolution de leur masse, lorsque l'on fait varier les paramètres qui définissent la D-brane. La masse des modes localisés est typiquement inférieure à celle des modes non-localisés. Sur certaines D-branes, on trouve même des modes localisés de masse nulle.

Dans l'espace-temps, l'image est la suivante : les modes localisés des cordes fermées vivent au fond de la gorge créée par la réaction des branes NS5 sur l'espace-temps. La D-brane non-compacte du modèle de Gepner non-compact descend dans la gorge. Un paramètre continu contrôle la distance entre la D-brane et le fond de la gorge. Lorsque l'on réduit cette distance, on observe l'apparition des modes localisés des cordes ouvertes. Ces modes vivent sur la partie de la D-brane située au fond de la gorge.

Deuxième publication : “Bound states in N=2 Liouville theory with boundary and Deep throat D-branes.”

Published by Institute of Physics Publishing for SISSA

Received: *June 10, 2008*
Accepted: *July 15, 2008*
Published: *July 29, 2008*

Bound states in $N = 2$ Liouville theory with boundary and deep throat D-branes

Raphael Benichou and Jan Troost

Laboratoire de Physique Théorique[*]*, Ecole Normale Supérieure,*
24 rue Lhomond, F–75231 Paris Cedex 05, France
E-mail: benichou@lpt.ens.fr, troost@lpt.ens.fr

Abstract: We exhibit bound states in the spectrum of non-compact D-branes in $N = 2$ Liouville conformal field theory. We interpret these states in the study of D-branes in the near-horizon limit of Neveu-Schwarz five-branes spread on a topologically trivial circle. We match semi-classical di-electric and repulsion effects with exact conformal field theory results and describe the fate of D-branes hitting NS5-branes. We also show that the bound states can give rise to massless vector and hyper multiplets in a low-energy gauge theory on D-branes deep inside the throat.

Keywords: D-branes, Conformal Field Models in String Theory.

[*]Unité Mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'université Pierre et Marie Curie 6, UMR 8549. Preprint LPTENS-08/29.

JHEP07(2008)125

Contents

1. Introduction **2**

2. Addition relations and bound states on the boundary **2**
- 2.1 Unitary representations of the $N = 2$ superconformal algebra 3
- 2.2 Spectral flow and extended characters 4
- 2.3 Boundary states 5
- 2.4 Brane addition relations 6
- 2.5 Bound states on non-compact branes 6
- 2.6 Semi-classical analysis of the branes 12

3. Neveu-Schwarz five-branes spread on a circle **15**
- 3.1 The supergravity solution 15
- 3.2 T-dual space-times and their conformal field theory description 16

4. D-branes in the coset conformal field theory **17**
- 4.1 D-branes in the minimal model and in flat space 17
- 4.2 Boundary states in the GSO-projected theory 18
- 4.3 Semi-classical picture 22

5. D-branes meet NS5-branes **22**
- 5.1 D-branes in the NS5-branes geometry 23
- 5.2 D-branes cut in two pieces 29
- 5.3 D-branes cut in three pieces 30

6. Four-dimensional gauge theory in the depths of the throat **32**
- 6.1 Energy scales 33
- 6.2 Localized gauge theory on the non-compact brane 33
- 6.3 The gauge theory on the compact branes 36
- 6.4 Combining branes 36

7. Two NS5-branes **37**

8. Conclusions **38**

A. Full Cardy states in $N = 2$ Liouville **38**

B. The example of $k = 3$ NS5-branes **43**

JHEP07(2008)125

1. Introduction

Liouville conformal field theory plays a central role in two-dimensional gravity and string theory as well as in our present understanding of conformal field theories with continuous spectrum. When rendered $N = 2$ supersymmetric, it becomes a building block for supersymmetric string backgrounds. We further study $N = 2$ superconformal Liouville theory with boundary in this paper, and concentrate in particular on exhibiting bound states on non-compact branes.

In a separate development, an intuitive description of large parts of gauge theory physics has been given in terms of brane set-ups (see e.g. [1 – 3]). We believe it is an interesting task to study descriptions of brane set-ups that are valid at all energy scales. It further brings to bare string theory techniques in gauge theory physics and vice versa. For instance, one may suspect that world-sheet $N = 2$ holomorphy will turn out to be a useful alternative tool to analyze space-time physics.

The analysis of D-branes in Neveu-Schwarz five-brane backgrounds [4] was revisited in [5] using the tools developed to solve non-rational conformal field theories. It was argued how to realize brane set-ups [1] in terms of boundary conformal field theories (see also [6, 7]).

In this paper we wish to analyze in more detail than in [5] how a D-brane behaves in the close neighborhood of NS5-branes. We will study a particular set-up where the NS5-branes are evenly arranged on a topologically trivial circle. We will see how target space physics is coded in intricate properties of $N = 2$ Liouville theory with boundary. In section 2 we lay bare the relevant properties of $N = 2$ Liouville theory with boundary, which include new relations between formal boundary states as well as the appearance of bound states in boundary spectra. In section 3 we review briefly the bulk conformal field theory. We construct D-branes in the full superstring theory in section 4, and analyze their spectrum. In section 5 we give a space-time interpretation of the conformal field theory results of section 2. In particular we show the appearance of light bound states on the world-volume of non-compact D-branes as they approach NS5-branes. We also describe the cutting of D-branes as they hit NS5-branes. We analyze the gauge theory excitations living deep inside the triply scaled throat in section 6. In section 7 we discuss a special case with more symmetry allowing us to make a crosscheck, and we conclude with a summary and suggestions for further developments in section 8. Various detailed calculations are gathered in the appendices for the benefit of the indefatigable reader.

2. Addition relations and bound states on the boundary

We first analyze aspects of $N = 2$ Liouville theory with boundary (see e.g. [7 – 11]).

We will derive new addition relations between boundary states, and show the appearance of normalizable boundary vertex operators as bound states on non-compact branes.

JHEP07(2008)125

2.1 Unitary representations of the $N = 2$ superconformal algebra

We take the central charge of our $N = 2$ Liouville model to be

$$c = 3 + \frac{6}{k} \tag{2.1}$$

where k is a strictly positive integer. States in $N = 2$ Liouville theory can be organized in representations of the $N = 2$ superconformal algebra. The characters of the representations can be obtained as coset characters from the $N = 1$ superconformal extension of an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ current algebra [12] after gauging a compact $\mathrm{U}(1)$ subalgebra. In the following we use the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ quantum numbers to label the representations of the $N = 2$ superconformal algebra. After descent in the NS-sector, the primary state with Casimir and $\mathrm{U}(1)$ labels (J, m) has conformal dimension h and $\mathrm{U}(1)_R$ charge Q determined by the formulas:

$$h = -\frac{J(J-1)}{k} + \frac{m^2}{k}, \qquad Q = \frac{2m}{k} \tag{2.2}$$

We take the R-charge Q to be quantized such that $2m \in \mathbb{Z}$.

We have different families of unitary representations:

- Continuous characters ($0 \leq J \leq \frac{1}{2}$ or $J = \frac{1}{2} + iP$, $P \in \mathbb{R}^+$; m generic):

$$ch_c(J, m; \tau, z) = q^{-\frac{J(J-1)}{k} + \frac{m^2}{k} - \frac{1}{4k}} y^{\frac{2m}{k}} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta^3(\tau)} \tag{2.3}$$

  These representations have no null vectors. The parent $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representation has a spectrum for a compact generator which is doubly infinite.

- Discrete representations ($J = \frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{k+1}{2}$; $m = J + r$, $r \in \mathbb{Z}$):

$$ch_d(J, r; \tau, z) = q^{-\frac{(J-1/2)^2}{k} + \frac{(J+r)^2}{k}} y^{\frac{2(J+r)}{k}} \frac{1}{1 + yq^{1/2+r}} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta^3(\tau)} \tag{2.4}$$

  These have one null vector and are inherited from a representation of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ with semi-infinite spectrum. When r is negative, the conformal dimension and R-charge of the primary are given by formulae (2.2) with $\tilde{m} = J + r - k/2$ and $\tilde{J} = (k+2)/2 - J$ (see [9]).

- Identity representation ($J = 0$; $m \in \mathbb{Z}$):

$$ch_{\mathbb{I}}(m; \tau, z) = q^{-\frac{1}{4k} + \frac{m^2}{k}} y^{\frac{2m}{k}} \frac{1 - q}{(1 + yq^{\frac{1}{2}+m})(1 + y^{-1}q^{\frac{1}{2}-m})} \frac{\theta_3(\tau, z)}{\eta^3(\tau)} \tag{2.5}$$

  This representation has two null vectors. It descends from the trivial representation of the $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ algebra.

We hope the notations are sufficiently intuitive and refer to [12] and [9] for further details.

The chiral and anti-chiral rings of the $N = 2$ superconformal field theory form interesting subsectors of the theory. The chiral ring is generated by the operators that satisfy

JHEP07(2008)125

$h = \frac{Q}{2}$. In the anti-chiral ring, the relation $h = -\frac{Q}{2}$ is satisfied. We find a chiral primary state in the discrete character when $r = 0$, and an anti-chiral primary state in the discrete character when $r = -1$ (see [9]). The identity character with $m = 0$ contains the identity operator ($h = Q = 0$) which is both chiral and anti-chiral.

Interpreted as a σ-model, $N = 2$ Liouville theory has a curved non-compact target space. States in continuous representations with $J = \frac{1}{2} + iP$ propagate to infinity. The momentum in the curved non-compact direction is denoted by P. States in discrete or identity representations are bound states.

The characters of the $N = 2$ superconformal algebra satisfy the following identity [7]:

$$ch_c(J = 0, m = 0) = ch_I(m = 0) + ch_d\left(J = \frac{k}{2}, r = 0\right) + ch_d(J = 1, r = -1). \tag{2.6}$$

as well as the identity

$$ch_c\left(J = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right) = ch_d\left(J = \frac{1}{2}, r = 0\right) + ch_d\left(J = \frac{k+1}{2}, r = 0\right). \tag{2.7}$$

These identities can be viewed as generalizations of the identities between discrete, continuous and the trivial representations of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. One can write down such an identity for any continuous character, if there exists a discrete or a finite dimensional representation with the same quantum numbers. These additional addition relations are either spectral flowed from (2.6) and (2.7) (see later), or involve non-unitary characters.

Note that the case $k = 1$ is special. In that case, we can combine the two relations (2.6) and (2.7) to obtain an identity involving only the identity and continuous characters:

$$ch_c^{k=1}(J = 0, m = 0) = ch_I^{k=1}(m = 0) + ch_c^{k=1}\left(J = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right). \tag{2.8}$$

2.2 Spectral flow and extended characters

When we simultaneously change boundary conditions on all fermionic operators of the $N = 2$ superconformal algebra (such that they pick up a phase as one goes around a world-sheet circle), we spectral flow the $N = 2$ algebra. After one unit of spectral flow, we recuperate the original boundary conditions. This operation acts on the quantum numbers (J, m) of a given state as $(J, m) \to (J, m + 1)$.

We define the extended $N = 2$ superconformal algebra as being generated by the usual $N = 2$ generators together with the operator implementing k units of spectral flow. For applications in superstring theory and to simplify the modular properties of the characters, it is convenient to classify the states in representations of the extended algebra. We define the following extended characters:

$$Ch_c(J, m; \tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ch_c(J, m + kn; \tau, z) \tag{2.9}$$

$$Ch_d(J, r; \tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ch_d(J, r + kn; \tau, z) \tag{2.10}$$

$$Ch_I(m; \tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} ch_{\mathbb{I}}(m + kn; \tau, z) \tag{2.11}$$

JHEP07(2008)125

The quantum numbers m and r labeling the extended characters are defined modulo k. The behavior of these extended characters under modular transformations is given in appendix A. We can perform spectral flow on both sides of the identities (2.6) and (2.7) (by any amount) and obtain new identities. In particular, the character identities (2.6) and (2.7) are valid for the extended characters as well:

$$Ch_c(J=0,m=r) = Ch_{\mathbb{I}}(m=r) + Ch_d\left(J=\frac{k}{2},r\right) + Ch_d(J=1,r-1). \quad (2.12)$$

$$Ch_c\left(J=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}+r\right) = Ch_d\left(J=\frac{1}{2},r\right) + Ch_d\left(J=\frac{k+1}{2},r\right). \quad (2.13)$$

2.3 Boundary states

We consider A-type branes in $N=2$ Liouville theory (see e.g. [7, 9, 11]). The boundary state associated to a brane B is written as:

$$|B\rangle = \int_{P=0}^{\infty} \sum_{2m=0}^{2k-1} \psi_c^B(P,m)|P,m\rangle\rangle_c + \sum_{2J=2}^{k} \sum_{2m=0}^{2k-1} \psi_d^B(J,m)|J,m\rangle\rangle_d \quad (2.14)$$

The definition of the continuous and discrete Ishibashi states $|P,m\rangle\rangle_c$ and $|J,m\rangle\rangle_d$, as well as the one-point couplings to the discrete operators $\psi_d^B(J,m)$, are given in appendix A. In the bulk of the paper, we focus on the one-point functions of the continuous operators $\psi_c^B(P,m)$.

The identity brane $|0\rangle_{\mathbb{I}}$ whose self-overlap is the extended identity character $Ch_{\mathbb{I}}(m=0)$ (in the boundary channel) has the following one-point function:

$$\Psi_0^{\mathbb{I}}(P,m) = \nu^{iP}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+iP+m)\Gamma(\frac{1}{2}+iP-m)}{\Gamma(1+2iP)\Gamma(\frac{2iP}{k})}. \quad (2.15)$$

The parameter ν is related to the coefficient μ of the bulk Liouville potential as $\nu=\mu^{2/k}$ (see e.g. [8, 11]). The branes whose overlap with the identity brane $|0\rangle_{\mathbb{I}}$ are one of the extended characters (2.9), (2.10) or (2.11) are specified by the one-point functions:

- Continuous brane $|\hat{P},\hat{m}\rangle_c$:

$$\psi^c_{\hat{P},\hat{m}}(P,m) = \nu^{iP}\frac{2}{k}e^{-2\pi i\frac{2m.2\hat{m}}{2k}}\cos(4\pi P\hat{P}/k)\frac{\Gamma(1-2iP)\Gamma(\frac{-2iP}{k})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iP+m)\Gamma(\frac{1}{2}-iP-m)}. \quad (2.16)$$

  We can take the definition to apply to boundary states with $\hat{P}$ purely imaginary as well. As long as we stay within the bounds $0 \le i\hat{P} \le \frac{1}{2}$ the overlap with the identity brane $|0\rangle_{\mathbb{I}}$ is the continuous character with real $\hat{J}=\frac{1}{2}+i\hat{P}$, $0 \le \hat{J} \le 1/2$, which remains a unitary representation of the superconformal algebra.

- Discrete brane $|\hat{J},\hat{r}\rangle_d$:

$$\psi^d_{\hat{J},\hat{r}}(P,m) = \nu^{iP}\frac{1}{2k}e^{-2\pi i\frac{2(\hat{J}+\hat{r}).2m}{2k}}\frac{\Gamma(1-2iP)\Gamma(-2i\frac{P}{k})}{\Gamma(\frac{1}{2}-iP+m)\Gamma(\frac{1}{2}-iP-m)} \times\frac{\cosh\left(2\pi\frac{P(2\hat{J}-1)}{k}\right)+(-1)^{2m}\cosh\left(2\pi\frac{P(k-2\hat{J}+1)}{k}\right)}{|\cosh\pi(P+im)|^2}. \quad (2.17)$$

JHEP07(2008)125

- Identity brane $|\hat{m}\rangle_{\mathbb{I}}$:

$$\Psi^{\mathbb{I}}_{\hat{m}}(P,m) = \nu^{iP} e^{-2\pi i \frac{2m.2\hat{m}}{2k}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+iP+m)\Gamma(\frac{1}{2}+iP-m)}{\Gamma(1+2iP)\Gamma(\frac{2iP}{k})}. \tag{2.18}$$

The Cardy condition has been checked for the continuous and identity branes. For the discrete branes, this condition is not satisfied in general [7, 9, 13]. We show in appendix A that discrete characters generically appear with non-integer and/or negative multiplicity in the overlap of two discrete branes. That indicates that the discrete boundary states are inconsistent.

2.4 Brane addition relations

The modular bootstrap approach suggests that the characters identities (2.12) and (2.13) can be extended to the full boundary states.[1] That is the case for example in bosonic Liouville theory (see [14, 16]). There is also a known example in supersymmetric Liouville theory at level $k = 1$ (see [17]). We propose the relations ($\hat{r} \in \mathbb{Z}$):

$$|\hat{J} = 0, \hat{r}\rangle_c = |\hat{r}\rangle_{\mathbb{I}} + |k/2, \hat{r}\rangle_d + |1, -1+\hat{r}\rangle_d \tag{2.19}$$

$$|\hat{P} = 0, 1/2+\hat{r}\rangle_c = |1/2, \hat{r}\rangle_d + |k/2+1/2, \hat{r}\rangle_d. \tag{2.20}$$

The labels of the brane correspond to the extended character that appears when computing the annulus partition function for boundary operators between the brane and the identity brane $|0\rangle_{\mathbb{I}}$. After some Γ-function and trigonometric gymnastics, it can be shown that the one-point functions for these branes indeed satisfy the corresponding addition relations. Moreover, the identities hold for the discrete part of the Cardy states as well.

Since the boundary states for individual discrete branes do not pass the Cardy check, we cannot view these addition relations as identities between consistent boundary states. Nevertheless, we will see in section 5 that these relations code semi-classical properties of D-branes in string theory.

As a side-remark we note that in the special case $k = 1$, we get the brane addition relations of [17]:

$$|\hat{J} = 0, \hat{r}\rangle_c^{k=1} = |\hat{J} = 1/2, 1/2+\hat{r}\rangle_c^{k=1} + |\hat{r}\rangle_{\mathbb{I}}^{k=1}. \tag{2.21}$$

In this case, the addition relation is one between boundary states that pass the Cardy check individually.

2.5 Bound states on non-compact branes

We will now investigate more closely the first addition relation (2.19). If one computes the self overlap of the right-hand side of the relation (2.19), one will obtain states in discrete

[1] Note that if one defines boundary state that corresponds to single (non-extended) representations of the $N = 2$ superconformal algebra, one also finds analogous identities between the corresponding boundary states.

JHEP07(2008)125

and in the identity representations.[2] These states are bound states, localized on the world-volume of the brane. Their conformal dimension can lie below the continuum of boundary vertex operators. In this section we wish to understand the appearance of these bound states in the self overlap of the continuous brane on the left-hand side of (2.19). To that end, we will compute the overlap of two continuous branes ${}_c\langle \hat{P}_1, \hat{m}_1|\text{prop}|\hat{P}_2, \hat{m}_2\rangle_c$, where "prop" represents the bulk (cylinder) propagator. Then we will study what happens when we continue $\hat{P}_1$ and $\hat{P}_2$ to $\frac{i}{2}$ (i.e. $\hat{J}_1$ and $\hat{J}_2$ to zero). This analysis is inspired by similar analyses in bosonic Liouville theory [15, 16], and in supersymmetric Liouville theory at level $k = 1$ [17].

We start from the definition of the continuous branes (2.14), (2.16). The continuous branes do not couple to discrete bulk operators. The overlap of the two branes gives in the bulk channel:

$$Z_{1,2} = {}_c\langle \hat{P}_1, \hat{m}_1|\text{prop}|\hat{P}_2, \hat{m}_2\rangle_c = \int_0^\infty dP \sum_{2m\in Z_{2k}} \frac{4}{k^2} e^{2\pi i \frac{2m(2\hat{m}_1 - 2\hat{m}_2)}{2k}} \cos\left(\frac{4\pi P\hat{P}_1}{k}\right)\cos\left(\frac{4\pi P\hat{P}_2}{k}\right)$$
$$\frac{\cos\pi(-iP+m)\cos\pi(iP+m)}{\sinh(2\pi P)\sinh(\frac{2\pi P}{k})} Ch_c^{closed}(P,m) \tag{2.22}$$

We obtain the partition function in the loop channel via a modular transformation:

$$\begin{aligned} Z_{1,2} = &\int_0^\infty dP \frac{1}{k} \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1} \cosh\left(2\pi P\left(1 + 2i\epsilon_1\frac{\hat{P}_1}{k} + 2i\epsilon_2\frac{\hat{P}_2}{k}\right)\right) \frac{1}{\sinh(2\pi P)\sinh\left(\frac{2\pi P}{k}\right)} \\ &\int_{-\infty}^\infty dP' e^{\frac{4\pi i P P'}{k}} Ch_c^{\text{open}}(P', \hat{m}_1 - \hat{m}_2) \\ &+ \int_0^\infty dP \frac{2}{k} \sum_{\epsilon_2=\pm 1} \cosh\left(2\pi P\left(2i\frac{\hat{P}_1}{k} + 2i\epsilon_2\frac{\hat{P}_2}{k}\right)\right) \frac{1}{\sinh(2\pi P)\sinh(\frac{2\pi P}{k})} \\ &\int_{-\infty}^\infty dP' e^{\frac{4\pi i P P'}{k}} Ch_c^{\text{open}}\left(P', \hat{m}_1 - \hat{m}_2 + \frac{k}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Now we would like to write the boundary partition function $Z_{1,2}$ in a more explicit form as an integral over boundary operators with a given spectral density:

$$\begin{aligned} Z_{1,2} = &\int_{P'=-\infty+i\Delta}^{\infty+i\Delta} \rho_1(P'; \hat{P}_1, \hat{P}_2) Ch_c^{\text{open}}(P', \hat{m}_1 - \hat{m}_2) \\ &+ \int_{P'=-\infty+i\Delta}^{\infty+i\Delta} \rho_2(P'; \hat{P}_1, \hat{P}_2) Ch_c^{\text{open}}\left(P', \hat{m}_1 - \hat{m}_2 + \frac{k}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Notice the imaginary shift Δ in the integration contour. This shift is needed for the following reason: in order to make the necessary exchange of the bulk and boundary momentum integrals, we need the integral over the bulk momentum P at fixed boundary momentum P' to be convergent. Looking at the integrand in (2.23), we identify two possible divergences at $P = 0$ and $P \to \infty$. Firstly, the integral is always divergent when the bulk momentum P goes to zero. Notice that the behavior of the integrand

[2] The detailed calculation is given in appendix A.

JHEP07(2008)125

close to $P = 0$ is universal: it does not depend on the brane parameters $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$. It is an infrared divergence due to the non-compactness of the target space. We can cure the divergence either by considering a relative spectral density (subtracting a reference spectral density with fixed value of the brane parameters), or by removing the pole by hand. Secondly, the bulk momentum integral may still diverge due to the ultraviolet integration region. A prescription to cure this divergence [15] is to lift the integration contour for the boundary momentum P' by giving it a sufficient imaginary part Δ. Then the integrand will decay exponentially at large momentum P, and we will be able to exchange the order of integration.

Let's compute the necessary shift of the contour Δ. At large momentum P, the integrand in the first two lines of equation (2.23) behaves as: $\exp\left(\frac{2\pi P}{k}(2i\epsilon_1\hat{P}_1 + 2i\epsilon_2\hat{P}_2 - 1 + 2iP')\right)$. The integrand in the last two lines of equation (2.23) is always less divergent. We deduce that we need to shift the integration contour when $2Im(\hat{P}_1) + 2Im(\hat{P}_2) \geq 1$. We recall that we took the imaginary parts of $\hat{P}_{1,2}$ to be positive. The imaginary part we give to the boundary momentum P' is:

$$\Delta = \max\left(0\,,\, Im(\hat{P}_1) + Im(\hat{P}_2) - \frac{1}{2} + \epsilon\right) \tag{2.25}$$

with $0 < \epsilon \ll 1$. Since we have the inequality $0 \leq Im(\hat{P}_1), Im(\hat{P}_2) \leq \frac{1}{2}$, we need both $\hat{P}_1$ and $\hat{P}_2$ imaginary to have a non-zero shift (or one of them equal to $i/2$, in which case $\Delta = \epsilon$).

After giving a sufficiently large imaginary part to the boundary momentum (which breaks parity symmetry in P'), we find the following densities of boundary operators:

$$\begin{aligned}
\rho_1(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2) &= \int_0^\infty dP \frac{1}{k} \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1} \frac{\cosh\left(2\pi P\left(1 + 2i\epsilon_1\frac{\hat{P}_1}{k} + 2i\epsilon_2\frac{\hat{P}_2}{k}\right)\right)}{\sinh(2\pi P)\sinh(\frac{2\pi P}{k})} e^{\frac{4\pi i P P'}{k}} \\
\rho_2(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2) &= \int_0^\infty dP \frac{2}{k} \sum_{\epsilon_2=\pm 1} \frac{\cosh\left(2\pi P\left(2i\frac{\hat{P}_1}{k} + 2i\epsilon_2\frac{\hat{P}_2}{k}\right)\right)}{\sinh(2\pi P)\sinh(\frac{2\pi P}{k})} e^{\frac{4\pi i P P'}{k}}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

The densities ρ_1 and ρ_2 are functions of the boundary momentum P' as well as the two brane parameters $\hat{P}_1$ and $\hat{P}_2$. For given brane parameters, one can extend these functions over the whole complex plane in P', and identify their poles. One can then bring the P' integral back to the real line (in order for the continuous part of the spectrum to correspond to continuous characters), pick up the poles crossed in the process, and identify them as isolated contributions to the partition function.

To analyze the pole structure of the densities of states ρ_1 and ρ_2, we can rewrite these densities as the derivatives of phase shifts. We can perform the rewriting in terms of the q-gamma function $\Gamma_b(x)$. It is defined as (see e.g. [18]):

$$\log\Gamma_b(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-xt} - e^{Qt/2}}{(1-e^{-bt})(1-e^{-t/b})} - \frac{(Q-2x)^2}{8e^t} - \frac{Q-2x}{t} \tag{2.27}$$

where $Q = b + b^{-1}$. This function has poles at $x = -mb - nb^{-1}$, where m and n are positive integers. With $b = \sqrt{k}$ and $t = 2\pi p$, we can write ρ_1 and ρ_2 in terms of q-gamma

JHEP07(2008)125

functions as:

$$\rho_1(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1}\frac{\partial}{\partial P'}\left[\log\Gamma_{\sqrt{k}}\left(\frac{-iP'+\frac{1}{2}+i\epsilon_1\hat{P}_1+i\epsilon_2\hat{P}_2}{\sqrt{k}}\right)\right.$$
$$\left.+\log\Gamma_{\sqrt{k}}\left(\frac{-iP'+\frac{1}{2}+k+i\epsilon_1\hat{P}_1+i\epsilon_2\hat{P}_2}{\sqrt{k}}\right)\right] \tag{2.28}$$

$$\rho_2(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2) = \frac{2}{2\pi i}\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1}\frac{\partial}{\partial P'}\left[\log\Gamma_{\sqrt{k}}\left(\frac{-iP'+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+i\epsilon_1\hat{P}_1+i\epsilon_2\hat{P}_2}{\sqrt{k}}\right)\right]. \tag{2.29}$$

We note that we subtracted a universal part in the densities that does not depend on the parameters of the branes $\hat{P}_1$ and $\hat{P}_2$. The subtraction regularizes the bulk infrared divergence due to the infinite volume of the target space.

We can identify which poles are met when we bring back the P' integration contour to the real axis (cf. figure 1). For the density ρ_1, the poles are at:

$$\begin{aligned} -iP' &= -1/2 - n - km + i\epsilon_1\hat{P}_1 + i\epsilon_2\hat{P}_2 \\ -iP' &= -1/2 - k - n - km - i\epsilon_1\hat{P}_1 - i\epsilon_2\hat{P}_2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

whereas for the density ρ_2, we have poles at:

$$-iP' = -1/2 - k/2 - n - km - i\epsilon_1\hat{P}_1 - i\epsilon_2\hat{P}_2 \tag{2.31}$$

where $\epsilon_1,\ \epsilon_2 = \pm 1$, and m and n are positive integers.[3] Given that $0 \le Im(\hat{P}_1), Im(\hat{P}_2) \le \frac{1}{2}$, there is only one pole in the spectral density ρ_1 that will be crossed as we shift the boundary momentum contour to the real axis: the one from the first series in equation (2.30) with $m = n = 0$ and $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$. The residue for this pole is $+1$. The contour of the integral with the spectral density ρ_2 will not cross a pole when k is greater than one.

Eventually we can write down the annulus partition function in an explicit form:

- When $\Delta = 0$:

$$Z_{1,2} = \int_{P'=-\infty}^{\infty} dP'\rho_1(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2)Ch_c^{\text{open}}(P',\hat{m}_1-\hat{m}_2)$$
$$+\int_{P'=-\infty}^{\infty} dP'\rho_2(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2)Ch_c^{\text{open}}\left(P',\hat{m}_1-\hat{m}_2+\frac{k}{2}\right) \tag{2.32}$$

- When $\Delta \neq 0$:

$$Z_{1,2} = \int_{P'=-\infty}^{\infty} dP'\rho_1(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2)Ch_c^{\text{open}}(P',\hat{m}_1-\hat{m}_2)$$
$$+\int_{P'=-\infty}^{\infty} dP'\rho_2(P';\hat{P}_1,\hat{P}_2)Ch_c^{\text{open}}\left(P',\hat{m}_1-\hat{m}_2+\frac{k}{2}\right)$$
$$+Ch_c^{\text{open}}\left(P'=\hat{P}_1+\hat{P}_2-\frac{i}{2},\hat{m}_1-\hat{m}_2\right) \tag{2.33}$$

[3] The location of the poles can be determined by analyzing the integrand at large bulk momentum P.

JHEP07(2008)125

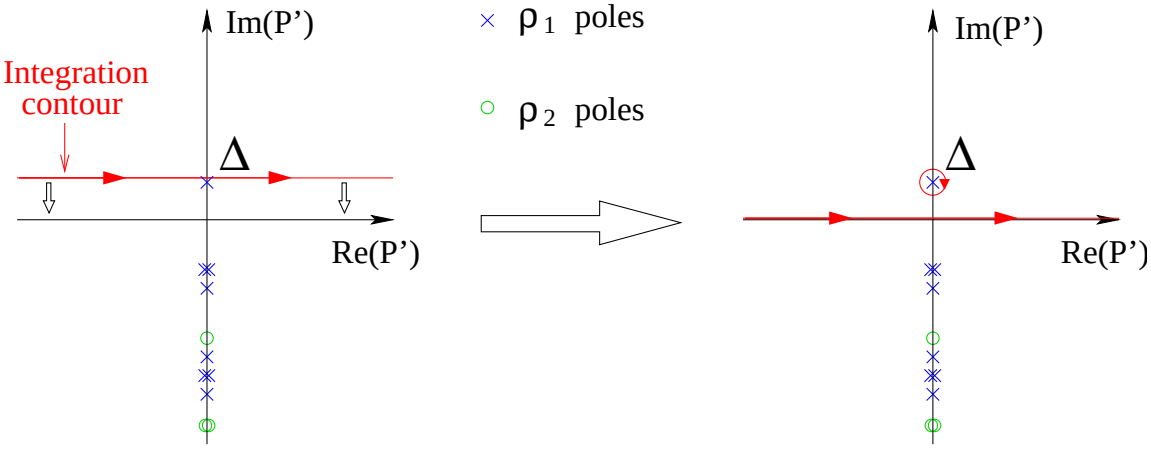


Figure 1: As we shift back to the real axis the integration contour for the boundary momentum, we pick up an additional contribution from a pole in the density of states ρ_1. It gives an isolated contribution to the partition function.

Self-overlap of a continuous brane. Let's examine the self-overlap of a continuous brane with parameters $(\hat{P}, \hat{m})$. This is just a special case of the previous calculation when we take the values $\hat{P} = \hat{P}_1 = \hat{P}_2$ and $\hat{m} = \hat{m}_1 = \hat{m}_2$. So we obtain:

- When the brane parameter $\hat{P}$ is real, or between $0 \leq Im(\hat{P}) < \frac{1}{4}$:

$$ {}_c\langle \hat{P}, \hat{m}|\text{prop}|\hat{P}, \hat{m}\rangle_c = \int_{-\infty}^{\infty} dP' \left(\rho_1(P'; \hat{P}) Ch_c^{\text{open}}(P', 0) + \rho_2(P'; \hat{P}) Ch_c^{\text{open}}\left(P', \frac{k}{2}\right)\right) \tag{2.34} $$

- When the brane parameter is in the range $\frac{1}{4} < Im(\hat{P}) \leq \frac{1}{2}$:

$$ \begin{aligned} {}_c\langle \hat{P}, \hat{m}|\text{prop}|\hat{P}, \hat{m}\rangle_c = & \int_{-\infty}^{\infty} dP' \left(\rho_1(P'; \hat{P}) Ch_c^{\text{open}}(P', 0) + \rho_2(P'; \hat{P}) Ch_c^{\text{open}}\left(P', \frac{k}{2}\right)\right) \\ & + Ch_c^{\text{open}}(J' = 1 - 2Im(\hat{P}), m = 0) \end{aligned} \tag{2.35} $$

An additional localized contribution appears starting at $Im(\hat{P}) = \frac{1}{4}$ (namely, at half the momentum intercept caused by the linear dilaton). It contains relevant boundary operators, some of which have a conformal dimension below the continuum. At the value $Im(\hat{P}) = \frac{1}{2}$ one of these operators becomes of conformal dimension zero. There the continuous character $Ch_c^{\text{open}}(\hat{J} = 0, \hat{m} = 0)$ splits into two discrete and one identity characters, according to the identity (2.12). If we would go further and give $\hat{P}$ an imaginary part greater than 1/2, we would encounter characters of non-unitary representations.

We fulfilled our goal to compute the self-overlap of the continuous brane appearing on

JHEP07(2008)125

the left-hand side of the brane addition relation (2.19):

$$
\begin{aligned}
{}_c\langle \hat{J}=0,\hat{m}|\mathrm{prop}|\hat{J}=0,\hat{m}\rangle_c = \int_{-\infty}^{\infty} dP' \Big(&\rho_1(P';\hat{P},\hat{P})Ch_c^{\mathrm{open}}(P',0) \\
&+\rho_2(P';\hat{P},\hat{P})Ch_c^{\mathrm{open}}\left(P',\frac{k}{2}\right)\Big) \\
&+Ch_{\mathbb{I}}^{\mathrm{open}}(0)+Ch_d^{\mathrm{open}}\left(\frac{k}{2},0\right)+Ch_d^{\mathrm{open}}(1,-1) \quad (2.36)
\end{aligned}
$$

In appendix A it is shown that one obtains the same result for the self-overlap of the sum of branes on the right-hand side of equation (2.19). It is interesting to note that the way the correct multiplicity $+1$ for the discrete characters comes about in the algebraic calculation is via a multiplicity $+2$ from the overlap of identity brane with the discrete branes in the addition relation, and multiplicity -1 from the self-overlap of the sum of the discrete boundary states. That fact will be important later on.

Remarks. Firstly, as we noted in passing, the case $k = 1$ needs to be studied separately. For $k = 1$ and $\hat{J} = 0$ the self-overlap picks up a pole in the density ρ_1 as before. Moreover, a pole in the spectral density ρ_2 coincides with the contour of integration in that case. That is due to a boundary infrared divergence. The integration can be regularized with a principal value prescription. Equivalently, we pick up the pole with weight a half (multiplied by the prefactor of 2 associated to the density of states ρ_2). That leads to an extra contribution of a single continuous character with $J = 1/2 = m$ to the boundary spectrum. It implies that both discrete characters appear with multiplicity two in the self-overlap of the brane (2.36). The same conclusion is reached independently in appendix A. There it is shown that there are no discrete subtractions in this case. The upshot is an agreement with the discussion in [17] from both ways of calculating the self-overlap.

Secondly, we obtained the localized spectrum for generic level k in two ways: on the one hand via the analytic continuation of the self-overlap, and on the other hand using the full identity and discrete boundary states including their coupling to the discrete Ishibashi states. We believe that provides a convincing crosscheck for these two procedures. This is important because it indicates that we should take the couplings of the discrete branes to discrete Ishibashi states seriously. It implies in particular that discrete branes do not (generically) pass the Cardy check.

We note that there may be exchange of discrete states between boundary states despite the fact that no pole appears in the density of exchanged bulk operators. Whether a discrete state is exchanged is determined by its coupling to both branes, and when these are non-zero, the contribution is weighted by the propagator. When one brane in the overlap is localized, those contributions correspond to the formal prescription to pick up possible poles and their residues in the bulk channel - why this is the case can be understood from the modular bootstrap (see e.g. [9]). That the prescription to pick up poles in the bulk channel only works when one of the two branes is localized seems related to the observation [19] that an analogue of the Verlinde formula in non-rational conformal field theories works well only in those cases.

JHEP07(2008)125

In the dual boundary channel, it is the contour dictated by the precise boundary conditions that determine whether or not poles in the density of boundary operators contribute to the annulus amplitude [15].

2.6 Semi-classical analysis of the branes

We finalize this section by a few remarks on the semi-classic target space interpretation of the boundary conformal field theories. The semi-classical geometry has been described in e.g. [20 – 22, 5] in some detail. We add a few extra remarks to those analyses that will be useful in the following.

When we think of $N = 2$ Liouville theory as a two-dimensional σ-model, the associated trumpet target-space geometry is given by:

$$\begin{cases} ds^2 = \alpha' k \left(dr^2 + \coth^2 r \; d\psi^2 \right) \\ e^{2\Phi} = \frac{e^{2\Phi_0}}{\sinh^2 r} \end{cases} \tag{2.37}$$

The curvature radius of the geometry is $\sqrt{k\alpha'}$. In the large k limit, we can perform a useful semi-classical analysis. This analysis will break down close to $r = 0$, where the geometry is singular (but the conformal field theory remains well-defined). The identity branes are located in that region.

Semi-classical D1-branes in the trumpet. Studying solutions that extremize the Dirac-Born-Infeld action for D1-branes in the background (2.37) (see e.g. [20]), one finds the following two-parameter family of branes:

$$\cosh(r) \sin(\psi - \psi_0) = c \tag{2.38}$$

If $c > 1$, we put $c \equiv \cosh r_0$. In this case the brane world-volume is limited to the region $r \geq r_0$. On the other hand, if $c \leq 1$, the brane extends over the whole space-time. When we go to radial infinity, the function $\sin(\psi - \psi_0)$ goes to zero. So the branes described by the curve (2.38) have two anti-podal legs in the asymptotic region, in the angular directions $\psi = \psi_0$ and $\psi = \psi_0 + \pi$.

These D1-branes are the semi-classical incarnations of the continuous and discrete branes as we will argue. We will also match the parameters c and ψ_0 with the quantum numbers that label the Liouville branes.

Continuous branes. Let's begin with the continuous branes $|\hat{P}, \hat{m}\rangle_c$, with $\hat{P}$ real and strictly positive. It was argued in [22] that the T-dual D2 brane is doubly sheeted, and partially covers the cigar. We strengthen the arguments of [22]. First we notice that the parameter ψ_0 defines the position of the brane in the angular direction, so changing it should not change the self-overlap of the brane.[4] Looking at equations (2.34) and (2.35), we deduce that the angle ψ_0 is a function of the quantum number $\hat{m}$ only. Moreover the

[4] This reasoning only holds far away from the region where the Liouville potential is not negligible, since the potential breaks rotation invariance in the ψ direction. We can apply it to open strings in continuous representations that propagate in the asymptotic region.

JHEP07(2008)125

two quantities ψ_0 and $\hat{m}$ are respectively defined modulo 2π and $2k$. We are lead to the identification:

$$\psi_0 = 2\pi\frac{\hat{m}}{k} - \frac{\pi}{2} \tag{2.39}$$

The additional (harmless) shift is chosen such that the angle $2\pi\frac{\hat{m}}{k}$ gives the direction of the tip of the brane (it is also the direction of an axis of symmetry for the brane). Now let's consider the overlap of the brane $|\hat{P},\hat{m}\rangle_c$ with the identity brane $|\hat{m}\rangle_{\mathbb{I}}$. In the boundary channel, it is the continuous extended character $Ch_c(\hat{P},0)$. Thus all the open strings stretching between the two branes are massive. We deduce that the brane does not extend up to the horn at $r=0$, and the parameter c of the semi-classical brane is greater than one. To compute the relation between the parameters c and $\hat{P}$, we demand that the mass of a string be equal to its length times its tension. Equation (2.2) implies that the mass square of the lightest open string is $P^2/k\alpha'$. On the other hand, a string stretching from the identity brane at $r=0$ up to the tip of the continuous brane at $r=r_0$ has proper length $r_0\sqrt{k\alpha'}$, and mass $r_0\sqrt{k}/2\pi\sqrt{\alpha'}$. Since $c=\cosh r_0$, we deduce that in the semi-classical limit:

$$c = \cosh\left(2\pi\frac{\hat{P}}{k}\right) \tag{2.40}$$

In the case where the brane label $\hat{P}$ is imaginary (and $\hat{J}$ is real), we expect the analytic continuation of the matching relation (2.40) to be valid:

$$c = \cos\left(2\pi\frac{2\hat{J}-1}{2k}\right). \tag{2.41}$$

In this case the brane extends up to the horn of the trumpet, and is made of two disconnected strands (see figure 2).

Discrete branes. The discrete branes have couplings to the continuous representations which are identical to those of the D2-branes covering the whole cigar [21]. This can be seen by rewriting:

$$\psi^d_{\hat{J},\hat{r}}(P,m) = \frac{1}{2\pi}\nu^{iP}e^{-2\pi i\frac{2m.2\hat{m}}{2k}}\Gamma(-2iP)\Gamma\left(1-2i\frac{P}{k}\right) \\ \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+iP+m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-iP+m)}e^{i\pi(\frac{1}{2}+\frac{1-2\hat{J}}{k})(2iP)} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+iP-m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-iP-m)}e^{-i\pi(\frac{1}{2}+\frac{1-2\hat{J}}{k})(2iP)}\right). \tag{2.42}$$

We identify the one-point functions after a T-duality transformation on the parameters. As for the continuous brane, the angular parameter ψ_0 is given by the quantum number $\hat{m}$:

$$\psi_0 = 2\pi\frac{\hat{m}}{k} - \frac{\pi}{2} \tag{2.43}$$

To precisely match the parameter c of the semi-classical brane with the quantum numbers $\hat{J}$,$\hat{r}$ defining the discrete brane, we translate the semi-classical matching of the spectral

JHEP07(2008)125

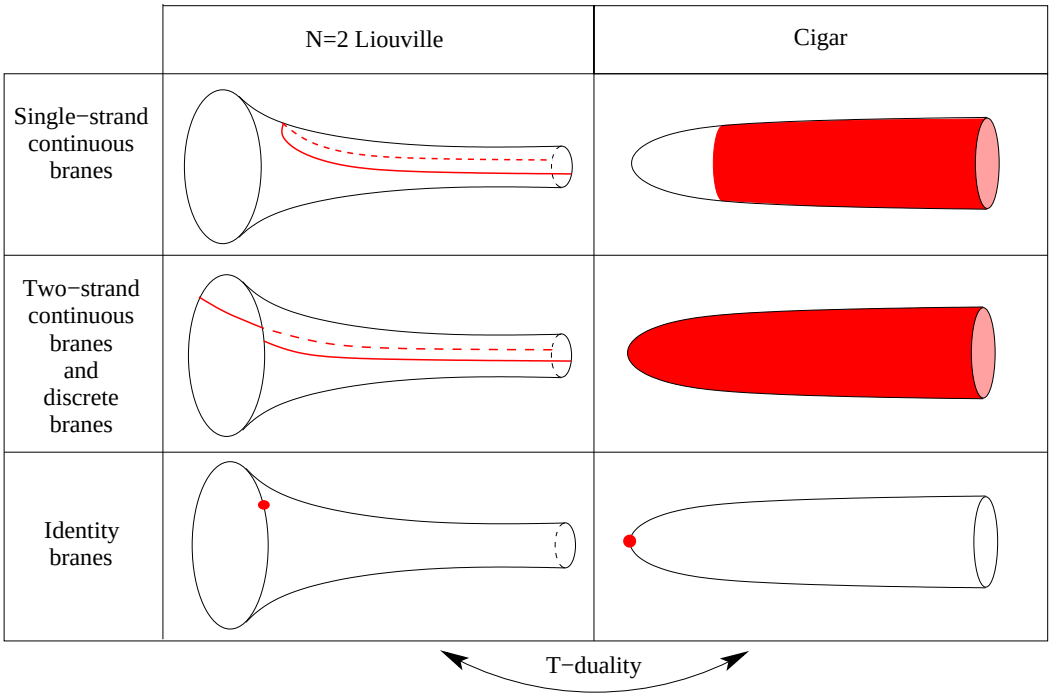


Figure 2: Semi-classical description of continuous, discrete and identity branes in $N = 2$ Liouville theory, and their T-dual image in the cigar.

density with the derivative of the reflection amplitude of [21] into our T-dual picture. We again obtain:

$$c = \cos\left(2\pi \frac{2\hat{J} - 1}{2k}\right). \tag{2.44}$$

The number of branches. We note that the self-overlap of the discrete brane contains continuous representations with angular momentum $m = 0$ and $m = k/2$ (cf. appendix A). Since the discrete branes have Dirichlet boundary conditions in the angular direction, we conclude (after appropriately normalizing) that open strings living on this brane have integer or half-integer winding number. This proves that the discrete branes have two anti-podal branches.

We may check this argument directly on the one-point function (2.42). We take the infrared limit by concentrating on the behavior of the one-point function for bulk operators with nearly zero momentum P. An analysis of the poles of the Γ-functions shows that the dominant couplings are to even momentum modes, which says that asymptotically we have two branches (that effectively halve the radius of the asymptotic circle, thus leading to only even momentum couplings).

The same arguments apply to the continuous branes which therefore also have two branches.

JHEP07(2008)125

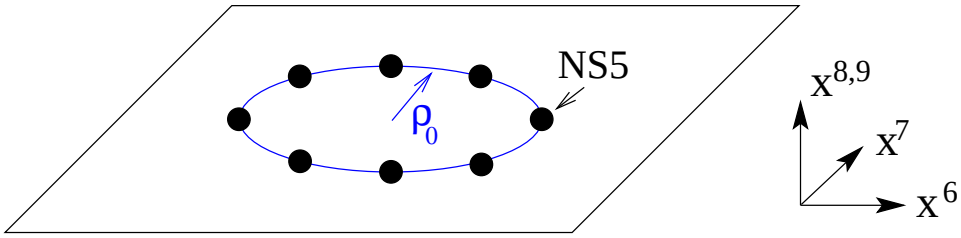


Figure 3: We consider k NS5-branes extended in the directions $x^{0,1,\ldots,5}$. They are evenly arranged on a circle of radius ρ_0, in the plane $x^8 = x^9 = 0$.

3. Neveu-Schwarz five-branes spread on a circle

We now want to use what we have learned about $N = 2$ Liouville theory with boundary to study the behavior of D-branes close to NS5-branes. Our strategy will be to study the branes first in the T-dual coset conformal field theories, then to translate back the results into the NS5-brane background [5]. To that end, we briefly review the bulk string theory background and its T-duals [24, 25].

3.1 The supergravity solution

Consider k NS5-branes in type II string theory in flat space and stretching in the directions with coordinates $x^{\mu=0,1,\ldots,5}$. They preserve sixteen supersymmetries. The coordinates of the transverse space are $x^{i=6,7,8,9}$. The back-reaction of the NS5-branes on flat space is coded in the string frame metric, the NSNS three-form $H_{(3)}$ and the dilaton Φ:

$$\begin{cases} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H \delta_{ij} dx^i dx^j \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 \, H \\ H_{(3)} &= *_4 dH \end{cases} \tag{3.1}$$

where the harmonic function H is specified in terms of the positions x_a^i of the NS5-branes in transverse space:

$$H(x^i) = 1 + \sum_{a=1}^{k} \frac{\alpha'}{|x^i - x_a^i|^2}, \tag{3.2}$$

and $*_4$ denotes the Hodge star operation in the four Euclidean transverse directions (with flat metric).

We concentrate on k NS5-branes whose positions are k evenly spread points on a topologically trivial circle of radius ρ_0 in the (x^6, x^7) plane (see figure 3). We introduce new coordinates (r, θ, ψ, ϕ):

$$\begin{aligned} (x^6, x^7) &= \rho_0 \cosh r \sin\theta \, (\cos\psi, \sin\psi) \\ (x^8, x^9) &= \rho_0 \sinh r \cos\theta \, (\cos\phi, \sin\phi) \, . \end{aligned} \tag{3.3}$$

where $r \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, and $0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$.
When we neglect world-sheet instanton corrections (or equivalently, spread the NS5-branes

JHEP07(2008)125

over the circle [26]), and take the double scaling limit [27]:

$$\begin{aligned} & g_s, \frac{\rho_0}{\sqrt{\alpha'}} \to 0 \\ & \frac{\rho_0}{g_s\sqrt{\alpha'}} \qquad \text{fixed}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

the supergravity solution becomes:

$$\begin{cases} ds^2 = dx^\mu dx_\mu + \alpha' k \left[dr^2 + d\theta^2 + \frac{\tanh^2 r \; d\phi^2 + \tan^2\theta \; d\psi^2}{1+\tan^2\theta \tanh^2 r} \right], \\ e^{2\Phi} = \frac{g_{\rm eff}^2}{\cosh^2 r - \sin^2\theta}, \\ B = \frac{\alpha' k}{1+\tan^2\theta\tanh^2 r} \; d\phi \wedge d\psi, \end{cases} \tag{3.5}$$

where the effective string coupling constant is

$$g_{\rm eff} = \frac{\sqrt{k\alpha'} g_s}{\rho_0}. \tag{3.6}$$

This background is an exact coset conformal field theory, corresponding to a null gauging of $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ [28]. However it will be more convenient for us to use the exact conformal field theory description of a T-dual background. The exact conformal field theory encodes all world-sheet instanton corrections [29, 30, 5].

3.2 T-dual space-times and their conformal field theory description

We perform a T-duality along the angular direction ϕ and obtain the geometry:

$$\begin{cases} ds^2 = dx^\mu dx_\mu + \alpha' k \left[dr^2 + \coth^2 r \, \left(\frac{d\omega}{k} + d\psi \right)^2 + d\theta^2 + \tan^2\theta \, \left(\frac{d\omega}{k} \right)^2 \right], \\ e^{2\Phi} = \frac{g_{\rm eff}^2}{k} \, \frac{1}{\sinh^2 r \cos^2\theta} \end{cases} \tag{3.7}$$

where ω is the coordinate T-dual to ϕ. The bracketed part of this solution is a $\mathbb{Z}_k$ orbifold of the direct product of two known sigma-models, namely the trumpet (2.37), and the bell defined as:

$$\begin{cases} ds^2 = \alpha' k \left[d\theta^2 + \tan^2\theta \, d\omega^2 \right], \\ e^{2\Phi} = \frac{g_{\rm EFF}^2}{\cos^2\theta}. \end{cases} \tag{3.8}$$

The latter geometry is the target-space of the supercoset $\frac{\mathrm{SU}(2)_k}{\mathrm{U}(1)}$, also known as the $N = 2$ minimal model of central charge $c = 3 - 6/k$ (see [31] for a review). The trumpet geometry is more accurately described as $N = 2$ Liouville theory with a momentum condensate.

In order to study the behavior of D-branes in the NS5-brane background (3.1), we will use the T-dual description (3.7). The conformal field theory describing the curved part of the background is the $\mathbb{Z}_k$ orbifold of the product $\left(\frac{\mathrm{SU}(2)_k}{\mathrm{U}(1)} \right) \times (N = 2 \text{ Liouville})$. The orbifold is the part of the GSO projection that renders the closed string $\mathrm{U}(1)_R$ charges integer. To get a full description of the superstring background, we also have to take into account the six flat directions parallel to the NS5-brane world-volume. They are described by the $N = 2$ conformal field theory of six free real bosons $X^{\mu=0,\ldots,5}$ and six free real

JHEP07(2008)125

fermions $\psi^{\mu=0,\ldots,5}$. We will work in light-cone gauge. In summary, the relevant critical conformal field theory describing the dynamics of strings in the background (3.7) is:

$$\left(\frac{\left(X^{\mu=2,\ldots,5}, \psi^{\mu=2,\ldots,5}\right) \times \left(\frac{\mathrm{SU}(2)_k}{\mathrm{U}(1)}\right) \times (N=2 \text{ Liouville})}{\mathbb{Z}_k^{\mathrm{GSO}}} \right) / \mathbb{Z}_2^{\mathrm{GSO}} \tag{3.9}$$

The product conformal field theory defines a particular non-compact Gepner model (see e.g. [32 – 34] for discussions of these models).

We can also perform T-duality along the isometric ψ direction in the background (3.1) [5]. That would lead to the background described by the mirror dual of the conformal field theory (3.9). In this mirror description, the $N = 2$ Liouville theory is replaced by the cigar [33, 34].

4. D-branes in the coset conformal field theory

We will study D-branes in the full superstring theory by first constructing them in the product conformal field theory (3.9). In section 5 we re-interpret them in the Neveu-Schwarz five-brane background. We find more explicit realizations and important refinements of the proposals of [5].

4.1 D-branes in the minimal model and in flat space

The boundary states in the full conformal field theory (3.9) are the product of factors coming from Liouville theory, the minimal model and the free theory. We studied in detail the boundary states in Liouville theory in section 2. Here we review briefly the relevant boundary states in the minimal model and in flat space.

D-branes in flat space. D-branes in flat space are well-known. They induce Neumann or Dirichlet boundary conditions for the open strings, according to the directions in which they are extended. Let's isolate two flat directions in space-time. They are described on the world-sheet by a free complex boson and fermion. It is convenient to bosonize the free fermion, to get a free compact boson at fermionic radius $\sqrt{2\alpha'}$. The momentum for this compact boson is given by a $\mathbb{Z}_4$ integer s. If this quantum number is even, we are in the Neveu-Schwarz sector while if it is odd, we are in the Ramond sector. A D-brane extended in those two directions is labeled by a quantum number $\hat{s}$, and its one-point function is:

$$\psi_{\hat{s}}^N(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi\frac{s\bar{s}}{2}}. \tag{4.1}$$

For a brane localized in those two directions, the one-point function is:

$$\psi_{\hat{s},\hat{x}^\mu}^D(s, k_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi\frac{s\bar{s}}{2}} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}. \tag{4.2}$$

In the previous formula, k_μ is the closed string momentum and $\hat{x}^\mu$ gives the position of the brane.

JHEP07(2008)125

There is one subtlety when we work in the light-cone gauge: we have to put Dirichlet boundary conditions in the light-cone directions [35]. By a double Wick rotation, we can obtain branes extended in the time direction. The brane will be extended in at most four out of the six flat directions of (3.7). In the following we will consider for definiteness D-branes that fill four flat directions.

D-branes in the minimal model. D-branes in the $N = 2$ minimal model have also been extensively studied (see e.g. [31]). A state in this theory is labeled by three quantum numbers: an $\mathrm{SU}(2)_{k-2}$ spin $j = 0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{k-2}{2}$, an angular momentum $n \in \mathbb{Z}_{2k}$, and a fermionic number $s \in \mathbb{Z}_4$. The D-branes with A-type boundary conditions are given by the one-point functions:

$$\psi^{MM}_{\hat{j},\hat{n},\hat{s}}(j,n,s) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sin\left(\pi \frac{(2j+1)(2\hat{j}+1)}{k}\right)}{\sqrt{\sin \pi \frac{2j+1}{k}}} e^{i\pi \frac{n\hat{n}}{k}} e^{-i\pi \frac{s\hat{s}}{2}}. \tag{4.3}$$

The overlap of two branes is given in the open string channel by:

$$\langle \hat{j}, \hat{n}, \hat{s} | \mathrm{prop} | \hat{j}', \hat{n}', \hat{s}' \rangle = \sum_j N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \chi^{\mathrm{open}}(j, \hat{n} - \hat{n}', \hat{s} - \hat{s}') \tag{4.4}$$

where $\chi(j,n,s)$ are $N = 2$ minimal model characters, and $N^j_{\hat{j}\hat{j}'}$ are the $\mathrm{SU}(2)_{k-2}$ fusion coefficients. These branes have a clear semi-classical description in the bell geometry (3.8), which is weakly curved at large k. They are described by the equation:

$$\sin(\theta)\sin(\omega - \omega_0) = \sin(\theta_0). \tag{4.5}$$

The geometric parameters θ_0 and ω_0 are related to the brane quantum numbers $\hat{j}$ and $\hat{n}$ as [31]:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(2\hat{j}+1)}{k}, \quad \omega_0 = \pi \frac{\hat{n}}{k} - \frac{\pi}{2} \tag{4.6}$$

The branes are oriented straight lines connecting two points of the boundary of the disc geometry.

4.2 Boundary states in the GSO-projected theory

We are now ready to write down the boundary states in the full conformal field theory (3.9). The last necessary step is to take care of the GSO projection. As was done in [34] for the bulk theories, we adapt the standard technology that exists for compact Gepner models [36] to the non-compact Gepner models. To project out the closed string states that do not have odd R-charge, it is sufficient to project out the Ishibashi states that do not satisfy this condition. This operation comes with a necessary change of normalization of the one-point functions. Next, to implement spin-statistics in the partition function, we add to the one point function a factor $(-1)^{s_0^2/2}$, where s_0 is the fermionic quantum number in one of the flat factors. That makes for a minus sign for fermions in the one-loop amplitude. Then we can identify the branes that preserve supersymmetry: they only have states with

JHEP07(2008)125

odd R-charges in their overlap, in the open string channel. This procedure extends to the construction of D-branes in all the non-compact Gepner models studied in [33, 34] .

With these remarks in mind, we can write down the one point functions for the D-branes. We introduce the fermionic numbers $s_{0,1,2,3}$ corresponding respectively to the four factors of the conformal field theory (3.9): the $X^{\mu=2,3}$ and $X^{\mu=4,5}$ directions, the minimal model and the $N=2$ Liouville factor. We distinguish three families of branes corresponding to the three families of section 2:

- Continuous brane $|\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{J},\hat{m},\hat{s}_3\rangle_c$:

$$\Psi^c_{\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{J},\hat{m},\hat{s}_3} = \kappa_c e^{i\pi\frac{\hat{s}_0^2}{2}}\psi^N_{\hat{s}_0}\times\psi^N_{\hat{s}_1}\times\psi^{MM}_{\hat{j},\hat{n},\hat{s}}\times\psi^c_{\hat{J},\hat{m},\hat{s}_3} \tag{4.7}$$

- Discrete brane $|\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{J},\hat{r},\hat{s}_3\rangle_d$:

$$\Psi^d_{\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{J},\hat{r},\hat{s}_3} = \kappa_d e^{i\pi\frac{\hat{s}_0^2}{2}}\psi^N_{\hat{s}_0}\times\psi^N_{\hat{s}_1}\times\psi^{MM}_{\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2}\times\psi^d_{\hat{J},\hat{r},\hat{s}_3} \tag{4.8}$$

- Identity brane $|\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{m},\hat{s}_3\rangle_{\mathbb{I}}$:

$$\Psi^{\mathbb{I}}_{\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{m},\hat{s}_3} = \kappa_{\mathbb{I}} e^{i\pi\frac{\hat{s}_0^2}{2}}\psi^N_{\hat{s}_0}\times\psi^N_{\hat{s}_1}\times\psi^{MM}_{\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2}\times\psi^{\mathbb{I}}_{\hat{m},\hat{s}_3} \tag{4.9}$$

The arguments of the one-point functions are left implicit. The additional label $\hat{s}_3$ in the Liouville one-point functions $\psi^{c,d,\mathbb{I}}$ indicates that we consider the sector of the theory spectrally flowed by $\frac{\hat{s}_3}{2}$ units. The normalization factors $\kappa_{c,d,\mathbb{I}}$ are a consequence of the GSO projection. They will be fixed by the Cardy condition in the following subsection.

Annulus amplitudes. We compute the annulus amplitudes for open strings stretching between the various families of branes. We focus here on continuous and identity branes. We write out the annulus partition function but suppress the integral over the modulus of the annulus and the momenta (as well as the appropriate measure factor) in order not to clutter the formulas. Let's start out with the overlap of two identity branes [33, 9]:

$$\begin{aligned}
Z_{\mathbb{I}-\mathbb{I}} &= {}_{\mathbb{I}}\langle\hat{s}'_0;\hat{s}'_1;\hat{j}',\hat{n}',\hat{s}'_2;\hat{m}',\hat{s}'_3|\text{prop}|\hat{s}_0;\hat{s}_1;\hat{j},\hat{n},\hat{s}_2;\hat{m},\hat{s}_3\rangle_{\mathbb{I}} \\
&= \kappa_{\mathbb{I}}^2\frac{1}{K}\sum_{v=0}^{K-1}\frac{1}{2^3}\sum_{v_1,v_2,v_3=0}^{1}\Bigg[\Bigg(\sum_{s_0,s_1}(-1)^{s_0+\hat{s}_0-\hat{s}'_0} \\
&\quad \delta^{(4)}_{(s_0,2+\hat{s}_0-\hat{s}'_0-v-2v_1-2v_2-2v_3)}\delta^{(4)}_{(s_1,\hat{s}_1-\hat{s}'_1-v-2v_1)}\frac{\Theta_{s_0,2}}{\eta^3}\frac{\Theta_{s_1,2}}{\eta^3}\Bigg) \\
&\quad \Bigg(\sum_{j,n,s_2}N^j_{\hat{j}\hat{j}'}\delta^{(2k)}_{(n,\hat{n}-\hat{n}'-v)}\delta^{(4)}_{(s_2,\hat{s}_2-\hat{s}'_2-v-2v_2)}\chi(j,n,s_2)\Bigg) \\
&\quad \Bigg(\sum_{r,s_3}\delta^{(2k)}_{(r,\hat{m}-\hat{m}'-\frac{v}{2})}\delta^{(4)}_{s_3,\hat{s}_3-\hat{s}'_3-v-2v_3}Ch_{\mathbb{I}}(r,s_3)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

We introduced the number $K=lcm(4,2k)$ (namely the lowest common multiple of 4 and $2k$). The summation variables v, v_1, v_2 and v_3 are Lagrange multipliers that implement

JHEP07(2008)125

the GSO projection in the closed string channel. The summation over v projects the closed string R-charges to odd integer values. The other three take care of the coherence of the spin structures between the different factors. The factor $(-1)^{s_0+\hat{s}_0-\hat{s}'_0}$ gives a minus sign to the fermionic states, as required by spin-statistics. The second line gives the contribution of the free fermions (at level 2) and bosons from the flat directions. If the two branes are separated by a distance δ along some flat direction, there is an additional factor $q^{\frac{1}{\alpha'}(\frac{\delta}{2\pi})^2}$ in the partition function. Using the Cardy condition, we can deduce the normalization of the identity brane:

$$\kappa_{\mathbb{I}} = \sqrt{8K} \tag{4.11}$$

We can rewrite this partition function in a more explicit form. For the sake of symmetry, we introduce another summation variable v_0 equal to $1-v_1-v_2-v_3$ modulo 2, together with a Lagrange multiplier $a = 0, 1$ that enforces this definition. Then we split the summation over $v \in \mathbb{Z}_K$ into two summations over $p \in \mathbb{Z}_k$ and $b = 0, 1$. Finally we perform the summation over the variables $s_0, s_1, j, n, s_2, r, s_3$ to get rid of the delta functions. We obtain:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{I}-\mathbb{I}} = & \sum_{v_{0,1,2,3}=0}^{1} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^b \frac{(-1)^{a(1+\sum v_i)}}{2} \frac{\Theta_{b+2v_0+\hat{s}'_0-\hat{s}_0,2}}{\eta^3} \frac{\Theta_{b+2v_1+\hat{s}'_1-\hat{s}_1,2}}{\eta^3} \\ & \sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{p=0}^{k-1} N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \chi(j, 2p+b+\hat{n}-\hat{n}', b+2v_2+\hat{s}'_2-\hat{s}_2) \\ & Ch_{\mathbb{I}}(p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3). \end{aligned} \tag{4.12}$$

The sum over v_i implements the sum over all possible NS and R-sector states, such that they do not mix. Since we have the equivalent of four complex fermions, this is a sum over $\mathbb{Z}_2^4$. The sum $\sum v_i$ we can interpret as the fermion number. So the sum over a with the factor of $1/2$ is a projector onto odd fermion number: $(1-(-1)^F)/2$. The label b indicates whether we are in the NS or the R sector, and that the factor $(-1)^b$ implements the space-time statistics.

It is straightforward to generalize the above calculation to the overlap of an identity brane with a continuous brane. We find the same normalization factor for the continuous brane: $\kappa_c = \sqrt{8K}$. In the open string channel the overlap reads:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{I}-c} = & {}_{\mathbb{I}}\langle \hat{s}'_0; \hat{s}'_1; \hat{j}', \hat{n}', \hat{s}'_2; \hat{m}', \hat{s}'_3 | \text{prop} | \hat{s}_0; \hat{s}_1; \hat{j}, \hat{n}, \hat{s}_2; \hat{J}, \hat{m}, \hat{s}_3 \rangle_c \\ = & \sum_{v=0}^{K-1} \sum_{v_1,v_2,v_3=0}^{1} \Bigg[\Bigg(\sum_{s_0,s_1} (-1)^{s_0+\hat{s}_0-\hat{s}'_0} \\ & \delta^{(4)}_{(s_0,2+\hat{s}_0-\hat{s}'_0-v-2v_1-2v_2-2v_3)} \delta^{(4)}_{(s_1,\hat{s}_1-\hat{s}'_1-v-2v_1)} \frac{\Theta_{s_0,2}}{\eta^3} \frac{\Theta_{s_1,2}}{\eta^3} \Bigg) \\ & \Bigg(\sum_{j,n,s_2} N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \delta^{(2k)}_{(n,\hat{n}-\hat{n}'-v)} \delta^{(4)}_{(s_2,\hat{s}_2-\hat{s}'_2-v-2v_2)} \chi(j,n,s_2) \Bigg) \\ & \Bigg(\sum_{r,s_3} \delta^{(2k)}_{(r,\hat{m}-\hat{m}'-\frac{v}{2})} \delta^{(4)}_{s_3,\hat{s}_3-\hat{s}'_3-v-2v_3} Ch_c(\hat{J}, r, s_3) \Bigg) \Bigg] \end{aligned} \tag{4.13}$$

JHEP07(2008)125

Performing the same manipulation of variables as previously, we can rewrite this partition function as:

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathbb{I}-c} = & \sum_{v_{0,1,2,3}=0}^{1} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^b \frac{(-1)^{a(1+\sum v_i)}}{2} \frac{\Theta_{b+2v_0+\hat{s}'_0-\hat{s}_0,2}}{\eta^3} \frac{\Theta_{b+2v_1+\hat{s}'_1-\hat{s}_1,2}}{\eta^3} \\
& \sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{p=0}^{k-1} \Big[N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \chi(j, 2p+b+\hat{n}-\hat{n}', b+2v_2+\hat{s}'_2-\hat{s}_2) \\
& \times Ch_c(\hat{J}, p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \Big] . \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

The overlap of two continuous branes in Liouville was computed in section 2.5. We deduce the overlap of two continuous branes in the product conformal field theory (3.9), depending on the value of the shift Δ defined in equation (2.25). We obtain after simplification:

If $\Delta = 0$:

$$
\begin{aligned}
Z_{c-c} = & \sum_{v_{0,1,2,3}=0}^{1} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^b \frac{(-1)^{a(1+\sum v_i)}}{2} \frac{\Theta_{b+2v_0+\hat{s}'_0-\hat{s}_0,2}}{\eta^3} \frac{\Theta_{b+2v_1+\hat{s}'_1-\hat{s}_1,2}}{\eta^3} \\
& \sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{p=0}^{k-1} \Big[N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \chi(j, 2p+b+\hat{n}-\hat{n}', b+2v_2+\hat{s}'_2-\hat{s}_2) \\
& \int_{P'=-\infty}^{\infty} dP' \Big(\rho_1(P'; \hat{P}, \hat{P}') Ch_c^{\text{open}}(P', p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \\
& + \rho_2(P'; \hat{P}, \hat{P}') Ch_c^{\text{open}}(P', p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \Big) \Big] \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

If $\Delta \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
Z_{c-c} = & \sum_{v_{0,1,2,3}=0}^{1} \sum_{a,b=0}^{1} (-1)^b \frac{(-1)^{a(1+\sum v_i)}}{2} \frac{\Theta_{b+2v_0+\hat{s}'_0-\hat{s}_0,2}}{\eta^3} \frac{\Theta_{b+2v_1+\hat{s}'_1-\hat{s}_1,2}}{\eta^3} \\
& \sum_{2j=0}^{k-2} \sum_{p=0}^{k-1} \Big[N^j_{\hat{j}\hat{j}'} \chi(j, 2p+b+\hat{n}-\hat{n}', b+2v_2+\hat{s}'_2-\hat{s}_2) \\
& \Big[\int_{P'=-\infty}^{\infty} dP' \Big(\rho_1(P'; \hat{P}, \hat{P}') Ch_c^{\text{open}}(P', p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \\
& + \rho_2(P'; \hat{P}, \hat{P}') Ch_c^{\text{open}}(P', p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \Big) \\
& + \; Ch_c^{\text{open}}(P' = \hat{P}+\hat{P}'-\frac{i}{2}, p+\frac{b}{2}+\hat{m}-\hat{m}', b+2v_3+\hat{s}'_3-\hat{s}_3) \Big] \Big] \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

The density functions ρ_1 and ρ_2 are defined in equation (2.26). In the self-overlap of continuous or identity branes the dependence on the label $\hat{s}_i$, $\hat{n}$ and $\hat{m}$ will drop out. A consequence is that the spectrum on the brane will be independent of its (discretized) orientation.

JHEP07(2008)125

Set of mutually supersymmetric branes. In order to know which set of branes preserve some supersymmetry, we have to look at the partition function for the open strings that stretch between the branes. The spectrum obtained must be consistent with the GSO projection. That requires that the R-charges are odd integers.[5] Looking at the annulus amplitudes, we see that all the branes we defined are BPS. Moreover, two branes are mutually supersymmetric if and only if:

- The periodicity conditions are the same in each factor: $\hat{s}_0 - \hat{s}_i = \hat{s}'_0 - \hat{s}'_i \ (mod\ 2)$ for $i = 1, 2, 3$.
- The branes satisfy the condition that angles and fluxes in various two-planes sum up to zero (extending the analysis of [37]):

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{\hat{s}_i - \hat{s}'_i}{2} + \frac{(2\hat{m} - \hat{n}) - (2\hat{m}' - \hat{n}')}{k} = 0 \ (mod\ 2). \tag{4.17}$$

4.3 Semi-classical picture

We will now discuss the semi-classical interpretation of these branes in the geometry (3.7). It is obtained from the semi-classical analysis of the branes in Liouville theory (section 2.6) and in the minimal model (section 4.1). The only subtlety is the implementation of the $\mathbb{Z}_k$ orbifold in the angular direction ω (which is the geometrical manifestation of the GSO projection). The invariance under the action of the $\mathbb{Z}_k$ group of the (regular) branes we consider is guaranteed by taking k copies of the semi-classical branes in the covering space. In the conformal field theory we performed this step by discarding the Ishibashi states that do not pass the GSO projection.

The identity branes $|\hat{s}_0; \hat{s}_1; \hat{\hat{j}}, \hat{n}, \hat{s}_2; \hat{m}, \hat{s}_3\rangle_{\mathbb{I}}$ are compact and located in the more strongly coupled region.

The continuous branes $|\hat{s}_0; \hat{s}_1; \hat{\hat{j}}, \hat{n}, \hat{s}_2; \hat{J}, \hat{m}, \hat{s}_3\rangle_c$ and the discrete branes $|\hat{s}_0; \hat{s}_1; \hat{\hat{j}}, \hat{n}, \hat{s}_2; \hat{J}, \hat{r}, \hat{s}_3\rangle_d$ are extended both in the trumpet and in the bell, according to equations (2.38) and (4.5). Their semi-classical description is given by:

$$\left\{ \bigcup_{n=0}^{k-1} \left(\cosh(r) \sin\left(\psi + \frac{\omega}{k} - \psi_0 + \frac{2\pi n}{k}\right) = c \ ; \ \sin(\theta) \sin\left(\frac{\omega}{k} - \omega_0 + \frac{2\pi n}{k}\right) = \sin\theta_0 \right) \right\} \tag{4.18}$$

The parameters θ_0 and ω_0 are given in equation (4.6) in terms of the boundary state labels $\hat{\hat{j}}$ and $\hat{n}$. The parameters c and ψ_0 are given in terms of the continuous brane labels $\hat{J}$ and $\hat{m}$ in equations (2.40) and (2.39) (and for the discrete brane in equations (2.44) and (2.43)).

5. D-branes meet NS5-branes

In the previous section we built D-branes in the coset background (3.7). We now go back to the T-dual background (3.5) describing the near-horizon limit of NS5-branes on a circle.

[5] Our conventions for the R-charges are those of [34] except that we put the $\mathrm{U}(1)_R$ charge of the minimal model to agree with the more standard expression $Q_{MM} = \frac{s}{2} - \frac{n}{k}$.

JHEP07(2008)125

We first interpret the continuous brane as a stack of D4-branes blown up by the di-electric effect. Using the results of section 2, we then give an exact description of the cutting of D4-branes into pieces as they hit NS5-branes.

5.1 D-branes in the NS5-branes geometry

In order to develop some intuition about the configurations we are discussing, we first study the semi-classical description of the branes in the coset geometry (3.5).

Continuous and discrete branes. The semi-classical description of the continuous branes is obtained from equation (4.18). The T-duality is performed in the angular ω direction. To get the equation defining the brane in the NS5-brane background (3.5), we proceed as in [5]. First we write the angular coordinate ω in terms of the other coordinates. This gives the gauge field living on the brane. Then we eliminate ω from the equations (4.18) to get the geometry of the brane. In a parametric form, we obtain:

$$\begin{cases} \cosh(r)\sin(\psi - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega}) = c \\ \sin(\theta)\sin(\tilde{\omega}) = \sin(\theta_0) \end{cases} \tag{5.1}$$

The parameter $\tilde{\omega}$ extends from zero to 2π. The direction of the brane in the plane (x^6, x^7) is given by the angle $\psi_0 - \omega_0$, which is fixed by the combination of the brane parameters $\hat{n} - 2\hat{m}$. The same combination appears in the condition of mutual supersymmetry for two branes (equation (4.17)). This means that mutually supersymmetric branes are parallel.[6] The orthogonal combination $\hat{n} + 2\hat{m}$ gives the value of a Wilson line on the brane. The shape of the brane is shown in figures 4 and 5. We observe that there are two physically different configurations for this brane, according to the value of the parameter c. For $c > 1$, the brane does not intersect the circle of NS5-branes. It is composed of a single self-intersecting sheet. For $c < 1$, the brane does intersect the circle of NS5-branes. It is composed of two distinct sheets. If the parameters c and θ_0 satisfy $1 > c > \sin\theta_0$, the two sheets intersect each other, as shown in figure 5. On the other hand, if the parameters are such that $c < \sin\theta_0$, the two sheets do not intersect each other.

Notice that the continuous brane in the conformal field theory has positive parameters $\hat{J}$ and $\hat{j}$, which implies that the geometric parameters c and θ_0 satisfy: $c \geq \cos\frac{2\pi}{2k} \geq \sin\theta_0$. The conformal field theory description of continuous branes with parameter c smaller than $\cos\frac{2\pi}{2k}$ is an interesting open problem. We will make this analysis more precise in section 5.2.

For the discrete branes, the parameter c is always smaller than one and quantized (cf. equation (2.44)). The semi-classical description is otherwise identical.

D-branes in the presence of fluxes and the di-electric effect. We will now argue that the continuous brane can be thought of as a stack of D4-branes blown-up by the di-electric effect. We first discuss this effect in the asymptotic region, where the doubly scaled geometry (3.5) simplifies to $\mathbb{R}_{(r)} \times S^3_{(\theta,\phi,\psi)}$. The radius of the three-sphere is equal

[6] If the fermionic parameters $\hat{s}_i$ have different parity for the two branes, the condition becomes that they must be orthogonal.

JHEP07(2008)125

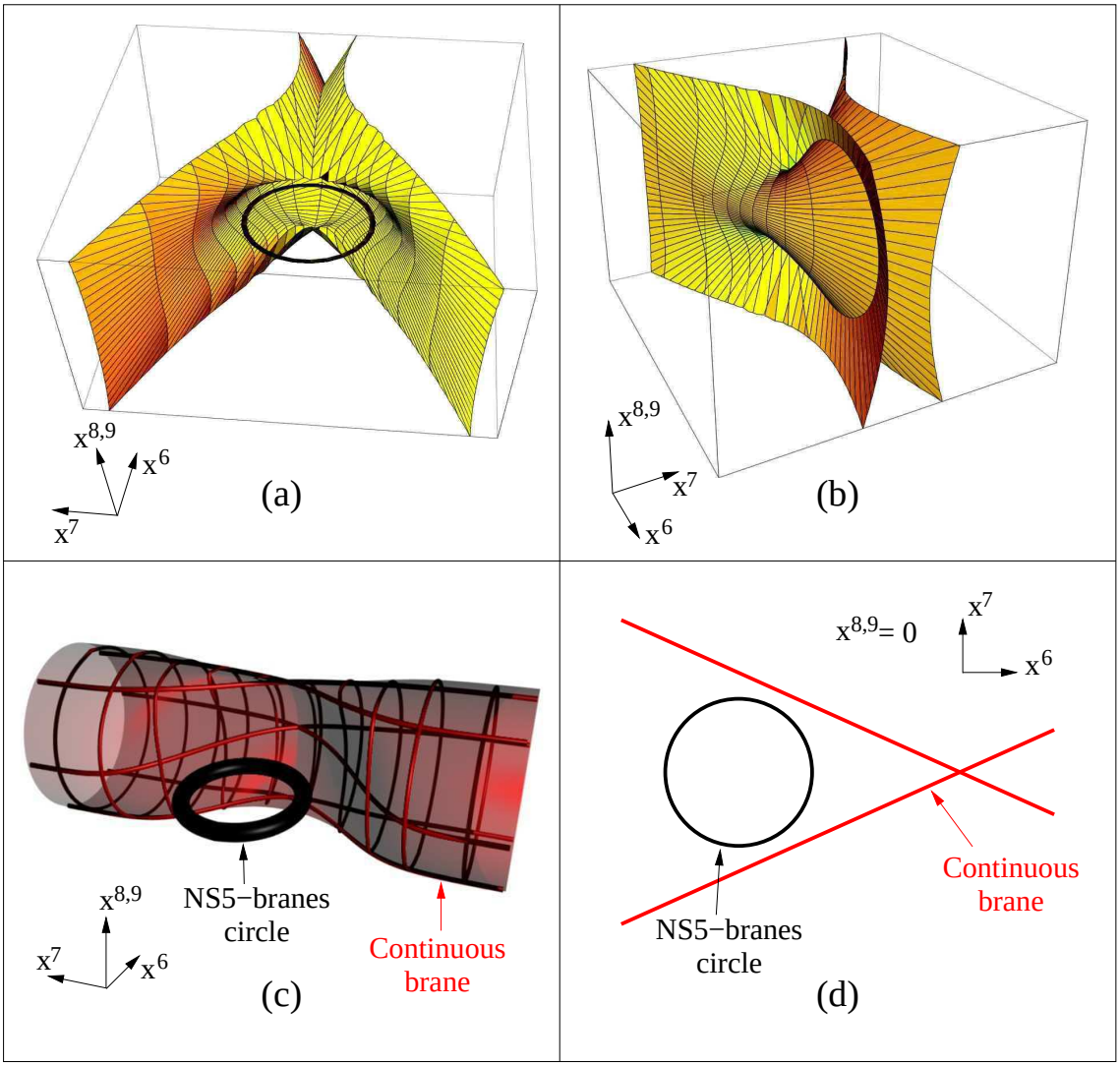


Figure 4: Semi-classical picture of the single-sheeted continuous brane. It is invariant under rotation in the plane (x^8, x^9). The values of the parameters used to draw the brane are: $c = 1.2$, $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$, $\psi_0 - \omega_0 = 0$. The circle of NS5-branes is also shown. (a),(b): The single-sheeted continuous brane as seen from two different points of view (in Euclidean space). (c) A sketch of the single-sheeted continuous brane, taking into account the non-trivial metric in space-time. (d) The intersection of the single-sheeted continuous brane with the plane containing the circle of NS5-branes.

to $\sqrt{k\alpha'}$. This is the geometry of the throat created by k NS5-branes. In this region the geometry of the continuous brane (5.1) simplifies to:

$$\begin{cases} r \gg 1 \\ \sin(\theta)\sin(\psi - \psi_0) = \pm\sin(\theta_0) \end{cases} \tag{5.2}$$

The second line defines two anti-podal two-spheres embedded in the three-sphere (θ, ϕ, ψ). The radius of these two-spheres is equal to $\sqrt{k\alpha'}\cos\theta_0$. We deduce that the geometry of

JHEP07(2008)125

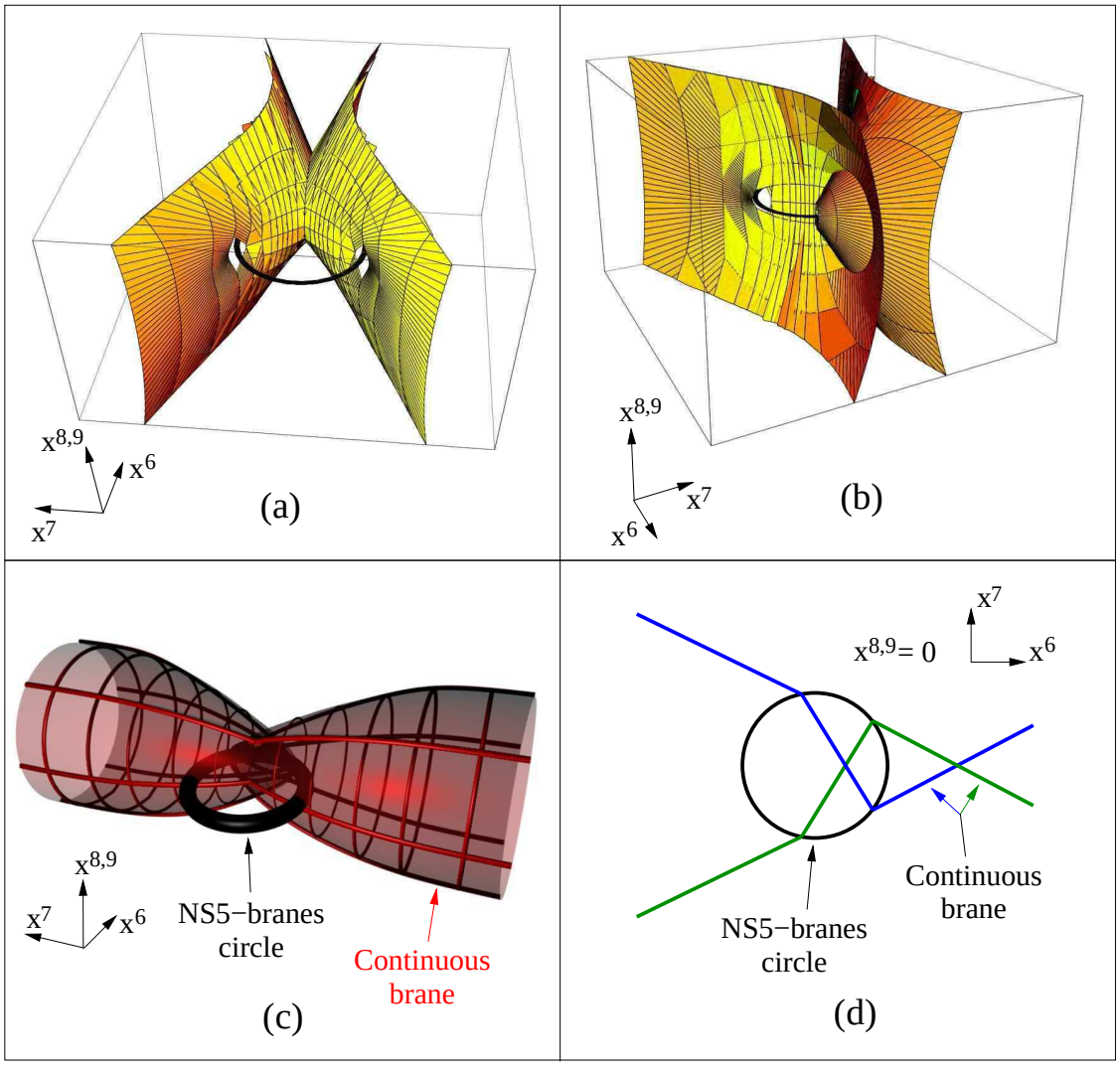


Figure 5: Semi-classical picture of the double-sheeted continuous brane. It is invariant under rotation in the plane (x^8, x^9). The values of the parameters used to draw the brane are: $c = 0.8$, $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$, $\psi_0 - \omega_0 = 0$. The circle of NS5-branes is also shown. (a), (b): The double-sheeted continuous brane as seen from two different points of view (in Euclidean space). (c): A sketch of the double-sheeted continuous brane, taking into account the non-trivial metric in space-time. (d) The intersection of the double-sheeted continuous brane with the plane containing the circle of NS5-branes. The two sheets are drawn with different colors.

the continuous brane far from the circle is $(S^2 + S^2) \times \mathbb{R}$, as drawn in figure 6 (a). So in the full NS5-brane background (3.1), the tube goes into and out of the throat (cf. figure 6 (b)).

D-branes of low dimensional world-volume in the presence of fluxes tend to develop additional world-volume dimensions (see [38] for the case of RR fluxes and [39] for the case of NSNS fluxes). This is a di-electric effect. In particular in [39] it was shown that n coincident D0-branes in the $SU(2)_k$ WZWN model tend to decay to a single spherical D2-brane. The radius of this brane is $\sqrt{k\alpha'}\sin(\pi n/k)$ [31].

JHEP07(2008)125

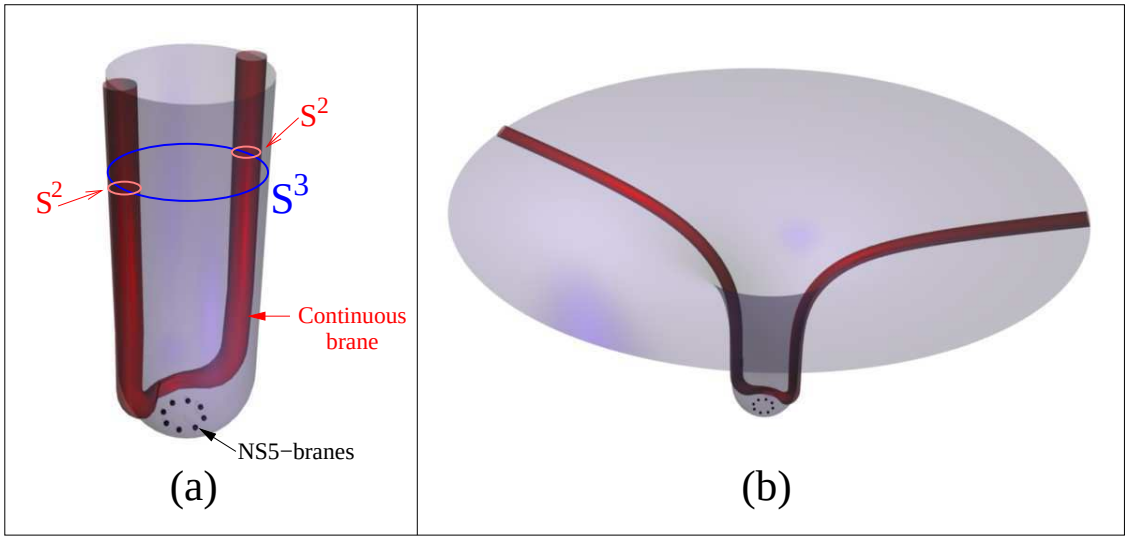


Figure 6: The shape of the continuous brane far from the NS5-branes. (a) In the doubly scaled geometry (3.5), the intersection of the continuous brane with the transverse three-sphere is given by two anti-podal two-spheres. (b) In the full NS5-brane background (3.1), the continuous brane has two legs getting out of the throat.

The same phenomenon arises in the NS5-brane background (3.5), since the NS5-branes source NSNS-flux on the three-sphere $S^3_{(\theta,\phi,\psi)}$. So even though the world-volume of the continuous brane (5.1) is seven-dimensional (three-dimensional in the transverse space $x^{6,7,8,9}$, and also extended in four flat directions), we can also think of this single extended D6-brane as a stack of n coincident D4-branes. We identify the number n of D4-branes via the radius of the two-spheres defined by equation (5.2):

$$n = 2\hat{j} + 1 \tag{5.3}$$

The D-branes with one dimension in the transverse space $x^{6,7,8,9}$ and extremizing the DBI action in the NS5 background (3.1) are straight lines in the $x^{6,7,8,9}$ coordinates. When we minimize the tension as well as the length, the harmonic function drops out in the calculation. Since the brane (5.1) is invariant under rotation in the (x^8, x^9) plane, we consider only D-branes that preserve that symmetry. They are straight lines in the (x^6, x^7) plane, located at the origin of the (x^8, x^9) plane. The direction of this line is given by the angular parameter $\psi_0 - \omega_0$, and the coordinate distance to the origin is given by the parameter c multiplied by ρ_0.

In fact, we are considering the bulk and brane system in a *triple* scaling limit, which consists of the usual double scaling limit in the bulk, and a third limit that scales the coordinate distance of the branes to the NS5-branes to zero, commensurate with the scaling down of the coordinate distance between the NS5-branes, such that the ratio (equal to the parameter c) is fixed.

We now understand that equations (5.1) describe the manifestation of the di-electric effect for D4-branes in the presence of a circle of NS5-branes. A stack of coincident D4-branes decays to a single D6-brane which shape is given by (5.1) (cf. figure 7). Far from

JHEP07(2008)125

the circle, the D6-brane has geometry $(S^2 + S^2) \times \mathbb{R}$ in the transverse space $x^{6,7,8,9}$. Close to the NS5-branes, the two-spheres are deformed by the repulsion between the NS5-branes and the D6-brane. We can understand the way the two-spheres are deformed as follow. Consider the two-sphere on one leg of the brane. The north pole of the sphere is pulled inwards as we get closer to the NS5-branes. It reaches the south pole and goes beyond as the distance to the NS5-branes increases again. We end up on the second leg with the second two-sphere. The two-sphere changes orientation in the process.

In more detail, consider for example the case where the D4-branes do not intersect the circle of NS5-branes ($c > 1$). The $\mathbb{Z}_2$ symmetry $\psi \to -\psi + 2\psi_0 - 2\omega_0$ has a fixed point at $\psi = \psi_0 - \omega_0$: this is the point where the D4-branes are closest to the circle of NS5-branes. This particular angular direction also defines the locus of the self-intersection of the continuous brane (5.1). In terms of the coordinates $x^{6,7,8,9}$ defined in (3.3), this surface has equation:

$$\begin{cases} -\sin\psi_0 x^6 + \cos\psi_0 x^7 = 0 \\ \left(\cos\psi_0 x^6 + \sin\psi_0 x^7 - \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{c}{\sin\theta_0} + \frac{\sin\theta_0}{c}\right)\right)^2 + (x^8)^2 + (x^9)^2 = \rho_0^2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{c}{\sin\theta_0} + \frac{\sin\theta_0}{c}\right)^2 - 1\right) \\ \cos\psi_0 x^6 + \sin\psi_0 x^7 \geq c\sin\theta_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

The first two lines describe a surface with topology of a two-sphere, while the third line removes a piece of this surface. Actually, the surface is double-sheeted and without boundary. Indeed, this surface describes the deformed two-sphere of the continuous brane at the point where the north pole meets the south pole and the sphere changes orientation (cf. figure 7).

When the stack of D4-branes intersects the circle, with parameters such that $1 \geq c \geq \sin\theta_0$, the D6-brane has two sheets that intersect each other along the surface defined by the same equations (5.4). However this time the inequality is always satisfied, and we have a full two-sphere. If the parameters satisfy $c < \sin\theta_0$, the two sheets of the brane do not intersect each other anymore.

Identity branes. To obtain a semi-classical description of the identity branes, it is convenient to consider them in the background mirror to (3.7), where the trumpet is replaced by the cigar and the region near the tip is under geometric control. Building the identity branes in the conformal field theory mirror to (3.9), we can deduce the semi-classical description of the identity branes in the Neveu-Schwarz five-brane background (3.5) [5]. We can also use the following semi-classical description of the identity brane in the trumpet geometry (2.37):

$$r = 0 \ ; \ \psi - \psi_{\mathbb{I}} = 0 \tag{5.5}$$

with the angular direction $\psi_{\mathbb{I}}$ defined in terms of the brane parameter $\hat{m}$ as:

$$\psi_{\mathbb{I}} = 2\pi\frac{\hat{m}}{k}. \tag{5.6}$$

JHEP07(2008)125

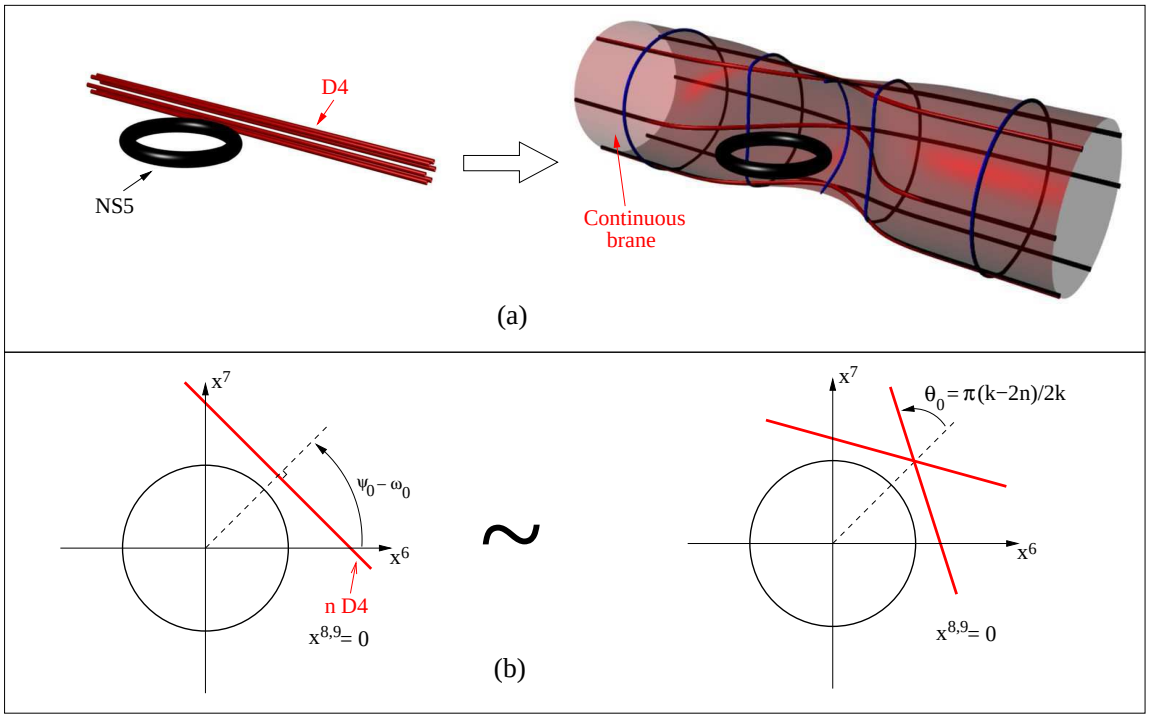


Figure 7: The di-electric effect for a stack of D4-branes in the presence of a circle of NS5-branes. (a) The coincident D4-branes are blown up to a single continuous brane. Far from the circle, the continuous brane has geometry $(S^2 + S^2) \times \mathbb{R}$ in the transverse space $x^{6,7,8,9}$. Close to the circle, the two-spheres are deformed by the repulsion between the D6-brane and the NS5-branes. (b) The intersection of the previous D-branes with the plane containing the NS5-branes. We indicate how the parameters defining the continuous brane and the straight D4-branes are related.

Then we perform a T-duality as in the previous case to get the semi-classical description of the identity branes in the NS5-brane background:

$$\begin{cases} r = 0 \\ \sin(\theta)\sin\left(\psi - \psi_{\mathbb{I}} + \omega_0\right) = \sin(\theta_0) \end{cases} \tag{5.7}$$

The parameters θ_0 and ω_0 are defined in terms of the brane parameter $\hat{j}$ and $\hat{n}$ in (4.6). The parameter $\hat{j}$ fixes the length of the brane. These branes are straight lines in the (x^6, x^7) plane, starting and ending on the circle of NS5-branes. As for the continuous branes, the combination of the brane parameters $\hat{n} - 2\hat{m}$ gives the angular orientation of the brane.

In the minimal model, the choice of parameters $\hat{j}$, $\hat{n}$, $\hat{s}_2$ is constrained by the selection rule (namely: $2\hat{j} + \hat{n} + \hat{s}_2$ is zero modulo two).[7] As a consequence, the length of an identity brane is related to its orientation. Note that even though the NS5-branes have been spread on the circle, their position is still coded in the worldsheet instantons. We make the minimal assumption that the identity branes are suspended between NS5-branes. Since the identity

[7]For simplicity we only discuss the branes of the minimal model with $\hat{s}_2$ even. The branes with $\hat{s}_2$ odd have a semi-classical interpretation that differs from the one given in equation (4.5) (see [31]).

JHEP07(2008)125

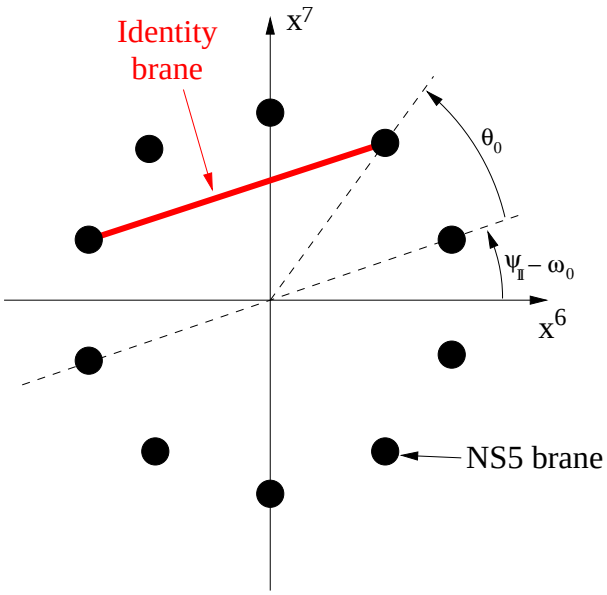


Figure 8: Semi-classical description of an identity brane, stretching between NS5-branes.

branes are defined only for integer values of the parameter $\hat{m}$, this assumption is consistent with the selection rule in the minimal model. The semi-classical description of the identity branes gives a way to recover the positions of the NS5-branes on the circle.

5.2 D-branes cut in two pieces

Consider a continuous brane (4.7). In order to obtain a semi-classical picture of the operation we performed in the exact boundary conformal field theory, we study what happens when the brane parameter $\hat{J}$ goes to one half (i.e. the imaginary part of $\hat{J}$ goes to zero), keeping all the other brane parameters fixed. The geometric parameter c goes down to one as the brane parameter $\hat{J}$ goes to one-half. When the geometric parameter c is equal to one, the continuous brane touches the circle and is on the verge of being cut into two intersecting sheets.

Let's make this point more precise. First notice that the surface (5.1) is symmetric under the reflection $\psi - \psi_0 + \omega_0 \to -(\psi - \psi_0 + \omega_0)$ (together with $\tilde{\omega} \to \pi - \tilde{\omega}$). Figures 4 and 5 suggest that when the brane is cut, the two sheets are exchanged by this symmetry. We would like to know whether there exists a smooth path γ on the brane connecting two symmetric points, of respective angular coordinate ψ_1 and $-\psi_1 + 2\psi_0 - 2\omega_0$. The value of the parameter $\tilde{\omega}$ for these points is noted respectively $\tilde{\omega}_1$ and $\pi - \tilde{\omega}_1$. Along the path γ, the angular coordinate ψ goes smoothly from ψ_1 to $-\psi_1 + 2\psi_0 - 2\omega_0$, and the parameter $\tilde{\omega}$ goes smoothly from $\tilde{\omega}_1$ to $\pi - \tilde{\omega}_1$. Notice that the parameter $\tilde{\omega}$ has to stay within the range $\theta_0 \leq \tilde{\omega} \leq \pi - \theta_0$ for the equations (5.1) to have a solution. For the same reason the sum $\psi - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega}$ must be positive and smaller than π. We deduce that along the path γ, the sum $\psi - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega}$ goes smoothly from $\psi_1 - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega}_1$ to $\pi - (\psi_1 - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega}_1)$, necessarily crossing the value $\psi - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$. But this is possible if and only if the brane parameter c is greater or equal to one. Indeed, if $c < 1$, the first equation in (5.1)

JHEP07(2008)125

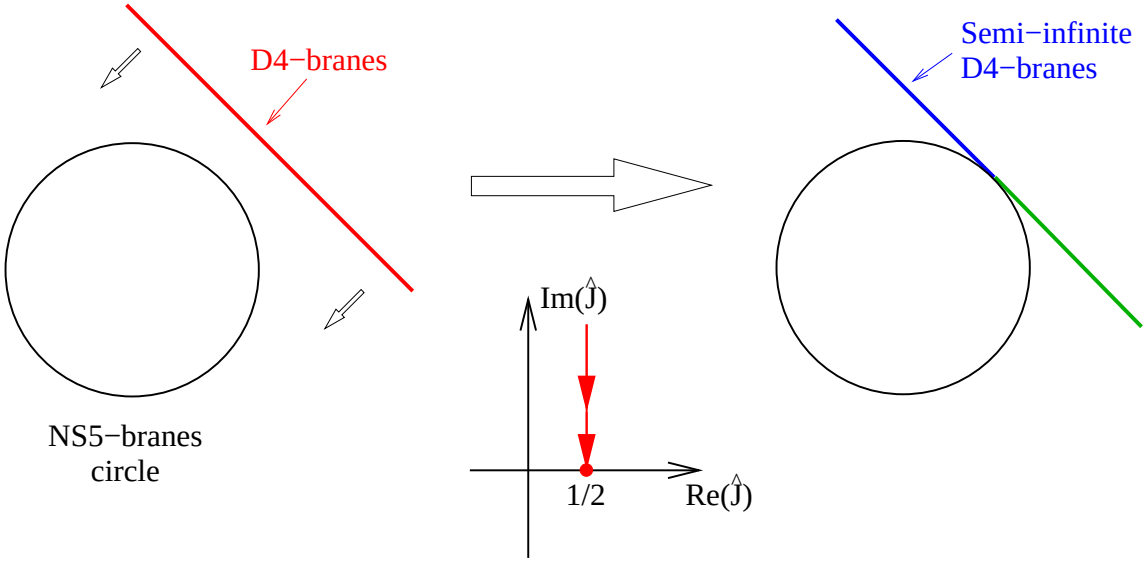


Figure 9: A stack of D4-branes approaches a circle of NS5-branes, as the brane parameter $\hat{J}$ goes to one-half. For $\hat{J} = \frac{1}{2}$ the D4-branes are cut in two pieces.

does not have solutions for $\psi - \psi_0 + \omega_0 + \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$. The conclusion is that the path γ exists for $c \geq 1$. In that case, the two points are smoothly connected and the brane is single-sheeted. If $c < 1$, there is no smooth path between two symmetric points, and the brane is made of two distinct sheets. If $1 > c > \sin\theta_0$, the two sheets of the brane intersect and one can find a path between two symmetric points. However the parameter $\tilde{\omega}$ will not vary continuously along such a path, indicating that we pass from one sheet onto the other.

We argued in the previous section that the continuous D6-brane can be interpreted as a stack of D4-branes. The cutting of the D6-brane in two sheets can also be understood in terms of the D4-branes. As the D4-branes hit the NS5-circle, they are cut in two semi-infinite pieces (see figure 9).

The brane addition relation (2.20) is valid precisely at the point where the D6-brane is cut in two pieces. That implies that the continuous brane with parameter $\hat{J} = \frac{1}{2}$ (and $\hat{m}$ half-integer) is the sum of two discrete branes. The picture obtained in the conformal field theory fits nicely with the semi-classical analysis.

5.3 D-branes cut in three pieces

Now we want to study the continuous brane when it gets inside the circle of NS5-branes, that is for values of the parameter c smaller than one. Consider a continuous brane (4.7) with parameter $\hat{m}$ integer (and any value for the other parameters). We study what happens when the parameter $\hat{J}$ goes to zero, keeping all the other parameters fixed. That mirrors what we did in section 2.5, while computing the overlap of continuous branes in Liouville theory. The addition relation (2.19) implies that an identity brane (4.9) appears when the continuous brane parameter $\hat{J}$ is equal to zero. The identity brane created has the same parameters as the continuous brane. We will now understand the appearance of this identity brane from the semi-classical analysis of the continuous branes.

JHEP07(2008)125

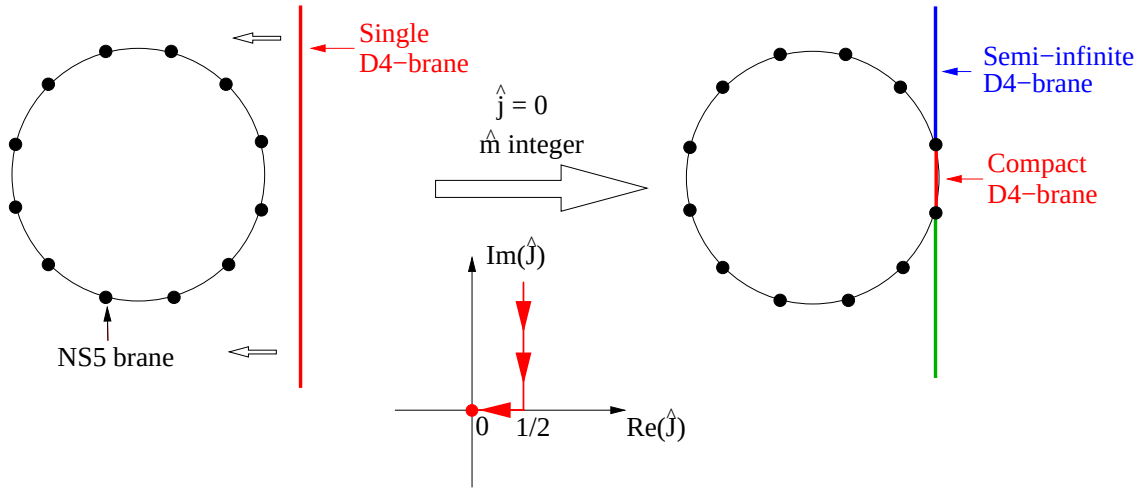


Figure 10: A particular case: a single D4-brane approaches a circle of NS5-branes, as the brane parameter $\hat{J}$ goes to zero (the parameter $\hat{m}$ is integer). For $\hat{J} = 0$ the D4-brane is cut in three pieces. Massless open strings live on the compact piece.

Let's first consider the simpler case in which the continuous brane parameter $\hat{j}$ is zero. In this situation, the continuous D6-brane represents one single D4-brane. Now we observe that at the special value of the brane parameter $\hat{J} = 0$, the geometric parameter c is equal to $\cos(\frac{2\pi}{2k})$: we are considering the situation where the D4-brane hits a pair of neighboring NS5-branes (cf. figure 10). The compact part of the D4-brane that stretches between the NS5-branes matches precisely the semi-classical description (5.7) of the identity brane on the right-hand side of equation (2.19). We conclude that in this case the brane addition relation (2.19) captures the fact that the D-brane hitting two separated NS5-branes consists of three pieces.

Next, let's consider the generic case where the brane parameter $\hat{j}$ is non-zero. The identity brane that appears does not stretch between neighboring NS5-branes. To understand the appearance of such a compact brane, we have to take into account the blowing up of the stack of D4-branes by the di-electric effect. In figure 11 we draw the intersection of the continuous brane (5.1) with the plane containing the circle of NS5-branes. We observe that at the special value of the brane parameter $\hat{J} = 0$, the intersection of the continuous brane with the interior of the circle of NS5-branes matches (up to corrections of order $\frac{1}{k}$) the semi-classical description (5.7) of the identity brane that is generated. We are still describing D-branes that are cut into three pieces when hitting two separated NS5-branes. But the way the D-branes are cut is less intuitive, because they are blown up by the di-electric effect.

The computation of section 2.5 tells us that when the parameter $\hat{J}$ is equal to $\frac{1}{4}$, new massive states appear on the continuous brane. They are bound states on the world-volume on the brane. The mass of these states goes down as the parameter $\hat{J}$ goes to zero. At the special value of the parameter $\hat{J} = 0$, some of these localized states become massless. The new massless modes live on the identity brane of the addition relation (2.19). So the appearance of poles in the densities of states studied in section 2.5 corresponds to the

JHEP07(2008)125

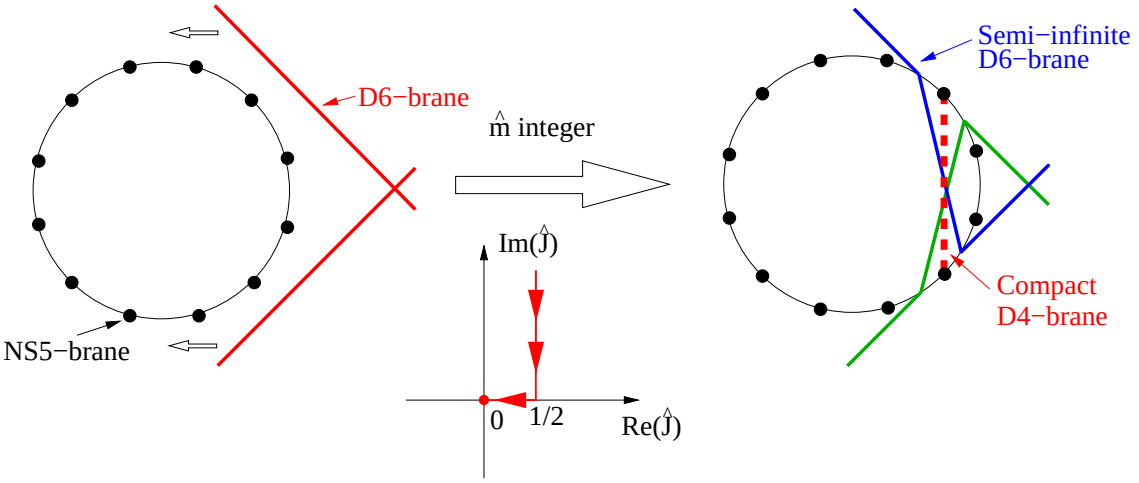


Figure 11: The generic case: a continuous brane approaches a circle of NS5-branes, as the brane parameter $\hat{J}$ goes to zero (the parameter $\hat{m}$ is integer). For $\hat{J} = 0$ an identity brane appears, sketched by a dotted line. Massless open strings live on this compact brane.

gradual creation of a new brane in space-time.

Another way to see this is to look at the $D0$-charge on the continuous $D2$-brane in the cigar. The $D0$-charge is defined as: $\frac{2}{2\pi}\int F = \frac{2k}{2\pi}\arcsin c$. The additional factor of two comes from the fact that the brane is double-sheeted. As the parameter c goes from 1 to $\cos\frac{2\pi}{2k}$, the $D0$-charge changes by one unit. In our context, this corresponds to the creation of one unit of D4-brane charge.

The fact that the addition relation (2.19) is only valid for integer values of the brane parameter $\hat{m}$ is consistent with the position of the NS5-branes on the circle, and thus with the selection rule in the minimal model.

We repeat that the movement of the continuous brane as the parameter $\hat{J}$ changes is infinitesimal when measured in the asymptotic flat space metric (due to the triple scaling). Indeed the geometry of the continuous brane far from the circle (given by equations (5.2)) does not depend on the parameter $\hat{J}$.

It would be interesting to study what happens when the continuous brane gets even closer to the center of the NS5-branes circle. However making the analytic continuation of the continuous brane parameter $\hat{J}$ to negative values is not the right way to proceed, since it induces the appearance of non-unitary characters of the $N = 2$ superconformal algebra. An alternative could be to introduce a non-factorized brane as the continuation of the continuous brane beyond $\hat{J} = 0$.

6. Four-dimensional gauge theory in the depths of the throat

The discussion of the previous section is valid independent of the boundary conditions we choose for the flat space directions (provided we have at least two directions with Dirichlet boundary conditions). In this section we focus on D4-branes, extended in the $x^{0,1,2,3,6}$ directions and localized in the other directions, as well as mutually supersymmetric D6-

JHEP07(2008)125

branes. We perform an analysis of the low-energy excitations on these branes, and a preliminary analysis of their interactions.

6.1 Energy scales

First we specify the energy scales on which we will focus. There are two fixed energy scales in the problem, namely the string scale $M_s = 1/\sqrt{\alpha'}$ and the curvature scale $M_{\rm gap} = 1/\sqrt{k\alpha'}$. At the string scale oscillation modes become important. The curvature scale gives the order of the mass gap due to the linear dilaton, as well as the Kaluza-Klein mass gap due to compactification of some of the transverse directions. The low energy scales we focus on are energies far below both the string scale and the curvature scale.

6.2 Localized gauge theory on the non-compact brane

Let's consider the theory living on a continuous brane of parameter $\hat{J}$. In the throat, due to the presence of the linear dilaton, the theory on a generic continuous brane is gapped, and at energies below $M_{\rm gap}$ we have a theory with no excitations at all. Operationally, if $\hat{J}$ has an imaginary part, or we have real $\hat{J}$ in the range $1/4 < \hat{J} \leq 1/2$, the self-overlap of the continuous brane is given in equation (4.15) and all states are in massive representations. The theory at low energy is trivial in this case.

When we bring down the brane parameter into the range $0 < \hat{J} < 1/4$, the self-overlap of the continuous brane is given in equation (4.16). All the states are still in massive representations, but we notice that a state localizes and its mass drops below the mass gap $M_{\rm gap}$. By tuning $\hat{J}$ to be close to $\hat{J} = 0$, we can make the mass parametrically small compared to $M_{\rm gap}$. At energies below that mass, we still have a trivial theory. We may get an interesting theory at energies squared between $2\hat{J}(1-2\hat{J})M_{\rm gap}^2$ and $M_{\rm gap}^2/4$.

At these energy scales, the theory is localized in the transverse space and is effectively four-dimensional. It has eight supercharges. Via the annulus amplitude we identify the excitations of the theory and they fill out a single massive gauge multiplet of four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry. We find a real massive vector, four Majorana spinors and five scalars. If we denote the normalizable bound state in the full theory (at $j = 0 = n$) by:

$$|k_{\mu=0,1,2,3}, 0, [\hat{J}]\rangle \tag{6.1}$$

then the excitations filling out the massive gauge multiplet are:

$$\begin{aligned}
&\psi^{2,3}_{-1/2}|k_\mu, 0, [\hat{J}]\rangle \\
&\psi^{4,5}_{-1/2}|k_\mu, 0, [\hat{J}]\rangle \\
&G^{\pm,nc}_{-1/2}|k_\mu, 0, [\hat{J}]\rangle \\
&Sp_{\mp 1}G^{\pm,nc}_{-1/2}|k_i, 0, [\hat{J}]\rangle.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

We have used the superscript nc to denote an operator acting on the non-compact $N = 2$ Liouville theory only and the notation $Sp_{\mp 1}$ indicates a spectral flow by ∓ 1 units in both the minimal model and the non-compact model (at total central charge $c = 6$). For instance, starting from the state $G^{+,nc}_{-1/2}|k_\mu, 0, [\hat{J}]\rangle$ we can generate another state of the same conformal

JHEP07(2008)125

dimension by spectrally flowing by minus one unit. The state we obtain is anti-chiral in the minimal model, with R-charge $-1+2/k$. It has R-charge $-2/k$ in the non-compact model for a total R-charge of -1. We refer to appendix B for an explicit analysis of how these states are coded in the annulus partition function in the particular case of $k=3$ NS5-branes.

The transverse polarizations of the massive vector are given by the first two states, while the other states give the longitudinal polarization as well as five scalar fields. We can figure out which scalar plays the role of the longitudinal polarization of the vector by the following reasoning. In an old covariant approach to the determination of the spectrum, we have a null state in the Hilbert space which corresponds to $G^{N=1}_{-1/2}|k_\mu,0,[\hat{J}]\rangle$. It is a null state since $G^{N=1}$ is the supercurrent corresponding to the gauging of $N=1$ supergravity on the world-sheet. Explicitly, we have that this null state is:

$$k_\mu \psi^\mu_{-1/2} + G^{N=1,nc}_{-1/2}|k_\mu,0,[\hat{J}]\rangle, \tag{6.3}$$

where we used the fact that the supercurrent annihilates the vacuum in the Dirichlet and the minimal model factors. Thus in the light-cone gauge where we broke Lorentz invariance and chose to fix the gauge symmetry by gauging away the light-cone excitations, we identify the scalar

$$G^{N=1,nc}_{-1/2}|k_\mu,0,[\hat{J}]\rangle \tag{6.4}$$

as the longitudinal component of the massive vector field. The other five scalars complete the massive $\mathcal{N}=2$ vector multiplet.

When we proceed to consider a brane with parameter $\hat{J}=0$, we find that the massive vector multiplet splits into a massless vector multiplet and a massless hyper multiplet. By the previous reasoning, and the fact that $|k_\mu,0,[0]\rangle$ is annihilated by both $G^{\pm,nc}_{-1/2}$, we find that the longitudinal polarization of the vector is now null (as it must be for a massless vector). There is then only one possible set of multiplets of the supersymmetry algebra corresponding to the vector and the six scalars, namely a massless vector and hyper multiplet. Explicitly, the massless vector multiplet has bosonic degrees of freedom:

$$\begin{aligned} &\psi^{2,3}_{-1/2}|k_\mu,0,[0]\rangle \\ &\psi^{4,5}_{-1/2}|k_\mu,0,[0]\rangle \end{aligned} \tag{6.5}$$

and the massless hyper multiplet has four bosonic scalar degrees of freedom:

$$\begin{aligned} &|k_\mu,0,\pm 1/2\rangle \\ &Sp_{\mp 1}|k_\mu,0,\pm 1/2\rangle. \end{aligned} \tag{6.6}$$

We indicated the discrete representation chiral and anti-chiral ground states by $|0,\pm 1/2\rangle$. Alternatively, at $\hat{J}=0$ we can interpret the excitations as coming from various overlaps of terms in the brane addition relation (2.19). The four bosonic degrees of freedom in the $\mathcal{N}=2$ vector multiplet arise from the self overlap of the identity brane on the right-hand side of the addition relation (2.19). The other massless states come from the overlap of the identity brane with the discrete branes. This overlap contains the discrete characters

JHEP07(2008)125

of (2.12). In the character $Ch_d(J=\frac{k}{2}, r=0)$ we find one chiral primary state with U(1) R-charge $Q=1$, and the spectral-flowed anti-chiral primary with $Q=-\frac{k}{2}$. These states combine with chiral and anti-chiral primary from the minimal model and the flat direction to give massless modes (with $Q=\pm 1$). In the second discrete character $Ch_d(J=1, r=-1)$ we find one anti-chiral primary state with $Q=-1$, and the spectral-flowed chiral primary with $Q=\frac{k}{2}$. Notice that from the right-hand side of (2.19), we expect *eight* massless bosonic states from the overlap of the identity brane with the two discrete branes. However half of them are canceled by the self overlap of the discrete branes, as shown in appendix A.

Interactions. In the spectrum of excitations, we witnessed a reverse Higgs mechanism consistent with $\mathcal{N}=2$ supersymmetry in four dimensions. When we survey what the relevant Higgs mechanism can be, consistent with $\mathcal{N}=2$ supersymmetry in four dimensions (see [41]), we find only one candidate. A real massive vector multiplet arises when we add a Fayet-Iliopoulos D-term to a U(1) theory with a charged hyper multiplet. The vector multiplet and the hyper multiplet acquire equal masses (proportional to the charge times the FI-parameter). Indeed, we did find that as we change $\hat{J}$, the vector and hyper multiplet acquire the same mass.

To nail down this picture we need to analyze the interactions between open string states to verify the presence of the necessary cubic and quartic interaction terms. That may be doable on the basis of the results of [42] that map boundary n-point functions in H_3^+ into an in principle solved problem in boundary bosonic Liouville theory. One can apply this reduction to boundary $N=2$ Liouville theory and thus determine the open string interaction terms. We will not attempt to perform this calculation here. It would be interesting to do it, and in particular to prove explicitly that at non-zero $\hat{J}$ the hyper multiplet is indeed charged.

Without the necessary study of the interaction terms we can make one more observation that is consistent with the Higgs mechanism advocated above, which is the breaking of the (accidental) R-symmetry (at low energy). When the brane parameter $\hat{J}$ is zero, the Hilbert space of open strings splits into identity and discrete sectors. The scalars in the hyper multiplet are at the lowest level available in their sector, and there are no null states at the lowest level. Moreover, the action of the supersymmetry generators pairs up the scalars into doublets of the $\mathrm{U}(2)_R$ symmetry of the theory. Each scalar pairs up with its spectral flowed counterpart. On the other hand, when the brane parameter is non-zero, the low-energy symmetry that exchanged the two scalars does not commute anymore with the BRST operator (as can clearly be seen by the existence of the null state that we mentioned above). The $\mathrm{U}(2)_R$ symmetry gets broken to a $\mathrm{U}(1)_R$ that does not act on the component of the complex doublet in the hyper that acquires a vacuum expectation value.

Finally, we note that *at* $\hat{J}=0=\hat{m}$ we have that a marginal deformation of type F on the world-sheet (i.e. the holomorphic square root of the bulk Liouville potential) becomes precisely one of the normalizable massless scalars in the hyper multiplet. The fact that we add such a term to the world-sheet action in order to turn up the value of $\hat{J}$ is consistent with the fact that the corresponding field acquires a vacuum expectation value. More

JHEP07(2008)125

precisely, we have the relations [11]:

$$\mu_A = \sqrt{\frac{2k\mu}{\pi}} \sin \pi(-\hat{J} - \hat{m})$$
$$\bar{\mu}_A = \sqrt{\frac{2k\mu}{\pi}} \sin \pi(-\hat{J} + \hat{m}) \tag{6.7}$$

for the coefficients μ_A and $\bar{\mu}_A$ of the F-terms on the boundary of the world-sheet which are holomorphic square roots of the bulk Liouville potential. In a covariant formulation, and for a zero momentum $k_\mu = 0$ ground state, we note that the combination $G^{N=1,nc}|0,0,[\hat{J}]\rangle$ is pure gauge. We conclude that for very small non-zero $\hat{J}$ and $\hat{m}$, the null deformation, which will not change the spectrum on the non-compact brane will correspond to the deformation $\mu_A = -\bar{\mu}_A$ (since the brane parameter $\hat{m}$ does not change the spectrum). Therefore the $\hat{J}$ deformation near $\hat{J} = 0$ corresponds to the deformation $\mu_A = +\bar{\mu}_A$. Thus, infinitesimally near $\hat{J} = 0 = \hat{m}$, we have a complex scalar field which has one component which becomes the longitudinal component of the massive vector boson, and an orthogonal component which acquires a vacuum expectation value.

Remark. An interesting open problem is to attempt to give a mass to the hyper multiplet while keeping the vector multiplet massless. A naive attempt to separate the identity brane from the rest of the $\hat{J} = 0$ brane would fail because the remainder does not pass the Cardy check. Another way to put this is to note that one would generate two massive hyper multiplets, and minus one massless hyper multiplet.

6.3 The gauge theory on the compact branes

We turn to the gauge theory on the compact identity branes. We will be brief since the theory has been analyzed before. The identity branes are stretched between two NS5-branes. The effective gauge theory below the curvature scale $M_{\rm gap}$ is four dimensional. The low-energy theory contains one massless vector multiplet of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in four dimensions, and gives rise to a pure $\mathrm{U}(N)$ super-Yang-Mills theory for N compact branes. They have been discussed as exact boundary states in [7, 5, 23].

6.4 Combining branes

If we consider simultaneously non-compact and compact branes, we must consider whether they are mutually supersymmetric. Once we fix the parameters $\hat{m}$ and $\hat{n}$ of the identity brane (which fix its orientation) then we must fix the non-compact brane orientation such that the brane is parallel. We then preserve eight supercharges again. At energy scales below the mass gap but above the energy $\hat{J}M_{\rm gap}$, we have a massive vector multiplet of mass squared $-2\hat{J}(2\hat{J}-1)/k\alpha'$, a complex massive vector with a mass squared $-\hat{J}(\hat{J}-1)/k\alpha'$ as well as the massless vector multiplet on the identity brane. The real massive vector multiplet and the massless vector multiplet on the identity brane have been discussed before.

The complex massive vector multiplet embodies a Higgs mechanism of the second type [41] in which one vector multiplet eats a scalar of another vector multiplet and vice

JHEP07(2008)125

versa. In more modern language, we go to a Coulomb branch of an $\mathcal{N}=2$ gauge theory. Again, to render the $\mathcal{N}=2$ gauge theory interactions manifest, we would need to analyze in detail the open string interactions.

7. Two NS5-branes

The case of two NS5-branes is an interesting special case. When we spread two branes on a circle, they are in fact spread on a line (which we will take to be the x^6 direction). We therefore preserve a larger symmetry group in this case, which includes an $SO(3)_{789}$ isometry group (enlarged to $O(3)$ due to the Z_2 operation interchanging the two NS5-branes). We will use this extension of the symmetry group to make an interesting consistency check on our claims in previous sections. In the exact conformal field theory at $k=2$, the minimal model becomes trivial. The bulk theory and its symmetries were thoroughly analyzed in [43]. We recall that at level 2 we can fermionize the asymptotic angular variable θ in Liouville theory by the equivalence $e^{\pm i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \pm i\psi_2)$. This allows us to define the $SU(2)_2$ affine currents:

$$J_i = \left(\psi_\rho\psi_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\psi_j\psi_k\right)e^{-\rho}, \tag{7.1}$$

where ψ_3 is the fermionic partner of the angular variable θ and ψ_ρ is the superpartner of the asymptotic radial direction ρ. From the detailed arguments in [43], one concludes that the bulk Liouville deformation can be chosen such as to preserve a diagonal $SU(2)_2$ current algebra. It is this local symmetry algebra on the world-sheet that generates the $SO(3)_{789}$ isometry group in space-time (in the doubly scaled regime).

We wish to add non-compact branes to this configuration. In doing so we observe that there is a single non-compact D4-brane that we can add to the asymptotically flat configuration which will preserve the $SO(3)_{789}$ isometry group. It is the non-compact D4-brane that stretches along the line separating the $NS5$-branes (namely the x^6 direction) and coinciding with the NS5-branes in the transverse space $x^{7,8,9}$. From the arguments in the previous section, we expect that that brane should correspond to the non-compact brane at $\hat{J}=0=\hat{m}$ after descending down the throat.

We can test this directly in the full exact conformal field theory, using the symmetry algebra above. From the results of [43][8] and [11][9] it is clear that the three currents evaluated on the boundary correspond precisely to the two marginal F-term deformations and the marginal D-term deformation of boundary $N=2$ Liouville theory. Thus, the boundary deformations form a triplet of $SO(3)_{789}$. Consequently, when any of these boundary deformations is turned on, we break $SO(3)_{789}$. We already saw that the F-term boundary deformations are generically zero at $\hat{J}=0=\hat{m}$ (see equation (6.7)). So, to check whether $SO(3)_{789}$ is preserved we need to check whether also the third deformation parameter is zero. It has the value [11]:

$$\tilde{\mu}_A = -\nu^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(-1/k)}{2\pi k}\cos\frac{\pi}{k}(2\hat{J}-1). \tag{7.2}$$

[8] See the bottom of page 14 of [43].

[9] See the bottom of page 34 of [11].

JHEP07(2008)125

We observe that precisely at the value $k = 2$, and $\hat{J} = 0$ the third boundary deformation parameter $\tilde{\mu}_A$ is zero as well. In summary, we used a particularly symmetric set-up to provide a powerful consistency check on our identification of the brane $\hat{J} = 0 = \hat{m}$ as the brane that splits on two NS5-branes.

8. Conclusions

In this paper, we have demonstrated character identities for the $N = 2$ superconformal algebra, which lead to the introduction of addition relations for boundary states. We then showed the appearance of localized bound states in the spectrum of non-compact branes, both via an analytic and an algebraic approach.

These interesting properties of non-rational $N = 2$ Liouville theory find applications in string theory. We analyzed one application in detail, for branes in the background of NS5-branes spread on a circle. There we showed that the addition relations are reflected in semi-classical properties of D-branes with three directions transverse to the NS5-branes. We also gave an exact conformal field theory analysis of the spectrum on these branes, and showed the appearance of interesting open string bound states localized deep down the throat of NS5-branes (in a triple scaling limit). We performed a preliminary analysis of the gauge theory interactions that govern these bound states at low energy.

There remain many interesting open questions related to our work. We mention only a few interesting routes. The four-dimensional gauge theory we identified deserves more investigation. The computation of the interactions of the bound states at low energy would be a useful enterprise. It would also be interesting to apply what we have learned about $N = 2$ Liouville theory to configurations that preserve only four supercharges. Another direction would be the construction of boundary states that do not factorize in terms of the coset conformal field theories, and find their interpretation in terms of D-branes in NS5-brane backgrounds. This is presumably related to the problem of giving a mass to the hyper multiplet living on the non-compact brane, while keeping the vector multiplet massless. We hope to return to some of these open problems in the near future.

Acknowledgments

Our work was supported in part by the EU under the contract MRTN-CT-2004-005104. We would like to thank Pierre Fayet for a useful discussion.

A. Full Cardy states in $N = 2$ Liouville

In this appendix we review the detailed construction of the full Cardy states in $N = 2$ Liouville theory [7], including the couplings to the discrete Ishibashi states. We also compute the annulus amplitudes for arbitrary discrete branes. We show that discrete characters appear in the open string channel with multiplicities that are generically not positive integers.

We carefully normalize our amplitudes and one-point functions as follows. We fix the normalization of the continuous Ishibashi states such that their overlap is $\delta(P - P')$. Our

JHEP07(2008)125

convention for the normalization of the closed string momentum (and therefore of the δ-function) is such that $J = 1/2 + iP$ determines the Casimir of an $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ representation. We take the δ-function to be the δ-function on the real half-line, namely $\int_0^\infty dP\delta(P - P')f(P) = f(P')$ for a function f defined on the positive half-line. Also, we integrate over Ishibashi states with positive momentum P only. That fixes the normalization of the one-point functions. In the closed string channel, we will sum over all integer momenta $2m$ (modulo $2k$).

The continuous and discrete Ishibashi states are defined as:[10]

$$e^{-\pi\frac{c}{3}\frac{z^2}{T}}{}_c\langle\langle P,m|\mathrm{prop}|P',m'\rangle\rangle_c = \delta(P-P')\delta_{m,m'}Ch_c^{\mathrm{closed}}(P,m;iT,z) \tag{A.1}$$

$$e^{-\pi\frac{c}{3}\frac{z^2}{T}}{}_d\langle\langle J,r|\mathrm{prop}|J',r'\rangle\rangle_d = \delta_{J,J'}\delta_{r,r'}Ch_d^{\mathrm{closed}}(J,m;iT,z) \tag{A.2}$$

$$e^{-\pi\frac{c}{3}\frac{z^2}{T}}{}_c\langle\langle P,m|\mathrm{prop}|J,r\rangle\rangle_d = 0 \tag{A.3}$$

The closed string propagator is:

$$\mathrm{prop} = e^{\pi\frac{c}{3}\frac{z^2}{T}}e^{-\pi T H^{(c)}}\,e^{i\pi z(J_0+\bar{J}_0)} \tag{A.4}$$

where $H^{(c)}, J_0, \bar{J}_0$ represent the cylinder Hamiltonian and the $\mathrm{U}(1)R$ charge operators.

In section 2.3 we introduced the continuous, discrete and identity branes in $N = 2$ Liouville theory, and gave their one-point functions to the continuous operators. The couplings to the discrete operators are:

$$\psi^c_{\hat{P},\hat{m}}(J,r) = 0 \tag{A.5}$$

$$\psi^d_{\hat{J},\hat{r}}(J,r) = \frac{i}{\sqrt{2k}}\frac{1}{\sqrt{\sin(\frac{\pi(2J-1)}{k})}}e^{-4\pi i\frac{(\hat{J}+\hat{r})(J+r)-(\hat{J}-1/2)(J-1/2)}{k}} \tag{A.6}$$

$$\psi^{\mathbb{I}}_{\hat{m}}(J,r) = \sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi(2J-1)}{k}\right)}e^{-4\pi i\frac{2\hat{m}(J+r)}{2k}}. \tag{A.7}$$

Modular transformations In the computation of annulus amplitudes, modular S-transformations are needed to switch between the closed string channel and the open string channel. We give below the relevant modular transformations for the characters of the extended $N = 2$ superconformal algebra.

$$Ch_c^{\mathrm{closed}}\left(P,m;-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) = e^{i\pi\frac{c}{3}\frac{z^2}{\tau}}\frac{2}{k}\sum_{2m'=0}^{2k-1}e^{-4\pi i\frac{mm'}{k}}\int dP'\cos\left(4\pi\frac{PP'}{k}\right)Ch_c^{\mathrm{open}}(P',m';\tau,z) \tag{A.8}$$

[10] We consider only the Ishibashi states associated to extended characters that appear in the modular transformations of the identity character [7]. In the bulk theory, closed strings states belongs precisely to these representations [44, 45].

JHEP07(2008)125

$$Ch_d^{\text{closed}}\left(J,r;-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=e^{i\pi\hat{c}\frac{z^2}{\tau}}\times$$
$$\left[\frac{1}{k}\sum_{2m'=0}^{2k-1}e^{-4\pi i\frac{(J+r)m'}{k}}\int dP'\frac{\cosh(2\pi P'\frac{k+1-2J}{k})+e^{i\pi 2m'}\cosh(2\pi P'\frac{2J-1}{k})}{2|\cosh(\pi(P'+im'))|^2}Ch_c^{\text{open}}(P',m';\tau,z)\right.$$
$$+\frac{i}{k}\sum_{r'=0}^{k-1}\sum_{2J'=2}^{k}e^{-4\pi i\frac{(J+r)(J'+r')-(J-\frac{1}{2})(J'-\frac{1}{2})}{k}}Ch_d^{\text{open}}(J',r';\tau,z)$$
$$\left.+\frac{i}{2k}\sum_{r'=0}^{k-1}e^{-4\pi i\frac{(J+r)(r'+\frac{1}{2})}{k}}\left(Ch_d^{\text{open}}\left(\frac{1}{2},r';\tau,z\right)+Ch_d^{\text{open}}\left(\frac{k+1}{2},r';\tau,z\right)\right)\right] \tag{A.9}$$

$$Ch_{\mathbb{I}}^{\text{closed}}\left(m;-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=e^{i\pi\hat{c}\frac{z^2}{\tau}}\times$$
$$\left[\frac{1}{k}\sum_{2m'=0}^{2k-1}e^{-4\pi i\frac{mm'}{k}}\int dP'\frac{\sinh(2\pi\frac{P'}{k})\sinh(2\pi P')}{|\cosh(\pi(P'+im'))|^2}Ch_c^{\text{open}}(P',m';\tau,z)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{k}\sum_{r'=0}^{k-1}\sum_{2J'=2}^{k}\sin\left(\frac{\pi(2J'-1)}{k}\right)e^{-4\pi i\frac{(m(J'+r')}{k}}Ch_d^{\text{open}}(J',r';\tau,z)\right] \tag{A.10}$$

In the bulk of the paper, and in the following computations, we leave the argument τ, z of the characters implicit but indicate whether we consider the closed or the open string channel.

Annulus amplitudes We compute the annulus amplitude for open strings stretching between two branes, taking into account the coupling to discrete operators.

- Identity / any
$$_{\mathbb{I}}\langle\hat{m}'|\text{prop}|\hat{m}\rangle_{\mathbb{I}}=Ch_{\mathbb{I}}^{\text{open}}(\hat{m}-\hat{m}') \tag{A.11}$$
$$_{\mathbb{I}}\langle\hat{m}'|\text{prop}|\hat{P},\hat{m}\rangle_c=Ch_c^{\text{open}}(\hat{P},\hat{m}-\hat{m}') \tag{A.12}$$
$$_{\mathbb{I}}\langle\hat{m}'|\text{prop}|\hat{J},\hat{r}\rangle_d=Ch_d^{\text{open}}(\hat{J},\hat{r}-\hat{m}') \tag{A.13}$$
- Continuous / continuous

  This overlap is computed in detail in section 2.5. The result is given by equations (2.34) and (2.35).
- Continuous / discrete
$$_c\langle\hat{P}_1,\hat{m}_1|\text{prop}|\hat{J}_2\hat{,}r_2\rangle_d=\int_0^\infty dP\left[\rho_1^{c-d}(P|\hat{P}_1,\hat{J}_2)Ch_c^{\text{open}}(P,\hat{J}_2+\hat{r}_2-\hat{m}1)\right.$$
$$\left.+\rho_2^{c-d}(P|\hat{P}_1,\hat{J}_2)Ch_c^{\text{open}}(P,\hat{J}_2+\hat{r}_2-k-\hat{m}1)\right] \tag{A.14}$$

JHEP07(2008)125

with

$$\rho_1^{c-d}(P|\hat{P}_1,\hat{J}_2) = \frac{2}{k}\int_0^\infty dP' \frac{\cos(4\pi\frac{PP'}{k})}{\sinh(2\pi\frac{P'}{k})\sinh(2\pi P')} \times \sum_{\epsilon=\pm 1}\cosh\left(2\pi P'\left(1+\frac{1-2\hat{J}_2}{k}+i\epsilon\frac{2\hat{P}_1}{k}\right)\right) \tag{A.15}$$

$$\rho_2^{c-d}(P|\hat{P}_1,\hat{J}_2) = \frac{2}{k}\int_0^\infty dP' \frac{\cos(4\pi\frac{PP'}{k})}{\sinh(2\pi\frac{P'}{k})\sinh(2\pi P')} \times \sum_{\epsilon=\pm 1}\cosh\left(2\pi P'\left(\frac{2\hat{J}_2-1}{k}+i\epsilon\frac{2\hat{P}_1}{k}\right)\right) \tag{A.16}$$

- Discrete / discrete

$$\begin{aligned}{}_d\langle \hat{J}_1,\hat{r}_1|\text{prop}|\hat{J}_2,\hat{r}_2\rangle_d = &\int_0^\infty dP\sum_{2m=0}^{2k-1}\rho_1^{d-d}(P,m|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2)Ch_c^{\text{open}}(P,m)\\ &+\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{2J=2}^{k}\rho_2^{d-d}(J,r|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2)Ch_d^{\text{open}}(J,r)\\ &+\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{2}\tilde{\rho}_2^{d-d}\left(\frac{1}{2},r|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2\right)\left(Ch_d^{\text{open}}\left(\frac{1}{2},r\right)+Ch_d\left(\frac{k+1}{2},r\right)\right)\end{aligned} \tag{A.17}$$

with

$$\begin{aligned}\rho_1^{d-d}(P,m|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2) = &\int_0^\infty dP'\sum_{2m'=0}^{2k-1}\frac{\sqrt{2}}{k^{\frac{5}{2}}}\frac{\cos(4\pi\frac{PP'}{k})}{\sinh(2\pi\frac{P'}{k})\sinh(2\pi P')}\\ &\times e^{4\pi i\frac{m'(-m+(\hat{J}_1+\hat{r}_1)-(\hat{J}_2+\hat{r}_2))}{k}}\frac{1}{4|\cosh(\pi(P'+im'))|^2}\times\\ &\left(\cosh\left(2\pi P'\frac{k+1-2\hat{J}_2}{k}\right)+e^{2\pi i m'}\cosh\left(2\pi P'\frac{2\hat{J}_2-1}{k}\right)\right)\times\\ &\left(\cosh\left(2\pi P'\frac{k+1-2\hat{J}_1}{k}\right)+e^{-2\pi i m'}\cosh\left(2\pi P'\frac{2\hat{J}_1-1}{k}\right)\right)\\ &+\sum_{2J'=2}^{k}\sum_{r'=0}^{k-1}\frac{1}{2k^2}e^{4\pi i\frac{(J'+r')(\hat{J}_1+\hat{r}_1-(\hat{J}_2+\hat{r}_2)-m)-(J'-\frac{1}{2})(\hat{J}_1-\hat{J}_2)}{k}}\\ &\times\frac{\cosh(2\pi P\frac{k+2-4J'}{k})\cosh(\pi P')}{2|\cosh(\pi(P+im))|^2\sin(\pi\frac{2J'-1}{k})}\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\rho_2^{d-d}(J,r|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2) = \frac{i}{2k^2}\sum_{r'=0}^{k-1}\sum_{2J'=2}^{k}\frac{e^{4\pi i\frac{(J'+r')(\hat{J}_1+\hat{r}_1-(\hat{J}_2+\hat{r}_2)-(J+r))+(J'-\frac{1}{2})(J-\frac{1}{2}+\hat{J}_2-\hat{J}_1)}{k}}}{\sin(\pi\frac{2J'-1}{k})} \tag{A.19}$$

JHEP07(2008)125

The spectral density ρ_2^{d-d} gives the multiplicity of the discrete characters. The Cardy condition requires that these multiplicities be positive integers. We can rewrite ρ_2^{d-d} as:

$$\rho_2^{d-d}(J,r|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2) = \frac{i}{2k}e^{-\frac{2\pi i}{k}(\hat{J}_2+\hat{r}_2-\hat{J}_1-\hat{r}_1+J+r)}\delta\left(\hat{J}_2+\hat{r}_2-\hat{J}_1-\hat{r}_1+J+r\in\frac{k}{2}\mathbb{Z}\right) \times G(\hat{r}_2-\hat{r}_1+r) \tag{A.20}$$

where we introduced the function G:

$$G(N)=\sum_{p=1}^{k-1}\frac{e^{-\frac{2\pi i}{k}p(N+1/2)}}{\sin(\pi\frac{p}{k})} \tag{A.21}$$

We now prove by induction that:

$$G(N)=-i(k-1)+2i(N[mod\ k]) \tag{A.22}$$

where $0\leq N[mod\ k]<k$. First, $G(0)=-i(k-1)$. Then we write:

$$e^{-\frac{2\pi i}{k}p(N+1/2)}=-2ie^{-\frac{2\pi i}{k}pN}\sin(\pi\frac{p}{k})+e^{-\frac{2\pi i}{k}p(N-1/2)} \tag{A.23}$$

so that we can rewrite $G(N)$ in terms of $G(N-1)$:

$$\begin{aligned} G(N) &= -2i\sum_{p=1}^{k-1}e^{-\frac{2\pi i}{k}pN}+G(N-1) \\ &= G(N-1)+2i-2ik\,\delta(N\in k\mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{A.24}$$

This concludes the proof.

Eventually we can write the spectral density ρ_2^{d-d} as:

$$\rho_2^{d-d}(J,r|\hat{J}_1,\hat{r}_1,\hat{J}_2,\hat{r}_2) = e^{-\frac{2\pi i}{k}(\hat{J}_2+\hat{r}_2-\hat{J}_1-\hat{r}_1+J+r)}\delta\left(\hat{J}_2+\hat{r}_2-\hat{J}_1-\hat{r}_1+J+r\in\frac{k}{2}\mathbb{Z}\right) \left(\frac{k-1-2\,[(\hat{r}_2-\hat{r}_1+r)[mod\ k]]}{2k}\right) \tag{A.25}$$

This function is generically not a positive integer. This invalidates the Cardy condition for discrete branes.

The self-overlap of the continuous brane $|\hat{J}=0,\hat{r}\rangle_c$. The continuous brane $|\hat{J}=0,\hat{r}\rangle_c$ can be written as the sum of an identity and two discrete branes, according to the addition relation (2.19). In section 2.5 we computed the self-overlap of the continuous brane $|\hat{J}=0,\hat{r}\rangle_c$. We now consider the self-overlap of the sum of branes on the right-hand side of (2.19):

$$\begin{aligned} &\left({}_{\mathbb{I}}\langle\hat{r}|+{}_d\langle\hat{J}=k/2,\hat{r}|+{}_d\langle\hat{J}=1,\hat{r}-1|\right)\text{prop}\left(|\hat{r}\langle_{\mathbb{I}}+|\hat{J}=k/2,\hat{r}\rangle_d+|\hat{J}=1,\hat{r}-1\rangle_d\right) \\ &\quad = Ch_{\mathbb{I}}^{\text{open}}(0)+2Ch_d^{\text{open}}(k/2,0)+2Ch_d^{\text{open}}(1,0) \\ &\qquad +\left({}_d\langle\hat{J}=k/2,\hat{r}|+{}_d\langle\hat{J}=1,\hat{r}-1|\right)\text{prop}\left(|\hat{J}=k/2,\hat{r}\rangle_d+|\hat{J}=1,\hat{r}-1\rangle_d\right) \end{aligned} \tag{A.26}$$

JHEP07(2008)125

Let's compute the contribution to the discrete characters of the overlap of the discrete branes:

$$
\begin{aligned}
&{}_d\langle \hat{J}=k/2,\hat{r}|\text{prop}|\hat{J}=k/2,\hat{r}\rangle_d = {}_d\langle \hat{J}=1,\hat{r}-1|\text{prop}|\hat{J}=1,\hat{r}-1\rangle_d \\
&=\sum_{2J=2}^{k}\left(\frac{k-1-2[-J[mod\ k]]}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,-J)-\frac{k-1-2[k/2-J[mod\ k]]}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,k/2-J)\right) \\
&\quad + continuous
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_d\langle \hat{J}=k/2,\hat{r}|\text{prop}|\hat{J}=1,\hat{r}-1\rangle_d = &\sum_{2J=2}^{k}\left(-\frac{k-1-2\{[-J[mod\ k]]-1[mod\ k]\}}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,-J)\right. \\
&\left.+\frac{k-1-2[k/2-J-1[mod\ k]]}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,k/2-J)\right) \\
&+ continuous
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_d\langle \hat{J}=1,\hat{r}-1|\text{prop}|\hat{J}=k/2,\hat{r}\rangle_d = &\sum_{2J=2}^{k}\left(-\frac{k-1-2\{[-J[mod\ k]]+1[mod\ k]\}}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,-J)\right. \\
&\left.+\frac{k-1-2[k/2-J+1[mod\ k]]}{2k}Ch_d^{\text{open}}(J,k/2-J)\right) \\
&+ continuous
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

Which gives (for $k\neq 1$):

$$
\begin{aligned}
&\left({}_d\langle \hat{J}=k/2,\hat{r}|+{}_d\langle \hat{J}=1,\hat{r}-1|\right)\text{prop}\left(|\hat{J}=k/2,\hat{r}\rangle_d+|\hat{J}=1,\hat{r}-1\rangle_d\right) \\
&=-Ch_d^{\text{open}}(1,-1)-Ch_d^{\text{open}}(k/2,0)+continuous
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

Thus we recover the result (2.36), with the correct multiplicity one for the discrete characters:

$$
\langle P=i/2,M=0|P=i/2,M=0\rangle = Ch_d^{\text{open}}(1,-1)+Ch_d^{\text{open}}(k/2,0)+Ch_{\mathbb{I}}^{\text{open}}(0)+continuous
\tag{A.31}
$$

In the special case $k=1$, the overlap of discrete branes contains only continuous representations. As a consequence the discrete characters in the overlap of the continuous brane (A.31) appear with multiplicity two. This is also what we found in section 2.5 of the bulk of the paper.

B. The example of $k=3$ NS5-branes

To make the formulas for the annulus partition function for open strings ending on a continuous $\hat{J}=0$ brane on one side and an identity brane on the other side more concrete, we discuss one example in detail (beyond the case of $k=2$ NS5-branes treated in more detail in [23]). We concentrate on $k=3$ Neveu-Schwarz five-branes. To get to grips with the ingredients of the partition function, we need to compute the relevant superparafermionic characters. They are given by [46]:

$$
\chi(j,n,s;\tau,z) = \sum_{p \bmod k-2} c^{2j}_{n+4p-s}(\tau)\Theta_{2n+(4p-s)k,2(k-2)k}\left(\tau,\frac{2(k-2)z}{k}\right)
\tag{B.1}
$$

JHEP07(2008)125

and the character is zero when $2j + n + s \neq 0$ [mod2]. For $k = 3$ NS5-branes we have a bosonic SU(2) level $k_{\rm bos} = 1$. Since we also have the equivalence relation $(j, n, s) \equiv (\frac{k_{\rm bos}}{2} - j, s + 2, n + k)$, we can restrict ourselves to characters with $j = 0$. Using identities between string functions [47] that implies that we will only need the string function c_0^0 (defined in [48]). Moreover, we sum over p modulo one, so we can set $p = 0$. We find the identity:

$$\chi(j, n, s; \tau, z) = c^0_{n-s}(\tau)\Theta_{2n-3s,6}(\tau, z^{\frac{1}{3}}) \tag{B.2}$$

where $n = s \,(\mathrm{mod}\, 2)$ to have a non-zero result. We are left with twelve non-trivial super-coset characters that can be labeled by $n - 3s \,(\mathrm{mod}12)$. We find the conformal weights and R-charges for the primaries in these representations of the superconformal algebra at $c = 3 - \frac{6}{3} = 1$ (see also [31] appendix F):

$$\begin{array}{cc} h & Q_{MM} \\ 0 & 0 \\ 1/24 & \pm 1/6 \\ 1/6 & \pm 1/3 \\ 3/8 & \pm 1/2 \\ 2/3 & \pm 2/3 \\ 25/24 & \pm 5/6 \\ 3/2 & \pm 1 \end{array} \tag{B.3}$$

Note that in the case of highest conformal weight, we have two degenerate ground states, which explains the fact that we have thirteen entries in the table. We recall that the minimal model $\mathrm{U}(1)_R$ charge is given by the formula $Q_{MM} = \frac{s}{2} - \frac{n}{k}$. To compute the partition function, we compute the separate terms in the sum:

$$Z_{(k=3)} = \frac{1}{2}(Z^{NS} - Z^{\tilde{NS}}) - \frac{1}{2}(Z^{R} \mp Z^{\tilde{R}}). \tag{B.4}$$

Let's concentrate on the first term:

$$\begin{aligned} Z^{NS} = \frac{\theta_3^2(\tau)}{\eta(q)^6} \times & \\ & ((\chi(0,0,0) + \chi(0,0,2))Ch_c^{NS}(J = 0, 2m = 0) \\ & +(\chi(0,2,0) + \chi(0,2,2))Ch_c^{NS}(J = 0, 2m = 4) \\ & +(\chi(0,4,0) + \chi(0,4,2))Ch_c^{NS}(J = 0, 2m = 2)). \end{aligned} \tag{B.5}$$

The factors corresponding to the minimal model and the non-compact model will contain the following states. The first term contains a ground state at $h - c/24 = -1/2$. At $h - c/24 = -1/4$ the first term also contains one state each of $\mathrm{U}(1)_R$ charge ± 1. The second term contains one such state with $\mathrm{U}(1)_R$ charge -1 and the third term one state with $\mathrm{U}(1)_R$ charge $+1$. When combined with the flat space factor:

$$\frac{\theta_3^2(\tau)}{\eta(q)^6} = q^{-1/4} + (2z^{-1} + 2z)q^{1/4} + \ldots$$

JHEP07(2008)125

we get on the one hand the 4 bosonic states with charges ± 1 from the identity in the non-trivial factors, and the second term for the flat space factors. This is the vector multiplet. On the other hand, we can take the trivial factor in flat space-time, and we get 2 states from the excited levels of the first character as well as two states from the ground states of the second and third term.

$$= q^{-1/2} + (4z^{-1} + 4z)q^0 + (6z^{-2} + 24 + 6z^2)q^{\frac{1}{2}} + (4z^{-3} + 60z^{-1} + 60z + 4z^3)q^1 + \dots$$

After GSO projection, we will be left with only the first term, which gives rise to eight massless bosonic states. These correspond to the primaries $\psi^{2,3,4,5}_{-1/2}$ acting on the ground state in the non-trivial factors, as well as the following four states (indicated by their $\mathrm{U}(1)_R$ charges and dimension in the first and second factor conformal field theory, in the second and third line):

$$\begin{aligned} & G^{\pm,nc}_{-1/2}|0> \\ & (+1/6, -1/3) \otimes (+1/3, -2/3) \\ & (+1/6, +1/3) \otimes (+1/3, +2/3) \end{aligned} \tag{B.6}$$

These are the massless states that we identified in the annulus partition function in the bulk of the paper (when we put $k = 3$ in those formulas). To complete the exercise, we quote the Ramond sector partition function (suppressing the z-dependence):

$$Z^R = 16q^0 + 256q^1 + \dots$$

which precisely cancels the NS contribution. The cancellation is a particular application of a large class of identities between superconformal characters that were proven on the basis of the spectral flow argument of Gepner adapted to the open string channel in an appendix to [23].

References

[1] A. Hanany and E. Witten, *Type IIB superstrings, BPS monopoles and three-dimensional gauge dynamics*, *Nucl. Phys.* **B 492** (1997) 152 [hep-th/9611230].

[2] E. Witten, *Solutions of four-dimensional field theories via M-theory*, *Nucl. Phys.* **B 500** (1997) 3 [hep-th/9703166].

[3] S. Elitzur, A. Giveon and D. Kutasov, *Branes and $N = 1$ duality in string theory*, *Phys. Lett.* **B 400** (1997) 269 [hep-th/9702014].

[4] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici and G. Sarkissian, *D-branes in the background of NS fivebranes*, *JHEP* **08** (2000) 046 [hep-th/0005052].

[5] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, *D-branes in little string theory*, *Nucl. Phys.* **B 722** (2005) 3 [hep-th/0502073].

[6] W. Lerche, C.A. Lütken and C. Schweigert, *D-branes on ALE spaces and the ADE classification of conformal field theories*, *Nucl. Phys.* **B 622** (2002) 269 [hep-th/0006247].

[7] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular bootstrap for boundary $N = 2$ Liouville theory*, *JHEP* **01** (2004) 025 [hep-th/0311141].

JHEP07(2008)125

[8] C. Ahn, M. Stanishkov and M. Yamamoto, *One-point functions of $N = 2$ super-Liouville theory with boundary*, *Nucl. Phys.* **B 683** (2004) 177 [hep-th/0311169].

[9] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, *D-branes in $N = 2$ Liouville theory and its mirror*, *Nucl. Phys.* **B 710** (2005) 529 [hep-th/0405259].

[10] C. Ahn, M. Stanishkov and M. Yamamoto, *ZZ-branes of $N = 2$ super-Liouville theory*, *JHEP* **07** (2004) 057 [hep-th/0405274].

[11] K. Hosomichi, *$N = 2$ Liouville theory with boundary*, *JHEP* **12** (2006) 061 [hep-th/0408172].

[12] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J.D. Lykken, *$N = 2$ superconformal symmetry and* $\mathrm{SO}(2,1)$ *current algebra*, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989) 329.

[13] A. Fotopoulos, V. Niarchos and N. Prezas, *D-branes and extended characters in* $\mathrm{SL}(2,R)/\mathrm{U}(1)$, *Nucl. Phys.* **B 710** (2005) 309 [hep-th/0406017].

[14] E.J. Martinec, *The annular report on non-critical string theory*, hep-th/0305148.

[15] J. Teschner, *Remarks on Liouville theory with boundary*, hep-th/0009138.

[16] J. Teschner, *On boundary perturbations in Liouville theory and brane dynamics in noncritical string theories*, *JHEP* **04** (2004) 023 [hep-th/0308140].

[17] S. Murthy and J. Troost, *D-branes in non-critical superstrings and duality in $N = 1$ gauge theories with flavor*, *JHEP* **10** (2006) 019 [hep-th/0606203].

[18] B. Ponsot and J. Teschner, *Boundary Liouville field theory: boundary three point function*, *Nucl. Phys.* **B 622** (2002) 309 [hep-th/0110244].

[19] C. Jego and J. Troost, *Notes on the Verlinde formula in non-rational conformal field theories*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 106002 [hep-th/0601085].

[20] A. Fotopoulos, *Semiclassical description of D-branes in* $\mathrm{SL}(2)/\mathrm{U}(1)$ *gauged WZW model*, *Class. and Quant. Grav.* **20** (2003) S465 [hep-th/0304015].

[21] S. Ribault and V. Schomerus, *Branes in the $2 - D$ black hole*, *JHEP* **02** (2004) 019 [hep-th/0310024].

[22] A. Fotopoulos, V. Niarchos and N. Prezas, *D-branes and SQCD in non-critical superstring theory*, *JHEP* **10** (2005) 081 [hep-th/0504010].

[23] S.K. Ashok, S. Murthy and J. Troost, *D-branes in non-critical superstrings and minimal super Yang-Mills in various dimensions*, *Nucl. Phys.* **B 749** (2006) 172 [hep-th/0504079].

[24] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-dimensional black hole and singularities of CY manifolds*, *Nucl. Phys.* **B 463** (1996) 55 [hep-th/9511164].

[25] D. Kutasov, *Orbifolds and solitons*, *Phys. Lett.* **B 383** (1996) 48 [hep-th/9512145].

[26] K. Sfetsos, *Branes for Higgs phases and exact conformal field theories*, *JHEP* **01** (1999) 015 [hep-th/9811167].

[27] A. Giveon and D. Kutasov, *Little string theory in a double scaling limit*, *JHEP* **10** (1999) 034 [hep-th/9909110].

[28] D. Israel, C. Kounnas, A. Pakman and J. Troost, *The partition function of the supersymmetric two- dimensional black hole and little string theory*, *JHEP* **06** (2004) 033 [hep-th/0403237].

JHEP07(2008)125

[29] R. Gregory, J.A. Harvey and G.W. Moore, *Unwinding strings and T-duality of Kaluza-Klein and H-monopoles*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **1** (1997) 283 [hep-th/9708086].

[30] D. Tong, *NS5-branes, T-duality and worldsheet instantons*, *JHEP* **07** (2002) 013 [hep-th/0204186].

[31] J.M. Maldacena, G.W. Moore and N. Seiberg, *Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models*, *JHEP* **07** (2001) 046 [hep-th/0105038].

[32] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Modular invariance in superstring on Calabi-Yau n-fold with A-D-E singularity*, *Nucl. Phys.* **B 577** (2000) 3 [hep-th/0002100].

[33] T. Eguchi and Y. Sugawara, *Conifold type singularities, $N = 2$ Liouville and* $\mathrm{SL}(2,R)/\mathrm{U}(1)$ *theories*, *JHEP* **01** (2005) 027 [hep-th/0411041].

[34] S.K. Ashok, R. Benichou and J. Troost, *Non-compact Gepner models, Landau-Ginzburg orbifolds and mirror symmetry*, *JHEP* **01** (2008) 050 [arXiv:0710.1990].

[35] M.B. Green and M. Gutperle, *Light-cone supersymmetry and D-branes*, *Nucl. Phys.* **B 476** (1996) 484 [hep-th/9604091].

[36] A. Recknagel and V. Schomerus, *D-branes in Gepner models*, *Nucl. Phys.* **B 531** (1998) 185 [hep-th/9712186].

[37] M. Berkooz, M.R. Douglas and R.G. Leigh, *Branes intersecting at angles*, *Nucl. Phys.* **B 480** (1996) 265 [hep-th/9606139].

[38] R.C. Myers, *Dielectric-branes*, *JHEP* **12** (1999) 022 [hep-th/9910053].

[39] A.Y. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, *Brane dynamics in background fluxes and non-commutative geometry*, *JHEP* **05** (2000) 010 [hep-th/0003187].

[40] O. Pelc, *On the quantization constraints for a D3 brane in the geometry of NS5 branes*, *JHEP* **08** (2000) 030 [hep-th/0007100].

[41] P. Fayet, *Spontaneous generation of massive multiplets and central charges in extended supersymmetric theories*, *Nucl. Phys.* **B 149** (1979) 137.

[42] K. Hosomichi and S. Ribault, *Solution of the H_3^+ model on a disc*, *JHEP* **01** (2007) 057 [hep-th/0610117].

[43] S. Murthy, *Notes on non-critical superstrings in various dimensions*, *JHEP* **11** (2003) 056 [hep-th/0305197].

[44] R. Dijkgraaf, H.L. Verlinde and E.P. Verlinde, *String propagation in a black hole geometry*, *Nucl. Phys.* **B 371** (1992) 269.

[45] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, *The partition function of the two-dimensional black hole conformal field theory*, *JHEP* **04** (2002) 014 [hep-th/0202129].

[46] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, *Nucl. Phys.* **B 296** (1988) 757.

[47] D. Gepner and Z.-a. Qiu, *Modular invariant partition functions for parafermionic field theories*, *Nucl. Phys.* **B 285** (1987) 423.

[48] V.G. Kac and D.H. Peterson, *Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms*, *Adv. Math.* **53** (1984) 125.

JHEP07(2008)125

Troisième partie

Dualité holographique et supercordes en présence de flux Ramond-Ramond

Chapitre 5

Flux Ramond-Ramond et T-dualité

La seconde partie de cette thèse traite de problèmes liés à la quantification de la théorie des cordes en présence de flux Ramond-Ramond. Les solutions de la théorie des cordes dans lesquelles ces flux sont présents ont joué un rôle important dans les développements récents de la théorie des cordes. Par exemple, les flux Ramond-Ramond se sont révélés utiles pour stabiliser les modules des compactifications de la théorie des cordes. Dans ce contexte, ces flux jouent également un rôle dans la brisure de la supersymétrie. Enfin, les flux de Ramond-Ramond apparaissent régulièrement dans les solutions de la théorie des cordes qui réalisent la dualité AdS/CFT.

Dans ce chapitre, nous introduirons le formalisme des spineurs purs, qui permet de quantifier la théorie des cordes en présence de flux Ramond-Ramond. Nous discuterons ensuite la T-dualité, et le rôle qu'elle a joué dans les progrès récents concernant le calcul d'amplitudes de diffusion de gluons. Ce chapitre a pour but d'introduire la publication [73], résultat d'une collaboration avec Giuseppe Policastro et Jan Troost.

5.1 Quantification de la supercorde en présence de flux Ramond-Ramond

Le formalisme Ramond-Neveu-Schwarz, que nous avons utilisé jusqu'à maintenant, n'est pas efficace pour quantifier la théorie des cordes en présence de flux Ramond-Ramond. Dans ce paragraphe, nous allons présenter les complications qui apparaissent lorsque l'on essaie d'introduire ces flux. Nous définirons ensuite le formalisme des spineurs purs, qui offre une façon de contourner ces difficultés.

Opérateurs de vertex fermioniques dans le formalisme Ramond-Neveu-Schwarz

L'introduction des flux de Ramond-Ramond dans l'action de Polyakov est difficile en raison de la compléxité des opérateurs de vertex fermioniques. On ne peut comprendre ces opérateurs de vertex que dans le formalisme de quantification par l'intégrale de chemin. Les opérateurs de vertex fermioniques ont alors la structure suivante [74] :

$$V_F = u^\alpha \Sigma S_\alpha V_B \tag{5.1}$$

où u^α est une polarisation, Σ est un opérateur construit à partir des fantômes (β, γ), S_α est un champ de spin qui échange les secteurs Ramond et Neveu-Schwarz de la théorie, et V_B est un opé-

rateur de vertex bosonique. Les opérateurs de vertex du secteur Ramond-Ramond sont obtenus en multipliant un opérateur de vertex fermionique holomorphe avec un opérateur de vertex fermionique anti-holomorphe. Pour étudier la théorie des cordes en présence de flux Ramond-Ramond, on doit intégrer un de ces opérateurs sur la feuille d'univers. La présence du champ de spin S_α, qui crée une coupure dans la feuille d'univers, rend cette opération délicate. Il n'est pas clair qu'il existe une formulation lagrangienne du modèle sigma perturbé par un opérateur de vertex du secteur Ramond-Ramond.

Modèle sigma sur un superespace

Une idée pour introduire les champs de Ramond-Ramond sur la feuille d'univers, est de travailler avec un modèle sigma sur un superespace. En effet, les champs de Ramond-Ramond sont des bispineurs d'espace-temps. Or on peut écrire un couplage simple entre un bispineur et des champs paramétrant des directions fermioniques dans l'espace-temps. Un autre avantage de cette approche est de rendre la supersymétrie d'espace-temps manifeste, ce qui simplifie par exemple les calculs d'amplitudes de diffusion.

Considérons un superespace paramétré par dix coordonnées bosoniques X^μ et seize coordonnées fermioniques θ^α. Le modèle sigma vers ce superespace conduit à l'action de Green-Schwarz, qui s'écrit dans la jauge conforme :

$$S_{GS} = \int d^2z \left[\frac{1}{2}\Pi^\mu \bar{\Pi}_\mu + \frac{1}{4}\Pi_\mu \theta^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \bar{\partial}\theta^\beta - \frac{1}{4}\bar{\Pi}_\mu \theta^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial\theta^\beta \right] \tag{5.2}$$

où l'on a introduit la combinaison $\Pi^\mu = \partial X^\mu + \frac{1}{2}\theta^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial\theta^\beta$. Pour quantifier la corde de Green-Schwarz, on doit imposer des contraintes de Dirac sur les états de la théorie :

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2}\left(\Pi_\mu - \frac{1}{4}\theta\gamma_\mu\partial\theta \right) \gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\beta = 0 \tag{5.3}$$

où p_α est le moment conjugué canoniquement associé à θ^α. Les relations de commutation canoniques impliquent que l'algèbre des contraintes prend la forme suivante :

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu. \tag{5.4}$$

Les contraintes anti-commutent pour donner un opérateur non trivial. Cela implique que les méthodes standard de quantification ne s'appliquent pas. Pour contourner ce problème, on peut choisir la jauge du cône de lumière. L'algèbre des contraintes se simplifie alors, et la quantification est possible. Malheureusement, cette procédure requiert la brisure d'une partie des symétries d'espace-temps.

Le formalisme des spineurs purs

Le formalisme des spineurs purs [75] [76] est une modification du formalisme de Green-Schwarz qui permet de quantifier la théorie des cordes en préservant toutes les symétries d'espace-temps. Les nouveaux éléments sont les suivants : tout d'abord, on introduit explicitement dans l'action de Green-Schwarz les moments conjugués aux coordonnées fermioniques θ^α. Ensuite, on ajoute un système de fantômes bosoniques $(\lambda^\alpha, w_\alpha)$, qui satisfont la condition de spineurs purs :

$$\lambda^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0. \tag{5.5}$$

Enfin, on définit l'opérateur BRST :

$$Q = \oint dz \lambda^{\alpha} d_{\alpha} \tag{5.6}$$

où d_α est la contrainte de Dirac (5.3). Cet opérateur est nilpotent et holomorphe. Les états physiques de la théorie quantique sont définis comme les éléments de la cohomologie de Q, avec un nombre de fantôme égal à un.

L'action du modèle sigma dans le formalisme des spineurs purs s'écrit :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \Big[\frac{1}{2}(G_{MN}(Z) + B_{MN}(Z)) \partial Z^M \bar{\partial} Z^N + P^{\alpha\hat{\beta}}(Z) d_\alpha \hat{d}_{\hat{\beta}} \\ &\quad + E_M^{\alpha}(Z) d_\alpha \bar{\partial} Z^M + E_M^{\hat{\alpha}}(Z) \hat{d}_{\hat{\alpha}} \partial Z^M + \Omega_{M\alpha}{}^{\beta}(Z) \lambda^{\alpha} w_\beta \bar{\partial} Z^M + \hat{\Omega}_{M\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}(Z) \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} \partial Z^M \\ &\quad + C_{\alpha}^{\beta\hat{\gamma}}(Z) \lambda^{\alpha} w_\beta \hat{d}_{\hat{\gamma}} + \hat{C}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma}(Z) \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} d_\gamma + S_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}}(Z) \lambda^{\alpha} w_\beta \hat{\lambda}^{\hat{\gamma}} \hat{w}_{\hat{\delta}} \Big] \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int d^2z (\Phi(Z) \mathscr{R}^{(2)}) + S_\lambda + \hat{S}_{\hat{\lambda}}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Les champs $Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha, \hat{\theta}^{\hat{\alpha}})$ sont les coordonnées sur le superespace. On note les indices spinoriels des champs anti-holomorphes avec un chapeau : si la représentation spinorielle associée aux indices $\hat{\alpha}$ a la même chiralité que celle associée aux indices α, on décrit la supercorde de type IIB. Dans le cas contraire il s'agit de la supercorde de type IIA. Les couplages apparaissant dans l'action sont reliés aux champs du superespace. En particulier, la métrique et le champ B sont facilement identifiables dans le premier terme de l'action. Les champs de Ramond-Ramond apparaissent dans le couplage $P^{\alpha\hat{\beta}}$:

$$P^{\alpha\hat{\beta}}|_{\theta=\hat{\theta}=0} = -\frac{i}{4} e^{\phi} F_{RR}^{\alpha\hat{\beta}} \tag{5.8}$$

où $F_{RR}^{\alpha\hat{\beta}}$ est le champ de Ramond-Ramond dans une notation de bispineurs, et ϕ est le dilaton.

L'origine de la symétrie BRST du formalisme des spineurs purs n'est pas connue. On soupçonne que cette symétrie est liée au fixage de jauge d'une symétrie fermionique locale de la corde de Green-Schwarz, la symétrie κ. Il n'y a pas non plus de preuve que la théorie définie par le formalisme des spineurs purs soit équivalente à la théorie des cordes du formalisme Ramond-Neveu-Schwarz. Cependant, beaucoup d'indications vont dans ce sens. Par exemple, le formalisme des spineurs purs reproduit le spectre des excitations de la supercorde dans l'espace-temps de Minkowski [77]. En outre, les conditions de nilpotence et d'holomorphie pour la charge BRST impliquent les équations du mouvement de la supergravité [78].

5.2 T-dualité

La T-dualité est une symétrie qui relie différentes solutions de la théorie des cordes. Cette symétrie est profondément liée à la nature étendue des degrés de liberté élémentaires dans la théorie des cordes : elle ne possède pas d'équivalent en théorie des champs.

Le boson compact

Considérons pour commencer la théorie conforme d'un unique boson libre X, définie sur le tore. On suppose que ce boson est compact, de rayon R :

$$X \equiv X + 2\pi R. \tag{5.9}$$

C'est un modèle-jouet qui caricature la théorie des cordes sur un espace compact avec une isométrie $U(1)$. La fonction de partition de cette théorie conforme est donnée par :

$$Z = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{P_L^2/2}\bar{q}^{P_R^2/2}}{|\eta(\tau)|^2} \tag{5.10}$$

où η est la fonction de Dedekind, τ est la structure complexe du tore, $q = e^{2\pi i\tau}$, et les charges $U(1)$ gauche et droite P_L et P_R sont données par :

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(m\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} + n\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\right), \quad P_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(m\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} - n\frac{R}{\sqrt{\alpha'}}\right). \tag{5.11}$$

Les entiers m et n qui apparaissent dans la somme (5.10) donnent respectivement l'impulsion et l'enroulement d'un état.

La fonction de partition (5.10) est invariante sous la transformation de T-dualité :

$$R \to \frac{\alpha'}{R}, \quad m \to n, \quad n \to m. \tag{5.12}$$

Ainsi, la compactification d'un boson est équivalente à la compactification sur le rayon inverse. Dans l'espace-temps, cela signifie que compactifier la théorie des cordes sur un très petit cercle est équivalent à la compactifier sur un très grand cercle. Les modes d'enroulement sur le petit cercle sont équivalents aux modes d'impulsion sur le grand cercle, et vice-versa.

Cette dualité nous offre un aperçu des manifestations de la gravitation quantique à très petite échelle. La non-renormalisabilité de la théorie d'Einstein laisse supposer que le comportement ultra-violet de la gravité est explosif. Au contraire, la T-dualité nous montre que la physique au-delà de l'échelle de corde est équivalente à la physique en deçà de cette échelle.

Procédure de Buscher

Nous allons maintenant voir comment l'analyse précédente se généralise à des modèles sigma conformes, dont l'espace-cible possède une ismétrie $U(1)$. Considérons une solution de la théorie des cordes, invariante par translation dans une direction (disons la direction X^1). En particulier, les couplages qui apparaissent dans l'action de Polyakov sont invariants sous la transformation :

$$X^1 \to X^1 + c, \quad X^\mu \to X^\mu. \tag{5.13}$$

Dans la suite, il est entendu que les indices grecs sont toujours différents de un. Pour cette discussion, nous utiliserons l'action de la corde bosonique, mais l'analyse se généralise sans effort à la supercorde. On peut écrire l'action de Polyakov (2.4) ainsi :

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \big[&G_{11}(X^\mu)\partial X^1\bar{\partial}X^1 + L_{1\mu}(X^\mu)\partial X^1\bar{\partial}X^\mu + L_{\mu 1}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{\partial}X^1 \\ &+ L_{\mu\nu}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{\partial}X^\nu + \alpha' R^{(2)}\Phi(X^\mu)\big] \end{aligned} \tag{5.14}$$

où l'on a introduit le couplage $L = G + B$. On jauge maintenant la symétrie (5.13), en introduisant un champ vectoriel $(A,\bar{A})$. L'action se réécrit ainsi :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\big[G_{11}(X^\mu)A\bar{A} + L_{1\mu}(X^\mu)A\bar{\partial}X^\mu + L_{\mu 1}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{A} \\ + L_{\mu\nu}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{\partial}X^\nu + \tilde{X}^1(\partial\bar{A} - \bar{\partial}A) + \alpha' R^{(2)}\Phi(X^\mu)\big] \qquad (5.15)$$

On a introduit un multiplicateur de Lagrange $\tilde{X}^1$. Si l'on intègre sur ce multiplicateur de Lagrange, on implémente une contrainte sur le champ vectoriel $(A,\bar{A})$, qui permet de l'écrire comme le gradient d'un scalaire : $A = \partial X^1$, $\bar{A} = \bar{\partial}X^1$. Cela montre que les actions (5.14) et (5.15) sont équivalentes.

Notons que si la théorie est définie sur une surface de Riemann autre que la sphère, alors le champ vectoriel peut avoir des holonomies non-nulles sur les différents cycles de cette surface. Pour que ces holonomies prennent des valeurs entières, on impose que le multiplicateur de Lagrange $\tilde{X}^1$ soit périodique. Les holonomies correspondent alors à des modes d'enroulement pour la coordonnée X^1. Pour que cette procédure fonctionne sur toute surface de Riemann, il faut donc que la coordonnée X^1 soit compacte.

Comme le champ vectoriel $(A,\bar{A})$ apparaît de façon quadratique dans l'action (5.15), on peut également l'intégrer. On obtient alors l'action suivante :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\big[G'_{11}(X^\mu)\partial\tilde{X}^1\bar{\partial}\tilde{X}^1 + L'_{1\mu}(X^\mu)\partial\tilde{X}^1\bar{\partial}X^\mu + L'_{\mu 1}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{\partial}\tilde{X}^1 \\ + L'_{\mu\nu}(X^\mu)\partial X^\mu\bar{\partial}X^\nu + \alpha' R^{(2)}\Phi'(X^\mu)\big] \qquad (5.16)$$

Les nouveaux couplages sont reliés aux anciens par les règles de Buscher [79] :

$$G'_{11}(X^\mu) = \frac{1}{G_{11}(X^\mu)}, \quad L'_{1\mu}(X^\mu) = \frac{L_{1\mu}(X^\mu)}{G_{11}(X^\mu)}, \quad L'_{\mu 1}(X^\mu) = \frac{L_{\mu 1}(X^\mu)}{G_{11}(X^\mu)}, \\ L'_{\mu\nu}(X^\mu) = L_{\mu\nu}(X^\mu) - \frac{L_{\mu 1}(X^\mu)L_{1\nu}(X^\mu)}{G_{11}(X^\mu)}, \quad \Phi'(X^\mu) = \Phi(X^\mu) - \frac{1}{2}\log G_{11}(X^\mu) \qquad (5.17)$$

Ce calcul montre que les actions (5.14) et (5.16) sont équivalentes, malgré le fait qu'elles décrivent des espaces-temps très différents. Appliquée à une solution de la théorie des cordes, cette procédure produit une deuxième solution équivalente, dite T-duale.

Les règles de Buscher (5.17) décrivent l'action de la T-dualité sur les champs du secteur Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz de la théorie des cordes. Pour obtenir les règles de transformation des autres champs, on peut par exemple utiliser les contraintes qui viennent de la compatibilité entre la T-dualité et la supersymétrie [80]. Cette méthode requiert des calculs non-triviaux, et repose sur une approximation de supergravité. Une façon plus directe est de généraliser la procédure de Buscher en utilisant un modèle sigma vers un superespace, qui inclut des couplages aux champs du secteur Ramond-Ramond.

Dans l'article [49], nous avons utilisé le modèle sigma du formalisme de spineurs purs. La procédure de Buscher se généralise naturellement, et reproduit de façon très directe les règles de transformation des champs de Ramond-Ramond par T-dualité. On prouve également que la charge BRST du formalisme de spineurs purs est invariante par T-dualité. Cela montre que les deux solutions T-duales de la théorie des cordes sont en effet équivalentes.

Cette dérivation prouve que la T-dualité est une symétrie de la théorie des cordes à tout ordre en α'. Elle se généralise ordre par ordre dans le couplage de corde. On peut également interpréter ce résultat comme un contrôle de la validité du formalisme des spineurs purs.

Symmétrie superconforme duale dans $N = 4$ Super-Yang-Mills, et T-dualité

Une motivation supplémentaire à l'origine de la publication [49] vient de la découverte d'une propriété spectaculaire de la théorie de Yang-Mills planaire avec $N = 4$ supersymétries. On observe que le calcul d'amplitudes de diffusion de gluons est équivalent au calcul de la ligne de Wilson dont le contour est donné par les impulsions des gluons. Cette propriété a été observée à couplage fort, grâce à la correspondance AdS/CFT [81], mais également à couplage faible, grâce à des calculs perturbatifs [82]. La symétrie superconforme de la théorie, agissant sur les lignes de Wilson, implique alors une symétrie superconforme duale pour les amplitudes de diffusions de gluons.

L'origine de cette dualité surprenante a été en partie découverte dans [81]. Les auteurs de cet article utilisent la correspondance AdS/CFT pour calculer une amplitude de diffusion de gluons. Ils montrent que si l'on effectue quatre T-dualités dans les directions non-radiales de l'espace-temps AdS_5, le calcul holographique devient un calcul de ligne de Wilson. Cependant, cet argument n'est valable que si le couplage de 't Hooft est très grand. En effet, si les quatre T-dualités laissent invariante la métrique de AdS_5, elles modifient le dilaton et les flux de Ramond-Ramond. Ces champs ne sont négligeables qu'à fort couplage de 't Hooft. Pour comprendre pourquoi la dualité est également observée à couplage faible, il faut donc un contrôle précis de l'action des T-dualités sur les flux de Ramond-Ramond. L'idée d'utiliser le formalisme des spineurs purs est alors naturelle.

Ce programme a été complété dans [83], où les auteurs ont généralisé l'idée de la T-dualité aux directions fermioniques du superespace. Supposons que les couplages du modèle sigma (5.7) ne dépendent pas d'une coordonnée fermionique θ^1. Le champ θ^1 sur la feuille d'univers est un champ bosonique de dimension conforme nulle. En effet, les champs (θ^1, p_1) forment un système de fantômes (b,c) avec charge centrale $c = -2$. On peut donc appliquer la procédure de Buscher pour remplacer θ^1 par une coordonnée fermionique duale dans l'intégrale de chemin. Cela permet de lire les règles de transformations des couplages sous l'action de la T-dualité fermionique. Cette opération modifie les champs de Ramond-Ramond et le dilaton, mais pas la métrique ni le champ B. Notons cependant que cette procédure n'est justifiée que sur la sphère, car le champ θ^1 n'est pas un boson compact. La T-dualité fermionique n'est donc une symétrie de la théorie des cordes qu'au niveau des arbres.

La T-dualité fermionique permet de comprendre pourquoi la correspondance entre lignes de Wilson et amplitudes de diffusion de gluons est valable pour toutes les valeurs du couplage de 't Hooft. Si l'on effectue huit T-dualités fermioniques en plus des quatre T-dualités bosoniques dans l'espace AdS_5, on laisse l'ensemble de l'espace-temps invariant. Les T-dualités femioniques compensent l'action des T-dualités bosoniques sur les champs de Ramond-Ramond et le dilaton. Sous cette opération, le calcul de l'amplitude de diffusion est à nouveau reformulé en un calcul de ligne de Wilson, ce qui démontre l'existence de la symétrie conforme duale pout tout couplage de 't Hooft.

Troisième publication : “ T-duality in Ramond-Ramond backgrounds.”

Author's personal copy

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Physics Letters B 661 (2008) 192–195
PHYSICS LETTERS B
www.elsevier.com/locate/physletb

T-duality in Ramond–Ramond backgrounds

Raphael Benichou, Giuseppe Policastro *, Jan Troost

Laboratoire de Physique Théorique, [1] *Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France*

Received 23 November 2007; accepted 7 January 2008

Available online 2 February 2008

Editor: M. Cvetič

Abstract

Using the pure spinor formalism on the world-sheet, we derive the T-duality rules for all target space couplings in an efficient manner. The world-sheet path integral derivation is a proof of the equivalence of the T-dual Ramond–Ramond backgrounds which is valid non-perturbatively in the string length over the curvature radius and to all orders in perturbation theory in the string coupling.
© 2008 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 11.25.-w

1. Introduction

Target space duality is a symmetry of string theory that maps a string theory in a background to a dual string theory in a dual background. For reviews see [1,2]. The map between T-dual backgrounds was derived in a world-sheet path integral formalism for Neveu–Schwarz Neveu–Schwarz fields in [3]. For Ramond–Ramond backgrounds in type II, various derivations have appeared in the literature: the authors of [4] used the equivalence of the type II supergravity actions after reduction to nine dimensions. In [5] arguments were given for the transformation of the spacetime supersymmetry parameters, and then the transformations of the gravitini and of the Ramond–Ramond fields were inferred by demanding compatibility between T-duality and supersymmetry. A world-sheet derivation was obtained in the Green–Schwarz formalism in [6] up to quadratic order in the superspace coordinate, and later extended to all orders in [7,8].

In the present Letter, we give a novel world-sheet derivation of T-duality based on the pure spinor formalism [9]. Our motivation for revisiting this problem is twofold: first, the duality rules are derived in a simpler and more streamlined way than with other methods. Secondly, since the pure spinor formalism gives a satisfactory conformal field theory description of the string in generic backgrounds, we are able to promote the duality to the path integral level, thus providing for a derivation of T-duality which is valid non-perturbatively in the string length over the curvature radius and to all orders in the string coupling. The duality is valid in the presence of Ramond–Ramond and fermionic backgrounds.

2. Derivation of the classical T-duality rules

We will derive the T-duality rules from the world-sheet pure spinor formalism [9]. (See [10] for a review.) The derivation will have the advantage of simplicity, and the formalism is suitable for the full quantum theory since in the pure spinor formalism the theory can be quantized without obstruction.

The pure spinor world-sheet action is:

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\Big[&\frac{1}{2}\big(G_{MN}(Z)+B_{MN}(Z)\big)\partial Z^M\bar\partial Z^N \\
&+ P^{\alpha\hat\beta}(Z)d_\alpha\hat d_{\hat\beta} + E^\alpha_M(Z)d_\alpha\bar\partial Z^M + E^{\hat\alpha}_M(Z)\hat d_{\hat\alpha}\partial Z^M \\
&+ \Omega^\beta_{M\alpha}(Z)\lambda^\alpha w_\beta\bar\partial Z^M + \hat\Omega^{\hat\beta}_{M\hat\alpha}(Z)\hat\lambda^{\hat\alpha}\hat w_{\hat\beta}\partial Z^M \\
&+ C^{\beta\hat\gamma}_\alpha(Z)\lambda^\alpha w_\beta\hat d_{\hat\gamma} + \hat C^{\hat\beta\gamma}_{\hat\alpha}(Z)\hat\lambda^{\hat\alpha}\hat w_{\hat\beta}d_\gamma \\
&+ S^{\beta\hat\delta}_{\alpha\hat\gamma}(Z)\lambda^\alpha w_\beta\hat\lambda^{\hat\gamma}\hat w_{\hat\delta}\Big] \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\big(\Phi(Z)\mathcal{R}^{(2)}\big) + S_\lambda + \hat S_{\hat\lambda},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

* Corresponding author.
E-mail address: policast@lpt.ens.fr (G. Policastro).
[1] Unité Mixte du CRNS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'université Pierre et Marie Curie 6, UMR 8549.

0370-2693/$ – see front matter © 2008 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.physletb.2008.01.059

Author's personal copy

where the coordinates $Z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \hat{\theta}^{\hat{\alpha}})$ are coordinates on an $\mathbb{R}^{10|32}$ superspace. The variables d and $\hat{d}$ as well as w and $\hat{w}$ are independent spinorial variables while the variables λ and $\hat{\lambda}$ are pure spinors, which means that they are Weyl spinors satisfying the constraint

$$\lambda^\alpha \gamma^a_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0. \tag{2}$$

The action for the pure spinors, $S_\lambda + \hat{S}_{\hat{\lambda}}$, is formally a free field action. Because of the constraints a proper treatment requires care. That will not be important for our purposes.

The action (1) describes both the type IIB and IIA string. The only difference is whether the hatted and un-hatted spinor indices have the same or the opposite chirality. All the couplings are superfields, which means they are generic functions of all the superspace coordinates. For the reader's convenience, we recall the meaning of the various superfields: G_{MN} is the metric, B_{MN} is the B-field, $P^{\alpha\hat{\beta}}$ are the RR field strengths, E^α_M is the spinorial part of the vielbein, $\Omega^\beta_{M\alpha}$ is the spin connection, $C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha$ contains the field strength of the dilatino, $S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}$ contains the Riemann curvature, and Φ is the dilaton. The world-sheet curvature is denoted $\mathcal{R}^{(2)}$, and it couples to the dilaton via the Fradkin–Tseytlin term in the last line. Superdiffeomorphisms and local Lorentz transformations allow to make particular gauge choices where the physical content of the fields is more manifest. For brevity's sake, we refer again to [10].

As mentioned in [10] and explained in detail in [11], the action enjoys a BRST symmetry generated by the charge

$$Q = \int (\lambda^\alpha d_\alpha + \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{d}_{\hat{\alpha}}),$$

when the background fields satisfy a set of constraints, which are known to put all the fields on-shell.

For our purposes it is important to notice that the action (1) is the most general one that respects the local symmetries. Since, as it turns out, the BRST operator will not be affected by the T-duality, it follows immediately that the T-duality transformed fields will again solve the equations of motion. This had to be imposed as a requirement in order to find the form of the transformations in the Green–Schwarz formalism [7], but in the pure spinor formalism it is automatically true.

The difference with the Green–Schwarz string in this respect is due to the fact that the action (1) explicitly contains all the fields that appear in the superspace description of the gravity multiplet. The Green–Schwarz action instead depends explicitly only on the bosonic part of the supervielbein, so that additional input is required in order to find the transformation rules for the other fields. In the pure spinor formalism, when we perform the T-duality transformation on the action, we are bound to find an action of the same form as (1), and we can directly read off the transformation rules for all superfields.

For now we concentrate on the first three lines of the action (1)—we come back to the last line later on. We suppose that a Killing vector exists in space–time, and we choose local coordinates such that all space–time superfields do not depend on the coordinate x^1. The tangent vector $\partial/\partial x^1$ is proportional to the Killing vector in a given patch. The action then has a global shift symmetry (in x^1) that we gauge by introducing a gauge field one-form A on the world-sheet. We moreover add a term to the action that corresponds to a Lagrange multiplier y multiplying the field strength $F = dA$:

$$S_{\text{gauged}}[\partial x_1, A, y] = S\big[\partial x^1 - A\big] + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z\, y(\partial \bar{A} - \bar{\partial} A). \tag{3}$$

The model we obtain in this way is locally and classically equivalent to the original model, since the equation of motion for the Lagrange multiplier forces the gauge field to be pure gauge [3]. The original dynamics survives unaltered.

On the other hand, we can gauge x^1 to zero, and we obtain an action that is quadratic in the gauge field A. It is possible to integrate out the gauge field classically, but the Gaussian integral to be performed requires a regularization, that we discuss in the following section. The naive integration results in the dual action:

$$\begin{aligned}
S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \Bigg\{ & \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{4}{G_{11}}\right)(\partial y \bar{\partial} y) \\
& + \left(-2\frac{G_{1M} + B_{1M}}{G_{11}}\right)\left(\partial y \bar{\partial} Z^M\right) \\
& + \left(2\frac{G_{M1} + B_{M1}}{G_{11}}\right)\left(\bar{\partial} y \partial Z^M\right) + \Bigg(G_{MN} + B_{MN} \\
& - (-)^{MN} \frac{(G_{M1} + B_{M1})(G_{1N} + B_{1N})}{G_{11}}\Bigg)\left(\partial Z^M \bar{\partial} Z^N\right)\Bigg] \\
& + \left(P^{\alpha\hat{\beta}} + \frac{2E^\alpha_1 E^{\hat{\beta}}_1}{G_{11}}\right) d_\alpha \hat{d}_{\hat{\beta}} \\
& + \frac{2E^\alpha_1}{G_{11}} d_\alpha \bar{\partial} y + \left(E^\alpha_M - \frac{(G_{1M} + B_{1M})E^\alpha_1}{G_{11}}\right) d_\alpha \bar{\partial} Z^M \\
& - \frac{2E^{\hat{\beta}}_1}{G_{11}} \partial y \hat{d}_{\hat{\beta}} + \left(E^{\hat{\beta}}_M - \frac{(G_{M1} + B_{M1})E^{\hat{\beta}}_1}{G_{11}}\right) \hat{d}_{\hat{\beta}} \partial Z^M \\
& + \frac{2\Omega^\beta_{1\alpha}}{G_{11}} \lambda^\alpha w_\beta \bar{\partial} y \\
& + \left(-\frac{G_{1M} + B_{1M}}{G_{11}} \Omega^\beta_{1\alpha} + \Omega^\beta_{M\alpha}\right) \lambda^\alpha w_\beta \bar{\partial} Z^M \\
& - \frac{2\hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}}}{G_{11}} \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} \partial y \\
& + \left(-\frac{G_{M1} + B_{M1}}{G_{11}} \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}} + \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{M\hat{\alpha}}\right) \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} \partial Z^M \\
& + \left(C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha - \frac{2}{G_{11}} \Omega^\beta_{1\alpha} E^{\hat{\gamma}}_1\right) \lambda^\alpha w_\beta \hat{d}_{\hat{\gamma}} \\
& + \left(\hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}} - \frac{2}{G_{11}} \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}} E^\gamma_1\right) \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} d_\gamma \\
& + \left(S^{\beta\hat{\beta}}_{\alpha\hat{\alpha}} - \frac{2}{G_{11}} \Omega^\beta_{1\alpha} \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}}\right) \lambda^\alpha w_\beta \hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} \hat{w}_{\hat{\beta}} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

In the action (4) the sum over the M index is now over all variables except x^1. The sign $(-)^{MN}$ is -1 when M and N are fermionic indices and $+1$ otherwise. It should be clear that the first two lines give the classical T-duality rules for the NSNS

Author's personal copy

sector background fields. To proceed, we take a closer look at the fourth and fifth lines that code the transformation properties of the fermionic vielbeins. Given the matrices Q and $\hat{Q}$:

$$Q_M{}^N = \begin{pmatrix} \frac{2}{G_{11}} & 0_{1\times 9\vert 32} \\ -\frac{1}{G_{11}}(G_{1M}+B_{1M}) & 1_{9\vert 32\times 9\vert 32} \end{pmatrix},$$
$$\hat{Q}_M{}^N = \begin{pmatrix} -\frac{2}{G_{11}} & 0_{1\times 9\vert 32} \\ -\frac{1}{G_{11}}(G_{M1}+B_{M1}) & 1_{9\vert 32\times 9\vert 32} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

we see that the supervielbeins transform as $E'^{\alpha}_M = Q_M{}^N E^{\alpha}_N$ and $\hat{E}'^{\hat{\alpha}}_M = \hat{Q}_M{}^N \hat{E}^{\hat{\alpha}}_N$. From the action we cannot directly infer the transformation rule for the bosonic vielbein, since it only appears via the metric $G_{MN} = E^a_M E^b_N \eta_{ab}$. Either Q or $\hat{Q}$ acting on E^a_M gives a rule compatible with the transformation of the metric. So there are two candidates for a T-dual vielbein. We note (similarly as in [5]) that the two possibilities are related by the transformation $Q\hat{Q}^{-1}$ which is a Lorentz transformation of determinant -1. In fact it is a parity transformation in the direction of the T-duality. In order to be consistent, we have to act with a parity transformation in one spinor sector. We can choose it to be in the hatted sector, the other choice being entirely equivalent. The chiral change in parity takes us from a type IIA/B background to a type IIB/A background. We can then put the action in the original form by redefining the right-moving fermions as follows:

$$\hat{\psi}' = \Gamma\hat{\psi}, \tag{6}$$

where $\hat{\psi} = \hat{\lambda}, \hat{\theta}, \hat{w}, \hat{d}$ is any of the spinorial fields, and $\Gamma = \gamma_1$. It can be checked that after the redefinition of the fermionic variables the action is indeed of the original form, but the background superfields with hatted spinor indices have to be redefined. Moreover, since $\Gamma^2 = 1$, the T-duality rules leave the BRST charge invariant, as anticipated. We can now give the transformation rules for all the superfields. Combining the metric and B-field in the tensor $L_{MN} = G_{MN} + B_{MN}$, we find

$$G'_{11} = \frac{4}{G_{11}},$$
$$L'_{1M} = -2\frac{L_{1M}}{G_{11}},$$
$$L'_{M1} = 2\frac{L_{1M}}{G_{11}},$$
$$L'_{MN} = L_{MN} - (-)^{MN}\frac{L_{M1}L_{1N}}{G_{11}},$$
$$P'^{\alpha\hat{\beta}'} = \left(P^{\alpha\hat{\beta}} + 2\frac{E^{\alpha}_1 E^{\hat{\beta}}_1}{G_{11}}\right)\Gamma_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\beta}'},$$
$$E'^{\alpha}_M = Q_M{}^N E_N{}^{\alpha},$$
$$\hat{E}'^{\hat{\alpha}'}_M = \hat{Q}_M{}^N \hat{E}^{\hat{\alpha}}_N \Gamma_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\alpha}'},$$
$$\Omega'_{M\alpha}{}^{\beta} = Q_M{}^N \Omega_{N\alpha}{}^{\beta},$$
$$\hat{\Omega}'_{M\hat{\alpha}'}{}^{\hat{\beta}'} = \hat{Q}_M{}^N \hat{\Omega}_{N\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}\Gamma_{\hat{\alpha}'}{}^{\hat{\alpha}}\Gamma_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\beta}'},$$
$$C'^{\beta\hat{\gamma}'}_{\alpha} = \left(C_{\alpha}{}^{\beta\hat{\gamma}} - \frac{2}{G_{11}}\Omega_{1\alpha}{}^{\beta}\hat{E}_1{}^{\hat{\gamma}}\right)\Gamma_{\hat{\gamma}}{}^{\hat{\gamma}'},$$
$$\hat{C}'^{\hat{\beta}'\gamma}_{\hat{\alpha}'} = \left(\hat{C}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}\gamma} - \frac{2}{G_{11}}\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}E_1{}^{\gamma}\right)\Gamma_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\alpha}}\Gamma_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\beta}'},$$
$$S'^{\beta\hat{\delta}'}_{\alpha\hat{\gamma}'} = \left(S^{\beta\hat{\beta}}_{\alpha\hat{\alpha}} - \Omega_{1\alpha}{}^{\beta}\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}\right)\Gamma_{\hat{\gamma}'}{}^{\hat{\alpha}}\Gamma_{\hat{\beta}}{}^{\hat{\delta}'}. \tag{7}$$

These transformations contain all fermionic corrections to the T-duality. Our derivation of the T-duality rules is considerably more concise than the derivations in the literature. It can be checked that when the background is on-shell, i.e., it satisfies the torsion constraints, the dual background is also on-shell. In this case the transformation rules are a bit simpler, because the torsion constraint

$$T^{\beta}_{a\alpha} = 0 = \hat{T}^{\hat{\beta}}_{a\hat{\alpha}},$$

together with the condition that the fields do not depend on x^1, implies that $\Omega^{\beta}_{1\alpha} = 0 = \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}}$.

The fact that an on-shell background is transformed into another on-shell background can also be argued purely in world-sheet terms. We need to show that the BRST symmetry of the original action carries over to the dual action. Since the gauge field A and the Lagrange multiplier y are BRST invariant, and we assume that the original action is invariant as well, the total gauged action is invariant. To go to the dual theory we integrate out x^1, which is not closed under BRST so naively we seem to break the symmetry. To show that this is not the case, we have to perform a field redefinition before integrating out; we shift the gauge field as follows:

$$A \to A + \frac{1}{G_{11}}E^{\alpha}_1 d_{\alpha}\partial x^1,$$
$$\bar{A} \to \bar{A} + \frac{1}{G_{11}}E^{\hat{\alpha}}_1 \hat{d}_{\hat{\alpha}}\bar{\partial}x^1.$$

The effect of this shift in the action (3) is to cancel the couplings between d and ∂x^1 and replace it with a coupling between d and ∂y. As a result, the symplectic structure on the space of fields is modified, and it can be shown that the BRST charge (formally given by the same expression) now leaves x^1 invariant and acts instead on y. It is then safe to integrate out the isometry coordinate x^1 and the gauge potential A, and we arrive again at the dual action (4), having preserved the BRST invariance at each step.

In order to compare our results with those of [7] it is important to keep in mind that we are working in a different superspace. More precisely, Berkovits's formalism naturally gives the formulation of supergravity in Weyl superspace [12], since the spin connection takes values in $\mathrm{spin}(1,9)\times\mathbb{R}$ (corresponding to the 0 and 2-form part of $\Omega_{M\alpha}{}^{\beta}$ viewed as a matrix in the Clifford algebra; the 4-form part has to vanish for the action to be gauge-invariant). While it is possible to reduce the structure group to the Lorentz part only, this has some consequences on the structure of the torsion constraints. In particular, in ordinary superspace one of the constraints reads

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left(\delta^{\gamma}_{(\alpha}\delta^{\rho}_{\beta)} + (\gamma_a)_{\alpha\beta}\left(\gamma^a\right)^{\gamma\rho}\right)\Lambda_{\rho},$$

where Λ is the dilatino. In Weyl superspace it is possible to set $T^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, but the dilatino is then absorbed in the spin connection (see [13] for a thorough discussion).

Author's personal copy

3. Regularization and quantum equivalence

We have been careful in choosing a world-sheet formalism that can be regularized [14,15] and quantized [9]. In particular, the only quantum calculation we need to perform is the Gaussian integration over the gauge field and the coordinates. It is rigorously performed in [14,15], and we summarize those discussions.

We introduce a generalized Hodge decomposition of the gauge field on the world-sheet $A_a = \partial_a \alpha + \epsilon_a{}^b \partial_b \beta / G_{11}$. The Gaussian integrations that one performs to obtain either the original or the dual model are over the variables $x^1 - \alpha, y$ and β. The Gaussian integration can be regularized efficiently by introducing either dimensional regularization as in [16] or a Pauli–Villars regulator field for each integration variable [15], with a kinetic term determined by the quadratic terms in the fields $x^1 - \alpha, y, \beta$.

The crucial observation that we make now is that in the pure spinor world-sheet action (for a generic background), the quadratic terms are identical to the ones in the Neveu–Schwarz Ramond formalism for a purely NS–NS background up to the fact that the coefficients are superfields in our context, and does not affect the calculation. We therefore conclude that the action for the regulator fields is identical to the regulated action in the Neveu–Schwarz Ramond formalism. Therefore, as in [15], in either regularization scheme, the Gaussian integration provides us with an equality between regularized path integrals for the dual world-sheet quantum field theories. Thus the equivalence of non-linear sigma models is valid to all orders in world-sheet perturbation theory (in the string length over the curvature radius squared), and even non-perturbatively. To establish this it is crucial to demonstrate that the non-local contributions to the regulated actions on either side match, as demonstrated in [14]. Precisely as for purely NSNS backgrounds it can be shown that conformal models on one side of the duality are mapped into conformal dual models provided one shifts the dilaton, which takes into account the conformal anomaly. The independence of the regularization procedure on the Ramond–Ramond backgrounds is responsible for the fact that the dilaton shifts with an amount that depends on the Neveu–Schwarz Neveu–Schwarz (superfield) background only. The transformation rule is then

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{2} \ln G_{11}.$$

That provides the T-duality rule for the dilaton in the final line in the action (1). The pure spinor action is unaltered.

An important point we want to make is that we can do the full regularization of all fields in a dimensional regularization scheme. That scheme does not break BRST invariance of the action on both sides of the T-duality. Thus, on-shell backgrounds are mapped onto on-shell backgrounds, at the quantum level, in the dimensional regularization scheme.

To argue for T-duality to all order in the string coupling g_s, we reason as follows. Given the fact that on any given world-sheet (with given topology and modular parameters) we can demonstrate non-perturbative equivalence of the world-sheet models, it suffices to observe that the modular integrals will be identical for type IIA and type IIB string theories. We thus provide a proof of T-duality that is perturbative in the string coupling, and non-perturbative in the string length over the curvature radius, and this in any background including those with Ramond–Ramond fields.

4. Conclusions

The world-sheet pure spinor formalism enables us to efficiently derive the T-duality rules for string backgrounds, as well as to generalize the proof of equivalence of backgrounds non-perturbatively on the world-sheet and perturbatively in target space to any non-trivial background of string theory. Moreover, the duality holds for backgrounds that are on-shell or off-shell. It is interesting to further study global aspects of the duality in backgrounds with Ramond–Ramond fluxes. T-duality on superspaces using the world-sheet spinor formalism also deserves investigation. It should be possible using our techniques to analyze the important case of the AdS_5 background, that has been the subject of recent investigations (see [17]).

Acknowledgements

We thank Costas Bachas and Dimitri Tsimpis for helpful discussions. Our work was supported in part by the EU under the contract MRTN-CT-2004-005104.

References

[1] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, Y. Lozano, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 41 (1995) 1, hep-th/9410237.
[2] A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, Phys. Rep. 244 (1994) 77, hep-th/9401139.
[3] T.H. Buscher, Phys. Lett. B 201 (1988) 466.
[4] E. Bergshoeff, C.M. Hull, T. Ortin, Nucl. Phys. B 451 (1995) 547, hep-th/9504081.
[5] S.F. Hassan, Nucl. Phys. B 568 (2000) 145, hep-th/9907152.
[6] M. Cvetic, H. Lu, C.N. Pope, K.S. Stelle, Nucl. Phys. B 573 (2000) 149, hep-th/9907202.
[7] B. Kulik, R. Roiban, JHEP 0209 (2002) 007, hep-th/0012010.
[8] I.A. Bandos, B. Julia, JHEP 0308 (2003) 032, hep-th/0303075.
[9] N. Berkovits, JHEP 0004 (2000) 018, hep-th/0001035.
[10] N. Berkovits, hep-th/0209059.
[11] N. Berkovits, P.S. Howe, Nucl. Phys. B 635 (2002) 75, hep-th/0112160.
[12] P.S. Howe, Phys. Lett. B 415 (1997) 149, hep-th/9707184.
[13] D. Tsimpis, JHEP 0510 (2005) 057, hep-th/0508214.
[14] A.S. Schwarz, A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. B 399 (1993) 691, hep-th/9210015.
[15] J. De Jaegher, J. Raeymaekers, A. Sevrin, W. Troost, Nucl. Phys. B 548 (1999) 563, hep-th/9812207.
[16] A.A. Tseytlin, Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 1721.
[17] L.F. Alday, J.M. Maldacena, JHEP 0706 (2007) 064, arXiv: 0705.0303 [hep-th].

Chapitre 6

L'espace-temps AdS_3

Dans ce chapitre, nous allons présenter les propriétés des théories de gravitation quantiques dans l'espace-temps AdS_3. L'accent sera mis sur la correspondance holographique entre théories de gravitation quantiques et théories conformes. Nous décrirons ensuite différentes façons d'immerger l'espace-temps AdS_3 dans des solutions exactes de la théorie des cordes. L'objectif est de motiver l'étude réalisée avec Jan Troost et Sujay Ashok [84].

6.1 La correspondance AdS/CFT

La correspondance AdS/CFT [85], découverte en 1997, a profondément influencé la physique théorique des hautes énergies. Dans ce paragraphe, nous allons présenter brièvement les étapes qui ont conduit à la découverte de cette dualité surprenante.

Le principe holographique

L'étude des trous noirs est instructive dans l'objectif de comprendre les propriétés d'une théorie de gravitation quantique. En effet, ces objets sont gouvernés par l'interaction gravitationnelle même à très petite échelle, où les effets quantiques se manifestent. L'étude des théories quantiques des champs au voisinage d'un trou noir a permis de comprendre qu'un trou noir se comporte comme un objet thermodynamique [86]. Il possède une température non-nulle, que l'on peut évaluer en mesurant un flux de particules qui s'éloignent du trou noir. Ces particules sont créées par paires au voisinage de l'horizon ; une des deux particules peut parfois échapper à l'attraction du trou noir. On peut donc attribuer une entropie thermodynamique au trou noir, l'entropie de Bekenstein-Hawking :

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \frac{A}{4} \tag{6.1}$$

Cette entropie est proportionnelle à l'aire de l'horizon du trou noir A. Cette propriété est surprenante lorsque l'on essaie de donner une interprétation statistique à l'entropie de Bekenstein-Hawking : le nombre de degrés de liberté élémentaires qui décrivent le trou noir n'est pas proportionnel au volume, mais à l'aire. Cette propriété semble difficile à obtenir à partir d'une théorie locale définie dans l'espace-temps. Par contre, c'est précisément le résultat que fournirait une théorie locale définie sur l'horizon du trou noir. De cette observation vient l'idée du principe holographique [87] [88] :

Une théorie de gravitation quantique définie dans un espace donné est équivalente à une théorie locale définie sur le bord de cet espace.

Cette idée est pour le moins surprenante. La véracité d'une telle proposition impliquerait des changements conceptuels importants dans notre compréhension de l'espace-temps. Il est remarquable que cette idée soit précisément réalisée dans la théorie des cordes, au moins dans certains contextes. C'est la correspondance AdS/CFT, que nous allons introduire dans la suite de ce paragraphe.

Trous noirs et D-branes

La théorie des cordes offre une compréhension microscopique de l'entropie des trous noirs. Les objets centraux dans cette analyse sont les D-branes. Ce sont des objets très massifs dans le régime perturbatif de la théorie des cordes : leur tension est proportionnelle à l'inverse du couplage de corde. On peut assembler des D-branes de façon à former un trou noir.

La construction d'un trou noir en termes de D-branes permet d'avoir une description microscopique des degrés de liberté élémentaires du trou noir : ce sont les cordes ouvertes qui vivent sur le volume des D-branes. On peut ainsi calculer l'entropie microscopique du trou noir [89]. L'idée est de considérer un trou noir supersymétrique, dont les propriétés ne dépendent pas de la valeur de la constante de couplage. On peut ainsi l'étudier à très faible couplage à l'aide des méthodes de la théorie des cordes perturbative. On utilise ensuite la formule de Cardy [90], qui donne la dégénérescence des états d'une théorie conforme à une énergie donnée. On reproduit ainsi exactement l'entropie thermodynamique de Bekenstein-Hawking.

La dualité holographique réalisée dans la théorie de cordes

La construction de trous noirs en termes de D-branes a conduit à la découverte de la correspondance AdS/CFT. Considérons une configuration de D-branes. Sur le volume de ces D-branes vit une théorie de cordes ouvertes, qui interagissent avec les cordes fermées se propageant dans le bulk. On suppose qu'il existe une limite de découplage dans laquelle ces interactions disparaissent. On obtient donc une théorie de jauge vivant sur les D-branes, et une théorie de gravitation dans le bulk, qui ne sont pas couplées. Donnons maintenant une température non-nulle à la théorie de jauge. Cela signifie que le trou noir formé par les D-branes émet une radiation de Hawking. Les états émis de cette façon appartiennent à la fois à l'espace de Hilbert de la théorie de jauge, et à celui de la théorie de gavitation. Cette observation a conduit à la formulation de la correspondance AdS/CFT [85] : dans la limite de découplage, la théorie de jauge vivant sur les D-branes et la théorie de gravitation vivant dans le bulk sont équivalentes. Le nom de cette correspondance vient du fait que les exemples proposés dans [85] impliquent une théorie de jauge superconforme, et une théorie de gravitation quantique dans un espace-temps Anti-de Sitter.

Cette proposition relie deux théories vivant dans des espaces-temps de dimensions différentes. En fait, cette correspondance peut être comprise comme une dualité holographique [91] [92]. L'espace-temps Anti-de Sitter possède un bord dont la topologie est celle de l'espace-temps de Minkowski. La théorie conforme vit sur ce bord. La coordonnée radiale de l'espace-temps Anti-de Sitter peut être interprétée comme l'échelle d'énergie dans la théorie conforme. L'infini spatial (infra-rouge) dans le bulk correspond aux très hautes énergies (ultra-violet) sur le bord, et vice-versa. En outre, la constante de couplage de la théorie gravitationnelle peut être faible alors que le couplage de 't Hooft de la théorie conforme est grand. Ainsi, on peut utiliser une théorie de

gravitation pour étudier une théorie de jauge à fort couplage. Cette idée a été exploitée avec succès pour expliquer certains aspects du comportement infra-rouge de la chromodynamique quantique (voir par exemple [93]).

6.2 Gravité quantique dans l'espace-temps AdS_3

Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons sur l'étude de l'espace-temps Anti-de Sitter à trois dimensions. Nous allons montrer qu'une théorie de gravitation quantique définie dans cet espace-temps réalise systématiquement la dualité holographique. Cette théorie gravitationnelle est duale à une théorie conforme bidimensionnelle. Le groupe conforme à deux dimensions est de dimension infinie, ce qui rend la correspondance AdS/CFT particulièrement attrayante. Dans ce paragraphe, on s'inspirera de la discussion présentée dans [94].

Gravitation en trois dimensions

Considérons pour commencer la théorie classique de gravitation pure en trois dimensions. Cette théorie est définie par l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S = \frac{1}{16\pi G^{(3)}} \int d^3x\sqrt{-g}\left(R + \frac{2}{l^2}\right) \tag{6.2}$$

où $G^{(3)}$ est la constante de Newton en trois dimensions, et le terme $\frac{2}{l^2}$ correspond à une constante cosmologique négative.

Une particularité importante de la gravité à trois dimensions est la suivante : le tenseur de Riemann a autant de degrés de liberté que le tenseur de Ricci. Les équations d'Einstein fixent le tenseur de Ricci ; il ne reste donc pas de degré de liberté dynamique. La théorie classique n'admet pas d'ondes planes, il n'y a pas de graviton se propageant dans l'espace-temps. Une autre conséquence est que toutes les solutions de la théorie ont le même tenseur de Riemann. Elles sont donc localement identiques, mais peuvent différer globalement.

Le raisonnement précédent n'est plus valable lorsque l'on couple la gravité à une forme de matière. Dans ce cas, les équations d'Einstein relient alors le tenseur de Ricci à une quantité dynamique : le tenseur énergie-impulsion de la matière. C'est le cas en particulier dans la théorie des cordes, car la corde élementaire possède de nombreuses excitations en addition du graviton.

L'espace-temps AdS_3 et les trous noirs BTZ

L'action d'Einstein-Hilbert (6.2) admet une solution maximalement symétrique : l'espace-temps AdS_3. Cet espace-temps est défini par la métrique :

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2}+1\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2}+1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \tag{6.3}$$

Les coordonnées r et t sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et la coordonnée ϕ a pour période 2π. Cet espace-temps admet un bord à l'infini spatial ($r = \infty$). Ce bord a la topologie d'un cylindre, paramétré par les coordonnées t et ϕ.

L'espace-temps AdS_3 est également la variété du groupe $Sl(2,\mathbb{R})$. En conséquence, cet espace-temps admet un groupe d'isométries $Sl(2,\mathbb{R})_L \times Sl(2,\mathbb{R})_R$.

L'action d'Einstein-Hilbert (6.2) admet également des solutions de trous noirs : ce sont les trous noirs BTZ [95] [96]. Ils sont définis par une masse et un moment angulaire. On peut les construire en quotientant l'espace-temps AdS_3 par l'action d'un groupe discret.

L'algèbre de Virasoro réalisée dans la gravitation à trois dimensions

Pour définir la théorie de gravitation quantique dans l'espace-temps AdS_3, il est nécessaire de préciser des conditions de bord à l'infini spatial. Nous voulons en particulier que la théorie admette les solutions de trou noir BTZ. Les conditions aux limites suivantes ont été proposées dans [97] :

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(r^0), \quad g_{t\phi} = \mathcal{O}(r^0), \quad g_{tr} = \mathcal{O}(r^{-3}) \\ g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}), \quad g_{r\phi} = \mathcal{O}(r^{-3}), \quad g_{\phi\phi} = r^2 + \mathcal{O}(r^0). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Il existe des difféomorphismes qui préservent ces conditions aux limites, mais ne s'annulent pas à l'infini spatial. Ces difféomorphismes sont générés par des champs de vecteurs $\xi^\mu(r,t,\phi)$ que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \xi^t &= l(T^+ + T^-) + \frac{l^3}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ + \partial_-^2 T^-) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ \xi^\phi &= T^+ - T^- - \frac{l^2}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ \partial_-^2 T^-) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ \xi^r &= -r(\partial_+ T^+ + \partial_- T^-) + \mathcal{O}(r^{-1}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

(6.6)

avec $\partial_\pm = \frac{1}{2}(l\partial_t \pm \partial_\phi)$. Les fonctions $T^\pm$ ne dépendent que de $\left(\frac{t}{l} \pm \phi\right)$. Il est commode de décomposer les générateurs de ces difféomorphismes sur la base suivante : on note L_n (respectivement $\bar{L}_n$) le champ de vecteurs qui génère le difféomorphisme avec $T^+ = e^{in(t/l+\phi)}$, et $T^- = 0$ (respectivement $T^- = e^{in(t/l-\phi)}$, $T^+ = 0$). On remarque alors que ces générateurs satisfont l'algèbre [97] :

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0 \tag{6.8}$$

avec :

$$c = \frac{3l}{2G}. \tag{6.9}$$

On reconnaît deux copies de l'algèbre de Virasoro. Dans la théorie quantique, cela implique que l'espace de Hilbert est organisé en représentations de l'algèbre de Virasoro. En d'autres termes, une théorie de gravitation quantique à trois dimensions dans l'espace-temps AdS_3 est équivalente à une théorie conforme bidimensionnelle. On a démontré la correspondance AdS_3/CFT_2.

6.3 AdS_3 supporté par des flux Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz

L'espace-temps AdS_3 apparaît dans des solutions critiques de la théorie des cordes. Comme cet espace-temps possède une courbure scalaire non-nulle, des flux sont nécessaires pour le stabiliser. Ces flux peuvent provenir soit du secteur Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz, soit du secteur Ramond-Ramond. Dans ce paragraphe, nous allons nous concentrer sur les solutions n'impliquant que des flux de type Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz. On peut ainsi utiliser le formalisme de Ramond-Neveu-Schwarz pour quantifier la corde. Nous introduirons des flux de type Ramond-Ramond dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

AdS_3 au voisinage de configurations de branes

Considérons la théorie des cordes compactifiée sur une variété quadri-dimensionnelle $\mathscr{M}_4$. Cette variété peut être soit le tore à quatre dimensions T^4, soit la variété Calabi-Yau $K3$. On enroule des branes NS5 sur la variété interne $\mathscr{M}_4$. On obtient des cordes parallèles dans l'espace-temps de Minkowski à six dimensions. On ajoute enfin des cordes fondamentales rectilignes infinies, parallèles aux cordes provenant des branes NS5. Près de l'horizon de cette configuration, l'espace-temps est le produit $AdS_3 \times S^3 \times \mathscr{M}_4$. Le rayon de l'espace-temps AdS_3 est égal au rayon de la trois-sphère S^3. Il est fixé par le nombre de branes NS5.

Le modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten sur le groupe $Sl(2,\mathbb{R})$

L'espace-temps AdS_3 est la variété du groupe $Sl(2,\mathbb{R})$. Plus précisément, on considère l'espace de recouvrement de cette variété, de façon à ce que la coordonnée temporelle ne soit pas compacte. La théorie des cordes sur l'espace-temps AdS_3 supporté par des flux de type Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz est décrite par le modèle de Wess-Zumino-Novikov-Witten sur le groupe $Sl(2,\mathbb{R})$. L'étude de ce modèle est subtile pour deux raisons. D'une part, l'espace-temps est non-compact, ce qui implique que le spectre de la théorie est continu. D'autre part, la signature minkowskienne de l'espace-temps, combinée avec une métrique non-triviale dans la direction temporelle, complique la construction d'une théorie unitaire.

On peut organiser le spectre de la théorie en représentations de l'algèbre affine $sl(2,\mathbb{R})$. Comme nous l'avons remarqué au chapitre 2, les représentations de cette algèbre sont associées aux représentations de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Les excitations de la corde apparaissent dans deux familles de représentations. Tout d'abord, on trouve des états dans des représentations discrètes de l'algèbre affine [98]. L'énergie de ces états est bornée. L'image semi-classique associée à ces modes est celle de "petites" cordes vivant près du centre de l'espace-temps AdS_3. Le spectre contient ensuite des états dans des représentations continues [99]. Ces modes sont asscociés à des "grandes" cordes, qui vivent près du bord de l'espace-temps et l'entourent entièrement. Ces cordes longues correspondent aux cordes fondamentales infinies que l'on associe aux branes NS5 pour obtenir l'espace-temps AdS_3. Lorsque l'énergie d'une petite corde dépasse un certain seuil, elle devient une corde longue sans coût d'énergie supplémentaire.

Le spectre de la théorie des cordes sur AdS_3 supporté par des flux Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz, se comprend donc en termes de représentations de l'algèbre affine $sl(2,\mathbb{R})$. Dans la publication [84], nous avons montré que l'algèbre affine $sl(2,\mathbb{R})$ est également réalisée lorsque des flux de type Ramond-Ramond sont présents. Cela permettra peut-être de construire le spectre de la supercorde dans l'espace-temps AdS_3 avec flux Ramond-Ramond.

L'holographie vue depuis la feuille d'univers

Dans l'espace-temps AdS_3, les difféomorphismes de Brown-Henneaux (6.5) génèrent l'algèbre de Virasoro. Dans la théorie conforme vivant sur la feuille d'univers, on peut construire les opérateurs de vertex associés à ces difféomorphismes. Pour un difféomorphisme généré par le champ de vecteur ξ_μ, on obtient l'opérateur de vertex intégré :

$$V = \int d^2 \left[(\partial_\rho G_{\mu\nu} \xi^\rho + G_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + G_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + ... \right] \tag{6.10}$$

où l'on n'a indiqué que la partie de l'opérateur de vertex qui se rapporte à la métrique. En général, de tels opérateurs de vertex génèrent des transformations de jauges, ils sont donc BRST-exacts. Cependant, si le champ de vecteur ξ_μ n'est pas à support compact, alors ces opérateurs de vertex agissent de façon non-triviale sur les états de la théorie ; les difféomorphismes de Brown-Henneaux entrent dans cette catégorie [100]. On construit ainsi les générateurs de Virasoro dans la théorie conforme duale. Dans la partie asymptotique de l'espace-temps, ces générateurs s'écrivent [101] [102] :

$$L_n = \int dz \left[(1-n^2) J^3 e^{in(t+\phi)} + \frac{n(n-1)}{2} J^- e^{i(n+1)(t+\phi)} + \frac{n(n+1)}{2} J^+ e^{i(n-1)(t+\phi)} \right]. \tag{6.11}$$

Dans l'expression précédente, on a introduit les courants holomorphes J^a dont les modes génèrent l'algèbre affine sur la feuille d'univers. La connaissance de cette algèbre permet de retrouver les relations de commutation (6.7). On constate que l'algèbre des courants du modèle Wess-Zumino-Novikov-Witten implique la réalisation de l'algèbre de Virasoro dans l'espace-temps. Cette observation est une motivation importante pour étudier la généralisation de l'algèbre des courants dans les théories conformes qui décrivent la théorie des cordes sur l'espace-temps AdS_3 avec flux Ramond-Ramond.

6.4 Supercordes dans $AdS_3 \times S^3$

Revenons à la configuration de branes NS5 et de cordes fondamentales du paragraphe précédent. On peut ajouter à cette construction des D5-branes parallèles aux branes NS5, et des D1-branes, parallèles aux cordes fondamentales. Au voisinage de cette nouvelle configuration, l'espace-temps reste $AdS_3 \times S^3 \times \mathscr{M}_4$. On trouve maintenant à la fois des flux de type Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz et de type Ramond-Ramond dans le facteur $AdS_3 \times S^3$.

Le formalisme hybride

Nous cherchons à quantifier la supercorde dans l'espace-temps $AdS_3 \times S^3$. En présence de flux de type Ramond-Ramond, il nous faut travailler avec un formalisme qui préserve la supersymétrie explicite dans l'espace-temps. L'introduction sur la feuille d'univers de variables paramétrant des directions fermioniques de l'espace-temps a tendance à compliquer la quantification de la corde. Pour cette raison, il est préférable de limiter ces variables au strict nécessaire. Dans le cas présent, les flux Ramond-Ramond ne vivent que dans une partie de l'espace-temps. La solution la plus raisonnable est donc de travailler avec supersymétrie explicite uniquement dans le facteur $AdS_3 \times$

S^3. Nous continuerons à décrire le facteur $\mathscr{M}_4$ avec les variables usuelles du formalisme Ramond-Neveu-Schwarz.

Le formalisme qui permet de concrétiser cette idée est le formalisme hybride à six dimensions. Une première version a été introduite dans [103]. Elle permet de travailler avec huit supercharges dans l'espace-temps à six dimensions. Une seconde version, doublant le nombre de supercharges, a ensuite été proposée dans [104]. Dans la suite, nous allons travailler avec la première version du formalisme hybride. Ce formalisme a été utilisé dans [105] pour construire l'action de la supercorde sur $AdS_3 \times S^3$ avec des flux quelconques. Dans ce formalisme, l'espace-temps $AdS_3 \times S^3$ est immergé dans une variété de supergroupe. Cela rend l'étude du modèle sigma plus simple qu'avec la deuxième version du formalisme hybride, dans laquelle $AdS_3 \times S^3$ est immergé dans le quotient d'un supergroupe.

Les variables du formalisme hybride

Le modèle sigma défini sur la feuille d'univers a pour cible un superespace. Le superespace en question possède six dimensions bosoniques et huit dimensions fermioniques. Les dimensions bosoniques sont représentées sur la feuille d'univers par des bosons X^μ, où l'indice μ est un indice vectoriel d'espace-temps. Pour représenter les dimensions fermioniques, on utilise des champs θ^α et leurs moments conjugués p_α. L'indice α est un indice spinoriel d'espace-temps. La statistique de ces variables est fermionique, mais leurs dimensions conformes sur la feuille d'univers sont entières : les couples $(\theta^\alpha, p_\alpha)$ sont équivalents à des systèmes de fantômes (b,c). Enfin le formalisme contient deux champs bosoniques supplémentaires ρ et σ. Ces champs sont appelés "fantômes", car sous le changement de variables qui permet de passer du formalisme hybride au formalisme Ramond-Neveu-Schwarz, ρ et σ sont reliés aux fantômes (b,c) et (β,γ).

Comme toutes les variables sur la feuille d'univers ont des dimensions conformes entières, la théorie n'est pas explicitement supersymétrique. En revanche, on peut construire à partir des champs élémentaires des opérateurs qui réalisent l'algèbre superconforme $N=2$ avec charge centrale nulle. On peut ensuite combiner ces opérateurs avec les générateurs de l'algèbre superconforme $N=2$ de la partie quadri-dimensionelle de l'espace-temps. On obtient une algèbre $N=2$ avec une charge centrale égale à six. Cette algèbre est automatiquement élargie en une (petite) algèbre superconforme $N=4$. Pour définir une théorie de cordes à partir de cette théorie conforme, on twiste l'algèbre $N=4$ [104]. Les états physiques de la théorie des cordes sont les états primaires (au sens de l'algebre de Virasoro) qui sont dans la cohomologie de deux opérateurs nilpotents de dimension une : les deux supercourants de charge positive de l'algèbre superconforme $N=4$ twistée. Dans le langage du formalisme Ramond-Neveu-Schwarz, l'un de ces deux opérateurs est simplement la charge BRST. Le deuxième opérateur permet de supprimer l'ambiguïté qui apparaît lorsque l'on fermionise le système de fantômes (β,γ).

Le supergroupe $PSU(1,1|2)$

On cherche maintenant à immerger l'espace-temps $AdS_3 \times S^3$ dans un superespace à six dimensions bosoniques et huit dimensions fermioniques. Nous avons vu que AdS_3 est la variété du groupe $Sl(2,\mathbb{R}) \equiv SU(1,1)$. La sphère tridimensionnelle S^3 est également une variété de groupe, celle de $SU(2)$. L'idée naturelle est d'immerger $AdS_3 \times S^3$ dans une variété de supergroupe, donc le sous-groupe bosonique serait $SU(1,1) \times SU(2)$.

Considérons tout d'abord le supergroupe $Gl(2|2)$. C'est le groupe des transformations linéaires

inversibles d'un espace vectoriel complexe à deux dimensions bosoniques et deux dimensions fermioniques. Les éléments de ce groupe peuvent être représentés par des matrices de la forme :

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Gl(2|2) \tag{6.12}$$

où A, D sont des matrices bosoniques inversibles 2×2, et B, C sont des matrices fermioniques 2×2.

Le supergroupe $Sl(2|2)$ est le sous-groupe de $Gl(2|2)$ composé des éléments ayant un superdéterminant égal à un. Le superdéterminant est défini par :

$$sDet(g) = \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det(D)}. \tag{6.13}$$

On définit ensuite le groupe $SU(1,1|2)$ comme le sous-groupe de $Sl(2|2)$ composé des éléments qui préservent la métrique de Minkowski :

$$g \in SU(1,1|2) \Leftrightarrow g\eta g^{\dagger} = \eta,\ g \in Sl(2|2) \tag{6.14}$$

avec $\eta = diag(-1,1,1,1)$. Deux éléments de $SU(1,1|2)$ reliés par multiplication par un scalaire ont le même superdéterminant. Par conséquent, on peut définir un sous-groupe de $SU(1,1|2)$, que l'on note $PSU(1,1|2)$, et qui résulte de l'identification des éléments de $SU(1,1|2)$ qui diffèrent par multiplication par un scalaire. Ce n'est pas un groupe de matrices, mais plutôt un groupe de classes d'équivalence de matrices. Une conséquence est que ce groupe n'a pas de représentation fondamentale : sa représentation de dimension minimale est la représentation adjointe.

Le supergroupe $PSU(1,1|2)$ possède six dimensions bosoniques et huit dimensions fermioniques. Le sous-groupe bosonique de $PSU(1,1|2)$, obtenu en annulant toutes les composantes fermioniques, est précisement $SU(1,1) \times SU(2)$. Ce supergroupe est donc le candidat naturel pour décrire la supercorde dans $AdS_3 \times S^3$ avec huit supercharges manifestes.

Le modèle sigma vers la variété du supergroupe $PSU(1,1|2)$

Nous voulons utiliser le formalisme hybride pour décrire la supercorde dans $AdS_3 \times S^3$. L'action est un modèle sigma vers $AdS_3 \times S^3$, habillée par les fantômes ρ et σ du formalisme hybride. Dans un premier temps, nous allons étudier le modèle sigma uniquement. Nous ajouterons les fantômes dans le paragraphe suivant.

L'action du modèle principal chiral sur le supergroupe $PSU(1,1|2)$ est :

$$S_{PCM} = -\frac{1}{4\pi f^2}\int_{\Sigma} d^2z \langle \partial g g^{-1}, \bar{\partial} g g^{-1} \rangle \tag{6.15}$$

où g est à valeurs dans le supergroupe $PSU(1,1|2)$, et $\langle .,. \rangle$ est la forme bilinéaire invariante. On définit également le terme de Wess-Zumino :

$$S_{WZ} = -i\frac{k}{48\pi}\int_B d^3y \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle \partial^{\alpha} g g^{-1}, [\partial^{\beta} g g^{-1}, \partial^{\gamma} g g^{-1}] \rangle. \tag{6.16}$$

La variété tridimensionnelle B a pour bord la feuille d'univers : $\partial B = \Sigma$. On peut montrer que l'intégrale de chemin pour cette action est bien définie si le paramètre k est un entier. L'action du

modèle sigma vers la variété du supergroupe $PSU(1,1|2)$ est définie comme la somme de l'action du modèle principal chiral et du terme Wess-Zumino :

$$S = S_{PCM} + S_{WZ}. \tag{6.17}$$

Quand l'espace-temps $AdS_3 \times S^3$ est réalisé au voisinage de la configuration de branes NS5-D5-F1-D1 décrite précédemment, les deux paramètres qui apparaissent dans l'action du modèle sigma ont une interprétation naturelle. Le coefficient du terme cinétique donne le rayon de l'espace-temps. Il est relié au nombre de D5-branes et de branes NS5 par :

$$\frac{1}{f} = \sqrt{N_{NS5}^2 + g_s^2 N_{D5}^2} \tag{6.18}$$

où g_s est la constante de couplage de la théorie des cordes en dix dimensions. Quant au paramètre quantifié k, il est égal au nombre de branes NS5.

Pour les groupes de Lie usuels, la théorie définie par l'action (6.17) n'est conforme que si le coefficient multipliant le terme cinétique est relié à celui multipliant le terme de Wess-Zumino par la relation : $kf^2 = \pm 1$. Cependant, il existe une famille de supergroupes pour lesquels le modèle précédent est conforme indépendamment du choix des paramètres : ce sont les supergroupes dont le nombre dual de Coxeter s'annule [105] [106]. Le nombre dual de Coxeter $\check{h}$ est défini comme la somme (plus un) des coordonées de la plus haute racine de l'algèbre, dans la base des racines simples. De façon plus opérationnelle, ce nombre peut être calculé à partir des constantes de structures et de la métrique de Killing de l'algèbre de la façon suivante :

$$f^{abc} f_{bc}{}^{d} = 2\check{h}\kappa^{ad}. \tag{6.19}$$

L'action (6.17) admet une symétrie globale $PSU(1,1|2)_L \times PSU(1,1|2)_R$ qui agit par multiplication à gauche et à droite sur le champ g. Les courants associés à la symétrie gauche sont :

$$j_z = \frac{1+kf^2}{2f^2}\partial g g^{-1}, \quad j_{\bar{z}} = \frac{1-kf^2}{2f^2}\bar{\partial} g g^{-1}. \tag{6.20}$$

Dans la publication [84], notre résultat principal est le calcul de l'algèbre quantique de ces courants. On sait par expérience qu'une telle algèbre est utile pour comprendre et résoudre la théorie. On peut par exemple construire le tenseur énergie-impulsion de la théorie conforme à partir des composantes des courants :

$$T(z) \propto Str(j_z j_z) \tag{6.21}$$

L'algèbre de Virasoro peut être déduite de l'algèbre des courants. C'est la construction de Sugawara [14].

Dans les modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten, la composante anti-holomorphe du courant gauche s'annule. La construction de Sugawara implique alors une équation différentielle sur toutes les fonctions de corrélations [107], qui permet de résoudre la théorie. L'algèbre non-chirale que nous avons construite peut permettre de généraliser cette procédure au-delà du point Wess-Zumino-Novikov-Witten.

Couplage aux fantômes

Pour pouvoir quantifier la supercorde sur l'espace-temps $AdS_3 \times S^3$, on doit coupler le modèle sigma discuté précédemment avec les fantômes ρ et σ du formalisme hybride. L'action pour la corde hybride sur $AdS_3 \times S^3$ peut se décomposer en trois parties :

$$S = S_{PSU(1,1|2)}[g] + S_f[\rho,\sigma,\bar{\rho},\bar{\sigma}] + S_{int}[g,\rho,\sigma,\bar{\rho},\bar{\sigma}] \tag{6.22}$$

La première partie $S_{PSU(1,1|2)}[g]$ est l'action (6.17) du modèle sigma sur le supergroupe $PSU(1,1|2)$. La deuxième partie $S_f[\rho,\sigma,\bar{\rho},\bar{\sigma}]$ est un terme cinétique pour les fantômes. Enfin, la troisième partie $S_{int}[g,\rho,\sigma,\bar{\rho},\bar{\sigma}]$ décrit les couplages entre les fantômes et le champ g.

L'observation suivante facilite la prise en compte des fantômes : ils n'entrent dans l'action que sous la forme des exponentielles $e^{-\rho-i\sigma}$ et $e^{-\bar{\rho}-i\bar{\sigma}}$. On peut travailler ordre par ordre en ces exponentielles ; le modèle sigma est une troncation consistante à l'ordre zéro de la théorie complète. Il est utile de penser à la corde hybride sur $AdS_3 \times S^3$ comme étant le modèle sigma sur le supergroupe $PSU(1,1|2)$, habillé par des fantômes que l'on ajoute ordre par ordre.

La forme précise des couplages entre champs de matière et fantômes peut être déterminée au premier ordre en $e^{-\rho-i\sigma}$, $e^{-\bar{\rho}-i\bar{\sigma}}$, en perturbant la corde hybride sur l'espace plat avec un opérateur de vertex pour les flux Ramond-Ramond. Ensuite, on peut compléter ces couplages à tout ordre en utilisant des arguments de symétrie [105] .

Pour compléter la définition de la corde hybride sur $AdS_3 \times S^3$, il faut construire les générateurs de l'algèbre superconforme $N = 4$ twistée. Ces générateurs sont nécessaires pour identifier les états physiques de la théorie de cordes. Les auteurs de [105] ont proposé un ensemble d'opérateurs qui possèdent les bonnes propriétés.

Notons que cette discussion se simplifie lorsque l'on travaille avec le formalisme hybride qui préserve seize supercharges en six dimensions [104]. Dans ce formalisme, les couplages entre champs de matière et fantômes disparaissent. Les fantômes n'interviennent que dans les contraintes harmoniques nécéssaires pour réduire le nombre de degrés de liberté du superespace étendu. Ce formalisme est donc très semblable au formalisme des spineurs purs, dans lequel les contraintes harmoniques sont formulées dans un langage cohomologique. Il est possible d'intégrer la moitié des variables fermioniques du formalisme hybride à seize supercharges pour se ramener au formalisme hybride à huit supercharges. Cette procédure reproduit l'action et les générateurs construits dans [105].

Quatrième publication : “ Conformal Current Algebra in Two Dimensions.”

Conformal Current Algebra in Two Dimensions

Sujay K. Ashok[a,b], Raphael Benichou[c] and Jan Troost[c]

[a]Institute of Mathematical Sciences
C.I.T Campus, Taramani
Chennai, India 600113

[b]Perimeter Institute for Theoretical Physics
Waterloo, Ontario, ON N2L2Y5, Canada

[c]Laboratoire de Physique Théorique
Unité Mixte du CRNS et de l'École Normale Supérieure
associée à l'Université Pierre et Marie Curie 6
UMR 8549 [1]
École Normale Supérieure
24 Rue Lhomond Paris 75005, France

Abstract

We construct a non-chiral current algebra in two dimensions consistent with conformal invariance. We show that the conformal current algebra is realized in non-linear sigma-models on supergroup manifolds with vanishing dual Coxeter number, with or without a Wess-Zumino term. The current algebra is computed using two distinct methods. First we exploit special algebraic properties of supergroups to compute the exact two- and three-point functions of the currents and from them we infer the current algebra. The algebra is also calculated by using conformal perturbation theory about the Wess-Zumino-Witten point and resumming the perturbation series. We also prove that these models realize a non-chiral Kac-Moody algebra and construct an infinite set of commuting operators that is closed under the action of the Kac-Moody generators. The supergroup models that we consider include models with applications to statistical mechanics, condensed matter and string theory. In particular, our results may help to systematically solve and clarify the quantum integrability of $PSU(n|n)$ models and their cosets, which appear prominently in string worldsheet models on anti-deSitter spaces.

[1]Preprint LPTENS-09/XX.

Contents

1 Introduction **2**

2 Current algebras in two dimensions **3**
2.1 Locality, Lorentz invariance and PT-invariance 4
2.2 Current conservation 5
2.3 The Maurer-Cartan equation 7
2.4 The Euclidean current algebra 8
2.5 Conformal current algebra 9

3 Current algebra from supergroup current correlators **11**
3.1 The model 11
3.2 Exact perturbation theory 12
3.3 Summary of the current algebra 19

4 Conformal perturbation theory **19**
4.1 The current algebra in the Wess-Zumino-Witten model 19
4.2 Perturbation of the kinetic term: classical analysis 20
4.3 The current-current operator product expansions 20

5 The current algebra on the cylinder **22**

6 Conclusions **25**

A Perturbed operator product expansions **26**

B Detailed operator product expansions **28**

C Useful integrals **32**

1 Introduction

Two-dimensional sigma-models on supergroups have applications to a wide range of topics such as the integer quantum hall effect, quenched disorder systems, polymers, string theory, as well as other domains in physics (see e.g. [1, 2, 3, 4, 5]). The principal chiral model is perturbatively conformal on various supergroups [6, 7] with or without the addition of a Wess-Zumino term, and at least to two loop order on their cosets with respect to a maximal regular subalgebra [7]. Sigma models on graded supercosets are also believed to be conformal [8]. Thus, these models have an infinite dimensional symmetry algebra that should tie in with their supergroup symmetry. An extended non-linear symmetry algebra was identified in [6] but the representation theory of the algebra seems difficult to establish. Steps towards solving these models were made using various techniques [9, 10, 11]. In this paper, we exhibit a conformal current algebra in these models. The algebra of currents is non-chiral and implies conformal symmetry, hence the name.

The models under discussion enter as the key building blocks in worldsheet sigma-models on supersymmetric AdS backgrounds in string theory. The supergroup $PSU(1,1|2)$ principal chiral model corresponds to a supersymmetric $AdS_3 \times S^3$ background with Ramond-Ramond

flux [6, 12]. Since a theory of quantum gravity on asymptotically AdS_3 space-times, supplemented with appropriate boundary conditions, exhibits an infinite dimensional conformal symmetry algebra [13], we should be able to construct those generators from the worldsheet theory. Indeed, for AdS_3 string theory with only Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz flux, it has been shown how to construct the space-time Virasoro algebra in terms of the worldsheet current algebra [14, 15, 16]. To perform a similar construction in Ramond-Ramond backgrounds, one needs to understand the worldsheet current algebra for two-dimensional models with supergroup targets.

A second application within this context is the extension of our analyis to supercoset manifolds, which includes the $AdS_5 \times S^5$ background of string theory. The worldsheet current algebra is tied in with the integrability of the worldsheet theory [17]. Our work may help in systematically exploiting the integrability of the worldsheet model at the quantum level, with applications to the solution of the spectrum of planar four-dimensional gauge theories (see e.g. [18]) via the AdS/CFT correspondence.

The plan of the paper is as follows. In section 2 we kick off with a general analysis of two-dimensional current algebra operator product expansions that are consistent with locality, Lorentz invariance and parity-time reversal. We exhibit a particular current algebra that is non-chiral and consistent with conformal invariance. We then move on to exhibit a realization of the algebra in a conformally invariant model on a supergroup manifold.

We calculate perturbatively the two- and three-point functions of these models in section 3. From these correlators we infer the operator product expansions of the currents, which are shown to fall into the conformal current algebra class discussed in section 2. In section 4 we analyze deformed Wess-Zumino-Witten models on supergroups using conformal perturbation theory. We compute the operator product expansions of the currents to all orders and resum the series, thereby demonstrating that the resulting algebra matches the results obtained using purely algebraic properties of the supergroups. We analyze the current algebra on the cylinder in terms of a Fourier decomposition in section 5 and show the existence of a Kac-Moody subalgebra and an infinite set of commuting operators that transform amongst each other under the Kac-Moody subalgebra. In section 6 we discuss some applications of the conformal current algebra that we have found and possible future directions of work.

2 Current algebras in two dimensions

Before we compute the current algebra operator product expansion [19] for supergroup sigma-models, it is interesting to analyze the generic operator product expansions (OPEs) involving the currents for a two-dimensional model which is local, Lorentz invariant and which respects parity-time reversal.

Previously, the generic two-dimensional current algebra was analyzed in [20] where it was applied to an asymptotically free sigma-model – the $O(n)$ sigma-model. Parity symmetry was assumed to be valid in the analysis. Later, a similar analysis was performed [21, 22] for massive models with Wess-Zumino-Witten ultraviolet fixed points. In both cases, the study was applied to argue for the integrability of the two-dimensional sigma-model in the quantum theory.

The models that we will study have the distinctive feature that they are conformal. Moreover, the Wess-Zumino term breaks parity invariance. Therefore, we start by analyzing the generic current operator product expansions consistent with locality, Lorentz invariance and PT-invariance only. In the following, we generalize the methodology of [20].

2.1 Locality, Lorentz invariance and PT-invariance

In the absence of parity invariance, the vector representation of the two-dimensional Lorentz group splits into two one-dimensional irreducible representations. A current j_μ can therefore be split into two irreducible representations j_+ and j_- of the two-dimensional Lorentz group[2]. We write the OPEs in terms of these irreducible components, leading to three independent OPEs, between the pairs of current components (j_+, j_+), (j_+, j_-), and (j_-, j_-).

We first analyze the OPE between the components j_+ and j_+. We take the currents to be in the adjoint representation of a symmetry group G of the model: $j_+ = j_+^a t_a$ where t_a spans the Lie algebra of G. We write down the generic OPE in terms of Lorentz invariant coefficient functions. Moreover, we assume that the only low-dimensional operators that appear in the operator product expansion are the identity operator, the currents and their derivatives. We also assume that the currents have conformal dimension one. Thus the previous list of allowed operators in the OPE should account for all the terms up to regular ones. The $j_+ j_+$ OPE is then given by:

$$\begin{aligned} j_+^a(x) j_+^b(0) \sim \alpha^{ab}(x^-)^2 d_1(x^2) + \beta^{ab}{}_c (x^-)^2 \big[& d_2(x^2) x^+ j_+^c(0) + d_3(x^2) x^- j_-^c(0) \\ & + e_1(x^2) x^+ x^- \partial_+ j_-^c(0) + e_2(x^2) x^+ x^- \partial_- j_+^c(0) \\ & + e_3(x^2)(x^+)^2 \partial_+ j_+^c(0) + e_4(x^2)(x^-)^2 \partial_- j_-^c(0) \big] + \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

where the functions d_i, e_i are functions of the Lorentz invariant $x^2 = x^+ x^-$. The tensor α^{ab} is an invariant two-tensor in the product of adjoint representations, and $\beta^{ab}{}_c$ represents an adjoint representation in the product of two adjoints. We will assume that α^{ab} corresponds to the invariant metric κ^{ab} and that the tensor $\beta^{ab}{}_c$ is equal to the structure constants $f^{ab}{}_c$ of the Lie algebra of G. We take the structure constants to be anti-symmetric in its indices[3]. We use the fact that we can interchange operators[4] to determine that the above OPE should be equal to:

$$\begin{aligned} j_+^b(0) j_+^a(x) \sim & \kappa^{ab}(x^-)^2 d_1 + f^{ab}{}_c (x^-)^2 (d_2 x^+ j_+^c(x) + d_3 x^- j_-^c(x) \\ & - e_1 x^+ x^- \partial_+ j_-^c(x) - e_2 x^+ x^- \partial_- j_+^c(x) - e_3 (x^+)^2 \partial_+ j_+^c(x) - e_4 (x^-)^2 \partial_- j_-^c(x)) \\ \sim & \kappa^{ab} x^- x^- d_1 + f^{ab}{}_c x^- x^- (d_2 x^+ j_+^c(0) + d_3 x^- j_-^c(0) \\ & + (d_3 - e_1) x^+ x^- \partial_+ j_-^c(x) + (d_2 - e_2) x^+ x^- \partial_- j_+^c(x) \\ & + (d_2 - e_3) x^+ x^+ \partial_+ j_+^c(x) + (d_3 - e_4) x^- x^- \partial_- j_-^c(x)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

from which we derive the equations:

$$\begin{aligned} e_1 &= d_3/2 \qquad & e_2 &= d_2/2 \\ e_3 &= d_2/2 \qquad & e_4 &= d_3/2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

[2]We work in Lorentzian signature in this section. We define $x^\pm = x \pm t$ and $ds^2 = -dt^2 + dx^2 = dx^+ dx^-$. We denote $x^2 = x^+ x^-$.

[3]More precisely, we take the structure constants to be graded anti-symmetric when G is a supergroup. Although the grading is crucial, it will not affect our formulas, except for a plethora of minus signs when interchanging operators – these will not influence our final results.

[4]Up to a minus sign for fermionic operators. We see, for example, that the interchange of fermionic operators will cancel a minus sign from the grading of the superalgebra when G is a supergroup.

which gives rise to the simplified operator product expansion:

$$j_+^a(x)j_+^b(0) \sim \kappa^{ab}(x^-)^2 d_1 + f^{ab}{}_c(x^-)^2 \Big[d_2 x^+ j_+^c(0) + d_3 x^- j_-^c(0) + \frac{d_3}{2} x^+ x^- \partial_+ j_-^c(0) \\ + \frac{d_2}{2} x^+ x^- \partial_- j_+^c(0) + \frac{d_2}{2}(x^+)^2 \partial_+ j_+^c(0) + \frac{d_3}{2}(x^-)^2 \partial_- j_-^c(0) \Big] + \dots \tag{2.4}$$

The OPE has one free coefficient d_1 (function of x^2) at leading order, and two at subleading order. We similarly obtain:

$$j_-^a(x)j_-^b(0) \sim \kappa^{ab}(x^+)^2 d_4 + f^{ab}{}_c(x^+)^2 \Big[d_5 x^- j_-^c(0) + d_6 x^+ j_+^c(0) + \frac{d_5}{2} x^+ x^- \partial_+ j_-^c(0) \\ + \frac{d_5}{2}(x^-)^2 \partial_- j_-^c(0) + \frac{d_6}{2} x^+ x^- \partial_- j_+^c(0) + \frac{d_6}{2}(x^+)^2 \partial_+ j_+^c(0) \Big] + \dots \tag{2.5}$$

For the OPE between j_+ and j_- we don't get as many constraints. We find 7 more free functions:

$$j_+^a(x)j_-^b(0) \sim \kappa^{ab} d_7 + f^{ab}{}_c \big[d_8 x^+ j_+^c(0) + d_9 x^- j_-^c(0) + d_{13} x^+ x^- \partial_+ j_-^c(0) + d_{12} x^+ x^- \partial_- j_+^c(0) \\ + d_{10}(x^+)^2 \partial_+ j_+^c(0) + d_{11}(x^-)^2 \partial_- j_-^c(0) \big] + \dots \tag{2.6}$$

We have a total of 13 free coefficient functions.

2.2 Current conservation

We now impose consistency of the operator product expansions of the currents with current conservation. We choose the relative normalization of the two components of the currents such that the equation of current conservation reads [5]:

$$\partial^\mu j_\mu^a = \partial_- j_+^a + \partial_+ j_-^a \quad = \quad 0. \tag{2.7}$$

Current conservation implies that one of the coefficients in the $j_+ j_-$ OPE (namely $d_{12} + d_{13}$) becomes redundant. We check that the OPEs of the current conservation equation (2.7) with

[5] We expect current conservation to only hold up to delta-function contact terms. We therefore do not keep track of contact terms in the following.

the currents j_+ and j_- vanish. That leads to the set of equations [6]:

$$
\begin{aligned}
&d_1 + \frac{x^2}{2} d_1' + \frac{1}{2} d_7' = 0\,, \qquad d_2 + \frac{x^2}{2} d_2' + \frac{1}{2} d_8' + \frac{d_8}{2x^2} = 0\,,\\
&d_4 + \frac{x^2}{2} d_4' + \frac{1}{2} d_7' = 0\,, \qquad \frac{3}{2} d_6 + \frac{x^2}{2} d_6' + \frac{1}{2} d_8' = 0\,,\\
&\frac{3}{2} d_3 + \frac{x^2}{2} d_3' + \frac{1}{2} d_9' = 0\,, \quad 2d_3 + \frac{x^2}{2} d_3' + (d_9' - d_{11}') = 0\\
&2d_6 + \frac{x^2}{2} d_6' + d_{10}' = 0\,, \qquad d_5 + \frac{x^2}{2} d_5' + d_{11}' + \frac{2}{x^2} d_{11} = 0\,,\\
&d_5 + \frac{x^2}{2} d_5' + \frac{1}{2} d_9' + \frac{1}{2x^2} d_9 = 0\,,\\
&d_2 + \frac{x^2}{2} d_2' + (d_8' - d_{10}') + \frac{2}{x^2}(d_8 - d_{10}) = 0\\
&\frac{3}{2}(d_6 - d_5) + \frac{x^2}{2}(d_6' - d_5') + (d_{12}' - d_{13}') + \frac{1}{x^2}(d_{12} - d_{13}) = 0\,,\\
&\frac{3}{2}(d_2 - d_3) + \frac{x^2}{2}(d_2' - d_3') + (d_8' - d_{12}' - (d_9' - d_{13}')) + \frac{1}{x^2}(d_8 - d_{12} - (d_9 - d_{13})) = 0\,,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

We get a system of twelve first-order differential equations for twelve functions. We will not try to solve them in full generality. Instead, we assume that the leading and subleading singularities in the OPEs are powerlike. This leads to the following ansatz:

$$
\begin{aligned}
&d_1(x^2) = c_1/x^4, \quad d_2(x^2) = c_2/x^4, \quad d_3(x^2) = f_1/x^4\,,\\
&d_4(x^2) = c_3/x^4, \quad d_5(x^2) = c_4/x^4, \quad d_6(x^2) = f_7/x^4,\\
&d_7(x^2) = f_2/x^2, \quad d_8(x^2) = f_3/x^2, \quad d_9(x^2) = f_4/x^2\,.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

The coefficient c_i's and f_i's are now constant coefficients. Plugging this ansatz into the equations (2.8), we get the following relations between the coefficients:

$$
f_2 = 0, \qquad f_4 = f_1, \qquad f_3 = f_7 = c_4 - c_2 + f_1\,. \tag{2.10}
$$

The remaining equations in (2.8) then allow to solve for the subsubleading coefficient functions in the OPEs:

$$
\begin{aligned}
&d_{10}(x^2) = \frac{f_7}{x^2}, \qquad d_{11}(x^2) = 0,\\
&(d_{12}' - d_{13}') + \frac{1}{x^2}(d_{12} - d_{13}) = \frac{c_2 - f_1}{2x^4}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

So it only remains to solve for $d_{12}(x^2) - d_{13}(x^2)$ in terms of the c_i and f_1. Denoting $c_2 - f_1 = g$, the general solution to the differential equation (2.11) reads:

$$
d_{12}(x^2) - d_{13}(x^2) = \frac{2c_5}{x^2} + \frac{g}{2x^2} \log \mu^2 x^2 \tag{2.12}
$$

where c_5 is a constant coefficient and μ is an arbitrary mass scale. We note that when the coefficient g is non-zero, we can absorb the coefficient c_5 in a redefinition of the mass scale

[6] There is no equation corresponding to the operator $\partial_\mu j^\mu$ since the coefficient multiplies zero.

μ. So the OPEs are given in terms of five dimensionless coefficients. They read:

$$
\begin{aligned}
j^a_+(x)j^b_+(0) \sim{}& \frac{\kappa^{ab}c_1}{(x^+)^2} + f^{ab}{}_c\left[\frac{c_2}{x^+}j^c_+(0) + \frac{(c_2-g)x^-}{(x^+)^2}j^c_-(0) - \frac{g}{4}\frac{x^-}{x^+}\left(\partial_+ j^c_-(0) - \partial_- j^c_+(0)\right)\right.\\
&\left. + \frac{c_2}{2}\partial_+ j^c_+(0) + \frac{c_2-g}{2}\frac{(x^-)^2}{(x^+)^2}\partial_- j^c_-(0)\right] + \dots\\
j^a_-(x)j^b_-(0) \sim{}& \frac{\kappa^{ab}c_3}{(x^-)^2} + f^{ab}{}_c\left[\frac{c_4}{x^-}j^c_-(0) + \frac{(c_4-g)\,x^+}{(x^-)^2}j^c_+(0) + \frac{g}{4}\frac{x^+}{x^-}\left(\partial_+ j^c_-(0) - \partial_- j^c_+(0)\right)\right.\\
&\left. + \frac{c_4}{2}\partial_- j^c_-(0) + \frac{c_4-g}{2}\frac{(x^+)^2}{(x^-)^2}\partial_+ j^c_+(0)\right] + \dots\\
j^a_+(x)j^b_-(0) \sim{}& f^{ab}{}_c\left[\frac{c_4-g}{x^-}j^c_+(0) + \frac{(c_2-g)}{x^+}j^c_-(0) + \frac{(c_4-g)x^+}{x^-}\partial_+ j^c_+(0)\right.\\
&\left. - \left(c_5 + \frac{g}{4}\log\mu^2x^2\right)\left(\partial_+ j^c_-(0) - \partial_- j^c_+(0)\right)\right] + \dots
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

It would be interesting to search for more general solutions to the set of differential equations.

2.3 The Maurer-Cartan equation

In this subsection we show that under certain circumstances, we can obtain further constraints on the current algebra. Consider a field g taking values in a Lie group. The one-form dgg^{-1} satisfies the Maurer-Cartan equation

$$d(dgg^{-1}) = dgg^{-1}\wedge dgg^{-1}. \tag{2.14}$$

We will get further constraints if we suppose that the components of the current are related to the field g in the following way:

$$j_+ = c_+\partial_+ gg^{-1}, \quad j_- = c_-\partial_- gg^{-1} \tag{2.15}$$

where c_+ and c_- are constant coefficients. The generators of the Lie algebra satisfy: $[t_a, t_b] = if_{ab}{}^c t_c$. Then the Maurer-Cartan equation takes the form

$$c_-\partial_- j^a_+ - c_+\partial_+ j^a_- + if^a{}_{bc}j^b_+ j^c_- \;=\; 0. \tag{2.16}$$

We want to ensure that this equation is also valid in the quantum theory. However the operator defined as the product of two currents needs to be regularized. For this reason the validity of the Maurer-Cartan equation in the quantum theory requires more discussion.

Normal Ordering

In the quantum theory, we introduce a normal ordering for composite operators based on a point-splitting procedure. The normal ordered product $:O_1O_2:(y)$ of two operators O_1 and O_2 evaluated at the point y is defined to be the product of the operator O_1 at the point x with the operator O_2 at the point y, in the limit as x approaches y. The regularization amounts to dropping the terms that are singular in this limit. For this procedure to be well-defined, it is important that the resulting operator is evaluated at the point y. We will denote this procedure by

$$:O_1O_2:(y) = \lim_{:x\to y:} O_1(x)O_2(y)\,. \tag{2.17}$$

We note that the operators within the normal ordered product $: O_1 O_2 :$ do not commute[7]. We will later confirm that a natural choice for the normal ordered Maurer-Cartan equation in this scheme is:

$$c_- \partial_- j^a_+ - c_+ \partial_+ j^a_- + \frac{i}{2} f^a{}_{bc} (: j^b_+ j^c_- : + : j^c_- j^b_+ :) \;\; = \;\; 0. \tag{2.18}$$

Additional constraints from the Maurer-Cartan equation

As for the current conservation equation, we ask for the OPE between the quantum Maurer-Cartan equation (2.18) and the current to vanish. The first non-trivial constraint is obtained for the subleading terms. This leads to a relation between the coefficient of the current algebra c_1, c_2 and g, and the coefficients c_+ and c_-:

$$(c_+ + c_-)(c_2 - g) + i c_1 = 0\,. \tag{2.19}$$

We similarly find a constraint linking c_3, c_4 and g to c_+ and c_-:

$$(c_+ + c_-)(c_4 - g) + i c_3 = 0\,. \tag{2.20}$$

When we consider concrete models realizing the current algebra, the coefficients c_+ and c_- can be derived from the Lagrangian. The Maurer-Cartan equation then reduces the number of free constant coefficients from five to three.

2.4 The Euclidean current algebra

For future purposes, we wish to translate the result we obtained for the current operator algebra into euclidean signature. We perform the Wick rotation $t \to -i\tau$, and define the complex coordinates $z = x - i\tau$, $\overline{z} = x + i\tau$. The current algebra OPEs become

$$\begin{aligned}
j^a_z(z) j^b_z(0) \sim{}& \kappa^{ab} \frac{c_1}{z^2} + f^{ab}{}_c \left[\frac{c_2}{z} j^c_z(0) + (c_2 - g) \frac{\overline{z}}{z^2} j^c_{\overline{z}}(0) \right. \\
& \left. - \frac{g}{4} \frac{\overline{z}}{z} (\partial_z j^c_{\overline{z}}(0) - \partial_{\overline{z}} j^c_z(0)) + \frac{c_2}{2} \partial_z j^c_z(0) + \frac{c_2 - g}{2} \frac{\overline{z}^2}{z^2} \partial_{\overline{z}} j^c_{\overline{z}}(0) \right] + \dots \\
j^a_{\overline{z}}(x) j^b_{\overline{z}}(0) \sim{}& \kappa^{ab} c_3 \frac{1}{\overline{z}^2} + f^{ab}{}_c \left[\frac{c_4}{\overline{z}} j^c_{\overline{z}}(0) + \frac{(c_4 - g) z}{\overline{z}^2} j^c_z(0) \right. \\
& \left. + \frac{g}{4} \frac{z}{\overline{z}} (\partial_z j^c_{\overline{z}}(0) - \partial_{\overline{z}} j^c_z(0)) + \frac{c_4}{2} \partial_{\overline{z}} j^c_{\overline{z}}(0) + \frac{(c_4 - g)}{2} \frac{z^2}{\overline{z}^2} \partial_z j^c_z(0) \right] + \dots \\
j^a_z(x) j^b_{\overline{z}}(0) \sim{}& f^{ab}{}_c \left[\frac{(c_4 - g)}{\overline{z}} j^c_z(0) + \frac{(c_2 - g)}{z} j^c_{\overline{z}}(0) + \frac{(c_4 - g) z}{\overline{z}} \partial_z j^c_z(0) \right. \\
& \left. - (c_5 + \frac{g}{4} \log \mu^2 x^2) (\partial_z j^c_{\overline{z}}(0) - \partial_{\overline{z}} j^c_z(0)) \right] + \dots
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Later on, we will compare the current algebra operator product expansions in equations (2.21) to those of a supergroup non-linear sigma-model with Wess-Zumino term. We will find specific expressions for the coefficients c_i and g in terms of the parameters in the Lagrangian.

[7] See e.g. [23] for a discussion of this fact in the context of chiral conformal field theories.

2.5 Conformal current algebra

It turns out that the above current algebra can become the building unit for a conformal algebra when the dual Coxeter number of the (super-)group vanishes. In that special case the current algebra is promoted to a conformal current algebra, namely, the Sugawara stress-energy tensor built from the currents satisfies the canonical conformal operator product expansion. The terms that in other circumstances spoil conformality are eliminated through the fact that the dual Coxeter number is zero. The holomorphic component of the stress-energy tensor is

$$T(w) = \frac{1}{2c_1} : j_z^b j_z^b : (w), \tag{2.22}$$

as we will demonstrate.

The current as a conformal primary

First we compute the OPE between the current j_z^a and its bilinear combination $: j_z^b j_z^b :$, using a point-splitting procedure:

$$\begin{aligned} j_z^a(z) : j_z^b j_z^b : (w) &= \lim_{:x\to w:} j_z^a(z) \left[j_z^b(x) j_z^b(w) \right] \\ &= \lim_{:x\to w:} \left[\left(\frac{c_1 \kappa^{ab}}{(z-x)^2} + f^{ab}{}_c \left(\frac{c_2}{z-x} j_z^c(x) + \frac{(c_2-g)(\overline{z}-\overline{x})}{(z-x)^2} j_{\overline{z}}^c(x) \right) \right) j_z^b(w) \right. \\ &\quad \left. + j_z^b(x) \left(\frac{c_1 \kappa^{ab}}{(z-w)^2} + f^{ab}{}_c \left(\frac{c_2}{z-w} j_z^c(w) + \frac{(c_2-g)(\overline{z}-\overline{w})}{(z-w)^2} j_{\overline{z}}^c(w) \right) \right) \right] . \end{aligned} \tag{2.23}$$

At this point we have to perform the OPE between the operators evaluated at the point x and the operators evaluated at the point w. Then we take the limit where x goes to w and discard the singular terms. We notice already that only the regular terms in the OPEs of the second line will contribute to the final result. We get

$$\begin{aligned} j_z^a(z) : j_z^b j_z^b : (w) = \lim_{:x\to w:} \Bigg[& c_1 \frac{j_z^a(w)}{(z-x)^2} + \frac{c_2 i f^a{}_{bc}}{z-x} \left(\frac{c_1 \kappa^{bc}}{(x-w)^2} \right. \\ & \left. + f^{cb}{}_d \left(\frac{c_2 j_z^d(w)}{x-w} + (c_2-g) \frac{\overline{x}-\overline{w}}{(x-w)^2} j_{\overline{z}}^d(w) \right) + : j_z^c j_z^b : (w) \right) \\ & + \frac{c_2 f^a{}_{bc} (\overline{z}-\overline{x})}{(z-x)^2} \left(f^{cb}{}_d \left(\frac{(c_4-g) j_z^d(w)}{\overline{x}-\overline{w}} + \frac{(c_2-g) j_{\overline{z}}^d(x)}{x-w} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(c_5 + \frac{g}{4} \log \mu^2 |x-w|^2 \right) (\partial_z j_{\overline{z}}^c(w) - \partial_{\overline{z}} j_z^c(w)) \right) + : j_{\overline{z}}^c j_z^b : (w) \right) \Bigg] \\ & + c_1 \frac{j_z^a(w)}{(z-w)^2} + i f^a{}_{bc} \frac{c_2}{z-w} : j_z^b j_z^c : (w) + f^a{}_{bc} \frac{c_2 (\overline{z}-\overline{w})}{(z-w)^2} : j_z^b j_{\overline{z}}^c : (w) . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Among the remaining terms, many cancel: every contraction of the Killing metric with a structure constant gives zero by symmetry, and the double contractions of two structure constants are proportional to the dual Coxeter number and thus also vanish. We are left with

$$j_z^a(z) : j_z^b j_z^b : (w) \quad = \quad 2c_1 \frac{j_z^a(w)}{(z-w)^2} + c_2 \frac{f^a{}_{bc}}{z-w} \left(: j_z^b j_z^c : (w) + : j_z^c j_z^b : (w) \right)$$

$$+(c_2-g)f^a{}_{bc}\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}\left(:j_z^b j_{\overline{z}}^c:(w)+:j_{\overline{z}}^c j_z^b:(w)\right). \quad (2.25)$$

The second term vanishes because of the anti-symmetry of the structure constants. We can simplify the third term using the Maurer-Cartan identity:

$$j_z^a(z):j_z^b j_z^b:(w)=2c_1\frac{j_z^a(w)}{(z-w)^2}+2i(c_2-g)\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}\left(c_-\overline{\partial}j_z^a(w)-c_+\partial j_{\overline{z}}^a(w)\right). \quad (2.26)$$

By current conservation this can be rewritten as:

$$j_z^a(z):j_z^b j_z^b:(w)=2c_1\frac{j_z^a(w)}{(z-w)^2}+2i(c_2-g)\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}(c_-+c_+)\overline{\partial}j_z^a(w). \quad (2.27)$$

We can now show that the current j_z^a is a primary field of conformal weight one. We deduce from the previous computation the OPE between the stress-energy tensor and the current j_z^a, by expanding the operators on the right-hand side in the neigbourhood of the point z:

$$2c_1T(w)j_z^a(z)=2c_1\frac{j_z^a(z)}{(w-z)^2}+2c_1\frac{\partial j_z^a(z)}{w-z}+2(-c_1+i(c_2-g)(c_-+c_+))\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}\overline{\partial}j_z^a(z) \quad (2.28)$$

Using the relation obtained in equation (2.19), we finally have

$$T(w)j_z^a(z)=\frac{j_z^a(z)}{(w-z)^2}+\frac{\partial j_z^a(z)}{w-z}, \quad (2.29)$$

which shows that the current j_z is a primary field of conformal dimension one.

The stress-energy tensor

We now want to compute the OPE between $T(z)$ and $T(w)$. This calculation relies on the preceeding calculation and on the double pole in the current-current operator product expansion. We get:

$$\begin{aligned}T(z)T(w) &= \frac{1}{2c_1}\lim_{:x\to w:}T(z)\left[j_z^a(x)j_z^a(w)\right]\\ &= \frac{1}{2c_1}\lim_{:x\to w:}\left[\left(\frac{j_z^a(x)}{(z-x)^2}+\frac{\partial j_z^a(x)}{z-x}\right)j_z^a(w)\right.\\ &\qquad \left.+j_z^a(x)\left(\frac{j_z^a(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial j_z^a(w)}{z-w}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

The second line will contribute with regular terms only to the final result. In the first line, all the terms proportional to the structure constants disappear once again. We get:

$$\begin{aligned}T(z)T(w)=\frac{1}{2c_1}\lim_{:x\to w:}\left[\left(\frac{c_1\kappa^a{}_a}{(z-x)^2(x-w)^2}+\frac{:j_z^a j_{az}:(w)}{(z-x)^2}-\frac{2c_1\kappa^a{}_a}{(z-x)(x-w)^3}\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{:(\partial j_z^a)j_{az}:(w)}{z-x}\right)+\frac{:j_z^a j_{az}:(w)}{(z-w)^2}+\frac{:j_z^a(\partial j_{az}):(w)}{z-w}\right]\end{aligned} \quad (2.31)$$

To take the limit, we expand all the functions of x in the neighbourhood of the point w and keep only the regular term:

$$T(z)T(w)=\frac{dim\ G}{2(z-w)^4}+\frac{2T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial T(w)}{z-w}, \quad (2.32)$$

which proves that we have indeed a conformal algebra of central charge $c=dim\ G$. For supergroups, the relevant dimension is the superdimension (which is the self-contraction of the invariant metric).

Summary

We have shown that a fairly generic current algebra leads to a conformal theory when the dual Coxeter number is zero. The corresponding stress-energy tensor is given by the Sugawara construction. The holomorphic current component is a conformal primary with respect to the holomorphic Virasoro algebra. The Sugawara energy-momentum tensor has a central charge equal to the superdimension of the supergroup.

We note that a supergroup with zero Coxeter number shares some features with a free theory. The central charge takes its naive value. The composite part of the Maurer-Cartan equation does not need to be renormalized. We will see other simplifications for these models further on.

3 Current algebra from supergroup current correlators

We now switch gears and consider a concrete model in which the generic analysis of two-dimensional current algebras of section 2 can be applied. We consider a conformal supergroup sigma-model from the list given in [7]. Though we believe our analysis applies to the whole list, some facts that we use below have been proven explicitly only for the $PSL(n|n)$ models. We will calculate two-, three- and four-point functions of currents. Later we will infer the operator algebra of the currents from those correlation functions.

3.1 The model

We consider a supergroup non-linear sigma-model with standard kinetic term based on a bi-invariant metric on the supergroup. It is the principal chiral model on the supergroup. In addition we allow for a Wess-Zumino term. Therefore, we have two coupling constants, namely the coefficient of the kinetic term $1/f^2$ and the coupling constant k preceding the Wess-Zumino term. The action is [8]:

$$\begin{aligned} S &= S_{kin} + S_{WZ} \\ S_{kin} &= \frac{1}{16\pi f^2}\int d^2x Tr'[-\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g] \\ S_{WZ} &= -\frac{ik}{24\pi}\int_B d^3y \epsilon^{\alpha\beta\gamma} Tr'(g^{-1}\partial_\alpha g g^{-1}\partial_\beta g g^{-1}\partial_\gamma g) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Using complex coordinates, and after taking the trace, the kinetic term becomes:

$$S_{kin} = -\frac{1}{4\pi f^2}\int d^2z (\partial g g^{-1})_c (\overline{\partial} g g^{-1})^c. \tag{3.2}$$

The field g takes values in a supergroup.

From the action we can calculate the classical currents associated to the invariance of the theory under left multiplication of the field g by a group element in G_L and right multiplication by a group element in G_R. The classical equations of motion for the model read:

$$\left(kf^2+1\right)\overline{\partial}J^a + \left(kf^2-1\right)\partial(g\overline{J}g^{-1})^a \;=\; 0, \tag{3.3}$$

[8] Our normalizations and conventions are mostly as in [23]. In particular we define the primed trace as $Tr'(t_a t_b) = 2\kappa_{ab}$ where κ_{ab} is normalized to be the Kronecker delta-function for a compact subgroup. The action is written in terms of real euclidean coordinates. We soon switch to complex coordinates via $z = x^1 + ix^2$. Also, we take the convention that the generators of the Lie group t_a are hermitian and satisfy $[t^a, t^b] = if^{ab}{}_c t^c$. See [23] for further details. Again we will not be careful in always keeping track of the signs due to the bosonic or fermionic nature of the super Lie algebra generators.

where we have used the standard expressions for the left- and right-current at the Wess-Zumino-Witten point[9]:

$$J(z,\overline{z}) = -k\partial g g^{-1} \qquad \text{and} \qquad \overline{J}(z,\overline{z}) = k g^{-1}\overline{\partial} g\,. \tag{3.4}$$

The classical G_L currents are given by:

$$\begin{aligned} j_z &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2}+k\right)\partial g g^{-1} = \frac{(1+kf^2)}{2kf^2}J \\ j_{\overline{z}} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2}-k\right)\overline{\partial} g g^{-1} = -\frac{(1-kf^2)}{2kf^2}(g\overline{J}g^{-1}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

At the Wess-Zumino-Witten point $f^2 = 1/k$ the $\overline{z}$-component of the left-moving current becomes zero. As a consequence, the z-component J becomes holomorphic. A similar phenomenon happens at the other Wess-Zumino-Witten point ($f^2 = -1/k$) for the anti-holomorphic component $g\overline{J}g^{-1}$. From now on, we will concentrate on the current j associated to the left action of the group. For future reference we note that the coefficients that relate the left current components to the derivative of the group element are (see section 2):

$$c_+ = -\frac{(1+kf^2)}{2f^2} \qquad \text{and} \qquad c_- = -\frac{(1-kf^2)}{2f^2}\,. \tag{3.6}$$

3.2 Exact perturbation theory

Elegant arguments were given [6] for the exactness of low-order perturbation theory for the calculation of various quantities in the supergroup model on $PSL(n|n)$. In particular, we will use these arguments to compute the (left) current-current two-point function exactly to all orders in perturbation theory using the free theory. Similarly we also compute the current three-point functions to all orders using perturbation theory up to first order in the structure constants. Below, we summarize some important facts that lead to these results. For the detailed proofs of these facts, we refer to [6].

The argument is essentially based on the special feature of the Lagrangian that all interaction vertices are proportional to (powers of) the structure constants as well as certain properties of the Lie superalgebra, which we now list:

- If structure constants are doubly contracted, the result is proportional to the dual Coxeter number of the supergroup $\check{h}$, which is zero for the supergroups under consideration.
- The only invariant three-tensor is proportional to the structure constant and the only invariant two-tensor is the invariant metric.
- There are only five independent rank 4 invariant tensors: $g_{ab}g_{cd}$ and two other tensors with indices being permuted (three in total) and $f^r_{ab}f_{cdr}$ and $f^r_{ac}f_{bdr}$. Out of these, there are three traceless combinations: $f^r_{ab}f_{cdr}$, $f^r_{ac}f_{bdr}$ and $g_{ab}g_{cd}+g_{ac}g_{bd}+g_{ad}g_{bc}$.
- For the traceless 4-tensors, the contraction of any two indices with the structure constant f_{abc} produces zero. In other words, traceless invariant 4-tensors contracted with the structure constants give zero.

[9] At the Wess-Zumino-Witten point, the parameters satisfy the equation: $1/f^2 = k$.

Using all these facts, and by using a pictorial representation of the correlation functions, one can show that vacuum diagrams with at least one interaction vertex all vanish and that group invariant correlation functions can be computed in the free theory. However, in order to compute the OPEs in the theory of interest, we have to calculate the 2 and 3-point functions of the right-invariant currents J^a and $(g\overline{J}g^{-1})^a$, which are not fully invariant under the group action.

In [6], it is shown that a correlation function that is invariant under only the right group action, and which is a two-tensor under the left group action (or vice versa), can be computed by setting all structure constants to zero. Similarly, a correlation function that is invariant under the right group action, and a three-tensor under the left group action can be computed by taking into account only contributions with at most one structure constant. We will present the argument for the simplicity of the 3-point function in the next section.

In the following we also find it instructive to compute a four-point function to second order in the structure constants. In order to perform these calculations it is useful to expand the various terms in the action as well as the currents to second order in the structure constants.

Ingredients of perturbation theory

We gather all our ingredients expanded to second order in the structure constants. We use the conventions $g = e^A$ and $A = iA_a t^a$. For the left current components we obtain:

$$\begin{aligned} J &= -k\partial g g^{-1} = -k(\partial A + \frac{1}{2}[A,\partial A] + \frac{1}{3!}[A,[A,\partial A]] + O(f^3)) \\ &= -ki(\partial A_a - \frac{f^{bc}{}_a}{2} A_b \partial A_c + \frac{1}{6} f^a{}_{bc} f^c{}_{de} A^b A^d \partial A^e + O(f^3))t^a \\ g\overline{J}g^{-1} &= k\overline{\partial} g g^{-1} = k(\overline{\partial} A + \frac{1}{2}[A,\overline{\partial} A] + \frac{1}{3!}[A,[A,\overline{\partial} A]] + O(f^3)) \\ &= +ki(\overline{\partial} A_a - \frac{f^{bc}{}_a}{2} A_b \overline{\partial} A_c + \frac{1}{6} f^a{}_{bc} f^c{}_{de} A^b A^d \overline{\partial} A^e + O(f^3))t^a, \end{aligned} \tag{3.7}$$

where $O(f^3)$ indicates terms of third order or higher in the structure constants. The kinetic term and the Wess-Zumino term become:

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \frac{1}{4\pi f^2}\int d^2z(\partial A^a \overline{\partial} A_a - \frac{1}{12} f^a{}_{bc} f_{aij} A^b \partial A^c A^i \overline{\partial} A^j + O(f^4)) \\ S_{WZ} &= -\frac{k}{12\pi}\int_C d^2z f^{abc} A_a \partial A_b \overline{\partial} A_c + O(f^3). \end{aligned} \tag{3.8}$$

The quadratic terms in the action give rise to the free propagators:

$$A_a(z,\overline{z}) A_b(w,\overline{w}) = -f^2 \kappa_{ab} \log \mu^2 |z-w|^2, \tag{3.9}$$

where μ is an infrared regulator.

Two-point functions

Consider the Feynman diagrams with two external lines and pull out a structure constant where the external line enters. The rest of the diagram is now a blob with three external lines, with two of them contracted with the structure constant (the interaction strength). Now, from a group theoretic perspective, the three-spoked blob is also an invariant 3-tensor, which, by the properties itemized at the beginning of the section, is proportional to the structure

constant. As a result, the whole graph is proportional to the metric times the dual Coxeter number: $f_{abc}f^{bc}_{d} = 2\check{h}g_{ad}$, which vanishes for the supergroups under consideration.

The two-point functions are therefore perturbatively exact when computed by setting all structure constants to zero and follows directly from the free propagator (3.9):

$$\begin{aligned}
\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})\rangle &= \frac{f^2k^2\kappa^{ab}}{(z-w)^2} \\
\langle (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\rangle &= \frac{f^2k^2\kappa^{ab}}{(\overline{z}-\overline{w})^2} \\
\langle J^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\rangle &= 2\pi f^2k^2\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Three-point functions

Consider the Feynman diagrams that contribute to

$$\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\rangle\,.$$

In their evaluation, there are strucutre constants coming both from the expansion of the currents in (3.7) and also from the interaction vertices. We would like to argue that only those diagrams which contain a single structure constant contribute. In order to show this, consider pulling out one structure constant out of the vertex where the external line enters. The rest of the diagram can be thought of as a blob with four external lines and which has the group structure of a rank 4 invariant tensor. Contracting two of its indices, the resulting graph contains a structure constant inside and vanishes, following the same argument that allows to compute the two-point functions by setting all structure constants to zero.

We have now shown that the group structure of the four-spoked blob is that of a traceless rank 4 tensor. The full Feynman graph is evaluated by contracting a structure constant with this traceless rank-4 tensor. Using the special properties of the Lie superalgebra of $PSL(n|n)$ we listed earlier in the section, it is clear that such a term evaluates to zero. Thus, the three-point functions are perturbatively exact at first order in the structure constants. There are two non-trivial contributions to this calculation. We have one contribution coming from the term proportional to the structure constants in the expansion (3.7) of the current components, and one from the first order Wess-Zumino interaction (3.8).

Let us compute the first contribution for the JJJ three-point function in some detail:

$$\begin{aligned}
\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\rangle_1 &= +ik^3\langle(\partial A^a(z,\overline{z}) - \frac{1}{2}f^{dea}A_d\partial A_e) \\
&\quad (\partial A^b - \frac{1}{2}f^{deb}A_d\partial A_e)(\partial A^c - \frac{1}{2}f^{dec}A_d\partial A_e)\rangle \\
&= -ik^3f^4\frac{1}{2}((+)\frac{f^{abc}}{(z-x)(w-x)^2} + (+)\frac{f^{bac}}{(w-x)(z-x)^2} + cyclic) \\
&= -i\frac{1}{2}k^3f^4f^{abc}\frac{z-w}{(z-x)^2(w-x)^2} + cyclic \\
&= -i\frac{3}{2}k^3f^4f^{abc}\frac{1}{(z-w)(w-x)(x-z)}\,. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

The Wess-Zumino contribution is[10]:

$$\begin{aligned}\left\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\right\rangle_2 &= +ik^4\left\langle \partial A^a(z,\overline{z})\partial A^b(w,\overline{w})\partial A^c(x,\overline{x})\times \right. \\ &\qquad \left. \frac{1}{12\pi}\int_C d^2y f^{deg}A_g\partial A_d\overline{\partial}A_e(y,\overline{y})\right\rangle \\ &= +ik^4f^6\frac{1}{2}f^{abc}\frac{1}{(z-w)(w-x)(x-z)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Adding the two contributions we get the three-point function:

$$\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\rangle \;=\; -i\frac{1}{2}k^3f^4(3-kf^2)f^{abc}\frac{1}{(z-w)(w-x)(x-z)}. \tag{3.13}$$

A quick check on the calculation is that it matches the known three-point function at the Wess-Zumino-Witten point, where it can be evaluated using the holomorphy of the currents. All other left current three-point functions can be computed analogously. They are (up to contact terms):

$$\begin{aligned}\langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\rangle &= \left(\frac{3}{2}-\frac{kf^2}{2}\right)\frac{-ik^3f^4f^{abc}}{(z-w)(w-x)(x-z)} \\ \langle J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w})(g\overline{J}g^{-1})^c(x,\overline{x})\rangle &= \left(\frac{1}{2}-\frac{kf^2}{2}\right)\frac{-ik^3f^4f^{abc}(\overline{z}-\overline{w})}{(z-w)^2(\overline{x}-\overline{w})(\overline{x}-\overline{z})} \\ \langle (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})J^c(x,\overline{x})\rangle &= \left(\frac{1}{2}+\frac{kf^2}{2}\right)\frac{+ik^3f^4f^{abc}(z-w)}{(\overline{z}-\overline{w})^2(x-w)(x-z)} \\ \langle (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})(g\overline{J}g^{-1})^c(x,\overline{x})\rangle &= \left(\frac{3}{2}+\frac{kf^2}{2}\right)\frac{+ik^3f^4f^{abc}}{(\overline{z}-\overline{w})(\overline{w}-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Coincidence limit and operator product expansions

When we take coincidence limits of the three-point functions, we expect to be able to replace the product of two operators by their operator product expansion. Using the general form of the current-current operator product expansions, and the exact two-point functions, we can infer from the above three-point functions a proposal for the current-current operator product expansions. Up to contact terms the two- and three-point functions can be reproduced in

[10] A minus sign arises from expanding e^{-S} to first order.

their coincidence limits by the OPEs [11]:

$$\begin{aligned}
J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w}) &\sim \frac{k^2f^2\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + kf^2(\frac{3}{2}-\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)}{z-w} \\
&\quad + (-kf^2)(\frac{1}{2}-\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}(g\overline{J}g^{-1})^c(w) + \dots \\
J^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) &\sim 2\pi k^2f^2\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w) + kf^2(\frac{1}{2}+\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w)}{z-w} \\
&\quad - kf^2(\frac{1}{2}-\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{1}{\overline{z}-\overline{w}}J^c(w) + \dots \\
(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) &\sim \frac{k^2f^2\kappa^{ab}}{(\overline{z}-\overline{w})^2} - kf^2(\frac{3}{2}+\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w)}{\overline{z}-\overline{w}} \\
&\quad + kf^2(\frac{1}{2}+\frac{kf^2}{2})if^{ab}{}_c\frac{z-w}{(\overline{z}-\overline{w})^2}J^c(w) + \dots
\end{aligned} \tag{3.15}$$

When we normalize the currents as in (3.5) to agree with section 2, we find the following OPEs:

$$\begin{aligned}
j^a_z(z)j^b_w(w) &\sim \frac{(1+kf^2)^2\kappa^{ab}}{4f^2(z-w)^2} + \frac{i}{4}(1+kf^2)(3-kf^2)f^{ab}{}_c\frac{j^c_w(w)}{z-w} \\
&\quad + \frac{i}{4}(1+kf^2)^2f^{ab}{}_c\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}j^c_{\overline{w}}(w) + \dots \\
j^a_{\overline{z}}(z)j^b_{\overline{w}}(w) &\sim \frac{(1-kf^2)^2\kappa^{ab}}{4f^2\,(\overline{z}-\overline{w})^2} + \frac{i}{4}(1-kf^2)(3+kf^2)\frac{f^{ab}{}_c\,j^c_{\overline{w}}(w)}{\overline{z}-\overline{w}} \\
&\quad + \frac{i}{4}(1-kf^2)^2\frac{(z-w)\,f^{ab}{}_c\,j^c_w(w)}{(\overline{z}-\overline{w})^2} + \dots \\
j^a_z(z)j^b_{\overline{w}}(w) &\sim -\frac{\pi}{4f^2}(1+kf^2)(1-kf^2)\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w) + \frac{i(1+kf^2)^2}{4}\frac{f^{ab}{}_c\,j^c_{\overline{w}}(w)}{z-w} \\
&\quad + \frac{i(1-kf^2)^2}{4}\frac{f^{ab}{}_c\,j^c_w(w)}{\overline{z}-\overline{w}} + \dots
\end{aligned} \tag{3.16}$$

We can read from these formulas the coefficients of the generic current algebra (2.21):

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{(1+kf^2)^2}{4f^2} \qquad c_2 = \frac{i}{4}(1+kf^2)(3-kf^2) \\
c_3 &= \frac{(1-kf^2)^2}{4f^2} \qquad c_4 = \frac{i}{4}(1-kf^2)(3+kf^2) \\
&\text{and} \quad g = \frac{i}{2}(1+kf^2)(1-kf^2)\,.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

We note that the coefficients automatically satisfy the extra constraints (2.19) and (2.20) one gets by requiring consistency of the current algebra with the Maurer-Cartan equation.

A four-point function

From the three-point functions, we conclude that the coefficient g is non-zero. We have argued in section 2 that that is associated to the appearance of logarithms in the regular

[11] From now on we will no longer always make explicit the fact that all the operators depend both on the holomorphic as well as the anti-holomorphic coordinate at a generic point in the moduli space.

term of the $j_z j_{\overline{z}}$ operator product expansion. We would like to check the coefficient of the logarithm more directly in a perturbative calculation. For that purpose it is sufficient to study a four-point function at second order in the structure constants. The computation will be exact at that order. In particular we want to compute the four-point function:

$$\langle J^{[a}(z)(g\overline{J}g^{-1})^{b]}(w)J^c(x)(g\overline{J}g^{-1})^d(y)\rangle_{O(f^2)}, \tag{3.18}$$

at second order in the structure constants, and in the $z \to w$ limit. We anti-symmetrized in the a and b indices (and weighted each term with a factor $1/2$). In the coincidence limit, logarithms appear in the regular terms in the OPE between J and $(g\overline{J}g^{-1})$ and they will give non-zero contribution to the four-point functions. In our calculation we focus on the terms proportional to $\log|z-w|^2$ (and which are not contact terms).

We distinghuish the following contributions at this order. We can expand a single current to second order, and compute in the free theory. We can expand two currents to first order and compute in the free theory. We can add one linear Wess-Zumino interaction term and expand one current to first order. Or we can add two linear Wess-Zumino interaction terms and take only the leading terms in the currents. Finally, we can add one quadratic principal chiral model interaction term, and treat the currents at zeroth order.

We found the following results. The second order term in a current cannot give rise to logarithmic contributions. Two currents at first order can be contracted to give a logarithm. It is easy to see that there are few contributions to the terms of interest, and they give:

$$-\frac{k^4 f^6}{8} f^{abe} f^{cd}{}_e \log\mu^2|z-w|^2 \frac{1}{(z-x)^2(\overline{w}-\overline{y})^2} \tag{3.19}$$

The term linear in the Wess-Zumino interaction term gives no contribution. The term arising from the quartic interaction term in the principal chiral model doubles the previous non-zero term. The Wess-Zumino term squared gives a contribution of a different type equal to:

$$+\frac{k^6 f^{10}}{4} \log\mu^2|z-w|^2 f^{abe} f^{cd}{}_e \frac{1}{(z-x)^2(\overline{w}-\overline{y})^2}. \tag{3.20}$$

The latter contribution is the hardest to calculate. It consists of the order of 216 free field contractions, which exhibit a lot of symmetries. Some logarithmic terms in the double integrals over the points of interaction need to be evaluated, but all of these integrals are straightforwardly performed using partial integrations and other elementary techniques. The tedious but elementary calculation leads to the above result. In total we get, at second order in the structure constants, and only regarding the logarithmic contribution in z, w:

$$\begin{aligned}\langle J^{[a}(z)(g\overline{J}g^{-1})^{b]}(w)J^c(x)(g\overline{J}g^{-1})^d(y)\rangle_{O(f^2),log} = \\ -\frac{1}{4}k^4 f^6(1-k^2f^4) f^{abe} f^{cd}{}_e \log\mu^2|z-w|^2 \frac{1}{(z-x)^2(\overline{w}-\overline{y})^2}\,.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Using the relative normalization between the J's and the j's, we find that

$$\begin{aligned}\langle j_z^{[a}(z) j_{\overline{w}}^{b]}(w) j_x^c(x) j_{\overline{y}}^d(y)\rangle_{O(f^2),log} = \\ -\frac{1}{64f^2}(1+kf^2)^2(1-kf^2)(1-k^2f^4) f^{abe} f^{cd}{}_e \log\mu^2|z-w|^2 \frac{1}{(z-x)^2(\overline{w}-\overline{y})^2}\,.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Let us see how to use this result to check the coefficient g in the operator product expansion. From the expressions for the operator product algebra (2.21) and from the exact three-point

functions (3.14), we find that the logarithmic term in the normalized four-point function in the coincidence limit $z \to w$ is:

$$\begin{aligned}
\langle j_z^a j_{\overline{w}}^b j_x^c j_{\overline{y}}^d \rangle &\approx -\frac{g}{4} f^{ab}{}_e \log \mu^2 |z-w|^2 \langle (\partial j_{\overline{w}}^e - \overline{\partial} j_w^e) j_x^c j_{\overline{y}}^d \rangle \\
&\approx +\frac{g}{4} \frac{1}{8k^3 f^6} (1+kf^2)(1-kf^2) f^{ab}{}_e \log \mu^2 |z-w|^2 \\
&\quad (-\partial_w (1-kf^2) ik^3 f^4 f^{edc} \frac{1}{2} (1+kf^2) \frac{w-y}{(\overline{w}-\overline{y})^2 (x-w)(x-y)} \\
&\quad -\overline{\partial}_w (1+kf^2) f^{ecd} (-) ik^3 f^4 \frac{1}{2} (1-kf^2) \frac{\overline{w}-\overline{x}}{(w-x)^2 (\overline{y}-\overline{w})(\overline{y}-\overline{x})}) \\
&\approx +i \frac{g}{32 f^2} (1+kf^2)^2 (1-kf^2)^2 f^{ab}{}_e f^{ecd} \\
&\quad \log \mu^2 |z-w|^2 \frac{1}{(w-x)^2 (\overline{w}-\overline{y})^2}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

We recall the value for g:

$$g = \frac{i}{2}(1+kf^2)(1-kf^2), \qquad (3.24)$$

so the operator algebra and the three-point functions predict:

$$\begin{aligned}
\langle j_z^a j_{\overline{w}}^b j_x^c j_{\overline{y}}^d \rangle &\approx -\frac{1}{64 f^2} (1+kf^2)^2 (1-kf^2)^2 (1-k^2 f^4) f^{ab}{}_e f^{ecd} \\
&\quad \log \mu^2 |z-w|^2 \frac{1}{(w-x)^2 (\overline{w}-\overline{y})^2}. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

The prediction is matched by our perturbative calculation of the four-point function. Moreover, since the coefficient g is fixed to all orders by the calculation of the three-point function, our result at second order in the structure constants is exact. The calculation is a good consistency check on the correlators and operator product expansions. The full four-point function is a function of the cross ratio of the four insertion points, in which the regulator μ drops out. We note also that the appearance of logarithms in four-point functions of operators that differ by an integer in their conformal dimension is generic. In our case, the scale μ must appear in the operator product expansion because we lifted space-time fermionic zeromodes [6]. These in turn are linked to the non-diagonalizable nature of the scaling operator in sigma-models on supergroups [24].

3.3 Summary of the current algebra

We summarize the current algebra for the left group action:

$$
\begin{aligned}
j^a_z(z)j^b_z(w) &= \frac{(1+kf^2)^2\kappa^{ab}}{4f^2(z-w)^2} + \frac{i}{4}(1+kf^2)(3-kf^2)\frac{f^{ab}{}_c\, j^c_z(w)}{z-w} \\
&\quad + \frac{i}{4}(1+kf^2)^2\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}f^{ab}{}_c\, j^c_{\overline{z}}(w) + :j^a_z j^b_z:(w) \\
j^a_z(z)j^b_{\overline{z}}(w) &= -\frac{\pi}{4f^2}(1+kf^2)(1-kf^2)\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w) + \frac{i(1+kf^2)^2}{4}\frac{f^{ab}{}_c\, j^c_{\overline{z}}(w)}{z-w} \\
&\quad + \frac{i(1-kf^2)^2}{4}\frac{f^{ab}{}_c\, j^c_z(w)}{\overline{z}-\overline{w}} - \frac{i}{8}(1-k^2f^4)f^{ab}{}_c\log|z-w|^2\left(\partial j^c_{\overline{z}}(w) - \overline{\partial} j^c_z(w)\right) \\
&\quad + :j^a_z j^b_{\overline{z}}:(w) \\
j^a_{\overline{z}}(z)j^b_{\overline{z}}(w) &= \frac{(1-kf^2)^2\kappa^{ab}}{4f^2(\overline{z}-\overline{w})^2} + \frac{i}{4}(1-kf^2)(3+kf^2)\frac{f^{ab}{}_c\, j^c_{\overline{w}}(w)}{\overline{z}-\overline{w}} \\
&\quad + \frac{i(1-kf^2)^2}{4}\frac{z-w}{(\overline{z}-\overline{w})^2}f^{ab}{}_c\, j^c(w) + :j^a_{\overline{z}} j^b_{\overline{z}}:(w)\,.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

The current algebra for the right group action can be obtained through the combined operation $g \to g^{-1}$ and worldsheet parity P, which is a symmetry of the model

4 Conformal perturbation theory

In this section we study Wess-Zumino-Witten models with a perturbed kinetic term, both for its intrinsic interest and as a tractable example of conformal perturbation theory. For a general group manifold, the deformed model becomes non-conformal. For supergroup manifolds with zero dual Coxeter number, the models remain conformal. In the earlier sections, we have computed, using the exact two- and three-point functions, the current algebra of the deformed theory. In this section, we re-derive these results using conventional conformal perturbation theory. This will be a consistency check of the deformed conformal current algebra we have obtained in equation (3.26).

4.1 The current algebra in the Wess-Zumino-Witten model

We first review the chiral current algebra of the Wess-Zumino-Witten model. We recall the action

$$
S_{WZW} = \frac{k}{16\pi}\int d^2x Tr'[-\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g] + k\Gamma \tag{4.1}
$$

where Γ is the Wess-Zumino term, and the field $g(z,\overline{z})$ takes values in a (super)group G. The model has a global $G_L \times G_R$ invariance by left and right multiplication of the group element. The currents associated to these symmetries are (in complex coordinates):

$$
J(z) = -k\partial g g^{-1} \qquad \text{and} \qquad \overline{J}(\overline{z}) = k g^{-1}\overline{\partial} g\,. \tag{4.2}
$$

The right-invariant current $J(z)$ is holomorphic and generates the left-action of the group G_L. The left-invariant anti-holomorphic current $\overline{J}$ generates the right translation by a group element. The components of the current J satisfy the OPE:

$$
J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)}{z-w}, \tag{4.3}
$$

and the components of the current $\overline{J}(\overline{z})$ satisfy the same OPE, with anti-holomorphic coordinates instead of holomorphic ones. In particular, in our conventions the pole term keeps the same sign. These currents generate a large chiral affine current algebra whose existence is useful in solving the model via the Knizhnik-Zamolodchikov equations.

4.2 Perturbation of the kinetic term: classical analysis

We are interested in the following marginal deformation of the Wess-Zumino-Witten model:

$$S = S_{WZW} + \frac{\lambda}{4\pi k}\int d^2z\,\Phi(z,\overline{z})\,. \tag{4.4}$$

where

$$\Phi = \frac{1}{2}(:J^c(g\overline{J}g^{-1})_c: + :(g\overline{J}g^{-1})_c J^c:)\,. \tag{4.5}$$

In other words, we perturb the kinetic term by multiplying it with a factor $1+\lambda$. Comparing the action with the action in the earlier section, we find that λ is related to the kinetic coefficient f defined in the previous section by the relation

$$\frac{1}{f^2} = k(1+\lambda)\,. \tag{4.6}$$

We note that, analogous to the composite operator that appeared in the Maurer-Cartan equation, we have chosen a symmetric combination of the product of J and $g\overline{J}g^{-1}$ operators to represent the marginal operator in the quantum theory.

4.3 The current-current operator product expansions

In this subsection we compute the correction to the holomorphic current-current operator product expansion induced by the perturbation of the kinetic term of the Wess-Zumino-Witten model. In order to perform the calculation we require the OPEs between the currents J and $g\overline{J}g^{-1}$ at the WZW point. These are obtained by requiring that the Maurer-Cartan equation holds in the quantum WZW model, as shown in Appendix B: we compute the OPE of the current J with the Maurer-Cartan equation for a generic value of the dual Coxeter number and demand that it vanish. This constraint leads to the operator product expansion

$$J^a(z)(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) = 2\pi k\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w) + if^{ab}{}_c\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{z-w} + :J^a(g\overline{J}g^{-1})^b:(w,\overline{w})\,. \tag{4.7}$$

A similar demand on contact terms and the most singular terms in the OPE of $(g\overline{J}g^{-1})$ with the Maurer-Cartan equation leads to the OPE

$$(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) = \frac{k\kappa^{ab}}{(\overline{z}-\overline{w})^2} + if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)(z-w)}{(\overline{z}-\overline{w})^2)} - 2if^{ab}{}_c\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{\overline{z}-\overline{w}} + :(g\overline{J}g^{-1})^a(g\overline{J}g^{-1})^b:(w,\overline{w})\,. \tag{4.8}$$

A general discussion of higher order corrections to operator product expansions is given in Appendix A. Here we focus on applying the discussion to the case of a supergroup with zero dual Coxeter number. We compute the corrections induced by the exactly marginal perturbation to the J^aJ^b OPE. The nth order correction is denoted by

$$(JJ)^{ab}_n(z-w,w) = \left[J^a(z,\overline{z})\frac{(-\lambda)^n}{(4\pi k)^n n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^2x_i\Phi(x_i,\overline{x}_i)\right]J^b(w,\overline{w}) \tag{4.9}$$

where the square bracket means that we have to contract $J^a(z,\overline{z})$ with all the integrated operators before we contract it with $J^b(w,\overline{w})$. We define $H^a_n(z,\overline{z})$ to be this complete contraction:

$$H^a_n(z,\overline{z}) = \left[J^a(z,\overline{z}) \frac{1}{(4\pi k)^n n!} \prod_{i=1}^{n} \int d^2x_i \Phi(x_i,\overline{x}_i) \right] . \tag{4.10}$$

One can similarly define another contraction, with J replaced by the current $(g\overline{J}g^{-1})^a$:

$$\overline{H}^a_n(z,\overline{z}) = \left[(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z}) \frac{1}{(4\pi k)^n n!} \prod_{i=1}^{n} \int d^2x_i \Phi(x_i,\overline{x}_i) \right] . \tag{4.11}$$

The basic building blocks we need to carry out this computation are the OPE of the currents J^a and $(g\overline{J}g^{-1})^a$ with the marginal operator Φ. As we will see, once these OPEs are obtained, the nth order correction can be obtained by a process of iteration. Here, we list the two OPEs of interest and refer the reader to Appendix B for details.

$$\begin{aligned} J^a(w) \int d^2x \Phi(x,\overline{x}) &\sim k \int d^2x \frac{(g\overline{J}g^{-1})^a(w,\overline{w})}{(w-x)^2} + 2\pi k J^a(w) \\ (g\overline{J}g^{-1})^a(w,\overline{w}) \int d^2x \Phi(x,\overline{x}) &\sim 6\pi k (g\overline{J}g^{-1})^a(w,\overline{w}) - k \int d^2x \frac{J^a(x,\overline{x})}{(\overline{w}-\overline{x})^2} . \end{aligned} \tag{4.12}$$

With these basic OPEs, let us contract the current with one of the integrated marginal operators:

$$\begin{aligned} H^a_n(z,\overline{z}) &= \frac{n}{(4\pi k)^n n!} \int d^2x \left(\frac{k(g\overline{J}g^{-1})^a(x,\overline{x})}{(z-x)^2} + 2\pi k \delta^{(2)}(z-x) J^a(x,\overline{x}) \right) \prod_{i=1}^{n-1} \int d^2x_i \Phi(x_i,\overline{x}^i) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{\overline{H}^a_{n-1}(x,\overline{x})}{(z-x)^2} \right) + \frac{1}{2} H^a_{n-1}(z,\overline{z}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

One can do a similar operation on $\overline{H}^a_n$ and we get

$$\begin{aligned} \overline{H}^a_n(z,\overline{z}) &= \frac{n}{(4\pi k)^n n!} \left[6\pi k (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z}) - \int d^2x \frac{k J^a(x,\overline{x})}{(\overline{z}-\overline{x})^2} \right] \prod_{i=1}^{n-1} \int d^2x_i \Phi(x_i,\overline{x}^i) \\ &= \frac{3}{2} \overline{H}^a_{n-1}(z,\overline{z}) - \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{H^a_{n-1}(x,\overline{x})}{(\overline{z}-\overline{x})^2} \right) . \end{aligned} \tag{4.14}$$

These are coupled recursion relations for H^a_n and $\overline{H}^a_n$ subject to the initial conditions:

$$\begin{aligned} H^a_0(z,\overline{z}) &= J^a(z,\overline{z}) \\ \overline{H}^a_0(z,\overline{z}) &= (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

These recursion relations have the following solutions:

$$\begin{aligned} H^a_n(z,\overline{z}) &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) J^a(z,\overline{z}) + \frac{n}{2} \frac{1}{2\pi} \int d^2x \frac{(g\overline{J}g^{-1})^a(x,\overline{x})}{(z-x)^2} \\ \overline{H}^a_n(z,\overline{z}) &= \left(1 + \frac{n}{2}\right) (g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z}) - \frac{n}{2} \frac{1}{2\pi} \int d^2x \frac{J^a(x,\overline{x})}{(\overline{z}-\overline{x})^2} . \end{aligned} \tag{4.16}$$

In particular we deduce that

$$\begin{aligned}(JJ)_n^{ab}(z-w,w) &= (-\lambda)^n J^b(w,\overline{w})\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)J^a(z,\overline{z})+\frac{n}{2}\frac{1}{2\pi}\int d^2x\frac{(g\overline{J}g^{-1})^a(x,\overline{x})}{(z-x)^2}\right]\\ &= (-\lambda)^n\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{k\kappa^{ab}}{(z-w)^2}+if^{abc}\frac{J^c(w)}{z-w}\right)\right.\\ &\left.+\frac{n}{2}\frac{1}{2\pi}\int d^2x\frac{1}{(z-x)^2}\left(2\pi k\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-x)+if^{abc}\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{x-w}\right)\right]\\ &= (-\lambda)^n\left[\frac{k\kappa^{ab}}{(z-w)^2}+if^{abc}\left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{J^c(w)}{z-w}\right.\\ &\left.+i\frac{n}{2}f^{abc}(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}+\ldots\right]. \qquad (4.17)\end{aligned}$$

We can now sum the perturbative series in λ. We get the OPE in the perturbed theory:

$$\begin{aligned}J^a(z,\overline{z})J^b(w,\overline{w}) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n(JJ)_n^{ab}(z-w,w)\\ &= \frac{1}{1+\lambda}\frac{k\kappa^{ab}}{(z-w)^2}+\frac{2+3\lambda}{2(1+\lambda)^2}if^{abc}\frac{J^c(w)}{z-w}-\frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}if^{abc}(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})\frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}\end{aligned}$$

Using the map $(kf^2)^{-1}=1+\lambda$, one can check that this coincides with the OPE in equation (3.15). With the same techniques we can also compute the corrections to the $J^a(g\overline{J}g^{-1})^b$ and $(g\overline{J}g^{-1})^a(g\overline{J}g^{-1})^b$ OPEs. We get the results

$$\begin{aligned}J^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) &= \frac{1}{1+\lambda}2\pi k\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w)+if^{abc}\frac{2+\lambda}{2(1+\lambda)^2}\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{z-w}\\ &-if^{abc}\frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}\frac{J^c(w)}{\overline{z}-\overline{w}}+\ldots \qquad (4.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) &= \frac{1}{1+\lambda}\frac{k\kappa^{ab}}{(\overline{z}-\overline{w})^2}-\frac{4+3\lambda}{2(1+\lambda)^2}\frac{if^{abc}(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w}}{\overline{z}-\overline{w}}\\ &+\frac{2+\lambda}{2(1+\lambda)^2}\frac{(z-w)if^{abc}J^c(w)}{(\overline{z}-\overline{w})^2}+\ldots \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Again this matches with the OPE obtained in equation (3.15).

Summary

In this section, we have shown by resumming conformal perturbation theory that the deformed current algebra we obtain this way matches the algebra obtained in section 3 through the calculation of 2- and 3-point functions to all orders in perturbation theory.

5 The current algebra on the cylinder

In this section we consider the sigma-model on a cylinder and Fourier decompose the current algebra. The representation in terms of Fourier modes is often more conventient. To put

the algebra on a cylinder, we first compute the operator algebra on the plane, and then compactify the plane. We consider the complex plane $z = \sigma - i\tau$ and consider τ as time and σ as the spatial coordinate. Denoting the currents as $j_\mu(\sigma, \tau)$, the commutator of equal-time operators is defined to be the limit of the difference of time-ordered operators (evaluated at $\tau = 0$)

$$[j^a_\mu(\sigma, 0), j^b_\nu(0, 0)] = \lim_{\epsilon \to 0}(j^a_\mu(\sigma, i\epsilon)j^b_\nu(0, 0) - j^b_\nu(0, i\epsilon)j^a_\mu(\sigma, 0)) \,. \tag{5.1}$$

Using this definition, let us compute the commutators for the holomorphic component of the current (we suppress the $\tau = 0$ argument within the currents in what follows):

$$\begin{aligned}
[j^a_z(\sigma), j^b_z(0)] = \lim_{\epsilon \to 0} \Bigg\{ & \frac{c_1 \kappa^{ab}}{(\sigma - i\epsilon)^2} + f^{ab}{}_c \Big(\frac{c_2}{\sigma - i\epsilon} j^c_z(0) + (c_2 - g)\frac{\sigma + i\epsilon}{(\sigma - i\epsilon)^2} j^c_{\overline{z}}(0)\Big) \\
& - \frac{c_1 \kappa^{ab}}{(\sigma + i\epsilon)^2} - f^{ab}{}_c \Big(\frac{c_2}{-\sigma - i\epsilon} j^c_z(\sigma) + (c_2 - g)\frac{-\sigma + i\epsilon}{(\sigma + i\epsilon)^2} j^c_{\overline{z}}(\sigma)\Big) \Bigg\} + \dots \\
= & -2\pi i c_1 \delta'(\sigma)\kappa^{ab} + 2\pi i c_2 \delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_z(0) + 2\pi i (c_2 - g)\delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z}}(0) + \dots
\end{aligned} \tag{5.2}$$

where we used

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sigma - i\epsilon} - \frac{1}{\sigma + i\epsilon} &= 2\pi i \delta(\sigma) \\
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{1}{(\sigma + i\epsilon)^2} &= -2\pi i \delta'(\sigma) \\
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\sigma + i\epsilon}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{\sigma - i\epsilon}{(\sigma + i\epsilon)^2} &= 2\pi i \delta(\sigma).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

For other components we find:

$$\begin{aligned}
[j^a_{\overline{z}}(\sigma), j^b_{\overline{z}}(0)] &= +2\pi i c_3 \delta'(\sigma)\kappa^{ab} - 2\pi i c_4 \delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z}}(0) - 2\pi i (c_4 - g)\delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_z(0) \\
[j^a_z(\sigma), j^b_{\overline{z}}(0)] &= -2\pi i (c_4 - g)\delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_z(0) + 2\pi i (c_2 - g)\delta(\sigma) f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z}}(0) \,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

It is now straightforward to compactify $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$ and Fourier decompose the operator algebra on the cylinder using:

$$\begin{aligned}
j_z &= +i \sum_{n \in Z} e^{-in\sigma} j_{z,n} \\
j_{\overline{z}} &= -i \sum_{n \in Z} e^{-in\sigma} j_{\overline{z},n} \\
\delta(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in Z} e^{in\sigma}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

We find:

$$\begin{aligned}
[j^a_{z,n}, j^b_{z,m}] &= c_1 \kappa^{ab} n \delta_{n+m,0} + c_2 f^{ab}{}_c j^c_{z,n+m} - (c_2 - g) f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z},n+m} \\
[j^a_{\overline{z},n}, j^b_{\overline{z},m}] &= -c_3 \kappa^{ab} n \delta_{n+m,0} + c_4 f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z},n+m} - (c_4 - g) f^{ab}{}_c j^c_{z,n+m} \\
[j^a_{z,n}, j^b_{\overline{z},m}] &= (c_4 - g) f^{ab}{}_c j^c_{z,n+m} + (c_2 - g) f^{ab}{}_c j^c_{\overline{z},n+m}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

We can check the validity of the Jacobi identity, which follows from the validity of the Maurer-Cartan equation along with the Jacobi identity for the Lie algebra of G.

Conserved charges

We note that the current one-form satisfies the conservation equation $d * j = 0$, and that therefore the integral of the time-component of the current over the spatial circle is conserved in time. The corresponding charges are easily determined to be the sum of the zero-modes of the current algebra. They generate the Lie algebra of G. We recall that the group action generated by these charges corresponds to the left group action G_L, and that there is an analogous right group action G_R.

Kac-Moody subalgebra

Let us consider the combination of the currents $j^a_z - j^a_{\bar{z}}$ and compute the commutation relations of its modes with themselves. Using the above basic commutation relations, we find

$$[(j^a_{z,n} + j^a_{\bar{z},n}), (j^b_{z,m} + j^b_{\bar{z},m})] = (c_1 - c_3)\kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} + (c_2 + c_4 - g) f^{ab}{}_c (j^c_{z,n+m} + j^c_{\bar{z},n+m}) \,, \tag{5.7}$$

which is a Kac-Moody algebra at level

$$k^+ = -\frac{c_1 - c_3}{(c_2 + c_4 - g)^2} \tag{5.8}$$

as becomes manifest in terms of the rescaled currents

$$\mathcal{J}^a = -i \frac{j^a_z - j^a_{\bar{z}}}{c_2 + c_4 - g} \,. \tag{5.9}$$

We observe that for the case of the supergroup considered in the earlier section, substituting the values of the c_i in (3.17), we obtain a Kac-Moody algebra at level $k^+ = k$, with the currents taking the simple form

$$\mathcal{J}^a = (j^a_{\bar{z}} - j^a_z) \,. \tag{5.10}$$

When we choose a real form of the supergroup that has a compact subgroup, the level k will be integer. We also observe that the current associated to the σ-component of the canonical right-invariant one-form dgg^{-1} is:

$$\mathcal{J}'^a = c_- j_z + c_+ j_{\bar{z}}. \tag{5.11}$$

In term of these currents, we find the mode algebra:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^a_n, \mathcal{J}^b_m] &= -\frac{c_1 - c_3}{(c_2 + c_4 - g)^2} \kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} + i f^{ab}{}_c \mathcal{J}^c_{n+m} \\
[\mathcal{J}'^a_n, \mathcal{J}^b_m] &= -i \frac{c_1 c_- + c_3 c_+}{c_2 + c_4 - g} \kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} - i f^{ab}{}_c \mathcal{J}'^c_{n+m} \\
[\mathcal{J}'^a_n, \mathcal{J}'^b_m] &= (c_-^2 c_1 - c_+^2 c_3)\kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} + f^{ab}{}_c (2c_2 c_- - 2c_4 c_+ + g(c_+ - c_-)) \mathcal{J}'^c_{n+m} \\
&\quad - i f^{ab}{}_c (c_2 + c_4 - g)(c_-^2 c_2 + c_4 c_+^2 - g(c_+^2 + c_+ c_- + c_-^2)) \mathcal{J}^c_{n+m}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

For the specific case of the supergroup model, we find

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^a_n, \mathcal{J}^b_m] &= k\kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} + i f^{ab}{}_c \mathcal{J}^c_{n+m} \\
[\mathcal{J}'^a_n, \mathcal{J}^b_m] &= \frac{(kf^2 - 1)(kf^2 + 1)}{4f^4} \kappa^{ab} n\delta_{m+n,0} - i f^{ab}{}_c \mathcal{J}'^c_{n+m} \\
[\mathcal{J}'^a_n, \mathcal{J}'^b_m] &= 0 \,.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

We identified a Kac-Moody subalgebra $\mathcal{J}$ and an infinite set of modes $\mathcal{J}'$ that commute amongst themselves. The latter modes transform into the identity and themselves under the Kac-Moody algebra.

We also note that we can obtain a second Virasoro algebra by applying the Sugawara construction to the Kac-Moody algebra $\mathcal{J}$. The corresponding energy-momentum tensor generates a Virasoro algebra at central charge *sdim* G. It is not holomorphic. The difference of these energy momentum tensors for the left and right group is proportional to the difference of the holomorphic and anti-holomorphic energy momentum tensors. That indicates the existence of a non-chiral analogue of the Knizhnik-Zamolodchikov equation.

6 Conclusions

In this paper, we have performed a generic analysis of the conditions imposed on local Lorentz covariant and PT invariant current algebras. In particular we allowed for parity-breaking models and found a class of solutions to the conditions.

In the case for which the algebra has vanishing dual Coxeter number, we showed that one can construct an energy momentum tensor in terms of a current component in a way similar to the Sugawara construction. The current component is then a conformal primary and the central charge is the (super)dimension of the group. This gives a constructive proof of conformality of the quantum model.

We moreover computed exact two- and three-point functions for principal chiral models with Wess-Zumino term for supergroups with vanishing dual Coxeter number. Using these exact results, we showed that the current algebra is realized in these models, and we calculated the coefficients in the current algebra. We performed a check on a logarithmic regular term by computing the relevant part of a four-point function. The algebra was independently derived by using the techniques of conformal perturbation theory about the Wess-Zumino-Witten point. We hope the existence of such current algebras will prove useful in furthering the solution of these models [9, 10, 11]. Another avenue to explore is to systematically analyze the exactness of low-order perturbation theory for various current and group valued correlators.

One of the examples to which our discussion applies is the sigma model on the supergroup $PSU(1,1|2)$. This particular supergroup is useful to quantize string theory on $AdS_3 \times S^3$ [12, 6]. To quantize the string in the presence of Ramond-Ramond fluxes, we can, in this instance, use the six-dimensional hybrid formalism with eight [28] or sixteen [25] manifest supercharges. In the first case, the $PSU(1,1|2)$ sigma-model is at the core of the worldsheet theory [12].

It is possible to realize the $AdS_3 \times S^3$ spacetime as the near-horizon limit of a D5-NS5-D1-F1 system. We can then write the parameters of the non-chiral current algebra in terms of the numbers of D5 and NS5 branes [12]. The integer parameter k that multiplies the Wess-Zumino term in the action is equal to the number N_{NS5} of NS5 branes while the parameter $1/f$ is the radius of curvature of spacetime. When the number N_{D5} of D5-branes is equal to zero, the parameters satisfy $kf^2 = 1$ and the non-holomorphic component of the right-invariant current vanishes : we have a chiral current algebra. When we turn on the RR fluxes, we obtain the generic current algebra given in equation (3.26). It is important to further investigate this algebra in the context of string theory on AdS_3. Exploring the integrability of these supergroup models will prove useful in understanding better the properties of the AdS_3/CFT_2 correspondence. The presence of a Kac-Moody algebra at level k over the whole

moduli space of the theory may also help in the construction of the string spectrum in $AdS_3 \times S^3$ with Ramond-Ramond fluxes.

Likewise, another application of our analysis is to coset models G/H where G is a supergroup with zero dual Coxeter number. In [7] it was shown that a number of coset models where H is a maximal regular subalgebra are conformal to two loops. Graded supercosets based on supergroups with vanishing dual Coxeter number are also believed to be conformal [8]. These cosets occur in the worldsheet description of certain string theory backgrounds, for instance, they appear as the central building block of the $AdS_5 \times S^5$ background. Moreover, as symmetric spaces or right coset manifolds, they retain a left group action as a symmetry and we therefore expect that parts of our analysis still apply. It is certainly worth exploring the quantum integrability of these coset models per se, and how it ties in with the conformal current algebra that we have exhibited.

Acknowledgements

We would like to thank Costas Bachas, Zaara Benbadis, Denis Bernard, Christian Hagendorf, Christoph Keller, Andre LeClair, Giuseppe Policastro, Thomas Quella and Walter Troost for discussions.

A Perturbed operator product expansions

We consider the corrections to an OPE induced by an exactly marginal deformation of a conformal field theory. The deformation parameter is denoted by λ. In the deformed theory, we can write the OPE between two operators A and B as:

$$\lim_{z\to w} A(z)B(w) = C(z,w) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n C_n(z-w,w)\,, \tag{A.1}$$

where it is implicit that the dependence on the variables does not have to be holomorphic. We expand the result in a basis of operators evaluated at the point w. The operator $C_n(z-w,w)$ is usually written as a series in powers of $z-w$. It is not obvious that the operators A and B (and therefore C) are well-defined operators in the perturbed conformal field theory, but we will assume that that is the case for the model at hand. Let us see how to compute the operators $C_n(z-w,w)$ at order n. By definition, we have:

$$\lim_{z\to w} \langle A(z)B(w)\phi_1(x_1)...\phi_p(x_p)\rangle_\lambda = \langle \left(\sum_{n\geq 0} \lambda^n C_n(z-w,w)\right) \phi_1(y_1)...\phi_p(y_p)\rangle_\lambda \tag{A.2}$$

for any operators $\phi_1(y_1)...\phi_p(y_p)$. If we want to perform the computation at the non-perturbed point, we write the previous equality as:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to w} \langle A(z)B(w)\phi_1(y_1)...\phi_p(y_p) &\left(\sum_{m\geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} \prod_{i=1}^{m} \int d^2x_i \Phi(x_i)\right)\rangle_0 \\ &= \langle \left(\sum_{n\geq 0} \lambda^n C_n(z-w,w)\right) \phi_1(y_1)...\phi_p(y_p) \left(\sum_{m\geq 0} \frac{\lambda^m}{m!} \prod_{i=1}^{m} \int d^2x_i \Phi(x_i)\right)\rangle_0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

where Φ is the exactly marginal operator we use to deform the theory. We isolate the term proportional to λ^n:

$$\lim_{z\to w}\langle A(z)B(w)\phi_1(y_1)...\phi_p(y_p)\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^2x_i\Phi(x_i)\rangle_0$$
$$=\langle\left(\sum_{l=0}^{n}C_l(z-w,w)\frac{1}{(n-l)!}\prod_{i=1}^{n-l}\int d^2x_i\Phi(x_i)\right)\phi_1(y_1)...\phi_p(y_p)\rangle_0 \quad (A.4)$$

This becomes an operator identity in the non-perturbed theory:

$$\lim_{z\to w}A(z)B(w)\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^2x_i\Phi(x_i)=\sum_{l=0}^{n}C_l(z-w,w)\frac{1}{(n-l)!}\prod_{i=1}^{n-l}\int d^2x_i\Phi(x_i)\,. \quad (A.5)$$

The previous equation defines iteratively the operator C_n which appears in the operator product expansion at order n.

We would like to give a prescription to compute the n-th order term in the OPE, $C_n(z-w,w)$. At zeroth order, the definition is

$$\lim_{z\to w}A(z)B(w)=C_0(z-w,w)\,. \quad (A.6)$$

As expected the zeroth-order OPE is the OPE in the non-deformed model. At order one, we have

$$\lim_{z\to w}A(z)B(w)\int d^2x\Phi(x)=C_0(z-w,w)\int d^2x\Phi(x)+C_1(z-w,w) \quad (A.7)$$

Here is one proposal on how to deal with the left-hand side of this equation. First we let the operator $A(z)$ approach $B(w)$ and $\Phi(x)$ (separately):

$$\lim_{z\to w}A(z)B(w)\int d^2x\Phi(x)=\lim_{z\to w}\left((AB)(z-w,w)\int d^2x\Phi+B(w)\int d^2x(A\Phi)(z-x,x)\right) \quad (A.8)$$

where $(AB)(z-w,w)$ denotes the contraction of $A(z)$ and $B(w)$ (in the unperturbed theory), with the resulting operators evaluated at the point w. It is clear that the first term on the right-hand side is equal to $C_0(z-w,w)\int d^2x\Phi(x)$, so the OPE at first-order is given by the second term:

$$C_1(z-w,w)=\lim_{z\to w}B(w)\int d^2x(A\Phi)(z-x,x)\,. \quad (A.9)$$

At higher order, the same structure appears. We can always recognize in the computation the lower-order contributions, and isolate the highest-order term. We use the definition

$$\lim_{z\to w}A(z)B(w)\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^2x_i\Phi(x_i)=\sum_{l=0}^{n}C_l(z-w,w)\frac{1}{(n-l)!}\prod_{i=1}^{n-l}\int d^2x_i\Phi(x_i)\,. \quad (A.10)$$

To evaluate the left-hand side, we let the operator $A(z)$ approach the other ones. As it approaches $B(w)$, we generate the term with $l=0$ on the right-hand side. As it approaches one of the copies of the marginal operator Φ, we get

$$\lim_{z\to w}B(w)\frac{1}{n!}\int d^2x(A\Phi)(z-x,x)\prod_{i=1}^{n-1}\int d^2x_i\Phi(x_i) \quad (A.11)$$

To carry on, we take the operators $(A\Phi)(z-x,x)$ that was just generated at the point x and let it approach the other operators in the expression. If it approaches $B(w)$, then we generate the term with $l=1$ in the right-hand side of the definition. Otherwise we generate a new expression on which we apply the same procedure.

Finally, we understand how to obtain directly the order-n OPE $C_n(z-w)$: it is the term that we get by first contracting $A(z)$ with all the integrated operators, and then contracting with $B(w)$ at the very end. We will denote it as:

$$C_n(z-w,w)=\left[A(z)\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\int d^2x_i\Phi(x_i)\right]B(w) \tag{A.12}$$

All the operators inside the square brackets have to be contracted, before performing the last contraction with the operator outside the square brackets.

We should stress that the previous procedure is not always well-defined. In the computation described in the bulk of this paper, this prescription leads to an unambiguous result for the poles of the current-current OPEs. However, in a more general context, the integrals appearing in the above calculations need a more careful regularization.

B Detailed operator product expansions

In this appendix we show how to compute OPEs involving the operator $(g\overline{J}g^{-1})$ in the WZW model.

The contact terms

It is natural to postulate contact terms between the left- and right-invariant currents (see e.g. [29]). Indeed, even for a $U(1)$ current algebra, contact terms can be derived from the representation of the current algebra in terms of a free boson and its logarithmic propagator. Since at large level k, the group manifold flattens and is equivalent to a set of free fields, we do expect contact terms to arise. We propose the following contact terms:

$$J^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\sim 2\pi k\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w)+... \tag{B.1}$$

The Maurer-Cartan equation in the quantum theory

In the quantum theory, the composite operator in the Maurer-Cartan equation is ambiguous due to normal ordering. With our choice of normal ordering, it is natural to propose the quantum Maurer-Cartan equation

$$\overline{\partial}J^c+\partial(g\overline{J}g^{-1})^c+\frac{i}{2k}f^c{}_{de}(:J^d(g\overline{J}g^{-1})^e:+:(g\overline{J}g^{-1})^eJ^d:)=0\,. \tag{B.2}$$

One way to check this proposal is to compute the OPE between the current components J^a and the operator on the left hand side of equation (B.2) which is classically zero due to the Maurer-Cartan equation. In the calculation, it is crucial to apply the normal ordering prescription we introduced in section 2. We not only confirm the above proposal for the quantum Maurer-Cartan equation, but also find that we need to fix the OPE between J^a and $(g\overline{J}g^{-1})^b$ to be

$$J^a(z)(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\sim 2\pi\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w)+if^{ab}{}_c\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{z-w}+:J^a(g\overline{J}g^{-1})^b:(w,\overline{w})\,. \tag{B.3}$$

Let us show this calculation in some detail in order to illustrate the techniques involved. Using the holomorphy of the current J and the knowledge of the naive conformal dimensions of the operators, we can make the ansatz

$$J^a(z)(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) = 2\pi k\kappa^{ab}\delta^{(2)}(z-w) + \alpha i f^{abc}\frac{(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{z-w} + :J^a(g\overline{J}g^{-1})^b:(w,\overline{w}) \tag{B.4}$$

With the definition of the normal ordering above, let us compute the operator product expansion between $J^a(z)$ and the Maurer-Cartan equation. We distinguish two terms. The first term is

$$\begin{aligned} &J^a(z)\left(\overline{\partial}J^c(w) + \partial(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})\right) = \\ &\overline{\partial}_w\left(\frac{k\kappa^{ac}}{(z-w)^2} + if^{acd}\frac{J^d(w)}{z-w}\right) + \partial_w\left(2\pi k\kappa^{ac}\delta^{(2)}(z-w) + \alpha i f^{acd}\frac{(g\overline{J}g^{-1})^d(w,\overline{w})}{z-w}\right) + \dots \\ &\qquad = -if^{acd}J^d(w)2\pi\delta^{(2)}(z-w) + \alpha i f^{acd}\frac{(g\overline{J}g^{-1})^d(w,\overline{w})}{(z-w)^2} \\ &\qquad\qquad + if^{acd}\frac{\left(\alpha\,\partial(g\overline{J}g^{-1})^d(w,\overline{w}) + \overline{\partial}J^d(w)\right)}{z-w} + \dots \end{aligned} \tag{B.5}$$

From the last terms we see that we can obtain a pole term proportional to the Maurer-Cartan equation if we put $\alpha = 1$. It can be shown that this is the only consistent possibility, and we will freely put $\alpha = 1$ from now on. The second term with an extra minus sign is given by

$$-\frac{if^c_{de}}{k}J^a(z)\lim_{:x\to w:}\left(J^d(x)(g\overline{J}g^{-1})^e(w,\overline{w}) + (g\overline{J}g^{-1})^e(w,\overline{w})J^d(x)\right). \tag{B.6}$$

where we have used the normal ordering prescription. Let us start with the first of the two terms in (B.6) (suppressing the overall $-\frac{i}{k}f^c_{de}$):

$$\begin{aligned} J^a(z)\lim_{:x\to w:}J^d(x)(g\overline{J}g^{-1})^e(w,\overline{w}) = \lim_{:x\to w:}\Bigg\{&\left[\frac{k\kappa^{ad}}{(z-x)^2} + i\frac{f^{ad}_g J^g(x)}{(z-x)}\right](g\overline{J}g^{-1})^e(w,\overline{w}) \\ &+J^d(x)\left[2\pi k\kappa^{ae}\delta^{(2)}(z-w) + i\alpha\frac{f^{ae}_g(g\overline{J}g^{-1})^g(w,\overline{w})}{(z-w)}\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

We perform successive contractions, and subtract singular terms according to the normal ordering procedure to obtain

$$\begin{aligned} &-2i\pi f^{ca}_d\delta^{(2)}(z-w)J^d(w) - \frac{i(f^{ca}_d\delta^d_h - \frac{\alpha}{k}f^c_{de}f^{ad}_g f^{ge}_h)(g\overline{J}g^{-1})^h(w,\overline{w})}{(z-w)^2} \\ &\qquad + \frac{f^c_{de}(f^{ad}_g :J^g(g\overline{J}g^{-1})^e:(w,\overline{w}) + \alpha f^{ae}_g :J^d(g\overline{J}g^{-1})^g:(w,\overline{w}))}{k(z-w)}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

When $\alpha = 1$ and using the Jacobi identity, we can simplify further:

$$-2\pi i f^{ca}_d\delta^{(2)}(z-w)J^d(w) - i\left(1+\frac{2\hat{h}}{k}\right)\frac{f^{ca}_d(g\overline{J}g^{-1})^d}{(z-w)^2} - \frac{f^{ca}_d f^d_{ge}:J^g(g\overline{J}g^{-1})^e:(w,\overline{w})}{k(z-w)}. \tag{B.9}$$

Analogously, the second part of the second term becomes

$$-2\pi i f_d^{ca}\delta^2(z-w)J^d(w) - i\left(1-\frac{2\hat{h}}{k}\right)\frac{(f_d^{ca}(g\overline{J}g^{-1})^d}{(z-w)^2} + \frac{f_{de}^c}{k(z-w)}(f_g^{ae} : (g\overline{J}g^{-1})^g J^d : (w,\overline{w}) + f_g^{ad} : (g\overline{J}g^{-1})^e J^g : (w,\overline{w}))\,. \quad \text{(B.10)}$$

Combining the two parts of the second term we find

$$2\pi i f_d^{ac}\delta^2(z-w)J^d(w) + \frac{if_d^{ac}(g\overline{J}g^{-1})^d}{(z-w)^2} + \frac{f_d^{ac}f_{eg}^d\big(: (g\overline{J}g^{-1})^g J^e : (w,\overline{w}) + : J^e(g\overline{J}g^{-1})^g : (w,\overline{w})\big)}{2k(z-w)}\,. \quad \text{(B.11)}$$

Comparing with the first term, we see that the contact term as well as the double pole term cancel exactly while the single pole term vanishes using the Maurer-Cartan equation itself, normal ordered as in our proposal. We note that the operator product expansion between J^a and $(g\overline{J}g^{-1})^b$ obtained this way matches the operator product expansion obtained in (3.15) at the Wess-Zumino-Witten point.

We will also need the OPE of $(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})$ with itself at the Wess-Zumino-Witten point:

$$(g\overline{J}g^{-1})^a(z,\overline{z})(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) \sim \frac{k\kappa^{ab}}{(\overline{z}-\overline{w})^2} + \frac{if_c^{ab}(z-w)J^c(w)}{(\overline{z}-\overline{w})^2} - 2\frac{if_c^{ab}(g\overline{J}g^{-1})^c(w,\overline{w})}{\overline{z}-\overline{w}}\,. \quad \text{(B.12)}$$

The coefficients can be argued for by analyzing the contact and most singular terms in the OPE of the current $g\overline{J}g^{-1}$ with the Maurer-Cartan equation.

Operator product expansions of currents with marginal operator

Since the computations are fairly similar, let us consider the more complicated OPE of the current $(g\overline{J}g^{-1})^a(w,\overline{w})$ with the marginal operator Φ. The first part of the computation involves the OPE

$$\begin{aligned}(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) \lim_{:y\to x:} J^c(y)(g\overline{J}g^{-1})_c(x,\overline{x}) \sim \\ \lim_{:y\to x}\left\{\left(2\pi k\delta^{(2)}(w-y) + \frac{if_d^{bc}(g\overline{J}g^{-1})^d(y,\overline{y})}{w-y}\right)(g\overline{J}g^{-1})_c(x,\overline{x})\right. \\ \left. + J^c(y)\left(\frac{k\delta_c^b}{(\overline{w}-\overline{x})^2} + \frac{if_{cd}^b(w-x)J^d(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} - \frac{2if_{cd}^b(g\overline{J}g^{-1})^d(x,\overline{x})}{\overline{w}-\overline{x}}\right)\right\} \\ \sim 2\pi k\delta^{(2)}(w-x)(g\overline{J}g^{-1})^b(x,\overline{x}) + \frac{kJ^b(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} - \frac{2if_{cd}^b}{(\overline{w}-\overline{x})} : J^c(g\overline{J}g^{-1})^d : (x,\overline{x}) \\ + \frac{if_{cd}^b(w-x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} : J^cJ^d : (x) - \frac{if_{cd}^b}{w-x} : (g\overline{J}g^{-1})^c(g\overline{J}g^{-1})^d : (x,\overline{x})\,. \quad \text{(B.13)}\end{aligned}$$

Similarly, exchanging the order of J and $g\overline{J}g^{-1}$, we find an identical OPE to the above one except that the terms in the last line have opposite sign. Combining these two, we therefore

find that

$$(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\Phi(x,\overline{x}) \sim 2\pi k\delta^{(2)}(w-x)(g\overline{J}g^{-1})^b(x,\overline{x}) + \frac{kJ^b(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} - \frac{2if^b_{cd}}{\overline{w}-\overline{x}}(:(g\overline{J}g^{-1})^dJ^c: + :J^c(g\overline{J}g^{-1})^d:)(x,\overline{x})\,. \quad \text{(B.14)}$$

Now, the last term can be rewritten using the Maurer-Cartan identity and we obtain

$$(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\Phi(x,\overline{x}) \sim 2\pi k\delta^{(2)}(w-x)(g\overline{J}g^{-1})^b(x,\overline{x}) + \frac{kJ^b(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} + \frac{2k}{\overline{w}-\overline{x}}(\overline{\partial}J^b + \partial(g\overline{J}g^{-1})^b)(x,\overline{x})\,. \quad \text{(B.15)}$$

Integrating over the location of the marginal operator and using the identities

$$\int d^2x\frac{\overline{\partial}J^b}{\overline{w}-\overline{x}} = -\int d^2x\frac{J^b(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2} \quad \text{(B.16)}$$

$$\int d^2x\frac{\partial(g\overline{J}g^{-1})^b}{\overline{w}-\overline{x}} = 2\pi(g\overline{J}g^{-1})^a(w,\overline{w})\,, \quad \text{(B.17)}$$

we find the contraction

$$(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w})\int d^2x\Phi(x,\overline{x}) = 6\pi k(g\overline{J}g^{-1})^b(w,\overline{w}) - k\int d^2x\frac{J^b(x)}{(\overline{w}-\overline{x})^2}\,. \quad \text{(B.18)}$$

For the OPE of $J^a(w)$ with the marginal operator, it turns out that both orderings lead to the same answer, so we only exhibit the following OPE:

$$\begin{aligned} J^b(w)\lim_{:y\to x:} :J^c(y)(g\overline{J}g^{-1})_c(x,\overline{x}): &\sim \lim_{:y\to x:}\left\{\left(\frac{k\kappa^{bc}}{(w-y)^2} + \frac{if^{bc}_dJ^d(y)}{w-y}\right)(g\overline{J}g^{-1})_c(x,\overline{x}) \right. \\ &\quad \left. + J^c(y)\left(2\pi k\delta^{(2)}(w-x)\delta^b_c + \frac{if^b_{cd}(g\overline{J}g^{-1})^d(x,\overline{x})}{w-y}\right)\right\} \\ &\sim \frac{k(g\overline{J}g^{-1})^b(x,\overline{x})}{(w-y)^2} + 2\pi k\delta^{(2)}(w-x)J^b(x) \\ &\quad + \frac{if^b_{cd}}{w-y}(:J^d(g\overline{J}g^{-1})^c: + :J^c(g\overline{J}g^{-1})^d:)(x,\overline{x}) \\ &\sim 2\pi k\delta^{(2)}(w-x)J^b(x) + \frac{k(g\overline{J}g^{-1})^b(x,\overline{x})}{(w-y)^2}. \end{aligned} \quad \text{(B.19)}$$

C Useful integrals

We tabulate a few useful integrals that have been used throughout the article (see e.g. [29]):

$$\int \frac{d^2x}{(\overline{x}-\overline{w})(x-z)} = -2\pi \log|z-w|^2 \tag{C.1}$$

$$\int \frac{d^2x}{(\overline{x}-\overline{w})^2(x-z)} = 2\pi \frac{1}{\overline{z}-\overline{w}} \tag{C.2}$$

$$\int \frac{d^2x}{(\overline{x}-\overline{w})(x-z)^2} = -2\pi \frac{1}{z-w} \tag{C.3}$$

$$\int \frac{d^2x}{(\overline{x}-\overline{w})^2(x-z)^2} = 4\pi^2 \delta^{(2)}(z-w) \tag{C.4}$$

$$\int \frac{d^2x}{(z-x)^2(w-x)} = -2\pi \frac{\overline{z}-\overline{w}}{(z-w)^2}\,. \tag{C.5}$$

References

[1] G. Parisi, N. Sourlas, "Self avoiding walk and supersymmetry," J. Phys. Lett. **41** (1980) 403.

[2] K. B. Efetov, "Supersymmetry and theory of disordered metals," Adv. Phys. **32** (1983) 53.

[3] S. Sethi, "Supermanifolds, rigid manifolds and mirror symmetry," Nucl. Phys. B **430**, 31 (1994) [arXiv:hep-th/9404186].

[4] M. R. Zirnbauer, "Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition," arXiv:hep-th/9905054.

[5] S. Guruswamy, A. LeClair and A. W. W. Ludwig, "gl(N—N) super-current algebras for disordered Dirac fermions in two dimensions," Nucl. Phys. B **583**, 475 (2000) [arXiv:cond-mat/9909143].

[6] M. Bershadsky, S. Zhukov and A. Vaintrob, "PSL(n—n) sigma model as a conformal field theory," Nucl. Phys. B **559** (1999) 205 [arXiv:hep-th/9902180].

[7] A. Babichenko, "Conformal invariance and quantum integrability of sigma models on symmetric superspaces," Phys. Lett. B **648**, 254 (2007) [arXiv:hep-th/0611214].

[8] D. Kagan and C. A. S. Young, "Conformal Sigma-Models on Supercoset Targets," Nucl. Phys. B **745** (2006) 109 [arXiv:hep-th/0512250].

[9] N. Read and H. Saleur, "Exact spectra of conformal supersymmetric nonlinear sigma models in two dimensions," Nucl. Phys. B **613**, 409 (2001) [arXiv:hep-th/0106124].

[10] G. Gotz, T. Quella and V. Schomerus, "The WZNW model on PSU(1,1;2)," JHEP **0703**, 003 (2007) [arXiv:hep-th/0610070].

[11] T. Quella, V. Schomerus and T. Creutzig, "Boundary Spectra in Superspace Sigma-Models," arXiv:0712.3549 [hep-th].

[12] N. Berkovits, C. Vafa and E. Witten, "Conformal field theory of AdS background with Ramond-Ramond flux," JHEP **9903** (1999) 018 [arXiv:hep-th/9902098].

[13] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity," Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).

[14] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, "Comments on string theory on AdS(3)," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 733 (1998) [arXiv:hep-th/9806194].

[15] D. Kutasov and N. Seiberg, "More comments on string theory on AdS(3)," JHEP **9904** (1999) 008 [arXiv:hep-th/9903219].

[16] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins and J. Tannenhauser, "String theory on AdS(3)," JHEP **9812** (1998) 026 [arXiv:hep-th/9812046].

[17] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, "Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring," Phys. Rev. D **69**, 046002 (2004) [arXiv:hep-th/0305116].

[18] N. Gromov, V. Kazakov and P. Vieira, "Integrability for the Full Spectrum of Planar AdS/CFT," arXiv:0901.3753 [hep-th].

[19] K. G. Wilson, "Nonlagrangian models of current algebra," Phys. Rev. **179** (1969) 1499.

[20] M. Luscher, "Quantum Nonlocal Charges And Absence Of Particle Production In The Two-Dimensional Nonlinear Sigma Model," Nucl. Phys. B **135**, 1 (1978).

[21] D. Bernard, "Hidden Yangians in 2-D massive current algebras," Commun. Math. Phys. **137**, 191 (1991).

[22] D. Bernard, "Quantum Symmetries In 2-D Massive Field Theories," arXiv:hep-th/9109058.

[23] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, "Conformal Field Theory," Springer, 1997.

[24] L. Rozansky and H. Saleur, "Quantum field theory for the multivariable Alexander-Conway polynomial," Nucl. Phys. B **376** (1992) 461.

[25] N. Berkovits, "Quantization of the type II superstring in a curved six-dimensional background," Nucl. Phys. B **565**, 333 (2000) [arXiv:hep-th/9908041].

[26] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, "Type IIB superstring action in AdS(5) x S(5) background," Nucl. Phys. B **533** (1998) 109 [arXiv:hep-th/9805028].

[27] N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov and B. Zwiebach, "Superstring theory on AdS(2) x S(2) as a coset supermanifold," Nucl. Phys. B **567** (2000) 61 [arXiv:hep-th/9907200].

[28] N. Berkovits and C. Vafa, Nucl. Phys. B **433** (1995) 123 [arXiv:hep-th/9407190].

[29] D. Kutasov, "Geometry on the space of conformal field theories and contact terms," Phys. Lett. B **220**, 153 (1989).

Quatrième partie

Conclusion

Chapitre 7

Résultats et perspectives

Dans ce dernier chapitre, nous allons résumer l'ensemble des nouveaux résultats obtenus au cours de cette thèse. Nous discuterons des perspectives dévoilées par ces résultats, et présenterons quelques projets concrets.

7.1 Modèles de Gepner non-compacts et phénoménologie

On a consacré la première moitié de cette thèse à l'étude des modèles de Gepner non-compacts. Les résultats obtenus ont été publiés dans les articles [18] et [49]. Nous avons tout d'abord étudié de façon systématique le spectre de la corde fermée dans ces modèles. En particulier, nous avons utilisé une description en termes de modèles de Landau-Ginzburg $\mathscr{N} = 2$ pour dénombrer efficacement les états de masse nulle, qui correspondent à des modes localisés. Cette étude nous a permis de construire explicitement une infinité de paires miroir de variétés Calabi-Yau non-compactes. La relation précise entre les modèles de Gepner non-compacts et les variétés Calabi-Yau non-compactes a pu être comprise en détails, éclaircissant certaines conjectures présentes dans la littérature.

Dans un deuxième temps, nous avons construit et étudié un état de bord dans la théorie de Liouville $\mathscr{N} = 2$. Cet état de bord est obtenu à partir d'une représentation continue complémentaire de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$. Nous avons démontré que pour certaines valeurs des paramètres le définissant, cet état de bord contient dans son spectre des excitations localisées. Nous avons ensuite construit explicitement une large classe de D-branes supersymétriques dans les modèles de Gepner non-compacts. Cela nous a permis d'associer une image à certaines propriétés abstraites de la théorie conforme. En particulier, des relations d'addition entre caractères associés à des représentations différentes de l'algèbre superconforme $\mathscr{N} = 2$ s'interprètent comme des phénomènes de collisions entre D-branes et branes NS5. Au cours de ces événements, les D-branes sont découpées en plusieurs morceaux. Nous avons également calculé le spectre des théories de jauge vivant sur certaines D-branes compactes dans les modèles de Gepner non-compacts. Cela nous a permis d'établir que ces théories de jauge ne sont pas équivalentes à celles décrites par les configurations géométriques de Hanany-Witten. En fait, les modèles de Gepner non-compacts permettent d'immerger de nouvelles théories de jauge dans la théorie des cordes.

Suite à ces résultats, plusieurs projets sont envisageables. Le premier, dans l'ère du temps, serait de chercher à construire explicitement des configurations de D-branes réalisant l'extension supersymétrique minimale du Modèle Standard. Dans le même esprit, une tâche ambitieuse mais

excitante est la construction de solutions de la théorie des cordes dans lesquelles on trouve des gravitons localisés grâce à un gradient du dilaton. Un espoir est que la réaction de certaines D-branes dans des modèles de Gepner non-compacts soit suffisante pour autoriser l'existence de gravitons localisés. En raison de notre connaissance encore lacunaire de la théorie des cordes en présence de champs Ramond-Ramond, l'étude de cette question semble pour l'instant nécessiter une approximation de supergravité délicate à justifier. Cette question mérite cependant de l'attention, car la compréhension de la réaction des D-branes est également une étape indispensable dans l'objectif d'utiliser ces modèles pour une description holographique de théories de jauge.

Ces ambitions phénoménologiques nécessitent également une meilleure compréhension du superpotentiel des théories de jauge réalisées dans les modèles de Gepner non-compact. On peut déduire ce superpotentiel du calcul de fonctions de corrélations dans la théorie conforme. La description de la théorie de jauge en termes d'une théorie conforme bidimensionnelle peut également permettre de généraliser les résultats de [69] concernant la dualité de Seiberg. En outre, il est probable que ces théories de jauge possèdent un comportement non-commutatif, en raison du champ B que créent les branes NS5. Pour mieux comprendre cet aspect, les méthodes utilisées dans [108] peuvent sans doute se généraliser au cas des modèles de Gepner non-compacts.

En conclusion, l'étude des propriétés des théories de jauge réalisées dans les modèles de Gepner non-compacts est une tâche intéressante. Le langage des théories conformes bidimensionnelles fournit une description microscopique exacte de ces théories de jauge, et offre un nouveau point de vue pour comprendre leurs propriétés. Le potentiel phénoménologique de ces modèles est également prometteur.

7.2 Dualité holographique et algèbres de courants

La seconde partie de cette thèse considère le problème de la quantification de la corde en présence de flux Ramond-Ramond. Dans une première publication, nous avons généralisé la procédure de Buscher pour obtenir les règles de T-dualité à partir du formalisme des spineurs purs. Cela a permis de démontrer la validité de la T-dualité en présence de flux Ramond-Ramond, à tout ordre en α'. Ce travail s'est également avéré être une étape utile dans la compréhension de la symétrie superconforme duale de la théorie Super-Yang-Mills $N = 4$.

La seconde publication concerne l'étude des modèles sigma sur des variétés de supergroupes. Ces modèles sont pertinents pour quantifier la corde dans divers espace-temps Anti-de Sitter avec flux Ramond-Ramond. Nous avons construit l'algèbre quantique des courants associés aux symétries du supergroupe. Nous avons montré que ces courants réalisent la construction de Sugawara. Enfin, nous avons prouvé l'existence d'une algèbre de Kac-Moody, dont les générateurs sont les modes de la composante temporelle du courant sur le cylindre.

Ces résultats devraient nous permettre d'améliorer notre compréhension de la théorie des cordes sur les espaces-temps Anti-de Sitter avec flux Ramond-Ramond. Le cas de l'espace-temps AdS_3 est attrayant en raison de la dimension infinie du groupe conforme bidimensionnel. La construction des générateurs de Virasoro dans la théorie conforme duale semble à portée de main, généralisant les résultats obtenus dans [101] [102] [100]. La découverte d'une algèbre de Kac-Moody en tout point de l'espace des modules peut se révéler précieuse dans l'optique de comprendre le spectre de la théorie des cordes sur l'espace-temps AdS_3 avec flux Ramond-Ramond, en s'inspirant de l'analyse de [99]. Enfin, il existe une combinaison de T-dualités bosoniques et fermioniques qui laisse invariant l'espace-temps AdS_3 avec flux Ramond-Ramond [109]. Cela

suggère l'existence d'une symétrie superconforme duale dans la théorie vivant sur le bord de l'espace-temp AdS_3, qu'il serait intéressant de comprendre.

Un autre projet attractif est le calcul de l'algèbre des courants dans les modèles sigma sur des quotients de supergroupes. De tels modèles permettent de décrire la théorie des cordes sur les espaces-temps AdS_2, AdS_4 et AdS_5 avec flux Ramond-Ramond. La connaissance de l'algèbre des courants de ces modèles permettrait sans doute de progresser dans la compréhension de la correspondance AdS/CFT à partir de la feuille d'univers. Dans l'espace-temps $AdS_5 \times S^5$, on sait par exemple que l'algèbre des courants sur la feuille d'univers est liée à l'intégrabilité de la théorie [110].

Enfin, il est possible que certains modèles sigma jaugés sur des variétés de supergroupes correspondent à des modèles de Gepner non-compacts auxquels on aurait ajouté des flux Ramond-Ramond. Par exemple, le modèle de Gepner non-compact basé sur les modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten jaugés $SU(1,1)/U(1) \times SU(2)/U(1)$ est peut-être lié au modèle sigma jaugé sur le superquotient $PSU(1,1|2)/(U(1) \times U(1))$. Cette perspective ouvre un espoir pour comprendre la réaction des D-branes sur les modèles de Gepner non-compacts.

Bibliographie

[1] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], Astron. J. **116** (1998) 1009 [arXiv :astro-ph/9805201].

[2] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. **517** (1999) 565 [arXiv :astro-ph/9812133].

[3] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **148** (2003) 175 [arXiv :astro-ph/0302209].

[4] B. Zwiebach, "A first course in string theory," *Cambridge, UK : Univ. Pr. (2004) 558 p*

[5] E. Kiritsis, "String theory in a nutshell," *Princeton, USA : Univ. Pr. (2007) 588 p*

[6] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1 : An introduction to the bosonic string," *Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 402 p*

[7] J. Polchinski, "String theory. Vol. 2 : Superstring theory and beyond," *Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 531 p*

[8] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1 : introduction," *Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*

[9] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 2 : Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology," *Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*

[10] C. G. Callan, E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan, Nucl. Phys. B **262** (1985) 593.

[11] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, "Conformal Field Theory," Springer.

[12] W. Lerche, C. Vafa and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **324** (1989) 427.

[13] T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan and E. J. Martinec, Nucl. Phys. B **299** (1988) 613.

[14] H. Sugawara, Phys. Rev. **170** (1968) 1659.

[15] P. Goddard, A. Kent and D. I. Olive, Phys. Lett. B **152** (1985) 88.

[16] Y. Kazama and H. Suzuki, Nucl. Phys. B **321** (1989) 232.

[17] K. Hori and A. Kapustin, JHEP **0108** (2001) 045 [arXiv :hep-th/0104202].

[18] S. K. Ashok, R. Benichou and J. Troost, JHEP **0801** (2008) 050 [arXiv :0710.1990 [hep-th]].

[19] B. R. Greene, arXiv :hep-th/9702155.

[20] D. Gepner and Z. a. Qiu, Nucl. Phys. B **285** (1987) 423.

[21] D. Gepner, Nucl. Phys. B **296** (1988) 757.

[22] D. Gepner, Phys. Lett. B **199** (1987) 380.

[23] D. Gepner, "Lectures On N=2 String Theory," Lectures at Spring School on Superstrings, Trieste, Italy, Apr 3-14, 1989.

[24] T. Hubsch, *Singapore, Singapore : World Scientific (1992) 362 p*

[25] M. Grana, Phys. Rept. **423** (2006) 91 [arXiv :hep-th/0509003].

[26] E. Witten, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 4783 [arXiv :hep-th/9304026].

[27] B. R. Greene, C. Vafa and N. P. Warner, Nucl. Phys. B **324** (1989) 371.

[28] E. Witten, Nucl. Phys. B **403** (1993) 159 [arXiv :hep-th/9301042].

[29] E. Witten, Nucl. Phys. B **188** (1981) 513.

[30] B. R. Greene and M. R. Plesser, Nucl. Phys. B **338**, 15 (1990).

[31] L. J. Dixon, M. E. Peskin and J. D. Lykken, Nucl. Phys. B **325** (1989) 329.

[32] D. Israel, C. Kounnas, A. Pakman and J. Troost, JHEP **0406** (2004) 033 [arXiv :hep-th/0403237].

[33] R. Dijkgraaf, H. L. Verlinde and E. P. Verlinde, Nucl. Phys. B **371** (1992) 269.

[34] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, JHEP **0204** (2002) 014 [arXiv :hep-th/0202129].

[35] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. B **463** (1996) 55 [arXiv :hep-th/9511164].

[36] K. Hori and C. Vafa, arXiv :hep-th/0002222.

[37] K. Hori and A. Kapustin, JHEP **0211**, 038 (2002) [arXiv :hep-th/0203147].

[38] C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A **4**, 1615 (1989).

[39] K. A. Intriligator and C. Vafa, Nucl. Phys. B **339** (1990) 95.

[40] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv :hep-th/9906064].

[41] K. Sfetsos, JHEP **9901** (1999) 015 [arXiv :hep-th/9811167].

[42] S. Murthy, JHEP **0610** (2006) 037 [arXiv :hep-th/0603121].

[43] S. Mizoguchi, JHEP **0811** (2008) 022 [arXiv :0808.2857 [hep-th]].

[44] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0501** (2005) 027 [arXiv :hep-th/0411041].

[45] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0405** (2004) 014 [arXiv :hep-th/0403193].

[46] P. Candelas and X. C. de la Ossa, Nucl. Phys. B **342** (1990) 246.

[47] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde, J. M. Maldacena, L. P. McAllister and S. P. Trivedi, JCAP **0310** (2003) 013 [arXiv :hep-th/0308055].

[48] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, JHEP **0008** (2000) 052 [arXiv :hep-th/0007191].

[49] R. Benichou and J. Troost, JHEP **0807** (2008) 125 [arXiv :0805.4766 [hep-th]].

[50] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [arXiv :hep-th/9510017].

[51] E. Witten, Nucl. Phys. B **443** (1995) 85 [arXiv :hep-th/9503124].

[52] V. Schomerus, Class. Quant. Grav. **19**, 5781 (2002) [arXiv :hep-th/0209241].

[53] P. Di Vecchia and A. Liccardo, NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **556**, 1 (2000) [arXiv :hep-th/9912161].

[54] E. P. Verlinde, Nucl. Phys. B **300** (1988) 360.

[55] N. Ishibashi, Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 251.

[56] J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **324** (1989) 581.

[57] J. M. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0107** (2001) 046 [arXiv :hep-th/0105038].

[58] A. Recknagel and V. Schomerus, Nucl. Phys. B **531** (1998) 185 [arXiv :hep-th/9712186].

[59] I. Brunner and M. R. Gaberdiel, JHEP **0507** (2005) 012 [arXiv :hep-th/0503207].

[60] C. Jego and J. Troost, Phys. Rev. D **74** (2006) 106002 [arXiv :hep-th/0601085].

[61] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0401** (2004) 025 [arXiv :hep-th/0311141].

[62] D. Israel, A. Pakman and J. Troost, Nucl. Phys. B **710** (2005) 529 [arXiv :hep-th/0405259].

[63] M. Cvetic, G. Shiu and A. M. Uranga, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 201801 [arXiv :hep-th/0107143].

[64] A. Hanany and E. Witten, Nucl. Phys. B **492** (1997) 152 [arXiv :hep-th/9611230].

[65] A. Giveon and D. Kutasov, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) 983 [arXiv :hep-th/9802067].

[66] S. Elitzur, A. Giveon and D. Kutasov, Phys. Lett. B **400** (1997) 269 [arXiv :hep-th/9702014].

[67] N. Seiberg, Nucl. Phys. B **435** (1995) 129 [arXiv :hep-th/9411149].

[68] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. B **426** (1994) 19 [Erratum-ibid. B **430** (1994) 485] [arXiv :hep-th/9407087].

[69] S. Murthy and J. Troost, JHEP **0610** (2006) 019 [arXiv :hep-th/0606203].

[70] S. K. Ashok, S. Murthy and J. Troost, Nucl. Phys. B **749** (2006) 172 [arXiv :hep-th/0504079].

[71] J. Teschner, arXiv :hep-th/0009138.

[72] P. Fayet, Nucl. Phys. B **149** (1979) 137.

[73] R. Benichou, G. Policastro and J. Troost, Phys. Lett. B **661** (2008) 192 [arXiv :0801.1785 [hep-th]].

[74] D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **271** (1986) 93.

[75] N. Berkovits, JHEP **0004** (2000) 018 [arXiv :hep-th/0001035].

[76] N. Berkovits, arXiv :hep-th/0209059.

[77] N. Berkovits, JHEP **0009** (2000) 046 [arXiv :hep-th/0006003].

[78] N. Berkovits and P. S. Howe, Nucl. Phys. B **635** (2002) 75 [arXiv :hep-th/0112160].

[79] T. H. Buscher, Phys. Lett. B **201** (1988) 466.

[80] S. F. Hassan, Nucl. Phys. B **568** (2000) 145 [arXiv :hep-th/9907152].

[81] L. F. Alday and J. M. Maldacena, JHEP **0706** (2007) 064 [arXiv :0705.0303 [hep-th]].

[82] J. M. Drummond, G. P. Korchemsky and E. Sokatchev, Nucl. Phys. B **795** (2008) 385 [arXiv :0707.0243 [hep-th]].

[83] N. Berkovits and J. Maldacena, JHEP **0809** (2008) 062 [arXiv :0807.3196 [hep-th]].

[84] S. K. Ashok, R. Benichou and J. Troost, arXiv :0903.4277 [hep-th].

[85] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv :hep-th/9711200].

[86] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199 [Erratum-ibid. **46** (1976) 206].

[87] G. 't Hooft, arXiv :gr-qc/9310026.

[88] L. Susskind, J. Math. Phys. **36** (1995) 6377 [arXiv :hep-th/9409089].

[89] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379** (1996) 99 [arXiv :hep-th/9601029].

[90] J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **270** (1986) 186.

[91] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv :hep-th/9802150].

[92] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv :hep-th/9802109].

[93] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 081601 [arXiv :hep-th/0104066].

[94] A. Strominger, JHEP **9802** (1998) 009 [arXiv :hep-th/9712251].

[95] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849 [arXiv :hep-th/9204099].

[96] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48** (1993) 1506 [arXiv :gr-qc/9302012].

[97] J. D. Brown and M. Henneaux, Commun. Math. Phys. **104** (1986) 207.

[98] P. M. S. Petropoulos, Phys. Lett. B **236** (1990) 151.

[99] J. M. Maldacena and H. Ooguri, J. Math. Phys. **42** (2001) 2929 [arXiv :hep-th/0001053].

[100] D. Kutasov and N. Seiberg, JHEP **9904** (1999) 008 [arXiv :hep-th/9903219].

[101] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 733 [arXiv :hep-th/9806194].

[102] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins and J. Tannenhauser, JHEP **9812** (1998) 026 [arXiv :hep-th/9812046].

[103] N. Berkovits and C. Vafa, Nucl. Phys. B **433** (1995) 123 [arXiv :hep-th/9407190].

[104] N. Berkovits, Nucl. Phys. B **565** (2000) 333 [arXiv :hep-th/9908041].

[105] N. Berkovits, C. Vafa and E. Witten, JHEP **9903** (1999) 018 [arXiv :hep-th/9902098].

[106] M. Bershadsky, S. Zhukov and A. Vaintrob, Nucl. Phys. B **559** (1999) 205 [arXiv :hep-th/9902180].

[107] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **247** (1984) 83.

[108] A. Y. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, JHEP **0005** (2000) 010 [arXiv :hep-th/0003187].

[109] I. Adam, A. Dekel and Y. Oz, arXiv :0902.3805 [hep-th].

[110] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Phys. Rev. D **69** (2004) 046002 [arXiv :hep-th/0305116].