Structures algébriques en logique et concurrence

Luigi Santocanale

To cite this version:

Luigi Santocanale. Structures algébriques en logique et concurrence. Calcul parallèle, distribué et partagé [cs.DC]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. tel-00369583

HAL Id: tel-00369583

https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00369583

Submitted on 20 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Structures algébriques et d'ordre en logique et concurrence

Habilitation à Diriger les Recherches

Luigi Santocanale
Laboratoire d'Informatique Fondamentale
Université de Provence

Composition du Jury

M. Maurice Pouzet (rapporteur), Professeur, Lyon et Calgary,

M. Igor Walukiewicz (rapporteur), Directeur de Recherches, Bordeaux,

M. André Arnold, Professeur, Bordeaux,

M. Yde Venema, Professeur, Amsterdam,

M. Friedrich Wehrung, Directeur de Recherches, Caen,

M. Yves Lafont, Professeur, Marseille,

M. Denis Lugiez (rapporteur), Professeur, Marseille,

M. Rémi Morin, Professeur, Marseille.

Résumé. *Dans cet ouvrage nous allons résumer nos activités de recherche depuis l'obtention du titre de docteur à l'Université du Québec à Montréal. Ces recherches ont eu lieu auprès de et ont été possibles grâce à de nombreuses institutions que nous remercions : le BRICS à l'Université de Aarhus, le PIMS et le Département d'Informatique de l'Université de Calgary, le LaBRI de Bordeaux et, enfin, le Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille et l'Université de Provence.*

Nous souhaitons illustrer comment la notion de structure, algébrique et d'ordre, peut être un guide fructueux dans l'étude de sujets importants de l'informatique tels que les processus concurrents et les logiques modales et temporales pour la vérification des systèmes informatiques.

Abstract. *In this work we shall synthesize the research activity we have accomplished since we received the PhD title at the University of Québec in Montréal. These researches have been developed at and made possible through several research institutions that we would like to thank : the BRICS at Aarhus University, the PIMS and the Department of Computer Science of Calgary University, the LaBRI at Bordeaux, and finally the Laboratoire d'Informatique Fondamentale in Marseilles and the University of Provence.*

We aim at showing how the notion of algebraic and order structure can be a fruitful guide in the study of relevant subjects of computer science, such as concurrent processes and the modal and temporal logics that are of use in verification of computer systems.

Table des matières

Chapitre 0

Avant-propos

Dans ce chapitre nous allons rappeler brièvement le sujet de thèse de notre doctorat [74] ; nous exposerons ensuite les thèmes de recherche que nous avons abordés après l'obtention du titre de docteur.

Thèse de doctorat. Il s'agit en [74] d'étudier la théorie des μ-treillis, c-à-d. la théorie obtenue de la théorie des treillis par l'ajout des opérateurs pour les plus petits et plus grands points fixes. C'est une théorie de Horn, car ses axiomes comprennent des équations – celles des treillis – et des implications d'équations – qui axiomatisent les points fixes, il s'agit des règles induction de Park [40]. Étant donnée la nature de cette théorie, les objets libres existent dans la classe de ses modèles. Parce que plusieurs propriétés de la théorie se réduisent à des propriétés des objets libre, nous avons étudié ces derniers. Les résultats majeurs obtenus et présentés dans l'article [79] sont la décidabilité du problème du mot et la complétude de la théorie par rapport à la sémantique naturelle des treillis complets.

La théorie des μ-treillis peut être vue comme un μ-calcul tel que défini en [4]. Sa présentation, inspirée de la combinatoire des jeux, a conduit André Arnold à baptiser ce calcul « le μ-calcul des jeux de parité ». L'interprétation canonique de ce μ-calcul porte sur la classe des treillis complets.

Deux thèmes majeurs de recherche émergent de notre thèse de doctorat, d'abord l'étude des *points fixes extrêmes des fonctions monotones* (ou croissantes), puis les *treillis*. Ils seront approfondis dans la suite des nos travaux.

Les points fixes extrêmes des fonctions monotones. Pour comprendre l'intérêt de tels objets, rappelons comment ils interviennent en vérification et en sémantique.

La plus-part des logiques conçues pour la vérification automatique des systèmes informatiques – comme par exemple **PDL**, **CTL**, **CTL*** et le μ-calcul propositionnel modal – sont des extensions de la logique propositionnelle multimodale **K**, cette dernière étant aussi connue sous le nom de logique de Hennessy et Milner. Ces extensions sont caractérisées par l'ajout, implicite ou explicite, de plus petits ou plus grands points fixes des certaines formules. L'objectif ainsi atteint est celui d'étendre la puissance expressive de la logique multimodale **K**. Cette logique ne permet pas d'exprimer des propriétés fort intéressantes pour la théorie du calcul – comme l'existence d'un bloquage, la sûreté et la vivacité. Par contre ces propriétés deviennent exprimables dans les extensions de la logique **K** par points fixes.

Du côté de la sémantique, la notion de point fixe extrême possède une généralisation naturelle, celle d'algèbre initiale et de coalgèbre finale d'un foncteur. Nous utilisons ici le langage de la théorie des catégories, qui nous semble plus approprié dans un cadre sémantique. Pour faciliter la lecture, rappelons d'ailleurs que dans le cadre plus syntaxique de la théorie des types on appelle types inductifs les algèbres initiales des foncteurs, et types coinductifs les coalgèbres finales. Or, il est bien connu que l'étude des types inductifs est un et un seul avec l'étude de la récursion primitive et structurelle. D'autre part, récemment l'informatique théorique s'est fortement intéressée aux notions duales, les types coinductifs et la corécursion. Les types coinductifs sont ceux qui permettent de décrire les ensembles d'objets infinis, par exemple les flots infinis et les arbres infinis. Résultat de cet intérêt est une élégante théorie capable de donner une formalisation des concepts tels que système, comportement, et bisimulation.

Les treillis. Rappelons qu'un treillis est un ensemble ordonné tel que tout sous-ensemble fini possède une plus grande borne inférieure et une plus petite borne supérieure. En introduisant les opérations binaires $\wedge$ – la plus grande borne inférieure de deux éléments – et $\vee$ – la plus petite borne supérieure de deux éléments – il est possible d'organiser les treillis en tant que classe de modèles d'un système algébrique. Le lecteur reconnaîtra dans les treillis un système algébrique capable de modéliser la conjonction et la disjonction de la logique. Pour nous il s'agit de bien plus qu'une similarité ou proximité, ce système algébrique étant à notre avis une *condition nécessaire* de toute étude logique.

La précédente est une assertion qui, possiblement, a plus un caractère philosophique que scientifique. D'ailleurs, elle a l'avantage de proposer un point de vue différent, alternatif et complémentaire à d'autres approches de la logique qui sont plus connues. Nous pensons d'abord à l'approche de la logique qui thématise comme fondamentale la procédure d'élimination des coupures [46]. Nous pensons aussi à l'approche qui pose comme point de départ de la logique les relations de conséquence entre propositions [42].

Reconnaître un rôle principal aux treillis en logique comporte à la fois une reconnaissance de l'intérêt de la théorie des ensembles ordonnés pour la logique. Notre travail témoigne de cet intérêt, par exemple dans notre réflexion autour du théorème de complétude du μ-calcul – voir [89] et le Chapitre 4. Dans notre parcours de recherche, la lecture du célèbre article [94] nous a amené à découvrir l'article jumel et presque méconnu [35]. C'est ce dernier travail qui nous a dirigé à comprendre le rôle fondamental, dans le cadre d'une preuve de complétude, de la relation (4.3) qui exprime le plus petit point fixe comme le supremum de ses approximations.

Cet espace réservé aux treillis en logique est aussi témoin de l'intérêt des méthodes algébriques en logique. Nous ne sommes pas satisfaits du simple fait qu'une logique puisse avoir une sémantique algébrique et réputons que l'existence de cette sémantique doit être un point de départ et non d'arrivée. Concrètement, la sémantique algébrique d'une logique doit être capable d'exploiter des techniques algébriques – pouvant être nouvelles ou empruntés d'autres mathématiques plus proche de l'algèbre – pour obtenir des résultats d'intérêt propre à la logique. C'est dans cette direction que nous avons trouvé intéressant de travailler. Nous ferons alors l'exemple de la Proposition 4.1.1 qui apporte au μ-calcul propositionnel modale la précieuse propriété de la sous-formule et dont la preuve repose sur la notion algébrique d'objet projectif.

Chapitre 1

Postdoc, en quête d'un poste

L'objectif de ce chapitre est de résumer les thèmes de recherche poursuivis en suite à l'obtention du titre de docteur et avant la nomination en tant que Maître de Conférences à l'Université de Provence.

1.1 Logique et points fixes

Les hiérarchies. Le premier résultat que nous avons obtenu après l'obtention du titre de docteur porte sur la hiérarchie d'alternance des points fixes dans la théorie des μ-treillis (ou bien dans le μ-calcul des jeux de parité) : dans [76] on démontre qu'elle est infinie.

Rappelons d'abord le problème dans sa généralité. Dans les μ-calculs les opérateurs μ et ν pour les plus petits et plus grands points fixes se comportent de façon analogue aux quantificateurs de la logique du premier ordre. Il est possible alors de définir des classes de formules $\Sigma_n, \Pi_n, Comp(\Sigma_n, \Pi_n)$, $n \geq 0$, qui mesurent l'entrelacement (ou alternance) entre ces quantificateurs. La classe $\Sigma_0 = \Pi_0$ est la classe des formules sans point fixes, $Comp(\Sigma_n, \Pi_n)$ est la clôture de $\Sigma_n \cup \Pi_n$ sous la substitution, Σ_{n+1} (resp. Π_{n+1}) est la clôture de $Comp(\Sigma_n, \Pi_n)$ sous l'opérateur μ de plus petit point fixe (l'opérateur ν de plus grand point fixe). Ces classes formelles sont organisées selon les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \Sigma_1 & & & & \Sigma_2 & & \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & \\
\Sigma_0 = \Pi_0 & & & & Comp(\Sigma_1, \Pi_1) & & & & Comp(\Sigma_2, \Pi_2) \quad \cdots \\
 & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & & \subseteq & \\
 & & \Pi_1 & & & & \Pi_2 & &
\end{array}$$

On se demande alors si, par rapport à un domaine sémantique spécifié, les quantificateurs μ et ν sont utiles et jusqu'à quel point on peut les éliminer. Plus précisément, on se demande s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $n \geq C$ et toute formule $\phi \in \Sigma_n \cup \Pi_n$, ϕ soit équivalente à une formule ϕ' dans la classe $\Sigma_C \cup \Pi_C$. Un des premiers résultats apparus dans la littérature [54] statue que les opérateurs pour les points fixes peuvent être complètement éliminés si on se restreint à la sémantique des treillis distributifs : dans ce cas, toute formule est équivalente à une formule de la classe Σ_0, c-à-d. ne contenant pas des points fixes. Aussi, toute formule du μ-calcul propositionnel modal est équivalente à une formule de la classe $\Sigma_2 \cup \Pi_2$ si on se restreint à considérer les modèles de Kripke dont la seule relation de transition est fonctionnelle [4, §5] ou transitive [62]. Un important résultat dans l'historique du μ-calcul propositionnel modal fut obtenu par Bradfield [26] et Lenzi [61] qui montrèrent que la hiérarchie d'alternance du μ-calcul modal est infinie si l'on considère tous les modèles de Kripke – c-à-d., cette constante C n'existe pas.

Nous avons présenté en [76] un résultat analogue pour le μ-calcul des jeux de parité étudié dans notre thèse de doctorat. Ce résultat peut se résumer en disant qu'une telle constante C n'existe pas si on considère les μ-formules construites des opérations $\wedge, \vee, \mu, \nu$ ainsi que leur interprétation naturelle dans la classe de tous les treillis complets.

Ce résultat, obtenu pendant notre séjour au Danemark, nous a mis en correspondance avec M. Arnold, auteur d'une importante monographie sur le μ-calcul [4] et auteur lui-même d'une preuve assez subtile et originale du théorème de Bradfield et Lenzi [2]. Deux ans plus tard nous avons mis en place avec M. Arnold une collaboration vouée à étudier la structure de la hiérarchie d'alternance dans le μ-calcul des jeux de parité et dans le μ-calcul propositionnel modal [5, 6]. L'objet étudié dans ce travail sont les classes diagonales ou ambiguës Δ_n des formules qui sont équivalentes à la fois à une formule dans Σ_{n+1} et à une autre dans Π_{n+1}. Nous avons posé la question de l'égalité entre Δ_n et $Comp(\Sigma_n, \Pi_n)$. La réponse diverge pour les deux μ-calculs pris en considération. Elle est affirmative pour le μ-calcul des jeux de parité : si une formule ϕ est équivalente à une formule dans Σ_{n+1} et à une autre dans Π_{n+1}, alors elle est équivalente à une formule dans $Comp(\Sigma_n, \Pi_n)$. Cette propriété s'avère par contre fausse pour le μ-calcul propositionnel modal.

Algèbre modale et algèbre des points fixes. La logique propositionnelle modale [23] se trouve à l'intersection entre logique strictement dite et algèbre. Problèmes et outils classiques de la logique possèdent dans ce contexte une traduction plus ou moins immédiate dans le langage de l'algèbre. Cette traduction peut d'ailleurs être assez utile dans le sens inverse et apporter des solutions logiques à des problèmes algébriques.

Le μ-calcul modal propositionnel étant une extension de la logique modale **K**, nous avons posé la question de savoir si on peut développer un point de vue, des considérations, et des outils algébriques sur le μ-calcul. Cette recherche d'une approche algébrique au μ-calcul a été en même temps motivée par le constat que d'autres travaux poursuivaient un même effort – avec succès mais aussi en présentant des limites. Nous pensons par exemple à l'interprétation de Pratt [72] de la méthode des filtrations pour le **PDL**.

Notre travail a été mis en route par l'observation que plusieurs systèmes algébriques et logiques, qui incluent des plus petits points fixes, possèdent une axiomatisation par équations qui remplace l'axiomatisation usuelle par implications d'équations [66, 91, 71]. Nous avons alors proposé en [75, 82] une méthode générale pour axiomatiser par équations le plus petit point fixe d'une fonction. Cette méthode – dont l'application est contrainte par l'existence d'un couple de la forme $(\otimes, \multimap)$ satisfaisant la relation d'adjonction comme dans la logique linéaire – peut être considéré comme une généralisation de l'axiomatisation de Pratt de la logique des actions ; elle montre qu'on peut donner au μ-calcul propositionnel modal une axiomatisation ne contenant pas des règles de déduction autres que celles de modus ponens et la nécessitation.

Cette remarque possède comme conséquence que les modèles algébriques du μ-calcul propositionnel modal forment une variété d'algèbres, ce qui est une classe de modèles avec des très bonnes propriétés. En particulier, dans ce type de modèles, la notion de congruence y est bien définie et valable à étudier.

Nous avons par conséquent étudié les congruences du μ-calcul propositionnel modal [78] en arrivant à réinterpréter le théorème de déduction du μ-calcul en terme de la propriété des congruences principales définissables par équations (EDPC) de l'algèbre universelle [24]. Ce parcours nous a exposé aux problématiques décrites dans la monographie [45] reliant les modèle-complétions à la structure des congruences. En particulier, les axiomes proposée dans cette monographie, qui assurent l'existence d'une théorie qui soit modèle-complétion de la théorie originaire, sont satisfaits par les congruences du μ-calcul. Bien que celui-ci soit un chemin qui reste à explorer presque en entier, des échanges d'idées avec un des auteurs de cette monographie a abouti à une collaboration [44] qui porte d'ailleurs sur un un sujet connexe au μ-calcul seulement de loin – il s'agit du problème de la décidabilité conjointe de deux théories séparément décidables.

1.2 Algèbres initiales et coalgèbres finales des foncteurs

Un problème implicite et qui reste ouvert dans notre thèse [74] est de relever les résultats sur les μ-treillis libres aux catégories. Il ne s'agit pas d'une volonté généralisatrice abstraite : la nécessité de parcourir ce chemin s'impose du départ de notre recherche qui est une contribution à une théorie générale de la communication, théorie qui repose sur la notion de catégorie bicomplète libre [53, 51, 52]. Rappelons alors la présentation des μ-treillis libres par les jeux et les stratégies gagnantes. Pour G et H deux termes de la théorie de μ-treillis, témoin que la relation $G \leq H$ est vraie dans tout modèle est une stratégie gagnante pour un des deux joueurs dans un jeu $\langle G, H\rangle$; on appelle ce dernier « jeu de communication » et une stratégie gagnante « stratégie de communication ». La théorie de la communication ne peut pas se contenter de connaître de l'existence d'une stratégie de communication dans le jeu $\langle G, H\rangle$, l'objectif étant de classifier les différentes stratégies. Le contexte est très proche et semblable de la sémantique des jeux pour les langages de programmation où l'impératif c'est de distinguer les programmes différents. Passer du point de vue des ensembles ordonnés au point de vue des catégories est une façon possible pour répondre à cet impératif.

Rappelons donc ce passage des ensembles ordonnés aux catégories[1] qui se fait en admettant l'existence de témoins d'une relation $x \leq y$; un témoin est une arête de la forme $g : x \longrightarrow y$. Après ce passage, les opérations $\wedge$ et $\vee$ des treillis prennent la forme de produit $\times$ et coproduit $+$. Nous avons déjà mentionné dans l'avant-propos que la notion de plus petit point fixe d'une fonction monotone se généralise à celle d'algèbre initiale d'un foncteur ;

[1]Formellement, ce passage revient à considérer un ensemble ordonné comme une catégorie ayante au plus une arête entre deux objets.

étudions ce point de plus près. Un point préfixe d'une fonction monotone $f : C \longrightarrow C$ est un élément $c \in C$ tel que $f(c) \leq c$. En passant aux catégories, une algèbre d'un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un couple (c, ξ) où c est un objet de $\mathcal{C}$ et ξ est une arête de $\mathcal{C}$ de la forme $\xi : T(c) \longrightarrow c$. Comme l'ensemble des point préfixes de f est ordonné et on s'intéresse à son élément minimum, les algèbres de F forment une catégorie dont s'intésse à son objet initial. La notion coalgèbre finale d'un foncteur généralise celle de plus grand point postfixe de façon analogue.

Nous avons par conséquent introduit la notion de catégorie μ-bicomplète, qui relève aux catégories celle de μ-treillis. Une telle catégorie possédera les produits et coproduits finis et les algèbres initiales et coalgèbres finales des foncteurs définissables (par des μ-termes). En [81] nous avons précisé comment la catégorie des ensembles est une catégorie μ-bicomplète. Dans cet autre contexte nous montrons l'utilité de la notion combinatoire de jeu de parité et son lien direct avec l'algèbre catégorielle : on prouve que la dénotation d'un μ-terme dans la catégorie des ensembles est rien d'autre que l'ensemble des stratégies gagnantes déterministes dans le jeu de parité qui est une traduction directe du μ-terme.

En [77] nous avons essayé une généralisation directe des résultats de [74]. En prenant un chemin exploré en premier par Lambek [57, 58, 56], nous avons représenté les stratégies de communication comme preuves d'un calcul des séquents qui à première vue peut apparaître bien simple. La subtilité de ce calcul consiste dans le fait que ses preuves ne sont plus portées par des arbres mais par des graphes qui possiblement contiennent des cycles. Les preuves sont donc circulaires. Le résultat principal est alors que ces preuves ont une dénotation unique dans toute catégorie μ-bicomplète, ce qui montre – nous aimons dire – la virtuosité des cercles vicieux en logique.

Une autre façon de regarder ce calcul des preuves circulaires est de le considérer comme une syntaxe pour définir des fonctions par induction et coinduction, en sachant que ces fonctions seront bien définies dans la catégories des ensembles (et dans toute autre catégorie μ-bicomplète). De ce point de vue, ce travail montre une limite importante : nous montrons qu'ils existent des arêtes de la catégorie μ-bicomplète initiale qui ne sont pas représentables dans le calcul des preuves circulaires ou par des stratégies à mémoire bornée. C'est donc une différence importante vis-à-vis du contexte des μ-treillis, où il était suffisant, afin de trouver un témoin de la relation $G \leq H$, de considérer les stratégies à mémoire bornée dans le jeu $\langle G, H \rangle$.

Cette découverte nous a convaincu de l'importance d'étudier la puissance expressive des catégories μ-bicomplètes libres. Cet objectif a été abordé en [33], où nous avons repris et enrichi des résultats déjà présents en littérature

[1, 28, 69]. Nous explicitons la relation entre induction, coinduction et foncteurs adjoints, et montrons que toute fonction récursive primitive, dans un sens plus large que celui de [28], est définissable comme image d'une arête la catégorie μ-bicomplète initiale. Un problème naturel qui se pose dans ce le contexte des catégories μ-bicomplète libres, où des types d'ordres supérieurs (i.e. certains espaces de fonctions) sont définissables par coinduction, est de savoir si la fonction de Ackermann soit définissable comme image d'une arête de la catégorie μ-bicomplète initiale. Bien que quelques chercheurs aient répondu dans le sens positif, nous ne sommes pas convaincu de cette réponse et attendons une version écrite de cette prétension.

Pour finir, nous regrettons que le sujet de recherche que nous venons d'exposer – qui nous a valu un exposé invité dans un groupe de travail dédié au sujet [80] – n'ait pas reçu plus d'attention par la communauté scientifique française. Nous avons souvent reçu l'impression que les recherches autour des catégories ne sont pas appréciées par nos collègues et qu'elle ne sont pas jugées valables le temps qu'on lui dédie. Nous ne sommes pas évidemment d'accord avec ce type de jugement. Même en reconnaissant que le rôle – en informatique et mathématiques – de la théorie des catégories est surestimé par certaines communautés anglophones, nous voulons reconnaître à cette théorie deux fonctions importantes. D'abord il s'agit d'une cadre mathématique naturel pour étudier les langages de programmation typés, ce cadre étant à notre avis souvent bien plus adapté que la théorie des types et la théorie des preuves. Deuxièmement, la théorie des catégories est une boite à outils mathématiques d'une puissance surprenante, comme nous le montrerons dans le Chapitre 4 ; il s'agit de bien plus qu'un meta-langage. Ignorer cette boite à outils, qui est bâtie sur une tradition centenaire de mathématiques, reviendrait à renoncer à la reine dans une partie d'échecs.

Chapitre 2

MdC, en quête de vérité

Dans ce chapitre nous allons exposer notre activité de recherche depuis la nomination à Maître de Conférences à l'Université de Provence.

Une partie importante de cette recherche a été vouée à deux thèmes. Le premier porte autour de la concurrence, car il s'agit d'étudier des structures mathématiques qui modélisent les processus distribués et parallèles, qui peuvent avoir un accès concurrent à des ressources : il s'agit des structures d'événements [100]. Le deuxième thème est pour nous un peu plus classique, car il porte sur le μ-calcul propositionnel modal [54], une logique de point-fixe que nous avons étudié en utilisant des outils algébriques.

Ces thèmes ne seront pas traités dans ce chapitre, car ils seront approfondis dans les deux chapitres qui suivent. Ici nous nous focaliserons sur nos recherches autour de la théorie des treillis, et sur notre activité d'encadrement à la recherche en exposant les résultats obtenus avec notre étudiant de doctorat Walid Belkhir.

2.1 Permutoèdres et d'autres treillis

Depuis notre thèse nous avons développé un intérêt particulier pour la théorie des treillis et sommes devenus un lecteur assidu de monographies sur le sujet [21, 47, 41]. L'ouvrage [41], bien que dédié aux treillis libres qui, en général, sont infinis, propose aussi un nombre important de remarques sur les treillis finis. Presque au même temps – et aussi un peu par hasard – nous avons découvert un ensemble de travaux [30, 29, 32, 31, 22] qui étudient certains treillis finis dont les éléments sont des objets classiques de la combinatoire : les permutations, les multipermutations, les arbres et les groupes de réflexions. Observons que la plus-part de ces travaux se situent à l'intérieur de la tradition française d'étude des treillis[1], témoignée par exemple par la monographie [9]. Cette découverte a été pour nous l'occasion de mettre à l'épreuve nos connaissances théoriques sur des exemples concrets et bien intéressants ; aussi elle nous a donné la possibilité de comparer et apprécier deux traditions et sensibilités scientifiques assez différentes, nord-américaine l'une et française l'autre.

Une motivation ultérieure pour nous pousser à l'étude des treillis finis constitués d'objets combinatoires est venue de [14]. Dans cet article une relation forte entre treillis et réécriture est établie ; on y suggère qu'un système de réécriture puisse être efficacement étudié à l'aide des propriétés d'ordre de son graphe d'états et transitions. Nous avons fait de cette suggestion un des objectifs du projet SOAPDC, que nous présenterons dans le Chapitre 3.

Illustrons par l'exemple cette relation, en considérant les permutations sur n éléments, où $n \geq 1$ est fixé. Écrivons les permutations sous la forme de mot, par exemple le mot $12 \ldots n$ désignera la permutation identité. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on réécrit une permutation $uijw$ à la permutation $ujiw$ si $i < j$. Toute permutation peut s'engendrer à partir de la permutation identité par applications successives de cette loi de réécriture. La figure 2.1 exemplifie ce système de réécriture avec $n = 4$; une arête relie deux permutations qui sont respectivement source et but d'une réécriture.

Il s'avère que le graphe d'états et transitions de ce système de réécriture est le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné bien connu, il s'agit de l'ordre faible de Bruhat sur les permutations. En plus cet ordre est un treillis, connu en littérature comme le Permutoèdre $\mathcal{P}_n$ sur n éléments.

Nous avons donc abouti à l'étude des treillis $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, et des treillis des multipermutations $\mathcal{L}(v)$, $v \in \mathbb{N}^n$.[2] Ces treillis ont été assez étudiés et plusieurs propriétés sont connues ; par exemple, il s'agit de treillis semidistributifs [60] et bornés [30] au sens de [63]. Le résultat principal de [87] est une séparation entre les théories équationnelles des treillis $\mathcal{P}_n$, $n \geq 0$ – des résultats analogues étant valables pour les treillis $\mathcal{L}(v)$. On trouve des équations e_n, $n \cdot 1$, (dans la signature de la théorie des treillis) telles que, pour tout $n \geq 0$ et $m \geq 0$, $\mathcal{P}_n \models e_m$ si $n \leq m$ et $\mathcal{P}_n \not\models e_m$ si $m < n$. Nous ne détaillerons pas la nature de ces équations, nous mentionnerons seulement que ces équations sont un miroir algébrique d'une propriété structurelle des treillis finis, la longueur des D-chaînes de join-irréductibles. Rappelons qu'un élément j d'un

[1] Cette tradition est à l'origine de ce qu'on appelle aujourd'hui l'analyse formelle des concepts [43], un outil qui devient de plus en plus indispensable dans l'analyse des bases de donnés.

[2] Rappelons que $\mathcal{P}_n = \mathcal{L}(1^n)$ où 1^n est le vecteur in $\mathbb{N}^n$ avec seulement des 1. Ici, nous ne détaillerons pas la nature des treillis $\mathcal{L}(v)$.

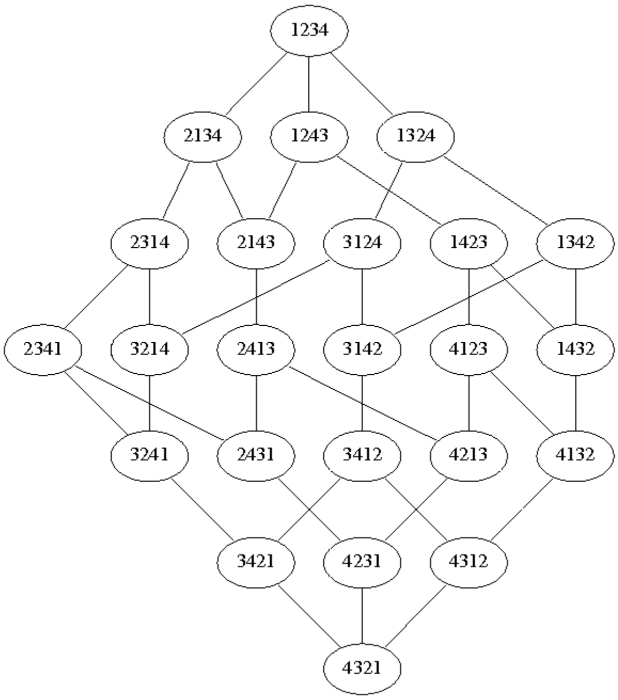


FIG. 2.1 – Le treillis $\mathcal{P}_4$ des permutations sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

treillis L est join-irréductible si toute écriture $j = a \vee b$ est triviale, c-à-d. $j = a$ ou $j = b$. On peut toujours reconstruire un treillis fini à partir de l'ensemble $J(L)$ des ses join-irréductibles et d'une structure combinatoire sur cet ensemble, appelée son OD-graphe [65]. La relation $D \subseteq J(L) \times J(L)$ est une trace de l'OD-graphe et peut se définir comme suit : jDk si $j \neq k$ et il existe $q \in L$ tel que $j \leq k \vee q$ et $j \not\leq k' \vee q$ si $k' < k$. Le résultat algébrique de séparation revient alors à l'observation suivante, qui a plus un caractère combinatoire : toute chaîne de la relation $D \subseteq J(\mathcal{P}_n) \times J(\mathcal{P}_n)$ a une longueur au plus $n - 2$, cette longueur maximale étant atteinte.

Un problème implicite étudié dans l'article [87] est de donner une caractérisation combinatoire, à l'aide de l'OD-graphe, de la notion de semidistributivité. La recherche exposée dans l'article [85] est une réflexion sur ce thème et apporte une nouvelle caractérisation de la semidistributivité. Cette caractérisation, suggérée par le travail [31], relie de près la notion de semidistributivité à celle de confluence propre de la réécriture. Le résultat majeur peut donc se résumer comme suit. Nous montrons que les arêtes du diagramme de Hasse d'un treillis semidistributif peuvent être ordonnées de façon à obtenir un autre ensemble partiellement ordonné qui est somme disjointe de treillis semidistributifs. Cette construction rappelle l'opération de dérivation en calcul, d'où le choix du titre de l'article [87].

Ce résultat est assez technique pour en juger de maintenant la valeur. Pour nous, il s'agit d'abord d'exposer un nombre d'observations non triviales qu'on a rassemblées le long d'un parcours de recherche dont l'objectif est une compréhension intime des permutoèdres $\mathcal{P}_n$. Il est possiblement plus intéressant d'expliquer quelles sont nos attentes quand on parle de compréhension intime des treillis de permutations. Un objectif légitime, étant donné notre formation de logicien, est d'axiomatiser les permutoèdres, en classifiant d'une façon ou de l'autre les identités valides dans tous ces treillis. Une question plus pertinente à l'algèbre, mais qui inévitablement s'entrelace au problème de l'axiomatisation des permutoèdres, est de comprendre l'universalité de ces treillis : est il vrai que tout treillis semidistributif se plonge dans un (produit de) treillis de permutations ?

La porté des questions précédentes peut être affaiblie, avec l'avantage d'introduire dans notre réflexion des aspects géométriques et combinatoires qui sont au centre des mathématiques contemporaines : il s'agit de chercher une caractérisation des treillis que nous aimerions appeler géométriques.[3] Expliquons ce point : il est bien connu que les objets combinatoires qui nous

[3]Malheureusement, notre souhait ne peut pas être satisfait car la notion de treillis géométrique possède déjà une autre sémantique.

intéressent – les permutations sur n éléments, les arbres binaires sur n lettres, et les généralisations respectives suggérés par la théorie des groupes de Coxeter – possèdent une réalisation géométrique en tant que polytopes convexes [101]. Or il est dans l'esprit de l'article [85] que plusieurs notions géométriques – la notion de facette, par exemple – peuvent se définir purement à l'aide de la notion algébrique de semidistributivité. S'impose alors la question suivante, celle de caractériser les treillis semidistributifs qui, comme les Permutoèdres et les Associaèdres[4], possèdent une telle réalisation géométrique.

Remarquons pour finir que réfléchir autour de ce type de questions n'assure pas d'atteindre les objectifs préfixés, car en principe les questions pourraient être assez difficiles à résoudre. Cette remarque ne devrait pas d'ailleurs nous empêcher de parcourir ce chemin qui présente d'autres avantages. Ces questions nous ont amené à discuter à plusieurs reprises – et avec beaucoup de satisfaction – avec deux spécialistes du domaine, Claude Barbut et Henry Crapo. Aussi, la thématique autour de la caractérisation combinatoire des treillis de Coxeter nous a donné la possibilité mettre en place une fertile collaboration avec notre collègue et voisin de bureau, Frédéric Olive.

2.2 L'enchevêtrement dans les jeux de parité

Nous exposerons en suite les résultats obtenus en collaboration avec Walid Belkhir, étudiant de doctorat en informatique qui a travaillé sur le sujet *algèbre et combinatoire pour les jeux de parité*. Cette section a donc aussi pour but de documenter notre travail d'encadrement doctoral.

Le sujet de thèse étant délibérément générique, nous avons eu d'abord la possibilité d'étudier les travaux de Berwanger et al. [15, 18, 19, 16] sur la hiérarchie des variables dans le μ-calcul modal. La finalité de ces travaux est de comparer la puissance expressive de deux logiques, la logique des jeux [70] et le μ-calcul propositionnel modal [54]. La conjecture naturelle étant que le μ-calcul est plus puissant que la logique des jeux, Berwanger et al. observent qu'une preuve de cette conjecture ne pourra pas venir à l'aide des mesures de complexité usuelles comme l'alternance entre points fixes extrêmes. En sachant que l'encodage de la logique des jeux dans le μ-calcul modal peut se faire en utilisant seulement deux variables liées (par les opérateurs de point fixe), les auteurs utilisent le nombre de variables liées comme nouvelle mesure de complexité d'une formule et définissent ainsi la *hiérarchie des variables*. Pour séparer les deux logiques, il suffit de chercher des formules du μ-calcul modal qui ne sont pas équivalentes à des formules avec au plus deux variables

[4]Ces derniers sont les treillis d'arbres binaires, aussi connus comme treillis de Tamari.

liées. Berwanger et al. montrent un résultat plus fort, car ils construisent des formules K_n avec n variables liées qui ne sont équivalentes à aucune formule ayant un nombre strictement plus petit de variables liés. Dans leur travail la notion fondamentale d'*enchevêtrement*[5] est définie. Il s'agit en effet d'une traduction combinatoire de la mesure logique qui quantifie le nombre de variables liées. Cela s'explique comme suit : le graphe sous-jacent à un système d'équations aura un enchevêtrement au plus n si et seulement si il aura une solution formelle par des μ-termes ayant au plus n variables liées. L'enchevêtrement est donc une mesure de complexité sur les graphes dirigés, dont l'intérêt est témoigné aussi par le résultat suivant : pour n fixé, les jeux de parité dont le graphe des positions et mouvements a un enchevêtrement au plus n, peuvent se résoudre en temps polynomial [17].

C'est autour de ces travaux que nous avons formulé quelques questions pour notre étudiant de doctorat et pour nous même.

La première porte sur la reconnaissance des graphes d'enchevêtrement au plus n. En effet, il s'avère difficile ou impensable d'utiliser les algorithmes de solution des jeux de parité proposés en [17] si on ne peut pas calculer l'enchevêtrement d'un graphe de façon efficace. Avant nos travaux seulement une caractérisation des graphes d'enchevêtrement au plus n était connue. Dans le travail [11] nous avons donné une caractérisation de la classe des graphes non dirigés d'enchevêtrement 2 et proposé un algorithme pour reconnaître si un graphe appartient à cette classe ; cet algorithme marche en temps linéaire dans le nombre de sommets du graphe. Rappelons cette caractérisation : un graphe non dirigé connexe a enchevêtrement au plus 2 si et seulement si chaque composante biconnexe possède un ensemble de sommets, de taille 2, qui est un recouvrement des arêtes et, en plus, les points d'articulations de cette composante appartiennent à cet ensemble. Cette caractérisation suggère donc un lien fort entre les notions de connexité de dimension supérieure, cyclicité, et enchevêtrement. Ce lien a été l'objet d'étude d'un chapitre de la thèse [10], où on essaie de relever la caractérisation précédente aux graphes biconnexes d'enchevêtrement 3. Le point de départ est l'utilisation d'une décomposition arborescente analogue à celle des composantes biconnexes et points d'articulations, il s'agit de la décomposition de Tutte [96] des graphes biconnexes en composantes triconnexes, cycles et séparateurs « hinge ». Le chapitre montre à la fois l'intérêt et les limites d'un tel parcours.

La deuxième question porte sur la hiérarchie des variables dans d'autres μ-calculs. En effet, cette hiérarchie peut se définir pour n'importe quelle

[5]Nous traduisons, dans cette Section, le mot anglais « entanglement » par le mot français enchevêtrement. Autres traductions sont possibles, par exemple *intrication*, terme utilisé en physique quantique, où *entortillement*.

théorie logique ayant au moins un opérateur de point fixe, par exemple pour une théorie d'itération [25]. D'autre part, la hiérarchie des variables raffine strictement une autre hiérarchie bien connue, celle induite par la hauteur des étoiles de Kleene et par les opérateurs d'itération [39, 27, 48]. Par conséquent, montrer que la hiérarchie des variables est infinie implique – dans la plus part de cas – que la hiérarchie de la hauteur des étoiles est aussi infinie. On développe ce type de considérations dans la thèse [10].

En poursuivant un chemin assez difficile ayant la responsabilité d'un étudiant de doctorat, nous nous sommes conduit avec prudence, en amenant la recherche sur un terrain à nous assez connu, le μ-calcul des jeux de parité [74, 79, 76, 6]. Nous documentons les résultats de cette recherche par l'inclusion dans l'appendice A.7 de l'article [12], dont un résumé [13] apparaîtra dans les comptes rendus de la conférence LPAR 2008.

Rappelons que ce μ-calcul est une théorie des treillis avec points fixes extrêmes ; c'est en effet la même chose parler μ-calcul des jeux de parité et de la théorie des μ-treillis. Les objets de ce μ-calcul – i.e. les éléments syntaxiques analogues des μ-termes – sont les jeux de parité avec des positions finales où le jeu est déclaré match nul ; l'interprétation de ce μ-calcul est sur la classe de tous les treillis complets. Le résultat principal obtenu dans l'article [12] peut se résumer comme suit : ils existent des jeux de parité G_n, $n \geq 1$, tels que (i) l'enchevêtrement (du graphe des positions et mouvements) de G_n est n, (ii) si H est un jeu qui est équivalent à G quand il est interprété dans un treillis complet arbitraire, alors son enchevêtrement est au moins $n - 2$. Conséquence plus ou moins directe de (i) et (ii) est que la hiérarchie des variables pour ce μ-calcul est infinie.

Chapitre 3

Autour des structures d'événements

3.1 Le projet SOAPDC

En avril 2005 une équipe[1] de jeunes chercheurs, dont je me porte responsable, propose à l'agence Nationale de la Recherche française un projet de recherche intitulé *Structures d'Ordre et Applications au calcul Parallèle, Distribué et Concurrent*. Ce projet est ensuite retenu et financé par l'Agence. Nous renvoyons le lecteur au volet descriptif du projet [92] pour connaître en détail ses finalités ; nous nous limiterons ici à rappeler les aspects qui nous ont plus occupés.

Disons d'abord qu'une structure d'évènements est un ensemble de données mathématiques dont la vocation est de modéliser les états globaux d'un système informatique comme étant constitués d'événements locaux concurrents. Ces données comprennent d'abord un ensemble (d'événements) ordonné (par la relation de causalité). Dans une suite de séminaires Remi Morin nous a présenté un nombre de problèmes ouverts autour de la combinatoire des structures d'événements : d'abord la conjecture de Thiagarajan [49] et, puis, le problème du bon étiquetage [7]. Nous avons reconnu dans ces problèmes une excellente opportunité de recherche, d'un côté car cela présente un défi mathématique en nous obligeant à mettre à l'épreuve notre expertise des ensembles ordonnés en dehors de son contexte habituel, la logique, et d'ailleurs car il possède une forte ouverture sur les applications. Pour expliquer ce dernier point, rappelons qu'un vérificateur de modèles[2]est

[1]Cette équipe est formée par Rémi Morin, Peter Niebert, Paul Ruet, Emmanuel Godard et Luigi Santocanale.

[2]Il s'agit de POEM, développé par Peter Niebert.

à présent développé au sein du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille, dont la caractéristique est d'exploiter la modélisation par ensembles ordonnés afin de réduire le coût d'explorations de l'espace d'états d'un système concurrent.[3]Une conséquence souhaitée de l'étude combinatoire des structures d'événements est de développer des algorithmes implantables dans ce type d'outils.

3.2 Le problème du bon étiquetage

Nous avons pris à coeur le problème du bon étiquetage des structures d'événements. Nous allons exposer ce problème pour ensuite présenter un résultat qui a été assez apprécié et qui a donné lieu à un certain nombre de publications [84, 86, 88]. L'exposition qui suivra a suggéré la forme de la version journal [90] de ce travail que nous incluons en appendice.

Les structures d'événements constituent un modèle élémentaire des processus concurrents, introduit déjà en [67]. Voici leur définition.

Définition 3.2.1. Une *structure d'événements* est un triplet $\mathcal{E} = \langle E, \leq, \smile \rangle$ où :
- $\langle E, \leq \rangle$ est un ensemble ordonné, tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{ y \in E \mid y \leq x \}$ est fini,[4] la relation $\leq$ étant appelée *causalité*,
- $\smile \subseteq E \times E$ est une relation binaire symétrique et irréflexive, appelée *conflit*, telle que $x \smile y$ et $y \leq z$ implique $x \smile z$.

Observons que $x \smile y$ implique que x, y n'ont pas une borne supérieure et, en particulier, ne sont pas comparable selon l'ordre de causalité. En effet, si $x, y \leq z$ et $x \smile y$, on pourrait déduire $z \smile z$, une contradiction avec la condition d'irréflexivité.

Introduisons maintenant les compléments de la relation de conflit, et d'autres relations qui seront d'aide pendant l'étude des structures d'événements :
- la *concurrence faible* : $x \frown\!\!\!\!\!\raisebox{-0.3ex}{$-$}\, y$ ssi non $x \smile y$,
- la *concurrence* : $x \frown y$ ssi $x \frown\!\!\!\!\!\raisebox{-0.3ex}{$-$}\, y$ et x, y ne sont pas comparable selon l'ordre.
- le *conflit minimal* : $x \smile\!\!\!\!\!\raisebox{0.3ex}{$-$}\, y$ ssi (i) $x \smile y$, (ii) $x' < x$ implique $x' \frown\!\!\!\!\!\raisebox{-0.3ex}{$-$}\, y$, et (iii) $y' < y$ implique $x \frown\!\!\!\!\!\raisebox{-0.3ex}{$-$}\, y'$.

Observons que tout couple en conflit est au dessus d'un couple en conflit minimal : $x \smile y$ implique $x' \leq x$ et $y' \leq y$ pour quelque couple x', y' tel que

[3]Cette approche du problème de l'explosion du nombre d'états, appelé de réduction d'ordre partiel, peut se faire remonter aux travaux de McMillan [64].

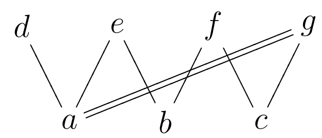
[4]Dans la suite nous considérerons des structures finies seulement, de façon que l'ensemble $\{ y \in E \mid y \leq x \}$ est toujours fini.

$x' \underline{\smile}\, y'$. Nous pouvons alors présenter les structures d'événements de façon concise, en donnant seulement les couples en conflit minimal ; tout autre couple en conflit est en effet déterminé par ces conflits minimaux. Nous allons illustrer ce point par l'exemple suivant, tiré de [7].

Exemple 3.2.2. Considérons la structure d'événements $\mathcal{E} = \langle E, \leq, \smile \rangle$, où

- $E = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$,
- $\leq = \{ (a, d), (a, e), (b, e), (b, f), (c, f), (c, g) \}$,
- $\smile = \{ \{a, g\}, \{d, g\}, \{e, g\} \}$.

Dans le diagramme



il apparaît le diagramme de Hasse de la relation de causalité et, traité par la double ligne, le seul couple en conflit minimal, $a \,\underline{\smile}\, g$.

Nous allons ensuite discuter de quelle façon les structures d'événements modélisent les processus concurrents. Soit

$$\mathcal{I} = \{ X \subseteq E \mid y \leq x \in X \text{ implique } y \in X \} ,$$

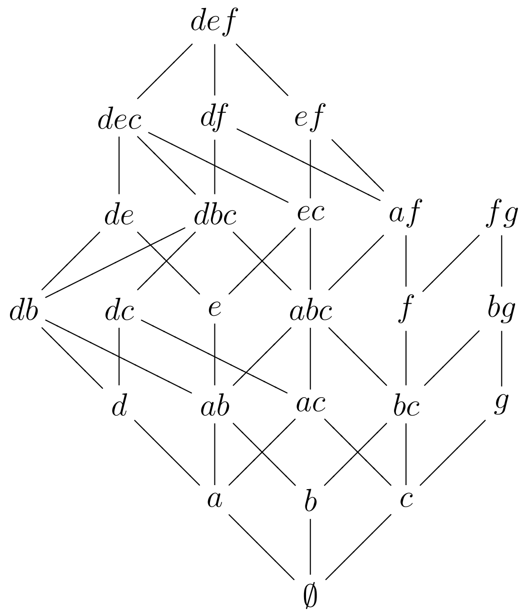
la collection des sections initiales de $\langle E, \leq \rangle$ et posons

$$\mathcal{D} = \{ X \in \mathcal{I} \mid X \text{ est un clique par rapport à } \underline{\frown} \} .$$

On appelle un élément de $\mathcal{D}$ une *configuration* de $\mathcal{E}$. Or, $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \langle \mathcal{D}, \subseteq \rangle$ est lui même un ensemble ordonné que nous appellerons le *domaine associé à* $\mathcal{E}$.

Une configuration encode l'historique d'un calcul globale dans une structure d'événements : il s'agit d'une collection d'événements locaux qui, deux à deux, sont ou bien l'un dans l'histoire de l'autre (c-à-d. comparable par l'ordre de causalité), ou bien ils ont le droit de se dérouler en parallèle (c-à-d. dans la relation de concurrence $\frown$).

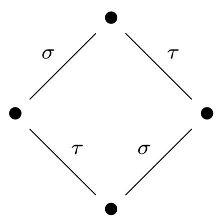
Le *diagramme de Hasse* de l'ensemble ordonné $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ représente le graphe d'état-transition du processus $\mathcal{E}$. Tout carré du diagramme code deux transitions qui peuvent avoir lieu en parallèle. Dessinons ce diagramme pour la structure d'événements présentée avec l'Exemple 3.2.2.[5]



Nous avons maintenant tous les éléments pour présenter le problème du bon étiquetage. Si on colore les arêtes de ce diagramme par un alphabet d'actions, alors on obtient une représentation du processus $\mathcal{E}$ en tant que automate. D'ailleurs, il est assez naturel de demander, dans ce coloriage, que les conditions suivantes soient respectées :

Déterminisme : les transitions partant d'un même état sont colorées par des actions différentes,

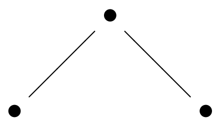
Concurrence : chaque carré du diagramme est coloré par deux actions σ, τ selon le schéma suivant, qui suggère que σ, τ peuvent avoir lieu en parallèle :



Un coloriage concurrent sera déterminé par le coloriage des arêtes premières. Ces arêtes ont la propriété qu'elles sont les seules arêtes entrantes de leurs

[5]Dans le diagramme nous avons étiqueté chaque configuration par ses éléments maximaux : par exemple, l'état étiqueté par ec est en effet la configuration $\{ a, b, c, e \}$.

buts, c-à-d. elles ne donnent pas lieu au motif suivant :



Les arêtes premières sont à la fois en bijection avec les éléments de la structure d'événements : pour tout $x \in E$, posons $\downarrow x = \{ y \in E \mid y \leq x \}$ et $\downdownarrows x = \{ y \in E \mid y < x \}$; on a alors que $(\downdownarrows x, \downarrow x)$ est une arête première, et toute arête première a cette forme.

Par conséquent, les coloriages concurrents des arêtes du diagramme de Hasse de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ sont en bijection avec les coloriages de E : étant donné un coloriage λ de E, on définit un coloriage λ' des arêtes par

$$\lambda'(I, I \cup \{ x \}) = \lambda(x) .$$

Il nous reste à étudier comment la condition de déterminisme d'un coloriage concurrent de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ se transporte à un coloriage de E. À cette fin, définissons cette autre relation :

– l'*orthogonalité* : $x \mathrel{\overline{\frown}} y$ ssi $x \mathrel{\underline{\smile}} y$ ou $x \frown y$

et définissons $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, le graphe de $\mathcal{E}$, par

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) = \langle E, \overline{\frown} \rangle .$$

Le Lemme suivant explique le rôle de la relation d'orthogonalité et du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

Lemme 3.2.3. *Un ensemble $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ est une clique du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ si et seulement si il existe une configuration $C \in \mathcal{D}$ telle que $(C, C \cup \{ x_i \})$, $i = 1, \ldots, n$, sont des arêtes distinguées du diagramme de Hasse de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.*

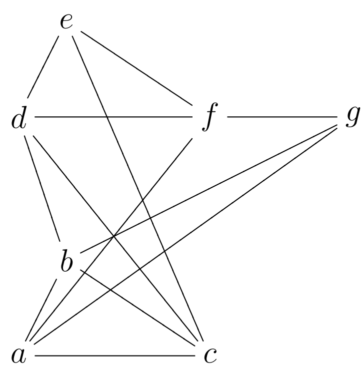
En utilisant ce Lemme on déduit tout de suite le Corollaire suivant :

Corollaire 3.2.4. *Un coloriage concurrent λ' de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ est déterministe si et seulement si le coloriage λ de E est un coloriage du graphe*[6] $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

Étant donné le rôle central du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, nous allons ci-dessous dessiner

[6]Rappelons qu'un coloriage d'un graphe $\langle V, E \rangle$ est une fonction $\lambda : V \longrightarrow \Sigma$, telle que $\lambda(v) \neq \lambda(v')$ si vEv'.

le graphe de la structure d'événements de l'Exemple 3.2.2 :



Le lecteur vérifiera que le nombre chromatique de ce graphe est 4.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le problème du bon étiquetage. Le lecteur aura déjà observé qu'il est toujours possible trouver un coloriage déterministe et concurrent de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Le problème du bon étiquetage demande de trouver un tel coloriage en utilisant un alphabet d'actions de taille minimum, ou bien de calculer la taille de cet alphabet. Le problème revient donc à celui de trouver un coloriage de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ avec un nombre minimum de couleurs, ou bien à celui de calculer le nombre chromatique de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

Un autre paramètre qui nous intéressera est le *degré* de $\mathcal{E}$, c-à-d. le maximum des degrés sortants dans le diagramme de Hasse de $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Le Lemme 3.2.3 implique que le degré de $\mathcal{E}$ est égal à taille de la plus grande clique dans $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

Nous allons formaliser les notions relatives au problème du bon étiquetage directement en terme du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

Définition 3.2.5. Un *bon étiquetage* de la structure d'événements $\mathcal{E}$ est un coloriage du graphe $\mathcal{G}(\mathcal{E})$. Le *degré* de $\mathcal{E}$, noté dans la suite $\omega(\mathcal{E})$, est le nombre de clique de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, c-à-d. le nombre $\omega(\mathcal{G}(\mathcal{E}))$. L'*indice* de $\mathcal{E}$, noté dans la suite $\chi(\mathcal{E})$, est le nombre chromatique de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, c-à-d. le nombre $\chi(\mathcal{G}(\mathcal{E}))$.

En soi-même, calculer l'indice $\chi(\mathcal{E})$ étant donné une structure d'événements $\mathcal{E}$, est un problème NP-complet[7][7]. Plus généralement, on peut se poser la question suivante :

Problème 3.2.6. Étant donnée une classe $\mathcal{K}$ de structures d'événements, calculer

$$\chi(\mathcal{K}) = \max\{\, \chi(\mathcal{E}) \mid \mathcal{E} \in \mathcal{K} \,\}\,.$$

[7] On peut bien sur traduire ce problème en un problème de décision.

Observons qu'on pourrait avoir $\chi(\mathcal{K}) \geq \omega$, c-à-d. qu'il n'existe pas une borne supérieure aux indices des structures d'événements dans $\mathcal{K}$. Ceci est bien le cas – de façon triviale – si $\mathcal{K}$ est la classe de toutes les structures d'événements. C'est à ce problème qu'on fait référence quand on parle du problème du bon étiquetage. En particulier, on sera intéressé aux classes

$$\mathcal{K}_n = \{ \mathcal{E} \mid \omega(\mathcal{E}) \leq n \} ,$$

obtenues en fixant une borne supérieure au degré. Car $\omega(\mathcal{E}) \leq \chi(\mathcal{E})$, on a bien évidemment $n \leq \chi(\mathcal{K}_n)$.

Rappelons à ce point ce qui est connu à propos du problème du bon étiquetage. Le premier résultat est rien d'autre que le célèbre Théorème de Dilworth.

Théorème 3.2.7 (Voir [38]). *Si la relation de conflit de $\mathcal{E}$ est vide, alors $\chi(\mathcal{E}) = \omega(\mathcal{E})$.*

Car dans ce cas, on a que $x \frown y$ si et seulement si x, y ne sont pas comparable selon l'ordre, et donc un coloriage de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ n'est rien d'autre que un partage en chaînes de l'ensemble ordonné $\langle E, \leq \rangle$.

À notre connaissance, l'ensemble des résultats présents dans [7], avec le Théorème de Dilworth, étaient les seuls disponibles avant notre contribution. Résumons-les :

Théorème 3.2.8 (Voir [7]). *Si $\omega(\mathcal{E}) = 2$, alors $\chi(\mathcal{E}) = 2$. Il existe une famille de structures d'événements $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$, telle que $\omega(\mathcal{E}_n) = n$ et $\chi(\mathcal{E}_n) = n + 1$.*

Ce théorème nous a motivé à l'étude des structures d'événements de degré 3. Cet autre théorème est en effet une généralisation du théorème de Dilworth.

Théorème 3.2.9 (Voir [7]). *Soit $\mathcal{K}_{n,m}$ la classe des structures d'événements $\mathcal{E}$ telles que $\omega(\mathcal{E}) \leq n$ et $\mathcal{E}$ contient au plus m couples en conflit minimal. Pour tout $n, m \geq 0$ il existe $C_{n,m} \geq 0$ tel que*

$$\chi(\mathcal{K}_{n,m}) \leq C_{n,m} .$$

Par exemple, on peut poser $C_{n,0} = n$, car si une structure d'événements ne contient pas des couples en conflit minimal, alors la relation de conflit est vide.

À présent, des problèmes fondamentaux restent ouverts. Entre autres, la question si l'indice d'une structure d'événements de degré fixé est borné, c-à-d. est-ce que $\chi(\mathcal{K}_n) < \omega$? En attendant de pouvoir répondre à cette question, rappelons que la différence entre $\chi(\mathcal{E})$ et $\omega(\mathcal{E})$ peut être *large*. En effet, dans

[7] on y trouve aussi le résultat suivant : *il existe une famille des structures d'événements* $\mathcal{E}_n$, $n \geq 3$, *telle que* $\chi(\mathcal{E}_n) - \omega(\mathcal{E}_n) = O(\log n)$. Récemment, en collaboration avec M. Maurice Pouzet, nous avons proposé une amélioration de cet énoncé. Dans la famille de [7], on a $\frac{\chi(\mathcal{E}_n)}{\omega(\mathcal{E}_n)} \leq C$, pour une constante C. La proposition suivante montre que la différence entre indice et degré peut être *très large* :

Proposition 3.2.10 (Pouzet, S.). *Il existe une famille* $\mathcal{E}_n$, $n \geq 1$, *de structures d'événements telle que*

$$\frac{\chi(\mathcal{E}_n)}{\omega(\mathcal{E}_n)} = O((\frac{5}{4})^n)\,.$$

3.3 Un théorème de bon étiquetage

En raison du Théorème 3.2.8, nous avons cherché des propriétés structurelles qui puissent être à l'origine de l'inégalité $\omega(\mathcal{E}) \neq \chi(\mathcal{E})$, et avons abouti à considérer des structures dont l'ordre est un arbre. Nous allons dire qu'une structure d'événements $\mathcal{E}$ est *arborescente* si son ordre de causalité est un arbre dans le sens suivant : pour tout $x \in E$ l'ensemble $\{\, y \in E \mid y \leq x \,\}$ est linéairement ordonné par $\leq$.

Le théorème suivant est la majeure contribution apportée par [86].

Théorème 3.3.1. *Si* $\mathcal{E}$ *est arborescente et* $\omega(\mathcal{E}) \leq 3$, *alors* $\chi(\mathcal{E}) \leq 3$.

Nous allons en-suite présenter les idées derrière la preuve du théorème.[8] Cette discussion n'apportera pas une preuve plus courte, mais servira de complément et éclaircissement à la preuve originale [86]. Nous nous servirons d'une analogie, celle d'un groupe de frères qui sont en train d'hériter de la fortune de leur seul parent. Malheureusement, cette fortune ne peut pas être partagée entre frères et donc le frère le plus aîné – et le plus chanceux – héritera de toute la fortune. Hériter d'une fortune est une façon socialement acceptable de s'enrichir car, en bref, on ne vole pas à d'autres individus. D'ailleurs, la règle qui statue que le frère plus aîné hérite de tout, laisse deux questions ouvertes. La première concerne le certificat de naissance : comment établir qui entre frères est le plus aîné, par exemple cette question se pose naturellement pour des jumeaux. La deuxième question concerne les frères plus jeunes : comment être sûrs qu'eux aussi pourront s'enrichir de façon acceptable, c-à-d. en respectant les règles de leurs société, sans voler ?

[8]Sur l'exposition de l'ouvrage présent s'appuie l'exposition de la version journal de notre travail [90].

Heureusement, pour les structures d'événements de degré 3, il existe une réponse à ces deux questions.

Venons maintenant à la formalisation de ces idées, en sachant que de maintenant $\mathcal{E}$ dénotera une structure d'événements de degré 3. Pour $x \in E$, nous allons dire que p est le *père* de x si p est le seul recouvrement inférieur de x.[9]Disons aussi que y est *frère*[10] de x si x, y ont le même père. Or si x, y sont frères avec même père p, alors $x \frown y$: en effet si $z < y$, alors $z \leq p$ et donc $z \leq y$. En particulier, si l'on considère que $\omega(\mathcal{E}) \leq 3$, on peut avoir au plus 3 événements qui sont frères deux à deux. Définissons la *société* de x comme il suit :

$$\mathcal{S}^x = \{\, y \in E \mid x \frown y,\ y \text{ n'est pas un descendant d'un frère de } x \,\}\,.$$

Ici, pour « y n'est pas un descendant d'un frère de x » il faut comprendre l'énoncé formel suivant : $\neg\exists z(z \leq y, \text{et}\, z \text{ est un frère de } x)$. La hauteur de x, notée $\mathrm{h}(x)$ est le cardinal de l'ensemble $\{\, y \in E \mid y < x \,\}$. Soit $\lhd$ un ordre linéaire[11]sur E qui respecte la hauteur : $\mathrm{h}(x) < \mathrm{h}(y)$ implique $x \lhd y$. Nous penserons que la relation $x \lhd y$ énonce le fait que x est plus aîné que y. Pour construire un coloriage de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, on procédera par approximations successives : nous ferons l'hypothèse qu'on possède un coloriage partiel λ de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ – défini sur l'ensemble $\{\, z \in E \mid z \lhd x \,\}$ – qui utilise 3 couleurs ; nous nous poserons le problème d'étendre ce coloriage à x. Définissons alors

$$O_{\lhd}^x = \{\, y \in E \mid x \frown y, y \lhd x \,\}\,.$$

et observons que la seule contrainte pour étendre λ est que x ne soit pas colorié par une couleur qui apparaît déjà dans $O_{\lhd}^x$ – c-à-d. $\lambda(x) \notin \{\, \lambda(y) \mid y \in O_{\lhd}^x \,\}$.

La première remarque est la suivante :

Lemme 3.3.2. *Si $y \in O_{\lhd}^x$, alors $y \in \mathcal{S}^x$ ou y est un frère plus aîné de x.*

Démonstration. Si $y \in O_{\lhd}^x \setminus \mathcal{S}^x$, alors il existe un frère z de x tel que $z \leq y$. Soit p le père de x, on a donc $p < y$, $\mathrm{h}(p) < \mathrm{h}(x)$ et donc $\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(p) + 1 \leq \mathrm{h}(y)$. D'ailleurs on a $y \lhd x$, ce qui implique $\mathrm{h}(x) \not< \mathrm{h}(y)$. On a donc $\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(y)$ et, en sachant que $p < y$, on trouve que x, y sont frères. □

[9]On dit y est un recouvrement inférieur de x si l'intervalle fermé $\{\, z \mid y \leq z \leq x \,\}$ est réduit à l'ensemble $\{\, y, x \,\}$.

[10]Nous n'utiliserons pas le mot anglais « sibling », car ce mot contient déjà une notion de frère plus aîné.

[11]Plus précisément, $\lhd$ est une relation transitive, antiréflexive et antisymétrique, telle que pour x, y distingués on a $x \lhd y$ ou $y \lhd x$.

En particulier, si x est *le frère plus aîné*, alors $Q^x_{\lhd} \subseteq \mathcal{S}^x$. Dans ce cas, nous pouvons étendre λ à x, en statuant que x *hérite de toute la fortune* – c-à-d. la couleur – *de son père* p, $\lambda(x) = \lambda(p)$.

Lemme 3.3.3. *Si x est un frère plus ainé, alors λ – ainsi défini sur x – est encore un coloriage partiel de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Soit $y \in Q^x_{\lhd}$ et p le père de x, alors $x \overline{\frown} y$ implique $p < y$ ou $p \overline{\frown} y$. Si $p < y$, alors y est un frère plus ainé que x, comme dans la preuve du Lemme 3.3.2, et cela est une contradiction. Donc on a $p \overline{\frown} y$ et $\lambda(x) = \lambda(p) \neq \lambda(y)$. □

Un fils unique. Le Lemme précèdent résout complètement le problème d'étendre λ à x si x est un fils unique. S'il y a plus qu'un frère, alors nous devons répondre à deux questions : qui est le frère plus aîné – c-à-d. comment on devrait définir $\lhd$ sur les frères – et, puis, comment les frères plus jeunes devraient s'enrichir sans voler à leurs sociétés – c-à-d. comment on devrait étendre λ aux frère plus jeunes. Les réponses à ces deux questions est suggérée par le Lemme suivant, cf. [86, Lemmas 3,4] :

Lemme 3.3.4. *Si x a deux frères, alors $\mathcal{S}^x = \emptyset$. Si x, y sont les seuls frères ayant le même père, alors $\mathcal{S}^x \subseteq \mathcal{S}^y$ ou $\mathcal{S}^y \subseteq \mathcal{S}^x$; en plus, $\mathcal{S}^x \cap \mathcal{S}^y$ est linéairement ordonné.*

Observons que le Lemme – dont nous ne proposerons pas la preuve ici – est en train de témoigner qu'entre deux frères il y en a toujours un qui possède au moins autant d'expérience que l'autre, dans le sens qu'il connaît la société de l'autre. Par exemple, si $\mathcal{S}^y \subseteq \mathcal{S}^x$, alors c'est x le frère expérimenté. Bien, nous allons statuer que le frère expérimenté est à la fois le plus aîné.

Trois frères. Si x, y, z sont trois frères distingués, alors le Lemme implique qu'on peut choisir le frère plus aîné entre eux de façon arbitraire : car $Q^x_{\lhd} \subseteq \{ y, z \}$, nous aurons aucun problème à étendre λ en utilisant trois couleurs.

Deux frères. Si x, y sont les seuls frères, alors nous statuons que x est le frère plus aîné entre eux si $\mathcal{S}^y \subseteq \mathcal{S}^x$ – si $\mathcal{S}^y = \mathcal{S}^x$ le choix est arbitraire. Soit m l'événements minimum de $\mathcal{S}^y = \mathcal{S}^x \cap \mathcal{S}^y$, alors nous pouvons définir $\lambda(y)$ comme la couleur différant de $\lambda(x)$ et $\lambda(m)$.

Que cette définition donne lieu encore à un coloriage (partiel) de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ est une conséquence de la propriété structurelle suivante, cf. [86, Lemma 5] :

Lemme 3.3.5. *Si y est un frère plus jeune, alors sa société est linéairement ordonnée et elle est composée – sauf pour l'élément minimum – par des frères plus aînés. C-à-d., si $z \in \mathcal{S}^y$, et $z \neq m$ alors z est un frère plus aîné.*

En considérant que les frères plus aînés héritent de la couleur de leur père, et que $\mathcal{S}^y$ est un ordre linéaire, on voit que $\lambda(z) = \lambda(m)$ pour $z \in \mathcal{S}^y \cap Q_{\triangleleft}^y$. Par conséquent, $\lambda(y) \neq \lambda(m) = \lambda(z)$. Le Lemme 3.3.5 est une conséquence facile du Lemme 3.3.4 : si $z \in \mathcal{S}^y$ et $z \neq m$, alors x, y ne sont pas des descendants de quelque frère de z, sinon $m \leq y$ au lieu de $m \mathrel{\overline{\frown}} y$. On a donc $x, y \in \mathcal{S}^z$, de façon que si w est un frère plus aîné z, alors la relation $\mathcal{S}^z \subseteq \mathcal{S}^w$ implique que $\{ x, y, z, w \}$ est une clique de $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, une contradiction.

Nous avons ainsi terminé l'exposition des idées derrière la preuve du Théorème 3.3.1.

Chapitre 4

μ-Calcul et algèbre

Dans ce chapitre nous allons exposer les idées présentés dans l'article [89]. En ce faisant, nous procéderons par l'exemple, afin d'intégrer et compléter l'exposition déjà disponible. Cet article constitue, à notre avis, une première ligne d'arrivé franchie d'un parcours de recherche – entrepris avec le travail [82] et poursuivi avec [78] – qui se propose de développer une compréhension algébrique du μ-calcul propositionnel modale.

En effet, la logique propositionnelle modale est le domaine de la logique où plus le point de vue algébrique a été à la fois utilisé et développé. En sachant que les points fixes possèdent des propriétés algébriques importantes, voir [68], il nous a apparus intéressant et naturel de demander jusqu'à quel point l'algèbre puisse être un outil essentiel pour étudier les logiques de point fixe. Dans ce cadre, des articles tels que [72] montrent que le théorème de complétude et du modèle fini du PDL puissent bien s'expliquer dans un contexte algébrique. D'ailleurs, des extensions des ces méthodes au μ-calculs propositionnel modale ne sont pas connues, ou même elles sont impossibles. Par exemple, la méthode des filtrations n'est pas possible pour le μ-calcul [54].

Notre objet d'étude est le théorème de complétude de l'axiomatisation de Kozen du μ-calcul propositionnel modale [99]. Ce théorème est assez difficile, aussi pour le lecteur expert. Bien qu'on puisse le juger comme le plus remarquable dans la théorie des points fixes, il reste à présent isolé et n'a pas donné suite à d'autres travaux scientifiques. Le travail [89] propose alors une clé de lecture de [99] ; notre souhait est que, bien que cette clé soit partielle, elle contribuera à stimuler l'activité scientifique dans le domaine.

L'article s'appuie sur nombreuses idées de la théorie des points fixes qui étaient préexistantes notre travail. Au delà des travaux [54, 99] nous voulons mentionner d'autres. D'abord [55] qui a suggéré que certaines opérateurs puissent être des adjoints sur les algèbres libres. Nous comptons aussi l'exposition en [4, Chapitre 9] de la procédure nommée « subset construction » et le Lemme de transfert [4, §1.2.15]. L'adaptation de ce Lemme au contexte algébrique (où les treillis ne sont pas complets) et au problème de la complétude a été suggéré par l'analyse de l'implication fonctorielle dans les théories d'itération [25], voir par exemple [40, §7].

L'article [89], apparus d'abord en forme de résumé en [83], a attiré l'attention de Yde Venema, chercheur qui excelle dans le domaine de la logique modale et algébrique. Cet intérêt a abouti à une collaboration [98] et à la mise en place du projet « Modal Fixpoint Logics », financé par le programme Van Gogh de collaboration entre Pays-Bas et France.

4.1 Un théorème d'élimination des coupures

Celle des tableaux est une méthode – bien connue en logique modale – pour démontrer la complétude d'un système axiomatique. Avec un œil ouvert vers la théorie des preuves, on ne peut pas s'empêcher de remarquer les similarités – mais aussi les différences – entre tableaux et preuves. Par exemple, les règles déductives des tableaux incluent règles d'introduction de la conjonction et de la disjonction, semblables à celles d'un calcul des séquents pour la logique classique dans le style de Gentzen.

Prenons maintenant en considération la règle[1] déductive des tableaux pour les connecteurs modaux de possibilité et nécessité :

$$\frac{\phi_i \,,\, \Phi \vdash}{\langle\ \rangle\phi_1 \,,\, \dots \,,\, \langle\ \rangle\phi_n \,,\, [\ ]\Phi \,,\, \Lambda \vdash} \tag{4.1}$$

Dans la règle, Λ dénote un ensemble de littéraux, Φ dénote un ensemble de formules et $[\ ]\Phi$ dénote l'ensemble $\{\, [\ ]\phi \mid \phi \in \Phi \,\}$. Cette règle peut se comprendre comme il suit : *si l'ensemble de formules* $\langle\ \rangle\phi_1, \dots, \langle\ \rangle\phi_n, [\ ]\Phi, \Lambda$ *est satisfiable, alors l'ensemble* $\phi_i \,,\, \Phi$ *est aussi satisfiable, pour tout* $i \in \{\, 1, \dots, n \,\}$.

Une autre lecture de cette règle, plus proche de la théorie des preuves, est la suivante : *si le séquent* $\phi_i \,,\, \Phi$ *est inconsistant, alors il en est de même du séquent* $\langle\ \rangle\phi_1 \,,\, \dots \,,\, \langle\ \rangle\phi_n \,,\, [\ ]\Phi \,,\Lambda$.

Remarquons que, en principe, nous pourrions avoir d'autres raisons pour affirmer que le séquent $\langle\ \rangle\phi_1, \dots, \langle\ \rangle\phi_n, [\ ]\Phi, \Lambda$ est inconsistant. Par exemple, il suffirait de trouver une formule inconsistante γ telle que le séquent $\langle\ \rangle\phi_1 \wedge \dots \wedge \langle\ \rangle\phi_n \wedge [\ ]\Phi, \Lambda \vdash \delta$ soit démontrable. Une application de la règle déductive

[1] Plus précisément, il s'agit d'un schéma de règles.

de coupure permettrait alors de démontrer l'inconsistance du séquent qui est conséquence de 4.1.

Nous arrivons donc à une différence fondamentale entre la théorie des preuves et la méthode des tableaux : dans la dernière, les problèmes posés par la règle de coupure et la procédure d'élimination des coupures ne sont pas thématisés. En particulier, la règle de coupure est absente de l'ensemble de règles déductives des tableaux pour la logique modale K. Ce fait peut avoir une seule explication : la logique modale K satisfait le théorème d'élimination des coupures – de façon à ce que les tableaux puissent être rapprochés à des preuves sans coupures. Comme d'habitude, un tel théorème implique (et en effet est équivalent au fait) que la règle 4.1 est inversible dans le sens suivant : *si* Λ *est un ensemble consistant de littéraux et si le séquent* $\langle\ \rangle\phi_1, \ldots, \langle\ \rangle\phi_n, [\ ]\Phi, \Lambda$ *est inconsistant, alors il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que le séquent* ϕ_i, Φ *est aussi inconsistant.*

Le point de départ de notre étude algébrique du μ-calcul a été de démontrer formellement cette propriété d'élimination des coupures, d'abord pour la logique modale K et puis pour son extension, le μ-calcul propositionnel. Dans un cadre algébrique, une telle propriété peut s'énoncer comme suit :

Proposition 4.1.1. *Soit* $\mathcal{F}(Y)$ *(ou* $\mathcal{F}_\mu(Y)$*) l'algèbre de Lyndenbaum de la logique modale* K *(du* μ*-calcul propositionnel modale), et soit* $\Lambda \subseteq Y \cup \neg Y$ *tel que* $\bigwedge \Lambda \not\leq \bot$*. Si la relation*

$$\bigwedge \Lambda \wedge \langle\ \rangle\phi_1 \wedge \ldots \wedge \langle\ \rangle\phi_n \wedge \bigwedge [\ ]\Phi \leq \bot$$

est vraie dans $\mathcal{F}(Y)$ *(dans* $\mathcal{F}_\mu(Y)$*), alors il existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tel que la relation*

$$\phi_i \wedge \bigwedge \Phi \leq \bot$$

est aussi vrai dans $\mathcal{F}(Y)$ *(dans* $\mathcal{F}_\mu(Y)$*).*

Rappelons qu'une logique propositionnelle L, ayant une axiomatisation par des règles déductives, peut se considérer comme un système algébrique – incluant dans sa signature les symboles $\vee, \wedge$, de façon que les termes sur cette signature soient les formules de la logique – axiomatisé au premier ordre par des formules de Horn. On peut considérer la classe des modèles de ces formules de Horn, et les morphismes entre modèles. Ces modèles sont appelés les *algébrès* (ou modèles algébriques) de la logique L. Quand nous parlons de μ-calcul propositionnel modale – en tant que logique propositionnelle – et des ses algèbres, nous pensons évidemment à l'axiomatisation proposée par Kozen [54].

L'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}(Y)$ est le modèle construit de la syntaxe comme suit. Ses cléments sont les classes d'équivalence de formules ϕ dont les variables propositionnelles libres appartiennent à Y. Deux formules ϕ et ψ sont équivalentes si la formule $\phi \leftrightarrow \psi$ est un théorème. L'algèbre $\mathcal{F}(Y)$ est libre sur l'ensemble Y. C-à-d., nous avons une fonction $i : X \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$, qui associe à une variable propositionnelle sa classe d'équivalence, avec la propriété universelle suivante : si $\mathcal{A}$ est une algèbre de L est $v : Y \longrightarrow \mathcal{A}$ est une interpretation de variables dans $\mathcal{A}$, alors il existe un seul morphisme d'algèbres $\tilde{v}$ tel que $\tilde{v} \circ i = v$.

La méthode utilisée pour prouver la Proposition 4.1.1 est repose sur deux considérations de type algébrique. D'abord le fait que l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}(Y)$ est libre sur l'ensemble Y. Une conséquence de cette propriété est que est projectif $\mathcal{F}(Y)$:si $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)$ est un épimorphisme, alors $\mathcal{F}_\mu(Y)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$ – ou alors on dit que $\mathcal{F}_\mu(Y)$ est une rétraction de $\mathcal{B}$.

En suite, nous montrons que, étant donnée une algèbre arbitraire du μ-calcul $\mathcal{F}$ qui ne satisfait pas la propriété décrite par la Proposition 4.1.1, on peut construire une algèbre $\mathcal{B}$ avec un épimorphisme $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui corrige ce défaut. Or, si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu(Y)$ et $\mathcal{F}_\mu(Y)$ ne satisfait pas la propriété de 4.1.1, alors $\mathcal{F}_\mu(Y)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$ où le défaut a été corrigé. Nous invitons le lecteur à vérifier que si une algèbre satisfait la propriété de 4.1.1, alors aussi chaque sous-algèbre satisfait la même propriété. On déduit par conséquence que $\mathcal{F}_\mu(X)$ satisfait la propriété, et donc on a une contradiction.

Cette méthode compte quelques précédents qui ont dirigé notre travail. Nous pensons d'abord à la preuve de Alan Day que les treillis libres satisfont la propreté de Whitman [36] ; nous pensons aussi à la la preuve, due à Peter Freyd, que dans les topoi libres l'objet terminal est projectif et non décomposable [59, §22].[2]

4.2 La théorie des $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$-adjoints

La Proposition 4.1.1 montre que le μ-calcul propositionnel modale satisfait un théorème d'élimination des coupures. Elle montre quelque chose de plus forte : le μ-calcul propositionnel modale satisfait la propriété de la sous-formule.[3] Une première conséquence de cette propriété est la suivante :

[2]Cette dernière propriété revient à dire que si, en logique intuitionniste d'ordre supérieure, $\phi \vee \neg\phi$ est démontrable, alors on peut déjà démontrer ϕ ou bien $\neg\phi$.

[3]Récemment un système déductif pour la logique linéaire avec plus petits et plus grands points fixes a été proposé in [8]. Les coupures peuvent être éliminés de ce calcul qui d'ailleurs ne satisfait pas la propriété de la sous-formule.

Proposition 4.2.1. *Dans l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$ l'opérateur modale de possibilité $\langle\ \rangle$ possède un adjoint à droite r, $\langle\ \rangle \dashv r$. En plus, pour tout $\phi \in \mathcal{F}_\mu(Y)$, l'ensemble des itérés $\{\, r^n(\phi) \mid n \geq 0 \,\}$ est fini.*

Rappelons que, pour deux ensembles ordonnés P, Q et une fonction monotone (où croissante) $f : P \longrightarrow Q$, un adjoint à droite est une fonction $g : Q \longrightarrow P$ telle que

$$f(p) \leq q \quad \text{ssi} \quad p \leq g(q)\,, \tag{4.2}$$

pour tout $p \in P$ et $q \in Q$. Cette relation entre f et g est notée d'habitude par $f \dashv g$. On dit aussi que g est le résidu de f, et on démontre que g est aussi monotone.

La formule $r(\phi)$ étant définie à partir des sous-formules de ϕ – en exploitant la propriété de la sous-formule – tous les itérés $r^n(\phi)$ sont des conjonctions des sous-formules de ϕ, et sont par conséquence en nombre fini.

La Proposition possède des conséquences intéressantes pour la théorie des points fixes.

Proposition 4.2.2. *Dans l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$, le plus petit point fixe $\mu_x.(\phi \vee \langle\ \rangle x)$ est la plus petite borne supérieure des approximations $\langle\ \rangle^n \phi$.*

Le preuve consiste à montrer que si $\langle\ \rangle^n \phi \leq \psi$ pour tout $n \geq 0$, alors $\mu_x.(\phi \vee \langle\ \rangle x) \leq \psi$. À partir de la propriété d'adjonction, on démontre que $\phi \leq r^n(\psi)$, pour tout $n \geq 0$, et donc on a $\phi \leq \chi$ où $\chi = \bigwedge_{n \geq 0} r^n(\psi)$. Observons que χ est bien défini car c'est une conjonction d'un nombre fini de formules, l'ensemble $\{\, r^n(\psi) \mid n \geq 0 \,\}$ étant fini. Or $\langle\ \rangle \chi \leq \chi$, car

$$\begin{aligned}
\langle\ \rangle \chi = \langle\ \rangle \bigwedge_{n \geq 0} r^n(\psi) &\leq \bigwedge_{n \geq 0} \langle\ \rangle (r^n(\psi)) \\
&\leq \bigwedge_{n \geq 1} \langle\ \rangle (r^n(\psi)) = \bigwedge_{n \geq 0} \langle\ \rangle (r(r^n(\psi))) \\
&\leq \bigwedge_{n \geq 0} r^n(\psi) = \chi\,,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que r est monotone et la relation $\langle\ \rangle(r(x)) \leq x$ qui découle de la relation d'ajoinction (4.2). Nous avons par conséquence $\phi \vee \langle\ \rangle \chi \leq \chi$, $\mu_x(\phi \vee \langle\ \rangle x) \leq \chi$ et $\mu_x(\phi \vee \langle\ \rangle x) \leq \chi$ aussi, car $\chi \leq \psi$.

Une remarque est maintenant d'ordre. Le lecteur qui connait la théorie des points fixes objectera que la relation

$$\mu_x.(\phi \vee \langle\ \rangle x) = \bigvee_{n \geq 0} \langle\ \rangle^n \phi\,,$$

que nous venons de démontrer, est toujours vraie, dans tout *treillis complet*, de que l'opération $\langle\ \rangle$ possède un adjoint à droite. Il s'agit d'un théorème qu'on peut attribuer à Tarski (et Knaster) [94, §3].

La Proposition 4.2.2 est intéressante exactement par ce que l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$ n'est pas à priori un treillis complet et, par contre, elle montre que cette algèbre rassemble à un treillis complet – au moins en ce qui concerne le plus petit point fixe de $\phi \vee \langle\ \rangle x$. Nous avons montré qu'ils existent toujours des modèles algébriques des μ-calculs qui ne sont pas des treillis complets et qui ne rassembleront jamais à des treillis complets. Dans ce modèles la relation

$$\mu.f = \bigvee_{\alpha \in Ord} f^\alpha(\bot)\,, \tag{4.3}$$

exprimant la fait que le plus petit point fixe de f peut être construit à partir des ses approximation $f^\alpha(\bot)$, ne peut pas être réalisée. Cela est le contenu de l'Exemple 2.2 et du Théorème 2.3 de [89].

La stratégie générale de la preuve de complétude de [89] consiste à chercher une classe de formules $\mathcal{S}$ assez large telle que, si l'on considère une formule $\phi(x) \in \mathcal{S}$ et son interpretation sur l'algèbre de Lyndenbaum en tant que fonction monotone $f : \mathcal{F}_\mu(Y) \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)$, alors le plus petit point fixe de f est *constructif* au sens que la relation (4.3) entre f est μ.f est satisfaite. Jusqu'à maintenant, nous avons montré que $\mathcal{S} = \{\, \phi \vee \langle\ \rangle x \,\}$ est une telle classe. Pour élargir une cette bien petite classe, nous cherchons d'abord à généraliser l'argument présenté ci-dessus. À ce fin, nous étudierons la suivante généralisation de la notion d'adjoint.

Définition 4.2.3. Soient P, Q deux ensembles ordonnés. Une fonction monotone $f : P \longrightarrow Q$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$-*adjoint* (à gauche) si pour tout $q \in Q$ il existe un ensemble fini $\mathcal{G}_f(q) \subseteq P$ tel que, pour tout $p \in P$, on a

$$f(p) \leq q \quad \text{ssi} \quad p \leq c, \;\text{ pour quelque } c \in \mathcal{G}_f(g)\,.$$

Pour P un ensemble ordonné, soit $\mathcal{O}_\mathfrak{f}(P)$ l'ensemble des section initiales qui sont unions finies d'idéaux principaux. C-à-d. $I \in \mathcal{O}_\mathfrak{f}(P)$ si I est de la forme $I(c_1, \ldots, c_n)$ où $I(c_1, \ldots, c_n) = \{\, x \in P \mid \exists i \,\text{t.q.}\, x \leq c_i \,\}$. Si $I = I(c_1, \ldots, c_n)$ et $f : P \longrightarrow Q$ est monotone, alors nous posons $\mathcal{O}_\mathfrak{f}(f)(I) = I(f(c_1), \ldots, f(c_n))$. Il est évident que la correspondance $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$ définit un foncteur de la catégorie des ensembles ordonnés vers elle même. Le Lemme suivant explique la raison du nom de $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$-adjoint.

Lemme 4.2.4. *$f : P \longrightarrow Q$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$-adjoint si et seulement si $\mathcal{O}_\mathfrak{f}(f) : \mathcal{O}_\mathfrak{f}(P) \longrightarrow \mathcal{O}_\mathfrak{f}(Q)$ est un adjoint à gauche.*

Les $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoints possèdent des propriétés intéressantes pour la théorie des ensembles ordonnés, par exemple ils préservent les plus petites bornes supérieures des ensembles dirigés. Bien que nous ayons abouti à la Définition 4.2.3 en étudiant le μ-calcul, remarquons que cette généralisation du concept d'adjoint était préexistante à notre travail [37, 95].

Au fin de la théorie des points fixes, il est nécessaire d'affiner la notion d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint de la forme $f : P \longrightarrow P$ à celle de $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint finitaire. À ce fin et pour $p \in P$, soit $G(p, f)$ le plus petit sous-ensemble $X \subseteq P$ tel que $p \in X$ et tel que $\mathcal{G}_f(p') \subseteq X$ chaque fois que $p' \in X$.

Définition 4.2.5. Nous disons qu'un *$\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint* $f : P \longrightarrow P$ est *finitaire* si pour tout $p \in P$, l'ensemble $G(p, f)$ est fini.

La proposition intéressante pour la théorie des points fixes est la suivante :

Proposition 4.2.6. *Soit P un ensemble ordonné avec un élément minimum $\perp \in P$. Si $f : P \longrightarrow P$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint finitaire et le plus petit point préfixe de f, $\mu.f \in P$, existe, alors $\mu.f$ est la plus petit borne supérieure des ses approximations finies $f^n(\perp)$:*

$$\mu.f = \bigvee_{n \geq 0} f^n(\perp) \,. \tag{4.4}$$

En retournant à l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$, nous démontrons le fait suivant :

Proposition 4.2.7. *La correspondance*

$$\nabla^n : \mathcal{F}_\mu^n(Y) \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)$$

qui envoie le vecteur $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ vers

$$\nabla^n(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} \langle\ \rangle \phi_i \wedge [\ ] \bigvee_{i=1,\ldots,n} \phi_i$$

est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint finitaire sur l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$.

Encore une fois, la preuve de ce fait dépende de la propriété de la sous-formule. Il s'agit alors d'un exercice, long mais pas difficile, d'adapter cet ensemble d'idées pour démontrer la Proposition suivante.

Proposition 4.2.8. *Soit $\mathcal{S}$ la classe des formules ϕ engendrées à l'aide de la grammaire suivante :*

$$\phi = x \mid \bigvee \Phi \mid \bigwedge \Lambda \wedge \nabla \Phi \mid \mu_x.\phi$$

où, comme d'habitude, Λ est un ensemble de littéraux sur les variables propositionnelles Y, x est une variable dont toutes ses occurrences dans ϕ sont positives, et

$$\nabla\Phi = \bigwedge_{\phi\in\Phi} \langle\ \rangle\phi \wedge [\ ]\bigvee\Phi\,. \tag{4.5}$$

Soit $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{S}$ et considérons l'interprétation de cette formule comme fonction monotone $f : \mathcal{F}_\mu(Y) \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)$ de la variable x. Alors f est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$-adjoint finitaire et par conséquence son plus petit point fixe est constructif, c-à-d. il satisfait la relation (4.4).

Remarquons que les deux connecteurs logiques absents de la grammaire ci-dessus sont la conjonction et l'opérateur de plus grand point fixe. Nous allons dédier le chapitre suivant à l'étude de la conjonction dans le contexte présenté ici. Il reste un problème ouvert de comprendre si on peut intégrer et comprendre le plus grand point fixe dans la théorisation proposée.

4.3 Le problème de la conjonction

Nous nous proposons en suite d'élargir la classe $\mathcal{S}$ des formules dont l'interprétation sur l'algèbre de Lyndenbaum satisfait la relation (4.4). En bref, nous souhaitons modifier la structure de la grammaire de la Proposition 4.2.8 afin de permettre un utilisation de la conjonction sans contraintes pour engendrer les formules. L'outil pour atteindre ce fin est la « subset construction » de [4, §9, §9.4].

Le point de vue vectoriel. Nous allons en suite faire recours à un fait bien connu, l'équivalence expressive entre μ-calcul linéaire et μ-calcul vectoriel. On peut naturellement comprendre ce dernier comme un calcul des plus petites solutions des systèmes d'équations. Rappelons que cette équivalence repose sur la propriété de Bekic [81, §2.3] qui, à un premier approche, est une recette pour construire la plus petite solution d'un système d'équations à n variables à l'aide de la plus petite solution d'un système d'équations à $n-1$ variables.

Nous nous limiterons à prendre en considération des formules du μ-calcul qui ne contiennent pas des occurrences de l'opérateur ν de plus grand point fixe. Une telle formule est définissable par le μ-calcul vectoriel comme étant une projection de la plus petite solution d'un système d'équations – que l'on construit à partir de la formule même. Pour illustrer ce point – et aussi les points que suivrons – nous procéderons par l'exemple et considérerons la formule

$$\mu_x.(\,[\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)\,)\,. \tag{4.6}$$

À cette formule on associe le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = [\;\,]x \wedge y \\ y = \langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

La propriété de Bekic nous instruit sur comment construire la plus petite solution de ce système selon la recette suivante. On élimine d'abord la variable y, en posant $\mathtt{y} = \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)$. On trouve ensuite la plus petite solution du système

$$\left\{ \; x = [\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,) \; \right\}$$

c-à-d. on pose $\mathtt{x} = \mu_x.(\,[\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)\,)$. Un petit exercice montrera que le couple $(\mathtt{x}, \mathtt{y}[\mathtt{x}/x])$, c-à-d.

$$\begin{aligned} \mathtt{x} &= \mu_x.(\,[\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)\,)\,, \\ \mathtt{y}[\mathtt{x}/x] &= \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle \mathtt{x} \vee [\;\,]y\,) \\ &= \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle(\,\mu_x.(\,[\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)\,)\,) \vee [\;\,]y\,)\,, \end{aligned}$$

est la plus petite solution de (4.7). Ce n'est pas par hasard que la formule originaire, $\mathtt{x}$, soit partie de cette solution. Aussi, on démontre que si $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ est une solution de (4.7), alors $\mathtt{x} = \mu_x.(\,[\;\,]x \wedge \mu_y.(\,\langle\;\,\rangle x \vee [\;\,]y\,)\,)$. En particulier, cela montre que la formule (4.6) est définissable en tant que première projection de la plus petite solution du système (4.7).

Il résulte souvent plus aisé de travailler dans un contexte vectoriel, ce que nous avons fait en [89], car ce point de vue est naturellement proche de la théorie des automates. Cet approche ouvre d'ailleurs des problèmes bien intéressants pour la théorie des plus petits points fixes, par exemple celui de comprendre la puissance expressive des fragments des μ-calculs qui sont incomplets par rapport au vectoriel, c-à-d. ils ne permettent pas l'application de la propriété de Bekic. Un premier effort dans cette direction est le travail [98].

Distributivité des opérateurs modaux. Il y a une interaction forte entre point fixes est distributivité. Par exemple, la hiérarchie d'alternance entre plus petits et plus grands points fixes est dégénérée sur les treillis distributifs. Une discussion assez approfondie portant sur cette interaction se trouve en [4, §9]. L'analyse de la conjonction en [89] passe à travers cette discussion, que nous illustrer ici dans le cas particulier de la logique propositionnelle modale K (dans sa veste algébrique) et du μ-calcul propositionnel modale.

Rappelons donc que les opérateurs modaux de possibilité et nécessité sont définissables par l'opérateur ∇[4], défini par l'équation (4.5) :

$$\langle\ \rangle x = \nabla\{x, \top\}\,, \qquad\qquad [\ ]x = \nabla\{x\} \vee \nabla\emptyset\,.$$

En principe, donc, on pourrait prendre cet opérateur comme primitif pour la logique propositionnelle modale K. L'importance de cet opérateur provient de la loi distributive suivante[5] :

$$\nabla X \wedge \nabla Y = \bigvee_{R \in X \bowtie Y} \nabla\{\, x \wedge y \mid (x,y) \in R\,\}$$

où

$$\begin{aligned} X \bowtie Y = \{\, R \subseteq X \times Y \mid \forall x \in X\, \exists y \in Y \text{ t.q. } (x,y) \in R \\ \text{et } \forall y \in Y\, \exists x \in X \text{ t.q. } (x,y) \in R\,\}\,. \end{aligned}$$

En utilisant cette loi distributive de ∇ par rapport à la conjonction $\wedge$, nous nous préfixons d'éliminer les conjonctions apparaissent dans un système d'équations – en les poussant vers le bas de façon circulaire. Il s'agit de la méthode décrite dans [4, §9.3], que nous allons illustrer à l'aide du système d'équations (4.7).

Réécrivons d'abord ce système à l'aide de l'opérateur ∇ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (\nabla\{x\} \vee \nabla\emptyset) \wedge y \\ y = \nabla\{x, \top\} \vee (\nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset) \end{array} \right\}$$

Nous procedons d'abord à une première simplification ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (\nabla\{x\} \wedge \nabla\{x, \top\}) \vee (\nabla\{x\} \wedge \nabla\{y\}) \vee \nabla\emptyset \\ y = \nabla\{x, \top\} \vee \nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset \end{array} \right\}$$

qui est conséquence de simples transformations Booléennes :

$$\begin{aligned} x &= (\nabla\{x\} \vee \nabla\emptyset) \wedge (\nabla\{x, \top\} \vee \nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset) \\ &= (\nabla\{x\} \wedge \nabla\{x, \top\}) \vee (\nabla\{x\} \wedge \nabla\{y\}) \vee (\nabla\{x\} \wedge \nabla\emptyset) \\ &\quad \vee (\nabla\emptyset \wedge \nabla\{x, \top\}) \vee (\nabla\emptyset \wedge \nabla\{y\}) \vee (\nabla\emptyset \wedge \nabla\emptyset)\,, \end{aligned}$$

[4] Cet opérateur est noté $\rightarrow$ en [50, 99], et appelé modalité de recouvrement dans [34].

[5] Nous aimerions remercier Yde Venema pour nous avoir montré cette formule et en expliqué l'utilité. Les propriétés équationnelles de l'opérateur ∇ sont étudiés dans l'article [20].

et du fait que $\nabla\emptyset \wedge \nabla X = \bot$ si $X \neq \emptyset$. Pour continuer on observera que

$$\begin{aligned} \{\, x \,\} \bowtie \{\, x, \top \,\} &= \{\, \{\, (x,x), (x,\top) \,\} \,\} \\ \{\, x \,\} \bowtie \{\, y \,\} &= \{\, \{\, (x,y) \,\} \,\} \end{aligned}$$

et par conséquence

$$\nabla\{\, x \,\} \wedge \nabla\{\, x, \top \,\} = \nabla\{\, x \,\}\,, \qquad \nabla\{\, x \,\} \wedge \nabla\{\, y \,\} = \nabla\{\, x \wedge y \,\}\,.$$

On abouti donc aux système d'équations équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, x \wedge y \,\} \vee \nabla\emptyset \\ y = \nabla\{x, \top\} \vee \nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset \end{array} \right\}$$

où

1. les occurrences d'une conjonction se trouvent sous l'opérateur ∇,
2. chaque conjonction est de la forme $\bigwedge S$, où S est un sous-ensemble non vide de variables qui apparaissent sur le coté gauche du système (c-à-d. elles sont liés).

Pour éliminer complètement la conjonction, nous allons introduire une nouvelle variable z qui, implicitement, représente la conjonction $x \wedge y$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset \\ y = \nabla\{x, \top\} \vee \nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset \\ z = x \wedge y \end{array} \right\}$$

On procède comme avant pour calculer un terme s_z, équivalent à $x \wedge y$, où la conjonction est soumise aux contraintes (1) et (2) :

$$\begin{aligned} z &= x \wedge y \\ &= (\nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset) \wedge (\nabla\{\, x, \top \,\} \vee \nabla\{\, y \,\} \vee \nabla\emptyset) \\ &= (\nabla\{\, x \,\} \wedge \nabla\{\, x, \top \,\}) \vee (\nabla\{\, x \,\} \wedge \nabla\{\, y \,\}) \vee \bot \\ &\quad \vee (\nabla\{\, z \,\} \wedge \nabla\{\, x, \top \,\}) \vee (\nabla\{\, z \,\} \wedge \nabla\{\, y \,\}) \vee \bot \\ &\quad \vee \nabla\emptyset \\ &= \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, x \wedge y \,\} \vee \nabla\{\, z \wedge x, z \,\} \vee \nabla\{\, z \wedge y \,\} \vee \nabla\emptyset \\ &= \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\{\, z, z \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset \\ &= \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset\,. \end{aligned}$$

où, pour les dernieres deux etapes, nous avons consideré que $z \wedge x = x \wedge y \wedge x = x \wedge y = z$ et, de façon semblable, $z \wedge y = z$. Nous avons donc terminé le procédé, en ayant construit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset \\ y = \nabla\{x, \top\} \vee \nabla\{y\} \vee \nabla\emptyset \\ z = \nabla\{\, x \,\} \vee \nabla\{\, z \,\} \vee \nabla\emptyset \end{array} \right\} \tag{4.8}$$

Dénotons maintenant $\{ \ x = t_x \ \}_{x \in X}$ le système (4.7) et $\{ \ u = s_u \ \}_{u \in U}$ le système (4.8). Remarquons alors les propriétés suivantes :

1. on peut considérer que les variables dans U sont les sous-ensembles non vides X – en identifiant x avec le singleton $\{ x \}$, y avec le singleton $\{ y \}$, et z avec l'ensemble $\{ x, y \}$,
2. la conjonction n'apparaît pas dans les termes s_u,
3. si $u \subseteq X$ et $u \neq \emptyset$, alors l'egalité

$$\bigwedge_{x \in u} t_x = s_u[\bigwedge_{x \in u_1} x/u_1, \ldots, \bigwedge_{x \in u_n} x/u_n] \tag{4.9}$$

   est démontrable dans la théorie algèbrique de la logique modale K. Ici $U = \{ u_1, \ldots, u_n \}$ et $[\bigwedge_{x \in u_1} x/u_1, \ldots, \bigwedge_{x \in u_n} x/u_n]$ denote la substitution en parallèle des variables u_i par les termes $\bigwedge_{x \in u_i} x$.

Évidemment, ce procédé est tout-à-fait général et on peut le démarrer à partir de n'importe quel système de la forme $\{ \ x = t_x \ \}_{x \in X}$ pour aboutir à un système $\{ \ u = s_u \ \}_{u \in U}$ étant en relation avec le premier comme décrit ci-dessus.

Interpretation algébrique. Le système (4.8) que nous avons construit n'est pas équivalent au système (4.7), au moins dans un sens évident ou reconnus. Il faut donc établir la raison d'être de cette construction et, pour ce faire, nous comprendrons la signification de l'équation (4.9) à l'aide du diagramme commutatif (4.10) qui suit.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre modale K, alors un système d'équations de la forme $\{y = t_x\}_{x \in X}$ donne lieux à une fonction monotone $t : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathcal{A}^X$, où $\mathcal{A}^X$ est le produit de $\mathcal{A}$ avec soi-même X fois. En effet, si $x \in X$, alors t composé avec la projection $\pi_x : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathcal{A}$ est rien d'autre que l'interprétation de t_x dans l'algèbre $\mathcal{A}$. Le plus petit point fixe de la fonction t coïncide avec la plus petite solution du système d'équations dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Dans la situation décrite ci-dessus, nous avons deux fonctions $t : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathcal{A}^X$ et $s : \mathcal{A}^U \longrightarrow \mathcal{A}^U$. En suite, pour un sous-ensemble non vide $u \subseteq X$ et pour un vecteur $v \in \mathcal{A}^X$, posons

$$i_u(v) = \bigwedge_{x \in u} v_x \,.$$

Soit $i : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathcal{A}^U$ définie par le fait que $\pi_u \circ i = i_u$, pour tout $u \in U$. La signification de l'équation (4.9) consiste alors à dire que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^X & \xrightarrow{\quad t \quad} & \mathcal{A}^X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathcal{A}^U & \xrightarrow{\quad s \quad} & \mathcal{A}^U \end{array} \tag{4.10}$$

est commutatif.

La Proposition suivante est une conséquence du Lemme de Transfert [4, §1.2.15] et suggère une première réponse pour l'équivalence cherchée entre (4.8) et (4.7).

Proposition 4.3.1. *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre modale dont le résidu est un treillis complet, alors $i(\mu.t) = \mu.s$.*

En soi-même, cette Proposition n'est pas d'aide, car on ne connait pas si le résidu de l'algèbre de Lyndenbaum $\mathcal{F}_\mu(Y)$ est un treillis complet.[6]

D'ailleurs, la Proposition suggère qu'on se trouve sur le bon chemin, et qu'il faut étudier la situation décrite jusqu'à maintenant plus en détailles. Nous observons que la fonction $i : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathcal{A}^U$ est monique, étant scindée par $\pi : \mathcal{A}^U \longrightarrow \mathcal{A}^X$ (c-à-d. le composé $\pi \circ i$ est l'identité de $\mathcal{A}^X$) définie par

$$\pi(w)_x = w_{\{\,x\,\}}\,.$$

Nous avons alors trouvé la Proposition suivante qui, pour nos fins, est bien plus intéressante :

Proposition 4.3.2. *Si le plus petit point fixe $\mu.s$ existe et est constructif, c-à-d. si la relation $\mu.s = \bigvee_{n\geq 0} s^n(\bot)$ est vraie, alors $\mu.t$ existe aussi, avec $\mu.t = \pi(\mu.s)$. Aussi, $\mu.t$ est constructif, c-à-d. $\mu.t = \bigvee_{n\geq 0} t^n(\bot)$.*

On peut alors donner la Proposition suivante.

Proposition 4.3.3. *Soit Σ_1 le fragment du μ-calcul propositionnel modale défini par la grammaire suivante :*

$$\phi = x \mid \neg x \mid \bot \mid \phi \vee \phi \mid \top \mid \phi \wedge \phi \mid \langle\ \rangle\phi \mid [\ ]\phi \mid \mu_x.\phi\,.$$

Alors le plus petit point fixe (de l'interprétation) d'une formule $\phi \in \Sigma_1$ est constructif, en satisfaisant l'équation (4.4).

[6]Bien qu'on puisse deviner que le résidu de l'algèbre $\mathcal{F}_\mu(Y)$ n'est pas un treillis complet, il n'existe pas une preuve de ce fait.

Résumons la stratégie suivie – que nous avons exemplifié avec la formule (4.6) – pour demontrer cette Proposition :

1. on passe d'abord au point de vue vectoriel, en récrivant la formule ϕ en tant que système d'équations $\{x = t_x\}_{x \in X}$,
2. on récrive chaque terme t_x de ce système en utilisant l'opérateur ∇ à la place de $\langle\ \rangle$ et $[\ ]$,
3. on construit le système $\{u = s_u\}_{u \in U}$, où la conjonction y est limitée dans le contexte des opérateurs de la forme $\bigwedge \Lambda \wedge \nabla X$, Λ étant un ensemble de littéraux,
4. car l'interprétation dans l'algèbre de Lyndenbaum $s : \mathcal{F}_\mu(Y)^U \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)^U$ du système $\{u = s_u\}_{u \in U}$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{f}$-adjoint finitaire, son plus petit point fixe est constructif par la Proposition 4.2.6 ; on utilise alors la Proposition 4.3.2 pour déduire que le plus petit point fixe de $t : \mathcal{F}_\mu(Y)^X \longrightarrow \mathcal{F}_\mu(Y)^X$ est constructif,
5. on revient enfin du système $\{x = t_x\}_{x \in X}$ à la formule originaire ϕ, en montrant que l'équivalence entre point de vue linéaire et point de vue vectoriel s'étende à la qualités des points fixes ; c-à-d. on démontre que – sous certaines conditions – le plus petit point fixe de t est constructif si et seulement si le plus petit point fixe de ϕ est constructif.

4.4 Le théorème de complétude

Nous avons insisté assez sur l'importance de relation (4.4) et nous allons dans la suite en expliquer la raison. Rappelons que la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{L}$ d'un treillis L est le treillis complet dont les éléments sont les idéaux normaux de I. C-à-d., pour $I \subseteq L$, nous avons $I \in \overline{L}$ si et seulement si I est (a) une section initiale : $y \leq x \in L$ implique $y \in L$), (b) dirigé : si $X \subseteq I$ est un sous-ensemble fini, alors il existe $y \in I$ tel que $x \leq y$ pour tout $x \in X$, (c) normal : si $z \leq y$ pour tout $y \in L$ tel que $x \leq y$ pour tout $x \in I$, alors $z \in I$. L'ordre entre idéaux normaux est donné par l'inclusion. Le treillis $\overline{L}$ est une extension de L au sens suivant : si $l \in L$ alors l'idéal principal de l, $\downarrow l = \{ x \in L \mid x \leq l \}$, est un idéal normal et la correspondance $l \mapsto \downarrow l$ est un homomorphisme de treillis. Cette correspondance a possède une propriété remarquable : supposons que $X \subseteq L$ est tel que le supremum $\bigvee X$ existe dans L ; alors $\downarrow \bigvee X = \bigvee \{ \downarrow x \mid x \in X \}$. C-à-d., $\downarrow$ préserve les suprema arbitraires et, de même, il préserve les infima arbitraires.

Rappelons quelques faits ultérieurs sur la complétion de Dedekind-MacNeille. D'abord, si $\mathcal{B}$ est un algèbre de Boole, alors $\overline{\mathcal{B}}$ est aussi une algèbre de Boole.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre modale K[7] résiduée – i.e. la modalité $\langle\ \rangle$ est un adjoint à gauche – alors $\overline{\mathcal{A}}$ est aussi une algèbre modale résiduée ; en plus, l'inclusion $\downarrow$ de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ est un homomorphisme d'algèbres modales K. En combinant ces remarques avec la Proposition 4.2.1, on obtient le fait suivant : *la complétion de Dedekind-MacNeille $\overline{\mathcal{F}_\mu(Y)}$ est une algèbre modale K et l'inclusion $\downarrow$ est un homomorphisme d'algèbres K*. D'ailleurs, nous sommes intéressés à la logique modale K seulement en vert de son extension, le μ-calcul propositionnel modal. Il faut donc se demander si l'injection $\downarrow$ est aussi un homomorphisme de modèles algébriques du μ-calcul. Cette question revient à demander si les points fixes sont préservés par $\downarrow$. Le Lemme suivant, dont la preuve repose sur le fait que $\downarrow$ préserve tous les suprema, donne une première réponse à cette question.

Lemme 4.4.1. *Soient $f : L \longrightarrow L$ et $\overline{f} : \overline{L} \longrightarrow \overline{L}$ tels que $\downarrow \circ f = \overline{f} \circ \downarrow$. Si $\mu.f$ existe et il est constructif, alors $\downarrow \mu.f = \mu.\overline{f}$.*

Comme conséquence de ce Lemme et de la Proposition 4.3.3, on peut donc déduire ce qui suit :

Proposition 4.4.2. *Si $\phi \in \Sigma_1$, alors $\downarrow \circ \phi = \phi \circ \downarrow$, c-à-d., l'inclusion canonique de $\mathcal{F}_\mu(Y)$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ préserve l'interpretation de toutes les formules appartenantes à la classe Σ_1.*

Corollaire 4.4.3. *Soit ϕ une formule appartenant à la classe Σ_1. Supposons que, dans tout algèbre modale K complète, elle ne soit pas satisfiable – au sens que la relation $\phi \leq \bot$ est toujours vérifiée dans ces algèbres. Alors la même relation, $\phi \leq \bot$, est démontrable dans le système axiomatique du μ-calcul proposé par Kozen.*

La preuve de ce Corollaire est un argument classique de la logique algébrique. Si la relation $\phi \leq \bot$ est vraie dans toute algèbre complète, alors elle est vraie dans $\overline{\mathcal{F}_\mu(Y)}$. Car l'inclusion $\downarrow$ est injective, alors la relation $\phi \leq \bot$ est vraie dans $\mathcal{F}_\mu(Y)$. Cette dernière affirmation est équivalente à dire que cette relation est démontrable à partir des axiomes de Kozen.

On obtient donc un théorème de complétude par rapport à la classe des algèbres modales K dont le résidu à un treillis forme un treillis complet. Quel rapport donc avec les théorèmes de complétude usuels, qui considèrent la classe des modèles standard, c-à-d. les ensembles des parties des états d'un système de transitions ? Nous avons prétendu en [89] que cette extension de notre théorème de complétude est possible et relativement aisée. Que notre prétention soit fondée et raisonnable a été documenté par deux travaux qui

[7] C-à-d., un modèle algébrique de la logique propositionnelle K.

ont apparus en suite. D'abord notre travail en collaboration avec M. Venema [98], où des techniques apparentées à celle exposés ici ont amené à une axiomatisation générique pour des fragments du μ-calcul et à leurs complétude par rapport à la classe des modèles standard. Aussi, le travail [93] est le complément à notre travail qui sert à obtenir un résultat de complétude du fragment Σ_1 par rapport à la classe des modèles standard. Dans ce travail, on propose une axiomatisation du μ-calcul qui inclut une règle à branchement infinitaire pour les operateurs de point fixe, règle qui repose sur la relation (4.4). On y trouve en suite une preuve de complétude de cette axiomatisation par rapport aux modèles standard. Les résultats présenté dans [89] peuvent aussi s'interpréter comme montrant que le système déductif de [93] est traduisible dans le système déductif de Kozen, au moins en ce qui concerne le fragment Σ_1.

Chapitre 5

Conclusions

Nous avons résumé, dans cet ouvrage, les accomplissements d'une période de recherche qui s'étale au long de huit ans. Nous en tirerons ici un bref bilan.

C'est peut être dans l'esprit du chercheur de ne jamais être satisfait de ce qu'on a accompli, en souhaitant toujours pousser un peu plus loin les limites des connaissances. Ou, plus véritablement, c'est dans l'esprit des italiens de vouloir se plaindre à toute occasion. Nous commencerons donc notre bilan en remarquant des difficultés qui ont accompagné le déroulement de cette période de recherche qui n'a pas certainement été linéaire.

Nous avons souvent senti le besoin de modifier le trajet de notre recherche pour l'adapter au contexte scientifique local et du moment. Nous pensons d'abord à nos différents passages entre les mathématiques et l'informatique. Nous pensons aussi à notre adaptation au contexte scientifique français. Or, la thématique de notre thèse de doctorat, que nous appellerons génériquement *sémantique catégorielle des langages de programmation*, est très peu à la mode en France. Le peu d'intérêt, dans ce pays, pour nos travaux sur ce thème a entraîné la nécessité de travailler sur d'autres sujets afin de gagner une certaine reconnaissance scientifique. Nous voulons être clair là dessus : d'un point de vue purement scientifique, l'abandon d'un parcours de recherche et connaissance pour des raisons sociologiques est sûrement reprochable ; et cette considération nous a jamais mis à l'aise dans nos démarches.

Après ces difficultés qui ressortent du contexte scientifique, nous voulons en mentionner d'autres qui, de nature bureaucratique et particulièrement en France, nous éloignent trop souvent de la recherche pour nous poser des casse-tête dans la vie quotidienne. Comme exemple, nous voulons prendre l'occasion de ce texte officiel que nous sommes en train de rédiger pour dénoncer le fait que la loi française empêche de reconnaître les expériences de travail acquises à l'étranger. Il s'avère dans notre cas qu'un an et demi de travail dans le système éducatif Danois, reconnu dans ce système aux fins de l'ancienneté, ne soit pas reconnaissable en France au même titre, par loi. Il s'agit bien de notre expérience personnelle, mais elle est partagée par plusieurs autres chercheurs français qui ont eut l'occasion de travailler à l'étranger. La disparité de traitement entre collègues chercheurs qui en découle et dont on s'aperçoit ne peut alors que renforcer l'impression dérangeante d'une méfiance excessive, enracinée jusqu'aux institutions juridiques, des institutions françaises pour les homologues étrangères.

Nous pourrions continuer pendant plusieurs pages avec des remarques et plaintes similaires, en suivant notre vocation italienne. En tant que scientifique, il nous semble plus intéressant de comprendre les raisons d'un parcours difficile et, éventuellement, d'en reconnaître les aspects positifs.

Avec ces fréquents changements de route nous avons abordés dans nos recherches un nombre important de sujets, la logique modale avec les points fixes, la logique linéaire, les ordres et les treillis, les catégories, la concurrence et la combinatoire. Cela a été sûrement une conséquence des circonstances, mais nous devons aussi avouer que nous avons secondé avec ces changements notre propre curiosité et un besoin continu de se confronter avec des nouveaux défis. Une conséquence de nos pérégrinations est que nous ne pouvons pas nous proclamer à droit des experts dans chacun des sujets abordés ; nous réclamons par contre une valeur et un caractère particuliers de nos contributions dans chacun des sujets. Nous essayerons d'identifier cette valeur et ce caractère.

Dans nos recherches, l'objectif principal consiste souvent à développer des points de vue et des outils alternatifs à ceux existants, plus qu'à démontrer de nouveaux théorèmes. Nous pourrions ainsi dire qu'il s'agit de fertiliser le terrain des connaissances, plutôt que de la production cumulative des connaissances. Ce caractère est possible grâce à notre expérience de recherche qui s'étale sur plusieurs sujets et aussi sur plusieurs traditions scientifiques.

On retrouve ce caractère explicitement dans l'article [89] où, évidemment, il s'agit de reparcourir une logique bien connue, le μ-calcul modale, et le théorème de complétude pour cette logique à l'aide des outils de l'algèbre universelle et de la théorie des catégories. Le même caractère réapparaît dans les articles [76, 77, 6, 12] où l'on met à l'épreuve la puissance – et en même temps les limites – des outils de la théorie des preuves dans le contexte des logiques des points fixes, une approche qui n'a pas manqué de donner ses fruits : par exemple, le Théorème 3.4 de [6], établi grâce à ces outils, peut se considérer comme une importante généralisation d'un célèbre résultat de Rabin [73, 3]. Dans les deux travaux sur les treillis [87, 85] le terrain des connaissances est fertilisé par la rencontre mise en ouvre entre la tradition nord-américaine sur les treillis [47, 41], notamment liée à la logique équationnelle et à l'algèbre universelle, et celle française [9, 31], ayant un caractère plus proprement combinatoire. Il s'agit donc d'étudier en profondeur les propriétés algébriques de certains objets combinatoires et d'un autre côté, d'enrichir la théorie abstraite par les nombreuses observations qu'on peut opérer sur ces objets combinatoires.

Enfin, le travail [86] cache aussi sous plusieurs formes ce caractère qui donne priorité à la production d'outils mathématiques pour comprendre les problèmes. À notre avis, le résultat principal obtenu dans cet article – même si on peut le considérer d'une certaine difficulté – est peu significatif si on le considère hors contexte. Son importance consiste à fournir des idées nouvelles avec lesquelles aborder à nouveau et en toute généralité la question du bon étiquetage des structures d'événements, sortant par conséquent d'une impasse d'une quinzaine d'années. En ce qui concerne l'interaction entre disciplines, ce travail a constitué un petit défi pour nous : nous n'avons pas eu à disposition des outils préexistants sur lesquels appuyer nos recherches, et nous avons fait recours à une importante dose d'imagination et créativité. D'ailleurs, le problème même naît d'une exigence d'interaction entre disciplines : il s'agit d'étudier la concurrence à l'aide de la théorie des ensembles ordonnés. Possiblement à cause de notre jeunesse en tant que chercheur en théorie de la concurrence, nous sommes d'avis que la dernière est encore une exigence et un objectif à atteindre, au lieu qu'une réalité : c'est toujours la théorie des monoïdes et des automates qui garde une interaction forte avec la théorie de la concurrence. Notre intérêt pour le problème du bon étiquetage peut alors aussi s'expliquer comme un désir de mettre en $\frac{1}{2}$uvre cette interaction entre concurrence et ensembles ordonnés, sans nécessairement faire recours aux outils traditionnels, les monoïdes et les automates.

Pour terminer ce bilan, qui a analysé les implications de nos recherches sur plusieurs disciplines et le caractère qui lui est propre, nous ferons mentions du fait que même ces recherches peuvent recevoir une attention particulière. C'est le cas d'un de notre collaborateurs qui, étant orateur invité, a dédié une heure entière sur une scène de l'Université Oxford en mentionnant un après l'autre une suite de nos théorèmes [97]. Cela nous a bien valu par les autres le titre d'expert dans les logiques de point fixe – ce que simplement et malheureusement signifie un nombre sans fin de taches de rapporteur sur ce sujet spécifique.

Bibliographie

[1] M. A. Arbib, E. G. Manes, Adjoint machines, state-behavior machines, and duality, J. Pure Appl. Algebra 6 (3) (1975) 313–344.

[2] A. Arnold, The μ-calculus alternation-depth hierarchy is strict on binary trees, Theor. Inform. Appl. 33 (4-5) (1999) 329–339.

[3] A. Arnold, D. Niwiński, Fixed point characterization of weak monadic logic definable sets of trees, in : Tree automata and languages (Le Touquet, 1990), vol. 10 of Stud. Comput. Sci. Artificial Intelligence, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 159–188.

[4] A. Arnold, D. Niwiński, Rudiments of μ-calculus, vol. 146 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.

[5] A. Arnold, L. Santocanale, Ambiguous classes in the games μ-calculus hierarchy, in : A. D. Gordon (ed.), FOSSACS 2003, No. 2620 in Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2003, proceedings of the 6th International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures. Held as Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2003. Warsaw, Poland, April 2003.

[6] A. Arnold, L. Santocanale, Ambiguous classes in μ-calculi hierarchies, Theoretical Computer Science 333 (1-2) (2005) 265–296.

[7] M. R. Assous, V. Bouchitté, C. Charretton, B. Rozoy, Finite labelling problem in event structures., Theor. Comput. Sci. 123 (1) (1994) 9–19.

[8] D. Baelde, D. Miller, Least and greatest fixed points in linear logic, in : N. Dershowitz, A. Voronkov (eds.), LPAR, vol. 4790 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007.

[9] M. Barbut, B. Monjardet, Ordre et classification : algèbre et combinatoire. Tomes I et II, Librairie Hachette, Paris, 1970, méthodes Mathématiques des Sciences de l'Homme, Collection Hachette Université.

[10] W. Belkhir, Algèbre et combinatoire des jeux de parité, Ph.D. thesis, Université de Provence (Dec. 2008).

[11] W. Belkhir, L. Santocanale, Undirected graphs of entanglement 2, in : V. Arvind, S. Prasad (eds.), FSTTCS 2007, vol. 4855 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007, proceedings of the 27th International Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, New Delhi, India, December 12-14, 2007.

[12] W. Belkhir, L. Santocanale, The variable hierarchy for the games μ-calculus, journal version, submitted to the journal Annals of Pure and Applied Logic (Sep. 2008).

[13] W. Belkhir, L. Santocanale, The variable hierarchy for the lattice μ-calculus, in : I. Cervesato, H. Veith, A. Voronkov (eds.), LPAR 2008, vol. 5330 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2008, proceedings of the 15th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, Doha, Qatar, November 22-27, 2008.

[14] M. K. Bennett, G. Birkhoff, Two families of Newman lattices, Algebra Universalis 32 (1) (1994) 115–144.

[15] D. Berwanger, Game logic is strong enough for parity games, Studia Logica 75 (2) (2003) 205–219, special issue on Game Logic and Game Algebra edited by M. Pauly and R. Parikh.

[16] D. Berwanger, Games and logical expressiveness, Ph.D. thesis, RWTH Aachen (2005).

[17] D. Berwanger, E. Grädel, Entanglement—a measure for the complexity of directed graphs with applications to logic and games, in : LPAR 2005, vol. 3452 of Lect. Not. Comp. Sci., Springer, 2005, pp. 209–223.

[18] D. Berwanger, E. Grädel, G. Lenzi, On the variable hierarchy of the modal mu-calculus, in : CSL 2002, vol. 2471 of Lect. Not. Comp. Sci., Springer, 2002.

[19] D. Berwanger, G. Lenzi, The variable hierarchy of the μ-calculus is strict, in : STACS 2005, vol. 3404 of Lect. Not. Comp. Sci., Springer, 2005.

[20] M. Bílková, A. Palmigiano, Y. Venema, Proof systems for the coalgebraic cover modality, in : C. Areces, R. Goldblatt (eds.), Advances in Modal Logic, Volume 7, College Publications, 2008.

[21] G. Birkhoff, Lattice theory, vol. 25 of American Mathematical Society Colloquium Publications, 3rd ed., American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979.

[22] A. Björner, Orderings of Coxeter groups, in : Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983), vol. 34 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984, pp. 175–195.

[23] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal logic, vol. 53 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[24] W. J. Blok, D. Pigozzi, On the structure of varieties with equationally definable principal congruences. I, Algebra Universalis 15 (2) (1982) 195–227.

[25] S. L. Bloom, Z. Ésik, Iteration theories, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1993, the equational logic of iterative processes.

[26] J. C. Bradfield, The modal μ-calculus alternation hierarchy is strict., Theor. Comput. Sci. 195 (2) (1998) 133–153.

[27] J. P. Braquelaire, B. Courcelle, The solutions of two star-height problems for regular trees, Theoret. Comput. Sci. 30 (2) (1984) 205–239.

[28] A. Burroni, Récursivité graphique. I. Catégorie des fonctions récursives primitives formelles, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 27 (1) (1986) 49–79.

[29] N. Caspard, A characterization for all interval doubling schemes of the lattice of permutations, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 3 (4) (1999) 177–188 (electronic).

[30] N. Caspard, The lattice of permutations is bounded, Internat. J. Algebra Comput. 10 (4) (2000) 481–489.

[31] N. Caspard, C. Le Conte de Poly-Barbut, M. Morvan, Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded, Adv. in Appl. Math. 33 (1) (2004) 71–94.

[32] N. Caspard, C. Le Conte Poly-Barbut, Tamari lattices are bounded : a new proof, Tech. Rep. TR-2004-03, LACL, Université Paris XII (2004).

[33] R. Cockett, L. Santocanale, Induction, coinduction, and adjoints, in : R. Blute, P. Selinger (eds.), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 69, Elsevier Science Publishers, 2003.

[34] G. D'Agostino, G. Lenzi, An axiomatization of bisimulation quantifiers via the mu-calculus, Theor. Comput. Sci. 338 (1-3) (2005) 64–95.

[35] A. C. Davis, A characterization of complete lattices, Pacific J. Math. 5 (1955) 311–319.

[36] A. Day, A simple solution to the word problem for lattices, Canad. Math. Bull. 13 (1970) 253–254.

[37] Y. Diers, Familles universelles de morphismes, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I 93 (3) (1979) 175–195 (1980).

[38] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. (2) 51 (1950) 161–166.

[39] L. C. Eggan, Transition graphs and the star-height of regular events, Michigan Math. J. 10 (1963) 385–397.

[40] Z. Ésik, Completeness of Park induction, Theoret. Comput. Sci. 177 (1) (1997) 217–283, mathematical foundations of programming semantics (Manhattan, KS, 1994).

[41] R. Freese, J. Ježek, J. B. Nation, Free lattices, vol. 42 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[42] D. M. Gabbay, A general theory of structured consequence relations, Theoria (San Sebastián) (2) 10 (23) (1995) 49–78.

[43] B. Ganter, R. Wille, Formal concept analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1999, mathematical foundations, Translated from the 1996 German original by Cornelia Franzke.

[44] S. Ghilardi, L. Santocanale, Algebraic and model theoretic techniques for fusion decidability in modal logics, in : M. Y. Vardi, A. Voronkov (eds.), LPAR 2003, No. 2850 in Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer, 2003, proceedings of the 10th International Conference Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, Almaty, Kazakhstan, September 22-26, 2003.

[45] S. Ghilardi, M. Zawadowski, Sheaves, Games, and Model Completions, Trends in Logic, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[46] J.-Y. Girard, Ludics : an introduction, in : Proof and system-reliability (Marktoberdorf, 2001), vol. 62 of NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 167–211.

[47] G. Grätzer, General lattice theory, 2nd ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[48] K. Hashiguchi, Algorithms for determining relative star height and star height, Inform. and Comput. 78 (2) (1988) 124–169.

[49] P. W. Hoogers, H. C. M. Kleijn, P. S. Thiagarajan, An event structure semantics for general Petri nets, Theoret. Comput. Sci. 153 (1-2) (1996) 129–170.

[50] D. Janin, I. Walukiewicz, Automata for the modal mu-calculus and related results, in : J. Wiedermann, P. Hájek (eds.), MFCS, vol. 969 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1995.

[51] A. Joyal, Free bicomplete categories, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 17 (5) (1995) 219–224.

[52] A. Joyal, Free bicompletion of enriched categories, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 17 (5) (1995) 213–218.

[53] A. Joyal, Free lattices, communication and money games, in : Logic and scientific methods (Florence, 1995), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 29–68.

[54] D. Kozen, Results on the propositional μ-calculus, Theoret. Comput. Sci. 27 (3) (1983) 333–354.

[55] D. Kozen, Myhill-Nerode relations on automatic systems and the completeness of Kleene algebra, in : STACS 2001 (Dresden), vol. 2010 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 2001, pp. 27–38.

[56] J. Lambeck, Deductive systems and categories. III. Cartesian closed categories, intuitionist propositional calculus, and combinatory logic, in : Toposes, algebraic geometry and logic (Conf., Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1971), Springer, Berlin, 1972, pp. 57–82. Lecture Notes in Math., Vol. 274.

[57] J. Lambek, Deductive systems and categories. I. Syntactic calculus and residuated categories, Math. Systems Theory 2 (1968) 287–318.

[58] J. Lambek, Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories, in : Category Theory, Homology Theory and their Applications, I (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. One), Springer, Berlin, 1969, pp. 76–122.

[59] J. Lambek, P. J. Scott, Introduction to higher order categorical logic, vol. 7 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, reprint of the 1986 original.

[60] C. Le Conte de Poly-Barbut, Sur les treillis de Coxeter finis, Math. Inform. Sci. Humaines (125) (1994) 41–57.

[61] G. Lenzi, A hierarchy theorem for the μ-calculus., in : F. M. auf der Heide, B. Monien (eds.), ICALP, vol. 1099 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1996.

[62] G. Lenzi, The transitive μ-calculus is Büchi definable, WSEAS Trans. Math. 5 (9) (2006) 1021–1026.

[63] R. McKenzie, Equational bases and nonmodular lattice varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 174 (1972) 1–43.

[64] K. L. McMillan, Using unfoldings to avoid the state explosion problem in the verification of asynchronous circuits., in : G. von Bochmann,

D. K. Probst (eds.), CAV, vol. 663 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 1992.

[65] J. B. Nation, An approach to lattice varieties of finite height, Algebra Universalis 27 (4) (1990) 521–543.

[66] K. Ng, A. Tarski, Relational algebras with transitive closure, Notices Amer. Math. Soc 24 :A29-A30, abstract 742-02-09.

[67] M. Nielsen, G. D. Plotkin, G. Winskel, Petri nets, event structures and domains, part I., Theor. Comput. Sci. 13 (1981) 85–108.

[68] D. Niwiński, Equational μ-calculus, in : Computation theory (Zaborów, 1984), vol. 208 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, 1985, pp. 169–176.

[69] R. Paré, L. Román, Monoidal categories with natural numbers object, Studia Logica 48 (3) (1989) 361–376.

[70] M. Pauly, R. Parikh, Game logic—an overview, Studia Logica 75 (2) (2003) 165–182, game logic and game algebra (Helsinki, 2001).

[71] V. Pratt, Action logic and pure induction, in : Logics in AI (Amsterdam, 1990), Springer, Berlin, 1991, pp. 97–120.

[72] V. Pratt, Dynamic algebras : examples, constructions, applications, Studia Logica 50 (3-4) (1991) 571–605, algebraic logic.

[73] M. O. Rabin, Weakly definable relations and special automata, in : Mathematical Logic and Foundations of Set Theory (Proc. Internat. Colloq., Jerusalem, 1968), North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 1–23.

[74] L. Santocanale, Sur les μ-treillis libres, Ph.D. thesis, Université du Québec à Montréal (Apr. 2000).

[75] L. Santocanale, On the equational definition of the least prefixed point, in : J. Sgall, A. Pultr, P. Kolman (eds.), MFCS 2001, No. 2136 in Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2001, procedings of the 26th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science 2001, Marianske Lazne, Czech Republic, August 27-31, 2001.

[76] L. Santocanale, The alternation hierarchy for the theory of μ-lattices, Theory and Applications of Categories 9 (2002) 166–197.

[77] L. Santocanale, A calculus of circular proofs and its categorical semantics, in : M. Nielsen, U. Engberg (eds.), FOSSACS 2002, No. 2303 in Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2002, proceedings of the 5th International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures. Held as Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2002 Grenoble, France, April 8-12, 2002.

[78] L. Santocanale, Congruences of modal μ-algebras, in : Z. Ésik, A. Ingólfsdóttir (eds.), FICS02, vol. NS-02-02 of BRICS Notes Series, 2002, a refereed extended abstract.

[79] L. Santocanale, Free μ-lattices, Journal of Pure and Applied Algebra 168 (2-3) (2002) 227–264.

[80] L. Santocanale, From parity games to circular proofs, in : L. S. Moss (ed.), Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 65, Elsevier Science Publishers, 2002, extended abstract of an invited talk at the workshop CMCS'2002, Coalgebraic Methods in Computer Science.

[81] L. Santocanale, μ-bicomplete categories and parity games, Theoretical Informatics and Applications 36 (2002) 195–227.

[82] L. Santocanale, On the equational definition of the least prefixed point, Theoretical Computer Science 295 (1-3) (2003) 341–370.

[83] L. Santocanale, Completions of μ-algebras, in : LICS 2005, IEEE Computer Society, 2005, proceedings of the 20th IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 26-29 June 2005, Chicago, IL, USA.

[84] L. Santocanale, Topological properties of event structures, in : GETCO06, 2006, preliminary Proceedings of the Workshop on Geometrical and Topological Methods in Concurrency, Bonn, August 26 2006. To appear in ENTCS.

[85] L. Santocanale, Derived semidistributive lattices, to appear in the journal Algebra Universalis (Jul. 2007).

[86] L. Santocanale, A nice labelling for tree-like event structures of degree 3, in : L. Caires, V. T. Vasconcelos (eds.), CONCUR 2007, vol. 4703 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007, proceedings of the 18th International Conference on Concurrency Theory, Lisbon, Portugal, September 3-8, 2007.

[87] L. Santocanale, On the join depenency relation in multinomial lattices, Order 24 (3) (2007) 155–179.

[88] L. Santocanale, Combinatorics from concurrency : the nice labelling problem for event structures, in : Y. Boudabbous, N. Zaguia (eds.), ROGICS'08, 2008, proceedings of the International Conference on Relations, Orders and Graphs : Interaction with Computer Science. 12-17 May, 2008, Mahdia, Tunisia.

[89] L. Santocanale, Completions of μ-algebras, Annals of Pure and Applied Logic 154 (1) (2008) 27–50.

[90] L. Santocanale, A nice labelling for tree-like event structures of degree 3, journal version, submitted for a special issue of the journal Informa-

tion and Computation dedicated to conference CONCUR 2007 (May 2008).

[91] K. Segerberg, A completeness theorem in the modal logic of programs, Notices Amer. Math. Soc 24 :A552, abstract 77T-E69.

[92] E. SOAPDC, Volet descriptif du projet soapdc, disponible à l'adresse `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~lsantoca/SOAPDC/description.pdf` (mai 2005).

[93] T. Studer, G. Jäger, M. Kretz, Canonical completeness of infinitary mu, Journal of Logic and Algebraic ProgrammingTo appear.

[94] A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, Pacific J. Math. 5 (1955) 285–309.

[95] W. Tholen, Pro-categories and multiadjoint functors, Canad. J. Math. 36 (1) (1984) 144–155.

[96] W. T. Tutte, Connectivity in graphs, Mathematical Expositions, No. 15, University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1966.

[97] Y. Venema, Modal fixpoint logics, talk given at the conference Algebraic and Topological Methods in Non-Classical Logics III (TANCL'07), August 5-9, 2007 St Anne's College, University of Oxford Oxford, England (Aug. 2007).

[98] Y. Venema, L. Santocanale, Completeness for flat modal fixpoint logics, in : N. Dershowitz, A. Voronkov (eds.), LPAR 2007, vol. 4790 of Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer, 2007, proceedings of the 14th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, Yerevan, Armenia, October 15-19, 2007.

[99] I. Walukiewicz, Completeness of Kozen's axiomatisation of the propositional μ-calculus, Inform. and Comput. 157 (1-2) (2000) 142–182, lICS 1995 (San Diego, CA).

[100] G. Winskel, M. Nielsen, Models for concurrency, in : Handbook of logic in computer science, Vol. 4, vol. 4 of Handb. Log. Comput. Sci., Oxford Univ. Press, New York, 1995, pp. 1–148.

[101] G. M. Ziegler, Lectures on polytopes, vol. 152 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.

Annexe A

Recueil d'articles