



HAL
open science

Analyse asymptotique de schémas de résolution de l'équation du transport en régime diffusif

Gérald Jean Joseph Samba

► **To cite this version:**

Gérald Jean Joseph Samba. Analyse asymptotique de schémas de résolution de l'équation du transport en régime diffusif. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT: . tel-00363723

HAL Id: tel-00363723

<https://theses.hal.science/tel-00363723>

Submitted on 24 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2008/138



**THESE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

présentée par
Gérald Samba

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :
MATHÉMATIQUES

Sujet de la thèse :

**Analyse asymptotique de schémas de
résolution de l'équation du transport en
régime diffusif.**

Thèse présentée et soutenue le 18 Décembre 2008 devant le jury composé
de :

FRANÇOIS GOLSE	Professeur-Ecole Polytechnique	Président
CLAUDE BARDOS	Professeur Emérite-Paris 7	Rapporteur
BERTRAND MERCIER	Directeur-CEA Saclay	Rapporteur
DANIEL BOUCHE	Ingénieur-Chercheur-CEA/DAM	Directeur de thèse
LAURENT DESVILLETES	Professeur-ENS Cachan	Directeur de thèse
STÉPHANE CORDIER	Professeur-Université d'Orléans	Examineur

CMLA, ENS Cachan/CNRS/UMR 8536
61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan Cedex (France)
CEA, DAM, DIF, F-91297
Arpajon, France

Remerciements

Je remercie tout d'abord chaleureusement Daniel Bouche et Laurent Desvillettes pour avoir dirigé ma thèse et mes rapporteurs, Claude Bardos et Bertrand Mercier pour leur lecture attentive. Leurs remarques et leurs critiques ont permis d'améliorer grandement le manuscrit. J'exprime également ma reconnaissance à Stéphane Cordier et François Golse pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je profite de cette occasion pour remercier Daniel Verwaerde qui m'a accueilli dans son groupe au début de ma carrière ainsi que Pierre Daronian, dont je salue la mémoire, qui m'a initié à la neutronique. Je remercie Dominique Deck pour avoir relu mon manuscrit, Jean François Clouët avec qui j'ai collaboré pour la première partie de cette thèse, Rémi Sentis pour ses conseils avisés et Bernard Rebourcet pour m'avoir permis de consacrer du temps à ces travaux. Je tiens également à souligner la gentillesse et la bonne humeur des collègues de mon laboratoire qui ont facilité mon travail. J'ai pu également compter sur le dévouement et la disponibilité de Michelle Cohadier au CEA et de Christine Rose à l'EDSP de Cachan. Enfin, je tiens à remercier mes amis et ma famille pour leur fidélité et leur affection dans tous les moments.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Analyse asymptotique de la méthode Symbolique Implicite Monte Carlo	20
2.1	Introduction	20
2.2	Extension de la méthode SIMC	22
2.3	Limite diffusion de la méthode SIMC	25
2.3.1	Méthode SIMC classique	34
2.3.2	Méthode SIMC Linéaire	40
2.3.3	Conditions aux limites pour la méthode SIMC linéaire	58
2.3.4	Choix des fonctions de base	60
2.4	Méthode hybride SIMC	60
2.5	Résultats numériques	63
2.5.1	Test de l'epsilon problème	63
2.5.2	Test de Larsen	66
2.5.3	Problèmes avec un flux incident non isotrope	66
2.5.4	Analyse de l'erreur	69
3	Formulation différentielle	71
3.1	Méthode SIMC linéaire avec la formulation différentielle	71
3.2	Implémentation numérique	72
3.3	Tests numériques	74
3.3.1	Test de l'epsilon problème, comparaison des formulations différentielle et standard	74
3.3.2	Test de l'epsilon problème, comparaison de la méthode SIMC linéaire et des éléments finis continus linéaires P1	82
3.3.3	Calcul à source	84
4	Limite asymptotique de schémas aux éléments finis discontinus	88
4.1	Introduction	88
4.2	Etude en géométrie 1D	89
4.2.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés	89

4.2.2	Limite diffusion	92
4.2.3	Résumé	97
4.3	Etude en géométrie 2D plane	97
4.3.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés	97
4.3.2	Limite diffusion	101
4.3.3	Résumé	112
4.3.4	Variante des éléments finis linéaires discontinus lumpés	112
4.3.5	Limite diffusion	113
4.3.6	Résumé	117
4.3.7	Méthode SCB	117
4.3.8	Limite diffusion	118
4.3.9	Résumé	120
4.4	Etude en géométrie 2D cylindrique	120
4.4.1	Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés	120
4.4.2	Limite diffusion	125
4.4.3	Résumé	131
5	Synthèse	132
5.1	Limite diffusion des Eléments finis Discontinus constants . . .	132
5.2	Limite diffusion des Eléments Finis Linéaires Discontinus Lum- pés	135
6	Conclusion	143
A	Problème de Milne	146
B	Propriétés de la méthode SIMC	149
B.1	Terme de collision anisotrope	149
B.2	Probabilités de collision	151
B.3	Symétrie de la matrice SIMC et diagonale dominance	152

Chapitre 1

Introduction

L'équation de transport des particules, à laquelle nous nous intéressons, intervient dans de nombreux champs de la physique : le transport des neutrons pour calculer la criticité d'un réacteur nucléaire ainsi que pour effectuer des calculs de protection autour d'une source de neutrons, le transport des photons dans un plasma qui intervient aussi bien en fusion par confinement inertiel qu'en astrophysique ou dans la fabrication du verre. On peut trouver dans les ouvrages [10, 17, 28] des exemples de telles applications.

Considérons l'équation de transport modèle dont la solution est l'intensité (ou flux directionnel) $u(x, \vec{\Omega})$:

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega} + Q, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}), (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases} \quad (1.1)$$

pour x appartenant à un domaine borné \mathcal{D} dont la frontière est Γ et $\vec{\Omega}$ appartenant à la sphère unité \mathcal{S}_2 ,

$\Gamma^- = \{(x, \vec{\Omega}); x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0\}$, où $\vec{n} = \vec{n}(x)$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Γ au point x ,

g est une fonction non négative définie sur Γ^- , σ_a , σ_s , Q sont des fonctions non négatives définies sur \mathcal{D} , σ_a est la section efficace d'absorption, σ_s la section efficace de diffusion, $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ est la section efficace totale. L'hypothèse σ_a non négative est une condition suffisante pour que le problème (1.1) admette une solution qui est alors unique (système sous critique). Plusieurs théorèmes, dont on peut trouver l'énoncé et la démonstration dans [26], prouvent l'existence de cette solution dans des espaces fonctionnels adaptés moyennant des hypothèses de régularité sur les fonctions σ_a , σ_s et g et l'hypothèse de sous-criticité. Nous en énonçons la version suivante :

Proposition 1 *Nous faisons les hypothèses suivantes*

- i) $\sigma_t(x) \geq \sigma_0 > 0$,
- ii) σ_t et σ_s vérifient (p.p $x \in \mathcal{D}$), $\sigma_s(x) \leq \beta \sigma_t(x)$, $0 \leq \beta < 1$,

- *iii*) $\sigma_s(x) \leq M \forall x \in \mathcal{D}$,
 - *iiii*) Q vérifie $Q \in L^\infty(\mathcal{D})$,
 - *iiiiii*) g est une fonction positive vérifiant $g \in L^\infty(\Gamma^-)$,
- alors, le problème (1.1) admet une solution unique u dans $L^\infty(\mathcal{D} \times \mathcal{S}_2)$ qui vérifie (avec α constante > 0) :

$$\|u\|_\infty \leq \sup(\|g\|_\infty, \alpha\|Q\|_\infty).$$

L'hypothèse ii est dite de sous-criticité. Elle signifie que le milieu n'est pas multiplicateur c'est-à-dire qu'une réaction subie par une particule est soit une diffusion soit une absorption et donc ne peut pas créer plus d'une particule en sortie.

Cette équation peut être utilisée comme équation modèle pour le transport des neutrons. Elle décrit le transport de neutrons monocinétiques dans un milieu comportant deux types de collision, les collisions isotropes (σ_s indépendante de $\vec{\Omega}$) caractérisées par la section efficace σ_s et les absorptions caractérisées par la section efficace σ_a .

La résolution analytique de cette équation n'est possible que dans des cas très simples. De telles méthodes analytiques basées sur le développement du flux directionnel sur la base de fonctions propres de l'opérateur de transport peuvent être trouvées dans [22]. En dehors de ces cas, la résolution de cette équation doit se faire de façon approchée sur ordinateur.

On trouvera une revue des méthodes de discrétisation de l'équation de transport des neutrons dans [58]. Nous en donnons un bref aperçu.

L'équation de transport des neutrons peut se mettre au moins sous deux formes.

La première forme (1.1) est celle d'une équation intégro-différentielle du premier ordre dont l'opérateur intégral est obtenu en linéarisant le terme de collision de Boltzmann. Pour approcher numériquement cet opérateur, on peut choisir une formule de quadrature sur la sphère unité. Ceci permet de découpler la discrétisation angulaire de la discrétisation en espace. On doit résoudre alors un système d'équations différentielles dont les inconnues sont les flux directionnels qui correspondent à ces directions discrètes. Ce sont les équations aux ordonnées discrètes [18, 19, 23]. Sur un maillage du domaine spatial, on discrétise en espace l'opérateur de transport obtenant ainsi un système linéaire dont sont solutions les valeurs des flux directionnels aux noeuds du maillage. Comme pour toute méthode de ce type, la convergence de la solution approchée vers la solution exacte dépend de la finesse du maillage en espace et en angle ainsi que du degré d'approximation du flux sur chaque maille. Parmi les méthodes reposant sur cette approche, on peut citer la méthode des éléments finis discontinus [1, 3, 46, 57] bien adaptée aux maillages non cartésiens. Les systèmes linéaires obtenus ne sont généralement pas symétriques. On peut trouver dans certains cas une numérotation rendant les matrices de ces systèmes, triangulaires, et faire alors

une résolution maille par maille mais l'algorithme obtenu n'est pas aisément parallélisable.

C'est pourquoi d'autres méthodes, basées sur la résolution des équations aux ordonnées discrètes associées à des formes du second ordre de l'opérateur du transport, ont été développées. Les propriétés de ces formes du second ordre conduisent à la résolution de systèmes symétriques définis positifs identiques à ceux provenant de la discrétisation d'une équation de diffusion. On sait les résoudre avec des solveurs performants de type gradient conjugué pré-conditionné. Citons parmi ces méthodes, la méthode du flux pair [4, 5, 61] et celle des éléments finis mixtes hybrides [4, 20, 21, 31] reposant sur une forme mixte du second ordre de l'équation du transport.

La discrétisation préalable de la sphère angulaire conduit au problème dit des effets de raies [45] dont l'exemple le plus spectaculaire est sans doute le suivant : prenons un milieu purement absorbant et une source ponctuelle en géométrie cartésienne plane (x, y) . Le flux directionnel solution des équations aux ordonnées discrètes est nul sur tout le domaine spatial sauf sur les droites passant par le point où est située la source et parallèles aux directions discrètes alors que la solution exacte présente une symétrie sphérique autour de la source. Cette anomalie vient du fait que les équations aux ordonnées discrètes ne possèdent pas la propriété d'invariance par rotation qui est vérifiée par l'équation continue. Une solution pour éviter ce problème est de développer la solution sur une base tronquée à un certain ordre des harmoniques sphériques en 3D ou des polynômes de Legendre en 1D. En prenant les moments de l'équation de transport par rapport à cette base, on obtient un système d'équations différentielles dont les inconnues sont les moments du flux. Ces équations sont invariantes par rotation donc ne présentent pas le problème des effets de raies. Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre ces systèmes. Citons la méthode des moindres carrés [49, 56, 60] qui conduit à la résolution de systèmes symétriques définis positifs. A l'ordre 1, on obtient le système d'équations P1 équivalent dans sa forme instationnaire à l'équation des télégraphistes. Ce modèle suppose que le flux directionnel est linéaire en angle, ce qui ne l'autorise pas à prendre par exemple la forme d'un faisceau (limite "free streaming"). Cependant, son faible coût de résolution a incité nombre d'auteurs à l'améliorer pour prendre en compte une anisotropie plus grande du flux directionnel. On a ainsi développé dans le cadre de l'hydrodynamique radiative les méthodes de fermeture avec facteur d'Eddington [11, 15, 16, 47]. Le système d'équations P1 instationnaire qui est linéaire hyperbolique a également été discrétisé avec la méthode de Godounov utilisée classiquement en mécanique des fluides. Un traitement particulier des termes de collision a été fait par L.Gosse et Al [34] pour préserver les états stationnaires. Il permet également d'obtenir la limite diffusion que nous définirons dans la suite.

La seconde forme de l'équation de transport largement utilisée est sa forme intégrale. C'est sur cette forme que sont basées les méthodes de pro-

babilités de collision [38] ainsi que les méthodes Monte-Carlo. Ces dernières ne nécessitent pas de maillage de la sphère angulaire unité ni dans leur version classique, de maillage en espace. Elles sont donc exemptes des effets de raies et peuvent traiter des géométries 3D complexes modélisées. Ce sont des méthodes probabilistes reposant sur l'échantillonnage de densités de probabilité. Soumises à des fluctuations statistiques, elles convergent vers la solution exacte en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ où n est le nombre d'expériences réalisées. Elles sont bien adaptées à la résolution de problèmes où le flux directionnel n'est pas requis partout mais seulement dans une faible portion de l'espace des phases. On utilise alors des estimateurs pour l'évaluer. Nous donnerons un exemple de cette méthode par la suite. Mais nous nous intéressons plus particulièrement à une classe de méthodes Monte-Carlo, la méthode SIMC (Symbolic Implicit Monte-Carlo), qui nécessite, comme la méthode des probabilités de collision, un maillage du domaine spatial.

Pour simuler cette équation par une méthode de Monte-Carlo classique (dite analogue car elle suit la physique au plus près), on échantillonne la source Q ainsi que la condition aux limites g par des particules Monte-Carlo qui représentent chacune un certain nombre de particules physiques. Soit une de ces particules de direction $\vec{\Omega}$ placée en x , la probabilité P qu'elle sorte du domaine sans collision est égale à $e^{-\int_0^{l(x, \vec{\Omega})} \sigma_t(s) ds}$ où $l(x, \vec{\Omega}) = \inf\{s > 0; x_s = x + s\vec{\Omega} \in \Gamma\}$.

– Etape 1

On tire un nombre aléatoire uniformément réparti entre 0 et 1. Si ce nombre est inférieur à P , la particule sort du domaine, on tire alors une nouvelle particule, sinon, l'évènement suivant est soit une absorption soit une collision isotrope.

– Etape 2

On tire une distance d_c dont la loi de probabilité sur $[0, l(x, \vec{\Omega})]$ est $\frac{\sigma_t(s)e^{-\int_0^s \sigma_t(s') ds'}}{1 - P}$. On déplace la particule en $x = x + d_c \vec{\Omega}$.

– Etape 3

On détermine en tirant un nouveau nombre aléatoire uniformément réparti entre 0 et 1 si la particule doit subir une absorption (probabilité $\frac{\sigma_a(x)}{\sigma_t(x)}$) ou une collision (probabilité $\frac{\sigma_s(x)}{\sigma_t(x)}$). Si c'est une absorption, la particule disparaît et on en tire alors une nouvelle, si c'est une collision, on tire sa nouvelle direction $\vec{\Omega}$ et on revient à l'étape 1.

Nous nous intéressons au comportement des méthodes numériques pour résoudre (1.1) dans les milieux diffusifs. Ces milieux sont caractérisés par un libre-parcours moyen (le libre-parcours moyen $\frac{1}{\sigma_t}$ est la distance moyenne entre deux collisions) petit par rapport aux dimensions caractéristiques du milieu et par des absorptions rares par rapport aux collisions isotropes. La

méthode Monte-Carlo précédemment décrite est alors extrêmement coûteuse puisque chaque particule subit un grand nombre de collisions avant de sortir du domaine. Sa marche aléatoire s'apparente alors à un mouvement brownien qui peut être décrit par une équation de diffusion. La méthode dite de Random Walk [29] utilise cette propriété pour réduire le temps de calcul consacré à la poursuite des particules dans de tels milieux. Il est donc crucial de pouvoir déterminer quelle est l'équation de diffusion sous-jacente.

Pour cela, en suivant [39, 54], on introduit un petit paramètre ε qui représente le rapport du libre-parcours à une dimension caractéristique du milieu et on fait la mise à l'échelle suivante :

$$\sigma_t \longrightarrow \frac{\sigma_t}{\varepsilon}, \sigma_a \longrightarrow \varepsilon\sigma_a, Q \longrightarrow \varepsilon Q. \quad (1.2)$$

Cette mise à l'échelle peut être comprise en disant que l'échelle spatiale de la diffusion est $\frac{1}{\varepsilon}$ fois plus grande que celle du transport, que les absorptions sont rares et que le terme source est petit, ainsi l'équation (1.1) devient :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} u = (\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma_a) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega} + \varepsilon Q, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g, x \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.3)$$

Il est connu [42] que le flux intégré $\tilde{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega}$ où u est solution de (1.3) vérifie l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u} + \sigma_a \tilde{u} = Q + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| H(|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|) g(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + O(\varepsilon), x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $H(\mu)$ est la fonction de Chandrasekhar [23].

Nous allons donner les étapes de la démonstration formelle. Signalons cependant qu'il existe un résultat de convergence "exact" [26] mais tous les résultats de cette thèse sont étayés par des démonstrations formelles du même type que celle qui suit.

La solution u de (1.3) est la somme d'une solution u_{int} qui est la solution "loin" des frontières du domaine et d'une solution u_{lim} nulle en dehors d'un voisinage de la frontière Γ^- qui correspond à une couche limite, soit :

$$u = u_{int} + u_{lim}.$$

On développe u_{int} en puissances de ε , $u_{int} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_{int}^n \varepsilon^n$ puis on identifie dans (1.3) les coefficients des différents termes en ε^n pour n variant de -1 à 2. On suppose que σ_t , σ_a et Q sont d'ordre 0 par rapport à ε .

$$- \varepsilon = -1 \quad u_{int}^0 = \tilde{u}_{int}^0. \quad (1.5)$$

$$- \varepsilon = 0 \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^0 + \sigma_t u_{int}^1 = \sigma_t \tilde{u}_{int}^1. \quad (1.6)$$

$$- \varepsilon = 1 \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^1 + \sigma_t u_{int}^2 = \sigma_t \tilde{u}_{int}^2 - \sigma_a \tilde{u}_{int}^0 + Q. \quad (1.7)$$

$$- \varepsilon = 2 \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^2 + \sigma_t u_{int}^3 = \sigma_t \tilde{u}_{int}^3 - \sigma_a \tilde{u}_{int}^1. \quad (1.8)$$

On remplace dans (1.6) u_{int}^0 par \tilde{u}_{int}^0 , on la multiplie par $\frac{1}{4\pi}\vec{\Omega}$ puis on intègre en $\vec{\Omega}$, on obtient :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} u_{int}^1 d\vec{\Omega} = -\frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u}_{int}^0. \quad (1.9)$$

On multiplie par $\frac{1}{4\pi}$ l'équation (1.7), puis on intègre en $\vec{\Omega}$ et on remplace $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} u_{int}^1 d\vec{\Omega}$ par son expression tirée de (1.9), on obtient :

$$-\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u}_{int}^0 + \sigma_a \tilde{u}_{int}^0 = Q. \quad (1.10)$$

On multiplie par $\frac{1}{4\pi}$ l'équation (1.8), puis on intègre en $\vec{\Omega}$, on obtient :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^2 d\vec{\Omega} + \sigma_a \tilde{u}_{int}^1 = 0. \quad (1.11)$$

Pour obtenir $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^2 d\vec{\Omega}$, on applique l'opérateur $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\sigma_t}$ à (1.7), on intègre en $\vec{\Omega}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^1 \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^2 d\vec{\Omega} = 0, \quad (1.12)$$

on a donc en reportant dans (1.11) :

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{int}^1 \right) + \sigma_a \tilde{u}_{int}^1 = 0, \quad (1.13)$$

en remplaçant u_{int}^1 par son expression tirée de (1.6) c'est-à-dire :

$u_{int}^1 = \tilde{u}_{int}^1 - \frac{1}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \tilde{u}_{int}^0$, on obtient finalement :

$$-\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u}_{int}^1 + \sigma_a \tilde{u}_{int}^1 = 0. \quad (1.14)$$

En multipliant (1.14) par ε et en ajoutant (1.10), on trouve que \tilde{u}_{int} vérifie :

$$-\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u}_{int} + \sigma_a \tilde{u}_{int} = Q + O(\varepsilon^2). \quad (1.15)$$

Nous allons maintenant trouver la condition aux limites vérifiée par u_{int} à l'ordre 0.

Nous avons vu que $u = u_{int} + u_{lim}$, sachant que $u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega})$ sur Γ^- , u_{lim} vérifie donc :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{lim} + \sigma_t u_{lim} = \sigma_s \tilde{u}_{lim}, \\ u_{lim}(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}) - u_{int}(x, \vec{\Omega}), (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.16)$$

En suivant [54], on introduit un système de coordonnées orthogonales (x, y, z) avec l'axe z pointant en un point x_s de la surface à l'intérieur du domaine. On note Θ , l'angle polaire que fait $\vec{\Omega}$ avec l'axe des z et ξ l'angle azimuthal, on a alors :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_{lim} = \mu \frac{\partial u_{lim}}{\partial z} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})_{\perp} u_{lim} + C_b u_{lim},$$

où $\mu = \cos(\Theta) \in [-1, 1]$ et $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})_{\perp} = \sqrt{(1 - \mu^2)} \left\{ \cos \xi \frac{\partial u_{lim}}{\partial x} + \sin \xi \frac{\partial u_{lim}}{\partial y} \right\}$, C_b est un opérateur complexe prenant en compte la courbure de la surface au point x_s .

On suppose maintenant que dans la direction des z , u_{lim} varie sur une échelle de longueur correspondant à ε soit le libre-parcours, alors que ses variations sont faibles dans les directions perpendiculaires, l'équation (1.16) devient alors :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u_{lim}}{\partial z} + \varepsilon (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})_{\perp} u_{lim} + \varepsilon C_b u_{lim} + \sigma_t u_{lim} = (\sigma_t - \varepsilon^2 \sigma_a) \tilde{u}_{lim}, \\ u_{lim}(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}) - u_{int}(x, \vec{\Omega}), (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.17)$$

On développe u_{lim} en puissances de ε , $u_{lim} = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \varepsilon^n u_{lim}^n$, en identifiant les termes d'ordre 0 dans (1.17), on obtient que u_{lim}^0 vérifie le problème monodimensionnel sur l'axe z (en prenant l'origine au point x_s) :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u_{lim}^0}{\partial z} + \sigma_t u_{lim}^0 = \sigma_t \tilde{u}_{lim}^0, \\ u_{lim}^0(0, \vec{\Omega}) = g(x_s, \vec{\Omega}) - u_{int}^0(x_s), \mu > 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Comme on veut que u_{lim} soit une couche limite, on demande également que $u_{lim}^0(\infty, \mu, \xi) = 0$.

En faisant le changement de variable $z' = \int_0^z \sigma_t(s) ds$ (on omettra le ' sur le z par la suite), on obtient :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u_{lim}^0}{\partial z} + u_{lim}^0 = \tilde{u}_{lim}^0, \\ u_{lim}^0(0, \vec{\Omega}) = g(x_s, \vec{\Omega}) - u_{int}^0(x_s), \mu > 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Le problème précédent est un problème de demi-espace classique en théorie du transport qu'on appelle problème de Milne conservatif. Chandrasekhar l'a résolu en utilisant la technique dite du invariant imbedding. Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration. Tout d'abord, on a besoin du résultat suivant démontré dans [8, 9, 32] :

Proposition 2 *Soit l'équation :*

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial v}{\partial z} + v = \tilde{v}, \\ v(0, \vec{\Omega}) = h(\vec{\Omega}), \mu > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Notons S_2^+ la demi sphère unité correspondant à $\mu > 0$.

Si h appartient à $L^\infty(S_2^+)$, alors il existe une solution unique de (1.20) dans l'espace des fonctions bornées $L^\infty([0, +\infty] \times S_2)$ telle que la limite notée $C(h)$ de $v(z, \vec{\Omega})$ lorsque z tend vers $+\infty$ soit indépendante de $\vec{\Omega}$.

Nous allons calculer cette limite $C(h)$ et démontrer qu'elle s'exprime en fonction de h à l'aide d'une fonction universelle H dite fonction de Chandrasekhar. Pour cela, on commence par intégrer (1.20) en angle, il vient :

$\frac{\partial \widetilde{\mu v}}{\partial z} = 0$, donc $\widetilde{\mu v} = Cte$. Cette constante est nulle puisque v ne dépend pas de $\vec{\Omega}$ lorsque z tend vers $+\infty$. De même, en multipliant (1.20) par μ et en intégrant en angle, il vient $\frac{\partial \widetilde{\mu^2 v}}{\partial z} = 0$, car $\widetilde{\mu v} = 0$, donc $\widetilde{\mu^2 v} = Cte$. On peut calculer $\widetilde{\mu^2 v}$ en $z = 0$ et sa limite lorsque z tend vers l'infini. Ces deux limites sont égales, donc :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \mu^2 h(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \mu^2 v(0, -\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \frac{1}{3} C(h).$$

Le problème est maintenant de trouver une expression de

$$\int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \mu^2 v(0, -\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \text{ en fonction de } h.$$

On commence par multiplier (1.20) par $\frac{1}{2\pi}$ puis on l'intègre sur la variable azimuthale ξ , on obtient :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial v}{\partial z} + v = \tilde{v}, \\ v(0, \mu) = h(\mu), \mu > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Ici $v(z, \mu)$ est un abus de notation pour désigner $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(z, \vec{\Omega}) d\xi$ ainsi que $h(\mu)$ pour $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(\vec{\Omega}) d\xi$.

Chandrasekhar a démontré (voir l'annexe A) que $v(0, -\mu)$ est relié à h par la relation suivante :

$$v(0, -\mu) = \frac{1}{2}H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu')\mu' h(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu', \quad (1.22)$$

donc

$$C(h) = \frac{3}{2} \int_0^1 \mu^2 h(\mu) d\mu + \frac{3}{2} \int_0^1 \mu^2 \frac{1}{2} H(\mu) \left(\int_0^1 \frac{H(\mu')\mu' h(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu' \right) d\mu,$$

ou encore

$$C(h) = \int_0^1 \frac{3}{2} \mu \left(\mu + \frac{H(\mu)}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu')\mu'^2}{\mu + \mu'} d\mu' \right) h(\mu) d\mu.$$

En utilisant les égalités vérifiées par H :

$$\frac{1}{H(\mu)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu')\mu'}{\mu + \mu'} d\mu',$$

qui s'obtient en faisant $h = 1$ dans (1.22), auquel cas on a $v(0, \mu) = 1$ et

$$\int_0^1 H(\mu')\mu' d\mu' = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

on a donc

$$\mu + \frac{H(\mu)}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu')\mu'^2}{\mu + \mu'} d\mu' = \frac{H(\mu)}{\sqrt{3}}$$

et on obtient finalement

$$C(h) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \mu H(\mu) h(\mu) d\mu.$$

On peut remarquer que si on avait $v(0, -\mu) = 2 \int_0^1 \mu h(\mu) d\mu$, ce qui revient à supposer un renvoi en loi de Lambert, on aurait alors

$$C(h) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} \mu^2 + \mu \right) h(\mu) d\mu, \text{ ce qui revient à faire l'approximation :}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \mu H(\mu) \simeq 0.956\mu + 1.546\mu^2 \pm 0.0035 \simeq \mu + \frac{3}{2}\mu^2, \quad (1.23)$$

vérifiée par les schémas numériques que nous étudions par la suite.

Revenons à la résolution de (1.18), comme nous cherchons une solution de (1.18) tendant vers 0 à l'infini, nous avons nécessairement

$$C(g(x_s, \vec{\Omega}) - u_{int}^0(x_s)) = 0, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\tilde{u}_{int}^0(x_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| H(|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|) g(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega},$$

donc la solution de l'équation de diffusion u_{int} vérifie la condition aux limites de (1.4) à $O(\varepsilon)$ près.

La conditions aux limites vérifiée par u_{int} à $O(\varepsilon^2)$ près s'écrit [54] :

$$\tilde{u}(x_s) + \varepsilon \frac{0.7104}{\sigma_t} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \tilde{u}(x_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| H(|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|) g(x_s, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + 2\varepsilon(I_{\perp} + I_{\sigma} + I_C) + O(\varepsilon^2), \quad x_s \in \Gamma. \quad (1.24)$$

Le terme I_{\perp} prend en compte la variation spatiale de la condition aux limites g le long de la surface, I_{σ} la variation de σ_t à l'intérieur de la couche limite et I_C la courbure de la frontière. Tous ces termes s'annulent lorsque g ne dépend pas de $\vec{\Omega}$, auquel cas on obtient la condition de Marshak :

$$\tilde{u}(x_s) + \varepsilon \frac{0.7104}{\sigma_t} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \tilde{u}(x_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} 2|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| g(x_s, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \quad x_s \in \Gamma. \quad (1.25)$$

La méthode Monte-Carlo précédemment décrite ne nécessitait pas de maillage de $\mathcal{D} \times \mathcal{S}_2$ contrairement aux méthodes auxquelles nous nous intéressons maintenant.

Nous cherchons à discrétiser l'équation (1.1) lorsque l'approximation de la diffusion (1.4) est valide, sur un maillage optiquement épais c'est à dire tel que sa profondeur optique caractéristique ($\sigma_t \Delta x$ en 1D) est grande. Lorsque le schéma numérique utilisé pour résoudre (1.1) est convergent, il ne donne pas forcément une solution correcte dans ce cas. En effet, son erreur de consistance tend vers 0 lorsque la profondeur optique caractéristique tend vers 0, ce qui n'est ici pas le cas puisque le maillage est optiquement épais. Bien sûr, si on fait tendre cette profondeur vers 0 en raffinant le maillage, la solution numérique tend vers la solution exacte, mais ce qui nous intéresse ici est un schéma pour l'équation du transport qui approche la solution de (1.4) lorsque ε tend vers 0 et ceci sur un maillage dont la taille caractéristique est la distance $\frac{1}{\sqrt{3\sigma_t\sigma_a}}$ indépendante de ε . Cette dimension caractéristique de variation de la solution de (1.4) est d'ordre 0 par rapport à ε avec la mise à l'échelle (1.2) et donc $\frac{1}{\varepsilon}$ fois plus grande que le libre parcours ($\frac{\varepsilon}{\sigma_t}$). Lorsqu'un schéma possède cette propriété, on dit alors qu'il respecte la limite diffusion.

L'intérêt de ce type de schéma est qu'il permet de traiter en même temps des zones diffusives et des zones transparentes avec des maillages dans les zones diffusives de taille raisonnable.

La technique pour déterminer si un schéma numérique de résolution de l'équation du transport a la limite diffusion est d'appliquer la mise à l'échelle (1.2) à la forme discrétisée de (1.1), de développer la solution numérique en puissances de ε et de chercher l'équation aux différences vérifiée par son

développement jusqu'à un certain ordre. Si cette équation correspond à une discrétisation consistante de (1.4), le schéma respecte la limite diffusion.

– **Chapitre 2**

Nous nous intéressons dans le chapitre 2 à une classe de méthodes Monte-Carlo, appelées SIMC, nécessitant un maillage de l'espace physique. Ces méthodes reposent sur l'introduction d'une inconnue supplémentaire Φ fonction de $x \in \mathcal{D}$. On cherche alors le couple (u, Φ) solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ -\sigma_s \tilde{u} + \sigma_t \Phi = Q, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}), (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases} \quad (1.26)$$

équivalent à (1.1). Dans (1.26) en notant \mathcal{T} l'opérateur $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_t I$, on inverse (formellement) \mathcal{T} , on calcule :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \{\mathcal{T}^{-1}(\sigma_t \Phi + g)\}(x, \vec{\Omega}),$$

puis $\tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(\sigma_t \Phi + g)\}(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$, on remplace alors cette expression dans la seconde équation de (1.26) et on obtient :

$$-\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(\sigma_t \Phi)\}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \sigma_t \Phi = Q + Q_g,$$

$$\text{où } Q_g = \sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(g)\}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

Cette dernière équation est approchée par une méthode de Galerkin discontinue. On choisit un espace de fonctions \mathcal{F} définies sur \mathcal{D} et on cherche dans cet espace, Φ tel que pour tout Ψ appartenant à \mathcal{F} , on ait :

$$\langle -\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(\sigma_t \Phi)\}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \sigma_t \Phi, \Psi \rangle = \langle Q + Q_g, \Psi \rangle, \quad (1.27)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{D})$. L'espace \mathcal{F} est construit en supposant donné un maillage de \mathcal{D} et une approximation polynômiale de Φ (Ψ) à l'intérieur de chaque maille. L'équation (1.27) est alors un système linéaire dont la solution est l'approximation polynômiale par morceaux de Φ . Les termes de la matrice de ce système linéaire sont évalués par une méthode Monte-Carlo.

Dans un milieu diffusif où la mise à l'échelle (1.2) s'applique, en faisant le développement formel de $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \mathcal{T}_\varepsilon^{-1} d\vec{\Omega}$ à l'ordre 2 en ε où

$\mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_t I$, on obtient :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \mathcal{T}_\varepsilon^{-1}(\sigma_t \Phi) d\vec{\Omega} = \left\{ \frac{\varepsilon^2}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi + \Phi \right\} + O(\varepsilon^3).$$

En insérant cette expression dans (1.27), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a \right) \frac{\varepsilon^2}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \frac{1}{\sigma_t} \vec{\nabla} \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a \right) \Phi, \Psi \right\rangle \\ & + \left\langle \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \Phi, \Psi \right\rangle = \left\langle \varepsilon Q + Q_g, \Psi \right\rangle + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dans cette équation, \langle, \rangle pour le premier terme désigne le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})^3$.

En identifiant les termes d'ordre ε , on trouve que Φ vérifie :

$$\left\langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \vec{\nabla} \Psi \right\rangle + \left\langle \sigma_a \Phi, \Psi \right\rangle = \left\langle Q, \Psi \right\rangle + O(\varepsilon).$$

La question est de savoir si cette approximation est consistante avec celle de l'équation de diffusion (1.4). Nous allons voir que le choix de l'espace \mathcal{F} est crucial pour répondre positivement à cette question. Il faut également donner un sens au produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{D})^3$ des gradients des fonctions Φ et Ψ qui sont discontinues. Nous détaillons le calcul de ces termes. Nous montrons en particulier que le choix de fonctions constantes par morceaux ne permet pas de respecter la limite diffusion. Cependant, si on choisit comme espace \mathcal{F} les fonctions linéaires discontinues par morceaux, on montre que Φ à l'ordre 0 est continue et vérifie pour tout Ψ dans l'espace des fonctions continues linéaires par morceaux :

$$\left\langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \vec{\nabla} \Psi \right\rangle + \left\langle \sigma_a \Phi, \Psi \right\rangle = \left\langle Q, \Psi \right\rangle + O(\varepsilon),$$

qui est la formulation variationnelle correspondant à la discrétisation par éléments finis linéaires continus de (1.4).

Les conditions aux limites font l'objet d'une étude à part en une dimension d'espace, on montre que si $\sigma_a = 0$, la condition aux limites est au bord gauche du domaine :

$$\tilde{u} = \int_0^1 \left(\mu + \frac{3}{2} \mu^2 \right) g(\mu) d\mu + O(\varepsilon)$$

qui est une très bonne approximation de la condition aux limites exacte à cause de (1.23).

Dans ce cas, la solution numérique à l'intérieur du domaine satisfait la bonne condition aux limites même si la couche limite n'est pas maillée à l'échelle du libre-parcours (pas du maillage d'ordre ε).

Dans le cas général, nous pouvons prouver seulement que la condition aux limites est exacte pour g isotrope (c'est à dire indépendante de $\vec{\Omega}$), dans les autres cas, il faut mailler la couche limite à l'échelle du

libre-parcours pour que la solution diffusive ait la bonne condition aux limites.

On présente des tests numériques en une et deux dimensions d'espace illustrant les résultats de l'analyse asymptotique. On compare ainsi la solution exacte donnée par l'équation de diffusion (1.4) à la solution approchée donnée par la méthode SIMC quand on fait tendre ε vers 0. On voit clairement sur ces tests que le choix de fonctions linéaires par morceaux permet d'obtenir la limite diffusion au contraire des fonctions constantes par morceaux. Par contre, pour des cas transparents, nous n'observons pas de gain notable en précision avec les fonctions linéaires par morceaux. L'erreur en norme L^1 reste d'ordre 1 dans les deux cas.

Dans les milieux diffusifs, le terme significatif d'ordre ε qui permet de discrétiser l'opérateur de diffusion soit $\varepsilon \langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \vec{\nabla} \Psi \rangle$ (équation (1.28)), est la somme de deux termes de signes opposés d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ ($\langle (\frac{\sigma_t}{\varepsilon}) \frac{\varepsilon^2}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \frac{1}{\sigma_t} \vec{\nabla} \Psi \rangle - \langle \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \Phi, \Psi \rangle$ et $\langle \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \Phi, \Psi \rangle$) qui sont évalués par une méthode Monte-Carlo. Le nombre de particules nécessaire pour évaluer précisément cet opérateur discret est prohibitif. Il est alors tentant d'approcher dans le domaine diffusif la solution de l'équation de diffusion beaucoup moins coûteuse à résoudre que celle du transport.

De nombreuses méthodes [7, 27, 25, 30, 33, 37] existent pour coupler la résolution des deux équations. Elles reposent sur la discrétisation de l'équation de diffusion dans le milieu diffusif et l'introduction d'une condition de couplage entre les milieux transparents et diffusifs basée sur la condition aux limites de Marshak (1.25) ou de Chandrasekhar (1.24) prenant en compte l'anisotropie du flux incident. Pour éviter le choix délicat de la détermination de la frontière, des auteurs [27] ont proposé d'introduire une zone tampon dans laquelle on résout à la fois les équations de diffusion et de transport.

Les auteurs de [25, 37] utilisent la méthode SIMC avec des fonctions Φ constantes par morceaux. Ils se donnent a priori une discrétisation de l'opérateur de diffusion dans le milieu diffusif qu'ils résolvent de façon déterministe. La condition de couplage est traitée de façon complètement implicite si bien qu'il n'est pas nécessaire d'itérer sur la résolution des équations de transport et de diffusion. Ils obtiennent au final un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs de Φ dans tout le domaine. L'auteur de [30] utilise la méthode Monte-Carlo classique dite analogue déjà décrite dans le milieu transparent et résout en Monte-Carlo une équation de diffusion discrétisée. Dans ces deux approches, le choix de la discrétisation de l'opérateur de diffusion ainsi

que de la condition de couplage est arbitraire. Comme notre méthode Monte-Carlo possède la limite diffusion, ce qui n'est pas le cas de la méthode SIMC utilisée dans [25, 37], nous pouvons construire une méthode hybride dans laquelle on discrétise l'équation de diffusion avec l'opérateur discret obtenu par notre étude asymptotique. Les résultats de cette méthode hybride sont donc identiques (à $O(\varepsilon)$ près) à ceux de la méthode SIMC tout Monte-Carlo lorsque le choix de la frontière est correct dans la méthode hybride et le nombre de particules suffisant dans la méthode tout Monte-Carlo.

On obtient ainsi dans le domaine diffusif une discrétisation de l'équation de diffusion par une méthode de type Galerkin discontinu. La condition de couplage entre les domaines transparents et diffusifs est également dérivée de l'analyse asymptotique. On montre sur des tests numériques en une dimension d'espace que cette méthode permet de bien restituer la couche limite qui apparaît lorsqu'un rayonnement anisotrope provenant d'un milieu transparent est appliqué sur un milieu diffusif, sans avoir à la mailler à l'échelle du libre-parcours. En deux dimensions d'espace, dans les milieux diffusifs, pour un sommet donné du maillage, des termes d'ordre ε que nous appellerons termes de coins couplent les valeurs de Φ correspondant à ce sommet. On peut calculer analytiquement ces termes mais la condition de couplage entre domaines transparents et diffusifs obtenue par notre étude asymptotique semble difficile à simuler. C'est pourquoi, nous nous sommes tournés vers une autre méthode pour réduire le bruit statistique.

– Chapitre 3

Nous reprenons des idées développées dans [13] pour diminuer le coût de cette méthode. Pour cela, on introduit la fonction inconnue $D = u - \Phi$ qui représente l'écart de la solution à l'équilibre et on résout le système :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} D + \sigma_t D = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi, \\ -\sigma_s \tilde{D} + \sigma_a \Phi = Q, \\ D(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}) - \Phi(x), \quad (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases} \quad (1.29)$$

équivalent à (1.1). On a alors :

$$D(x, \vec{\Omega}) = \{\mathcal{T}^{-1}(-\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi + (g - \Phi)_{\Gamma^-})\}(x, \vec{\Omega}), \text{ donc}$$

$$\tilde{D}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(-\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi + (g - \Phi)_{\Gamma^-})\}(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \text{ on injecte alors}$$

cette expression dans la seconde équation de (1.29) et on obtient :

$$\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \Phi_{\Gamma^-})\}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \sigma_a \Phi = Q + Q_g,$$

$$\text{avec } Q_g(x, \vec{\Omega}) = \sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}^{-1}(g)\}(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

Dans les milieux diffusifs, on obtient (1.28) mais le terme significatif d'ordre ε qui permet de discrétiser l'opérateur de diffusion soit :

$$\varepsilon \langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi, \vec{\nabla} \Psi \rangle \text{ est égal à } \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{ \mathcal{T}_\varepsilon^{-1}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Phi + \Phi_{\Gamma^-}) \}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

Pour évaluer ce terme, on échantillonne des termes source d'ordre 0 par rapport à ε alors que dans la méthode précédente ces termes étaient d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. Le nombre de particules nécessaire pour évaluer précisément cet opérateur discret est donc inférieur d'un ordre à celui de la méthode exposée au chapitre précédent.

Ceci nous permet d'obtenir une méthode identique à la méthode précédente (dans la limite où le nombre de particules Monte-Carlo est grand) mais plus précise et robuste dans les milieux diffusifs pour un nombre de particules Monte-Carlo donné. On présente dans ce chapitre des tests numériques montrant le gain en temps calcul obtenu par rapport à la méthode précédente. On a également construit, en 2 dimensions d'espace, un cas diffusif pour lequel le maillage ne permet pas une bonne concordance entre la solution exacte et celle donnée par les éléments finis linéaires continus. On observe un bon accord entre la solution donnée par la méthode SIMC linéaire et celle donnée par les éléments finis linéaires continus, ce qui conforte les résultats de notre analyse asymptotique.

– Chapitre 4

Un travail important a déjà été fait pour étudier des méthodes déterministes ayant la limite diffusion. Des exemples de telles méthodes sont la méthode des éléments finis discontinus, la méthode linéaire caractéristique ainsi que la méthode SCB [1, 44, 40]. Nous faisons dans le chapitre 4 le même travail qu'au chapitre 2, cette fois-ci pour les éléments finis linéaires discontinus en 2D plan et cylindrique sur des maillages composés de triangles.

On approche l'équation (1.1) par une méthode de Galerkin discontinue, on cherche pour $\vec{\Omega}$ fixé, $u(\cdot, \vec{\Omega})$ dans l'espace \mathcal{F} des fonctions définies sur \mathcal{D} linéaires discontinues par morceaux, telle que pour tout Ψ dans \mathcal{F} , on ait :

$$\begin{cases} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u, \Psi \rangle = \langle \sigma_s \tilde{u}, \Psi \rangle + \langle Q, \Psi \rangle, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}), \quad (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases} \quad (1.30)$$

ce qui revient à chercher sur chaque triangle T , u_T linéaire telle que pour toute fonction Ψ linéaire sur T , on ait :

$$\begin{cases} - \langle u_T, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \Psi \rangle + \int_{\Gamma_T} ds (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u \Psi + \langle \sigma_t u_T, \Psi \rangle \\ = \langle \sigma_s \tilde{u}_T, \Psi \rangle + \langle Q, \Psi \rangle, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}), \quad (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.31)$$

La valeur de u sur la frontière Γ_T est la restriction de u_T sur Γ si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ et dans le triangle T' adjacent à T par Γ_T si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$, où \vec{n} est le vecteur de la normale unitaire extérieure à T .

Après condensation des termes de masse $\langle \sigma_t u_T, \Psi \rangle$ et $\langle \sigma_s \tilde{u}_T, \Psi \rangle$, on peut mettre ce schéma sous la forme d'un schéma aux volumes finis. Pour un triangle donné T de sommets A, B, C , on construit les trois sous-volumes V_A, V_B, V_C , où par exemple V_A est le sous-volume dont la frontière Γ_A joint A , les milieux des côtés AB et AC et le barycentre G du triangle T . On cherche alors, sur chaque triangle le triplet $(u_{T,A}, u_{T,B}, u_{T,C})$ solution du système linéaire de trois équations dont celle relative à V_A s'écrit :

$$\int_{\Gamma_A} ds (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u + \sigma_t u_{T,A} V_A = \sigma_s \tilde{u}_{T,A} V_A + Q_A V_A. \quad (1.32)$$

Le terme de bord est décentré de la façon suivante : sur les côtés joignant les milieux des côtés et le barycentre, u est pris égal à $u_G = \frac{1}{3}(u_{T,A} + u_{T,B} + u_{T,C})$, sur les deux segments joignant A au milieu des côtés AB et AC , u est pris égal à la restriction de u_T sur ces segments si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}$ est positif et à la restriction de $u_{T'}$ sur ces segments dans le cas contraire, le triangle T' étant adjacent à T par ce côté.

Pour rendre le schéma encore plus robuste, on peut également condenser ces termes de bord en supposant que la restriction de u aux segments joignant le point A aux milieux des côtés AB et AC est constante et égale à sa valeur dans V_A ou à sa valeur dans le sous-volume adjacent suivant le signe de $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}$. Le terme de bord par sous-volume ne fait plus alors intervenir que la valeur de u dans le sous volume V_A ou les sous-volumes correspondants dans les triangles adjacents. Par contre, on garde la valeur u_G sur les deux segments joignant G aux milieux des côtés AB et AC .

On peut montrer [46] qu'il existe au moins une numérotation des triangles qui permet de les ranger de telle façon que les triangles T' adjacents à T qui "éclaircit" T (cela signifie que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}$ est négatif, \vec{n} étant le vecteur unitaire porté par la normale au coté commun de T et T' dans le sens de T vers T') aient un numéro inférieur à celui de T . Cette propriété permet de rendre la matrice globale du système linéaire, triangulaire inférieure par blocs de matrices (3,3), ce qui autorise une résolution rapide. Cette propriété s'étend aux polygones convexes en deux dimensions d'espace. Par contre, elle n'est plus vraie en trois dimensions.

Contrairement à la méthode SIMC, il faut discrétiser la sphère angulaire \mathcal{S}_2 . On choisit des directions discrètes $\vec{\Omega}_m$ [18] et on se donne une formule de quadrature pour évaluer $\tilde{u}(x) \simeq \sum_m w_m u(x, \vec{\Omega}_m)$. On cherche alors $u_m(\cdot) = u(\cdot, \vec{\Omega}_m)$ dans \mathcal{F} , telle que pour tout Ψ dans \mathcal{F} ,

on ait :

$$\begin{cases} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_m + \sigma_t u_m, \Psi \rangle = \langle \sigma_s \sum_m w_m u_m, \Psi \rangle + \langle Q, \Psi \rangle, \\ u_m(x) = g(x, \vec{\Omega}_m), (x, \vec{\Omega}_m) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.33)$$

Le problème précédent se traite généralement par la méthode de la source itérée qui consiste à supposer le second membre connu à l'itération précédente, à calculer u_m pour toutes les directions m , calculer le flux intégré $\sum_m w_m u_m$ et itérer. Si le système vérifie les hypothèses de sous-criticité, on peut démontrer que le système itératif converge bien que cette convergence puisse être extrêmement lente dans les milieux diffusifs, auquel cas, on peut accélérer le processus itératif par la méthode de la diffusion synthétique [6] qui consiste à résoudre entre chaque itération de la source itérée, une équation de diffusion. Lorsqu'on applique la mise à l'échelle (1.2), l'équation (1.33) devient :

$$\begin{cases} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_m + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} u_m, \Psi \rangle = \langle (\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a) \sum_m w_m u_m, \Psi \rangle + \langle \varepsilon Q, \Psi \rangle, \\ u_m(x) = g(x, \vec{\Omega}_m), (x, \vec{\Omega}_m) \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (1.34)$$

On montre dans ce chapitre que, pour les deux schémas envisagés avec condensation de la matrice de masse et éventuellement des termes de bord, en supposant que la formule de quadrature angulaire vérifie certaines propriétés, $\tilde{u} = \sum_m w_m u_m$ à l'ordre 0 en ε est une fonction continue linéaire par morceaux qui vérifie pour toute fonction Ψ continue linéaire par morceaux :

$$\begin{cases} \langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \tilde{u}, \vec{\nabla} \Psi \rangle + \langle \sigma_a \tilde{u}, \Psi \rangle = \langle Q, \Psi \rangle, \\ \tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| H(|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|) g(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.35)$$

$\langle \sigma_a \tilde{u}, \Psi \rangle$ étant également condensé.

La condition aux limites n'est vérifiée sous cette forme avec l'approximation (1.23) qu'en une dimension d'espace et dans un cas particulier, en deux dimensions. Dans le cas général, elle n'est vérifiée que pour g isotrope. On remarque qu'on obtient le même schéma limite que pour la méthode SIMC linéaire.

– Chapitre 5

Dans le chapitre 5, nous montrons le lien existant entre la classe de méthodes Monte-Carlo étudiées au chapitre 2 et les méthodes déterministes étudiées au chapitre 4. Nous expliquons le fait qu'elles aient

la même limite diffusion. Nous nous plaçons dans le même cadre que dans le chapitre 2, c'est à dire que nous cherchons à résoudre (1.26), soit :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ -\sigma_s \tilde{u} + \sigma_t \Phi = Q, \\ u(x, \vec{\Omega}) = g(x, \vec{\Omega}), (x, \vec{\Omega}) \in \Gamma^-, \end{cases}$$

équivalent à (1.1). On commence par discrétiser avec la méthode des éléments finis linéaires discontinus la première équation, on suppose Φ_h linéaire par morceaux, on cherche u_h linéaire par morceaux telle que quelle que soit Ψ_h linéaire par morceaux, on ait :

$$\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_h + \sigma_t u_h, \Psi_h \rangle = \langle \sigma_t \Phi_h, \Psi_h \rangle .$$

Ceci permet de trouver

$$\tilde{u}_h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}_h^{-1}(\sigma_t \Phi_h + g)\}(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

On peut remarquer que l'opérateur \mathcal{T}_h est discrétisé (\mathcal{T}_h est une matrice), alors que dans la méthode SIMC, il est continu, la discrétisation n'intervenant qu'après le report de u dans la seconde équation de (1.26). Puis, on injecte cette expression dans la seconde équation de (1.26) et on cherche Φ_h , telle que quelle que soit Ψ_h linéaire par morceaux, on ait :

$$\langle -\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \{\mathcal{T}_h^{-1}(\sigma_t \Phi_h + g)\}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \sigma_t \Phi_h, \Psi_h \rangle = \langle Q, \Psi_h \rangle . \quad (1.36)$$

Cette approche a, en apparence, un intérêt pratique limité puisque le calcul de \mathcal{T}_h^{-1} nécessite l'inversion d'une matrice, ce qui est très coûteux. Cependant, cette approche constitue une alternative prometteuse à la résolution classique par la méthode de la source itérée accélérée par la diffusion synthétique qui dans certains cas n'est pas efficace. En fait, l'inversion de \mathcal{T}_h n'est pas nécessaire. La résolution de (1.36) peut se faire par une méthode itérative de Krylov dans laquelle à chaque itération, on résout l'équation de transport avec un second membre connu. Avec un préconditionnement efficace reposant sur la résolution de l'équation de diffusion associée, cette méthode peut s'avérer plus efficace que la méthode de la source itérée. On trouve dans [51] une bonne introduction à ces méthodes pour résoudre l'équation du transport.

Dans un milieu diffusif où la mise à l'échelle (1.2) s'applique, on fait le développement de $\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \mathcal{T}_{h,\varepsilon}^{-1} d\vec{\Omega}$ à l'ordre 2 en ε au niveau discret, en

d'autres termes, on cherche le développement asymptotique de l'inverse de la matrice $\mathcal{T}_{h,\varepsilon}$ où $\mathcal{T}_{h,\varepsilon} = (\varepsilon\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} + \sigma_t I)_h$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \mathcal{T}_{h,\varepsilon}^{-1}(\sigma_t \Phi_h)(\cdot, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}, \Psi_h \right\rangle = & - \left\langle \frac{\varepsilon^2}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi_h, \frac{1}{\sigma_t} \vec{\nabla} \Psi_h \right\rangle \\ & + \left\langle \Phi_h, \Psi_h \right\rangle + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

En insérant cette expression dans (1.36), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma_a \right) \frac{\varepsilon^2}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi_h, \frac{1}{\sigma_t} \vec{\nabla} \Psi \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma_a \right) \Phi_h, \Psi_h \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \Phi_h, \Psi_h \right\rangle = \left\langle \varepsilon Q + Q_g, \Psi_h \right\rangle + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En identifiant les termes d'ordre ε , on trouve que Φ_h vérifie :

$$\left\langle \frac{1}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \Phi_h, \vec{\nabla} \Psi_h \right\rangle + \left\langle \sigma_a \Phi_h, \Psi_h \right\rangle = \left\langle Q, \Psi_h \right\rangle + O(\varepsilon),$$

soit la même formulation variationnelle à l'ordre 0 qu'avec la méthode SIMC linéaire, les différences n'intervenant que dans le terme en $O(\varepsilon)$.

Chapitre 2

Analyse asymptotique de la méthode Symbolique Implicite Monte Carlo

Ce chapitre reprend dans ses grandes lignes l'article [24].

2.1 Introduction

Les méthodes Monte-Carlo sont utilisées en 3D depuis longtemps car elles sont simples à mettre en oeuvre et qu'elles peuvent traiter des géométries complexes qui seraient difficiles à traiter avec une méthode déterministe. Mais une analyse de leur comportement en milieu diffusif, c'est-à-dire quand la mise à l'échelle (1.2) s'applique, n'a pas encore été faite. Notre but est d'analyser une méthode Monte-Carlo particulière de la même façon que les méthodes déterministes : la méthode Monte-Carlo Symbolique implicite (SIMC : Symbolic Implicit Monte Carlo) [37, 12]. Cette méthode consiste à résoudre le système :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ -\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega} + \sigma_t \Phi = Q, \end{cases} \quad (2.1)$$

équivalent à (1.1) (avec les mêmes conditions aux limites). Dans la méthode SIMC, on commence par mailler l'espace, ce qui n'est pas nécessaire avec les méthodes Monte-Carlo usuelles. On calcule la matrice qui fournit $\sigma_t \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega}$, fonction de Φ dans la première équation de (2.1). En remplaçant $\sigma_s \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega}$ dans la seconde équation de (2.1) par cette fonction de Φ , on obtient un système linéaire dont la solution est Φ . On peut prouver l'équivalence pour cette équation modèle entre la méthode des probabilités

de collision [10] et la méthode SIMC. Mais la méthode SIMC est le plus souvent utilisée en photonique pour résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sigma_t \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega} + \sigma_t \Phi = Q. \end{cases} \quad (2.2)$$

La seconde équation dans (2.2) est l'équation de l'énergie électronique où Φ est la température électronique et γ la capacité calorifique. Ce système prend une forme analogue à (2.1) après discrétisation implicite en temps de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ -\sigma_t \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u d\vec{\Omega} + (\sigma_t + \frac{\gamma}{\Delta t}) \Phi = Q + \gamma \frac{\Phi_0}{\Delta t}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Aussi, toutes les conclusions que nous pouvons tirer de l'étude de la méthode SIMC pour résoudre (2.1) peuvent être appliquées à (2.3).

Dans les problèmes d'hydrodynamique radiative, à cause de la complexité des géométries qui évoluent dans le temps et de la dépendance en temps de u , les coefficients de la matrice sont calculés en utilisant une méthode particulière.

La méthode des probabilités de collision est plutôt utilisée en neutro-nique stationnaire sur une géométrie composée d'éléments "simples". Aussi, le calcul des probabilités de collision peut être fait analytiquement.

Nous nous intéressons au comportement de la méthode SIMC dans les régions optiquement épaisses. Dans ces régions, seules les particules traversant les cloisons des mailles contribuent au calcul des éléments de la matrice, au moins dans la méthode originale. Il s'ensuit que lorsque la taille des mailles est beaucoup plus grande que le libre-parcours, un grand nombre de particules est nécessaire pour obtenir des résultats ayant un sens. La question qui se pose est alors : si le nombre de particules est suffisant pour calculer précisément la matrice, le système linéaire obtenu correspond-il à une discrétisation consistante de l'équation de diffusion ? Autrement dit, résolvons-nous la bonne équation dans un milieu diffusif ? Nous allons prouver que la méthode originale donne une mauvaise solution dans ces régions et qu'il nous faut l'améliorer pour obtenir une discrétisation consistante de l'équation de diffusion. Cette difficulté pour obtenir le comportement correct en milieu diffusif est connue depuis longtemps (voir [48] pour une contribution récente) : nous présentons ici une analyse rigoureuse de cette faiblesse.

Dans la section 2.2, nous décrivons la méthode SIMC pour des fonctions de base constantes par morceaux telle qu'elle a été pour la première fois introduite [12, 37] et comment elle peut être étendue à des fonctions de base plus

générales. Précisons que pour améliorer la méthode des probabilités de collision, cette extension avait déjà été envisagée [38]. Cependant, le problème de sa précision en milieu diffusif n'avait pas alors été abordé. Nous appliquons ensuite dans la section 2.3 une mise à l'échelle au schéma obtenu pour étudier la limite diffusion. Enfin, nous illustrons dans la section 2.5, les résultats théoriques avec des simulations numériques en 1D et 2D.

2.2 Extension de la méthode SIMC

Dans cette section, nous rappelons les principales caractéristiques de la méthode SIMC et décrivons son extension à des éléments de degré supérieur. Pour plus de simplicité, nous commençons par supposer que l'intensité entrante g est nulle.

Prenons $u(x, \vec{\Omega})$ où $x \in \mathcal{D}$ et $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}_2$ solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ -\sigma_s \tilde{u} + \sigma_t \Phi = Q, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\tilde{u}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} u(x, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$. Dans la méthode SIMC, nous nous intéressons généralement à l'intensité intégrée \tilde{u} plutôt qu'à la dépendance angulaire de cette intensité.

Supposons le domaine \mathcal{D} maillé en N mailles $(T_i)_{i \in (1, N)}$ et définissons des fonctions de base $(\chi_i^l(x))_{l \in (1, L)}$ pour chaque maille T_i telles que

$$\sum_{l=1}^L \chi_i^l(x) = \mathbb{1}_{x \in T_i}, \quad \chi_i^l(x) \chi_{i'}^{l'}(x) = 0 \text{ pour } i \neq i'.$$

Nous pouvons exprimer Φ comme

$$\Phi(x) = \sum_{i,l} \phi_i^l \chi_i^l(x). \quad (2.5)$$

Nous approchons (2.4) par le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sigma_t \Phi, \\ \langle -\sigma_s \tilde{u} + \sigma_t \Phi - Q, \chi_{i'}^{l'} \rangle = 0, \forall i' \in (1, N), \forall l' \in (1, L), \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{D})$ (normalisé de telle sorte que

$\langle \mathbb{1}_{x \in T_i}, \mathbb{1}_{x \in T_i} \rangle = V_i$) c'est-à-dire que nous cherchons une solution faible du système (2.4) dans un espace d'éléments finis discontinus. Pour plus de simplicité, dans ce chapitre, nous utiliserons la même notation pour la solution exacte u et la solution approchée. Grâce à la linéarité de (2.6) par rapport à Φ , la solution de (2.6) peut être exprimée comme :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \sum_{i,l} \phi_i^l u_i^l(x, \vec{\Omega}), \quad (2.7)$$

où la fonction $u_i^l(x, \vec{\Omega})$ est solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^l + \sigma_t u_i^l = \sigma_t \chi_i^l, \\ u_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

La condition aux limites est équivalente à $u_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, x \in \Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ où Γ_i est la frontière de la maille T_i . En mettant (2.5) et (2.7) dans le système (2.6), en supposant que σ_t et σ_s sont constantes par maille, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^l + \sigma_t u_i^l = \sigma_t \chi_i^l, \\ \sum_{i,l} (b_{i,i'}^{l,l'} - \frac{\sigma_s(i')}{\sigma_t(i')} a_{i,i'}^{l,l'}) \phi_i^l = \langle Q, \chi_{i'}^l \rangle, \forall i' \in (1, N), \forall l' \in (1, L), \\ u_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

où nous avons noté $a_{i,i'}^{l,l'} = \sigma_t(i') \langle \tilde{u}_i^l, \chi_{i'}^l \rangle$ et $b_{i,i'}^{l,l'} = \sigma_t(i') \langle \chi_i^l, \chi_{i'}^l \rangle$.

Le système (2.9) est résolu en trois étapes. Premièrement, on cherche la solution des équations (2.8) pour tous les indices (i, l) . En fait, comme nous ne cherchons pas une description angulaire de u_i^l mais seulement la quantité intégrée $a_{i,i'}^{l,l'}$, une méthode particulière est bien appropriée. Ensuite, connaissant les matrices $\mathcal{A} = (a_{i,i'}^{l,l'})_{1 \leq i, i' \leq N, 1 \leq l, l' \leq L}$ et $\mathcal{B} = (b_{i,i'}^{l,l'})_{1 \leq i, i' \leq N, 1 \leq l, l' \leq L}$, nous résolvons le système linéaire dont les inconnues sont les ϕ_i^l :

$$\sum_{i,l} (b_{i,i'}^{l,l'} - \frac{\sigma_s(i')}{\sigma_t(i')} a_{i,i'}^{l,l'}) \phi_i^l = \langle Q, \chi_{i'}^l \rangle, \forall i', \forall l'. \quad (2.10)$$

Ceci donne Φ par (2.5) et finalement nous en déduisons la projection de \tilde{u} sur l'espace des fonctions tests : $\langle \tilde{u}, \chi_i^l \rangle = \frac{\langle \sigma_t \Phi - Q, \chi_i^l \rangle}{\sigma_s}$.

Si au lieu de \tilde{u} , on cherche une quantité G (telle que $u(x, \vec{\Omega})$ pour un point particulier x_0 et une direction particulière $\vec{\Omega}_0$), il est alors nécessaire de calculer durant la trajectographie des particules l'opérateur linéaire reliant G à Φ . Une fois Φ connue, G est obtenue simplement par un produit scalaire.

Remarque 1 : La méthode SIMC peut s'étendre au cas où le terme de collision et le terme de source extérieure sont anisotropes.

Les détails de cette extension sont donnés dans l'annexe B.1.

Remarque 2 : Soit $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ la solution de (2.10) avec $L = 1$, alors $(\tilde{u}_i)_{1 \leq i \leq N}$ où $\tilde{u}_i = \frac{\sigma_t(i) \Phi_i - Q_i}{\sigma_s}$ est solution de l'équation des probabilités de collision, c'est-à-dire pour tout i' ,

$$\sigma_t(i') V_{i'} \tilde{u}_{i'} = \sum_i V_i P_{i,i'} (\sigma_s(i) \tilde{u}_i + Q_i),$$

$P_{i,i'}$ étant la probabilité de collision d'une particule dans la maille i' sachant qu'elle est née dans la maille i .

Les détails de la preuve sont donnés dans l'annexe B.2.

Remarque 3 : La matrice du système linéaire obtenu par la méthode SIMC dans le cas où le terme de collision et le terme de source extérieure sont isotropes est symétrique, c'est une M -matrice à diagonale strictement dominante dans le cas où $L = 1$ et symétrique définie positive dans tous les cas.

Les détails de la preuve sont donnés dans l'annexe B.3.

Pour prendre en compte une condition aux limites non homogène g , on introduit une seconde fonction auxiliaire u_b , solution de

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_b + \sigma_t u_b = 0, \\ u_b(x, \vec{\Omega}) = g, x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

et le second membre du système linéaire (2.10) $\langle Q, \chi_i'' \rangle$ est remplacé par $\langle Q + \sigma_s \tilde{u}_b, \chi_i'' \rangle$.

Dans la méthode originale SIMC, Φ était supposée constante par maille pour chaque maille T_i , donc $L = 1$ et $\chi_i^1(x) = \mathbb{1}_{x \in T_i}$. Dans la méthode améliorée SIMC, Φ est supposée linéaire sur chaque maille et discontinue :

- En 1D, on a deux fonctions de base par maille $T_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$: $\chi_i^1(x) = \frac{x_{i+1/2} - x}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}$ et $\chi_i^2(x) = \frac{x - x_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}$. Ainsi, ϕ_i^1 est la valeur de Φ dans la maille T_i pour $x_{i-1/2}$ et ϕ_i^2 pour $x_{i+1/2}$.
- En 2D, nous choisissons des mailles triangulaires et nous avons trois fonctions de base par triangle T . La fonction de base χ_i^l est le polynôme de degré 1 en x, y dont la valeur est 1 au sommet l et 0 aux autres sommets et ϕ_i^l est la valeur de Φ au sommet l .
- En 3D, les mailles sont des tétraèdres, et nous avons quatre fonctions de base par tétraèdre T . La fonction de base χ_i^l est le polynôme de degré 1 en (x, y, z) dont la valeur est 1 au sommet l et 0 aux autres sommets et ϕ_i^l est la valeur de Φ au sommet l .

Pour être complet, nous décrivons brièvement la méthode particulière utilisée pour calculer les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Pour chaque maille i , nous résolvons (2.8) en même temps pour tous les $l \in \{1, L\}$. Le terme source est échantillonné avec P particules dans chaque maille, leur direction $\vec{\Omega}_p$ est choisie uniforme sur \mathcal{S}_2 et leur lieu de naissance $x_p(0)$ uniforme sur T_i . L'échantillonnage peut être aléatoire ou déterministe. À chaque particule p est associé un poids $\omega_p(0) = \frac{1}{P} \sigma_t(i) V_i$ où V_i est le volume de la maille i . En fait, chaque particule représente L particules dont les

poinds sont $\omega_p^l(0) = \omega_p(0)\chi_i^l(x_p(0))$. Cette particule est dite *symbolique* parce que dans cette étape, nous ne connaissons pas son poids réel $\omega_p^l\phi_i^l$. Durant l'échantillonnage, nous calculons par intégration Monte-Carlo les produits scalaires $b_{i,i'}^{l,l'}$:

$$b_{i,i'}^{l,l'} = \frac{1}{P}\sigma_t(i)V_i \sum_p \chi_i^l(x_p(0))\chi_{i'}^{l'}(x_p(0)).$$

Chaque particule p traverse le maillage avec une vitesse unité et la direction $\vec{\Omega}_p$. Quand une distance l_p est traversée dans la maille $T_{i'}$, le poids de la particule est multiplié par le facteur d'atténuation $e^{-\sigma_t(i')l_p}$ et l'estimateur de l'élément matriciel $a_{i,i'}^{l,l'}$ est incrementé :

$$\begin{aligned} \omega_p &\rightarrow \omega_p e^{-\sigma_t(i')l_p}, \\ a_{i,i'}^{l,l'} &\rightarrow a_{i,i'}^{l,l'} + \omega_p \int_0^{l_p} \sigma_t(i')\chi_{i'}^{l'}(x_p(s))e^{-\sigma_t(i')s} ds. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une source et d'un terme de collision anisotropes, il faut estimer :

$$(a_{nm})_{i,i'}^{l,l'} \rightarrow (a_{nm})_{i,i'}^{l,l'} + \omega_p Y_{nm}(\vec{\Omega}) \int_0^{l_p} \sigma_t(i')\chi_{i'}^{l'}(x_p(s))e^{-\sigma_t(i')s} ds.$$

On peut noter que la somme de toutes les contributions (tous les l') à la matrice est la perte du poids de la particule p :

$$\omega_p \sum_{l'=1}^L \int_0^{l_p} \sigma_t(i')\chi_{i'}^{l'}(x_p(s))e^{-\sigma_t(i')s} ds = \omega_p(1 - e^{-\sigma_t(i')l_p}).$$

On peut calculer analytiquement l'incrément de $a_{i,i'}^{l,l'}$. Supposons que la particule p se déplace de A à B dans $T_{i'}$, nous obtenons en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{l_p} \sigma_t(i')\chi_{i'}^{l'}(A + \vec{\Omega}_p s)e^{-\sigma_t(i')s} ds &= [-e^{-\sigma_t(i')s}\chi_{i'}^{l'}(A + \vec{\Omega}_p s)]_0^{l_p} + \\ &\int_0^{l_p} \vec{\Omega}_p \cdot \vec{\nabla}\chi_{i'}^{l'}(A + \vec{\Omega}_p s)e^{-\sigma_t(i')s} ds \\ &= -\chi_{i'}^{l'}(B)e^{-\sigma_t(i')l_p} + \chi_{i'}^{l'}(A) \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\sigma_t(i')l_p}}{\sigma_t} \vec{\Omega}_p \cdot \vec{\nabla}\chi_{i'}^{l'}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\vec{\nabla}\chi_{i'}^{l'}$ est un vecteur constant sur chaque maille T_i . Sur d'autres types de mailles, une intégration numérique serait nécessaire.

2.3 Limite diffusion de la méthode SIMC

Dans cette section, nous étudions la limite diffusion de la méthode SIMC, d'abord pour la méthode standard (fonctions de base constantes par morceaux) puis pour la méthode améliorée (fonctions de base linéaires par morceaux). La technique, introduite pour la première fois dans [39], consiste à

réaliser l'analyse asymptotique du schéma numérique avec la mise à l'échelle (1.2). Soit u^ε la solution du schéma numérique mis à l'échelle, nous obtenons le schéma numérique satisfait par u^ε à l'ordre 0 en ε . Si ce schéma est une discrétisation correcte de l'équation de diffusion (1.4), alors on dit que la méthode SIMC possède la limite diffusion.

Il faut noter que tous les développements présentés par la suite sont formels et que nous ne donnerons pas de majorations d'erreurs.

Dans cette section, nous nous restreignons à des conditions aux limites de flux entrant nul. Nous supposons que σ_t et σ_s sont constantes sur \mathcal{D} pour alléger les notations bien que l'extension à des sections efficaces non constantes ne pose a priori aucun problème dans l'étude de la limite diffusion.

Nous commençons par établir le lemme suivant qui sera utilisé dans toute cette section :

Lemme 1 : Soit Γ un côté d'une maille et soit $L(\gamma, \vec{\Omega})$, la distance du point γ sur Γ à un autre point γ' sur la frontière de la maille telle que $\overrightarrow{\gamma\gamma'}$ est colinéaire à $\vec{\Omega}$ (Figs. 2.1 et 2.2 pour les cas 1D, 2D) et soit l'intégrale

$$CT(\varepsilon) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma, \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right).$$

- i/ Pour des problèmes 1D, il existe une constante $c > 0$ telle que $L(\gamma, \vec{\Omega}) > c$ pour tous les $(\gamma, \vec{\Omega})$: donc $CT(\varepsilon)$ tend exponentiellement vers zero quand ε tend vers 0.
- ii/ Pour des problèmes 2D, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$CT(\varepsilon) \sim C \frac{\varepsilon}{\sigma_t}.$$

- iii/ En 3D, nous n'avons pas fait la démonstration. Nous conjecturons que les termes de coin deviennent des termes d'arêtes car la distance $L(\gamma, \vec{\Omega})$ s'annule alors sur une ou plusieurs arêtes et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$CT(\varepsilon) \sim C \frac{\varepsilon}{\sigma_t}$$

comme en 2D.

CT sera appelé terme de coin. On obtient le même résultat pour le terme :

$$CT(\varepsilon) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma, \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right)$$

car les deux intégrales sont égales.

Preuve 1 : En 1D, nous avons pour une constante positive c

$$0 < CT(\varepsilon) < \int_{\mu < 0} |\mu| e^{-\frac{\sigma_t c}{\varepsilon |\mu|}} d\mu,$$

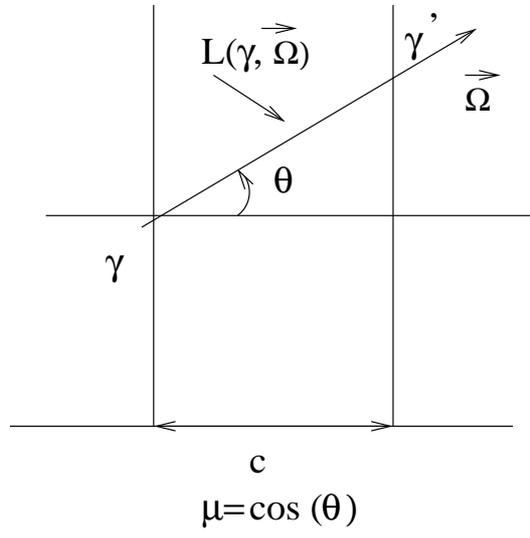


FIG. 2.1 – cas 1D

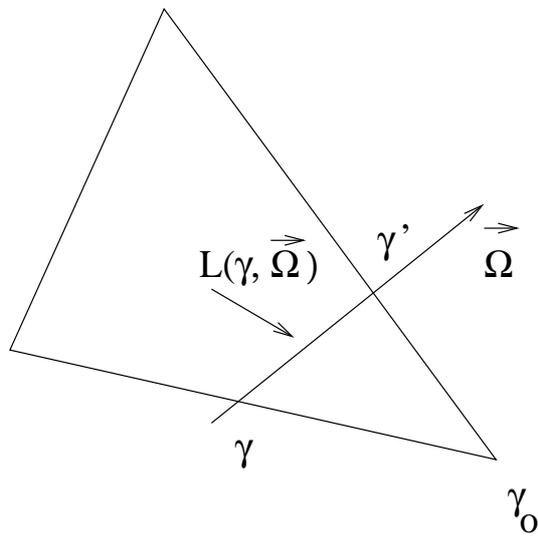


FIG. 2.2 – cas 2D

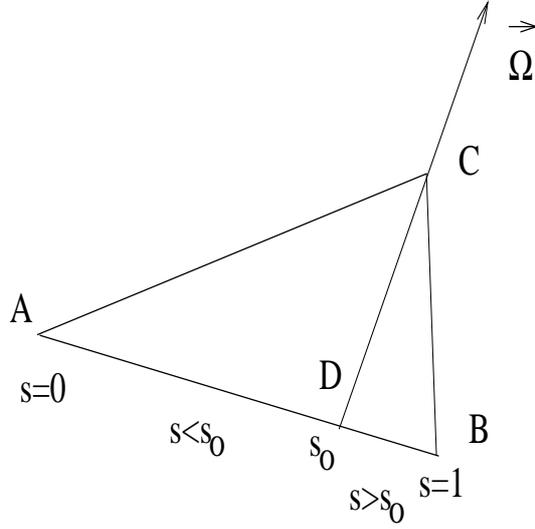


FIG. 2.3 – cas 2D ; $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_1$

et ce terme décroît exponentiellement lorsque ε tend vers 0.

En 2D, plaçons nous sur le triangle ABC, prenons $\Gamma = AB$, introduisons la coordonnée paramétrique $\gamma(s)$ sur Γ telle que $\gamma(0) = A$ (Fig 2.3).

L'ensemble des vecteurs $\vec{\Omega}$ tels que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} < 0$, $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{BC} > 0$, où \vec{n}_{AB} , \vec{n}_{BC} , \vec{n}_{AC} sont les vecteurs unitaires extérieurs à AB, BC, AC est noté \mathcal{S}'_1 (Fig.2.3).

Si $\vec{\Omega}$ appartient à \mathcal{S}'_1 alors la demi-droite dans le plan (x, y) passant par C avec pour direction $-\vec{\Omega}$ (ceci est un abus de langage, il s'agit de la projection de $-\vec{\Omega}$ dans le plan (x, y) mais nous continuerons dans la suite à utiliser ce raccourci) a une intersection non vide D avec (AB) et il existe donc s_0 tel que $\gamma(s_0) + L(\gamma, \vec{\Omega})\vec{\Omega} = C$. Pour $s < s_0$, on a $\gamma \in (AD)$ et $\gamma' \in (AC)$ et pour $s > s_0$, on a $\gamma \in (DB)$ et $\gamma' \in (BC)$, dans ce cas la distance $L(\gamma, \vec{\Omega})$ s'annule pour $\gamma = A$ et $\gamma = B$.

De même, l'ensemble des vecteurs $\vec{\Omega}$ tels que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} < 0$, $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} < 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{BC} > 0$, est noté \mathcal{S}'_2 (Fig.2.4). Si $\vec{\Omega}$ appartient à \mathcal{S}'_2 , la demi-droite passant par A de direction $\vec{\Omega}$ a une intersection non vide D avec (BC) et la distance $L(\gamma, \vec{\Omega})$ s'annule pour $\gamma = B$ uniquement.

De même, l'ensemble des vecteurs $\vec{\Omega}$ tels que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} < 0$, $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{BC} < 0$, est noté \mathcal{S}'_3 (Fig.2.5). Si $\vec{\Omega}$ appartient à \mathcal{S}'_3 , la demi-droite passant par B de direction $\vec{\Omega}$ a une intersection non vide D avec (AC) et la distance $L(\gamma, \vec{\Omega})$ s'annule pour $\gamma = A$ uniquement.

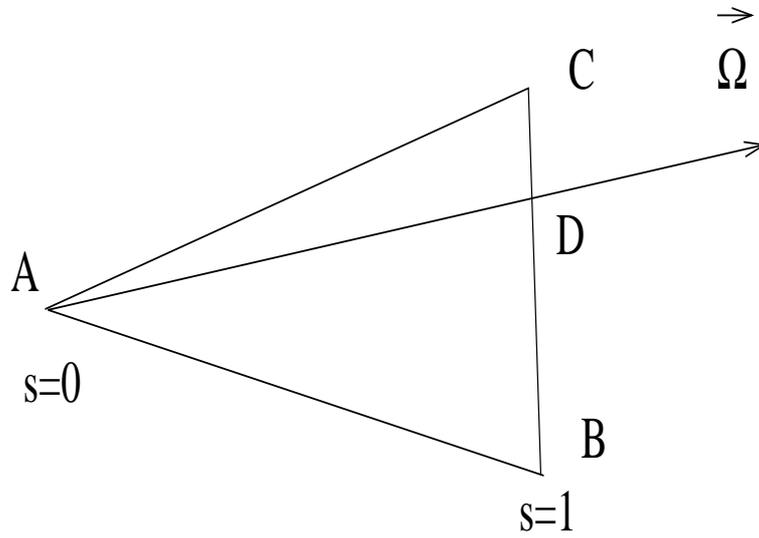


FIG. 2.4 – cas 2D ; $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_2$

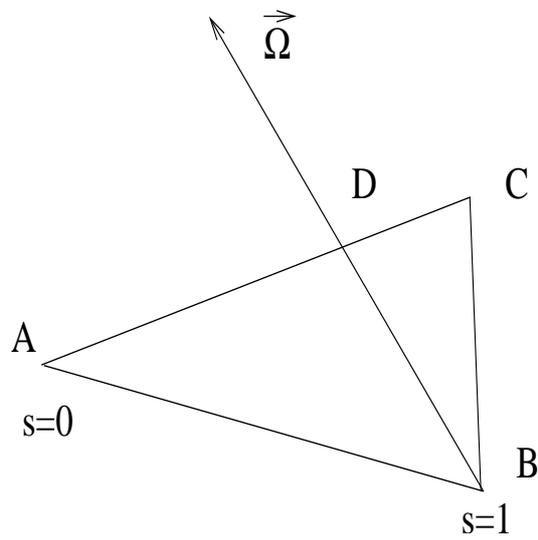


FIG. 2.5 – cas 2D ; $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_3$

On a :

$$\begin{aligned}
CT(\varepsilon) &= AB \int_0^1 ds \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} < 0} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma(s), \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right) d\vec{\Omega} \\
&= AB \int_0^1 ds \int_{S'_1} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma(s), \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right) d\vec{\Omega} \\
&+ AB \int_0^1 ds \int_{S'_2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma(s), \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right) d\vec{\Omega} \\
&+ AB \int_0^1 ds \int_{S'_3} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma(s), \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right) d\vec{\Omega}
\end{aligned}$$

Soit μ le cosinus de l'angle compris entre $\vec{\Omega}$ et sa projection dans le plan (x, y) .

Le premier terme de la somme qu'on note I_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
I_1 &= AB \int_{S'_1} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\int_0^{s_0(\vec{\Omega})} \exp\left(-\frac{\sigma_t C_0(\vec{\Omega}) s AB}{\varepsilon |\mu|}\right) ds \right) d\vec{\Omega} \\
&+ AB \int_{S'_1} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\int_{s_0(\vec{\Omega})}^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_1(\vec{\Omega}) (1-s) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) ds \right) d\vec{\Omega}.
\end{aligned}$$

où $C_0(\vec{\Omega}) = \frac{CD}{AD}$ et $C_1(\vec{\Omega}) = \frac{CD}{BD}$.

En intégrant, nous obtenons

$$\int_0^{s_0} \exp\left(-\frac{\sigma_t C_0(\vec{\Omega}) s AB}{\varepsilon |\mu|}\right) ds = \frac{\varepsilon |\mu|}{\sigma_t C_0(\vec{\Omega}) AB} + O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}),$$

ainsi que

$$\int_{s_0}^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_1(\vec{\Omega}) (1-s) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) ds = \frac{\varepsilon |\mu|}{\sigma_t C_1(\vec{\Omega}) AB} + O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}),$$

donc

$$I_1 \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{S'_1} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\frac{1}{C_0(\vec{\Omega})} + \frac{1}{C_1(\vec{\Omega})} \right) d\vec{\Omega}.$$

Le second terme de la somme qu'on note I_2 s'écrit :

$$I_2 = AB \int_{S'_2} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_2(\vec{\Omega}) (1-s) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) ds \right) d\vec{\Omega}$$

où $C_2(\vec{\Omega}) = \frac{AD}{AB}$.

En intégrant, nous obtenons

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_2(\vec{\Omega})(1-s)AB}{\varepsilon|\mu|}\right) ds = \frac{\varepsilon|\mu|}{\sigma_t C_2(\vec{\Omega})AB} + O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}),$$

donc

$$I_2 \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{S'_2} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \frac{1}{C_2(\vec{\Omega})} d\vec{\Omega}.$$

Le troisième terme de la somme qu'on note I_3 s'écrit :

$$I_3 = AB \int_{S'_3} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_3(\vec{\Omega})sAB}{\varepsilon|\mu|}\right) ds \right) d\vec{\Omega}$$

où $C_3(\vec{\Omega}) = \frac{BD}{AB}$.

En intégrant, nous obtenons

$$\int_0^1 \exp\left(-\frac{\sigma_t C_3(\vec{\Omega})sAB}{\varepsilon|\mu|}\right) ds = \frac{\varepsilon|\mu|}{\sigma_t C_3(\vec{\Omega})AB} + O(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}),$$

donc

$$I_3 \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\vec{\Omega} \in S'_3} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \frac{1}{C_3(\vec{\Omega})} d\vec{\Omega}.$$

En rassemblant les trois termes, on trouve le résultat attendu soit :

$$CT(\varepsilon) \sim C \frac{\varepsilon}{\sigma_t},$$

avec

$$C = \int_{\vec{\Omega} \in S'_1} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \left(\frac{1}{C_0(\vec{\Omega})} + \frac{1}{C_1(\vec{\Omega})} \right) d\vec{\Omega} \\ + \int_{\vec{\Omega} \in S'_2} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \frac{1}{C_2(\vec{\Omega})} d\vec{\Omega} + \int_{\vec{\Omega} \in S'_3} |\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \frac{1}{C_3(\vec{\Omega})} d\vec{\Omega}.$$

Lemme 2 : Avec les mêmes notations que dans le lemme 1, soit l'intégrale

$$CT(\varepsilon) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \chi^l(\gamma) \chi^{l'}(\gamma') \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma, \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right)$$

où χ^l (resp $\chi^{l'}$) est la fonction de base linéaire associée au sommet l (resp l') et $\gamma' = \gamma + L(\gamma, \vec{\Omega})\vec{\Omega}$.

i/ Pour des problèmes 1D, $CT(\varepsilon)$ tend exponentiellement vers zero quand ε tend vers 0.

ii/ Pour des problèmes 2D, si $l = l' = A$ ou $l = l' = B$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$CT(\varepsilon) \sim C \frac{\varepsilon}{\sigma_t},$$

sinon dans tous les autres cas, on a $CT(\varepsilon) = 0$ ou $CT(\varepsilon) = 0(\varepsilon^2)$.

iii/ En 3D, nous n'avons pas fait la démonstration. Nous conjecturons que le comportement asymptotique des termes de coin est le même qu'en 2D.

On obtient le même résultat pour :

$$CT(\varepsilon) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \chi^l(\gamma) \chi^{l'}(\gamma') \exp\left(-\frac{\sigma_t L(\gamma, \vec{\Omega})}{\varepsilon}\right)$$

où $\gamma' = \gamma - L(\gamma, \vec{\Omega}) \vec{\Omega}$ car les deux intégrales sont égales.

Preuve 2 en 1D la preuve est identique à celle du lemme 1.

En 2D, comme dans le lemme 1, on peut séparer l'intégrale en trois termes :

$$CT(\varepsilon) = I_1 + I_2 + I_3$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = AB \int_{S'_1} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \int_0^{s_0(\vec{\Omega})} ds \chi^l(\gamma(s)) \chi^{l'}(\gamma'(s)) \exp\left(-\frac{\sigma_t C_0(\vec{\Omega}) s AB}{\varepsilon |\mu|}\right) \\ + AB \int_{S'_1} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \int_{s_0(\vec{\Omega})}^1 ds \chi^l(\gamma(s)) \chi^{l'}(\gamma'(s)) \exp\left(-\frac{\sigma_t C_1(\vec{\Omega}) (1-s) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) \\ I_2 = AB \int_{S'_2} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \int_0^1 ds \chi^l(\gamma(s)) \chi^{l'}(\gamma'(s)) \exp\left(-\frac{\sigma_t C_2(\vec{\Omega}) (1-s) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) \\ I_3 = AB \int_{S'_3} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| \int_0^1 ds \chi^l(\gamma(s)) \chi^{l'}(\gamma'(s)) \exp\left(-\frac{\sigma_t C_3(\vec{\Omega}) s AB}{\varepsilon |\mu|}\right). \end{array} \right.$$

On distingue les cas suivants :

- $l = l' = A$

- $\vec{\Omega} \in S'_1$

On a $\chi^l(\gamma(s)) = (1-s)$ et $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 1 - \frac{AB}{AD}s$ pour $s < s_0$

et $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 0$ pour $s > s_0$ car alors $\gamma'(s)$ appartient à (BC) .

Or :

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_0} ds (1-s) \left(1 - \frac{AB}{AD}s\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t s C_0(\vec{\Omega}) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) \\ &= \int_0^{s_0} ds \exp\left(-\frac{\sigma_t s C_0(\vec{\Omega}) AB}{\varepsilon |\mu|}\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\varepsilon |\mu|}{\sigma_t C_0(\vec{\Omega}) AB} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

donc

$$I_1 \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{S'_1} d\vec{\Omega} \frac{|\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}|}{C_0(\vec{\Omega})}$$

- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_2$
On a $I_2 = 0$ car alors $\gamma'(s) \in (BC)$ et $\chi'(\gamma'(s)) = 0$.
- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_3$
Pour le calcul de I_3 on a $\chi'(\gamma'(s)) = 1 - \frac{AD}{AC}s$ et

$$\int_0^1 ds(1-s)\left(1 - \frac{AD}{AC}s\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t s C_3(\vec{\Omega}) AB}{\varepsilon|\mu|}\right) = \frac{\varepsilon|\mu|}{\sigma_t C_3(\vec{\Omega}) AB} + o(\varepsilon^2),$$

donc

$$I_3 \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\mathcal{S}'_3} d\vec{\Omega} \frac{|\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}|}{C_3(\vec{\Omega})}.$$

$$\text{Finalement } CT(\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{\sigma_t} C \text{ avec } C = \int_{\mathcal{S}'_1} d\vec{\Omega} \frac{|\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}|}{C_0(\vec{\Omega})} + \int_{\mathcal{S}'_3} d\vec{\Omega} \frac{|\mu| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}|}{C_3(\vec{\Omega})}.$$

On peut donner une expression plus simple de C faisant apparaître le rôle symétrique joué par les arêtes AB et AC dans l'expression précédente. On peut démontrer que :

$$\frac{1}{C_0(\vec{\Omega})} = \frac{|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC}|}{|\mu| \sin(\hat{BAC})} \text{ pour } \vec{\Omega} \text{ appartenant à } \mathcal{S}'_1 \text{ ainsi que}$$

$$\frac{1}{C_3(\vec{\Omega})} = \frac{|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC}|}{|\mu| \sin(\hat{BAC})} \text{ pour } \vec{\Omega} \text{ appartenant à } \mathcal{S}'_3. \text{ Finalement, on obtient } CT(\varepsilon) \sim 4\pi\varepsilon \mathcal{F}(AB, AC) \text{ avec :}$$

$$\mathcal{F}(AB, AC) = \frac{1}{4\pi\sigma_t \sin(\hat{BAC})} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} < 0, \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} > 0} d\vec{\Omega} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB}| |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC}|. \quad (2.12)$$

Cette dernière intégrale peut être calculée analytiquement.

- $l = A, l' = B$
- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_1$
On a $\chi^l(\gamma(s)) = (1-s)$ et $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 0$ si $s < s_0$ car alors $\gamma'(s)$ appartient à (AC) et $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 1 - (1-s)\frac{AB}{BD}$ si $s > s_0$.
On a :

$$\begin{aligned} & \int_{s_0}^1 ds(1-s)\left(1 - \frac{AB}{BD}(1-s)\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t(1-s)C_1(\vec{\Omega})AB}{\varepsilon|\mu|}\right) \\ &= (1-s_0)^2 \int_0^1 ds(1-s)s \exp\left(-\frac{\sigma_t(1-s_0)sC_1(\vec{\Omega})AB}{\varepsilon|\mu|}\right), \end{aligned}$$

donc $I_1 = 0(\varepsilon^2)$.

- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_2$ On a $\chi^l(\gamma'(s)) = 1 - (1-s)\frac{BD}{BC}$ et

$$\int_0^1 ds(1-s)\left(1 - \frac{BD}{BC}(1-s)\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t(1-s)C_2(\vec{\Omega})AB}{\varepsilon|\mu|}\right)$$

- donc $I_2 = 0(\epsilon^2)$.
- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_3$
On a $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 0$ car alors $\gamma'(s) \in AC$ donc $I_3 = 0$.
Finalement $CT(\epsilon) = 0(\epsilon^2)$.
 - $l = A, l' = C$
- $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_1$
pour $s < s_0$, on a $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = \frac{AB}{AD}s$ et pour $s > s_0$, on a $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = \frac{AB}{BD}(1-s)$,
or $\int_0^{s_0} ds(1-s)\left(\frac{AB}{AD}s\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t s C_0(\vec{\Omega})AB}{\epsilon|\mu|}\right) = 0(\epsilon^2)$ et
$$\int_{s_0}^1 ds(1-s)\left(\frac{AB}{BD}(1-s)\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t(1-s)C_1(\vec{\Omega})AB}{\epsilon|\mu|}\right) = 0(\epsilon^3),$$

donc $I_1 = 0(\epsilon^2)$.
 - $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_2$ On a $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = 1 - (1-s)\frac{BD}{BC}$ et
$$\int_0^1 ds(1-s)\left(\frac{BD}{BC}(1-s)\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t(1-s)C_2(\vec{\Omega})AB}{\epsilon|\mu|}\right) = 0(\epsilon^3),$$

donc $I_2 = 0(\epsilon^3)$.
 - $\vec{\Omega} \in \mathcal{S}'_3$ $\chi^{l'}(\gamma'(s)) = \frac{AD}{AC}s$ et
$$\int_0^1 ds(1-s)\left(\frac{AD}{AC}s\right) \exp\left(-\frac{\sigma_t s C_3(\vec{\Omega})AB}{\epsilon|\mu|}\right) = 0(\epsilon^2),$$

Donc $I_3 = 0(\epsilon^2)$,
et finalement $CT(\epsilon) = 0(\epsilon^2)$.
 - $l = C, l' = A$
Comme $\gamma(s)$ appartient à (AB) on a $\chi^l(\gamma(s)) = 0$ et $CT(\epsilon) = 0$.
 - $l = l' = C$
Comme $\gamma(s)$ appartient à (AB) on a $\chi^l(\gamma(s)) = 0$ et $CT(\epsilon) = 0$.
- Les autres cas se déduisent aisément des cas déjà traités.

2.3.1 Méthode SIMC classique

Dans ce cas, nous notons $\chi_i^l(x) = \chi_i(x) = \mathbb{1}_{x \in T_i}$. Nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition 3 : \tilde{u}^ϵ est solution du système linéaire

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma\right) \tilde{u}_i^\epsilon - \frac{1}{4} \sum_{i'} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \tilde{u}_{i'}^\epsilon = \epsilon \langle Q, \chi_i \rangle + O(\epsilon^2), \quad (2.13)$$

où $u^\varepsilon = \sum_i u_i^\varepsilon \chi_i$, Γ_i est la frontière de la maille T_i et $\Gamma_i^{i'}$ la frontière commune des mailles adjacentes T_i et $T_{i'}$.

La méthode SIMC standard n'a donc pas la limite diffusion car si les conditions aux limites sont de flux entrant nul, puisque u^ε satisfait (2.13), u^ε est d'ordre ε alors que la solution de (1.4) est d'ordre 0 en ε .

Preuve 3 :

Nous donnons la preuve en 2D : le cas 1D se traite de la même façon.

En utilisant la mise à l'échelle (1.2), le système linéaire (2.10) devient

$$\sum_i (b_{i,i'}^\varepsilon - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i'}^\varepsilon) \phi_i^\varepsilon = \varepsilon \langle Q, \chi_{i'} \rangle, \quad (2.14)$$

avec

$$b_{i,i'}^\varepsilon = \frac{\langle \sigma_t \chi_i, \chi_{i'} \rangle}{\varepsilon} = \delta_i^{i'} \frac{\sigma_t}{\varepsilon} V_i,$$

$$a_{i,i'}^\varepsilon = \frac{\langle \sigma_t \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_{i'} \rangle}{\varepsilon},$$

et u_i^ε est solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} u_i^\varepsilon = \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \chi_i, \\ u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous intégrons cette équation en $\vec{\Omega}$ et faisons le produit scalaire avec $\chi_{i'}$:

$$\frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_{i'} \rangle = \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i, \chi_{i'} \rangle - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{S_2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_i^\varepsilon(\gamma, \vec{\Omega}). \quad (2.16)$$

Nous remplaçons maintenant u_i^ε par son expression exacte. L'équation (2.15) se réduit à une équation différentielle ordinaire qui doit être résolue sur chaque caractéristique partant de la frontière Γ avec la direction $\vec{\Omega}$. Nous considérerons quatre cas différents :

1/ $T_i = T_{i'}$. Pour $x \in T_i$ nous avons

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = \int_0^{l_i(x, \vec{\Omega})} \frac{\sigma_t}{\varepsilon} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} s} \chi_i(x - \vec{\Omega} s) ds \quad (2.17)$$

où le point $x - \vec{\Omega} l_i(x, \vec{\Omega})$ est à l'intersection de la frontière Γ_i de T_i avec la demi-droite partant de x dans la direction $-\vec{\Omega}$ (Fig.2.6) et $l_i(x, \vec{\Omega})$ la distance entre ce point et x . Pour simplifier les notations, nous écrirons l_i au lieu de $l_i(x, \vec{\Omega})$ (cette simplification sera faite tout au long du chapitre). Avec $\chi_i(x) = \mathbb{1}_{x \in T_i}$, nous obtenons

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = 1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}. \quad (2.18)$$

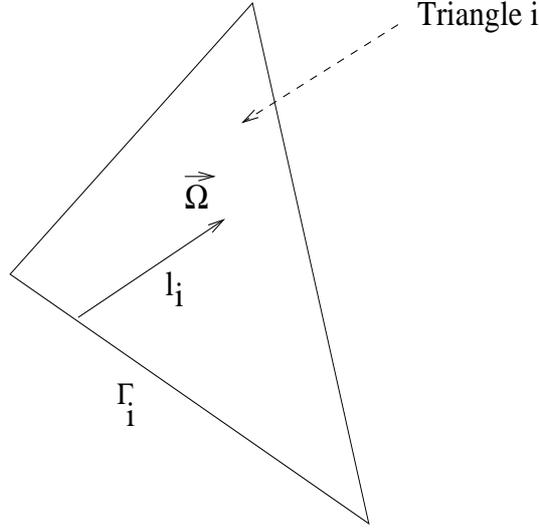


FIG. 2.6 –

Notons que $u_i^\varepsilon(\gamma, \vec{\Omega}) = 0$ pour $\gamma \in \Gamma_i$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ si bien qu'en remplaçant u_i par son expression (2.18) dans (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_i \rangle &= \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i, \chi_i \rangle - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) \\ &= \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i, \chi_i \rangle - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + CT_i(\varepsilon) \end{aligned}$$

avec $CT_i(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}$. En utilisant le lemme 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_{i,i}^\varepsilon &= \left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i, \chi_i \rangle - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + CT_i(\varepsilon) \right) \\ &= \frac{\sigma_t}{\varepsilon} V_i - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + CT_i(\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Finalement

$$b_{i,i}^\varepsilon - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i}^\varepsilon = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + \varepsilon \sigma_a V_i - CT_i(\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (2.19)$$

2/ $i \neq i'$ et les mailles T_i and $T_{i'}$ ont un côté commun $\Gamma_i^{i'}$. Pour $x \in T_{i'}$, nous avons

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = u_i^\varepsilon(x - \vec{\Omega} l_{i'}, \vec{\Omega}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_{i'}} = u_i^\varepsilon(x - \vec{\Omega}(l_{i'} + l_{i,i'}), \vec{\Omega}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i'} + l_{i,i'})} \quad (2.20)$$

où le point $x - \vec{\Omega} l_{i'}$ est à l'intersection de la frontière $\Gamma_{i'}$ avec la demi-droite partant de x de direction $-\vec{\Omega}$, $l_{i'} = l_{i'}(x, \vec{\Omega})$ est la distance entre

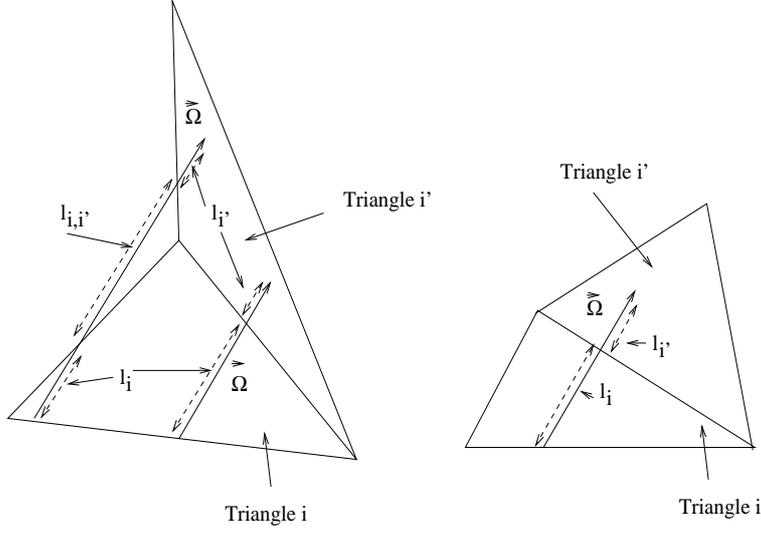


FIG. 2.7 –

ce point et x et $l_{i,i'} = l_{i,i'}(x, \vec{\Omega})$ la distance entre le point $x - \vec{\Omega}l_{i'}$ et le point d'intersection de la demi-droite passant par x de direction $-\vec{\Omega}$ avec Γ_i (Fig.2.7). La distance $l_{i,i'}$ est éventuellement nulle pour tout point de $T_{i'}$ comme sur la configuration de droite de la figure 2.7. En utilisant (2.18), nous obtenons

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}l_i})e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})} \quad (2.21)$$

où $l_i = l_i(x, \vec{\Omega})$ est la distance entre $x - (l_{i'} + l_{i,i'})\vec{\Omega}$ et la frontière opposée T_i dans la direction $-\vec{\Omega}$. En utilisant (2.16) et le fait que $\langle \chi_i, \chi_{i'} \rangle = 0$ car $i \neq i'$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_{i'} \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}l_i}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}l_i}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que nous pouvons réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_{i'} \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}l_i}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}l_i}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma + CT_{i,i'}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec,

$$CT_{i,i'}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i} \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i'} + l_{i,i'})}$$

où $\mathcal{S}(\gamma, i)$ l'ensemble des directions $\vec{\Omega}$ telles que la demi-droite passant par γ et de direction $-\vec{\Omega}$ intersecte T_i .

Nous pouvons appliquer le lemme 1 aux termes de coin $CT_{i,i'}(\varepsilon)$. Finalement, nous obtenons :

$$b_{i,i'}^\varepsilon - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i'}^\varepsilon = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma - CT_{i,i'}(\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (2.24)$$

3/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ n'ont pas de sommet commun.

Il est facile de voir que $a_{i,i'}^\varepsilon$ décroît exponentiellement quand ε tend vers 0 si bien que nous pouvons négliger ces contributions dans le système linéaire.

4/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun mais pas d'arête commune. Alors $a_{i,i'}^\varepsilon$ est lui-même un terme de coin et le lemme 1 s'applique. Pour $x \in T_{i'}$, nous avons

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i'} + l_{i,i'})} (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i})$$

si bien que $a_{i,i'}^\varepsilon$ est un terme de coin correspondant aux particules émises en T_i , traversant une distance $l_{i,i'}$ hors de T_i et une distance $l_{i'}$ dans $T_{i'}$. La figure 2.8 est un cas particulier où seulement un triangle sépare T_i et $T_{i'}$. Dans ce cas, on a $l_{i,i'} = l_j$.

$a_{i,i'}^\varepsilon$ s'écrit $a_{i,i'}^\varepsilon = CT_{i,i'}(\varepsilon)$ avec

$$CT_{i,i'}(\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i'} + l_{i,i'})} (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i})$$

donc grâce au lemme 1, on a :

$$b_{i,i'}^\varepsilon - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i'}^\varepsilon = -CT_{i,i'}(\varepsilon) + O(\varepsilon^2). \quad (2.25)$$

Le système linéaire (2.10) peut finalement être réécrit comme

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + \varepsilon \sigma_a V_i - CT_i(\varepsilon) \right) \phi_i^\varepsilon \\ - \frac{1}{4} \sum_{i', \text{arêtes communes avec } i} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \phi_{i'}^\varepsilon \\ - \sum_{i'', \text{sommets communs avec } i} CT_{i'',i}(\varepsilon) \phi_{i''}^\varepsilon + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \langle Q, \chi_i \rangle,$$

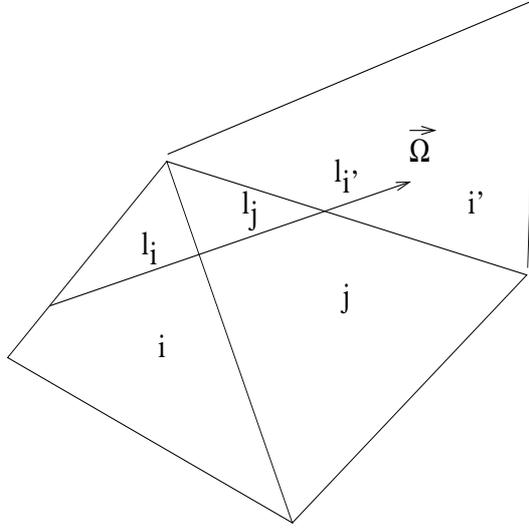


FIG. 2.8 -

où les $CT_{i'',i}(\varepsilon)$ sont des termes de coin. Nous introduisons maintenant les développements formels

$$\begin{aligned}\Phi^\varepsilon &= \Phi^0 + \varepsilon\Phi^1 + \varepsilon^2\Phi^2 + \dots, \\ \phi_i^\varepsilon &= \phi_i^0 + \varepsilon\phi_i^1 + \varepsilon^2\phi_i^2 + \dots, \quad \forall i \in (1, N).\end{aligned}$$

A l'ordre 0, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma\right) \phi_i^0 - \frac{1}{4} \sum_{i'} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \phi_{i'}^0 = 0.$$

Nous pouvons facilement prouver que ce système linéaire a une unique solution à une constante additive près. Considérons la matrice correspondante $\mathcal{M} = (m_{ii'})$ avec $m_{ii} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma$ et $m_{ii'} = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma$. C'est une matrice singulière car $m_{ii} + \sum_{i' \neq i} m_{ii'} = 0$ mais son noyau est composé uniquement par les vecteurs constants : si v est un vecteur du noyau, alors nous avons, pour chaque composante $v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} v_j$ avec $0 < \alpha_{ij} < 1$ et $\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \leq 1$, donc chaque composante est dans l'enveloppe convexe des autres ce qui n'est possible que si elles sont toutes égales.

Nous en déduisons que $\Phi^0 = 0$ puisque la condition aux limites de Dirichlet est $\Phi = 0$. A l'ordre ε nous avons

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma\right) \phi_i^1 - \frac{1}{4} \sum_{i'} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \phi_{i'}^1 = \langle Q, \chi_i \rangle - \sigma_a V_i \phi_i^0 + CT_i(0) \Phi_i^0 + \sum_{i''} CT_{i'',i}(0) \phi_{i''}^0.$$

La dernière somme sur i'' doit être comprise comme une somme sur tous les triangles ayant un sommet commun avec i .

(les termes de coin apparaissent en 2D et $CT_{i,i'}(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{CT_{i,i'}(\varepsilon)}{\varepsilon}$).
Comme $\phi_i^0 = 0$, l'équation pour Φ^1 se réduit à

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma\right) \phi_i^1 - \frac{1}{4} \sum_{i'} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \phi_{i'}^1 = \langle Q, \chi_i \rangle.$$

Comme $\Phi \sim \varepsilon \Phi^1$, nous en déduisons que l'équation satisfaite par Φ à l'ordre 1 est simplement

$$\left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma\right) \phi_i - \frac{1}{4} \sum_{i'} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \phi_{i'} = \varepsilon \langle Q, \chi_i \rangle.$$

qui est l'équation (2.13).

La seconde équation du système linéaire avec la mise à l'échelle (1.2) s'écrit comme :

$$\left(\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a\right) \tilde{u}^\varepsilon - \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \Phi^\varepsilon = -\varepsilon Q$$

si bien que $\tilde{u}^\varepsilon = \Phi^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, ce qui prouve la proposition 3.

Par exemple, en géométrie 1D sur un maillage uniforme, nous obtenons :

$$-\frac{1}{4}\phi_{i-1}^\varepsilon + \frac{1}{2}\phi_i^\varepsilon - \frac{1}{4}\phi_{i+1}^\varepsilon = \varepsilon Q \Delta x, \quad (2.26)$$

avec $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$ (conditions aux limites nulle). Ceci est une discrétisation consistante de

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = KQ$$

avec $K = \frac{4\varepsilon}{\Delta x}$, au lieu de l'équation correcte

$$-\frac{1}{3(\sigma_s + \sigma_a)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \sigma_a \Phi = Q.$$

2.3.2 Méthode SIMC Linéaire

Proposition 4 : \tilde{u}^ε est solution du système linéaire

$$\sigma_a \sum_{j'} \langle \xi_j, \xi_{j'} \rangle \tilde{u}_{j'}^\varepsilon + \frac{1}{3\sigma_t} \sum_{j'} \langle \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle \tilde{u}_{j'}^\varepsilon = \langle Q, \xi_j \rangle + O(\varepsilon). \quad (2.27)$$

où $u^\varepsilon = \sum_j u_j^\varepsilon \xi_j$, et ξ_j est la fonction linéaire qui vaut 1 au sommet γ_j et 0 aux autres sommets.

Ceci est une discrétisation correcte de l'équation de diffusion (1.4) (avec une condition aux limites de Dirichlet de valeur nulle) par des éléments finis linéaires continus. Par conséquent, la méthode SIMC améliorée possède la limite diffusion.

Preuve 4 : Nous donnons la preuve en 2D : le cas 1D se traite de la même façon. Nous noterons $(\gamma_i^k)_{k=1,2,3}$ les trois sommets de la maille T_i : γ_i^l est le sommet tel que $\chi_i^l(\gamma_i^l) = 1$.

En utilisant la mise à l'échelle (1.2), le système linéaire (2.10) devient

$$\sum_{i,l} (b_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'} - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'}) \phi_i^{\varepsilon,l} = \varepsilon \langle Q, \chi_{i'}^{l'} \rangle, \quad (2.28)$$

avec

$$b_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'} = \frac{\langle \sigma_t \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle}{\varepsilon}$$

$$a_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'} = \frac{\langle \sigma_t \tilde{u}_i^{\varepsilon,l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle}{\varepsilon}$$

et $u_i^{\varepsilon,l}$ est solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^{\varepsilon,l} + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} u_i^{\varepsilon,l} = \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \chi_i^l, \\ u_i^{\varepsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma_i, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases}$$

Nous intégrons cette équation en $\vec{\Omega}$ et faisons le produit scalaire avec $\chi_{i'}^{l'}$:

$$\frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^{\varepsilon,l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle = \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle u_i^{\varepsilon,l}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'} \rangle - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^{l'}(\gamma). \quad (2.29)$$

Nous remplaçons maintenant $u_i^{\varepsilon,l}$ par son expression. Comme dans le cas précédent, nous considérons quatre cas différents :

1/ $T_i = T_{i'}$. Nous partons de l'expression (2.17) qui est encore valide et faisons une intégration par parties en utilisant le fait que $\vec{\nabla} \chi_i^l$ est constant sur le triangle T_i :

$$u_i^{\varepsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x) - v_i^{\varepsilon,l} - \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) \quad (2.30)$$

où $v_i^{\varepsilon,l}$ est solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v_i^{\varepsilon,l} + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} v_i^{\varepsilon,l} = 0, \\ v_i^{\varepsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

donc $v_i^{\varepsilon,l}(x) = \chi_i^l(x - \vec{\Omega} l_i) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}$ où le point $x - \vec{\Omega} l_i$ est à l'intersection de la frontière Γ_i de T_i avec la demi-droite partant de x avec la direction $-\vec{\Omega}$ (Fig.2.6). En remplaçant $u_i^{\varepsilon,l}$ par son expression dans (2.29), nous

obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^{\varepsilon,l}, \chi_i' \rangle &= \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i^l, \chi_i' \rangle \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle \chi_i^l, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i' \rangle \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle v_i^{\varepsilon,l}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i' \rangle \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}), \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i' \rangle \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \chi_i'(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_i'(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) \chi_i'(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Nous avons utilisé le fait que $u_i^{\varepsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = 0$ sur Γ_i pour les directions entrantes $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) < 0$. Nous allons développer tous les termes du membre de droite de (2.32) par rapport à ε . Nous noterons I_1, \dots, I_7 les sept termes apparaissant dans le membre de droite de (2.32). Nous avons

$$\int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} = 0 \implies I_2 = 0.$$

Comme $\vec{\nabla} \chi_i'$ est un vecteur constant, l'intégrale I_3 peut être réécrite comme

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i') \langle v_i^{\varepsilon,l}, \chi_i \rangle.$$

En intégrant (2.31) sur la maille T_i , nous obtenons

$$\langle v_i^{\varepsilon,l}, \chi_i \rangle = -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v_i^{\varepsilon,l} \rangle = -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i') (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i') (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}),
\end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant le lemme (1),

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i') \chi_i^l(\gamma) d\gamma + O(\varepsilon^2).$$

Puisque $e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, nous pouvons en prendre la limite dans le terme intégral I_4 :

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} \langle (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l), (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i') \rangle d\vec{\Omega} + O(\varepsilon^2), \\
&= -\frac{\varepsilon}{3\sigma_t} (\vec{\nabla} \chi_i^l \cdot \vec{\nabla} \chi_i') V_i + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

L'intégrale I_5 peut être calculée

$$I_5 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma).$$

L'intégrale I_6 est un terme de coin du même type que celui apparaissant dans le lemme 2 que nous pouvons appliquer, donc I_6 est d'ordre ϵ uniquement si les sommets γ_i^l et $\gamma_i^{l'}$ sont confondus, sinon c'est un terme d'ordre ϵ^n avec $n > 1$, donc :

$$I_6 = (CT)_i^{l,l'}(\epsilon)$$

avec $(CT)_i^{l,l'}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\sigma_t} C + O(\epsilon^2)$ si $l = l'$ et $(CT)_i^{l,l'}(\epsilon) = O(\epsilon^2)$ si $l \neq l'$.

Supposons que le triangle i soit le triangle ABC et que le sommet $l = l'$ soit le sommet A , alors, comme χ_i^A s'annule sur BC , le terme de coin se simplifie :

$$\begin{aligned} (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) &= \frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} \chi_i^A(\gamma - \vec{\Omega} l_i) \chi_i^A(\gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} \chi_i^A(\gamma - \vec{\Omega} l_i) \chi_i^A(\gamma). \end{aligned}$$

Mais si γ appartient à (AB) et si la demi-droite passant par γ et de direction $-\vec{\Omega}$ a une intersection non vide avec (BC) , on a $\chi_i^A(\gamma - \vec{\Omega} l_i) = 0$, de même pour γ appartenant à (AC) et la demi-droite passant par γ et de direction $-\vec{\Omega}$ ayant une intersection non vide avec (BC) . On en déduit :

$$\begin{aligned} (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) &= \frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\mathcal{S}^+(\gamma, AC)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} \chi_i^A(\gamma - \vec{\Omega} l_i) \chi_i^A(\gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\mathcal{S}^+(\gamma, AB)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} \chi_i^A(\gamma - \vec{\Omega} l_i) \chi_i^A(\gamma) \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}^+(\gamma, AC)$ (resp AB) désigne l'ensemble des directions $\vec{\Omega}$ telles que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ et telles que la demi-droite d'origine γ et de direction $-\vec{\Omega}$ a une intersection non vide avec (AC) (resp AB) et finalement grâce au lemme 2, on obtient :

$$\begin{aligned} (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) &\sim \frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\mathcal{S}^+(\gamma, AC)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\mathcal{S}^+(\gamma, AB)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i}. \end{aligned}$$

ou encore grâce à (2.12) :

$$(CT)_i^{l,l'}(\epsilon) \sim \epsilon(\mathcal{F}(AB, AC) + \mathcal{F}(AC, AB)). \quad (2.33)$$

Enfin, en prenant la limite dans le terme intégral de I_7 et en utilisant le lemme, on obtient :

$$\begin{aligned} I_7 &= \frac{\epsilon}{4\pi\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot n) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{\epsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

En rassemblant ces développements, l'équation (2.32) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_i^{l'} \rangle &= \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(\frac{1}{6} \int_{\Gamma_i} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) \chi_i^l(\gamma) d\gamma + \frac{1}{6} \int_{\Gamma_i} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(-\frac{1}{3} \vec{\nabla} \chi_i^l \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} V_i \right) + (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) \\ &\quad + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comme les fonctions de base χ_i^l sont des polynômes de degré un, nous avons l'identité :

$$\langle \vec{\nabla} \chi_i^l \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} \rangle = \int_{\Gamma_i} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) \chi_i^l(\gamma) d\gamma = \int_{\Gamma_i} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) d\gamma. \quad (2.35)$$

Aussi l'équation (2.34) s'écrit simplement comme :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_i^{l'} \rangle &= \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) + (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'élément de la matrice

$$m_{i,i}^{\epsilon,l,l'} = b_{i,i}^{\epsilon,l,l'} - (1 - \epsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i}^{\epsilon,l,l'} \text{ soit}$$

$$m_{i,i}^{\epsilon,l,l'} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) + \epsilon \sigma_a \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle - (CT)_i^{l,l'}(\epsilon) + O(\epsilon^2). \quad (2.37)$$

2/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont une arête commune $\Gamma_i^{i'}$. Pour $x \in T_{i'}$, nous avons

$$u_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = u_{i'}^{\epsilon,l}(x - \vec{\Omega} l_{i'}, \vec{\Omega}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_{i'}} \quad (2.38)$$

qu'on peut réécrire comme :

$$u_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} (l_{i,i'} + l_{i'})} u_{i'}^{\epsilon,l}(x - \vec{\Omega} (l_{i,i'} + l_{i'}), \vec{\Omega}) \quad (2.39)$$

avec les mêmes notations que dans la méthode classique (Fig.2.7).
En insérant cette expression dans (2.29), nous obtenons, puisque $\langle \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \tilde{u}_i^{\varepsilon, l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma') (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} v_i^{\varepsilon, l}(\gamma') (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \nabla \chi_i^l) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i(\gamma')}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma') \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} v_i^{\varepsilon, l}(\gamma', \vec{\Omega}) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i(\gamma')}) \chi_{i'}^{l'}(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

γ' est une notation pour $x - \vec{\Omega}(l_{i, i'} + l_{i'})$ dans les trois premières intégrales et $\gamma - \vec{\Omega}(l_{i, i'} + l_{i'})$ dans les trois dernières (c'est le point de la frontière de T_i rencontré en premier par la demi-droite de direction $-\vec{\Omega}$ passant par x (rep γ)).

Nous notons par I_1, \dots, I_6 les six intégrales apparaissant au second membre de (2.40). Nous développons maintenant ces termes par rapport à ε .

Soit $w^\varepsilon(x, \vec{\Omega})$ solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} w^\varepsilon = 0, \\ w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x - \vec{\Omega} l_{i, i'}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_{i, i'}} \mathbb{1}_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(x, i)}, \quad x \in \Gamma_{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases}$$

Alors pour $x \in T_{i'}$, on a $w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma')$, donc

$$\begin{aligned}
&\int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma') (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\
&= \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\
&= \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \int_{T_{i'}} dx w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) \\
&= -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \int_{\Gamma_{i'}} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) w^\varepsilon(\gamma, \vec{\Omega}).
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \\
&- \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}(l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma').
\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer le lemme 2 au terme

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma')$$

si bien que la première intégrale s'écrit

$$I_1 = -\frac{\varepsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + O(\varepsilon^2).$$

En prenant cette fois w^ε solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} w^\varepsilon = 0, \\ w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = v_i^{\varepsilon, l}(x - \vec{\Omega} l_{i, i'}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_{i, i'}} \mathbf{1}_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(x, i)}, \quad x \in \Gamma_{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} v_i^{\varepsilon, l}(\gamma', \vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) w^\varepsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \end{aligned}$$

si bien que la seconde intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon, l}(\gamma, \vec{\Omega}) \\ &+ \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} v_i^{\varepsilon, l}(\gamma', \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Aussi, en utilisant le lemme 2, $I_2 = \frac{\varepsilon}{\sigma_t} CT(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

De même en prenant w^ε solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} w^\varepsilon = 0, \\ w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_{i, i'}} (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) \mathbf{1}_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(x, i)}, \quad x \in \Gamma_{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{T_{i'}} dx \int_{\mathcal{S}(x, i)} d\vec{\Omega} e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\mathcal{S}^2} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) w^\varepsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \end{aligned}$$

Nous en concluons que $I_3 = O(\varepsilon^2)$. Le quatrième terme est défini par

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega}(l_{i, i'} + l_{i'})) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega}(l_{i, i'} + l_{i'})) \chi_{i'}^{l'}(\gamma).
\end{aligned}$$

La cinquième intégrale est définie par

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon, l}(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} (l_i + l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega}(l_i + l_{i, i'} + l_{i'})) \chi_{i'}^{l'}(\gamma).
\end{aligned}$$

On somme I_4 et I_5 :

$$\begin{aligned}
I_4 + I_5 &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} l_i} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega} l_i) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} (l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega}(l_{i, i'} + l_{i'})) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} (l_i + l_{i, i'} + l_{i'})} \chi_i^l(\gamma - \vec{\Omega}(l_i + l_{i, i'} + l_{i'})) \chi_{i'}^{l'}(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Notons $(CT_1)_{i, i'}^{l, l'}(\epsilon)$, $(CT_2)_{i, i'}^{l, l'}(\epsilon)$ et $(CT_3)_{i, i'}^{l, l'}(\epsilon)$ les trois derniers termes. Ces termes sont des termes de coin du même type que ceux rencontrés dans le lemme 2, il sont d'ordre ϵ uniquement lorsque γ_i^l et $\gamma_{i'}^{l'}$ correspondent au même sommet, sinon ils sont d'un ordre ϵ^n avec $n > 1$. Supposons que le triangle i' soit le triangle ACD adjacent au triangle i soit le triangle ABC (Fig.2.9), le sommet commun est donc le sommet A , nous devons donc prendre l et l' correspondant au sommet A et comme χ_i^l s'annule sur (BC) et $\chi_{i'}^{l'}$ s'annule sur (CD) , nous obtenons :

$$(CT_1)_{i, i'}^{l, l'}(\epsilon) \sim \frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}^-(\gamma, AB)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \pm}{\epsilon} l_i}$$

où $\mathcal{S}^-(\gamma, AB)$ désigne l'ensemble des directions telles que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ et telles que la demi-droite passant par γ de direction $-\vec{\Omega}$ rencontre (AB) , ou encore grâce à (2.12) :

$$(CT_1)_{i, i'}^{l, l'}(\epsilon) \sim -\varepsilon \mathcal{F}(AC, AB) \tag{2.42}$$

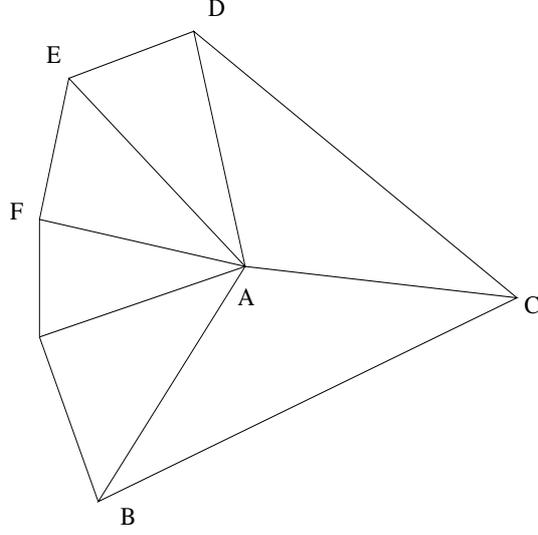


FIG. 2.9 -

$$(CT_2)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim -\frac{1}{4\pi} \int_A^D d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, AB \text{ ou } AC)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \epsilon}{\epsilon} (l_{i,i'} + l_{i'})}$$

où $\mathcal{S}(\gamma, AB \text{ ou } (et) AC)$ l'ensemble des directions telles que la demi-droite passant par γ de direction $-\vec{\Omega}$ rencontre (AB) ou (et) (AC) .
ou encore :

$$(CT_2)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim \epsilon(-\mathcal{F}(AD, AC) \mathbb{1}_{D \notin \mathcal{R}(B, AC)} + \mathcal{F}(AD, AB) \mathbb{1}_{D \notin \mathcal{R}(C, AB)})$$

où $\mathcal{R}(B, AC)$ (resp $\mathcal{R}(C, AB)$) est le demi-plan séparé par la demi-droite (AC) (resp (AB)) contenant B (resp C).

On peut remarquer qu'on a forcément $D \notin \mathcal{R}(B, AC)$ si bien que le premier terme de la somme est toujours présent.

$$(CT_3)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim \frac{1}{4\pi} \int_A^D d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, AB \text{ et } AC)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma \epsilon}{\epsilon} (l_i + l_{i,i'} + l_{i'})}$$

ou encore :

$$(CT_3)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim \epsilon(-\mathcal{F}(AD, AC) \mathbb{1}_{D \in \mathcal{R}(B, AC)} + \mathcal{F}(AD, AB) \mathbb{1}_{D \in \mathcal{R}(C, AB)})$$

Comme $D \notin \mathcal{R}(B, AC)$, le premier terme de la somme est toujours absent.

En notant $CT_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$ la somme des termes de coin : $(CT_1)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$, $(CT_2)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$ et $(CT_3)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$, nous obtenons :

$$I_4 + I_5 = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) + (CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon).$$

avec

$$(CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) = -\epsilon(\mathcal{F}(AC, AB) + \mathcal{F}(AD, AC) - \mathcal{F}(AD, AB))$$

Enfin, nous avons, en prenant la limite dans l'intégrale

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{\epsilon}{4\pi\sigma_t} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\ &+ \frac{\epsilon}{4\pi\sigma_t} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \in \mathcal{S}(\gamma, i)} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon}(l_i + l_{i'} + l_{i'})} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\ &= \frac{\epsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) d\gamma + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

En rassemblant ces développements, l'équation (2.40) devient

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon, l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\ &+ \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(-\frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + \frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \right) \\ &+ (CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

L'élément de la matrice est donc donné par

$$\begin{aligned} m_{i,i'}^{\epsilon, l, l'} &= -(1 - \epsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon, l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\ &- \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(-\frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + \frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \right) \\ &- (CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

3/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ n'ont pas de sommet commun.

Il est facile de voir que $a_{i,i'}^\epsilon$ décroît exponentiellement lorsque ϵ tend vers 0, aussi nous pouvons négliger ces contributions dans le système linéaire.

4/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun $\gamma_i^{i'}$. Alors $a_{i,i'}^{\epsilon, l, l'}$ est lui-même un terme de coin. Supposons par exemple qu'une maille T_j soit adjacente à T_i et $T_{i'}$, alors, pour $x \in T_{i'}$ nous avons

$$\begin{aligned} u_i^{\epsilon, l}(x, \vec{\Omega}) &= e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_{i'}} e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_j} \\ &\left(\chi_i^l(x - \vec{\Omega}(l_{i'} + l_j)) - \chi_i^l(x - \vec{\Omega}(l_{i'} + l_j + l_i)) e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i} - \frac{\epsilon}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i}) \right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, à l'ordre ϵ , $a_{i,i'}^{\epsilon,l,l'}$ est la somme de deux termes de coin que nous noterons $(CT_1)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$ et $(CT_2)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$ que nous prenons en compte car d'ordre ϵ , seulement si γ_i^l et $\gamma_{i'}^{l'}$ correspondent au même sommet A , auquel cas, on a pour le triangle AEF (Fig. 2.9) :

$$(CT_1)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim -\frac{1}{4\pi} \int_{AE \cup AF} d\gamma \int_{S(\gamma, AB \text{ ou } AC)} d\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})},$$

$$(CT_2)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim \frac{1}{4\pi} \int_{AE \cup AF} d\gamma \int_{S(\gamma, AB \text{ et } AC)} d\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}(l_i+l_{i'}+l_{i,i'})}.$$

On notera $(CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon)$ la somme de ces deux termes :

$$(CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim -\frac{1}{4\pi} \int_{AE \cup AF} d\gamma \int_{S(\gamma, AB \text{ ou } AC)} d\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}(l_{i'}+l_{i,i'})} + \frac{1}{4\pi} \int_{AE \cup AF} d\gamma \int_{S(\gamma, AB \text{ et } AC)} d\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon}(l_i+l_{i'}+l_{i,i'})}. \quad (2.44)$$

ou encore grâce à (2.12) :

$$(CT)_{i,i'}^{l,l'}(\epsilon) \sim \epsilon(-\mathcal{F}(AF, AC) + \mathcal{F}(AF, AB) + \mathcal{F}(AE, AC) - \mathcal{F}(AE, AB)) \quad (2.45)$$

Finalement, en négligeant les termes d'ordre ϵ^2 , le système linéaire pour $\phi_i^{\epsilon,l}$ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} & \sum_{i'} \left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) + \epsilon \sigma_a \langle \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle \right) \phi_i^{\epsilon,l} - (CT_1)_{i,i'}^l \phi_i^{\epsilon,l} \\ & + \sum_{\Gamma_{i,i'}^{l,l'}} \left(-\frac{1}{4} \int_{\Gamma_{i,i'}^{l,l'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) - \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(\frac{1}{6} \int_{\Gamma_{i,i'}^{l,l'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) - \frac{1}{6} \int_{\Gamma_{i,i'}^{l,l'}} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \right) \right) \phi_{i'}^{\epsilon,l'} \\ & - \sum_{i'',l''} (CT)_{i'',i}^{l'',l}(\epsilon) \phi_{i''}^{\epsilon,l''} = \epsilon \langle Q, \chi_i^l \rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

où $\sum_{\Gamma_{i,i'}^{l,l'}}$ désigne la sommation sur toutes les arêtes communes $\Gamma_i^{l'}$ des mailles

T_i et $T_{i'}$ et $\sum_{i'',l''}$ désigne la sommation sur tous les sommets des mailles $T_{i''}$

correspondants au même sommet γ_i^l . Nous introduisons le développement formel suivant

$$\begin{aligned} \Phi^\epsilon &= \Phi^0 + \epsilon \Phi^1 + \epsilon^2 \Phi^2 + \dots, \\ \phi_i^{\epsilon,l} &= \phi_i^{0,l} + \epsilon \phi_i^{1,l} + \epsilon^2 \phi_i^{2,l} + \dots, \quad \forall i \in (1, N), \forall l. \end{aligned}$$

A l'ordre le plus bas, nous obtenons

$$\sum_{l'} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{0,l'} - \sum_{\Gamma_i^{i'}, l'} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{0,l'} = 0. \quad (2.47)$$

Les vecteurs ϕ_i^l correspondant à des fonctions continues, c'est-à-dire des vecteurs tels que $\phi_i^{0,l} = \phi_i^{0,l'}$ quand $\gamma_i^l = \gamma_i^{l'}$ satisfont le système (2.47) puisque

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) &= \sum_{i'} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \\ &= \sum_{i'} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \end{aligned}$$

car $\chi_i^l(\gamma) = \chi_i^{l'}(\gamma)$ sur $\Gamma_i^{i'}$. Considérons le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^{3N} des ϕ_i^l vérifiant les équations (2.47). Par noeud, le nombre d'équations (2.47) indépendantes est le nombre d'arêtes reliées à ce noeud moins une. Donc, la dimension de cet espace est $3N - (\text{nombre de contraintes})$. On peut démontrer comme dans la proposition 5 du chapitre 4 que ce nombre est égal au nombre de noeuds internes du maillage. Donc comme cet espace contient l'espace vectoriel des ϕ_i^l continues et nulles sur le bord et qu'ils ont même dimension, ils sont identiques.

A l'ordre ε nous avons

$$\begin{aligned} &\sum_{l'} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{1,l'} - \sum_{\Gamma_i^{i'}, l'} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{1,l'} = \\ &-\sigma_a \sum_{l'} \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle \phi_i^{0,l'} \\ &-\frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\Gamma_i^{i'}, l'} \left(- \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) \right) \phi_i^{0,l'} \\ &+ CT_i^l(0) \phi_i^{0,l} + \sum_{i'', l''} CT_{i'', i}^{l'', l}(0) \phi_i^{0,l''} \\ &+ \langle Q, \chi_i^l \rangle. \end{aligned}$$

Pour un sommet interne donné γ_j nous additionnons toutes les équations venant des mailles i partageant le sommet γ_j . On peut vérifier que :

$$\sum_{l', \gamma_i^l = \gamma_j} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{1,l'} - \sum_{\Gamma_i^{i'}, l', \gamma_i^l = \gamma_j} \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \phi_i^{1,l'} = 0$$

Par exemple sur la figure (2.10), la contribution du triangle 1 et du côté Γ_1^4 à cette somme est égale à :

$$\frac{1}{4} \left(\int_{\Gamma_1^4} \chi_1^1 \chi_1^1 \Phi_1^1 + \int_{\Gamma_1^4} \chi_1^1 \chi_1^2 \Phi_1^2 - \int_{\Gamma_1^4} \chi_1^1 \chi_1^4 \Phi_1^4 - \int_{\Gamma_1^4} \chi_1^1 \chi_1^3 \Phi_1^3 \right)$$

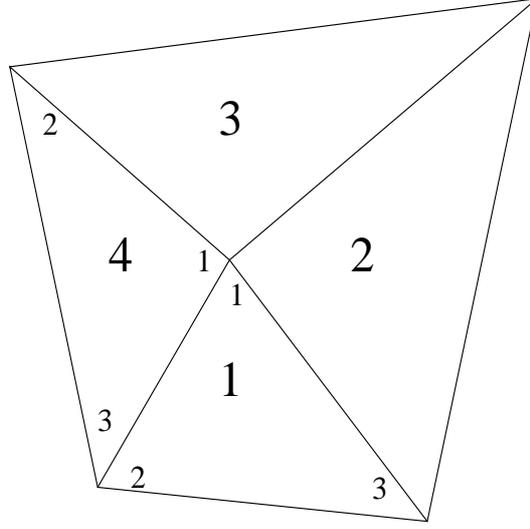


FIG. 2.10 – contribution du côté Γ_1^4

celle du triangle 4 et du côté Γ_1^4 s'écrit :

$$\frac{1}{4} \left(\int_{\Gamma_1^4} \chi_4^1 \chi_4^1 \Phi_4^1 + \int_{\Gamma_1^4} \chi_4^1 \chi_4^3 \Phi_4^3 - \int_{\Gamma_1^4} \chi_4^1 \chi_1^1 \Phi_1^1 - \int_{\Gamma_1^4} \chi_4^1 \chi_1^2 \Phi_1^2 \right)$$

et comme $\chi_1^1 = \chi_4^1$ et $\chi_1^2 = \chi_4^3$ sur Γ_1^4 , la somme de ces deux contributions s'annule. On peut répéter le même raisonnement sur les côtés Γ_4^3 , Γ_3^2 et Γ_2^1 si bien que la somme de toutes les équations venant des mailles i partageant le sommet γ_j s'annule.

Pour i, l tel que $\gamma_i^l = \gamma_j$, nous notons

$$\bar{\phi}_j = \bar{\phi}_{\gamma_j} = \phi_i^{0,l} \text{ et } \xi_j = \xi_{\gamma_j} = \sum_{\gamma_i^l = \gamma_j} \chi_i^l.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sigma_a \sum_{l', \gamma_i^{l'} = \gamma_j} \langle \chi_i^{l'}, \chi_i^{l'} \rangle \phi_i^{0,l'} + \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\Gamma_i^{l'}, l', \gamma_i^{l'} = \gamma_j} \left(- \int_{\Gamma_i^{l'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) \chi_i^{l'}(\gamma) + \int_{\Gamma_i^{l'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma) \right) \phi_i^{0,l'} \\ & - \left(\sum_{i,l, \gamma_i^l = \gamma_j} CT_i^l(0) + \sum_{i,l,i'',l'', \gamma_i^l = \gamma_j, \gamma_{i''}^{l''} = \gamma_j} CT_{i'',i}^{l'',l}(0) \right) \bar{\phi}_j = \sum_{\gamma_i^l = \gamma_j} \langle Q, \chi_i^l \rangle. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dans ces sommes, seul l'indice j est fixé. Nous notons respectivement par S_1, S_2, S_3 et S_4 ces quatre sommes. Nous avons pour la première somme

$$S_1 = \sigma_a \sum_{l'} \langle \xi_j, \chi_i^{l'} \rangle \phi_i^{0,l'}.$$

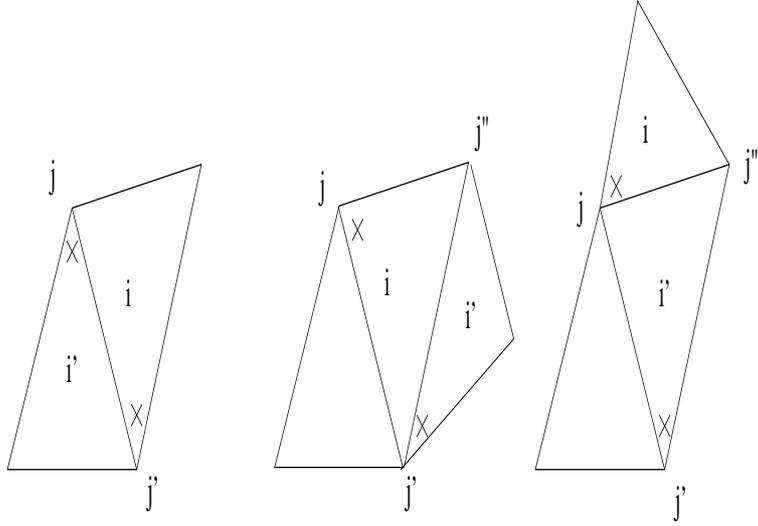


FIG. 2.11 –

L'ensemble des valeurs de l'index l' correspond à tous les sommets $\gamma_i^{l'}$ qui sont connectés à γ_j si bien que finalement

$$S_1 = \sigma_a \sum_{\gamma_{j'}} \langle \xi_j, \xi_{j'} \rangle \bar{\phi}_{j'}.$$

L'intégration sur les arêtes peut être séparée en trois parties (Fig.2.11) :

- La première partie correspond aux indices l' tels que $\gamma_i^l = \gamma_j, \gamma_i^{l'} = \gamma_{j'}, \Gamma_i^{l'} = \overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$.
Dans ce cas, les triangles i et i' ont l'arête $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$ en commun.
- La seconde partie correspond aux indices l' tels que $\gamma_i^l = \gamma_j, \gamma_i^{l'} = \gamma_{j'}, \Gamma_i^{l'} \neq \overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$ et il existe un sommet $\gamma_{j''}$ tel que $\Gamma_i^{l'} = \overrightarrow{\gamma_{j''} \gamma_{j'}}$. Dans ce cas, l'arête $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$ appartient à i mais pas à i' .
- La troisième partie correspond aux indices l' tels que $\gamma_i^l = \gamma_j, \gamma_i^{l'} = \gamma_{j'}, \Gamma_i^{l'} \neq \overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$ et il existe un sommet $\gamma_{j'''}$ tel que $\Gamma_i^{l'} = \overrightarrow{\gamma_{j'''} \gamma_{j'}}$.
Dans ce cas, l'arête $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$ appartient à i' mais pas à i .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \left(- \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \right) \bar{\phi}_{j'} \\
&\quad (\text{où } i \text{ et } i' \text{ sont les mailles avec les sommets communs } \gamma_j \text{ et } \gamma_{j'} \text{ incluant le cas } \gamma_j = \gamma_{j'}) \\
&+ \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \left(- \int_{\overrightarrow{\gamma_{j''} \gamma_{j'}}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j''} \gamma_{j'}}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \right) \bar{\phi}_{j'} \\
&\quad (\text{où } i \text{ et } i' \text{ sont les mailles avec les sommets communs } \gamma_{j''} \text{ et } \gamma_{j'}) \\
&+ \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \left(- \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'''} \gamma_j}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'''} \gamma_j}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \right) \bar{\phi}_{j'} \\
&\quad (\text{où } i \text{ et } i' \text{ sont les mailles avec les sommets communs } \gamma_{j'''} \text{ et } \gamma_j)
\end{aligned}$$

Nous remarquons que $\chi_i^l = 0$ sur $\overrightarrow{\gamma_{j''} \gamma_{j'}}$ et $\chi_i^l = 0$ sur $\overrightarrow{\gamma_{j'''} \gamma_j}$. Aussi, nous avons finalement

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \left(- \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \right) \bar{\phi}_{j'} \\
&+ \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \int_{\overrightarrow{\gamma_{j''} \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \bar{\phi}_{j'} - \frac{1}{6\sigma_t} \sum_{\gamma_i^l = \gamma_{j'}, \gamma_i^l = \gamma_j} \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'''} \gamma_j}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l(\gamma) \bar{\phi}_{j'} \\
&\hspace{15em} (2.49)
\end{aligned}$$

où l'indice i sur \vec{n}_i rappelle que \vec{n}_i est extérieur à la maille T_i . Nous pouvons identifier $\langle \vec{\nabla} \xi_j, \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle$ dans cette somme. Pour j' fixé ($j' \neq j$), nous avons

$$\langle \vec{\nabla} \xi_j, \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle = \int_{T_i} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} dx + \int_{T_{j'}} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} dx$$

où T_i est la maille $(\gamma_j, \gamma_{j'}, \gamma_{j''})$ et $T_{j'}$ est la maille $(\gamma_j, \gamma_{j'}, \gamma_{j''})$. Nous avons, pour $\gamma_i^l = \gamma_j$ et $\gamma_i^l = \gamma_{j'}$,

$$\begin{aligned}
\int_{T_i} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma \right).
\end{aligned}$$

Sur $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j''}}$, nous avons $\chi_i^l = 0$, sur $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$, nous avons $\chi_i^l = \chi_i^l$ et sur $\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}$ nous avons $\chi_i^l = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\int_{T_i} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma \right).
\end{aligned}$$

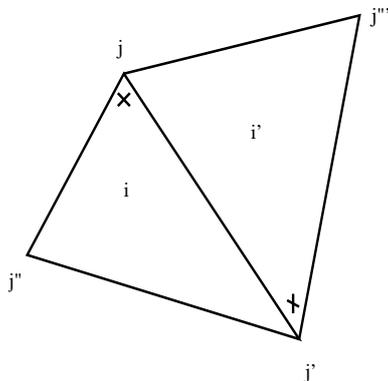


FIG. 2.12 -

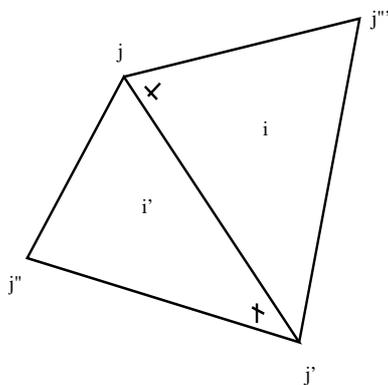


FIG. 2.13 -

Dans cette somme les sommets γ_i^l et $\gamma_{i'}^l$ correspondent au sommet γ_j et les sommets γ_i^l et $\gamma_{i'}^l$ au sommet j' .

De la même manière

$$\int_{T_{i'}} \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\vec{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\vec{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_{i'}^l d\gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{\vec{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\vec{\gamma_j \gamma_{j''}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_{i'}^l d\gamma \right).$$

en choisissant les triangles T_i et $T_{i'}$ et les sommets γ_i^l et $\gamma_{i'}^l$ comme sur les figures (2.12) et (2.13), on retrouve dans S_2 les termes correspondant aux 4 intégrales sur $\vec{\gamma_j \gamma_{j'}}$ soit :

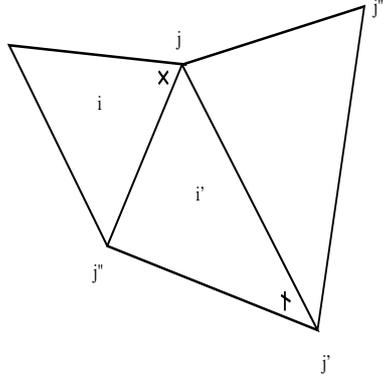


FIG. 2.14 -

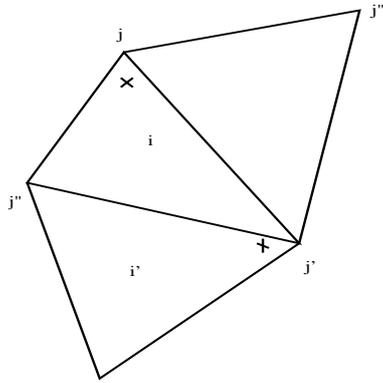


FIG. 2.15 -

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^l d\gamma \right. \\ \left. + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_i^l d\gamma + \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}} (\vec{n}_{i'} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_i^l d\gamma \right).$$

De la même façon (Fig. 2.14), on retrouve le terme correspondant à $\frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma$ ainsi que (Fig. 2.15) le terme correspondant à $\frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{\gamma_{j'} \gamma_{j''}}} (\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^l d\gamma$.

En notant que $\vec{n}_{i'} = -\vec{n}_i$ sur $\overrightarrow{\gamma_j \gamma_{j'}}$, nous obtenons :

$$S_2 = \frac{1}{3\sigma_t} \sum_{j'} \langle \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle \bar{\phi}_{j'}.$$

La somme S_3 contient des termes de coin. Nous allons montrer que :

$$CT_i^l(0) + \sum_{i'', l'', \gamma_{i''}^{l''} = \gamma_j} CT_{i, i''}^{l, l''}(0) = 0,$$

ce qui entraîne que

$$\sum_{i, l, \gamma_i^l = \gamma_j} CT_i^l(0) + \sum_{i, l, i'', l'', \gamma_i^l = \gamma_j, \gamma_{i''}^{l''} = \gamma_j} CT_{i'', i}^{l'', l}(0) = 0.$$

Nous allons montrer que chaque arête ayant comme sommet A intervient deux fois dans cette somme par des termes opposés si bien que S_3 est nulle. Pour cela, nous choisissons pour le triangle i , le triangle ABC et nous choisissons l tel que le sommet γ_i^l correspond au sommet A (Fig .2.9). Nous devons envisager plusieurs cas :

– Arête appartenant au triangle ABC

Prenons l'arête AC , elle intervient dans le terme $CT_i^{l, l}(\varepsilon)$ équivalent au terme d'ordre ε donné par l'expression (2.33) par :

$$CT_{i, i}^{l, l}(0) \sim \mathcal{F}(AC, AB).$$

Elle intervient dans le terme $CT_{i, i'}^{l, l'}(\varepsilon)$ équivalent au terme d'ordre ε donné par l'expression (2.42), avec le triangle i' égal au triangle ACD et l' correspondant au sommet A par :

$$CT_{i, i'}^{l, l'}(0) \sim -\mathcal{F}(AC, AB).$$

La somme de ces deux termes s'annule. Il en est de même pour les deux termes correspondant à l'arête AB .

– Arête n'appartenant pas au triangle ABC

Soit AE cette arête

Cette arête intervient dans le terme $CT_{i, i'}^{l, l'}(0)$ donné par l'expression (2.45), avec le triangle i' égal au triangle ADE et l' correspondant au sommet A , en remplaçant E par D et E par F dans (2.45), on obtient :

$$CT_{i, i'}^{l, l'}(0) \sim -\mathcal{F}(AE, AC) + \mathcal{F}(AE, AB).$$

Cette arête intervient également dans le terme $CT_{i, i'}^{l, l'}(0)$ avec le triangle i' égal au triangle AEF et l' correspondant au sommet A . Grâce à (2.45), on obtient :

$$CT_{i, i'}^{l, l'}(0) \sim \mathcal{F}(AE, AC) - \mathcal{F}(AE, AB)$$

donc, la somme des deux termes s'annule.

Finalement, nous avons immédiatement $S_4 = \langle Q, \xi_j \rangle$ et Φ^0 satisfait (2.27)

$$\sigma_a \sum_{j'} \langle \xi_j, \xi_{j'} \rangle \bar{\phi}_{j'} + \frac{1}{3\sigma_t} \sum_{j'} \langle \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle \bar{\phi}_{j'} = \langle Q, \xi_j \rangle.$$

Comme $\tilde{u}^\varepsilon = \Phi^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, ceci prouve la proposition 4.

2.3.3 Conditions aux limites pour la méthode SIMC linéaire

Jusque là, nous avons considéré des conditions aux limites de flux entrant nul. Nous devrions maintenant étendre les résultats précédents à des conditions aux limites de flux entrants non nuls. En fait, il n'est pas possible de faire une analyse complète et nous avons obtenu seulement des résultats partiels. Nous détaillons maintenant ces résultats.

Etude en géométrie 1D

Le système (2.28) devient

$$\sum_{i,l} (b_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'} - (1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'}) \phi_i^{\varepsilon,l} = \varepsilon \langle Q, \chi_{i'}^{l'} \rangle + C_{i'}^{\varepsilon,l}, \quad (2.50)$$

où $C_i^{\varepsilon,l} = \langle (\frac{\sigma_t}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma_a) \tilde{u}_b^\varepsilon, \chi_i^l \rangle$ et $u_b^\varepsilon(x, \mu), (x \in (0, L), \mu \in (-1, 1))$ est la solution de

$$\begin{aligned} \mu \partial_x u_b^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} u_b^\varepsilon &= 0, \\ u_b^\varepsilon(0, \mu) &= g(0, \mu), \mu > 0, \\ u_b^\varepsilon(L, \mu) &= g(L, \mu), \mu < 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $g(L, \mu) = 0$ et nous concentrer sur la condition aux limites en $x = 0$. Comme u_b^ε décroît exponentiellement à l'intérieur de $(0, L)$, nous voyons immédiatement que $C_i^{\varepsilon,l}$ est négligeable partout sauf pour $i = 0, l = 1, 2$ (premier et second sommet de la première maille). Supposons le maillage uniforme, dans la première maille ($x_0 = 0, x_1 = h$), nous avons

$$u_b^\varepsilon(x, \mu) = g(0, \mu) e^{-\frac{\sigma_t x}{\varepsilon \mu}} \mathbb{1}_{\mu > 0}. \quad (2.52)$$

En intégrant (2.51) par parties et en utilisant (2.52), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \tilde{u}_b^\varepsilon, \chi_0^l \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^h dx \mu \partial_x u_b^\varepsilon(x, \mu) \chi_0^l(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \mu d\mu (u_b^\varepsilon(h, \mu) \chi_0^l(h) - u_b^\varepsilon(0, \mu) \chi_0^l(0)) + \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu \mu \partial_x \chi_0^l \int_0^h dx u_b^\varepsilon(x, \mu) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mu g(0, \mu) d\mu \chi_0^l(0) + \frac{\varepsilon}{2\sigma_t} \int_0^1 \mu^2 g(0, \mu) \partial_x \chi_0^l d\mu + O(e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon}}). \end{aligned}$$

Nous avons $\chi_0^1(0) = 1, \chi_0^2(0) = 0, \partial_x \chi_0^1 = -1/h, \partial_x \chi_0^2 = 1/h$, donc

$$\begin{aligned} C_0^{\varepsilon,1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \mu g(0, \mu) d\mu - \frac{\varepsilon}{2h\sigma_t} \int_0^1 \mu^2 g(0, \mu) d\mu, \\ C_0^{\varepsilon,2} &= \frac{\varepsilon}{2h\sigma_t} \int_0^1 \mu^2 g(0, \mu) d\mu. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant écrire les équations provenant de l'analyse asymptotique du schéma numérique avec des conditions aux limites inhomogènes.

Nous appliquons directement les résultats de la section précédente et nous notons simplement par ϕ_i^l le terme dominant dans le développement de $\phi_i^{\varepsilon,l}$. A l'ordre le plus bas en ε , l'équation (2.47) pour le sommet 0 sur la frontière devient

$$\frac{1}{4}\phi_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mu g(0, \mu) d\mu = 0, \quad (2.53)$$

ce qui donne ϕ_0^1 . A l'ordre ε , la contribution du degré de liberté χ_0^2 correspondant au sommet $x_1 = h$ à l'équation (2.48) est égale pour le membre de gauche à :

$$\begin{aligned} & \sigma_a \left(\phi_0^2 \int_0^h \chi_0^2(x) \chi_0^2(x) dx + \phi_0^1 \int_0^h \chi_0^2(x) \chi_0^1(x) dx \right) + \frac{1}{6\sigma_t} (\partial_x \chi_1^1 \chi_0^2(h) + \partial_x \chi_0^2 \chi_1^1(h)) \phi_1^1 \\ & + \frac{1}{6\sigma_t} (\partial_x \chi_1^2 \chi_0^2(h) + \partial_x \chi_0^2 \chi_1^2(h)) \phi_1^2 \end{aligned}$$

et pour le second membre à :

$$\int_0^h Q \chi_0^2(x) dx + \frac{1}{2h\sigma_t} \int_0^1 \mu^2 g(0, \mu) d\mu.$$

En utilisant les valeurs des fonctions de base dans la première maille, cela donne pour le membre de gauche :

$$\sigma_a \left(\frac{h}{3} \phi_0^2 + \frac{h}{6} \phi_0^1 \right) + \frac{1}{6h\sigma_t} (2\phi_1^1 - \phi_1^2) \quad (2.54)$$

La contribution du degré de liberté χ_1^1 correspondant au sommet $x_1 = h$ au membre de gauche de l'équation (2.48) est égale à :

$$\begin{aligned} & \sigma_a \left(\phi_1^1 \int_h^{2h} \chi_1^1(x) \chi_1^1(x) dx + \phi_1^2 \int_h^{2h} \chi_1^1(x) \chi_1^2(x) dx \right) + \frac{1}{6\sigma_t} (\partial_x \chi_1^1 \chi_0^1(h) + \partial_x \chi_0^1 \chi_1^1(h)) \phi_0^1 \\ & + \frac{1}{6\sigma_t} (\partial_x \chi_1^1 \chi_0^2(h) + \partial_x \chi_0^2 \chi_1^1(h)) \phi_0^2 \\ & + \frac{1}{6\sigma_t} (\partial_x \chi_1^1 \chi_2^1(h) + \partial_x \chi_2^1 \chi_1^1(h)) \phi_2^1 \end{aligned}$$

et pour le second membre :

$$\int_h^{2h} Q \chi_1^1(x) dx,$$

soit pour le membre de gauche :

$$\sigma_a \left(\frac{h}{3} \phi_1^1 + \frac{h}{6} \phi_1^2 \right) + \frac{1}{6h\sigma_t} (-\phi_0^1 + 2\phi_0^2 - \phi_2^1) \quad (2.55)$$

En additionnant (2.54) et (2.55) pour le membre de gauche et les seconds membres correspondants avec $\bar{\phi}_1 = \phi_0^2 = \phi_1^1$, $\bar{\phi}_0 = \phi_0^1$ et $\bar{\phi}_2 = \phi_2^1$, nous obtenons finalement

$$\sigma_a \left(\frac{2h}{3} \bar{\phi}_1 + \frac{h}{6} (\bar{\phi}_0 + \bar{\phi}_2) \right) + \frac{1}{6h\sigma_t} (4\bar{\phi}_1 - 2\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_0) = \int_0^{2h} Q \xi_1(x) dx + \frac{1}{6h\sigma_t} \int_0^1 3\mu^2 g(0, \mu) d\mu.$$

En utilisant (2.53) et en notant $\bar{\phi}_0^{exact} = \int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(0, \mu)d\mu$, nous obtenons

$$\sigma_a \left(\frac{2h}{3}\bar{\phi}_1 + \frac{h}{6}\bar{\phi}_2 + \frac{h}{6}\bar{\phi}_0^{exact} \right) + \frac{1}{3h\sigma_t}(2\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_0^{exact}) = \int_0^{2h} Q\xi_1(x)dx - \frac{h\sigma_a}{6} \int_0^1 (\mu - \frac{3}{2}\mu^2)g(0, \mu)d\mu.$$

- Si $\sigma_a = 0$, nous obtenons une discrétisation correcte de l'équation de diffusion avec la condition aux limites de Dirichlet

$$\tilde{\phi}_0 = \int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(0, \mu)d\mu \sim \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}\mu H(\mu)g(0, \mu)d\mu,$$

où $H(\mu)$ est la fonction de Chandrasekhar.

- If $\sigma_a \neq 0$, nous obtenons la condition aux limites exacte dans le cas où g est isotrope car alors, $\int_0^1 (\mu - \frac{3}{2}\mu^2)g(0, \mu)d\mu = 0$.

Cas multidimensionnel

Dans le cas le plus simple où le flux entrant est isotrope et g continue et linéaire par morceaux sur la frontière, nous obtenons la condition de Dirichlet correcte.

Dans le cas général (soit un flux entrant non isotrope), il ne semble pas possible d'établir un résultat général.

2.3.4 Choix des fonctions de base

Dans cette analyse asymptotique, nous avons vu que la solution est continue dans la limite diffusion. Nous pourrions donc utiliser des fonctions linéaires continues comme fonctions de base au lieu de fonctions linéaires discontinues et nous obtiendrions le même résultat. Le bénéfice en serait un plus petit système linéaire à résoudre et donc un coût réduit. Cependant, dans le cas général, il n'y a aucune raison de supposer la continuité de la solution et des fonctions de base discontinues sont mieux appropriées comme dans les méthodes de transport déterministes.

2.4 Méthode hybride SIMC

Nous avons prouvé que la méthode linéaire SIMC vérifie la limite diffusion, mais pratiquement un calcul précis des éléments de la matrice

$m_{i,i'}^{l,l'} = -(1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t})a_{i,i'}^{l,l'} + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} \langle \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle$ demande un nombre prohibitif de particules dans les mailles diffusives.

Par exemple, en plan infini, $m_{i,i}^{1,1}$ le coefficient diagonal de l'équation (2.9) correspondant à $i' = i, l' = 1$ est la différence de :

$\int_i \frac{\sigma_t}{\epsilon} \chi_i^1 \chi_i^1 dx = \frac{\Delta x(i)}{3} \frac{\sigma_t}{\epsilon}$ et $(1 - \epsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) a_{i,i}^{1,1} = -\frac{1}{4} + \frac{\Delta x(i)}{3} (\frac{\sigma_t}{\epsilon} - \epsilon \sigma_a)$, ce qui donne $m_{i,i}^{1,1} = \frac{1}{4} + \frac{\Delta x(i)}{3} \epsilon \sigma_a$.

Cette quantité est la différence de deux très grands nombres d'ordre ϵ^{-1} qui doivent être évalués de façon précise au premier ordre en ϵ . C'est pourquoi un nombre prohibitif de particules est requis.

Nous préférons calculer de façon déterministe les coefficients de la matrice provenant de l'émission-absorption des particules.

Pour une maille diffusive i entourée de mailles diffusives $i - 1$ et $i + 1$, nous n'émettons pas de particules mais remplaçons les termes provenant de l'émission-absorption de ces particules par leur développement au premier ordre en ϵ . Ainsi nous fixons :

$$\begin{aligned} m_{i,i}^{1,2} &= \frac{\Delta x(i)}{6} \epsilon \sigma_a & m_{i,i}^{2,1} &= \frac{\Delta x(i)}{6} \epsilon \sigma_a \\ m_{i,i}^{1,1} &= \frac{1}{4} + \frac{\Delta x(i)}{3} \epsilon \sigma_a & m_{i,i}^{2,2} &= \frac{1}{4} + \frac{\Delta x(i)}{3} \epsilon \sigma_a \\ m_{i,i-1}^{1,1} &= -\frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i-1)} & m_{i,i-1}^{2,2} &= -\frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i)} \\ m_{i,i+1}^{1,1} &= -\frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i)} & m_{i,i+1}^{2,1} &= -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i)} + \frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i+1)} \\ m_{i,i-1}^{1,2} &= -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i)} + \frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i-1)} & m_{i,i+1}^{2,2} &= -\frac{\epsilon}{6\sigma_t \Delta x(i+1)} \end{aligned}$$

Pour une maille diffusive i adjacente à une maille transparente $i + 1$, nous n'avons plus le droit de remplacer les coefficients $M_{i,i+1}^{2,1}$, $M_{i,i+1}^{1,1}$, $M_{i,i+1}^{2,2}$ par leur expression analytique car les particules provenant de la maille i vers la maille $i + 1$ ne sont plus complètement absorbées dans la maille $i + 1$.

Au lieu de cela, nous calculons analytiquement au premier ordre en ϵ l'intensité angulaire $u(x_{i+1/2}, \mu)$ pour $\mu > 0$, on a $u(x, \mu) = u_i^{\epsilon,2} \Phi_i^2 + u_i^{\epsilon,1} \Phi_i^1$ pour $x \in T_i$ et comme $u_i^{\epsilon,2}(x_{i+1/2}, \mu) = 1 - \frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{\mu}{\Delta x(i)}$ et $u_i^{\epsilon,1}(x_{i+1/2}, \mu) = \frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{\mu}{\Delta x(i)}$ grâce à (2.30), on obtient :

$$u(x_{i+1/2}, \mu) = (1 - \frac{\epsilon \mu}{\sigma_t \Delta x(i)}) \Phi_i^2 + \frac{\epsilon \mu}{\sigma_t \Delta x(i)} \Phi_i^1.$$

A partir de cette expression, nous en déduisons le demi-flux de la maille i vers la maille $i + 1$:

$$F_{i \rightarrow i+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu d\mu u(x_{i+1/2}, \mu) = \frac{1}{4} (\chi_i^1(x_0) \Phi_i^1 + \chi_i^2(x_0) \Phi_i^2),$$

avec $x_0 = x_{i+1/2} - \lambda$ et $\lambda = \frac{2}{3} \frac{\epsilon}{\sigma_t}$.

Ce demi-flux peut être très simplement simulé avec la méthode particulière. Nous émettons $F_{i \rightarrow i+1}$ particules à la frontière $x_{i+1/2}$ pour $\mu > 0$. leur direction suit la loi de Lambert et leur lieu de naissance utilisé pour

déterminer leur poids est fixé à x_0 , une longueur d'extrapolation λ avant la frontière.

En géométrie 2D, nous avons calculé les termes de la matrice $m_{i,j}^{l,m}$ correspondant au couplage entre les mailles diffusives. Les termes de coin couplant les mailles diffusives peuvent être négligés puisqu'ils n'apparaissent pas dans le schéma aux éléments finis linéaires continus obtenu lorsque ε tend vers 0.

Pour $M \in \Gamma_i^{i'}$, $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$, \vec{n} le vecteur normal extérieur à $\Gamma_i^{i'}$ pour la maille i :

$$u(M, \vec{\Omega}) = \sum_{l=1}^{l=3} (\chi_i^l(M) - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i} \chi_i^l(M - \vec{\Omega} l_i) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \frac{\varepsilon}{\sigma_t} (1 - e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i})) \Phi_i^l.$$

Aussi, au premier ordre en ε :

$$F_{i \rightarrow i'} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} ds \sum_{l=1}^{l=3} \chi_i^l(M - \lambda \vec{n}) \Phi_i^l - \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{l=3} \int_{\Gamma_i^{i'}} ds \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i} \chi_i^l(M - \vec{\Omega} l_i) \Phi_i^l.$$

Le premier terme provient de l'intégration en angle (après multiplication par $\frac{1}{4\pi} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})$) de $\sum_{l=1}^{l=3} (\chi_i^l(M) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \frac{\varepsilon}{\sigma_t})$, le second de l'intégration en angle de $\sum_{l=1}^{l=3} -e^{-\frac{\sigma_t}{\varepsilon} l_i} \chi_i^l(M - \vec{\Omega} l_i)$.

Le second terme (terme de coin) du premier ordre en ε peut être échantillonné en Monte-Carlo en émettant des particules de poids négatif par la même technique que celle que nous utiliserons dans le chapitre 3.

Les principales caractéristiques de la méthode hybride SIMC peuvent être résumées ainsi :

- Nous n'émettons pas de particules dans les mailles diffusives sauf à leurs frontières avec les mailles transparentes où des particules sont émises mais en positionnant leur lieu de naissance pour déterminer leur poids à une longueur d'extrapolation avant la frontière.
- Nous remplaçons les termes des colonnes de la matrice correspondant à l'émission-absorption de ces particules par leur développement au premier ordre en ε .
- Les particules émises sont suivies dans tout le domaine donc également dans les mailles diffusives.
- Le critère pour décider si une maille est diffuse est basé sur sa profondeur optique $\sigma_t \Delta x$. Le développement des coefficients au premier ordre en ε est licite seulement si la profondeur optique est suffisamment grande. Si un milieu diffusif est maillé avec des mailles de l'ordre du libre-parcours, les mailles ne doivent pas être supposées diffusives dans la méthode hybride.

2.5 Résultats numériques

2.5.1 Test de l'épsilon problème

Nous commençons par confirmer les résultats théoriques présentés dans la section précédente. Nous considérons le problème purement diffusif suivant

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon, & x \in (0, 10), \mu \in (-1, 1), \\ u^\varepsilon(0, \mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0; u^\varepsilon(10, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Lorsque ε tend vers zero, nous savons que \tilde{u}^ε tend vers la solution U de l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{d^2 U}{dx^2} = 1, \\ U(0) = 0; U(10) = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

soit $U(x) = 15x - \frac{3}{2}x^2$.

D'abord, nous comparons les solutions pour la méthode SIMC linéaire et constante avec la solution exacte de l'équation de diffusion en géométrie 1D. Le maillage est composé de 100 mailles de largeur $\Delta x = 0.1$. Nous fixons ε à 0.01 si bien que la profondeur optique (nombre de libre-parcours dans la maille) est 10 donc assez grande pour que les résultats théoriques s'appliquent.

Sur la figure 2.16, nous représentons la solution pour la méthode SIMC constante, la solution de l'équation de diffusion (3.13) et la solution de l'équation de diffusion incorrecte qui est la limite de la solution de la méthode SIMC constante en milieu diffusif :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 V^\varepsilon}{dx^2} = \frac{4\varepsilon}{\Delta x}, \\ V(0) = 0; V(10) = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Tant que $\frac{\Delta x}{\varepsilon}$ est assez grand, nous observons que la solution de la méthode SIMC constante est beaucoup plus proche de V^ε que de U : ceci confirme les résultats théoriques.

Sur la figure 2.17, nous représentons la solution de la méthode SIMC linéaire et U : l'accord entre celle-ci et U est correct mais des fluctuations apparaissent malgré le grand nombre (500000) de particules émises dans chaque maille pour ce calcul. Cela est dû à la difficulté de calculer les coefficients de la matrice de façon précise avec un tirage aléatoire. En faisant l'analyse asymptotique, nous avons vu que le schéma de diffusion apparaît à l'ordre ε et que les termes d'ordre ε^{-1} et ε^0 s'annulent. Dans la simulation Monte-Carlo, ces termes ne peuvent pas s'annuler exactement et il reste des fluctuations qui doivent être d'un ordre ε^n avec $n > 1$ pour obtenir la solution de diffusion. Ces fluctuations pourraient être réduites en améliorant le tirage des

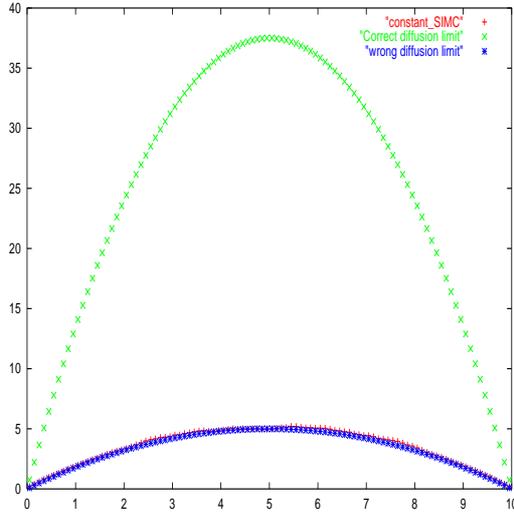


FIG. 2.16 – Solution de la méthode SIMC constante, solution de la bonne équation de la limite diffusion, solution de l'équation incorrecte de la limite diffusion

particules, par exemple lorsqu'on tire une particule, on peut prendre également sa jumelle avec la direction opposée, on peut réduire l'espace des phases en choisissant des directions discrètes permettant d'obtenir la limite diffusion (en 1D, $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$). Mais pour des problèmes très diffusifs, cela reste insuffisant.

Nous verrons au chapitre suivant qu'il existe un autre moyen de réduire le coût de la méthode SIMC linéaire. Cette méthode revient à ne pas simuler les termes d'ordre ϵ^{-1} qui, nous l'avons vu, doivent être évalués de façon précise au premier ordre en ϵ , mais à échantillonner directement la différence entre le terme d'émission et d'absorption soit les termes $m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'}$ qui sont au plus d'ordre 0 en ϵ .

Quoique le problème soit monodimensionnel, nous pouvons le résoudre sur un maillage triangulaire bidimensionnel $(x, y) \in (0, 10) \times (0, h)$ avec des conditions aux limites de symétrie pour $y = 0$ et $y = h$. Nous avons pris $h = \Delta x$ si bien que le rapport d'aspect de chaque triangle est d'ordre 1. Les résultats sont montrés sur la figure 2.18. Comme l'avait prévu l'analyse théorique, les résultats de la méthode SIMC constante sont faux tandis que ceux de la méthode SIMC linéaire sont corrects. Nous observons cependant de plus larges fluctuations qu'en géométrie monodimensionnelle.

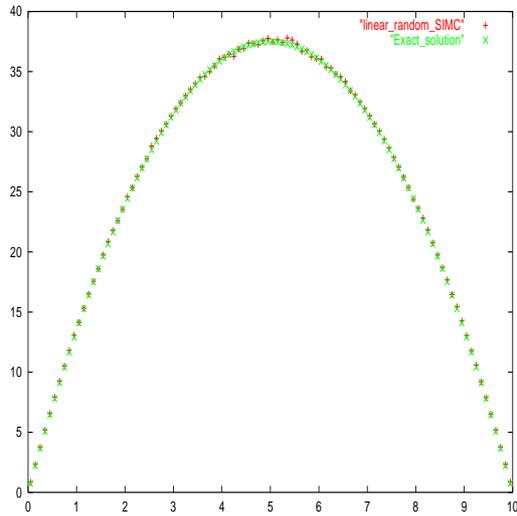


FIG. 2.17 – Solution de la méthode SIMC linéaire et solution de l'équation de la limite diffusion

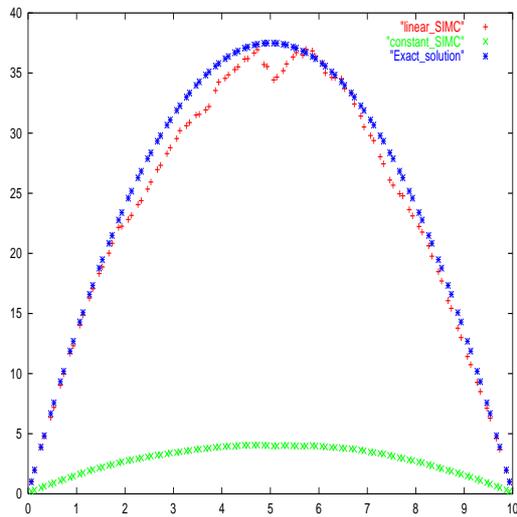


FIG. 2.18 – Solutions de la méthode SIMC linéaire , SIMC constante sur un maillage bidimensionnel, solution de l'équation de la limite diffusion

2.5.2 Test de Larsen

Ce problème est présenté dans [44]. Nous résolvons :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_t u = \sigma_s \tilde{u}, & x \in (0, 11), \mu \in (-1, 1), \\ u(0, \mu) = 1 \text{ pour } \mu > 0; u(11, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0, \\ \sigma_t = 2, \sigma_s = 0, & 0 \leq x < 1, \\ \sigma_t = 100, \sigma_s = 100, & 1 \leq x < 11. \end{cases} \quad (2.59)$$

La première région $0 < x < 1$ est purement absorbante avec un coefficient d'absorption modéré tandis que la seconde région $1 < x < 11$ est purement diffusiv avec un coefficient de diffusion grand. Donc les particules provenant de la frontière gauche ne subissent aucune diffusion dans la première région $x \in (0, 1)$ et leur distribution angulaire devient anisotrope à l'interface $x = 1$. Une couche limite apparaît à l'interface entre les deux régions. Il n'y a pas de solution analytique simple à ce problème aussi nous avons pris comme référence, la solution donnée par un calcul DSN S16 sur un maillage très fin. La figure 2.19 compare la solution de référence avec la solution donnée par la méthode linéaire SIMC, la méthode constante SIMC et la méthode hybride SIMC sur un maillage grossier (10 mailles de taille $\Delta x = 0.1$ pour $0 < x < 1$ et 10 mailles de taille $\Delta x = 1$ pour $1 < x < 11$).

Les résultats montrent que la méthode linéaire SIMC est très précise en présence d'une couche limite non résolue sauf dans la première maille du milieu diffusif.

L'écart dans la première maille du milieu diffusif est dû au fait que la valeur du flux à gauche est $\int_0^1 2\mu u(\mu) d\mu$ où $u(\mu)$ est l'intensité incidente mais cela n'altère pas la solution à l'intérieur puisque la condition aux limites effective pour l'équation de diffusion associée est $\int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2) u(\mu) d\mu$ soit la forme pondérée précise de l'intensité incidente.

Le résultat de la méthode hybride est en accord avec celui de la méthode linéaire SIMC ce qui est conforme au fait que les deux méthodes sont identiques si le nombre de particules est assez grand. Le résultat de la méthode constante SIMC n'est pas aussi précis. Ceci n'est pas surprenant car nous avons trouvé que l'anisotropie de l'intensité incidente dans le domaine diffusif n'est pas prise en compte avec cette méthode. Avec cette méthode, le courant incident ($\int_0^1 \mu u(\mu) d\mu$) dans le milieu diffusif détermine complètement la valeur de \tilde{u} à l'intérieur du milieu.

2.5.3 Problèmes avec un flux incident non isotrope

Nous résolvons :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + 100u = 100\tilde{u}, & x \in (0, 1), \mu \in (-1, 1), \\ u(0, \mu) = g(\mu) \text{ pour } \mu > 0; u(1, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

La condition aux limites à gauche $\mu \mapsto g(\mu)$ est un flux incident anisotrope :

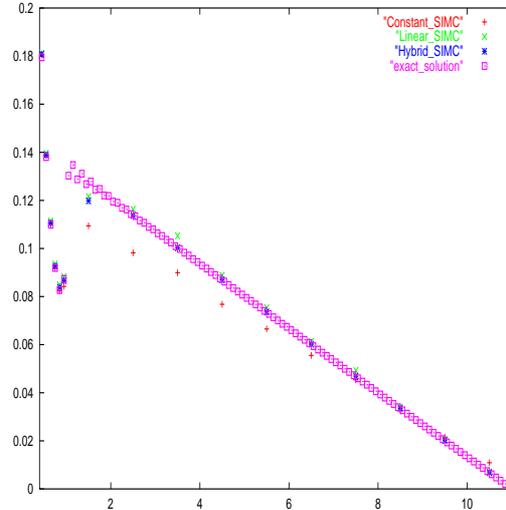


FIG. 2.19 – Comparaison entre les solutions des méthodes SIMC linéaire, constante, hybride et la solution de référence

- dans le premier cas, c'est une intensité presque normale :

$$g_l(\mu) = \delta(\mu - 1),$$

- dans le second cas, elle est presque rasante.

$$g_l(\mu) = \delta(\mu - 1/100).$$

Dans les deux cas, $g_l(\mu)$ est normalisée pour que $\int_0^1 \mu g_l(\mu) d\mu = 0.5$ reste constante. Avec ces deux cas, nous voulons vérifier notre analyse de la condition aux limites dans un milieu diffusif pour la méthode linéaire SIMC et la méthode constante SIMC :

- La méthode linéaire SIMC donne une condition aux limites très précise même si la couche limite n'est pas résolue $\Phi(0) = \int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2) g_l(\mu) d\mu$.
- La méthode constante SIMC n'est précise que si le milieu est maillé à l'échelle du libre-parcours. Si la couche limite n'est pas résolue, la condition aux limites est $\Phi(0) = \int_0^1 2\mu g_l(\mu) d\mu$ soit $\Phi(0) = 1$.

Nous comparons les résultats SIMC obtenus sur un maillage grossier (10 mailles entre 0 et 1, profondeur optique égale à 10 par maille) avec la solution de référence donnée par la solution de l'équation de diffusion asymptotique : c'est une fonction linéaire qui vaut $y = 0$ en $x = 1$ et $y = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} \mu H(\mu) g(0, \mu) d\mu$ en $x = 0$ (ce qui donne approximativement les valeurs $y = 1.25$ pour le cas de l'intensité presque normale et $y = 0.5075$ pour le cas de l'intensité presque rasante).

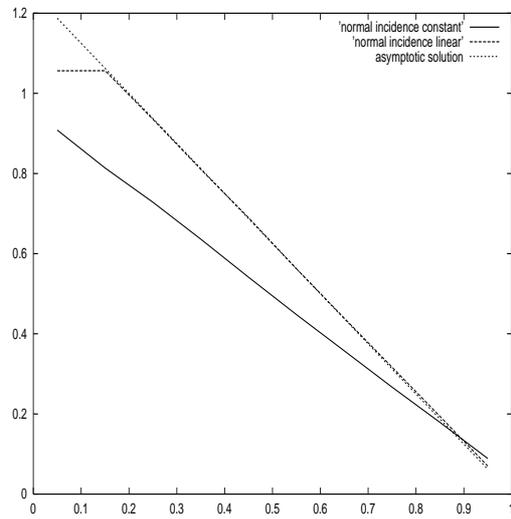


FIG. 2.20 – Problème avec l'intensité presque normale, comparaison entre les solutions SIMC (linéaire et constante) et la solution asymptotique

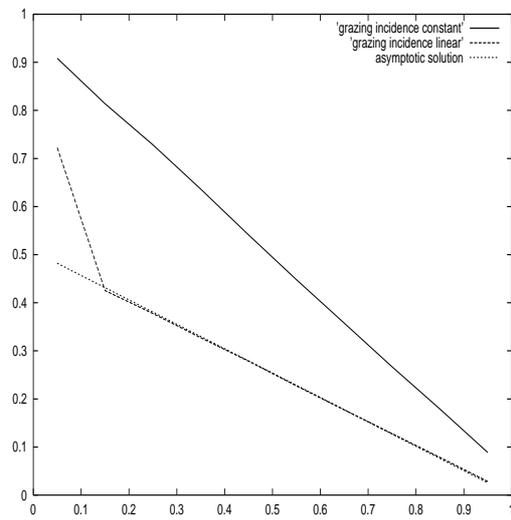


FIG. 2.21 – Problème avec l'intensité presque rasante, comparaison entre les solutions SIMC (linéaire et constante) et la solution asymptotique

2.5.4 Analyse de l'erreur

Nous voulons maintenant discuter des avantages de la méthode linéaire SIMC par rapport à la méthode constante SIMC dans un milieu transparent. Dans ce cas éloigné de la limite diffusion, la méthode constante SIMC est simplement moins précise que la méthode linéaire SIMC ce qui est dû à la représentation constante par morceaux de la solution. Nous étudions la convergence de la méthode sur un problème non diffusif quand la taille du maillage tend vers zero.

Nous résolvons

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_t u = \sigma_s \tilde{u} + Q(x), & x \in (0, 1), \mu \in (-1, 1), \\ u(0, \mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0; u(1, \mu) = 0 \text{ pour } \mu < 0, \\ \sigma_t = 14, \sigma_s = 4, & 0 \leq x < 0.5, \\ \sigma_t = 1, \sigma_s = 1, & 0.5 \leq x < 1, \\ Q(x) = 10 \text{ pour } & x \in (0.4, 0.6). \end{cases} \quad (2.61)$$

Le problème est résolu sur un maillage bidimensionnel avec des conditions de symétrie pour $y = 0$ et $y = \Delta x$. La taille du maillage Δx varie de 0.1 à 0.0125. A chaque fois que la taille du maillage est divisée par deux, nous multiplions par 4 le nombre de particules suivies pour maintenir l'erreur due aux fluctuations Monte-Carlo à un niveau plus bas que l'erreur due à la discrétisation spatiale (le nombre de particules est fixé à 10^7 pour $\Delta x = 0.1$). La solution de référence est donnée par un calcul DSN sur un maillage très fin. Sur la figure 2.22, nous comparons les solutions SIMC linéaire et constante sur le maillage le plus grossier avec la solution de référence.

Nous représentons maintenant l'erreur L_1 entre la solution SIMC et la solution de référence en fonction de la taille du maillage (Fig.2.23). Nous observons que l'erreur tend vers zéro quand la taille du maillage tend vers zéro et qu'elle est plus petite pour la méthode linéaire que pour la méthode constante. Nous ne pouvons pas conclure sur l'ordre de la méthode à partir de ce seul exemple. Il semble pourtant que la méthode SIMC constante soit d'ordre 1 en fonction de la taille du maillage.

Le coût supplémentaire en temps CPU dû à la méthode SIMC linéaire par rapport à la méthode SIMC constante est modéré. En fait, la plus grande partie du temps est passée dans la poursuite des particules qui est pratiquement le même dans les deux méthodes : dans la méthode constante, chaque particule a un seul poids symbolique alors que dans la méthode linéaire, elle représente 2,3 ou 4 poids (suivant la dimension de l'espace et le nombre de degrés de liberté dans chaque maille).

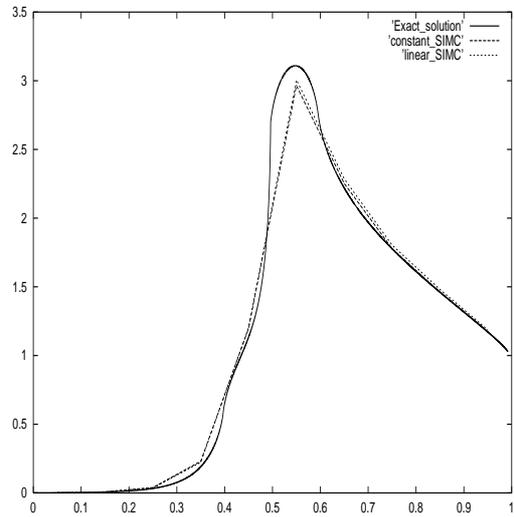


FIG. 2.22 – solutions SIMC linéaire et constante, solution de référence

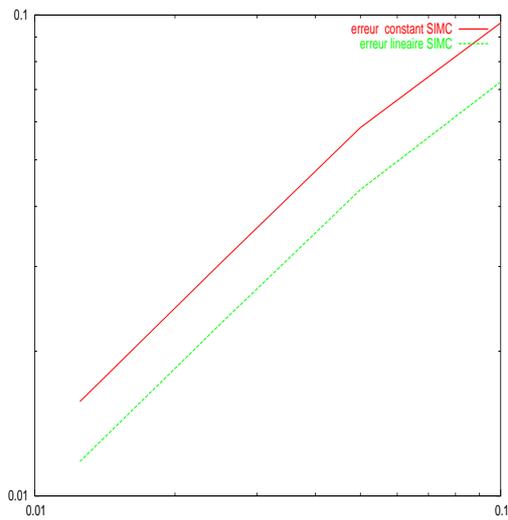


FIG. 2.23 – erreur L_1 fonction de la taille du maillage

Chapitre 3

Formulation différentielle

Une nouvelle forme de l'équation de transport des photons écrite en formulation différentielle (difference formulation) a été introduite dans [13]. C'est l'équation vérifiée par la différence entre l'intensité radiative et la fonction d'équilibre de Planck. Les auteurs de [13] [14] discrétisent cette équation en 1D par la méthode SIMC constante et linéaire. Leurs tests numériques montrent que cette méthode améliore la statistique par rapport à la méthode standard dans les milieux diffusifs. Comme il était attendu, ils obtiennent les mêmes résultats qu'avec la méthode standard.

En discrétisant l'équation écrite en formulation différentielle par la méthode SIMC linéaire qui possède la limite diffusion, on peut espérer améliorer la statistique de cette méthode qui sans cela demande un nombre de particules prohibitif en milieu diffusif. C'est ce que nous avons voulu vérifier dans le cas de notre équation modèle.

3.1 Méthode SIMC linéaire avec la formulation différentielle

Soit $D_i^l = u_i^l - \chi_i^l$ sur T_i et $D_i^l = u_i^l$ sur $\mathcal{D} - T_i$. D_i^l est une fonction discontinue car u_i^l solution de (2.8) est continue et χ_i^l est discontinue, D_i^l vérifie au sens des distributions :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} D_i^l + \sigma_t D_i^l = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l.$$

On a, toujours au sens des distributions,

$$-\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l = -(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)_{T_i^{int}} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \delta(x \in \Gamma_i)$$

avec $T_i^{int} = T_i - \Gamma_i$ car la dérivée d'une fonction discontinue fait apparaître des masses de Dirac sur les faces.

Donc D_i^l vérifie :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} D_i^l + \sigma_t D_i^l = -(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)_{T_i^{int}} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \delta(x \in \Gamma_i).$$

Deux termes composent la source :

$-(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)_{T_i^{int}}$ correspond à une émission en volume et $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \delta(x \in \Gamma_i)$ à l'émission sur les bras en loi de Lambert. L'intégrale en angle des deux composantes du terme source étant nulle, il est important d'échantillonner par paire de particules de directions opposées ces termes pour vérifier au niveau discret cette propriété.

Remarque : Dans le cas SIMC constant, la composante $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)_{T_i^{int}}$ dans le terme source est nulle car $\chi_i = \mathbb{1}_{x \in T_i}$, donc on a uniquement la composante $(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \delta(x \in \Gamma_i)$ qui correspond à une émission par bras.

3.2 Implémentation numérique

Nous avons vu que la solution u_i^l de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^l + \sigma_t u_i^l = \sigma_t \chi_i^l, \\ u_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma_i, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

peut s'écrire

– dans le triangle T_i

$$u_i^l(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l + D_i^l(x, \vec{\Omega}), \quad (3.2)$$

avec $D_i^l(x, \vec{\Omega}) = v_i^l + w_i^l$ où v_i^l est solution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v_i^l + \sigma_t v_i^l = 0, \\ v_i^l(x, \vec{\Omega}) = -\chi_i^l(x), \quad x \in \Gamma_i, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

et w_i^l est solution de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w_i^l + \sigma_t w_i^l = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l, \\ w_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma_i, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Au lieu de calculer $\sigma_t \langle \tilde{u}_i^l, \chi_i^l \rangle - \sigma_t \langle \chi_i^l, \chi_i^l \rangle$ en simulant l'équation (3.1), nous allons simuler en Monte-Carlo les équations (3.3) et (3.4). En effet :

$$\sigma_t \langle \tilde{u}_i^l, \chi_i^l \rangle - \sigma_t \langle \chi_i^l, \chi_i^l \rangle = \sigma_t \langle \tilde{D}_i^l, \chi_i^l \rangle. \quad (3.5)$$

Ainsi cette différence qui est d'ordre 1 par rapport à ϵ en milieu diffusif alors que les deux termes pris séparément sont d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$, se simule non plus en échantillonnant un terme source d'ordre $\frac{1}{\epsilon}$ comme dans l'équation (3.1) mais des termes de bord d'ordre 0 comme dans l'équation (3.3) ou un terme source d'ordre 0 comme dans l'équation (3.4).

Nous pouvons simuler en Monte-Carlo ces deux équations de la manière suivante :

– Equation (3.3)

Sur chaque bras (face en 3D) Γ_i de la maille T_i , on émet en loi de Lambert en direction, de façon uniforme en espace, P_b particules entrantes dans T_i dont le poids total est égal à l'opposé du quart de la mesure de la face Γ_i . A chaque particule p est associé un poids $\omega_p(0) = -\frac{1}{4P_b}l(\Gamma_i)$. En fait, chaque particule représente L_b particules (L_b est le nombre de points du bras (face) b donc $L_b = 1, 2, 3$ suivant qu'on est en 1D, 2D, 3D) dont les poids sont $\omega_p^l(0) = \omega_p(0)\chi_i^l(x_p(0))$. On calcule l'absorption comme dans la méthode classique :

$$a_{i,i'}^{l,l'} \rightarrow a_{i,i'}^{l,l'} + \omega_p \int_0^{l_p} \sigma_t \chi_{i'}^{l'}(x_p(s)) e^{-\sigma_t s} ds,$$

mais il n'y a plus à estimer l'émission. Noter que toutes ces particules ont un poids négatif, donc le terme d'absorption correspondant à ces particules est négatif.

– Equation (3.4)

Le terme source est échantillonné avec P particules dans chaque maille, leur direction $\vec{\Omega}_p$ est choisie uniforme sur \mathcal{S}_2 et leur lieu de naissance $x_p(0)$ uniforme sur T_i . On émet toujours une particule avec celle ayant la direction opposée, ainsi on est sûr qu'au niveau discret, la somme des poids associés à un degré de liberté l est nulle. A chaque particule p est associé un poids $\omega_p(0) = \frac{1}{P}V_i$ où V_i est le volume de T_i . En fait, chaque particule représente L particules dont les poids sont $\omega_p^l(0) = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l(x_p(0))$, donc pour une direction $\vec{\Omega}$ donnée, le poids total de ces particules est nul. On calcule l'absorption de ces particules comme dans la méthode standard.

– dans le triangle $T_{i'}$ où les mailles T_i et $T_{i'}$ ont une arête commune

$$D_i^l(x, \vec{\Omega}) = u_i^l(x, \vec{\Omega}) = T_{i,i'}(\vec{\Omega})u_i^l(\vec{\Omega}) \quad (3.6)$$

où $T_{i,i'}(\vec{\Omega})$ est l'opérateur qui appliqué à une fonction g définie sur l'arête $\Gamma_i^{i'}$ associe la solution exacte h de l'équation :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} h + \sigma_t h = 0, \\ h(x, \vec{\Omega}) = g, \quad x \in \Gamma_i^{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Comme $u_i^l(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x) + D_i^l$, on doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} h + \sigma_t h = 0, \\ h(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x) + D_i^l, \quad x \in \Gamma_i^{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution D_i^l sur $T_{i'}$ est donc $h_1 + h_2$ avec h_1 solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} h_1 + \sigma_t h_1 = 0, \\ h_1(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x), \quad x \in \Gamma_i^{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

et h_2 solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} h_2 + \sigma_t h_2 = 0, \\ h_2(x, \vec{\Omega}) = D_i^l, \quad x \in \Gamma_i^{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

La solution de (3.10) est égale à $T_{i,i'}(\vec{\Omega})(D_i^l)$. Elle est simulée en continuant à suivre les particules émises dans T_i . La solution de (3.9) est simulée en émettant des particules sortantes de T_i sur chaque bras de T_i . Sur chaque bras de la maille T_i , on émet en loi de Lambert en direction, de façon uniforme en espace, P_b particules sortantes dont le poids total est égal au quart de la mesure de Γ_i . A chaque particule p est associé un poids $\omega_p(0) = \frac{1}{4P_b}l(\Gamma_i)$. En fait, chaque particule représente

L_b particules dont les poids sont $\omega_p^l(0) = \omega_p(0)\chi_i^l(x_p(0))$.

Dans cette méthode, on doit émettre des particules à la fois en volume par maille et sur les bras. Pour l'émission sur un bras Γ_b ayant 2 mailles voisines T_g et T_d , on émet en tout 4 particules pour un lieu de naissance donné : une particule de direction $\vec{\Omega}$ allant dans le sens $T_g \mapsto T_d$ avec comme maille de naissance T_g et comme poids (positif) $\frac{1}{4P_b}l(\Gamma_b)$, une particule jumelle qui a la même trajectographie donc qu'on peut traiter en même temps que la première, avec comme maille de naissance T_d et comme poids (négatif) $-\frac{1}{4P_b}l(\Gamma_b)$ et les deux particules correspondantes de direction $-\vec{\Omega}$ soit une particule allant dans le sens $T_d \mapsto T_g$ avec comme maille de naissance T_d et comme poids (positif) $\frac{1}{4P_b}l(\Gamma_b)$ ainsi que sa jumelle avec comme maille de naissance T_g et comme poids (négatif) $-\frac{1}{4P_b}l(\Gamma_b)$. Ainsi, au niveau discret, la somme des poids des particules émises sur un bras est nulle.

3.3 Tests numériques

3.3.1 Test de l'épsilon problème, comparaison des formulations différentielle et standard

Maillage de Delaunay

Nous considérons le problème purement diffusif suivant

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u^\varepsilon((0, y), \vec{\Omega}) = 0, \\ u^\varepsilon((1, y), \vec{\Omega}) = 0, \\ u^\varepsilon((x, 0), \vec{\Omega}) = u^\varepsilon((x, 0), \vec{\Omega}^r), \quad \vec{\Omega}^r = \vec{\Omega} - 2\vec{n}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}), \\ u^\varepsilon((x, 1), \vec{\Omega}) = u^\varepsilon((x, 1), \vec{\Omega}^r), \quad \vec{\Omega}^r = \vec{\Omega} - 2\vec{n}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \\ \text{pour } \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

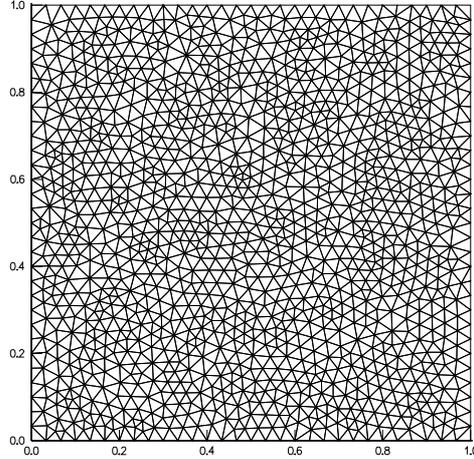


FIG. 3.1 – Maillage de Delaunay

Lorsque ϵ tend vers zero, nous savons que \tilde{u}^ϵ tend vers la solution U mono-dimensionnelle de l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{d^2 U}{dx^2} = 1, \\ U(0) = 0; U(1) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

soit $U(x) = \frac{3}{2}(x - x^2)$.

Nous maillons le carré $(0,1) \times (0,1)$ en triangles avec un maillage de Delaunay composé de 2462 triangles (Fig.3.1), nous prenons $\epsilon = 0.001$ pour avoir 1000 libre parcours par côté du carré, les mailles étant suffisamment diffusives pour que notre solution soit comparable à la solution asymptotique.

Nous comparons quatre cas :

- cas 1 : c1epsdel
Formulation standard, SIMC constante,
nombre de particules par maille = 10000,
- cas 2 : c2epsdel
Formulation standard, SIMC linéaire,
nombre de particules par maille = 10000,
- cas 3 : c3epsdel
Formulation différentielle, SIMC constante,
nombre de particules par bras = 100,
- cas 4 : c4epsdel
Formulation différentielle, SIMC linéaire.
nombre de particules par bras = 100,

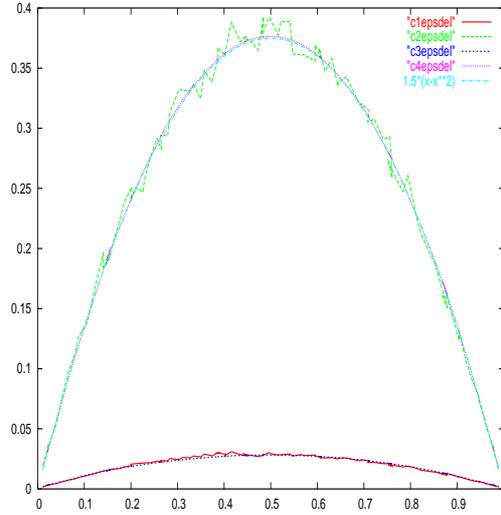


FIG. 3.2 – Comparaison SIMC linéaire et constante avec les deux formulations ; maillage de Delaunay

nombre de particules par maille = 100.

Comme nous le voyons sur la figure 3.2, le gain en réduction de variance est manifeste entre la formulation standard et la formulation différentielle. Bien qu'on ait multiplié le nombre de particules par un facteur 100, les résultats dans le cas de la formulation standard restent très bruités.

Premier maillage de Kershaw

Nous résolvons le même problème que précédemment mais sur un maillage déformé (Fig. 3.3) du carré $(0, 9) \times (0, 9)$. Ce maillage, dit de Kershaw, est souvent utilisé pour tester la précision des schémas de diffusion sur maillages déformés.

Lorsque ϵ tend vers zero, nous savons que \tilde{u}^ϵ tend vers la solution U monodimensionnelle de l'équation de diffusion :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{d^2 U}{dx^2} = 1, \\ U(0) = 0; U(9) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

soit $U(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 13.5x$.

Nous prenons $\epsilon = 0.01$ pour avoir un milieu suffisamment diffusif (900 libre parcours par côté).

Nous comparons quatre cas :

- cas 1 : c1epsker

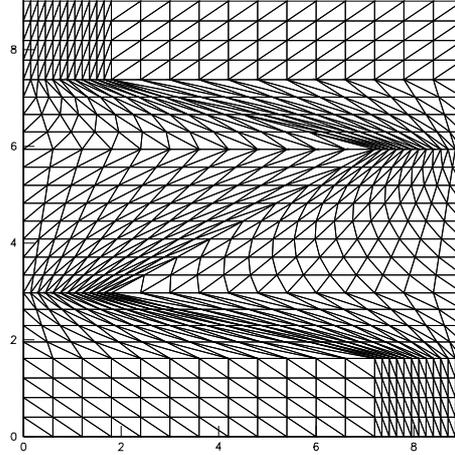


FIG. 3.3 – Premier maillage de Kershaw

- Formulation standard, SIMC constante,
nombre de particules par maille = 5000,
- cas 2 : c2epsker
Formulation standard, SIMC linéaire,
nombre de particules par maille = 5000,
- cas 3 : c3epsker
Formulation différentielle, SIMC constante,
nombre de particules par bras = 5000,
- cas 4 : c4epsker
Formulation différentielle, SIMC linéaire,
nombre de particules par bras = 5000,
nombre de particules par maille = 5000.

Comme précédemment, nous voyons sur la figure 3.4 le gain en réduction de variance obtenu avec la formulation différentielle. Nous observons également que la solution obtenue avec la méthode SIMC constante n'est pas la solution approchée d'une quelconque équation de diffusion contrairement à ce qu'on obtient en 1D sur un maillage régulier (Fig. 3.5). Par contre, la solution obtenue avec la méthode SIMC linéaire est bien monodimensionnelle (Fig. 3.6). Cependant, le maillage n'est pas assez fin pour obtenir un bon accord avec la solution exacte. C'est pourquoi, nous avons refait ce calcul sur un maillage deux fois plus fin (Fig. 3.7), donc avec quatre fois plus de mailles.

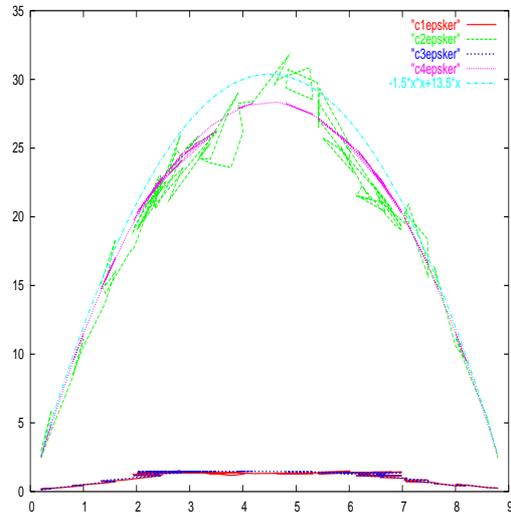


FIG. 3.4 – Comparaison SIMC linéaire et constante avec les deux formulations; premier maillage de Kershaw

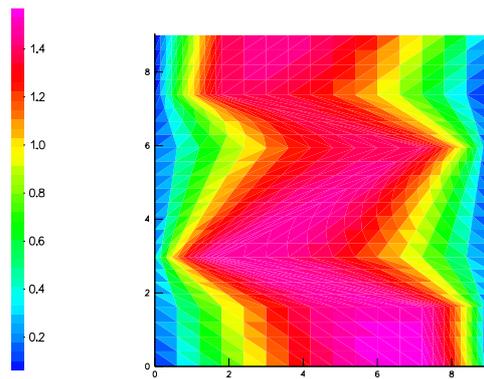


FIG. 3.5 – Solution SIMC constante, formulation différentielle; premier maillage de Kershaw

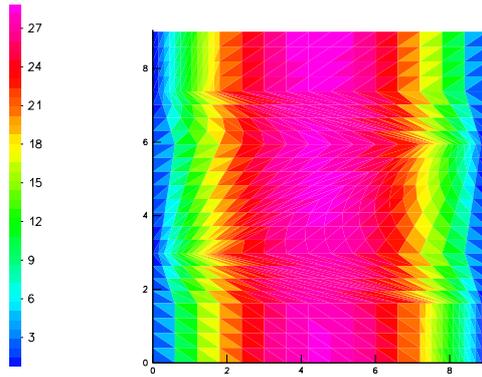


FIG. 3.6 – Solution SIMC linéaire, formulation différentielle ; premier maillage de Kershaw

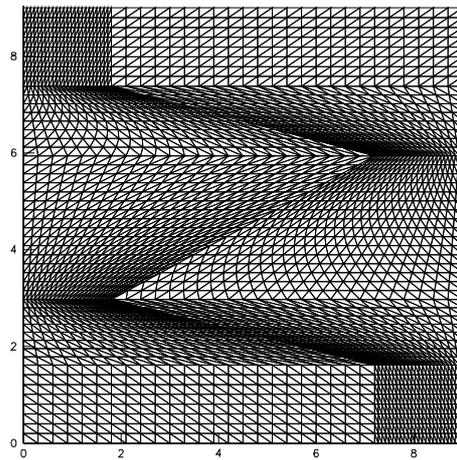


FIG. 3.7 – Second maillage de Kershaw

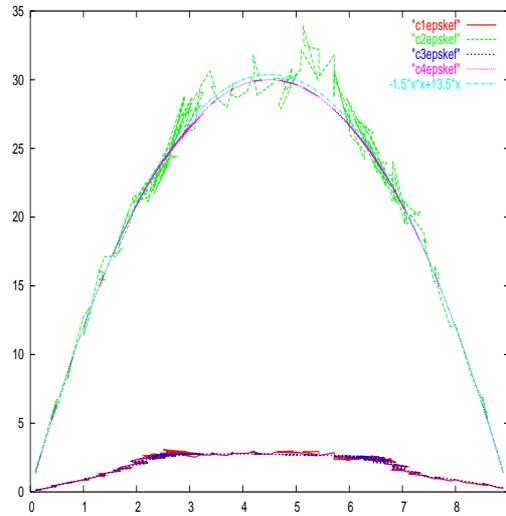


FIG. 3.8 – Comparaison SIMC linéaire et constante avec les deux formulations ; second maillage de Kershaw

Second maillage de Kershaw

- cas 1 : c1epskef
Formulation standard, SIMC constante,
nombre de particules par maille = 5000,
- cas 2 : c2epskef
Formulation standard, SIMC linéaire,
nombre de particules par maille = 5000,
- cas 3 : c3epskef
Formulation différentielle, SIMC constante,
nombre de particules par bras = 5000,
- cas 4 : c4epskef
Formulation différentielle, SIMC linéaire,
nombre de particules par bras = 5000,
nombre de particules par maille = 5000.

On constate sur la figure 3.8 que la solution obtenue avec la méthode SIMC linéaire est alors très proche de la solution exacte. La solution SIMC constante présente les mêmes pathologies que sur le maillage précédent (Fig.3.9) et la solution SIMC linéaire est monodimensionnelle (Fig.3.10).

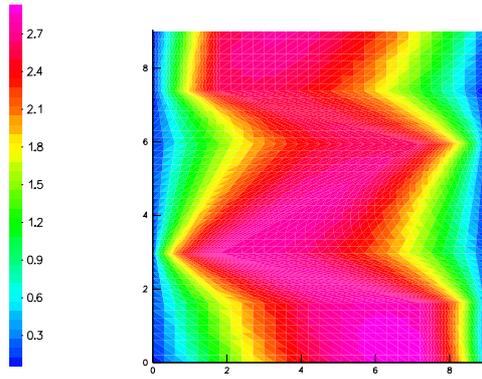


FIG. 3.9 – Solution SIMC constante, formulation différentielle; second maillage de Kershaw

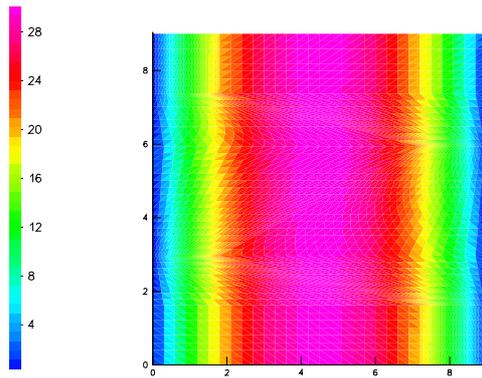


FIG. 3.10 – Solution SIMC linéaire, formulation différentielle; second maillage de Kershaw

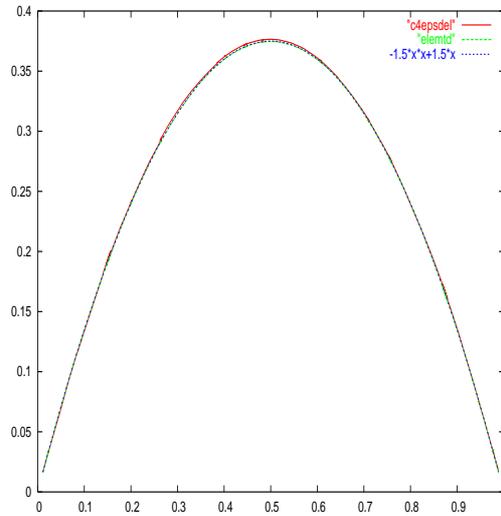


FIG. 3.11 – Comparaison SIMC linéaire formulation différentielle et éléments finis P1 ; maillage de Delaunay

3.3.2 Test de l'épsilon problème, comparaison de la méthode SIMC linéaire et des éléments finis continus linéaires P1

Grâce au faible bruit numérique des solutions obtenues avec la formulation différentielle en milieu diffusif, nous pouvons maintenant comparer finement la solution SIMC linéaire avec celle obtenue par la méthode des éléments finis continus linéaires P1 qui est théoriquement la limite diffusion de notre schéma.

Maillage de Delaunay

Sur le maillage de Delaunay la solution éléments finis continus linéaires P1 est pratiquement confondue avec la solution exacte. La solution SIMC linéaire `c4epsdel` est très proche de ces deux solutions mais reste distincte (Fig. 3.11). Il faut diminuer la valeur de ε et augmenter le nombre de particules pour rapprocher la solution SIMC linéaire des deux autres. C'est ce que nous allons voir sur des exemples plus significatifs.

Maillage déformé

Nous résolvons le même problème que précédemment mais sur le maillage déformé représenté sur la figure 3.12.

Lorsque ε tend vers zero, nous savons que \tilde{u}^ε tend vers

$U(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 13.5x$. Mais le maillage est ici très grossier et déformé

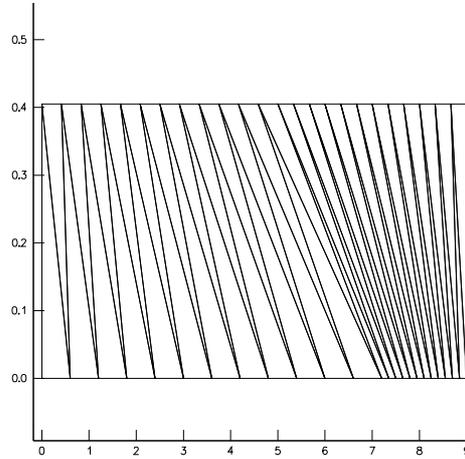


FIG. 3.12 – maillage déformé

si bien que la solution donnée par les éléments finis continus linéaires P1 est très éloignée de la solution exacte. Ce cas test permet donc de bien vérifier la convergence numérique de la solution SIMC linéaire vers sa solution asymptotique lorsque ε tend vers 0. C'est effectivement ce que nous observons sur la figure 3.13 où nous avons superposé la solution P1 elemf, la solution SIMC linéaire eps01 (resp eps001, eps0001) obtenue avec $\varepsilon = 0.01$ (resp $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.0001$). Ce qui peut surprendre est la valeur de ε pour obtenir un accord raisonnable entre les deux solutions, en effet $\varepsilon = 0.01$ représentant 900 libre-parcours par côté, on pourrait penser que cette valeur de ε est suffisamment petite pour que notre étude asymptotique soit valide. Mais si au niveau continu cette valeur est suffisamment petite pour que la solution du transport soit très proche de la solution diffusive, au niveau discret, elle ne l'est pas assez pour que la solution SIMC linéaire soit très proche de sa limite asymptotique discrète. En effet, la condition de validité de notre étude asymptotique est que le nombre de libre parcours par maille soit grand, cette condition est donc d'autant mieux vérifiée que le nombre de mailles est faible et que les mailles sont moins déformées. La solution SIMC linéaire obtenue avec $\varepsilon = 0.01$ n'est pas plus fautive que celle obtenue par les éléments finis continus linéaires P1, elle est d'ailleurs plus proche de la solution exacte mais le schéma de diffusion qui pourrait donner cette solution ne correspond pas aux éléments finis continus linéaires P1.

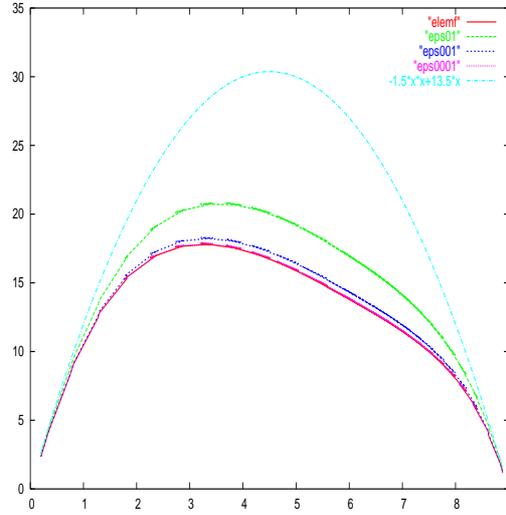


FIG. 3.13 – Comparaison SIMC linéaire formulation différentielle et éléments finis P1 ; maillage déformé

Premier maillage de Kershaw

Sur la figure 3.14, nous superposons la solution P1 elp1km, la solution SIMC linéaire c4epsker obtenue avec $\varepsilon = 0.01$ et 5000 particules par maille et bras, la solution SIMC linéaire c4epsker001 obtenue avec $\varepsilon = 0.001$ et 5000 particules par maille et bras, la solution SIMC linéaire c4epsker001part obtenue avec $\varepsilon = 0.001$ et 100000 particules par maille et bras et la solution exacte. On constate que pour obtenir un bon accord entre la solution SIMC linéaire et la solution P1 elp1km, il faut à la fois une valeur de ε suffisamment petite mais aussi avoir un nombre de particules suffisamment grand, ce qui est le cas pour la courbe c4epsker001part.

3.3.3 Calcul à source

Nous voulons maintenant comparer les résultats obtenus avec les deux formulations sur le cas transparent déjà utilisé pour faire l'analyse de l'erreur entre la méthode linéaire SIMC par rapport à la méthode constante SIMC.

Nous résolvons

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_t u = \sigma_s \tilde{u} + Q(x), \quad x \in (0, 1), \quad \mu \in (-1, 1), \\ u(0, \mu) = 0 \text{ for } \mu > 0; \quad u(1, \mu) = 0 \text{ for } \mu < 0, \\ \sigma_t = 14, \quad \sigma_s = 4, \quad 0 \leq x < 0.5, \\ \sigma_t = 1, \quad \sigma_s = 1, \quad 0.5 \leq x < 1, \\ Q(x) = 10 \text{ pour } x \in (0.4, 0.6). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

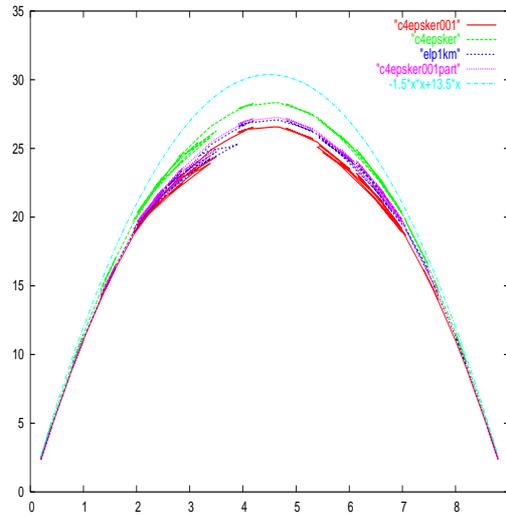


FIG. 3.14 – Comparaison SIMC linéaire en formulation différentielle et éléments finis P1 ; premier maillage de Kershaw

Le problème est résolu sur un maillage bidimensionnel régulier, obtenu en divisant des carrés en 2 triangles, du même type que celui utilisé pour le calcul de l'erreur (Fig. 3.15). Nous avons pris 40 carrés, soit 80 triangles.

Nous comparons toujours 4 cas :

- cas 1 : c1sout80
Formulation standard, SIMC constante,
nombre de particules par maille =5000,
- cas 2 : c2sout80
Formulation standard, SIMC linéaire,
nombre de particules par maille =5000,
- cas 3 : c3sout80
Formulation différentielle, SIMC constante,
nombre de particules par bras =5000 ,
- cas 4 : c4sout80
Formulation différentielle, SIMC linéaire,
nombre de particules par bras =5000,
nombre de particules par maille =5000 .

Comme nous le voyons sur la figure 3.16, cette fois, c'est la formulation standard qui donne les résultats les moins bruités. Nous en tirons la conclusion que lorsque les mailles sont optiquement minces ($\sigma_t \Delta x$ petit), il vaut mieux utiliser la formulation standard que la formulation différentielle. Ce résultat peut s'expliquer de la manière suivante. Désignons par ϵ la profondeur optique caractéristique du maillage $\sigma_t \Delta x$ et supposons cette valeur petite, l'absorption dans une maille j pour une émission dans une maille i

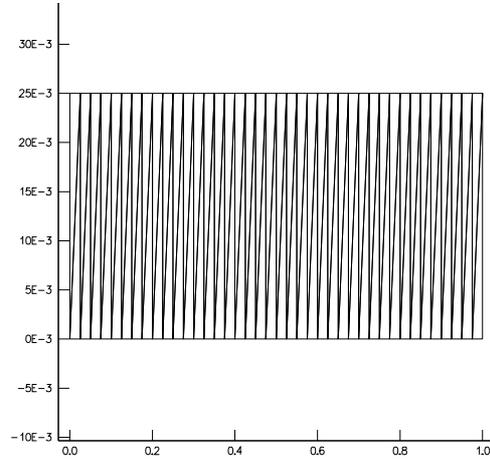


FIG. 3.15 – maillage pour le calcul à source

avec $i \neq j$ est un terme d'ordre ϵ . Dans la formulation standard, ce terme est estimé en calculant l'absorption d'un terme source d'ordre 1. Dans la formulation différentielle, on échantillonne deux termes source d'ordre 0 sur les bras, l'un positif, l'autre négatif et c'est l'absorption de cette différence qui permet d'estimer ce terme. On peut concevoir aisément que le second cas soit plus bruité que le premier pour la même raison que dans les milieux diffusifs, on observe le contraire. Pour pallier ce problème, on pourrait envisager une méthode hybride où l'émission se ferait comme dans la formulation standard pour les mailles transparentes et dans la formulation différentielle pour les mailles diffusives.

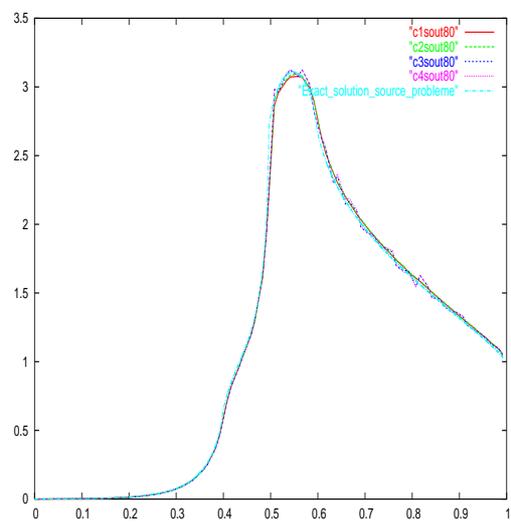


FIG. 3.16 – Comparaison SIMC linéaire et constante avec les deux formulations ; calcul à source

Chapitre 4

Limite asymptotique de schémas aux éléments finis discontinus

Ce chapitre reprend le rapport [55].

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés de schémas aux éléments finis discontinus dans les milieux diffusifs. On cherche à savoir parmi ces schémas quels sont ceux qui ont la limite diffusion. L'intérêt de cette démarche est double :

- On peut trouver le schéma qui permet d'économiser la place mémoire et le temps calcul puisqu'il se satisfait de maillages grossiers dans les zones où l'approximation de la diffusion est valable.
- On peut trouver le schéma de diffusion associé au schéma de transport qui permet une accélération efficace de ce dernier (diffusion synthétique).

La démarche pour arriver à cette fin est similaire à celle utilisée dans le chapitre 2. Elle consiste à utiliser la même méthode dans le schéma discret que celle qui, dans l'équation de transport continue, permet de trouver comme limite l'équation de diffusion. On rappelle la méthode pour l'équation de transport continue. On introduit un paramètre petit ϵ : le libre parcours divisé par une longueur caractéristique, on développe la solution de l'équation u par rapport aux puissances de ce paramètre : $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ et on démontre que u_0 est solution d'une équation de diffusion (1.4). Pour le schéma discret, on introduit le même paramètre dans l'équation de transport discrétisée, ainsi que le même développement pour la solution discrète. On trouve le schéma numérique dont u_0 est solution puis on détermine si ce schéma correspond à une discrétisation consistante de l'équation de diffusion

(1.4).

La première partie de ce chapitre concerne un schéma aux éléments finis linéaires discontinus en 1D plan infini. On y redémontre un résultat de Larsen et de Morel [40, 50]. La démonstration est conduite en 5 étapes.

- Tout d’abord, on démontre que u_0 est isotrope.
- On trouve ensuite l’équation vérifiée par le moment angulaire d’ordre 1 de u_1 . C’est l’équivalent discret de l’équation du flux : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}) = 0$.
- On démontre ensuite que u_0 est continue.
- Puis on relie le flux à u_0 par l’équivalent discret de la loi de Fick $\vec{F} = -\frac{1}{3\sigma}\vec{\nabla}u_0$. On démontre qu’on trouve un schéma d’éléments finis linéaires continus.
- On s’attache ensuite à déterminer les conditions aux limites de cette équation de diffusion. Lorsque l’intensité entrante $g(\mu)$ est anisotrope, nous savons qu’il se développe sur quelques libre-parcours une couche limite dans laquelle l’intensité devient isotrope. Ce problème de couche limite se pose également à l’interface d’un milieu transparent et d’un milieu diffusif lorsque l’intensité provenant du milieu transparent sur l’interface est anisotrope [59]. Lorsqu’on fait l’hypothèse de la diffusion, la “bonne” condition aux limites n’est pas la condition de Dirichlet en prenant comme valeur de l’intensité au bord : $\int 2\mu g(\mu)d\mu$ mais la condition dite de Chandrasekhar [23] dont la version approchée consiste à prendre comme condition de Dirichlet : $\int (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(\mu)d\mu$. On démontre que la solution discrète u_0 possède la propriété remarquable d’être égale à $\int (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(\mu)d\mu$ au bord, ce qui signifie qu’il n’est pas nécessaire de mailler au libre-parcours la couche limite pour avoir la bonne solution à l’intérieur du domaine.

Dans la deuxième partie, on étudie en géométrie 2D plane, 3 schémas qui sont des extensions du schéma précédemment étudié en 1D.

Dans la troisième partie, on étudie en géométrie 2D cylindrique, le premier schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés.

4.2 Etude en géométrie 1D

4.2.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On part de l’équation de transport en plan infini 1D.

On redémontre ci dessous un résultat de Larsen et de Morel [39, 50] :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = \sigma \tilde{u}, \quad (4.1)$$

avec x dans $[0, 1]$,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u(\mu) d\mu,$$

et pour conditions aux limites :

$$u(0, \mu \geq 0) = g(\mu), \quad u(1, \mu \leq 0) = h(\mu).$$

Par rapport au chapitre précédent, on a supposé que $\sigma_a = 0$ mais prendre en compte une section d'absorption non nulle ne pose pas de difficulté particulière.

Les directions discrètes sont notées μ_m , la maille j est l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, on suppose pour plus de simplicité que le maillage est uniforme de pas Δx .

La valeur de u sur la demi-maille $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_j]$ et pour la direction μ_m est notée $u_{j,G}^m$.

La valeur de u sur la demi-maille $[x_j, x_{j+\frac{1}{2}}]$ et pour la direction μ_m est notée $u_{j,D}^m$.

σ est supposé linéaire discontinue.

$\sigma_{j,G}$ et $\sigma_{j,D}$ sont les valeurs de σ dans la maille j aux sommets $x_{j-\frac{1}{2}}$ et $x_{j+\frac{1}{2}}$.

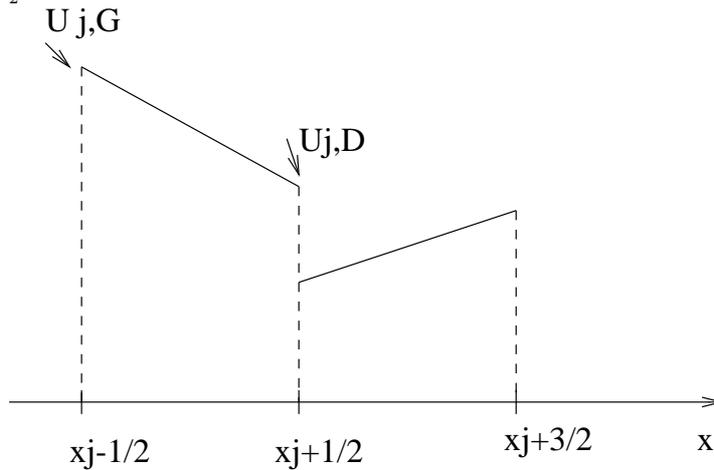
On pose :

$$u_j^m = \frac{u_{j,G}^m + u_{j,D}^m}{2}.$$

Le "lumping" ou "condensation" de la matrice de masse consiste à faire l'approximation :

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lambda_A \lambda_B dx = \delta_A^B \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \lambda_A dx$$

dans le terme de scattering $\sigma u - \sigma \tilde{u}$, où λ_A est la fonction affine qui vaut 1 au sommet A et 0 au sommet B (A et B pouvant être les points $x_{j-\frac{1}{2}}$ ou $x_{j+\frac{1}{2}}$).



Le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés s'écrit en 1D :

Trouver $u_{j,G}^m, u_{j,D}^m$ solutions de :

$$\begin{cases} \mu_m(u_j^m - u_{j-\frac{1}{2}}^m) + \frac{u_{j,G}^m}{2}\sigma_{j,G}\Delta x = \frac{\tilde{u}_{j,G}}{2}\sigma_{j,G}\Delta x, \\ \mu_m(u_{j+\frac{1}{2}}^m - u_j^m) + \frac{u_{j,D}^m}{2}\sigma_{j,D}\Delta x = \frac{\tilde{u}_{j,D}}{2}\sigma_{j,D}\Delta x, \end{cases} \quad (4.2)$$

avec :

$$\tilde{u} = \sum_m \omega_m u^m,$$

et

$$\begin{aligned} u_{j-\frac{1}{2}}^m &= u_{j-1,D}^m \text{ si } \mu_m \geq 0, \\ u_{j-\frac{1}{2}}^m &= u_{j,G}^m \text{ si } \mu_m \leq 0, \end{aligned}$$

pour la maille $1 = [x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}]$, ($x_{\frac{1}{2}} = 0$)

$$\begin{aligned} u_{\frac{1}{2}}^m &= g(\mu_m) \text{ si } \mu_m \geq 0, \\ u_{\frac{1}{2}}^m &= u_{1,G}^m \text{ si } \mu_m \leq 0, \end{aligned}$$

de même pour la dernière maille $N = [x_{N-\frac{1}{2}}, x_{N+\frac{1}{2}}]$, ($x_{N+\frac{1}{2}} = 1$)

$$\begin{aligned} u_{N+\frac{1}{2}}^m &= h(\mu_m) \text{ si } \mu_m \leq 0, \\ u_{N+\frac{1}{2}}^m &= u_{N,D}^m \text{ si } \mu_m \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque : pour $\mu_m \geq 0$, $u_{j-\frac{1}{2}}^m$ est une donnée pour le système (4.2) et $u_{j+\frac{1}{2}}^m$ une inconnue et inversement pour $\mu_m \leq 0$.

Les ω_m sont les poids d'une formule de quadrature sur $[-1, +1]$ normalisés de telle sorte que $\sum_m \omega_m = 1$.

Dans la limite diffusion, la profondeur optique (nombre de libres parcours) tend vers l'infini dans chaque maille, on introduit donc le petit paramètre $\epsilon = \frac{1}{\tilde{\sigma}\Delta x}$. On note : $\tilde{\sigma}$, une valeur caractéristique de σ ,

$$\sigma_{j,G} = \frac{\sigma_{j,G}}{\tilde{\sigma}},$$

$$\sigma_{j,D} = \frac{\sigma_{j,D}}{\tilde{\sigma}}.$$

Le système (4.2) se réécrit :

$$\epsilon\mu_m(u_j^m - u_{j-\frac{1}{2}}^m) + \sigma_{j,G}\frac{u_{j,G}^m}{2} = \sigma_{j,G}\frac{\tilde{u}_{j,G}}{2}, \quad (4.3)$$

$$\epsilon\mu_m(u_{j+\frac{1}{2}}^m - u_j^m) + \sigma_{j,D}\frac{u_{j,D}^m}{2} = \sigma_{j,D}\frac{\tilde{u}_{j,D}}{2}. \quad (4.4)$$

On introduit le développement :

$$u_{j,G}^m = u_{j,G,0}^m + \epsilon u_{j,G,1}^m + \epsilon^2 u_{j,G,2}^m + \dots,$$

$$u_{j,D}^m = u_{j,D,0}^m + \epsilon u_{j,D,1}^m + \epsilon^2 u_{j,D,2}^m + \dots$$

On veut montrer que \tilde{u}_0 ($\tilde{u}_0 = \sum_m \omega_m u_0^m$) est continue soit :

$$\tilde{u}_{j,D,0} = \tilde{u}_{j+1,G,0} = \tilde{u}_{j+\frac{1}{2},0},$$

et que $\tilde{u}_{j+\frac{1}{2},0}$ vérifie une équation discrète consistante avec l'équation de diffusion associée à l'équation de transport continue :

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{3\sigma} \frac{d}{dx} u = 0.$$

ici, σ est la quantité dimensionnée de l'équation de transport continue (4.1).

On précisera ensuite les conditions aux limites de cette équation discrète.

4.2.2 Limite diffusion

Isotropie

On fait dans la suite l'hypothèse que le système de quadrature vérifie la relation :

$$\sum_m \mu_m \omega_m = 0, \quad (4.5)$$

ce qui est vérifié s'il est symétrique par rapport à 0. On montre que u est isotrope à l'ordre 0.

Pour cela, on commence par identifier les termes d'ordre 0 dans (4.3) et (4.4).

Il vient :

$$u_{j,G,0}^m = \tilde{u}_{j,G,0},$$

$$u_{j,D,0}^m = \tilde{u}_{j,D,0},$$

ce qui entraîne que u ne dépend pas de m et est donc isotrope à l'ordre 0.

Equation du flux

On montre que le flux discret ; $\sum_m \omega_m \mu_m u_1^m$, vérifie une version discrète de l'équation du flux : $\frac{d}{dx}(F) = 0$.

En écrivant l'équation (4.4) sur la maille j et l'équation (4.3) sur la maille $j+1$, en les multipliant par ω_m , en les sommant sur les m et en les ajoutant, on obtient :

$$\epsilon \sum_m (\omega_m \mu_m u_{j+1}^m - \omega_m \mu_m u_j^m) + \sum_m \omega_m \left(\frac{\sigma_{j,D} u_{j,D}^m + \sigma_{j+1,G} u_{j+1,G}^m}{2} \right) = \frac{\sigma_{j,D} \tilde{u}_{j,D} + \sigma_{j+1,G} \tilde{u}_{j+1,G}}{2}.$$

On pose :

$$J_j^1 = \sum_m \omega_m \mu_m u_{j,1}^m.$$

En identifiant les termes facteurs de ϵ^2 , il vient :

$$J_{j+1}^1 - J_j^1 + \sum_m \omega_m \left(\frac{\sigma_{j,D} u_{j,D,2}^m + \sigma_{j+1,G} u_{j+1,G,2}^m}{2} \right) = \frac{\sigma_{j,D} \tilde{u}_{j,D,2} + \sigma_{j+1,G} \tilde{u}_{j+1,G,2}}{2},$$

donc

$$J_{j+1}^1 - J_j^1 = 0. \quad (4.6)$$

Continuité

On établit maintenant la continuité de u à l'ordre 0. Pour cela, nous prenons l'équation (4.3), nous sommes sur les m en multipliant par le poids ω_m . En identifiant les termes d'ordre 1, on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{j,0}^m - u_{j-\frac{1}{2},0}^m) + \sigma_{j,G} \sum_m \omega_m \frac{u_{j,G,1}^m}{2} = \sigma_{j,G} \frac{\tilde{u}_{j,G,1}}{2},$$

donc :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{j,0}^m - u_{j-\frac{1}{2},0}^m) = 0.$$

Or $u_{j,0}^m$ ne dépend pas de m , donc grâce à (4.5), on a :

$$\sum_m \omega_m \mu_m u_{j-\frac{1}{2},0}^m = 0,$$

ou

$$\sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m u_{j-1,D,0}^m = \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| u_{j,G,0}^m,$$

soit

$$\tilde{u}_{j-1,D,0} \sum_{\mu_m \geq 0} \mu_m \omega_m = \tilde{u}_{j,G,0} \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m|.$$

On obtient grâce à (4.5) :

$$\tilde{u}_{j-1,D,0} = \tilde{u}_{j,G,0}, \quad (4.7)$$

ce qui prouve la continuité de \tilde{u}_0 .

Expression du flux

Nous allons maintenant exprimer J^1 en fonction de \tilde{u}_0 , ce qui permettra, en remplaçant dans (4.6) de trouver l'équation de diffusion vérifiée par \tilde{u}_0 .

On pose $\tilde{u}_{j-1,D,0} = \tilde{u}_{j,G,0} = \tilde{u}_{j-\frac{1}{2},0}$. On multiplie (4.3) et (4.4) par $\mu_m \omega_m$, on somme sur les m et on identifie les termes d'ordre 1 donc :

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{j,0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \sigma_{j,G} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{j,G,1}^m}{2} = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j,0}) + \sigma_{j,D} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{j,D,1}^m}{2} = 0. \quad (4.9)$$

En supposant que :

$$\sum_m \omega_m \mu_m^2 = \frac{1}{3}, \quad (4.10)$$

en sommant les deux équations après division par $\sigma_{j,G}$ et $\sigma_{j,D}$, on obtient :

$$\frac{1}{3\sigma_{j,G}} (u_{j,0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{3\sigma_{j,D}} (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j,0}) + J_j^1 = 0.$$

Donc puisque

$$u_{j,0} = \frac{u_{j-\frac{1}{2},0} + u_{j+\frac{1}{2},0}}{2},$$

on a :

$$\frac{1}{6\sigma_{j,G}} (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{6\sigma_{j,D}} (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) + J_j^1 = 0,$$

$$J_j^1 = -\frac{1}{3\sigma_j} (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) \quad (4.11)$$

avec :

$$\frac{2}{\sigma_j} = \frac{1}{\sigma_{j,G}} + \frac{1}{\sigma_{j,D}}.$$

En remplaçant dans (4.6), on trouve :

$$-\frac{1}{3\sigma_{j+1}} (u_{j+\frac{3}{2},0} - u_{j+\frac{1}{2},0}) + \frac{1}{3\sigma_j} (u_{j+\frac{1}{2},0} - u_{j-\frac{1}{2},0}) = 0,$$

ce qui est une discrétisation aux noeuds consistante de l'équation de diffusion.

Conditions aux limites

Nous allons maintenant chercher quelles sont les conditions aux limites de cette équation, par exemple à gauche, ce que l'on doit prendre comme valeur de $u_{\frac{1}{2},0}$.

On écrit pour la première maille (4.3) et (4.4) :

$$\begin{aligned}\epsilon\mu_m(u_1^m - u_{\frac{1}{2}}^m) + \sigma_{1,G}\frac{u_{1,G}^m}{2} &= \sigma_{1,G}\frac{\tilde{u}_{1,G}}{2}, \\ \epsilon\mu_m(u_{\frac{3}{2}}^m - u_1^m) + \sigma_{1,D}\frac{u_{1,D}^m}{2} &= \sigma_{1,D}\frac{\tilde{u}_{1,D}}{2}.\end{aligned}$$

La première équation à l'ordre 0 donne :

$$u_{1,G,0}^m = \tilde{u}_{1,G,0},$$

donc $u_{1,G,0}^m$ ne dépend pas de m .

De même, $u_{1,D,0}^m$ ne dépend pas de m , donc $u_{1,0}^m$ ne dépend pas de m .

A l'ordre 1, en sommant sur les m et en multipliant par ω_m , on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m (u_{1,0}^m - u_{\frac{1}{2},0}^m) = 0.$$

Ici, $u_{\frac{1}{2}}^m$ est une donnée pour $\mu_m \geq 0$, notons $u_{\frac{1}{2},0}^m = g_0^m$ pour $\mu_m \geq 0$.

Puisque $u_{1,0}^m$ ne dépend pas de m , on obtient :

$$\sum_m \omega_m \mu_m u_{\frac{1}{2},0}^m = 0,$$

soit encore :

$$\sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m g_0^m = \sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| u_{1,G,0}^m.$$

Donc :

$$u_{1,G,0}^m = \tilde{u}_{1,G,0} = 4 \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m g_0^m, \quad (4.12)$$

à condition que le système de quadrature vérifie :

$$\sum_{\mu_m \leq 0} \omega_m |\mu_m| = \frac{1}{4}. \quad (4.13)$$

A l'ordre 0, la valeur à gauche dans la première maille est donc entièrement déterminée par la condition aux limites, mais nous allons voir que $u_{\frac{1}{2},0} = \tilde{u}_{\frac{1}{2},0}$ n'est pas égale à $\tilde{u}_{1,G,0}$.

Pour cela, nous allons déterminer $u_{\frac{1}{2},0}$ en utilisant (4.11) :

$$J_1^1 = -\frac{1}{3\sigma_1}(u_{\frac{3}{2},0} - u_{\frac{1}{2},0}). \quad (4.14)$$

On a (4.8,4.9) pour $j = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{1,0} - u_{\frac{1}{2},0}^m) + \sigma_{1,G} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{1,G,1}^m}{2} &= 0, \\ \sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) + \sigma_{1,D} \sum_m \omega_m \mu_m \frac{u_{1,D,1}^m}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{\sigma_{1,G}} \sum_m \omega_m \mu_m^2 (u_{1,0} - u_{\frac{1}{2},0}^m) + \frac{1}{\sigma_{1,D}} \frac{1}{3} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) + J_1^1 = 0,$$

$$\begin{aligned}J_1^1 &= -\frac{1}{\sigma_{1,D}} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,0}) \frac{1}{3} - \frac{1}{\sigma_{1,G}} u_{1,0} \frac{1}{3} + \frac{1}{\sigma_{1,G}} \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_{1,G}} u_{1,G,0} \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

En substituant $u_{1,0}$ par $\frac{u_{1,G,0} + u_{\frac{3}{2},0}}{2}$ dans l'équation précédente, on obtient, en supposant que $\sigma_{1,G} = \sigma_{1,D} = \sigma_1$ pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned}J_1^1 &= -\frac{1}{2\sigma_1} (u_{\frac{3}{2},0} - u_{1,G,0}) \frac{1}{3} - \frac{1}{\sigma_1} \frac{u_{1,G,0} + u_{\frac{3}{2},0}}{2} \frac{1}{3} \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_1} \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m + \frac{1}{\sigma_1} u_{1,G,0} \frac{1}{6},\end{aligned}$$

$$J_1^1 = -\frac{1}{3\sigma_1} u_{\frac{3}{2},0} + \frac{1}{\sigma_1} \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m + \frac{1}{6\sigma_1} u_{1,G,0},$$

$$J_1^1 = -\frac{1}{3\sigma_1} (u_{\frac{3}{2},0} - \frac{1}{2} u_{1,G,0} - 3 \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m). \quad (4.15)$$

On a donc en utilisant (4.14, 4.12, 4.15) :

$$u_{\frac{1}{2},0} = 2 \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m g_0^m + 3 \sum_{\mu_m \geq 0} \omega_m \mu_m^2 g_0^m.$$

Ceci est la condition aux limites de l'équation de diffusion associée au transport. Il faut noter que la condition aux limites "exacte" [23] associée à l'équation de diffusion en continu est :

$$u(0) = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} \mu H(\mu) g(\mu) d\mu,$$

où

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\mu H(\mu) \simeq \mu + \frac{3}{2}\mu^2.$$

Remarque : pour obtenir la condition aux limites associée à une intensité entrante anisotrope, il faut ajouter une correction d'ordre ϵ à la condition aux limites précédente [54].

On retrouve bien la version discrète de :

$$u(0) = \int_0^1 (\mu + \frac{3}{2}\mu^2)g(\mu)d\mu.$$

Il faut noter que si l'intensité entrante est isotrope (g_0^m indépendant de m), on trouve le résultat exact quelle que soit la valeur de $\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}}$. En effet :

$$u_{\frac{1}{2},0} = \frac{1}{2}(2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}})g_0 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,G}}g_0 = g_0.$$

On a alors :

$$u_{\frac{1}{2},0} = \tilde{u}_{1,G,0} = g_0.$$

4.2.3 Résumé

Sous des hypothèses naturelles sur la quadrature utilisée (4.5,4.10,4.13), le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés a bien la limite diffusion. Les conditions aux limites à l'ordre 0 sont des conditions de Dirichlet avec une pondération en $\mu + \frac{3}{2}\mu^2$ de l'intensité entrante. Ceci constitue un résultat remarquable et surprenant car si l'intensité entrante n'est pas isotrope, il y a une couche limite qu'il est normalement indispensable de mailler très finement (avec des mailles de l'ordre du libre-parcours) pour avoir un résultat précis. Ce schéma permet d'avoir un résultat précis sans avoir à mailler finement le bord du domaine.

4.3 Etude en géométrie 2D plane

4.3.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On étend les éléments finis linéaires discontinus lumpés aux triangles en géométrie plane pour l'équation :

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = \sigma \tilde{u},$$

avec pour conditions aux limites : $u(x, y, \vec{\Omega}) = g(x, y, \vec{\Omega})$ sur les points de la frontière où $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \leq 0$, \vec{n} étant la normale extérieure à la frontière,

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} u d\vec{\Omega}.$$

Le schéma s'écrit :

Trouver sur le triangle T pour la direction $\vec{\Omega}_m = (\alpha_m, \beta_m)$, u_T^m solution de :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_T^m dx dy + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i dx dy = \sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i dx dy, \quad (4.16)$$

où i vaut A, B ou C , sommets du triangle T .

Les λ_i sont les 3 fonctions de base :

$$u_T^m = \sum_i \lambda_i u_{T,i}^m,$$

b est une arête du triangle T ,

\sum_b désigne la somme sur les 3 arêtes du triangle T ,

\vec{n}_b est le vecteur unitaire extérieur (par rapport au triangle T) à l'arête b ,

u_b^m est égal à la restriction de u_T^m sur b si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b \geq 0$ ou celle de $u_{T_b}^m$ sur b si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b \leq 0$ (T_b est le triangle adjacent au triangle T par l'arête b).

Nous allons transformer (4.16) sous la forme d'un schéma de type volumes finis. Soit AH la hauteur issue de A , G le barycentre du triangle ABC , M le milieu de AB , L le milieu de AC , on a :

$$\int_T \lambda_A dx dy = \text{aire}(AMGL) = \frac{S_T}{3},$$

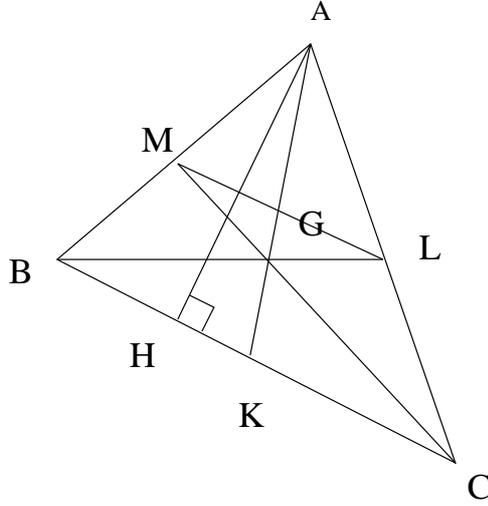
où S_T est l'aire du triangle ABC , et

$$\begin{aligned} \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_A) u_T^m dx dy &= -(\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|}) (\frac{1}{|\vec{AH}|}) \text{aire}(ABC) u_G^m \\ &= -\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|} \frac{|BC|}{2} u_G^m = -(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| u_G^m, \end{aligned}$$

avec :

$$u_G^m = \frac{1}{3} \sum_i u_{T,i}^m,$$

et \vec{n}_{ML} le vecteur unitaire extérieur (par rapport au triangle AML) normal au segment ML .



On peut interpréter $u_{T,A}^m$ comme la valeur de u à l'intérieur du quadrilatère $AMGL$ et u_G^m comme la valeur de u associée au côté ML .

On peut réécrire le schéma de la façon suivante. Il s'agit de trouver $u_{T,A}^m$, $u_{T,B}^m$, $u_{T,C}^m$ solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| u_G^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_B ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}) |MK| u_G^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_C ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}) |KL| u_G^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{cases}$$

Or, en notant :

$\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{AC}, \vec{n}_{BC}$ les vecteurs unitaires normaux extérieurs (par rapport au triangle T) à AB et AC et BC ,

$\{ABC\}$ le point G , $u_{\{ABC\}} = \frac{1}{3}(u_A + u_B + u_C)$,

$\{AB\}$ le point $\{AB\} = \frac{2}{3}(A) + \frac{1}{3}(B)$, soit le barycentre de A, B avec les

poids $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et

$u_{\{AB\}} = \frac{2}{3}u_A + \frac{1}{3}u_B$,

$u_{\{BA\}} = \frac{2}{3}u_B + \frac{1}{3}u_A$, et les formules identiques pour $\{AC\}, \{CA\}, \{BC\}, \{CB\}$,

on a :

$$\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_{AB} u_b^m \lambda_A ds = \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m,$$

où la valeur de u au point $\{AB\}$ est à prendre dans le triangle T ou le triangle T_b suivant le signe de $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b$.

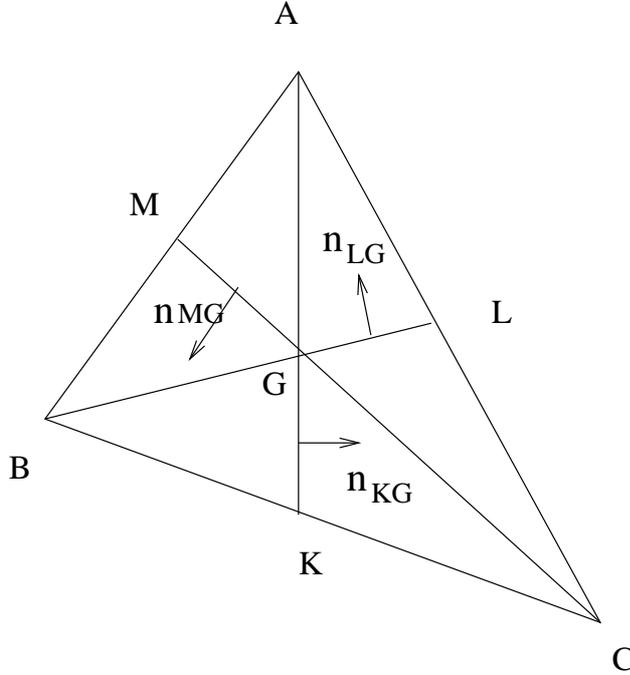
Donc :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM| u_{\{AB\}}^m + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}) |AL| u_{\{AC\}}^m.$$

Le schéma se réécrit : trouver $u_{T,A}^m$, $u_{T,B}^m$, $u_{T,C}^m$ solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_{\{BC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_{\{CA\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}, \end{array} \right. \quad (4.17)$$

ou encore sous une forme de type volumes finis faisant apparaître le caractère conservatif de l'équation, si les vecteurs \vec{n}_{MG} , \vec{n}_{LG} , \vec{n}_{KG} sont orientés comme sur la figure suivante :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|AM|u_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|AL|u_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG}|MG|u_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG}|LG|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A}u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A}\tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|BM|u_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|BK|u_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG}|KG|u_{\{ABC\}}^m \\ - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG}|MG|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B}u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B}\tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|CK|u_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|CL|u_{\{CA\}}^m - \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG}|KG|u_{\{ABC\}}^m \\ + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG}|LG|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C}u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C}\tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{array} \right.$$

On reprend l'étude asymptotique faite précédemment en 1D sur le système d'équations écrit sous la forme 4.17.

On suppose que le milieu est optiquement épais, c'est à dire que si h désigne une longueur caractéristique du maillage et σ la section efficace caractéristique du système, alors $\epsilon = \frac{1}{\sigma h}$ est petit.

On adimensionne les équations 4.17 pour faire apparaître ϵ . On écrit $\sigma_{T,i}$ pour $\frac{\sigma_{T,i}}{\sigma}$, S_T pour $\frac{S_T}{h^2}$ et toutes les longueurs par exemple $|AM|$ pour $\frac{|AM|}{h}$.

Le schéma s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|AM|u_{\{AB\}}^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|AL|u_{\{AC\}}^m \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}|ML|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A}u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A}\tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|BM|u_{\{BA\}}^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|BK|u_{\{BC\}}^m \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}|MK|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B}u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B}\tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\ \\ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|CK|u_{\{CB\}}^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|CL|u_{\{CA\}}^m \\ + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}|KL|u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C}u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C}\tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

On introduit le développement :

$$\begin{aligned} u_{T,A}^m &= u_{T,A,0}^m + \epsilon u_{T,A,1}^m + \epsilon^2 u_{T,A,2}^m + \dots, \\ u_{T,B}^m &= u_{T,A,0}^m + \epsilon u_{T,B,1}^m + \epsilon^2 u_{T,B,2}^m + \dots, \\ u_{T,C}^m &= u_{T,C,0}^m + \epsilon u_{T,C,1}^m + \epsilon^2 u_{T,C,2}^m + \dots \end{aligned}$$

4.3.2 Limite diffusion

Isotropie

A l'ordre 0, on obtient :

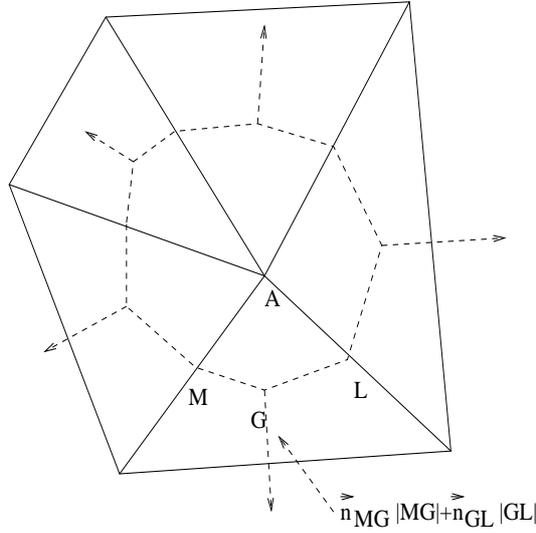


FIG. 4.1 – volume de contrôle autour de A

$$u_{T,A}^m = \tilde{u}_{T,A,0},$$

$$u_{T,B}^m = \tilde{u}_{T,B,0},$$

$$u_{T,C}^m = \tilde{u}_{T,C,0},$$

donc u est isotrope à l'ordre 0.

Equation du flux

Pour un noeud global donné, on somme, sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 4.1).

On introduit une formule de quadrature discrète sur la sphère angulaire unité

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \simeq \sum_m \omega_m f(\vec{\Omega}_m).$$

On suppose que cette formule de quadrature vérifie :

$$\sum_m \omega_m = 1,$$

et que l'on a une hypothèse de symétrie, c'est à dire que pour tout \vec{n} , on a :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \geq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}|. \quad (4.19)$$

Cette dernière hypothèse n'est réalisée que de façon approchée sur un maillage quelconque. En effet, le nombre des axes de symétrie des formules de quadrature sur la sphère angulaire unité est forcément limité.

On somme sur les directions m et sur tous les triangles T ayant ce noeud en commun, les équations de 4.18 relatives à ce sommet. On suppose que dans tous les triangles T ayant ce noeud en commun, le point A dans la numérotation locale du triangle T correspond à ce noeud si bien que cela revient à faire cette somme sur la première équation de 4.18 :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\}}^m + \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\}}^m + \vec{n}_{ML} |ML| u_{T,\{ABC\}}^m) \\ + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

Si AB est un bras interne, la valeur de $u_{\{AB\}}^m$ est celle du triangle T si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$ est positif ou du triangle adjacent à T par AB si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$ est négatif.

Si AB est un bras frontière, la valeur de $u_{\{AB\}}^m$ est celle du triangle T si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$ est positif ou la valeur de la condition aux limites au point $\{AB\}$ si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}$ est négatif.

Les termes sur les arêtes "internes" du volume de contrôle autour du noeud global s'annulent, car la même arête apparaît 2 fois dans la somme ci-dessus mais avec des vecteurs unitaires normaux opposés, donc :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{T,\{ABC\}}^m + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \\ \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

On pose

$$\vec{J}_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m u_{T,\{ABC\},1}^m$$

qui est le vecteur flux discret.

En identifiant les termes facteurs de ϵ^2 , il vient :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A,2}^m \frac{S_T}{3} = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,2} \frac{S_T}{3}.$$

Soit :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| = 0, \quad (4.20)$$

ou sous forme conservative :

$$\sum_T \vec{J}_T^1 \cdot \{\vec{n}_{MG}|MG| + \vec{n}_{GL}|GL|\} = 0.$$

Continuité

Nous voudrions maintenant démontrer que \tilde{u}_0 est continue. Nous reprenons la même démarche qu'en 1D. Pour cela, nous prenons l'équation (4.18), nous sommes sur les m en multipliant par le poids ω_m . Il vient en identifiant les termes d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} & \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0}^m + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0}^m \quad (4.21) \\ & + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0}^m + \sum_m \omega_m \sigma_{T,A} u_{j,A,1}^m \frac{S_j}{3} = \\ & \sum_m \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,1} \frac{S_T}{3}. \end{aligned}$$

Or $u_{\{ABC\},0}^m$, $u_{\{AC\},0}^m$ et $u_{\{AB\},0}^m$ sont isotropes en supposant que ni AB ni AC ne sont des arêtes frontières (la condition aux limites peut être anisotrope). Il reste :

$$\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0} + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0} = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned} -4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| |AM| u_{\{AB\},0} + 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \geq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_{\{AB\},0} = \\ 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}| |AL| u_{\{AC\},0} - 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} \geq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_{\{AC\},0}. \end{aligned}$$

Donc, d'après (4.19), on a :

$$\begin{aligned} -|AM| u_{T_{ext},\{AB\},0} + |AM| u_{T,\{AB\},0} = \\ |AL| u_{T_{ext},\{AC\},0} - |AL| u_{T,\{AC\},0}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si l'arête AB est interne, $u_{T_{ext},\{AB\},0}$ est la valeur de u au point $\{AB\}$ sur le triangle adjacent à T par AB .

Si l'arête AB est sur le bord, on note

$$u_{T_{ext},\{AB\},0} = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g(\{AB\}, \vec{\Omega}_m, 0).$$

Cette notation permet d'avoir, si g est isotrope à l'ordre 0,

$$u_{T_{ext},\{AB\},0} = g(\{AB\},0).$$

Cette égalité est assurée si on suppose en plus de (4.19) que :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| \omega_m = \frac{1}{4}.$$

Pour que u à l'ordre 0 soit continue, nous allons prouver que :

$$u_{T_{ext},\{AB\},0} = u_{T,\{AB\},0},$$

$$u_{T_{ext},\{AC\},0} = u_{T,\{AC\},0}.$$

Le nombre d'inconnues sur un maillage triangulaire est 3 fois le nombre de triangles : $3 * nt$. Le nombre d'équations (4.22) par noeud est égal au nombre d'arêtes reliées à ce noeud moins une.

Proposition 5 *L'espace vectoriel des $3nt$ valeurs de u_0 aux sommets du maillage vérifiant les équations (4.22) avec $g=0$ est de dimension n_i où n_i est le nombre de sommets internes du maillage.*

Preuve 5 *Pour démontrer ce résultat, on raisonne par récurrence :*

Si on a un seul triangle les 3 valeurs de u_0 sont nécessairement fixées car on a 3 équations. La relation est donc vérifiée car n_i est nul.

Si on a un maillage triangulaire auquel on ajoute un triangle, soit ce triangle est adjacent par 1 face au maillage, auquel cas on ajoute 3 inconnues u_0 mais aussi 3 équations qui sont indépendantes des autres donc la dimension de l'espace vectoriel reste égale à n_i , soit ce triangle est adjacent par 2 faces au maillage, auquel cas on ajoute seulement 2 équations qui restent indépendantes (2 pour les noeuds frontière, 0 pour le noeud interne), la dimension de l'espace vectoriel est donc augmentée de 1 mais également le nombre de sommets internes. Donc la relation est toujours vérifiée.

Proposition 6 *Si la quantité $\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(\vec{\Omega}_m, 0)$ est continue, u_0 est continue.*

Preuve 6 *Supposons que $g = 0$. L'espace vectoriel des $3nt$ valeurs de u_0 aux sommets du maillage vérifiant les équations (4.22) contient l'espace vectoriel des $3nt$ uplet nuls sur les noeuds du bord et continus aux noeuds internes qui est également de dimension n_i . Donc, ces 2 espaces vectoriels sont égaux. Donc u_0 est nécessairement continue et nulle sur le bord.*

Si maintenant $g \neq 0$, on construit un $3nt$ uplet u_g continu aux noeuds du maillage et égal à la valeur $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(x, y, \vec{\Omega}_m, 0)$ aux noeuds frontière (ce qui est possible par hypothèse). $u_l = u_0 - u_g$ satisfait les contraintes (4.22) avec $g = 0$. D'après ce qui précède, u_l est donc continue, nulle sur le bord. Donc u_0 est continue égale à u_g sur le bord.

Nous allons maintenant chercher quel schéma de diffusion on obtient.

Expression du flux

On suppose dorénavant que :

$$\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m = \frac{1}{3} I.$$

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de u à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. On multiplie par $\vec{\Omega}_m$ et on somme sur les directions les équations 4.18. On identifie les termes d'ordre 1.

Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{T,A}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,\{AC\},0} \\ & \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{\sigma_{T,B}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,\{BC\},0} \\ & \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{\sigma_{T,C}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{BC} |CK| u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} |CL| u_{T,\{CA\},0} \\ & \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\},0}) \\ & \qquad \qquad \qquad + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{S_T}{3} (u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m + u_{T,C,1}^m) = \vec{0}, \\ \\ & \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,\{AC\},0} + \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,\{BC\},0} + \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC} |CK| u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} |CL| u_{T,\{CA\},0} + \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\},0}) \\ & \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}, \\ \\ & \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,\{AB\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,\{AC\},0} + \vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{T,\{BA\},0} + \vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,\{BC\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\ & + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC} \frac{|BC|}{2} u_{T,\{CB\},0} + \vec{n}_{AC} \frac{|AC|}{2} u_{T,\{CA\},0} + \vec{n}_{AB} \frac{|AB|}{2} u_{\{ABC\},0}) \\ & \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma_{T,A}}\frac{1}{3}\left(\vec{n}_{BC}\frac{|BC|}{2}u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC}\frac{|AC|}{2}u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB}\frac{|AB|}{2}u_{T,C,0}\right) \\
& -\frac{1}{3\sigma_{T,B}}\frac{1}{3}\left(\vec{n}_{BC}\frac{|BC|}{2}u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC}\frac{|AC|}{2}u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB}\frac{|AB|}{2}u_{T,C,0}\right) \\
& -\frac{1}{3\sigma_{T,C}}\frac{1}{3}\left(\vec{n}_{BC}\frac{|BC|}{2}u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC}\frac{|AC|}{2}u_{T,B,0} + \vec{n}_{AB}\frac{|AB|}{2}u_{T,C,0}\right) \\
& \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\vec{\nabla}\lambda_A = -\frac{\vec{AH}}{|AH|^2} = -\frac{\vec{n}_{BC}}{|AH|} = -\frac{|BC|\vec{n}_{BC}}{2S_T},$$

$$\vec{\nabla}\lambda_B = -\frac{|AC|\vec{n}_{AC}}{2S_T},$$

$$\vec{\nabla}\lambda_C = -\frac{|AB|\vec{n}_{AB}}{2S_T}.$$

Donc, on obtient en divisant par S_T :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\sigma_{T,A}} + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} + \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\right)(u_{T,A,0}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{T,B,0}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{T,C,0}\vec{\nabla}\lambda_C) \\
+ \vec{J}_T^1 = 0,
\end{aligned}$$

ou :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(\vec{\nabla}u_{T,0}),$$

avec :

$$\frac{3}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}} + \frac{1}{\sigma_{T,B}} + \frac{1}{\sigma_{T,C}}, \quad (4.23)$$

ce qui est une discrétisation consistante de l'équation du flux.

L'expression du flux injectée dans l'équation (4.20) donne alors une discrétisation consistante de l'équation de diffusion en 2D.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{3\sigma_T}\vec{\nabla}u\right) = 0$$

C'est celle obtenue en éléments finis P1 avec lumping de la matrice de masse en prenant (4.23) comme moyenne de σ_T à l'intérieur de la maille.

A partir de (4.16), on peut trouver plus facilement l'expression du flux à partir de u_0 .

On multiplie (4.16) par $\vec{\Omega}_m$, on somme les 3 équations correspondant aux 3 sommets du triangle T et on somme sur les directions. On identifie les termes d'ordre 1 :

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left(\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \left\{ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} \right. \\ \left. + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy \right) = \vec{0},$$

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left(\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy = \vec{0}.$$

Or on a :

$$\vec{J}_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (u)_{T,\{ABC\},1}^m = \frac{1}{S_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \sum_i \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m dx dy.$$

On en déduit :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} dx dy \right\} \\ + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i dx dy + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.$$

On obtient finalement l'expression du flux discret :

$$S_T \vec{J}_T^1 = - \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i dx dy \\ = - \frac{1}{3} \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} (\vec{\nabla} u_0) S_T,$$

soit :

$$\vec{J}_T^1 = - \frac{1}{3} \sum_i \left(\frac{1}{3\sigma_{T,i}} \right) \vec{\nabla} u_0. \quad (4.24)$$

Conditions aux limites

On suppose que le côté AB du triangle T est sur la frontière et que les 2 autres côtés AC et BC sont internes. Nous allons modifier u_0 en A et B de telle façon que le flux discret \vec{J}_T^1 puisse toujours s'exprimer comme dans (4.24). Faisons l'hypothèse $\sigma_{T,A} = \sigma_{T,B} = \sigma_{T,C} = \sigma_T$.

On a pour ce triangle :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_A ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g(\vec{\Omega}_m, 0) \lambda_A ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_B ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g(\vec{\Omega}_m, 0) \lambda_B ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy \right) \\ & + (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

On remplace u_0 sur AB par sa valeur $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$. Il vient :

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m 2 |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds + 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy \right) \\ & + \left(\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m 2 |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B ds + 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy \right) \\ & (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

On sait que : $\vec{\Omega}_m = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \vec{n}_{AB} + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{t}_{AB}) \vec{t}_{AB}$ où \vec{t}_{AB} est le vecteur tangent à la surface. On suppose que la condition aux limites possède la symétrie azimutale autour de \vec{n}_{AB} , alors on vérifie que :

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2 \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A ds.$$

Donc en posant $u_{lim} = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (2(|\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| + 3(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2) g_0^m)$, formule identique au cas 1D, on obtient :

$$\begin{aligned} & (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_A ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 dx dy) \\ & + (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_B ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 dx dy) \\ & + (\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 dx dy) + S_T \vec{J}_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim} + u_{B,lim}}{2} + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,0} + u_{C,0}}{2} + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,0} + u_{C,0}}{2}),$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \vec{J}_T^1 = & -\frac{1}{3\sigma_T} ((u_{A,lim} + u_{B,lim} - u_{B,0}) \vec{\nabla} \lambda_A + (u_{B,lim} + u_{A,lim} - u_{A,0}) \vec{\nabla} \lambda_B \\ & + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Or, nous aimerions avoir :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T} (u_{A,lim} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,lim} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \quad (4.26)$$

On ne peut pas exprimer le vecteur flux discret \vec{J}_T^1 comme le gradient d'une fonction affine prenant les valeurs u_0 en C et u_{lim} en A et B , qui serait la bonne condition aux limites, car cela signifierait que la condition aux limites pour u_0 associée à l'équation de diffusion est la condition de Dirichlet : $u = u_{lim}$ sur AB .

Quand l'intensité incidente est isotrope, on a $u_{lim,A} = u_{A,0}$ et $u_{lim,B} = u_{B,0}$ et les deux expressions (4.25,4.26) sont identiques. Le schéma satisfait une équation de diffusion avec la condition de Dirichlet sur le bord : $u = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$. Par contre, quand l'intensité incidente est

anisotrope, les deux expressions ne sont pas identiques. Par exemple, supposons que $g(A) = g(B)$, la condition aux limites est alors la condition de Dirichlet $u = 6 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|^2 g_0^m$. On ne peut donc pas dire que le

schéma satisfait la bonne condition aux limites quand l'intensité incidente est anisotrope.

Remarque : on a deux autres possibilités :

- Les 3 arêtes du triangle T sont internes et un sommet, par exemple A , est sur le bord.

On a alors :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(u_{A,0}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,0}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{C,0}\vec{\nabla}\lambda_C),$$

au lieu de :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(u_{A,lim}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,0}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{C,0}\vec{\nabla}\lambda_C)$$

qui serait la bonne condition aux limites.

- Deux arêtes sont sur le bord, par exemple AB et BC .

On a alors :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}((u_{A,0} + u_{C,0} - u_{C,lim})\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,lim}\vec{\nabla}\lambda_B + (u_{C,0} + u_{A,0} - u_{A,lim})\vec{\nabla}\lambda_C),$$

au lieu de :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3\sigma_T}(u_{A,lim}\vec{\nabla}\lambda_A + u_{B,lim}\vec{\nabla}\lambda_B + u_{C,lim}\vec{\nabla}\lambda_C)$$

qui serait la bonne condition aux limites.

Remarque :

Nous allons montrer que sous certaines hypothèses (vérifiées quand on fait une simulation 2D d'un cas 1D), on retrouve la bonne condition aux limites.

On suppose que la frontière est bordée par des rectangles identiques, décomposés en triangles, que la condition aux limites est uniforme en espace et que σ_T ne dépend pas de T sur les triangles appartenant aux rectangles bordant la frontière.

Dans ce cas particulier, dans l'équation du flux relative au noeud C , la condition aux limites intervient dans le terme suivant :

$(\vec{J}_{ACE}^1 \cdot \vec{n}_{KL}|KL| + \vec{J}_{ABC}^1 \cdot \vec{n}_{LM}|LM|)$. u_B n'est pas présent dans ce terme, seul intervient le terme suivant :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3\sigma}(u_0)\vec{\nabla}\lambda_{A,ACE} \cdot \vec{n}_{KL}|KL| - \frac{1}{3\sigma}(2 * u_{lim} - u_0)\vec{\nabla}\lambda_{A,ABC} \cdot \vec{n}_{LM}|LM| \\ & = -\frac{1}{3\sigma}(u_0) \cot \beta - \frac{1}{3\sigma}(2 * u_{lim} - u_0) \cot \beta \\ & = -\frac{1}{3\sigma}(2u_{lim}) \cot \beta. \end{aligned}$$

Donc, on obtient le même terme que celui obtenu en imposant la valeur de u en A à u_{lim} dans l'expression de \vec{J}_{ABC}^1 et \vec{J}_{ACE}^1 . C'est la condition aux limites "exacte".

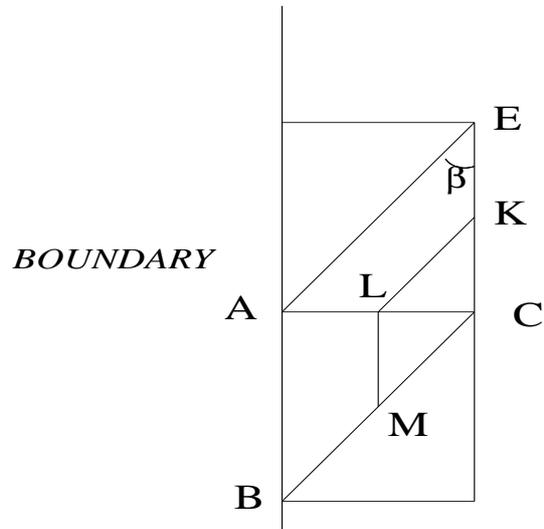


FIG. 4.2 – Cas particulier favorable pour la condition aux limites

4.3.3 Résumé

Sous des hypothèses sur la quadrature angulaire, le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés en 2D a bien la limite diffusion. En général, quand l'intensité incidente est anisotrope, contrairement au 1D, le schéma ne satisfait pas la bonne condition aux limites. Cependant, sous certaines hypothèses sur le maillage sur la frontière et la condition aux limites, on peut démontrer que la condition aux limites est aussi précise qu'en 1D, ce qui autorise des maillages grossiers vis à vis du libre-parcours même en présence d'une couche limite.

4.3.4 Variante des éléments finis linéaires discontinus lumpés

Pour rendre plus robuste le schéma précédent, on le modifie de la façon suivante [3] : on "lumpe" les termes de bord c'est à dire qu'au lieu de prendre $u_{\{AB\}}^m$ au point $\{AB\}$, on prend u au point A (dans le triangle T ou le triangle adjacent à T suivant le signe de $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}$).

Les équations (4.18) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_A^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_A^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_B^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_B^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_C^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_C^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL| u_{\{ABC\}}^m + \sigma_{T,C} u_C^m \frac{S_T}{3} = \\
\sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}.
\end{array} \right. \quad (4.27)$$

Dans les équations précédentes, u_A^m est la valeur de u au point A prise dans le triangle T si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \geq 0$ et dans le triangle adjacent à T par AB si $\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0$, \vec{n}_{AB} est le vecteur unitaire porté par la normale extérieure par rapport au triangle T à AB .

4.3.5 Limite diffusion

Isotropie

On obtient de la même façon que dans le cas précédent l'isotropie à l'ordre 0 de u .

Equation du flux

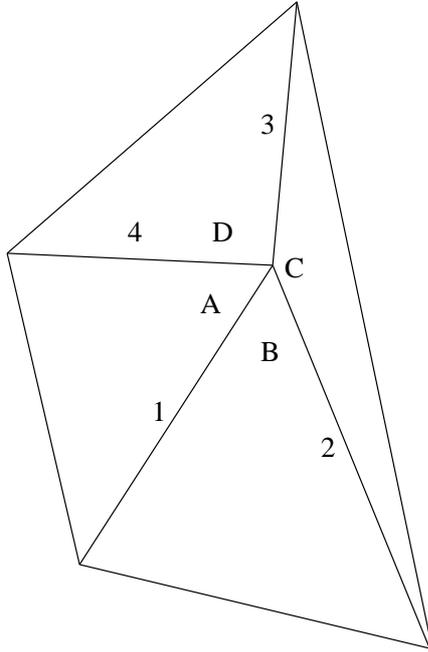
L'équation du flux est identique à celle obtenue dans le cas précédent.

Continuité

On peut démontrer, de façon plus directe que dans le cas précédent, la continuité des valeurs de u à l'ordre 0.

Preuve 7 On a la relation (équivalente de 4.22) :

$$\begin{aligned}
-|AM| u_{T_{ext},A,0} + |AM| u_{T,A,0} = \\
|AL| u_{T_{ext},A,0} - |AL| u_{T,A,0}.
\end{aligned}$$



Les relations :

$$l1(u_B - u_A) = l2(u_C - u_B) = l3(u_D - u_C) = l4(u_A - u_D)$$

où l_i sont les longueurs des arêtes i , entraînent clairement que

$$u_A = u_B = u_C = u_D.$$

On peut démontrer le même résultat sur un noeud sur la frontière mais à la condition que la quantité

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

soit continue. La valeur de u au point A sur le bord est alors nécessairement égale à

$$4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

où $g_{x,y,0}^m$ est la valeur de la condition aux limites pour la direction m à l'ordre 0 au point (x, y) .

Remarque :

si elle est discontinue, on peut montrer [1] que les valeurs de u pour un noeud sur le bord sont des moyennes pondérées par des valeurs positives des deux valeurs de la quantité $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$ de part et d'autre

de ce noeud. On n'a plus la continuité de u_0 en ce noeud mais on garde la continuité de u_0 aux noeuds internes. Avec la méthode précédente, on

peut démontrer que u_0 est continue aux noeuds internes et que les valeurs de u_0 pour un noeud sur le bord dépendent linéairement de la quantité $\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$ sur toute la frontière et non plus seulement de part et d'autre du point considéré. On ne peut pas garantir que ces valeurs soient comprises entre les deux valeurs de la condition aux limites. La variante devrait donc dans ce cas être plus robuste.

Nous allons maintenant regarder quel schéma de diffusion on obtient.

Expression du flux

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de u à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle.

On multiplie par $\vec{\Omega}_m$ et on somme sur les directions les équations (4.27). On identifie les termes d'ordre 1. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma_{T,A}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB}|AM|u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC}|AL|u_{T,A,0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{ML}|ML|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{\sigma_{T,B}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB}|BM|u_{T,B,0} + \vec{n}_{BC}|BK|u_{T,B,0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{MK}|MK|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \frac{1}{\sigma_{T,C}} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{BC}|CK|u_{T,C,0} + \vec{n}_{AC}|CL|u_{T,C,0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{KL}|KL|u_{\{ABC\},0}) \\
& + \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{S_T}{3} (u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m + u_{T,C,1}^m) = \vec{0}, \\
& \qquad \qquad \qquad \frac{1}{3\sigma_{T,A}} (\vec{n}_{AB}|AM| + \vec{n}_{AC}|AL|) u_{T,A,0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} (\vec{n}_{AB}|BM| + \vec{n}_{BC}|BK|) u_{T,B,0} \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} (\vec{n}_{BC}|CK| + \vec{n}_{AC}|CL|) u_{T,C,0} \\
& + (\frac{1}{3\sigma_{T,A}} \vec{n}_{ML}|ML| + \frac{1}{3\sigma_{T,B}} \vec{n}_{MK}|MK| + \frac{1}{3\sigma_{T,C}} \vec{n}_{KL}|KL|) u_{\{ABC\},0} \\
& \qquad \qquad \qquad + S_T \vec{J}_T^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\vec{n}_{AB}|AM| + \vec{n}_{AC}|AL| = -\frac{1}{2} \vec{n}_{BC}|BC|,$$

$$\vec{n}_{AB}|BM| + \vec{n}_{BC}|BK| = -\frac{1}{2}\vec{n}_{AC}|AC|,$$

$$\vec{n}_{BC}|CK| + \vec{n}_{AC}|CL| = -\frac{1}{2}\vec{n}_{AB}|AB|,$$

$$S_T = |BC|\frac{h_A}{2} = |AC|\frac{h_B}{2} = |AB|\frac{h_C}{2},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3\sigma_{T,A}}\frac{\vec{n}_{BC}}{h_A}u_{T,A,0} - \frac{1}{3\sigma_{T,B}}\frac{\vec{n}_{AC}}{h_B}u_{T,B,0} - \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\frac{\vec{n}_{AB}}{h_C}u_{T,C,0} \\ + & \left(\frac{1}{3\sigma_{T,A}}\vec{n}_{ML}|ML| + \frac{1}{3\sigma_{T,B}}\vec{n}_{MK}|MK| + \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\vec{n}_{KL}|KL|\right)\frac{u_{\{ABC\},0}}{S_T} + \vec{J}_T^1 = \vec{0}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3\sigma_{T,A}}\vec{\nabla}\lambda_A u_{T,A,0} + \frac{1}{3\sigma_{T,B}}\vec{\nabla}\lambda_B u_{T,B,0} + \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\vec{\nabla}\lambda_C u_{T,C,0} \\ - & \left(\frac{1}{3\sigma_{T,A}}\vec{\nabla}\lambda_A + \frac{1}{3\sigma_{T,B}}\vec{\nabla}\lambda_B + \frac{1}{3\sigma_{T,C}}\vec{\nabla}\lambda_C\right)u_{\{ABC\},0} + \vec{J}_T^1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

On trouve une discrétisation consistante du vecteur flux, calculé au barycentre du triangle T , exprimé de la façon suivante :

$$\vec{J}_T^1 = -\frac{1}{3}\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0}\right) - \left(\vec{\nabla}\frac{1}{\sigma_T}\right)u_{\{ABC\},0}\right).$$

En effet, en supposant que $\frac{1}{\sigma_T}$ est affine par maille, on a :

$$\frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\lambda_C,$$

donc :

$$\vec{\nabla}\frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{\sigma_{T,A}}\vec{\nabla}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\vec{\nabla}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\vec{\nabla}\lambda_C,$$

et

$$\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0} = \left\{\frac{1}{\sigma_{T,A}}\lambda_A + \frac{1}{\sigma_{T,B}}\lambda_B + \frac{1}{\sigma_{T,C}}\lambda_C\right\}u_{\{ABC\},0}.$$

En supposant maintenant que $\frac{1}{\sigma_T}u$ peut être approché par une fonction affine par maille, on a :

$$\frac{1}{\sigma_T}u_{T,0} \simeq \left(\frac{1}{\sigma_{T,A}}u_{T,A,0}\right)\lambda_A + \left(\frac{1}{\sigma_{T,B}}u_{T,B,0}\right)\lambda_B + \left(\frac{1}{\sigma_{T,C}}u_{T,C,0}\right)\lambda_C,$$

donc :

$$\vec{\nabla} \frac{1}{\sigma_T} u_{T,0} \simeq \left(\frac{1}{\sigma_{T,A}} u_{T,A,0} \right) \vec{\nabla} \lambda_A + \left(\frac{1}{\sigma_{T,B}} u_{T,B,0} \right) \vec{\nabla} \lambda_B + \left(\frac{1}{\sigma_{T,C}} u_{T,C,0} \right) \vec{\nabla} \lambda_C.$$

L'expression du flux injectée dans l'équation (4.20) donne alors une discrétisation consistante de l'équation de diffusion en 2D. Lorsqu'on prend σ_T constante par maille, c'est la même que celle obtenue en éléments finis P1 avec lumping de la matrice de masse.

Conditions aux limites

On obtient les mêmes résultats qu'avec le schéma précédent.

4.3.6 Résumé

Si l'on "lumpe" en plus des termes de "scattering" les termes de bord apparaissant dans le schéma aux éléments finis linéaires discontinus, le schéma que l'on obtient possède toujours la limite diffusion, avec une discrétisation de l'équation de diffusion différente de la précédente quand σ n'est pas constant par maille. Le schéma obtenu est plus robuste que le précédent lorsque la quantité

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g_{x,y,0}^m$$

n'est pas continue sur le bord.

4.3.7 Méthode SCB

M.L Adams [2] propose une variante du schéma précédent (Single Corner Balance) qui peut s'interpréter comme une méthode de volumes finis sur des polygones ayant un nombre de côtés arbitraire. Nous allons analyser cette méthode dans le cas des triangles. Le schéma s'écrit de la façon suivante : trouver $u_{T,A}^m$, $u_{T,B}^m$, $u_{T,C}^m$ solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM| u_A^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL| u_A^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,B}^m}{2} \\
- \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,C}^m}{2} \\
+ \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3}, \\
\\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM| u_B^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK| u_B^m \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B}^m + u_{T,C}^m}{2} \\
- \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG} |MG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,B}^m}{2} \\
+ \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3}, \\
\\
\epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK| u_C^m + \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL| u_C^m \\
- \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B}^m + u_{T,C}^m}{2} \\
+ \epsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A}^m + u_{T,C}^m}{2} \\
+ \sigma_{T,C} u_C^m \frac{S_T}{3} = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3}.
\end{array} \right. \quad (4.28)$$

4.3.8 Limite diffusion

Isotropie

De la même façon que dans le cas précédent, on obtient que u , à l'ordre 0, est isotrope.

Equation du flux

Pour obtenir l'équation du flux, on somme sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 4.1).

On pose :

$$\vec{J}_{T,MG}^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{u_{T,A,1}^m + u_{T,B,1}^m}{2}$$

qui est le vecteur flux discret sur l'arête MG ,

$$\vec{J}_{T,LG}^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \frac{u_{T,A,1}^m + u_{T,C,1}^m}{2}$$

qui est le vecteur flux discret sur l'arête GL .

En identifiant les termes facteurs de ϵ^2 , il vient :

$$\sum_T \vec{J}_{T,MG}^1 \cdot \vec{n}_{MG} |MG| + \vec{J}_{T,LG}^1 \cdot \vec{n}_{LG} |LG| = \vec{0}.$$

Continuité

De la même façon que dans le cas précédent, on obtient que u , à l'ordre 0, est continue.

Expression du flux

Il s'agit d'exprimer les vecteurs flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de u à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. Pour cela, on multiplie par $\vec{\Omega}_m$ et on somme sur les directions les équations (4.28) et on identifie les termes d'ordre 1. On suppose que $\sigma_{T,A} = \sigma_{T,B} = \sigma_{T,C}$.

Il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM| u_{T,A,0} + \vec{n}_{AC} |AL| u_{T,A,0} \\ & \qquad \qquad \qquad - \vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & + \frac{1}{\sigma_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |BM| u_{T,B,0} + \vec{n}_{BC} |BK| u_{T,B,0} \\ & \qquad \qquad \qquad + \vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{2S_T}{3} \vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} |AM| + \vec{n}_{AC} |AL|) u_{T,A,0} \\ & + \frac{1}{3\sigma_T} (-\vec{n}_{LG} |LG| \frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & + \frac{1}{3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} |BM| + \vec{n}_{BC} |BK|) u_{T,B,0} \\ & + \frac{1}{3\sigma_T} (+\vec{n}_{KG} |KG| \frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{S_T}{3} 2\vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma_T} \frac{\vec{n}_{BC}}{h_A} u_{T,A,0} - \frac{1}{3\sigma_T} \frac{\vec{n}_{AC}}{h_B} u_{T,B,0} \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T} (-\vec{n}_{LG}|LG| \frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T} (+\vec{n}_{KG}|KG| \frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{2}{3} \vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3\sigma_T} \vec{\nabla} \lambda_A u_{T,A,0} + \frac{1}{3\sigma_T} \vec{\nabla} \lambda_B u_{T,B,0} \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T} (-\vec{n}_{LG}|LG| \frac{u_{T,A,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& + \frac{1}{3S_T\sigma_T} (\vec{n}_{KG}|KG| \frac{u_{T,B,0} + u_{T,C,0}}{2}) \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{2}{3} \vec{J}_{T,MG}^1 = \vec{0}.
\end{aligned}$$

L'expression de $\vec{J}_{T,MG}^1$ n'est pas consistante avec l'expression exacte du flux. Si σ_T est constante et u est linéaire dans la maille, le vecteur $\vec{J}_{T,MG}^1$ devrait être égal à $-\frac{1}{3\sigma_T} \{\vec{\nabla} \lambda_A u_{T,A,0} + \vec{\nabla} \lambda_B u_{T,B,0} + \vec{\nabla} \lambda_C u_{T,C,0}\}$ comme avec les deux schémas précédents. Or, cette égalité n'est pas vérifiée. Donc, sur les triangles, on ne peut affirmer que la méthode SCB a la limite diffusion.

4.3.9 Résumé

La méthode SCB possède la limite diffusion sur un maillage composé de rectangles [2] mais ne la possède pas si le maillage comporte des triangles.

4.4 Etude en géométrie 2D cylindrique

4.4.1 Schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés

On reprend le premier schéma : les éléments finis linéaires discontinus lumpés, en géométrie 2D cylindrique.

L'équation en géométrie 2D cylindrique s'écrit :

$$\eta \frac{\partial ru}{\partial r} + \mu \frac{\partial ru}{\partial z} - \frac{\partial \chi u}{\partial \varphi} + \sigma ru = \sigma r \tilde{u},$$

avec pour conditions aux limites : $u(r, z, \vec{\Omega}) = g(r, z, \vec{\Omega})$ sur les points de la frontière où $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \leq 0$, \vec{n} étant la normale extérieure à la frontière, en notant $\vec{\Omega}$ le vecteur de composantes : $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \cos(\varphi)$ en r , et μ en z ,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi u(r, z, \mu, \varphi),$$

$$\chi = \sqrt{1 - \mu^2} \sin(\varphi).$$

On commence par approcher le terme $-\frac{\partial \chi u}{\partial \varphi}$ au point $\vec{\Omega}_m = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m), \mu_m)$ par l'expression :

$$-\frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\},$$

u^2 est une approximation de u au point $\vec{\Omega}_2 = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m + \frac{\Delta\varphi}{2}), \mu_m)$,

u^1 est une approximation de u au point $\vec{\Omega}_1 = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m - \frac{\Delta\varphi}{2}), \mu_m)$,

u^m est une approximation de u au point $\vec{\Omega}_m = (\sqrt{1 - \mu_m^2} \cos(\varphi_m), \mu_m)$.

On suppose que $u^m = \frac{u^1 + u^2}{2}$.

Les α^i sont calculés par la formule de récurrence :

$$\alpha^2 - \alpha^1 = \Delta\varphi \eta_m.$$

On voit donc que α est une approximation de χ .

Après cette discrétisation en angle, on doit résoudre :

$$\eta_m \frac{\partial r u_m}{\partial r} + \mu \frac{\partial r u_m}{\partial z} - \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\} + \sigma r u_m = \sigma r \tilde{u},$$

$$\eta_m r \frac{\partial u_m}{\partial r} + \eta_m u_m + \mu r \frac{\partial u_m}{\partial z} - \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u^2 - \alpha^1 u^1\} + \sigma r u_m = \sigma r \tilde{u}.$$

On discrétise cette équation par des éléments finis linéaires discontinus lumpés en espace.

Le schéma s'écrit :

Trouver sur le triangle T pour la direction $\vec{\Omega}_m = (\eta_m, \mu_m)$, u_T^m solution de :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} r \lambda_i) u_T^m dr dz - \int_T \frac{1}{\Delta\varphi} \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_i dr dz$$

$$+ \int_T \eta_m u_T^m \lambda_i r dr dz + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i r dr dz =$$

$$\sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i r dr dz,$$

où i vaut A, B ou C .

On transforme l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
& \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_T^m r dr dz \\
& - \int_T \frac{1}{\Delta \varphi} \{ \alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1 \} \lambda_i dr dz + \sigma_{T,i} u_{T,i}^m \int_T \lambda_i r dr dz = \sigma_{T,i} \tilde{u}_{T,i} \int_T \lambda_i r dr dz,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Nous allons transformer (4.29) sous la forme d'un schéma de type volumes finis.

En notant :
 $R_A = \frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{4} + \frac{r_C}{4}$, $R_B = \frac{r_A}{4} + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{4}$, $R_C = \frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{2} + \frac{r_C}{4}$,
 G l'isobarycentre du triangle, on obtient :

$$\int_T \lambda_A r dr dz = \left(\frac{S_T}{3} \right) R_A,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_A) u_T^m r dr dz &= -(\vec{\Omega}_m \cdot \frac{\vec{AH}}{|AH|}) \left(\frac{1}{|AH|} \right) \int_T u_T^m r dr dz \\
&= -(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| (ru)_G^m,
\end{aligned}$$

avec :

$$(ru)_G^m = \frac{1}{3} \sum_i R_i u_{T,i}^m.$$

On peut interpréter $(ru)_G^m$ comme la valeur de ru au point G qu'on associe au côté ML .

On peut réécrire le schéma de la façon suivante. Il s'agit de trouver $u_{T,A}^m$, $u_{T,B}^m$, $u_{T,C}^m$ solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}) |ML| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A dr dz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \\ \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_B r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}) |MK| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B dr dz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \\ \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \\ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_C r ds + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}) |KL| (ru)_G^m \\ - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C dr dz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \\ \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C. \end{array} \right.$$

En notant :

$$(ru)_{\{AB\}} = \left(\frac{r_A}{2} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(A) + \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(B),$$

$(ru)_{\{BA\}} = \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{2}\right) u_b(B) + \left(\frac{r_A}{6} + \frac{r_B}{6}\right) u_b(A)$ (les formules sont identiques pour $\{AC\}, \{CA\}, \{BC\}, \{CB\}$), on obtient :

$$(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \int_{AB} u_b^m \lambda_A r ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM| (ru)_{\{AB\}}^m,$$

où la valeur de u au point $\{AB\}$ est à prendre dans le triangle T ou le triangle T_b suivant le signe de $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b)$.

On a :

$$\sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_b^m \lambda_A ds = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) |AM| (ru)_{\{AB\}}^m + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}) |AL| (ru)_{\{AC\}}^m.$$

Le schéma se réécrit : trouver $u_{T,A}^m, u_{T,B}^m, u_{T,C}^m$ solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML}|ML|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK}|MK|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL}|KL|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C,
\end{array} \right. \quad (4.30)$$

ou encore sous une forme de type volumes finis faisant apparaître le caractère conservatif de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG}|MG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG}|LG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A \\
= \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}|BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG}|KG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MG}|MG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B \\
= \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\
\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC}|CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC}|CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KG}|KG|(ru)_{\{ABC\}}^m \\
- \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{LG}|LG|(ru)_{\{ABC\}}^m - \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C \\
= \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C.
\end{array} \right.$$

On reprend l'étude asymptotique faite précédemment en géométrie 2D plane sur l'équation 4.31 dans laquelle on a introduit le paramètre ϵ , le schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ -\varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_A drdz + \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A, \\ \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} |BM|(ru)_{\{BA\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |BK|(ru)_{\{BC\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{MK} |MK|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ -\varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_B drdz + \sigma_{T,B} u_{T,B}^m \frac{S_T}{3} R_B = \sigma_{T,B} \tilde{u}_{T,B} \frac{S_T}{3} R_B, \\ \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{BC} |CK|(ru)_{\{CB\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AC} |CL|(ru)_{\{CA\}}^m + \varepsilon \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{KL} |KL|(ru)_{\{ABC\}}^m \\ -\varepsilon \frac{1}{\Delta\varphi} \int_T \{\alpha^2 u_T^2 - \alpha^1 u_T^1\} \lambda_C drdz + \sigma_{T,C} u_{T,C}^m \frac{S_T}{3} R_C = \sigma_{T,C} \tilde{u}_{T,C} \frac{S_T}{3} R_C. \end{array} \right.$$

4.4.2 Limite diffusion

Isotropie

A l'ordre 0, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{T,A}^m &= \tilde{u}_{T,A,0}, \\ u_{T,B}^m &= \tilde{u}_{T,B,0}, \\ u_{j,C}^m &= \tilde{u}_{T,C,0}. \end{aligned}$$

Donc u est isotrope à l'ordre 0.

Equation du flux

Pour un noeud global donné, on somme sur tous les triangles ayant ce noeud en commun, les équations relatives à ce sommet (Fig 4.1).

On introduit une formule de quadrature discrète sur la sphère angulaire unité.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \simeq \sum_m \omega_m f(\vec{\Omega}_m).$$

On suppose que cette formule de quadrature vérifie :

$$\sum_m \omega_m = 1.$$

On somme sur les directions m :

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot (\vec{n}_{AB} |AM|(ru)_{\{AB\}}^m + \vec{n}_{AC} |AL|(ru)_{\{AC\}}^m + \vec{n}_{ML} |ML|(ru)_{\{ABC\}}^m) \\ + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A. \end{aligned}$$

Le terme sommé sur les directions $\{\alpha^2 u_i^2 - \alpha^1 u_i^1\}$ disparaît car il a le caractère conservatif de $\frac{\partial \chi u}{\partial \varphi}$:

$$\int_0^\pi \frac{\partial \chi u}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Pour faciliter les notations, on a supposé que le point A dans la numérotation locale du triangle T correspond au même noeud global donné.

Si AB est un bras interne, la valeur de $(ru)_{\{AB\}}^m$ est celle du triangle T si $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$ est positif ou du triangle adjacent à T par AB si $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$ est négatif.

Si AB est un bras frontière, la valeur de $(ru)_{\{AB\}}^m$ est celle du triangle T si $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$ est positif ou la valeur de la condition aux limites au point $\{AB\}$ si $(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})$ est négatif.

Les termes sur les arêtes "internes" du volume de contrôle autour du noeud global s'annulent, car la même arête apparaît 2 fois dans la somme ci-dessus mais avec des vecteurs unitaires normaux opposés, donc :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_m \sum_T \omega_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{ML} |ML| (ru)_{T,\{ABC\}}^m + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A}^m \frac{S_T}{3} R_A = \\ \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A} \frac{S_T}{3} R_A. \end{aligned}$$

On pose

$$(r\vec{J})_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (ru)_{T,\{ABC\},1}^m$$

qui est le vecteur flux discret.

En identifiant les termes facteurs de ϵ^2 , il vient :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| + \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} u_{T,A,2}^m \frac{S_T}{3} R_A = \sum_m \sum_T \omega_m \sigma_{T,A} \tilde{u}_{T,A,2} \frac{S_T}{3} R_A.$$

Soit :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \vec{n}_{ML} |ML| = 0,$$

ou sous forme conservative :

$$\sum_T (r\vec{J})_T^1 \cdot \{\vec{n}_{MG} |MG| + \vec{n}_{GL} |GL|\} = 0. \quad (4.31)$$

Continuité

La démonstration de la continuité est identique à celle faite en géométrie 2D plane. On démontre tout d'abord que :

$$-|AM|(ru)_{T_{ext},\{AB\},0} + |AM|(ru)_{T,\{AB\},0} = \\ |AL|(ru)_{T_{ext},\{AC\},0} - |AL|(ru)_{T,\{AC\},0}.$$

Si l'arête AB est interne, $(ru)_{T_{ext},\{AB\},0}$ est la valeur de (ru) au point $\{AB\}$ sur le triangle adjacent à T par AB , si l'arête AB est sur le bord,

$$(ru)_{T_{ext},\{AB\},0} = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| (rg)(\{AB\}, \vec{\Omega}_m, 0).$$

On en déduit que u_0 est continue à condition que

$$\sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}| g(\vec{\Omega}_m, 0) \text{ soit continue sur le bord.}$$

Nous allons maintenant chercher quel schéma de diffusion on obtient.

Expression du flux

Il s'agit d'exprimer le vecteur flux à l'intérieur d'un triangle en fonction des valeurs de u à l'ordre 0 aux sommets de ce triangle. Pour cela, on multiplie (4.29) par $\vec{\Omega}_m$, on somme les 3 équations correspondant aux 3 sommets du triangle T et on somme sur les directions. On identifie les termes d'ordre 1 :

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left(\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \left\{ \sum_b (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_b) \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz \right. \right. \\ \left. \left. - \int_T \frac{1}{\Delta \varphi} u_{T,0} \{\alpha^2 - \alpha^1\} \lambda_i dr dz \right\} \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz = \vec{0},$$

ou encore en notant que $\frac{1}{\Delta \varphi} \{\alpha^2 - \alpha^1\} = \eta_m$,

$$\sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \left(\sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz \right\} \right. \\ \left. - \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T u_0 \eta_m \lambda_i dr dz \right) \\ + \sum_i \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz = \vec{0}.$$

Or on a :

$$(r\vec{J})_T^1 = \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m (ru)_{T,\{ABC\},1}^m = \frac{1}{S_T} \sum_m \omega_m \vec{\Omega}_m \sum_i \int_T \lambda_i u_{T,i,1}^m r dr dz.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_i dr dz \right\} \\ + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dans l'expression précédente, \vec{r} est le vecteur de composantes 1 en r et 0 en z .

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i r dr dz + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0}.$$

On obtient finalement l'expression du flux discret :

$$\begin{aligned} S_T (r\vec{J})_T^1 &= -\frac{1}{3} \sum_i \frac{1}{\sigma_{T,i}} \int_T (\vec{\nabla} u_0) \lambda_i r dr dz \\ &= -\frac{1}{3} \sum_i \frac{R_i}{3\sigma_{T,i}} (\vec{\nabla} u_0) S_T, \end{aligned}$$

soit :

$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{3} \sum_i \left(\frac{R_i}{3\sigma_{T,i}} \right) \vec{\nabla} u_0.$$

On obtient ainsi une discrétisation consistante du vecteur $r\vec{J} = -\left(\frac{r}{3\sigma_T}\right) \vec{\nabla} u_0$ avec :

$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) (\vec{\nabla} u_0), \quad (4.32)$$

où

$$\left(\frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) = \sum_i \frac{R_i}{3\sigma_{T,i}}.$$

En insérant cette expression du flux dans (4.31) on obtient :

$$\sum_T -\frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{r}}{\sigma_T} \right) (\vec{\nabla} u_{T,0}) \cdot \{ \vec{n}_{MG} |MG| + \vec{n}_{GL} |GL| \} = 0,$$

qui est une discrétisation consistante de l'équation du flux :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{3\sigma_T} (\vec{\nabla} u_0) \right) = 0$$

en géométrie cylindrique.

Conditions aux limites

On suppose que le côté AB du triangle T est sur la frontière et que les 2 autres côtés AC et BC sont internes. Nous allons modifier u_0 en A et B de telle façon que le flux discret $(r\vec{J})_T^1$ puisse toujours s'exprimer comme dans (4.32).

On a pour ce triangle :

$$\sum_i \frac{1}{3\sigma_T} \left\{ \sum_b \vec{n}_b \int_b u_{b,0} \lambda_i r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_i) u_{T,0} r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_i dr dz \right\} + S_T (r\vec{J})_T^1 = \vec{0},$$

ou, en supposant que σ_T est constante dans la maille :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_A r ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_A r ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_A dr dz \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} \vec{n}_{AB} \int_A^B u_0 \lambda_B r ds + \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} 3\omega_m \vec{\Omega}_m \vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \int_A^B g_0^m \lambda_B r ds \right. \\ & \quad \left. + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_B dr dz \right) \\ & + \left(\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_C dr dz \right) \\ & \quad + S_T (r\vec{J})_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

On remplace u_0 sur AB par sa valeur $4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g_0^m$.

En posant : $\vec{\Omega}_m = (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}) \vec{n}_{AB} + (\vec{\Omega}_m \cdot \vec{t}_{AB}) \vec{t}_{AB}$ où \vec{t}_{AB} est le vecteur tangent à la surface, $u_{lim} = \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m (2(|\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| + 3(\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB})^2) g_0^m$, en supposant que g_0 possède la symétrie azimutale autour de \vec{n}_{AB} , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_A r ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_A r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_A) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_A dr dz \right) \\ & + \left(\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} \lambda_B r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_B r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_B) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_B dr dz \right) \\ & + \left(\vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 \lambda_C r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 \lambda_C r ds - \int_T (\vec{\nabla} \lambda_C) u_0 r dr dz - \vec{r} \int_T u_0 \lambda_C dr dz \right) \\ & \quad + S_T (r\vec{J})_T^1 3\sigma_T = \vec{0}. \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$(r\vec{J})_T^1 = -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} \int_A^B u_{lim} r ds + \vec{n}_{AC} \int_A^C u_0 r ds + \vec{n}_{BC} \int_B^C u_0 r ds - \vec{r} \int_T u_0 dr dz),$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (r\vec{J})_T^1 = & -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_B}{3}) + u_{B,lim}(\frac{r_A+2r_B}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,0}(\frac{2r_A+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_A+2r_C}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,0}(\frac{2r_B+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_B+2r_C}{3})}{2} - \vec{r} \frac{S_T}{3} (u_{A,0} + u_{B,0} + u_{C,0})), \end{aligned}$$

Or, nous aimerions avoir :

$$\begin{aligned} (r\vec{J})_T^1 = & -\frac{1}{S_T 3\sigma_T} (\vec{n}_{AB} AB \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_B}{3}) + u_{B,lim}(\frac{r_A+2r_B}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{AC} AC \frac{u_{A,lim}(\frac{2r_A+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_A+2r_C}{3})}{2} \\ & + \vec{n}_{BC} BC \frac{u_{B,lim}(\frac{2r_B+r_C}{3}) + u_{C,0}(\frac{r_B+2r_C}{3})}{2} - \vec{r} \frac{S_T}{3} (u_{A,lim} + u_{B,lim} + u_{C,0})) \\ = & -\frac{1}{3\sigma_T} (\frac{r_A + r_B + r_C}{3}) (u_{A,lim} \vec{\nabla} \lambda_A + u_{B,lim} \vec{\nabla} \lambda_B + u_{C,0} \vec{\nabla} \lambda_C). \end{aligned}$$

On ne peut pas exprimer le vecteur flux discret $(r\vec{J})_T^1$ comme le gradient d'une fonction affine prenant les valeurs u_0 en C et u_{lim} en A et B , qui serait la bonne condition aux limites, car cela signifierait que la condition aux limites pour u_0 associée à l'équation de diffusion est la condition de Dirichlet : $u = u_{lim}$ sur AB . On ne peut donc dire que le schéma satisfait la bonne condition aux limites quand le flux incident est anisotrope.

Quand le flux incident est isotrope, le schéma satisfait une équation de diffusion avec la "bonne" condition de Dirichlet sur le bord :

$$u = 4 \sum_{\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB} \leq 0} \omega_m |\vec{\Omega}_m \cdot \vec{n}_{AB}| g(\vec{\Omega}_m, 0).$$

Remarque :

A la différence du cas plan, on ne peut trouver la "bonne" condition aux limites quand la frontière est composée de rectangles identiques et que la condition est uniforme en espace et que σ_T ne dépend pas de T . Nous allons en donner la raison. On se place dans la même configuration qu'en plan (Fig 4.2).

Dans ce cas particulier, dans l'équation du flux relative au noeud C , la condition aux limites intervient dans le terme suivant : $(\vec{J}_{ACE}^1 \cdot \vec{n}_{KL} |KL| + \vec{J}_{ABC}^1 \cdot \vec{n}_{LM} |LM|)$. u_B n'est pas présent dans ce terme. Seul intervient le terme :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sigma} \frac{r_A + r_C + r_E}{3} (u_0) \vec{\nabla} \lambda_{A,ACE} \cdot \vec{n}_{KL} |KL| \\
& -\frac{1}{3\sigma} \left(\frac{r_A + r_B}{2} (2 * u_{lim} - 2u_0) + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} u_0 \right) \vec{\nabla} \lambda_{A,ABC} \cdot \vec{n}_{LM} |LM| \\
= & -\frac{1}{3\sigma} \left(\frac{r_A + r_C + r_E}{3} (u_0) + \frac{r_A + r_B}{2} (2 * u_{lim} - 2u_0) + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} u_0 \right) \cot \beta \\
& = -\frac{1}{3\sigma} \left(\frac{2r_C + r_E - r_A - 2r_B}{3} u_0 + (r_A + r_B) u_{lim} \right) \cot \beta \\
& \neq -\frac{1}{3\sigma} \left(\frac{r_A + r_C + r_E}{3} + \frac{r_A + r_B + r_C}{3} \right) u_{lim} \cot \beta
\end{aligned}$$

Donc, on n'obtient pas le même terme que celui obtenu en imposant la valeur de u en A à u_{lim} dans l'expression de \vec{J}_{ABC}^1 et \vec{J}_{ACE}^1 . Cependant, l'erreur que l'on commet reste petite, de l'ordre de $o(h)$ où h est la taille des rectangles et d'autant plus petite que le rayon de giration est grand. L'erreur est donc petite par rapport à celle qu'on commettrait en prenant comme condition de Dirichlet u_0 au lieu de u_{lim} .

4.4.3 Résumé

Sous des hypothèses sur la quadrature angulaire, le schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés en géométrie 2D cylindrique, a bien la limite diffusion. En général, quand le flux incident est anisotrope, contrairement au cas 1D, le schéma ne satisfait pas la bonne condition aux limites. Cependant, sous certaines hypothèses sur le maillage sur la frontière et la condition aux limites, on peut démontrer que la condition aux limites approche celle obtenue en 1D, ce qui autorise des maillages grossiers vis à vis du libre-parcours même en présence d'une couche limite.

Chapitre 5

Synthèse

Nous avons vu que le schéma SIMC linéaire et le schéma aux EF linéaires discontinus lumpés conduisent à la même limite diffusion, soit un schéma aux éléments finis linéaires continus. Pour approfondir les points communs entre ces deux méthodes, nous allons étudier les limites asymptotiques des schémas aux EFD en se plaçant dans le même cadre que dans le chapitre 2.

Nous approchons (2.1) avec la même méthode que dans la section 2.2 sauf que la résolution de (2.8) n'est plus faite exactement comme dans la méthode SIMC mais par la méthode des EFD. Bien sûr, ce n'est pas la meilleure façon de résoudre (2.1) car il faudrait alors résoudre un système linéaire d'ordre N pour chacune des N mailles mais c'est un moyen commode d'analyser cette méthode. Ce qui va donc être modifié est l'expression des coefficients $a_{i,i'}^{l,l'} = \langle \sigma_t \tilde{u}_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle$. Nous allons nous intéresser à la limite diffusion de ces coefficients en suivant le même cheminement que dans la section 2.3.

5.1 Limite diffusion des Eléments finis Discontinus constants

Proposition 7 \tilde{u}^ϵ est solution du système linéaire (2.13) où $u^\epsilon = \sum_i u_i^\epsilon \chi_i$.

Nous déduisons immédiatement de ce résultat que la méthode aux EFD constants n'a pas la limite diffusion car (2.13) n'est pas une discrétisation correcte de l'équation de diffusion (1.4) (avec des conditions aux limites de flux entrant nul).

Preuve 8 En utilisant la mise à l'échelle (1.2), le système linéaire (2.10) devient (2.14) avec

$$\begin{aligned} b_{i,i'}^\epsilon &= \frac{\langle \sigma_t \chi_i, \chi_{i'} \rangle}{\epsilon} = \delta_i^{i'} \frac{\sigma_t}{\epsilon} V_i, \\ a_{i,i'}^\epsilon &= \frac{\langle \sigma_t \tilde{u}_i^\epsilon, \chi_{i'} \rangle}{\epsilon} \end{aligned}$$

et u_i^ϵ est la solution approchée (alors que dans la méthode SIMC elle est exacte) de (2.15) par les EFD constants.

Nous intégrons cette équation en $\vec{\Omega}$ et faisons le produit scalaire avec $\chi_{i'}$ pour obtenir (2.16).

Nous allons considérer quatre cas différents

1/ $T_i = T_{i'}$.

Nous avons $u_i^\epsilon = \frac{\frac{\sigma_t}{\epsilon} V_i}{\frac{\sigma_t}{\epsilon} V_i + \int_{\Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})}$ ou encore en notant

$$l_i(\vec{\Omega}) = \frac{V_i}{\int_{\Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n})}, \quad u_i^\epsilon = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})}} = 1 - \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})} + O(\epsilon^2).$$

En utilisant (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^\epsilon, \chi_i \rangle &= \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i, \chi_i \rangle - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \left(1 - \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})}\right) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i, \chi_i \rangle - \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + CT_i(\epsilon) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$$\text{avec } CT_i(\epsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\Omega(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})}.$$

Tout se passe comme si on avait remplacé dans la méthode SIMC constante, le terme $e^{-\frac{\sigma_t}{\epsilon} l_i(x, \vec{\Omega})}$ par $\frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})}$. La conséquence en est que ce terme reste d'ordre ϵ alors que dans la méthode SIMC, c'était un terme de coin d'ordre $e^{-\frac{1}{\epsilon}}$ en 1D et d'ordre ϵ en 2D et 3D.

Nous obtenons finalement (2.19).

2/ $i \neq i'$ et les mailles T_i and $T_{i'}$ ont un côté commun $\Gamma_i^{i'}$. Nous supposons dans la suite, pour simplifier les démonstrations, que le maillage possède les deux propriétés suivantes :

- H1

Soient deux triangles quelconques ABC et ACD adjacents par le côté AC , alors on a forcément : $B \in \mathcal{R}(A, CD) \cap \mathcal{R}(C, AD)$ et $D \in \mathcal{R}(A, BC) \cap \mathcal{R}(C, BA)$ où $\mathcal{R}(C, AD)$ désigne le demi-plan contenant C et délimité par la droite passant par A et D . Cette hypothèse oblige les faces AB et AD ainsi que BC et CD à se voir à travers la face commune AC .

Grâce à cette hypothèse si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC}$ est négatif (\vec{n}_{AC} est le vecteur unitaire de la normale extérieure à AC par rapport au triangle ACD), on ne peut avoir à la fois $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AB} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD} < 0$, de même que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{BC} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD} < 0$.

- H2

Un sommet interne appartient à au moins 5 triangles.

Notons T_i le triangle ABC et $T_{i'}$ le triangle ACD . On a alors $u_i^\epsilon(x, \vec{\Omega}) = 0$ pour $x \in T_{i'}$ si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} > 0$ sur AC (\vec{n}_{AC} est le vecteur unitaire de la normale extérieure à AC par rapport au triangle ACD). On peut donc considérer seulement le cas où $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC} < 0$. Comme le maillage satisfait

l'hypothèse H1, nous avons $u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = 0$ pour $x \in AD$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD} < 0$ ainsi que $u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = 0$ pour $x \in CD$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD} < 0$. Par conséquent,

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = -u_i^\varepsilon \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC})AC}{\frac{\sigma_t}{\varepsilon} V_{i'} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD})CD + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD})AD}$$

si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD} > 0$ ou

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = -u_i^\varepsilon \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC})AC}{\frac{\sigma_t}{\varepsilon} V_{i'} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD})CD}$$

si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD} < 0$ ou

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = -u_i^\varepsilon \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC})AC}{\frac{\sigma_t}{\varepsilon} V_{i'} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD})AD}$$

si $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AD} > 0$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{CD} < 0$.

Donc comme $u_i^\varepsilon = 1 - \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})} + O(\epsilon^2)$, on a :

$$u_i^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = \frac{\epsilon}{\sigma_t l_{i'}(\vec{\Omega})} \text{ pour } x \in T_{i'} \text{ avec } l_{i'}(\vec{\Omega}) = -\frac{V_{i'}}{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_{AC})AC} \text{ et par conséquent :}$$

$$\frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^\varepsilon, \chi_{i'} \rangle = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma + CT_{i,i'}(\epsilon) + O(\epsilon^2) \quad (5.1)$$

avec

$$CT_{i,i'}(\epsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_{i'}} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\epsilon}{\sigma_t l_{i'}(\vec{\Omega})}.$$

Nous obtenons finalement (2.24).

3/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ n'ont pas de sommet commun.

Il est facile de voir que $a_{i,i'}^\varepsilon$ est d'ordre ϵ^n avec $n > 1$ si bien qu'à l'ordre ϵ , nous pouvons négliger ces contributions dans le système linéaire.

4/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun mais pas d'arête commune. Par exemple, supposons que les mailles T_i , T_j , $T_{i'}$ et $T_{i''}$ aient un sommet en commun et soient adjacents (T_i avec T_j , T_j avec T_i et $T_{i'}$, $T_{i'}$ avec T_j et $T_{i''}$). nous avons : $u_i^\varepsilon(x) = \frac{\epsilon}{\sigma_t l_j(\vec{\Omega})} + O(\epsilon^2)$

pour $x \in T_j$ et d'autre part, à cause de l'hypothèse H2 satisfaite par le maillage, $T_{i'}$ et $T_{i''}$ sont séparés de T_i par au moins 1 triangle si bien que $u_i^\varepsilon(x) = O(\epsilon^2)$ pour $x \in T_{i'}$ et $u_i^\varepsilon(x) = O(\epsilon^n)$ avec $n > 1$ pour $x \in T_{i''}$, donc :

$$a_{i,i'}^\varepsilon = -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} \int_{\Gamma_{i'}^j} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\epsilon}{\sigma_t l_j(\vec{\Omega})} + O(\epsilon^2).$$

Nous obtenons finalement (2.25).

Dans les autres cas où T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun et pas d'arête commune mais sont séparés par plus d'une maille, le terme $a_{i,i'}^\epsilon$ est d'ordre $O(\epsilon^n)$ avec $n > 1$, ce qui constitue une différence par rapport à la méthode SIMC où les termes de coin d'ordre ϵ relient toutes les mailles ayant un sommet en commun.

Le système linéaire (2.10) peut finalement être réécrit comme

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma + \epsilon \sigma_a V_i + CT_i(\epsilon) \right) \phi_i^\epsilon \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i', \text{arêtes communes avec } i} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \phi_{i'}^\epsilon \\ & + \sum_{i'', \text{sommets communs avec } i} CT_{i'',i}(\epsilon) \phi_{i''}^\epsilon + O(\epsilon^2) = \epsilon \langle Q, \chi_i \rangle, \end{aligned}$$

et la suite de la preuve se déroule comme dans le cas de la méthode SIMC constante.

5.2 Limite diffusion des Eléments Finis Linéaires Discontinus Lumpés

Proposition 8 u^ϵ est solution du système linéaire

$$\sigma_a \sum_{j'} \langle \xi_j, \xi_{j'} \rangle u_{j'}^\epsilon + \frac{1}{3\sigma_t} \sum_{j'} \langle \vec{\nabla} \xi_j \cdot \vec{\nabla} \xi_{j'} \rangle u_{j'}^\epsilon = \langle Q, \xi_j \rangle + O(\epsilon), \quad (5.2)$$

où $u^\epsilon = \sum_j u_j^\epsilon \xi_j$, et ξ_j est la fonction linéaire qui vaut 1 au sommet γ_j et 0 aux autres sommets.

Pour démontrer cette proposition, nous suivons la même démarche que pour la méthode SIMC linéaire, ce qui nous permettra de voir les points communs et les différences entre ces deux méthodes.

Preuve 9 En utilisant la mise à l'échelle (1.2), le système linéaire (2.10) devient (2.28) et $u_i^{\epsilon,l}$ est la solution approchée au sens des EFLDL de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_i^{\epsilon,l} + \frac{\sigma_t}{\epsilon} u_i^{\epsilon,l} = \frac{\sigma_t}{\epsilon} \chi_i^l, \\ u_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases}$$

donc :

$$\frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_{i'}^l \rangle = \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i^l, \chi_{i'}^l \rangle + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle u_i^{\epsilon,l}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l \rangle - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_i^{\epsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^l(\gamma). \quad (5.3)$$

Nous remplaçons maintenant $u_i^{\epsilon,l}$ par son expression. Comme dans le cas précédent, nous considérons quatre cas différents :

1/ $T_i = T_i$. Pour $x \in T_i$, nous avons :

$$u_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x) - v_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) - \frac{\epsilon}{\sigma_t}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) + O(\epsilon^2) \quad (5.4)$$

où $v_i^{\epsilon,l}$ est la solution approchée au sens des EFLDL de l'équation de transport (2.31), soit :

$$v_i^{\epsilon,l} = -\frac{3\epsilon}{\sigma_t V_i} \sum_{l'} \left(\int_{\Gamma_i^-} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \chi_i^{l'} \right) \chi_i^{l'} + O(\epsilon^2) = \frac{\epsilon}{\sigma_t} f_i^l(x, \vec{\Omega}) + O(\epsilon^2), \quad (5.5)$$

où $f_i^l(x, \vec{\Omega}) = -\frac{3}{V_i} \sum_{l'} \left(\int_{\Gamma_i^-} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \chi_i^{l'} \right) \chi_i^{l'}(x)$ est une fonction linéaire qui a la dimension de l'inverse d'une longueur.

$u_i^{\epsilon,l}$ vérifie :

$$\left\langle \frac{\sigma_t}{\epsilon} u_i^{\epsilon,l}, \chi_i^{l'} \right\rangle - \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}, u_i^{\epsilon,l} \rangle + \int_{\Gamma_i^+} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) u_i^{\epsilon,l} \chi_i^{l'} = \left\langle \frac{\sigma_t}{\epsilon} \chi_i^l, \chi_i^{l'} \right\rangle \quad (5.6)$$

posons $w^\epsilon = u_i^{\epsilon,l} - \chi_i^l + \frac{\epsilon}{\sigma_t}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)$

En remplaçant $u_i^{\epsilon,l}$ par $w^\epsilon + \chi_i^l - \frac{\epsilon}{\sigma_t}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)$ dans (5.6), nous trouvons :

$$\left\langle \frac{\sigma_t}{\epsilon} w^\epsilon, \chi_i^{l'} \right\rangle - \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}, w^\epsilon \rangle + \int_{\Gamma_i^+} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) w^\epsilon \chi_i^{l'} = \int_{\Gamma_i^-} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \left(\chi_i^l - \frac{\epsilon}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l \right) \chi_i^{l'}$$

Donc w^ϵ vérifie au sens des EFLDL :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w^\epsilon + \frac{\sigma_t}{\epsilon} w^\epsilon = 0, \\ w^\epsilon(x, \vec{\Omega}) = -\chi_i^l(x, \vec{\Omega}) + \frac{\epsilon}{\sigma_t} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l, \quad x \in \Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0, \end{cases}$$

donc $w^\epsilon = -v_i^{\epsilon,l} + O(\epsilon^2)$ avec $v_i^{\epsilon,l}$ vérifiant au sens des EFLDL :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v_i^{\epsilon,l} + \frac{\sigma_t}{\epsilon} v_i^{\epsilon,l} = 0, \\ v_i^{\epsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x, \vec{\Omega}), \quad x \in \Gamma_i, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases}$$

Donc $v_i^{\epsilon,l} = \sum_{l'} v_i^{\epsilon,l}(l') \chi_i^{l'}$ est solution du système linéaire :

$$\left(\frac{\sigma_t V_i}{\epsilon} \text{Id} + K_i \right) \begin{pmatrix} v_i^{\epsilon,l}(1) \\ v_i^{\epsilon,l}(2) \\ v_i^{\epsilon,l}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i(1) \\ b_i(2) \\ b_i(3) \end{pmatrix}$$

avec

$$b_i(l') = - \int_{\Gamma_i^-} d\gamma(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l \chi_i^{l'}$$

et l'élément général de la matrice $K_i(3,3)$ donné par :

$$K_i(l', l'') = \int_{\Gamma_i^+} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^{l'} \chi_i^{l''} - \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}, \chi_i^{l''} \rangle,$$

donc
$$\begin{pmatrix} v_i^{\epsilon, l}(1) \\ v_i^{\epsilon, l}(2) \\ v_i^{\epsilon, l}(3) \end{pmatrix} = \frac{3\epsilon}{\sigma_t V_i} \begin{pmatrix} b_i(1) \\ b_i(2) \\ b_i(3) \end{pmatrix} + O(\epsilon^2)$$
 ce qui prouve le résultat (5.5).

Remarque 4 :

Avec les EFD constants, nous avons obtenu :

$$u_i^\epsilon(x, \vec{\Omega}) = 1 - \frac{\epsilon}{\sigma_t l_i(\vec{\Omega})} + O(\epsilon^2), \quad (5.7)$$

avec les EFLDL, nous obtenons :

$$u_i^{\epsilon, l}(x, \vec{\Omega}) = \chi_i^l(x) - \frac{\epsilon}{\sigma_t} f_i^l(\vec{\Omega}) - \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) + O(\epsilon^2). \quad (5.8)$$

C'est le terme additionnel $\frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)$ qui permet d'obtenir la limite diffusion.

En remplaçant $u_i^{\epsilon, l}$ par son expression dans (5.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \bar{u}_i^{\epsilon, l}, \chi_i^{l'} \rangle &= \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle \chi_i^l, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} \rangle \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle v_i^{\epsilon, l}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} \rangle \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \langle \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l), \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} \rangle \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\epsilon, l}(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_i^{l'}(\gamma) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nous allons développer tous les termes du membre de droite de (5.9) par rapport à ϵ jusqu'à l'ordre 1 en ϵ . Nous noterons I_1, \dots, I_7 les sept termes apparaissant dans le membre de droite de (5.9). Nous avons

$$\int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} = 0 \implies I_2 = 0.$$

Comme $\vec{\nabla} \chi_i^{l'}$ est un vecteur constant, l'intégrale I_3 peut être réécrite comme

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_2} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} \langle v_i^{\varepsilon,l}, \chi_i \rangle.$$

En intégrant (2.31) sur la maille T_i , nous obtenons

$$\langle v_i^{\varepsilon,l}, \chi_i \rangle = -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v_i^{\varepsilon,l} \rangle = -\frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}).$$

Donc

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}), \end{aligned}$$

ce qui donne, puisque $v_i^{\varepsilon,l}$ est d'ordre ε

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'}) \chi_i^l(\gamma) d\gamma + O(\varepsilon^2).$$

Nous avons :

$$I_4 = -\frac{\varepsilon}{3\sigma_t} \vec{\nabla} \chi_i^l \cdot \vec{\nabla} \chi_i^{l'} V_i,$$

$$I_5 = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma),$$

$$I_6 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^{l'}(\gamma) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}),$$

$$I_7 = \frac{\varepsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i} d\gamma (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_i^{l'}(\gamma).$$

Le terme I_6 d'ordre ε remplace le terme de coin que nous avons obtenu avec la méthode linéaire SIMC, tous les autres termes sont identiques, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} m_{i,i}^{\varepsilon,l,l'} &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_i^{l'}(\gamma) + \varepsilon \sigma_a \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^{l'}(\gamma) v_i^{\varepsilon,l}(\gamma, \vec{\Omega}) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{5.10}$$

2/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont une arête commune $\Gamma_i^{i'}$. Pour $x \in T_{i'}$, nous avons

$$u_i^{\varepsilon,l}(x, \vec{\Omega}) = T_{i,i'}(\vec{\Omega}) u_{i'}^{\varepsilon,l}(\vec{\Omega}) \tag{5.11}$$

où $T_{i,i'}(\vec{\Omega})$ est l'opérateur qui appliqué à une fonction linéaire g sur l'arête $\Gamma_i^{i'}$ associe la solution w^ε au sens des EFLDL de l'équation :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} w^\varepsilon + \frac{\sigma_t}{\varepsilon} w^\varepsilon = 0, \\ w^\varepsilon(x, \vec{\Omega}) = g, \quad x \in \Gamma_i^{i'}, \quad \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

et $u_i^{\epsilon,l}(\vec{\Omega})$ est la restriction de $u_i^{\epsilon,l}$ sur $\Gamma_i^{i'}$.

En insérant cette expression dans (5.3), nous obtenons, puisque $\langle \chi_i^l, \chi_{i'}^l \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_{i'}^l \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'} d\vec{\Omega} \langle T_{i,i'}(\vec{\Omega}) u_i^{\epsilon,l}(\vec{\Omega}), \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{S'} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) T_{i,i'}(\vec{\Omega}) u_i^{\epsilon,l}(\vec{\Omega}) \chi_{i'}^l(\gamma). \end{aligned} \quad (5.13)$$

En remplaçant dans l'expression précédente $T_{i,i'}(\vec{\Omega}) u_i^{\epsilon,l}(\vec{\Omega})$ par $T_{i,i'}(\vec{\Omega})(\chi_i^l(x) - \frac{\epsilon}{\sigma_t} f_i^l(x, \vec{\Omega}) - \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l))$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_{i'}^l \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_{S'} d\vec{\Omega} \langle T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S'} d\vec{\Omega} \langle T_{i,i'}(\vec{\Omega}) v^\epsilon, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S'} d\vec{\Omega} \langle T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l), \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{S'} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{S'} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) v^\epsilon) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma \int_{S'} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \frac{\epsilon}{\sigma_t} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l)) \chi_{i'}^l(\gamma). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ici S' est le sous-domaine de S_2 qui correspond aux directions venant de T_i , c'est à dire $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0$ sur $\Gamma_i^{i'}$ et $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ sur $\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}$, ceci car le maillage est supposé satisfaire l'hypothèse H1. Nous notons par I_1, \dots, I_6 les six intégrales apparaissant au second membre de (2.40). Nous développons maintenant ces termes par rapport à ϵ .

La première intégrale s'écrit :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \langle w^\epsilon, \chi_{i'}^l \rangle$$

où w^ϵ est solution au sens des EFLDL du système (5.12) avec $g = \chi_i^l$. En intégrant cette équation sur la maille $T_{i'}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) w^\epsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \\ &= -\frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \\ &\quad - \frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l). \end{aligned}$$

Le second terme est d'ordre ϵ^2 donc :

$$I_1 = -\frac{\epsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) \chi_i^l(\gamma).$$

La seconde intégrale s'écrit

$$I_2 = \frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v^\epsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \\ + \frac{\epsilon}{\sigma_t} \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^l) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) v^\epsilon).$$

Aussi, comme v^ϵ est d'ordre ϵ , $I_2 = O(\epsilon^2)$. De même $I_3 = O(\epsilon^2)$. Le quatrième terme est défini par

$$I_4 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma),$$

le second terme est un terme d'ordre ϵ qui correspond à un terme de coin dans la méthode SIMC.

La cinquième intégrale est définie par

$$I_5 = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v^\epsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) v^\epsilon) \chi_{i'}^l(\gamma).$$

Le premier terme est d'ordre ϵ car v^ϵ est d'ordre ϵ tandis que le second terme est d'ordre ϵ^2 car $T_{i,i'}(\vec{\Omega}) v^\epsilon$ est d'ordre ϵ^2 . Nous en déduisons que

$$I_5 = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v^\epsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^l(\gamma) + O(\epsilon^2).$$

Enfin, nous avons

$$I_6 = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma_t} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ + \frac{\epsilon}{4\pi\sigma_t} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma) \\ = \frac{\epsilon}{6\sigma_t} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^l(\gamma) d\gamma + O(\epsilon^2).$$

En rassemblant ces développements, l'équation (5.14) devient

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&+ \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(-\frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + \frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \right) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v^\epsilon(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

L'élément de la matrice est donc donné par

$$\begin{aligned}
m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'} &= -(1 - \epsilon^2 \frac{\sigma_a}{\sigma_t}) \frac{\sigma_t}{\epsilon} \langle \tilde{u}_i^{\epsilon,l}, \chi_{i'}^{l'} \rangle \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma \chi_i^l(\gamma) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&- \frac{\epsilon}{\sigma_t} \left(-\frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_{i'}^{l'}) \chi_i^l(\gamma) + \frac{1}{6} \int_{\Gamma_i^{i'}} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \right) \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} \int_{\Gamma_{i'} - \Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \int_{\Gamma_i^{i'}} d\gamma d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) v^\epsilon(\gamma, \vec{\Omega}) \chi_{i'}^{l'}(\gamma) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

3/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ n'ont pas de sommet commun.

Il est facile de voir que $m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'}$ est d'ordre ϵ^n avec $n > 1$ si bien qu'à l'ordre ϵ , nous pouvons négliger ces contributions dans le système linéaire.

4/ $i \neq i'$ et les mailles T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun mais pas d'arête commune. Par exemple, supposons qu'une maille T_j est adjacente à T_i et $T_{i'}$, alors comme le maillage satisfait l'hypothèse H2, nous avons

$$m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'} = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} \int_{\Gamma_j^{i'}} d\gamma (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) (T_{i,j}(\vec{\Omega}) \chi_i^l) \chi_{i'}^{l'}(\gamma).$$

qui est un terme d'ordre ϵ .

Dans les autres cas où T_i et $T_{i'}$ ont un sommet commun et pas d'arête commune mais sont séparés par plus d'une maille, $m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'}$ est d'ordre ϵ^n avec $n > 1$. Ceci constitue une différence par rapport à la méthode SIMC linéaire où les termes de coin d'ordre ϵ relient toutes les mailles ayant un sommet en commun.

La suite de la preuve se déroule ensuite de la même manière que pour la méthode SIMC linéaire.

Remarque 5 Les termes correspondant aux termes de coin s'annulent car la somme des contributions de ces termes dans $m_{i,i'}^{\epsilon,l,l'}$ pour i, l fixé est nulle.

Preuve 10 Prenons pour T_i le triangle ABC et comme sommet l le sommet A , alors le terme de coin d'ordre ε présent dans $m_{i,i}^{\varepsilon,l,l'}$ (5.10) est égal à :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^A v_i^{\varepsilon,l} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^A v_i^{\varepsilon,l} \text{ pour} \\ & l' \text{ correspondant au sommet } A \text{ que nous noterons } CT_i^{A,A}, \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^B v_i^{\varepsilon,l} - \frac{1}{4\pi} \int_B^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^B v_i^{\varepsilon,l} \text{ pour} \\ & l' \text{ correspondant au sommet } B \text{ que nous noterons } CT_i^{A,B}, \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^C v_i^{\varepsilon,l} - \frac{1}{4\pi} \int_B^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^C v_i^{\varepsilon,l} \text{ pour} \\ & l' \text{ correspondant au sommet } C \text{ que nous noterons } CT_i^{A,C}. \end{aligned}$$

Considérons le triangle $T_{i'}$, soit le triangle ACD , adjacent au triangle i par AC , alors dans les termes de coin présents dans $m_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'}$ (5.15) pour l' correspondant au sommet A , on trouve : $-\frac{1}{4\pi} \int_A^B d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^A v_i^{\varepsilon,l}$ égal à l'un des deux termes composant $-CT_i^{A,A}$

de même dans $m_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'}$ pour l' correspondant au sommet C , on trouve : $-\frac{1}{4\pi} \int_A^C d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \chi^C v_i^{\varepsilon,l}$ égal à l'un des deux termes composant $-CT_i^{A,C}$.

On trouve les termes correspondants aux 4 autres termes en considérant les triangles adjacents à BC et AB .

De la même façon on démontre que le terme de coin

$\frac{1}{4\pi} \int_A^D d\gamma \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) T_{i,i'}(\vec{\Omega}) \chi_i^A \chi_{i'}^A$ présent dans $m_{i,i'}^{\varepsilon,l,l'}$ pour l' correspondant au sommet A a son opposé dans le terme de coin $m_{i,i''}^{\varepsilon,l,l''}$ où le triangle i'' est le triangle adjacent à $T_{i'}$ par le côté AD et le sommet l'' correspond au sommet A dans le triangle $T_{i''}$.

Finalement, la somme des termes de coin s'annule à cause de la continuité de Φ .

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons analysé le comportement de la méthode Symbolique Implicite Monte-Carlo dans les milieux opaques. Nous avons introduit une extension de la méthode classique où la solution est linéaire dans chaque maille au lieu d'être constante.

Nous avons prouvé que la méthode linéaire SIMC possède la limite diffusion contrairement à la méthode constante. Le schéma de diffusion limite est la méthode des éléments finis linéaires continus. L'analyse a été faite pour la géométrie cartésienne en 1D et 2D.

L'analyse des conditions aux limites n'est pas complète. Dans le cas monodimensionnel, la condition aux limites asymptotique est une approximation très précise de la condition aux limites exacte. En 2D, ce résultat ne peut pas être prouvé. Cependant, nous avons montré que la condition aux limites est correcte quand l'intensité incidente est isotrope.

Bien que la méthode linéaire SIMC soit précise en milieu opaque, elle demande un très grand nombre de particules. Autrement, de larges fluctuations apparaissent. Cela est dû à la difficulté de calculer les coefficients de la matrice de diffusion par la méthode Monte-Carlo. En conséquence, le coût peut devenir prohibitif.

C'est pourquoi nous avons mis au point en 1D une amélioration de cette méthode qui consiste à calculer analytiquement les termes de la matrice dans les régions diffusives. Nous obtenons ainsi une méthode hybride diffusion Monte-Carlo. En 2D, le couplage entre la zone diffusion et la zone transport est plus délicat car des "termes de coin" apparaissent qu'on pourrait cependant échantillonner par une technique Monte-Carlo. Nous n'avons pas poursuivi cette voie mais choisi de discrétiser une forme non classique de l'équation du transport dite différentielle.

Le bruit numérique important de la méthode SIMC est dû au fait que la quantité que nous cherchons à calculer est la différence de deux grands nombres. Récemment, les auteurs de [13] ont introduit une nouvelle formulation de l'équation du transport dont l'inconnue est l'écart entre la solu-

tion de l'équation d'origine et celle obtenue à l'équilibre. Nous avons montré l'avantage, en matière de réduction de variance, obtenu en discrétisant cette équation avec la méthode SIMC linéaire plutôt que l'équation classique. La méthode SIMC linéaire devient ainsi "viable" en milieu diffusif. Par contre, en milieu transparent, lorsque les mailles sont optiquement minces, l'avantage revient à la méthode SIMC linéaire avec la formulation standard. Nous avons montré qu'il est cependant possible de coupler de manière très simple ces deux méthodes pour obtenir finalement une méthode ayant la limite diffusion avec un coût de calcul modéré.

En géométrie 2D plane, nous avons mis en évidence deux schémas qui ont la limite diffusion : le premier est un schéma aux éléments finis linéaires discontinus lumpés, le second en est une variante dans laquelle on "lumpe" également les termes de flux sur les arêtes. Le troisième schéma dit SCB proposé par M.Adams pour des maillages formés de polygones quelconques ne possède pas la limite diffusion sur les triangles mais uniquement sur des rectangles.

L'extension du premier schéma à la géométrie 2D cylindrique possède également la limite diffusion.

L'étude des conditions aux limites nous a conduit aux conclusions suivantes :

Les éléments finis linéaires discontinus lumpés possèdent en 1D la propriété remarquable de redonner, en milieu diffusif, une approximation précise de la condition aux limites exacte. En particulier, ce schéma autorise un maillage grossier même près des frontières où une couche limite existe lorsque l'intensité entrante est anisotrope. En 2D, les trois schémas étudiés ne redonnent pas, dans toutes les situations, une bonne approximation de la condition limite exacte quand l'intensité entrante est anisotrope mais seulement quand elle est isotrope. Cependant, sous certaines hypothèses sur la régularité du maillage et de la condition aux limites, on retrouve le résultat 1D. Le schéma SCB possède également cette propriété quand il est appliqué aux rectangles. Nous avons obtenu pour la solution asymptotique une condition aux limites de type Dirichlet. Pour obtenir la condition aux limites de Marshak de type Robin, il faudrait pousser le développement asymptotique à l'ordre suivant, ce qui permettrait comme il a été prouvé dans [36] d'obtenir en 1D, en faisant un choix particulier des directions discrètes, la condition aux limites de Marshak avec la bonne longueur d'extrapolation.

Aucun des schémas présentés n'est donc la panacée pour les problèmes de transport sur maillages déformés (avec forte anisotropie à la frontière d'un milieu diffusif) mais ils présentent un progrès certain par rapport aux méthodes couramment utilisées. Il reste à voir, comment adapter le maillage de telle façon que les conditions aux limites soient aussi précises qu'en 1D. Nous avons montré que lorsque le maillage, au niveau de la frontière ou de l'interface entre un milieu transparent et un milieu opaque, est composé de rectangles de forme identique, décomposés de la même façon en triangles,

nous traitons correctement les couches limites. Toute technique comme l’ALE permettant de régulariser le maillage aux interfaces ou à la frontière est donc bénéfique pour le traitement des couches limites.

Nous avons cherché à trouver pourquoi les solutions des schémas limites obtenus avec les méthodes SIMC constante et linéaire sont identiques (à l’ordre 0) à ceux obtenus avec les EFD constants et linéaires. Pour cela, nous avons analysé les EFD constants et linéaires de la même manière que les méthodes SIMC, ce qui revient à chercher la limite asymptotique en milieu diffusif de l’inverse de l’opérateur du transport discrétisé. Nous avons montré que les termes de coin sont différents entre les deux méthodes. Ils sont d’ordre $e^{-\frac{1}{\epsilon}}$ en 1D, d’ordre ϵ en 2D avec les méthodes SIMC et d’ordre ϵ en 1D, 2D avec les EFD. Cependant, comme ces termes disparaissent lorsqu’on somme ces termes par un même sommet, les schémas limites sont les mêmes.

L’intérêt de décrire ces schémas limites de façon précise n’est pas uniquement académique. En comprenant comment les schémas se comportent en milieu diffusif, cette démarche permet de sélectionner sur de solides bases théoriques les “bons” candidats et de mettre en oeuvre des schémas hybrides performants.

Annexe A

Problème de Milne

Soit c une constante $0 \leq c \leq 1$ et u l'unique solution dans $L^\infty([0, +\infty[\times [-1, +1])$ de :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + u = c\tilde{u}, \\ u(0, \mu) = g(\mu), \mu > 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Il s'agit de trouver $u(0, \mu)$ pour $\mu < 0$ en fonction de la donnée $g(\mu)$ pour $\mu > 0$. On cherche la fonction $S(\mu, \mu')$ telle que :

$$\mu u(0, \mu) = \int_0^1 S(\mu, \mu') g(\mu') d\mu'$$

pour $\mu < 0$.

On commence par remarquer que

$$\mu u(x_0, \mu) = \int_0^1 S(\mu, \mu') u(x_0, \mu') d\mu'$$

pour $\mu < 0$ et ceci pour tout $x_0 > 0$ car la fonction v définie par $v(x, \mu) = u(x + x_0, \mu)$ pour $x > 0$ est solution du problème de Milne :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + v = c\tilde{v}, \\ v(0, \mu) = u(x_0, \mu), \mu > 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En d'autres termes, l'opérateur de réflexion S est invariant par translation.

On pose $u^+(x, \mu) = u(x, \mu)$ pour $\mu > 0$ et $u^-(x, \mu) = u(x, -\mu)$ pour $\mu > 0$. On a alors :

$$\begin{cases} \mu u^-(x, \mu) = \int_0^1 S(\mu, \mu') u^+(x, \mu') d\mu', \\ \mu \frac{\partial u^+}{\partial x} + u^+ = \frac{c}{2} \int_0^1 (u^+ + u^-) d\mu', \\ -\mu \frac{\partial u^-}{\partial x} + u^- = \frac{c}{2} \int_0^1 (u^+ + u^-) d\mu', \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

ou encore :

$$\begin{cases} \mu u^-(x, \mu) = \int_0^1 S(\mu, \mu') u^+(x, \mu') d\mu', \\ \mu \frac{\partial u^+}{\partial x} + u^+ = \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+ + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 d\lambda S(\mu', \lambda) u^+(x, \lambda)), \\ -\mu \frac{\partial u^-}{\partial x} + u^- = \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+ + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 d\lambda S(\mu', \lambda) u^+(x, \lambda)). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

On dérive la première équation par rapport à x :

$$\mu \frac{\partial u^-}{\partial x}(x, \mu) = \int_0^1 S(\mu, \lambda) \frac{\partial u^+}{\partial x}(x, \lambda) d\lambda,$$

on remplace dans cette équation $\frac{\partial u^+}{\partial x}(x, \lambda)$ par sa valeur issue de la seconde équation de (A.4) ce qui donne :

$$\mu \frac{\partial u^-}{\partial x}(x, \mu) = \int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} \left\{ -u^+(x, \lambda) + \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 S(\mu', \nu) u^+(x, \nu) d\nu) \right\}.$$

En utilisant cette expression dans la troisième équation pour éliminer u^- :

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} \left\{ -u^+(x, \lambda) + \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 S(\mu', \nu) u^+(x, \nu) d\nu) \right\} \\ & + \frac{1}{\mu} \int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) u^+(x, \lambda) \\ & - \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 d\lambda S(\mu', \lambda) u^+(x, \lambda)) = 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\lambda u^+(x, \lambda) S(\mu, \lambda) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right) = \\ & \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 S(\mu', \nu) u^+(x, \nu) d\nu) \times \int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} \\ & + \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 d\nu S(\mu', \nu) u^+(x, \nu)) \\ & = \frac{c}{2} \int_0^1 d\mu' (u^+(x, \mu') + \frac{1}{\mu'} \int_0^1 S(\mu', \nu) u^+(x, \nu) d\nu) \times \left(\int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} + 1 \right) \\ & = \frac{c}{2} \int_0^1 d\lambda u^+(x, \lambda) \times \left(\int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} + 1 \right) \\ & + \frac{c}{2} \int_0^1 d\lambda u^+(x, \lambda) \left(\int_0^1 d\mu' \frac{1}{\mu'} S(\mu', \lambda) \right) \times \left(\int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} + 1 \right). \end{aligned}$$

Cette relation devant être vraie pour toute fonction u^+ , on a nécessairement :

$$S(\mu, \lambda) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{c}{2} \left(1 + \int_0^1 d\lambda S(\mu, \lambda) \frac{1}{\lambda} \right) \times \left(1 + \int_0^1 d\mu' \frac{1}{\mu'} S(\mu', \lambda) \right),$$

ou encore :

$$S(\mu, \mu') \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) = \frac{c}{2} \left(1 + \int_0^1 S(\mu, \lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \right) \times \left(1 + \int_0^1 S(\lambda, \mu') \frac{d\lambda}{\lambda} \right).$$

On remarque que le noyau S est symétrique :

$$S(\mu, \mu') = S(\mu', \mu).$$

On introduit la fonction de Chandrasekhar H :

$$H(\mu) = 1 + \int_0^1 S(\mu, \lambda) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

on a donc :

$$S(\mu, \mu') \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) = \frac{c}{2} H(\mu) H(\mu'),$$

et H vérifie l'équation intégrale non linéaire :

$$H(\mu) = 1 + \frac{c}{2} \mu H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{\mu + \mu'}.$$

Cette fonction qui dépend de c peut se calculer numériquement par un processus itératif.

Elle permet d'obtenir :

$$u(0, \mu) = \frac{c}{2} H(\mu) \int_0^1 \frac{H(\mu') \mu'}{\mu + \mu'} g(\mu') d\mu'$$

pour $\mu < 0$.

Annexe B

Propriétés de la méthode SIMC

B.1 Terme de collision anisotrope

Nous devons résoudre :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \int_{S_2} \sigma_s(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') u(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + Q(x, \vec{\Omega}), \quad (\text{B.1})$$

On peut décomposer $\sigma_s(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$ sur les polynomes de Legendre :

$$\sigma_s(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \sum_{n=0}^{n=H_1} \frac{2n+1}{4\pi} \sigma_s^n P_n(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \quad (\text{B.2})$$

où P_n est le polynome de Legendre d'ordre n avec

$$\sigma_s^n = 2\pi \int_{-1}^{+1} \sigma_s(\mu) P_n(\mu) d\mu.$$

or nous avons :

$$P_n(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \sum_{m=-n}^{m=n} \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nm}^*(\vec{\Omega}') Y_{nm}(\vec{\Omega}) \quad (\text{B.3})$$

où les Y_{nm} sont les harmoniques sphériques définies par

$$Y_{nm}(\vec{\Omega}) = Y_{nm}(\Theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{n-|m|}{n+|m|}} P_n^m(\cos(\Theta)) e^{im\phi}$$

et

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

qui constituent une base orthonormée des fonctions de $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}_2)$:

$$\int_{S_2} Y_{nm}^*(\vec{\Omega}) Y_{n'm'}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

En insérant B.3 dans B.2 puis B.2 dans B.1, on obtient :

$$\int_{\mathcal{S}_2} \sigma_s(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') u(x, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \sum_{n=0}^{n=H_1} \sum_{m=-n}^{m=n} \sigma_s^n \tilde{u}_{nm}(x) Y_{nm}(\vec{\Omega}),$$

avec

$$\tilde{u}_{nm} = \int_{\mathcal{S}_2} Y_{nm}^*(\vec{\Omega}) u(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

On peut également décomposer Q sur les harmoniques sphériques, soit :

$$Q(\vec{\Omega}) = \sum_{n=0}^{n=H_2} \sum_{m=-n}^{m=n} \tilde{Q}_{nm} Y_{nm}(\vec{\Omega}),$$

avec

$$\tilde{Q}_{nm} = \int_{\mathcal{S}_2} Y_{nm}^*(\vec{\Omega}) Q(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

En prenant $H = \max(H_1, H_2)$, on obtient finalement :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sum_{n=0}^{n=H} \sum_{m=-n}^{m=n} \sigma_s^n \tilde{u}_{nm}(x) Y_{nm}(\vec{\Omega}) + \sum_{n=0}^{n=H} \sum_{m=-n}^{m=n} \tilde{Q}_{nm}(x) Y_{nm}(\vec{\Omega}).$$

On introduit les inconnues auxiliaires Φ_{nm} vérifiant :

$$\sigma_t \Phi_{nm} = \sigma_s^n \tilde{u}_{nm} + \tilde{Q}_{nm},$$

on obtient ainsi un système d'équations équivalent à (B.1)

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sum_{n=0}^{n=H} \sum_{m=-n}^{m=n} \sigma_t \Phi_{nm} Y_{nm}(\vec{\Omega}), \\ -\sigma_s^n \tilde{u}_{nm} + \sigma_t \Phi_{nm} = \tilde{Q}_{nm}, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

On suppose ensuite que les Φ_{nm} s'expriment comme :

$$\Phi_{nm}(x) = \sum_{i,l} (\phi_{nm})_{i,l}^l \chi_i^l(x). \quad (\text{B.5})$$

Nous approchons alors (B.4) par le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u + \sigma_t u = \sum_{n=0}^{n=H} \sum_{m=-n}^{m=n} \sigma_t \Phi_{nm} Y_{nm}(\vec{\Omega}), \\ \langle -\sigma_s^n \tilde{u}_{nm} + \sigma_t \Phi_{nm} - \tilde{Q}_{nm}, \chi_{i'}^{l'} \rangle = 0, \forall i' \in (1, N), \forall l' \in (1, L), \\ \forall n \in (1, H), \forall m \in (-n, +n). \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

La solution u de (B.6) est :

$$u(x, \vec{\Omega}) = \sum_{i,l} \sum_{n=0}^{n=H} \sum_{m=-n}^{m=n} (\phi_{nm})_i^l (u_{nm})_i^l(x, \vec{\Omega}), \quad (\text{B.7})$$

où la fonction $(u_{nm})_i^l(x, \vec{\Omega})$ est solution de :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} (u_{nm})_i^l + \sigma_t (u_{nm})_i^l = \sigma_t \chi_i^l Y_{nm}(\vec{\Omega}), \\ (u_{nm})_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

On obtient finalement le système :

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} (u_{nm})_i^l + \sigma_t (u_{nm})_i^l = \sigma_t \chi_i^l Y_{nm}(\vec{\Omega}), \\ \sum_{i,l} b_{i,i'}^{l,l'} (\phi_{nm})_i^l - \sum_{i,l,m',n'} \frac{\sigma_s^n}{\sigma_t} (a_{n'm'})_{i,i'}^{l,l'} (\phi_{m'}^{n'})_i^l = \langle \tilde{Q}_{nm}, \chi_{i'}^{l'} \rangle, \forall i' \in (1, N), \forall l' \in (1, L), \\ \forall n \in (1, H), \forall m \in (-n, +n), \\ (u_{nm})_i^l(x, \vec{\Omega}) = 0, \quad x \in \Gamma, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

où nous avons noté $(a_{nm})_{i,i'}^{l,l'} = \langle \sigma_t (\tilde{u}_{nm})_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle$ et $b_{i,i'}^{l,l'} = \langle \sigma_t \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle$.

B.2 Probabilités de collision

Nous avons

$$\tilde{u}_i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sigma_t(i) \int_{V_i} d\vec{r}' \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2}$$

avec $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ et $\alpha(\vec{r}, \vec{r}') = \int_0^{|\vec{r}' - \vec{r}|} ds \sigma_t(\vec{r}' + \vec{\Omega}s)$ où s est l'abscisse curviligne de la demi-droite joignant \vec{r}' à \vec{r} ,

donc Φ_i vérifie :

$$\sigma_t(i') V_{i'} \phi_{i'} - \sum_i \frac{\sigma_s(i')}{\sigma_t(i')} a_{i,i'} \phi_i = Q_{i'} V_{i'}, \quad \forall i' \quad (\text{B.10})$$

avec $a_{i,i'} = \sigma_t(i') \sigma_t(i) \int_{V_{i'}} d\vec{r} \int_{V_i} d\vec{r}' \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2}$.

Notons $P_{i,i'}$ la probabilité de collision d'une particule dans la maille i' sachant qu'elle est née dans la maille i :

$$P_{i,i'} = \frac{\sigma_t(i') \int_{V_{i'}} d\vec{r} \int_{V_i} d\vec{r}' \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2}}{V_i},$$

donc $a_{i,i'} = \sigma_t(i) V_i P_{i,i'}$.

L'équation (B.10) se réécrit comme :

$$\sigma_t(i') V_{i'} \phi_{i'} - \frac{\sigma_s(i')}{\sigma_t(i')} \sum_i \sigma_t(i) V_i P_{i,i'} \phi_i = Q_{i'} V_{i'},$$

ou encore en utilisant la relation : $\tilde{u}_i = \frac{\sigma_t(i)\Phi_i - Q_i}{\sigma_s(i)}$ (par abus de notation $\tilde{u}_i = \langle \tilde{u}, \chi_i \rangle$) :

$$\sigma_t(i')V_{i'}\tilde{u}_{i'} = \sum_i V_i P_{i,i'}(\sigma_s(i)\tilde{u}_i + Q_i),$$

qui est l'équation des probabilités de collision.

B.3 Symétrie de la matrice SIMC et diagonale dominance

Le système SIMC s'écrit :

$$\sum_{i,l} (b_{i,i'}^{l,l'} - \frac{\sigma_s(i')}{\sigma_t(i')} a_{i,i'}^{l,l'}) \phi_i^l = \langle Q, \chi_{i'}^{l'} \rangle, \quad \forall i', \forall l'$$

ou encore :

$$\sum_{i,l} (\frac{\sigma_t(i')}{\sigma_s(i')} b_{i,i'}^{l,l'} - a_{i,i'}^{l,l'}) \phi_i^l = \frac{\sigma_t(i')}{\sigma_s(i')} \langle Q, \chi_{i'}^{l'} \rangle, \quad \forall i', \forall l'.$$

Or

$$b_{i,i'}^{l,l'} = \langle \sigma_t(i) \chi_i^l, \chi_{i'}^{l'} \rangle = \delta_{ii'} \sigma_t(i) \langle \chi_i^l, \chi_i^{l'} \rangle = b_{i',i}^{l',l},$$

donc

$$\frac{\sigma_t(i')}{\sigma_s(i')} b_{i,i'}^{l,l'} = \frac{\sigma_t(i)}{\sigma_s(i)} b_{i',i}^{l',l}.$$

On a

$$\tilde{u}_i^l(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sigma_t(i) \int_{V_i} \chi_i^l(\vec{r}') d\vec{r}' \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2},$$

donc

$$\begin{aligned} a_{i,i'}^{l,l'} &= \langle \sigma_t(i') \chi_{i'}^{l'}, \tilde{u}_i^l \rangle \\ &= \sigma_t(i') \sigma_t(i) \int_{V_{i'}} d\vec{r} \chi_{i'}^{l'}(\vec{r}) \int_{V_i} d\vec{r}' \chi_i^l(\vec{r}') \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2} \\ &= \langle \sigma_t(i) \chi_i^l, \tilde{u}_{i'}^{l'} \rangle \\ &= a_{i',i}^{l',l} \end{aligned}$$

Posons

$$m_{i,i'} = \frac{\sigma_t(i')}{\sigma_s(i')} b_{i,i'}^{l,l'} - a_{i,i'}^{l,l'}.$$

Dans le cas où les fonctions de base sont constantes, nous allons démontrer que la matrice d'élément général $m_{i,i'}$ est une M matrice symétrique à diagonale strictement dominante (par colonne), ce qui prouve que la matrice est symétrique définie positive.

En effet, l'élément général de la matrice s'écrit :

$$m_{i,i} = \sigma_t(i) \frac{\sigma_t(i)}{\sigma_s(i)} V(i) - \sigma_t(i) \sigma_t(i) \int_{V_i} d\vec{r}' \int_{V_i} d\vec{r} K(\vec{r}, \vec{r}'),$$

$$\text{avec } K(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')}}{4\pi|\vec{R}|^2}.$$

et pour $i \neq i'$ (attention i désigne le numéro de colonne tandis que i' désigne le numéro de ligne),

$$m_{i,i'} = -\sigma_t(i') \sigma_t(i) \int_{V_{i'}} d\vec{r}' \int_{V_i} d\vec{r} K(\vec{r}, \vec{r}').$$

Comme $a_{i,i'} = a_{i',i}$, la matrice m est symétrique (les éléments de la matrice étant estimés par une méthode Monte Carlo, cette propriété n'est vraie qu'à convergence du nombre de particules).

Or on a :

$$\sum_{i'} \sigma_t(i') \int_{V_{i'}} d\vec{r}' \int_{V_i} d\vec{r} K(\vec{r}, \vec{r}') < \int_{V_i} d\vec{r}' \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d\vec{\Omega} \int_0^\infty \sigma_t(\vec{r}' + s\vec{\Omega}) e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')} ds = V(i),$$

$$\text{car } \int_0^\infty \sigma_t(\vec{r}' + s\vec{\Omega}) e^{-\alpha(\vec{r}, \vec{r}')} ds = 1,$$

comme $\sigma_s(i) < \sigma_t(i)$, on a : $\sigma_t(i) \frac{\sigma_t(i)}{\sigma_s(i)} V(i) > \sigma_t(i) V(i)$, donc :

$$\sigma_t(i) \frac{\sigma_t(i)}{\sigma_s(i)} V(i) - \sigma_t(i) \int_{V_i} d\vec{r}' \int_{V_i} d\vec{r} K(\vec{r}, \vec{r}') > - \sum_{i \neq i'} m_{i,i'}.$$

On obtient finalement : $m_{i,i} > \sum_{i \neq i'} |m_{i,i'}|$, avec $m_{i,i'} < 0$ pour $i \neq i'$.

La matrice m est donc une M matrice symétrique à diagonale strictement dominante.

Cette propriété de M matrice à diagonale strictement dominante (par colonne) est vraie quel que soit le nombre de particules Monte-Carlo utilisé grâce à l'estimateur utilisé pour estimer la matrice a . Par contre, la propriété de symétrie n'étant vraie qu'à convergence du nombre de particules, c'est la limite de la matrice qui est définie positive.

Dans le cas où les fonctions de base sont linéaires, la matrice n'est plus une M matrice à diagonale strictement dominante. Mais on peut démontrer que la matrice reste définie positive.

Soit

$$\begin{aligned} \langle M\Phi, \Phi \rangle &= \int_D \frac{\sigma_t(\vec{r})}{\sigma_s(\vec{r})} \sigma_t(\vec{r}) \Phi^2(\vec{r}) d\vec{r} \\ &- \int_D \int_D K(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_t(\vec{r}) \sigma_t(\vec{r}') \Phi(\vec{r}) \Phi(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'. \end{aligned}$$

$$\text{avec } \Phi = \sum_{i,l} \phi_i^l \chi_i^l, \sigma_t = \sum_{i,l} \sigma_t(i) \chi_i^l \text{ et } \sigma_s = \sum_{i,l} \sigma_s(i) \chi_i^l.$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_D \int_D K(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_t(\vec{r}) \sigma_t(\vec{r}') \Phi(\vec{r}) \Phi(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \\ & < \left(\int_D \int_D \sigma_t(\vec{r}) \sigma_t(\vec{r}') K(\vec{r}, \vec{r}') \Phi^2(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D \int_D \sigma_t(\vec{r}') \sigma_t(\vec{r}) K(\vec{r}, \vec{r}') \Phi^2(\vec{r}) d\vec{r} d\vec{r}' \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc comme :

$$\int_D \sigma_t(\vec{r}) K(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r} = 1,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_D \int_D K(\vec{r}, \vec{r}') \sigma_t(\vec{r}) \sigma_t(\vec{r}') \Phi(\vec{r}) \Phi(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' \\ & < \int_D \sigma_t(\vec{r}) \Phi^2(\vec{r}) d\vec{r} \\ & < \int_D \frac{\sigma_t(\vec{r})}{\sigma_s(\vec{r})} \sigma_t(\vec{r}) \Phi^2(\vec{r}) d\vec{r}. \end{aligned}$$

Pour résoudre le système, nous avons utilisé dans nos cas tests une méthode de gradient conjugué préconditionnée par une itération de Gauss Seidel symétrique par blocs, dont les blocs sont constitués pour chaque maille i par la matrices 3×3 d'élément : $\frac{\sigma_t(i)}{\sigma_s(i)} b_{i,i}^{l,l'} - a_{i,i}^{l,l'}$ où les l et l' varient de 1 à 3. Cette méthode converge dans tous les cas que nous avons traités dès que le nombre de particules est suffisamment grand.

Bibliographie

- [1] M.L.Adams, “Discontinuous Finite Element Methods in Thick Diffusive Problems”, *Nuclear Science and Engineering*, **137**, 298 (2001) .
- [2] M.L.Adams, “Subcell balance methods”, *Trans Theory and Statistical Physics*, 385-431 (1997).
- [3] M.L.Adams, “Discontinuous Finite Element Transport Solutions in the Thick Diffusion Limit in Cartesian Geometry”,*Proc. International Topical Mtg on Advances in Mathematics, Computations and reactor Physics*, vol **5** ,p 21.1 3-1 Pittsburg (1991).
- [4] M.L.Adams, C.J Gesh, “Finite Element Solutions of Second-order Forms of the Transport Equation at the Interface Between Diffusive and Non-Diffusive Regions”,*Proc. M&C 2001 Salt Lake City, Utah, USA* (2001).
- [5] M.L.Adams, “Even and odd-parity finite element transport solutions in the thick diffusion limit”,*Proc. International Topical Mtg on Advances in Mathematics, Computations and reactor Physics*, Pittsburg (1991).
- [6] R.E.Alcouffe, “Diffusion Synthetic Acceleration Methods for the Diamond Differenced Discrete Ordinate Equations”, *Nucl.Sci.Eng.***64**, 344-355, (1977).
- [7] G.Bal et Y. Maday, “Coupling of Transport and Diffusion Models in Linear Transport Theory”, *Math. Modeling and Numer. Anal.*, **36**, pp 69-86 (2002).
- [8] C.Bardos, R.Santos, R.Sentis, “Sur le problème de Milne conservatif ”,*C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 297 (1983).
- [9] C.Bardos, R.Santos, R.Sentis, “Diffusion Approximation and Computation of the critical size”, *Trans. A.M.S.*,284,pp 617-649 (1984).
- [10] G.I.Bell and S.Glasstone, “Nuclear reactor Theory”, Van Nostrand Reinhold Ltd.,New York (1970).
- [11] E.Bonneaux, “Résolution de Problèmes de transport par Fermeture non linéaire des Equations de Moments”, Thèse (1997).
- [12] E.D.Brooks III, “Symbolic Implicit Monte Carlo”, *J. Comput. Phys*, **83**, 433 (1989).

- [13] E.D.Brooks III, M.S.McKinley, F.Daffin and A.Szoke, “Symbolic Implicit Monte Carlo Radiation Transport in the difference formulation : a piecewise constant discretization”, *J. Comput.Phys*, **205**, 737 (2005).
- [14] E.D.Brooks III, M.S.McKinley, A.Szoke, J D.L Peterson, “Piecewise Linear Discretization of Symbolic Implicit Monte Carlo Radiation Transport in the difference formulation”, *J. Comput.Phys*, **220**, 471 (2006).
- [15] C.Buet, S.Cordier, “Asymptotic Preserving Scheme for Radiative Hydrodynamics Model”, *C.R. Acad. Sc. Paris Série I*, 334, p 1-6 (2002).
- [16] C.Buet, B.Després, “Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics”, *JQSRT*, Volume 85, Issues 3-4, 385-418, (2004).
- [17] J.Bussac, P.Reuss, “Traité de neutronique”, Hermann, (1986).
- [18] B.G.Carlson, “Transport theory : discrete ordinates over the unit sphere”, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4554, (1970).
- [19] B.G.Carlson, K.D.Lathrop, “Transport theory : The method of discrete ordinates”, in *Computing Methods in Reactor Physics*, edited by H.Greenspan, C.N.Kelber and D.Okrent (Gordon & Breach, New York) 171 (1968).
- [20] J.Cartier, “Résolution de l’équation du transport par une méthode d’éléments finis mixtes hybrides et approximation par la diffusion de problèmes de transport”, Thèse (Avril 2006).
- [21] J.Cartier, G.Samba, “Mixed Hybrid Finite Element Method for the Transport equation”, *Nuclear Science and Engineering*, **154**, 28-47 (2006).
- [22] K.M Case and P.F.Zweifel, “Linear transport Theory”, Addison-Wesley Publishing Co.,Inc., Reading, Massachussets (1967).
- [23] S.Chandrasekhar, “Radiative transfer”, Dover, New York (1960).
- [24] J.F.Clouet, G.Samba, “Asymptotic Diffusion Limit of the Symbolic Implicit Monte Carlo method for the transport Equation”, *J. Comput.Phys*, **195**, 293 (2004).
- [25] J.F.Clouet, G.Samba, “A Hybrid Symbolic Monte Carlo method for radiative transfer equations”, *J. Comput.Phys*, **188**, 139 (2003).
- [26] R.Dautray, J.L.Lions, “Analyse mathématique et calcul numérique” Chap 21. Masson, Paris (1988).
- [27] P.Degond, S.Jin, “A Smooth Transition Model between Kinetic and Diffusion Equations”, *SIAM. J.Numer. Analysis*,v.42 n.6,p 2671-2687 (2004).
- [28] J.J.Duderstadt, W.R.Martin, “Transport Theory”, New York, Willey, (1979).

- [29] J.A.Fleck and E. H. Canfield, "A Random Walk Procedure for Improving the Computational Efficiency of the Implicit Monte Carlo Method for Nonlinear Radiation Transport", *J. Comput. Phys.*, **54**, 508 (1984).
- [30] N.A.Gentile, "Implicit Monte Carlo Diffusion. An Acceleration Method for Monte Carlo Time-dependent Radiative Transfer Simulations", *J. Comput. Phys.*, **172**, 543 (2001).
- [31] C.J.Gesh, "Finite Element Method for Second Order Forms of the Transport Equation", Ph.Thesis, Texas A&M University, (1999).
- [32] F.Golse, S.Jin, C.D.Levermore, "the Convergence of Numerical Transfer Schemes in Diffusive Regimes", 1. The Discrete Ordinate Method", *SIAM J.Num.Anal.*, **36** pp 1333-1369 (1999).
- [33] F.Golse, S.Jin, C.D.Levermore, "A Domain Decomposition Analysis for a Two-Scale Linear Transport Problem", *Math. Model Num. Anal.* **37** 869-892 (2003).
- [34] L.Gosse, G.Toscani, "An Asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat Equations", *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 334 (2002).
- [35] L.Gosse, G.Toscani, "Space Localization and well-balanced schemes for discrete kinetic models in diffusive regimes", *SIAM J on Scient and Stat. Comput.* **41** 641-658 (2003).
- [36] S.Jin, C.D Levermore, "Fully-Discrete Numerical Transfer in diffusive regimes", *Transport Theory and Statistical Physics*, **22**(6), 739-791 (1993).
- [37] T.N'Kaoua, "Solution of the Non linear Radiative transfer Equation by a Fully Implicit Monte-Carlo Method Coupled with the Rosseland Diffusion Equation Via Domain Decomposition", *SIAM J on Scient and Stat. Comput.* **12** (3) 505-520 (1991).
- [38] A.Kavenoky, M.Lam.Hime, Z.Stankovski, "Improvements of the Integral Transport Theory Method", *Nat. Top. Mtg. Computational Methods in Nuclear Engineering, Williamsburg, Virginia USA*, April 23-25 (1979).
- [39] E.W.Larsen, G.C.Pomraning and V.C.Badham, "Asymptotic Analysis of Radiative Transfer Problems", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **29**, 285 (1983).
- [40] E.W.Larsen, "The Asymptotic Diffusion Limit of Discretized Transport Problems", *Nuclear Science and Engineering*, **112**, 336-346 (1992).
- [41] E.W.Larsen, "On Numerical Solutions of Transport Problems in the Diffusion Limit", *Nuclear Science and Engineering*, **83**, 90 (1983).
- [42] E.W.Larsen and J.B.Keller, "Asymptotic Solution of Neutron Transport Problems for Small Mean Free Paths", *J.Math. Phys.*, **15**, 75 (1974).
- [43] E.W.Larsen, J.E.Morel and W.F.Miller Jr, "Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes", *J. Comput. Phys.*, **69**, 283 (1987).

- [44] E.W.Larsen and J.E.Morel, “Asymptotic Solutions of Numerical Transport Problems in Optically Thick, Diffusive Regimes,II”, *J. Comput.Phys*, **83**, 212 (1989).
- [45] K.D.Lathrop, “Ray effects in discrete ordinates equations”,*Nuclear Science and Engineering*, **32**, 357 (1968).
- [46] P.Lesaint, “Sur la Résolution des systèmes du Premier Ordre par des Méthodes d’éléments finis”, Thèse de Doctorat (1975).
- [47] C.D.Levermore, “Relating Eddington factors to flux limiters”, *JQSRT*, 26 (1984).
- [48] M.S.McKinley, E.D.Brooks III and A.Szoke, “Comparison of implicit and Symbolic Monte Carlo Line Transport with Frequency Weight Extension”, *J. Comput.Phys*, **189**, 330 (2003).
- [49] T.A. Manteuffel and R.J. Ressel, “Least-squares finite element solution of the neutron transport equation in diffusive regimes”,*SIAM J on Scient and Stat. Comput.* **35** 806-835 (1998).
- [50] J.E.Morel, T.Wareing, K.Smith, “A Linear Discontinuous Spatial Differencing Scheme for Sn Radiative Transfer Calculations”, *J. Comput.Phys* **128** , 445-462 (1996).
- [51] J.E.Morel, “Basic Krylov Methods with Application to Transport”, *Mathematics and Computation, Supercomputing, Reactor Physics and Nuclear and Biological Applications*, Palais des Papes, Avignon, Septembre 12-15 2005,American Nuclear Society.
- [52] J.E.Morel, “A Self-Adjoint Angular Flux Equation”, *Nuclear Science and Engineering*, **132**, 312-325 (1999).
- [53] G.C.Pomraning, “The Equations of Radiation Hydrodynamics”, Pergamon, Oxford (1973).
- [54] G.C.Pomraning, “Diffusive Limits for Linear Transport Equations”,*Nuclear Science and Engineering*, **112**, 239-255 (1992).
- [55] G.Samba, “Limite asymptotique d’un schéma d’éléments finis discontinus en régime de diffusion”, Rapport CEA-R-5960 (2001).
- [56] G.Samba, E.Varin, “Spherical Harmonics Finite Element Transport Equation Using a Least Square Approach”, *Nuclear Science and Engineering*, **151**, 167-183 (2005).
- [57] G.Samba, “Discontinuous Finite Element for Solving the two-dimensional Neutron Transport equation on Lagrangian Meshes”,*Nuclear Science and Engineering*, **92**, 197-203 (1986).
- [58] R.Sanchez, N.J.McCormick, “A Review of Neutron Transport approximations”,*Nuclear Science and Engineering*, **80**, 481-535 (1982).
- [59] R.Sentis, “Analyse Asymptotique d’Equations de transport”, Thèse (1981).

- [60] E.Varin, "Résolution de l'équation de Transport neutronique par une méthode de moindres carrés en Trois Dimensions", Thèse, Ecole Centrale des Arts et Manufactures (2001).
- [61] D.Verwaerde, "Résolution de l'Equation du transport par la méthode du Flux Pair", Rapport CEA-N-2352, (1983).