Nombres d'intersection arithmétiques et opérateurs de Hecke sur les courbes modulaires

Ricardo Menares

UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

presentée

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Specialité : Mathématiques

Par

Ricardo MENARES

NOMBRES D'INTERSECTION ARITHMÉTIQUES ET OPÉRATEURS DE HECKE SUR LES COURBES MODULAIRES $X_0(N)$

Soutenue le 8 septembre 2008 devant la comission d'examen :

M. BOST	Jean-Benoît	Examinateur
M. CHAMBERT-LOIR	Antoine	Rapporteur
M. KÜHN	Ulf	Rapporteur
M. RÖSSLER	Damian	Examinateur
M. ULLMO	Emmanuel	Directeur de thèse

del dicho al hecho hay mucho trecho

Remerciements/Agradecimientos

Je commence par un grand merci à Emmanuel Ullmo, qui a dirigé cette thèse. Il m'a non seulement proposé un très beau sujet, mais il a aussi fait preuve de patience et de disponibilité pour me guider dans ce domaine si complexe. Je remercie les membres du jury : Antoine Chambert-Loir et Ulf Kühn d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que Jean-Benoît Bost et Damian Rössler pour avoir eu la gentillesse de faire partie de ce jury.

Eduardo Friedman a été un soutien constant pendant plusieurs étapes de ma formation, ainsi qu'un exemple de mathématicien. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont aussi aux différents mathématiciens qui ont pris de leur temps pour discuter avec moi ; je pense en particulier à Karim Belabas, Rodolphe Richard et Amaury Thuillier. L'Institut de Mathématiques de Bordeaux m'a permis d'utiliser son infrastructure pendant plus d'un an, à l'époque où j'effectuais de fréquents allers et retours entre Paris et Bordeaux et où je commençais la rédaction de cette thèse. J'en profite également pour remercier cette institution.

Pierre Pansu, le directeur de l'école doctorale du labo, s'est ingénié à simplifier administrativement la vie des doctorants, et il a fait un travail formidable. Quant à Valérie Lavigne, la secrétaire de l'école doctorale, elle a été un soutien précieux pendant ces années. Pour sa gentillesse, sa sympathie et son efficacité je tiens à la remercier de tout coeur.

Je remercie chaleureusement les amis qui ont été à l'origine de beaux moments, grâce à la combinaison de leur amitié et de leur vision des mathématiques : José Aliste, Nicolas Billerey, Eduardo Cerpa, Fernando Cordero, Daniel Coronel, Antoine Gournay, Nicolás Libedinsky, Mario Ponce, Luis Rojas, Denis Trotabas. Et merci aux autres amis, qui n'ont pas un lien direct avec le monde mathématique, de m'avoir fait découvrir le côté drôle de ce pays étrange : Aulivier et Orélie, Cathy, Hervé, Jean-Marie, Katja, Senja.

Agradezco a mi familia por haber sido un soporte constante durante toda mi formación y por su tolerancia con mi elección de hacer una vida entre dos continentes.

Jeanne, ma femme, est mon rayon de soleil et aussi une source de stimulation intellectuelle. Je profite de cette occasion pour la remercier de tout le bonheur que l'on partage et dont j'ignorais qu'il puisse exister.

Enfin, j'ai bénéficié de 2003 à 2007 de la bourse *Master investigación y doctorado* du CONICYT (agence de recherche chilienne), j'en suis très reconnaissant.

Table des matières

1 Introduction

L'algèbre de Hecke joue un rôle central dans la théorie des formes modulaires. Classiquement, on en construit des représentations dans l'espace des endomorphismes d'un espace de formes modulaires. Du point de vue géométrique, les opérateurs de Hecke définissent des correspondances sur les courbes modulaires.

La théorie d'Arakelov fournit des invariants pour les courbes algébriques définies sur un corps de nombres. La courbe $X_0(N)$ admet un modèle projectif sur $\mathbb{Q}$, ce qui nous a conduit à étudier le comportement des invariants Arakéloviens sous l'action de l'algèbre de Hecke.

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des correspondances de Hecke sur les courbes modulaires $X_0(N)$. D'une part, nous étudions la relation entre l'algèbre de Hecke et la théorie d'Arakelov ; d'autre part, nous entreprenons un début d'étude de la dynamique de l'action des opérateurs de Hecke sur l'ensemble des courbes elliptiques supersingulières.

1.1 Opérateurs de Hecke et théorie d'Arakelov

Les courbes modulaires $X_0(N)$ admettent un modèle projectif défini sur $\mathbb{Q}$, que l'on note $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. Soit N un entier sans facteurs carrés. Pour un tel entier N, on note $\mathcal{X}_0(N)$ le modèle sur $\mathbb{Z}$ de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$ donné par l'interprétation modulaire étudiée par Deligne et Rapoport ([De-Ra]). Ainsi, $\mathcal{X}_0(N)$ peut être considéré comme une surface arithmétique et les correspondances de Hecke comme des endomorphismes du groupe de Chow $CH^1(\mathcal{X}_0(N))$.

Soit $\widehat{CH}^1_{GS}(\mathcal{X}_0(N))$ le groupe de Chow arithmétique défini par Gillet et Soulé ([Gi-So]). Ses éléments sont représentés par des diviseurs compactifiés (D, g) où g est une distribution réelle telle que

$$dd^c g + \delta_{D\otimes\mathbb{C}}$$

est une forme C^∞.[1]

Dans ce texte $X_0(N)$ désigne la surface de Riemann associée à $\mathcal{X}_0(N)(\mathbb{C})$. Cette surface, à un nombre fini de points près, est un quotient du demi-plan de Poincaré par un groupe de congruences (cf. section 2.1). Via cette uniformisation, g peut être considéré comme une fonction généralisée sur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } Im(z) > 0\}$. Soit l un nombre premier ne divisant pas N. On pose $v_l = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$T_l g(z) := \sum_{j=0}^{l} g(\alpha_j z), \quad z \in \mathbb{H}, \tag{1.1}$$

où $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$ est un système de représentants pour l'action à gauche de $\Gamma_0(N)$ sur $\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N)$.

Il se trouve que

1. Dans [Gi-So], g est appelé « courant de Green ». Dans ce texte nous adopterons la terminologie de [Bo], qui appelle g une « fonction de Green ».

$$dd^c(T_l g) + \delta_{(T_l D)\otimes\mathbb{C}}$$

n'est pas, en général, une forme C^∞ (cf. Remarque 4.5, 1 et Remarque 4.11 dans le texte), donc la formule (1.1) n'induit pas un endomorphisme de $\widehat{CH}^1_{GS}(\mathcal{X}_0(N))$. Ce manque de fonctorialité de la théorie d'Arakelov empêche d'envisager une représentation de l'algèbre de Hecke dans $\mathrm{End}\big(\widehat{CH}^1_{GS}(\mathcal{X}_0(N))\big)$.

Le demi-plan de Poincaré porte une (1,1) forme invariante sous l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$, à savoir

$$\mu(z) = \frac{dx \wedge dy}{y^2}, \quad z = x + iy.$$

Cette forme induit par passage au quotient une mesure de volume total fini sur $X_0(N)$. On note μ_N la (1,1) forme normalisée induite par μ sur $X_0(N)$. Dans ce travail, on considère un groupe de Chow arithmétique, noté $\widehat{CH}(N)$, obtenu à partir des diviseurs compactifiés (D, g) où g est une fonction de Green L_1^2 pour D, admissible par rapport à μ_N. Nous renvoyons à la définition 3.6 dans le texte pour une description précise de « fonction de Green L_1^2 admissible ». En particulier, g satisfait l'égalité de courants

$$dd^c g + \delta_{D\otimes\mathbb{C}} = \deg(D \otimes \mathbb{C})\mu_N.$$

De façon similaire à (1.1), on pose

$$T_l\mu_N(z) := \sum_{j=0}^{l} \mu_N(\alpha_j z).$$

Dû à l'invariance de μ_N sous $GL_2^+(\mathbb{R})$, on trouve

$$T_l\mu_N = (l + 1)\mu_N.$$

Cette propriété suggère de considérer la forme μ_N comme un choix compatible avec l'action des correspondances de Hecke, de façon à en obtenir une représentation dans $\mathrm{End}\big(\widehat{CH}(N)\big)$.

La forme μ_N présente des singularités aux pointes et aux points elliptiques. Ces singularités rendent divergente la formule d'intersection d'Arakelov. J.-B. Bost et U. Kühn ont, indépendamment, développé une théorie de l'intersection arithmétique adéquate pour des situations où la métrique choisie présente des singularités d'un certain type ([Bo], [Kü]). La théorie de Bost, plus générale, s'applique aux surfaces arithmétiques normales et permet d'utiliser des diviseurs compactifiés (D, g) où g peut avoir des singularités « de type L_1^2 »(cf. définition 3.6 dans le texte). La théorie de Kühn s'applique aux surfaces arithmétiques régulières et à des fibrés en droites munis des métriques singulières d'un type plus restrictif que L_1^2. Ces théories sont équivalentes dans le cas où $\mathcal{X}_0(N)$ est régulier et que l'on considère un groupe de Chow arithmétique admissible par rapport à μ_N. Nous obtenons

Théorème 1.1 *On suppose N sans facteurs carrés. Soit l un nombre premier ne divisant pas N.*

1. *La formule*
$$\hat{T}_l(D, g) := (T_l D, T_l g)$$
définit un endomorphisme de $\widehat{CH}(N)$.
2. *$\hat{T}_l$ est auto-adjoint par rapport à la forme d'intersection de Bost-Kühn.*

Soit $J_0(N)$ le modèle de Néron de la Jacobienne de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. Les opérateurs de Hecke agissent sur $J_0(N)$ ([R]). De plus, $J_0(N)$ est muni de l'accouplement de Néron-Tate. Nous définissons un plongement

$$i_\infty : J_0(N)(\mathbb{Q}) \longrightarrow \widehat{CH}(N).$$

Nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 1.2
1. *L'action de l'algèbre de Hecke sur $J_0(N)$ est compatible avec le plongement i_∞ et l'action des opérateurs $\hat{T}_l$ sur $\widehat{CH}(N)$.*
2. *Les opérateurs de Hecke sont auto-adjoints par rapport à l'accouplement de Néron-Tate.*

Ensuite, nous considérons une version à coefficients réels et à équivalence numérique près de $\widehat{CH}(N)$, que l'on note $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$. On note $\hat{D}_\infty = (D_\infty, g_\infty)$, où D_∞ est l'adhérence de Zariski de la pointe $\Gamma_0(N)\infty$ dans $\mathcal{X}_0(N)$ et g_∞ un courant de Green admissible. Le théorème de l'indice de Hodge dans ce contexte permet de décomposer :

$$\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N) = C_{\deg} \hat{\oplus} H,$$

où $C_{\deg}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2 + e(N)$, où $e(N)$ est le nombre de diviseurs premiers de N et H est un espace vectoriel isomorphe à $J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$. L'espace $C_{\deg}$ est engendré par les fibres verticales, par ses composantes irréductibles et par $\hat{D}_\infty$.

On note $\hat{\mathbb{T}}_N$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N))$ engendrée par les opérateurs $\hat{T}_l$. Les sous espaces $C_{\deg}$ et H sont stables sous l'action de $\hat{\mathbb{T}}_N$. L'algèbre $\hat{\mathbb{T}}_N$ n'est pas diagonalisable, dû au fait que $C_{\deg}$ contient des éléments d'auto-intersection nulle. Par contre, la restriction de $\hat{\mathbb{T}}_N$ à H est diagonalisable, grâce au théorème 1.1. On dispose donc d'une décomposition en sous-espace propres pour $\hat{\mathbb{T}}_N$:

$$H = \oplus_f H_f,$$

où f parcourt une base de formes propres dans $S_2(\Gamma_0(N))$. Les espaces H_f sont non nuls et $\dim H_f = 1$ si f est une forme nouvelle au sens de la théorie d'Atkin-Lehner.

Soit $\tilde{\omega}$ le faisceau dualisant relatif de $\mathcal{X}_0(N)$. Ce faisceau en droites induit une classe d'équivalence rationnelle. On note ω un diviseur dans cette classe. Dans ce travail nous considérons

$$\hat{\omega} = (\omega, g_\omega) \in \widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N),$$

où g_ω est une fonction de Green L^2_1 admissible choisie de façon adéquate (dans la section 5.2 on explique notre normalisation). Nous écrivons

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \hat{\omega}_{\deg} + \hat{\omega}_0 \\ \hat{\omega}_0 &= \sum_f \hat{\omega}_f,\end{aligned}$$

avec $\hat{\omega}_{\deg} \in C_{\deg}$, $\hat{\omega}_0 \in H$ et $\hat{\omega}_f \in H_f$. On s'intéresse aux auto-intersections de ces diviseurs pour la théorie de Bost-Kühn, que l'on note $\hat{\omega}^2_{\deg}, \hat{\omega}^2_0$ et $\hat{\omega}^2_f$. Nous obtenons :

Proposition 1.3 *Soit N un entier sans facteurs carrés et soit g le genre de $X_0(N)$. Pour tout p divisant N, on note g_p le genre de $X_0(N/p)$. Alors*

$$\frac{\hat{\omega}^2_{\deg}}{(g-1)^2} = \frac{576}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}\Big(\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1)\Big) - \sum_{p|N} \frac{\log p}{g - 2g_p + 1}, \tag{1.2}$$

où $\zeta(\cdot)$ est la fonction zêta de Riemann.

Ce résultat est essentiellement dû à U. Kühn ([Kü]). Nous avons seulement eu à nous occuper du calcul d'intersection des fibres à mauvaise réduction.

Il est à noter que si $X_0(N)$ n'a pas des points elliptiques, alors :

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_{\deg}, \quad \hat{\omega}_0 = 0.$$

Il y a une infinité de valeurs de N pour lesquelles c'est le cas, à savoir tout N qui est divisible par des premiers $p, q \notin \{2,3\}$ tels que $p \equiv 3 \bmod 4$ et $q \equiv 2 \bmod 3$.

Nous ne savons pas calculer $\hat{\omega}^2_0$ ni $\hat{\omega}^2_f$ quand ils ne sont pas nuls. Le diviseur $\hat{\omega}_0$ est une somme de points de Heegner. Nous présumons que la méthode de Gross et Zagier pour calculer la hauteur de Néron-Tate des points de Heegner ([Gro-Za]) peut être adaptée pour calculer $\hat{\omega}^2_0$ et $\hat{\omega}^2_f$. Les travaux de P. Michel et E. Ullmo, s'appuyant sur les formules de Gross et Zagier, permettent de trouver la majoration ([Mi-Ul], section 1.2, $-\hat{\omega}^2_0 = h$ dans leur notation)

$$\hat{\omega}^2_0 = O_\varepsilon(N^\varepsilon).$$

La relation entre $\hat{\omega}_0$ et les points de Heegner est expliquée dans la section 5.1.

La section 2 est consacrée aux rappels concernant les courbes modulaires, en tant que surfaces de Riemann ainsi qu'en tant qu'espaces de modules. Nous y définissons les correspondances de Hecke sur $\mathbb{Z}$, au moyen de l'interprétation modulaire.

Dans la section 3 nous suivons le formalisme de Bost pour construire $\widehat{CH}(N)$ et la forme d'intersection. Nous y expliquons aussi la construction de $\widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N)$ et du plongement i_∞.

La section 4 contient les énoncés et démonstrations detaillés du théorème 1.1 et son corollaire.

Dans la section 5 nous démontrons la Proposition 1.3 et nous expliquons comment utiliser les résultats de Kühn pour faire ce calcul.

1.2 Opérateurs de Hecke et courbes elliptiques supersingulières

On fixe un nombre premier p et on considère l'ensemble fini des des classes d'isomorphie de courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, que l'on note $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Le groupe des automorphismes de chaque E_i est fini. On pose

$$w_i := |\mathrm{Aut}(E_i)/\{\pm 1\}|, \quad W := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i}.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note δ_{E_i} la mesure de Dirac suportée sur E_i. On définit

$$\Theta := \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i} \delta_{E_i},$$

de sorte que Θ est une mesure de probabilité sur E.

Soit $\mathrm{Div}(E)$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de E. On définit

$$S^+ := \{ \sum_{i=1}^{n} a_i E_i \in \mathrm{Div}(E) \text{ tel que } a_i \geq 0\} - \{0\}.$$

Pour tout $D = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i \in S^+$, on note

$$\Theta_D := \frac{1}{\deg D} \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{E_i},$$

avec $\deg D = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Ainsi, Θ_D définit une mesure de probabilité sur E.

On dispose d'une action des opérateurs de Hecke sur S^+, définie par

$$T_m(E_i) = \sum_{C} [E_i/C],$$

où C parcourt les sous-schémas en groupes de E_i de rang m. Cette définition s'étend par linéarité à S^+.

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1.4 *Pour tout $i = 1, \ldots, n$, la suite de mesures $\{\Theta_{T_m E_i}\}$, où m varie parmi les entiers non divisibles par p, s'équidistribue par rapport à Θ.*

Dans la section 6 nous démontrons des énoncés plus précis que celui-ci (théorèmes 6.1 et 6.2). En particulier, nous obtenons $W = \frac{p-1}{12}$ (formule de masse de Deuring et Eichler).

Le théorème 1.4 a été motivé par l'étude de la dynamique des opérateurs de Hecke agissant sur la fibre en p des courbes modulaires $\mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$, avec p ne divisant pas N.

2 Les courbes modulaires $X_0(N)$

2.1 Courbes modulaires comme surfaces de Riemann

Le groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Im(z) > 0\},$$

par

$$z \mapsto \gamma z := \frac{az+b}{cz+d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

On remarque que la matrice $-Id_{2\times 2}$ agit trivialement, de sorte que les matrices γ et $-\gamma$ définissent le même endomorphisme de $\mathbb{H}$.

Soit $N \geq 1$ un entier. On pose

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \text{ avec } c \equiv 0 \bmod N \right\}.$$

Ce groupe agit de façon proprement discontinue sur $\mathbb{H}$. L'action de $\Gamma_0(N)$ se prolonge à $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Le quotient

$$X_0(N) := \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}^*$$

est appelé *courbe modulaire de niveau* N. La courbe $X_0(N)$ est une surface de Riemann compacte. Des cartes locales peuvent être données de la manière suivante : pour un point $P = \Gamma_0(N)z \in X_0(N)$, on pose

$$\text{ordre}(P) := \frac{1}{2}|\text{Fix}_{\Gamma_0(N)}z| \in \{1, 2, 3, \infty\}.$$

L'ordre de P est indépendant du choix de z. Le point P (ou z) est, par définition, ordinaire, elliptique ou une pointe selon que l'on a respectivement ordre$(P) = 1$, ordre$(P) \in \{2, 3\}$ ou ordre$(P) = \infty$.

Soit $z_0 \in \mathbb{H}^*$. Si z_0 est un point ordinaire ou elliptique d'ordre n, la formule

$$\tau = \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)^n \tag{2.3}$$

définit une carte locale autour de $\Gamma_0(N)z_0$. Si z_0 est une pointe, on choisit $\sigma \in \Gamma_0(1)$ tel que $\sigma z_0 = \infty$. Le groupe $\Gamma_0(N) \cap \sigma(\text{Fix}_{\Gamma_0(N)}z_0)\sigma^{-1}$ est cyclique, engendré par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec s un entier strictement positif. On obtient une carte locale autour de z_0 par

$$q = e^{(2\pi i \sigma z)/s}. \tag{2.4}$$

La relation suivante sera utile dans la suite. On pose $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Alors y est relié à q par

$$y = -(\log|q|)\frac{s}{2\pi}|j_\sigma(z)|^2, \tag{2.5}$$

où $j_\sigma(z) = uz + v$ si $\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix}$.

On dispose d'un courant positif de type (1,1) sur $\mathbb{H}$, invariant sous l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$,

$$\mu = \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(\mathrm{Im} z)^2}, \quad z = x + iy.$$

Le courant μ induit une mesure finie sur $X_0(N)$ ([Shi], p. 41). Son volume est $V_N = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]\pi/3$. On note μ_N le courant normalisé induit sur $X_0(N)$. Il est C^∞ en dehors des points elliptiques et des pointes. Le développement local de μ_N en termes des paramètres définis ci-dessus est

$$\mu_N = \frac{1}{V_N}\frac{2i}{n}\frac{d\tau \wedge d\bar{\tau}}{|\tau|^{2-2/n}(1 - |\tau|^{2/n})^2} \tag{2.6}$$

autour d'un point elliptique d'ordre n et

$$\mu_N = \frac{1}{V_N}2i\frac{dq \wedge d\bar{q}}{|q|^2(\log|q|^2)^2} \tag{2.7}$$

au voisinage d'une pointe.

Soit $Y_0(N) := \Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}$. La courbe $Y_0(N)$ est un ouvert de $X_0(N)$ et son complémentaire est l'ensemble (fini) des pointes. Les points de $Y_0(N)$ sont en bijection avec l'ensemble de classes d'isomorphie de couples (E, C), où E est une courbe elliptique définie sur $\mathbb{C}$ et C est un sous-groupe cyclique d'ordre N. Deux couples $(E, C), (E', C')$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow E'$ tel que $\varphi(C) = C'$. On note $\mathrm{Aut}(E, C)$ l'ensemble des automorphismes du couple (E, C).

La bijection mentionnée ci-dessus peut être décrite de la manière suivante : pour $\tau \in \mathbb{H}$, on pose $E_\tau = \mathbb{C}/\tau\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. On associe à τ la classe d'isomorphie du couple

$$(E_\tau, < 1/N >), \tag{2.8}$$

où $< 1/N >$ est le sous-groupe de E_τ engendré par $1/N$. Cette classe ne dépend que de l'orbite $\Gamma_0(N)\tau$ et tout couple (E, C) est isomorphe à un couple de cette forme.

Lemme 2.1 *Soit $P \in Y_0(N)$ et (E, C) la courbe elliptique munie d'un sous-groupe cyclique qu'il représente. Alors*

$$\frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(E, C)| = \mathrm{ordre}(P).$$

Démonstration : Soit $P = \Gamma_0(N)\tau$. On va établir une bijection

$$\Phi : \mathrm{Aut}(E, C) \longrightarrow \mathrm{Fix}_{\Gamma_0(N)}\tau.$$

On écrit $E = \mathbb{C}/\Lambda$ avec $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et $C = <1/N>$. Un élément $e \in \mathrm{Aut}(E, C)$ s'identifie avec un nombre complexe tel que

$$e\Lambda = \Lambda \tag{2.9}$$
$$e<1/N> = <1/N>. \tag{2.10}$$

Par (2.9), il existe des entiers relatifs a, b, c, d tels que $ad - bc = 1$ et

$$e \cdot 1 = a + b\tau \tag{2.11}$$
$$e \cdot \tau = c + d\tau. \tag{2.12}$$

La condition (2.10) entraîne $b \equiv 0 \bmod N$. On déduit par élimination de e dans (2.11) et (2.12) l'égalité $\tau = (d\tau + c)/(b\tau + a)$, donc $\Phi(e) := \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Fix}_{\Gamma_0(N)}\tau$. Cette fonction est une bijection dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto \text{ l'automorphisme induit par } a + b\tau. \quad \blacksquare$$

On dispose d'une fonction biholomorphe

$$j : Y_0(1) \simeq \mathbb{C}$$

qui associe à chaque point de $Y_0(1)$ l'invariant j de la courbe elliptique qu'il représente. Cette fonction s'étend en une fonction méromorphe sur $X_0(1)$ qui a un pôle simple sur l'unique pointe de cette surface,

$$j : X_0(1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Le développement de Laurent de j autour du pôle est du type

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i\tau}, \quad a_n \in \mathbb{Z}.$$

Pour chaque entier N, l'inclusion $\Gamma_0(N) \subset \Gamma_0(1)$ induit un revêtement canonique de $X_0(1)$ de degré $[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$ donné par

$$\begin{array}{ccc} X_0(N) & \longrightarrow & X_0(1) \\ \Gamma_0(N)z & \longrightarrow & \Gamma_0(1)z. \end{array} \tag{2.13}$$

Il est non ramifié en dehors des points de $X_0(N)$ au-dessus des points d'invariant j égal à 0,1728 ou ∞.

2.2 Courbes modulaires comme surfaces arithmétiques

La courbe $X_0(N)$ est l'espace analytique associé à une courbe projective et lisse définie sur $\mathbb{Q}$ ([Shi], Prop. 2.10 et Prop. 6.27), que l'on notera $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. De plus, l'invariant j induit un isomorphisme

$$j : X_0(1)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}. \tag{2.14}$$

Le revêtement canonique (2.13) induit un morphisme fini

$$X_0(N)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow X_0(1)_{\mathbb{Q}}. \tag{2.15}$$

On choisit un modèle de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Z}$ de la manière suivante : on pose $\mathcal{Y}_0(1) := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j])$ et on définit $\mathcal{X}_0(1)$ comme la droite projective associée. Donc on a $\mathcal{X}_0(1) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ et d'après (2.14),

$$\mathcal{X}_0(1) \otimes \mathbb{Q} \simeq X_0(1)_{\mathbb{Q}}.$$

On définit $\mathcal{X}_0(N)$ comme la normalisation de $\mathcal{X}_0(1)$ dans le corps de fonctions de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$ via (2.15). Le morphisme structural

$$\mathcal{X}_0(N) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \tag{2.16}$$

est propre et plat ([De-Ra], IV.3.10). Par construction sa fibre générique est isomorphe à $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. Le morphisme

$$\mathcal{X}_0(N) \otimes \mathbb{Z}[1/N] \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N]) \tag{2.17}$$

est un morphisme lisse ([De-Ra], VI.6.7).

Le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ a mauvaise réduction aux premiers p divisant N. On rappellera dans la section suivante la description de la fibre en p, lorsque N est sans facteurs carrés, due à Deligne et Rapoport.

2.2.1 Interprétation modulaire

On fait les rappels nécessaires pour formuler l'interprétation modulaire de $\mathcal{X}_0(N)$ donnée dans [De-Ra], lorsque N est sans facteurs carrés.

Soit m un entier positif arbitraire et soit $\tilde{E}_m = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, la réunion disjointe de m copies de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On note E_m le schéma obtenu après identification de la section 0 de la i-ème copie de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ avec la section ∞ de la $i+1$-ème copie.

Le schéma E_m est une courbe de genre 1. De plus, le lieu lisse E_m^{ns} est un schéma en groupes commutatif. La loi d'addition peut être décrite de la manière suivante : soit

$\nu : \tilde{E}_m \to E_m$ le morphisme canonique. Après identification de $\nu^{-1}(E_m^{ns})$ avec $\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on dispose d'une action

$$\begin{array}{rcl} \nu^{-1}(E_m^{ns}) \times \tilde{E}_m & \longrightarrow & \tilde{E}_m \\ \big((a,i),(b,j)\big) & \longmapsto & (ab, i+j). \end{array} \tag{2.18}$$

Cette action passe au quotient, laisse E_m^{ns} stable et fournit la loi de groupe commutatif, d'élément neutre l'image de $(1,0)$.

Définition 2.2 1. *(Polygone de Néron). Soit S un schéma. Un polygone de Néron standard à m côtés sur S est un schéma de la forme $E_m \times_{\mathbb{Z}} S$, dont le lieu lisse est muni de la loi de groupe déduite de (2.18). Si k est un corps algébriquement clos, un polygone de Néron sur k est une courbe C sur k isomorphe au polygone de Néron standard à m côtés sur Spec(k), pour un entier m déterminé par C, dont le lieu lisse est muni de la loi de groupe déduite de (2.18).*

2. *(Courbe elliptique généralisée) Soit S un schéma. Une courbe elliptique généralisée sur S est un schéma $E \to S$ propre et plat de présentation finie de dimension relative* 1*, tel que E^{ns} est un schéma en groupes commutatifs, muni d'un morphisme*

$$E^{ns} \times_S E \longrightarrow E \tag{2.19}$$

qui satisfait aux propriétés suivantes :

(a) *la restriction de (2.19) à $E^{ns} \times_S E^{ns}$ coïncide avec la loi de groupe.*

(b) *pour tout point géométrique Spec(k) $\to S$, le schéma $E \times_S k$ est soit une courbe elliptique sur k, soit un polygone de Néron sur k.*

Remarques 2.3 1. Si $E \to S$ est lisse, alors E est un S-schéma en courbes elliptiques.

2. Soit K un corps de nombres et soit E une courbe elliptique à réduction semi-stable définie sur K. Alors le modèle minimal régulier de E sur $\mathrm{Spec}(O_K)$ est une courbe elliptique généralisée sur $\mathrm{Spec}(O_K)$.

Soit $E \to S$ une courbe elliptique généralisée et soit d un entier. On note $[d] : E^{ns} \longrightarrow E^{ns}$ le morphisme de « multiplication par d ». On pose

$$E[d] := \ker([d]).$$

Le sous-groupe $E[d]$ est plat sur S, de rang d^2.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. On note ζ_n le groupe algébrique des racines n-ièmes de l'unité sur $\mathrm{Spec}(k)$ et on note

$$\alpha_p = \mathrm{Spec}\big(k[t]/(t^p)\big).$$

On considère α_p comme un sous-groupe de $\mathbb{G}_a \otimes k$. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ on dispose de la classification suivante :

- Si E est une courbe elliptique et $p \nmid d$, alors $E[d] \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
- Si E est une courbe elliptique ordinaire et $d = p$, alors $E[p] \cong \zeta_p \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Si E est une courbe elliptique supersingulière et $d = p$, alors $E[p]$ est de rang p^2 et n'a qu'un seul point géométrique (l'élément neutre). Plus précisement, on a une suite exacte
$$0 \to \alpha_p \to E[p] \to \alpha_p \to 0.$$
- Si E est un polygone de Néron à m côtés, alors $E[d] \cong \zeta_d \times \mathbb{Z}/(d,m)\mathbb{Z}$ ([De-Ra], II.1.18).

Soit N un entier sans facteurs carrés. Soit Sch la catégorie des schémas. On considère le foncteur
$$F_N : Sch \longrightarrow Ens$$
qui à un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (E, C), où $E \to S$ est une courbe elliptique généralisée et C est un sous-schéma en groupes localement libre de rang N qui rencontre chaque composante irréductible de chaque fibre géométrique de $E \to S$. Si $f : S_1 \longrightarrow S_2$ est un morphisme de schémas, $F_N(f) : F_N(S_2) \longrightarrow F_N(S_1)$ correspond à l'opération de changement de base induite par f.

Remarques 2.4 *1.* Soit d un diviseur de N. Si $E \to S$ est un polygone de Néron à d côtés, on peut obtenir un couple (E, C) comme ci-dessus de la façon suivante : soit $\zeta \in \zeta_N(S)$ un générateur et soit C le groupe engendré par le S-point de $E_d \times_{\mathbb{Z}} S$ induit par $(\zeta, 1)$. Si N est sans facteurs carrés, C est localement libre de rang N et il rencontre toutes les composantes irréductibles de toutes les fibres géométriques de $E_N \times_{\mathbb{Z}} S$.

Réciproquement, soit (E, C) un couple comme ci-dessus avec E un polygone de Néron à m côtés. Le sous-groupe C est engendré par un élément de la forme $P = (\zeta, i)$. Comme C doit rencontrer toutes les composantes irréductibles de E, on déduit que les résidus mod m de l'ensemble $\{0, i, 2i, \ldots, (N-1)i\}$ engendrent $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, d'où $(m, i) = 1$. De plus, P est annulé par N, donc $Ni \equiv 0 \bmod m$. On conclut que m est un diviseur de N.

2. Soit d un diviseur de N. Le polygone de Néron E_d sur $\mathbb{Z}$ à d côtés satisfait $E_d[N] \cong \zeta_N \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On considère le sous-groupe C_d qui s'identifie à $\zeta_N \times \{1\}$. La classe d'isomorphie du couple (E_d, C_d) définit un $\mathbb{Z}$-point de F_N. Les points de l'ensemble $\{(E_d, C_d)\}_{d|N}$ sont appelés *points à l'infini.*

Soit (E, C) un couple comme ci-dessus. On considère une factorisation $N = MN'$. Le groupe C se décompose de manière unique comme $C = C_M C_{N'}$, où C_M (resp. $C_{N'}$) est un sous-groupe de rang M (resp. de rang N'). Alors il existe un unique morphisme de courbes elliptiques généralisées sur S, $u : E \to E'$, qui satisfait aux propriétés suivantes ([De-Ra], IV.1.3) :

– Soit s un point géométrique de S. On note E_s (resp. E'_s) la fibre de E (resp. E') au-dessus de s. Alors E'_s s'obtient en contractant en un point les composantes irréductibles de E_s, via u, qui ne rencontrent pas $C_{M,s}$.
– Le sous-groupe $u(C_M) \subset E'$ est de rang M et rencontre toutes les composantes irréductibles de E'.

L'application $(E, C) \mapsto (E', u(C_M))$ définit un morphisme de foncteurs

$$F_N \to F_M. \tag{2.20}$$

Lorsque $M = 1$, on note $E' = c(E)$.

Exemple 2.5 Si $E \to S$ est une courbe elliptique lisse (i.e. sans mauvaise réduction), alors le morphisme (2.20) correspond à $(E, C) \mapsto (E, C_M)$. En particulier, si $M = 1$, on a $c(E) = E$.

Théorème 2.6 *([De-Ra], V.1.6 et V.1.14.2) Supposons que N soit sans facteurs carrés. Alors le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ est un espace de modules grossier pour F_N.*

Remarque 2.7 Pour un schéma X, on note $h_X = Hom_{Sch}(\cdot, X)$. De même, pour un morphisme de schémas $f : X_1 \to X_2$, on note $h(f) : h_{X_1} \to h_{X_2}$ le morphisme de foncteurs obtenu par le lemme de Yoneda. Le théorème signifie qu'il existe un morphisme de foncteurs

$$\Phi_N : F_N \to h_{\mathcal{X}_0(N)}$$

tel que

1. pour tout schéma X et tout morphisme de foncteurs $\psi : F_N \to h_X$, il existe un unique morphisme de schémas $f : \mathcal{X}_0(N) \to X$ tel que $\psi = h(f) \circ \Phi_N$.
2. pour tout corps k algébriquement clos, $\Phi_N(\mathrm{Spec}(k))$ est bijective.

Exemples 2.8 1. Soit $\pi_N : F_N \to F_1$ défini par la règle $(E, C) \mapsto c(E)$. Alors la propriété 1 appliquée à $\psi := \Phi_1 \circ \pi_N$ fournit un morphisme de schémas

$$\mathcal{X}_0(N) \longrightarrow \mathcal{X}_0(1)$$

qui étend le morphisme (2.15) (cf. (2.24)).

2. Soit $w_N : F_N \to F_N$ défini par $(E, C) \mapsto (E/C, E[N]/C)$. On obtient un isomorphisme

$$w_N : \mathcal{X}_0(N) \longrightarrow \mathcal{X}_0(N),$$

qui satisfait $w_N \circ w_N =$Id ([De-Ra], IV.3.19, $K = \Gamma_0(N)$ et $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ dans leur notation).

3. Les points à l'infini de F_N (cf. remarque 2.4, 2) induisent des $\mathbb{Z}$-points de $\mathcal{X}_0(N)$. Ces points fournissent l'interprétation modulaire des pointes.

Définition 2.9 *On définit $\mathcal{Y}_0(N)$ comme le complémentaire dans $\mathcal{X}_0(N)$ du sous-schéma fini formé par les pointes.*

Le schéma $\mathcal{Y}_0(N)$ est un ouvert dense de $\mathcal{X}_0(N)$. Si k est un corps algébriquement clos, $\mathcal{Y}_0(N)(k)$ paramètre les couples (E, C) où E est une courbe elliptique sur k (en particulier lisse) et C un sous-groupe de rang N. Ainsi, $\mathcal{Y}_0(N)(\mathbb{C})$ s'identifie avec $Y_0(N)$.

2.2.2 Description des fibres de mauvaise réduction

On rappelle la description des fibres géométriques en p donnée dans [De-Ra], VI.6.9. On suppose N sans facteurs carrés.

Définition 2.10 *Un point supersingulier est un élément $x \in \mathcal{X}_0(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)$, où $p|N$, qui représente un couple (E, C) avec E une courbe elliptique supersingulière. On note $Aut(x)$ (ou $Aut(E, C)$) le groupe des automorphismes $\varphi : E \to E$ tels que $\varphi(C) = C$.*

1. Pour un entier M on pose
$$X_p(M) := \mathcal{X}_0(M) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p.$$
La fibre $X_p(N)$ est formée de deux copies de $X_p(N/p)$ (donc intègres par (2.17)) qui se coupent en l'ensemble fini des points supersinguliers. En particulier, $\mathcal{X}_0(N)$ est réduit.
2. Soit S l'ensemble des points supersinguliers dont l'invariant j de la courbe elliptique sous-jacente est 0 ou 1728. Le lieu régulier de $\mathcal{X}_0(N)$ est le complémentaire de S. En particulier, les points supersinguliers n'appartenant pas à S sont des points doubles ordinaires (i.e. d'équation locale $xy = 0$). Le complété formel de l'anneau local d'un point de $x \in S$ au-dessus de p est $W(\overline{\mathbb{F}}_p)[[x, y]]/(xy - p^k)$, où $k = \frac{1}{2}|\mathrm{Aut}(x)|$ et $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\mathbb{F}}_p$.
3. Soit $\mathcal{X}_0(N)^{\sim}$ le modèle régulier minimal de $\mathcal{X}_0(N)$. Il est obtenu en éclatant les points de S. Soit $x \in S$, au-dessus de $p|N$ et tel que $p \neq 2, 3$. Alors le diviseur exceptionnel au-dessus de x est une copie de $\mathbb{P}^1$ (resp. deux copies de $\mathbb{P}^1$) d'auto-intersection -2 si l'invariant j de x est 1728 (resp. 0). Ainsi, $\mathcal{X}_0(N)^{\sim}$ est à réduction semi-stable.
4. On explicite la description des fibres de mauvaise réduction de la manière suivante : soit E une courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On note $F : E \to E^{(p)}$ l'isogénie de Frobenius et $V : E^{(p)} \to E$ l'isogénie duale. On considère
$$i_F, i_V : X_p(N/p) \longrightarrow X_p(N) \tag{2.21}$$
définis au niveau de foncteurs par
$$i_F(E, C) = (E, (\ker F)C); \quad i_V(E, C) = (E^{(p)}, (\ker V)F(C)).$$
Ces morphismes sont des plongements fermés. Leurs images sont les composantes irréductibles de $X_p(N)$.

Lemme 2.11 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X_p(N/p) \arrow[r, "i_F"] \arrow[d, "w_{N/p}"] & X_p(N) \arrow[d, "w_N"] \\ X_p(N/p) \arrow[r, "i_V"] & X_p(N) \end{tikzcd}$$

Démonstration : pour un entier M on note $Y_p(M) = \mathcal{Y}_0(M) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit x un point fermé de $Y_p(N/p)$. On va vérifier

$$w_N \circ i_F(x) = i_V \circ w_{N/p}(x). \tag{2.22}$$

Vu que $Y_p(M)$ est dense dans $X_p(M)$, ceci suffit pour démontrer l'énoncé. Soit (E, C) le couple représenté par x. On note

$$F : E \longrightarrow E^{(p)}$$

l'isogénie de Frobenius et V l'isogénie duale. De même, on note

$$\tilde{F} : E/C \longrightarrow (E/C)^{(p)}$$

l'isogénie de Frobenius et $\tilde{V}$ l'isogénie duale.

L'égalité (2.22) est équivalente à

$$\big(E/(C \ker F), E[N]/(C \ker F)\big) \cong \big((E/C)^{(p)}, \tilde{F}(E[N/p]/C) \ker \tilde{V}\big). \tag{2.23}$$

Soit $\nu : E \to E/C$ le morphisme canonique. On vérifie

$$\begin{array}{rcl} \nu\big(Ker(F)\big) & = & Ker(\tilde{F}). \\ (E/C)^{(p)} & \cong & E^{(p)}/F(C). \end{array}$$

D'où on peut déduire que $\tilde{F} \circ \nu$ réalise l'isomorphisme (2.23) ■

On note $e_0, e_\infty \in \mathcal{X}_0(N)$ les pointes correspondant aux polygones de Néron à 1 côté et à N côtés, respectivement. D'après le lemme, l'involution w_N échange les deux composantes irréductibles de $X_p(N)$. On a $w_N(e_0) = e_\infty$, d'où on conclut que $e_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ et $e_\infty \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ appartiennent à des composantes différentes.

Définition 2.12 *On note $X_p^\infty(N)$ (resp. $X_p^0(N)$) la composante irréductible de $X_p(N)$ contenant $e_\infty \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ (resp. $e_0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$). Nous utiliserons aussi les notations*

$$X_p^\infty := X_p^\infty(N), \quad X_p^0 := X_p^0(N), \quad X_p := X_p(N),$$

pour les situations où le niveau N est fixé.

2.3 Opérateurs de Hecke comme correspondances

Soit l un nombre premier qui ne divise pas N. On a deux revêtements de degré $l+1$

$$\alpha, \beta : X_0(lN) \longrightarrow X_0(N),$$

donnés sur $\Gamma_0(lN)\backslash\mathbb{H}^*$ par les formules

$$\begin{aligned}\alpha(\Gamma_0(lN)z) &= \Gamma_0(N)z \\ \beta(\Gamma_0(lN)z) &= \Gamma_0(N)v_l z,\end{aligned}$$

où $v_l = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'égalité $\Gamma_0(lN) = \Gamma_0(N) \cap v_l^{-1}\Gamma_0(N)v_l$ permet de vérifier que β est bien défini. Au niveau modulaire, avec la notation (cf. (2.8)), on a

$$\begin{aligned}\alpha(E_z, < 1/(Nl) >) &= (E_z, < 1/N >) \\ \beta(E_z, < 1/(Nl) >) &= \big(E_{lz}, < 1/N > \big), \\ &\cong (E_z/ < 1/l >, < 1/(lN) > / < 1/l >).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Ces applications induisent des morphismes de groupes de Chow

$$\begin{aligned}\alpha^*, \beta^* : CH^1(X_0(N)) \longrightarrow CH^1(X_0(lN)), \\ \alpha_*, \beta_* : CH^1(X_0(lN)) \longrightarrow CH^1(X_0(N)).\end{aligned}$$

On définit la correspondance de Hecke d'indice l par

$$T_l := \beta_* \alpha^* \in End\big(CH^1(X_0(N))\big).$$

Pour tout $P \in X_0(N)$, on note $[P]$ le diviseur de $X_0(N)$ correspondant. On déduit de la définition de T_l que

$$T_l([\Gamma_0(N)z]) = \sum_{j=0}^{l} [\Gamma_0(N)v_l\gamma_j z], \tag{2.25}$$

où $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ est un système de représentants de $\Gamma_0(lN) \setminus \Gamma_0(N)$.

Par ailleurs, le groupe $\Gamma_0(N)$ agit par multiplication à gauche sur la double classe $\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N)$. On vérifie que cette action se décompose comme

$$\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=0}^{l} \Gamma_0(N)v_l\gamma_j.$$

On conclut que à toute décomposition

$$\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=0}^{l} \Gamma_0(N)\alpha_j$$

correspond une formule

$$T_l([\Gamma_0(N)z]) = \sum_{j=0}^{l} [\Gamma_0(N)\alpha_j z].$$

Par exemple, on peut prendre ([Shi], Proposition 3.36)

$$\alpha_j := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & l \end{pmatrix} & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ \\ \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } j = l. \end{cases} \tag{2.26}$$

Les lemmes suivants fournissent d'autres choix du système $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$ qui seront utiles dans la suite.

Lemme 2.13 *Soit*

$$\Gamma_0(N, l) := v_l\Gamma_0(lN)v_l^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \ \textit{avec}\ b \equiv 0 \ \textit{mod}\ l \right\}.$$

Soit $\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_l\}$ *un système de représentants pour* $\Gamma_0(N, l) \setminus \Gamma_0(N)$ *et soit* $v'_l := lv_l^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$*. Alors,*

1. $T_l = \alpha_*\beta^*$

2. $T_l([\Gamma_0(N)z]) = \sum_{j=0}^{l} [\Gamma_0(N)v'_l\delta_j z]$.

Démonstration : notons provisoirement $V = \alpha_*\beta^*$. Le côté droit de 2. est égal à $V(\Gamma_0(N)z)$. Le groupe $\Gamma_0(N)$ agit par multiplication à gauche sur la double classe $\Gamma_0(N)v'_l\Gamma_0(N)$. On vérifie que l'on a la décomposition

$$\Gamma_0(N)v'_l\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=0}^{l} \Gamma_0(N)v'_l\delta_i.$$

Le fait que $\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N) = \Gamma_0(N)v'_l\Gamma_0(N)$ [2] entraîne $V = T_l$, ce qui montre 1. et 2. ■

2. Par exemple parce que $v_l = \begin{pmatrix} l & y \\ -N & x \end{pmatrix} v'_l \begin{pmatrix} lx & -y \\ N & 1 \end{pmatrix}$ si $lx + Ny = 1$.

Lemme 2.14 *Soit $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ une pointe, et $\sigma \in \Gamma_0(1)$ tel que $\sigma c = \infty$. Alors il existe une décomposition*

$$\Gamma_0(N) v_l \Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=0}^{l} \Gamma_0(N)\beta_j \tag{2.27}$$

et des entiers $c_0, \ldots, c_l$ tels que

1. *$\beta_j c = c$ pour tout $0 \leq j \leq l$.*
2. *On a*

$$\sigma\beta_j\sigma^{-1} = \begin{cases} \pm\begin{pmatrix} 1 & c_j \\ 0 & l \end{pmatrix} & si\ 0 \leq j \leq l-1 \\ \\ \pm\begin{pmatrix} l & c_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & si\ j = l. \end{cases}$$

Démonstration : Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_l$ comme dans la formule (2.26). D'après le lemme 2.15, il existe $\gamma_0, \ldots, \gamma_l \in \Gamma_0(N)$ tels que $\alpha_j c = \gamma_j c$. On pose $\beta_j := \gamma_j^{-1}\alpha_j$ (qui satisfait $\beta_j c = c$). Les β_j satisfont (2.27) parce que chaque β_j est dans la même classe à gauche que α_j.

D'après la forme explicite des matrices α_j (cf. 2.26), on peut voir que le coefficient $(2,2)$ de $\sigma\beta_j\sigma^{-1}$ est divisible par l si $0 \leq j \leq l-1$ et que le coefficient $(1,1)$ de $\sigma\beta_l\sigma^{-1}$ est divisible par l. Ceci joint aux égalités

$$\sigma\beta_j\sigma^{-1}\infty = \infty, \qquad \det \sigma\beta_j\sigma^{-1} = l,$$

permet de conclure que les matrices $\sigma\beta_j\sigma^{-1}$ sont de la forme

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & c_j \\ 0 & l \end{pmatrix} \text{ si } 0 \leq j \leq l-1 \text{ et } \pm\begin{pmatrix} l & c_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ si } j = l,$$

avec $c_0, \ldots, c_l \in \mathbb{Z}$. ■

Lemme 2.15 *Soit N un entier sans facteurs carrés. Pour toute pointe $P \in X_0(N)$, on a*

$$T_l[P] = (l+1)[P].$$

Remarque 2.16 Si N possède des facteurs carrés, T_l peut échanger les pointes. Par exemple, si p est un nombre premier et $N = p^2$, un système de représentants pour l'ensemble des pointes est ([Shi], p.25)

$$\left\{\frac{1}{p^2}, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, 1\right\}.$$

Donc, si $l \not\equiv 1 \text{mod}\ p$, l'orbite de $\frac{l}{p}$ est différente de celle de $\frac{1}{p}$.

Démonstration : lorsque N est sans facteurs carrés, l'ensemble $\{1/d$, avec $d|N\}$ est un système de représentants pour l'ensemble des pointes. On fixe une pointe $c_0 = \Gamma_0(N)\frac{1}{d_0}$. Soit $c_1 \in |T_l c_0|$, représenté par $\frac{1}{d_1}$. On utilise la formule (2.26). On a

$$\alpha_j \frac{1}{d_0} = \gamma \frac{1}{d_1} \tag{2.28}$$

pour $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Si $\alpha_j = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & l \end{pmatrix}$, alors (2.28) devient

$$(1 + d_0 j)(C + Dd_1) = ld_0(A + Bd_1).$$

Cette équation réduite modulo d_0 entraîne $Dd_1 \equiv 0 \mod d_0$. Mais $(D, N) = 1 \Rightarrow (D, d_1) = 1$, donc $d_0|d_1$. La réduction de (2.28) modulo d_1 donne $0 \equiv Ald_0 \mod d_1$. Or, $(Al, d_1) = 1$ et donc $d_1|d_0$. La conclusion est $c_0 = c_1$. Le cas $\alpha_l = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est similaire. ■

La description de T_l en termes de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ munies d'un sous-groupe cyclique est la suivante : si $P \in Y_0(N)$ représente le couple (E, C), alors

$$T_l(P) = \sum_H \big(E/H, \nu_H(C)\big)$$

où H parcourt les sous-groupes de E d'ordre l et $\nu_H : E \longrightarrow E/H$ est le morphisme canonique. On remarque que $(l, N) = 1$ entraîne $H \cap C = 0$.

On suppose que N est sans facteurs carrés. On se propose d'étendre T_l en une correspondance sur $\mathcal{X}_0(N)$ au moyen de l'interprétation modulaire. On dispose d'un morphisme de foncteurs

$$F_{Nl} \longrightarrow F_N$$

donné par la construction (2.20). On définit

$$\alpha : \mathcal{X}_0(lN) \longrightarrow \mathcal{X}_0(N)$$

comme le morphisme induit sur les schémas de modules. De même, on définit

$$\beta : \mathcal{X}_0(lN) \longrightarrow \mathcal{X}_0(N)$$

de la manière suivante : soit (E, C) une courbe elliptique généralisée, munie d'un sous-groupe de rang Nl. On décompose

$$C = C_N C_l, \tag{2.29}$$

avec $C_N = E[N] \cap C$ et $C_l = E[l] \cap C$, de sorte que C_N est de rang N et C_l est de rang l. Alors, au niveau modulaire, on a

$$\beta(E, C) := (E/C_l, C/C_l).$$

Remarque 2.17 En comparant cette expression avec (2.24), on vérifie que α et β induisent sur $\mathbb{C}$ les morphismes que l'on avait noté α et β précédemment. On ne fera pas de distinction au niveau de notation entre ces morphismes considérés sur $\mathbb{Z}$ et ces morphismes considérés sur $\mathbb{C}$.

Lemme 2.18 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_0(lN) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "w_{lN}"] & \mathcal{X}_0(N) \arrow[d, "w_N"] \\ \mathcal{X}_0(lN) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{X}_0(N) \end{tikzcd}$$

Démonstration : vu que $\mathcal{Y}_0(lN)$ est dense dans $\mathcal{X}_0(N)$, il suffit de vérifier l'identité $w_N \circ \beta(x) = \alpha \circ w_{lN}(x)$ pour x un point de $\mathcal{Y}_0(lN)$. On travaille au niveau des foncteurs. Soit S un schéma et $(E, C) \in F_{lN}(S)$. On écrit $C = C_N C_l$ comme dans (2.29). Alors on est conduit à vérifier

$$\Big(\frac{E/C_l}{C/C_l}, \frac{(E/C_l)[N]}{C/C_l}\Big) \cong \big(E/C, (E[lN]/C)[N]\big). \tag{2.30}$$

L'inclusion $C_l \subset C$ permet de considérer le morphisme canonique

$$\nu : E/C_l \longrightarrow E/C.$$

Ce morphisme induit l'isomorphisme (2.30). ■

Lemme 2.19 *α et β sont des morphismes finis et plats.*

Démonstration : les involutions w_{Nl} et w_N sont des isomorphismes, donc d'après le lemme 2.18 il suffit de démontrer l'énoncé pour α. Le morphisme structural (2.16) est propre pour tout niveau N, d'où on déduit que α est propre ([Ha], II.4.8). Alors, pour montrer que α est fini, il suffit de vérifier que ses fibres géométriques sont finies ([EGA III], 4.4.2).

Soit k un corps algébriquement clos. On fixe un point $P = (E, C_N) \in \mathcal{X}_0(N)(k)$. Soit Sch_k la catégorie des schémas sur k et soit $\mathcal{F}_P$ le foncteur

$$\begin{array}{rcl} Sch_k & \longrightarrow & Ens \\ S & \longmapsto & \{C \text{ sous-schéma en groupes de } E \times S \text{ localement libre de rang } l\}. \end{array}$$

Si $C \in \mathcal{F}_P(S)$, alors on peut décomposer $C = C_N C_l$ comme dans (2.29). On déduit du théorème 2.6 que le k-schéma $\alpha^{-1}(P)$ représente $\mathcal{F}_P$.

Si E est n'est pas une courbe elliptique supersingulière, alors $\mathcal{F}_P$ est isomorphe à la réunion disjointe $\mathrm{Spec}(k) \sqcup \zeta_l$ ([De-Ra], démonstration de V.1.13). On conclut que $\alpha \otimes k$ est fini de rang $l+1$ au-dessus de P.

Si E est une courbe elliptique supersingulière, alors $\mathcal{F}_P$ est isomorphe à Spec$(k[t]/t^{l+1})$ ([De-Ra], démonstation de V.1.13). Donc, $\alpha \otimes k$ est fini de rang $l+1$ au-dessus de P. On conclut que α est fini.

Le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ est réduit, donc pour vérifier que α est plat il suffit de démontrer que le rang de ses fibres géométriques est constant ([De-Ra], V.1.12), ce qu'on a fait dans l'argument précédent. ■

D'après le lemme 2.19, on dispose des morphismes de Groupes de Chow

$$\alpha^*, \beta^* : CH^1(\mathcal{X}_0(N)) \longrightarrow CH^1(\mathcal{X}_0(lN)),$$
$$\alpha_*, \beta_* : CH^1(\mathcal{X}_0(lN)) \longrightarrow CH^1(\mathcal{X}_0(N)).$$

On pose

$$T_l := \beta_* \alpha^* \in End(CH^1(\mathcal{X}_0(N)))$$

la correspondance de Hecke associée à l.

Au niveau modulaire, on a

$$T_l(E, C) = \sum (E/H, \nu_H(C)) \tag{2.31}$$

où H parcourt les sous-groupes de E de rang l et $\nu_H : E \to E/H$ est le morphisme canonique.

Remarques 2.20 *1.* La correspondance T_l induit une correspondance sur $\mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $x = (E, C)$ un point supersingulier au-dessus d'un nombre premier p. De (2.31), on déduit que les courbes elliptiques sous-jacentes aux points dans le support de $T_l x$ sont isogènes à E. En particulier, T_l préserve les points supersinguliers. Ceci sera étudié d'un point de vue dynamique dans la section 6, en dehors des premiers divisant le niveau.

De même, si x est une pointe, le diviseur $T_l x$ est supporté aux pointes.

2. Par la propriété universelle des modèles minimaux réguliers, on dispose d'un morphisme $\tilde{\alpha} : \mathcal{X}_0(lN)^\sim \to \mathcal{X}_0(N)^\sim$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_0(lN)^\sim \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] & \mathcal{X}_0(lN) \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{X}_0(N)^\sim \arrow[r] & \mathcal{X}_0(N) \end{tikzcd}$$

De même, on aussi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_0(lN)^{\sim} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\beta}"] & \mathcal{X}_0(lN) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{X}_0(N)^{\sim} \arrow[r] & \mathcal{X}_0(N)
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont propres et surjectifs, mais ils ne sont pas plats. De plus, la restriction de $\mathcal{X}_0(N)^{\sim} \to \mathcal{X}_0(N)$ à la préimage de S est un isomorphisme (cf. point 3 de la section 2.2.2). Or, si D est un diviseur de Weil de $\mathcal{X}_0(N)$ qui ne rencontre pas les points supersinguliers, alors $T_l D$ est contenu dans le lieu régulier de $\mathcal{X}_0(N)$ et il s'identifie au diviseur $\tilde{\beta}_* \tilde{\alpha}^* D$.

Lemme 2.21 *Soit*

$$\mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p = X_p^{\infty} \cup X_p^0$$

la décomposition en composantes irréductibles de la fibre géométrique de $\mathcal{X}_0(N)$ en $p|N$, selon la définition 2.12. Alors

$$T_l(X_p^{\infty}) = (l+1)X_p^{\infty}, \quad T_l(X_p^0) = (l+1)X_p^0. \tag{2.32}$$

Démonstration : du lemme 2.15 on déduit

$$T_l e_{\infty} = (l+1)e_{\infty} + V, \quad T_l e_0 = (l+1)e_0 + V',$$

où V, V' sont des diviseurs verticaux contenus dans les fibres de mauvaise réduction. Mais α et β sont des morphismes finis (lemme 2.19), donc $V = V' = 0$. Ceci montre que T_l préserve les composantes X_p^{∞} et X_p^0. ∎

Théorème 2.22 *Pour tout $D \in$Div$(\mathcal{X}_0(N))$,*

$$T_l D = \beta_* \alpha^* D = \alpha_* \beta^* D.$$

Démonstration : on peut supposer que D est un diviseur intègre. Si D est vertical, on déduit l'énoncé du lemme 2.21 et de la description (2.21). Si D est horizontal, alors du lemme 2.13, 1, on déduit que

$$T_l D = \alpha_* \beta^* D + V,$$

où V est un diviseur vertical, de support contenu dans les fibres de mauvaise réduction. Posons

$$V = \sum_{p|N} V_p, \quad V_p \subset \mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p.$$

On fixe $p|N$. Si $D \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ n'est pas une pointe, de la platitude de α et β (lemme 2.19) on déduit $V_p = 0$. Si $x = D \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$ est une pointe, alors $T_l x$ est supporté aux pointes, donc $V_p = 0$. ∎

3 Groupe de Chow arithmétique

3.1 Les opérateurs d, d^c et dd^c

Notre normalisation concernant ces opérateurs est donnée de la manière suivante : on utilise $z = x + iy$ pour $z \in \mathbb{H}$. On pose

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$

de sorte que, pour une fonction f de clase C^1, on a $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ si et seulement si f est holomorphe.

On pose aussi

$$\begin{aligned} \partial f &:= \frac{\partial f}{\partial z} dz, & \bar{\partial} f &:= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \\ d &:= \partial + \bar{\partial}, & d^c &:= \frac{-1}{4\pi i}(\bar{\partial} - \partial). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Alors

$$dd^c = \frac{-1}{2\pi i}\partial\bar{\partial} = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) dx \wedge dy.$$

Exemples 3.1 *1. Soit $h : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On a*

$$dd^c \log |h| = 0$$

2.

$$dd^c \log y = -\frac{dx \wedge dy}{4\pi y^2} = -\frac{\mu_1}{12}.$$

L'opérateur dd^c est invariant sous $GL_2(\mathbb{R})$ au sens suivant :

Lemme 3.2 *Soient $z \in \mathbb{H}, \gamma \in GL_2(\mathbb{R})$ et f une fonction de classe C^2 autour de z. On a*

$$\gamma^*(dd^c f)(z) = dd^c(\gamma^* f)(z).$$

Démonstration : on pose $\gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} -2\pi i \gamma^*(dd^c f)(z) &= \gamma^*\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}\Big) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(\gamma z) d(\gamma z) \wedge d(\gamma \bar{z}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(\gamma z) \frac{\det(\gamma)^2}{|cz+d|^2} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big(f(\gamma z)\big) dz \wedge d\bar{z} \\ &= -2\pi i dd^c(\gamma^* f)(z). \blacksquare \end{aligned}$$

3.2 Fonctions de Green L_1^2

Soient X une surface de Riemann. Pour tout $P \in X$, on note δ_P la distribution de Dirac supportée en P. Plus généralement, pour tout diviseur $D = \sum_P a_P[P] \in$Div(X), on note

$$\delta_D := \sum_P a_P \delta_P.$$

On définit le support de D par

$$|D| := \{P \in X \text{ tel que } a_P \neq 0\}.$$

Définition 3.3 *Soit $D = \sum a_P[P] \in$Div(X) un diviseur à coefficients réels. Une* fonction de Green *g pour D est une distribution sur X, à valeurs réelles, telle que*

$$dd^c g + \delta_D \tag{3.34}$$

est un courant C^∞ [3].

L'opérateur dd^c est elliptique. Or, (3.34) entraîne que g est C^∞ en dehors de $|D|$. Par ailleurs, du fait que $\log|\cdot|^{-2}$, considéré comme distribution, est une solution fondamentale de $dd^c f = \delta_0$ sur $\mathbb{C}$, on peut déduire le développement local suivant : pour tout $P \in |D|$ et pour toute carte locale (U, θ) centrée en P, on a

$$g = a_P \log|\theta(\cdot)|^{-2} + b \tag{3.35}$$

où $b \in C^\infty(U)$.

3. Selon la terminologie de [Gi-So], g est un *courant de Green* pour D. Ici nous suivons la terminologie adoptée dans [Bo], section 3.1.3.

Remarques 3.4 *1.* Ce raisonnement peut être inversé pour obtenir la caractérisation suivante : g est une fonction de Green pour D si et seulement si g est C^∞ en dehors de $|D|$ et pour tout $P \in |D|$ on a un développement du type (3.35).

2. Si (3.35) est satisfait pour une carte locale centrée en P, alors il est satisfait pour toute autre. Plus précisement, un changement de coordonées biholomorphe s'annule à l'ordre 1 en 0 et donc n'a d'effet que sur la fonction b.

On suppose que X est une surface de Riemann compacte. Soit ν une (1,1) forme continue et strictement positive sur X, c'est-à-dire localement représentée par une forme $\nu = hidz \wedge d\bar{z}$, où h est une fonction continue et strictement positive. La forme ν induit une mesure sur X, permettant de considérer l'espace $L^2(X)$. D'après la compacité de X, cet espace vectoriel topologique ne dépend pas du choix de ν. L'espace $L^2_1(X)$ est défini comme l'espace des distributions $f \in L^2(X)$ dont le courant ∂f est de carré intégrable. Cette dernière condition signifie que l'intégrale

$$\int_X \partial f \wedge \overline{\partial f}$$

est convergente. On remarque que cette condition entraîne aussi que $\overline{\partial} f$ est de carré intégrable.

De même, si $U \subset X$ est un ouvert, on note $L^2_1(U)_{loc}$ l'espace des distributions $f \in L^2(U)_{loc}$ telles que ∂f est localement de carré intégrable. On a $L^2_1(X)_{loc} = L^2_1(X)$ car X est compacte.

Exemple 3.5 *Soit* $0 < a < 1$ *un nombre réel et soit* $\mathbb{D}^0_a = \{z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < a\}$. *Alors la fonction* $z \mapsto \log(-\log|z|)$ *induit un élément de* $L^2_1(\mathbb{D}^0_a)_{loc}$.

Définition 3.6 *Une* fonction de Green L^2_1 *([Bo], section 3.1.3) pour* D *est une distribution* g *à valeurs réelles telle que :*

1. *pour tout* $P \in |D|$, *on a un développement du type (3.35) avec* $b \in L^2_1(U)_{loc}$
2. *pour tout ouvert* U *tel que* $U \cap |D| = \emptyset$, *la restriction de* g *à* U *est dans* $L^2_1(U)_{loc}$.

Nous appellerons « fonction de Green C^∞ »la fonction de Green telle qu'elle a été donnée dans la définition 3.3 afin de la distinguer de la fonction de Green L^2_1. Cette dernière peut être décomposée comme suit :

$$g = h + \psi, \tag{3.36}$$

où h est une fonction de Green C^∞ pour D et $\psi \in L^2_1(X)$.

On se place dans le cas $X = X_0(N)$. Cette surface est munie de la (1,1) forme μ_N définie dans la section 2.1.

Définition 3.7 *Soit g une fonction de Green L_1^2 pour D. Elle est dite* admissible *si elle satisfait l'égalité de courants*

$$dd^c g + \delta_D = (\deg D)\mu_N. \tag{3.37}$$

Remarques 3.8 *1.* Pour tout diviseur D, une fonction de Green L_1^2 admissible existe. Nous expliquerons une construction explicite plus bas (section 3.2.1).

2. Si $\deg D = 0$, alors g est une fonction de Green.

3. Le courant μ_N est C^∞ en dehors des points elliptiques et des pointes. Vu que dd^c est un opérateur elliptique, g aussi est C^∞ en dehors des points elliptiques, des pointes et du support de D. Le courant μ_N est L^p au voisinage d'un point elliptique d'ordre n, pour tout $1 \leq p < (1-1/n)^{-1}$ (cf. (2.6)). On peut en déduire que b de (3.35) est continu en U (cf. [Bo], Lemma 5.2 [4] et la note en bas de page). Au voisinage d'une pointe, μ_N est L^1 et n'est pas L^p, pour aucun $p > 1$. On donnera des renseignements sur b au voisinage d'une pointe au moyen d'une construction explicite des fonctions de Green L_1^2 (cf. lemme 3.11 et lemme 3.15).

4. De même, par rapport à la décomposition (3.36), ψ est C^∞ en dehors des points elliptiques et des pointes.

5. Soient g_1, g_2 des fonctions de Green L_1^2 admissibles pour D et posons $h = g_1 - g_2$. Alors $dd^c h = 0$, d'où h est une fonction C^∞ et harmonique sur une surface compacte et connexe, donc constante. On conclut que deux fonctions de Green L_1^2 admissibles pour le même diviseur ne diffèrent que d'une constante.

6. Soient g, g' deux fonctions de Green L_1^2 admissibles pour D, D'. On déduit directement de la définition que $g + g'$ est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $D + D'$.

3.2.1 Construction des fonctions de Green L_1^2 admissibles sur $X_0(N)$

Il suffit de construire une fonction de Green L_1^2 admissible pour chaque diviseur de la forme $[P]$, où $P \in X_0(N)$, car si $D = \sum_P a_P[P]$ et que l'on note g_P la fonction correspondante à $[P]$, alors $g_D := \sum_P a_P g_P$ est une fonction de Green L_1^2 admissible pour D. On divise la construction en fonction de P selon que P est une pointe ou non.

Cas où P est une pointe

Lemme 3.9 *Soit $C \in X_0(N)$ une pointe et soit $\{C_1 = C, C_2, \ldots, C_m\}$ l'ensemble des pointes de $X_0(N)$. Alors il existe une forme modulaire f holomorphe, de poids $k \in 12\mathbb{N}$ telle que*

4. Le lemme en question a comme hypothèse que le diviseur est effectif, mais cette partie de l'énoncé est valable en général.

1. $f(C) = 0$

2. $f(C_i) \neq 0$ *si* $i = 2, \ldots, m$

3. $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{H}$

4. si r *est l'ordre d'annulation de* f *en* C*, alors* $k/r = 12/[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$.

De plus, si f_1 *est une forme modulaire de poids pair satisfaisant aux trois premières conditions, alors elle satisfait aussi à la quatrième et il existe une constante* $A \in \mathbb{C}$ *telle que*

$$f^{r_1} = A f_1^{r}, \tag{3.38}$$

où r_1 *est l'ordre d'annulation de* f_1 *en* C*.*

Démonstration : si $N = 1$, on dispose de la fonction discriminant

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi i z},$$

qui est une forme modulaire de poids 12 qui s'annule à l'ordre 1 en $z = i\infty$ et n'a pas d'autre zéro.

Si $N > 1$, on considère Δ comme une forme modulaire pour $\Gamma_0(N)$. On note π_N le revêtement canonique (2.13) et d_N son degré. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Delta) &= \pi_N^*[\infty] \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i [C_i] \end{aligned}$$

où $a_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $\sum_{i=1}^{m} a_i = d_N = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$. Le diviseur

$$\operatorname{div}(\Delta) - d_N [C_1]$$

est de degré zéro et il est supporté aux pointes. Par le théorème de Manin-Drinfeld ([Dr], [El]), on sait qu'il existe une fonction méromorphe g sur $X_0(N)$ et un entier positif n tels que

$$\operatorname{div}(g) = n(\operatorname{div}(\Delta) - d_N [C_1]).$$

Or, la forme modulaire (pour $\Gamma_0(N)$) de poids $k = 12n$ donnée par $f := \Delta^n / g$ est holomorphe et satisfait aux trois premières conditions de l'énoncé. Puis

$$\mathrm{div}(f) = n\sum_{i=1}^{m} a_i[C] = n[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)][C],$$

d'où $r = n[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]$ et $k/r = 12/[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]$.

Soit f_1 une forme modulaire de poids k_1 et d'ordre d'annulation r_1 en C, qui n'a pas d'autres zéros. Alors

$$\frac{f_1^r}{f^{r_1}}$$

est une forme modulaire holomorphe sur $X_0(N)$, qui n'a pas des zéros. On conclut qu'elle est de poids 0, donc constante et $k_1/r_1 = k/r = 12/[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]$. ■

On construit un courant de Green L_1^2 admissible g_P de la manière suivante : soit f une forme modulaire holomorphe du type donné par le lemme 3.9, de sorte que $f(P) = 0$, $f(Q) \neq 0$ pour toute autre pointe $Q \neq P$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{H}$. On pose

$$g_P(z) := -\frac{1}{r}\log|f(z)^2 y^k|, \tag{3.39}$$

où r est l'ordre d'annulation de f en P et k est le poids de f.

Remarques 3.10 *1.* La propriété (3.38) dans le lemme 3.9 assure qu'un autre choix de f ne fait que changer g_P d'une constante additive. Ceci est compatible au fait qu'une fonction de Green L_1^2 admissible est unique à une constante additive près.

2. Soit f une forme modulaire qui s'annule à l'ordre r en P. On note $a(f)$ le coefficient de q^r dans le q-développement de f en P. Soit M^0 l'ensemble des formes modulaires f satisfaisant aux conditions énoncés dans le lemme 3.9 et à la condition supplémentaire $a(f) = 1$. Si $f, f_1 \in M^0$, alors $A = 1$ dans (3.38). On déduit que la définition (3.39) ne dépend pas du choix de $f \in M^0$.

Lemme 3.11 *1. g_P est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $[P]$.*

2. Pour $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, on pose $Q = \Gamma_0(N)c$. On a

$$g_P(z) = -\delta_{P,Q}\log|q|^2 - b_N\log(-\log(|q|)) + b, \quad z \to c,$$

où q est la carte locale autour de c donnée dans (2.4), b est une fonction C^∞ et $b_N = 12/[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]$.

Démonstration : soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{H}$ un point d'ordre n. De la formule pour la carte locale τ en z_0 donnée par (2.3) on déduit

$$y = y_0 \frac{1 - |\tau|^{2/n}}{|1 - \tau^{1/n}|^2}, \quad z = x + iy.$$

Ceci montre que $g_P|_{Y_0(N)}$ est C^∞ en z_0 si z_0 est un point ordinaire ($n = 1$ dans ce cas). Si $n > 1$, alors g_P est continu en z_0 et de classe L_1^2. D'après les exemples 3.1

$$\begin{aligned} dd^c g_P(z) &= -\frac{k}{r} dd^c \log y \\ &= -\frac{12}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]} \Big(-\frac{\mu_1}{12} \Big) \\ &= \mu_N. \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \Gamma_0(1)$ tel que $\sigma c = \infty$. Alors f admet un développement autour de Q en termes de la carte locale donnée dans (2.4) de la forme

$$f|_k\sigma(z) = j_\sigma(z)^k f(z) = \sum_{n=r_Q}^{\infty} a_n q^n, \quad a_{r_Q} \neq 0,$$

où r_Q est l'ordre d'annulation de f en Q. D'après la relation (2.5), on peut écrire

$$y^k |f(z)|^2 = (-\log|q|)^k |q|^{2r_Q} |h(q)|^2,$$

avec h une fonction holomorphe définie sur un disque contenant l'origine et telle que $h(0) \neq 0$. Donc

$$g_P(z) = -\delta_{P,Q} \log|q|^2 - \frac{k}{r_Q} \log(-\log|q|) - \frac{1}{r_Q} \log|h(q)|^2$$

et $b_N = k/r_Q$ par le lemme 3.9. ■

Exemple 3.12 *Sur $X_0(1)$, prenons $P = \Gamma_0(1)\infty$. Dans ce cas une fonction de Green L_1^2 est donnée par*

$$g(z) = -\log|\Delta(z)^2 y^{12}|.$$

Définition 3.13 *Posons $P = \Gamma_0(N)c$, avec $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. On définit la* valeur régularisée de *g_P en P par*

$$\bar{g}_P(P) := \lim_{z \to c} g_P(z) + \log|q|^2 + b_N \log(-\log|q|).$$

La limite existe par le lemme 3.11.

Soit $a > 0$. On pose

$$g_{P,a}(z) := -\frac{1}{r}\log|f(z)^2(ay)^k|.$$

La valeur régularisée de $g_{P,a}$ en P peut être calculée en termes du $q-$développement de f.

Lemme 3.14 *On considère le développement de f en P*

$$j_\sigma(z)^k f(z) = a_r q^r + a_{r+1}q^{r+1} + \dots, \qquad a_r \neq 0, \quad r \geq 1. \tag{3.40}$$

Alors

$$\bar{g}_{P,a}(P) = -b_N \log\left(\frac{as}{2\pi}\right) - \frac{1}{r}\log|a_r|^2.$$

Démonstration : d'après (3.40), on peut écrire

$$|j_\sigma(z)^k f(z)|^2 = |a_r q^r|^2 h(q),$$

où h est définie au voisinage de 0, positive, continue et $h(0) = 1$. On déduit l'énoncé de cette expression, de (2.5) et de la définition 3.13. ■

Cas où P n'est pas une pointe

Si $N = 1$, la fonction

$$g(z_1, z_2) = -\log((y_1y_2)^6|\Delta(z_1)\Delta(z_2)(j(z_1) - j(z_2))|^2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{H}, \tag{3.41}$$

induit une distribution à valeurs réelles sur $X_0(1) \times X_0(1)$. Pour z_2 fixé, c'est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $[\Gamma_0(1)z_2]$.

Lorsque $N > 1$, on ne dispose pas d'une expression pour les fonctions de Green L_1^2 admissibles du type (3.41), c'est-à-dire en termes de formes modulaires élémentaires. On doit procéder de la manière suivante : on considère la fonction de Legendre de deuxième espèce, donnée par la formule

$$Q_{s-1}(t) = \int_0^\infty (t + \sqrt{t^2-1}\cosh(v))^{-s}dv, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \text{ et } t > 1. \tag{3.42}$$

On a aussi

$$Q_{s-1}(t) = \frac{\Gamma(s)^2}{2\Gamma(2s)}\Big(\frac{2}{1+t}\Big)^s F\Big(s, s; 2s; \frac{1}{1+t}\Big), \quad s \in \mathbb{C} \text{ et } t > 1, \tag{3.43}$$

où $F(a, b; c; z)$ est la fonction hypergéométrique. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

1. $Q_{s-1}(t) = \mathrm{O}(t^{-s})$ pour $t \to \infty$.
2. $Q_{s-1}(t) = -\frac{1}{2}\log(t-1) + \mathrm{O}(1)$ pour $t > 1$ et au voisinage de $t = 1$.

La propriété 1. est une conséquence directe de la formule 3.42. La propriété 2. est une conséquence de la formule (3.43) et de [He] (6.2), p. 31.

Soient $z, z' \in \mathbb{H}$. On pose

$$u(z,z') = 1 + \frac{|z-z'|^2}{2yy'}, \quad \mathrm{Im}(z) = y,\ \mathrm{Im}(z') = y'. \tag{3.44}$$

Soit $\rho(z,z')$ la distance hyperbolique entre z et z'. On a la relation

$$\cosh\big(\rho(z,z')\big) = u(z,z'),$$

donc

$$u(\gamma z, \gamma z') = u(z,z') \text{ pout tout } \gamma \in GL_2^+(\mathbb{R}). \tag{3.45}$$

On pose

$$g_s(z,z') := 2Q_{s-1}\big(u(z,z')\big).$$

On déduit de (3.44) que $g_s(z,z') = g_s(z',z)$.

Le *noyau automorphe* pour $\Gamma_0(N)$ est défini par

$$G_s(z,z') := \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} g_s(z, \gamma z').$$

Cette somme est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ ([He], Proposition 6.2, p. 31). Elle définit une fonction C^∞ sur $Y_0(N) \times Y_0(N)$ privé de la diagonale ([He], 6.5 (c), p. 33). Pour z' fixé, on a le développement ([He], Proposition 6.5 (e),(f), p.33)

$$G_s(z,z') = -\mathrm{ordre}(\Gamma_0(N)z')\log|z-z'|^2 + O(1), \quad z \to z'.$$

D'après la symétrie de g_s et la propriété (3.45), on déduit

$$G_s(z,z') = G_s(z',z). \tag{3.46}$$

La fonction G_s admet un développement par rapport à s de la forme

$$G_s(z,z') = \frac{12}{[\Gamma_0(N):\Gamma_0(1)]}\frac{1}{s(s-1)} + g(z,z') + O(s-1),$$

où le terme $O(s-1)$ est C^∞ par rapport à (z,z') ([He], Theorem 3.5, p. 250).

D'après (3.46), on a

$$g(z,z') = g(z',z). \tag{3.47}$$

Lemme 3.15 *(U. Kühn)* [5] *On fixe $z' \in \mathbb{H}$ et on pose $P = \Gamma_0(N)z'$, $\quad g_P(z) = g(z,z')$. Alors $g(z)$ est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $[P]$. De plus, si z_0 est une pointe, on a le développement*

$$g_P(z) = \log(-\log|q|) + b(z), \quad z \to z_0,$$

où q est la carte locale donnée par (2.4) et b est une fonction C^∞.

Démonstration : Soit $k = 4\pi/V_N = 12/[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$. On peut écrire

$$g(z,z') = -\log(|P(z,z')|^2(yy')^k),$$

où $P(z,z')$ est une forme modulaire de poids k avec la propriété suivante : $P(z,z') = 0$ si et seulement si $\Gamma_0(N)z = \Gamma_0(N)z'$ ([Fay], theorem 2.3). L'admissibilité de g_P est déduite des exemples 3.1. Le développement autour des pointes vient du fait que $\log y = \log(-\log(|q|)) + O(1)$ quand $z \to z_0$. ■

Corollaire 3.16 *1. g_P est intégrable par rapport à μ_N.*

2. L'intégrale

$$\int_{X_0(N)} g_P \mu_N$$

est indépendante de P.

Remarques 3.17 *1.* Lorsque P est une pointe, le développement (2.7) montre qu'une fonction de Green L_1^2 admissible g_P n'est pas intégrable par rapport à μ_N.

2. Dans [Fay], p. 163, il est montré que

$$\int_{X_0(N)} g_P \mu_N = 0,$$

pour tout $P \in X_0(N)$.

5. Ce lemme et sa démonstration font partie d'un manuscrit non publié d'Ulf Kühn.

Démonstration su corollaire 3.16 : pour 1. il suffit de comparer le développement de μ_N aux pointes donné dans (2.7) avec celui de g_P. La démonstration de 2. est une adaptation de [La], Theorem 1.2, p. 24. Soient $P, Q \in Y_0(N)$ avec $P \neq Q$. En dehors de l'ensemble $\{P, Q\}$, on peut écrire l'égalité de courants

$$g_P\mu_N - g_Q\mu_N = g_P dd^c g_Q - g_Q dd^c g_P = d(g_P d^c g_Q - g_Q d^c g_P) =: d\omega.$$

C'est aussi grâce aux développements donnés par (2.7) et par le lemme 3.15 que l'on peut considérer ce produit de courants. Alors

$$\int_{X_\epsilon} d\omega = -(\int_{C_\epsilon(P)} + \int_{C_\epsilon(Q)} + \sum_{\kappa \text{ pointe}} \int_{C_\epsilon(\kappa)})\omega$$

avec

$$X_\epsilon = X_0(N) - \big(B_\epsilon(P) \cup B_\epsilon(Q) \cup_{\kappa \text{ pointe}} B_\epsilon(\kappa)\big), \quad C_\epsilon(\cdot) = \partial B\epsilon(\cdot)$$

et $B_\epsilon(T)$ est la préimage par une carte locale centrée en T (cf. section 2.1) d'un disque contenant l'origine et de rayon ϵ.

Montrons que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon(P)} \omega = g_Q(P). \tag{3.48}$$

On a

$$g_p = -\log \epsilon^2 + b,$$

sur $C_\epsilon(P)$, avec b de classe C^∞. Par ailleurs, l'opérateur d^c en coordonnées polaires s'écrit

$$d^c = \frac{\epsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r} d\theta \quad \text{sur } C_\epsilon(P).$$

On trouve

$$\int_{C_\epsilon(P)} g_P d^c g_Q = \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} (-\log \epsilon^2 + b)\frac{\partial g_Q}{\partial r} d\theta.$$

Cette expression s'annule si $\epsilon \to 0$ car $\frac{\partial g_Q}{\partial r}$ est intégrable. De même, on a

$$\frac{\partial g_P}{\partial r} = -\frac{2}{\epsilon} + \frac{\partial b}{\partial r}$$

sur $C_\epsilon(P)$, d'où

$$\int_{C_\epsilon(P)} g_Q d^c g_P = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_Q d\theta + \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} g_Q \frac{\partial b}{\partial r} d\theta.$$

La première intégrale tend vers $-g_Q(P)$ et la deuxième vers 0. Ceci montre (3.48). Par symétrie on déduit

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon(Q)}\omega = -g_P(Q). \tag{3.49}$$

En utilisant (3.48) et (3.49) on trouve

$$\begin{aligned}\int_{X_0(N)} d\omega &= -\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{C_\epsilon(P)} + \int_{C_\epsilon(Q)} + \sum_{\kappa \text{ pointe}} \int_{C_\epsilon(\kappa)}\Big)\omega \\ &= g_P(Q) - g_Q(P) - \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{\kappa \text{ pointe}}\int_{C_\epsilon(\kappa)}\omega \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{\kappa \text{ pointe}}\int_{C_\epsilon(\kappa)}\omega. \end{aligned} \tag{3.50}$$

La dernière ligne est justifiée par la symétrie de $g(z,z')$ (3.47). On fixe une pointe κ. L'opérateur d^c en coordonnées polaires s'écrit

$$d^c = \frac{\epsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}d\theta \quad \text{sur } C_\epsilon(\kappa).$$

Par le lemme 3.15, on dispose des développements

$$g_P(z) = \log\big(-\log(|q|)\big) + b, \quad g_Q(z) = \log\big(-\log(|q|)\big) + c, \quad z \to \kappa,$$

où b et c sont des fonctions C^∞. On trouve

$$\int_{C_\epsilon(\kappa)} g_P d^c g_Q = \int_0^{2\pi}\Big(\log(-\log\epsilon) + b\Big)\Big(-(4\pi\log(\epsilon))^{-1} + \epsilon\frac{\partial c}{\partial r}\Big)d\theta$$

et cette expression s'annule en prenant la limite $\epsilon \to 0$. Ceci permet de conclure à l'annulation de la limite (3.50). ■

3.3 Groupe de Chow arithmétique de $\mathcal{X}_0(N)$ et théorie d'Arakelov

On note Div($\mathcal{X}_0(N)$) le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les diviseurs de Weil intègres. Soit $D \in$Div($\mathcal{X}_0(N)$). On note $|D|$ le support de D et $D_{\mathbb{C}}$ le diviseur induit sur $X_0(N)$.

Définition 3.18 *Un* diviseur compactifié *est un couple (D,g), où D est un diviseur de Weil (à coefficients entiers) sur $\mathcal{X}_0(N)$ et g une fonction de Green L^2_1 pour $D_{\mathbb{C}}$, admissible. L'ensemble des diviseurs compactifiés possède une structure de groupe abélien, donnée par $(D,g)+(D',g') := (D+D', g+g')$, d'élément neutre* $(0,0)$ *(le diviseur vide muni de la fonction nulle).*

Soit f une fonction rationnelle non nulle sur $\mathcal{X}_0(N)$. Elle induit un diviseur div(f) sur $\mathcal{X}_0(N)$ et une fonction méromorphe $f_{\mathbb{C}}$ sur $X_0(N)$. Grâce à l'équation de Poincaré-Lelong ([Gri-Ha], p. 388), on a l'égalité de courants

$$dd^c \log |f_{\mathbb{C}}|^2 = \delta_{\mathrm{div}(f_{\mathbb{C}})}.$$

En conséquence, le couple $(\mathrm{div}(f), -\log |f_{\mathbb{C}}|^2)$ est un diviseur compactifié. On appellera *diviseur principal* un diviseur qui a cette forme. L'ensemble des diviseurs principaux est un sous-groupe des diviseurs compactifiés.

Définition 3.19 *Le groupe de Chow arithmétique (de degré 1) $\widehat{CH}(N)$ est le quotient du groupe des diviseurs compactifiés de $\mathcal{X}_0(N)$ par le groupe des diviseurs principaux.*

La théorie d'Arakelov classique ([Ar]) ne s'applique pas à $X_0(N)$, munie de la mesure de Poincaré, à cause des singularités de cette mesure (cf. (2.6) et (2.7)). Par ailleurs, pour une infinité de valeurs de N, le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ n'est pas régulier. A savoir, tout N qui est divisible par 2 ou 3 ou par un nombre premier $p \geq 5$ tel que $p \equiv -1 \mod 6$ ou $p \equiv -1 \mod 4$ (cf. [De-Ra], VI.6.16). J.-B. Bost ([Bo]) et U. Kühn ([Kü]) ont, indépendamment, développé une théorie de l'intersection arithmétique adéquate pour des situations où la métrique choisie a des singularités de type convenable. La théorie de Bost permet de travailler avec une surface arithmétique qui est supposée seulement normale. Ces théories sont équivalentes dans notre cadre admissible si on considère N tel que $\mathcal{X}_0(N)$ est régulier ([Kü], section 7). Nous utiliserons la théorie de Bost, dont on fait les rappels nécessaires, suivant [Bo], section 5.3.

Soit

$$\nu : \mathcal{X}_0(N)^{\sim} \longrightarrow \mathcal{X}_0(N) \tag{3.51}$$

le modèle régulier minimal de $\mathcal{X}_0(N)$ (cf. point 3 de la section 2.2.2). Soient $E_1, E_2 \in \mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N)^{\sim})$, sans composante irréductible commune. Soit x un point fermé de $\mathcal{X}_0(N)$. On considère des équations locales f_1, f_2 pour E_1, E_2 au voisinage de x. On pose

$$n_x := l\big(\mathcal{O}_{x,\mathcal{X}_0(N)}/(f_{1,x}, f_{2,x})\big),$$

où $l(M)$ désigne la longueur du $\mathcal{O}_{x,\mathcal{X}_0(N)}$-module M. On a $n_x = 0$ sauf pour un nombre fini de points. On définit le 0-cycle d'intersection ([La], p.55)

$$E_1 \cdot E_2 = \sum n_x[x].$$

On note $N(x)$ le cardinal du corps résiduel de x. On pose

$$<E_1, E_2> = \sum n_x \log N(x).$$

Ce nombre d'intersection est à valeurs dans $\bigoplus_p \mathbb{Z} \log p$.

Maintenant on va définir des nombres d'intersection sur le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ (qui est non-régulier pour une infinité de valeurs de N), suivant [Mu], II (b). Soit $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ l'ensemble des diviseurs exceptionnels de (3.51) et soit $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N))$. On note $t(D)$ le diviseur de $\mathcal{X}_0(N)^{\sim}$ défini par

$$t(D) := \nu^* D + \sum_{i=1}^{k} r_i C_i,$$

où les nombres rationnels $r_1, \dots, r_k$ sont choisis de sorte que $<t(D), C_i> = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Il existe un unique choix de ces coefficients car la matrice $\big(<C_i, C_j>\big)_{i,j}$ est définie négative, en particulier inversible ([Mu], p. 230). On remarque que si D ne rencontre pas le lieu singulier, alors $r_i = 0$ pour tout i.

Soient $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N))$. On pose

$$\begin{aligned} t(D_1) &= \nu^* D_1 + \sum_{i=1}^{k} r_{i,1} C_i \\ t(D_2) &= \nu^* D_2 + \sum_{i=1}^{k} r_{i,2} C_i \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} <D_1, D_2> &:= <\nu^* D_1, \nu^* D_2> + \sum_{i=1}^{k} r_{i,1} <C_i, \nu^* D_2> \\ &= <\nu^* D_1, \nu^* D_2> + \sum_{i=1}^{k} r_{i,2} <\nu^* D_1, C_i>. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ce nombre d'intersection est à valeurs dans $\bigoplus_p \mathbb{Q} \log p$.

Soient $x_1, x_2 \in \widehat{CH}(N)$, représentés par $(D_1, g_1), (D_2, g_2)$, choisis de sorte que les diviseurs n'ont pas de composante irréductible commune. Soit

$$g_i = h_i + \psi_i, \quad i = 1, 2,$$

une décomposition du type donnée dans (3.36). On note $w_i = dd^c h_i + \delta_{D_{i,\mathbb{C}}}$, de sorte que

$$w_i + dd^c \psi_i = (\deg D_i) \mu_N.$$

On définit

$$<g_1,g_2> := \frac{1}{2}\left(\int_{X_0(N)} h_1 * h_2 + \int_{X_0(N)} \psi_1 w_2 + \int_{X_0(N)} \psi_2 w_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{X_0(N)} \partial\psi_1 \wedge \bar{\partial}\psi_2\right), \quad (3.53)$$

où $h_1 * h_2 = h_1 w_2 + h_2 \delta_{D_{1,\mathbb{C}}}$. Ces intégrales sont absolument convergentes ([Bo], section 5.1) et cette définition ne dépend pas de la décomposition du type (3.36) choisie.

On définit

$$<x_1, x_2> := <D_1, D_2> + <g_1, g_2>. \quad (3.54)$$

La somme (3.54) ne dépend pas du choix des représentants $(D_1, g_1), (D_2, g_2)$. Ceci définit une forme bilinéaire

$$< \quad , \quad > : \widehat{CH}(N) \times \widehat{CH}(N) \longrightarrow \mathbb{R},$$

Remarques 3.20 *1.* On a

$$<(D, g), (0, c)> = \frac{c}{2} \deg D_{\mathbb{C}}.$$

En particulier, (D, g) est orthogonal à $(0, c)$ si et seulement si $\deg D_{\mathbb{C}} = 0$.

2. Supposons que $\deg D_{1,\mathbb{C}} = \deg D_{2,\mathbb{C}} = 0$. Alors l'expression $<x_1, x_2>$ ne dépend pas du choix des fonctions de Green L_1^2 admissibles g_1, g_2. En effet, si on pose $x_1' = x_1 + (0, c_1), \quad x_2' = x_2 + (0, c_2)$, on a

$$<x_1', x_2'> = <x_1, x_2> + <(0, c_1), x_2'> + <(0, c_2), x_1'> + <(0, c_1), (0, c_2)>.$$

Les derniers trois termes sont nuls d'après la remarque 3.20, 1. Par ailleurs, dans ce cas g_1 et g_2 sont des fonctions de Green C^∞ (cf. remarque 3.8, 2). La formule (3.53) se réduit à

$$\begin{aligned} <g_1, g_2> &= \frac{1}{2}\int_{X_0(N)} g_1 * g_2 \\ &= \frac{1}{2} g_2(D_{1,\mathbb{C}}), \end{aligned}$$

qui est la formule classique de la théorie d'Arakelov pour l'intersection à l'infini. Supposons que D_1 ou D_2 est orthogonal à tout diviseur vertical. Alors, on dispose d'un lien avec l'accouplement de Néron-Tate sur $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$, à savoir la formule de Faltings-Hriljac ([Fal], [MoBa], 6.15)

$$<x_1, x_2> = -<D_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}, D_2 \otimes \overline{\mathbb{Q}}>_{NT}.$$

3. Supposons que $|D_{1,\mathbb{C}}| \cup |D_{2,\mathbb{C}}|$ ne contient pas de pointes. On pose $d_i := \deg D_{i,\mathbb{C}}$. De l'admissibilité de g_i on obtient

$$w_i = d_i \mu_N - dd^c \psi_i. \tag{3.55}$$

Si l'on remplace ceci dans (3.53), on obtient

$$2{<}g_1, g_2{>} = d_2 \int_{X_0(N)} g_1 \mu_N - \int_{X_0(N)} g_1 dd^c \psi_2 + h_2(D_1) + d_1 \int_{X_0(N)} \psi_2 \mu_N.$$

L'intégrale $\int_{X_0(N)} g_1 \mu_N$ est convergente grâce au corollaire 3.16, 1. De même, ce corollaire et la relation (3.55) justifient la convergence de $\int_{X_0(N)} g_1 dd^c \psi_2$. Enfin, le développement aux pointes de g_2 (lemme 3.15) montre que $\int_{X_0(N)} \psi_2 \mu_N$ converge.

Soit $J_0(N)$ la composante neutre du modèle de Néron sur $\mathbb{Z}$ de $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$, la jacobienne de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. Le groupe abélien $J_0(N)(\mathbb{Q})$ s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence rationnelle de diviseurs $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N))$ satisfaisant aux conditions

1. $\deg D \otimes \overline{\mathbb{Q}} = 0$
2. ${<}D_1, V{>} = 0$, pour tout diviseur vertical V.

Soit $E \in \mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N))$ tel que $\deg E_{\mathbb{C}} > 0$. On choisit une fonction de Green L_1^2 admissible g_E pour E. On note $\hat{E} = (E, g_E) \in \widehat{CH}(N)$. On définit

$$\begin{array}{rcl} i_E : J_0(N)(\mathbb{Q}) & \hookrightarrow & \widehat{CH}(N) \\ D & \mapsto & (D, g_D) \end{array} \tag{3.56}$$

où g_D est une fonction de Green L_1^2 admissible pour D, normalisée par la condition

$${<}(D, g_D), \hat{E}{>} = 0. \tag{3.57}$$

Si $D = \mathrm{div}(f)$ est un diviseur principal, alors $(\mathrm{div}(f), -\log |f|^2)$ satisfait (3.57), ce qui montre que i_E est bien défini. On déduit directement des définitions données précédemment que i_E est un homomorphisme injectif.

Remarque 3.21 Le morphisme i_E dépend de E et de la mesure μ_N mais il ne dépend pas du choix de g_E. Pour vérifier ceci, soit c une constante réelle et $E' = \hat{E} + (0, c)$. Soit $D \in J_0(N)(\mathbb{Q})$ et $(D, g_D) = i_E(D)$. Alors

$${<}i_E(D), E'{>} = {<}i_E(D), \hat{E}{>} + {<}i_E(D), (0, c){>} = 0,$$

car $\deg D_{\mathbb{C}} = 0$ (cf. remarque 3.20 ,1).

3.4 Théorème de l'indice de Hodge

On spécialise [MoBa], p. 85 à notre situation. Soit $\widehat{Div}_{\mathbb{R}}(N)$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des couples (D, g), où D est un diviseur de Weil sur $\mathcal{X}_0(N)$ à coefficients réels et g est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $D_{\mathbb{C}}$. Soit $P_{\mathbb{R}}(N)$ le sous-espace engendré par les diviseurs principaux. On définit

$$\widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N) := \widehat{Div}_{\mathbb{R}}(N)/P_{\mathbb{R}}(N).$$

Remarques 3.22 *1.* La forme $<,>$ s'étend par bilinéarité à $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N) \times \widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N)$.

2. $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N)$ n'est pas isomorphe à $\widehat{CH}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. La raison est que $\widehat{CH}(N)$ contient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(0, 1)$ et que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$ (cf. [Bo], section 5.5.).

3. Le noyau de l'application naturelle $\widehat{CH}(N) \longrightarrow \widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N)$ est le sous-groupe de torsion $\widehat{CH}(N)_{tors}$ ([Bo], Theorem 5.5, 1)).

Définition 3.23 *Soit*

$$K_N = \{x \in \widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N) | <x, y> = 0, \forall y \in \widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N)\}.$$

On définit le groupe de Chow arithmétique à équivalence numérique près par

$$\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N) := \widehat{CH}_{\mathbb{R}}(N)/K_N$$

Soit p un nombre premier. On pose

$$X_p := \mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Soit $F \subseteq \widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$ l'espace engendré par les classes des diviseurs de la forme $(X_p, 0)$ et $(0, c)$, avec $c \in \mathbb{R}$ ("espace des fibres").

Lemme 3.24 *F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.*

Démonstration : de l'égalité

$$(X_p, 0) - (0, \log p^2) = (\mathrm{div}(p), -\log p^2)$$

on déduit que F est engendré par les images de $\{(0, c), c \in \mathbb{R}\}$. De la remarque 3.20, 1, on déduit que $(0, c)$ n'est pas numériquement équivalent à zéro si $c \neq 0$. ■

On suppose N sans facteurs carrés. Si p est un diviseur de N, on pose

$$X_p = X_p^{\infty} \cup X_p^0$$

selon la définition 2.12. On définit $\hat{X}_p^\infty$ (resp. $\hat{X}_p^0$) comme l'image de $(X_p^\infty, 0)$ (resp. $(X_p^0, 0)$) dans $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$.

La pointe $\Gamma_0(N)\infty \in X_0(N)$ induit un $\mathbb{Q}$-point de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. On note D_∞ son adhérence de Zariski dans $\mathcal{X}_0(N)$. Soit $\hat{D}_\infty := (D_\infty, g_\infty)$, avec g_∞ une fonction de Green L_1^2 admissible pour D_∞.

Remarques 3.25 *1.* D'après les définitions, on a

$$
\begin{aligned}
<\hat{D}_\infty, \hat{X}_p^\infty> &= \log p \\
<\hat{D}_\infty, \hat{X}_p^0> &= 0.
\end{aligned}
$$

2. Le diviseur compactifié $\hat{X}_p^\infty - \hat{X}_p^0$ est orthogonal à tout diviseur vertical (cf. (3.59) et (3.60) plus bas).

On note H l'espace orthogonal à

$$
(F \oplus \mathbb{R}\hat{D}_\infty) \oplus \big(\oplus_{p|N} \mathbb{R}(\hat{X}_p^\infty - \hat{X}_p^0)\big)
$$

dans $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$. La version suivante du théorème de l'indice de Hodge nous sera utile dans la suite.

Théorème 3.26 *On suppose N sans facteurs carrés. Soit $\hat{G}_p = \hat{X}_p^\infty - \hat{X}_p^0$. On dispose d'une décomposition*

$$
\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N) = \Big((F \oplus \mathbb{R}\hat{D}_\infty) \oplus \big(\overset{\perp}{\oplus}_{p|N} \mathbb{R}\hat{G}_p\big)\Big) \overset{\perp}{\oplus} H,
$$

où le symbole $\overset{\perp}{\oplus}$ est placé entre sous-espaces orthogonaux.

On considère $J_0(N)(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R}$ munie de l'accouplement de Néron-Tate. Alors le morphisme

$$
(D, g) \mapsto D
$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $H \cong J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$ tel que

$$
<(D, g), (D', g')> = -<D, D'>_{NT}. \tag{3.58}
$$

En particulier, la restriction de la forme d'intersection à $H \times H$ est définie négative.

Remarques 3.27 *1.* L'espace $F \oplus \mathbb{R}\hat{D}_\infty$ ne dépend pas du choix de la fonction de Green L_1^2 admissible g_∞.

2. Une version de ce théorème est valable dans le cadre plus général de la théorie de Bost, où on utilise des fonctions de Green L_1^2 sans imposer de condition d'admissibilité ([Bo], Theorem 5.5).

Démonstration : on pose

$$E = F \oplus \mathbb{R}\hat{D}_\infty, \quad M = \oplus_{p|N}\mathbb{R}G_p,$$

où $\hat{G}_p = (G_p, 0)$. Si $p \neq q$, les espaces $\mathbb{R}G_p$ et $\mathbb{R}G_q$ sont orthogonaux car G_p et G_q sont contenus dans des fibres différentes.

Vérifions que $<\cdot,\cdot>$ est non dégénérée sur $E \overset{\perp}{\oplus} M$: le diviseur compactifié

$$(X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2) = (\mathrm{div}(p), -\log p^2)$$

est principal, d'où

$$\begin{aligned} 0 &= <\hat{X}_p^\infty, (X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)> \\ &= (X_p^\infty)^2 + <X_p^\infty, X_p^0>. \end{aligned}$$

On déduit

$$(X_p^\infty)^2 = -<X_p^\infty, X_p^0>. \tag{3.59}$$

De même,

$$(X_p^0)^2 = -<X_p^\infty, X_p^0>. \tag{3.60}$$

On a

$$\begin{aligned} (\hat{X}_p^\infty - \hat{X}_p^0)^2 &= (X_p^\infty - X_p^0)^2 \\ &= (X_p^\infty)^2 + (X_p^0)^2 - 2<X_p^\infty, X_p^0> \\ &= -4<X_p^\infty, X_p^0> \end{aligned}$$

et cette intersection est non nulle car $|X_p^\infty| \cap |X_p^0|$ correspond à l'ensemble non vide des points supersinguliers au-dessus de p.

Par ailleurs, d'après la remarque 3.20, 1

$$<(0,1), \hat{D}_\infty> = 1/2 \neq 0.$$

On conclut

$$\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N) = (E \oplus M) \overset{\perp}{\oplus} H,$$

ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Soit $\hat{D} = (D, g) \in H$. Par définition, $<\hat{D}, (\hat{X}_p^\infty - \hat{X}_p^0)> = 0$, d'où

$$<D, X_p^\infty> = <D, X_p^0>.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} 0 &= <\hat{D}, (X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)> \\ &= <D, X_p^\infty + X_p^0> + <\hat{D}, (0, -\log p^2)> \\ &= <D, X_p^\infty> + <D, X_p^0>. \end{aligned} \tag{3.61}$$

L'égalité (3.61) est justifiée parce que $(0, -\log p^2)$ est un élément de F et $\hat{D}$ est orthogonal à cet espace. On conclut

$$<D, X_p^\infty> = <D, X_p^0> = 0.$$

Ainsi, D induit un élément de $J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$.

Supposons que $\hat{D}$ soit numériquement équivalent à zéro. Alors $h_{NT}(D) = -\hat{D}^2 = 0$ (remarque 3.20, 2), d'où on déduit que $D = 0$ dans $J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$. Ceci montre que le morphisme

$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R} \\ (D, g) & \longmapsto & D \end{array} \tag{3.62}$$

est bien défini. Vérifions qu'il est surjectif. Soit $\bar{D} \in J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$, représenté par un diviseur D. On note g_D l'unique fonction de Green L_1^2 admissible pour D telle que

$$<(D, g_D), \hat{D}_\infty> = 0.$$

Avec ce choix, $\hat{D} := (D, g)$ est orthogonal à $E \oplus M$, donc c'est un antécédent de $\bar{D}$.

Vérifions que (3.62) est injectif. Soit $\hat{D} = (D, g) \in H$ tel que $D = 0$ dans $J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$. Alors

$$D = \sum_i \lambda_i \mathrm{div}(f_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

De l'unicité des fonctions de Green L_1^2 admissibles à une constante près, on déduit qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$g = -\sum_i \lambda_i \log |f_i|^2 + c.$$

Alors $\hat{D} = (0, c)$ dans $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$. De $<\hat{D}, \hat{D}_\infty> = 0$ on a $c = 0$, d'où $\hat{D} = 0$ dans H.

L'application (3.62) satisfait (3.58) par la remarque 3.20, 2. La restriction

$$<,> : H \times H \to \mathbb{R}$$

est définie négative car l'accouplement de Néron-Tate est défini positif. ■

4 Opérateurs de Hecke comme endomorphismes du groupe de Chow arithmétique

Soit (D, g) un diviseur compactifié de $\mathcal{X}_0(N)$ et soit S_0 l'ensemble des pointes et des points elliptiques de $X_0(N)$. Par la remarque 3.8, 3, on sait que g est C^∞ en dehors de l'ensemble

$$S_D := S_0 \cup |D_{\mathbb{C}}|. \tag{4.63}$$

Soit l un nombre premier qui ne divise pas N. On pose

$$S_{D,l} := \{P \in X_0(N) \text{ tel que } |T_l P| \cap S_D \neq \emptyset\}.$$

Pour tout $P \in X_0(N)$ n'appartenant pas à $S_{D,l}$, on définit

$$T_l g(P) := g(T_l P), \tag{4.64}$$

où on utilise la notation

$$f(E) := \int_{X_0(N)} f \delta_E = \sum_{P \in |E|} a_P f(P)$$

si $E = \sum a_P[P]$ est un diviseur de $X_0(N)$ et f une fonction.

On verra plus bas (remarque 4.9) que l'on a l'égalité

$$S_{D,l} = |T_l S_D|. \tag{4.65}$$

On obtient ainsi une fonction $T_l g$ définie sur $X_0(N) - |T_l S_D|$.

Théorème 4.1 *1. Soit (D, g) un diviseur compactifié de $\mathcal{X}_0(N)$. La fonction $T_l g$ induit une fonction de Green L_1^2 admissible pour $T_l D$.*

2. La formule

$$\hat{T}_l(D, g) := (T_l D, T_l g)$$

définit un endomorphisme de $\widehat{CH}(N)$.

3. $\hat{T}_l$ est auto-adjoint par rapport à la forme $<,>$ définie dans (3.54) .

Avant de démontrer ce théorème, nous allons déduire quelques conséquences.

Corollaire 4.2 *On note i_∞ le morphisme obtenu en posant $E = D_\infty$ dans (3.56). Alors, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} J_0(N)(\mathbb{Q}) \arrow[r, "T_l"] \arrow[d, hook, "i_\infty"] & J_0(N)(\mathbb{Q}) \arrow[d, hook, "i_\infty"] \\ \widehat{CH}(N) \arrow[r, "\hat{T}_l"] & \widehat{CH}(N) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration : soit $D \in J_0(N)(\mathbb{Q})$. Avec les notations de (3.56), l'énoncé revient à montrer que $T_l g_D = g_{T_l D}$, c'est-à-dire que $\hat{D}_\infty$ et $\hat{T}_l(D, g_D)$ sont orthogonaux. On a

$$\hat{T}_l(\hat{D}_\infty) = \big((l+1)D_\infty, T_l g_\infty\big).$$

D'après la partie 1 du théorème 4.1, $T_l g_\infty$ est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $(l+1)D_\infty$, d'où on déduit qu'il existe une constante c telle que

$$T_l g = (l+1)g_\infty + c.$$

Nous n'avons pas besoin de connaître la valeur de c dans cette démonstration. Elle sera toutefois calculée plus bas (Proposition 4.17, 2). On a

$$\begin{array}{rcccc} <\hat{D}_\infty, \hat{T}_l(D, g_D)> & = & <\hat{T}_l \hat{D}_\infty, (D, g_D)> & & \\ & = & (l+1)<\hat{D}_\infty, (D, g_D)> & + & <(0, c), (D, g_D)> \\ & = & 0 & + & 0, \end{array}$$

d'après la définition de g_D et du fait que $\deg D_{\mathbb{C}} = 0$ (remarque 3.20, 1). ■

Corollaire 4.3 *La correspondance de Hecke $T_l : J_0(N)_{\mathbb{Q}} \to J_0(N)_{\mathbb{Q}}$, pour l premier à N, est auto-adjointe par rapport à l'accouplement de Néron-Tate.*

Remarque 4.4 Ce corollaire est bien connu des spécialistes et peut être déduit des propriétés classiques de l'algèbre de Hecke, sans faire appel au théorème 4.1.

Démonstration : soient $A, B \in J_0(N)(\mathbb{Q})$. On note D_A un diviseur sur $\mathcal{X}_0(N)$, orthogonal à toute fibre verticale, tel que $D_A \otimes \mathbb{Q} = A$, et D_B est choisi de façon similaire. On pose

$$\hat{D}_A = i_\infty(D_A), \quad \hat{D}_B = i_\infty(D_B).$$

D'après la remarque 3.20, 2,

$$\begin{aligned} <T_l A, B>_{NT} &= -<i_\infty(T_l D_A), i_\infty(D_B)> \\ &= -<\hat{T}_l \hat{D}_A, \hat{D}_B> && (4.66) \\ &= -<\hat{D}_A, \hat{T}_l \hat{D}_B> && (4.67) \\ &= -<i_\infty(D_A), i_\infty(T_l D_B)> && (4.68) \\ &= <A, T_l B>_{NT}. \end{aligned}$$

On a utilisé la partie 3 du théorème 4.1 dans (4.67) et le corollaire 4.2 dans (4.66) et (4.68). ■

Démonstration du théorème 4.1, 2 : on suppose la partie 1 de l'énoncé. Il suffit de montrer que l'image par T_l d'un diviseur principal l'est aussi. On reprend les notations de la section 2.3, p. 16. Le corps de fonctions $k(\mathcal{X}_0(lN))$ est une $k(\mathcal{X}_0(N))$-Algèbre, via le morphisme $\alpha^* : k(\mathcal{X}_0(N)) \to k(\mathcal{X}_0(lN))$. L'extension de corps $\mathbb{Q}(X_0(N)_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathbb{Q}(X_0(lN)_{\mathbb{Q}})$ est finie, de degré $l+1$. Le schéma $\mathcal{X}_0(N)$ est normal, donc l'application norme donnée par cette extension induit une application multiplicative $N_\alpha : \alpha_* O_{\mathcal{X}_0(N)} \to O_{\mathcal{X}_0(N)}$ ([EGA II], 6.5). Au niveau de la fibre générique, cette application peut s'exprimer de la manière suivante : soit $h \in \mathbb{Q}(X_0(lN)_{\mathbb{Q}})$, on a

$$N_\alpha(h)(\Gamma_0(N)z) = \prod_{j=0}^{l} h(\Gamma_0(lN)\gamma_i z),$$

où $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_l\}$ est un système de représentants pour $\Gamma_0(lN)\backslash\Gamma_0(N)$.

Soit $f \in k(\mathcal{X}_0(N))$. On pose $g := N_\alpha(\beta^* f)$. Sur $\mathbb{C}$ on a

$$g(\Gamma_0(N)z) = \prod_{j=0}^{l} f(\Gamma_0(N)v_l\gamma_j z).$$

En comparant avec le lemme 2.13 (2.25), on obtient

$$\hat{T}_l(\mathrm{div}(f), -\log|f_{\mathbb{C}}|^2) = (\mathrm{div}(g), -\log|g_{\mathbb{C}}|^2).\blacksquare$$

On donnera une démonstration de la partie 1 du théorème 4.1 dans la section 4.3, p. 54, et une démonstration de la partie 3 à la fin de la section 4.4, p. 58.

Remarques 4.5 *1.* Soit $\varphi \in C^\infty(X_0(N))$. On définit

$$T_l\varphi(P) := \varphi(T_l(P)).$$

Cette fonction est définie sur $X_0(N)$ mais elle n'est pas forcement C^∞. La raison est que l'opérateur de Hecke peut introduire des singularités aux pointes et aux points elliptiques. On illustre la cas de la manière suivante : dire que φ est C^∞ en $\Gamma_0(N)\infty$ signifie qu'il existe une fonction h, définie et C^∞ sur un disque contenant l'origine, telle que $\varphi(\Gamma_0(N)z) = h(q)$ (cf. (2.4)) pour $\mathrm{Im}(z)$ suffisamment grande. On utilise la formule (2.26) ;

$$T_l\varphi(\Gamma_0(N)z) = h(q^l) + \sum_{j=0}^{l-1} h(q^{1/l}e^{2\pi ij/l}).$$

Si h est holomorphe, les puissances fractionnaires de q s'annulent dans le développement de Laurent. C'est ainsi qu'on démontre le fait classique que les opérateurs de Hecke préservent « l'holomorphie à l'infini ». Par contre, il est possible de donner une fonction h qui est C^∞ en $q = 0$ et telle que la somme $\sum_{j=0}^{l-1} h(q^{1/l}e^{2\pi ij/l})$ ne l'est pas (par exemple $l = 2$, N impair, $h(q) = (\mathrm{Re}(q))^2$).

2. Soit f une distribution sur $X_0(N)$. La remarque ci-dessus exclut la possibilité de définir une distribution $T_l f$ par

$$T_l f(\varphi) = f(T_l \varphi).$$

Dans ce travail, nous utilisons les propriétés de régularité des fonctions de Green L_1^2 admissibles pour définir une action sur ces distributions (cf. théorème 4.1, 1).

4.1 Multiplicité des points de Hecke

Soit $P \in X_0(N) = \mathcal{X}_0(N)(\mathbb{C})$. On écrit $T_l P$ sous la forme

$$T_l(P) = \sum_{i=1}^{t} a_i [Q_i], \quad Q_i \in X_0(N),$$

où $Q_i \neq Q_j$ si $i \neq j$ et les a_i sont des entiers strictement positifs. La représentation est ainsi uniquement déterminée.

Définition 4.6 *Soient $P, Q \in X_0(N)$. On définit*

$$m_P(Q) = \begin{cases} 0 & si\ Q \notin |T_l P| \\ a_i & si\ Q = Q_i \in |T_l P| \end{cases}$$

On appelle $m_P(Q)$ la multiplicité de Q dans $T_l P$.[6]

Dans l'Annexe A on calcule, dans le cas $N = 1$, les multiplicités associées aux points elliptiques (Proposition A.1). On ne se servira pas de ce calcul dans cette thèse.

Le but de cette section est d'établir les propriétés de la multiplicité dont on aura besoin dans la suite, notamment la Proposition ci-dessous, qui sera utilisée pour démontrer la Proposition 4.10 de la section suivante, qui représente le cœur technique de la partie 1 du théorème 4.1.

Proposition 4.7 *Soient $P, Q \in Y_0(N)$. Alors,*

$$m_Q(P)(ordre\ de\ P) = m_P(Q)(ordre\ de\ Q).$$

La démonstration de la Proposition découle du lemme suivant.

Lemme 4.8 *1. Soient $P, Q \in Y_0(N)$. Alors $Q \in |T_l(P)|$ si et seulement si $P \in |T_l(Q)|$.*

2. On a

$$|\mathrm{Aut}(Q)| m_P(Q) = |\mathrm{Aut}(P)| m_Q(P). \tag{4.69}$$

Remarque 4.9 L'affirmation (4.65) peut se déduire du lemme 4.8, 1.

6. Ce nombre dépend de l mais on n'a pas inclus cette dépendence dans la notation. Nous espérons que ceci ne pose pas de problèmes de compréhension car l restera fixé.

Démonstration : soit (E, C) le couple représentée par P. Un point $R \in |T_l P|$ correspond à un couple (E', C') et à une isogénie $\varphi : E \to E'$ de degré l telle que $\varphi(C) = C'$. L'isogénie duale $\hat{\varphi} : E' \to E$ est de degré l et $\hat{\varphi}(C') = C$, de sorte que $R \in |T_l P|$. Ceci montre la partie 1.

Pour montrer (4.69), on peut supposer $Q \in |T_l P|$. Soit (E^*, C^*) le couple qu'il représente et soit

$$M_P(Q) = \{\varphi | \varphi : E \longrightarrow E^* \text{ isogénie de degré } l \text{ t. q. } \varphi(C) = C^*\}.$$

De même, on pose

$$M_Q(P) = \{\varphi | \varphi : E^* \longrightarrow E \text{ isogénie de degré } l \text{ t. q. } \varphi(C^*) = C\}.$$

On déduit $m_P(Q) = |M_P(Q)|$ et $m_Q(P) = |M_Q(P)|$. La construction précédente au moyen de l'isogénie duale définit une application

$$\xi : M_P(Q) \longrightarrow M_Q(P). \tag{4.70}$$

On introduit une relation d'équivalence dans $M_P(Q)$. On pose $\varphi_1 \sim \varphi_2$ s'il existe $\phi \in$Aut(E, C) et $\phi^* \in$Aut(E^*, C^*) tels que

$$\phi^* \circ \varphi_2 = \varphi_1 \circ \phi. \tag{4.71}$$

On a $|M_P(Q)/\sim| = m_P(Q)/\mathrm{Aut}(P)$. De façon analogue on définit une relation d'équivalence $\sim^*$ sur $M_Q(P)$ de sorte que $|M_Q(P)/\sim^*| = m_Q(P)/\mathrm{Aut}(Q)$.

L'égalité (4.71) entraîne

$$\hat{\varphi}_2 \circ \hat{\phi}^* = \hat{\phi} \circ \hat{\varphi}_1.$$

Ceci permet de vérifier que l'application ξ respecte les relations d'équivalence introduites. On obtient donc une application $M_P(Q)/\sim \longrightarrow M_Q(P)/\sim^*$. On vérifie de même que cette application est injective. On conclut

$$\frac{m_P(Q)}{\mathrm{Aut}(P)} \leq \frac{m_Q(P)}{\mathrm{Aut}(Q)}.$$

Puis on déduit l'égalité par symétrie. ■

Démonstration de la Proposition 4.7 : on déduit l'énoncé du lemme 2.1 et du lemme 4.8, 2. ■

4.2 Action des opérateurs de Hecke sur les fonctions de Green L_1^2 admissibles

Dans toute cette section N est supposé sans facteurs carrés. Le but de cette section est de démontrer la

Proposition 4.10 *Soit D un diviseur à coefficients réels sur $X_0(N)$ et g une fonction de Green L_1^2 admissible pour D. Alors,*

1. *$T_l g$ est C^∞ en dehors de $|T_l(S_D)|$ (cf. (4.63)).*
2. *Soient $P \in X_0(N)$ et m sa multiplicité dans $T_l D$. Il existe un voisinage U de P et une carte locale θ centrée en P tels que*

$$T_l g = -m \log |\theta(\cdot)|^2 + b \qquad \text{sur } U, \tag{4.72}$$

   où $b \in L_1^2(U)_{loc}$ et b est C^∞ en dehors de P.

3. *Il est possible de choisir une décomposition du type donné dans (3.36)*

$$g = h + \psi,$$

   où h est une fonction de Green C^∞ et $\psi \in L_1^2(X_0(N))$, de façon à ce qu'une décomposition du même type pour $T_l g$ soit

$$T_l g = T_l h + T_l \psi.$$

Remarque 4.11 Si l'on modifie l'hypothèse par « g est une fonction de Green C^∞ », il n'est pas vrai en général que $T_l g$ est une fonction de Green C^∞ pour $T_l D$ (ce qui est équivalent à $b \in C^\infty(U)$ pour tout développement du type (4.72), cf. remarque 3.4, 1), d'après ce qui a été expliqué dans la remarque 4.5, 1. Autrement dit, les opérateurs de Hecke ne préservent pas « l'espace des fonctions de Green C^∞ ». Ceci exclut la possiblité de considérer une action de ces opérateurs sur le groupe de Chow arithmétique de Gillet-Soulé ([Gi-So]). De même, la conclusion de la partie 3 de la Proposition n'est pas valable pour toute décomposition du type donné dans (3.36).

On établit deux résultats préliminaires.

Lemme 4.12 *Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| \leq 1\}$. Soit $b : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction C^∞ en dehors de 0, continue en 0 et appartenant à $L_1^2(\mathbb{D})$. On pose $f(z) = b(z^n \zeta)$, où n est un rationnel positif et $\zeta \in \mathbb{C}$ satisfait $|\zeta| = 1$. Alors $f \in L_1^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration :

1. $f \in L^2(\mathbb{D})$: comme b est continue en 0, f est bornée.
2. $\partial f \in L^2(\mathbb{D})$: on a

$$\begin{aligned}
\int_D \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dz \wedge d\bar{z} &= \int_D \left|\frac{\partial}{\partial z}\big(b(z^n\zeta)\big)\right|^2 dz \wedge d\bar{z} \\
&= n^2 \int_D \left|\frac{\partial b}{\partial z}(z^n\zeta)\right|^2 |z|^{2n-2} dz \wedge d\bar{z} \\
&= -2in^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left|\frac{\partial b}{\partial z}(r^n e^{i(n\theta+c)})\right|^2 r^{2n-1} dr \wedge d\theta,
\end{aligned}$$

où on a utilisé des coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$ et on a écrit $\zeta = e^{ic}$ avec $0 \leq c < 2\pi$. On fait les changements de variable $r = u^{1/n}$ puis $\theta = (\alpha - c)/n$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_D \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 dz \wedge d\bar{z} &= -2in \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left|\frac{\partial b}{\partial z}(ue^{i(n\theta+c)})\right|^2 udu \wedge d\theta \\
&= -2i \int_c^{2\pi n+c} \int_0^1 \left|\frac{\partial b}{\partial z}(ue^{i\alpha})\right|^2 udu \wedge d\alpha.
\end{aligned}$$

Soit T le plus petit entier positif tel que $T \geq n+1$. La fonction sous l'intégrale est invariante par $\alpha \mapsto \alpha + 2\pi m$, pout tout entier m, donc on a la majoration

$$\int_c^{2\pi n+c} \int_0^1 \left|\frac{\partial b}{\partial z}(ue^{i\alpha})\right|^2 udu \wedge d\alpha \leq T \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left|\frac{\partial b}{\partial z}(ue^{i\alpha})\right|^2 udu \wedge d\alpha.$$

Cette dernière intégrale converge par hypothèse. ■

Lemme 4.13 *Soit*

$$\pi : \mathbb{H} \longrightarrow Y_0(N)$$

le morphisme canonique. Soient $U \subseteq Y_0(N)$ un ouvert et $p \in \mathbb{H}$, un point qui n'est pas elliptique, tel que $\pi(p) \in U$. Soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Alors φ est C^∞ en $\pi(p)$ si et seulement si $\pi^*\varphi$ est C^∞ en p.

Démonstration : l'énoncé est une conséquence directe du fait que, si p n'est pas un point elliptique, la carte locale donnée dans (2.3) est un difféomorphisme C^∞ entre un voisinage de p et un disque. ■

Démonstration de la Proposition 4.10 : on peut se réduire au cas $D = [Q], \quad Q \in X_0(N)$. On commence par vérifier la partie 1. Soit E l'ensemble des points elliptiques. Soit $Q_0 = \Gamma_0(N)z_0 \in Y_0(N)$ n'appartenant ni à $|T_l Q|$ ni à $|T_l(E)|$. Pour z au voisinage de z_0 on a

$$\begin{aligned} \pi^* T_l g(z) &= \sum_{j=1}^{l} g(\Gamma_0(N)\alpha_j z) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \pi^* g(\alpha_j z). \end{aligned}$$

Aucun des points de l'ensemble $\{\alpha_0 z_0, \ldots, \alpha_l z_0\}$ n'appartient à $|T_l E| \cup |T_l Q|$ (lemme 4.8, 1). Donc, au voisinage de z_0, les fonctions $\pi^* g(\alpha_j \cdot)$ sont C^∞. Le lemme 4.13 permet de conclure que $T_l g$ est C^∞ en Q_0.

Maintenant on montre (2). Soient $P \in X_0(N)$ et m la multiplicité de P dans $T_l Q$. On divise la démonstration en quatre cas.

Cas 1. Q n'est pas une pointe et P n'est pas une pointe : soit $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$ un système de représentants pour $\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N)v_l\Gamma_0(N)$, choisi de sorte que l'on a

$$T_l([\Gamma_0(N)z]) = \sum_{j=0}^{l} [\Gamma_0(N)\alpha_j z], \quad z \in \mathbb{H}.$$

On choisit $q, p \in \mathbb{H}$ tels que

$$Q = \Gamma_0(N)q, \quad P = \Gamma_0(N)p.$$

Soient $I = \{j \text{ tel que } \Gamma_0(N)\alpha_j p = \Gamma_0(N)q\}$ et $J = \{j \text{ tel que } \Gamma_0(N)\alpha_j p \neq \Gamma_0(N)q\}$. Or, $|I| =$ multiplicité de Q dans $T_l P$. L'ensemble I est vide si et seulement si $P \notin |T_l Q|$ (lemme 4.8, 1).

Nous faisons l'hypothèse additionnelle que le système $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\}$ a été choisi de sorte que $\alpha_j p = q$ pour tout $j \in I$.

On a

$$T_l g(\Gamma_0(N)z) = \sum_{j \in I} g(\Gamma_0(N)\alpha_j z) + \sum_{j \in J} g(\Gamma_0(N)\alpha_j z). \tag{4.73}$$

Dans un voisinage U de Q on a

$$g = -\log|\theta(\cdot)|^2 + b$$

avec $b \in L_1^2(U)$, de classe C^∞ en dehors de Q, continue en Q et θ une carte locale centrée en Q. Pour chaque $j \in \{0, \ldots, l\}$, on note n_j l'ordre de $\alpha_j p$ et τ_j la carte locale autour de $\alpha_j p$ donnée par (2.3). On pose aussi $n_q = \text{ordre}(Q)$ et $n_p = \text{ordre}(P)$. On étudie la première somme de (4.73) pour z proche de p avec le développement ci-dessus :

$$\sum_{j\in I} g(\alpha_j z) = -\sum_{j\in I} \log|\tau_j(\alpha_j z)|^2 + \sum_{j\in I} b\big(\tau_j(\alpha_j z)\big).$$

On a

$$\begin{aligned}
\tau_j(\alpha_j z)^{n_p} &= \Big(\frac{\alpha_j z - \alpha_j p}{\alpha_j z - \alpha_j \bar{p}}\Big)^{n_j n_p} \\
&= \Big(\frac{z-p}{z-\bar{p}}\Big)^{n_j n_p} \qquad (4.74)\\
&= \tau_p(z)^{n_j} \qquad (4.75)
\end{aligned}$$

L'égalité (4.74) est une conséquence du fait que le birapport est invariant sous l'action des transformations de Möbius (ce n'est pas une « simplification par α_j »). Pour tout $j \in I$, on a

$$\tau_p(z)^{n_j} = \tau_q(z)^{n_q}.$$

Par la Proposition 4.7, on a

$$n_q/n_p = m/|I|. \qquad (4.76)$$

Si n_q/n_p n'est pas un entier, on interprète $\tau_q(z)^{n_q/n_p} = \exp\big((n_q/n_p)\log\tau_q(z)\big)$ avec log la détermination principale du logarithme. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} g(\alpha_j z) &= -\sum_{j\in I} \log|\tau_q(z)|^{2n_q/n_p} + \sum_{j\in I} b\big(\tau_q(z)^{n_q/n_p}\big) \\
&= -|I|\log|\tau_q(z)|^{2m/|I|} + |I| b\big(\tau_q(z)^{n_q/n_p}\big) \\
&= -m\log|\tau_q(z)|^2 + |I| b\big(\tau_q(z)^{n_q/n_p}\big)
\end{aligned}$$

On obtient

$$T_l g(z) = -m\log|\tau_p(z)|^2 + \tilde{b}(z),$$

où $\tilde{b}(z) = |I| b\big(\tau_q(z)^{n_q/n_p}\big) + \sum_{j\in J} g(\alpha_j z)$.

Pour chaque $j \in J$, il existe une fonction b_j définie sur un disque contenant l'origine, de classe C^∞ en dehors de 0, continue en 0 et appartenant à L_1^2, telle que

$$g(z) = b_j(\tau_j z)$$

au voisinage de $\alpha_j p$. Alors,

$$\tilde{b}(z) = \sum_{j\in I} b\big(\tau_q(z)^{n_q/n_p}\big) + \sum_{j\in J} b_j\big(\tau_q(z)^{n_j/n_p}\big).$$

On conclut par le lemme 4.12.

Cas 2. $Q \neq P$ et P est une pointe : dans ce cas $P \notin |T_l Q|$ (lemme 2.15). Or, $m = 0$ et on doit montrer que $T_l g$ est L_1^2 au voisinage de P. Soit q la carte locale autour de P donnée par (2.4). On dispose du développement

$$g = \log(-\log|q|) + b, \quad q \to 0,$$

avec b de classe C^∞. Ceci est justifié par le lemme 3.15 si Q n'est pas une pointe, et par le lemme 3.11 si Q est une pointe.

On utilise une décomposition de $\Gamma_0(N) v_l \Gamma_0(N)$ de la forme donnée par le lemme 2.14. Alors, $\sigma\beta_j$ agit par

$$z \mapsto \begin{cases} (\sigma z + c_j)/l & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ l\sigma z + c_l & \text{si } j = l. \end{cases}$$

Ceci entraîne

$$q(\beta_j z) = \begin{cases} q(z)^{1/l} e^{2\pi i c_j / l} & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ q(z)^l & \text{si } j = l, \end{cases} \tag{4.77}$$

avec $q(z)^{1/l} = e^{(2\pi i \sigma z)/(sl)}$ (cf. la notation de (2.4)).

On a

$$\begin{aligned} T_l g &= \sum_{j=0}^{l} \log(-\log(|q(\beta_j z)|)) + \sum_{j=0}^{l} b\big(q(\beta_j z)\big) \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{l-1} \log(-\log|q^{1/l}|)\Big) + \log(-\log|q^l|) + \Big(\sum_{j=0}^{l-1} b(q^{1/l} e^{2\pi i c_j/l})\Big) + b(q^l) \end{aligned}$$

On conclut par l'exemple 3.5 et le lemme 4.12.

Cas 3. Q est une pointe et $P = Q$: dans ce cas $m = l+1$ (lemme 2.15). On pose $Q = \Gamma_0(N)c$, avec $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Soit q la carte locale autour de c donnée par (2.4). On a

$$g = -\log|q(\cdot)|^2 + b$$

au voisinage de Q, avec b de type L_1^2 et de classe C^∞ en dehors de Q. On peut écrire

$$T_l g = -T_l \log|q(\cdot)|^2 + T_l b.$$

On choisit une décomposition de la double classe $\Gamma_0(N) v_l \Gamma_0(N)$ de la forme donnée par le lemme 2.14. En utilisant (4.77) on déduit

$$\begin{aligned} T_l \log |q(z)|^2 &= \sum_{j=0}^{l} \log \left|q(\beta_j z)\right|^2 \\ &= \log \Big|\prod_{j=0}^{l} q(\beta_j z)\Big|^2 \\ &= \log \Big|q^l \prod_{j=0}^{l-1} q^{1/l} e^{2\pi i c_j / l}\Big|^2 \\ &= \log \left|q^{l+1}\right|^2 \\ &= (l+1) \log \left|q\right|^2. \end{aligned}$$

Maintenant on montre que $T_l b$ est dans $L_1^2(U')_{loc}$. Par ce qui a été démontré jusqu'à ici, on sait que $T_l b$ est C^∞ sur $U' - Q$. Il ne reste alors qu'à montrer que $T_l b$ est L_1^2 au voisinage de Q. On a (lemme 3.11)

$$b(z) = \log(-\log |q|) + b_1(z),$$

où b_1 est C^∞. On conclut comme dans le Cas 2.

Cas 4. Q est une pointe et P n'est pas une pointe : dans ce cas $P \notin |T_l Q|$ (lemme 2.15). Or, $m = 0$ et on doit montrer que $T_l g$ est L_1^2 au voisinage de P. On pose $P = \Gamma_0(N)p$ où $p \in \mathbb{H}$. Pour chaque $0 \leq j \leq l$, on note τ_j comme dans le Cas 1. Q est une pointe, donc on peut écrire

$$g(z) = b_j(\tau_j z), \quad z \to \alpha_j p,$$

où b_j est une fonction défini sur un disque contenant l'origine, de classe C^∞ en dehors de 0, continue en 0 et de classe L_1^2. Pour z proche de p, on a

$$\begin{aligned} T_l g(z) &= \sum_{j=0}^{l} g(\alpha_j z) \\ &= \sum_{j=0}^{l} b_j(\tau_j \alpha_j z) \\ &= \sum_{j=0}^{l} b_j\big((\tau_p z)^{n_j/n_p}\big) \end{aligned}$$

par (4.75). On conclut par le lemme 4.12.

Maintenant on montre la partie 3 de la Proposition 4.10. Il suffit de décomposer

$$g = h + \psi,$$

de sorte que

1. la fonction h s'annule au voisinage de tout point elliptique différent de Q et de toute pointe différente de Q.
2. soit θ la carte locale autour de Q donnée dans (2.4) si Q est une pointe ou celle donnée dans (2.3) sinon. Alors

$$h = -\log|\theta(\cdot)|^2$$

au voisinage de Q.

Soit $P \in |T_l(Q)|$, de multiplicité m. Par ce qui a été montré, on a

$$T_l h = -m \log|\theta(\cdot)|^2,$$

au vosinage de P et $T_l h$ est C^∞ en dehors de $T_l Q$, d'où $T_l h$ est une fonction de Green pour $T_l Q$. ■

4.3 Admissibilité

Dans cette section on démontre la partie 1 du théorème 4.1. Vue la définition 3.6 et la Proposition 4.10, il reste seulement à vérifier que $T_l g$ est admissible. Comme précédemment, on se réduit au cas $D = [Q]$. Soit $S = |T_l Q| \cup |T_l(E)| \cup \{$ pointes $\}$. Or, $T_l g$ est C^∞ en dehors de S, donc au voisinage d'un point $z \notin S$, on a

$$\begin{aligned} dd^c(T_l g)(z) &= \sum_{j=0}^{l} dd^c\Big(g(\alpha_j z)\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{l} dd^c(\alpha_j^* g)(z) \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_j^*(dd^c g)(z) \qquad (4.78) \\ &= \sum_{j=0}^{l} \alpha_j^* \mu_N(z) \\ &= \sum_{j=0}^{l} \mu_N(z) \\ &= (l+1)\mu_N(z) \qquad (4.79) \end{aligned}$$

En (4.78) on a utilisé le lemme 3.2. Soit $\epsilon > 0$. On définit

$$S_\epsilon = \bigcup_{s \in S} B(s, \epsilon),$$

où $B(s,\epsilon)$ est la préimage par une carte locale autour de s d'un disque de rayon ϵ. Soit $\varphi \in C^\infty(X_0(N))$. On a

$$\begin{aligned} dd^c(T_l g)(\varphi) &= (T_l g)(dd^c\varphi) \\ &= \int_{X_0(N)} (T_l g) dd^c\varphi \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{X_0(N)-S_\epsilon} (T_l g) dd^c\varphi + \int_{S_\epsilon} (T_l g) dd^c\varphi \right). \end{aligned}$$

En utilisant (4.79) on a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X_0(N)-S_\epsilon} T_l g dd^c\varphi &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X_0(N)-S_\epsilon} \varphi dd^c T_l g \\ &= (l+1) \lim_{\epsilon \to 0} \int_{X_0(N)-S_\epsilon} \varphi \mu_N \\ &= (l+1) \int_{X_0(N)} \varphi \mu_N \end{aligned}$$

Pour chaque $s \in S$, notons m_s la multiplicité de s dans $T_l Q$. En utilisant le développement donné par la Proposition 4.10 (2), on a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B(s,\epsilon)} T_l g dd^c\varphi &= -m_s \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B(s,\epsilon)} \log|\psi(\cdot)|^2 dd^c\varphi + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B(s,\epsilon)} b dd^c\varphi \\ &= -m_s \varphi(s), \end{aligned}$$

par l'équation de Poincaré-Lelong ([Gri-Ha], p. 388) et parce que b est L^2 en s. Ceci montre l'égalité de courants

$$dd^c T_l g + \delta_{T_l Q} = (l+1)\mu_N$$

et achève la démonstration. ■

4.4 Autoadjonction

Proposition 4.14 *1. On suppose N sans facteurs carrés. Soient $D_1, D_2 \in Div\,(X_0(N))$ tels que $|D_1| \cap |T_l D_2| = \emptyset$. Soient g_1, g_2 des fonctions de Green L_1^2 admissibles pour D_1, D_2. Alors*

$$<T_l g_1, g_2> = <g_1, T_l g_2>. \tag{4.80}$$

2. Soit D un diviseur sur $X_0(N)$ qui ne contient pas de pointes et g une fonction de Green L_1^2 admissible pour D. Alors,

$$\int_{X_0(N)} T_l g \mu_N = (l+1) \int_{X_0(N)} g \mu_N.$$

Démonstration : on commence par la démonstration de (2). Soit F un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma_0(N)$ sur $\mathbb{H}$. On reprend les notations du lemme 2.13, (2.25) et (2). Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{X_0(N)} (T_l g)\mu_N &= \sum_{j=0}^{l} \int_F g(v_l \gamma_j z)\mu_N(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{\gamma_j F} g(v_l z)\mu_N(z)
\end{aligned}$$

On a utilisé que μ_N est invariant sous l'action de $\Gamma_0(N)$. En revanche, la fonction $g(v_l \cdot)$ n'est pas invariante par $\Gamma_0(N)$, donc on doit tenir compte dans nos calculs du choix du domaine fondamental. L'ensemble $F' = \bigcup_{j=0}^{l} \gamma_j F$ est un domaine fondamental pour $\Gamma_0(lN)$. La réunion qui définit F' est disjointe, à un ensemble de mesure nulle près. On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{l} \int_{\gamma_j F} g(v_l z)\mu_N(z) &= \int_{F'} g(v_l z)\mu_N(z) \\
&= \int_{v_l F'} g(z)\mu_N(z).
\end{aligned}$$

On a utilisé que μ_N est invariant sous $GL_2^+(\mathbb{R})$. L'ensemble $v_l F'$ est un domaine fondamental pour $v_l \Gamma_0(lN) v_l^{-1} = \Gamma_0(N, l)$. Or, g étant invariant par l'action de $\Gamma_0(N, l)$, on peut remplacer le domaine d'intégration $v_l F'$ par un domaine fondamental F'' pour l'action de $\Gamma_0(N, l)$ quelconque. On choisit $F'' = \bigcup_{j=0}^{l} \delta_j F$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{v_l F'} g(z)\mu_N(z) &= \int_{F''} g(z)\mu_N(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{\delta_j F} g(z)\mu_N(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_F g(z)\mu_N(z) \\
&= (l+1) \int_F g(z)\mu_N(z)
\end{aligned}$$

ce qui montre (2).

Maintenant montrons (1) : on remarque que l'on a $|T_l D_1| \cap |D_2| = \emptyset$ (lemme 4.8, 1 et lemme 2.15), de sorte que les deux côtés de (4.80) sont bien définis. On choisit des décompositions $g_i = h_i + \psi_i$ de la forme donnée dans la Proposition 4.10 (3). On rappelle la notation $w_i := dd^c g_i + \delta_{D_i}$ et on pose $w(T_l h_i) := dd^c T_l h_i + \delta_{T_l D_i}$, qui est un courant C^∞. On va montrer que

$$\int_{X_0(N)} T_l h_1 w_2 = \int_{X_0(N)} h_1 w(T_l h_2). \tag{4.81}$$

Tout d'abord, on a

$$T_l h_1 \delta_{D_2} = h_1 \delta_{D_2} \tag{4.82}$$

par la définition de T_l. Puis on fixe un domaine fondamental F pour l'action de $\Gamma_0(N)$ sur $\mathbb{H}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{X_0(N)} T_l h_1 dd^c h_2 &= \int_F T_l h_1 dd^c h_2 \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_F h_1(v_l \gamma_j z) dd^c h_2(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{\gamma_j F} h_1(v_l z)(\gamma_j^{-1})^*(dd^c h_2)(z) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{\gamma_j F} h_1(v_l z) dd^c h_2(z) \qquad (4.83) \\
&= \int_{F_{\Gamma_0(lN)}} h_1(v_l z) dd^c h_2(z).
\end{aligned}$$

Pour l'égalité (4.83) on a utilisé le lemme 3.2 et le fait que h_2 est invariante sous l'action de $\Gamma_0(N)$. On a défini $F_{\Gamma_0(lN)} := \bigcup_{j=0}^{l} \gamma_j F$, qui est un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma_0(lN)$ sur $\mathbb{H}$. On pose $v_l' = l v_l^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{F_{\Gamma_0(lN)}} h_1(v_l z) dd^c h_2(z) &= \int_{v_l F_{\Gamma_0(lN)}} h_1(z)(v_l')^* dd^c h_2(z) \\
&= \int_{v_l F_{\Gamma_0(lN)}} h_1(z) dd^c \big(h_2(v_l' z)\big).
\end{aligned}$$

L'ensemble $v_l F_{\Gamma_0(lN)}$ est un domaine fondamental pour l'action de $\Gamma_0(N, l)$ sur $\mathbb{H}$. Par ailleurs, le courant $h_1(\cdot) dd^c\big(h_2(v_l' \cdot)\big)$ est invariant sous l'action de $\Gamma_0(N) \cap v_l \Gamma_0(N) v_l^{-1} =$

$\Gamma_0(N,l)$. On peut donc remplacer le domaine d'intégration par un autre domaine fondamental pour ce groupe. On choisit $F' := \bigcup_{j=0}^{l} \delta_j F$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{v_l F_{\Gamma_0(lN)}} h_1(z) dd^c\big(h_2(v_l' z)\big) &= \int_{F'} h_1(z) dd^c\big(h_2(v_l' z)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{\delta_j F} h_1(z) dd^c\big(h_2(v_l' z)\big).
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $z = \delta_j w$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{l} \int_{\delta_j F} h_1(z) dd^c\big(h_2(v_l' z)\big) &= \sum_{j=0}^{l} \int_{F} h_1(\delta_j w) \delta_j^* dd^c\big(h_2(v_l' w)\big) \\
&= \sum_{j=0}^{l} \int_{F} h_1(w) dd^c\big(h_2(v_l' \delta_j w)\big) \qquad (4.84) \\
&= \int_{F} h_1(w) dd^c\big(T_l h_2(w)\big).
\end{aligned}$$

L'égalité (4.84) est justifiée par l'invariance de h_1 sous $\Gamma_0(N)$ et par le lemme 3.2. Combinée avec (4.82), la dernière égalité montre (4.81). La même méthode permet de montrer que

$$\begin{aligned}
\int_{X_0(N)} T_l \psi_1 w_2 &= \int_{X_0(N)} \psi_1 w(T_l h_2), \\
\int_{X_0(N)} \psi_2 w(T_l h_1) &= \int_{X_0(N)} T_l \psi_2 w_1, \\
\int_{X_0(N)} \partial\big(T_l \psi_1\big) \wedge \bar{\partial} \psi_2 &= \int_{X_0(N)} \partial \psi_1 \wedge \bar{\partial}\big(T_l \psi_2\big).
\end{aligned}$$

Ces égalités et la définition de $<T_l g_1, g_2>$ et de $<g_1, T_l g_2>$ donnée dans (3.53) permettent de conclure. ■

Démonstration du théorème 4.1, 3 : Soient $(D_1, g_1), (D_2, g_2)$ deux diviseurs compactifiés. D'après la Proposition 4.14, il reste seulement à vérifier que

$$<T_l D_1, D_2> = <D_1, T_l D_2>. \qquad (4.85)$$

On peut supposer que D_1 et D_2 sont intègres. On distingue deux cas.

Cas 1. D_1 ou D_2 est une composante irréductible de la fibre au-dessus de $p|N$: dans ce cas, un des diviseurs est vertical et propre pour l'action de T_l (lemme 2.21), d'où on déduit (4.85).

Cas 2. D_1 et D_2 sont horizontaux : on utilise la formule de projection ([Fu], Proposition 2.3).

$$\begin{aligned} <T_l D_1, D_2> &= <\beta_* \alpha^* D_1, D_2> \\ &= (l+1)<\alpha^* D_1, \beta^* D_2> \\ &= <D_1, \alpha_* \beta^* D_2>. \end{aligned}$$

On conclut par le théorème 2.22. ■

4.5 Algèbre de Hecke arithmétique et décomposition de $\widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N)$ en sous-espaces propres

Définition 4.15 *L'algèbre de Hecke arithmétique $\hat{\mathbb{T}}_N$ est la sous-algèbre de End($\widehat{CH}(N)$) engendrée par les endomorphismes $\hat{T}_l$ avec l ne divisant pas N.*

Lemme 4.16 *La $\mathbb{Z}$-algèbre $\hat{\mathbb{T}}_N$ est commutative.*

Démonstration : soient l, l' deux nombres premiers différents ne divisant pas N. Pour un point $P = \Gamma_0(N)z \in X_0(N)$, la correspondance $T_l \circ T_{l'}$ est donnée par

$$T_l \circ T_{l'}[P] = \sum_{j=1}^{(l+1)(l'+1)} [\Gamma_0(N)\alpha_j z], \tag{4.86}$$

où

$$\Gamma_0(N) v_l v_{l'} \Gamma_0(N) = \bigsqcup_{j=1}^{(l+1)(l'+1)} \Gamma_0(N)\alpha_j$$

est la décomposition de la classe double $\Gamma_0(N) v_l v_{l'} \Gamma_0(N)$ sous l'action gauche de $\Gamma_0(N)$ ([Shi], Proposition 3.16, p.57). Puis on a $\Gamma_0(N) v_l v_{l'} \Gamma_0(N) = \Gamma_0(N) v_{l'} v_l \Gamma_0(N)$ ([Shi], Proposition 3.32, (1)), d'où

$$T_{l'} \circ T_l[P] = \sum_{j=1}^{(l+1)(l'+1)} [\Gamma_0(N)\alpha_j z]. \tag{4.87}$$

On déduit que pour tout diviseur D intègre horizontal

$$T_l \circ T_{l'}(D) = T_{l'} \circ T_l(D), \tag{4.88}$$

car les deux côtés de cette égalité coïncident sur la fibre générique. Puis l'égalité (4.88) est aussi valable si D est une composante irréductible d'une fibre finie, car dans ce cas D est un diviseur propre (lemme 2.21). On conclut $T_l \circ T_{l'} = T_{l'} \circ T_l$ en tant que correspondances.

Soit (D, g) un diviseur compactifié. Vu (4.88), $(T_l \circ T_{l'})g$ et $(T_{l'} \circ T_l)g$ sont des fonctions de Green L_1^2 admissibles pour $(T_l \circ T_{l'})D_{\mathbb{C}}$ (théorème 4.1, 1), d'où il existe une constante c telle que

$$(T_l \circ T_{l'})g = (T_{l'} \circ T_l)g + c.$$

Pour montrer que $c = 0$, il suffit d'évaluer l'égalité ci-dessus dans un point $P = \Gamma_0(N)z \in X_0(N)$ tel que ses deux côtés soient des fonctions C^∞. D'après (4.86) et (4.87), on a

$$\begin{aligned} (T_l \circ T_{l'})g(P) &= \sum_{j=1}^{(l+1)(l'+1)} g(\Gamma_0(N)\alpha_j z) \\ &= (T_{l'} \circ T_l)g(P), \end{aligned}$$

d'où on conclut $T_l \circ T_{l'}(D, g) = T_{l'} \circ T_l(D, g)$.■

Proposition 4.17 *On suppose N sans facteurs carrés et on reprend les notations de la section 3.4.*

1. *L'espace F et les espaces $\mathbb{R}\hat{X}_p^\infty$, $\mathbb{R}\hat{X}_p^0$, pour p premier divisant N, sont propres pour $\hat{T}_l$ de valeur propre $(l + 1)$.*
2. *L'espace $F \oplus \mathbb{R}\hat{D}_\infty$ est stable sous $\hat{T}_l$. Plus précisément,*

$$\hat{T}_l(0, c) = (l + 1)(0, c), \quad \hat{T}_l\hat{D}_\infty = (l + 1)\hat{D}_\infty + (0, c_{N,l}),$$

avec $c_{N,l} = \frac{12(l-1)}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]} \log(l)$.

Démonstration : on déduit 1 du lemme 2.21 et de l'identité

$$\hat{T}_l(0, c) = (l + 1)(0, c),$$

qui est une conséquence directe des définitions.

D'après le lemme 2.15, les diviseurs $T_l D_\infty$ et $(l+1)D_\infty$ coïncident sur la fibre générique, d'où il existe un diviseur vertical V tel que

$$T_l D_\infty = (l + 1)D_\infty + V.$$

D'après la platitude des morphismes α et β utilisés pour définir T_l (lemme 2.19), on a $V = 0$, d'où

$$T_l D_\infty = (l + 1)D_\infty.$$

D'après le théorème 4.1, 2, $T_l g_\infty$ est une fonction de Green L_1^2 admissible pour $(l+1)D_\infty$. Mais $(l+1)g_\infty$ l'est aussi, donc d'après la Remarque 3.8, 5, il existe une constante c telle que

$$\hat{T}_l \hat{D}_\infty = (l+1)\hat{D}_\infty + (0, c). \tag{4.89}$$

On reprend l'expression $g_\infty(z) = -\frac{1}{r}\log|y^k f(z)^2|$ de (3.39). Alors l'égalité (4.89) entraîne

$$T_l g_\infty(z) = -\frac{l+1}{r}\log|y^k f(z)^2| + c. \tag{4.90}$$

Pour montrer la partie 2 il faut évaluer c. On le fera en calculant la valeur régulière [7] de $T_l g_\infty$ en $\Gamma_0(N)\infty$ séparément à partir de (4.90) et de (4.91) ci-dessous. Soit q la carte locale autour de $\Gamma_0(N)\infty$ donnée dans (2.4). On considère le développement à l'infini de f

$$f(z) = a_r q^r + a_{r+1}q^{r+1} + \dots, \qquad a_r \neq 0, \quad r \geq 1.$$

On note $b_N = 12/[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]$. Du lemme 3.14 et de 4.90, on a

$$\overline{T_l g}_\infty(\infty) = (l+1)b_N \log(2\pi) - \frac{l+1}{r}\log|a_r|^2 + c.$$

On déduit de la définition de T_l

$$T_l g_\infty(z) = -\frac{1}{r}\sum_{j=0}^{l}\log\left|\big(\mathrm{Im}(\alpha_j z)\big)^k f(\alpha_j z)^2\right|. \tag{4.91}$$

On utilise $\alpha_0, \dots, \alpha_l$ comme dans (2.26). Alors

$$\mathrm{Im}(\alpha_j z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi l}\log(|q|) & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ -\frac{l}{2\pi} & \text{si } j = l. \end{cases}$$

Par ailleurs

$$|f(\alpha_j z)| = \begin{cases} |a_r q^{r/l}|h_j(q) & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ |a_r q^{rl}|h_l(q) & \text{si } j = l. \end{cases}$$

Les fonctions $h_0, \dots, h_l$ sont définies au voisinage de 0, positives, continues et satisfont $h_j(0) = 1$. On trouve

$$\begin{aligned} \overline{T_l g}_\infty(\infty) &= \lim_{z\to\infty} T_l g_\infty(z) + (l+1)\log|q|^2 + (l+1)b_N\log(-\log|q|) \\ &= -\frac{l+1}{r}\log|a_r|^2 + (l+1)b_N\log(2\pi) + b_N(l-1)\log(l). \end{aligned}$$

On déduit $c = b_N\log(l^{l-1})$. ■

7. cf. définition 3.13

Remarque 4.18 Le calcul de $c_{N,l}$ a été fait par d'autres auteurs avant la rédaction de ce memoir (cf. [Au], lemme 2.2, [Kö], lemma 7.0).

L'action de $\hat{\mathbb{T}}_N$ s'étend par $\mathbb{R}-$linéarité sur $\widehat{Div}_{\mathbb{R}}(N)$ (cf. 3.4). Elle préserve l'espace engendré par les diviseurs principaux. On déduit du théorème 4.1, 3 que $\hat{\mathbb{T}}_N$ respecte l'équivalence numérique. On dispose donc d'une action auto-adjointe de $\hat{\mathbb{T}}_N$ sur $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$. Le sous-espace $H \subset \widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$ est stable sous $\hat{\mathbb{T}}_N$, car il est défini comme l'orthogonal d'un espace stable sous $\hat{\mathbb{T}}_N$ et les opérateurs $\hat{T}_l$ sont auto-adjoints.

Lemme 4.19 *On suppose N sans facteurs carrés.*

1. *L'action de $\hat{\mathbb{T}}_N$ sur H est diagonalisable.*
2. *L'espace H se décompose en sous-espaces propres pour l'action de $\hat{\mathbb{T}}_N$ selon*

$$H = \bigoplus_f H_f, \tag{4.92}$$

où f parcourt une base de $S_2(\Gamma_0(N))$ formée de formes propres.

Démonstration : soit $\mathbb{T}_N^0$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(J_0(N))$ engendrée par les opérateurs de Hecke T_l avec l ne divisant pas N et par les involutions d'Atkin w_d avec $d|N$. L'entier N étant sans facteurs carrés, l'algèbre $\mathbb{T}_N^0$ est réduite ([C-E], Corollary 4.3). Nous avons que H est isomorphe à $J_0(N)(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$ (théorème 3.26), de sorte que l'action de $\hat{\mathbb{T}}_N$ sur H est compatible avec l'action de $\mathbb{T}_N^0$ sur $J_0(N)$ (corollaire 4.2). Soit $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ la restriction de $\hat{\mathbb{T}}_N$ à H. On conclut que $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ se plonge dans $\mathbb{T}_N^0$, d'où il résulte que $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ est une algèbre réduite.

D'après le théorème 3.26, la forme d'intersection $<,>$ est définie négative sur H.

On conclut que $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ est réduite, commutative et autoadjointe par rapport à une forme définie négative, donc diagonalisable, ce qui montre la première partie de l'énoncé. La deuxième partie découle du fait que $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ se plonge dans $\mathbb{T}_N^0$, car dans ce cas les valeurs propres de ces algèbres sont les mêmes. ■

Remarques 4.20

1. Vu que $\hat{\mathbb{T}}_{N,H}$ se plonge dans $\mathbb{T}_N^0$, les espaces H_f sont non nuls. Par le *théorème de multiplicité 1* de la théorie d'Atkin-Lehner, la dimension de H_f est 1 si f est une forme nouvelle.
2. Pour chaque forme f dans (4.92), on note $a_l(f)$ le coefficient de q^l dans le q-développement de f à l'infini. Alors

$$H_f = \{\bar{D} \in H | T_l D = a_l(f) D\},$$

où $\bar{D}$ est l'image du diviseur D dans $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$.

5 Nombres d'intersection

5.1 Dualisant relatif

Soit $\tilde{\omega}$ le faisceau dualisant relatif de $\mathcal{X}_0(N)$. Ce faisceau induit une classe d'équivalence rationnelle sur $\mathcal{X}_0(N)$. On note ω un diviseur dans cette classe. Nous avons

$$\omega_{\mathbb{Q}} := \omega \otimes \mathbb{Q} = K_{X_0(N)_{\mathbb{Q}}},$$

où $K_{X_0(N)_{\mathbb{Q}}}$ est un diviseur canonique de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$.

Nous allons étudier la classe d'équivalence rationnelle de ω. Soit i (resp. ρ) le point elliptique d'ordre 2 (resp. d'ordre 3) de $X_0(1)$. Le symbol ∞ représente soit l'unique pointe de $X_0(1)$, soit la pointe $\Gamma_0(N)\infty$ de $X_0(N)$. Soit

$$\pi : X_0(N) \longrightarrow X_0(1)$$

le morphisme canonique. Pour tout point P, on pose

$$c_P = [P] - [\infty]$$

et on note e_P l'indice de ramification de π en P. On définit

$$\begin{aligned}
N_i &= \{P \in X_0(N) \text{ tel que } \pi(P) = i \text{ et } e_P = 1\}\\
N_\rho &= \{P \in X_0(N) \text{ tel que } \pi(P) = \rho \text{ et } e_P = 1\}\\
H_i^0 &= \sum_{P \in N_i} c_P\\
H_\rho^0 &= \sum_{P \in N_\rho} c_P
\end{aligned}$$

$$n_i = |N_i|, \quad n_\rho = |N_\rho|.$$

Les points dans N_i (resp. dans N_ρ) sont les points de Heegner de discriminant -4 (resp. -3) ([Mi-Ul], lemme 6.2). Ceci joint au lemme suivant fournissent un lien entre les points de Heegner et le diviseur canonique.

Lemme 5.1 *1. On a*

$$\omega_{\mathbb{Q}} \sim_{rat} \pi^*\Big(-\frac{5}{6}[\infty]\Big) + \sum_{\pi(P)=\infty} (e_P - 1)[P] - \Big(\frac{1}{2}n_i + \frac{2}{3}n_\rho\Big)[\infty] - \frac{1}{2}H_i^0 - \frac{2}{3}H_\rho^0. \quad (5.93)$$

2. Soit g le genre de $X_0(N)$. Alors

$$\omega_{\mathbb{Q}} = (2g-2)[\infty] - \frac{1}{2}H_i^0 - \frac{2}{3}H_\rho^0 \quad (5.94)$$

dans $CH^1(X_0(N)_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q}$.

Démonstration : le théorème de Manin-Drinfeld ([Dr], [El]) entraîne que la différence entre deux pointes de $X_0(N)$ est un élément de torsion dans $CH_0(X_0(N)_{\mathbb{Q}})$. Ceci permet de déduire (5.94) de (5.93) et de la formule

$$2g-2=\Big(\frac{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]}{6}-m-\frac{1}{2}n_i-\frac{2}{3}n_\rho\Big),$$

où m est le nombre de pointes de $X_0(N)$ ([Shi], Proposition 1.43).

Pour démontrer (5.93), on utilise la formule de Hurwitz. Le diviseur canonique de $X_0(1)$ est $-2[\infty]$, donc

$$\omega_{\mathbb{Q}}\sim_{rat}\pi^*(-2[\infty])+\sum_{\pi(P)=\infty}(e_P-1)[P]+\sum_{\pi(P)\in\{i,\rho\}}(e_P-1)[P].$$

On déduit

$$\begin{aligned}\sum_{\pi(P)\in\{i,\rho\}}(e_P-1)[P] &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\pi(P)=i,e_P=2}2[P]+\sum_{P\in N_i}[P]\Big)-\frac{1}{2}\sum_{P\in N_i}[P]\\ &\quad+\frac{2}{3}\Big(\sum_{\pi(P)=\rho,e_P=3}3[P]+\sum_{P\in N_\rho}[P]\Big)-\frac{2}{3}\sum_{P\in N_\rho}[P]\\ &= \frac{1}{2}\pi^*([i])+\frac{2}{3}\pi^*([\rho])-\frac{1}{2}\sum_{P\in N_i}[P]-\frac{2}{3}\sum_{P\in N_\rho}[P]\\ &= \frac{1}{2}\pi^*([i])+\frac{2}{3}\pi^*([\rho])-\frac{1}{2}H_i^0-\frac{1}{2}n_i[\infty]-\frac{2}{3}H_\rho^0-\frac{2}{3}n_\rho[\infty]\end{aligned}$$

Le groupe de Picard de $X_0(1)$ est trivial, donc $[i]$ et $[\rho]$ sont rationnellement équivalents à $[\infty]$, ce qui permet de conclure. ■

Pour tout diviseur $E\in$Div$(X_0(N)_{\mathbb{Q}})$, on note D_E son adhérence de Zariski dans $\mathcal{X}_0(N)$. Du lemme 5.1, 2, on déduit

$$\omega=(2g-2)D_\infty-\frac{1}{2}D_{H_i^0}-\frac{2}{3}D_{H_\rho^0}+V\text{ dans }CH^1(\mathcal{X}_0(N))\otimes\mathbb{Q},$$

où V est un diviseur vertical, de support contenu dans les fibres de mauvaise réduction. Ceci est justifié par le fait que les deux côtés de l'égalité coïncident sur la fibre générique.

Remarque 5.2 Si N est sans facteurs carrés et il y a deux diviseurs premiers p,q de N, tels que $p,q\notin\{2,3\}$, $p\equiv 3$ mod 4 et $q\equiv 2$ mod 3, alors il n'y a pas des points non-ramifiés au dessus de i ou de ρ ([Shi], Proposition 1.43). Dans ce cas, les diviseurs $D_{H_i^0}$ et $D_{H_\rho^0}$ sont vides.

5.2 Dualisant relatif comme élément du groupe de Chow arithmétique

Le diviseur $\omega-(2g-2)D_\infty$ est de degré zéro sur la fibre générique, donc on peut choisir un diviseur vertical W tel que

$$\omega-(2g-2)D_\infty+W=\omega_0\in J_0(N)(\mathbb{Q}). \tag{5.95}$$

Alors

$$\omega=\omega_{\text{deg}}+\omega_0,$$

avec

$$\omega_{\text{deg}}:=(2g-2)D_\infty-W.$$

Soit $i_\infty : J_0(N)(\mathbb{Q})\to \widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$ le plongement défini en posant $E=D_\infty$ dans (3.56). On définit

$$\hat{\omega}_0=i_\infty(\omega_0)\in H\subset \widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N).$$

Le diviseur W n'est pas uniquement déterminé, car on peut en rajouter une somme finie de diviseurs de la forme λX_p, pour tout p premier et λ réel, sans changer la propriété (5.95). Néanmoins, $\hat{\omega}_0$ ne dépend pas du choix de W car X_p est un diviseur principal dans $\mathrm{Div}(\mathcal{X}_0(N))$, donc il est d'image nulle par i_∞.

Soit $D_v\subset CH^1(\mathcal{X}_0(N))\otimes\mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel engendré par les diviseurs verticaux. Le domaine de définition de l'application i_∞ peut être étendu à

$$i_\infty : D_v\oplus (J_0(N)(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{R})\longrightarrow \widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$$

en posant, pour un diviseur vertical Z,

$$i_\infty(Z)=(Z,c),$$

où c est un réel choisi de sorte que

$$<\hat{D}_\infty, i_\infty(Z)>=0. \tag{5.96}$$

On utilise ceci pour définir

$$\hat{W}:=i_\infty(W).$$

La propriété (5.96) assure que $\hat{W}$ ne dépend que de la classe d'équivalence rationnelle de W.

On munit D_∞ d'une fonction de Green L_1^2 admissible g_∞ normalisée par la condition

$$\bar{g}_\infty(\infty)=-\frac{12\log(2)}{[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]^2}. \tag{5.97}$$

Nous avons choisi cette normalisation pour utiliser les résultats de [Kü] et obtenir des formules simples (cf. (5.100)). Voir la Remarque 5.6 ci-dessous.

Les diviseurs compactifiés $\hat{W}$ et $\hat{D}_\infty$ définissent un élément $\hat{\omega}_{\deg} \in \widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N)$.

On pose

$$\hat{\omega} := \hat{\omega}_{\deg} + \hat{\omega}_0 \in \widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N).$$

Le diviseur compactifié $\hat{\omega}_{\deg}$ appartient à l'espace stable sous $\hat{\mathbb{T}}_N$ contenant $\hat{D}_\infty$. On a

$$\hat{T}_l \hat{\omega}_{\deg} = (l+1)\hat{\omega}_{\deg} + \big(0, (2g-2)c_{N,l}\big),$$

avec $c_{N,l}$ donné par la Proposition 4.17, 2.

D'après le lemme 4.19, 2, le diviseur $\hat{\omega}_0$ peut être décomposé selon (4.92) en somme de diviseurs propres

$$\hat{\omega}_0 = \sum_f \hat{\omega}_f.$$

Sous les hypothèses de la Remarque 5.2, on a

$$\hat{\omega}_0 = 0, \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_{\deg}.$$

Dans ce cas, $\hat{\omega}$ ne se décompose pas de façon non-triviale en somme de diviseurs propres.

5.3 Calcul des nombres d'intersection

Dans cette section on calcule l'auto-intersection $\hat{\omega}^2_{\deg}$ et on fait quelques commentaires sur les nombres $\hat{\omega}^2_f$.

Proposition 5.3 *Soit g le genre de $X_0(N)$. Pour tout p divisant N, on note g_p le genre de $X_0(N/p)$. Alors*

$$\frac{\hat{\omega}^2_{\deg}}{(g-1)^2} = \frac{576}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]}\Big(\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1)\Big) - \sum_{p|N} \frac{\log p}{g - 2g_p + 1}, \tag{5.98}$$

où $\zeta(\cdot)$ est la fonction zêta de Riemann. On a

$$\begin{aligned} g - 2g_p + 1 \quad &= \quad \frac{p-1}{12}\prod_{q|N/p}(q+1) + \frac{1}{4}\Big(1 - \Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big)\prod_{q|N/p}\Big(1 + \Big(\frac{-1}{q}\Big)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{3}\Big(1 - \Big(\frac{-3}{p}\Big)\Big)\prod_{q|N/p}\Big(1 + \Big(\frac{-3}{q}\Big)\Big), \end{aligned} \tag{5.99}$$

où q parcourt les diviseurs premiers de N/p et nous utilisons les symboles quadratiques étendus

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = \begin{cases} 0 & si\ q = 2 \\ 1 & si\ q \equiv 1\ mod\ 4 \\ -1 & si\ q \equiv 3\ mod\ 4 \end{cases}, \quad \left(\frac{-3}{q}\right) = \begin{cases} 0 & si\ q = 3 \\ 1 & si\ q \equiv 1\ mod\ 3 \\ -1 & si\ q \equiv 2\ mod\ 3 \end{cases}.$$

Remarques 5.4 *1.* L'expression $g - 2g_p + 1$ est positive, comme on le voit soit de la formule donnée ci-dessus, soit de (5.105) ci-dessous. Le terme

$$\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1) = -0,20708780325...$$

est négatif, donc

$$\hat{\omega}^2_{\mathrm{deg}} < 0.$$

2. Si N est un nombre premier tel que $N \equiv 1$ mod 12, la formule (5.98) devient

$$\hat{\omega}^2_{\mathrm{deg}} = 4\frac{(N-25)^2}{N+1}\Big(\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1)\Big) - \frac{(N-25)^2}{12(N-1)}\log N.$$

La formule (5.99) est déduite des formules connues pour le genre de $X_0(N)$ ([Shi], Proposition 1.43).

On a

$$\hat{\omega}^2_{\mathrm{deg}} = (2g-2)^2\hat{D}^2_\infty + \hat{W}^2.$$

La Proposition 5.3 découle du lemme suivant, où on calcule chaque terme de cette expression. Le calcul de $\hat{D}^2_\infty$ est dû à U. Kühn.

Lemme 5.5 *On a*

$$\hat{D}^2_\infty = \frac{144}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]}\Big(\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1)\Big). \tag{5.100}$$

$$\hat{W}^2 = -(g-1)^2\sum_{p|N}\frac{\log p}{g - 2g_p + 1}. \tag{5.101}$$

Démonstration : soit $\overline{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}_{12}(\Gamma_0(N)), ||\cdot||_{Pet})$ le fibré en droites sur $\mathcal{X}_0(N)$ des formes modulaires de poids 12 pour $\Gamma_0(N)$ muni de la métrique de Petersson, comme définie dans [Kü]. Si f est une section de ce fibré, alors

$$||f_{\mathbb{C}}(z)||^2_{Pet} = |f_{\mathbb{C}}(z)|^2(4\pi y)^{12}, \quad z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

On considère la fonction discriminant Δ comme une forme modulaire pour $\Gamma_0(N)$. Alors, Δ définit une section de $\mathcal{M}_{12}(\Gamma_0(N))$. Le diviseur $\mathrm{div}(\Delta)$ est supporté aux pointes et la fonction $-\log ||\Delta||^2_{Pet}$ définit une fonction de Green L^2_1 admissible pour $\mathrm{div}(\Delta)$ (lemme 3.11, 1). On conclut que le couple

$$\hat{E} := (\mathrm{div}(\Delta), -\log ||\Delta||^2_{Pet})$$

est un diviseur compactifié. U. Kühn définit et calcule un nombre d'auto-intersection $\overline{\mathcal{M}}^2$. En effet, il obtient ([Kü], Corollary 6.2.)

$$\overline{\mathcal{M}}^2 = 144[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]\Big(\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-1)\Big).$$

D'après [Kü], Proposition 7.4, ce nombre coïncide avec $\hat{E}^2$.

D'après le théorème de Manin-Drinfeld ([Dr], [El]), toutes les pointes sont rationnellement équivalentes sur la fibre générique, modulo torsion. Nous avons donc

$$\mathrm{div}(\Delta) = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]D_\infty + V \quad \text{dans } CH^1(\mathcal{X}_0(N)) \otimes \mathbb{Q},$$

avec V un diviseur vertical. Alors,

$$[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]\hat{D}_\infty = \hat{E} + (0, c) \quad \text{dans } \widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N). \tag{5.102}$$

D'après le lemme 3.14, on a

$$-\log ||\Delta||^2_{Pet}(\infty) = -\frac{12}{[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]}\log(2)$$

En comparant avec (5.97), on obtient $c = 0$. On conclut

$$\hat{D}^2_\infty = [\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)]^{-2}\hat{E}^2 \quad \text{dans } \widehat{CH}^{num}_{\mathbb{R}}(N),$$

ce qui montre (5.100).

Remarque 5.6 *Nous avons choisi la normalisation de g_∞ donnée dans (5.97) de façon à obtenir $c = 0$ dans l'égalité (5.102). Bien entendu, les arguments ci-dessus permettent de déterminer explicitement la dépendance de $\hat{D}^2_\infty$ par rapport à tout autre choix de c.*

Pour démontrer (5.101), on établit d'abord le

Lemme 5.7 *On a*

$$<W, X_p^\infty> = (g-1)\log p, \quad <W \cdot X_p^0> = (1-g)\log p.$$

Démonstration : le diviseur compactifié $(X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)$ s'identifie à $\mathrm{div}(p)$, pour tout p divisant N. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= <\hat{X}_p^\infty, (X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)> \\ &= <X_p^\infty, X_p^\infty + X_p^0> \\ &= (X_p^\infty)^2 + <X_p^\infty, X_p^0>. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} 0 &= <\hat{X}_p^0, (X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)> \\ &= <X_p^0, X_p^\infty> + (X_p^0)^2. \end{aligned}$$

On pose

$$W = \sum_{p|N} W_p, \quad |W_p| \subseteq \mathcal{X}_0(N) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p.$$

On utilise la formule d'adjonction ([Liu], Chapter 9, Theorem 1.37) :

$$\begin{aligned} (2g_p - 2)\log p &= <\omega, X_p^\infty> + (X_p^\infty)^2 \\ &= <\omega_{\deg}, X_p^\infty> + (X_p^\infty)^2 \\ &= (2g-2)<D_\infty, X_p^\infty> - <W_p, X_p^\infty> + (X_p^\infty)^2 \\ &= (2g-2)<D_\infty, X_p^\infty> - <W_p, X_p^\infty> - <X_p^\infty, X_p^0>. \end{aligned} \tag{5.103}$$

De même

$$(2g_p - 2)\log p = (2g-2)<D_\infty, X_p^0> - <W_p, X_p^0> - <X_p^\infty, X_p^0>.$$

De la définition 2.12 et du fait que D_∞ est un $\mathbb{Z}$-point, on a $<D_\infty, X_p^\infty> = \log p$ et $<D_\infty, X_p^0> = 0$. Alors

$$\begin{aligned} <W_p, X_p^\infty> &= 2(\log p)(g - g_p) - <X_p^\infty, X_p^0>, \\ <W_p, X_p^0> &= -(\log p)(2g_p - 2) - <X_p^\infty, X_p^0>. \end{aligned} \tag{5.104}$$

Pour calculer $<X_p^\infty, X_p^0>$, on utilise l'égalité

$$\begin{aligned} 0 &= <(W_p, 0), (X_p^\infty + X_p^0, -\log p^2)> \\ &= <W_p, X_p^\infty + X_p^0> \\ &= <W_p, X_p^\infty> + <W_p, X_p^0>. \end{aligned}$$

D'après (5.104), on obtient

$$<X_p^\infty, X_p^0> = (g - 2g_p + 1)\log p. \tag{5.105}$$

On insère ce résultat dans (5.104) et on obtient l'énoncé du lemme. ■

Corollaire 5.8 *On a l'égalité suivante dans* $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$

$$\hat{W} = -\frac{(g-1)}{2}\sum_{p|N}(g - 2g_p + 1)^{-1}\hat{G}_p + (0, c),$$

où c est une constante réelle.

Remarque 5.9 La constante c peut être déterminée en faisant $Z = W$ dans (5.96). On n'aura pas besoin de ce calcul dans la suite.

Démonstration : le diviseur W est supporté par les composantes des fibres de mauvaise réduction, donc

$$\hat{W} = \sum_{p|N} a_p \hat{G}_p + (0, c).$$

D'après le lemme,

$$\begin{aligned} (g-1)\log p &= <W, X_p^\infty> \\ &= <\hat{W}, \hat{X}_p^\infty> \\ &= a_p <F_p, X_p^\infty> \\ &= a_p\big((X_p^\infty)^2 - <X_p^0, X_p^\infty>\big) \\ &= -2a_p <X_p^0, X_p^\infty> \\ &= -2a_p(g - 2g_p + 1)\log p. \end{aligned}$$

■

D'après le corollaire, on a

$$\hat{W}^2 = \left(\frac{g-1}{2}\right)^2 \sum_{p|N} (g - 2g_p + 1)^{-2} \hat{G}_p^2$$

Puis

$$\begin{aligned}
\hat{G}_p^2 &= \big((X_p^\infty)^2 + (X_p^0)^2 - 2{<}X_p^\infty, X_p^0{>}\big) \\
&= -4{<}X_p^\infty, X_p^0{>} \\
&= -4(g - 2g_p + 1)\log p,
\end{aligned}$$

d'où on obtient (5.101). ■

6 Opérateurs de Hecke et courbes elliptiques supersingulières

Nous nous proposons de démontrer des résultats autour du théorème 1.4, annoncé dans l'Introduction.

On rappelle le lien entre l'arithmétique des algèbres de quaternions et les courbes elliptiques supersingulières. On suit la présentation de [Gro] 1) et 2).

Soit B l'algèbre de quaternions définie sur $\mathbb{Q}$ de discriminant premier p. On note n le nombre de classes de B. Soit $E_1, \ldots, E_n$ l'ensemble des classes d'isomorphie de courbes elliptiques supersingulières sur $\mathbb{F}_p$.

Pour tout i, l'anneau des endomorphismes de E_i est un ordre maximal O_i de B. Le groupe des unités de O_i est fini. On pose

$$w_i := |O_i^*/\{\pm 1\}| = |\mathrm{Aut}(E_i)/\{\pm 1\}|.$$

On considère S =Div($\{E_1, \ldots, E_n\}$), le groupe abélien libre engendré par ces courbes. On dispose d'une action des opérateurs de Hecke sur S, définie par

$$T_m([E_i]) = \sum_C [E_i/C],$$

où C parcourt les sous-schémas en groupes de E_i de rang m. Il y a $\deg(T_m)$ tels sous groupes, déterminé par

1. $\deg(T_m) = \sigma(m)$ si $p \nmid m$

2. $\deg(T_m) = 1$ si $m = p^k$, k un entier positif

3. $\deg(T_{mn}) = \deg(T_m)\deg(T_n)$ si $(m,n) = 1$.

On a utilisé

$$\sigma(m) = \sum_{d|m} d.$$

Pour un entier $m \geq 1$ on définit :

$$B_{i,j}(m) = |\{C \subset E_i, \quad |C| = m \text{ et } E_i/C \cong E_j\}|.$$

Ceci correspond à la multiplicité de E_j dans le diviseur $T_m E_i$. On étudie la fréquence asymptotique de ces multiplicités, c'est-à-dire le comportement du quotient $B_{i,j}(m)/\deg(T_m)$ lorsque m varie. On démontre :

Théorème 6.1

$$\lim_{m\to\infty, p\nmid m} \frac{B_{i,j}(m)}{\deg T_m} = \frac{12}{w_j(p-1)}.$$

On déduit cet énoncé des bornes connues pour une suite a_n de coefficients du q-développement d'une forme modulaire parabolique pour $\Gamma_0(p)$ de poids 2. La borne (dite « triviale ») $a_n = O(n)$ ne nous permet pas d'achever notre démonstration, mais toute borne meilleure que celle-ci suffit pour ce propos.

En revanche, si on utilise la borne optimale $a_n = O(n^{1/2+\varepsilon})$ (conjecture de Ramanujan, démontrée par Deligne), on obtient un énoncé plus précis, à savoir :

Théorème 6.2 *Pour tout* $\epsilon > 0$

$$\frac{B_{i,j}(m)}{\deg T_m} = \frac{12}{w_j(p-1)} + O(m^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

lorsque m *varie parmi les entiers non divisibles par* p.

La démonstration de ces énoncés se trouve dans la section 6.2.

Remarques 6.3 *1.* Supposons $p \neq 2$. Une version du théorème 6.2 où on considére les nombres d'incidence associés à $(T_2)^m$ permettrait de mesurer précisement la vitesse de convergence de la *méthode des graphes* de Mestre et Oesterlé (cf. [Me], section 2.5). Nous espérons retourner à cette question.

2. L'égalité

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_{i,j}(m)}{\deg T_m} = 1,$$

combinée avec le théorème 6.1 entraîne la formule de masse de Deuring et Eichler :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} = \frac{p-1}{12}.$$

3. Pour tout $k \geq 1$ et $i = 1, \ldots, n$, la courbe E_i n'a qu'un seul sous-schéma en groupes de rang p^k. Alors

$$\frac{B_{i,j}(p^k)}{\deg T_{p^k}} = \delta_{i,j}, \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Le théorème 1.4 annoncé dans l'introduction se déduit du théorème 6.1 de la manière suivante : soit $C^0(E)$ l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur E, où on a muni E de la topologie discrète. Bien entendu, $C^0(E) = \mathbb{C}^E \cong \mathbb{C}^n$. Avec les notations de l'Introduction, on a, pour tout $f \in C^0(E)$,

$$\Theta_{T_m E_i}(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{i,j}(m)}{\deg T_m} f(E_j).$$

D'après le théorème 6.1,

$$\lim_{m\to\infty, p\nmid m} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{i,j}}{\deg T_m} f(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{12}{w_j(p-1)} f(E_j).$$

Cette dernière expression est $\Theta(f)$ d'après la Remarque 6.3, 2.

6.1 Séries d'Eisenstein de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$

La courbe modulaire $X_0(p)$ comporte deux pointes, représentées par 0 et ∞. On note Γ_∞ (resp. Γ_0) le stabilisateur de ∞ (resp. 0). Les séries d'Eisenstein de poids 2 correspondantes sont définies par

$$\begin{aligned} E_\infty(z) &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(p)} j_\gamma(z)^{-2}|j_\gamma(z)|^{-2\varepsilon} \\ E_0(z) &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma_0(p)} j_{\sigma_0^{-1}\gamma}(z)^{-2}|j_{\sigma_0^{-1}\gamma}(z)|^{-2\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}$.

E_∞ et E_0 sont des formes modulaires non holomorphes de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$, propres pour les opérateurs de Hecke. Leur développements de Fourier à la pointe $i\infty$ sont ([Miy], Theorem 7.2.12, p. 288)

$$\begin{aligned} E_\infty(z) &= 1 - \frac{3}{\pi y(p+1)} + \frac{24}{p^2-1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \\ E_0(z) &= -\frac{3}{\pi y(p+1)} - \frac{24p}{p^2-1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \end{aligned}$$

où les suites a_n et b_n sont définies par :

– Si $p \nmid n$, alors $a_n = b_n = \sigma(n)$

– Si $k \geq 1$, alors $b_{p^k} = p + 1 - p^{k+1}$ et $a_{p^k} = p^k$

– Si $p \nmid m$ et $k \geq 1$, alors $b_{p^k m} = -b_{p^k} b_m$ et $a_{p^k m} = a_{p^k} a_m$.

Au moyen d'une combinaison linéaire, on obtient une forme modulaire holomorphe en $i\infty$ et non parabolique,

$$\begin{aligned} f_0(z) &:= E_\infty(z) - E_0(z) \\ &= 1 + \frac{24}{p^2-1}\sum_{n=1}^{\infty}(pa_n + b_n)q^n. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} E_\infty|_{\sigma_0}(z) &= E_0(z) \\ E_0|_{\sigma_0}(z) &= E_\infty(z), \end{aligned}$$

d'où on vérifie que f est holomorphe en la pointe $\Gamma_0(p)0$ aussi.

La forme f est holomorphe, non nulle et n'appartient pas à $S_2(\Gamma_0(p))$. Nous avons

$$\dim_{\mathbb{C}} M_2(\Gamma_0(p)) = 1 + \dim_{\mathbb{C}} S_2(\Gamma_0(p)).$$

Nous disposons donc d'une décomposition

$$M_2(\Gamma_0(p)) = S_2(\Gamma_0(p)) \oplus \mathbb{C}f_0. \tag{6.106}$$

6.2 Démonstration des énoncés.

Notre méthode repose sur l'interprétation des multiplicités $B_{i,j}(m)$ comme des coefficients de Fourier d'une forme modulaire.

Théorème 6.4 *([Gro], Proposition 2.3 et [Ei], Chapter II, Theorem 1) Pour tout $0 \leq i, j \leq n$, il existe une forme modulaire $f_{i,j}$ de poids 2 pour $\Gamma_0(p)$ dont le développement à l'infini est donné par*

$$f_{i,j}(z) := \frac{1}{2w_j} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{i,j}(m)q^m, \quad q = e^{2\pi i z}.$$

D'après (6.106), on peut décomposer

$$f_{i,j} = g + cf_0, \quad g \in S_2(\Gamma_0(p)), \quad c \in \mathbb{C}.$$

En comparant les q-développements, on obtient

$$c = \frac{1}{2w_j}.$$

On a

$$\begin{aligned} g &= f_{i,j} - cf_0 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m q^m, \end{aligned}$$

où

$$c_m = B_{i,j}(m) - \frac{12}{w_j(p^2-1)}(pa_m + b_m).$$

Si $p \nmid m$, alors $\deg(T_m) = \sigma(m)$ et

$$c_m = B_{i,j}(m) - \frac{12}{w_j(p-1)}\sigma(m).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Big|\frac{B_{i,j}(m)}{\deg T_m} - \frac{12}{w_j(p-1)}\Big| &= \frac{|c_m|}{\sigma(m)} \\ &\leq \frac{|c_m|}{m}. \end{aligned}$$

D'après la conjecture de Ramanujan démontrée par Deligne ([De], théorème 8.2), on a

$$c_m = O(m^{1/2+\varepsilon}),$$

ce qui permet de conclure. ■

A Multiplicité des points elliptiques sur $X_0(1)$

Dans cet annexe on calcule explicitement les multiplicités, définies dans la section 4.1, associées aux points elliptiques de $X_0(1)$. Nous obtenons

Proposition A.1 *Soit $P \in X_0(1)$ un point elliptique d'ordre n. Alors,*

$$T_l(P) = \sum_{j=1}^{t} n[P_j] + a[P], \text{ avec } P \neq P_i \neq P_j \text{ si } i \neq j$$

où, si $n = 2$,

$$(t,a) = \begin{cases} (1,1) & \text{si } l = 2 \\ ((l+1)/2, 0) & \text{si } l \equiv 3 \text{ mod } 4 \\ ((l-1)/2, 2) & \text{si } l \equiv 1 \text{ mod } 4 \end{cases}$$

et si $n = 3$,

$$(t,a) = \begin{cases} (1,1) & \text{si } l = 3 \\ ((l+1)/3, 0) & \text{si } l \equiv 2 \text{ mod } 3 \\ ((l-1)/3, 2) & \text{si } l \equiv 1 \text{ mod } 3 \end{cases}$$

Cette Proposition admet la conséquence suivante.

Corollaire A.2 *L'image d'un point elliptique w par T_l atteint tous les points CM qui ont $\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[w]$ comme anneau d'endomorphismes.*

Démonstration : l'énoncé découle de la comparaison entre la Proposition A.1 et le nombre de classes de $\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[w]$ ([Cox], p.146). ■

Avant de démontrer la Proposition A.1, on établit le lemme suivant.

Lemme A.3 *Soient $P_0 \in X_0(1)$ un point CM, $P_1 \in |T_l P_0|$ et m sa multiplicité. On note O_i =End(P_i). Si l reste premier dans O_0 et si $P_0 \neq P_1$, on a*

$$m = [O_0^* : (O_0 \cap O_1)^*].$$

Démonstration : On identifie les points de $X_0(1)$ aux classes d'homothétie des sous-réseaux de $\mathbb{C}$. Soient Λ le réseau correspondant à P_0 et $\Lambda' \subset \Lambda$ le réseau d'indice l correspondant à P_1. Soit $\Lambda'' \subset \Lambda$ un réseau d'indice l homothétique à Λ', $\Lambda'' = \lambda\Lambda'$. Si l'on note $N(\cdot) := N_{O_0 \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Q}}(\cdot)$, on a $l = [\Lambda : \Lambda''] = |N(\lambda)|[\Lambda : \Lambda'] = |N(\lambda)|l$, donc $|N(\lambda)| = 1$. Par ailleurs, $a := l\lambda$ et $b := l/\lambda$ induisent des endomorphismes de P_0, car $\lambda l\Lambda \subseteq \lambda\Lambda' = \Lambda'' \subseteq \Lambda$ et $\lambda^{-1}l\Lambda \subseteq \lambda^{-1}\Lambda'' = \Lambda' \subseteq \Lambda$. On conclut que $a, b \in O_0$. En plus

$$ab = l^2, \quad N(a) = N(b) = l^2.$$

Ces conditions déterminent que a et b sont associés à l, i.e. $\lambda \in O_0^*$ (l reste premier dans O_0). On obtient la conclusion énoncée en remarquant que $\lambda\Lambda' = \Lambda'$ entraîne $\lambda \in O_1^*$.■

Démonstration de la Proposition A.1 : Pour $l = 2$ ou 3 un calcul direct montre l'énoncé. On suppose alors $l \neq 2, 3$ et on écrit $P = \Gamma_0(1)w$ avec $w \in \{i, \rho\}$ et $\rho = (1 + \sqrt{-3})/2$. On identifie P avec la classe d'homothétie du réseau $\mathbb{Z}[w]$. La courbe elliptique $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[w]$ a multiplication par $\mathbb{Z}[w]$, qui est l'anneau d'entiers de $\mathbb{Q}(w)$. Les points de $T_l(P)$ s'identifient aux $l+1$ sous-réseaux de $\mathbb{Z}[w]$ suivants

$$\Lambda_j = \begin{cases} l\mathbb{Z} + w\mathbb{Z} & \text{si } j = l \\ (1 + jw)\mathbb{Z} + lw\mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq j \leq l-1. \end{cases}$$

On trouve alors que si $w = i$,

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda_j) = \begin{cases} \mathbb{Z}[i] & \text{si } j^2 \equiv -1 \bmod l \\ \mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[i] & \text{sinon.} \end{cases}$$

et que si $w = \rho$,

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda_j) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\rho] & \text{si } j^2 + j + 1 \equiv 0 \bmod l \\ \mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[\rho] & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathbb{C}-$courbes elliptiques avec multiplication par $\mathbb{Z}[w]$ est en bijection avec le groupe de classes de $\mathbb{Z}[w]$, qui est trivial. Donc, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[w]$ est la seule $\mathbb{C}$-courbe elliptique avec multiplication par $\mathbb{Z}[w]$. Alors, pour justifier les valeurs de a dans l'énoncé, on remarque que la congruence $j^2 \equiv -1 \bmod l$ (resp. $j^2 + j + 1 \equiv 0 \bmod l$) est résoluble si et seulement si l se décompose dans $\mathbb{Z}[i]$ (resp. $\mathbb{Z}[\rho]$). Ceci dépend du résidu de l mod 4 (resp. mod 3) comme l'énoncé l'indique.

D'après le lemme A.3, la multiplicité de points différents de $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[w]$ est n, car l reste premier dans $\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[w]$ et

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}, & (\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[i])^* = \{1, -1\} \\ \mathbb{Z}[\rho]^* = \{1, -1, \rho, -\rho, \rho^2, -\rho^2\}, & (\mathbb{Z} + l\mathbb{Z}[\rho])^* = \{1, -1\}. \end{array}$$

Plus explicitement, si $w = i$,

$$\begin{array}{l} i\Lambda_j = \Lambda_{j'}, \text{ avec } jj' \equiv -1 \bmod l \\ i\Lambda_0 = \Lambda_l \end{array}$$

et si $w = \rho$,

$$\rho\Lambda_j = \Lambda_{j'}, \text{ avec } jj' + j + 1 \equiv 0 \bmod l$$
$$\rho^2\Lambda_j = \Lambda_{j''}, \text{ avec } j''j + j'' + 1 \equiv 0 \bmod l.$$

■

Références

[Ar] S. Ju. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. *Math. USSR, Izv.* **8**, 1167-1180 (1976) ; Translation from *Izv., Ser. Mat.* **38** (1974), 1179–1192.

[Au] P. Autissier, Hauteur des correspondances de Hecke. *Bull. Soc. Math. France*, **131** (2003), no. 3, 421–433.

[Bo] J.-B. Bost, Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces, *Annales Scientifiques de l'ENS,* **32** (1999), no. 2, 241–312.

[C-E] R. Coleman, B. Edixhoven, On the semi-simplicity of the U_p-operator on modular forms, *Math. Ann.* **310** (1998), no. 1, 119–127.

[Cox] D. Cox, *Primes of the form* $x^2 + ny^2$. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[De] P. Deligne, La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 273–307.

[De-Ra] P. Deligne, M. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 143–316. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Dr] V. Drinfeld, Two theorems on modular curves, *Functional Anal. Appl.* **7** (1973), 155–156.

[EGA II] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes : Éléments de Géométrie Algébrique, [EGA II], *Pub. Math. IHES* **8**, 1961, 222 pp.

[EGA III] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Étude cohomologique des faisceaux cohérents : Éléments de Géométrie Algébrique, [EGA III], *Pub. Math. IHES* **11**, no. 2, 1961.

[Ei] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators. Modular functions of one variable, I (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 75–151. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 320, Springer, Berlin, 1973.

[El] R. Elkik, Le théorème de Manin-Drinfel'd. Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (Paris, 1988). *Astérisque* no. **183** (1990), 59–67.

[Fal] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. Math.* **119**, (1984), 387–424.

[Fay] J. Fay, Fourier coefficients of the resolvent for a fuchsian group, *J. Reine Angew. Math.* **293/294** (1977), 143-203.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 2. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gi-So] H. Gillet, C. Soulé, Arithmetic intersection theory. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.* **72** (1990), 93–174.

[Gri-Ha] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry.* Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978.

[Gro] B. Gross, Heights and the special values of L-series. Number theory (Montreal, Que., 1985), 115–187, *CMS Conf. Proc.*, 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Gro-Za] B. Gross, D. Zagier, Heegner points and derivatives of L-series, *Invent. Math.* **84** (1986), no. 2, 225–320.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula for* $PSL(2,\mathbb{R})$*. Vol. 2.* Lecture Notes in Mathematics, 1001. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Kö] K. Khler, Complex analytic torsion forms for torus fibrations and moduli spaces. Regulators in analysis, geometry and number theory, 167–195, Progr. Math., 171, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2000.

[Kü] U. Kühn, Generalized arithmetic intersection numbers. *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), 209–236.

[La] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory,* Springer-Verlag, New York, 1988.

[Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Translated from the French by Reinie Erné. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Me] J.-F. Mestre, La méthode des graphes. Exemples et applications. Proceedings of the international conference on class numbers and fundamental units of algebraic number fields (Katata, 1986), 217–242, Nagoya Univ., Nagoya, 1986.

[Mi-Ul] P. Michel, E. Ullmo, Points de petite hauteur sur les courbes modulaires $X_0(N)$. *Invent. Math.* **131** (1998), no. 3, 645–674.

[Miy] T. Miyake, *Modular forms.* Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[MoBa] L. Moret-Bailly, Métriques permises, dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, L. Szpiro (d.), p. 29–87, *Astérisque* no. **127**, Soc. Math. France, 1985.

[Mu] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* no. **9** (1961) 5–22.

[R] M. Raynaud, Jacobienne des courbes modulaires, Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988). *Astérisque* no. **196-197** (1991), 9–25.

[Shi] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[Si] J. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves.* Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer-Verlag, New York, 1986.

Résumé de thèse : Nombres d'intersection arithmétiques et opérateurs de Hecke sur les courbes modulaires $X_0(N)$

Ricardo Menares

Cette thèse s'inscrit dans l'étude des opérateurs de Hecke en tant que correspondances sur les courbes modulaires $X_0(N)$. D'une part, nous étudions la relation entre l'algèbre de Hecke et la théorie d'Arakelov ; d'autre part, nous entreprenons un début d'étude de la dynamique de l'action des opérateurs de Hecke sur l'ensemble des courbes elliptiques supersingulières.

On considère la courbe modulaire $X_0(N)$ munie de la métrique de Poincaré (métrique hyperbolique). Cette métrique présente des singularités aux points elliptiques et pointes. On suppose que N est sans facteurs carrés. On note $\mathcal{X}_0(N)$ le modèle entier de cette courbe donné par l'interprétation modulaire étudiée par Deligne et Rapoport. On définit un groupe de Chow arihmétique généralisé $\widehat{CH}(N)$ tel que ses éléments sont représentés par des couples (D, g) avec D un diviseur de Weil sur $\mathcal{X}_0(N)$ et g un courant de Green admissible pour la métrique de Poincaré. J.-B. Bost et U. Kühn ont développé, de manière indépendante, des généralisations de la théorie d'intersection arithmétique d'Arakelov qui fournissent une forme bilinéaire à valeurs réelles sur $\widehat{CH}(N) \times \widehat{CH}(N)$ dans ce cadre où la métrique est singulière. On étudie aussi une version à coefficients réels et à équivalence numérique près de $\widehat{CH}(N)$, que l'on note $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$.

Nous montrons dans cette thèse que les correspondances de Hecke agissent sur $\widehat{CH}(N)$ et que cette action est autoadjointe par rapport à la forme bilinéaire de Bost-Kühn. Ceci permet de diagonaliser cette action sur $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$ et de définir ses sous-espaces propres. Ensuite nous étudions le faisceau dualisant relatif, considéré comme un élément de $\widehat{CH}(N)$, ainsi que sa décomposition selon les sous-espaces propres. Nous calculons l'auto-intersection de la composante propre correspondante à la pointe à l'infini en utilisant des résultats d'Ulf Kühn.

L'action des opérateurs de Hecke sur les fibres spéciales de $\mathcal{X}_0(N)$ définit une dynamique qui preserve les points supersinguliers. Nous nous intéressons à étudier cette action sur les points supersinguliers des fibres de bonne réduction et nous calculons, à l'aide des résultats de Deuring et Eichler, la fréquence asymptotique avec laquelle un point supersingulier donné visite un autre point du même type.

Mots clés : courbes modulaires, théorie d'Arakelov, correspondances de Hecke, courbes elliptiques supersingulières.

MSC : 11G18, 14G40, 11F25, 11F32 et 14H52

Arithmetic intersection numbers and Hecke operators on the modular curves $X_0(N)$

Ricardo Menares

The theme of this thesis is the action of the Hecke operators as correspondances on the modular curves $X_0(N)$. On one hand, we study the relation between the Hecke algebra and Arakelov theory ; on the other hand, we make an attemp to study the dynamics of the action of the Hecke operators on the set of supersingular elliptic curves.

We consider the modular curve $X_0(N)$ endowed with the Poincaré metric (hyperbolic metric). This metric is singular at the elliptic points and at the cusps. We suppose N squarefree. Let $\mathcal{X}_0(N)$ be the model of this curve over $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ given by the modular interpretation obtained by Deligne and Rapoport. We define a generalized arithmetic Chow group $\widehat{CH}(N)$ such that its elements are classes of pairs (D, g) where D is a Weil divisor on $\mathcal{X}_0(N)$ and g an admissible Green's current with respect to the Poincaré metric. J.-B. Bost and U. Kühn have generalized, independently, Arakelov's arithmetic intersection theory in such a way that a real valued bilinear form is defined on $\widehat{CH}(N) \times \widehat{CH}(N)$ in this framework where the metric is singular. We study aswell a version of $\widehat{CH}(N)$ with real coefficients and up to numeric equivalence which is denoted $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$.

We show that Hecke correspondences act on $\widehat{CH}(N)$ and that this action is self-adjoint with respect to the Bost-Kühn bilinear form. This allows to diagonalize the action on $\widehat{CH}_{\mathbb{R}}^{num}(N)$ and to define its eigenspaces. As an application we study the relative dualizing sheaf, seen as an element in $\widehat{CH}(N)$, and its decomposition in eigencomponents. We compute the self-intersection of the eigencomponent associated to the cusp at infinity using a calculation by Ulf Kühn.

The action of Hecke operators on the special fibers of $\mathcal{X}_0(N)$ defines a dynamic, and this dynamic preserves supersingular points. We study this action on the supersingular points inside the fibers of good reduction and we compute, using results by Deuring and Eichler, the asympotic frequence with which a given supersingular point visits another supersingular point.

Key words : modular curves, Arakelov theory, Hecke correspondences, supersingular elliptic curves.

MSC : 11G18, 14G40, 11F25, 11F32 and 14H52