



Ajustement géostrophique nonlinéaire en présence de guides d'ondes équatorial, côtier, topographique et frontal.

Emilie Scherer

► To cite this version:

Emilie Scherer. Ajustement géostrophique nonlinéaire en présence de guides d'ondes équatorial, côtier, topographique et frontal.. Océan, Atmosphère. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00357654

HAL Id: tel-00357654

<https://theses.hal.science/tel-00357654>

Submitted on 31 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

Océanologie, Météorologie et Environnement

(Ecole Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Île-de-France)

Présentée par

Emilie Scherer

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**AJUSTEMENT GÉOSTROPHIQUE NONLINÉAIRE EN
PRÉSENCE DE GUIDES D'ONDES ÉQUATORIAL, CÔTIER,
TOPOGRAPHIQUE ET FRONTAL.**

soutenue le 30 avril 2008

devant le jury composé de :

M. BOUCHUT François	Examineur
M. CHOMAZ Jean-Marc	Examineur
M. FRANKIGNOUL Claude	Examineur
M. SUTYRIN Georgi	Rapporteur
M. VANNESTE Jacques	Rapporteur
M. ZEITLIN Vladimir	Directeur de thèse

Cette thèse a été préparée au sein du :

Laboratoire de Météorologie Dynamique
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond
75231 Paris Cedex 05
France

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Vladimir Zeitlin pour avoir dirigé ces recherches. J'ai apprécié son enthousiasme constant et j'ai beaucoup appris de son expérience. Je lui suis reconnaissante pour tout le temps qu'il m'a consacrée.

Je remercie Francois Bouchut et Julien Le Sommer pour m'avoir appris à me servir de l'outil numérique puissant qui a permis l'obtention d'une grande partie des résultats présentés dans cette thèse.

Je remercie Francois Bouchut, Jean-Marc Chomaz, Claude Frankignoul, Georgi Sutyrin et Jacques Vanneste d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Jean-Philippe Duvel, Bernard Legras, Claude Basdevant, Armando Babbiano, Fabio D'Andrea, Francois Lott, Guillaume Lapeyre et Riwal Plougonven - pour les nombreuses discussions informelles que j'ai eu plaisir à avoir avec eux.

Je remercie Armel Martin, Ronan James et Ignacio Pisso pour avoir partagé avec moi le bureau 10 si agréablement pendant tant d'années. J'ai une pensée pour les thésards/postdocs que j'ai rencontré au labo et ailleurs durant ces années de thèse : Laurent Descamps, Hanh N'Guyen, Hugo Bellenger, Gaele Perret, Francesco D'Ovidio, Sidonie Brachet, Julie Deshayes, Alberto Carrassi, Margarete Dominges...

Je remercie Marie-Christine Roos, Françoise Larincq, Frédéric Bongat, Mathieu Perault, Virginie Métrot - pour avoir été toujours présents et souriants, prêts à aider pour les petits soucis du quotidien. Je remercie Martine Roux et Eliane Rier, que je connais surtout à travers les emails, pour m'avoir aidée dans les démarches administratives rébarbatives.

Je remercie mes collègues d'enseignement : Vladimir, Alexandre Stegner, Karine Béranger, Xavier Clady, Cyril Dahon, Eli Ben-Haim, Sébastien Payan, Francis Codron, Christophe Claveau, Jacques Lefrère, Marine Bonazzola - pour m'avoir donné des responsabilités et pour avoir su m'en décharger dans les moments critiques de la thèse.

Mes remerciements personnels vont à :

mes parents pour m'avoir donné un bon départ,
mon frère pour m'avoir toujours faite sourire,
ma soeur pour avoir éveillé en moi la curiosité du monde,
mon papy pour m'avoir appris que "le savoir est la seule richesse que personne ne pourra jamais te reprendre",
ma mamie pour ses encouragements constants,
ma tante Mamai et mon oncle Denys pour m'avoir accueillie chez eux pour ma première année à Paris ;

les profs qui ont marqué mon parcours, par ordre chronologique :

Nadine Sarrazin, école primaire de Callian, pour le plaisir d'apprendre à écrire
Mme Aubry, collège Marie Mauryon à Fayence, qui a rendu les math intéressantes
Mr Puissant, lycée Amiral de Grasse, pour avoir rendu la physique intéressante
Mme Durant, lycée Amiral de Grasse, pour sa sympathie et pour m'avoir toujours poussée vers l'avant

– A l'Université de Nice :

Jean-Pierre Romagnan et Nicole Ostrowsky pour avoir cru en moi et avoir enseigné la physique brillamment ;

Jean-Pierre Provost que je salue meilleur prof de physique de tous les temps ;

Fabrice Mortessagne pour une grande stimulation scientifique, des encouragements permanents et sa préoccupation du devenir des étudiants ;

Guy Plot pour m'avoir accueillie en stage ;

mes amies de toujours : Butcher's, Vinciane, Maria, Axelle ;

mes amies de Paris : Julie, Hanh, Leslie ;

mes amis : Claire et Stéphane pour leur accueil chaleureux à Seignosse ;

mes nageurs préférés : Julien, Laurent, Sylvain, Michèle et notre entraîneur Gilles ;
l'équipe du Kabanito ;

les vagues des Casernes pour m'avoir gentiment portée.

Aux très regrettés Pierre-Yves et Manorie

Résumé

L'ajustement géostrophique, processus de relaxation d'une perturbation vers un état en équilibre géostrophique, bien connu dans un fluide infini est modifié en présence de guides d'ondes. Les guides d'ondes dans l'atmosphère et l'océan sont omniprésents : les topographies (sous-marine / montagnes), les côtes, les fronts de densité. Ce travail de thèse a étudié les modifications au scénario d'ajustement géostrophique nonlinéaire en présence de quatre guides d'ondes : le guide d'onde côtier, le guide d'onde topographique, le guide d'onde frontal aux moyennes latitudes, et le guide d'onde frontal à l'équateur. Nous avons utilisé le modèle de l'eau peu profonde en rotation et une méthode numérique aux volumes finis adaptée pour traiter les topographies et les incropping/outcropping des fronts. Dans tous les cas, l'émission d'ondes piégées a lieu et l'évolution nonlinéaire des ondes piégées diffère selon le caractère dispersif ou non de ces ondes. Les ondes non dispersives comme l'onde de Kelvin côtière, en évoluant nonlinéairement vont déferler et ainsi contribuer au mélange à petite échelle. Les ondes dispersives telles que les ondes de Rossby topographiques ou les ondes se propageant sur un guide d'onde frontal vont pouvoir former des reconnections des lignes de courant, modifiant ainsi les propriétés de transport de l'écoulement. Nous montrons que la séparation dynamique entre mouvements lent/équilibré et rapide/non-équilibré connu dans le fluide libre est toujours effective en présence de ces guides d'ondes.

Mots clés :

ajustement géostrophique ; guide d'ondes océaniques et atmosphériques ; ondes nonlinéaires ; ondes piégées ; transport ; mélange.

Nonlinear geostrophic adjustment in the presence of equatorial, coastal, topographic and frontal waveguides.

Abstract

Geostrophic adjustment, the process of relaxation of a perturbation toward a state of geostrophic equilibrium, well-known in an infinite fluid, is modified in the presence of waveguides. Waveguides are ubiquitous in the ocean and in the atmosphere : varying topography (marine / mountains), coasts and density fronts. We studied the modification of the scenario of geostrophic adjustment in the presence of four different waveguides : the coastal waveguide, the topographic waveguide, the midlatitude frontal waveguide and the equatorial frontal waveguide. We used the rotating shallow water model and finite volume numerical methods adapted to treat the topography and the incropping/outcropping of fronts. In all cases, generation of trapped waves takes place and the nonlinear evolution of the trapped waves depend on the dispersive properties of the trapped waves. Non-dispersive waves like the coastal Kelvin wave, during their nonlinear evolution, break and so contribute to the small scale mixing. Dispersive waves like the topographic Rossby waves, or the waves propagating along the frontal waveguide, reconnect streamlines, altering the transport properties of the flow. We show that the dynamical splitting between slow/balanced and fast/unbalanced motions, known in free flow, is always effective in the presence of the waveguides.

Keywords :

geostrophic adjustment ; oceanic and atmospheric waveguides ; nonlinear waves ; trapped waves ; transport ; mixing.

Table des matières

1	Introduction	19
1.1	Rappel sur l'équilibre géostrophique dans l'atmosphère et dans l'océan . . .	19
1.2	Modèle de l'eau peu profonde en rotation et séparation dynamique des mouvements tourbillonnaires/lents et ondulatoires/rapides	25
1.2.1	Dérivation du modèle de l'eau peu profonde en rotation	25
1.2.2	Séparation dynamique des mouvements tourbillonnaires et ondu- latoires	29
1.3	Ajustement géostrophique	30
1.4	Ajustment géostrophique en présence de guides d'ondes	33
1.4.1	Guide d'ondes frontal	34
1.4.2	Guide d'ondes côtier	35
1.4.3	Guide d'ondes topographique	36
1.4.4	Guide d'ondes équatorial	37
1.5	Questions	39
2	Outils de modélisation numérique pour l'eau peu profonde en rotation	41
2.1	Méthode aux volumes finis pour les équations différentielles hyperboliques .	41
2.1.1	Rappel sur les systèmes hyperboliques	42
2.1.2	Description de la méthode générale	43
2.1.3	Schéma pour l'eau peu profonde en rotation avec topographie et assèchement	46
2.2	Méthode de collocation pour les problèmes de stabilité linéaire	49
2.2.1	Equations aux valeurs propres	49
2.2.2	Méthode pseudospectrale de collocation	50
3	Ajustement géostrophique en présence d'un guide d'ondes topographique	53
3.1	Introduction	53
3.2	Ajustement géostrophique d'un front en présence d'un escarpement	55
3.3	Conclusion	83
4	Ajustement géostrophique d'un front double de densité	85
4.1	Introduction	85
4.2	Instabilité et évolution nonlinéaire des fronts de densité géostrophiques cou- plés	87
4.3	Conclusion	107

5	Ajustement géostrophique en présence d'une côte	109
5.1	Introduction	109
5.2	Ajustement géostrophique au voisinage de la côte	111
5.3	Conclusion	117
6	Ajustement géostrophique en présence d'un guide d'ondes frontal à l'équateur	119
6.1	Introduction	119
6.2	Mouvements inertiels durant l'ajustement transitoire d'une anomalie de densité dans l'océan équatorial et application aux eaux chaudes du Pacifique équatorial Ouest	120
6.3	Conclusion	139
7	Résumé, conclusions et perspectives	141
A	Complément au chapitre 3	145
A.1	Résonance ondes topographiques piégées et ondes de Rossby	145
B	Complément au chapitre 4	153
B.1	Complément : évolution d'un tourbillon elliptique isolé	153
	Bibliographie	156

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappel sur l'équilibre géostrophique dans l'atmosphère et dans l'océan

Le temps qu'il fait est déterminé par les perturbations météorologiques, aux échelles synoptiques (500 à 5000km) et se déplaçant à des vitesses de 1 à 50 ms^{-1} (Fig. 1.1). L'équivalent des perturbations météorologiques dans l'océan sont les tourbillons de méso-échelles, comme les anneaux du Gulf Stream (Fig. 1.2). Ils ont des échelles typiques allant de 10 à 200km et se déplacent à des vitesses allant de 10 cm s^{-1} à 1 m s^{-1} . Leur taille définit l'échelle synoptique dans l'océan.

L'échelle de temps intrinsèque pour l'évolution des fluides en rotation sur la terre est simplement l'échelle de temps associée à la rotation de la terre. Si l'on note Ω la vitesse de rotation de la terre, le paramètre de Coriolis à la latitude ϕ s'écrit $f = 2 \Omega \sin \phi$ (on néglige la force de Coriolis due à la composante horizontale du vecteur rotation de la terre en première approximation). L'échelle de temps associée à la force de Coriolis est donc $T_\Omega = f^{-1}$. L'échelle de temps advective d'un mouvement de fluide se définit à partir de son échelle spatiale caractéristique et de sa vitesse caractéristique comme $T = L/U$. Le nombre de Rossby Ro de l'écoulement défini comme $\text{Ro} = \frac{T_\Omega}{T} = \frac{U}{fL}$ est le rapport de l'échelle de temps associée à la rotation de la terre à l'échelle de temps du mouvement. Les mouvements de l'atmosphère et de l'océan aux échelles synoptiques sont associés à un nombre de Rossby petit (de l'ordre de 10^{-1} dans l'atmosphère et 10^{-2} dans l'océan). Un nombre de Rossby petit correspond à la balance de l'équilibre géostrophique, qui est caractérisée par une compensation du gradient horizontal de pression par la force de Coriolis. L'écoulement observé aux échelles synoptiques dans l'atmosphère et l'océan a cette particularité que le gradient de la pression sur le plan horizontal a tendance à compenser la force de Coriolis [Cha48] (Fig. 1.3).

D'autres mouvements omniprésents dans l'atmosphère et dans l'océan sont dus aux ondes d'inertie-gravité (Fig. 1.4, 1.5), qui ne sont pas en équilibre géostrophique. Ils sont associés à des nombres de Rossby de l'ordre de l'unité, leur échelle de temps est $T_{IG} \sim T_\Omega$.

On voit que les mouvements lents et équilibrés ont une échelle de temps différente de celle des mouvements rapides et non-équilibrés, et nous verrons qu'à cette propriété est lié une séparation dynamique entre ces deux types de mouvements.

Une autre échelle temporelle caractéristique dans l'atmosphère et l'océan est liée à

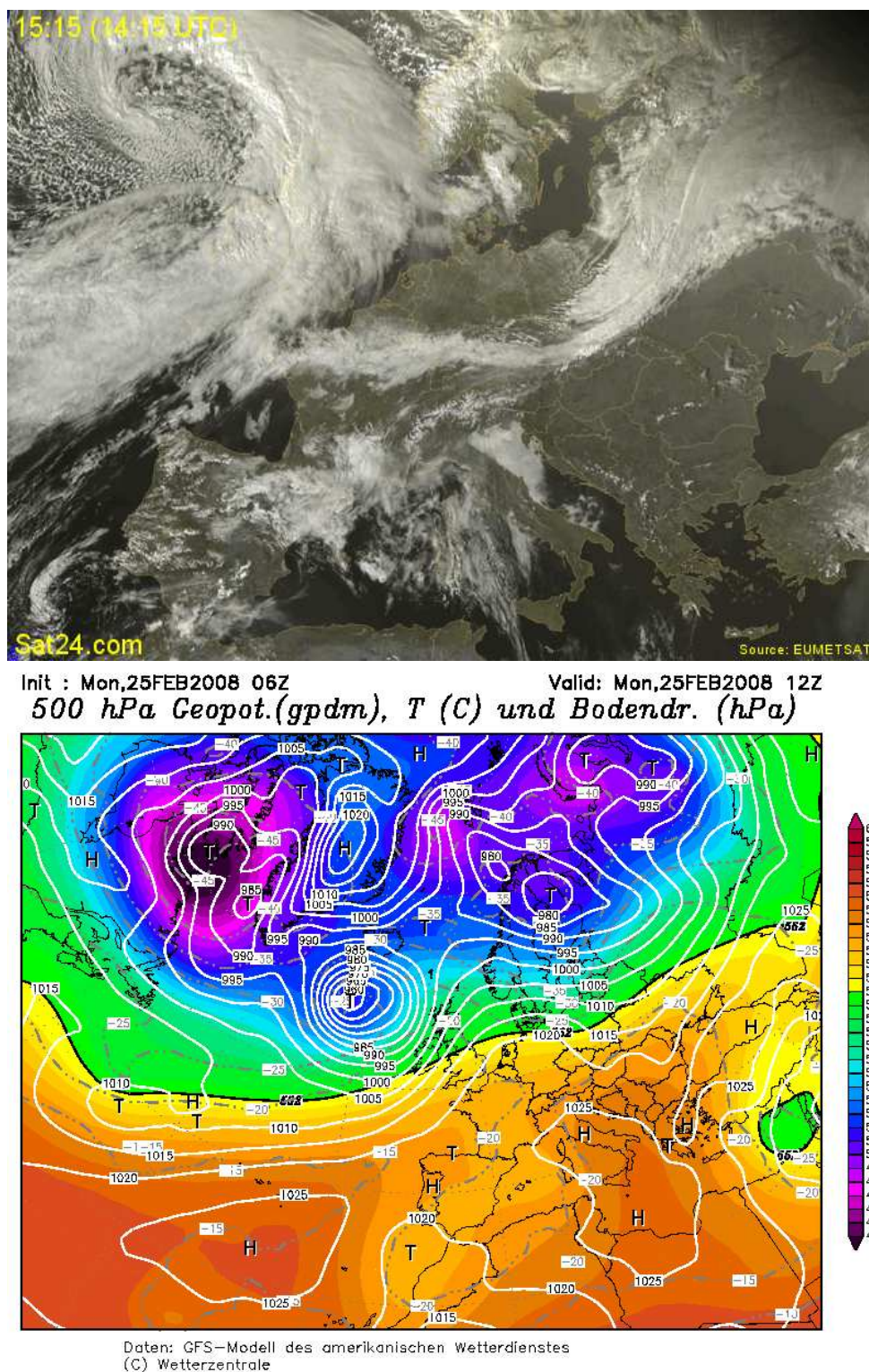


FIG. 1.1 – Image satellite (rayonnement visible) de l'Europe le 25 février 2008 (en haut, EUMETSAT) et pression de surface le même jour (en bas, GFS Wetterzentrale, lignes blanches). La bande nuageuse traversant la France est associée à la dépression centrée sur le Nord de la Finlande et la "virgule" nuageuse correspond à la dépression centrée au Sud de l'Islande.

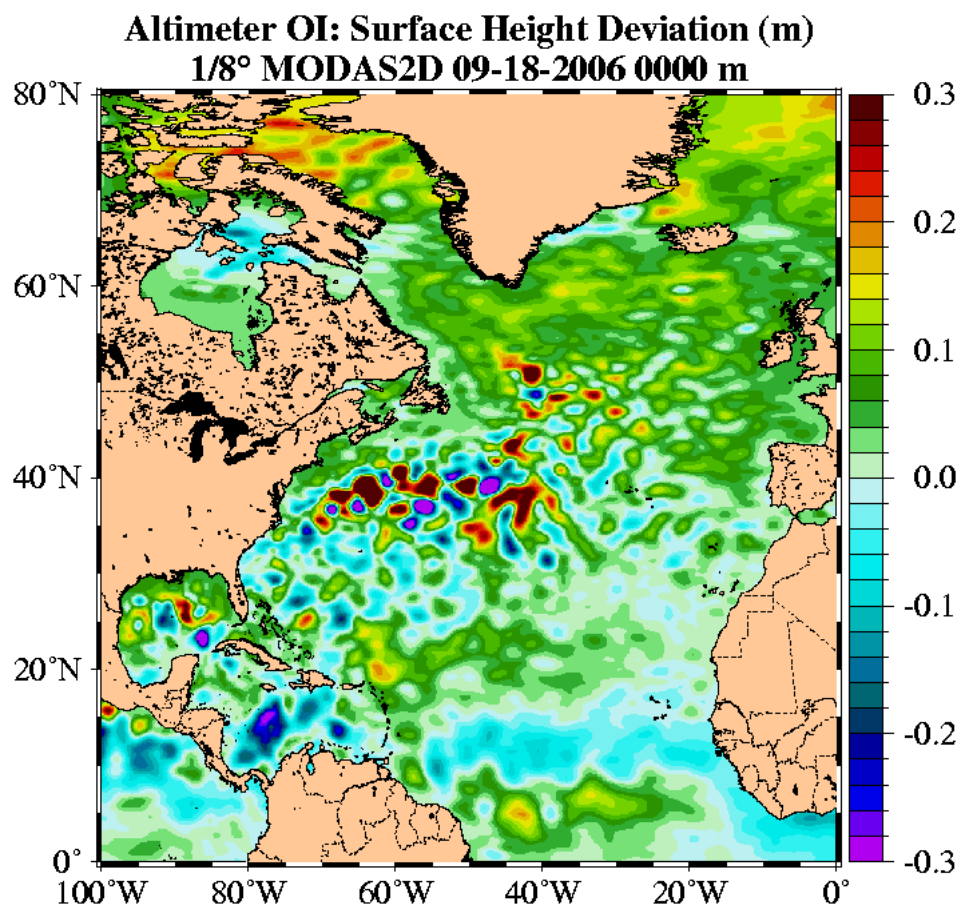


FIG. 1.2 – Anomalie de la déviation de la surface libre sur l'Atlantique Nord le 18 septembre 2006, MODAS (Naval Research Laboratory Stennis Space Center).

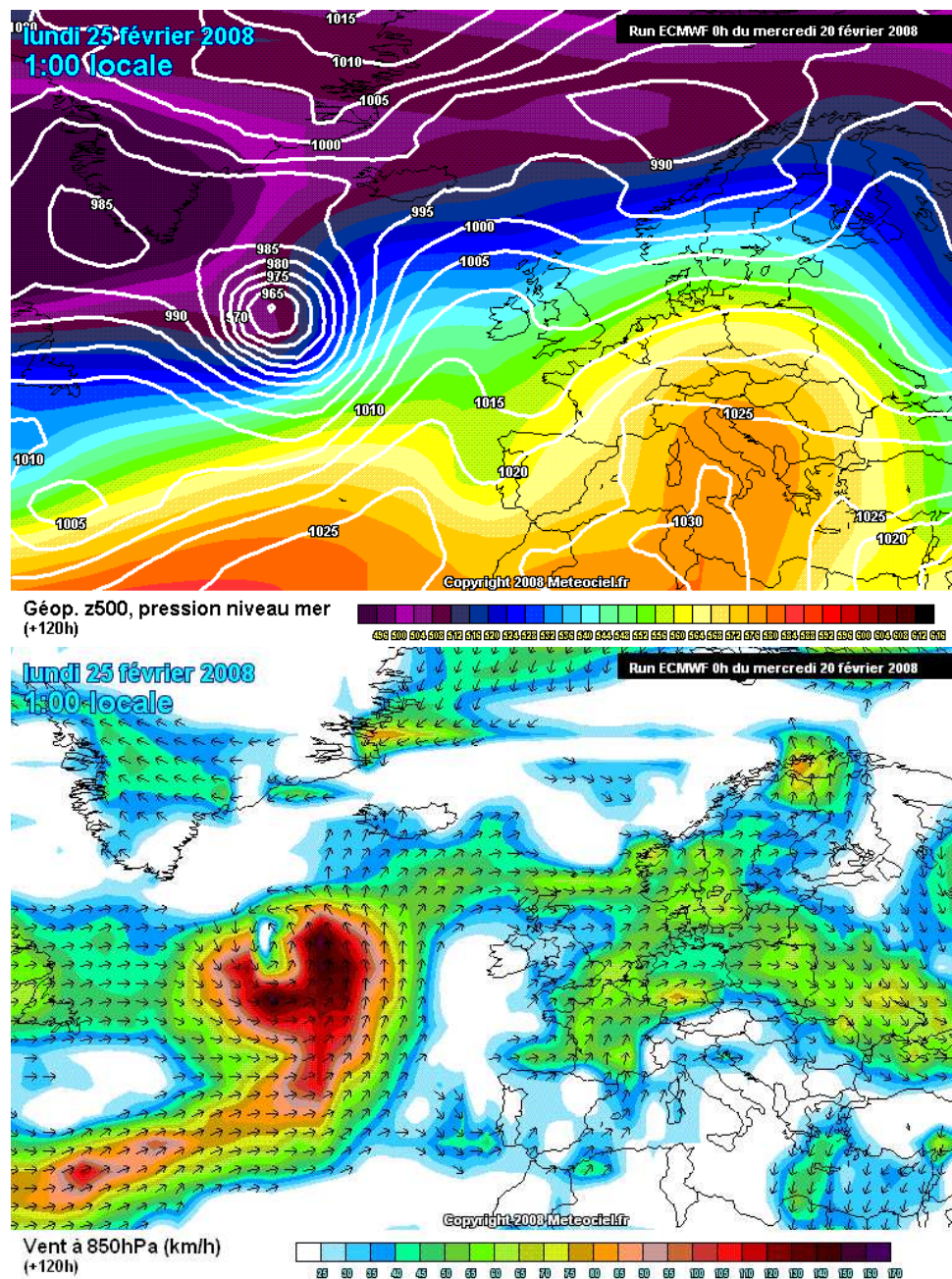


FIG. 1.3 – Cartes des pressions atmosphériques en surface et vent à 850hPa le 25 février 2008 donné par l'ECMWF. Le vent suit assez bien les isobares : l'écoulement est proche de l'équilibre géostrophique.

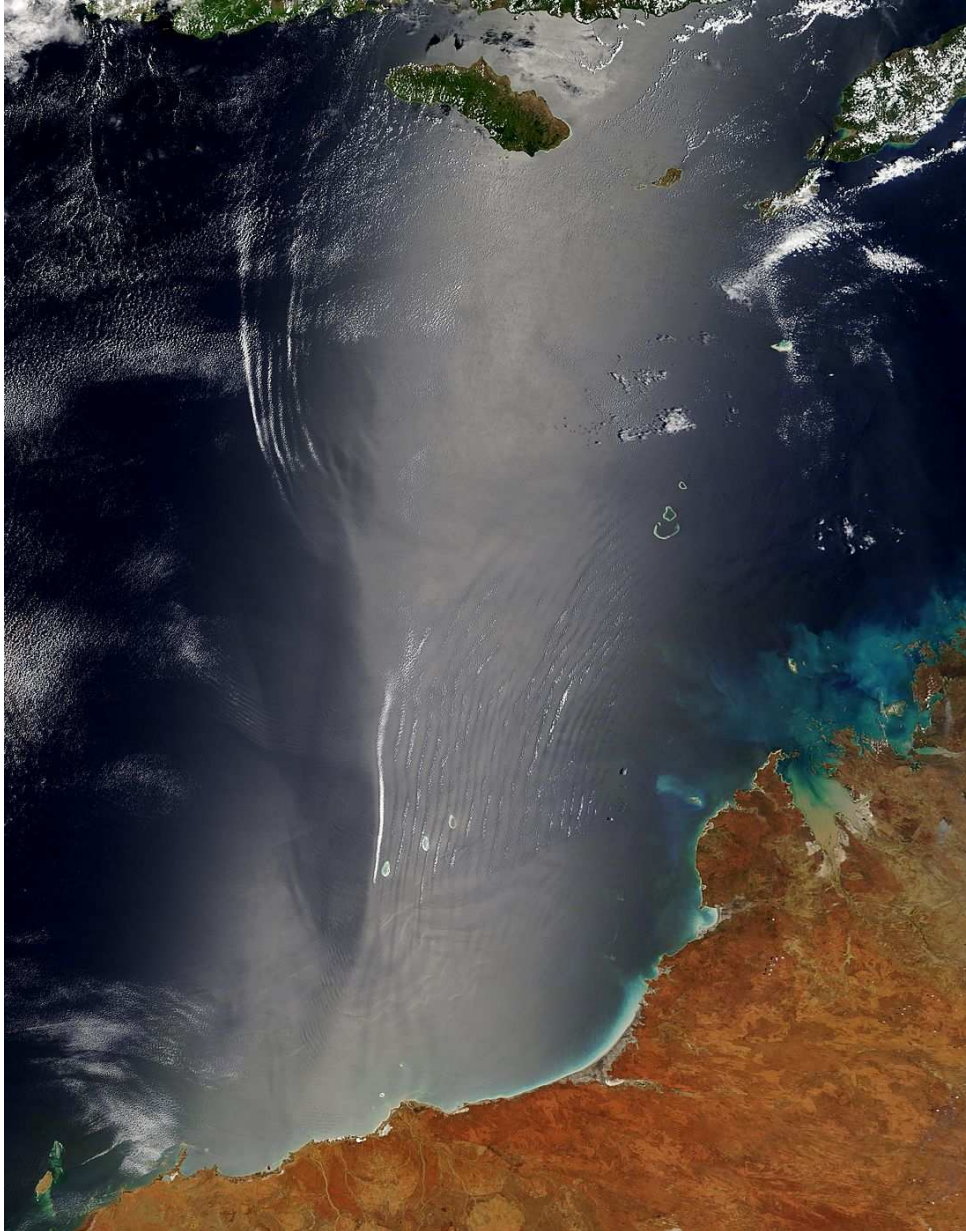


FIG. 1.4 – Ondes de gravité atmosphériques entre l'Indonésie et l'Australie vues par satellite : il s'agit d'une "impression" des ondes de gravité atmosphériques à la surface de l'océan . Les lignes sombres correspondent aux creux des ondes atmosphériques et les lignes brillantes correspondent aux crêtes. Des nuages sont visibles aux crêtes. (Jeff Schmalz, NASA Terra/MODIS)



FIG. 1.5 – Photo prise par l’équipage de la navette spatiale STS-98 le 19 février 2001 au coucher du soleil sur l’ouest de la Méditerranée. Deux paquets d’ondes internes générées par la mare sont visibles : l’un ancien (signalé par la flèche près de la légende “Internal Waves”) et l’autre venant de se former près du centre du détroit de Gibraltar (signalé par une autre flèche) (NASA, Earth Science and Image Analysis Laboratory, Johnson Space Center).

la stratification, qui permet l'existence des ondes internes d'inertie-gravité. La modélisation la plus simple de la stratification est un modèle avec une seule isopycne, c'est-à-dire avec seulement une couche de fluide de densité uniforme à surface libre. Il exclut l'existence d'ondes internes d'inertie-gravité, en permettant uniquement l'existence des ondes d'inertie-gravité surfaciques. C'est cette modélisation que nous choisirons par la suite dans la mesure où nous nous intéressons aux mouvements dans lesquels la stratification n'a pas de rôle fondamental.

C'est dans l'océan qu'une telle simplification de la stratification est la plus réaliste, en effet l'essentiel de la stratification océanique est concentrée sur la thermocline qui sépare les eaux de surface des eaux profondes où la stratification est beaucoup moins intense. Par conséquent, bien que nous nous attacherons à étudier des problèmes pouvant se poser dans l'atmosphère et l'océan, il sera souvent plus facile de trouver des exemples de leur réalisation dans l'océan. Nous faisons donc le choix de partir des équations primitives océaniques dès le prochain paragraphe. Cependant un simple changement de variable permet de retrouver les équations atmosphériques (en remplaçant l'équation d'évolution de la densité par l'équation d'évolution de la température potentielle et en utilisant les coordonnées pseudo-hauteur).

1.2 Modèle de l'eau peu profonde en rotation et séparation dynamique des mouvements tourbillonnaires/lents et ondulatoires/rapides

1.2.1 Dérivation du modèle de l'eau peu profonde en rotation

Pour étudier les écoulements océaniques et atmosphériques, on utilise les équations du mouvement pour un fluide stratifié en rotation. Les équations primitives hydrostatiques avec l'approximation de Boussinesq dans l'océan sur le plan tangent s'écrivent :

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv = -\frac{1}{\rho_0}P_x \quad (1.1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu = -\frac{1}{\rho_0}P_y \quad (1.2)$$

$$P_z + \rho g = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z = 0 \quad (1.4)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (1.5)$$

en notant en indices les dérivées partielles. Ci-dessus, ρ est la densité du fluide ($\rho = \rho_0 + \rho_1(x, y, z, t)$ où $\rho_0 = \text{constante}$), x est la coordonnée zonale dirigée vers l'Est, y est la coordonnée méridionale dirigée vers le Nord, z la coordonnée selon la verticale locale, u est la vitesse zonale, v est la vitesse méridionale, w est la vitesse verticale, $H(x, y)$ est la profondeur du fluide, P est la pression, g est l'accélération de la gravité et f est le paramètre de Coriolis, c'est-à-dire le double du taux de rotation de la terre à la latitude considérée. On rappelle que pour la force de Coriolis, on néglige sa composante associée aux projections du vecteur rotation sur le plan horizontal, car ces termes sont proportionnels à w qui est généralement au moins deux ordres de grandeur plus petit que les vitesses

horizontales dans l'atmosphère et dans l'océan. On néglige toute forme de dissipation en considérant le fluide comme parfait.

L'atmosphère et l'océan terrestre sont des fluides qui forment une couche mince : leurs échelles caractéristiques horizontales (plusieurs milliers de kilomètres pour l'atmosphère et l'océan) sont très grandes devant leurs échelles caractéristiques verticales (quelques centaines de mètres à quelques kilomètres pour l'océan et quelques dizaines de kilomètres pour l'atmosphère). Le modèle le plus simple d'une telle couche est le modèle de l'eau peu profonde en rotation, dont la dérivation standard procède comme suit [Gil82, Ped87], sous les hypothèses suivantes :

- le fluide est incompressible et $\rho = 1$,
- l'échelle verticale est petite comparée à l'échelle horizontale,
- la vitesse verticale est petite comparée aux vitesses horizontales,
- l'écoulement est quasi-bidimensionnel : $u = u(x, y, t)$; $v = v(x, y, t)$.

et avec les conditions aux limites :

- le fond est plat : $w(z = 0) = 0$,
- la surface est libre : $H_t + uH_x + vH_y = w$ en $z = H$,
- à la surface, la pression est nulle : $P(z = H) = 0$.

L'hydrostatisme (1.3) et la dernière condition aux limites permettent d'écrire le gradient horizontal de la pression en fonction du gradient horizontal de la profondeur du fluide dans (1.1 - 1.2). La quasi-bidimensionnalité du système permet d'annuler les termes u_z, v_z dans (1.1 - 1.2). La densité étant constante, l'équation (1.4) est identiquement vérifiée. Et finalement, en intégrant (1.5) selon z et en utilisant les deux premières conditions aux limites, on obtient l'équation de conservation de la masse. On arrive ainsi au système d'équations :

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -gH_x \quad (1.6)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -gH_y \quad (1.7)$$

$$H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0. \quad (1.8)$$

Ici dans l'approximation du plan tangent, le paramètre de Coriolis s'écrit $f = f_0 + \beta y$, où f_0 est le paramètre de Coriolis à une latitude de référence. Notons que les régions équatoriales sont un cas particulier : le paramètre f_0 s'annule et f devient simplement $f = \beta y$ avec f positif dans l'hémisphère Nord, nul à l'équateur et négatif dans l'hémisphère Sud.

Cette dérivation des équations de l'eau peu profonde a été faite pour un fluide homogène alors qu'une autre méthode de dérivation de ces équations plus générale, proposée par Jeffreys [Jef25] et Obukhov [Obu49], existe. La méthode (cf [ZBM⁺07]) consiste à écrire les équations (1.1-1.2) comme les équations d'évolutions de la quantité de mouvement grâce à (1.4-1.5), en relâchant même l'approximation de Boussinesq :

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z - f\rho v = -P_x, \quad (1.9)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2)_y + (\rho vw)_z + f\rho u = -P_y \quad (1.10)$$

et à faire la moyenne sur la verticale de ces équations (1.9-1.10) et de l'équation résultant de la combinaison de (1.4) et (1.5) :

$$\partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u^2 + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho uv - f \int_{z_1}^{z_2} dz f v = -\partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz P -$$

$$\begin{aligned}
 & - \partial_x z_1 P|_{z_1} + \partial_x z_2 P|_{z_2} \\
 \partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho uv + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v^2 + f \int_{z_1}^{z_2} dz fu &= -\partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz P - \\
 & - \partial_y z_1 P|_{z_1} + \partial_y z_2 P|_{z_2} \\
 \partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v &= 0
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

(en utilisant la formule $\int_{z_1}^{z_2} dz F_x = \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz F - \partial_x z_2 F|_{z_2} + \partial_x z_1 F|_{z_1}$ valide pour toute fonction F), où z_1 et z_2 satisfont $\frac{dz_i}{dt} = w|_{z_i}$, $i = 1, 2$.

En définissant la densité intégrée $\mu = \int dz \rho$, et la moyenne verticale pondérée par la densité pour une quantité A : $\langle A \rangle = \frac{1}{\mu} \int dz \rho A$, on obtient les équations de la quantité de mouvement et la continuité moyennées :

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\mu \langle u \rangle) + \partial_x(\mu \langle u^2 \rangle) + \partial_y(\mu \langle uv \rangle) - f\mu \langle v \rangle &= -\partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz P - \partial_x z_1 P|_{z_1} + \\
 & + \partial_x z_2 P|_{z_2}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\mu \langle v \rangle) + \partial_x(\mu \langle uv \rangle) + \partial_y(\mu \langle v^2 \rangle) + f\mu \langle u \rangle &= -\partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz P - \partial_y z_1 P|_{z_1} + \\
 & + \partial_y z_2 P|_{z_2}
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\partial_t \mu + \partial_x(\mu \langle u \rangle) + \partial_y(\mu \langle v \rangle) = 0 \tag{1.16}$$

En supposant que les variations de toutes les variables sont faibles dans la direction verticale (hypothèse de quasi-bidimensionnalité), les corrélations peuvent être découplées :

$$\langle uv \rangle \approx \langle u \rangle \langle v \rangle, \quad \langle u^2 \rangle \approx \langle u \rangle \langle u \rangle, \quad \langle v^2 \rangle \approx \langle v \rangle \langle v \rangle. \tag{1.17}$$

En posant $\bar{\rho} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} dz \rho$, $\mu = \bar{\rho}(z_2 - z_1)$, et en omettant les crochets on arrive à

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(z_2 - z_1)(\partial_t \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h + f \hat{z} \times \mathbf{v}_h) &= -\nabla_h \left(-g \bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) P|_{z_1} \right) - \\
 & - \nabla_h z_1 P|_{z_1} + \nabla_h z_2 P|_{z_2}.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\mathbf{v}_h$ est le vecteur (u, v) et ∇_h est l'opérateur gradient horizontal, en supposant que $\bar{\rho}$ est constant. En considérant un fond plat en $z_1 = 0$ et la surface libre en $z_2 = h(x, y, t)$, on peut réécrire (1.16) et (1.18) :

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0, \tag{1.19}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h + f \hat{z} \times \mathbf{v}_h = -\nabla_h(gh) \tag{1.20}$$

en supposant simplement que la pression à la surface est nulle : $P|_{z_2} = 0$.

En présence d'une topographie $z_1 = Z(x, y)$ et on aboutit au système :

$$\partial_t(h - Z) + \partial_x((h - Z)u) + \partial_y((h - Z)v) = 0, \tag{1.21}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h + f \hat{z} \times \mathbf{v}_h = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_h(\bar{\rho} gh) \tag{1.22}$$

En reprenant les notations de la dérivation standard (1.6-1.8), où H est l'épaisseur du fluide, le système (1.21-1.22) se réécrit :

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -gH_x - gZ_x, \tag{1.23}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -gH_y - gZ_y, \tag{1.24}$$

$$H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0, \tag{1.25}$$

C'est cette forme qu'on l'utilisera à partir du chapitre 2.

On a donc montré que les équations de l'eau peu profonde en rotation modélisent l'évolution d'un fluide inhomogène moyenné sur la verticale, sous une seule hypothèse de quasi bidimensionnalité (les variations sont faibles dans la direction verticale).

Ce modèle présente l'avantage d'être simple tout en contenant tous les ingrédients essentiels pour l'étude de la dynamique des fluides en rotation, il inclut notamment les effets non linéaires. L'intégration numérique est largement facilitée, comparativement aux équations primitives (1.1-1.5). Ce modèle est fréquemment utilisé pour des études conceptuelles, notamment pour les études de stabilité sur le plan f [GKS82, PF03, PG97] et sur le plan β [Rip83], ou pour modéliser de façon simple la circulation atmosphérique [Gil80, Nee89].

Il est important de garder à l'esprit les limites de ce modèle : il ne permet pas de décrire les écoulements non hydrostatiques, il n'inclut pas de thermodynamique et sa représentation de la stratification est rudimentaire. La dissipation peut être incorporée de façon standard en ajoutant les termes visqueux aux équations de quantité de mouvement (1.23, 1.24).

Ce modèle peut également être interprété comme le modèle d'un fluide à gravité réduite à une couche et demie, c'est-à-dire un fluide à deux couches dans la limite où une des couche est au repos et de profondeur infinie. On obtient les équations du modèle à deux couches en partant de l'équation (1.18) qu'on applique alors au fluide contenu entre un fond et un toit rigide. On choisit une surface matérielle $z = z_2(x, y, t) = h(x, y, t)$ à l'intérieur du fluide et on considère deux couches de fluide, l'une au-dessus et l'autre au-dessous de cette surface. La frontière inférieure de la couche du bas est $z_1 = 0$, et la frontière supérieure de la couche du haut est $Z_3 = H$. Partant de là, $\mu_1 = \bar{\rho}_1(z_2 - z_1)$ et $\mu_2 = \bar{\rho}_2(H - z_2)$. Avec (1.16) on obtient les équations d'évolution de l'interface entre les deux couches, tandis que les équations d'évolution de la quantité de mouvement s'obtiennent à partir de (1.18). Le modèle de l'eau peu profonde en rotation à deux couches est donc :

$$\partial_t h + \nabla \cdot (\mathbf{v}_1 h) = 0, \quad (1.26)$$

$$\partial_t (H - h) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_2 (H - h)) = 0, \quad (1.27)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + f \hat{z} \times \mathbf{v}_i + \frac{1}{\bar{\rho}_i} \nabla \pi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1.28)$$

$$\pi_1 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)gh + \pi_2 \quad (1.29)$$

où les indices 1 (2) désignent la couche inférieure (supérieure) respectivement et Π_2 est la valeur de la pression à la frontière supérieure. On obtient le modèle à gravité réduite à une couche et demie en prenant la limite $\mathbf{v}_2 \rightarrow 0$ et $h \ll H$:

$$\partial_t h + \nabla \cdot (\mathbf{v} h) = 0, \quad (1.30)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \hat{z} \times \mathbf{v} + g' \nabla h = 0, \quad (1.31)$$

où $g' = \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} g$ est appelée la gravité réduite.

C'est à dire que lorsqu'on considère un fluide à deux couches dont l'une est en mouvement (de densité ρ_1) et située au dessous de la seconde (de densité ρ_2) supposée au repos et de profondeur très grande devant la profondeur de la couche en mouvement, les

équations décrivant le fluide dans la couche en mouvement sont celles de u modèle de l'eau peu profonde en rotation avec la gravité g remplacée par la gravité réduite g' .

De la même façon considérer la couche inférieure au repos et de profondeur très grande devant la profondeur de la couche supérieure. On obtiendra alors pour la couche supérieure active le même système d'équations (1.30-1.31) avec la gravité réduite par $g'' = \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_2} g$ au lieu de g' .

On voit donc qu'on peut donner deux interprétations aux phénomènes étudiés dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation. On peut par exemple transposer les résultats obtenus en eau peu profonde à la couche superficielle de l'océan en supposant que la couche au repos est constituée par le fluide se trouvant au dessous de la thermocline, et en modifiant la valeur de g pour celle de g'' .

1.2.2 Séparation dynamique des mouvements tourbillonnaires et ondulatoires

Une loi de conservation lagrangienne est présente dans le modèle de l'eau peu profonde, qui est une caractéristique importante des systèmes stratifiés en rotation. L'invariant lagrangien est la vorticité potentielle $q = \frac{v_x - u_y + f}{h}$:

$$\frac{dq}{dt} = 0. \quad (1.32)$$

où $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$. Un inconvénient de la vorticité potentielle est qu'elle n'est pas nulle en l'absence de mouvement. On définira donc généralement l'anomalie de vorticité potentielle en soustrayant à la vorticité potentielle complète la vorticité potentielle de l'état de repos. Ainsi la conservation de la vorticité potentielle nous donne une vision intuitive de la dynamique dans le modèle de l'eau peu profonde : des colonnes de fluides de profondeur variable se déplacent horizontalement de sorte que chaque changement de profondeur soit compensé par un changement de la vorticité absolue $v_x - u_y + f$ (et vice versa).

Nous allons nous placer dans le cadre de la version linéaire de ce modèle pour mettre en évidence la séparation dynamique qui existe entre mouvements lents et équilibrés et mouvements rapides et non-équilibrés. Pour cela, on linéarise les équations (1.6)-(1.8) autour d'un état de repos : $H = cte = H_0$, $u = v = 0$. On note u' , v' et η les perturbations de la vitesse zonale, de la vitesse méridienne et de la hauteur de fluide respectivement. Les équations linéarisées s'écrivent :

$$u'_t - f v' = -g \eta_x \quad (1.33)$$

$$v'_t + f u' = -g \eta_y \quad (1.34)$$

$$\eta_t + H_0 u'_x + H_0 v'_y = 0. \quad (1.35)$$

En cherchant des solutions de la forme $(u'_0, v'_0, \eta_0) \exp^{i(kx+ly-\omega t)}$ on obtient la condition de solvabilité du système :

$$\omega (\omega^2 - f^2 - g H_0 (k^2 + l^2)) = 0. \quad (1.36)$$

Cette relation de dispersion a deux types de solutions :

- $\omega = \pm \sqrt{f^2 + gH_0(k^2 + l^2)}$
- $\omega = 0$

La vorticité potentielle linéarisée s'écrit :

$$\frac{v_x - u_y + f}{h} \Big|_{lin} = \frac{f}{H_0} + \frac{v'_x - u'_y}{H_0} - \frac{f \eta}{H_0^2} \quad (1.37)$$

Le terme $\frac{f}{H_0}$ existe quel que soit le mouvement, on définira donc l'anomalie de vorticité potentielle comme $q_a = q|_{lin} - \frac{f}{H_0}$. Ici $q_a = \frac{v'_x - u'_y}{H_0} - \frac{f \eta}{H_0^2}$.

La première et la deuxième solution décrivent des ondes propagatives d'inertie-gravité : leurs forces de rappel sont la force de Coriolis et la gravité. Elles sont dispersives et à divergence non nulle. On remarque que pour ces deux solutions l'anomalie de vorticité potentielle est nulle : $q_a = 0$. Cela signifie que les ondes d'inertie-gravité ne portent pas de vorticité potentielle, dans le cadre de ce modèle linéaire.

La dernière solution ne vérifie pas la même propriété d'annulation de l'anomalie de la vorticité potentielle linéarisée que les deux premières. Cette solution constitue donc la partie vorticale de l'écoulement. La nullité de ω signifie que la solution est stationnaire. Ainsi l'évolution de la partie vorticale de l'écoulement sera nécessairement nonlinéaire.

On voit donc apparaître la séparation dynamique entre les mouvements lents et les mouvements rapides dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation. La rotation est responsable du trou spectral existant entre d'une part les mouvements vorticaux lents à $\omega = 0$ et d'autre part les ondes rapides, d'inertie-gravité, à $\omega^2 = f^2 + gH_0(k^2 + l^2)$.

La connaissance de cette séparation dynamique permet de dériver des modèles simplifiés à partir des équations complètes en se restreignant aux échelles de temps longues. Un exemple d'un tel modèle est le modèle quasi-géostrophique (QG), qui est largement utilisé pour l'analyse de processus particuliers dans l'océan ou dans l'atmosphère autant que pour l'étude globale de la dynamique du climat. En particulier, la première prévision météorologique réussie a été réalisée à l'aide de ce modèle.

Nous nous intéresserons par contre au modèle de l'eau peu profonde en rotation complet pour étudier à la fois la dynamique lente et la dynamique rapide, ainsi que l'éventuelle interaction. L'analyse linéaire ci-dessus suggère que la solution du problème aux valeurs initiales avec une perturbation initiale localisée consistera dans ce modèle, en général, en des ondes d'inertie-gravité s'éloignant de la perturbation initiale et laissant derrière elles la composante vorticale quasi-stationnaire. Il s'agit du processus de relaxation vers l'état d'équilibre géostrophique, nommé plus simplement ajustement géostrophique.

1.3 Ajustement géostrophique

Une propriété très spécifique du modèle de l'eau peu profonde est l'existence d'une échelle de longueur interne qu'on appelle le rayon de déformation de Rossby : $R_d = \frac{\sqrt{gH_0}}{f}$. Pour les mouvements ayant une seule échelle de vitesse U et une seule échelle de longueur L , les paramètres adimensionnés suivants peuvent être introduits :

$$Ro = \frac{U}{f L}, \quad Bu = \frac{R_d^2}{L^2}, \quad (1.38)$$

qui sont les nombres de Rossby et de Burger, et le paramètre de nonlinéarité $\lambda = \frac{\Delta H}{H_0}$ où ΔH est le déplacement caractéristique de la surface libre. Le temps caractéristique des mouvements vorticaux est $T = L/U$ (temps de retournement d'un tourbillon) et ainsi pour les mouvements lents le nombre de Rossby, qui est le rapport de la fréquence de retournement d'un tourbillon au double de la fréquence de rotation terrestre, est petit.

Les équations de l'eau peu profonde en rotation adimensionnées pour un déplacement de la surface libre η pour les mouvements d'échelles caractéristiques L , T et U sont :

$$\text{Ro}(u_t + uu_x + vu_y) - v = -\frac{\lambda \text{Bu}}{\text{Ro}} \eta_x \quad (1.39)$$

$$\text{Ro}(v_t + uv_x + vv_y) + u = -\frac{\lambda \text{Bu}}{\text{Ro}} \eta_y \quad (1.40)$$

$$\lambda \eta_t + ((1 + \lambda \eta)u)_x + ((1 + \lambda \eta)v)_y = 0. \quad (1.41)$$

Ainsi pour les nombres de Rossby petits, l'accélération de Coriolis domine dans le membre de gauche de (1.39)-(1.40). Pour équilibrer l'accélération de Coriolis il faut que la relation entre les paramètres, $\lambda \text{Bu} = \mathcal{O}(\text{Ro})$, soit vérifiée. Dans ce cas, l'équilibre géostrophique

$$-fv = -g\eta_x, \quad (1.42)$$

$$+fu = -g\eta_y \quad (1.43)$$

apparaît à l'ordre dominant en nombre de Rossby. Comme mentionné dans la partie 1.1, les mouvements à l'échelle synoptique dans l'atmosphère et l'océan sont proches de l'équilibre géostrophique (1.42)-(1.43). Le mécanisme physique amenant à cet équilibre¹ est l'ajustement géostrophique, avec l'émission d'ondes d'inertie-gravité.

Le processus d'ajustement se déroule de la façon suivante [Blu72] : le fluide, une fois perturbé de son état d'équilibre, se réarrange rapidement (en quelques périodes inertielles) pour trouver un état d'équilibre. Au cours de ce réarrangement, des ondes sont émises qui se dispersent et se propagent en laissant derrière elles la partie ajustée de l'écoulement qui évolue lentement. Ce processus, au moins pour les petits Ro , est universel et accompagne la relaxation de toutes les perturbations.

La première étude de l'ajustement géostrophique a été réalisée par Rossby [Ros37] dans le cadre des équations de l'eau peu profonde en rotation. En considérant que le vent a mis en mouvement la couche océanique superficielle, il a montré que des conditions initiales non géostrophiques excitent des ondes d'inertie-gravité transitoires qui redistribuent la masse et la quantité de mouvement pour établir finalement un état stationnaire (pour un problème indépendant d'une coordonnée spatiale horizontale) en équilibre géostrophique.

Des exemple de perturbations provoquant des ajustements géostrophiques sont

- dans l'océan : le forçage des couches superficielles de l'océan par le vent [Ros37], notamment le passage d'un cyclone au dessus d'un océan [Gei70], des événements de précipitations localisés créant une anomalie de densité en surface d'un plan d'eau, un chauffage inhomogène provoquant l'apparition d'un gradient de densité [Ou84],
- en hydraulique : une rupture de barrage [HKP99, LSRZ04],
- dans l'atmosphère : les épisodes de frontogenèse [BW95], les perturbations du jet stream [FL92] ou la réponse à un chauffage localisé instantané [CB01].

¹Rappelons qu'un état équilibré d'un système est un état indépendant du temps et de l'histoire du système, qui sera atteint au cours d'une expérience si on attend suffisamment longtemps

Le modèle linéaire de l'eau peu profonde en rotation permet de comprendre assez simplement le déroulement de ce processus, et particulièrement de mettre en évidence l'échelle spatiale de l'ajustement : le rayon de déformation de Rossby R_d [Gil82].

Mais, comme on l'a vu dans la partie 1.2, l'évolution de la composante vorticale de l'écoulement est nécessairement nonlinéaire.

L'ajustement nonlinéaire dans le modèle de l'eau peu profonde a été l'objet de nombreuses études depuis les travaux de Rossby [Ros37], [Blu72] jusqu'à aujourd'hui. Les études du processus nonlinéaire ont d'abord montré que le temps d'ajustement nécessaire pour atteindre un état approché de l'équilibre géostrophique est plus long que ce qui est prévu par l'analyse linéaire [Blu67] et que pour une perturbation bornée horizontalement, la répartition de l'énergie au cours de l'ajustement est différente dans le processus linéaire et dans le processus nonlinéaire : pour une perturbation positive (négative) de la profondeur initiale, l'état final nonlinéaire a plus (moins) d'énergie que l'état final linéaire [BT95].

Kuo et Polvani [KP00] ont montré que l'ajustement géostrophique nonlinéaire conduit à une asymétrie de l'état ajusté selon que la perturbation initiale est un cyclone ou un anticyclone. Ils ont également montré que l'ajustement géostrophique nonlinéaire peut déformer irréversiblement les contours de la vorticité potentielle : l'ajustement est donc un mécanisme permettant les changements irréversibles de vorticité potentielle.

Kuo et Polvani ont aussi étudié l'ajustement géostrophique nonlinéaire à une dimension dans le modèle de l'eau peu profonde [KP97]. Ils ont montré que des discontinuités se forment même en présence des effets dispersifs de la rotation, et ne sont pas simplement des résultats de la discontinuité de la perturbation initiale. La combinaison de la rotation et de la nonlinéarité produit des phénomènes qui ne sont pas présents en leur absence : la formation de chocs multiples et leur déclin subséquent. Pour répondre à la question de savoir combien de temps dure le processus d'ajustement, ils ont réalisé plusieurs mesures pour aboutir à la conclusion que l'anomalie de l'élévation de la surface libre s'ajuste en quelques périodes inertielles et les vitesses, quant à elles mettent plus de temps.

Zeiltin, Medvedev et Plougonven [ZMP03] ont donné dans ce même cadre (modèle de l'eau peu profonde à 1 dimension) une preuve de l'existence et de l'unicité de l'état ajusté pour des configurations où la vorticité potentielle initiale est non négative. Ils ont montré que pour des perturbations suffisamment petites l'ajustement est toujours complet. Des expériences numériques [BLZ04] ont complété ce travail en montrant que pour des conditions initiales localisées dans le domaine ouvert, un état ajusté est toujours atteint. C'est le cas même lorsque la vorticité potentielle n'est pas définie positive, alors qu'il n'y a aucune preuve d'existence d'un état ajusté. L'ajustement de la partie vorticale de l'écoulement est rapide, il se fait en quelques périodes inertielles. Les oscillations quasi-inertielles, qui ne portent pas de vorticité potentielle perdurent longtemps au voisinage du coeur du jet. Elles représentent une partie "onde longue" de la perturbation initiale et décroissent en $t^{-1/2}$. Pour les ajustements dans des domaines ouverts et périodiques, ils montrent que la formation de chocs est omniprésente. Les chocs dissipent l'énergie efficacement, mais la distribution de vorticité potentielle n'est pas changée au passage des chocs dans le cas d'écoulements strictement rectilinéaires.

La théorie de l'ajustement géostrophique non linéaire de perturbations localisées arbitraires dans le modèle de l'eau peu profonde (2 dimensions) a été étudiée par Reznik, Zeiltin et Ben Jelloul [RZBJ01]. Dans ce papier, les seules hypothèses sont que l'échelle

de la perturbation soit bien définie et que le nombre de Rossby Ro soit petit. En utilisant un développement multi échelle temporelles systématique pour la perturbation, ils ont montré que le champ est séparé de façon unique en une composante lente et une composante rapide. La composante lente du mouvement n'est pas influencée par la composante rapide et reste proche de l'équilibre géostrophique. Le scénario de l'ajustement dépend de l'échelle caractéristique et / ou de l'élévation relative initiale de la surface. Pour des petites élévations relatives (de l'ordre du nombre de Rossby), l'évolution de la composante lente est régie par l'équation bien connue de la vortacité potentielle géostrophique sur les temps $t \leq (fRo)^{-1}$. La composante rapide consiste principalement en des ondes d'inertie-gravité linéaires s'éloignant rapidement de la perturbation initiale. Pour des grandes élévations relatives, le champ lent est gouverné par l'équation de la dynamique frontale géostrophique. La composante rapide dans ce cas est un paquet localisé spatialement d'oscillations inertielles couplé à la composante lente de l'écoulement. Son enveloppe subit une modulation lente et obéit à une équation de modulation du type de l'équation de Schrodinger décrivant l'advection et la dispersion du paquet. En fonction du profil de la composante lente le piégeage des oscillations inertielles peut avoir lieu. La raison physique pour la séparation lente / rapide est la conservation de la vortacité potentielle, le fait que les ondes d'inertie-gravité ne portent pas de vortacité potentielle et le gap dans le spectre des petites perturbations dans l'eau peu profonde en rotation qui en particulier bloque la radiation de Lighthill d'ondes d'inertie-gravité.

Des mesures quantitatives de la vortacité potentielle et de l'équilibre de l'écoulement après l'ajustement géostrophique ont été réalisées par Stegner *et al* [SBAP04] : le profil de densité et l'énergie potentielle de l'état ajusté moyen observé dans les expériences sont en accord avec les prédictions de la théorie de l'ajustement non dissipatif standard. L'énergie cinétique de l'état ajusté et l'énergie transférée aux ondes d'inertie-gravité sont significativement réduits par les processus dissipatif qui se produisent durant la première période inertielle, au niveau du front de densité.

Dans l'océan et l'atmosphère réels, le plan infini qui a été utilisé pour les études citées ci-dessus n'existe pas. Les fluides au cours de leur évolution rencontrent des obstacles à leur évolution "libre". Les obstacles les plus répandus sont les côtes, les topographies et les forts gradients de densité. La caractéristique commune à ces obstacles est leur propriété de guide d'ondes. Une nouvelle classe de mouvement existe alors : les ondes piégées par ces guides d'ondes. Dans cette thèse on se pose la question de savoir comment le processus d'ajustement est modifié lorsque des guides d'ondes sont présents, et donc que des ondes piégées viennent compléter l'ensemble des mouvements possibles.

1.4 Ajustment géostrophique en présence de guides d'ondes

Différents guides d'ondes existent dans l'océan et dans l'atmosphère. Nous allons exposer et illustrer par des exemples les piégeages qui sont étudiés dans ce travail de thèse. Nous verrons alors pour chacun de ces mécanismes de piégeage, comment ils peuvent modifier le scénario connu de l'ajustement géostrophique non linéaire.

1.4.1 Guide d'ondes frontal

L'intersection d'une surface isopycnale avec une interface, un front de densité, constitue un piège : le fluide est confiné entre la surface isopycnale et l'interface. En l'absence de mécanismes d'échange de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, le fluide se trouvant occlus dans le volume défini par l'ensemble "isopycne+interface fluide" ou "isopycne+surface solide" est piégé. Par conséquent, les fronts de densité sont les guides d'ondes pouvant exister dans ce fluide.

Dans l'océan, lorsqu'une isopycne intersecte la surface libre, on parle d'"outcropping" et lorsqu'une isopycne intersecte le fond océanique on parle d'"incropping". Ces termes n'ayant pas d'équivalent concis en français, on les utilisera dans le texte. Un piège "isopycnal" peut être l'occurrence d'un outcropping complet (= la surface isopycnale s'appuie entièrement sur la surface libre), ce qui arrive lorsqu'un fluide peu dense se trouve sur une superficie limitée à la surface de l'océan, par exemple lors d'un épisode de précipitations, ou bien à grande échelle, la langue d'eau chaude de l'océan Pacifique équatorial Ouest en jeu dans le mécanisme El Nino est en situation d'outcropping par rapport aux eaux plus froides à l'Est [Phi89].

L'occurrence d'un incropping complet (= la surface isopycnale s'appuie entièrement sur le fond) constitue au même titre un piège isopycnal. Cette situation est fréquente pour les courants d'eau profonde, notamment au passage de détroits [Smi76]. D'autres exemples sont les filaments denses qui se forment après que des masses d'eaux soit descendues le long des pentes continentales vers l'océan profond [Con95] et les bulles froides isolées sur le fond océanique. Ces dernières peuvent transporter des anomalies de températures sur quelques milliers de kilomètres depuis leur origine [Nof83].

La dynamique des courants denses en situation d'incropping est importante pour le transport de chaleur et de masse dans l'océan. L'ajustement géostrophique nonlinéaire d'une bulle froide en incropping, de profondeur constante sur un disque, a été étudié numériquement [MM00]. Il a été mis en évidence que l'expansion radiale de l'écoulement dépend du taux de rotation et que la discontinuité de la profondeur du fluide était rapidement remplacée par une transition douce jusqu'à la profondeur zéro.

La principale contrainte apportée par ces pièges isopycnaux est que, comme le fluide, les ondes sont emprisonnées et ne peuvent s'évacuer comme dans le scénario classique d'ajustement géostrophique (section 1.3) et donc n'offrent plus la possibilité d'évacuer l'excédent d'énergie pour atteindre un état équilibré. C'est-à-dire que le fluide piégé ne peut interagir avec le fluide ambiant (par contre, dans un modèle dont la représentation de la stratification est plus sophistiqué, le mouvement piégé et le mouvement dans le fluide ambiant pourront échanger de l'énergie). On présume donc que le scénario connu de l'ajustement géostrophique nonlinéaire sera modifié. C'est la modification apportée par l'outcropping ou l'incropping que nous souhaitons étudier en adressant les questions suivantes :

- Un état ajusté existe-t-il en situation d'incropping (ou outcropping) complet ?
- Si oui, est-il stable ? En effet Griffiths, Killworth et Stern [GKS82] ont montré que les courants équilibrés avec outcropping complets peuvent être instables et on peut se demander quel sera l'état final de l'ajustement si celui-ci est instable ?
- Comment vont évoluer les ondes d'inertie-gravité, étant donné qu'elles ne peuvent s'évacuer ? Vont-elles déferler et ainsi agir sur le mélange ? Vont-elles interagir avec l'écoulement ajusté s'il existe ? Vont-elles contribuer au transport ?

1.4.2 Guide d'ondes côtier

La présence d'une côte sur un référentiel en rotation joue un rôle proche d'un guide d'onde, en le sens qu'il permet l'existence et la propagation d'ondes confinées spatialement contre la côte : les ondes de Kelvin côtières. Ce sont des ondes non dispersives qui se propagent le long de la côte, et dont l'amplitude décroît exponentiellement en s'éloignant de la côte, et qui ne portent pas d'anomalie de vortacité potentielle. La présence des ondes de Kelvin côtières détruit le trou spectral discuté dans la partie 1.2. En effet, les ondes de Kelvin côtières ne sont bien séparées des ondes d'inertie-gravité que pour les petits nombres d'ondes. Le champ de vitesse et l'élévation de la surface libre de l'onde de Kelvin sont en équilibre géostrophique, par conséquent cette onde appartient à la classe des mouvements équilibrés.

Dans l'océan, les côtes des continents jouent ce rôle et dans l'atmosphère, les chaînes montagneuses ou la masse continentale côtière joue le rôle de côte pour l'écoulement atmosphérique [Gil77].

Lors du processus d'ajustement géostrophique linéaire en présence de bords, loin des bords l'ajustement géostrophique se déroule comme dans un domaine libre [Gil76, Gil82]. Les ondes d'inertie-gravité émises, lorsqu'elles rencontreront le bord se réfléchiront et donneront naissance à une onde de Kelvin qui se propagera le long du bord (en gardant le bord sur sa droite dans l'hémisphère Nord).

L'ajustement géostrophique nonlinéaire près d'un bord a été étudié théoriquement par [RG02] à l'aide d'un développement asymptotique multi-échelles en nombre de Rossby ($Ro = \epsilon$). Ils ont considéré des conditions initiales dont l'échelle spatiale est de l'ordre du rayon de déformation, soit périodiques, soit de type "marche d'escalier", soit localisées. Dans chaque cas la perturbation initiale se sépare d'une façon unique en composantes lentes (échelle f^{-1}) et rapides (échelles ϵf^{-1}). La composante lente n'est pas influencée par la composante rapide au moins pour les temps $t \leq (\epsilon f)^{-1}$ et reste proche de l'équilibre géostrophique. La partie rapide consiste principalement en des ondes d'inertie-gravité s'éloignant rapidement de la perturbation initiale et d'ondes de Kelvin confinées près du bord. Au cours du temps le profil de l'onde de Kelvin se distord à cause d'auto-interactions nonlinéaires, la distortion étant décrite par une équation d'ondes simple. La présence de l'onde de Kelvin n'empêche pas la séparation entre composante lente et rapide du mouvement, bien qu'aucun trou spectral entre les ondes de Kelvin et le mouvement lent n'existe.

Nous souhaitons prolonger l'étude de Reznik et Grimshaw [RG02] pour des nonlinéarités plus fortes : soit en étudiant l'ajustement de perturbations d'amplitudes plus importantes, soit en étudiant l'évolution sur des échelles de temps plus longues. On souhaite apporter les réponses aux questions suivantes :

- Comment l'ajustement se déroule-t-il sur des temps plus longs ?
- Quelles seront les conséquences du déferlement de l'onde de Kelvin côtière sur la distribution de la vortacité potentielle ?
- Comment l'onde de Kelvin côtière contribuera-t-elle au mélange et au transport au cours de son évolution nonlinéaire ?

1.4.3 Guide d'ondes topographique

En général, les pièges de type "guide d'onde" sont constitués par la variation d'une propriété du milieu ambiant permettant la propagation d'ondes qui serait impossible en l'absence de cette variation. A proximité de la zone de variation, des ondes évanescentes font la jonction entre la zone où les ondes piégées peuvent exister et la zone où leur existence est impossible. Les topographies localisées, qui imposent à un fluide au repos une variation localisée de son épaisseur sont des pièges de type "guide d'onde" [LM78].

Les topographies océaniques supportent la propagation des ondes appelées *ondes de Rossby topographiques*. Les topographies océaniques localisées dans une direction sont des guides d'ondes car elles supportent la propagation des ondes de Rossby topographiques alors que leur environnement proche, qui est à fond plat, ne permet l'existence de ces ondes. Ainsi les ondes de Rossby topographiques sont piégées par les topographies localisées dans une direction et ces ondes piégées sont aussi appelées *ondes de Kelvin doubles*. Par la suite on nommera ces ondes simplement *ondes topographiques piégées*.

Les ondes topographiques se propagent à f/h constant pour obéir à la conservation de la vorticité potentielle, c'est-à-dire le long des lignes de profondeur constante si on se place sur le plan f . Elles ont été étudiées dans le modèle de l'eau peu profonde linéarisé par Longuet-Higgins, avec une topographie discontinue (type marche d'escalier) [LH68b] et avec une topographie continue (escarpement linéaire) [LH68a]. L'amplitude des ondes topographiques piégées décroît exponentiellement quand on s'éloigne de la variation de profondeur. C'est la décroissance exponentielle qui rappelle les ondes de Kelvin côtières (cf section 1.4.2) et qui justifie l'appellation onde de Kelvin double. C'est pour cela que le piégeage nécessite une topographie localisée : si la topographie n'est pas localisée, elle supporte les ondes topographiques comme une composante supplémentaire de mouvement mais ne présente pas une forme de piégeage. Les ondes topographiques piégées sont des ondes lentes, en ce sens que leur pulsation est toujours plus petite que f . La relation de dispersion des ondes topographiques linéaires est semblable à la relation de dispersion des ondes de Rossby sur le plan β , ce qui justifie le nom d'ondes de Rossby topographiques souvent utilisé (cf Fig. 4).

L'effet de la topographie domine sur l'effet β lorsque $\frac{Ro}{l} > 1$ où Ro est le nombre de Rossby et l est l'échelle horizontale de variation de la topographie. Et comme $\frac{1}{l} \sim \frac{|H_y|}{H}$, cela donne $|H_y| > \frac{H}{Ro}$. Pour $H \sim 5 \cdot 10^3 \text{m}$, $Ro \sim 10^6 \text{m}$, cela donne $|H_y| \sim 10^{-3}$. Ces arguments peuvent être étendus au cas plus général où $H = H(x, y)$. On conclut donc que la topographie prédomine sur l'effet β lorsque $|\nabla_h H| > 10^{-3}$. Il y a beaucoup de régions dans les océans où la pente du fond est supérieure à 10^{-3} , donc l'inclusion des variations de la topographie dans l'étude des ondes barotropes planétaires est importante [LM78].

A grande échelle, les escarpements reliant les plateaux continentaux aux grands fonds, les dorsales océaniques et les escarpements perpendiculaires aux dorsales océaniques forment autant de guides d'ondes. Citons quelques exemples : l'escarpement Mendocino dans le Pacifique Nord Est [Mys69], l'escarpement Falkland dans l'Atlantique Sud [MNGH02] et l'escarpement entre le plateau continental et les grands fonds en Australie où les premières ondes piégées par la topographie ont été mesurées tournant autour de l'Australie [LM78]. Des ondes topographiques piégées ont notamment été mises en évidence dans l'Atlantique Nord dans le travail de Wright et Xu [WX04].

L'ajustement géostrophique linéaire en présence de topographie discontinue a été étudié par Gill *et al* [GDJL86]. Ils ont montré que lorsque la marche topographique est

perpendiculaire à la discontinuité initiale de la surface libre, l'ajustement donne naissance à des ondes topographiques qui se propagent le long de la marche et ainsi le jet géostrophique qui se met en place sur les régions à fond plat va être dévié le long de la marche, pour se propager en gardant l'eau peu profonde sur sa droite dans l'hémisphère Nord. Il se forme donc une sorte de langue de fluide qui se propage le long de la topographie, et ils ont montré que derrière cette langue il n'y avait pas de flux de masse à travers la marche.

L'ajustement géostrophique linéaire dans un fluide à 2 couches et en présence d'un escarpement a été étudié par Willmott et Johnson [WJ95]. Ils ont montré que l'ajustement rapide inertiel n'est pas influencé par la topographie et sur des échelles de temps longues, il y a émission d'ondes de Rossby topographiques le long de la marche. Un état stationnaire est atteint (comme dans [GDJL86]) dans lequel le fluide est en équilibre géostrophique dans les deux couches, mais dans la couche inférieure le fluide ne traverse pas l'escarpement, par contre le fluide dans la couche supérieure traverse la marche et c'est là la nouveauté par rapport à [GDJL86] où aucun fluide ne traversait la marche.

Par ailleurs les travaux de Johnson et Davey [JD90] concernant l'ajustement linéaire sur une marche d'escalier très peu profonde d'une perturbation de très petite amplitude en présence d'une côte ont montré que si les ondes topographiques se propagent en s'éloignant de la côte, celui-ci influera peu sur l'écoulement. A l'opposé si les ondes topographiques se propagent en direction de la côte, une couche limite se formera à la jonction entre la marche et la côte.

L'ajustement géostrophique linéaire en présence d'un escarpement topographique à profil linéaire a été étudié par Allen [All96]. Elle a considéré l'ajustement d'une discontinuité de la surface libre perpendiculaire à l'escarpement topographique. La différence fondamentale avec la topographie discontinue [GDJL86] est que les ondes topographiques ici ont une structure modale à travers la pente et que ces ondes-ci peuvent propager l'énergie dans les deux sens le long de la marche. L'état stationnaire final est du même type qu'avec la topographie discontinue : la pente sépare l'écoulement dans chacune des régions à fond plat. Elle a aussi décrit le mouvement transitoire à l'aide de simulations numériques linéaires.

Nous souhaitons étendre le travail d'Allen [All96] en étudiant la dynamique non linéaire du processus d'ajustement géostrophique en présence d'un escarpement linéaire. Les questions qu'on pose sont les suivantes :

- Quelle est l'échelle de temps du processus d'ajustement ?
- Quelle est l'évolution non linéaire des ondes piégées ?
- Quel rôle jouent-elles dans le mélange et le transport ?

1.4.4 Guide d'ondes équatorial

Jusqu'à présent nous avons discuté de la dynamique dans l'approximation du plan tangent dans les latitudes tempérées (plan f). Le paramètre de Coriolis est positif dans l'hémisphère Nord, négatif dans l'hémisphère Sud et s'annule à l'équateur. Dans la région équatoriale, pour prendre en compte l'effet de la force de Coriolis, il faut faire l'approximation du plan β , car l'approximation du plan f ne donne plus que $f = 0$. Sur le plan β , les ondes de Rossby, aussi appelées ondes planétaires, peuvent se propager. Dans l'approximation du plan β équatorial, le paramètre de Coriolis s'écrit $f = \beta y$. Cette forme du paramètre de Coriolis implique que les ondes équatoriales sont piégées à l'équateur

avec des décroissances en e^{-y^2} [Gil82]. L'équateur agit comme un guide d'ondes. L'ajustement géostrophique à l'équateur sera différent de l'ajustement sur le plan f aux moyennes latitudes car les ondes, et donc l'énergie, ne peuvent s'évacuer vers $y \rightarrow \pm\infty$.

Il est essentiel de remarquer qu'à l'équateur l'équilibre géostrophique ne peut avoir lieu que pour un écoulement dont l'échelle zonale est très grande devant l'échelle méridienne (cf équations (1.42-1.43)).

Le modèle de l'eau peu profonde en rotation sur le plan β équatorial s'écrit :

$$u_t + uu_x + vu_y - \beta y v = -gH_x \quad (1.44)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + \beta y u = -gH_y \quad (1.45)$$

$$H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0. \quad (1.46)$$

et les ondes linéaires solution de ces équations linéarisées autour de l'état de repos sont (voir Fig. 1.6) :

- les ondes de Kelvin : ce sont les solutions non dispersives ($\omega = k$) à $v = 0$,
- les ondes de Yanai : ce sont les solutions dont la vitesse de groupe est toujours positive, leur relation de dispersion est $\omega = k/2 \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1}$
- les ondes de Rossby et d'inertie-gravité ont leur relation de dispersion donnée par : $\omega^3 - (k^2 + (2n+1))\omega - k = 0$, elles sont dispersives. Les ondes de Rossby sont les ondes dont la vitesse de phase est toujours négative.

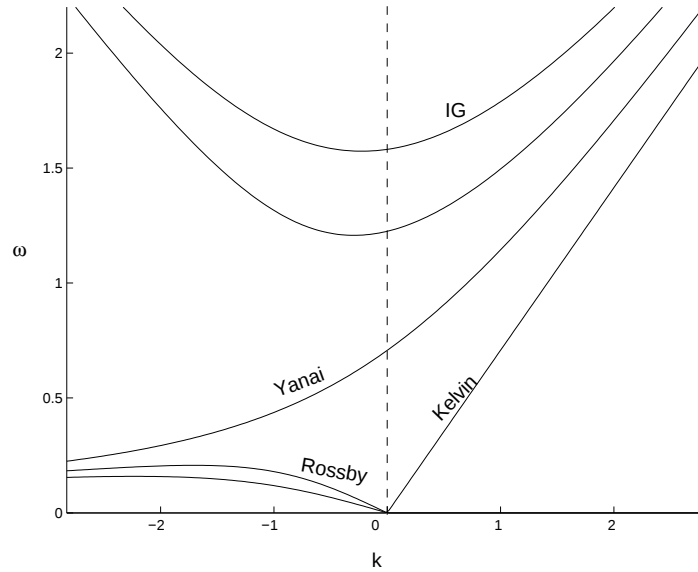


FIG. 1.6 – Relation de dispersion des ondes équatoriales où l'unité de longueur est $\sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}}$ et l'unité de temps est $\frac{1}{\sqrt{2\beta\sqrt{gH}}}$.

L'ajustement géostrophique non linéaire à l'équateur a été étudié pour une perturbation localisée dont le rapport d'aspect de l'échelle méridionale à l'échelle zonale est petit [LSRZ04]. Ils proposent une théorie asymptotique pour les faibles nombres de Rossby, avec une classification des différents scénarios d'ajustement en fonction du rapport entre nombre de Rossby et rapport d'aspect de la perturbation. Le déferlement des ondes de Kelvin limite rapidement la validité de la théorie asymptotique, ils ont donc utilisé des simulations numériques pour étudier les effets non linéaires. Les simulations ont confirmé

les résultats de la théorie mais ont aussi mis en évidence d'autres effets, notamment la fission d'un paquet d'ondes de Rossby fortement non linéaire en une séquence de modons équatoriaux, ou la formation d'un jet dans le sillage de l'onde de Kelvin qui déferle.

Nous souhaitons étudier le processus d'ajustement géostrophique à l'équateur d'une perturbation d'un écoulement en situation d'outcropping complet, car le rôle des ondes de Kelvin, Rossby et inertie-gravité dans cette situation ne sont pas connus. Le piège isopycnal empêchera l'évacuation de l'énergie par les ondes d'inertie-gravité qui seront elles aussi piégées. On pose donc les questions suivantes :

- Quelles sont les échelles de temps associées au processus d'ajustement ?
- Quel est l'état final de l'ajustement ?
- Un état ajusté stationnaire existe-t-il ?
- Comment évolueront les ondes d'inertie-gravité ? Interagiront-elles la partie lente de l'écoulement ? Participeront-elles au transport et au mélange ?

1.5 Questions

Connaissant le processus d'ajustement géostrophique non linéaire en l'absence de mécanisme de piégeage d'ondes, nous venons de passer en revue quatre types de pièges omniprésents dans la nature. Le processus d'ajustement géostrophique sera modifié par le piégeage d'ondes.

Les questions auxquelles nous souhaitons répondre dans ce travail de thèse sont les suivantes :

Dans le processus d'ajustement géostrophique en présence de mécanisme de piégeage :

- La séparation dynamique entre mouvement lent et mouvement rapide persiste-t-elle ?
- Quel est l'état final de l'ajustement ?
- Un état ajusté est-il atteint ?
- Quelle est le temps de relaxation ?

Concernant les ondes piégées :

- Quelle est leur évolution non linéaire ?
- De quelle façon contribuent-elles au transport et au mélange ?
- Par exemple, déferleront-elles ?

Les états ajustés en présence de piégeage, s'ils existent :

- Sont-ils stables ?
- Que se passe-t-il lorsque l'état ajusté est instable ? L'état ajusté est-il atteint ?

Pour répondre à ces questions, nous utiliserons le modèle de l'eau peu profonde, présenté dans la partie 1.2. Il permet d'introduire la topographie, l'outcropping/incropping (représenté par le dessèchement) et les côtes. Nous pourrions utiliser des développements asymptotiques multi-échelles pour étudier les écoulements faiblement non linéaires. Pour les non linéarités plus fortes, nous utiliserons une méthode numérique aux volumes finis. Il s'agit d'une classe de schémas aux différences finies développées pour traiter le problème

de Cauchy d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques comme celui de la dynamique des gaz compressibles [Lev02]. L'avantage principal de cette méthode est de tirer parti de l'existence d'une formulation conservative des équations (1.6-1.8) pour traiter les discontinuités éventuelles (déferlements), et que les conditions aux limites se traitent simplement. Cette méthode nous permet de simuler le modèle de l'eau peu profonde en rotation, avec les effets de la topographie et du dessèchement. Nous pourrions utiliser des conditions aux bords du type "éponge" ou bord solide, pour simuler soit l'eau libre soit une côte. Pour les études de stabilité linéaires, nous utiliserons une méthode pseudo-spectrale de collocation.

Nous présentons ces méthodes numériques dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Outils de modélisation numérique pour l'eau peu profonde en rotation

Pour l'ensemble des travaux qui seront présentés dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser le modèle de l'eau peu profonde en rotation sur le plan f (ou sur le plan β) que nous avons présenté dans la partie 1.2 et dont nous rappelons les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y - fv &= -gH_x - gZ_x \\ v_t + uv_x + vv_y + fu &= -gH_y - gZ_y \\ H_t + (Hu)_x + (Hv)_y &= 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On note en indices les dérivées partielles, x est la coordonnée zonale dirigée vers l'Est, y est la coordonnée méridionale dirigée vers le Nord, u est la vitesse zonale, v est la vitesse méridionale, $H(x, y)$ est la profondeur du fluide, $Z(x, y)$ est la topographie, g est l'accélération de la gravité et f est le paramètre de Coriolis, c'est-à-dire le double du taux de rotation de la terre à la latitude considérée. Les conditions aux limites dépendront du problème traité : conditions périodiques, conditions de glissement sur une surface solide ou conditions 'éponge' simulant l'eau libre.

Ce modèle contient en effet les ingrédients essentiels à notre étude : il inclut les effets de la rotation, les effets nonlinéaires et permet aussi d'inclure les effets de la topographie et les situations d'assèchement (incropping/outcropping).

Pour l'étude des problèmes de stabilité linéaire nous utilisons une méthode pseudospectrale de collocation que nous présentons dans la partie 2.2.2.

Afin d'étudier théoriquement les effets nonlinéaires, nous utilisons les développements asymptotiques multi-échelles lorsque l'écoulement est faiblement non linéaire. Pour étudier des non linéarités plus fortes, ou simplement pour suivre l'évolution sur des temps longs des écoulements à non linéarités faibles, nous utilisons une méthode numérique aux volumes finis que nous présentons ci-dessous.

2.1 Méthode aux volumes finis pour les équations différentielles hyperboliques

Le modèle de l'eau peu profonde s'inscrit dans le cadre des problèmes de propagation, régi par des équations quasilinéaires hyperboliques. Ces équations permettent à un champ initialement lisse de développer des chocs, il est donc nécessaire d'utiliser une méthode

numérique spécifique. Nous présentons ici la méthode numérique que nous utilisons dans ce travail de thèse. Nous commençons par présenter la méthode du premier ordre en temps et en espace pour la résolution des équations à une dimension, sans rotation ni topographie. Nous introduirons ensuite brièvement les méthodes utilisées pour résoudre les équations du modèle bidimensionnel, et obtenir un schéma à l'ordre deux en temps et en espace (partie 2.1.1, 2.1.2). Dans la partie 2.1.3 nous introduirons enfin le schéma spécifiquement choisi pour le traitement de la topographie, de la rotation et des situations d'assèchement.

2.1.1 Rappel sur les systèmes hyperboliques

Une équation différentielle du premier ordre est quasilinéaire si elle est linéaire en la première dérivée des variable dépendantes, ses coefficients pouvant dépendre des variables dépendantes. Par définition, un système quasilinéaire à une dimension est de la forme :

$$q_t + A(q) q_x = 0, \quad t > 0, x \in \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

où $q(t, x) \in \mathbf{R}^p$ est un vecteur à p composantes et $A(q)$ est une matrice $p \times p$ dont chaque élément est une fonction lisse de q . Ce système est complété par les conditions initiales

$$q(0, x) = q^0(x). \quad (2.3)$$

Le système (2.2) est dit hyperbolique si pour n'importe quel q , $A(q)$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont toutes réelles et qu'elle possède un ensemble complet de vecteurs propres. Cette propriété est invariante lors d'un changement de variables nonlinéaire.

Une loi de conservation à une dimension s'écrit :

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0 \quad (2.4)$$

q est la quantité conservée, $f(q)$ est la fonction flux. Le système des équations de l'eau peu profonde sans rotation et sans topographie à une dimension s'écrit sous forme conservative ($p = 2$, $q = (h, hu)$) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

En présence d'une discontinuité en x de q , l'équation aux dérivées partielles (2.4) n'est plus valable et doit être remplacée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)). \quad (2.6)$$

où l'on a intégré (2.4) de part et d'autre de la discontinuité. Les méthodes classiques dans lesquelles les dérivées sont approchées par des différences finies ne sont pas utilisables près des discontinuités où l'équation différentielle n'est plus valable. Une *méthode aux volumes finis* est basée sur la subdivision du domaine spatial en cellules et le maintien d'une approximation de l'intégrale de q sur chacune de ces cellules. Les valeurs de l'intégrale de q sont modifiées à chaque pas de temps par les flux à travers les bords des cellules selon la relation 2.6 et le problème primaire est de déterminer des fonctions de flux numériques qui approximent les flux corrects.

2.1.2 Description de la méthode générale

Les schémas aux volumes finis sont une classe de schémas numériques développées pour traiter le problème de Cauchy d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, comme celui de la dynamique des gaz compressibles (voir [Lev02] pour une introduction et un historique détaillés).

Méthode de Godunov

Considérons une grille régulière de pas Δx . On notera la i -ème cellule : $C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$. On notera Q_i^n la valeur approchée de la valeur moyenne sur la i -ème cellule au temps t_n :

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \quad (2.7)$$

où $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. La loi de conservation sous forme intégrale s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (2.8)$$

En intégrant (2.8) de t_n à t_{n+1} , on obtient :

$$\int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} q(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (2.9)$$

qui se réécrit en divisant par Δx :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \quad (2.10)$$

Cela nous indique comment la moyenne sur une cellule de q devrait évoluer en un pas de temps. Cependant, en général, on ne peut évaluer exactement l'intégrale temporelle du terme de droite, car $q(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ varie avec le temps le long de chaque bord de la cellule et on ne dispose pas de la solution exacte. Mais ceci suggère d'étudier le schéma numérique suivant :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (2.11)$$

où $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ est une approximation du flux moyen le long de $x = x_{i-\frac{1}{2}}$:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (2.12)$$

Dans un problème hyperbolique l'information se propage à une vitesse finie, il est par conséquent raisonnable de supposer qu'on peut obtenir $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ à partir des valeurs de Q_{i-1}^n et Q_i^n , les moyennes sur les cellules de chaque côté de l'interface. On pourra alors utiliser une expression de la forme

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \quad (2.13)$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction flux numérique. La méthode (2.11) devient alors

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)]. \quad (2.14)$$

Si on somme $\Delta x Q_i^{n+1}$ dans (2.11), on obtient

$$\Delta x \sum_{i=I}^J Q_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=I}^J Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{J+1/2}^n - F_{I-1/2}^n). \quad (2.15)$$

La somme des flux s'annule partout sauf aux extrémités, où il faudra prescrire les conditions aux bords.

Solveurs de Riemann

Maintenant le problème est de construire la fonction de flux $\mathcal{F}$. Selon la méthode de Godunov, nous pouvons le faire en calculant exactement l'intégrale dans (2.12) en remplaçant la fonction $q(x, t)$ par une fonction constante par morceau définie à partir de (2.7). Ainsi on réduit le problème initial continu (2.4) à une succession de problèmes locaux indépendants. Un tel problème est appelé problème de Riemann : il s'agit du problème de Cauchy de condition initiale :

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_g & \text{si } x < 0 \\ q_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit Q_i et Q_{i+1} les moyennes sur deux cellules voisines sur une grille aux volumes finis. En résolvant le problème de Riemann avec $q_g = Q_i$ et $q_d = Q_{i+1}$, on peut alors calculer le flux numérique (2.12) et mettre à jour les moyennes sur les cellules après un pas de temps. Pour les problèmes hyperboliques, la solution du problème de Riemann est typiquement une solution de similarité, une fonction de $\frac{x}{t}$ seul, et consiste en un jeu fini d'ondes se propageant depuis l'origine avec des vitesses constantes. Numériquement, la solution exacte de Riemann est souvent trop coûteuse à calculer pour les problèmes nonlinéaires et des solveurs de Riemann approximatifs sont utilisés. L'intérêt de l'approche de Godunov est de garantir la conservativité du schéma (2.11).

Nous devons choisir un solveur de Riemann qui soit cohérent avec le système d'équations original.

Condition de cohérence

Le flux numérique doit approximer l'intégrale dans (2.12). Si la fonction $q(x, t) \equiv \bar{q}$ est constante en x , alors $\bar{q}$ ne va pas changer au cours du temps et l'intégrale dans (2.12) se réduit à $f(\bar{q})$. Par conséquent, si $Q_{i-1}^n = Q_i^n = \bar{q}$, on s'attend à ce que la fonction flux numérique $\mathcal{F}$ se réduise à $f(\bar{q})$, donc on demande

$$\mathcal{F}(\bar{q}, \bar{q}) = f(\bar{q}) \quad (2.16)$$

pour toute valeur $\bar{q}$. Lorsque cette relation est vérifiée on dit que le flux numérique $\mathcal{F}(Q_g, Q_d)$ est cohérent avec (2.4). On demande généralement aussi la continuité des flux quand Q_{i-1} et Q_i varient, de sorte que $\mathcal{F}(Q_{i-1}, Q_i) \rightarrow f(\bar{q})$ quand $Q_{i-1}, Q_i \rightarrow \bar{q}$

Deux autres propriétés du solveur de Riemann seront requises :

- l'existence d'une relation d'entropie discrète, qui garantit la convergence vers les solutions faibles et qui est ici simplement la condition de décroissance de l'énergie totale,
- la positivité de h pour que les situations d'assèchement de h soient bien traitées.

Condition CFL

Une méthode numérique peut converger seulement si son domaine de dépendance numérique contient le domaine de dépendance de l'équation aux dérivées partielles, au moins dans la limite où Δt et Δx tendent vers zéro. Le nombre CFL (pour Courant-Friedrichs-Lewy) est défini comme suit et doit vérifier

$$\nu \equiv \left\| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right\| \leq 1 \quad (2.17)$$

(où $\bar{u}$ est une approximation de la vitesse de propagation, calculée en terme de Q_i et Q_{i+1}). Le nombre CFL mesure la fraction d'une cellule dans laquelle l'information se propage pendant un pas de temps. La relation (2.17) impose en pratique une limite supérieure au pas de temps Δt , que l'on fait donc varier au cours de la simulation en fonction de $\bar{u}$.

Extension au cas multidimensionnel

Les méthodes décrites ci-dessus peuvent aisément être adaptées au traitement du système bidimensionnel :

$$\partial_t Q + \partial_x f(Q) + \partial_y g(Q) = 0 \quad (2.18)$$

où $Q = (h, hu, hv)$ avec $f(Q) = (hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh, huv)$ et $g(Q) = (hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh)$ à l'aide d'une méthode de séparation dimensionnelle : le problème multidimensionnel est simplement séparé en une séquence de problème unidimensionnels (cf [Lev02]).

Corrections d'ordre supérieur

Nous avons présenté le schéma numérique (2.11-2.13) de premier ordre en temps et en espace. On peut utiliser ce schéma comme point de départ pour construire un schéma d'ordre supérieur en temps et en espace.

Ordre supérieur en temps

Nous choisissons la méthode de Heun (cf [Bou04]). Partons d'un schéma d'Euler du type (2.11) :

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \phi(Q^n) \quad (2.19)$$

où Q^n désigne le vecteur d'état au temps n et ϕ un opérateur nonlinéaire. Le schéma d'ordre $(\Delta t)^2$ de Heun s'écrit alors :

$$\tilde{Q}^{n+1} = Q^n + \Delta t \phi(Q^n), \quad (2.20)$$

$$\tilde{Q}^{n+2} = \tilde{Q}^{n+1} + \Delta t \phi(\tilde{Q}^{n+1}), \quad (2.21)$$

$$Q^{n+1} = (Q^n + \tilde{Q}^{n+2})/2. \quad (2.22)$$

Ordre supérieur en espace

Parmi les nombreuses approches proposées pour obtenir des formulations d'ordre supérieur en espace pour les volumes finis (PPM, ENO, WENO... cf [Lev02]), nous choisissons de nous restreindre au cadre simple des reconstructions d'ordre 2. Le but est d'obtenir un schéma d'ordre $(\Delta x)^2$ à partir d'un schéma d'ordre Δx . Nous adoptons la méthode des limiteurs de pente. L'idée générale est de construire une approximation linéaire par morceaux de la solution (au lieu d'une approximation constante par morceaux dans le schéma à l'ordre 1). Dans chaque cellule, l'état constant Q_i est remplacé par deux sous-états $Q_{i-1/4}$ et $Q_{i+1/4}$ vérifiant :

$$Q_{i-1/4} = Q_i - \frac{\Delta x}{2} \delta Q_i \quad Q_{i+1/4} = Q_i + \frac{\Delta x}{2} \delta Q_i \quad (2.23)$$

où la pente δQ_i est calculée comme :

$$\delta Q_i = \minmod\left(\frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x}\right), \quad (2.24)$$

avec la fonction *minmod* comme limiteur de pente :

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A chaque itération on utilise le schéma (2.11) avec le flux d'interface

$$F_{i+1/2} = F(Q_{i+1/4}^n, Q_{i+3/4}^n) \quad (2.25)$$

Cette méthode fournit un schéma d'ordre $(\Delta x)^2$ et garantit la conservativité.

Schéma d'advection

On pourra ajouter un module permettant de calculer l'advection d'un champ supplémentaire, lorsqu'on souhaitera diagnostiquer le transport d'un traceur. Le traceur lagrangien c vérifie :

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0. \quad (2.26)$$

La quantité conservée est en fait $C = ch$: elle vérifie la loi de conservation

$$\partial_t C + \partial_x(Cu) = 0. \quad (2.27)$$

qu'on va ajouter au système 2.5 et qui ne modifiera pas la solution des problèmes de Riemann (cf [Lev02]).

2.1.3 Schéma pour l'eau peu profonde en rotation avec topographie et assèchement

Nous présentons ici le solveur de Riemann choisi et les méthodes retenues pour traiter la topographie et la rotation.

Schéma de relaxation

Pour calculer les flux numériques $\mathcal{F}$, nous avons besoin de résoudre les problèmes de Riemann, à l'aide d'un solveur de Riemann approché (moins coûteux numériquement qu'un solveur exact). Le solveur de Riemann est choisi pour assurer la convergence vers les solutions faibles (solution du système conservatif présentant des discontinuités) et la conservation des états équilibrés. Nous utilisons un solveur de relaxation, dont le principe est le suivant (cf [Bou04]) : on remplace le système de loi de conservation nonlinéaire de dimension p par un système quasilinéaire hyperbolique de dimension $s > p$ avec un terme source de relaxation qui force rapidement l'une des variables vers une valeur d'équilibre. Sous certaines conditions, il est possible d'approcher la solution du problème de Riemann initial par la solution du problème de Riemann de la partie homogène du système relaxé.

Se reporter au livre de Bouchut [Bou04] pour une description détaillée du schéma de relaxation de Siliciu adapté pour le traitement des situations d'assèchements que nous

utilisons, nous évitant de recourir à un solveur de Riemann nonlinéaire.

Traitement des termes sources

Topographie

Le système de l'eau peu profonde en rotation avec topographie est un système quasilinear hyperbolique. Il peut s'écrire sous forme conservative. A une dimension il s'écrit :

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x + hZ_x = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

où $Z(x)/g$ représente la topographie. Dans ce système, les états stationnaires donnés par $u = 0$, $gh + Z = \text{constante}$, jouent un rôle crucial. Un schéma qui conserve les états stationnaires à un niveau discret est dit "bien équilibré". Depuis quelques années, beaucoup de travaux ont été fait sur le problème de trouver des schémas bien équilibrés pour résoudre le système (2.28). Selon Bouchut [Bou04] de tels schémas peuvent s'écrire (en considérant une grille régulière de pas Δx et en notant la i -ème cellule : $C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$) :

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2+}) = 0, \quad (2.29)$$

où Q_i^n est une approximation pour $Q = (h, hu)$ (la moyenne sur C_i au temps t_n de la solution Q que l'on souhaite approcher), et les flux numériques à gauche (resp. droite) sont calculés comme

$$F_{i+1/2-} = F_g(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2}), \quad (2.30)$$

$$F_{i-1/2+} = F_d(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2}), \quad (2.31)$$

avec $\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i$. Les flux numériques F_g et F_d doivent satisfaire deux propriétés de cohérence. La première est la cohérence avec le terme conservatif,

$$F_g(Q, Q, 0) = F_d(Q, Q, 0) = F(Q) \equiv (hu, hu^2 + gh^2/2), \quad (2.32)$$

et la seconde est la cohérence avec la source,

$$F_d(Q_g, Q_d, \Delta Z) - F_g(Q_g, Q_d, \Delta Z) = (0, -h\Delta Z) + o(\Delta Z), \quad (2.33)$$

quand $Q_g, Q_d \rightarrow Q$ et $\Delta Z \rightarrow 0$. Une propriété générale que nous requérons est la conservation de la masse,

$$F_g^h(Q_g, Q_d, \Delta Z) = F_d^h(Q_g, Q_d, \Delta Z) \equiv F^h(Q_g, Q_d, \Delta Z). \quad (2.34)$$

La propriété pour que ce schéma soit bien équilibré est que

$$F_{i+1/2-} = F(Q_i), \quad F_{i+1/2+} = F(Q_{i+1}) \quad (2.35)$$

lorsque

$$u_i = u_{i+1} = 0, \quad gh_{i+1} - gh_i + \Delta Z_{i+1/2} = 0. \quad (2.36)$$

Un schéma cohérent équilibré peu coûteux, capable de traiter les écoulement transsoniques et les situations d'assèchement $h = 0$, et qui satisfait une inégalité d'entropie discrète a été proposé récemment par Audusse *et al.* [ABB⁺04] :

$$\begin{cases} F_g(Q_g, Q_d, \Delta z) = \mathcal{F}(Q_g^*, Q_d^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ gh_g^2/2 - gh_{g^*}^2/2 \end{pmatrix}, \\ F_d(Q_g, Q_d, \Delta z) = \mathcal{F}(Q_g^*, Q_d^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ gh_d^2/2 - gh_{d^*}^2/2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où

$$Q_g^* = (h_{l^*}, h_{l^*}u_l), \quad Q_r^* = (h_{r^*}, h_{r^*}u_r) \quad (2.37)$$

et

$$h_{l^*} = \max(0, h_l - \max(0, \Delta Z/g)), \quad h_{r^*} = \max(0, h_r - \max(0, -\Delta Z/g)). \quad (2.38)$$

Ici, $\mathcal{F}$ est un flux numérique cohérent satisfaisant une inégalité entropique pour le problème homogène (i.e. avec $Z = \text{const}$) qui traite les situations d'assèchement. Notre choix ici est un solveur de relaxation décrit dans [Bou04], mais d'autres choix peuvent donner des résultats similaires.

Rotation

La méthode de la topographie apparente introduite dans [BLZ04] est générale et peut être utilisée pour traiter des termes sources génériques. Considérons pour notre problème les système des équations de l'eau peu profonde en présence de topographie et de la force de Coriolis :

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x + hZ_x - fhv = 0, \\ (hv)_t + (huv)_x + fhu = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

où $Z = Z(x)$ et $f = f(x)$. Maintenant les solutions stationnaires sont données par $u = 0$, $fv = (gh + Z)_x$. L'idée est d'identifier les deux premières équations dans (2.39) à (2.28) avec une nouvelle topographie $Z + B$, où $B_x = -fv$. Mais v dépend du temps alors que B devrait être indépendant du temps, donc nous prenons $B_x^n = -fv^n$ et résolvons (2.28) sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) avec la topographie $Z + B^n$.

Au niveau discret, nous procédons comme suit. On définit

$$\Delta B_{i+1/2}^n = -f_{i+1/2} \Delta x \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2}, \quad (2.40)$$

et on met à jour $Q = (h, hu, hv)$ via

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2+}) = 0, \quad (2.41)$$

avec

$$F_{i+1/2-} = (F_g(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n), F_{i+1/2-}^{hv}), \quad (2.42)$$

$$F_{i-1/2+} = (F_d(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n), F_{i+1/2+}^{hv}), \quad (2.43)$$

où les flux numériques F_g, F_d sont ceux associés au problème sans rotation vu précédemment. Le flux de quantité de mouvement transverse a une discrétisation naturelle associée à la loi de conservation équivalente $(h(v + \Omega))_t + (hu(v + \Omega))_x = 0$, avec $\Omega_x = f$, qui est

fortement liée à la loi de conservation de la vorticité potentielle. Cela donne la formulation naturelle suivante :

$$(F_{i+1/2-}^{hv}, F_{1+1/2+}^{hv}) = \begin{cases} (F_{i+1/2}^h v_i, F_{i+1/2}^h (v_i - f_{i+1/2} \Delta x)) & \text{si } F_{i+1/2} \geq 0, \\ (F_{i+1/2}^h (v_{i+1} + f_{i+1/2} \Delta x), F_{i+1/2}^h v_{i+1}) & \text{si } F_{i+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

Ce schéma est cohérent avec (2.39), et bien équilibré : il préserve les états stationnaires discrets satisfaisants $u_i = u_{i+1} = 0$ et $gh_{i+1} - gh_i + \Delta Z = f_{i+1/2} \Delta x (v_i + v_{i+1})/2$. Le schéma conserve aussi la masse, il est capable de calculer les situations d'assèchement et satisfait une inégalité d'entropie discrète.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent porter soit sur la solution elle-même, conditions de type *Dirichlet*, soit sur ses dérivées, conditions de type *Neumann*. Il est généralement nécessaire de définir des points de grille fictifs, hors du domaine physique pour être en mesure de prescrire les conditions aux limites. Nous utilisons un point de grille fictif à chaque extrémité de chaque direction. C'est-à-dire que si le domaine physique est de taille $N \times N$ cellules, le domaine numérique devra s'étendre sur $N + 1 \times N + 1$ cellules. Dans les travaux présentés dans les chapitres suivants, nous utilisons trois types de conditions aux limites :

- les conditions aux bords périodiques,
- les conditions aux bords solides (avec glissement le long de la paroi solide),
- les conditions de type éponge, simulant l'eau libre, qui laissent les ondes s'évacuer du domaine de calcul. On prescrit cette condition en imposant que les valeurs des champs dans les cellules fictives sont les mêmes que sur les cellules physiques adjacentes, sauf pour la vitesse normale à la frontière qui sera l'opposé de la vitesse dans la cellule physique adjacente. Notons cependant qu'avec la formulation simple choisie cette évacuation n'est jamais totale lorsque les ondes ont une incidence oblique sur la frontière, et une partie du mouvement sera réfléchi, créant des interférences avec le mouvement à l'intérieur du domaine de calcul par la suite.

2.2 Méthode de collocation pour les problèmes de stabilité linéaire

2.2.1 Equations aux valeurs propres

Les problèmes de stabilité linéaires sont des problèmes aux valeurs propres de la fréquence des perturbations qu'on peut noter comme

$$A\psi = \lambda\psi. \quad (2.44)$$

où A est un opérateur dans un espace de dimension m , ψ est un vecteur dans un espace de dimension m et λ est une valeur propre. La stabilité linéaire est garantie lorsque les valeurs propres λ de la fréquence n'ont pas de partie imaginaire. La résolution des problèmes aux valeurs propres nécessite généralement d'avoir recours à une méthode numérique. Soit ϕ la solution approchée de l'équation 2.44. L'erreur $\|\psi - \phi\|$ ne pouvant être déterminée, en pratique pour minimiser l'erreur il faut chercher à minimiser le résidu

$$R(\phi) = A\phi - \lambda\phi \quad (2.45)$$

qui est l'erreur faite quand la solution approchée ne vérifie pas l'équation résolue (2.45). On peut choisir de contraindre le résidu en minimisant le carré de la norme l^2 du résidu, on peut demander que le résidu soit orthogonal à toutes les fonctions dans lesquelles on fait un développement (approximation Galerkin) ou bien on peut demander à ce que le résidu soit exactement nul sur une grille discrète de points [Dur98]. Cette dernière approche porte le nom de collocation.

2.2.2 Méthode pseudospectrale de collocation

La méthode de collocation est une méthode pseudospectrale : une partie des opérations s'effectue dans l'espace physique et l'autre partie s'effectue dans l'espace spectral. Elle requiert que la solution approchée vérifie exactement les équations du système qu'on cherche à résoudre en un nombre fini de points, qui sont appelés les points de collocation.

On s'intéresse aux domaines bornés non-périodiques, on pourra donc toujours se ramener à l'intervalle $[-1, 1]$. Décomposer la solution au problème cherché en fonctions trigonométriques nous expose au phénomène de Gibbs (oscillations parasites de la solution, qui se produisent lorsqu'on périodise un signal non périodique défini sur un intervalle $[a, b]$ et qui ne prend pas les mêmes valeurs en a et en b) étant donné que nous travaillons sur un domaine non périodique. Il est plus approprié de décomposer la solution en polynômes algébriques. Si l'on fait une interpolation avec des polynômes algébriques sur une grille de points espacés uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$, on s'expose alors au phénomène de Runge (oscillations parasites de la solution qui s'intensifient lorsqu'on augmente le degré du polynôme utilisé pour l'interpolation). Pour éviter ce phénomène, nous pouvons faire une interpolation polynomiale sur des points répartis de façon non uniforme. Plusieurs jeux de points permettront d'utiliser cet avantage, et ils ont tous en communs d'avoir leur densité par unité de longueur :

$$\text{densité} \sim \frac{N}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.46)$$

c'est-à-dire que l'espacement moyen entre les points est en $O(N^{-2})$ pour $x \approx \pm 1$ et $O(N^{-1})$ à l'intérieur. L'exemple le plus simple des points vérifiant la propriété (2.46) est les points de Chebyshev :

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (2.47)$$

Ces points correspondent aux projections sur l'intervalle $[-1, 1]$ de $N + 1$ points uniformément répartis sur le demi cercle de rayon unité.

L'opération de différentiation étant linéaire, on peut la représenter par une multiplication par une matrice de taille $(N + 1) \times (N + 1)$ qu'on notera D_N . On peut calculer l'opérateur de différentiation D_N sur les points de collocation de Chebyshev (2.47) en réalisant une interpolation polynomiale de degré N des valeurs de ϕ aux points de collocation et en calculant sa dérivée. Pour tout $N > 1$, attribuons aux $(N + 1) \times (N + 1)$ lignes et colonnes de la matrice de différentiation D_N les indices 0 à N . les éléments de cette matrice sont (cf [Tre00]) :

$$(D_N)_{00} = \frac{N^2 + 1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{N^2 + 1}{6}, \quad (2.48)$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} \quad , \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (2.49)$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j} \quad , \quad i \neq j, j = 1, \dots, N-1, \quad (2.50)$$

où

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0 \text{ ou } N, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A ce point, nous sommes en mesure de discrétiser une équation différentielle du premier ordre sur les points de collocation de Chebyshev. On pourra utiliser comme opérateur de différentiation seconde, le carré de la matrice D_N diminué de deux lignes et deux colonnes, permettant de discrétiser des équations différentielles du second ordre.

Une fois notre problème aux valeurs propres (2.44) discrétisé, nous pourrions profiter des algorithmes puissants de calculs de valeurs propres proposé par exemple par le logiciel Matlab avec *eig* qui utilise les routines de LAPACK (Linear Algebra PACKage, en fortran 77). Avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène, il est possible de prescrire directement les conditions aux bords lors de la discrétisation du problème pour traiter d'autres conditions aux bords, on pourra prescrire des équations supplémentaires pour qu'elles soient vérifiées.

L'avantage de la méthode pseudospectrale de collocation par rapport aux schémas classiques aux différences finies est que si la solution est lisse, la méthode pseudospectrale est plus précise. L'inconvénient de la méthode pseudospectrale est qu'elle nécessite plus de calculs qu'un schéma classique aux différences finies quand les deux méthodes sont utilisées avec la même résolution. Les calculs supplémentaires peuvent être compensés si la meilleure précision de la méthode pseudospectrale permet de faire les calculs sur une grille plus grossière.

Nous utilisons ci-dessous cette méthode, qui a notamment été appliquée par Poulin et Flierl [PF03] à l'étude de stabilité linéaire du jet géostrophique de Bickley.

Chapitre 3

Ajustement géostrophique en présence d'un guide d'ondes topographique

3.1 Introduction

Kuo et Polvani [KP97] ont étudié l'ajustement géostrophique d'un front à une dimension, ce qui correspond au problème classique de rupture de barrage.

Reznik et al [RZBJ01] ont établi la théorie de l'ajustement géostrophique non linéaire d'une perturbation quelconque localisée (i.e. à énergie finie) dans le cadre de la dynamique de l'eau peu profonde en rotation sans dissipation, avec les hypothèses que l'échelle de la perturbation est bien définie et que le nombre de Rossby est petit. Ils ont montré la séparation des mouvements lents et rapides, qui évoluent avec les échelles de temps caractéristiques f_0^{-1} et $(f_0 Ro)^{-1}$ (au sujet de la séparation entre mouvements lents et rapides se référer aux travaux : [EM96, BMN97]). La composante lente n'est pas influencée par la composante rapide et reste proche de l'équilibre géostrophique. Le scénario d'ajustement dépend de l'élévation relative initiale de la surface libre. Pour des élévations relatives petites, l'évolution des mouvements lents est gouvernée par l'équation de vorticité potentielle quasi-géostrophique pour les temps $t \leq (f_0 Ro)^{-1}$, et par l'équation modifiée de vorticité potentielle quasi-géostrophique pour les temps $t \leq (f_0 Ro^2)^{-1}$. La composante rapide consiste principalement en ondes d'inertie-gravité linéaires se propageant rapidement en s'éloignant de la perturbation initiale. Pour des élévations relatives grandes, la composante lente est régie par l'équation de la dynamique frontale géostrophique. La composante rapide est un paquet spatialement localisé d'ondes d'inertie-gravité couplé à la composante lente du mouvement. Son enveloppe a des modulations lentes et obéit à une équation de modulation du type de l'équation de Schrödinger, décrivant l'advection et la dispersion du paquet.

Ces deux études considéraient un fond plat. Or, la relaxation d'une perturbation en présence d'une topographie dans l'atmosphère ou l'océan diffère fondamentalement de l'ajustement sur un fond plat à cause de l'existence d'ondes piégées par la topographie. Ainsi, le scénario d'ajustement géostrophique est modifié en présence de topographie. Par conséquent, le problème hydraulique plus général de rupture de barrage est également modifié. Longuet-Higgins a étudié le spectre des ondes linéaires existant dans un fluide homogène en présence d'une marche de topographie [LH68a] et d'une pente topographique [LH68b], dans le contexte du modèle de l'eau peu profonde linéarisé en rotation sur le plan f . Il a nommé les ondes piégées par la topographie "ondes de Kelvin double" en raison de leur

double décroissance exponentielle. La décroissance exponentielle étant la caractéristique des ondes de Kelvin commune avec ces ondes topographiques. Elle sont aussi appelées ondes de Rossby topographiques car leur relation de dispersion est du même type que celle des ondes de Rossby.

La topographie peut jouer un rôle particulièrement important dans les régions où se forment les eaux profondes (mer du Labrador, communication personnelle, Julie Deshayes, WHOI) et dans les régions de mélange des eaux, par exemple le plateau et l'escarpment Falkland (Arhan *et al*, 2002, [MNGH02]) où les eaux de l'océan Austral et de l'océan Atlantique se mélangent. C'est pourquoi on s'intéresse particulièrement aux propriétés de mélange et de transport des ondes piégées par la topographie. Un mécanisme permettant de générer des ondes topographiques piégées est le mécanisme d'ajustement géostrophique, que nous allons étudier.

On travaille avec le modèle de l'eau peu profonde en rotation sur le plan f , sans dissipation, avec une pente d'extension finie reliant deux régions de profondeur constantes différentes. On suppose que la topographie ne varie que dans la direction x et de façon monotone. Dans ce contexte les équations s'écrivent :

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -g\eta_x \quad (3.1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -g\eta_y \quad (3.2)$$

$$\eta_t + ((H + \eta)u)_x + ((H + \eta)v)_y = 0 \quad (3.3)$$

u est la vitesse zonale, v est la vitesse méridionale, H est la profondeur du fluide au repos (qui peut dépendre de x et y quand il y a une topographie), η est l'élévation de la surface libre, f est le paramètre de Coriolis supposé constant.

On pourra dans un premier temps étudier la version linéarisée de ce système équations puis étudier ce système nonlinéaire tel quel à l'aide d'une méthode numérique. On simule cet ajustement à l'aide de la méthode numérique aux volumes finis présentée dans la partie 2.1.

On réalise l'ajustement d'un front en présence de topographie. Initialement, on considère une discontinuité de la surface libre perpendiculaire à une pente topographique de largeur W reliant deux régions planes. Sur chacune des deux régions planes, on s'attend au scénario classique de l'ajustement géostrophique : émission d'ondes d'inertie-gravité et naissance d'un jet géostrophique dans la direction de la discontinuité initiale. En présence de topographie, les travaux de Longuet-Higgins (1968, [LH68b]) et de Allen (1996, [All96]) indiquent qu'il y aura émission et propagation d'ondes topographique piégées le long de la pente .

Les questions auxquelles on répond dans ce chapitre sont :

- Quelle est l'échelle de temps du processus d'ajustement ?
- Quelle est l'évolution non linéaire des ondes piégées ?
- Quel rôle jouent-elles dans le mélange et le transport ?

3.2 Ajustement géostrophique d'un front en présence d'un escarpement

Les résultats obtenus sur le problème de l'ajustement géostrophique en présence d'un escarpement topographique font l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* et sont donc présentés en anglais dans ce qui suit.

Nonlinear adjustment of a front over escarpment

F. Bouchut [†], E. Scherer and V. Zeitlin ¹Received 25 June 2007, accepted 20 December 2007, published online 29 January 2008 in *Phys. Fluids* **20**, 016602 (2008).

We present results of fully nonlinear numerical simulations of the geostrophic adjustment of a pressure front over topography, represented by an escarpment with a linear slope. The results of earlier simulations in the linear regime are confirmed and new essentially nonlinear effects are found. Topography influences both fast and slow components of motion. The fast unbalanced motion corresponds to inertia-gravity waves (IGW). The IGW emitted during initial stages of adjustment break and form the localized dissipation zones. Due to topography, the IGW activity is enhanced in certain directions. The slow balanced motion corresponds to topographic Rossby waves propagating along the escarpment. As shown, at large enough nonlinearities they may trap fluid/tracer and carry it on. There are indications that nonlinear topographic waves form a soliton train during the adjustment process. If the coastal line is added to the escarpment at the shallow side (continental shelf), secondary fronts related to the propagation of the coastal Kelvin waves appear. ©2008 American Institute of Physics. [DOI :10.1063/1.2834731]

1 Introduction

The relaxation of a pressure front over topography (which is represented by an escarpment in a simplest, but practically important situation, see below) in a rotating fluid is a classical geophysical fluid dynamics problem. In the case of abrupt (step-function) escarpment it was treated analytically, in the linear approximation, and by means of laboratory experiments in the pioneering paper by Gill, Davey, Johnson and Linden [GDJL86]. Complete linear analysis of the problem was achieved by Johnson and Davey [JD90] for a step-function escarpment of small amplitude in the unbounded domain and in the presence of the coast. Numerical analysis of the linear relaxation problem in the case of escarpment with a linear slope was performed by Allen [All96]. The standard framework for studying the relaxation of the front is the rotating shallow water (RSW) model with topography. In the general perspective the problem belongs to the "dam-break" class, well-known in hydraulics. A thorough study of such process in the presence of rotation, but without topography, was performed by Kuo and Polvani [KP97]. In the geophysical fluid dynamics perspective, the relaxation of a front is a geostrophic adjustment problem, as the velocity and the pressure fields should arrive to the geostrophically balanced state by inertia-gravity wave emission. It is, thus, a natural generalization of a classical Rossby problem of the adjustment of a jet [Ros37]. The geostrophic adjustment of jets and fronts in RSW was extensively studied recently both analytically [ZMP03], and numerically [BLZ04]. The use of the new generation of high-resolution finite-volume codes for shallow-water equations allowed to make substantial progress [KP97], [BLZ04].

In the present paper we undertake a numerical study of the problem of fully nonlinear geostrophic adjustment of a pressure front over escarpment with a linear slope. Both the

¹LMD, Ecole Normale Supérieure,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
[†]DMA, Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France

cases of an escarpment far from the coast, and close to the coast will be considered. Unlike the previous theoretical and numerical studies, we are able to treat arbitrary nonlinearities. We use in our study the high resolution, shock-capturing finite-volume method by Bouchut [Bou04], [Bou07] (see [BLZ04] for a brief description). The advantage of the code is that it is well-balanced, i.e. it maintains the geostrophic equilibria in the presence of topography.

The essence of the geostrophic adjustment process is that the flow starting from any localized initial condition is split into balanced (vortex, jets) and unbalanced (inertia-gravity waves (IGW)) parts [RZBJ01]. The IGW carry the excess of energy away from the location of the initial perturbation while the balanced part slowly evolves, remaining close to the geostrophic equilibrium. In the case of initially plane-parallel jets/fronts, the balanced state is just stationary [Ros37], [ZMP03]. The new phenomena expected in the process of adjustment of the pressure front over escarpment are, first, related to the fact that topography destroys the one-dimensionality of the problem (escarpment is perpendicular to the pressure gradient), and thus the emitted inertia-gravity waves have different speeds at the shallow and deep sides of the escarpment, and therefore the wave-fronts will be curved. Besides, the attainability of the fully adjusted stationary state with a constant fluid depth all along the escarpment [GDJL86] is questionable. Presumably, the nonstationary intermediate balanced states should arise. Second, the presence of topographic Rossby (or double-Kelvin) waves introduces a completely new element in the problem, because these waves can move only in the prescribed along-escarpment direction [LH68a]. They are balanced, and thus may be part of just mentioned nonstationary balanced state. The wave-trapping phenomenon should modify the standard scenario of adjustment, given in [RZBJ01] and [ZMP03]. In this respect, the adjustment of the front over topography bears resemblance with equatorial adjustment, cf [LSRZ04]. Both equator and topography act as waveguides for some types of waves. It was demonstrated that nonlinear equatorial Rossby waves can provide anomalous transport of tracers [BLZ05]. One can ask whether a similar phenomenon may take place in the topographic waveguide. We will show that this is indeed the case for nonlinear topographic waves which form soliton-like structures with recirculation zones at strong enough nonlinearities.

We present below the results of numerical simulations of the nonlinear adjustment of a pressure front over topography for small and strong nonlinearities with and without adjacent coast line, with special emphasis on the mixing and transport properties of the adjustment process. We also discuss the effects of the steepness of the slope. Appendix contains a demonstration of existence of the solitons of topographically trapped waves in a certain regime of parameters.

2 The model and the numerical setup

We work in the framework of nonlinear rotating shallow water model on the f - plane in the presence of topography. The equations of the model are :

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -g\eta_x, \quad (4)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -g\eta_y, \quad (5)$$

$$\eta_t + ((H + \eta)u)_x + ((H + \eta)v)_y = 0, \quad (6)$$

where $u(x, y, t)$ is the zonal velocity, $v(x, y, t)$ is the meridional velocity, $H(x)$ is the fluid depth at rest, $\eta(x, y, t)$ is the free surface elevation, f is the Coriolis parameter which

we assume to be constant and positive. We consider a simple bathymetry consisting of a linear slope of width $2W$ connecting two flat regions with a depth difference along the x -axis : $H_- - H_+ = \Delta H$, cf Fig. 1.

Using the maximum depth of the fluid at rest H_+ as a vertical scale, the Rossby deformation radius $R_d = \sqrt{\frac{gH_+}{f^2}}$ as a typical horizontal scale, the inverse Coriolis parameter f^{-1} as a time scale, and introducing a typical velocity scale U and a typical value of the perturbation of the free surface $\Delta\eta$, we non-dimensionalize the dependent and independent variables as follows :

$$x = \tilde{x}R_d, \quad y = \tilde{y}R_d, \quad W = \tilde{W}R_d, \quad H = \tilde{H}H_+, \quad \Delta H = \Delta\tilde{H}H_+, \quad \eta = \tilde{\eta}\Delta\eta, \quad (7)$$

$$u = \tilde{u}U, \quad v = \tilde{v}U, \quad T = \tilde{T}f^{-1}, \quad H_x = \tilde{H}_x \frac{\Delta H}{W} = \tilde{H}_x \frac{\Delta\tilde{H}}{\tilde{W}} \frac{H_+}{R_d}, \quad (8)$$

where the tilde variables are the nondimensionalized ones.

The parameters governing the problem are : the Rossby (or Froude) number $\epsilon = \frac{U}{fR_d}$, the relative elevation of the free surface $\lambda = \frac{\Delta\eta}{H_+}$, the ratio of the relative depth change due to the escarpment to the half-width of the slope $\sigma = \frac{\Delta\tilde{H}}{\tilde{W}}$. Under the assumption $\lambda \sim \epsilon$ (which is necessary in order to get the geostrophic equilibrium in the leading order in ϵ), the nondimensional equations become, omitting the tildes :

$$u_t + \epsilon(uu_x + vu_y) - fv = -\eta_x, \quad (9)$$

$$v_t + \epsilon(uv_x + vv_y) + fu = -\eta_y, \quad (10)$$

$$\lambda\eta_t + \epsilon H(u_x + v_y) + \epsilon\sigma H_x u + \lambda\epsilon((u\eta)_x + (v\eta)_y) = 0. \quad (11)$$

This nondimensional form of the equations is used in the numerical simulations.

As the initial condition we take a perturbation of the free surface in a form of step function along a straight line perpendicular to the escarpment. The perturbation is positive in the negative y domain and null elsewhere. This initial configuration is purposely chosen to be the same as the one used by Allen [All96], in order to benchmark our simulations. For

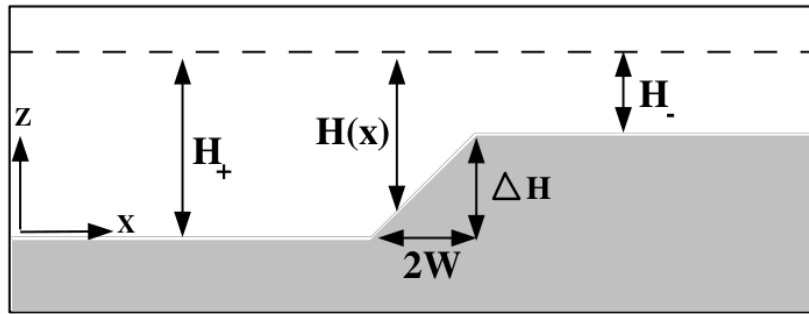


FIG. 1 – The side view of the escarpment. The non-perturbed free surface is indicated by the dashed line.

fully nonlinear numerical simulations of this problem we apply the high-resolution shock-capturing finite volume technique proposed in [Bou04]. The method was first used and extensively tested in the front adjustment problem in [BLZ04]. For a complete description of the procedure and discussion of its properties see [Bou07].

We briefly remind the main ingredients of the method. The shallow water equations in the flux-form are discretized on a regular grid within the framework of the finite-volume approach. The finite-volume scheme is then prescribed by the choice of the numerical flux function and the treatment of the remaining source terms associated with the Coriolis force. At each time-step and in each direction, the Coriolis terms are reformulated following the apparent topography method first introduced in [BLZ04]. The numerical flux function is associated with a relaxation solver adapted to treat topography as proposed in [ABB⁺04]. The choice of the numerical flux function allows to compute solutions of the shallow water equations even in the case of vanishing depth. The numerical scheme is inviscid, the numerical dissipation being extremely small except for the shock locations. The variable time step is used in order to verify the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition. The numerical simulations discussed below are obtained with a typical resolution $\Delta x, \Delta y \sim 0.1R_d$. The computations take few hours on a personal computer at this resolution. For steep topography the resolution was correspondingly increased. In order to avoid the returns of IGW emitted during adjustment the sponge layers are used at the boundaries (except for the coast, if present, see below).

3 Expected scenario of the adjustment of the pressure front and further questions

From the knowledge of the previous results on nonlinear adjustment of the pressure front without topography [KP97], of the numerical results on linear adjustment with topography [All96], and of the experimental and theoretical results with step-function escarpments [GDJL86], [JD90], we can expect the following processes to take place : on the shortest time-scales the IGW are to be emitted, to propagate away from the initial discontinuity, and to break at sufficient nonlinearities. Their propagation and breaking will be modified, with respect to the flat bottom situation, due to the fact that the phase speed of IGW varies with varying depth of the fluid. A jet will form along the initial discontinuity, in order to balance the pressure gradient. On longer time-scales, topographically trapped waves (called either double Kelvin waves, or topographic Rossby waves) should arise at the intersection of the initial front with the slope. The trapped waves propagate along the escarpment with shallower water on their right in the northern hemisphere [LM78]. The long trapped waves will form a tongue propagating in this way, that will distort the jet and make it follow the contour of the nose of the tongue. The group velocities of short and long topographic waves are opposite (see below). A packet of short waves will be also emitted and will propagate in the opposite direction with respect to the tongue, but with much slower velocity and, presumably, carrying not much energy, as in the simulations by Allen [All96].

Once these predictions for initial stages of adjustment are checked, the main questions that the fully nonlinear numerical simulation should answer are the following :

- How is the propagation and breaking of IGW modified by topography ?
- What is the long time evolution of the trapped waves ?
- What are the mixing and transport properties of the adjustment process ?

4 The results of numerical simulations for the adjustment of the front over topography far from the coast

A. Small nonlinearity

In order to benchmark our simulations and compare them with those in [All96] we start with a small nonlinearity ($\lambda = \frac{\Delta\eta}{H_+} = 0.1$)²We choose the width of the slope equal to five Rossby deformation radii for the simulations in this and the following sections, and $H_+ = 2H_-$. We will discuss the effects of varying the parameters of the slope in section 3.2. In all of the figures below, the spatial coordinates are measured in R_d , so that $W = 2.5R_d$, and the time is measured in f^{-1} . Fig. 2 gives the time evolution of the

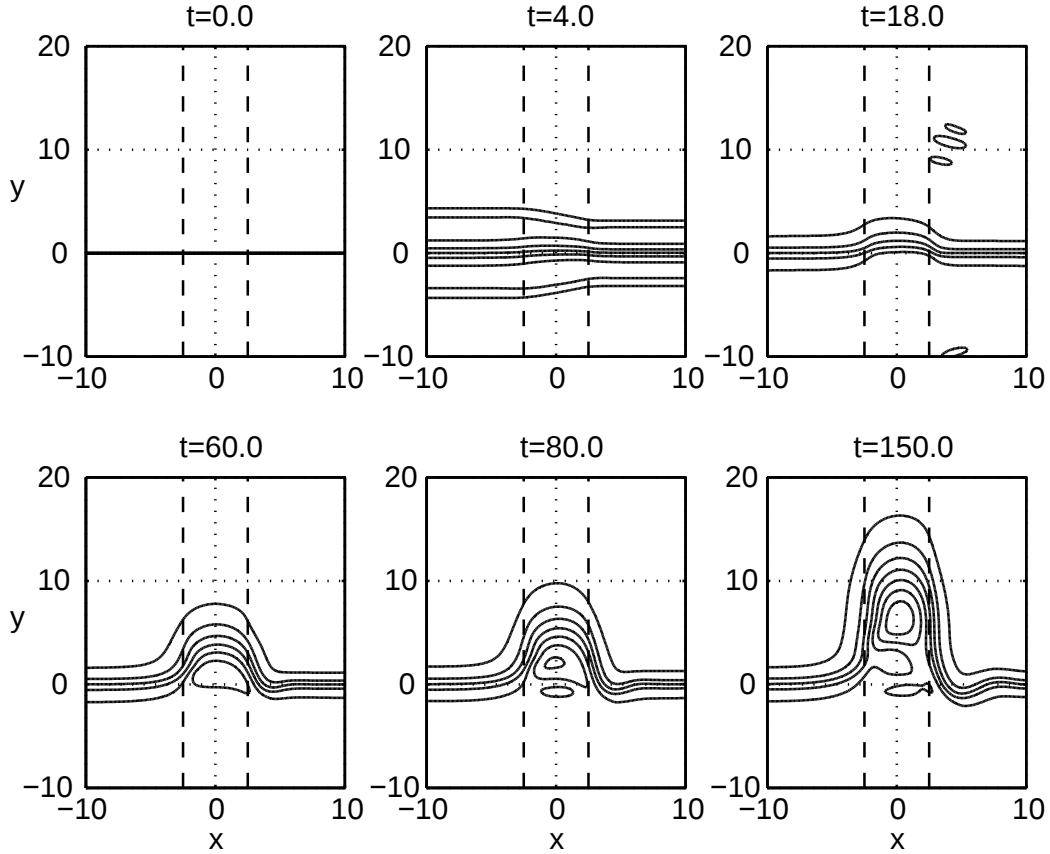


FIG. 2 – The time evolution of the free surface elevation in the (x, y) plane. The initial perturbation is equal to $+\Delta\eta$ in the lower part of the domain ($y < 0$) and zero in the upper part ($y > 0$). The edges of the slope are marked with dashed lines, $\lambda = 0.1$, the difference between the adjacent isolines of the free surface height (isobars) is 0.02. The size of the calculation domain in y direction is much bigger than the displayed domain.

free surface elevation, the initial state being at rest $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$. A zoom of the last frame in Fig. 2 (at $t = 150$) with superimposed velocity field (arrows), and the corresponding three-dimensional snapshot of the free-surface elevation are given in Fig 3.

²Note, however, that the exact value of the amplitude of the perturbation is not given in [All96].

Emission of the IGW takes place at the initial stages of the evolution. The IGW fronts originating from the initial discontinuity start bending (cf the second frame of Fig. 2). The wave-packets of IGW, apparently emitted at the location of maximum curvature of the primary IGW fronts, are observed (cf the third frame of Fig 2). The IGW fronts will be discussed below in section 3.2. The topographic Rossby waves in the form of localized

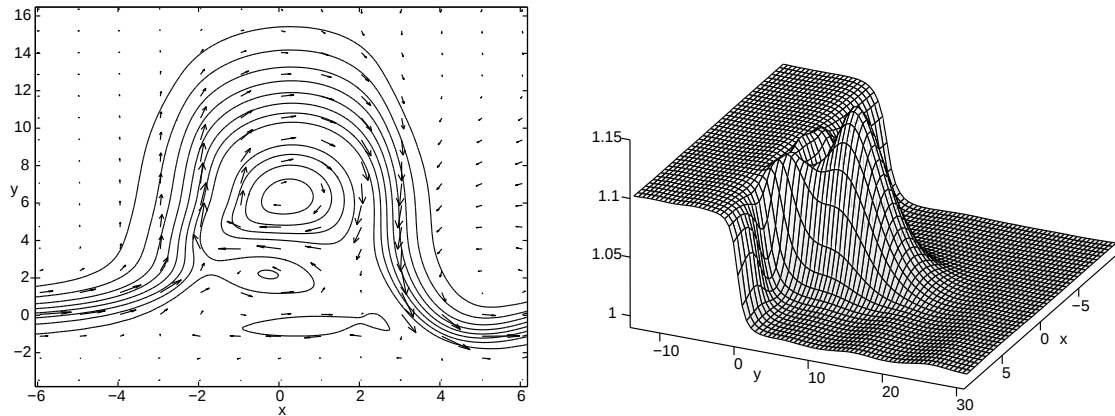


FIG. 3 – Zoom of the late ($t = 150$) stage of the evolution of the free-surface elevation with superimposed velocity field (arrows) – *left panel*, and the 3d view of the height field at the same time – *right panel*. Same experiment as in Fig. 2.

height extrema along the slope that form a tongue appear at the later stages. The figure shows clearly that the topographic waves are close to the geostrophic balance (flow parallel to the isobars). They are, thus, a part of the slow balanced motion, like the "ordinary" Rossby waves on the beta-plane. The dispersion relation for the topographic Rossby waves³ is also similar to that of ordinary Rossby waves [LH68a], see Fig. 4. Our simulations are, thus, in a good qualitative agreement with the results of [All96] : we confirm the formation of an anticyclonic vorticity region at the slope, the propagation of a tongue of fluid along the escarpment keeping the shallow water on its right and tending to separate the flows on the two sides of the slope. Apart from the jet going around the tongue, only a very small amount of fluid is crossing the escarpment at the location of the initial discontinuity.

In order to better visualize the behavior of the topographic wave-packet we present the time- evolution of the fluid depth at the center of the slope ($x = 0$) as a function of y in Fig. 5. The amplitude of the topographic waves grows during approximatively ten of inertial periods and then saturates, while secondary extrema are formed. It is to be noticed that the amplitude of the first maximum grows higher than the initial perturbation (the maximum height is about 140% of the initial height). The topographic waves propagate without visible distortion, as seen in the Figure.

To push the comparison further, we measured the speed of propagation along the escarpment of both the leading edge of the tongue, and of the principal height maximum. The former is obtained, as in [All96], by following the level at half-height of the initial perturbation, i.e. at $h = 1.05$ in Fig. 5. We thus get

$$v_{edge} \approx 0.08, \quad v_{peak} \approx 0.06, \quad (12)$$

³Due to their above-mentioned balanced character, we find this name more appropriate than the double Kelvin waves.

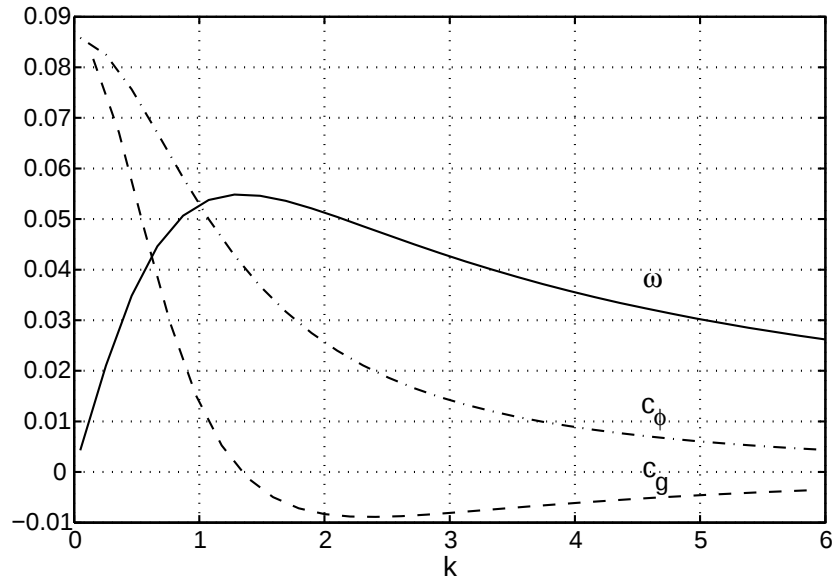


FIG. 4 – Dispersion curve, phase (c_ϕ) and group (c_g) velocities of the topographic Rossby waves, obtained by a straightforward numerical resolution of the linear eigenproblem for the topographic Rossby waves by the shooting method (cf [LH68a]). The along-slope wavenumber is nondimensionalized by R_d , and the frequency ω is nondimensionalized by the inertial frequency f .

in terms of $\sqrt{gH_+}$. The obtained value of v_{edge} is substantially larger than the value following from Fig. 8 in [All96] for the same escarpment.

The difference between v_{edge} and v_{peak} means that the topographic wave packet is subject to dispersion. The typical wavelength of the topographic waves formed in the adjustment process may be extracted from the simulations. It allows to estimate the phase and group velocity of the corresponding *linear* wave with the help of the Fig. 4. For instance, an estimate of the wavelength as a distance between the two maxima of the height field, cf, Fig. 5 gives $k \approx 0.92$, $c_g \approx 0.019$, $c_\phi \approx 0.056$. However, these figures change significantly if twice the width of the negative curvature region of the principal height peak is taken as typical wavelength : $k \approx 0.56$, $c_g \approx 0.048$, $c_\phi \approx 0.072$. Thus, the identification of the measured propagation speed with the phase or group velocity of the linear waves can not be done in a clear-cut way. We therefore measured the dispersive effects directly by following the widening of the principal peak in h during the evolution. We thus obtain a widening of about 10 percent in $100f^{-1}$, which is very low comparing with the expected widening due to the difference between the phase and the group velocity for both estimates given above.

The across-slope profile of the first maximum of the fluid height is close to the profile of the fundamental mode given by the linear theory, but some differences appear while superimposing them, as illustrated in Fig. 6. The linear modes shown in Fig. 6, as well as the dispersion curves above are obtained by a straightforward numerical resolution of the linear eigenvalue problem for the trapped modes by the shooting method. Fig. 4 agrees with the dispersion obtained in [All96] for the same escarpment, e.g. zero c_g is at $k = 1.3$. Note that in agreement with [LH68a] the maximum of the curves is shifted towards the shallower side of the slope.

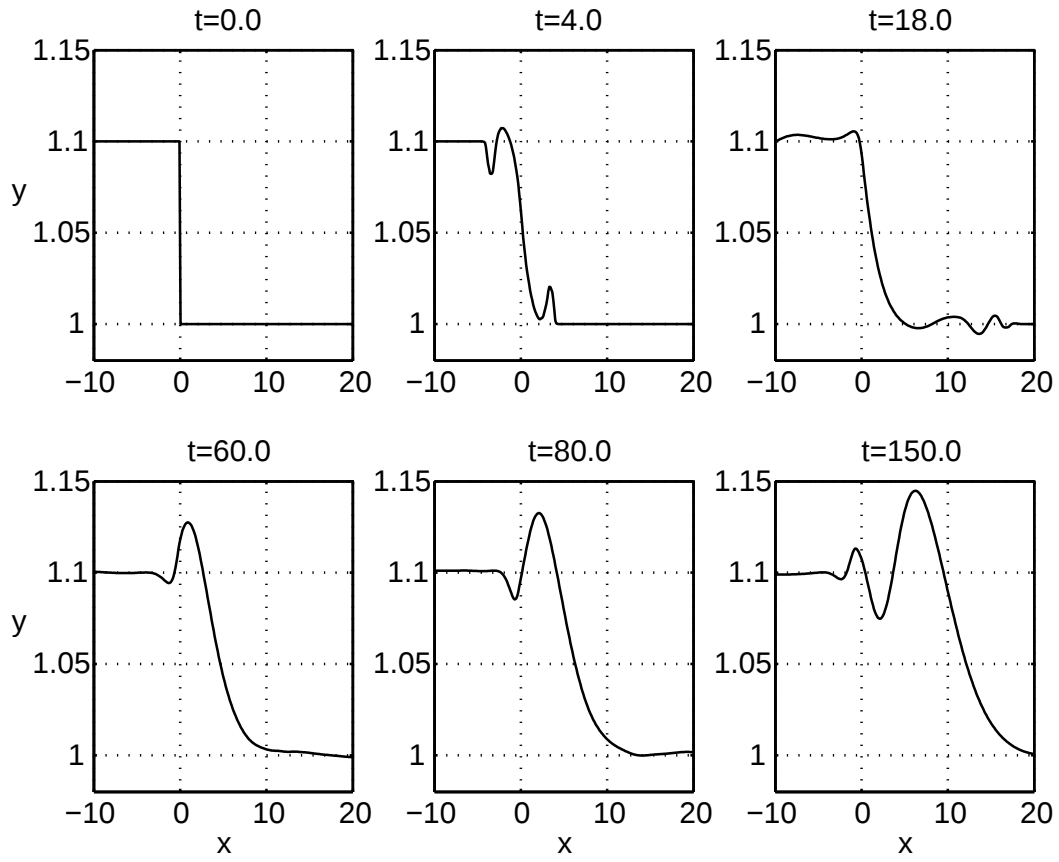


FIG. 5 – Time evolution of the fluid height profile at the center of the slope ($x = 0$) along the y -axis. Same experiment as in Fig. 2, $\lambda = 0.1$.

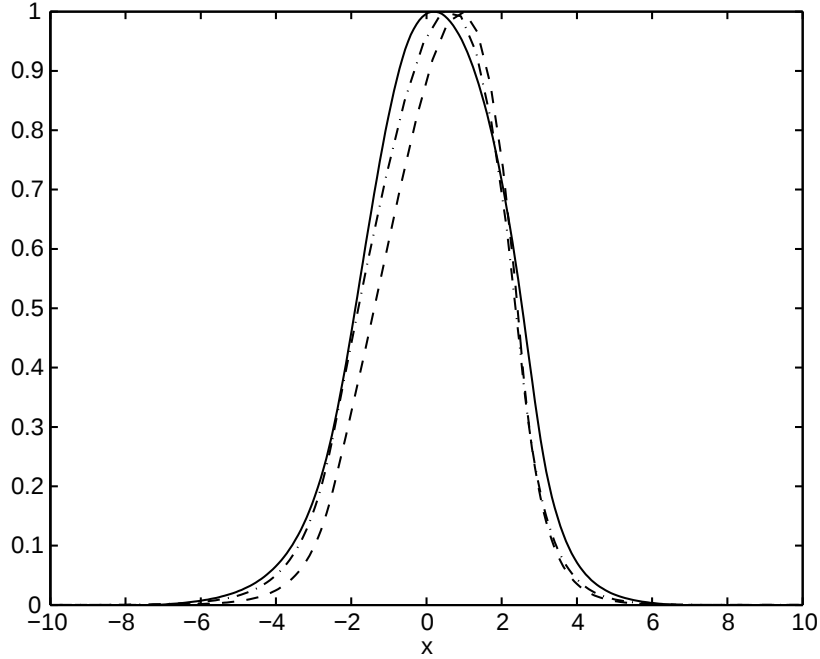


FIG. 6 – The non-dimensional profiles of the fundamental modes of the linear theory corresponding to $k = 0.92$ (dashes) and to $k = 0.56$ (points) versus the section of the first pressure maximum in the numerical simulation of Fig. 2 (solid) at time $t = 150$, as functions of non-dimensional x .

The above observations allow us to suggest that the effects of nonlinearity manifest themselves already at small λ and play a role in the coherence of the observed wave structure. We show in the Appendix, that modulated topographic waves, at small nonlinearities, obey the Korteweg - deVries equation for a given across-slope mode, and thus can form solitons. Although our initial perturbation does not project onto a single mode, the observed behavior of the subsequent pressure maxima is qualitatively consistent with that of a soliton train.

B. Strong nonlinearity

We now focus on the same process but at a larger initial nonlinearity $\lambda = 0.3$. Fig. 7 shows the nonlinear evolution of the free-surface elevation and Fig. 8 gives a zoom of the last frame at $t = 150$ with superimposed velocity field (arrows). The scenario of the adjustment is qualitatively the same as at $\lambda = 0.1$. The topographic waves propagate without distortion, and the amplitude of the first maximum again grows higher than the initial height of the perturbation (maximum height is about 130% the initial height, see Fig. 9). The measured speeds of the edge of the tongue and that of the principal height maximum are close to those at smaller nonlinearity :

$$v_{edge} \approx 0.08, \quad v_{peak} \approx 0.05. \quad (13)$$

The left panel of Fig. 8 shows that the flow is again close to the geostrophic balance but it is less equilibrated on the shallow side.

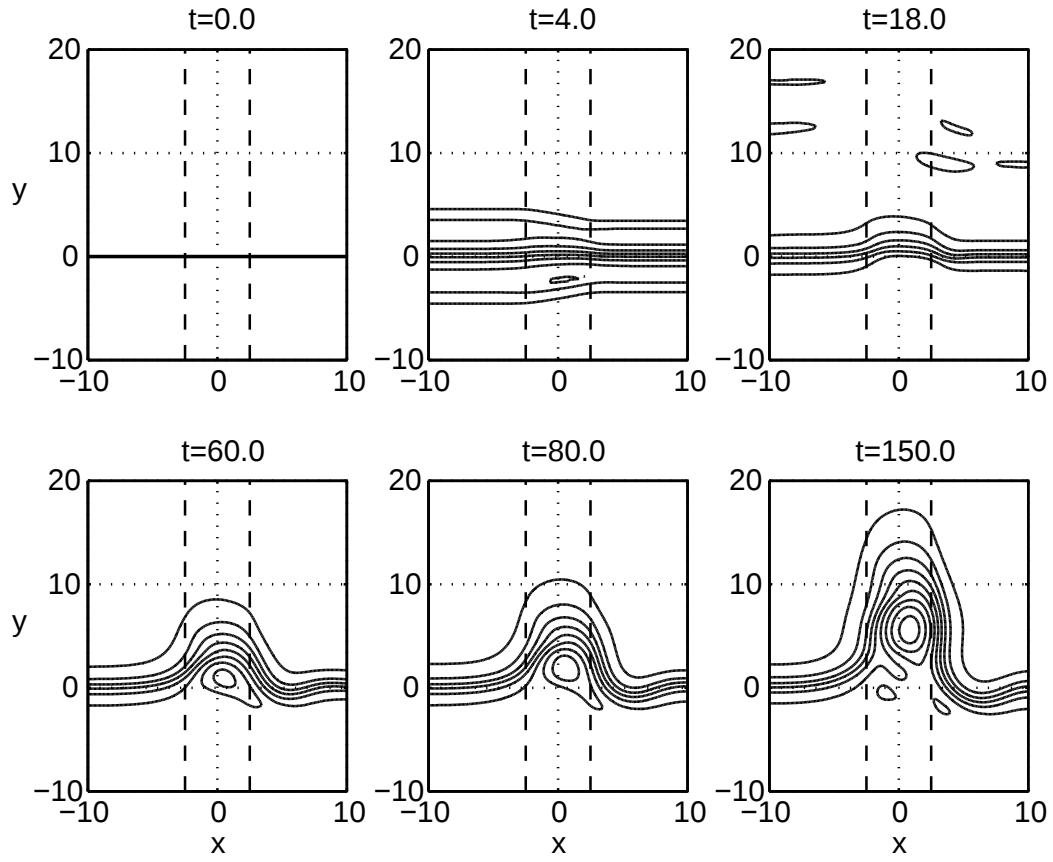


FIG. 7 – Same as in Fig. 2, but at $\lambda = 0.3$. The difference between the adjacent isolines of the free surface height (isobars) is 0.05.

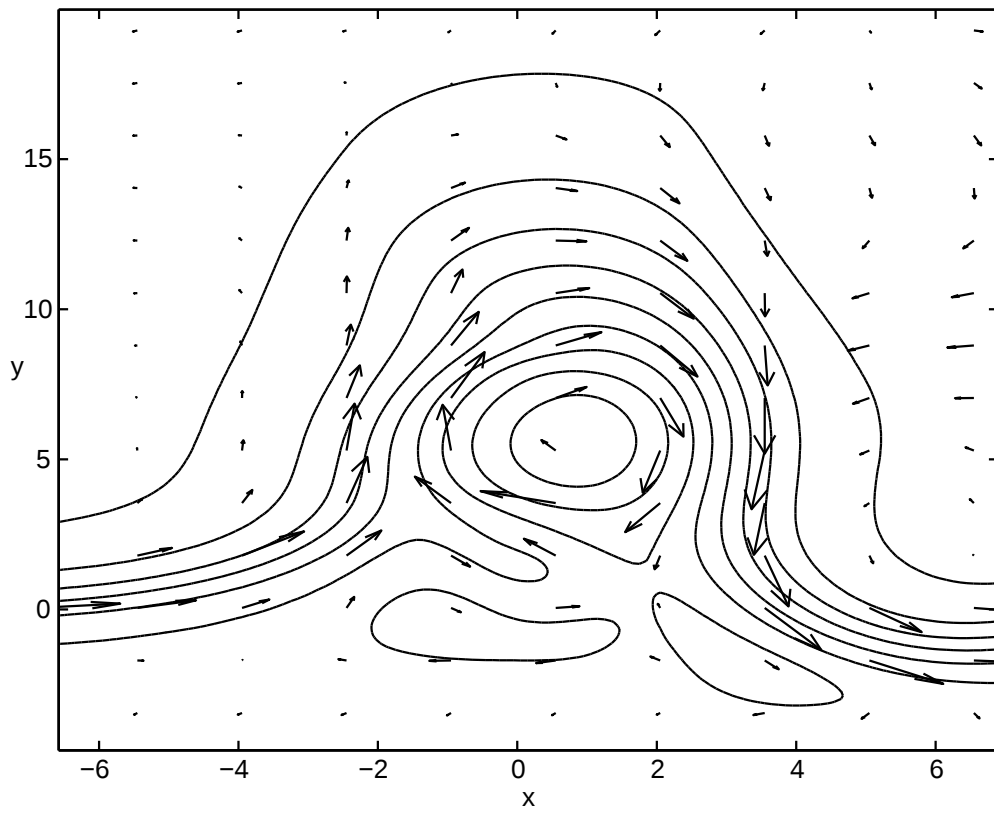


FIG. 8 – Same as in the left panel of Fig. 3 but at $\lambda = 0.3$. The isobars from $h = 1.02$ up at step 0.05 are displayed.

There are, however, some differences between the two cases. The emission of inertia-gravity waves takes place during a longer period of time (about $30f^{-1}$). The secondary extrema of the height field are formed later : at $t=200$ there are 3 maxima and 2 minima in the profile of h at small nonlinearity, and only 2 maxima and 2 minima at strong nonlinearity (not shown).

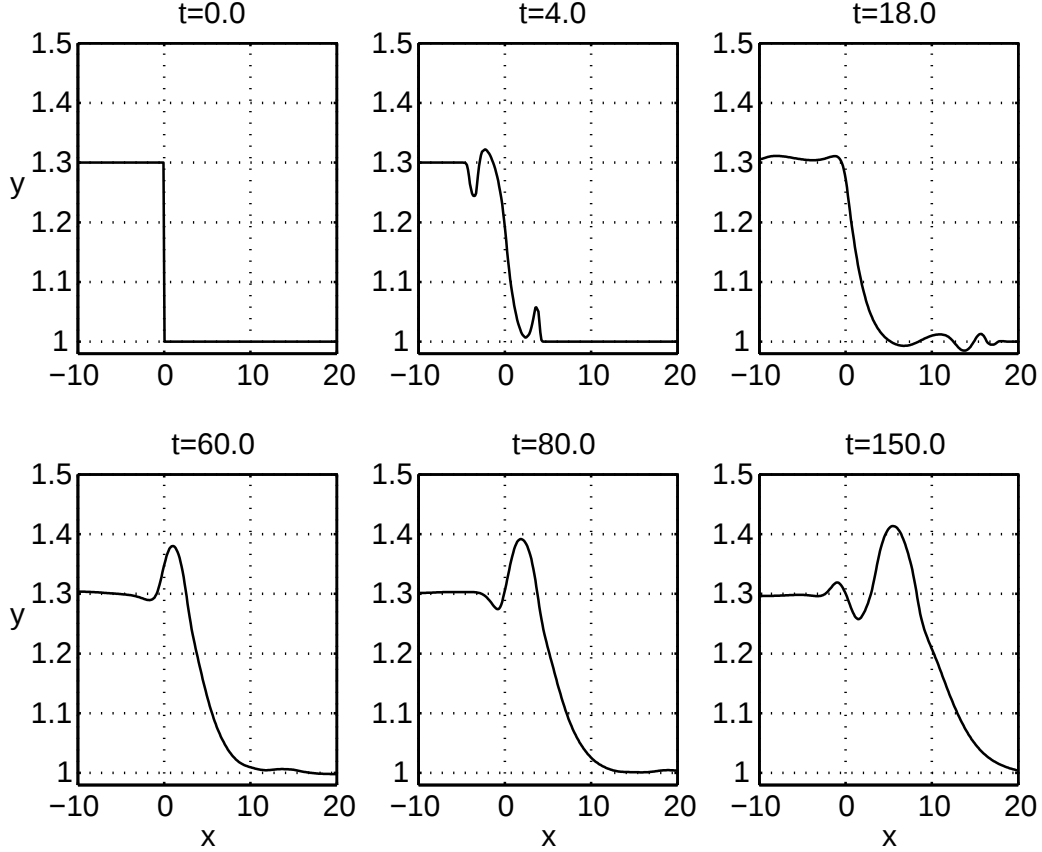


FIG. 9 – Same as in Fig. 5 but at $\lambda = 0.3$.

The estimates of the typical wavenumber, group and phase velocities based on the same criteria as in previous section give, respectively $k \approx 0.98$, $c_g \approx 0.015$, $c_\phi \approx 0.054$, and $k \approx 0.73$, $c_g \approx 0.033$, $c_\phi \approx 0.064$. The widening of the principal pressure peak during $100f^{-1}$ is again $\sim .1$, and much slower than that given by the linear dispersion. The comparison of the profiles of linear modes with the measured profile of the main pressure peak presented in Fig. 10 shows some differences, e.g. the widening of the nonlinear profile.

Globally, the simulations at $\lambda = 0.3$ confirm the coherent-structure character of the topographic wave pattern formed during adjustment. This character is strengthened even more by its stirring properties displayed in Section 3.2.

C. Steep topography

In this section we briefly describe how the previous results are modified for the steep topography. One of the motivations is the comparison with the theoretical and experimen-

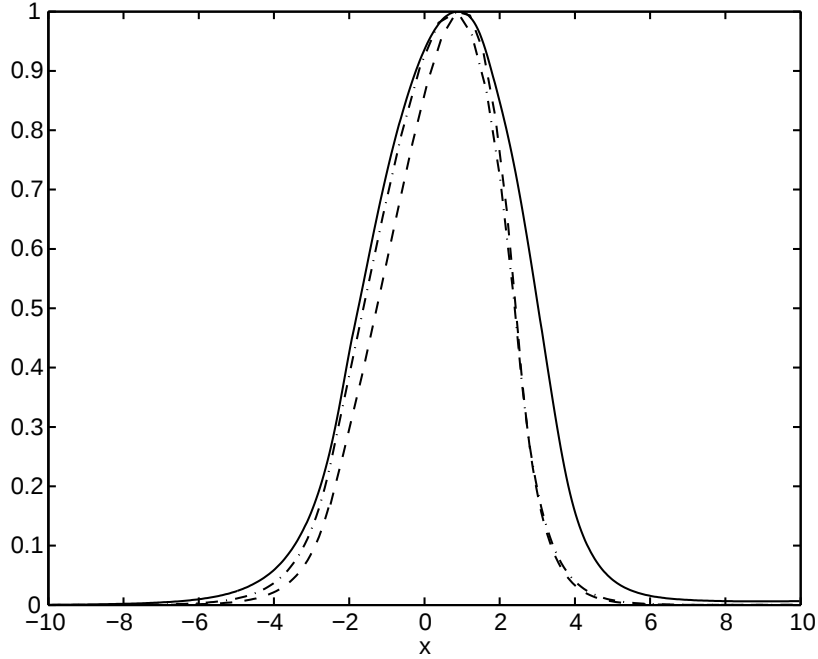


FIG. 10 – The non-dimensional profiles of the fundamental modes of the linear theory corresponding to $k = 0.98$ (dashes) and to $k = 0.73$ (dash-dotted) versus the section of the first pressure maximum in the numerical simulation of Fig. 7 (solid) at time $t = 150$, as functions of non-dimensional x .

tal results obtained in [GDJL86] and [JD90] for "infinitely steep", i.e. step-function profile of the escarpment. The numerical code we use, by construction (cf the explicit expressions for numerical fluxes in [BLZ04]) can not treat the step-function topography. Hence, the only way to model the abrupt topography is to take a steep escarpment. This means, in turn, that spatial resolution across escarpment should be increased. We thus consider a slope of a half-width $W = 0.25R_d$, i.e. ten times steeper than in the previous subsections, with the same ratio of depths $H_- = 0.5H_+$. We start from a weakly nonlinear pressure front with $\lambda = 0.1$. The evolution of the free surface is presented in Fig.11. We stopped the simulation at $t = 40$ as it is getting increasingly costly to go farther in time because of the increased resolution. The overall scenario of adjustment is qualitatively the same as in the case of gentle topography, with the following main differences :

1. The velocity of the topographic waves is much slower,
2. The tongue is less confined to the escarpment, i.e. it spreads outside the slope,
3. The peak is shifted towards the top of the slope.

A zoom of the last frame in Fig. 11 with superimposed velocity vectors is shown in Fig. 12, with the three-dimensional view of this same stage. We see that the peak height exceeds the initial maximum height and that the flow is approximatively in geostrophic balance at the deep side but at the shallow side we notice significant departures from the geostrophic balance, probably due to relatively short integration time. Note also the presence of the small-amplitude IGW in Fig. 12 which are deforming the isobars. The speed of the propagation of the tongue is much faster, which is consistent with the increase of the phase velocity of the trapped waves with increasing slope, cf. [LH68a]. Nevertheless,

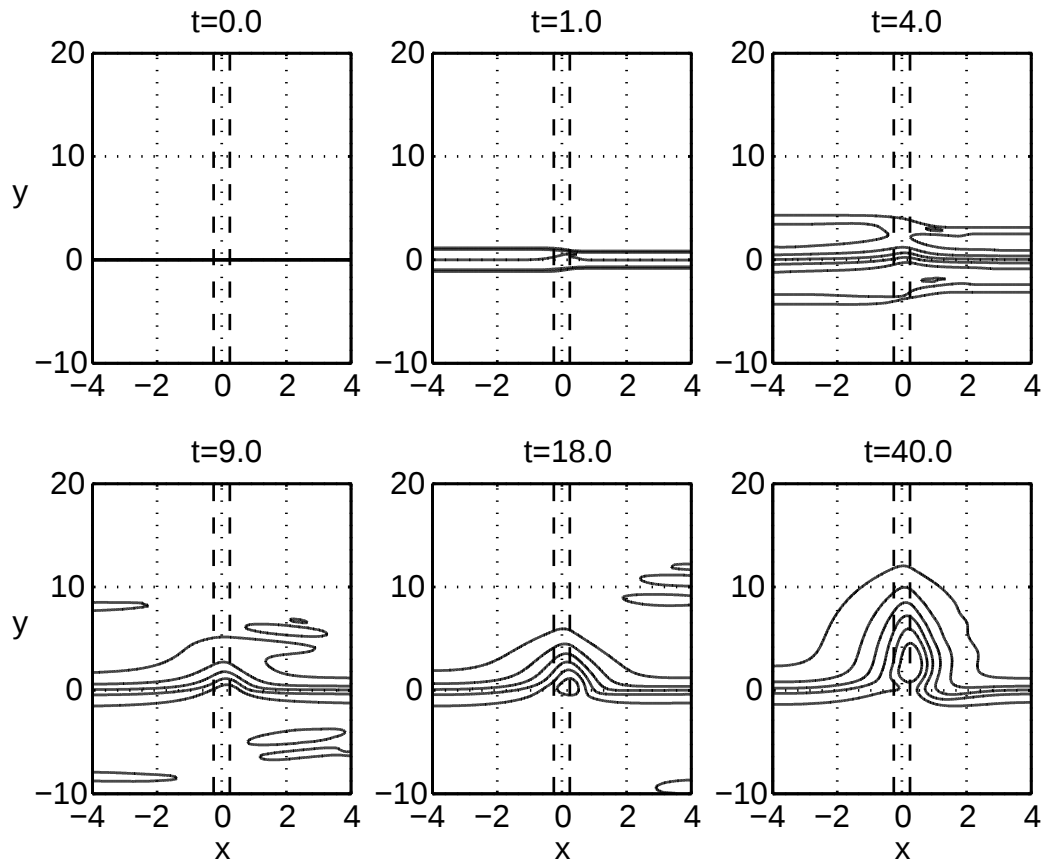


FIG. 11 – The time - evolution of the free surface elevation in the (x, y) plane. The initial perturbation is equal to $+\Delta\eta$ in the lower part of the domain ($y < 0$) and zero in the upper part ($y > 0$). The edges of the slope are marked with dashed lines ($W = 0.25$), $\lambda = 0.1$ and the height difference between the adjacent isolines of the free surface height is 0.02. The length of the calculation domain in y direction is much bigger than the displayed domain.

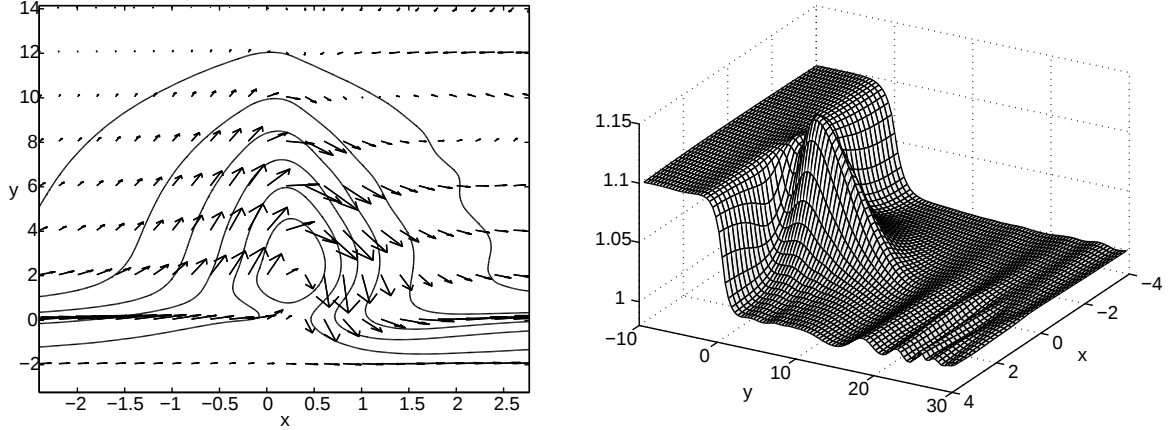


FIG. 12 – The late ($t = 40$) stage of the evolution of the free-surface elevation with superimposed velocity field (arrows) – *left panel*, and the corresponding 3d view of the height field – *right panel*. Same experiment as in Fig. 11. Note that the x scale here is different with respect to Figs. 2 and 7.

the velocity of the main pressure peak is of the same order of magnitude as in the case of gentle topography :

$$v_{edge} \approx 0.2, \quad v_{peak} \approx 0.08. \quad (14)$$

Qualitatively, these results are consistent with the linear analysis of [JD90] with a notable exception of the observed dissymmetry with respect to the axis of the slope.

D. Transport, stirring and mixing during the adjustment of the pressure front

1. Anomalous transport due to nonlinear topographic waves

In order to study the transport and stirring properties of the adjustment process we add a new variable, the density of a passive tracer, to the previous runs, and follow its evolution ⁴. We use the same method, well adapted for the finite-volume code, and the same mode of visualization of the tracer as in [BLZ05], i.e. we follow the evolution of the concentration contours of the tracer distribution initially linear in one of the coordinates. We show in the figures below the simultaneous evolution of the pair of tracers, distributed initially linearly in x and in y , respectively. Thus, each intersection of the isopycnals represents a fluid particle.

As it was already mentioned, we are motivated by similar studies for the equatorial adjustment [LSRZ04], [BLZ05], where it was shown that the waveguide modes at sufficient nonlinearities may form coherent structures (modons of equatorial Rossby waves in that case) trapping fluid and carrying it along the waveguide. We show here that although the spatial structure of the waveguide modes in the present case is not the same (they are monopolar, and not dipolar, as at the equator), the same phenomenon takes place.

⁴The diagnostic of transport with the help of potential vorticity frequently used in literature is not well suited for the present study because initial potential vorticity takes four different (constant) values out of the slope plus continuous spectrum of values in the region of the slope.

Fig. 13 gives the spatio-temporal evolution of the tracer field during the adjustment of the front with $\lambda = 0.1$ over the gentle topography $W = 2.5R_d$. In the last frame

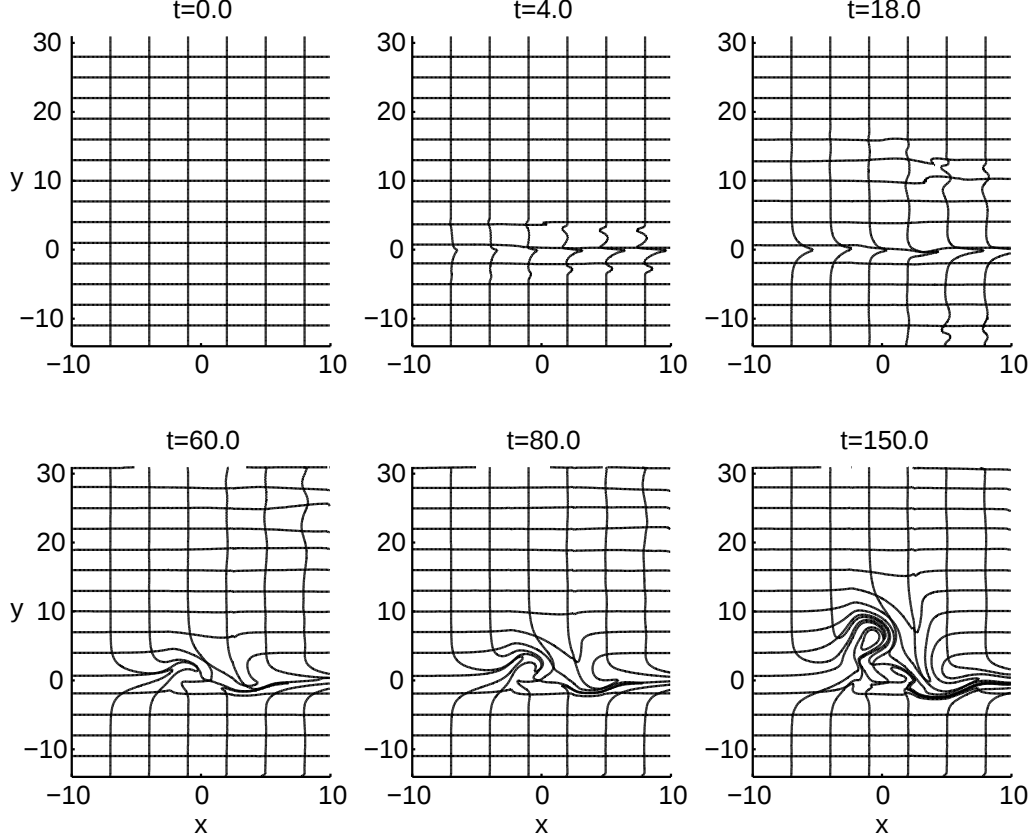


FIG. 13 – Time evolution of the tracer field at $\lambda = 0.1$ and $W = 2.5R_d$. The isopycnals of a pair of passive tracers with initial distributions linear in x and y , respectively, are shown in subsequent times. Tracers are advected by the velocity field corresponding to the simulation of Fig. 2.

($t = 150$), we observe a formation of a recirculation pattern, with subsequent trapping of the fluid. This is a "dispersive breaking" phenomenon, as it was called in [BLZ05]. At larger nonlinearity, trapping appears earlier, as we can see in Fig. 14 where the nonlinearity is $\lambda = 0.3$. The topographic waves are again trapping fluid and carrying it along the escarpment.

2. Wave-breaking as indicator of mixing

As was already mentioned in the Introduction, our numerical model is essentially non dissipative except for the shock locations [BLZ04]. The total energy is conserved during the simulations, apart from the events of wave-breaking. We show in Fig. 15 the time evolution of the total energy loss in the flow in the frontal adjustment process. The energy loss is pronounced during the initial stages of evolution (several inertial periods) where the strong gradients (due to initial conditions, and to the secondary shock formation, see below) are present. The secondary peak of the energy loss at $t \sim 6$ is correlated with the

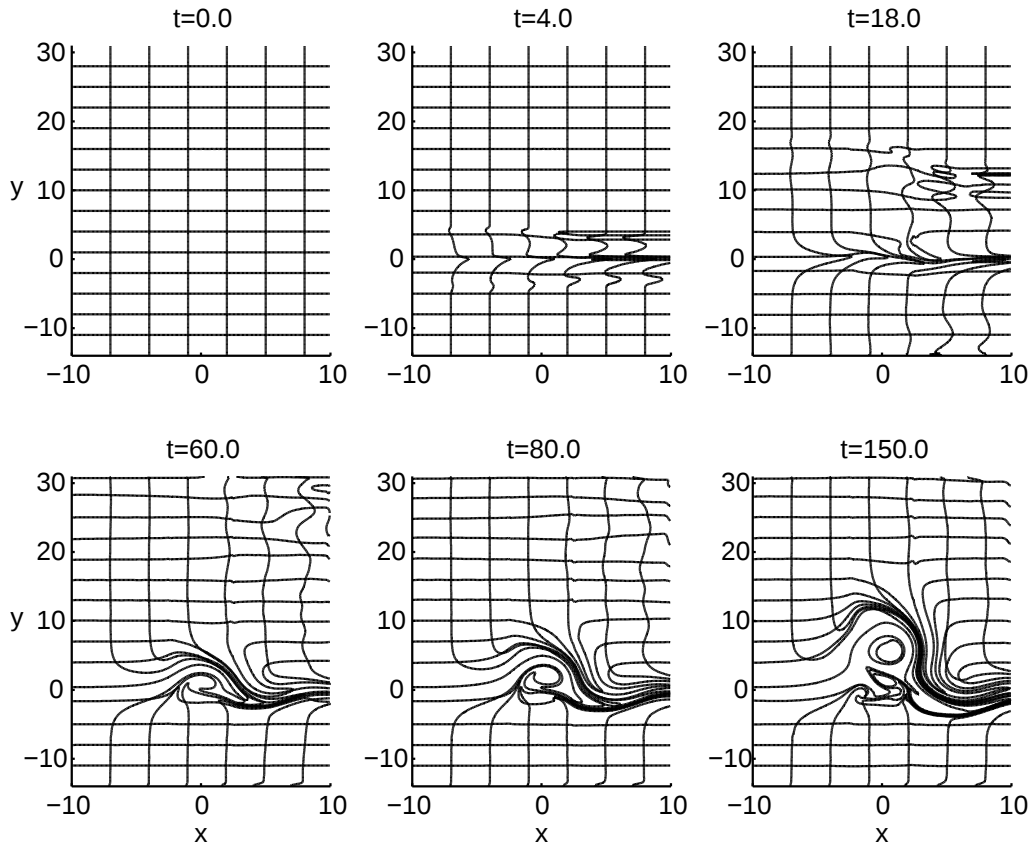


FIG. 14 – Time evolution of the tracer field at nonlinearity $\lambda = 0.3$ and $W = 2.5R_d$. See caption of Fig. 13.

appearance of the strongly curved region at the emitted wave-front, see Fig. 16 below. The energy loss is very low during the rest of the simulation, which amounts to the overall loss of energy of the order of one per thousand.

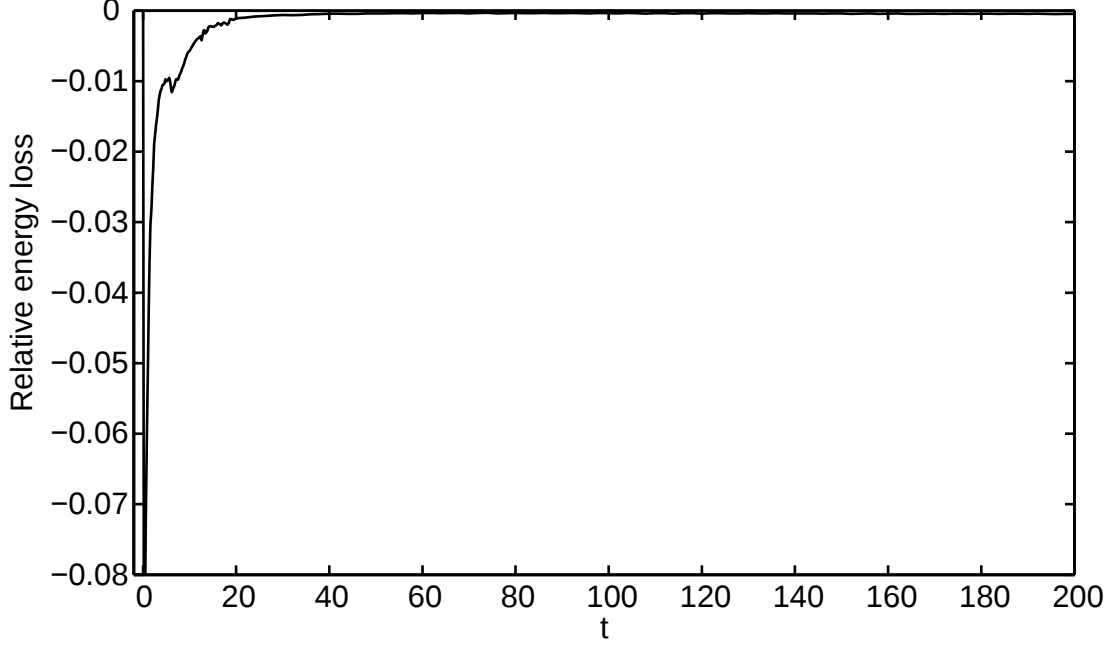


FIG. 15 – Time evolution of the energy loss due to numerical dissipation of the flow at $\lambda = 0.3$. The relative energy loss per unit time $\frac{\Delta E}{E_0 \Delta t}$ is calculated as deviation from the energy balance in each calculation cell, integrated over the whole calculation domain and normalized by the total initial energy.

Due to the difference in the phase speeds of waves on the left and on the right of the escarpment (IGW propagating faster in deeper fluid), the wave-fronts of the IGW emitted at the initial stage of adjustment should bend. This is a novel aspect of the dam-break problem in the presence of topography, which should affect the wave-breaking accompanying the propagation of such wave-fronts [KP97], [BLZ04]. By monitoring the local dissipation rates we can identify the wave-breaking zones. The evolution of the local dissipation rate in the calculation domain at the initial stages of the simulation with $\lambda = 0.3$ is shown in Fig. 16. The dissipation rate is calculated as the deviation from the energy conservation in each computation cell. The zones where the dissipation is prominent are located first at the two wave-fronts propagating from the initial discontinuity in both along-slope directions. After several of inertial periods, the maximum of dissipation is localized at the specific zones of the IGW wave-fronts propagating at the shallow side of the escarpment. As seen from the figures, the IGW wave-front intensity is decreased, except for these precise locations which continue to propagate as localized wave-packets at an angle which is the same in simulations with different front intensities.

Obviously the highly idealized model cannot pretend to correctly represent the dissipative phenomena in the real flow (recall that the typical resolution is $0.1 R_d$ in the simulations above). However it gives a good first guess about locations of enhanced dissipation and hence mixing in the real flow in similar configurations.

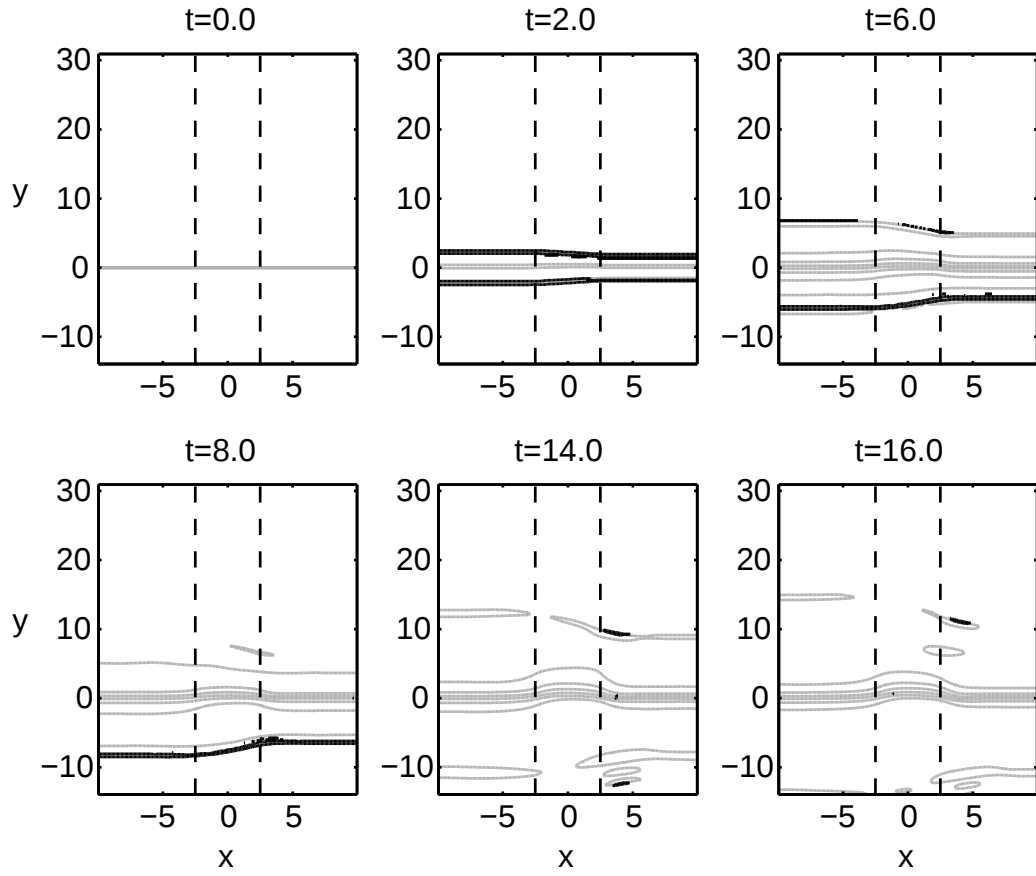


FIG. 16 – Time evolution of the dissipation rate (black contours corresponding to the threshold of $2 \cdot 10^{-5}$ in nondimensionalized energy flux unit) superimposed on the surface elevation (gray contours at $\Delta h = 0.05$ interval) in the (x, y) plane, at $\lambda = 0.3$.

5 The role of the coast

In the previous simulations the escarpment was situated in the "open ocean". Let us briefly comment on the new effects introduced by an adjacent coast line. The effects of the coast perpendicular to the escarpment were discussed by Gill, Davey, Johnson and Linden [GDJL86] and Allen [All96]. We repeated our simulations with $W = 2.5R_d$ by placing a rigid wall parallel to the escarpment at $x = 10$ at the shallow side in order to model a "continental shelf" configuration. The results for the evolution of the height field, the dissipation, and the profile of the height field along the $x = 9$ section are given in Fig. 17, 18, 19, respectively.

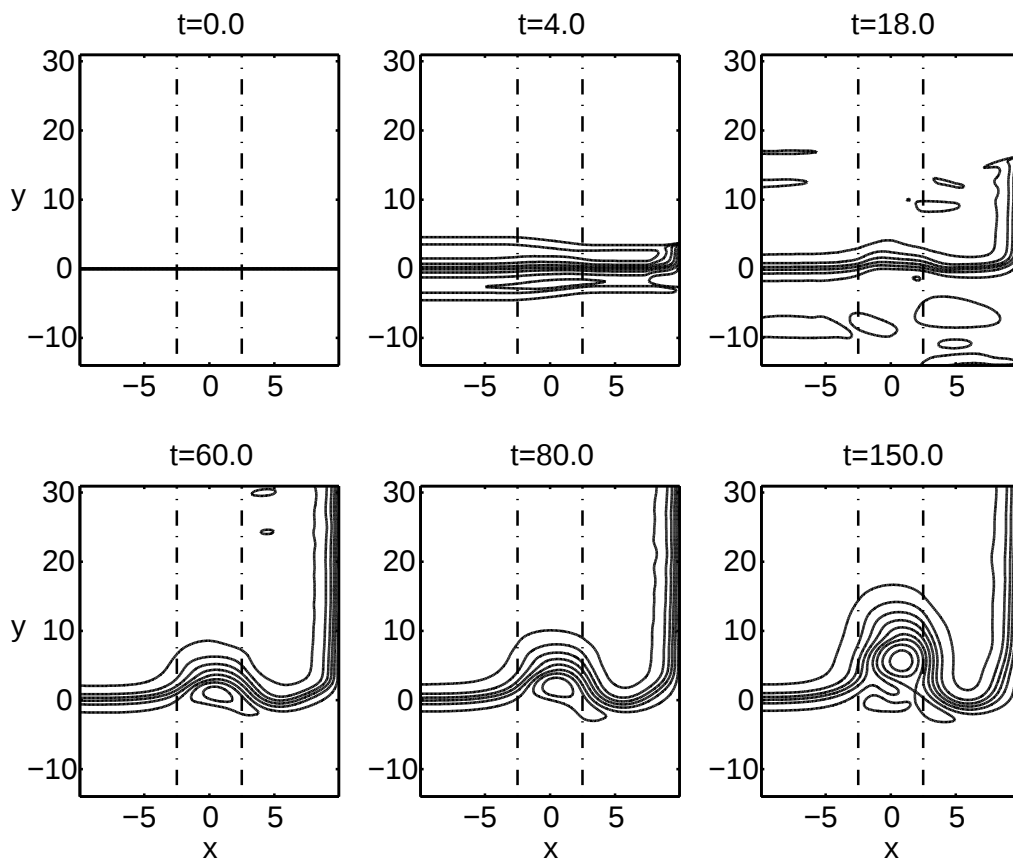


FIG. 17 – Time-evolution of the free surface elevation in the (x, y) plane, at $\lambda = 0.3$. The solid-wall is on the right side.

The main new element introduced by the coast is the propagation of the boundary Kelvin wave front along it. Due to the fact that the boundary Kelvin waves are dispersionless, they break (cf. [FM95]) and form the mixing zones. The details of the Kelvin front formation are given in Fig. 19. Another phenomenon related to the Kelvin front propagation is a secondary wave emission behind the front well-distinguishable in the pressure contours in Fig. 18. It is similar to that observed for equatorial Kelvin fronts [FM00], [LSRZ04]) and has the same explanation. Namely, the nonlinear Kelvin waves having the phase speed higher than the linear one may be in a direct resonance with the IGW.

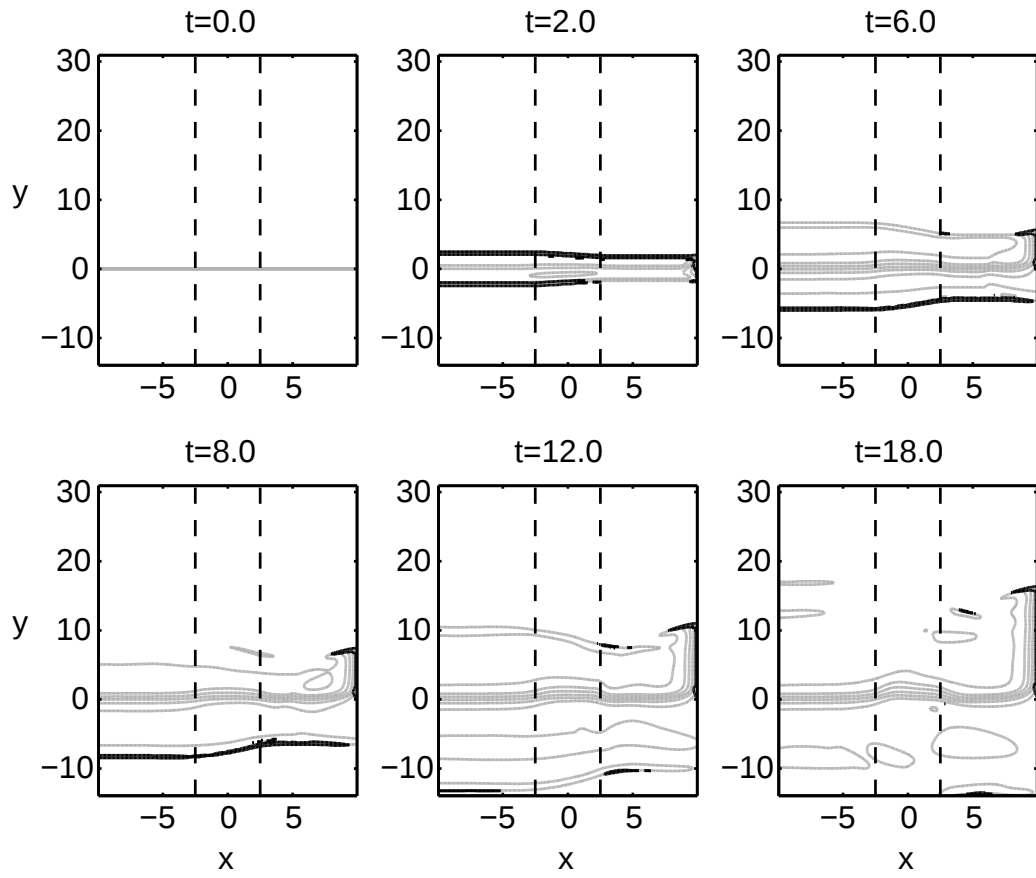


FIG. 18 – Joint evolution of the dissipation rate (black contours) and the free-surface elevation (gray contours) in the (x, y) plane, at $\lambda = 0.3$.

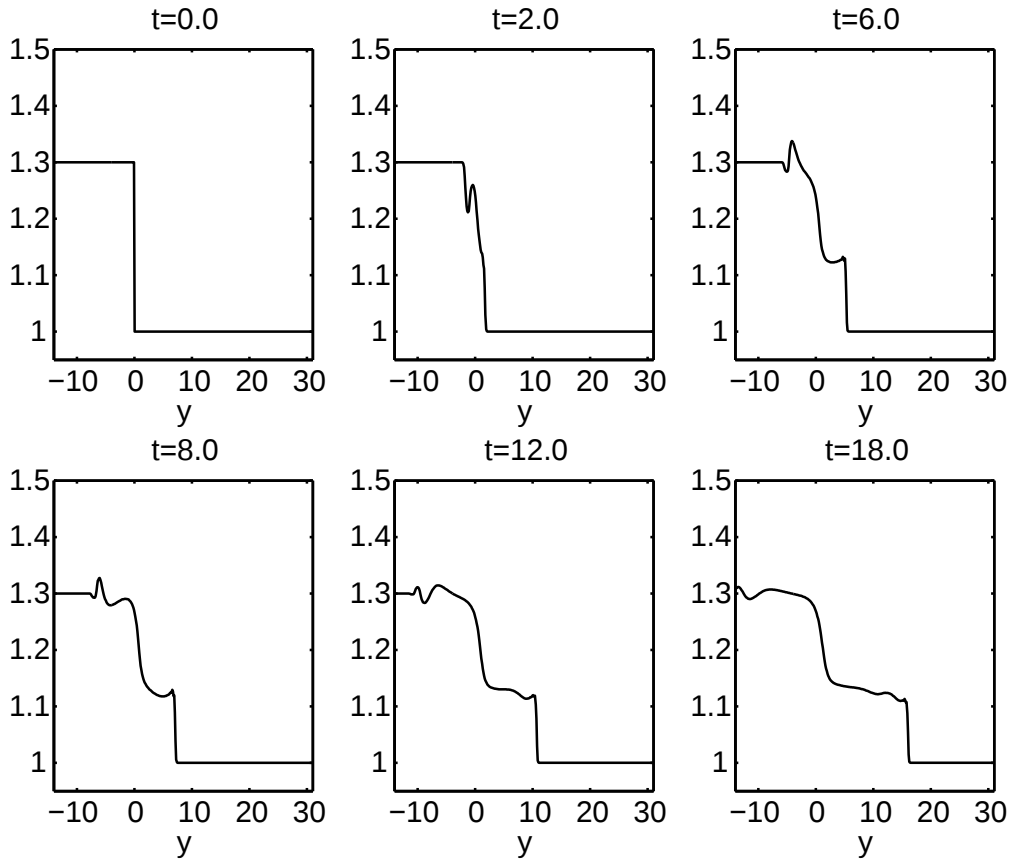


FIG. 19 – Time evolution of the free-surface elevation at $x = 9$ (close to the wall), at $\lambda = 0.3$.

6 Conclusions and discussion

We have performed detailed fully nonlinear numerical simulations of the classical problem of the adjustment of a pressure front over topography. We confirmed the results of earlier investigations which were performed previously in the linear regime and found new essentially nonlinear phenomena. The most important of them, in what concerns dynamics, is excitation of finite-amplitude topographic waves propagating essentially without change of form for long times, and resembling the soliton trains known from the theory of the KdV equation. Nevertheless, the quantitative check of the soliton hypothesis is yet to be done. In what concerns transport and mixing, the most characteristic features are 1) formation of recirculation regions in the cores of topographic "solitons" with subsequent anomalous tracer transport along the topography, and 2) appearance of specific mixing zones related to the propagation of IGW, or of the boundary Kelvin waves in the presence of the coast, emitted during the early stages of adjustment.

Therefore, the geostrophic adjustment in the presence of the topographic waveguide is specific and resembles that at the equator, as part of the initial perturbation projects onto the waveguide modes. These waveguide modes form coherent structures providing the anomalous transport along the waveguide. The waveguide modes belong to the balanced part of the motion, as we confirm by direct calculations. They evolve much more slowly than unbalanced IGW which evacuate the excess of energy at the early stages of the adjustment process. The IGW are, however, also influenced by topography which leads to the enhancement of dissipation/mixing in specific locations.

It is to be mentioned that fully nonlinear numerical simulations of the interaction of jets with topography using the rigid-lid configuration are known in literature [CLSC⁺99]. The rigid lid approximation corresponds formally to $R_d \rightarrow \infty$, which physically means that all typical scales, including the scale of the slope, are much smaller than the deformation radius. The steep topography case in Section 3.2 above is the only one approaching this regime in the present study (such scales are largely subgrid in the gentle slope case). However, our simulations reveal the formation of the coherent structures of the scale still much larger than the width of the slope, which was not the case in the corresponding cases in [CLSC⁺99]. The dipolar structures corresponding to the higher topographic modes were typically observed in [CLSC⁺99], while in our simulations the monopolar ones are dominating, although higher modes can appear on the late stages as suggested by the gentle-slope simulations (cf e.g. Fig. 8). It probably means that even with steep topographies the rigid lid regime is hard to reach in the full rotating shallow water model. This is also true for the adjustment with the reversed jet (initial pressure anomaly of opposite sign) which was also studied in [CLSC⁺99]. We present in Fig. 20 the late stage of the evolution for strong nonlinearity $\lambda = 0.3$ in this case, to be compared with Fig. 8. The topology of the isobars is globally the same although it corresponds to a trough in Fig. 20 and to an elevation in Fig. 8, with respect to the non-perturbed fluid surface at rest. Some asymmetry, however, is observed in what concerns the intensity of the resulting balanced vortex (more intense in Fig. 20) and its position (at the shallower side of the slope for the cyclonic vortex, Fig. 20, and at the deeper side for the anticyclonic vortex, Fig. 8). Being more intense, the vortex/pressure extremum propagates faster in Fig. 20, although the tip of the tongue has practically the same velocity in both cases.

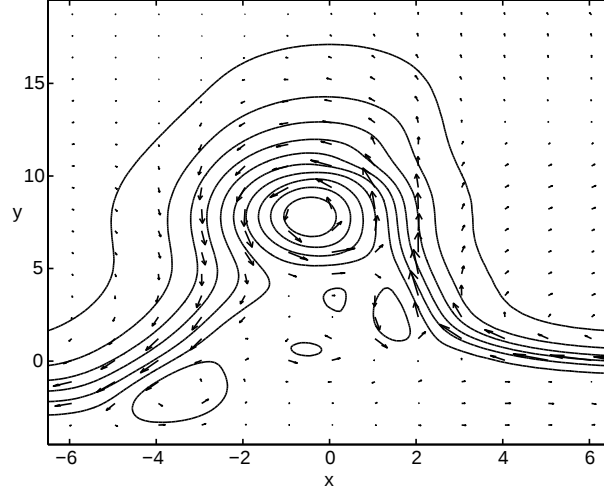


FIG. 20 – Same as in Fig. 8 but for the reversed initial anomaly. Isobars from $h = 0.98$ down at step 0.05 are displayed.

A. KdV solitons of modulated topographic waves

Consider the shallow-water equations with topography (4) - (6) on the f -plane.

We use a slightly different nondimensionalization with respect to (7)- (8) for the horizontal scale, the vertical scale and the velocity, because we want to allow for different scales in the two horizontal directions. Using the half-width of the slope W as a typical horizontal scale in the x direction, L a typical horizontal scale in the y direction with the corresponding aspect ratio parameter $\delta = W/L$ supposed to be small, the mean depth of the fluid at rest $\bar{H} = \frac{H_+ + H_-}{2}$ as a vertical scale, and δU and U for the zonal and meridional velocity respectively, we nondimensionalize the dependent and independent variables as follows :

$$x = \tilde{x}W, \quad y = \tilde{y}L, \quad H = \tilde{H}\bar{H}, \quad \Delta H = \Delta\tilde{H}\bar{H}, \quad \eta = \tilde{\eta}\Delta\eta, \quad (1)$$

$$u = \tilde{u}\delta U, \quad v = \tilde{v}U, \quad T = \tilde{T}f^{-1}, \quad H_x = \tilde{H}_{\tilde{x}}\frac{\Delta H}{W} = \tilde{H}_{\tilde{x}}\Delta\tilde{H}\frac{\bar{H}}{W}, \quad (2)$$

where the tilde variables are the nondimensionalized ones. The parameters governing the problem, thus, are : the Rossby number $\epsilon = \frac{U}{fW}$, the relative elevation of the free surface $\lambda = \frac{\Delta\eta}{\bar{H}}$, the Burger number $\gamma = (\frac{R_d}{W})^2$, where the Rossby deformation radius is defined as $R_d = \sqrt{\frac{g\bar{H}}{f^2}}$, and the relative depth change due to the escarpment $\sigma = \Delta\tilde{H}$.

We get the following non-dimensionalized set of equations :

$$\delta u_t + \epsilon \delta^2 (uu_x + vv_y) - v = -\frac{\lambda\gamma}{\epsilon} \eta_x, \quad (3)$$

$$v_t + \epsilon \delta (uv_x + vv_y) + \delta u = -\delta \frac{\lambda\gamma}{\epsilon} \eta_y, \quad (4)$$

$$\lambda \eta_t + \epsilon \delta H(u_x + v_y) + \epsilon \delta \sigma H_x u + \lambda \epsilon \delta ((u\eta)_x + (v\eta)_y) = 0. \quad (5)$$

We are interested in slow motions close to the geostrophic equilibrium. The latter is achieved at the leading order by the following choice of parameters $\frac{\lambda\gamma}{\epsilon} \sim 1$ which is standard in the quasi-geostrophic dynamics. The filtering of the fast inertia-gravity waves

is achieved by using the hierarchy of the slow time-scales $t_n = \delta^n t$ and supposing that all the fields are slow, i.e. do not depend on the fast time-scale t_0 . Finally, the nonlinearity, as well as the Rossby number, are supposed to be small and we choose the following relation among the small parameters : $\lambda \sim \epsilon \sim \delta^2 \ll 1$, $\gamma \sim 1$, meaning that the width of the escarpment is of the order of the Rossby radius. We thus get, omitting the numerical factors of the order one :

$$\delta^2 (u_{t_1} + \delta u_{t_2} + \delta^2 u_{t_3} + \dots) + \delta^4 (uu_x + vu_y) - v = -\eta_x, \quad (6)$$

$$(v_{t_1} + \delta v_{t_2} + \delta^2 v_{t_3} + \dots) + \delta^2 (uv_x + vv_y) + u = -\eta_y, \quad (7)$$

$$(\eta_{t_1} + \delta \eta_{t_2} + \delta^2 \eta_{t_3} + \dots) + Hu_x + Hv_y + \sigma H_x u + \delta^2 ((u\eta)_x + (v\eta)_y) = 0. \quad (8)$$

The last hypothesis consists in supposing the order one depth change across the escarpment, $\sigma \sim 1$. All fields are then expanded in asymptotic series in δ :

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + \delta u^{(1)} + \delta^2 u^{(2)} + \dots, \\ v &= v^{(0)} + \delta v^{(1)} + \delta^2 v^{(2)} + \dots, \\ \eta &= \eta^{(0)} + \delta \eta^{(1)} + \delta^2 \eta^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

At the lowest order we get :

$$v^{(0)} = \eta_x^{(0)}, \quad (9)$$

$$v_{t_1}^{(0)} + u^{(0)} = -\eta_y^{(0)}, \quad (10)$$

$$\eta_{t_1}^{(0)} + Hu_x^{(0)} + Hv_y^{(0)} + H_x u^{(0)} = 0, \quad (11)$$

which is equivalent to a single equation for $\eta^{(0)}$:

$$\partial_{t_1} (H\eta_{xx}^{(0)} + H_x \eta_x^{(0)} - \eta^{(0)}) + H_x \eta_y^{(0)} = 0. \quad (12)$$

Looking for a propagating in y solution with a given structure in x

$$\eta^{(0)} = F^{(0)}(x) \Phi^{(0)}(ky - \omega t_1, t_2, t_3, \dots) \quad (13)$$

we get the following equation for the across-escarpment structure functions :

$$\left(H F_x^{(0)} \right)_x - F^{(0)} \left(1 + \frac{k}{\omega} H_x \right) = 0. \quad (14)$$

The solutions of this equation in the case of linear topography are expressed in terms of modified Bessel function of the first kind and of the second kind.

Due to the assumed scaling this equation is the long-wave low-frequency limit of the equation for the linear modes obtained by the straightforward linearization about the rest state of (4) - (6), and used earlier to get Fig. 4. It is easy to see that in order to get nontrivial eigenmodes $F_n^{(0)}(x)$ with eigenfrequencies ω_n , it is necessary that $(1 + \frac{k}{\omega} H_x)$ changes sign. Thus, for monotonous escarpment-like topography the well-known unique direction of propagation of the topographic waves which keep shallower water on their right in the Northern hemisphere [LM78] follows.

Proceeding to the higher orders in δ will give, as usual in the asymptotic expansions method, a series of inhomogeneous problems for higher corrections $\eta^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$ with the r.h.s. depending on the previous-order fields. Again, according to the standard rules, the

solutions of these problems may be obtained by removing the resonances in the r.h.s., i.e. imposing the orthogonality condition and introducing dependence on slower times. This gives nonlinear evolution equation for $\eta^{(0)}$. Proceeding in this way it is easy to see that it is sufficient to require that there is no t_2 - dependence in the zero-order fields to get rid of the resonances at the first order in δ . At the order δ^2 we have :

$$u_{t_1}^{(0)} - v^{(2)} = -\eta_x^{(2)}, \quad (15)$$

$$v_{t_1}^{(2)} + v_{t_3}^{(0)} + u^{(0)}v_x^{(0)} + v^{(0)}v_y^{(0)} + u^{(2)} = -\eta_y^{(2)}, \quad (16)$$

$$\eta_{t_1}^{(2)} + \eta_{t_3}^{(0)} + H(u_x^{(2)} + v_y^{(2)}) + u^{(2)}H_x + (u^{(0)}\eta^{(0)})_x + (v^{(0)}\eta^{(0)})_y = 0. \quad (17)$$

By expressing the velocity field in terms of the free-surface elevation :

$$v^{(2)} = \eta_x^{(2)} - \eta_{yt_1}^{(0)} - \eta_{xt_1t_1}^{(0)} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)} = & -\eta_y^{(2)} - \eta_{xt_1}^{(2)} + \eta_{yt_1t_1}^{(0)} + \eta_{xt_1t_1t_1}^{(0)} - \eta_{xt_3}^{(0)} - \eta_x^{(0)}\eta_{xy}^{(0)} \\ & + (\eta_y^{(0)} + \eta_{xt_1}^{(0)})\eta_{xx}^{(0)} \end{aligned} \quad (19)$$

we get

$$\begin{aligned} -H\eta_{xxt_1}^{(2)} - H_x[\eta_{xt_1}^{(2)} + \eta_y^{(2)}] + \eta_{t_1}^{(2)} = & -\eta_{t_3}^{(0)} - H[\eta_{xyt_1t_1}^{(0)} + \eta_{xxt_1t_1t_1}^{(0)} - \eta_{xxt_3}^{(0)} - \\ & -\eta_x^{(0)}\eta_{xxy}^{(0)} + \eta_{xxt_1}^{(0)}\eta_{xx}^{(0)} + \eta_y^{(0)}\eta_{xxx}^{(0)} \\ & + \eta_{xt_1}^{(0)}\eta_{xxx}^{(0)} - \eta_{yyt_1}^{(0)} - \eta_{xyt_1t_1}^{(0)}] \\ & -H_x[-\eta_{xt_3}^{(0)} + \eta_{yt_1t_1}^{(0)} + \eta_{xt_1t_1t_1}^{(0)} - \eta_x^{(0)}\eta_{xy}^{(0)} \\ & + (\eta_y^{(0)} + \eta_{xt_1}^{(0)})\eta_{xx}^{(0)}] + \eta^{(0)}\eta_{xxt_1}^{(0)} + \eta_x^{(0)}\eta_{xt_1}^{(0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

We look for a solution of this equation in the form $\eta^{(2)} = F^{(2)}(x)\Phi^{(2)}(ky - \omega t_1, t_3, \dots)$. The t_1 derivatives should be replaced in (20) by the y -ones according to the rule $\partial_y = -\frac{k}{\omega}\partial_{t_1}$ consistent with the unidirectional propagation of the topographic waves. We thus get the following equation for $F^{(2)}(x)$:

$$\Phi_{t_1}^{(2)}[F^{(2)} + H_x(\frac{k}{\omega}F^{(2)} - F_x^{(2)}) - HF_{xx}^{(2)}] = \{\text{r.h.s.}\}, \quad (21)$$

where $\{\text{r.h.s.}\}$ stands for the r.h.s. of (20). By multiplying by $F^{(0)}(x)$ and integrating by x we get the Korteweg - deVries equation for $\Phi^{(0)}$:

$$a\Phi_{t_3}^{(0)} + b\Phi_{yyy}^{(0)} + c\Phi^{(0)}\Phi_y^{(0)} = 0, \quad (22)$$

where the coefficients are given by

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(0)}[-F^{(0)} + H_x F_x^{(0)} + HF_{xx}^{(0)}]dx, \quad (23)$$

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(0)}[-H_x(\frac{\omega^2}{k^2}F^{(0)} - \frac{\omega^3}{k^3}F_x^{(0)}) - H(-\frac{\omega^3}{k^3}F_{xx}^{(0)} + \frac{\omega}{k}F^{(0)})]dx, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} c = & \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(0)}\left[-H_x(-F_x^{(0)}F_x^{(0)} + F^{(0)}F_{xx}^{(0)} - \frac{\omega}{k}F_x^{(0)}F_{xx}^{(0)})\right. \\ & -H(F_x^{(0)}F_{xx}^{(0)} + F^{(0)}F_{xxx}^{(0)} - \frac{\omega}{k}(F_{xx}^{(0)}F_{xx}^{(0)} + F_x^{(0)}F_{xxx}^{(0)})) \\ & \left.-\frac{\omega}{k}(F_x^{(0)}F_x^{(0)} + F^{(0)}F_{xx}^{(0)})\right]dx. \end{aligned} \quad (25)$$

The numerical values of a , b and c may be easily found for any linear escarpment.

The appearance of KdV equation for slow evolution of weakly nonlinear long topographic waves could be expected. Indeed, the dispersion of long unidirectionally propagating topographic waves is weak (cf. the dispersion curve Fig. 4) and may be compensated by weak nonlinearity to give solutions preserving their form - a typical situation where the KdV equation arises.

Surprisingly, soliton-like structures in topographic waves arise at strong nonlinearities, as our numerical simulation shows. In this respect, again, the situation is similar to that observed in simulations of the equatorial adjustment [LSRZ04] .

Vorticité potentielle

Dans ces travaux, nous avons visualisé le transport d'un traceur passif pour comprendre l'influence des ondes de Rossby topographiques sur le transport de masse. La vorticité potentielle est une grandeur conservée de façon lagrangienne souvent utilisée en mécanique des fluides géophysiques. Nous n'avons jusqu'ici pas utilisé cette variable puisque dans la configuration de l'escarpement linéaire sa visualisation n'est pas aisée. En effet, à l'instant initial de l'expérience de l'ajustement de la figure 2 de l'article qui précède, par exemple, celle-ci possède quatre valeurs constantes sur les domaines à fond plat, et un continuum de valeurs sur l'escarpement lui-même.

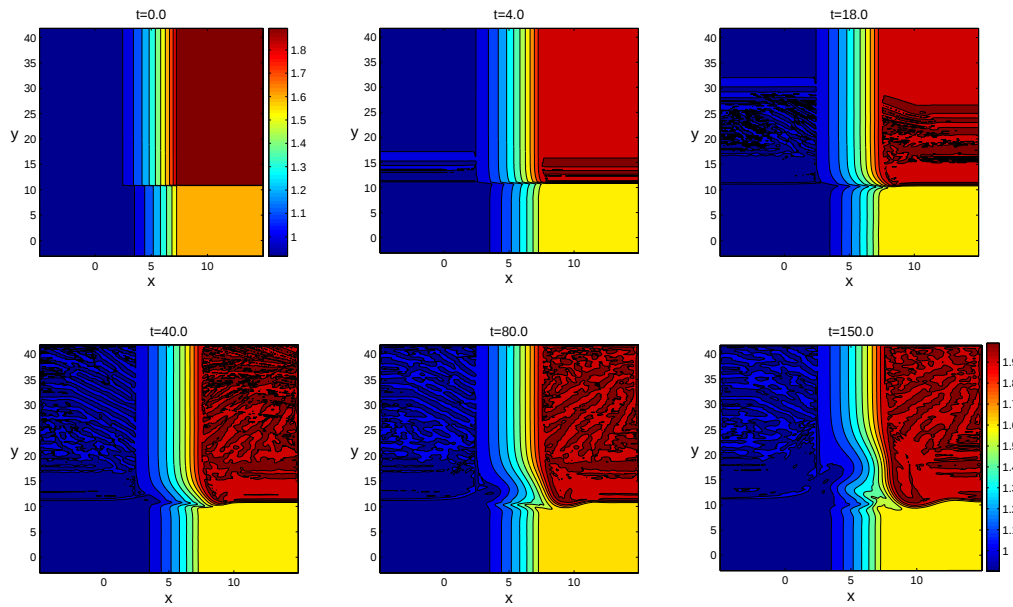


FIG. 3.21 – Evolution de la vorticité potentielle dans le plan (x,y) au cours de l'expérience de la figure 2 page 60.

On voit sur la figure (3.21) que l'existence à l'instant initial de ces nombreuses valeurs différentes de vorticité potentielle rend la compréhension du transport de vorticité potentielle difficile. On voit clairement un transport de la vorticité potentielle au niveau de l'intersection entre l'escarpement et la discontinuité initiale de la surface libre, mais on peut difficilement extraire d'autres informations de cette image. La visualisation de la concentration d'un traceur passif apporte davantage d'information, c'est pourquoi nous avons retenu cette visualisation dans les travaux présentés précédemment.

3.3 Conclusion

L'étude de l'ajustement géostrophique nonlinéaire en présence d'un guide d'ondes topographique a mené aux résultats suivants. Nous avons confirmé les résultats connus dans le régime linéaire et mis en évidence des effets nonlinéaires. Nous avons excité des ondes topographiques piégées d'amplitude finie qui se propagent sans changer de forme sur des échelles de temps longues, ressemblant aux trains de solitons solutions de l'équation de

Korteweg de Vries. Les ondes topographiques piégées reconnectent les lignes de courant en formant des régions de recirculation au coeur des “solitons topographiques”. Les ondes d’inertie-gravité (et en présence de bord, les ondes de Kelvin côtières) générées lors de l’ajustement au cours de leur propagation créent des régions spécifiques où le mélange à petite échelle sera intensifié. Une analyse à l’aide de développements asymptotiques pour une perturbation de pression localisée a montré que l’enveloppe des ondes topographiques obéit à l’équation Korteweg De Vries dans un régime de paramètre particulier. La vérification quantitative de l’hypothèse “soliton” reste à faire.

Chapitre 4

Ajustement géostrophique d'un front double de densité

4.1 Introduction

La représentation simplifiée standard des fronts de densité dans la littérature utilise le modèle de l'eau peu profonde en rotation à une [Kil83a, GKS82, RDB03, DRB04] ou deux [PG90] couches et une configuration du type incropping/outcropping, avec les fluides de densité différentes séparés par une surface isopycnale en intersection avec le fond/couvercle rigide. Par la suite nous allons nous limiter à une configuration à une couche à gravité réduite (voir Fig. 4.1). Deux configuration caractéristiques sont consi-

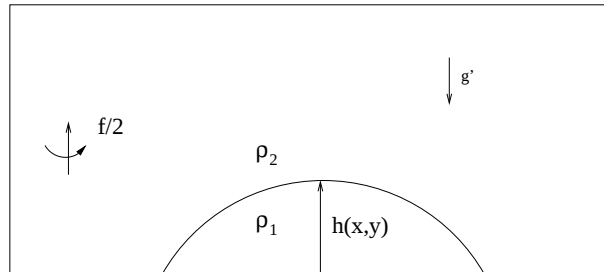


FIG. 4.1 – Schéma de la configuration pour le modèle à gravité réduite à une couche et demie en rotation avec une couche active (avec incropping) au dessous d'une couche au repos de très grande profondeur.

dérées dans la littérature dans ce contexte : les fronts couplés, c'est -à-dire les bandes quasi-unidimensionnelles de fluide confiné à l'intérieur de la surface isopycnale [GKS82], et les lentilles de fluide confiné par une surface isopycnale à l'intérieur du domaine fermé bidimensionnel [Kil83b, CR84, CR87, Rip87]. Nous allons étudier ci-dessous les fronts de densité couplés, quoique nous verrons que leur évolution mène à la formation de lentilles, dont l'évolution est brièvement adressée dans l'Appendice B.1.

Les fronts doubles rectilignes en équilibre géostrophique représentent les solutions exactes des équations de l'eau peu profonde en rotation à une dimension et demie (invariance dans la direction y) :

$$u_t + uu_x - fv = -gH_x, \quad (4.1)$$

$$v_t + uv_x + fu = 0, \quad (4.2)$$

$$H_t + (Hu)_x = 0. \quad (4.3)$$

L'écoulement correspondant est stationnaire et vérifie l'équation de l'équilibre géostrophique :

$$fv = gH_x, \quad (4.4)$$

$$u = 0. \quad (4.5)$$

L'écoulement de profil simple qui vérifie cette équation est :

$$\begin{cases} h = H = \begin{cases} \frac{H_0}{2}(1 - (\frac{x}{L})^2), & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \\ u = 0 \\ v = V = \begin{cases} \frac{g}{f}H_x = -\frac{gH_0}{fL^2}x, & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \end{cases} \quad (4.6)$$

où H_0 et L sont les échelles verticales et horizontales.

Comme il suit de ces expressions, le front double équilibré est nécessairement associé à un jet cisailé. L'ajustement géostrophique vers un tel état équilibré, par exemple à partir d'un front/jet perturbé est, évidemment, différent de l'ajustement standard à cause du confinement du fluide (terminaison de la surface libre : dessèchement). Par conséquent les ondes engendrées par une perturbation sur le fond d'un front/jet équilibré ne peuvent pas être évacuées. Elles sont piégées et condamnées à se propager à l'intérieur du front, la seule atténuation possible étant à cause des effets dissipatifs. Dans ce contexte, la stabilité des jets équilibrés devient cruciale pour le processus de l'ajustement. En l'absence des modes instables, le seul scénario de l'ajustement est la propagation, avec éventuelle atténuation dissipative, de ces modes sur le fond de l'écoulement équilibré stationnaire. Par contre, les modes instables, s'ils existent, peuvent changer radicalement l'écoulement de base au cours de leur évolution nonlinéaire en produisant les structures cohérentes secondaires. Nous verrons par la suite que c'est le cas.

La stabilité des fronts couplés dans le modèle à gravité réduite a été étudiée dans le papier classique de Griffiths, Killworth and Stern [GKS82] qui ont montré que l'instabilité par rapport aux perturbations de grandes longueurs d'onde est inhérente à de telles configurations. L'étude de [GKS82] a été complétée ensuite par le travail de Paldor et Ghil [PG90] qui ont trouvé d'autres zones d'instabilité que celles identifiées par GKS, pour les nombres d'ondes de perturbation plus élevée, mais avec des taux de croissance moindres. Dans les deux articles uniquement les configurations à vorticité potentielle nulle (ou constante) ont été considérées ¹. Dans ce qui suit, nous reproduisons ces résultats classiques, les détaillons et les généralisons pour les vorticités potentielles non-nulles non-constantes. L'utilisation de la méthode de collocation permet l'obtention rapide et économique en ressources de calcul de ces résultats.

Nous initialisons ensuite les simulations numériques directes des fronts de densité couplés avec les perturbations instables ainsi retrouvées et observons l'évolution nonlinéaire consécutive avec la formation de structures cohérentes. L'état final, quoi que (quasi-) équilibré se trouve être non-stationnaire et très différent qualitativement et quantitativement par rapport à l'état équilibré stationnaire de base.

¹Signalons les travaux de Balmforth [Bal99] sur l'instabilité de cisaillement en eau peu profonde sans rotation

4.2 Instabilité et évolution nonlinéaire des fronts de densité géostrophiques couplés

Les résultats sur l'instabilité et l'évolution nonlinéaire des fronts de densité géostrophiques couplés font l'objet d'un article soumis à *Journal of Fluid Mechanics*. Ainsi nous les incluons en anglais.

Instability of coupled geostrophic density fronts and its nonlinear evolution

E. Scherer and V. Zeitlin

Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5, France

Submitted to *Journal of Fluid Mechanics* on December 19th 2007

Accepted for publication on June 30, 2008

Instability of coupled density fronts, and its fully nonlinear evolution are studied within the idealized reduced-gravity rotating shallow water model. By using the collocation method we benchmark the classical stability results on zero potential vorticity (PV) fronts and generalize them to non-zero PV fronts. In both cases we find a series of instability zones intertwined with the stability regions along the along-front wavenumber axis, the most unstable modes being long-wave. We then study the nonlinear evolution of the unstable modes with the help of a high-resolution well-balanced finite-volume numerical scheme by initializing it with the unstable modes found from the linear stability analysis. The most unstable long-wave mode evolves as follows : after a couple of inertial periods, the coupled fronts are pinched at some location and a series of weakly connected co-rotating elliptic anticyclonic vortices is formed, thus totally changing the character of the flow. The characteristics of these vortices are close to known rodon lens solutions. The shorter-wave unstable modes from the next instability zones are strongly concentrated in the frontal regions, have sharp gradients, and are saturated due to dissipation without changing qualitatively the flow pattern.

1 Introduction

Density fronts are ubiquitous in the ocean [Gil82]. Understanding their dynamics is of obvious importance for comprehension of transport and mixing of mass and momentum. A particular but frequently observed case corresponds to fronts with isopycnals intersecting with the free surface or with the bottom, i.e. outcropping or incropping fronts, respectively. A pair of adjacent outcropping (incropping) fronts with density gradients of opposite sign isolate a fluid of particular density from a surrounding fluid with a different density [Smi76, HSB⁺82]. We focus on outcropping / incropping density fronts in the paper and will call them simply fronts in what follows. Due to the presence of the Coriolis force the density fronts should be accompanied by a corresponding velocity jet perpendicular to the density gradients. In the geostrophically balanced (or simply geostrophic) fronts, the Coriolis force and the pressure force are in equilibrium. Such fronts, if they are straight, are exact solutions of the equations of motions (see below). The question of stability of these solutions is of double importance. Besides the stability *per se*, it may be put in the context of the fundamental in geophysical fluid dynamics geostrophic adjustment problem,

e.g. [RZBJ01]. Namely, starting from a configuration close to an unstable solution, the question arises what will be the end state of the relaxation to the geostrophic equilibrium?

A widely used idealized model for studying dynamics of density fronts is the reduced-gravity rotating shallow water model, where the effects of density stratification are incorporated in the modified ("reduced") gravity parameter, and the system is modelled by a single-layer finite-depth constant-density fluid. The front corresponds to the fluid terminating at the free streamline (e.g. [Kil83a]), which may be closed (a lens configuration much studied in the literature [Kil83b, Rip87, CR85]). Coupled density fronts correspond to a band of fluid between two free streamlines, cf [GKS82] or more recent references like e.g. [RDB03]. The outcropping/incropping phenomenon is modelled by the fluid terminating at the free streamline with finite slope of the free surface. The model is well-suited for studying the basic dynamics. It obviously neglects the dissipative effects like Ekman pumping, and oversimplifies stratification. The former may be, in principle, parametrized, for the sake of applications, and the second may be taken into account by using e.g. a two-layer model. In what follows we will, however, use the simplest version of the model, as in the classical paper by Griffiths, Killworth & Stern [GKS82] which will allow us 1) to complete their stability analysis and 2) to understand the nonlinear stage of instability.

The simplest form of the depth profile of the coupled fronts is parabolic. It is easy to see, that the corresponding balanced jet has a linear horizontal shear. In what follows we will focus on this simplest configuration, which may be called the free-streamline rotating shallow water Couette flow. The classical plane-parallel Couette flow is known to be linearly stable to all infinitesimal perturbations [DR81], which is not the case of its (non-rotating) shallow water counterpart [KK95] between the rigid boundaries. In the present case we have in addition the effects of rotation and free boundaries.

The linear stability of coupled density fronts with parabolic profile within one- and two-layer reduced gravity models have been studied in the literature, especially in the particular case of zero potential vorticity (PV), which allows for considerable technical simplifications. As was shown by Griffiths *et al.* [GKS82], the coupled fronts with zero-PV are linearly unstable to infinitesimal perturbations with small but finite wavenumbers. Later, [PG90] confirmed this result and also found new unstable wavenumber intervals separated by the stability zones for zero-PV fronts. They however did not display the structure of the new unstable modes. In both papers *ad hoc* zero-PV methods were used for linear stability analysis. Griffiths *et al.* [GKS82] also gave theoretical arguments for instability of arbitrary (with non-zero PV) coupled density fronts with respect to linearised perturbations with small wavenumbers. In their laboratory experiments, a circular current of buoyant fluid above a deep lower layer was observed to be always unstable forming a sequence of vortices at the late stages of evolution. It should be noted also that the difference between two-layer and one-layer stability results is mainly the appearance of the short-wave Kelvin-Helmholtz type instabilities in the former case [PG90], without qualitative changes of the long-wave part of the spectrum which we will be interested in in what follows.

Below, we present a detailed linear stability analysis of the coupled fronts without limiting ourselves by the zero-PV assumption. We use the recent version of collocation method for linear stability analysis and we benchmark our method by reproducing earlier results on the position of the instability zones and growth rates. We also obtain the detailed structure of the unstable modes for successive instability zones. After having established the full stability diagram, and confirmed the existence of multiple instability zones

with their proper patterns of unstable modes, we perform fully nonlinear high-resolution simulations of the nonlinear stage of instability starting from the coupled fronts perturbed by the unstable mode. We find a specific "barotropic" breaking, and a complete spatio-temporal reorganization of the flow during the nonlinear evolution of the most unstable long-wave perturbations, while shorter-wave unstable modes from the next instability zones are saturated due to dissipation without changing the character of the flow.

The paper is organized as follows. After briefly reminding the rotating shallow-water model and the collocation method in §4.2, we present the results of the linear stability analysis in §4.2. The nonlinear evolution of the coupled geostrophic fronts perturbed by the unstable modes is presented in §4.2. The results are summarized and discussed in §4.2. In the Appendix we briefly present for comparison the results of linear and nonlinear analysis of the frontal configuration with smoothened outcropping, i.e. fluid terminating at the free boundary with zero slope of the free surface.

2 The model and the linear stability problem

2.1 The model

The equations of the rotating shallow water model on the f -plane are :

$$u_t + uu_x + vu_y - fv = -gh_x \quad (1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + fu = -gh_y \quad (2)$$

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \quad (3)$$

where $u(x, y, t)$ is the zonal velocity, $v(x, y, t)$ is the meridional velocity, $h(x, y, t)$ is the fluid depth, f is the Coriolis parameter which we assume to be constant and positive, g is the reduced-gravity and the subscripts denote corresponding partial derivatives. We neglect the effects of viscosity and diffusion in the linear stability analysis. The PV is defined as $q = (v_x - u_y + f) / h$. It is a Lagrangian invariant of the model : $\frac{dq}{dt} = 0$.

The geostrophic balance corresponds to equilibrium between the Coriolis force and the pressure force in (1a) and (2b). The straight balanced front, i.e. a geostrophically balanced configuration without dependence on one of the coordinates (say y) is an exact stationary solution of (1), as it is easy to see.

We study stability of a specific geostrophically balanced jet with a parabolic profile :

$$\begin{cases} h = H &= \begin{cases} \frac{H_0}{2}(1 - (\frac{x}{L})^2), & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \\ u = 0 \\ v = V &= \begin{cases} \frac{g}{f}H_x = -\frac{gH_0}{fL^2}x, & |x| \leq L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

We thus have a free-boundary problem, the bounding streamlines at rest being situated at $x = -L$ and $x = +L$. The fluid terminates with a non-zero slope of the free surface at the boundaries ("drying"), which is a simple, but widely used model of outcroppings/incroppings occurring in the real ocean (cf e.g. [GKS82] ; [Kil83a, Kil83b, RDB03]). The basic configuration is schematically presented in figure 2.

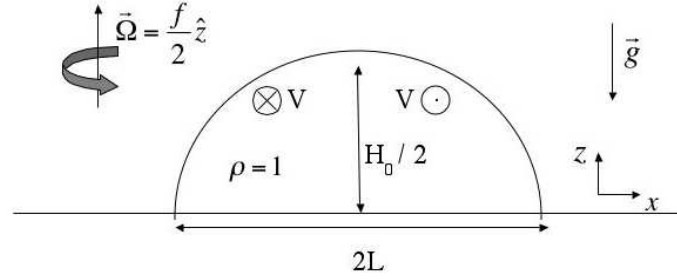


FIG. 2 – The reduced gravity rotating shallow water configuration which models the incropping / outcropping fronts : a layer of fluid of width $L/2$ and maximum depth $H_0/2$ on the rotating plane with Coriolis parameter f and the reduced-gravity $\vec{g}$.

The PV of the flow (4) is :

$$q = \frac{V_x + f}{H} = \frac{-\frac{gH_0}{fL^2} + f}{\frac{H_0}{2}(1 - (\frac{x}{L})^2)}, \quad (5)$$

and vanishes when $V_x = -f$, i.e. $\frac{gH_0}{fL^2} = f$. Note that in the opposite case PV is necessarily singular at the free streamlines. This however does not pose a problem, unless one uses PV as a dynamical variable which is not the case below.

The general criteria of linear stability of the rotating shallow water flows were established in the classical paper by Ripa [Rip83] : the flow is stable with respect to infinitesimal perturbations if there exists a value of the parameter α such that simultaneously $[V(x) - \alpha] \partial_x q(x) \geq 0$ and $[V(x) - \alpha]^2 \leq gH(x)$ for all x . It is easy to see that Ripa's criteria are not satisfied for the the flow (4). The first criterion can be written as :

$$(-\frac{gH_0}{fL^2} + f) \frac{4}{H_0 L^2 (1 - (x/L)^2)^2} [-\alpha x - \frac{gH_0}{fL^2} x^2] \geq 0, \quad (6)$$

and can be verified only if $\alpha = 0$ and $\frac{gH_0}{f^2 L^2} \geq 1$. The second criterion in the case $\alpha = 0$ becomes :

$$0 \leq 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{2}{f^2 L^4} \frac{gH_0}{x^2}, \quad (7)$$

and is never verified on the interval : $|x| \in]L/(1 + 2gH_0/(f^2 L^2))^{\frac{1}{2}}, L]$.

We start with a linear stability analysis of the solution (4) by benchmarking the results of Griffiths *et al.* [GKS82] and Paldor & Ghil [PG90] which were obtained by the *ad hoc* zero-PV method, and then extend them to the non-zero-PV case, where only the long-wave limit was previously approached ([GKS82]) .

We consider small perturbations of the jet (4) :

$$h = H + h', \quad u = u', \quad v = V + v', \quad (8)$$

and nondimensionalize the problem with a horizontal length scale L (the half width of the unperturbed jet), a vertical length scale H_0 (the double of the maximum depth of the unperturbed jet), the inverse of the inertial frequency as the time-scale, and the velocity

scale fL . The nondimensionalized equations are :

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{v}\tilde{u}_y - \tilde{v} = -\text{Bu} \tilde{h}_x \quad (9)$$

$$\tilde{v}_t + \tilde{u}\tilde{v}_x + \tilde{v}\tilde{v}_y + \tilde{u} = -\text{Bu} \tilde{h}_y \quad (10)$$

$$\tilde{h}_t + (\tilde{h}\tilde{u})_x + (\tilde{h}\tilde{v})_y = 0 \quad (11)$$

where $\text{Bu} = \frac{gH_0}{f^2L^2}$ is the Burger number, the only nondimensional parameter governing the problem, and nondimensional quantities are denoted by a tilde. The background jet is given by :

$$\begin{cases} \tilde{H}(\tilde{x}) &= \frac{1}{2}(1 - \tilde{x}^2), \\ \tilde{V}(\tilde{x}) &= -\text{Bu} \tilde{x}. \end{cases} \quad (12)$$

Thus, $\text{Bu} = 1$ corresponds to the zero-PV jet. We will omit the tildes and the primes in what follows when this does not lead to confusion. Looking for solutions of the nondimensionalized linearised equations in the form $(u, v, h) = (u_0(x), v_0(x), h_0(x)) e^{i(ky - \omega t)}$, we get :

$$i(kV(x) - \omega)u_0 - v_0 + \text{Bu}h_x = 0, \quad (13)$$

$$i(kV(x) - \omega)v_0 + (1 + V(x)_x)u_0 + \text{Bu}ik h_0 = 0, \quad (14)$$

$$i(kV(x) - \omega)h_0 + (u_0H(x))_x + ikH(x)v_0 = 0. \quad (15)$$

This is a free boundary eigenproblem for eigenvalues ω and eigenvectors (u_0, v_0, h_0) . Complex eigenvalues correspond to instabilities.

The boundary conditions are :

$$H(x) + h = 0, \quad \text{and} \quad \frac{dL_{\pm}}{dt} = u \quad \text{at} \quad x = L_{\pm} = \pm 1 + \lambda_{\pm}, \quad (16)$$

where ± 1 are the locations of the free streamlines of the balanced jet and $\lambda_{\pm}(y, t)$ are the perturbations of the free streamlines. Physically, they correspond to the conditions that the fluid terminates at the boundaries which are the material lines. The linearised boundary conditions give :

1. the relation between the perturbation of the positions of the free streamlines and the value of the height perturbation :

$$\lambda_{\pm} = - \left. \frac{h_0}{H_x} \right|_{x=\pm 1}, \quad (17)$$

2. the continuity equation (15c) evaluated at $x = \pm 1$.

Hence, the only constraint to impose on the solutions of (13-14-15) is regularity of (u_0, v_0, h_0) at $x = \pm 1$.

The eigenproblem (13-14-15) is solved with the help of the collocation method, which has an advantage of allowing to treat any potential vorticity profile for the basic flow and perturbations with arbitrary wavenumber, while in the previous works Griffiths *et al.* [GKS82] dealt only with small wavenumbers and Paldor & Ghil [PG90] analysed only the zero-PV case. The disadvantage of the method is that it is not specially designed for treating singular eigenproblems. Indeed, the eigenproblem (13-14-15) has a well known critical layer singularity occurring whenever the real part of the eigen phase velocity of the perturbation $c = \omega/k$ equals the local flow velocity : $c = V(x)$. Singularities give

rise to the stable singular eigenmodes which form a continuous spectrum, cf e.g. [Van98] for a similar albeit simpler geophysical fluid dynamics problem with critical layers. These modes have Dirac-delta or step-function behaviour (depending on the variable) being, in fact distributions, not functions. Discrete counterparts of such singular eigenmodes will be retrieved by the straightforward collocation method. They may be, nevertheless, easily identified by their singular profiles and the fact that they accumulate with increasing resolution (see below). As the non-dimensional velocity of the flow (12) takes values between $-Bu$ and $+Bu$, critical levels should appear in the interval $c \in [-Bu, Bu]$. A filtering procedure based on gradient limiters was applied to eliminate these pseudo-modes.

It should be noted that the collocation method was already applied by Le Sommer, Scherer & Zeitlin [LSSZ06] to the problem of stability of the coupled density fronts on the equatorial tangent plane. However, a substantial simplification there was the constant, and not sheared, profile of the background velocity due to vanishing of the Coriolis force at the equator. Hence, only one critical level appeared and was easy to deal with. The results obtained below demonstrate the efficiency of the collocation method for problems with critical layers.

2.2 A reminder on the collocation method for the eigenvalue problems

In order to solve the free boundary eigenproblem (13-14-15), we use the pseudospectral collocation method [Tre00] in the form which was recently applied by Poulin & Flierl [PF03] and Le Sommer, Scherer & Zeitlin [LSSZ06]. The system (13-14-15) on the interval $-1 \leq x \leq 1$ is discretised on the irregular grid formed by the Chebyshev collocation points, which are unevenly spaced to avoid the Runge phenomenon : $x_j = \cos(j\pi/N)$, $j = 0, 1, \dots, N$. The Chebyshev differentiation matrix, which will be denoted $\mathcal{D}$, is used as discrete differentiation. The discretised version of the system (13-14-15) thus follows :

$$\begin{pmatrix} kV & -1 & Bu \mathcal{D} \\ (-1 - V_x) & kV & Bu k \\ (-H_x - H\mathcal{D}) & kH & kV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

where for convenience we use $u_{00} = iu_0$. A complete solution of (18) with the standard Matlab routine "eig" is computed in few seconds on a personal computer.

3 The results of the linear stability analysis

3.1 Benchmark of the earlier results for flows with zero potential vorticity, $Bu = 1$

We start with the analysis of the zero-PV case. The real part of the eigen phase-velocities and the imaginary part of the eigenfrequencies (growth rates) as functions of the wavenumber are presented in figure 3. The gradient-limiter filtering is applied in the upper panel of the figure in order to eliminate the pseudo- modes (discrete analogues of singular modes), which fill the band $[0, 1]$ and accumulate with increasing resolution (we present only the positive $c = Re(\omega)/k$, $Im(\omega)$ part of the graphs, the full ones are

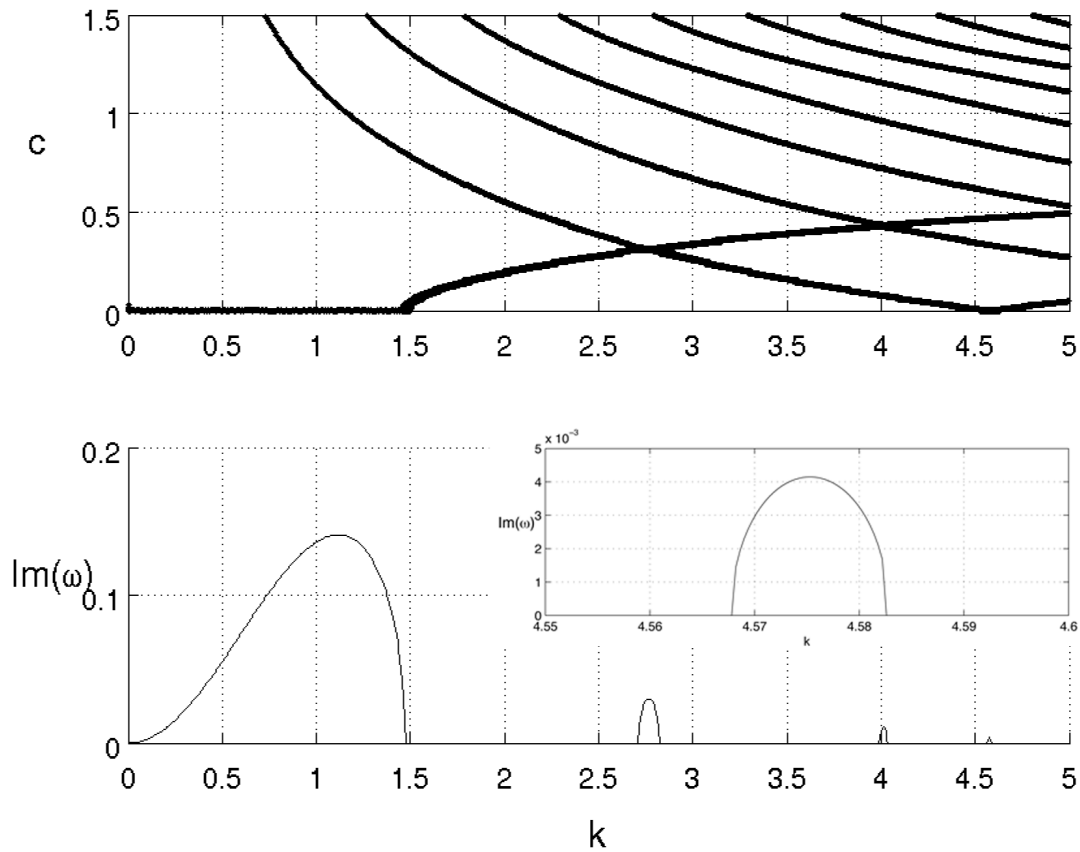


FIG. 3 – The eigenvalues of the positive real part of the phase velocity c (*upper panel*) and the growth rate (*lower panel*) as functions of k for the zero-PV flow $Bu = 1$. $N = 400$. In the $c < 1$ part of the upper panel the eigenvalues corresponding to the pseudo-modes associated with critical levels are filtered out. The instabilities in the lower panel are located where a branch of the phase speed intersects another one, or when the real part of the phase speed vanishes at the upper panel. A zoom of the instability zone at $k \approx 4.575$ is given in the inset.

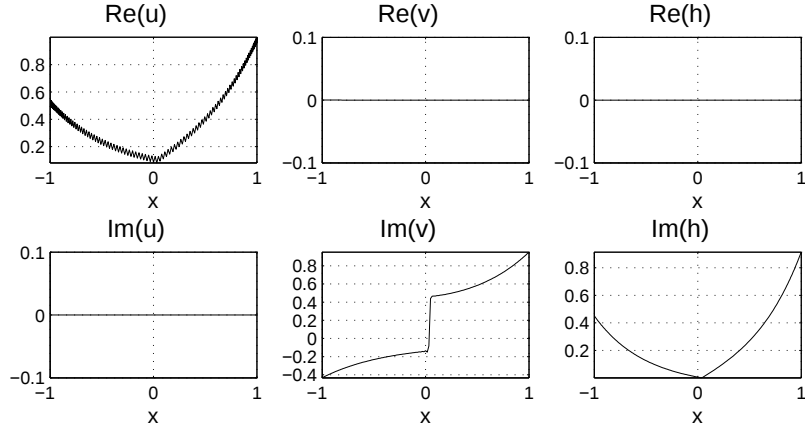


FIG. 4 – Cross-stream structure of the discrete analogue of a singular mode, $k = 1.116$, $Re(\omega) = 0.043$, $Im(\omega) = 0$, as captured by the collocation method with $N=200$.

obtained by reflexion with respect to the abscissa axis). The typical cross-stream profiles corresponding to a pseudo-mode are presented in figure 4 : their main feature is the jump in the along-jet velocity v .

As usual, the instabilities appear when two branches of the dispersion relation for the normal modes intersect, or when the real part of the phase velocity of a mode vanishes [e.g. Sak89, HY87]. The highest growth-rates are found in the small wavenumber range, however, smaller instability zones exist at higher wavenumbers. We present the cross-stream structure of the most unstable mode in figure 5, and the structure of the associated perturbations of both free streamlines, as calculated from the boundary conditions (17), in figure 6. It should be noted that the border streamlines have a significant phase shift, which will be important in the nonlinear evolution of the instability (see below). It is also worth mentioning that, as we checked (not shown), for all instability zones of figure 3, the instability wave-pattern is of the type of figure 6, i.e. it is a combination of meandering and varicosity. The structure of the most unstable mode in the second zone of instability is presented in the left panel of figure 7. A zoom of the rightmost instability zone at $k \approx 4.575$ in figure 3 is given in the inset in figure 3 and the structure of the corresponding mode is given in the right panel of figure 7. The characteristic features of the higher instability modes are high gradients of the height and velocity fields concentrated in the vicinity of the free streamlines (the unstable modes in the third zone $k \approx 4.01$ have the same structure, not shown).

3.2 Extension to flows with non-zero potential vorticity, $Bu \neq 1$

As soon as $Bu \neq 1$ the PV becomes non-zero and non-constant. Griffiths *et al.* Griffiths *et al.* [GKS82] gave general arguments for existence of the unstable modes for arbitrary PV. Below we confirm and quantify this prediction. By repeating the stability analysis for a series of values of the Burger number we got a full stability diagram in the $Bu - k$ plane. A part of it corresponding to realistic Burger numbers is presented in the left panel of the figure 8. Several instability zones are clearly visible. The zone with highest growth rates is the one with lowest wavenumbers. It is the one that was studied in detail by Griffiths *et al.* [GKS82]. Note that when Bu increases, the maximum growth rate increases and the

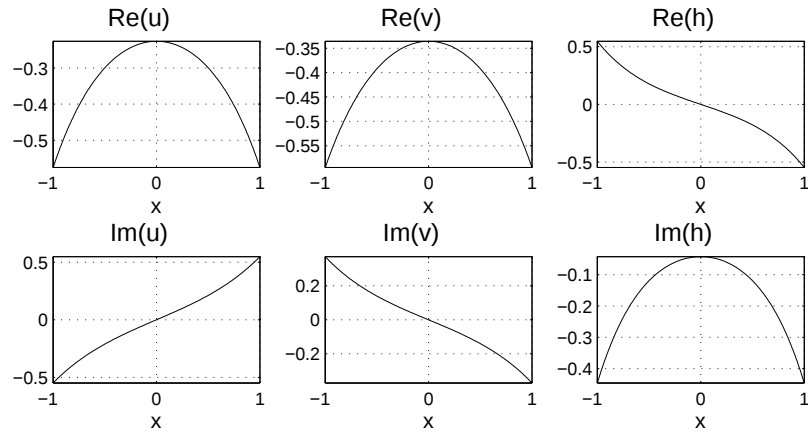


FIG. 5 – Cross-stream structure of the most unstable mode for the zero potential vorticity flow ($Bu = 1$) as calculated by the collocation method $k = 1.116$, $Re(\omega) = 0$, $Im(\omega) = 0.14$, $N = 200$.

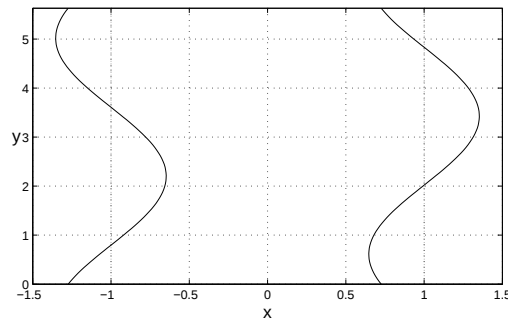


FIG. 6 – The form of the free streamlines of the most unstable mode for the zero-PV flow $Bu = 1$, $k = 1.116$ as derived from the boundary conditions (16), (17). The steady state corresponds to straight free streamlines at $x = \pm 1$. The amplitude of the deviation from the equilibrium position is purposely exaggerated. The two streamlines have a significant phase shift.

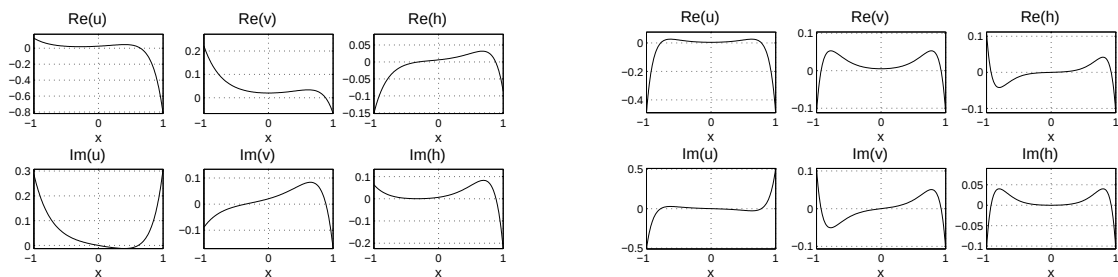


FIG. 7 – *Left panel* : Cross-stream structure of the most unstable mode in the second zone of instability ($k = 2.77$, $Re(\omega) = 0.89$, $Im(\omega) = 0.03$) for the zero-PV flow ($Bu = 1$) as calculated by the collocation method with $N=200$. *Right panel* : Cross-stream structure of the unstable mode at $k = 4.575$, $Re(\omega) = 0$, $Im(\omega) = 0.004$ for the zero-PV flow, $N = 200$.

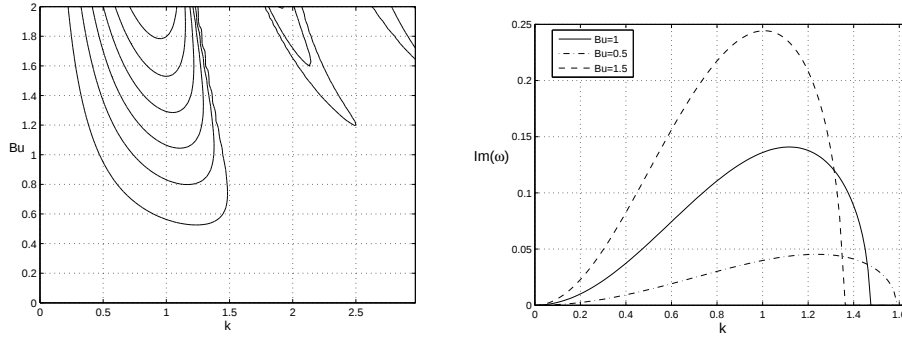


FIG. 8 – *Left panel* : Stability diagram in the $Bu - k$ plane. The isolines of $Im(\omega)$ at the values 0.05 up to 0.3 by step of 0.05 are shown. $N = 200$. *Right panel* : Growth rates in the main instability zone as functions of the wavenumber for $Bu = 0.5$, $Bu = 1$ (zero-PV flow), and $Bu = 1.5$. For all values of Bu , the growth rate at $k = 0$ vanishes. When Bu increases, the maximum growth rate increases and the wavenumber corresponding to the most unstable mode diminishes. 20 collocation points are sufficient to obtain the panel.

wavenumber corresponding to the maximum growth rate diminishes. The growth rates for different values of the Burger number as functions of the wavenumber are shown in the right panel of figure 8. The real parts of the phase velocities display a similar behaviour as in the case $Bu = 1$ (not shown).

4 Nonlinear evolution of the instability

4.1 Finite volume methods for the rotating shallow water model

Recent progress in finite-volume numerical schemes for shallow water equations allows for implementationally simple and quantitatively reliable high-resolution modelling of fully nonlinear dynamics. We use this technique for studying nonlinear evolution of the instabilities of coupled geostrophic density fronts. We apply the high resolution finite volume numerical method by Bouchut [Bou04, Bou07] which has the following properties crucial in the present context :

1. it preserves the geostrophic equilibria (i.e. the stationary states in the case of a straight front),
2. it resolves wave breaking and shock formation,
3. it allows to treat drying.

No explicit dissipation is introduced in the numerical scheme. As was shown in previous applications [BLZ04, BLZ05] energy is extremely well-preserved, the only significant energy loss events being associated with sharp gradient (shock or bore) formation [BLZ04], or with reconnection of the streamlines [barotropic Rossby wave breaking, BLZ05], which produce localized dissipation zones.

We briefly remind the main ingredients of the method. The shallow water equations are discretised in the flux-form on a regular grid within the framework of the finite-volume approach. The finite-volume scheme is then fully prescribed by the choice of the numerical

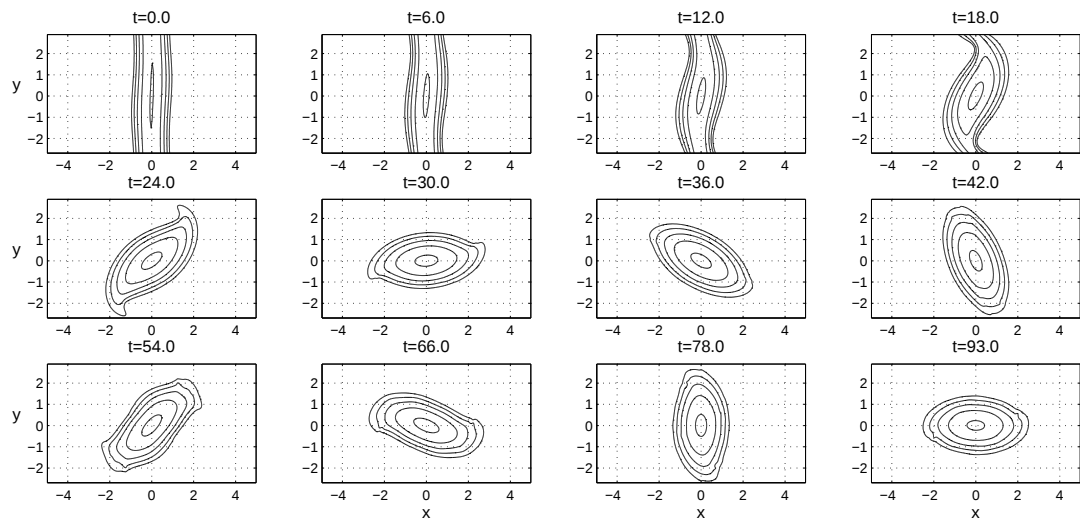


FIG. 9 – Isolines of the fluid depth in the (x, y) plane : the contours $h = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$ are shown. The initial amplitude of the perturbation is 10% of the maximum depth of the balanced jet. While the instability develops, the jet breaks into a series of anticyclonic rotating lenses/vortices of elliptic shape. The calculation domain is periodic in the y direction.

flux function and the treatment of the remaining source terms associated with the Coriolis force. At each time-step and in each direction, the Coriolis terms are reformulated following the apparent topography method first introduced by Bouchut, Le Sommer & Zeitlin [BLZ04]. The numerical flux function is associated with a relaxation solver adapted to treat topography as proposed by Audusse *et al* [ABB⁺04]. This choice of the numerical flux function ensures the ability of the numerical procedure to compute solutions of the shallow water equations even in the case of terminating depth. The advantage of the scheme is that correct Rankine-Hugoniot conditions guaranteeing the decrease of energy across the shocks are automatically satisfied by the method, i.e. numerical viscosity is indeed a dissipation. The numerical simulations presented hereafter were obtained with typical resolution $0.05 L$ and last for a couple of hours on a personal computer.

4.2 Nonlinear evolution of the most unstable mode

We simulate the fully nonlinear evolution of the instability corresponding to the most unstable mode, with $k = 1.116$ at $Bu = 1$ (cf figure 5). The boundary conditions are periodic in the meridional direction, with period $2\pi/k$ (the results do not change if the period is changed, see below). The numerical method allows for drying, so we compute the solution on the $[-5, 5]$ interval in the zonal direction with sponge boundary conditions. The perturbation of amplitude about 10% of the maximum height of the unperturbed configuration was superimposed on the background balanced jet. The evolution of the height field in the (x, y) plane is shown in figure 9. After only a few inertial periods, the instability develops. The jet is pinched, at the same time the height of the fluid diminishes and becomes very small at pinch locations. A reconnection of the streamlines at this location follows (in other words the unstable boundary waves of figure 6 break), and a series of co-rotating anticyclonic vortices of elliptic shape, weakly connected by

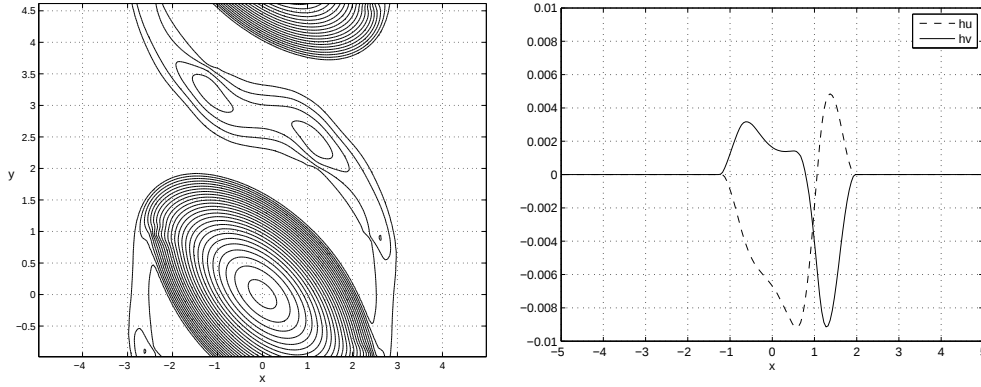


FIG. 10 – *Left panel* : A zoom of the isolines of the fluid depth in the (x, y) plane at $t = 36$ corresponding to the simulation of figure 9 : the contours $h = 0.01$ to 0.5 at the interval 0.02 are shown. Filaments of fluid connect the two neighbouring vortices. *Right panel* : Mass flux along the x -axis across the section $y = 2.5$ at $t = 36$.

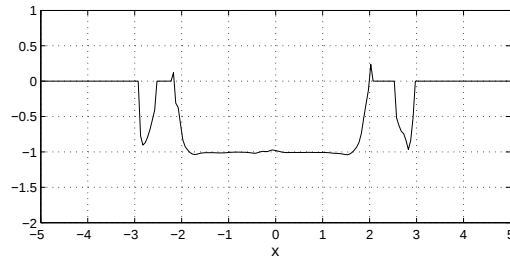


FIG. 11 – Section across $y = 0.1$ of the relative vorticity at $t = 36$, in figure 10. We present the relative vorticity of the regions with $h \geq 0.01$. For shallower h the discretization errors strongly affect the vorticity which is calculated using finite differences.

the zones carrying a very small amount of fluid, results. A late stage of the evolution is illustrated in the left panel of figure 10 where it is seen that the vortices are in fact interconnected by the filaments of fluid of small depth. The mass flux across the filaments at the same moment of time is shown in the right panel of figure 10. The amplitude of the mass flux is negligible, and thus the overall flow along initial density fronts is practically disrupted. The vortices almost do not interact with each other, apart from the periods of time when they are aligned, with the major axis oriented along the direction of the initial jet. However, even when the major axes are aligned we observe the values of the mass flux an order of magnitude smaller than in the initial jet, though an order of magnitude greater than the values presented in the right panel of figure 10.

A section of the relative vorticity across a vortex is shown in figure 11. The relative vorticity in the vortex core is constant and equal to -1 . Outside the core, two zones of negative vorticity are clearly related to the filaments connecting the vortices, cf the left panel of figure 10.

The period of rotation of the vortices is about $T = 60f^{-1}$. During the whole simulation one and a third of a full turn is accomplished. The rotating elliptic vortices resemble the rodons, the exact isolated elliptic lens solutions with paraboloidal profile of h [Rip87]. We can make a comparison with the period of rotation of a rodon with the same relative vorticity (-1) and the same eccentricity (≈ 2.174). Such a rodon has a period of about $7.6f^{-1}$

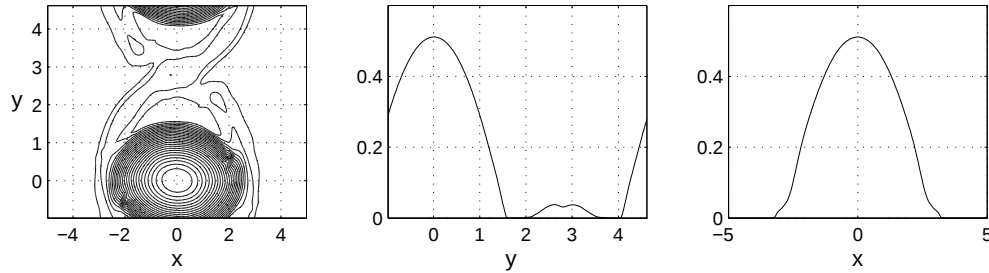


FIG. 12 – *Left panel* : A snapshot of the fluid depth distribution at $t = 93$, with the same isolines as in figure 10. *Center panel* : Along-stream section at $x = 0$. *Right panel* : Across-stream section at $y = 0$. Both cross-sections are accurately fitted by the parabolic profiles for the main vortex part.

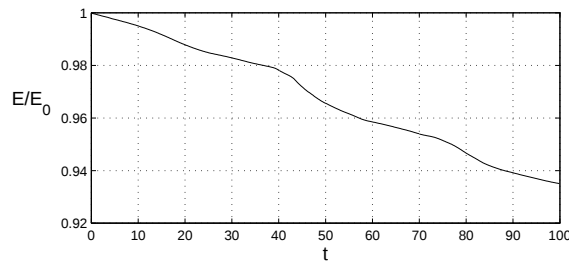


FIG. 13 – Time evolution of the total energy, normalized by the initial total energy for the evolution of the main instability. The events of stronger decrease correspond to the times at which each vortex interacts with its neighbours when their major axes are aligned.

or $36f^{-1}$ (there exist two families of the rodon solutions), which gives substantially faster rotation rates. The explanation of the difference is apparently related to the collective and transient character of the vortex structures resulting from our simulation, with rodon-like vortices connected by the rolling up fluid filaments. The detailed structure of the vortex pattern at the late stage of the evolution is presented in figure 12. It is seen that the main vortex is indeed rodon-like with parabolic sections along the main axes, but the amount of fluid in (reconnecting) filaments is still non-negligible.

The time evolution of the total energy of the system is presented in figure 13. We should remind that in the numerical scheme we are using, the numerical dissipation acts only in the zones of high gradients (shocks). The slow decrease of energy during the whole simulation is explained by the presence of the drying zones acting as effective shocks, on the one hand, and by the fact that it is easy to generate micro shocks ("shocklets") in the shallow regions of the fluid close to drying. The resulting energy loss is non negligible during the simulation, but stays sufficiently small (less than 10%). At times $t = 43$ to 50 and $t = 73$ to 81 , events of stronger dissipation take place at times when vortices enter in contact (i.e. when their major axes are aligned). The perturbation created at the periphery of the vortex due to this interaction propagates then along the vortex boundary forming shocklets, and dissipates. A snapshot of the spatial distribution of the dissipation rate at the moment of contact between the neighbouring vortices is presented in the left panel of figure 14. Dissipation due to shocklets is presented in the right panel of figure 14 and shows that the dissipation rate is $\sim 50\%$ smaller than the dissipation rate due to reconnection of filaments, but is of the same order of magnitude.

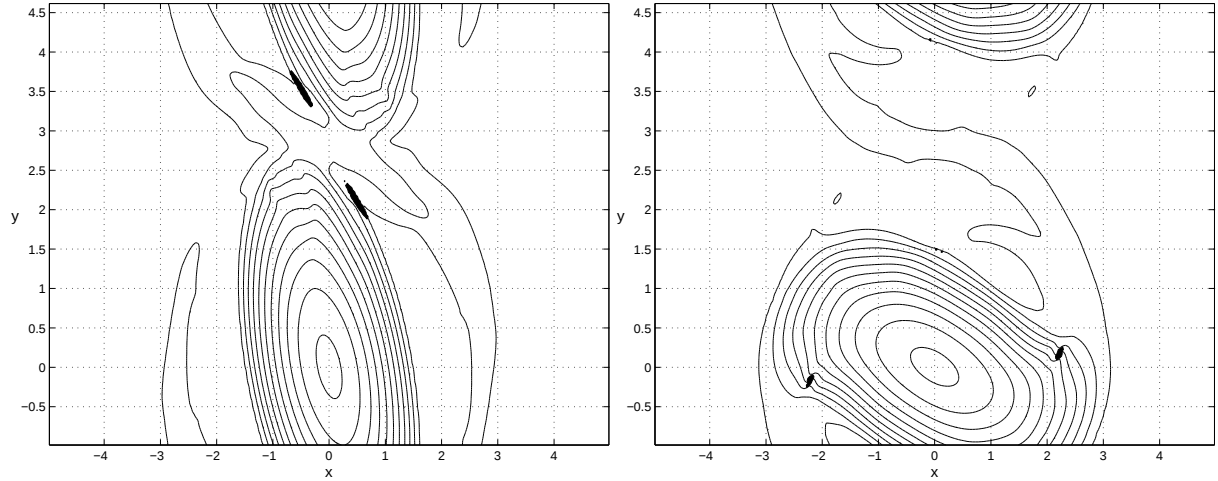


FIG. 14 – Spatial distribution of the dissipation rate superimposed on the isolines of the fluid depth (from $h=0.01$ up by step of 0.05). *Left panel* : At $t = 43$, dissipation is due to reconnections, regions where values of the dissipation rate are between 0.01 and 0.0144 (the maximum value) are shaded. *Right panel* : At $t = 66$, dissipation is due to shock dissipation, regions where values of the dissipation rate are between 0.004 and 0.0047 (the maximum value) are shaded. Dissipation rate is calculated as the deviation from the energy balance in each cell per time-step, in nondimensional units.

We performed similar experiments with domains of computation of different sizes in the meridional direction, and found that previous results are robust : the most unstable mode from the first instability zone, satisfying the periodicity condition, develops in a similar way.

At $Bu \neq 1$, the process is qualitatively similar. We performed simulations with higher values of the maximum growth rate ($Bu > 1$) : the instability develops faster and the rotation rate of the vortices is faster, but there are no significant departures from the described $Bu = 1$ scenario. Simulations with lower values of the maximum growth rate (i.e. with $Bu < 1$) lead to a similar development of the instability as in the $Bu = 1$ case but with a longer time scale and with a slower rotation rate of the vortices.

5 Nonlinear evolution of the modes from the second instability zone

We then simulated the nonlinear stage of the instability corresponding to higher-wavenumber modes, like the mode presented in the left panel of figure 7. It should be emphasized that this mode, as well as even higher- k unstable modes, cf. right panel of figure 7, has high gradients close to the free streamlines, i.e. at the zones of vanishing depth, and thus is likely to be damped due to dissipation (as already said the micro shocks, and hence dissipation, are expected in the zone close to the free streamlines). Indeed, we observed a rapid energy decay at the initial stage of the simulation, see figure 16 below, and had to start with considerable amplitudes of the perturbation ($\approx .2$ to be compared to $\approx .1$ in the simulations of the most unstable mode above), in order to observe noticeable effects. We present in figure 15 the nonlinear evolution of the mode of the left panel of figure 7 superimposed on the balanced flow. The boundary conditions are

periodic in the meridional direction, with period $2\pi/2.77$. One can see a drastic difference with the previous case of the main instability mode. No spatio-temporal reorganisation of the mean flow takes place due to the rapid dissipative saturation of the instability. The dissymmetry of the unstable mode with its high gradients at the right boundary leads to almost complete disappearance of the perturbation at the right boundary, while at the left one it survives at the initial level. The energy loss in the simulations presented in figure 16 is much more rapid than in the case of the main instability mode, cf figure 13, happening mainly during the first 10 inertial periods, which explains why the growth is almost immediately arrested. Figure 17 shows the spatial distribution of the dissipation for the initial stages of the evolution of the instability from the second zone. The dissipation is concentrated in the rightmost and leftmost zones of high gradients of the unstable mode with pronounced left-right dissymmetry, which explains the eventual disappearance of the perturbation at the right boundary. Note that practically all of the dissipation takes place in the highlighted regions. Similar picture is expected for the unstable modes from the third and fourth instability zones due to the similar spatial structure of the modes.

Thus, shorter-wavelength modes from the second, third and fourth zones of instability, if excited, are unable to change the structure of the background flow in contradistinction with the main instability mode. This means that in the context of long-time nonlinear evolution of the coupled fronts the only relevance of these modes is to provide a dissipative sink of energy.

5 Summary and conclusions

We thus revisited the linear stability of the geostrophically balanced coupled density fronts in the reduced gravity rotating shallow water model and extended the previously known results to the case of non zero-PV. The flow does not satisfy the stability criteria by Ripa [Rip83], and we have shown that at any Burger number it is unstable to perturbations in finite intervals of wavenumbers starting from zero, which are intertwined with stability zones. The wavenumber associated to the maximum growth rate of the instability decreases as the Burger number increases, while the maximum growth rate itself increases. The detailed structure of the unstable modes, important for understanding their nonlinear evolution, was established. At the same time we demonstrated the capability of the collocation method to efficiently treat complicated configurations with continuum of critical levels.

The nonlinear evolution of the unstable modes was then investigated with the help of high-resolution numerical simulations, allowing to resolve the fine-structure details of the dynamics. The main instability was shown to develop by pinching the fronts and forming a row of clockwise rotating elliptic vortices with a parabolic form of the interface similar to the (isolated) exact rodon solutions. The vortices are interacting weakly through the fluid filaments connecting them. Their interaction is more pronounced when the major axes of the vortices are aligned in the direction of the initial jet, leading to enhanced dissipation in the inter-vortex regions. The energy continues to slowly decrease even after a hundred of inertial periods meaning that the relaxation towards the (still unknown) adjusted state is very slow. It should be noted that formation of a sequence of elliptic vortices during nonlinear evolution of zero-PV circular jet was reported in the experiments of Griffiths *et al.* [GKS82]. Yet, the high-resolution numerical simulations allow to add quantitative and qualitative details, like e.g. measures of fluxes, of vorticity, or position of the enhanced

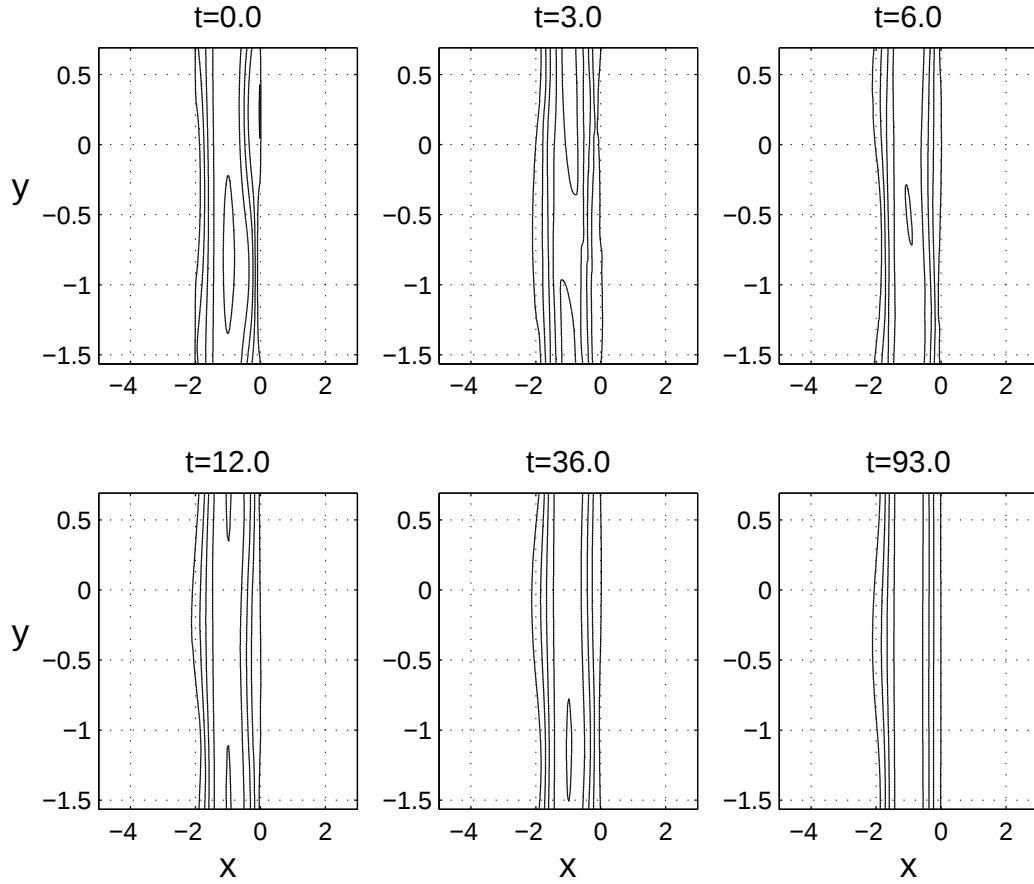


FIG. 15 – Isolines of the fluid depth in the (x, y) plane for nonlinear evolution of the instability from the second zone : the contours $h = [0.01, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$ are shown. The initial amplitude of the perturbation is 20% of the maximum depth of the balanced jet. The perturbation is wiped out by dissipation at the right free boundary, where the initial unstable mode had the strongest gradients, cf left panel of 7. The growth is saturated due to the dissipation at the left boundary, leading to a dissymmetric pattern yet close to the initial configuration without significant changes of the mass flux across the flow, unlike the case of the most unstable mode. The calculation domain is periodic in the y direction.

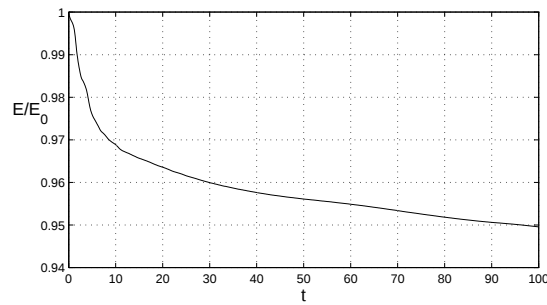


FIG. 16 – Time evolution of the total energy for the instability from the second zone, normalized by the initial total energy. The most significant energy loss takes place at first 10 inertial periods.

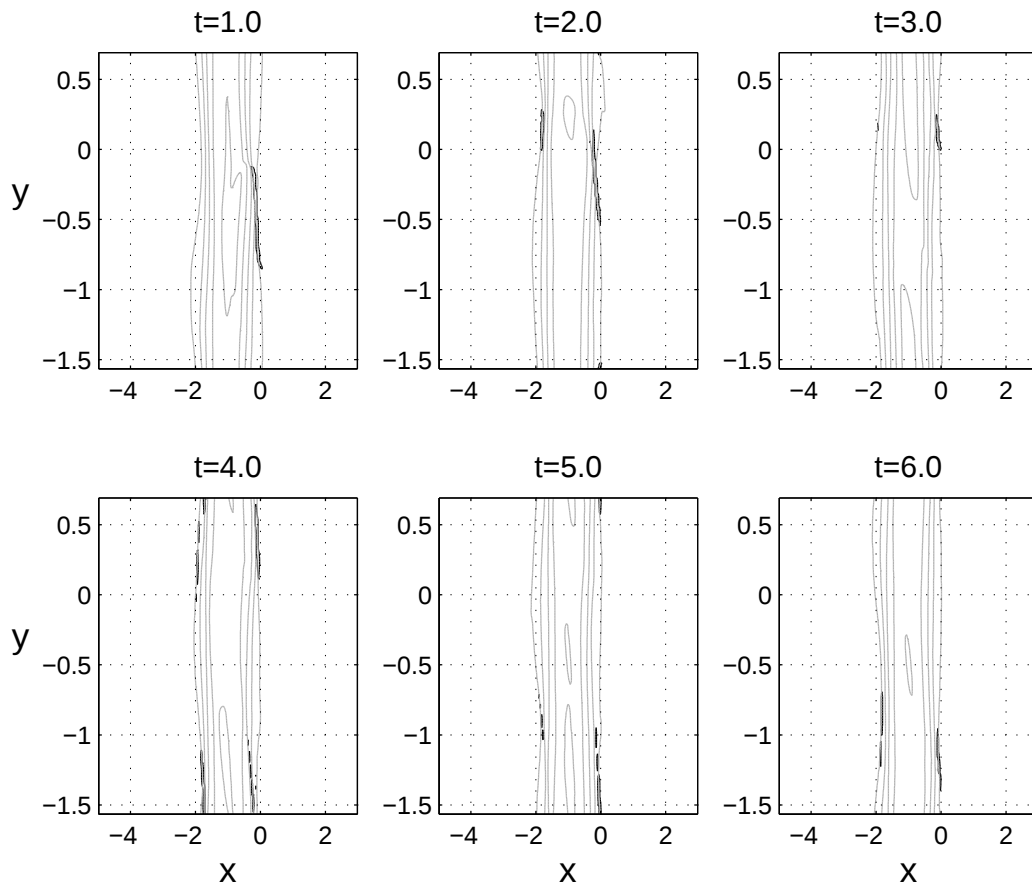


FIG. 17 – Spatial distribution of the dissipation rate (black) superimposed onto the isolines of the fluid depth (gray) for the initial stage of the simulation of figure 15. Zones of the dissipation rate exceeding 6% of its maximum value are shown.

mixing zones.

The second-zone instabilities were shown to be subject to the dissipative damping at the initial stages of the evolution due to the specific spatial structure of the corresponding modes with high gradients concentrated in the outcropping regions. They cannot therefore reorganize the flow, unlike the main unstable mode.

We also provide evidence (see Appendix), that although the structure of the main unstable mode is sensible to the profile of the mean shear flow, the growth rates and position of the main instability zone on the wavenumber axis, as well as nonlinear evolution of the instability are not. This result is consistent with the general analysis of Griffiths *et al.* [GKS82].

Finally, it should be mentioned that linear stability results for zero-PV configurations in the two-layer rotating shallow water model were obtained by Paldor & Ghil [PG90]. In the most realistic in the oceanic context case of thick upper (lower) layer for outcropping (incropping) fronts the instability zones and growth rates are close to the one-layer ones discussed above. Significant differences appear, however, at relatively thin second layers with appearance of short-wave instabilities having the growth rates higher than the "main" long-wave instability. They are presumably Kelvin-Helmholtz (KH) like, and their presence may considerably change the nonlinear evolution scenario. It should be stressed that although it is relatively easy to analyse linear stability by the collocation method in this case, the nonlinear simulations in the presence of KH-like instabilities do pose a problem because, as is well known, the two-layer shallow water equations change type (hyperbolic to elliptic, cf e.g. [Zei07]). We plan to give a thorough analysis of the two-layer case elsewhere.

Appendix A. A résumé of the linear and nonlinear analysis of coupled fronts with smoothened outcropping

Following a suggestion of an anonymous referee, we present below a brief account of linear and nonlinear analysis of a configuration where the free boundaries are approached at zero slope of the free surface, to be compared with finite-slope outcropping fronts. The height and velocity profiles in nondimensional terms are chosen as follows in the interval $(-1, 1)$:

$$\begin{cases} \tilde{H}(\tilde{x}) &= \frac{1}{2} (1 + \cos \pi \tilde{x}), \\ \tilde{V}(\tilde{x}) &= -\text{Bu} \frac{\pi}{2} \sin \pi \tilde{x}, \end{cases} \quad (19)$$

and are both zero outside this interval.

As is easy to see, this profile is not stable according to the Ripa's criterion. The linear stability analysis of this configuration by the collocation method along the lines of the main text above gives the instability diagram for the most unstable modes presented in figure 18. The typical shear was purposely taken to be the same as for the parabolic flow at zero-PV, which corresponds to $\text{Bu} = 2/\pi$ in (19). Although the quantitative details are somewhat different, the resemblance with the main instability zone for the parabolic jet is striking. The structure of the most unstable mode presented in figure 19 is, unsurprisingly, different from that for the parabolic profile. It has a more complicated structure with multiple extrema which complicates the filtering of the pseudo-modes. However, if this mode is superimposed onto the basic flow (19), the resulting nonlinear evolution displayed in figure 20 is qualitatively and quantitatively close to the one presented in figure 9. This

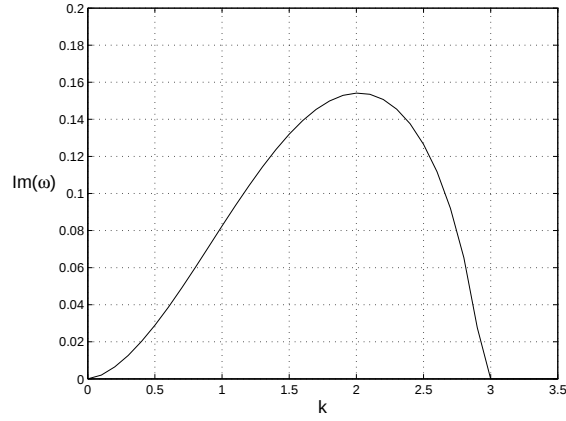


FIG. 18 – The main instability zone for the configuration (19) as obtained by the collocation method. $Re(\omega) = 0$ throughout the zone.

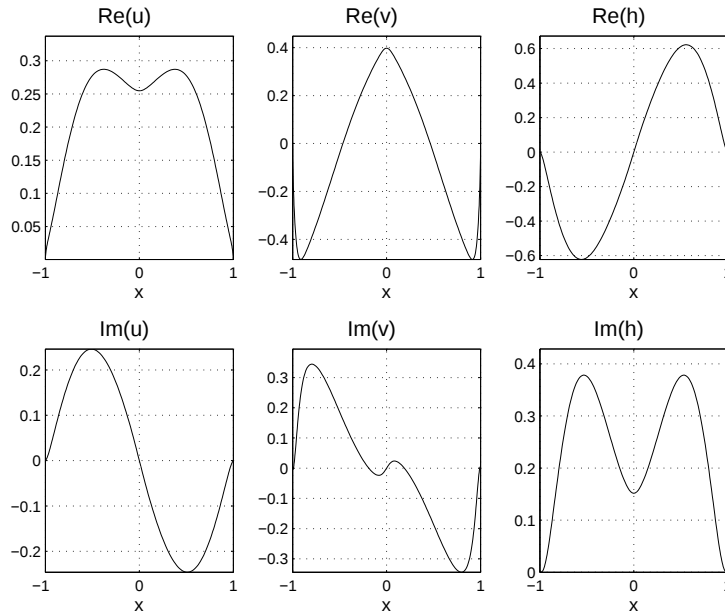


FIG. 19 – The structure of the most unstable mode for the configuration (19) with zero-PV as obtained by the collocation method.

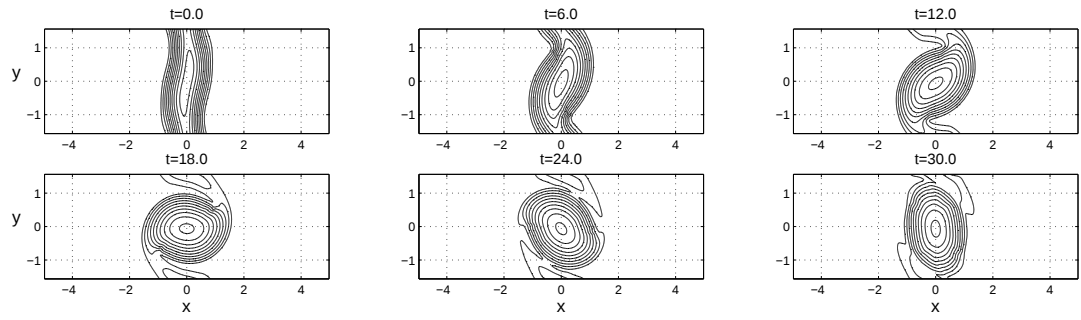


FIG. 20 – The nonlinear evolution of the configuration (19) with zero-PV perturbed by the mode of Fig. 19

indicates that nonlinear evolution of the main instability with its typical reorganisation of the flow into a system of corotating elliptic vortices is robust and not sensitive to the details of the mean flow profile, provided the typical shear is the same.

4.3 Conclusion

Les ondes piégées par les fronts de densité géostrophiques couplés sont responsables d'une instabilité qui se manifeste par la croissance des ondes piégées amenant les fronts de densité à se reconnecter pour former une série de tourbillons quasiment indépendants. Ces tourbillons ont des caractéristiques communes avec les rodons, notamment leur profil parabolique en profondeur et linéaire en vitesse (voir Annexe B.1). L'état final de cet ajustement n'est pas l'état ajusté stationnaire initial auquel on avait imposé une perturbation. Le développement nonlinéaire de l'instabilité a complètement réorganisé l'écoulement, pour atteindre un état non-stationnaire bien que quasiment équilibré (dans l'annexe B.1, nous présentons plus en détail les rodons, solutions non-stationnaires équilibrées des équations nonlinéaires de l'eau peu profonde en rotation).

Chapitre 5

Ajustement géostrophique en présence d'une côte

5.1 Introduction

En présence d'une côte, un écoulement en équilibre géostrophique doit obéir à la fois à la balance entre gradient de pression et force de Coriolis et aux conditions aux bords à la côte. Pour un fluide non visqueux, la seule condition aux bords à imposer est la condition de non-pénétration du fluide dans le solide, c'est-à-dire que la vitesse normale à la côte doit s'annuler à la côte. La présence de la côte entraîne l'existence d'un type d'onde supplémentaire : les ondes de Kelvin côtières. Ces ondes sont équilibrées, elles se déplacent en gardant la côte sur leur droite dans l'hémisphère Nord (sur la gauche dans l'hémisphère Sud) et leur amplitude décroît exponentiellement en s'éloignant de la côte. On rappelle la relation de dispersion des ondes d'inertie-gravité : $\omega^2 = gH \vec{k}^2 + f^2$ (cf partie 1.2).

La relation de dispersion des ondes de Kelvin côtières est $\omega = \sqrt{gH}k$ (où H est la profondeur du fluide dans lequel se propage l'onde de Kelvin) et les relations de polarisation des ondes de Kelvin côtières sont lorsque la côte est au Sud :

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{g}{H}} h, \\ v = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

et la forme de l'onde de Kelvin adimensionnelle est :

$$(u, v, h) = \left(\sqrt{\frac{g}{H}} K((x - \sqrt{gH} t), 0, K(x - \sqrt{gH} t)) e^{\frac{-y}{\sqrt{gH}/f}} \right) \quad (5.2)$$

où K est une fonction réelle de $x - \sqrt{gH} t$. Les relations de dispersion adimensionnées des ondes d'inertie-gravité et des ondes de Kelvin côtières sont représentées sur la figure 5.1.

Les ondes de Kelvin côtières sont non dispersives, donc elles existent à toutes les fréquences et peuvent par conséquent faire le lien entre les mouvements lents et les mouvements rapides [Gil82]. Reznik & Grimshaw [RG02] ont montré que la présence de l'onde de Kelvin côtière n'empêche pas la séparation entre composante lente et rapide du mouvement. Ils ont montré qu'au premier ordre en nombre de Rossby, l'équation d'évolution de l'onde de Kelvin est l'équation d'onde simple. L'onde simple déferle en temps fini [Lig78] donc l'onde de Kelvin déferle en temps fini.

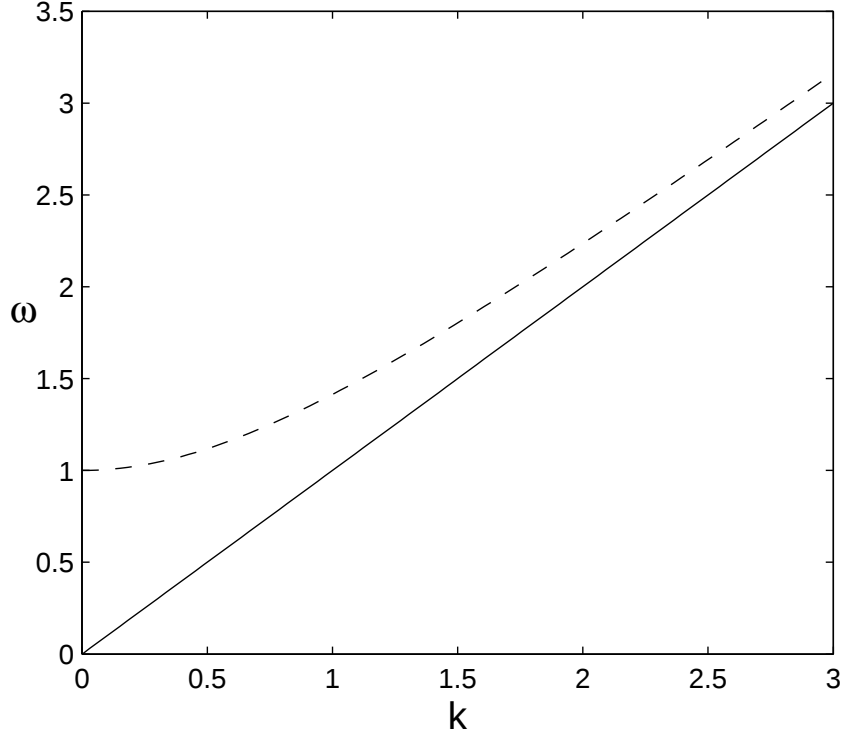


FIG. 5.1 – Relation de dispersion des ondes sur le plan f en présence d'une côte. En trait plein l'onde de Kelvin côtière et en pointillés les ondes d'inertie-gravité.

La formation de choc sera utilisée comme modèle du déferlement, en supposant que les effets dissipatifs de petite échelle sont localisés dans l'espace dans une couche d'échelle caractéristiques très inférieure aux échelles de l'écoulement. Si un choc n'est pas rectiligne, il lui est associé un saut de vorticité potentielle (cf annexe F de [LSRZ04]), c'est-à-dire qu'à un choc courbé est associé un flux non advectif de vorticité potentiel. Le Sommer, Reznik & Zeitlin [LSRZ04] ont mis en évidence que durant l'évolution nonlinéaire de l'onde de Kelvin équatoriale (dont la décroissance méridienne est en e^{-y^2}) un choc courbé se forme et crée un dépôt de vorticité potentielle correspondant à la formation d'un jet à l'arrière du choc. On peut se demander si cet effet se retrouvera pour l'onde de Kelvin côtière. Cette question est importante notamment pour connaître les effets des ondes de Kelvin sur le mélange, car les déferlements sont associés à des zones de mélange à petite échelle.

Grâce à la méthode numérique aux volumes finis présenté en partie 2.1, nous allons réaliser une simulation nonlinéaire de l'ajustement géostrophique au voisinage d'une côte. Nous pourrons avoir une vérification de la séparation prédite par Reznik & Grimshaw [RG02] entre composante lente et composante rapide du mouvement. Nous pourrons alors observer si cette séparation est effective et se poursuit sur des temps longs. D'autre part, nous pourrons observer l'évolution sur des temps longs de l'onde de Kelvin côtière générée par l'ajustement et ainsi observer son déferlement, et les conséquences de ce déferlement sur l'écoulement de base.

5.2 Ajustement géostrophique au voisinage de la côte

Nous considérons l'ajustement géostrophique nonlinéaire d'une perturbation localisée au voisinage d'une côte. L'état de base est :

$$\begin{cases} h = 1 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous considérons f^{-1} comme échelle temporelle et le rayon de déformation de Rossby $R_d = \frac{\sqrt{gh}}{f}$ comme échelle spatiale. Nous allons utiliser la perturbation de la surface libre :

$$\begin{cases} h' = 0.3 (1 - x^2 - y^2) \\ u' = 0 \\ v' = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

pour perturber l'état de base. L'état

$$\begin{cases} h = 1 + h' \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

est l'état initial de l'écoulement pour lequel nous allons réaliser une simulation numérique de l'ajustement géostrophique au voisinage d'une côte (cf présentation de la méthode dans la partie .2.1). Nous considérons une côte au Sud en $y = -2.5$ et la perturbation localisée est centrée en $y = 0$. Les conditions aux bords sont :

- condition de non pénétration du fluide dans le solide au Sud, c'est-à-dire $v = 0$ à la côte,
- conditions de type éponge, imitant l'eau libre, au Nord,
- conditions périodiques à l'Est et à l'Ouest.

Nous présentons sur la figure 5.2 et la figure 5.3 les isolignes de la surface libre (isobares) au cours de l'ajustement. Dans un premier temps, l'ajustement se déroule comme en l'absence de côte, des ondes d'inertie-gravité sont émises et au lieu de la perturbation initiale un écoulement quasi-équilibré se met en place. Vers $t = 1.5$, lorsque les ondes d'inertie-gravité atteignent la côte, celles-ci vont d'une part se réfléchir, et d'autre part générer une onde de Kelvin de bord qui va se propager en gardant la côte sur la droite du mouvement ($f > 0$). On observe ensuite la propagation de l'onde de Kelvin côtière, pendant que les ondes d'inertie-gravité continuent à se propager en s'éloignant de la perturbation initiale. A l'endroit de la perturbation initiale, se trouve un écoulement quasi-équilibré.

Nous présentons sur la figure 5.4, une image de la dissipation numérique à $t = 4.5$ superposée aux isobares. Les zones où la dissipation numérique est importante sont les zones où des chocs se forment : on voit plusieurs zones de dissipation. D'une part plusieurs zones correspondent aux endroits où le front initial d'ondes d'inertie-gravité et le front réfléchi d'ondes d'inertie-gravité se recontrent, laissant penser à une interaction entre ces deux fronts provoquant des déferlements. D'autre part, on observe une autre zone de dissipation importante au niveau de l'onde de Kelvin côtière, traduisant le déferlement de celle-ci.

Pour visualiser l'effet du déferlement de l'onde de Kelvin côtière nous choisissons, pour la clarté de la présentation, de réaliser directement la simulation de l'évolution non linéaire d'une onde de Kelvin côtière localisée.

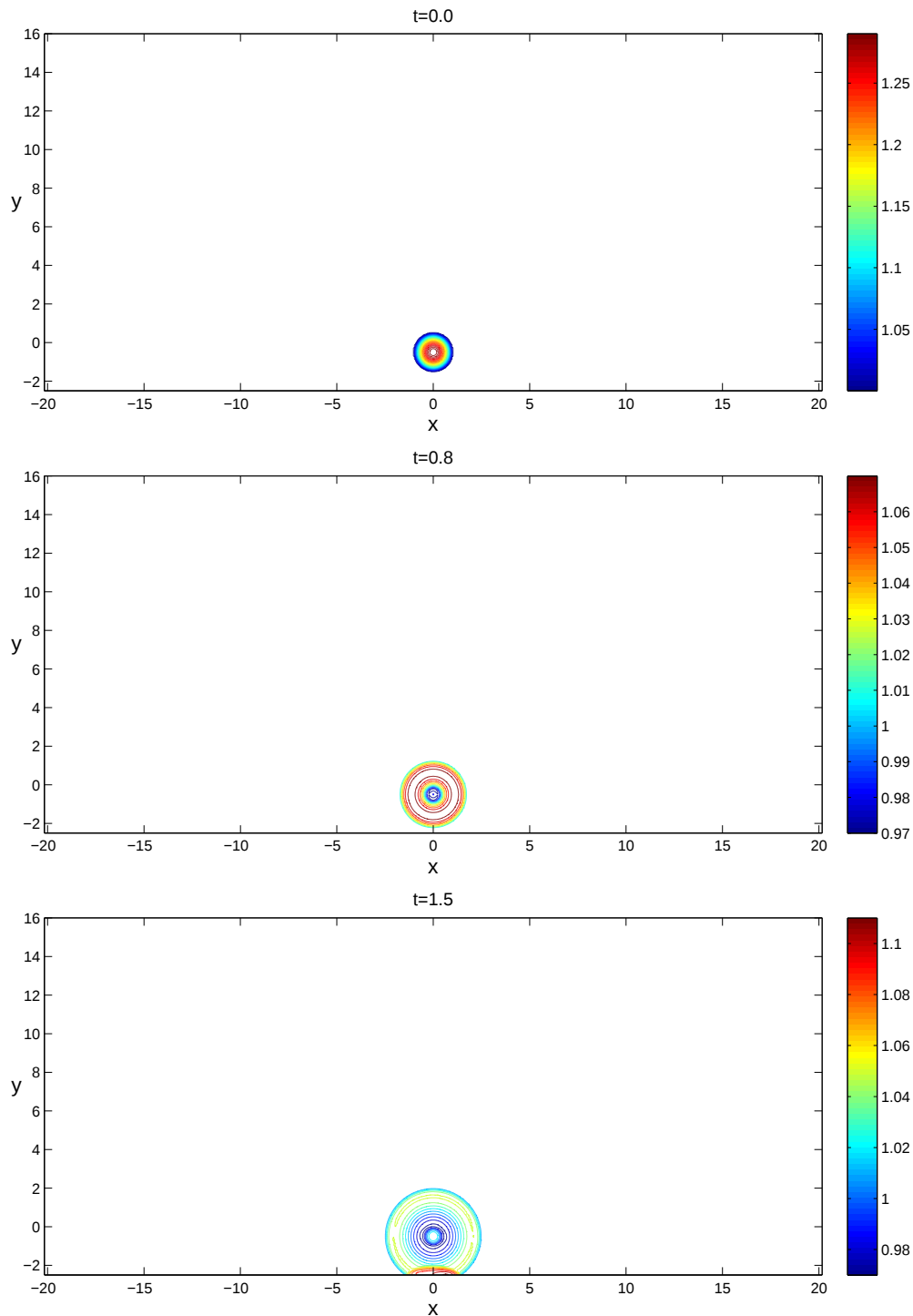


FIG. 5.2 – Ajustement géostrophique au voisinage d'une côte de la perturbation 5.4. Les isolignes de la surface libre (isobares) sont présentées de 0.001 par pas de 0.01. Les couleurs varient du bleu pour les profondeurs les plus faibles, au rouge pour les profondeurs les plus importantes.

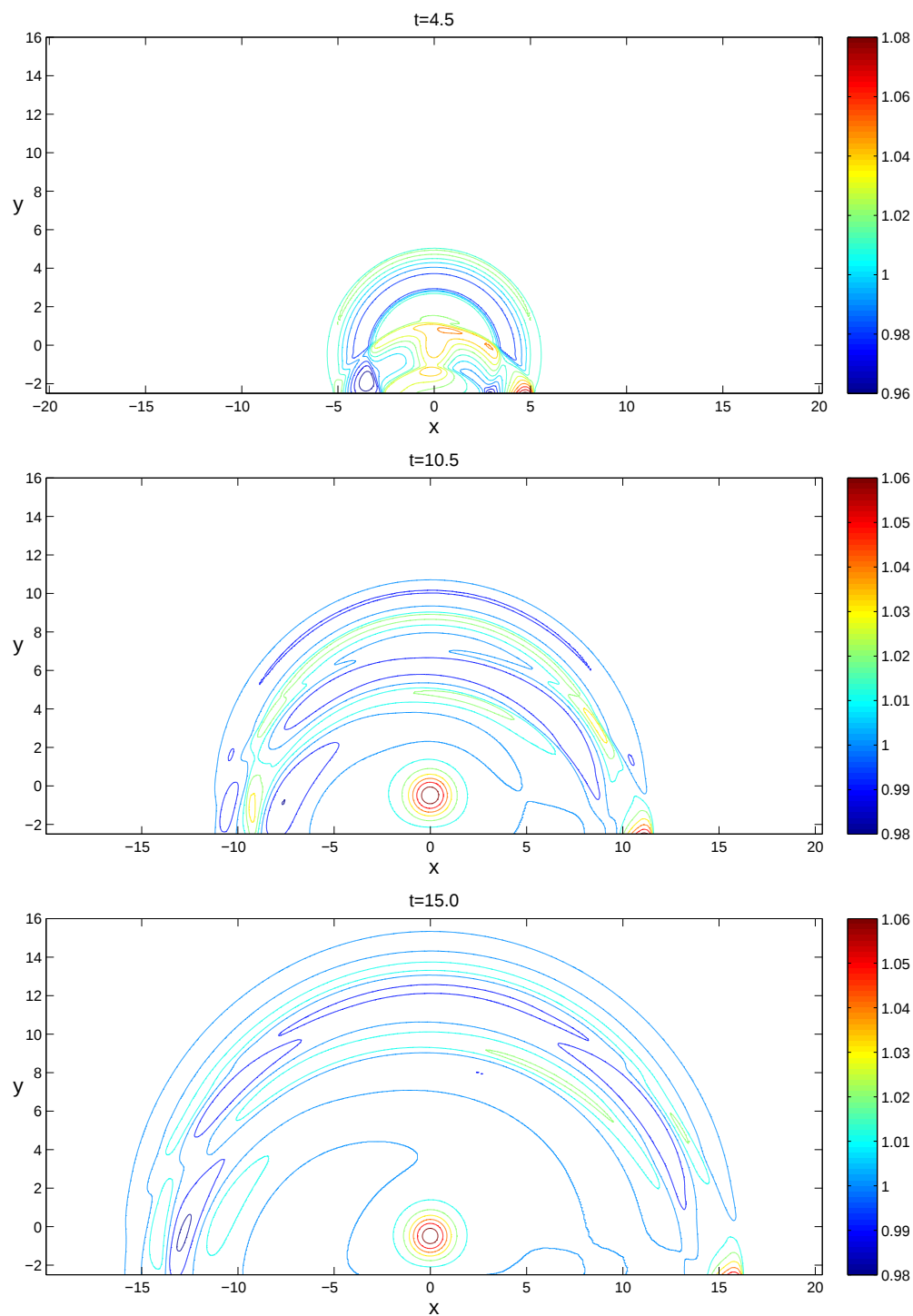


FIG. 5.3 – Suite de la figure 5.2.

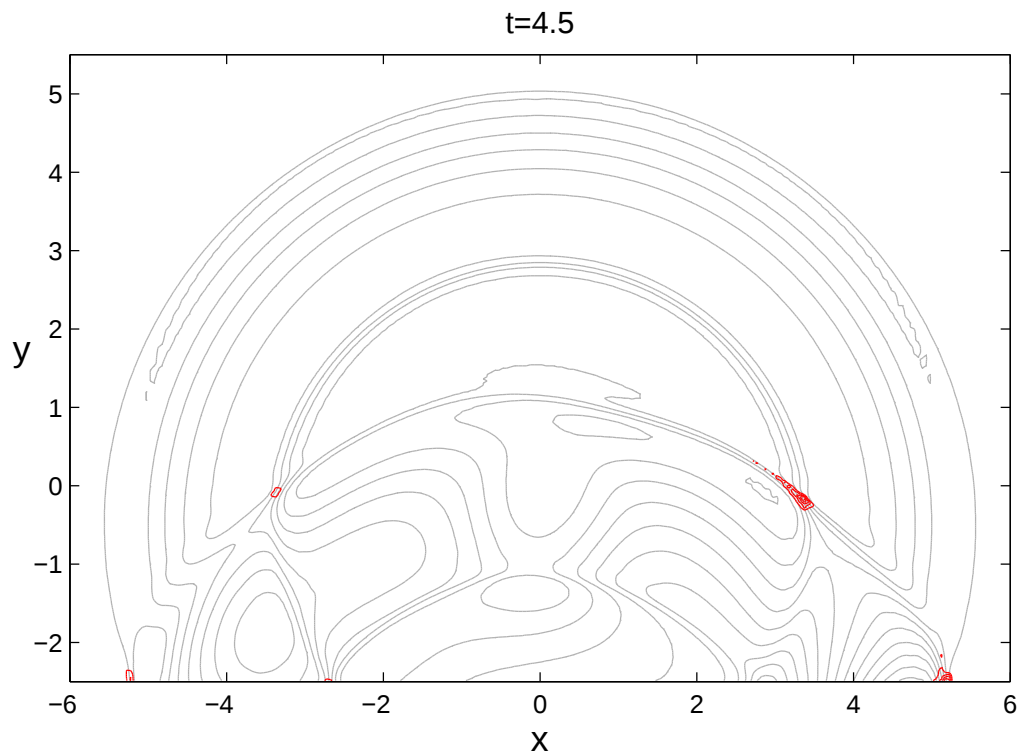


FIG. 5.4 – Dissipation (en rouge) superposée aux isobares (en gris) à l'instant $t = 4.5$, dans l'expérience de la figure 5.2. Les isolignes de dissipation à partir de 10% et par pas de 5% de la dissipation maximale sont représentées en rouge. (La dissipation est le taux de variation de l'énergie en unités adimensionnées de flux d'énergie. Aucune dissipation n'étant incluse dans le modèle, les variations d'énergie ne peuvent avoir lieu que lors de la formation de chocs.)

On considère comme état initial la perturbation

$$\begin{cases} h' = 0.3 \sin(x) e^{-y} & \text{si } x \in [0, \pi], \quad 0 : \text{ailleurs} \\ u' = h' \\ v' = 0 \end{cases}$$

à l'état de base 5.3. Cette perturbation est une surpression. On utilise les mêmes conditions aux bords que précédemment.

Sur la figure 5.5 sont présentés les isobares, qui correspondent aux isolignes de la surface libre. L'onde de Kelvin localisée se propage avec sa vitesse $\sqrt{gH}$ (ici $H = 1$). Dès $t = 3$ on voit un front commencer à se former à l'avant de l'onde de Kelvin. Ce front continue de s'intensifier, il modifie le profil zonal de l'onde de Kelvin. L'onde de Kelvin continue à se propager durant toute la simulation ($t = 30f^{-1}$). Sur la figure 5.6, la dissipation numérique est représentée, elle se trouve localisée à l'endroit du front et pointe l'existence d'un déferlement à cet endroit. Cette zone de dissipation se propage avec l'onde de Kelvin. Le front est courbé, on s'attend donc à ce que de la vorticité potentielle soit créée [BLZ05]. L'anomalie de la vorticité potentielle (vorticité potentielle totale à laquelle on a soustrait la vorticité potentielle de l'état de base 5.3) est représentée sur la figure 5.7. Notons que l'onde de Kelvin côtière ne porte pas d'anomalie de vorticité potentielle. Un dépôt de vorticité potentielle négative est visible à l'arrière du choc, par conséquent ce dépôt doit correspondre à un courant qui se forme le long de la côte et se propageant vers l'Ouest.

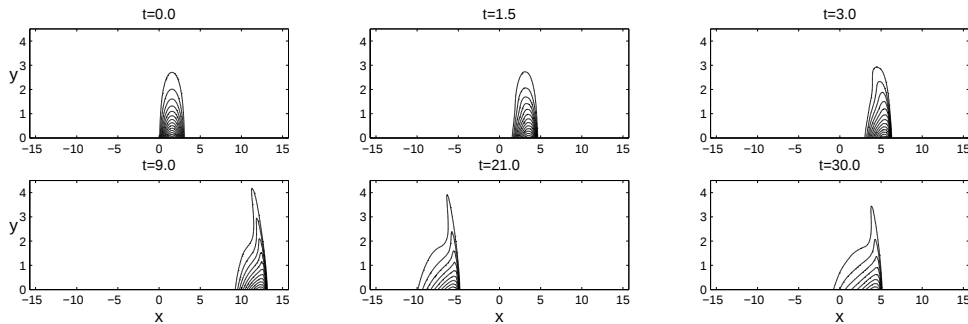


FIG. 5.5 – Déviation de la surface libre pour une onde de Kelvin de surpression. Les isobares sont représentées de à partir de 1.02 par pas de 0.02. La côte est au Sud.

On réalise l'expérience symétrique en prenant une initialisant une onde de Kelvin côtière localisée de dépression :

$$\begin{cases} h' = -0.3 \sin(x) e^{-y} & \text{si } x \in [0, \pi], \quad 0 : \text{ailleurs} \\ u' = h' \\ v' = 0 \end{cases}$$

Sur la figure 5.8, on voit l'onde de Kelvin côtière se propager à sa vitesse $\sqrt{gH}$ (ici encore $H = 1$). Dès $t = 2$ on voit qu'un front se forme à l'arrière de l'onde de Kelvin côtière localisée. Le profil de l'onde de Kelvin est modifié par le choc, mais l'onde continue de se propager durant toute la simulation ($t = 20f^{-1}$). La dissipation est représentée sur la figure 5.9. Rappelons que le modèle n'inclut aucune dissipation et que la dissipation ici correspond à la variation d'énergie au cours de la simulation, qui ne peut se produire que lors de la formation d'un choc). On voit qu'une zone de dissipation correspond à la

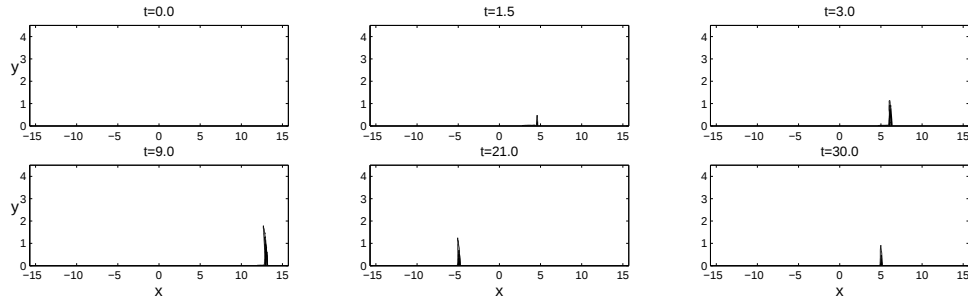


FIG. 5.6 – Dissipation numérique pour une onde de Kelvin de surpression. La méthode numérique n'inclut pas de dissipation physique, seule une dissipation numérique se produit à l'endroit où des chocs se forment. Les isolignes de dissipation à 10% et par pas de 10% de la dissipation maximale sont représentées, c'est-à-dire que ce sont les zones entourées par les isolignes sont les zones où la dissipation est significative.

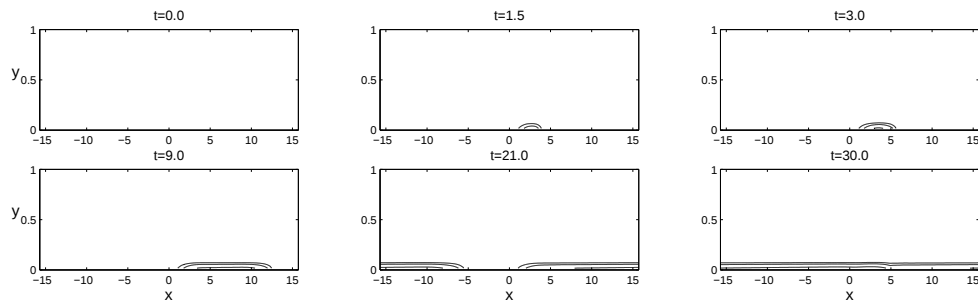


FIG. 5.7 – Anomalie de vorticité potentielle pour une onde de Kelvin de surpression. Les isolignes -0.05 , -0.1 et -0.2 sont représentées.

localisation du choc tout au long de la simulation. La figure 5.10 représente l'anomalie de vorticité potentielle au cours de la simulation. On observe, comme pour l'onde de Kelvin de surpression, un dépôt de vorticité potentielle à l'arrière du déferlement, mais cette fois l'anomalie de vorticité potentielle est positive. Ce dépôt de vorticité potentielle doit aussi correspondre à la mise en place d'un courant côtier, se propageant vers l'Est dans ce cas.

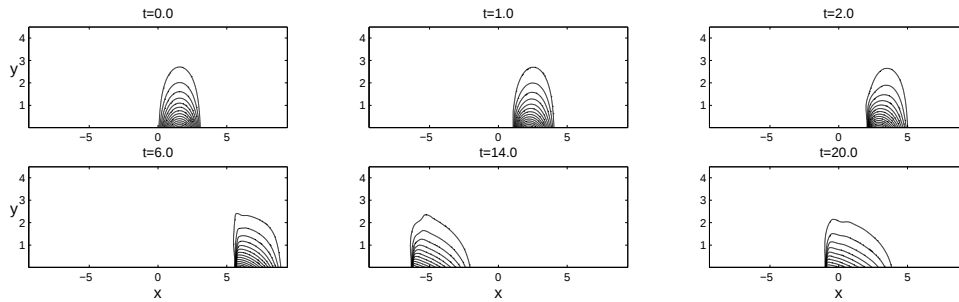


FIG. 5.8 – Déviation de la surface libre pour une onde de Kelvin de dépression. Les isobares sont représentées à partir de 0.98 et en diminuant par pas de 0.02.

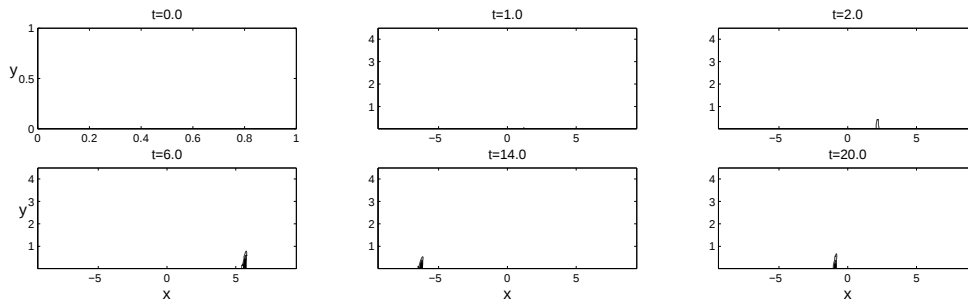


FIG. 5.9 – Dissipation numérique pour une onde de Kelvin de dépression. Les isolignes de dissipation à 10% et par pas de 5% de la dissipation maximale sont représentées, c'est-à-dire que ce sont les zones entourées par les isolignes sont les zones où la dissipation est significative.

5.3 Conclusion

Une simulation nonlinéaire de l'ajustement géostrophique nonlinéaire d'une perturbation localisée de pression a confirmé le déroulement du processus prévu par Reznik & Grimshaw [RG02]. Nous avons observé le déferlement de l'onde de Kelvin côtière et avons mis en évidence que l'onde de Kelvin côtière déferle en créant de la vorticité potentielle, négative/positive pour une onde de Kelvin de surpression/dépression, associée à un courant côtier se formant à l'arrière du choc. Ces résultats indiquent le rôle que peut jouer l'onde de Kelvin côtière pour le mélange dans l'océan : au lieu de son déferlement correspond une zone de mélange intensifié à petite échelle. Ces résultats persistent avec une onde de Kelvin côtière de dépression, à la différence que le déferlement se passe à l'arrière de l'onde de Kelvin côtière localisée, et que la vorticité potentielle déposée est du signe opposé.

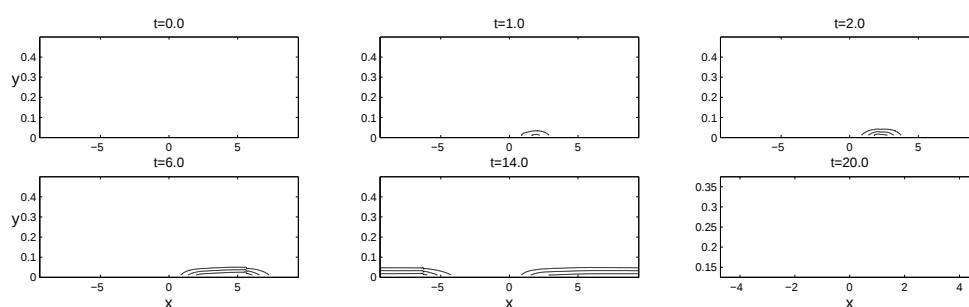


FIG. 5.10 – Anomalie de vorticité potentielle pour une onde de Kelvin de dépression. Les isolignes d'anomalie de vorticité potentielle représentées sont à 0.1, 0.2 et 0.3.

Chapitre 6

Ajustement géostrophique en présence d'un guide d'ondes frontal à l'équateur

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les effets combinés du confinement équatorial et du confinement dû aux fronts de densité sur l'ajustement géostrophique de perturbations localisées. L'ajustement de telles perturbations sans confinement frontal sur le plan β équatorial a été étudié dans [LSRZ04] où il a été démontré que la perturbation initiale (symétrique par rapport à l'équateur) produit deux types de structures cohérentes dans le guide d'onde équatorial : les dipôles tourbillonnaires dans le secteur des ondes de Rossby équatoriales (propagation vers l'Ouest) et les fronts de Kelvin dans le secteur des ondes de Kelvin équatoriales (propagation vers l'Est). La partie de la perturbation qui se projette sur les ondes d'inertie-gravité s'évacue lentement (il n'y avait pas de projection sur les ondes de Yanai à cause de la symétrie du problème).

Le confinement frontal, qui correspond, par exemple, à une lentille d'eau moins dense que l'eau environnante dans l'océan tropical, apporte un phénomène nouveau : le piégeage des ondes d'inertie-gravité avec les conséquences qui ont été déjà évoquées dans le chapitre 4. La stabilité de l'état équilibré à des perturbations devient, donc, de nouveau crucial dans ce contexte. Une difficulté additionnelle est que les solutions ajustées localisées des équations du modèle de l'eau peu profonde à gravité réduite sur le plan β équatorial ne sont pas connues (alors que sur le plan f , il s'agit des rodons). L'équilibre géostrophique sur le plan β équatorial n'est bien défini que pour les jets zonaux. Nous verrons par la suite qu'une perturbation localisée à l'équateur avec un rapport d'aspect assez grand s'étale dans la direction zonale et ainsi tente de retrouver cet état équilibré. En procédant de la même façon que dans le chapitre 4, nous étudions la stabilité des jets équilibrés équatoriaux et identifions les perturbations quasi-inertielles observées dans les simulations numériques directes à haute résolution comme les modes stables sur le jet zonal équilibré : un état limite d'évolution de la lentille initiale. Il est à noter que l'analyse de la stabilité du jet équilibré sur le plan β équatorial se révèle plus simple que sur le plan f aux moyennes latitudes, car à cause de l'effet β (et en l'absence de "l'effet f "), un tel jet se trouve non-cisaillé et, donc, le problème des niveaux critiques ne se pose (presque) pas. Nous observerons aussi les manifestations spécifiques des différents types d'ondes équatoriales dans le contexte de l'ajustement des lentilles : formation de dipôles de Rossby sur le flanc ouest de la lentille en évolution, et le front de Kelvin qui prend ici la forme d'un courant

de gravité se propageant vers l'Est. Les ondes quasi-inertielles stables se propagent sur le fond de ce courant de densité. Les mouvements de ce type, qui ont une période typique de quelques jours si les paramètres du modèles sont ramenés à des valeurs typiques pour l'océan tropical, peuvent être à l'origine de certaines oscillations observées in situ.

6.2 Mouvements inertiels durant l'ajustement transitoire d'une anomalie de densité dans l'océan équatorial et application aux eaux chaudes du Pacifique équatorial Ouest

Les résultats sur les mouvements inertiels durant l'ajustement transitoire d'une anomalie de densité dans l'océan équatorial et leur application aux eaux chaudes du Pacifique équatorial ouest font l'objet d'une publication dans *Journal of Physical Oceanography* et sont donc présentés en anglais dans ce qui suit.

Inertial motions during the transient adjustment of a density anomaly in the equatorial ocean with application to the western Pacific warm pool

J. Le Sommer, E. Scherer and V. Zeitlin

Journal of Physical Oceanography **36**, 2283-2295, December 2006.

(Manuscript received 24 January 2006, in final form 10 May 2006)

The paper is focused on the spontaneous transient adjustment of a buoyant lens of water with uniform density, initially at rest in the vicinity of the equator. For parameters typical of the western Pacific warm pool, the adjustment is shown to generate finite amplitude wave motions with period ~ 8 days which are not covered by the standard theory of linear equatorial waves. This mechanism may be at the origin of inertial motions at the early stages of ENSO events in the western Pacific ocean.

The lens adjustment is studied within the $1\frac{1}{2}$ -layer reduced gravity approximation on the equatorial β -plane, using the high resolution finite volume numerical methods which are specially designed to handle outcropping isopycnals. Under the reduced gravity approximation, a buoyant region of light water with outcropping boundaries in the vicinity of the equator is described by two parameters : the meridional to zonal scale aspect ratio δ and the ratio γ of the Coriolis force to the pressure force on its meridional boundary. For realistic parameters ($\delta \sim 10^{-1}$; $\gamma \sim 1$), the lens, initially at rest, spreads eastward in accord with non-rotating gravity current dynamics whereas its westward extrusion is arrested so that the western edge splits into two anticyclonic vortices. Meanwhile finite amplitude westward propagating inertial wave motions develop at the interface between the spreading current and the ambient fluid.

The inertial wave structure is shown to be consistent with the structure of stable wave modes predicted by linear analysis of small amplitude perturbations superimposed on a zonally symmetric equatorial current with outcropping isopycnals. A WKBJ ray-tracing analysis indicates that the inertial wave is emitted during the early stage of the gravity current evolution and then dispersed on the spreading current.

1 Introduction

The large scale ($>500\text{km}$), slow dynamics ($T > 10$ days) of the equatorial oceans was an area of intense investigations over the past 25 years. The joint effort on observations, remote sensing and model studies has led to a comprehensive picture of the equatorial dynamics at these scales, especially concerning the equatorial Pacific. Likewise, in-situ observations of micro-structures and motions with time-scales less than one day in the equatorial oceans also attracted significant interest [see e.g. MMH⁺92]. On the contrary, the intermediate frequency motions ($1 < T < 10$ days) are less understood and were considered to hardly interfere with the slow dynamics. In particular, the inertial wave motions with restoring force due to the Coriolis effect, were quite neglected in the equatorial dynamics literature.

Nonetheless, recent works suggest that intermediate frequency motions are likely to play a significant role in the equatorial dynamics and ecology. On the one hand, it should be emphasized that in the equatorial band a significant part of the small scale mixing in the thermocline can be attributed to inertial motions [AG01]. On the other hand, the model studies reveal that high frequency wind forcing, which pumps a considerable amount of

energy into intermediate frequency motions, is a crucial ingredient for modelling the early stages of ENSO events in OGCMs (G. Madec, personal communication). In what concerns the coupling of dynamics with biology, the vertical advection associated with intermediate frequency motions is also known to modify substantially the primary production in the mixed layer [FH01]. So, it is worthwhile revisiting the intermediate frequency motions in the equatorial oceans.

Most of our understanding of these motions in the equatorial oceans is based on the picture drawn in the classic paper by Wunsch and Gill [WG76]. They proposed that the wind stress is the main driving force of such motions and showed that the wind stress variations can resonantly excite the free linear equatorial waves within the mixed layer. Although successfully applied, this approach cannot account for *in situ* observations collected at the beginning of 1992 ENSO event in the TOGA/COARE IOP array which show that : *i*) the intermediate frequency motions are not systematically consistent with the free wave theory [LCGM], and that *ii*) kinetic energy peaks at intermediate frequency in the mixed layer do not systematically match the frequency of wind energy peaks [UKIK98, UKIK00]. Therefore, it is necessary to reconsider the hypotheses of the linear free wave theory and to find complementary forcing mechanisms in order to explain the intermediate frequency motions in the equatorial Pacific at the beginning of ENSO events.

At the beginning of ENSO events the wind and buoyancy forcings tend to shape a volume of warm ($> 28^{\circ}\text{C}$) and low salinity ($< 35\text{psu}$) waters known as the *western Pacific warm pool* [DDd⁺00] which extends typically over 4000km long, 800km wide and 60-100m deep. At its eastern edge, the warm pool is delimited by a sharp salinity front [VD98]. The position of this front is subject to strong interannual variations [MI00] related to ENSO events. Notably, the warm pool extrudes eastward at the beginning of ENSO events concurrently with the change in the trade winds [MHMT90].

Our working hypothesis is that such transient eastward extrusion is at the origin of intermediate frequency motions.

In order to identify the basic mechanism generating such motions, we will choose the simplest model which retains the key ingredients : the presence of outcropping isopycnals in localized frontal structures and nonlinear advection. The reduced gravity approximation would therefore be used as a crude representation of horizontal and vertical density stratifications. Foreseeable effects of continuous stratification and entrainment within the pycnocline are briefly discussed in section 6.

Our approach is based on the notion of *spontaneous adjustment*. At the intermediate time-scale of interest, neglecting the feedbacks of the ocean on the atmosphere, the Pacific warm pool is a dissipative system under the atmospheric forcing (wind stress, heat and fresh water fluxes). Yet, a study of the initial-value problem usually reveals the inherent features of the intrinsic dynamics of this system, important for the system's response to any forcing. For this purpose we propose to study the response of a buoyant region of light water after an impulsional modification of the forcing. We will thus investigate the relaxation (adjustment) of an idealized warm pool (a buoyant lens) initially at rest in the vicinity of the equator. This will tentatively describe the evolution of the Pacific warm pool after a switch off of the trade winds.

The main questions we address are : Do intermediate frequency motions emerge during the adjustment of the lens after the trade winds switch off? What is their effect on the slow dynamics?

The paper is organized as follows : in section 2, we formulate the problem and introduce

the characteristic scales and parameters. A typical adjustment scenario of a buoyant lens is described in section 3 on the basis of high resolution numerical simulations. In section 4, we study the wave modes on a fictitious parallel equatorial jet with outcropping boundaries, and compare them with those observed during the lens adjustment. The emission and propagation of inertial waves on the developping equatorial gravity current is discussed in section 5.

The main results of the paper are summarized and put into perspective in section 6.

2 Overview of the problem

In order to test the relevance of the conjectured wave emission mechanism, we use the simplest model which includes the required dynamical ingredients, the finite amplitude frontal dynamics. We should emphasize that our purpose is not to reproduce the detailed dynamics of the equatorial Pacific, but rather to pinpoint the relevant dynamical processes. Thus, as a first step, although the equatorial ocean is strongly coupled to the atmosphere at all scales, we will model the evolution of the ocean only. The thermohaline structure of the upper equatorial ocean is represented as a two-layer fluid within the reduced gravity approximation. Following [Gil82], the motion of a thin active lens of buoyant water above a deep passive ocean is described by the shallow water equations on the equatorial beta-plane :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g' \nabla h + \beta y \vec{z} \times \vec{u} &= 0, \\ \partial_t h + \nabla \cdot h \vec{u} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $(h, \vec{u})$ denote, respectively, the upper layer depth and the current in the upper layer, g' is the reduced gravity, $f = \beta y$ is twice the rotation rate at latitude y and $\vec{z}$ is pointing upward. The lens depth h may become zero in the case of outcropping isopycnals.

It is also possible to include the forcing terms on the right hand side so that the model takes into account the wind stress [Gil82, p.435]. Such representation of the wind stress assumes that the passive layer is not affected by the wind. Nonetheless, it was found to satisfactory describe the evolution of the wind forced flows even in case of vanishing active layer depth [see e.g. MI00]. Note that if the wind forcing is supposed to be zonally symmetric, then it enters the equations in the form of an apparent topography [see Gre85].

In order to investigate the transient evolution of a buoyant region of light water after a sudden modification of the atmospheric forcings, we consider the relaxation of a lens which is initially at rest at $t = 0$. Conceptually, one can imagine the lens to be in stationary equilibrium with the wind stress for $t < 0$. Remind that on the equatorial β -plane, there is no localized stationary solutions to the system (1) without forcing terms. Considering the high frequency variability of the zonal wind during westerly wind bursts [BRP02], such a trade wind switch-off scenario is not unrealistic. Having chosen the initial current to vanish in the lens, we impose a simple geometry for the isopycnals with parameters broadly consistent with observations. A lens with paraboloidal isopycnals is chosen with zonal extension L_x , meridional extension L_y and the maximum depth H , as presented in Fig 1. We should stress that the evolution of the lens is not essentially sensitive to the paraboloidal shape of the lens.

Notably, the length and time scales of the problem are not intrinsically given by the model but rather related to the initial conditions. Indeed, for a given lens (L_x, L_y, H) , the

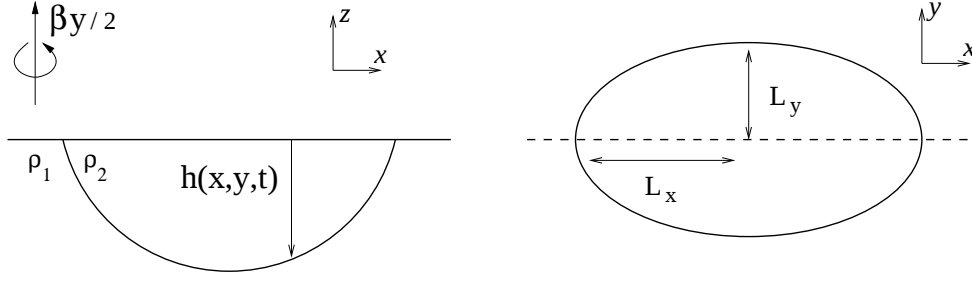


FIG. 1 – The lens at time $t = 0$. We emphasize that this study focuses on regimes such that $L_x \gg L_y$.

maximum lense depth H sets the velocity scale $c_0 = \sqrt{g'H}$. Then the equatorial Rossby radius associated with the lens $R_d = \sqrt{c_0/\beta}$ is a typical spatial scale of the problem. Having defined velocity and space scales, one can introduce the advective time-scale $T_a = 1/\sqrt{c_0\beta}$. Note that c_0 , R_d and T_a all depend on the maximum depth of the lens H . In particular, on the equatorial β -plane, there is no intrinsic time-scale in the model, which is a crucial difference with the f -plane case. The lack of intrinsic time and space scales in the model is inherent for the $1\frac{1}{2}$ -layer reduced gravity approximation. In the next section, the results of numerical simulations are presented under convention that $T_a = 1$, $R_d = 1$ and $c_0 = 1$. In order to obtain dimensional values, some estimate for c_0 based on the observational data should be used. For the Pacific warm pool, we choose $c_0 \sim 2.5 \text{ m.s}^{-1}$ which yields $R_d \sim 330 \text{ km}$ and $T_a \sim 1.5 \text{ days}$.

To prescribe the initial conditions (L_x, L_y, H) , only two independent parameters are needed. We choose to use

$$\delta = L_y/L_x \quad \text{and} \quad \gamma = L_y^2/R_d^2, \quad (2)$$

which denote, respectively, the aspect ratio (δ), and the ratio of Coriolis force to pressure force at the meridional boundary (γ). In what follows, we use this pair of parameters to set up the numerical experiments. Given the extension of the Pacific warm pool, we should focus on the parameter regime such that $\delta \sim 0.1$ and $\gamma \sim 1$.

We should emphasize that the relaxation of a localized, unbalanced buoyancy anomaly can be considered as an equatorial counterpart of the classical Rossby adjustment problem with non-uniform initial potential vorticity.

3 Numerical simulations of the transient dynamics

a. Overview of the numerical procedure

The numerical method we use is the same as in [BLZ05]. This reference provides a complete description of the procedure and a discussion of its properties. The main ingredients of the method are the following. The shallow water equations are discretized in the flux-form on a regular grid within the framework of the finite-volume approach. The finite volume method is then fully prescribed by the choice of the numerical flux function and the treatment of the remaining source terms associated with the Coriolis force. At each time-step and in each direction, the Coriolis terms are reformulated as apparent topography, following the *apparent topography method* first introduced by [BLZ04]. The

numerical flux function is associated with a *relaxation solver* adapted to treat topography as proposed by [ABB⁺04]. The choice of the numerical flux function insures an important feature of the numerical procedure, namely its ability to compute solutions of the shallow water equations in the case of vanishing layer depth. The numerical simulations discussed below are obtained with typical resolution $\Delta x, \Delta y \sim 0.05R_d$ and are computed within tens of minutes on a personal computer.

b. The relevant physical mechanisms

Before proceeding with the description of the numerical simulations, let us recall the effect of the basic physical mechanisms at play in the adjustment process in order to anticipate the adjustment scenario. In the absence of the Earth rotation, a buoyant lens within the reduced-gravity approximation would spread isotropically according to the inviscid gravity current dynamics. Following [Ben68], in the case of a deep layer with infinite depth and neglecting entrainment, the nose of the gravity current would tend to propagate with the velocity $c_\infty = \sqrt{2g'H}$. Moreover, at any moment the velocity profile in the direction of propagation is linear in the position of the fluid element. The Earth rotation will substantially modify this picture as the Coriolis force will tend to arrest the meridional propagation of the buoyancy driven flow. So, the planetary vorticity gradient will guide the flow in the vicinity of the equator.

A complementary insight to the process of equatorial adjustment is given by [LSRZ04] who described the adjustment of a localized density anomaly of depth ΔH superimposed on a steady pycnocline with depth H in the equatorial ocean. Their results show that the anomaly projects its energy onto the available wave modes of the system. The initial anomaly is split into an eastward propagating Kelvin wave packet, a westward propagating Rossby wave packet and inertia-gravity waves propagating both ways. For zonally elongated perturbations, [LSRZ04] showed that the three types of waves are dynamically decoupled as long as the amplitude of the nonlinear terms in (1) remain small. The adjustment of a localized lens discussed in the present paper is a limiting case of the problem studied by [LSRZ04] for $\Delta H/H \rightarrow \infty$. So, we can expect some degenerate forms of the three types of waves to emerge during the adjustment. Still, two crucial distinctions remain. On the one hand, the homogeneous upper-layer which can support the classical wave motions is now absent. The only medium which can support wave motion is now the lens itself. On the other hand, the amplitude of the nonlinear terms in (1) is now large next to the edge of the lens. Thus, the expected degenerate forms of the three types of motions would probably be coupled.

c. Description of the adjustment

Fig. 2 presents successive snapshots of the depth contours during the adjustment of the density anomaly with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$. We recall that the upper-layer depth is zero out of the lens. As expected, three types of motions emerge with increasing time. The lens spreads eastward along the equator (the Kelvin-wave type behavior). The Coriolis force being zero at the equator, the gravity current pattern is free to develop. Indeed, the zonal velocity on the equator, which is shown on Fig. 3, is consistent with the one-dimensional gravity current dynamics described by [Ben68]. The nose propagation velocity is $\simeq 1.6c_0$ and is almost independent of time. At a given time, the velocity profile varies almost

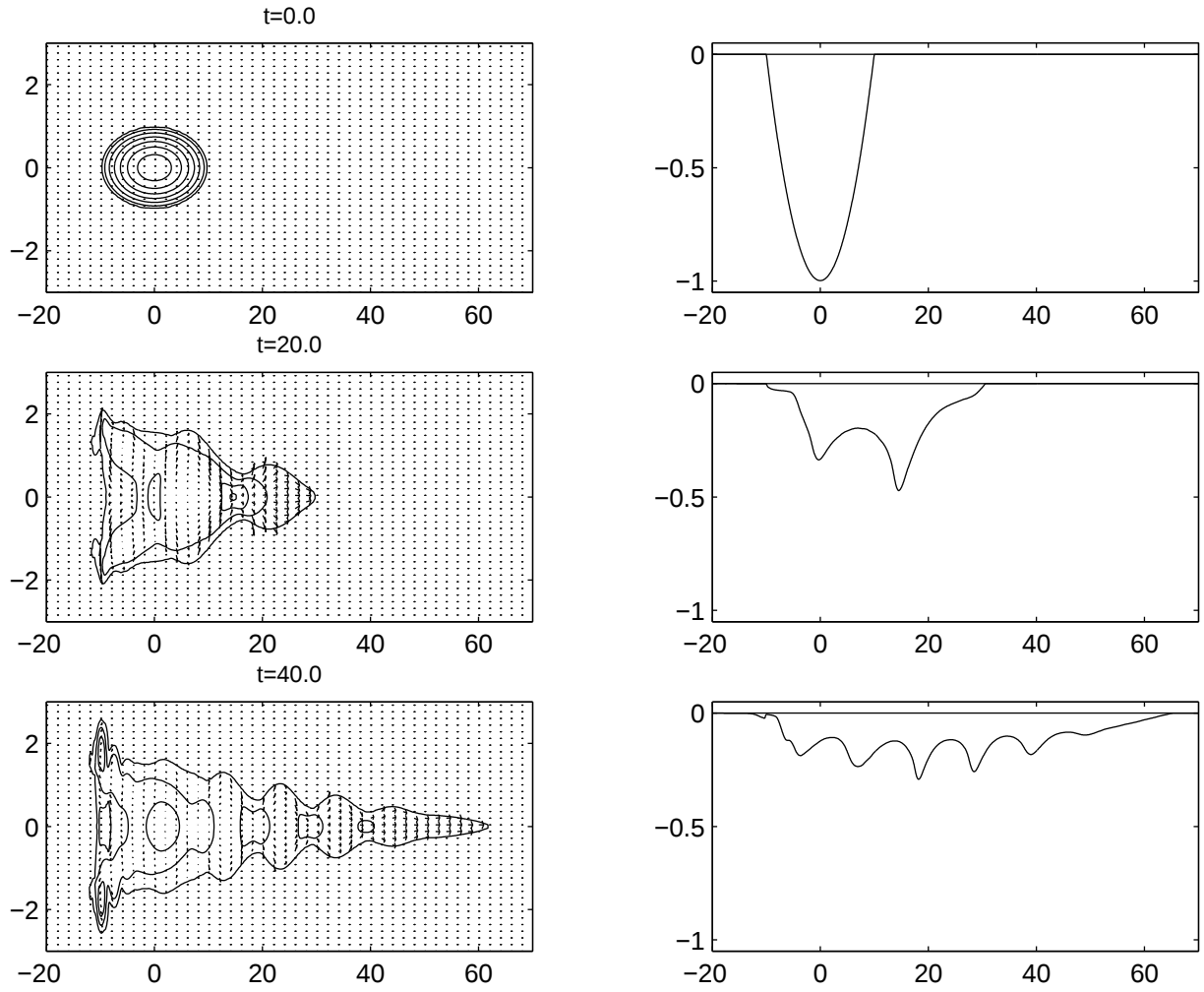


FIG. 2 – Successive snapshots at times $t = 0, 20, 40$ showing the evolution of the lens for $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$. *Left panel* : (x, y) -plane view of depth contours $\{0.02, 0.15, 0.3, 0.45, 0.60, 0.75, 0.90\}$ and velocity vectors. *Right panel* : (x, z) -plane view of the lens depth. Note that the scales are different in the zonal and meridional directions.

linearly with x . However, Fig. 2 shows that the gravity current dynamics is modified on the

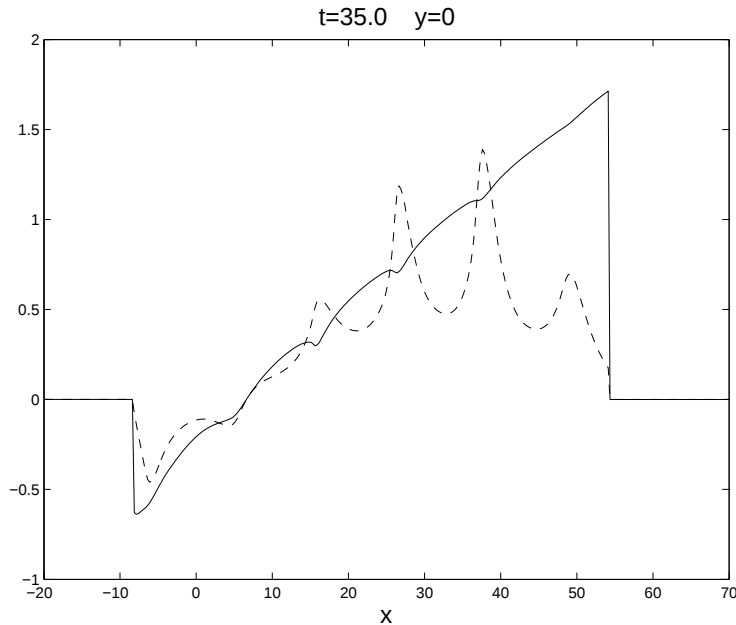


FIG. 3 – Zonal velocity on the equator u (*plain line*) and mass flux hu (*dashed line*) at time $t = 35$ for parameters $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$. The mass flux hu has been multiplied by 5.

western edge of the lens. There, the flow splits and two anticyclonic structures appear. At time $t = 40$, the two anticyclones are located at $x = -10$ and slowly propagate westward (the Rossby-wave type behavior). The destabilization of the western edge of the lens is consistent with barotropic instability. Near the equator, as in midlatitudes, the β -effect and divergence tend to stabilize the eastward flows and to destabilize the westward flows [Phi76]. This can be illustrated by a standard argument. Indeed, a fluid particle motion off the equator (say northward) increases its planetary vorticity. For the eastward flows this poleward motion is associated with an increase, and for the westward flows with a decrease of the relative vorticity. Since the parcel motion is constrained by the conservation of potential vorticity, such poleward displacement will be arrested for the eastward flows, but may persist and eventually form vortices for the westward ones. The eastern edge of the lense is therefore expected to be more stable than its western edge.

The most striking feature of the simulations is the emergence of finite amplitude wave motions within the lens (the inertia-gravity wave type behavior). The wave pattern can be identified either on the poleward edges of the lens (see e.g. Fig. 2 at time $t = 40$ for $x \in [20 \ 40]$), or on the fluid depth along the equator (see the lower right panel of Fig. 2). A major feature of the wave pattern is that its depth perturbation is of the same amplitude as the local lens depth. Furthermore, it is remarkable that, at all times, the wave pattern exhibits a well-defined wavelength λ . At time $t = 35$, with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$, we measure $\lambda^{35} \simeq 11$. Before completing a detailed description of the wave motions, let us mention that the adjustment scenario is also valid for a lens with the center of mass slightly shifted poleward, as presented in Fig. 4. In this case, a noticeable modification is the emergence of antisymmetric wave motion, as seen in the right panel. At time $t = 35$, with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$, the wavelength of this antisymmetric wave-mode is estimated as $\lambda^{(35)} \simeq 17$.

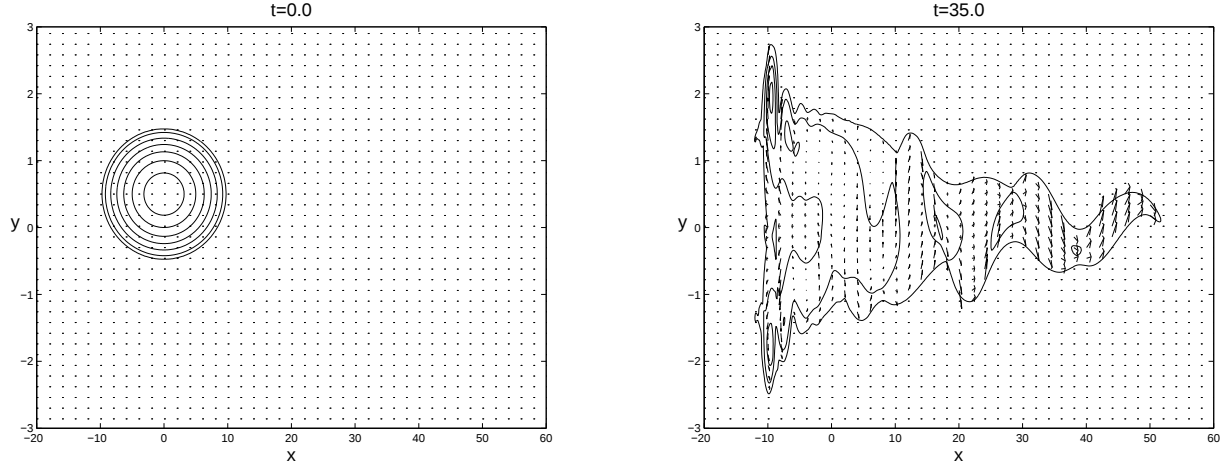


FIG. 4 – Snapshots at times $t = 0, 35$ of the depth contours $\{0.02, 0.15, 0.3, 0.45, 0.60, 0.75, 0.90\}$ and velocity vectors showing the evolution of a lens with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$ but whose center of mass is initially shifted northward at $x = 0, y = 0.5$.

d. Description of the wave motion

A Hovmöller diagram of the depth contours along the equator is shown in Fig. 5. The

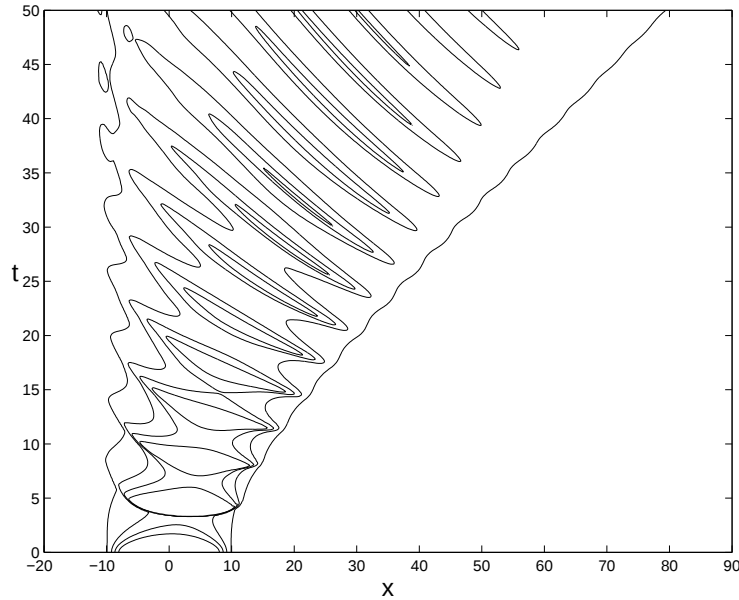


FIG. 5 – Hovmöller diagram of the depth contours $\{0.02, 0.15, 0.25, 0.35\}$ for $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$. Notice the phase lines corresponding to the westward propagating wave signal.

clearly visible phase lines on this figure indicate that the waves are propagating westward. At time $t = 35$, as mentioned above, the wavelength is about $\lambda^{(35)} \simeq 11$ (i.e. wavenumber $k^{(35)} \simeq 0.6$). The period is estimated as $T^{(35)} \simeq 5.1$ (i.e. frequency $\omega^{(35)} \simeq 1.2$) and the absolute phase velocity as $c_\phi^{(35)} \simeq -2$ at $x = 35$. Dimensionally, in the case of the western Pacific warm pool, this corresponds to a period of ~ 8 days and a wavelength of $\sim 3500\text{km}$.

The analysis of Fig. 5 can be carried on further. First, it is seen that λ is almost independent of x at fixed t . Second, at fixed t , $|c|$ is decreasing toward the nose of the

gravity current. Third, with increasing time, at fixed location, the period T is increasing, the length scale λ is decreasing and the phase velocity $|c|$ is decreasing. A power-law fit of this time dependence is given by $\lambda \propto t^{-0.4}$ and $T \propto t^{0.2}$.

Finally, going back to Fig. 2, we can observe the phase correlation between h , u and v . For symmetric wave modes along the equator h and u have opposite phases while h and v are in quadrature. Such phase pattern is identical to that of westward propagating inertia-gravity waves [Gil82]. In addition, the meridional structure of the fields is *grave* in the sense that v has only one zero within the jet at fixed y . Likewise, h has maximum on the equator in the locations where the width of the lens is minimal.

4 Inertial waves on a zonally symmetric equatorial jet with outcropping isopycnals

At this point, we shall attempt to understand the physics of the observed wave motion. Though the lens is a spatially and temporally evolving flow, it should be stressed that the lens is initially strongly elongated along the equator and remains so during its evolution. Moreover, setting apart the eastern and western edges, the properties of the lens are varying slowly and monotonously along the equator, cf. Fig. 3 and Fig. 2. Following the approach to spatially evolving flows reviewed by [HM90], a natural two-step strategy to study such systems is to consider a fictitious parallel flow with parameters corresponding to a section of the spatially developing flow first (*local analysis*) and, second, to apply the WKBJ theory (*global analysis*). As demonstrated below, this approach gives reliable indications regarding the nature and the origin of the observed wave motion.

a. The local scaling

We will show that the properties of the waves obtained in the previous section are very similar to the properties of inertial waves propagating over a zonally symmetric equatorial jet with outcropping isopycnals. Such comparison being local at fixed x, t along the spreading gravity current, the local time and space scales should be used. For the adjustment discussed in the previous section, let us define $\bar{h}(x, t)$, the fluid depth along the equator averaged over a wavelength. Likewise, define $\bar{c}(x, t) = (g'\bar{h}(x, t))^{1/2}$. Then one can introduce the local scales $T^* = (\bar{c}\beta)^{-1/2}$ and $L^* = (\bar{c}/\beta)^{1/2}$. During the adjustment of a lens with $\gamma = 1$ and $\delta = 0.1$, at time $t = 35$ and for $x \in [20; 40]$, we estimate $\bar{h}(x, 35) \simeq 0.21$ which yields $T^*(x, 35) = 2.2$ and $L^*(x, 35) = 0.46$. The wave parameters ω, k, c obtained in the previous section are rescaled with these local scales, so that $\tilde{\omega} = 1.7$, $\tilde{k} = 0.39$ and $\tilde{c} = -4.3$.

b. Linear stability analysis : general considerations

The problem of the evolution of arbitrary disturbances on a confined equatorial jet constitutes the equatorial counterpart of the classic paper by [GKS82]. The equatorial case has been studied by [Rip83] and [HY87]. However, these studies were essentially focused on the question of stability so that, to our knowledge, there is no complete description of the propagating modes on equatorial jets with outcropping isopycnals in the literature.

Consider a zonally symmetric equatorial jet with outcropping isopycnals as sketched in Fig. 6 and assume that H and U are in geostrophic equilibrium, such that $\beta y U + g' H_y = 0$. The meridional boundaries of the jet are located at $y = L_0^+$ and $y = L_0^-$. The equations

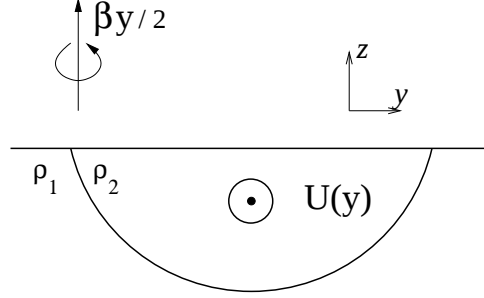


FIG. 6 – A sketch of the idealized equatorial jet.

that govern the evolution of finite amplitude perturbations of the form

$$u = U(y) + u'(x, y, t), \quad v = v'(x, y, t), \quad h = H(y) + h'(x, y, t)$$

are given by the set (1) supplemented with the boundary conditions :

$$\begin{aligned} h(x, L^+, 0) &= 0, \quad h(x, L^-, 0) = 0, \\ v(x, L^+, 0) &= d_t L^+ \quad \text{and} \quad v(x, L^-, 0) = d_t L^-, \end{aligned} \quad (3)$$

where $L^+(x, t)$ and $L^-(x, t)$ denote the perturbed jet boundaries, and d_t is the Lagrangian derivative. According to the classical results by [Rip83], the flow is linearly stable with respect to any perturbation if there exist α such that for all y

$$(U - \alpha) \frac{dQ}{dy} < 0 \quad \text{and} \quad (U - \alpha)^2 < g' H. \quad (4)$$

where

$$Q = \frac{\beta y + \partial_x v - \partial_y u}{h}$$

designate the potential vorticity. The first condition is equivalent to the well-known inflection point criteria whereas the second condition is related to supersonic instabilities [HY87]. Let us now assume that the perturbation is small compared to the mean flow. Then the normal mode solutions of the linearized set of equations verify

$$\begin{aligned} ik(U - c)\tilde{u} + \tilde{v}(U_y - \beta y) + ik g' \tilde{h} &= 0, \\ ik(U - c)\tilde{v} + \beta y \tilde{u} + g' \tilde{h}_y &= 0, \\ ik(U - c)\tilde{h} + (H\tilde{v})_y + ik\tilde{u}H &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

with

$$(h', u', v') = (\tilde{h}, \tilde{u}, \tilde{v}) \exp ik(x - ct).$$

The boundary conditions (3) at $y = L^+ = L_0^+ + \lambda^+$ and $y = L^- = L_0^- + \lambda^-$ are linearized so that, assuming $(\lambda^+, \lambda^-) = (\tilde{\lambda}^+, \tilde{\lambda}^-) \exp ik(x - ct)$, we get

$$\begin{aligned} H_y(L_0^+) \tilde{\lambda}^+(L_0) + \tilde{h}(L_0^+) &= 0, \\ H_y(L_0^-) \tilde{\lambda}^-(L_0) + \tilde{h}(L_0^-) &= 0, \\ ik(U - c)\tilde{h} + v H_y &= 0 \text{ at } y = L_0^\pm. \end{aligned} \quad (6)$$

The latter condition is equivalent to the linearized continuity equation in (5). Therefore, the only boundary condition for $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ is their regularity at $y = L_0^+$ and $y = L_0^-$.

Finally, we note that critical levels may exist in the jet for waves with $(U-c)^2 = g'H$ for some y . This result is obtained from the equation for $\tilde{v}$ following from (5) by eliminating other variables. We nonetheless emphasize that the existence of a critical level for some c is not a sufficient condition for instability since it does not guarantee neither the existence of a mode with phase-speed c nor its instability. Technically, as shown by [Ben03], additional conditions on the potential vorticity gradients are needed to prove the existence of unstable modes with c in the critical level. Therefore, a basic state can be linearly stable according to Ripa's criteria (4) even if there exists c for which $(U-c)^2 = g'H$ somewhere within the jet. A discussion of the relation between Ripa's theorem (4) and critical layer instability in shallow water may be found in [TH92].

c. Solving the linear stability problem by collocation methods

To find the solutions of (5), we apply the recently improved spectral collocation methods as proposed by [PF03]. Starting from the matrix form of (5),

$$\begin{pmatrix} U & (\beta y - U_y)/k^2 & g \\ \beta y & U & g \frac{d}{dy} \\ H & (-1/k^2) \frac{d}{dy}(H \cdot) & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ ik\tilde{v} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ ik\tilde{v} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} \quad (7)$$

we use the complete basis of Chebyshev polynomials to build a discrete equivalent of (7). This is achieved by evaluating the terms of (7) on a discrete set of N collocation points (typically $N = 50$ to 150). The eigenvalues and eigenvectors of the resulting operator are computed with the help of MATLAB in few seconds on a personal computer. The occurrence of spurious eigenvalues is common in such discretization procedure. We therefore checked the persistence of the eigenvalues presented above by recomputing the spectrum with increased N . As noted above, a critical layer occurs for eigenvalues c such that there exists y where $(U(y) - c)^2 = g'H(y)$. As it will be seen later, the emerging mode systematically lies outside the critical layer. Therefore, no special treatment of the critical layer has been applied to investigate this part of the spectrum. It should be noted that the regularity boundary condition for $\tilde{h}, \tilde{u}, \tilde{v}$ are automatically satisfied because of the choice of the basis functions.

d. Linear stability analysis : constant velocity profiles

A jet profile is prescribed by two non-dimensional parameters : the Rossby number Ro and the Froude number Fr

$$Ro = \frac{U}{\beta L^2} \quad \text{and} \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{2gH}}.$$

To allow a comparison, we can evaluate Ro and Fr as functions of x for each t on the spreading gravity current, yielding two functions $Ro(x)$ and $Fr(x)$. Fig. 7 gives the values of these two functions along the equator at $y = 0$ at $t = 35$ during the adjustment of the equatorial lens presented in section 6.2. Remarkably, Ro and Fr verify the relation $Ro \sim Fr^2$ on average over a wavelength. In particular, for x in the interval $[25, 35]$, we get $Fr^2 \sim Ro \sim 2$. In order to understand the nature of the wave motion on the spreading

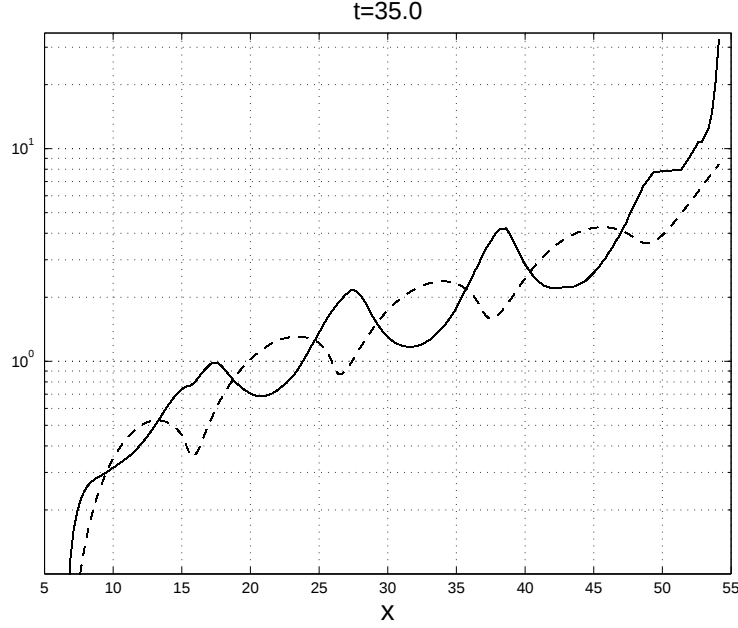


FIG. 7 – The values of local parameters $\sqrt{Ro(x)}$ (plain line) and $Fr(x)$ (dashed line) along the equator at $t = 35$ with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$. The width of the lens $L(x)$ is used to estimate $Ro(x, y)$. Note that the average values of $\sqrt{Ro}$ and Fr over one wavelength are comparable, so that the relation $Ro \sim Fr^2$ is approximately verified.

gravity current, we choose to study the eigenmodes of a jet such that the relation $Ro \sim Fr^2$ holds, the most simple example being a jet with constant velocity $U_0 > 0$,

$$\begin{aligned} U(y) &= U_0, \\ H(y) &= \frac{-\beta U_0}{2g}(y^2 - L^2). \end{aligned} \quad (8)$$

It is easy to verify that Ripa's criteria (4) is satisfied for such jets because $Q_y > 0$ and U is bounded. Thus, constant velocity jets are linearly stable. We apply the spectral collocation method to the constant velocity profile for various Ro . All the eigenvalues we computed are real and correspond to stable propagating modes. Fig. 8 presents the phase velocity $\tilde{c}$ for various $\tilde{k}$ with $Ro = 2$. Two classes of waves are identified. On the one hand the *supercritical* waves are propagating faster than the flow $c > U_0$. On the other hand the *subcritical* waves are propagating slower than the flow $c < U_0$. Moreover the solutions are either symmetric or antisymmetric and alternate with increasing $\tilde{c}$. The structure of the symmetric wave mode found for $Ro = 2$, $\tilde{k} = 0.4$ and $\tilde{c} = -4.3$ is presented in Fig. 9.

This wave is *grave*, in the sense that h has only one extremum within the jet. With increasing $|U_0 - c|$ at fixed $\tilde{k}$ the number of extrema in the height field h is increasing. The striking fact is that the Rossby number, the phase velocity and the wavenumber of the wave solution presented in Fig. 9 coincide with the wave parameters observed in the simulation at $t = 35$, $x = 35$ in the previous section. Furthermore, the phase relations between u, v and h are consistent with the observations of section 6.2 : at $y = 0$, u and h have opposite phase, u and v are in quadrature. Such coincidence of the wave parameters in the simulation and in the linear wave theory is obtained for the whole wave pattern presented in Fig. 5. Hence, we conclude that the emerging wave mode during the

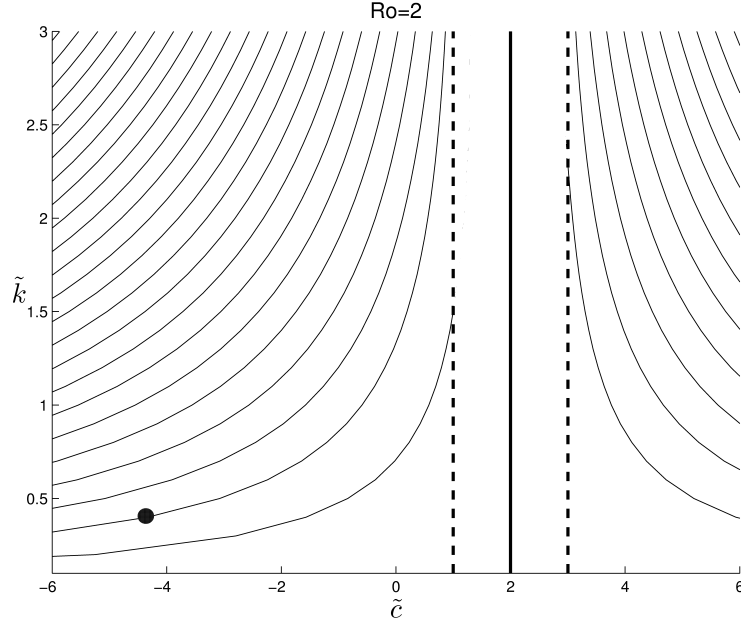


FIG. 8 – Phase velocity $\tilde{c}$ versus wavenumber $\tilde{k}$ for propagating modes on a confined jet with $Ro = 2$. The eigenvalues found in the critical layer $U_0(1 - (2Ro)^{-1/2}) < c < U_0(1 + (2Ro)^{-1/2})$ have been excluded. The dot indicates the mode which is compared with the numerical simulation of section 3 (See the text).

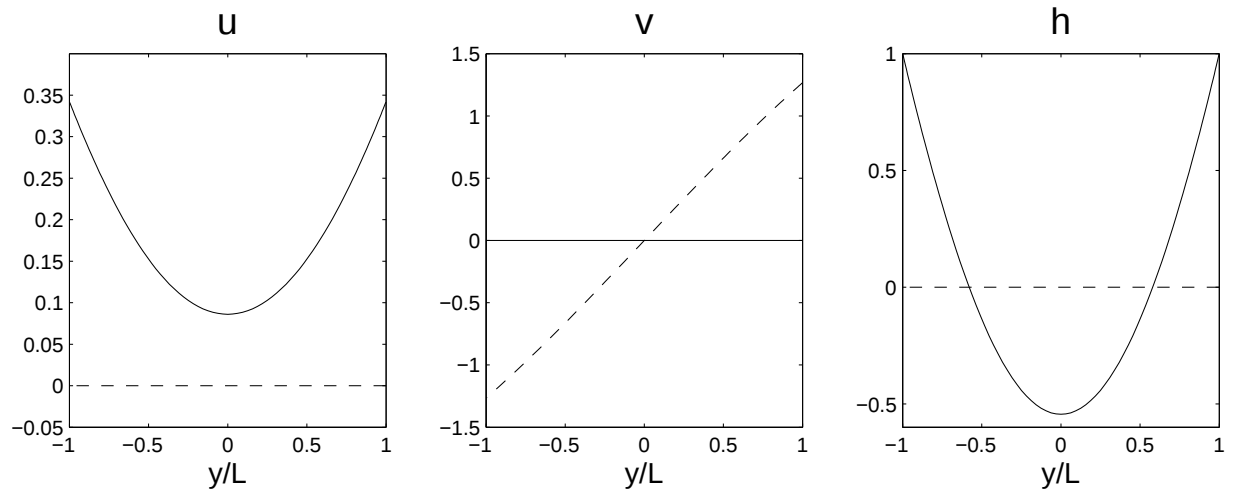


FIG. 9 – Meridional structure of the symmetric wave mode with $Ro = 2$, $\tilde{k} = 0.4$ and $\tilde{c} = -4.331$. Each panel presents the real (*plain line*) and the imaginary part (*dashed line*) of the variable.

adjustment corresponds to the *gravest symmetric subcritical* propagating mode on the confined equatorial jet.

5 Wave emission and wave propagation on the equatorial gravity current

The emerging wave mode being identified, two questions remain : What is the origin of the wave motion ? What sets the parameters of the emerging mode ? These questions are addressed below within the framework of the WKBJ approximation. Applying the general approach to wave motions on developping flows [HM90], the use of the WKBJ approximation is legitimated by Fig. 5. Indeed, it is clearly seen that the wavenumber and frequency are slowly evolving in space and time, respectively. Therefore, as regards the inertial wave dynamics, the lens is a slowly varying medium. This allows to introduce the small parameter ε below.

a. Wave propagation : the WKBJ approximation

Following the standard WKBJ approximation method [Whi74], we assume that the fluid depth h presented in Fig. 2 can be decomposed as follows

$$h(x, y, t) = \bar{h}(x, y, t) + \eta(x, y, t) \exp(i\vartheta(x, t)/\varepsilon) + O(\varepsilon) \quad (9)$$

with ε being a small parameter, $\bar{h}$ the averaged fluid depth over a wavelength and η the local wave amplitude. Then the local wavenumber and frequency can be defined as

$$k = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \text{and} \quad \omega = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (10)$$

As previously, the local time and space scales T^* and L^* are used to define the nondimensional frequency $\tilde{\omega} = \omega T^*$ and $\tilde{k} = k L^*$.

As already said, the gravity current is a slowly varying medium with respect to the wave parameter $\tilde{k}$ and $\tilde{\omega}$ (i.e. $\varepsilon \ll 1$). Assuming that the wave amplitude is small (i.e. $\eta \ll h$), the local wavenumber and frequency should verify

$$\omega = \Omega(k, Ro, c) = (c\beta)^{1/2} \tilde{\Omega}((c/\beta)^{1/2} \tilde{k}, Ro), \quad (11)$$

where c and Ro denote respectively the local Rossby number and the local velocity scale $c = \sqrt{g'\bar{h}}$ averaged over a wavelength. The dimensional form of the dispersion relation follows from the nondimensional form obtained in the previous section.

$$\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}(\tilde{k}, Ro). \quad (12)$$

The ray-tracing formulae describe the evolution of $\tilde{k}$ and $\tilde{\omega}$ following the rays $d_t X = \partial_{\tilde{k}} \tilde{\Omega}$, where the notation $d_t \cdot = \partial_t \cdot + \tilde{c}_g \partial_x \cdot$ is used :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{k} + \partial_{\tilde{k}} \tilde{\Omega} \cdot \partial_x \tilde{k} &= -\partial_{Ro} \tilde{\Omega} \cdot \partial_x Ro \\ \partial_t \tilde{\omega} + \partial_{\tilde{k}} \tilde{\Omega} \cdot \partial_x \tilde{\omega} &= \partial_{Ro} \tilde{\Omega} \cdot \partial_t Ro \end{aligned} \quad (13)$$

Hereafter, relations (13) are used to find the source region of the emerging waves described in section 3.

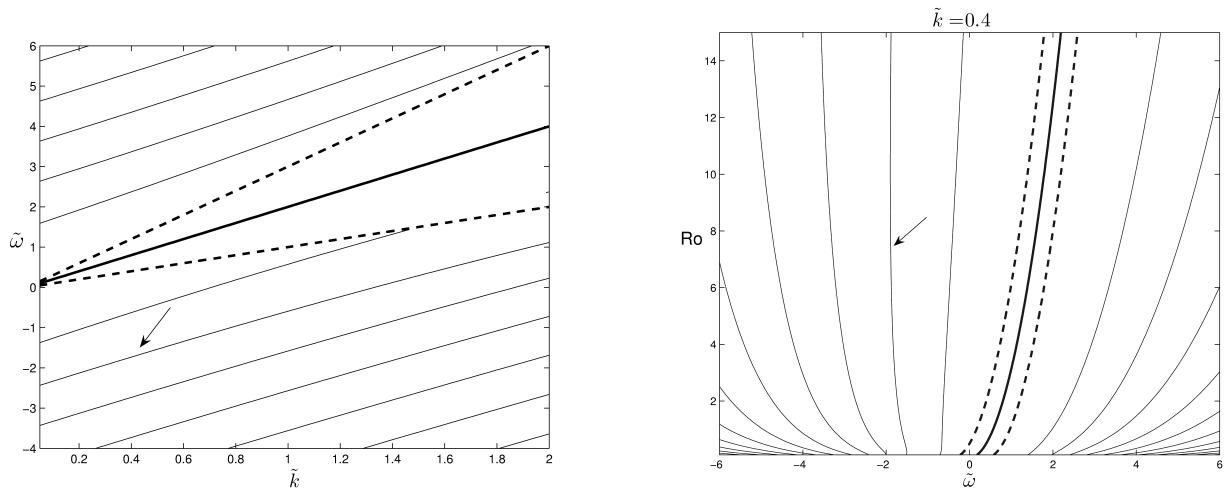


FIG. 10 – *Left panel* : $\tilde{\omega}$ versus wavenumber $\tilde{k}$ for propagating modes on the confined jet with $Ro = 2$. *Right panel* : $\tilde{\omega}$ versus Ro for propagating modes with wavenumber $\tilde{k} = 0.4$ in the confined jet. In both panels, the arrow indicates the mode which is identified in the numerical simulation of section 3.

The left panel of Fig. 10 shows that the propagating modes of section 4 are weakly dispersive and that their group velocity $\tilde{c}_g = \partial_{\tilde{k}} \tilde{\Omega}$ is positive. The right panel indicates that the emerging mode is such that $\partial_{Ro} \tilde{\Omega} < 0$ with the convention that $\tilde{\omega}$ corresponds to the westward phase propagation. From the results of section 3 it follows that inside the gravity current $\partial_x Ro > 0$ (see Fig. 7).

Then, relations (13) show that following the rays $\tilde{k}$ should increase, i.e.

$$d_t |\tilde{k}| > 0. \quad (14)$$

Hence, if the source of the emerging wave is local in the (x, t) plane, it is located where $|\tilde{k}|$ is the smallest.

b. Wave emission : discussion of the scale selection

During the evolution of the lens with $\delta = 0.1$ and $\gamma = 1$ presented in section 3, $\tilde{k}$ varies monotonically with x and t . The smallest $\tilde{k}$ are observed at the beginning of the spreading for $t \in [10, 20]$ and $x \in [0, 20]$. In this region, $\tilde{k} \simeq 0.3$ and $\tilde{\omega} = 1.5$. This is an indication that the waves are generated during the early stages of the lens evolution. The wave packet is likely emitted to counter the lack of geostrophic balance in the meridional direction. The wave packet is then dispersed on the slowly varying medium formed by the spreading gravity current. Hence, even though the flow is essentially nonlinear, the wave emission mechanism is similar to the classical geostrophic adjustment.

Thus, the wave emission is not due to the propagation of the bore itself as could have been anticipated from the study of [FM00], cf also [LSRZ04]. Indeed, the propagation of the nose of the eastward gravity current is "supersonic" and may be assimilated to a shock. [FM00] showed that in the vicinity of the shock formed by the breaking Kelvin wave, meridional velocity is produced in order to maintain mass and momentum conservation across the shock. An inertial boundary layer appears which results in the formation of inertia-gravity waves to counter the loss of balance behind the shock. Our numerical simu-

lations suggest that this mechanism is not taking place during the evolution of equatorial gravity currents.

In the left panel of Fig. 11, we show the nondimensional group velocity of the emerging mode as a function of $\tilde{k}$ with $Ro = 2$. It should be noted that there exists a critical wavelength $\tilde{k}_c$ above which the group velocity is smaller than the nondimensional current speed $U_0/\sqrt{g'H(0)}$. So, for a given Ro , wave packets with $\tilde{k}$ smaller than $\tilde{k}_c$ would propagate faster than the current. The right panel of Fig. 11 shows the value of the critical

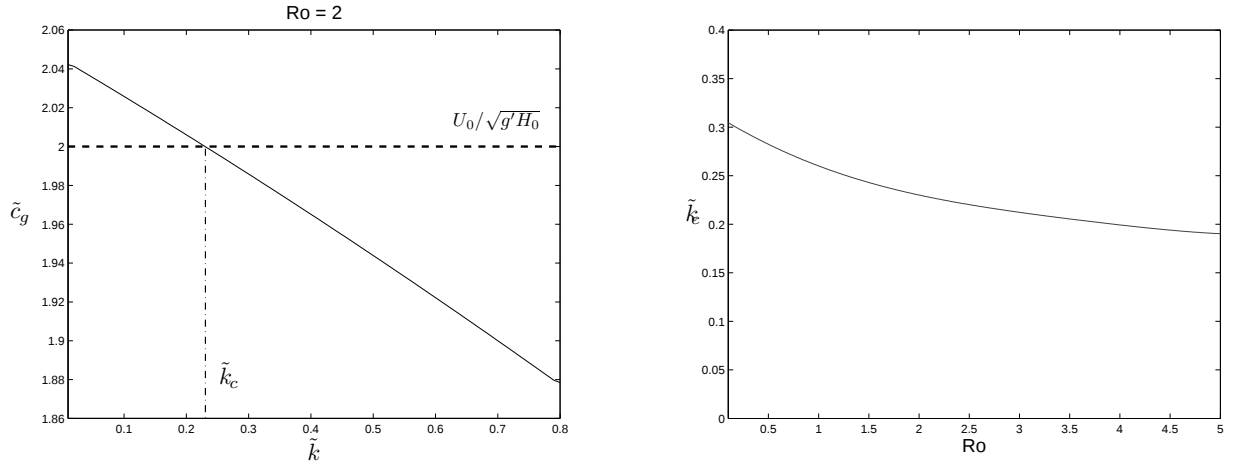


FIG. 11 – *Left panel* : the nondimensional group velocity of the emerging mode as a function of $\tilde{k}$ with $Ro = 2$. *Right panel* : the value of the critical wavelength $\tilde{k}_c$ as a function of the Rossby number.

wavelength $\tilde{k}_c$ as a function of the Rossby number. When $Ro \rightarrow 0$, the critical wavelength tends to $\tilde{k}_c^0 \sim 0.3$. We conjecture that at the initial stages of the spreading of the gravity current, the emitted wave packet is constrained in a way that its energy cannot propagate faster than the medium which supports the waves. Hence, the group velocity of the emerging wave has to be smaller than the nose propagation speed, and thus $\tilde{k} > \tilde{k}_c$. Since the Rossby number is small at the beginning of the spreading, this yields $\tilde{k} = \tilde{k}_c^0 \simeq 0.3$. The proposed scale selection mechanism is corroborated by the independence of the initial $\tilde{k}$ on δ (not shown).

6 Summary and discussion

In this paper, we describe the transient adjustment of a buoyant region of light water (a lens) initially at rest in the vicinity of the equator. For parameters typical of the Pacific warm pool, we show that this adjustment generates finite amplitude wave motions. The restoring force of the wave motions being the Coriolis force, the waves enter the class of inertial motions.

The adjustment of a buoyant lens is studied using the $1\frac{1}{2}$ -layer, reduced gravity model on the equatorial β -plane. High resolution finite volume techniques are applied to simulate the nonlinear evolution of the lens. We show that the lens spreads eastward in accord with the non-rotating gravity current dynamics, and its westward extrusion is split in two anticyclones. On the eastward gravity current, finite amplitude inertial motions with a well-defined wavelength emerge. The structure and the phase relation of the emerging

waves is shown to fit the linear theory of perturbations propagating on the background of zonally symmetric jet with outcropping isopycnals and constant velocity. A WKB theory indicates that the inertial wave are emitted during the early stage of the evolution of the lens.

It should be stressed that the wave motion we discussed, which is associated with the propagation of a buoyancy driven flow in the vicinity of the equator, was apparently unknown previously. So, the question is to know whether this wave motion is present in the *in situ* data. Let us focus on the symmetric wave modes. What is the minimum observation array required to detect it? In our simulations the signal along the equator is dominated by the buoyancy driven flow exhibiting a quasi-linear u -profile (see Fig. 3). Hence, the wave would hardly be detected in zonal velocity time-series along the equator. The analysis of meridional velocity time-series along the equator would not help either, because being symmetric, such wave has no v -signature along the equator. Nonetheless, the mechanism we discussed is such that at any moment of time, the length-scale of the wave is well defined. Therefore, the waves will more easily be detected by analysing the phase correlation between the current u , v and temperature T at distinct moorings located off the equator.

The second question is to know whether such waves can be distinguished from other wave motions. It has been noticed that the inertial wave motions associated with buoyancy driven flow near the equator share the same phase correlation pattern between u , v and h as westward propagating inertia-gravity waves [Gil82]. Nonetheless, we emphasize that the period of the wave is considerably longer. Indeed, using a local estimate of c_0 to obtain non-dimensional values, the emitted wave packet is such that $\tilde{k} \simeq 0.3$ and $\tilde{\omega} \simeq 1.5$. Using the same local estimate for c_0 , the westward propagating inertia-gravity waves with $\tilde{k} \simeq 0.3$ would exhibit $\tilde{\omega} = 1.8$ [Gil82]. At the beginning of the 1991-1992 ENSO event, [LCGM] observed inertia-gravity waves in the Pacific warm pool with a period of about 4 days which is consistent with the period estimated from the stratification profile. They also mentioned the presence of wave motions with a 8 days period, of unknown origin. Given the period obtained in section 3, we conjecture that the 8- day wave motions could be propagating modes on the eastward extruding warm pool.

This study shows that a buoyancy driven flow near the equator is coupled to inertial motions. If so, it is critical to understand what is the effect of the coupling on the slow dynamics of the flow. One can imagine both direct and indirect effects. On the one hand, the emergence of finite amplitude counterpropagating waves on a buoyancy driven flow raises the question of the average effect of the wave, such as the Stokes' drift, on the properties of the flow. We suggest that such effect could induce a reduction of the mass flux and as a consequence a reduction of the zonal heat transport by the gravity current. On the other hand, indirect effects are also foreseeable. The emission of inertial waves during the extrusion of the current will possibly result in an increase of the mixing within the pycnocline. This increased mixing might ultimately slow down the flow. Furthermore, the ocean being continuously stratified, such wave emission mechanism is likely to redistribute momentum vertically. Indeed the possible coupling between interfacial waves and internal waves discussed below could ultimately help the maintenance of equatorial jets such as the equatorial deep jets [Eri82].

A remarkable aspect of the wave motion discussed in this paper is its scale independence. Setting apart the effect of the wind stress, any thermohaline perturbation in the near-surface layer of the equatorial ocean will spread eastward. Given the depth H and

the density anomaly $\alpha = \Delta\rho/\rho$ of the perturbation, its extrusion velocity is of order $c_0 = \sqrt{\alpha g H}$ with H . If the ratio of Coriolis to pressure force on the meridional boundary of the perturbation is of order 1, then the rotational effects are important and the jet can support inertial motions. In particular, the wave emission mechanism we discuss is likely to play a role in the dynamics of the barrier layer. We conjecture that the sharp frontal interface observed by [SL97] at scale $0(10km)$ is a signature of inertial motions embedded within a buoyancy driven flow. Indeed [SL97] noted that the rotational effect might be of possible importance in the process they discussed. Note that the mechanism we studied in the present paper accounts only for the emission of the wave motion and not for its breaking and formation of frontal structures.

Some comments concerning the choice of the model are needed at this point of discussion. First, the dynamics described in this study is fundamentally inviscid. Still, we argue that the emergence of intermediate frequency motions during the spreading of a buoyant region of light water near the equator is not essentially modified by the mixing of tracer or momentum. Indeed, mixing within the pycnocline is likely to modify the velocity and the density of the gravity current. These effects would therefore modify the properties of the developing flow. But, our results suggest that the wave are emitted at the very early stage of the relaxation of the lens so that the mixing would probably only change the dispersion of the emitted waves. Likewise, friction may be easily included in the model but will not substantially change the adjustment scenario for high enough Reynolds numbers. Second, the reduced gravity approximation is a first order representation of both horizontal and vertical observed continuous stratification. As is well known, the intrusion of a mixed layer of buoyant water in a continuously stratified fluid can excite internal gravity waves [Sim82] which are different from the interfacial waves discussed in this paper. Depending on the ambient stratification, two distinct behaviors can occur. For most regimes, the internal gravity waves excitation only modifies the constant propagation speed of the intruding mixed layer [FS04]. Yet, in certain regimes, a coupling may occur between the interfacial waves and the internal waves [MLSM02]. Such coupling can modify the propagation of the intruding current. Further work is required to clarify this issue.

Third, the wind stress is missing in our discussion. Investigations are in process to understand how the wind forcing may affect the inertial motions during the spreading of equatorial gravity currents.

Acknowledgements We are grateful to François Bouchut for providing the rotating shallow water code and to Francis Poulin for helpful discussions concerning the collocation methods. Financial support of the French National program PATOM is gratefully acknowledged.

6.3 Conclusion

L'ajustement géostrophique d'un écoulement au repos constitué par un piège frontal équatorial donne lieu à trois types de mouvements :

- un dipole tourbillonnaire se propageant très lentement vers l'Ouest,
- un courant de gravité se propageant vers l'Est,
- des mouvements inertiels faiblement dispersifs se propageant sur le courant de gravité.

Ces trois types de mouvements correspondent typiquement aux mouvements sur le plan β équatorial classique (sans guide d'onde) à respectivement :

- des ondes de Rossby se propageant vers l'Est, éventuellement formant des reconnections de lignes de courant,
- un front d'onde de Kelvin équatoriale se propageant vers l'Est,
- des oscillations quasi-inertielles qui se maintiennent à l'endroit de la perturbation initiale.

Les mouvements inertiels, lorsqu'on ramène les problèmes aux échelles typiques pour l'océan Pacifique équatorial Ouest, ont des périodes de l'ordre de quelques jours qui correspondent à des périodes observées in situ [LCGM].

Chapitre 7

Résumé, conclusions et perspectives

Dans ce travail de thèse nous avons étudié plusieurs aspects du processus d'ajustement géostrophique non linéaire en présence des guides d'ondes qui sont le piégeage, partiel ou total, de la partie ondulatoire d'une perturbation. Différents types de piégeage d'ondes ont été considérés : le piégeage par une variation localisée de topographie (escarpement), par une côte, et par des fronts de densité aux moyennes latitudes et à l'équateur. Dans le cadre du modèle à gravité réduite de l'eau peu profonde en rotation, que nous avons systématiquement utilisé, les fronts de densité couplés sont modélisés par une région de fluide confiné en forme de lentille avec une profondeur qui s'annule aux bords et ainsi représentent un piège à ondes complet, alors que les guides d'ondes topographiques et côtiers sont des pièges à ondes incomplets, dans le sens qu'en plus des ondes de Kelvin double et des ondes de Kelvin côtière respectivement, des ondes d'inertie-gravité "libres" peuvent se propager à travers ces guides d'ondes. Le guide d'onde équatorial est aussi un piège complet dans le modèle à gravité réduite. Dans des modèles plus sophistiqués qui prendraient en compte la stratification de façon moins rudimentaire que dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation, les ondes piégées dans tous les guides d'ondes interagiront avec les ondes libres [Sut06], mais nous laissons l'étude de telles configurations plus complexes pour un travail futur (cependant, nous présentons un exemple de nouveau phénomène dû à la "semitransparence" d'un guide d'onde en Appendice). Il doit être souligné que, à l'inverse des modèles sophistiqués, le modèle de l'eau peu profonde permet un traitement numérique efficace à l'aide des schémas numériques aux volumes finis de nouvelle génération que nous avons mis à profit. Ces schémas, brièvement présentés dans partie 2.1, maintiennent les états stationnaires, et plus généralement, les états d'équilibre géostrophiques, et traitent sans problème les topographies et les dessèchements (annulation de la profondeur), et garantissent par construction une description appropriée de la formation des chocs et du déferlement. Nous avons considérablement utilisé ce schéma pour simuler l'ajustement géostrophique non linéaire incluant des phénomènes de déferlement.

Nous avons montré que pour tous les guides d'ondes la présence d'ondes piégées modifie substantiellement le scénario de l'ajustement. L'effet le plus spectaculaire observé dans tous les cas est la formation de structures cohérentes parmi les ondes piégées, et les propriétés spécifiques reliées au transport et au mélange le long des guides d'ondes correspondants. La nature de ces structures cohérentes dépend essentiellement des propriétés dispersives des ondes piégées. Ainsi, pour les ondes de Kelvin double dispersives et les ondes se propageant sur les fronts de densité couplés, aussi bien que pour les ondes de Rossby équatoriales, l'évolution non linéaire mène à des reconnections des lignes de cou-

rant et à la formation de tourbillons secondaires qui piègent les traceurs. En fonction de la configuration, ces tourbillons peuvent soit transporter le traceur en l'éloignant de la localisation de la perturbation initiale le long du guide d'onde (piégeage topographique), soit quasiment interrompre le transport "normal" le long des lignes de courant de l'écoulement initial (piégeage isopycnal), soit redistribuer le traceur à l'intérieur du piège (piégeage par le front de densité équatorial). Pour les ondes de Kelvin côtières non dispersives l'évolution nonlinéaire aboutit au déferlement : la formation de fronts de Kelvin avec les zones correspondantes d'intensification du mélange, et au dépôt de vorticité potentielle correspondant à la formation d'un courant secondaire le long de la côte.

Le processus d'ajustement dans le piège d'onde complet constitué par le front de densité en forme de lentille dépend de la stabilité de l'état ajusté sous-jacent, qui dans notre étude était le courant zonal équilibré, à la fois aux moyennes latitudes (plan f) et sur le plan β équatorial. Les perturbations stables continuent à se propager dans le piège (se dispersant ou éventuellement déferlant, selon leurs propriétés de dispersion), tandis que les perturbations instables peuvent mener à une réorganisation de l'écoulement durant la phase nonlinéaire du développement de l'instabilité. Par conséquent, une analyse de stabilité linéaire des  tats équilibrés devait être faite et représente une partie inhérente du travail présenté ici. En utilisant une méthode pseudospectrale de collocation présentée brièvement dans la partie 2.2.2, nous nous avons pu vérifier et compléter les résultats existants sur la stabilité des courants sur le plan f , et obtenir de nouveaux résultats pour les courants équatoriaux. En initialisant l'ajustement géostrophique nonlinéaire avec les modes instables, quand ils existent (n'importe quelle donnée initiale, sauf concue spécialement, aurait une projection non nulle sur ces modes), nous avons montré que l'évolution nonlinéaire de l'instabilité réorganise complètement l'écoulement et l'éloigne de l'état équilibré stationnaire initial pour l'amener vers un état non stationnaire bien qu'équilibré lui aussi.

Une autre série de conclusions concernant ce travail concerne la séparation des mouvements rapides (non équilibrés) et lents ( quilibr s), qui est une question standard dans l'étude des ajustements. Dans le cas de la coexistence d'ondes libres et d'ondes piégées (guide d'ondes topographique et côtier dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation), en dépit du fait que le scénario de l'ajustement est modifié pour le sous ensemble des mouvements équilibrés, nous confirmons la séparation des mouvements équilibrés, qui incluent dans les configurations mentionnées ci-dessus les ondes piégées, des ondes d'inertie-gravité rapides. Néanmoins, la vorticité potentielle (VP), qui est un indicateur des mouvements vorticaux équilibrés, est générée par le déferlement des ondes de Kelvin côtière ( quilibr es, mais sans anomalie de VP, par opposition aux ondes d'inertie gravité qui sont non équilibrées et sans anomalie de VP).

Le travail futur consistera en l'ajout systématique des effets de la stratification à toutes les configurations étudiées dans cette thèse. La première étape sera le passage du modèle à gravité réduite à une couche et demie au modèle complet à deux couches, et ensuite aux équations primitives complètes stratifiées. Les interactions entre les modes barotropes et les modes baroclines deviennent ainsi possible et seront étudiées pour les guides d'ondes en question. Par exemple, pour les fronts de densité couplés aux moyennes latitudes et à l' quateur le premier effet de la stratification sera de déverrouiller le piégeage d'ondes et permettre les échanges d'énergie entre les ondes piégées et les ondes libres. Pour le guide d'ondes topographique, le rôle des effets baroclines sera aussi étudié.

Summary, conclusions and future work

In the present thesis we addressed various aspects of the geostrophic adjustment process in the nonlinear regime in the presence of the waveguides which are trapping, partially or entirely, the wave part of the perturbation. Different types of wave trappings were considered : trapping by a localized topography change (escarpment), by a coastal line, and by density fronts in midlatitudes and at the equator. Within the framework of the reduced gravity rotating shallow water model, which we were systematically using, the coupled density fronts are modelled by a confined lens-like fluid region with terminating depth and, thus represent a complete wave-trap, while the topographic and the coastal waveguides are incomplete wave-traps, in the sense that along with trapped double Kelvin and Kelvin waves, respectively, there exist "free" inertia-gravity waves which may propagate across the waveguide. The equatorial waveguide is also a complete trap in reduced gravity model. In more sophisticated models which would take into account the stratification effects in a less rudimentary than in rotating shallow water model way, trapped waves in all of the waveguides will be interacting with the free waves [Sut06], but we postpone the study of such more complex configurations for a future work. (We however provide an example of new phenomena arising due to "semitransparency" of the waveguide in Appendix). It should be stressed that, unlike the more sophisticated models, the rotating shallow water one allows for efficient and reliable numerical treatment with the help of the new generation of well-balanced finite-volume numerical schemes which we entirely profited from. These schemes, briefly presented in the thesis, maintain the stationary and, more generally, the geostrophically balanced states, have no problems with treating topography and drying (terminating depth), and by construction guarantee a proper description of wave breaking and shock formation. We were extensively using such schemes for simulating fully nonlinear geostrophic adjustment including wave breaking phenomena.

We have shown that for all waveguides the presence of the trapped waves substantially modifies the scenario of adjustment. The most spectacular feature observed in all cases was formation of coherent structures in the sector of trapped waves, and the related specific transport and mixing properties along the corresponding waveguides. The nature of these coherent structures depends essentially on the dispersion properties of the trapped waves. Thus, for dispersive double Kelvin waves and waves propagating along the coupled density front, as well as for the equatorial Rossby waves, the nonlinear evolution leads to reconnection of the streamlines and formation of secondary vortices which trap tracers. Depending on the configuration, these vortices may either carry the tracer away from the location of initial perturbation along the waveguide (topographic wave-trap), or practically interrupt the "normal" transport along the streamlines of the initial flow (isopycnal wave-trap), or redistribute the tracer inside the trap (equatorial density front trap). For nondispersive coastal Kelvin waves the nonlinear evolution results in breaking, formation of the Kelvin fronts with corresponding enhanced mixing zones, and the potential vorticity deposit with corresponding secondary along-coast jet formation.

The adjustment process in the full lens-like density front wave-trap crucially depends on the stability of the underlying adjusted state, which in our study was the balanced zonal jet, both at the midlatitude f -plane and at the equatorial beta-plane. Stable perturbations would keep running in the trap (dispersing or eventually breaking, according to their dispersion properties), while unstable ones may lead to a reorganization of the flow during nonlinear stage of developing instability. Therefore, an accurate analysis of linear stability

of balanced states was to be done and represents an inherent part of the present work. By using a pseudospectral collocation method briefly presented in the thesis, we were able to benchmark and complete the existing results on the stability of the f-plane jets, and get some new ones for equatorial ones. By initializing the fully nonlinear adjustment with the unstable modes, when they exist (any initial data, unless specially prepared, would have nonzero projection on such modes), we have shown that the nonlinear evolution of instability completely reorganizes the flow and drives it off the initial stationary balanced state towards a nonstationary one, although balanced too.

Another series of conclusions of the present work concerns the separation of fast (unbalanced) and slow (balanced) motions, which is a standard question in adjustment studies. In the case of co-existence of free and trapped waves (topographic and coastal waveguides in the rotating shallow water model), in spite of the fact that the scenario of adjustment is modified in the sector of balanced motions, we confirm the separation of balanced motions, which include in the above-mentioned configurations the trapped waves, from the fast inertia-gravity waves. Nevertheless, the potential vorticity (PV), which is an indicator of the balanced vortex motion, is generated by breaking coastal Kelvin waves (balanced, but PV-anomaly free, in contradistinction with unbalanced and PV-anomaly free inertia-gravity waves).

The future work will consist in systematic addition of the stratification effects to all configurations studied in the present thesis. The first step will be passing from the one-layer reduced gravity model to the full two-layer model, and then to the full stratified primitive equations. The interactions between the baroclinic and the barotropic modes thus become possible and will be studied for the waveguides in question. For example, for the coupled density fronts in midlatitudes and at the equator, the first effect of the stratification will be "unlocking" the wave-trap and allowing the energy exchanges of the waveguide modes with the "free" modes. For the topographic waveguides the role of the baroclinic effects will be also studied.

Annexe A

Complément au chapitre 3

A.1 Résonance ondes topographiques piégées et ondes de Rossby

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'évolution nonlinéaire des ondes topographiques piégées par la topographie formant un piège incomplet : les ondes libres d'inertie-gravité pouvaient aussi se propager librement en présence de ce piège. En ajoutant un toit rigide à l'escarpement topographique, on forme un piège complet : seules les ondes piégées existent dans ce système. En se plaçant alors sur le plan β , on permet à une nouvelle classe d'ondes libres de se propager dans le guide d'ondes topographiques : les ondes de Rossby. Nous allons étudier les conditions d'interaction résonnante entre ondes topographiques piégées et ondes de Rossby libres.

On se place dans le cadre de la théorie linéaire sur le plan β , en présence d'un toit rigide, la relation de dispersion des ondes de Rossby est alors :

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \quad (\text{A.1})$$

où k_x et k_y sont les nombres d'ondes dans les directions zonales et méridiennes respectivement et β est tel que $f = f_0 + \beta y$. Nous allons examiner l'éventualité d'une interaction résonnante entre des ondes de Rossby et des ondes topographiques.

Les conditions pour qu'il y ait résonance sont :

$$k_1 + k_2 = k_R \quad (\text{A.2})$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_R \quad (\text{A.3})$$

où k_1 et k_2 désignent les nombres d'ondes le long de la pente de deux ondes topographiques (si $H = H(y)$ alors la direction qu'on appelle le long de la pente est la direction x), k_R désigne le nombre d'onde de Rossby dans la direction de la pente. ω_1 et ω_2 désignent les pulsations des deux ondes topographiques. ω_R désigne la pulsation de l'onde de Rossby.

On se place dans la situation où les ondes topographiques se propagent dans la même direction et le même sens que les ondes de Rossby, c'est-à-dire que la variation de profondeur s'effectue dans la direction méridienne, avec l'eau plus profonde au Sud et moins

profonde au Nord. Dans ce cas, on peut réécrire la relation de dispersion des ondes de Rossby sous la forme :

$$\omega_R = -\frac{\beta k_R}{k_R^2 + l^2} \quad (\text{A.4})$$

On cherche la condition pour qu'une résonance puisse se produire. On reformule donc notre question :

Existe-t-il un nombre d'onde méridien l tel que les relations (A.2) et (A.3) soient vérifiées ?

Ayant identifié deux couples (k_1, ω_1) , (k_2, ω_2) d'ondes topographiques, on peut calculer le couple (k_R, ω_R) correspondant. Mais ce couple (k_R, ω_R) doit vérifier la relation de dispersion des ondes de Rossby (A.4). Pour cela, il faut que l vérifie :

$$l = \pm \sqrt{-k_R^2 - \frac{\beta k_R}{\omega_R}} \quad (k_R < 0) \quad (\text{A.5})$$

Cette relation ne sera vérifiée, avec $l \in \mathbf{R}$, que pour des paramètres particuliers, ce sont ces paramètres que nous recherchons.

Nous allons maintenant présenter la théorie linéaire pour les ondes topographiques, puis la confrontation de celle-ci avec les ondes de Rossby pour voir si une résonance est possible.

Les équations de la théorie linéaire sur le plan β avec un toit rigide s'écrivent :

$$u_t - (f_0 + \beta y)v = -P_x \quad (\text{A.6})$$

$$v_t + (f_0 + \beta y)u = -P_y \quad (\text{A.7})$$

$$(Hu)_x + (Hv)_y = 0 \quad (\text{A.8})$$

où u et v sont les vitesses zonales et méridiennes, P est la pression, H est la profondeur du fluide. H est indépendant du temps car la surface est supposée rigide mais dépend de y dans la mesure où nous avons choisi une orientation de pente permettant la propagation des ondes topographiques dans la même direction et le même sens que les ondes de Rossby, c'est à dire vers l'Ouest.

On pose $H(y) = \bar{H}(1 - \delta \frac{y}{L})$ où $\delta = \frac{H_+ - H_-}{H_+ + H_-}$ est le coefficient de la pente et $\bar{H} = \frac{H_+ + H_-}{2}$ est la hauteur moyenne de fluide, avec H_+ la profondeur maximale (au Sud), et H_- est la profondeur minimale (au Nord).

On adimensionne le problème avec :

$$x = \tilde{x}L, \quad y = \tilde{y}L, \quad P = \tilde{P}P_0, \quad t = \tilde{t}f_0^{-1}, \quad \beta = \frac{f_0}{R_T}, \quad u = \tilde{u}U, \quad v = \tilde{v}U, \quad \tilde{H}(\tilde{y}) = 1 - \delta \tilde{y}$$

où L est la largeur de la pente, $R_T \sim 6000 \text{ km}$ est le rayon de la terre, f_0 est le paramètre de Coriolis à la latitude considérée (il est nul à l'équateur) et U une vitesse caractéristique du problème. Les équations adimensionnées s'écrivent :

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} - (1 + \frac{L}{R_T} \tilde{y}) \tilde{v} = -\frac{P_0}{LU f_0} \tilde{P}_{\tilde{x}} \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{v}_{\tilde{t}} + (1 + \frac{L}{R_T} \tilde{y}) \tilde{u} = -\frac{P_0}{LU f_0} \tilde{P}_{\tilde{y}} \quad (\text{A.10})$$

$$(\tilde{H} \tilde{u})_{\tilde{x}} + (\tilde{H} \tilde{v})_{\tilde{y}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

On pose $\epsilon = \frac{P_0}{LUf_0}$ et $\gamma = \frac{L}{R_T}$ le rapport de l'échelle horizontale de la topographie au rayon terrestre. On réécrit le système en omettant les $\sim$:

$$u_t - (1 + \gamma y)v = -\epsilon P_x \quad (\text{A.12})$$

$$v_t + (1 + \gamma y)u = -\epsilon P_y \quad (\text{A.13})$$

$$(Hu)_x + (Hv)_y = 0 \quad (\text{A.14})$$

Avec les équations (A.12) et (A.13), on exprime les vitesses en fonction de la pression, pour obtenir une équation pour la pression seule avec (A.14) :

$$\left[\partial_{tt}^2 + (1 + \gamma y)^2 \right] u = -\epsilon [P_{xt} + (1 + \gamma y)P_y] \quad (\text{A.15})$$

$$\left[\partial_{tt}^2 + (1 + \gamma y)^2 \right] v = -\epsilon [P_{yt} - (1 + \gamma y)P_x] \quad (\text{A.16})$$

$$\left[\partial_t(-H(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) - H_y \partial_y) + (H\gamma + H_y(1 + \gamma y))\partial_x \right] P = 0 \quad (\text{A.17})$$

On traite dans un premier temps les deux régions où H est constant.

L'équation (A.17) s'écrit lorsque $H_y = 0$:

$$\left[\partial_t(-H(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2)) + H\gamma \partial_x \right] P = 0 \quad (\text{A.18})$$

Si on injecte une solution de la forme

$$P(x, y, t) = A e^{ly+i(kx-\omega t)} \quad (\text{A.19})$$

où A est une constante, dans (A.18) on obtient :

$$\left[-i\omega(-H(-k^2 + l^2)) + ik\gamma H \right] A = 0 \quad (\text{A.20})$$

Ce qui donne finalement :

$$l = \pm \sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} \quad (\text{A.21})$$

Il n'existera une onde piégée par la topographie, c'est-à-dire avec une décroissance exponentielle à l'extérieur de la pente, si et seulement si la pression et les vitesses ne divergent pas à l'infini, côté Nord et côté Sud. Notons que si l est imaginaire, la solution (A.19) décrira une onde qui se propage dans les deux directions x et y , donc qui n'est pas piégée par la topographie (qui est localisée le long de l'axe x). Pour savoir quel valeur de l dans (A.21) est physique, on va d'abord regarder séparément les deux régions où l'on souhaite déterminer la solution (A.19).

Région $y < -1$

La condition physique primordiale dans cette région est que la pression ne doit en aucun cas diverger lorsque $y \rightarrow -\infty$. Ainsi l doit impérativement être positif. La solution dans cette région s'écrit donc :

$$P_+(x, y, t) = A_+ e^{\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} y + i(kx - \omega t)} \quad (\text{A.22})$$

Région $y > 1$

Avec le même argument de non-divergence de la pression quand $y \rightarrow \infty$, on obtient :

$$P_-(x, y, t) = A_- e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} y + i(kx - \omega t)} \quad (\text{A.23})$$

On va maintenant s'intéresser à la région où H varie.

Région $-1 < y < 1$

On va chercher une solution se propageant le long de la topographie, on pose donc :

$$P(x, y, t) = F(y)e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{A.24})$$

et nous allons chercher à déterminer $F(y)$, la structure transversale de l'onde piégée par la topographie. On injecte la forme (A.24) dans (A.17), et on obtient une équation différentielle du second ordre pour F :

$$F'' + \frac{H_y}{H}F' + \left[\frac{k}{\omega}(\gamma + (1 + \gamma y)\frac{H_y}{H}) - k^2 \right] F = 0 \quad (\text{A.25})$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtiendra la relation de dispersion $\omega = f(k, \gamma, \delta)$, et la structure transversale F des ondes piégées. Pour cela nous devons d'abord écrire les conditions aux limites nécessaire à la résolution de l'équation (A.25). Cette équation étant valable dans la région $-1 < y < 1$, les conditions aux limites doivent s'exprimer en $y = -1$ et $y = 1$.

Conditions aux limites

Nous devons assurer le raccordement de la solution onde piégée sur la pente avec les solutions (A.22) et (A.23) pour les régions planes. Le flux de masse et la pression doivent être continus en $y = -1$ et $y = 1$. La continuité de la pression s'écrit

$$\begin{aligned} P_+(x, y = -1, t) &= F(-1)e^{i(kx - \omega t)} \\ P_-(x, y = +1, t) &= F(+1)e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

et finalement, on obtient le premier jeu de conditions aux limites :

$$F(-1) = A_+ e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}}} \quad (\text{A.26})$$

$$F(+1) = A_- e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}}} \quad (\text{A.27})$$

On prescrit maintenant la continuité du flux de masse et, comme la surface est rigide et que la profondeur du fluide H est continue en $y = -1$ et $y = 1$ par définition, cela revient à prescrire la continuité de la vitesse méridienne v . On écrit la forme de v (identique à celle de la pression) :

$$v_{\pm} = V_{\pm} e^{\pm \sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} y + i(kx - \omega t)} \quad \text{pour } y < -1 \quad \text{et } y > 1 \quad \text{respectivement,}$$

$$\text{et } v = V(y)e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{pour } -1 < y < 1.$$

On commence par injecter (A.22), (A.23) et (A.24) dans l'expression de v de (A.16), ce qui donne :

$$V_+ = \frac{i\epsilon}{(1 + \gamma y)^2 - \omega^2} \left[(1 + \gamma y)k + \omega \sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} \right] A_+ e^{\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} y + i(kx - \omega t)}$$

$$V_- = \frac{i\epsilon}{(1 + \gamma y)^2 - \omega^2} \left[(1 + \gamma y)k - \omega \sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} \right] A_- e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} y + i(kx - \omega t)}$$

$$V = \frac{i\epsilon}{(1 + \gamma y)^2 - \omega^2} [(1 + \gamma y)kF + \omega F'] e^{i(kx - \omega t)}$$

Les conditions de continuité du flux de masse s'écrivent donc :

$$V_+(-1) = V(-1) : F'(-1) = \sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} A_+ e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}}} \quad (\text{A.28})$$

$$V_- (+1) = V(+1) : F'(+1) = -\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}} A_- e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\gamma k}{\omega}}} \quad (\text{A.29})$$

Nous pouvons alors résoudre l'équation (A.25) avec les conditions aux limites (A.26), (A.27), (A.28) et (A.29), à l'aide d'une méthode de tir, par exemple. On représente sur la figure (A.1), la relation de dispersion des ondes topographiques (paramètres $\gamma = 0.001$, $\delta = 0.001$ fixés) et le mode fondamental des ondes de Rossby pour différentes valeurs de l . On voit sur cette figure qu'il n'y a pas de résonance possible, c'est à dire que l'on ne peut trouver de couples $(k_1, \omega_1), (k_2, \omega_2)$ vérifiant les relations (A.2)(A.3)

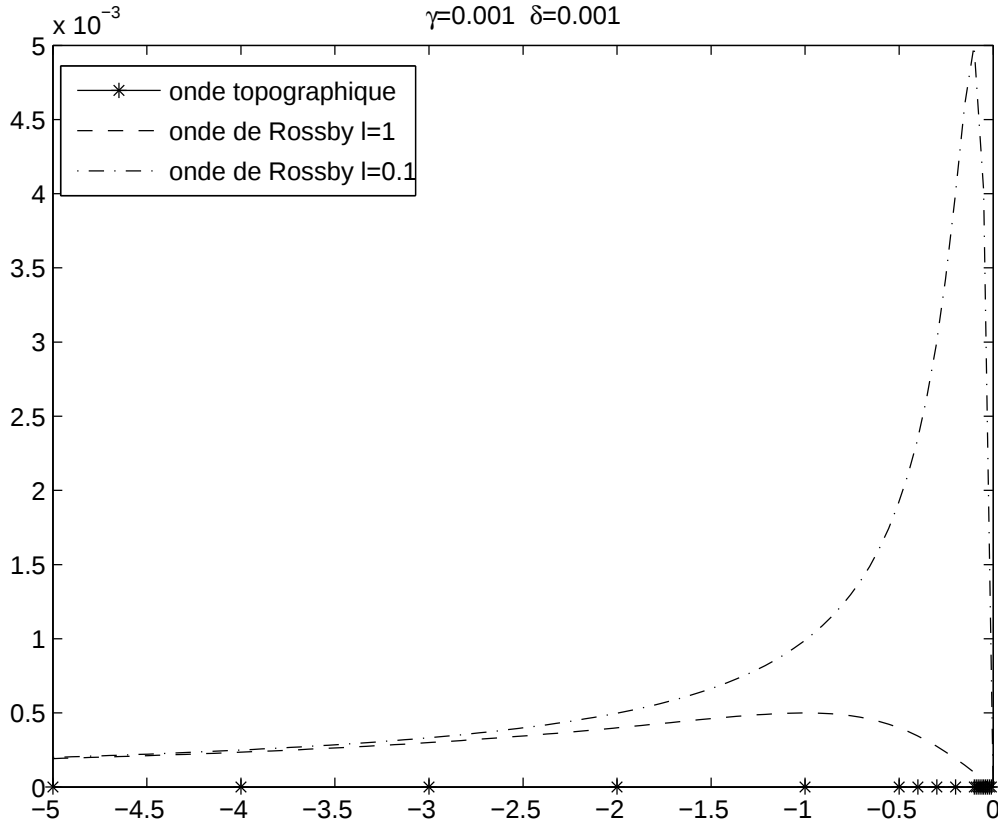


FIG. A.1 – Relation de dispersion d'une onde topographique et des ondes de Rossby avec $l = 0.1$ et $l = 1$, pour $\gamma = 0.001$ et $\delta = 0.001$. Les valeurs de pulsation pour l'onde topographique sont très petites par rapport aux valeurs de pulsation pour les ondes de Rossby représentées.

Sur la figure (A.2), on voit par contre qu'il est possible d'avoir des résonances. Un

exemple de couple résonant est : $(k_1 = -0.5, \omega_1 = 11.17 \cdot 10^{-4})$, $(k_2 = -0.09, \omega_2 = 4.45 \cdot 10^{-4})$ et $(k_R = -0.59, \omega_R = 15.62 \cdot 10^{-4}, l_R = 0.17)$.

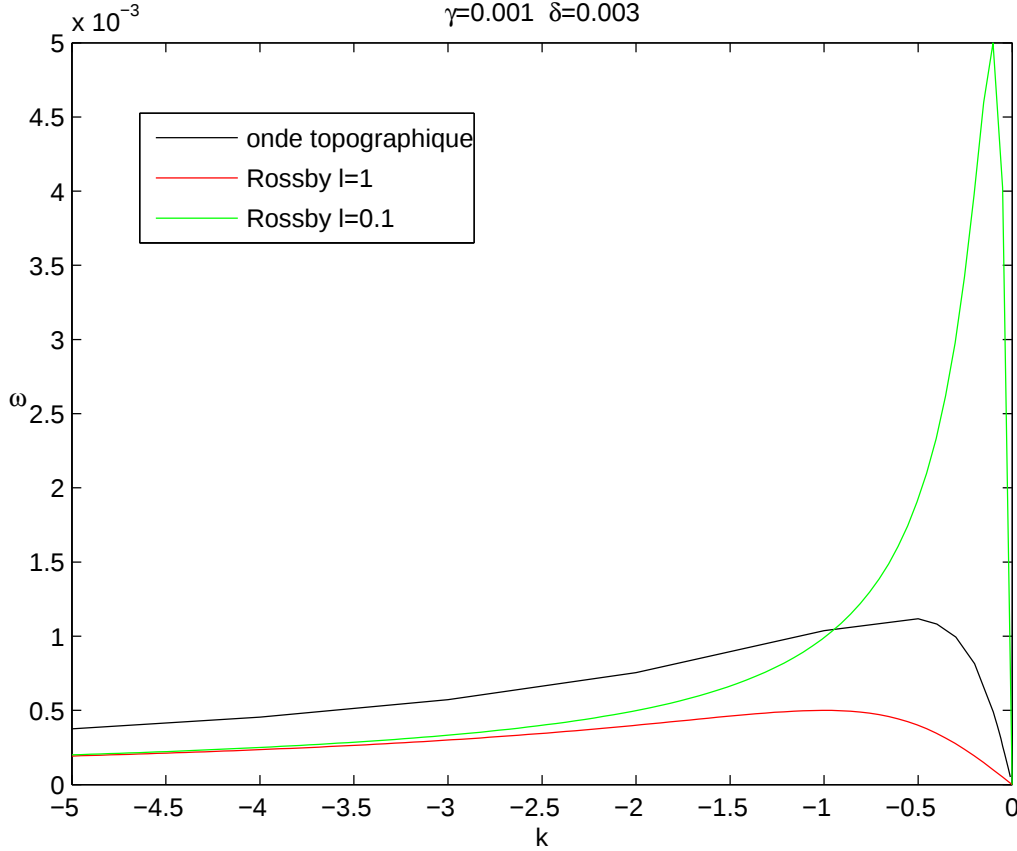


FIG. A.2 – Relation de dispersion d'une onde topographique et des ondes de Rossby avec $l = 0.1$ et $l = 1$, pour $\gamma = 0.001$ et $\delta = 0.003$. Au moins une résonance est possible dans cette configuration (cf texte).

Numériquement, on retrouve le fait que pour que la résonance existe il faut que γ et δ soient du même ordre de grandeur, ce qui est un argument physique basique puis qu'on met en concurrence deux processus l'un gouverné par γ , l'autre par δ et γ , mais on s'aperçoit aussi que cela n'est pas suffisant. Au vu de ces figures, on peut seulement conclure que la résonance entre 2 ondes topographiques et une onde de Rossby peut effectivement avoir lieu. (On discutera plus loin des topographies réelles de l'océan mondial étant susceptible de supporter une telle résonance.) Mais avant d'aller plus loin, il faut noter que cette résonance a lieu sur une gamme très fine de paramètre. On rappelle que la sélection se fait par la relation (A.5), c'est à dire qu'il faut que :

$$\omega_R < -\frac{\beta}{k_R}, \quad (k_R < 0) \quad (\text{A.30})$$

où ω_R et k_R sont donnés par les relations (A.2) et (A.3). Par conséquent ce mécanisme de résonance ne sera en aucun cas "omniprésent" pour une topographie capable théoriquement d'accueillir cette résonance.

Océan mondial

Les topographies réelles dans l'océan mondial susceptibles d'accueillir cette résonance seront des pentes orientées zonalement, le côté peu profond étant au Nord et le côté profond étant au Sud. Un exemple de topographie réelle dans cette configuration est l'escarpement Mendocino qui a notamment été étudié au sujet des ondes piégées par la topographie par Mysak (1969,[Mys69]) et Willmott et Grimshaw (1991, [WG91]). Une estimation grossière du coefficient de sa pente est 0.005.

Conclusion

Le piège complet (c'est-à-dire où seules les ondes piégées peuvent exister) constitué par la topographie localisée en présence du toit rigide devient incomplet sur le plan β : les ondes libres de Rossby peuvent se propager et interagir avec les ondes topographiques piégées. Cette interaction peut être résonante, si les relations (A.2 - A.3) sont vérifiées. Par analogie avec les travaux de Reznik & Zeitlin à l'équateur [RZ07], on peut s'attendre à ce qu'une onde de Rossby barotrope interagisse avec le guide d'ondes topographique pour exciter deux ondes topographiques piégées.

Annexe B

Complément au chapitre 4

B.1 Complément : évolution d'un tourbillon elliptique isolé

La série de tourbillons mise en évidence dans l'article précédent est générée lors du développement de l'instabilité des fronts de densité couplés. Il s'agit d'une série de tourbillons périodiques avec des tourbillons tous identiques. Nous allons donc isoler un seul tourbillon et étudier son évolution propre nonlinéaire. Ce tourbillon a les caractéristiques d'être en rotation à vitesse quasiment constante, le profil de sa profondeur est parabolique, son profil de vitesse est linéaire et la profondeur du fluide s'annule sur son bord. Il se trouve que les rodons ont aussi ces caractéristiques (mais leurs paramètres sont différents, cf partie 4.2). Les rodons sont des solutions exactes des équations de l'eau peu profonde en rotation ([CR84], [CRHN85]) : ce sont des tourbillons elliptiques anticycloniques de forme fixe autour desquels la profondeur s'annule (situation d'assèchement), qui sont en rotation dans le sens horaire à vitesse constante. Les rodons dans le modèle à gravité réduite à une couche et demie modélisent simplement la situation où une accumulation d'eau chaude ou peu salée à la surface de l'océan forme une lentille, comme par exemple les anneaux du Gulf Stream ou la langue d'eau chaude du Pacifique équatorial Ouest.

Nous allons simuler l'évolution sur des temps longs d'un rodon non perturbé en se plaçant sur le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω du rodon. Le modèle de l'eau peu profonde dans ce référentiel s'écrit [Rip87] :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y - f_* v + g h_x &= -\Omega_*^2 x \\ v_t + uv_x + vv_y + f_* u + g h_y &= -\Omega_*^2 y \\ h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $f_* = f - 2\Omega$ est le paramètre de Coriolis sur le plan en rotation à la vitesse Ω , et $\Omega_* = (\frac{1}{2}f)^2 - (\frac{1}{2}f_*)^2 = \Omega(f - \Omega)$ est la force centrifuge provenant de la différence des accélérations centrifuges entre le plan f et le plan f_* . Le rodon est une solution stationnaire des équations B.1 et peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} u = \frac{a}{b} \Omega_* y \\ v = -\frac{b}{a} \Omega_* x \\ h = \frac{1}{2} a b \Omega_* f_* [1 - (\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2] \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

à l'intérieur de l'ellipse définie par $h = 0$, avec a , b les longueurs des petit et grand demi-axes.

On présente la simulation du rodon de paramètres $a = 1$, $b = 4$, $\Omega = 0.1$ sur la figure B.1. L'échelle de temps de la simulation est f_*^{-1} . Le rodon initialisé est la solution

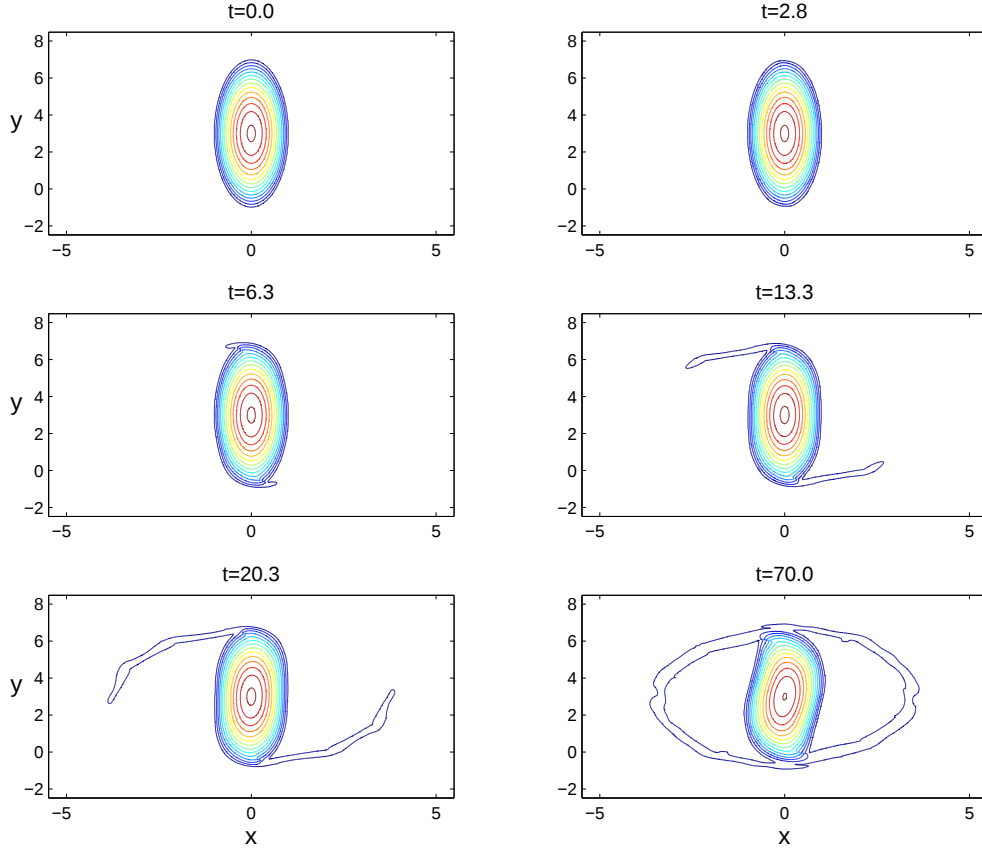


FIG. B.1 – Evolution nonlinéaire du rodon non perturbé avec $a = 1$, $b = 4$ et $\Omega = 0.1$. Les isobares sont représentées à partir de 0.005 et par pas de 0.05 (nb. Les deux axes n'ont pas la même échelle).

exacte non perturbée. On voit se développer une paire de filaments dans la direction opposée au sens de rotation qu'aurait le rodon sur le plan f . Ce processus peut être la conséquence de l'instabilité prédite par Ripa [Rip87] sous l'hypothèse que les erreurs dues à la discrétisation du rodon sur la grille rectangulaire utilisée dans la méthode numérique sont en fait des perturbations auxquelles les rodons sont instables. La profondeur du fluide dans les filaments est faible et la quantité de mouvement maximale présente dans les filaments est de l'ordre de 2% de la quantité de mouvement maximale dans le rodon. On constate aussi que le rodon à $t = 70$ a tourné de quelques degrés dans le sens horaire par rapport à son orientation initiale et que les filaments se sont rejoints, formant un anneau.

Un rodon circulaire simulé par la même méthode est bien stationnaire, il ne développe pas de filaments sur les échelles de temps simulées ($\sim 100f_*^{-1}$), en accord avec sa stabilité nonlinéaire démontrée par [Rip87]. En réalisant des simulations de rodons avec différentes excentricités (non illustré ici), on trouve que des filaments sont toujours formés sauf lorsque l'excentricité est nulle, les filaments se formant d'autant plus tôt que

l'excentricité est élevée. La formation de la paire de filaments pourrait être due à une instabilité numérique étant donné que l'erreur faite sur la discrétisation du rodon initial est relativement importante sur une grille rectangulaire. Dans ce cas l'utilisation d'une grille définie en coordonnées polaires et un schéma numérique adapté pourrait exclure ce problème. D'un autre côté la formation des filaments pourrait trouver son origine dans une instabilité physique. En effet, Ripa [Rip87] a montré que les rodons circulaires sont stables aux perturbations d'amplitude finies, quel que soit le nombre de Rossby mais que les rodons d'excentricité non-nulle sont linéairement instables à des perturbations de pression et de vitesse qui s'écrivent sous forme de polynômes en coordonnées rectangulaires dont le degré du polynôme de la perturbation de pression est au moins égal à 3, ou le degré du polynôme de la perturbation de la vitesse est au moins égal à 2. Plus les degrés de ces polynômes sont élevés et plus nombreux sont les rodons d'excentricité différentes qui sont linéairement instables.

Cette connaissance du caractère instable des rodons nous laisse penser que la formation des filaments pourrait être due à l'excitation d'une telle instabilité par la perturbation que constitue l'erreur initiale faite lors de la discrétisation sur la grille rectangulaire.

On pourrait initialiser un rodon perturbé avec une perturbation localisée, dans le but d'exciter un maximum de "modes" instables et peut être ainsi observer le développement de cette instabilité. Cette instabilité pourrait se manifester par le développement des filaments comme on l'a vu ci-dessus ou bien d'une manière différente, par exemple en scindant le tourbillon initial en plusieurs tourbillons.

Bibliographie

- [ABB⁺04] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM Journal on Sci. Comp.*, 25 :2050–2065, 2004.
- [AG01] M.H. Alford and M.C. Gregg. Near-inertial mixing : modulation of shear, strain and microstructure at low latitude. *Journal of Geophysical Research*, 106(C8) :16947–16968, 2001.
- [All96] S.E. Allen. Rossby adjustment over a slope in a homogeneous fluid. *J. Phys. Oceanogr.*, 26 :1646–1654, 1996.
- [Bal99] N.J. Balmforth. Shear instability in shallow water. *J. Fluid Mech*, 387 :97–127, 1999.
- [Ben68] T.B. Benjamin. Gravity currents and related phenomena. *Journal of Fluid Mechanics*, 31, 1968.
- [Ben03] E. S. Benilov. Short-wave, localized disturbances in jets, with application to flows on a beta plane with topography. *Physics of Fluids*, 15(3) :718–729, 2003.
- [Blu67] W. Blumen. On nonlinear geostrophic adjustment. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 24(4) :325–332, 1967.
- [Blu72] W. Blumen. Geostrophic adjustment. *Reviews of geophysics and space physics*, 10(2) :485–528, 1972.
- [BLZ04] F. Bouchut, J. Le Sommer, and V. Zeitlin. Frontal geostrophic adjustment and non-linear-wave phenomena in one dimensional rotating shallow water. Part 2 : High resolution numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 514 :35–63, 2004.
- [BLZ05] F. Bouchut, J. Le Sommer, and V. Zeitlin. Breaking of balanced and unbalanced equatorial waves. *Chaos*, 15(1) :13503–13521, 2005.
- [BMN97] A. Babin, A. Mahalov, and B. Nicolaenko. Global splitting and regularity of rotating shallow-water equations. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 16(5) :725–754, 1997.
- [Bou04] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics series. Birkhauser, 2004.

- [Bou07] F. Bouchut. *Efficient numerical finite-volume schemes for shallow water models* in *Nonlinear dynamics of rotating shallow water : methods and advances*. V. Zeitlin, ed., Elsevier, 2007. p.191-258.
- [BRP02] S. Belamari, J.-L. Redelsperger, and M. Pontaud. Dynamic role of a westerly wind burst in triggering an equatorial pacific warm event. *Journal of Climate*, 16(12) :1869–1890, 2002.
- [BT95] E. Boss and L. Thompson. Energetics of nonlinear geostrophic adjustment. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 :1521–1529, 1995.
- [BW95] W. Blumen and R. Wu. Geostrophic adjustment : frontogenesis and energy conversion. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 :428–438, 1995.
- [CB01] J.M. Chagnon and P.R. Bannon. Hydrostatic and geostrophic adjustment in a compressible atmosphere : initial response and final equilibrium to an instantaneous localized heating. *J. Atm. Sci.*, 58 :3776–3792, 2001.
- [Cha48] J.G. Charney. On the scale of the atmospheric motions. *Geofys. Publ. Oslo*, 17(2) :1–17, 1948.
- [CLSC⁺99] G.F. Carnevale, S.G. Llewellyn Smith, F. Crisciani, R. Purini, and R. Serravall. Bifurcation of a coastal current at an escarpment. *J. Phys. Oceanogr.*, 29 :969–985, 1999.
- [Con95] S.A. Condie. Descent of water masses along continental slopes. *J. Mar. Res.*, 53 :897–928, 1995.
- [CR84] B. Cushman-Roisin. An exact analytical solution for time-dependant, elliptical warm-core ring with outcropping interface. *Ocean modelling*, 59 :5–6, 1984.
- [CR85] B. Cushman-Roisin. Linear stability of large, elliptical warm-core rings. *J. Phys. Oceanogr.*, 16 :1158–1164, 1985.
- [CR87] B. Cushman-Roisin. Exact analytical solutions for elliptical vortices of the shallow-water equations. *Tellus*, 39 A :235–244, 1987.
- [CRHN85] B. Cushman-Roisin, W.H. Heil, and D. Nof. Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings. *J. Geophys. Res.*, 90 :11756–11764, 1985.
- [DDd⁺00] T. Delcroix, B. Dewitte, Y. duPenhoat, F. Masia, and J. Picaut. Equatorial waves and warm pool displacements during the 1992-1998 el nino southern oscillation events : Observation and modeling. *Journal of Geophysical Research*, 105(C11) :26045–26062, November 2000.
- [DR81] P.G. Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [DRB04] S.F. Dotsenko, A. Rubino, and P. Brandt. Nonlinear transverse oscillations of a geostrophic front. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 40(4) :394–401, 2004.

- [Dur98] D.R. Durran. *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Number 32 in Texts in applied mathematics. Springer Verlag New York, 1998.
- [EM96] P.F. Embid and A.J. Majda. Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity. *COMMUN PART DIFF EQ 21 (3-4) : 619-658 1996*, 21(3-4) :619–658, 1996.
- [Eri82] C.C. Eriksen. Geostrophic equatorial deep jets. *Journal of Marine Research*, 40 :143–157, 1982.
- [FH01] M.A.M. Friedrichs and E.E. Hofmann. Physical control of biological processes in the central equatorial pacific ocean. *Deep-Sea Research I*, 48 :1023–1069, 2001.
- [FL92] D.C. Fritts and Z. Luo. Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part 1 : two-dimensional forcing. *J. Atmos. Sci.*, 49(8) :681–697, 1992.
- [FM95] A.V. Fedorov and W.K. Melville. Propagation and breaking of nonlinear Kelvin waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 25 :2518–2530, 1995.
- [FM00] A.V. Fedorov and W.K. Melville. Kelvin fronts on the equatorial thermocline. *J. Phys. Oceanogr.*, 30 :1692–1705, 2000.
- [FS04] M. R. Flynn and B. R. Sutherland. Intrusive gravity currents and internal gravity wave generation in stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 514 :355–383, 2004.
- [GDJL86] A.E. Gill, M.K. Davey, E.R. Johnson, and P.F. Linden. Rossby adjustment over a step. *Journal of Marine Research*, 44 :713–738, 1986.
- [Gei70] J.E. Geisler. Linear theory of the response of a two layer ocean of a moving hurricane. *Geophysical Fluid Dynamics*, 1 :249–272, 1970.
- [Gil76] A.E. Gill. Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, 77(3) :603–621, 1976.
- [Gil77] A.E. Gill. Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 103 :431–440, 1977.
- [Gil80] A.E. Gill. Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. R. Soc.*, 106 :447–462, 1980.
- [Gil82] A.E. Gill. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. International Geophysics Series. Academic Press, 1982.
- [GKS82] R.W. Griffiths, P.D. Killworth, and M.E. Stern. Ageostrophic instability of ocean currents. *J. Fluid Mech.*, 117 :343–377, 1982.
- [Gre85] R.J. Greatbach. Kelvin wave fronts, rossby solitary waves and the non-linear spin-up of the equatorial oceans. *Journal of Geophysical Research*, 90(C5) :9097–9107, 1985.

- [HKP99] K.R. Helfrich, A.C. Kuo, and L.J. Pratt. Nonlinear rossby adjustment in a channel. *J. Fluid Mech.*, 390 :187–222, 1999.
- [HM90] P. Huerre and P.A. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :473–537, 1990.
- [HSB⁺82] R.W. Houghton, R. Schlitz, R.C. Beardsley, B. Butman, and Chamberlin J.L. The middle atlantic bight cold pool : evolution of the temperature structure during summer 1979. *J. Phys. Oceanogr.*, 12 :1019–1029, 1982.
- [HY87] Y.-Y. Hayashi and W.R. Young. Stable and unstable shear modes of rotating parallel flow in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 184 :477–504, 1987.
- [JD90] E.R. Johnson and M.K. Davey. Free-surface adjustment and topographic waves in coastal currents. *J. Fluid Mech.*, 219 :273–289, 1990.
- [Jef25] H. Jeffreys. On the dynamics of geostrophic winds. *Quart. J. R. Meteorolog. Soc.*, 52 :85–104, 1925.
- [Kil83a] P.D Killworth. Long-wave instability of an isolated front. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 25 :235–258, 1983.
- [Kil83b] P.D Killworth. On the motion of isolated lenses on a beta plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 13 :146–167, 1983.
- [KK95] C. Knessl and J.B. Keller. Stability of linear shear flows in shallow water. *Journal of Fluid Mechanics*, 303 :203–214, 1995.
- [KP97] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Time-dependent nonlinear geostrophic adjustment. *J. Phys. Oceanogr.*, 27 :1614–1634, 1997.
- [KP00] A. C. Kuo and L. M. Polvani. Nonlinear geostrophic adjustment, cyclone/anticyclone asymmetry, and potential vorticity arrangement. *Physics of Fluids*, 12(5) :1087–1100, May 2000.
- [LCGM] R.-C. Lien, D.R. Caldwell, M.C. Gregg, and J.N. Moum. Turbulence variability at the equator in the central pacific at the beginning of the 1991-1993 el nino. *Journal of Geophysical Research*, 100(C4) :6881–6898.
- [Lev02] R.J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [LH68a] M.S. Longuet-Higgins. Double Kelvin waves with continuous depth profile. *J. Fluid Mech.*, 34 :49–80, 1968.
- [LH68b] M.S. Longuet-Higgins. On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean. *J. Fluid Mech.*, 31 :417–434, 1968.
- [Lig78] J. Lighthill. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [LM78] P.H. LeBlond and L.A. Mysak. *Waves in the ocean*. Elsevier Oceanography Series. Elsevier, 1978.

- [LSRZ04] J. Le Sommer, G.M. Reznik, and V. Zeitlin. Nonlinear geostrophic adjustment of long-wave disturbances in the shallow water model on the equatorial beta-plane. *J. Fluid Mech.*, 515 :135–170, 2004.
- [LSSZ06] J. Le Sommer, E. Scherer, and V. Zeitlin. Inertial motions during the transient adjustment of a density anomaly in the equatorial ocean : application to the western Pacific warm pool. *J. Phys. Oceanogr.*, 36(12) :2270–2282, 2006.
- [MHMT90] M.J. McPhaden, S.P. Hayes, L.J. Mangum, and J.M. Toole. Variability in the western equatorial pacific ocean during the 1986-87 el nino/southern oscillation event. *Journal of Physical Oceanography*, 20 :190–208, 1990.
- [MI00] T. Matsuura and S. Iizuka. Zonal migration of the pacific warm-pool tongue during el nino events. *J. Phys. Oceanogr.*, 30 :1582–1600, 2000.
- [MLSM02] T. Maxworthy, J. Leilich, J.E. Simpson, and E.H. Meiburg. The propagation of a gravity current into a linearly stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 453 :371–394, 2002.
- [MM00] P.J. Montgomery and T.B. Moodie. *Advances in Fluid Mechanics III*, chapter The transition from rest to geostrophic balance of a dense volume of fluid, pages 583–593. Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., 2000.
- [MMH⁺92] J.N. Moum, M.J. McPhaden, D. Hebert, H. Peters, C.A. Paulson, and D.R. Caldwell. Internal waves, dynamic instabilities, and turbulence in the equatorial thermocline : An introduction to three papers in this issue. *Journal of Physical Oceanography*, 22 :1357–1359, 1992.
- [MNGH02] Arhan M., A.C. Naveira Gabato, and D.P. Heywood, K.J. and Stevens. The antarctic circumpolar current between the Falkland islands and South Georgia. *J. Phys. Oceanogr.*, 32 :1914–1931, 2002.
- [Mys69] L.A. Mysak. On the generation of double kelvin wave. *J. Fluid Mech.*, 37(3) :417–434, 1969.
- [Nee89] J.D. Neelin. On the interpretation of the gill model. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 46(15) :2466–2468, 1989.
- [Nof83] D. Nof. The translation of isolated cold eddies on a sloping bottom. *Deep Sea Research Part A*, 30(2) :171–182, 1983.
- [Obu49] A.M. Obukhov. On the question of the geostrophic wind. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Geograf.-Geofys.*, 13(4) :281–306, 1949.
- [Ou84] H.W. Ou. Geostrophic adjustment : a mechanism for frontogenesis. *J. Phys. Oceanogr.*, 14 :994–1000, 1984.
- [Ped87] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [PF03] F. J. Poulin and G.R. Flierl. The nonlinear evolution of barotropically unstable jets. *J. Phys. Oceanogr.*, 33 :2173–2192, october 2003.

- [PG90] N. Paldor and M. Ghil. Finite-wavelength instabilities of a coupled density front. *J. Phys. Oceanogr.*, 20 :114–123, 1990.
- [PG97] N. Paldor and M. Ghil. Linear instability of a zonal jet on an f plane. *J. Phys. Oceanogr.*, 27 :2361–2369, 1997.
- [Phi76] S.G.H. Philander. Instabilities of zonal equatorial currents. *Journal of Geophysical Research*, 81(21) :3725–3735, 1976.
- [Phi89] S.G. Philander. *El Nino, la Nina, and the southern oscillation*. Academic Press, 1989.
- [RDB03] A. Rubino, S. Dotsenko, and P. Brandt. Near-inertial oscillations of geophysical surface frontal currents. *J. of Phys. Oceanogr.*, 33 :1990–1999, 2003.
- [RG02] G.M. Reznik and R. Grimshaw. Nonlinear geostrophic adjustment in the presence of a boundary. *J. Fluid Mech.*, 471 :257–283, 2002.
- [Rip83] P. Ripa. General stability conditions for zonal flows in a one-layer model on the β plane or the sphere. *J. Fluid Mech.*, 126 :463–489, 1983.
- [Rip87] P. Ripa. On the stability of elliptical vortex solutions of the shallow-water equations. *J. Fluid Mech.*, 183 :343–363, 1987.
- [Ros37] C.-G. Rossby. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, ii. *Journal of Marine Research*, 1(1) :239–263, 1937.
- [RZ07] G.M. Reznik and V. Zeitlin. Interaction of free rossby waves with semi-transparent equatorial waveguide. Part 1. wave triads. *Physica D*, 226 :55–79, 2007.
- [RZBJ01] G.M. Reznik, V. Zeitlin, and M. Ben Jelloul. Nonlinear theory of geostrophic adjustment. Part 1. Rotating shallow water model. *J. Fluid Mech.*, 445 :93–120, 2001.
- [Sak89] S. Sakai. Rossby-Kelvin instability : a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 202 :149–176, 1989.
- [SBAP04] A. Stegner, P. Bouruet-Aubertot, and T. Pichon. Nonlinear adjustment of density fronts. Part 1. the Rossby scenario and the experimental reality. *J. Fluid Mech.*, 502 :335–359, 2004.
- [Sim82] J.E. Simpson. Gravity currents in the laboratory, atmosphere, and oceans. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 14 :213–234, 1982.
- [SL97] A. Soloviev and R. Lukas. Sharp frontal interfaces in the near-surface layer of the ocean in the western equatorial pacific warm-pool. *Journal of Physical Oceanography*, 27 :999–1017, 1997.
- [Smi76] P.C. Smith. Baroclinic instability in the Denmark strait overflow. *J. Phys. Oceanogr.*, 6 :355–371, 1976.

- [Sut06] G.G. Sutyrin. A self-similar axisymmetric pulson in rotating stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 560 :243–248, 2006.
- [TH92] S.-I. Takehiro and Y.-Y. Hayashi. Over-reflection and shear instability in a shallow-water model. *J. Fluid Mech.*, 236 :259–279, 1992.
- [Tre00] L.N. Trefethen. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, 2000.
- [UKIK98] I. Ueki, K. Kutsuwada, H. Inaba, and A. Kaneko. Short-term variabilities of upper ocean current in the warm pool region during TOGA/COARE IOP. *Journal of Oceanography*, 54 :227–240, 1998.
- [UKIK00] I. Ueki, K. Kutsuwada, H. Inaba, and A. Kaneko. Quasi-2-days signals observed in the warm pool region during TOGA/COARE IOP. *Journal of Oceanography*, 56 :539–552, 2000.
- [Van98] J. Vanneste. A nonlinear critical layer generated by the interaction of free Rossby waves. *J. Fluid Mech.*, 371 :319–344, 1998.
- [VD98] J. Vialard and P. Delescluze. An OGCM study for the TOGA decade. part II : Barrier-layer formation and variability. *Journal of Physical Oceanography*, 28(6) :1089–1106, 1998.
- [WG76] C. Wunsch and A.E. Gill. Observations of equatorially trapped waves in pacific sea level variations. *Deep-Sea Research*, 23 :371–390, 1976.
- [WG91] A.J. Willmott and A.H.J. Grimshaw. The evolution of coastal currents over a wedge-shaped escarpment. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 57 :19–48, 1991.
- [Whi74] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Pure and Applied Mathematics : a Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. John Wiley and Sons, 1974.
- [WJ95] A.J. Willmott and E.R. Johnson. On geostrophic adjustment of a two-layer, uniformly rotating fluid in the presence of a step escarpment. *Journal of Marine Research*, 53 :49–77, 1995.
- [WX04] D.G. Wright and Z. Xu. Double kelvin waves over the Newfoundland shelf break. *Atmopshere-Ocean*, 42(2) :101–111, 2004.
- [ZBM⁺07] V. Zeitlin, F. Bouchut, S. Medvedev, G. Reznik, and A. Stegner. *Nonlinear dynamics of rotating shallow water : methods and advances*, volume 2 of *Edited Series on Advances in Nonlinear Science and Complexity*. Elsevier, 2007.
- [Zei07] V. Zeitlin. *Nonlinear wave phenomena in rotating shallow water with applications to geostrophic adjustment in Nonlinear dynamics of rotating shallow water : methods and advances*. V. Zeitlin, ed., Elsevier, 2007. p.257-321.
- [ZMP03] V. Zeitlin, S.B. Medvedev, and R. Plougonven. Frontal geostrophic adjustment, slow manifold and nonlinear wave phenomena in one-dimensional rotating shallow water. Part 1 : Theory. *J. Fluid Mech.*, 481 :269–290, 2003.