



HAL
open science

Construction et analyse de conditions absorbantes de type Dirichlet-to-Neumann pour des frontières ellipsoïdales

Anne-Gaëlle Saint-Guirons

► **To cite this version:**

Anne-Gaëlle Saint-Guirons. Construction et analyse de conditions absorbantes de type Dirichlet-to-Neumann pour des frontières ellipsoïdales. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2008. Français. NNT: . tel-00356994

HAL Id: tel-00356994

<https://theses.hal.science/tel-00356994>

Submitted on 29 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'Université de Pau et des Pays de l'AdourÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE
LEURS APPLICATIONS - ED 211

par

Anne-Gaëlle SAINT-GUIRONS

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

CONSTRUCTION ET ANALYSE DE CONDITIONS ABSORBANTES DE TYPE DIRICHLET-to-NEUMANN POUR DES FRONTIÈRES ELLIPSOÏDALES

soutenue le 28 Novembre 2008

Après avis de :

M.	X. ANTOINE	Professeur - Institut Elie Cartan de Nancy	Rapporteur
Mme.	L. HALPERN	Professeur - Université de Paris 13	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de :

M.	M. AMARA	Professeur - UPPA	Examineur
Mme.	H. BARUCQ	Directrice de Recherche INRIA - UPPA	Directrice de thèse
M.	R. DJELLOULI	Professeur - Cal. State Univ. at Northridge (USA)	Examineur
M.	B. HANOZET	Professeur - Université de Bordeaux 1	Examineur
M.	I. HARARI	Professeur - Université de Tel-Aviv (Israel)	Examineur

*Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Unité Mixte de Recherche CNRS
5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)*



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement ma directrice de thèse Hélène Barucq qui, pendant ces trois années de thèse, a toujours été à mes côtés. Sa disponibilité et ses encouragements ont été de précieux alliés. Elle m'a, de plus, permis de découvrir le monde de la recherche mathématique à l'extérieur de Pau à de nombreuses reprises, c'est une chance qui m'a apporté des expériences enrichissantes que je ne suis pas prête d'oublier.

Je suis très reconnaissante à Madame Laurence Halpern et Monsieur Xavier Antoine d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie profondément pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Je remercie vivement Monsieur Bernard Hanouzet d'avoir bien voulu présider mon jury de thèse.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Mohamed Amara d'avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse. Je le remercie vivement de m'avoir soutenue avant même que cette thèse ne démarre pour m'obtenir un financement.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur Isaac Harari en étant membre de mon jury de thèse.

Je remercie Monsieur Rabia Djellouli de m'avoir accueillie à deux reprises dans son laboratoire à l'Université de Northridge en Californie.

Une thèse ne peut se dérouler dans de bonnes conditions sans un environnement positif. Je tiens à remercier chaleureusement Madé Arman, Lina Gonçalves et Martine Courbin, documentalistes à l'UPPA et à l'INRIA pour leur aide toujours précieuse, Olivier Autexier, Stéphane Leborgne, nos informaticiens, pour leur disponibilité et pour m'avoir toujours dépannée dans les plus brefs délais ainsi que Brigitte Cournou, Josy Baron, Marie-Claire Hummel, Sylvie Berton et Marie-Laure Rius pour m'avoir toujours facilité les tâches administratives.

Je tiens aussi à dire un grand merci à toute l'équipe INRIA Magique 3D pour tous les bons moments que nous avons partagés.

Trois années de thèse c'est aussi beaucoup de temps passé avec tous les thésards du labo. A première vue travailler à 11 dans une même pièce peut donner envie de s'enfuir mais, au final, on a du mal à le quitter ce fameux bureau 214!!!

Agnès, un grand merci pour tous ces très bons moments passés ensemble (Ah! Venise! le Bellini! le tiramisu « della Madonna »!) et pour avoir été d'un soutien sans retenue dans mes moments de stress. JJ, l'Indiana Jones du labo, tu auras, parfois malgré toi, bien contribué à nos franches rigolades, mais tu le sais, qui aime bien....! Julie, Caro, merci pour votre compagnie toujours agréable. Véro et Cyril, soyez courageux les petits nouveaux, trois ans c'est long mais.... que ça passe vite!! Guillaume et Pieyre, merci pour votre soutien dans la dernière ligne droite.

Un grand merci à tous les doctorants, anciens doctorants et membres du LMA avec qui j'ai partagé d'agréables moments.

Auriane, tu as toujours été à mon écoute dans mes moments de doute. Merci pour ton amitié, ton sens de l'humour et ta joie de vivre. Je te souhaite beaucoup de courage pour la fin de ta thèse!

Guigui, allez courage, tu es dans la dernière ligne droite, c'est certainement la plus éprouvante mais cela vaut le coup!!

Angela merci de m'avoir toujours soutenue. Ton sens de l'humour a toujours su me déridier dans mes plus grands moments de stress et ta présence le jour de ma soutenance m'a beaucoup touchée!

Christian, merci pour ton soutien sans faille!!!

Merci à tous mes collègues basketteurs du jeudi soir pour avoir contribué à mon défolement et permis d'évacuer mes tensions tout le long de mon parcours.... Que ce fut utile!!!

Laurène, à un mois d'intervalle nous avons relevé nos challenges respectifs.... il s'en est vraiment passé des choses depuis nos 6 ans!! Je suis certaine que tous les merveilleux moments que nous avons partagés nous ont donné des forces pour en arriver là!!

Pour terminer, je tiens à remercier de tout mon coeur mes parents, mes grands-parents et Frédéric. Ils m'ont encouragée et ont réussi à supporter mes sautes d'humeur pendant ces trois dernières années qui ne furent pas toujours un long fleuve tranquille... Un grand merci en particulier à ma mère et Frédéric qui ont souvent assisté à mes répétitions à la maison, votre patience me fut d'une grande utilité!! Enfin, mon dernier mot sera pour Frédéric qui, par son soutien affectif, m'a permis d'avancer même dans mes plus grands moments de doute.

Table des matières

Introduction	9
1 Fonctions spéciales	15
1 Les fonctions de Mathieu	15
1.1 Equation de Mathieu et équation des ondes acoustiques en coordonnées elliptiques	16
1.2 Détermination des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu	19
1.3 Quelques propriétés des valeurs caractéristiques	21
1.4 Solutions de l'équation de Mathieu	23
1.5 Relations entre les coefficients de Fourier et les différentes solutions de l'équation de Mathieu	24
1.6 Solutions de l'équation de Mathieu modifiée	25
1.7 Notations comparatives des fonctions de Mathieu	27
2 Les fonctions sphéroïdales	28
2.1 Définition des coordonnées sphéroïdales prolates	28
2.2 Fonctions d'ondes sphéroïdales prolates	30
2.3 Comportements asymptotiques	31
2.4 Comportements asymptotiques des valeurs propres associées aux fonctions d'ondes sphéroïdales angulaires	32
2 Construction et analyse de performance de conditions aux limites absorbantes de type DtN local dans un cadre OSRC pour des problèmes extérieurs d'Helmholtz : cas des frontières elliptiques	33
1 Introduction	34
2 Préliminaires	35
3 Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales	37
3.1 La condition DtN d'ordre 1 (DtN1)	37
3.2 Les conditions DtN d'ordre 2 (DtN2)	38
4 Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	46
4.1 Définition des impédances spécifiques modales approchées	49
4.2 Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow 0$	52
4.3 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$	55

5	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	57
6	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	74
6.1	Définition des impédances spécifiques approchées pour le problème de scattering	75
6.2	Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow 0$	78
6.3	Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow +\infty$	80
7	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering . . .	83
8	Conclusion	103
3	Construction et analyse de performance de conditions aux limites absorbantes de type DtN local pour des problèmes extérieurs d'Helmholtz : cas des frontières ellipsoïdales	105
1	Introduction	106
2	Préliminaires	107
3	Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales	108
3.1	La condition DtN d'ordre 1 (DtN1)	108
3.2	Les conditions DtN d'ordre 2 (DtN2)	109
4	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	112
4.1	Définition des impédances spécifiques modales approchées	114
4.2	Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow 0$	115
4.3	Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$	117
5	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	118
6	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	135
6.1	Définition des impédances spécifiques approchées pour le problème de scattering	136
6.2	Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow 0$	138
6.3	Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$	140
7	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering . . .	141
8	Conclusion	161
4	Formulation en volume : le problème 2D	163
1	Introduction au problème	164
2	Expression des différents champs acoustiques	165
2.1	Décomposition de la solution exacte $u^{ex,2D}$	165
2.2	Décomposition de l'onde incidente $u^{inc,2D}$	166
2.3	Décomposition de la solution approchée $u^{app,2D}$	167

3	Détermination des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app}	168
3.1	Calculs préliminaires	168
3.2	Calcul des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app}	169
4	Résultats numériques	182
5	Analyse haute fréquence	188
5.1	Avec la condition DtN1	189
5.2	Avec la condition DtN2	195
5	Formulation en volume : le problème 3D	207
1	Introduction au problème	207
2	Expression des différents champs acoustiques	209
2.1	Décomposition de la solution exacte $u^{ex,3D}$	209
2.2	Décomposition de l'onde incidente $u^{inc,3D}$	210
2.3	Décomposition de la solution approchée $u^{app,3D}$	211
3	Détermination des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app}	211
3.1	Calculs préliminaires	211
3.2	Identifications des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app}	212
4	Résultats numériques	226
5	Analyse haute fréquence	247
5.1	Avec la condition DtN1	248
5.2	Avec la condition DtN2	253
	Annexe A : Géométrie différentielle pour la 2D	258
A	Expression de la dérivée partielle par rapport au vecteur normal \mathbf{n}	259
B	Equation d'Helmholtz en coordonnées elliptiques	261
	Annexe B : Géométrie différentielle pour la 3D	266
A	Expression de la dérivée partielle par rapport au vecteur normal \mathbf{n}	267
B	Equation d'Helmholtz en coordonnées sphéroïdales prolates	271
	Annexe C : Calcul des Wronskiens	272
A	Définition du Wronskien	273
B	Calcul du Wronskien $\Delta_W \left[R_{m\Sigma}^{(1)}, R_{m\Sigma}^{(2)} \right]$	273
C	Calcul du Wronskien $\Delta_W \left[R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)} \right]$	275
	Annexe D : Classification des modes	278
A	Classification des modes pour le problème 2D	279
A.1	Cas du système de coordonnées cartésiennes	279
A.2	Cas des coordonnées polaires	280
A.3	Cas des coordonnées elliptiques	281
B	Classification des modes pour le problème 3D	287

Annexe E : Quelques pistes pour une minimisation du coefficient de réflexion	291
A Pour le problème en volume 2D	291
A.1 Prise en compte des modes rampants	291
A.2 Prise en compte de modes particuliers	299
B Prise en compte de modes particuliers pour le problème en volume 3D	306
Références	313

Introduction

La modélisation et la simulation numérique de problèmes de diffraction d'ondes sont au coeur de nombreuses applications qui peuvent être industrielles (citons par exemple l'aéronautique, l'exploration pétrolière) mais aussi liées à la défense ou au secteur médical. Le plus souvent, le domaine de propagation est soit infini dans une direction, soit très grand par rapport à la longueur d'onde des signaux que l'on veut reproduire. On est alors confronté au problème de résoudre numériquement un système d'équations aux dérivées partielles posé dans un domaine non borné.

Une première approche consiste à exploiter les solutions fondamentales de l'équation des ondes pour en écrire une formulation intégrale impliquant des potentiels (de simple et double couche) définis sur une surface bornée. Le cadre d'application le plus fréquent de cette méthode est celui de la diffraction par un obstacle (avion, sous-marin par exemple) et l'équation intégrale est posée sur la surface, cette fois bornée, de l'obstacle. On peut alors appliquer une méthode d'éléments finis pour la discrétisation qui conduit à l'inversion d'une matrice pleine. La méthode des équations intégrales [12, 13] est une approche très robuste fournissant au final une solution très précise de l'équation des ondes mais, et tout particulièrement à haute fréquence, elle induit des coûts de calcul qui peuvent devenir très vite prohibitifs, malgré les progrès très considérables qui ont été réalisés pour accélérer les produits matrice/vecteurs (voir [16] et sa bibliographie). De plus, elle n'est pas évidente à mettre en place dans le cas où l'obstacle et/ou le milieu extérieur est hétérogène.

Une autre approche s'appuie sur le fait qu'il est suffisant de représenter le champ d'onde dans un proche voisinage de l'origine du phénomène (par exemple, l'obstacle en scattering, la source en imagerie sismique ou médicale). C'est pourquoi, dans l'objectif de simuler numériquement le phénomène, on peut définir une boîte de calcul à l'intérieur de laquelle on se contente de représenter le champ d'onde via l'application d'une méthode d'éléments finis. Les bords extérieurs de la boîte sont artificiels pour le problème physique considéré et ne doivent donc pas générer des réflexions parasites à l'intérieur du domaine de calcul. Pour la mise en oeuvre numérique, la principale difficulté est de modéliser les bords artificiels. On peut les représenter par l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (DtN) qui va exprimer de façon exacte le passage parfait de l'onde de l'intérieur de la boîte vers son extérieur (ce qui exprime que le bord n'a aucune influence sur le champ intérieur). Mais comme l'opérateur DtN est global, il va casser la structure a priori creuse de la matrice de discrétisation par éléments finis, ce qui va engendrer des coûts numériques équivalents à ceux inhérents à la

méthode d'équations intégrales. C'est pourquoi on cherche à remplacer la condition DtN par une condition approchée qui va préserver la structure creuse de la matrice de discrétisation, la difficulté résidant alors dans le choix de la condition qui ne doit pas détériorer la précision de la solution numérique. Dans la littérature, on parle de conditions aux limites absorbantes ou artificielles, parfois aussi de radiation. On peut parfois faire le distinguo entre les adjectifs absorbant et artificiel en imposant aux conditions absorbantes d'être locales alors que les conditions artificielles font intervenir des opérateurs globaux et sont construites après troncature du symbole de l'opérateur exact. C'est ce que nous proposons de faire dans ce manuscrit. Le niveau de performance des conditions artificielles (et donc globales [27, 31, 32, 45, 58, 59]) peut être facilement amélioré mais, en pratique, ces conditions ne peuvent s'écrire que sur des surfaces dont la géométrie est très simple. De plus, dans un contexte éléments finis, les degrés de liberté sont tous couplés sur la surface artificielle, ce qui affecte les coûts numériques de façon très considérable et complique toute procédure de parallélisation. L'effet de troncature de la condition exacte a aussi été analysé [31, 39] mais dans ce manuscrit, nous nous limiterons à l'étude de conditions absorbantes et cette approche ne sera donc pas considérée. Les conditions aux limites absorbantes sont elles écrites à partir d'un opérateur différentiel exprimant le champ d'onde sur la surface artificielle en fonction de ses dérivées. Cet opérateur peut s'obtenir via la micro-localisation de l'opérateur global DtN. C'est l'approche retenue par Engquist et Majda [18, 19] pour les systèmes strictement hyperboliques : l'opérateur DtN exact est construit à partir de la représentation de la solution par superposition d'ondes planes, ce qui revient à écrire l'équation des ondes comme une composition d'équations one-way. Les auteurs en déduisent des conditions absorbantes via la micro-localisation de la condition DtN exacte. La localisation est réalisée en appliquant une approximation du type Taylor du symbole de DtN qui est justifiée si les ondes se propagent avec une incidence proche de la normale à la frontière artificielle. A la même époque, Bayliss, Guntzburger et Turkel [9] ont construit des conditions pour la sphère utilisant des dérivées d'ordre élevé de la solution en considérant un développement haute fréquence de la solution de l'équation d'Helmholtz. Dans un contexte éléments finis, ces conditions sont réputées être performantes à haute fréquence mais difficiles à mettre en oeuvre numériquement pour les ordres supérieurs à deux. En effet, les conditions d'ordre supérieur à deux nécessitent d'introduire des variables auxiliaires (voir Givoli [30] et sa bibliographie) ce qui entraînent des surcoûts numériques. Notons que depuis les années 70, la littérature sur la construction de conditions aux limites absorbantes ne cesse de s'enrichir et ne se limite pas à l'équation des ondes acoustiques. Citons par exemple Gustafsson [33] et Halpern [37] qui s'intéressent respectivement à des systèmes du type hyperbolique et parabolique, Givoli et Keller [23] qui travaillent sur l'équation des ondes élastiques.

Dans ce manuscrit on ne va s'intéresser qu'à l'équation d'Helmholtz, ce qui explique que la bibliographie proposée est essentiellement orientée vers l'équation des ondes. On citera cependant l'article de Tsynkov [65] qui fait état d'une revue détaillée sur le sujet des conditions aux limites absorbantes pour différents problèmes.

Cette thèse est consacrée à la construction et à l'étude de performance d'une

nouvelle classe de conditions aux limites absorbantes approchées de type Dirichlet-to-Neumann (DtN) ou Robin ajusté à utiliser pour des frontières artificielles de forme elliptique (2D) ou sphéroïdale prolata (3D), c'est-à-dire adaptées à des obstacles de forme allongée tels que les sous-marins. L'idée de construire de telles conditions est motivée par trois raisons principales. Premièrement, les conditions d'ordre 2 (BGT2) construites par Bayliss, Gunzburger et Turkel pour des frontières de formes circulaires (2D) et sphériques (3D) dans [9] ne sont pas très performantes, en régime basse fréquence, lorsqu'elles sont exprimées en coordonnées elliptiques et appliquées à des frontières de forme elliptiques (2D) ou sphéroïdales prolates (3D), et il faut mentionner qu'elles sont très utilisées. Comme l'ont montré les travaux de Reiner et *al.* [54], leur précision se détériore particulièrement lorsque la frontière artificielle est très allongée. L'effet de damping introduit pour cette classe de conditions [55] n'améliore leur performance que pour des petites valeurs d'excentricités. En effet, la condition BGT2 n'est plus assez précise lorsque l'excentricité e est supérieure ou égale à 0.6 en régime basse fréquence (cf Figs 6 et 15 dans [55]). Il y a donc un besoin de construire une classe de conditions aux limites absorbantes qui assurent un niveau de performance satisfaisant pour toutes les valeurs d'excentricités. Deuxièmement, les conditions approchées bi-dimensionnelles locales de type DtN construites pour des frontières circulaires et sphériques [24] sont significativement plus précises que les conditions BGT, en particulier pour de petits nombres d'onde (*i.e.* dans le régime basse fréquence) comme cela est illustré dans [41] au niveau modal et quand la solution du problème approché est calculée comme la solution exacte à partir d'une série de Mie. On se propose donc d'étendre ce résultat au cas des frontières de forme allongée. On contribuerait ainsi à améliorer la précision des méthodes numériques tout en limitant les coûts numériques. En effet, l'utilisation de conditions aux limites absorbantes pour des frontières de forme circulaire (2D) ou sphérique (3D), dans le cas de la résolution d'un problème de scattering par un obstacle de forme allongé, entraîne toujours la prise en compte d'un domaine de calcul bien plus grand que nécessaire. Cela augmente donc inutilement les coûts de calcul et est néfaste pour l'efficacité de la méthode utilisée lors de cette résolution. Une étude de Farhat et *al.* [17, 63] montre par exemple que l'on peut diminuer le nombre de degrés de liberté nécessaire pour une résolution précise et que l'on peut diviser le temps CPU par un facteur compris entre 2 et 5 pour un problème de scattering acoustique 2D [17] et entre 3 et 8 pour un problème similaire tridimensionnel [63] en utilisant des frontières artificielles adaptées aux obstacles de forme allongée. Dans le même ordre d'idée, Kallivokas et Lee [44] ont aussi démontré qu'en appliquant des conditions d'ordre deux à des frontières artificielles de géométrie ellipsoïdale plutôt que sphérique –dans le cas d'obstacle allongés– permet de réduire les coûts numériques en optimisant la taille du domaine de calcul. Les mêmes auteurs ont aussi considéré le cas du problème temporel [43] et ont montré qu'on peut appliquer des conditions d'ordre deux et trois en veillant à bien positionner la frontière artificielle.

Le premier chapitre est une introduction consacrée aux deux familles de fonctions spéciales qui seront utilisées tout le long de ce travail : les fonctions de Mathieu et

les fonctions sphéroïdales. Ces fonctions sont respectivement utilisées dans la description des phénomènes de propagations d'ondes en coordonnées elliptiques (2D) et sphéroïdales prolates (3D) que nous allons étudier. Etant très peu utilisées dans la littérature, il nous semblait nécessaire d'introduire quelques notations et de rappeler les principales propriétés les concernant. Ces propriétés ont été collectées dans des ouvrages de référence [1, 20, 49, 51].

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous abordons la construction d'une nouvelle classe d'opérateurs du type Dirichlet-to-Neumann (DtN) locaux ou Robin ajusté adaptés à des frontières artificielle de géométrie elliptique. Pour ce faire, nous allons utiliser la décomposition modale de l'onde u en coordonnées elliptiques. On considère des conditions de type Robin à coefficients inconnus, ces coefficients étant obtenus en posant les conditions exactes pour les premiers modes. Notre but est d'analyser l'impact du nombre d'onde ka et de l'excentricité e , paramètre qui mesure le degré d'élongation de l'ellipse ou ellipsoïde représentant la frontière artificielle, sur la performance des conditions construites. Cette analyse est faite en plusieurs étapes. Tout d'abord nous nous intéressons au problème modal, c'est-à-dire que l'on étudie la précision des conditions DtN pour un seul mode. Puis nous étudions dans un second temps le problème de scattering. Nous nous plaçons alors dans le cadre d'une formulation On-Surface Radiation Condition (OSRC) [46]. Dans ce contexte là, on considère que la frontière artificielle est posée directement sur la surface de l'obstacle de diffraction. Pour chacun des deux modèles (modal et scattering), nous procédons à une analyse mathématique puis à des tests numériques pour évaluer la performance des conditions. Pour le problème modal, les tests numériques confirment ce que laisse prévoir l'évaluation des comportements asymptotiques à savoir qu'en basse fréquence les conditions ne sont précises que pour les premiers modes et que cette précision dégénère vite lorsqu'on teste des modes plus élevés. Pour le problème de scattering, la condition DtN d'ordre 2 montre, numériquement, une très bonne performance en régime basse fréquence comme le laissait présager l'étude analytique. On montre aussi que contrairement à la condition BGT2 (étudiée par Reiner et *al.* [54]) qui dégénérerait particulièrement pour de grandes excentricités, la condition DtN2 conserve sa précision quel que soit l'allongement de la frontière artificielle elliptique. En revanche, si on teste des fréquences plus élevées, le cadre OSRC, appliqué avec des conditions différentielles d'ordre deux, n'est manifestement pas adapté pour le problème de scattering comme l'ont déjà montré des travaux antérieurs [4, 6, 41, 54].

Le troisième chapitre est consacré à la construction d'une nouvelle famille d'opérateurs DtN adaptée à des frontières artificielles sphéroïdales prolates pour le problème de scattering tridimensionnel. Ces conditions sont construites pour le problème tridimensionnel suivant la même méthode que celle utilisée dans le chapitre précédent. Une fois les conditions DtN construites, nous procédons à une analyse de performance similaire à celle faite pour le problème 2D. Pour le problème modal, on observe analytiquement et numériquement qu'à basse fréquence, passés les tout premiers modes pour lesquels nos conditions sont performantes, la précision des conditions DtN se

dégrade à mesure que les modes augmentent. Par contre, toujours en régime basse fréquence, quand il s'agit de résoudre le problème de scattering, les conditions DtN construites révèlent un excellent niveau de précision, quel que soit l'allongement e du sphéroïde prolata formant la frontière artificielle. La condition DtN d'ordre 2 est donc bien plus performante que la condition BGT2 [54] étudiée dans ce même cadre. En effet, cette dernière est précise pour de petites excentricités e puis dégénère à mesure que le sphéroïde s'allonge. De la même manière que pour le problème bi-dimensionnel, en haute fréquence, la condition DtN2 est assez performante pour le problème modal mais pas pour le problème de scattering. On considère ensuite le régime haute fréquence et on réalise les mêmes expériences. Il s'avère que dans ce cas là, la condition DtN2 est assez performante au niveau modal mais elle ne donne pas de bons résultats pour le problème de scattering. On voit ici encore les limitations du cadre OSRC dans le régime haute fréquence quand on utilise une condition différentielle d'ordre deux.

Les chapitres 4 et 5 sont consacrés au problème volumique. Il s'agit d'appliquer les conditions absorbantes DtN sur une surface qui, cette fois, entoure l'obstacle. Les cas 2D (chapitre 4) et 3D (chapitre 5) sont envisagés. On commence par donner une solution analytique du problème en volume via une décomposition modale du champ d'onde reprenant les modes décrits aux chapitres 2 et 3 respectivement. On se ramène à résoudre un système dont la condition d'inversibilité est exprimée à partir d'un Wronskien généralisé liant les données sur la surface de l'obstacle et sur la surface artificielle. En 2D, on observe des instabilités numériques qui s'expliquent par les difficultés déjà connues [34] qui existent pour représenter numériquement les fonctions de Mathieu. Par contre à 3D, les résultats numériques sont exploitables, les fonctions sphéroïdales étant stables numériquement. On présente une série de tests numériques (à 2D au chapitre 4 et à 3D au chapitre 5) qui illustrent l'influence de la taille du domaine de calcul sur la solution approchée (solution du problème posé dans le domaine borné limité par la frontière artificielle). En considérant la frontière artificielle comme une dilatation de la frontière de l'obstacle, on exprime la solution en fonction d'un paramètre $\lambda \geq 1$ ($\lambda = 1$ correspond au cas OSRC : plus λ croît, plus la frontière artificielle est éloignée). Comme on pouvait s'y attendre, on observe que plus λ croît, plus la solution approchée est précise. On observe cependant qu'il n'est pas nécessaire de trop éloigner la frontière pour avoir un bon niveau de précision, et tout particulièrement pour la condition d'ordre 2. On montre aussi que la condition absorbante DtN d'ordre 2 est plus performante que la condition BGT2. Afin de compléter cette étude numérique, nous avons ensuite réalisé une analyse haute-fréquence du coefficient de réflexion pour les conditions d'ordre 1 et 2. Nous ne pouvons conclure que pour une partie des modes propagatifs : on démontre que le coefficient de réflexion tend vers 0 avec la fréquence. Il faut toutefois préciser que notre approche consiste à estimer *a priori* le coefficient de réflexion en utilisant des propriétés asymptotiques connues des fonctions de Mathieu et des fonctions sphéroïdales. Afin de considérer l'ensemble des modes, il serait nécessaire d'établir d'autres propriétés, ce qui n'a pas été fait ici par manque de temps mais pourrait être fait

dans un autre travail. On trouvera tout de même en annexe une étude concernant certains modes du type évanescent ou rampant pour laquelle on obtient des résultats plus fins que dans le cas propagatif et qui peuvent laisser penser que les résultats des chapitres 4 et 5 pourraient être améliorés et étendus à d'autres modes.

Chapitre 1

Fonctions spéciales

Sommaire

1	Les fonctions de Mathieu	15
2	Les fonctions sphéroïdales	28

Ce chapitre est consacré à l'introduction de fonctions spéciales, qui sont adaptées à la résolution de l'équation des ondes dans des domaines de forme allongée, et à quelques unes de leurs propriétés qui seront utilisées tout le long de cette thèse. Il est divisé en deux parties principales, l'une est dédiée aux fonctions de Mathieu, l'autre est consacrée aux fonctions d'ondes sphéroïdales prolates. Les résultats présentés sont extraits d'ouvrages de référence (cf [1, 34, 49, 51, 60] pour les fonctions de Mathieu et [1, 10, 20, 51, 60] pour les fonctions sphéroïdales).

1 Les fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu ont été introduites par Emile Mathieu en 1868 pour l'analyse du mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique [48]. Dès lors, elles ont été utilisées pour l'étude de nombreux autres phénomènes physiques et astronomiques. Cependant, ces fonctions ont bien moins d'applications que d'autres fonctions issues de la physique mathématique comme les fonctions de Bessel ou les fonctions hypergéométriques. Ceci est très certainement dû à la complexité de leur détermination et à l'impossibilité de les représenter analytiquement de façon simple.

La forme originelle (forme canonique) de l'équation différentielle de Mathieu est :

$$\frac{d^2y}{dv^2} + (c - 2q \cos 2v)y = 0 \quad (1.1)$$

où c et q sont des paramètres réels et v peut être complexe.

Cette équation est aussi appelée "équation de Mathieu angulaire". Cette dénomination provient du fait que (1.1) décrit la dépendance angulaire d'une quantité physique (champ électrique ou magnétique). Dans le paragraphe (1.4), nous verrons que cette équation admet deux familles distinctes de solutions dont les fonctions périodiques cosinus elliptique $ce_m(v, q)$ et sinus elliptique $se_m(v, q)$.

L'équation différentielle de Mathieu modifiée s'écrit :

$$\frac{d^2y}{du^2} + (c - 2q \cosh 2u)y = 0 \quad (1.2)$$

Cette dernière équation est obtenue en prenant : $v = iu$ dans (1.1) et y reste inchangé. Elle porte aussi le nom de "équation de Mathieu radiale".

Dans toute la suite, le paramètre c est défini par les équations (1.1) et (1.2). Il est appelé valeur caractéristique et on peut le classer en deux catégories :

$$\begin{aligned} c = a_m, & \text{ associé aux solutions de période paire} \\ c = b_m, & \text{ associé aux solutions de période impaire} \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1 Equation de Mathieu et équation des ondes acoustiques en coordonnées elliptiques

Les coordonnées elliptiques sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y) par les relations :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned}$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in \mathbb{R}$, a est le grand rayon de l'ellipse et b le petit rayon de l'ellipse qui sont définis par :

$$\begin{aligned} a &= f \cosh \xi \\ b &= f \sinh \xi \end{aligned}$$

Le nombre ξ est un réel strictement positif et f est la distance interfocale de l'ellipse qui vérifie :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Une ellipse donnée est paramétrée par $\{\xi = \text{constante}\}$. On définit alors l'excentricité e en $\xi = \xi_0$ par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

L'excentricité e caractérise l'allongement de la frontière. Elle satisfait $0 < e < 1$. Lorsque $e \rightarrow 0$, l'ellipse dégénère en un cercle et lorsque $e \rightarrow 1$, l'ellipse dégénère en un segment de longueur $2f$.

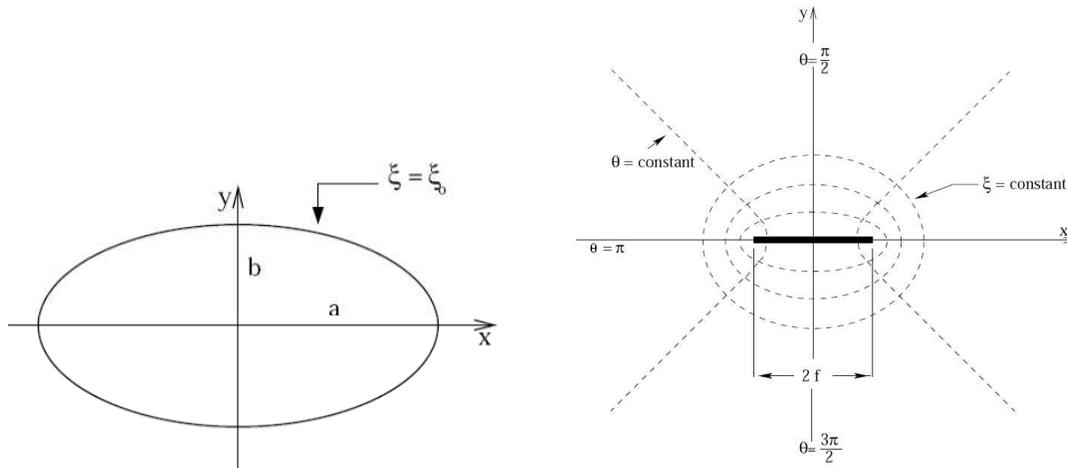


FIG. 1.1: Géométrie des coordonnées elliptiques

Les équations de Mathieu interviennent pour la recherche de solutions analytiques de l'équation d'Helmholtz dans un système de coordonnées elliptiques. Soit $W := W(x, y, z)$ une solution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On introduit le système (ξ, θ, z) de coordonnées elliptiques via le changement de variables :

$$x = f \cosh \xi \cos \theta, \quad y = f \sinh \xi \sin \theta \quad (1.4)$$

où f est une constante positive représentant la distance interfocale de l'ellipse paramétrée par $\{\xi = \xi_0\}$.

On pose alors $\tilde{W}(\xi, \theta, z) = W(x, y, z)$ et \tilde{W} est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial z^2} + \frac{1}{2f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \theta^2} \right) + k^2 \tilde{W} = 0 \quad (1.5)$$

Nous renvoyons à l'annexe A pour les détails des calculs conduisant à l'Eq.(1.5).

On suppose maintenant que \tilde{W} est de la forme $\tilde{W} = \varphi(z)\Psi_1(\xi)\Psi_2(\theta)$. L'équation (1.5) devient donc :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left[\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} \right] + k^2 = 0 \quad (1.6)$$

On en déduit d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0$$

ce qui entraîne que φ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \alpha \varphi = 0 \quad (1.7)$$

où α est une fonction constante.

En injectant (1.7) dans (1.6), on obtient ensuite que Ψ_1 et Ψ_2 vérifient :

$$\frac{2}{f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)} \left(\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} \right) + k^2 = -\alpha$$

soit

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{k^2 f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)}{2} = -\frac{\alpha f^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\theta)}{2}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{(\alpha + k^2) f^2 (\cosh 2\xi)}{2} = -\frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{(\alpha + k^2) f^2 (\cos 2\theta)}{2}$$

et on en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\Psi_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{(\alpha + k^2) f^2 (\cosh 2\xi)}{2} \right] = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{\Psi_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{(\alpha + k^2) f^2 (\cos 2\theta)}{2} \right] = 0$$

et ces deux propriétés entraînent que Ψ_1 est une solution de :

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi^2} + \left[\frac{(\alpha + k^2) f^2 \cosh 2\xi}{2} - \beta_1 \right] \Psi_1 = 0 \quad (1.8)$$

et Ψ_2 est une solution de :

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \theta^2} + \left[\beta_2 - \frac{(\alpha + k^2) f^2 \cos 2\theta}{2} \right] \Psi_2 = 0 \quad (1.9)$$

On voit donc qu'une solution \tilde{W} de l'équation d'Helmholtz s'obtient comme superposition d'une solution φ de l'équation d'Helmholtz 1D, d'une solution Ψ_1 de l'équation de Mathieu modifiée et d'une solution Ψ_2 de l'équation de Mathieu classique.

Certaines solutions physiques de (1.9) sont telles que Ψ_2 est périodique, de période π ou 2π . Il est montré dans [1, 34] qu'il existe une infinité de valeurs caractéristiques $a_m(q)$ qui décrivent les solutions de période paire de (1.1) ainsi qu'une infinité de valeurs caractéristiques $b_m(q)$ décrivant les solutions de période impaire de (1.1).

1.2 Détermination des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu

Une solution de (1.1) de période π ou 2π est de la forme :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos mv + B_m \sin mv)$$

avec $B_0 = 0$. Les coefficients A_m et B_m sont appelés coefficients de Fourier associés aux solutions de l'équation de Mathieu.

En remplaçant dans (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{m=-2}^{\infty} [(c - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2})] \cos mv \\ + \sum_{m=-2}^{\infty} [(c - m^2)B_m - q(B_{m-2} + B_{m+2})] \sin mv = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

en imposant $A_m = B_m = 0$ si $m < 0$.

L'expression (1.10) peut être réduite à l'une des quatre formes simplifiées présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} ye_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \cos 2mv \\ ye_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1} \cos(2m+1)v \\ yo_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \sin 2mv \\ yo_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1} \sin(2m+1)v \end{aligned} \quad (1.11)$$

où ye_0 et yo_0 sont des solutions de période π tandis que ye_1 et yo_1 sont des solutions de période 2π .

On notera par la suite $ye_0 = ce_m(v, q)$ avec m pair, $ye_1 = ce_m(v, q)$ avec m impair, $yo_0 = se_m(v, q)$ avec m pair et enfin $yo_1 = se_m(v, q)$ avec m impair. Les fonctions $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$ sont appelées fonctions de Mathieu périodiques.

En utilisant (1.11), il est montré dans [1, 34] qu'il existe des relations de récurrence entre les coefficients A_m et B_m . On obtient :

– pour les solutions paires de période π (A_m , avec m pair) :

$$\begin{aligned} cA_0 - qA_2 &= 0 \\ (c - 4)A_2 - q(2A_0 - A_4) &= 0 \\ (c - m^2)A_m - q(A_{m-2} - A_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

– pour les solutions paires de période 2π (A_m , avec m impair) :

$$\begin{aligned} (c - 1)A_1 - q(A_1 + A_3) &= 0 \\ (c - m^2)A_m - q(A_{m-2} - A_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (1.13)$$

– pour les solutions impaires de période π (B_m , avec m pair) :

$$\begin{aligned} (c-4)B_2 - qB_4 &= 0 \\ (c-m^2)B_m - q(B_{m-2} - B_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (1.14)$$

– pour les solutions impaires de période 2π (B_m , avec m impair) :

$$\begin{aligned} (c-1)B_1 + q(B_1 - B_3) \\ (c-m^2)B_m - q(B_{m-2} - B_{m+2}) &= 0 \quad , (m \geq 3) \end{aligned} \quad (1.15)$$

On pose alors :

$$Ge_m = \frac{A_m}{A_{m-2}} \quad ; \quad Go_m = \frac{B_m}{B_{m-2}} \quad ; \quad V_m = \frac{(c-m^2)}{q}$$

Dans le cas où une propriété est vérifiée à la fois dans le cas pair et impair, on utilise la notation, plus simple, G_m .

On obtient alors que les équations (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} Ge_2 = V_0 \quad ; \quad Ge_3 = V_1 - 1 \quad ; \quad Ge_4 = V_2 - \frac{2}{Ge_2} \\ Go_3 = 1 + V_1 \quad ; \quad Go_4 = V_2 \quad ; \quad G_m = \frac{1}{(V_m - G_{m+2})}, (m \geq 3) \end{aligned}$$

La dernière égalité implique :

$$G_m = \frac{1}{(V_m - G_{m+2})} = \frac{1}{\left(V_m - \frac{1}{(V_{m+2} - G_{m+4})}\right)} = \frac{1}{V_m - \frac{1}{V_{m+2} - \frac{1}{V_{m+4} - \dots}}}$$

Or,

$$Ge_4 = V_2 - \frac{2}{Ge_2} = V_2 - \frac{2}{V_0} = \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \frac{1}{V_8 - \dots}}}$$

On en déduit donc que :

$$V_0 = \frac{2}{V_2 - \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \dots}}} \quad (1.16)$$

Cette fraction infinie est une "équation" pour c (donnée par (1.3)), c'est-à-dire que ses racines sont les valeurs caractéristiques a_{2n} associées aux fonctions ce_{2n} (i.e ce_m avec m pair).

De la même manière, les fractions infinies suivantes ont respectivement pour racines les valeurs caractéristiques a_{2n+1} , b_{2n+1} , b_{2n+2} associées aux fonctions ce_{2n+1} , se_{2n} , se_{2n+1} :

$$V_1 - 1 = \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - \dots}}} \quad (\text{les } a_{2n+1} \text{ sont racines}) \quad (1.17)$$

$$V_1 + 1 = \frac{1}{V_3 - \frac{1}{V_5 - \frac{1}{V_7 - \dots}}} \quad (\text{les } b_{2n+1} \text{ sont racines}) \quad (1.18)$$

$$V_2 = \frac{1}{V_4 - \frac{1}{V_6 - \frac{1}{V_8 - \dots}}} \quad (\text{les } b_{2n+2} \text{ sont racines}) \quad (1.19)$$

Les valeurs caractéristiques sont déterminées en calculant les valeurs propres d'une matrice tridiagonale infinie. Une fois les valeurs caractéristiques obtenues en résolvant les équations (1.16), (1.17), (1.18), (1.19), on peut calculer les coefficients de Fourier A_m et B_m grâce aux équations (1.12), (1.13), (1.14), (1.15). Puis en utilisant les séries (1.11), on obtient les fonctions de Mathieu.

1.3 Quelques propriétés des valeurs caractéristiques

Si on prend en compte le caractère physique des solutions de (1.1), celles-ci sont périodiques de période π ou 2π . Les valeurs de c associées à ces solutions sont appelées *valeurs caractéristiques*. Il existe une infinité de ces valeurs réelles. Comme dit précédemment, on différencie les valeurs caractéristiques associées respectivement aux solutions de périodes paires de (1.1) notées $a_m(q)$ ($m \geq 0$) et de périodes impaires notées $b_m(q)$ ($m \geq 1$). Ces valeurs caractéristiques jouent un rôle important dans la stabilité des solutions. De plus, elles possèdent quelques propriétés intéressantes [1, 34, 51] :

1- Pour un paramètre q fixé ($q \neq 0$), les valeurs caractéristiques a_m et b_m sont distinctes, réelles et telles que :

$$\begin{aligned} a_0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < \dots & , \text{ si } q > 0 \\ a_0 < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < a_3 < b_3 < \dots & , \text{ si } q < 0 \end{aligned}$$

2- Si $q = 0$, $a_m = b_m = m^2$ (on se ramène au cas circulaire).

3- Une solution de (1.1) associée à $a_m(q)$ ou $b_m(q)$ admet m zéros dans l'intervalle $0 \leq z < \pi$, avec q réel.

4- Les courbes $a_{2n}(q)$ et $b_{2n+2}(q)$ sont symétriques par rapport à l'axe $q = 0$, donc :

$$a_{2n}(q) = a_{2n}(-q) \text{ et } b_{2n+2}(q) = b_{2n+2}(-q), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

5- Les courbes $a_{2n+1}(q)$ et $b_{2n+1}(q)$ sont telles que :

$$a_{2n+1}(q) = b_{2n+1}(-q), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On connaît aussi quelques comportements asymptotiques des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu, qui nous seront très utiles par la suite :

Proposition 1.1 – Si $q > 0$, $a_m(q)$ et $b_m(q)$ approchent m^2 de la même façon que q approche 0, c'est-à-dire, lorsque $q \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} a_m(q) \sim b_m(q) \sim m^2, m \geq 1 \\ a_0(q) \sim -\frac{q^2}{2} \end{cases}$$

– Lorsque $q > 0$ et q assez grand, les courbes $a_m(q)$ et $b_{m+1}(q)$ sont équivalentes et mutuellement asymptotiques. Plus précisément, quand $q \rightarrow \infty$, on a les équivalents suivants :

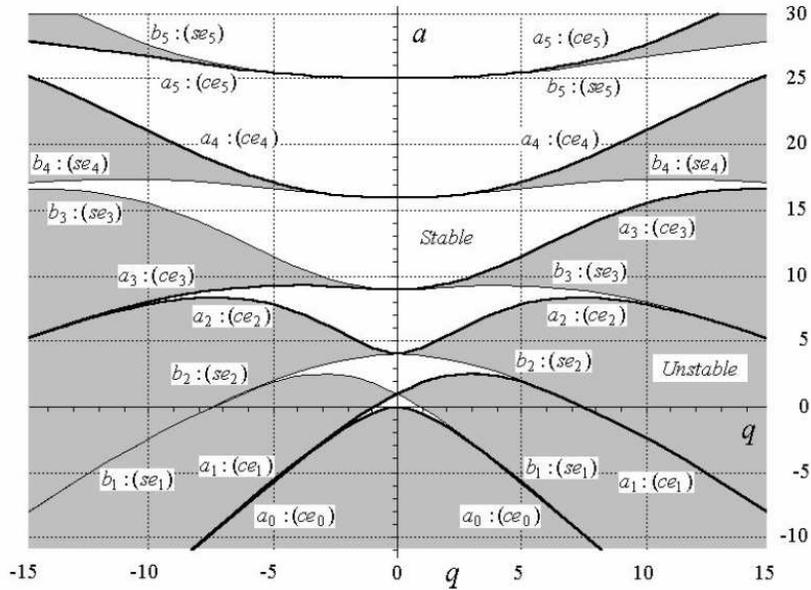
$$a_m(q) \sim b_{m+1}(q) \sim -2q + 2(2m+1)\sqrt{q} - \frac{(2m+1)^2 + 1}{8}$$

$$b_{m+1}(q) - a_m(q) \sim 2^{4m+5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \frac{e^{-4\sqrt{q}}}{m!}$$

– Lorsque $q < 0$ et q assez grand, $a_{2n} \sim a_{2n+1}$ et $b_{2n+1} \sim b_{2n+2}$.

La proposition (1.1) est extraite de [1].

Un algorithme développé par J. C Gutiérrez Vega et al. [34] permet de tracer les courbes des valeurs caractéristiques a_m et b_m en fonction de q :



1.4 Solutions de l'équation de Mathieu

A chacune des solutions caractéristiques présentées, on associe une solution périodique de (1.1) que l'on va introduire ci-dessous. L'équation de Mathieu (1.1) est une équation différentielle du second ordre qui admet donc deux familles de solutions indépendantes dont une est formée de fonctions périodiques paires ou impaires respectivement notées $ce_m(v, q)$ (pour cosinus elliptique) et $se_m(v, q)$ (pour sinus elliptique). En effet, cette équation décrit la dépendance angulaire de quantités physiques dans la plupart des problèmes qu'elle représente. Ses solutions doivent donc être, dans ces cas-là, périodiques de période π ou 2π . Nous nous intéresserons principalement aux solutions $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$.

Les solutions périodiques $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$ sont des fonctions orthogonales qui vérifient la normalisation de McLachlan [49], i.e :

$$\int_0^{2\pi} ce_m(v, q) ce_p(v, q) dv = \int_0^{2\pi} se_m(v, q) se_p(v, q) dv = \begin{cases} \pi & , \text{ si } m = p \\ 0 & , \text{ si } m \neq p \end{cases}$$

Les relations (1.11) nous donnent aussi des relations de normalisation pour les coefficients de Fourier de $ce_{2n}(v, q)$, $ce_{2n+1}(v, q)$, $se_{2n+1}(v, q)$, $se_{2n+2}(v, q)$, ($n \geq 0$) qui s'écrivent respectivement :

$$2A_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_{2j})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (A_{2j+1})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{2j+1})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (B_{2j+2})^2 = 1$$

Chaque équation entraîne que chacun des coefficients est borné et vérifie :

$$|A_j| \leq 1 \quad \text{et} \quad |B_j| \leq 1$$

Les fonctions $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$, solutions de l'équations de Mathieu, vérifient l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ce_m(v, q)}{\partial v^2} + (a_m(q) - 2q \cos 2v) ce_m(v, q) &= 0 \\ \frac{\partial^2 se_m(v, q)}{\partial v^2} + (b_m(q) - 2q \cos 2v) se_m(v, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.5 Relations entre les coefficients de Fourier et les différentes solutions de l'équation de Mathieu

Pour tout ordre m , les coefficients A_n^m et B_n^m peuvent s'écrire en fonction des solutions périodiques de l'équation de Mathieu (1.1) :

$$\begin{aligned} A_0^m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ce_m(v, q) dv \\ A_n^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ce_m(v, q) \cos nv dv \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \\ B_n^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} se_m(v, q) \sin nv dv \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Il existe aussi plusieurs façons d'exprimer les solutions $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$, par exemple [1] :

$$\begin{aligned} ce_m(v, q) &= \rho_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left(2\sqrt{q} \cos v \cos t - p \frac{\pi}{2} \right) ce_m(t, q) dt \\ se_m(v, q) &= \rho_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(2\sqrt{q} \cos v \cos t + p \frac{\pi}{2} \right) \sin v \sin t se_m(t, q) dt \end{aligned}$$

avec : $m = 2s + p$ où $p = 0$ ou $p = 1$

$$\rho_m = \frac{2ce_{2s} \left(\frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi A_0^{2s}(q)}, \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad \rho_m = \frac{-2ce'_{2s+1} \left(\frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi \sqrt{q} A_1^{2s+1}(q)}, \text{ si } p = 1; \text{ pour les fonctions } ce_m(v, q)$$

$$\rho_m = \frac{-4se'_{2s} \left(\frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi \sqrt{q} B_2^{2s}(q)}, \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad \rho_m = \frac{4se_{2s+1} \left(\frac{\pi}{2}, q \right)}{\pi B_1^{2s+1}(q)}, \text{ si } p = 1; \text{ pour les fonctions } se_m(v, q)$$

Nous avons adopté ici les notations de [1] i.e pour tout mode $m \in \mathbb{N}$ (resp. $m \in \mathbb{N}^*$),

$ce'_m(v, q)$ (resp. $se'_m(v, q)$) représente $\frac{\partial ce_m(v, q)}{\partial q}$ (resp. $\frac{\partial se_m(v, q)}{\partial q}$).

1.6 Solutions de l'équation de Mathieu modifiée

L'équation de Mathieu modifiée (1.2) admet cinq sortes de solutions qui sont :

- Lorsque $q > 0$,

1- les solutions du 1^{er} ordre de l'équation de Bessel : $Mc_m^{(1)}(z, q)$ et $Ms_m^{(1)}(z, q)$ (ces quantités peuvent aussi être notées Je et Jo),

2- les solutions du 2^{ème} ordre de l'équation de Bessel : $Mc_m^{(2)}(z, q)$ et $Ms_m^{(2)}(z, q)$ (ces quantités peuvent aussi être notées Ne et No),

3- les fonctions de Mathieu-Hankel : $Mc_m^{(3)}(z, q)$ et $Ms_m^{(3)}(z, q)$.

Ces solutions de l'équation de Mathieu modifiée vérifient l'équation différentielle, pour $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Mc_m^{(j)}(z, q)}{\partial z^2} + (a_m(q) - 2q \cosh 2z) Mc_m^{(j)}(z, q) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Ms_m^{(j)}(z, q)}{\partial z^2} + (b_m(q) - 2q \cosh 2z) Ms_m^{(j)}(z, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

- Lorsque $q < 0$,

- les solutions du 1^{er} ordre de l'équation de Bessel modifiée souvent notées Ie et Io ,
- les solutions du 2^{ème} ordre de l'équation de Bessel modifiée souvent notées Ke et Ko .

Etant donné que nous nous intéressons à des problèmes de propagation d'onde, nous prendrons plus particulièrement en compte les solutions de Mathieu-Hankel. En effet, les fonctions de Mathieu-Hankel sont utilisées pour la représentation des ondes entrantes et sortantes dans les problèmes de propagation d'ondes.

On notera ces fonctions $Mc_m^{(3)}$ pour les solutions paires et $Ms_m^{(3)}$ pour les solutions impaires ; de plus, on sait que :

$$\begin{aligned} Mc_m^{(3)}(z, q) &= Mc_m^{(1)}(z, q) + iMc_m^{(2)}(z, q) \\ Ms_m^{(3)}(z, q) &= Ms_m^{(1)}(z, q) + iMs_m^{(2)}(z, q) \end{aligned}$$

Les solutions de Mathieu-Hankel s'écrivent donc en fonction des solutions du 1^{er} et du 2^{ème} ordre de l'équation de Bessel que l'on peut, à leur tour, exprimer en fonction des solutions de l'équation de Mathieu (1.1) :

$$Mc_m^{(1)}(z, q) = \frac{(-1)^s}{\pi A_0^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{q} \cosh z \cos v - p\frac{\pi}{2}) ce_m(v, q) dv$$

$$Mc_{2s}^{(2)}(z, q) = \frac{(-1)^s 2}{\pi ce_m(0, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z_0^{(2)}(u) ce_m(v, q) dv$$

$$Mc_{2s+1}^{(2)}(z, q) = \frac{(-1)^s 8\sqrt{q} \cosh z}{\pi A_0^{2s+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_1^{(2)}(u) \cos v}{u} ce_{2s+1}(v, q) dv$$

$$Ms_{2s}^{(1)}(z, q) = \frac{4}{\pi} \sqrt{q} \frac{(-1)^{s+1}}{se'_{2s}(0, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\sqrt{q} \cosh z \cos v) (\sinh z \sin v se_{2s}(v, q)) dv$$

$$Ms_{2s+1}^{(1)}(z, q) = \frac{2}{\pi} \sqrt{q} \frac{(-1)^s}{se_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\sqrt{q} \sinh z \sin v) se_{2s+1}(v, q) dv$$

$$Ms_{2s}^{(2)}(z, q) = \frac{(-1)^{s+1} 8q \sinh 2z}{\pi B_2^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_2^{(2)}(u) \sin 2v}{u^2} se_{2s}(v, q) dv$$

$$Ms_{2s+1}^{(2)}(z, q) = \frac{(-1)^{s+1} 8\sqrt{q} \sinh z}{\pi B_1^{2s+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Z_1^{(2)}(u) \sin v}{u} se_{2s+1}(v, q) dv$$

où : $u = \sqrt{2q(\cosh 2z + \cos 2v)}$ et $Z_p^{(2)}$, $p \in \mathbb{N}$, sont les fonctions de Bessel de 2ème espèce.

Remarque 1.2 Il existe d'autres solutions de première espèce de (1.1) proportionnelles à $Mc_m^{(1)}$ et $Ms_m^{(1)}$ que l'on note $Ce_m(z, q)$ (pour cosinus hyperbolique elliptique) et $Se_m(z, q)$ (pour sinus hyperbolique elliptique). Ces solutions s'écrivent aussi en fonction des solutions de l'équation de Mathieu (1.1) $ce_m(v, q)$ et $se_m(v, q)$. Elles sont données par [1] :

$$\begin{aligned} Ce_{2s+p}(v, q) &= ce_{2s+p}(iv, q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+p}^{2s+p}(q) \cosh(2k+p)v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Se_{2s+p}(v, q) &= -ise_{2s+p}(iv, q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+p}^{2s+p}(q) \sinh(2k+p)v \end{aligned}$$

Si $p = 0$, on a aussi :

$$Ce_{2s}(z, q) = \frac{ce_{2s}(\frac{\pi}{2}, q)ce_{2s}(0, q)}{(-1)^r A_0^{2s}} Mc_{2s}^{(1)}(z, q)$$

$$\text{et } Se_{2s}(z, q) = \frac{se'_{2s}(\frac{\pi}{2}, q)se'_{2s}(0, q)}{(-1)^r q B_2^{2s}} Ms_{2s}^{(1)}(z, q).$$

Si $p = 1$:

$$Ce_{2s+1}(z, q) = \frac{ce'_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)ce_{2s+1}(0, q)}{(-1)^{r+1} \sqrt{q} A_1^{2s+1}} Mc_{2s+1}^{(1)}(z, q)$$

$$\text{et } Se_{2s+1}(z, q) = \frac{se_{2s+1}(\frac{\pi}{2}, q)se'_{2s}(0, q)}{(-1)^r \sqrt{q} B_1^{2s+1}} Ms_{2s+1}^{(1)}(z, q).$$

où $m = 2s + p$ ($p = 0$ ou 1) et en notant $A_{2k+p}^{2s+p}(q) = A_{2k+p}$ et $B_{2k+p}^{2s+p}(q) = B_{2k+p}$.

$Ce_m(z, q)$ est associé à $a_m(q)$ et $Se_m(z, q)$ à $b_m(q)$.

1.7 Notations comparatives des fonctions de Mathieu

Il existe plusieurs façons de noter les fonctions de Mathieu. Dans la littérature, “deux familles” de notations se dégagent : les notations d’Abramovitz [1] que l’on a utilisées ici (données à gauche) et les notations de Meixner et Schäfer [51], [60] (données à droite). Il existe des correspondances entre ces deux familles :

Pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$Mc_n^{(j)}(z, q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Re_n^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z) \tag{1.22}$$

$$Ms_n^{(j)}(z, q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Ro_n^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z)$$

$$ce_n(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{N_n^{(e)}}} Se_n(2\sqrt{q}, \cos v) \tag{1.23}$$

$$se_n(v, q) = \sqrt{\frac{\pi}{N_n^{(o)}}} So_n(2\sqrt{q}, \cos v)$$

où $N_n^{(e)}$ et $N_n^{(o)}$ sont des coefficients de normalisation respectivement associés aux fonctions Se_n et So_n définis dans [60] par :

$$\int_0^{2\pi} Se_n^2(2\sqrt{q}, \cos v) dv = N_n^{(e)} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} So_n^2(2\sqrt{q}, \cos v) dv = N_n^{(o)} \tag{1.24}$$

Lorsqu'il ne sera pas nécessaire de distinguer les cas pairs des cas impairs, nous pourrons utiliser les notations plus concises suivantes. Pour $j = 1, 2, 3, 4$:

$$R_m^{(j)}(kf, \cosh \xi) = \begin{cases} Re_m^{(j)}(kf, \cosh \xi) & \text{si } m \geq 0 \\ Ro_{|m|}^{(j)}(kf, \cosh \xi) & \text{si } m < 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

$$S_m(kf, \cos \theta) = \begin{cases} Se_m(kf, \cos \theta) & \text{si } m \geq 0 \\ So_{|m|}(kf, \cos \theta) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

et

$$N_m = \begin{cases} Ne_m = \int_0^{2\pi} (Se_m(kf, \cos \theta))^2 d\theta & \text{si } m \geq 0 \\ No_{|m|} = \int_0^{2\pi} (So_{|m|}(kf, \cos \theta))^2 d\theta & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

2 Les fonctions sphéroïdales

L'objectif de cette partie est de rappeler quelques définitions et propriétés caractéristiques des fonctions d'ondes sphéroïdales. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux fonctions d'ondes sphéroïdales prolates qui interviennent dans les problèmes que nous allons étudier.

Tout d'abord, on rappelle qu'un sphéroïde est un ellipsoïde obtenu par la révolution d'une ellipse autour de l'un de ses axes. On parle de sphéroïde prolate (ou allongé) si l'ellipse tourne autour de son axe principal et de sphéroïde oblate (ou aplati) si l'ellipse tourne autour de son axe secondaire. Dans le cadre de notre étude on s'intéressera particulièrement aux sphéroïdes prolates.

2.1 Définition des coordonnées sphéroïdales prolates

Dans un premier temps, nous allons rappeler la définition des coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) . Ces coordonnées sont liées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= b \sin \varphi \cos \theta \\ y &= b \sin \varphi \sin \theta \\ z &= a \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.28)$$

où $\varphi \in [0, \pi[$, $\theta \in [0, 2\pi[$, a et b représentent respectivement le demi-axe principal et le demi-axe secondaire du sphéroïde qui sont définis par :

$$\begin{aligned} a &= f \cosh \xi \\ b &= f \sinh \xi \end{aligned}$$

et f est la distance interfocale du sphéroïde et ξ un nombre réel positif non nul.

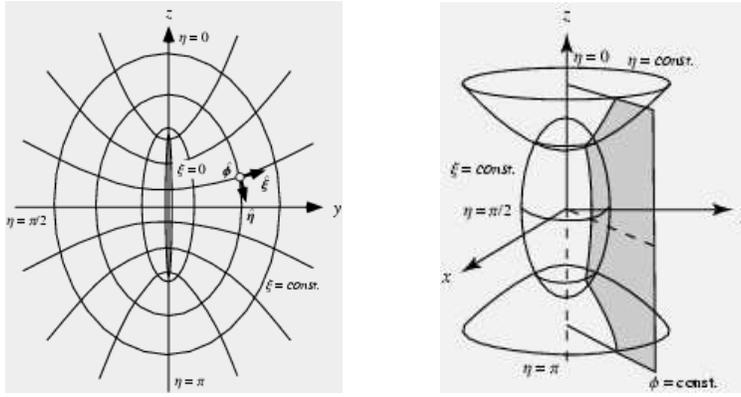


FIG. 1.2: Géométrie des coordonnées sphéroïdales prolates.

Comme en 2D, on peut construire des solutions analytiques de l'équation d'Helmholtz dans un système de coordonnées sphéroïdales prolates, par séparation de variables. Soit $W := W(x, y, z)$ une solution de l'équation d'Helmholtz en coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On introduit le système (ξ, φ, θ) de coordonnées sphéroïdales prolates via le changement de variables :

$$x = f \sinh \xi \sin \varphi \cos \theta, \quad y = f \sinh \xi \sin \varphi \sin \theta, \quad z = f \cosh \xi \cos \varphi$$

où f est une constante positive représentant la distance interfocale du sphéroïde paramétrée par $\{\xi = \xi_0\}$.

On pose alors $\tilde{W} := \tilde{W}(\xi, \varphi, \theta) = W(x, y, z)$ et \tilde{W} est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \theta^2} + k^2 f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) \tilde{W} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nous renvoyons à l'annexe B pour les détails de calcul conduisant à l'Eq.(2.29).

On suppose maintenant que \tilde{W} est de la forme $\tilde{W} = \Psi_1(\xi)\Psi_2(\varphi)\Psi_3(\theta)$. L'équation (1.5) devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi_1 \sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\Psi_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right) \\ + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\Psi_3 \sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta^2} + k^2 f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

On en déduit d'abord que :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\Psi_3 \sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta^2} \right] = 0$$

ce qui entraîne que Ψ_3 est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{1}{\Psi_3 \sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \theta^2} - \gamma \Psi_3 = 0 \quad (2.31)$$

où γ est une fonction constante.

En injectant (2.31) dans (2.30), on obtient ensuite Ψ_1 et Ψ_2 vérifient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Psi_1 \sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\Psi_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right) \\ & + (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) (\gamma + k^2 f^2) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Psi_1 \sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right) + (\gamma + k^2 f^2) \cosh^2 \xi \\ & = - \frac{1}{\Psi_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right) + (\gamma + k^2 f^2) \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

et comme $\Psi_1 := \Psi_1(\xi)$ et $\Psi_2 := \Psi_2(\varphi)$, on peut donc affirmer qu'il existe une constante δ telle que Ψ_1 vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} \right) + ((\gamma + k^2 f^2) \cos^2 \varphi - \delta) \Psi_1 = 0 \quad (2.32)$$

et Ψ_2 est solution de :

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \right) - ((\gamma + k^2 f^2) \cos^2 \varphi + \delta) \Psi_2 = 0 \quad (2.33)$$

2.2 Fonctions d'ondes sphéroïdales prolates

Dans le cadre de notre étude, nous allons nous intéresser à trois types de fonctions qui sont imposées quand on résout l'équation (2.29) en séparant les variables :

- les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates radiales d'ordre mn et de $j^{\text{ème}}$ espèce notées $R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi)$ qui sont solutions de (2.32),
- les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates angulaires d'ordre mn notées $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ qui sont solutions de (2.33),
- les fonctions λ_{mn} qui sont appelées "valeur propre sphéroïdale prolates" et associées aux fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ et qui correspondent à la constante de séparation notée de façon générique δ .

Les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates radiales d'ordre mn et d'espèce j , notées $R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi)$, vérifient donc l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi)}{\partial \xi} \right) - \sinh \xi \left(\lambda_{mn} - (kf)^2 \cosh^2 \xi - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi} \right) R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi) = 0 \quad (2.34)$$

Les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates angulaires $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right) + \sin \varphi \left(\lambda_{mn} - (kf)^2 \cos^2 \varphi - \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right) S_{mn}(kf, \cos \varphi) = 0 \quad (2.35)$$

Le paramètre λ_{mn} est appelé **valeur propre sphéroïdale prolate**.

Dans la suite, la solution de l'équation d'Helmholtz sera donc décomposée sur l'ensemble des modes u_{mn} de la façon suivante :

$$u_{mn} = R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi) S_{mn}(kf, \cos \varphi) \cos m\theta$$

2.3 Comportements asymptotiques

Nous allons donner ici quelques comportements asymptotiques qui nous seront utiles par la suite :

Définition 2.1 *Les fonctions de Hankel sphériques de 1^{ère} espèce (aussi appelées fonctions de Bessel sphériques de 3^{ème} espèce) sont également appelées fonctions de Hankel d'ordre fractionnaire, en effet (cf p. 435-442 dans [1]) :*

$$h_n^{(1)}(ka) = \sqrt{\frac{\pi}{2ka}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \quad (2.36)$$

où les fonctions $H_n^{(1)}(ka)$ sont les fonctions de Hankel d'ordre 1 (cf pp 358-437 dans [1]).

On sait aussi que :

$$h_0^{(1)}(ka) = -i \frac{e^{ika}}{ka} \quad (2.37)$$

et on dispose d'une relation entre $h_n^{(1)}(ka)$ et sa dérivée :

$$h_n'^{(1)}(ka) = \frac{n}{ka} h_n^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka) \quad (2.38)$$

Les comportements asymptotiques en 0 et à l'infini des fonctions $h_n^{(1)}(ka)$ sont aussi étudiés dans [1] :

Proposition 2.2 Lorsque $ka \rightarrow 0$:

$$h_n^{(1)}(ka) \sim \frac{(ka)^n}{(2n+1)!!} - i \frac{(2n+1)!!}{(ka)^{n+1}} \quad (2.39)$$

où la double factorielle est définie par :

$$n!! = \begin{cases} 1.3.5\dots(n-2)n & \text{pour } n \geq 0 \text{ impair} \\ 2.4.6\dots(n-2)n & \text{pour } n \geq 0 \text{ pair} \\ 1 & \text{pour } n = -1, 0 \end{cases}$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$h_n^{(1)}(ka) \sim \frac{(-1)^n}{ka} \left(\frac{n(n+1)}{2ka} - i \right) e^{i \left(ka + \frac{n\pi}{2} \right)} \quad (2.40)$$

Proposition 2.3 D'après [20] (cf Chap. 4), lorsque $ka \rightarrow 0$ ou lorsque $ka \rightarrow +\infty$, à $\xi = \xi_0$ (i.e $kf = eka$) :

$$\frac{eka R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})}{R_{mn}^{\prime(3)}(eka, e^{-1})} \sim \frac{h_n^{(1)}(ka)}{h_n^{\prime(1)}(ka)} \quad (2.41)$$

2.4 Comportements asymptotiques des valeurs propres associées aux fonctions d'ondes sphéroïdales angulaires

D'après [1], on sait que :

Proposition 2.4 Lorsque $ka \rightarrow 0$:

$$\lambda_{mn} \sim n(n+1) \quad (2.42)$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_{mn} \sim (2n - 2m + 1)eka \quad (2.43)$$

Les deux familles de fonctions spéciales (les fonctions de Mathieu et les fonctions sphéroïdales prolates) vont intervenir dans toute la suite de ce travail. Ce premier chapitre n'est qu'une simple présentation de ces fonctions qui sont peu utilisées dans la littérature. D'autres résultats les concernant seront donnés, lorsque nécessaire, au fur et à mesure.

Chapitre 2

Construction et analyse de performance de conditions aux limites absorbantes de type DtN local dans un cadre OSRC pour des problèmes extérieurs d'Helmholtz : cas des frontières elliptiques

Sommaire

1	Introduction	34
2	Préliminaires	35
3	Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales	37
4	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	46
5	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	57
6	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	74
7	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	83
8	Conclusion	103

1 Introduction

L'objectif de cette thèse est de contribuer à la résolution de l'équation d'Helmholtz dans un domaine borné Ω dont la frontière intérieure Γ représente le bord d'un obstacle diffractant et la frontière extérieure Σ est absorbante. On s'intéresse donc au problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = Tu & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

Comme d'habitude, Δ désigne le Laplacien, k le nombre d'onde et n la normale unitaire extérieure à Ω . Sur Γ , le champ incident u est donné, l'opérateur T caractérise la condition aux limites absorbante posée sur Σ .

Les conditions absorbantes les plus utilisées dans le secteur industriel sont les conditions de type Bayliss-Gunzburger-Turkel (BGT) [9]. Ces conditions appliquées sur des frontières de forme elliptique ont été étudiées par Reiner et al. [54]. Elles s'écrivent comme suit :

- La condition bidimensionnelle de Bayliss-Gunzburger-Turkel du 1^{er} ordre (BGT1), exprimée en coordonnées elliptiques, sur la surface $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sqrt{1 - e^2} \left(ika - \frac{1}{2} \right) u \quad (1.1)$$

- La condition bidimensionnelle de Bayliss-Gunzburger-Turkel de 2^{ème} ordre (BGT2), exprimée en coordonnées elliptiques, sur la surface $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sqrt{1 - e^2} \left[\left(ika - \frac{1}{2} + \frac{1}{8(1 - ika)} \right) u + \frac{1}{2(1 - ika)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.2)$$

Le paramètre e représente l'excentricité de l'ellipse et ξ la variable radiale (cf section (2) de ce chapitre).

Remarque 1.1 *On peut remarquer que pour $e = 0$, les deux conditions (1.1) et (1.2) correspondent respectivement aux conditions BGT1 et BGT2 dans le cas du cercle.*

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons détailler la construction de nouvelles conditions aux limites de type Dirichlet-to-Neumann locales, pour des frontières de forme elliptique i.e adaptées à des obstacles de forme elliptique. Nous ferons, par la suite, une analyse de performance mathématique puis numérique de ces

conditions pour le problème modal dans un premier temps puis pour le problème de scattering. Toute cette étude se fera dans un cadre OSRC [46]. Notre objectif est d'évaluer l'effet du nombre d'onde et de l'allongement de la frontière sur la performance des conditions construites. Les tests de performance seront réalisés en comparant les résultats obtenus à ceux calculés en appliquant les conditions BGT.

2 Préliminaires

Soit Γ une surface de forme elliptique décrivant éventuellement la surface d'un obstacle. Dans le système de coordonnées elliptiques (ξ, θ) , la frontière Γ est repérée par $\{\xi = \xi_0\}$. Ces coordonnées sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y) par les relations :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$, a est le grand rayon de l'ellipse et b le petit rayon de l'ellipse qui sont définis par :

$$\begin{aligned} a &= f \cosh \xi \\ b &= f \sinh \xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le nombre ξ est un réel strictement positif décrivant la variable radiale et f est la distance interfocale de l'ellipse qui vérifie :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.5)$$

On définit l'excentricité e de l'ellipse $\{\xi = \xi_0\}$ par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.6)$$

L'excentricité e caractérise l'allongement de la frontière. Elle satisfait $0 < e < 1$. Lorsque $e \rightarrow 0$, l'ellipse dégénère en un cercle et lorsque $e \rightarrow 1$, l'ellipse dégénère en un segment de longueur $2f$.

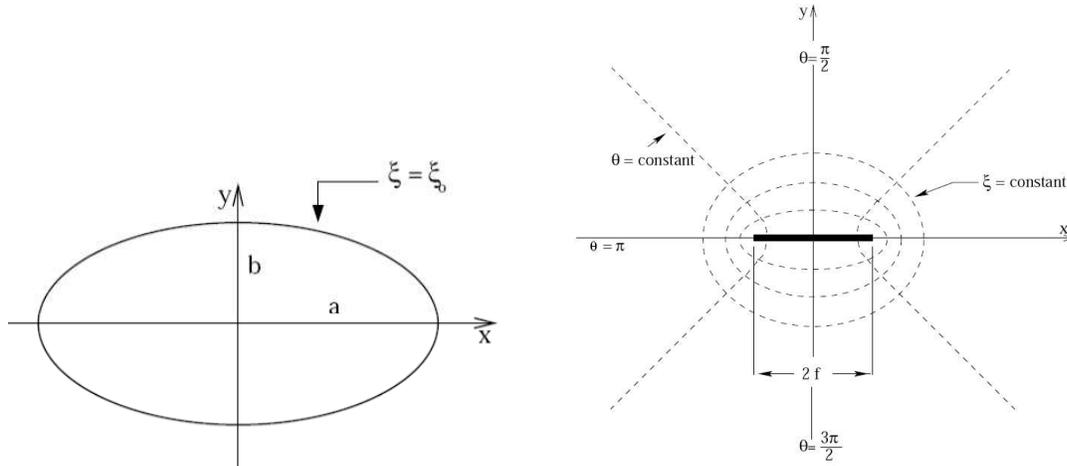


FIG. 2.1: Géométrie des coordonnées elliptiques

Nous rappelons maintenant que le $n^{\text{ième}}$ mode elliptique cylindrique u_n est donné par [57] :

$$u_n = \begin{cases} u_{n,even} = \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) S e_n(kf, \cos \theta), & n \geq 0 \text{ (modes pairs)} \\ u_{n,odd} = \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) S o_n(kf, \cos \theta), & n \geq 1 \text{ (modes impairs)} \end{cases} \quad (2.7)$$

où $S e_n$ (resp. $S o_n$) sont les fonctions de Mathieu *périodiques paires* (resp. *impaires*), et $\text{Re}_n^{(3)}$ (resp. $\text{Ro}_n^{(3)}$) sont les fonctions de Mathieu *radiales paires* (resp. *impaires*) de troisième espèce (cf p. 376 in [60]).

Enfin, nous introduisons les coefficients α_n et β_n qui dépendent respectivement des fonctions de Mathieu radiales de troisième espèce paires $\text{Re}_n^{(3)}$ et impaires $\text{Ro}_n^{(3)}$, du nombre d'onde ka et de l'excentricité e :

Le coefficient α_n est défini par :

$$\alpha_n = \frac{\partial \text{Re}_n^{(3)}(eka, e^{-1})}{\partial \xi} ; \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

Le coefficient β_n est donné par :

$$\beta_n = \frac{\partial \text{Ro}_n^{(3)}(eka, e^{-1})}{\partial \xi} ; \quad n \geq 1 \quad (2.9)$$

Afin d'alléger les expressions, nous désignerons dans tout ce qui suit $\frac{\partial \text{Re}_n^{(3)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})$

par $\text{Re}_n^{(3)'}(eka, e^{-1})$ et $\frac{\partial \text{Ro}_n^{(3)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})$ par $\text{Ro}_n^{(3)'}(eka, e^{-1})$.

3 Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales

Notre but est de construire de nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales en coordonnées elliptiques. L'idée de construire des conditions aux limites absorbantes de type DtN locales n'est pas nouvelle. En effet, de telles conditions ont déjà été dérivées pour des frontières de forme sphérique dans [39]. Le mode de construction adopté par [39] est basé sur la localisation de la condition aux limites DtN globale tronquée [29]. Les ingrédients clés de cette méthode sont les identités trigonométriques qui expriment des dérivées d'ordre élevé des fonctions sinus et cosinus (cf par exemple Eq. (A4) p. 276 dans [24]). Cependant, ces propriétés ne sont pas satisfaites par les fonctions de Mathieu angulaires (cf Chap. 1), et donc, la procédure utilisée par [39] ne peut être appliquée à l'opérateur DtN global tronqué [31, 29] lorsqu'il est exprimé en coordonnées elliptiques. L'approche que nous proposons pour la construction de ces conditions approchées DtN locales dans le cas de frontières elliptiques peut être vue comme une méthode inverse. Plus précisément, nous partons d'une condition aux limites de type Robin avec des coefficients inconnus. Ces coefficients dépendent des valeurs caractéristiques elliptiques. De plus, nous voulons que les conditions en question soient exactes pour les premiers modes u_n . En conséquence, les coefficients recherchés sont l'unique solution d'un système linéaire algébrique. Dans un premier temps nous allons construire une condition d'ordre un Eq. (3.10) puis trois conditions d'ordre deux Eqs. (3.13)-(3.21)-(3.29).

3.1 La condition DtN d'ordre 1 (DtN1)

La condition approchée de type DtN locale du 1^{er} ordre est construite à partir d'une condition de Robin que l'on impose exacte pour le 1^{er} mode u_0 .

Proposition 3.1 *La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre un (DtN1), définie sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 u \quad (3.10)$$

Démonstration :

Nous considérons une condition de type Robin qui est exacte pour le premier mode elliptique u_0 donné par Eq. (2.7). Nous posons :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = Au$$

où la constante A satisfait :

$$\sinh \xi \frac{\partial \text{Re}_0^{(3)}}{\partial \xi}(kf, \cosh \xi) S_{e_0}(kf, \cos \theta) = A \left(\text{Re}_0^{(3)}(kf, \cosh \xi) S_{e_0}(kf, \cos \theta) \right) \quad (3.11)$$

Puis, nous injectons, sur $\{\xi = \xi_0\}$, les Eqs. (2.4), (2.5), (2.6) dans Eq. (3.11), et nous en déduisons :

$$A = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \alpha_0 \quad (3.12)$$

où α_0 est défini ci-dessus par Eq. (2.8) pour $n = 0$.

□

3.2 Les conditions DtN d'ordre 2 (DtN2)

Pour construire la condition d'ordre 2 DtN2, nous considérons une condition de type Robin qui est, cette fois-ci, exacte pour les deux premiers modes u_n . Le fait qu'il existe un mode u_1 pair ($u_{1,even}$) et impair ($u_{1,odd}$) (cf (2.7)) va conduire à la construction de trois conditions différentes DtN2 : une condition exacte pour les modes u_0 et $u_{1,even}$ appelée $DtN2e$, une exacte pour les modes u_0 et $u_{1,odd}$ appelée $DtN2o$ et enfin une troisième, construite au sens des moindres carrés, exacte pour les modes u_0 , $u_{1,even}$ et $u_{1,odd}$ et appelée $DtN2ae$.

Proposition 3.2 *La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre deux exacte pour les modes u_0 et $u_{1,even}$ ($DtN2e$) et définie sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(a_0 - a_1)e} \left[\left(a_0 \alpha_1 - a_1 \alpha_0 - (\alpha_0 - \alpha_1) \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u + (\alpha_1 - \alpha_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.13)$$

où le coefficient α_n a été défini par Eq. (2.8)

Démonstration :

Nous considérons une condition de type Robin qui est exacte pour les deux premiers modes elliptiques u_0 et $u_{1,even}$ (cf Eq. (2.7)). Nous lui imposons aussi d'être de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = A_e u + B_e \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u \quad (3.14)$$

où A_e et B_e sont des coefficients constants (indépendants de θ) à déterminer.

Par contre, il est à noter que contrairement aux conditions aux limites DtN2 pour des frontières de forme circulaire [41], la condition $DtN2e$ dépend de la variable angulaire θ . Une telle dépendance est nécessaire pour construire une condition aux

limites symétrique en raison des propriétés des fonctions de Mathieu angulaires paires Se_n (cf. Chap 1).

En utilisant les Eqs. (1.20)-(1.22)-(1.23) du Chap. 1 et Eq. (2.7) de ce chapitre, il est alors facile de vérifier que, pour tous les modes pairs de u_n ($u_{n,even}$), nous avons

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} = \left(-a_n + \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u_n \quad (3.15)$$

Afin de déterminer les coefficients constants A_e et B_e , nous supposons que, pour $\{\xi = \xi_0\}$, la condition est exacte pour les modes u_0 et $u_{1,even}$. Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = A_e u_0 + B_e \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial u_{1,even}}{\partial \xi} = A_e u_{1,even} + B_e \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_{1,even} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

En utilisant Eq. (3.15), il vient que (A_e, B_e) est l'unique solution du système linéaire 2×2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = (A_e - a_0 B_e) u_0 \\ \frac{\partial u_{1,even}}{\partial \xi} = (A_e - a_1 B_e) u_{1,even} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Ce système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \text{Re}_0^{(3)'}(eka, e^{-1}) Se_0(eka, \cos \theta) = (A_e - a_0 B_e) \text{Re}_0^{(3)}(eka, e^{-1}) Se_0(eka, \cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \text{Re}_1^{(3)'}(eka, e^{-1}) Se_1(eka, \cos \theta) = (A_e - a_1 B_e) \text{Re}_1^{(3)}(eka, e^{-1}) Se_1(eka, \cos \theta) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Après simplifications, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_e - B_e a_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 \\ A_e - B_e a_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_1 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

où le coefficient α_n a été défini par Eq. (2.8).

La résolution de ce système nous donne comme solution le couple (A_e, B_e) :

$$\begin{cases} A_e = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0}{a_0 - a_1} \\ B_e = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{a_0 - a_1} \end{cases} \quad (3.20)$$

La condition DtN2 paire notée $DtN2e$ est alors construite en remplaçant les coefficients A_e et B_e dans Eq. (3.14) par leur expression donnée par (3.20).

□

Suivant le même principe, nous allons maintenant construire une condition DtN locale d'ordre 2 exacte pour les modes u_0 et $u_{1,odd}$.

Proposition 3.3 *La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre deux exacte pour les modes u_0 et $u_{1,odd}$ ($DtN2o$) et définie sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(a_0 - b_1)e} \left[\left(a_0\beta_1 - b_1\alpha_0 - (\alpha_0 - \beta_1) \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u + (\beta_1 - \alpha_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.21)$$

où les coefficients α_n et β_n ont été définis par Eq. (2.8)-(2.9).

Démonstration :

Nous considérons, comme précédemment, une condition de type Robin qui est exacte pour les deux premiers modes elliptiques u_0 et $u_{1,odd}$ (cf Eq. (2.7)). Nous lui imposons aussi d'être de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = A_o u + B_o \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u \quad (3.22)$$

où A_o et B_o sont des coefficients constants (indépendants de θ) à déterminer.

De la même façon que lors de la construction de la condition $DtN2e$, en utilisant, les Eqs. (1.20)-(1.22)-(1.23) du Chap. 1 et Eq. (2.7) de ce chapitre, on peut aisément vérifier que, pour tous les modes impairs de u_n ($u_{n,odd}$), nous avons

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} = \left(-b_n + \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u_n \quad (3.23)$$

Afin de déterminer les coefficients constants A_o et B_o , nous utilisons le fait que la condition est supposée exacte pour les deux modes u_0 et $u_{1,odd}$ lorsque $\{\xi = \xi_0\}$. Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = A_o u_0 + B_o \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial u_{1,odd}}{\partial \xi} = A_o u_{1,odd} + B_o \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_{1,odd} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

En utilisant Eqs. (3.15)-(3.23), on obtient que (A_o, B_o) est l'unique solution du système linéaire 2×2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = (A_o - a_0 B_o) u_0 \\ \frac{\partial u_{1,odd}}{\partial \xi} = (A_o - b_1 B_o) u_{1,odd} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Ce système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \text{Re}_0^{(3)'}(eka, e^{-1}) Se_0(eka, \cos \theta) = (A_o - a_0 B_o) \text{Re}_0^{(3)}(eka, e^{-1}) Se_0(eka, \cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \text{Ro}_1^{(3)'}(eka, e^{-1}) So_1(eka, \cos \theta) = (A_o - b_1 B_o) \text{Ro}_1^{(3)}(eka, e^{-1}) So_1(eka, \cos \theta) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Nous obtenons après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_o - B_o a_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 \\ A_o - B_o a_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \beta_1 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

où les coefficients α_n et β_n ont respectivement été définis par Eq. (2.8) et (2.9).

La résolution du système (3.27) nous donne alors l'expression du couple (A_o, B_o) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_o = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{a_0 \beta_1 - b_1 \alpha_0}{a_0 - b_1} \\ B_o = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\beta_1 - \alpha_0}{a_0 - b_1} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

La condition DtN2 impaire notée *DtN2o* est obtenue en remplaçant les coefficients A_o et B_o dans Eq. (3.22) par leur expression donnée par (3.28).

□

Pour compléter la construction des différentes conditions aux limites locales de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre deux, nous allons donner une troisième condition, notée $DtN2ae$, vérifiée au sens des moindres carrés par les modes u_0 , $u_{1,even}$ et $u_{1,odd}$.

Proposition 3.4 *La condition locale $DtN2ae$, vérifiée au sens des moindres carrés par les modes u_0 , $u_{1,even}$ et $u_{1,odd}$, définie sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\Theta} \left[A_{ae}^* u + B_{ae}^* \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u \right) \right] \quad (3.29)$$

où le coefficient Θ est donné par :

$$\Theta = 2(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0 a_1 - a_0 b_1 - a_1 b_1) \quad (3.30)$$

et A_{ae}^* et B_{ae}^* sont définis par :

$$\begin{cases} A_{ae}^* = [(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - (a_0 + a_1 + b_1)(a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1)] \\ B_{ae}^* = [(a_0 + a_1 + b_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - 3(a_0 \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1)] \end{cases} \quad (3.31)$$

Les coefficients α_n et β_n ont respectivement été définis par Eqs. (2.8)-(2.9).

Démonstration :

Comme dans les deux cas précédents, nous considérons une condition de type Robin qui est exacte pour les trois premiers modes elliptiques u_0 , $u_{1,even}$ et $u_{1,odd}$ (cf Eq. (2.7)). Nous lui imposons aussi d'être de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = A_{ae} u + B_{ae} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u \quad (3.32)$$

où A_{ae} et B_{ae} sont des coefficients constants (indépendants de θ) à déterminer.

Nous imposons aussi que, pour $\xi = \xi_0$, la condition est exacte pour les trois modes u_0 , $u_{1,even}$ et $u_{1,odd}$. Nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = A_{ae} u_0 + B_{ae} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial u_{1,even}}{\partial \xi} = A_{ae} u_{1,even} + B_{ae} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_{1,even} \\ \text{et} \\ \frac{\partial u_{1,odd}}{\partial \xi} = A_{ae} u_{1,odd} + B_{ae} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) \right) u_{1,odd} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Or, comme lors des deux démonstrations précédentes, en utilisant, les Eqs. (1.20)-(1.22)-(1.23) du Chap. 1 et Eq. (2.7) de ce chapitre, il vient que (A_{ae}, B_{ae}) est l'unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} = (A_{ae} - a_0 B_{ae})u_0 \\ \frac{\partial u_{1,even}}{\partial \xi} = (A_{ae} - a_1 B_{ae})u_{1,even} \\ \frac{\partial u_{1,odd}}{\partial \xi} = (A_{ae} - b_1 B_{ae})u_{1,odd} \end{cases} \quad (3.34)$$

D'après les deux démonstrations précédentes, en couplant Eq. (3.19) et Eq. (3.27), on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} A_{ae} - B_{ae} a_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 \\ A_{ae} - B_{ae} a_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_1 \\ A_{ae} - B_{ae} b_1 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \beta_1 \end{cases} \quad (3.35)$$

où les coefficients α_0 , α_1 et β_1 ont été définis par Eqs. (2.8) et (2.9).

Le système (3.35) équivaut au système matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ 1 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{ae} \\ B_{ae} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

On note $F = \begin{pmatrix} 1 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \\ 1 & -b_1 \end{pmatrix}$ et on multiplie le système (3.36) par la transposée de F notée tF . On obtient ainsi :

$$({}^tF F) \begin{pmatrix} A_{ae} \\ B_{ae} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} {}^tF \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Or, la matrice $({}^tF F) = \begin{pmatrix} 3 & -a_0 - a_1 - b_1 \\ -a_0 - a_1 - b_1 & a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est défini par :

$$({}^tF F)^{-1} = \frac{1}{\Theta} \begin{pmatrix} a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 & a_0 + a_1 + b_1 \\ a_0 + a_1 + b_1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

avec $\Theta = \det({}^tF F) = 2(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0 a_1 - a_0 b_1 - a_1 b_1)$

Il ne reste donc plus qu'à multiplier le système (3.37) par $({}^tF \ F)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} A_{ae} \\ B_{ae} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} ({}^tF \ F)^{-1} {}^tF \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

On obtient alors deux coefficients notés A_{ae} et B_{ae} :

$$\begin{cases} A_{ae} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\Theta e} [(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - (a_0 + a_1 + b_1)(a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)] \\ B_{ae} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\Theta e} [(a_0 + a_1 + b_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - 3(a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)] \end{cases} \quad (3.40)$$

En mettant en facteur le coefficient $\frac{\sqrt{1-e^2}}{\Theta e}$ dans la condition (3.29) on obtient bien le couple de coefficients (A_{ae}^*, B_{ae}^*) .

□

Avant de passer à l'analyse mathématique des nouvelles conditions, il est important de s'attarder sur certains points particuliers :

- Les conditions aux limites (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29) sont appelées conditions DtN *locales* car elles résultent d'un processus de localisation (par troncature) de l'opérateur DtN global défini dans [31, 29]. Dans [31] (cf [45] pour le cas du cercle), l'opérateur DtN exact est construit dans le cas de l'ellipse. C'est une condition aux limites non réfléchissante, qui en coordonnées elliptiques (ξ, θ) s'écrit sur la frontière artificielle en $\{\xi = \xi_0\}$:

$$\begin{aligned} Tu = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{Mc}_m^{(3)'}(\xi_0, q)}{\text{Mc}_m^{(3)}(\xi_0, q)} ce_m(\theta, q) \int_0^{2\pi} u(\xi_0, \theta') ce_m(\theta', q) d\theta' \\ & + d \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{Ms}_m^{(3)'}(\xi_0, q)}{\text{Ms}_m^{(3)}(\xi_0, q)} se_m(\theta, q) \int_0^{2\pi} u(\xi_0, \theta') se_m(\theta', q) d\theta' \end{aligned} \quad (3.41)$$

Les fonctions $\text{Mc}_m^{(3)}(\xi, q)$, $\text{Ms}_m^{(3)}(\xi, q)$, $ce_m(\theta, q)$ et $se_m(\theta, q)$ ont été introduites au chapitre 1 et $q = \frac{(kf)^2}{4}$.

Le caractère local de ces conditions est très intéressant notamment d'un point de vue numérique. En effet, l'incorporation de ces conditions dans un code d'éléments finis fait seulement apparaître des matrices de masse et de rigidité définies sur la frontière extérieure. De plus, les coefficients a_n , b_n , α_n et β_n peuvent être calculés une fois pour toute au début des calculs.

- Il faut noter que lorsque $e \rightarrow 0$ (l'ellipse devient un cercle), les conditions (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29) sont identiques aux conditions DtN bidimensionnelles construites pour des frontières de forme circulaire de rayon R [39, 41], qui sont données par :

- Pour la condition DtN1 : $\frac{\partial u}{\partial r} = k \frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}$,
- Pour la condition DtN2 :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = k \left[\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} u + \left(\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} - \frac{H_1^{(1)'}(kR)}{H_1^{(1)}(kR)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

En effet, en utilisant les comportements asymptotiques des fonctions de Mathieu radiales de troisième espèce paires ($\text{Re}_n^{(3)}$) et impaires ($\text{Ro}_n^{(3)}$) ainsi que celui des valeurs caractéristiques paires a_n et impaires b_n (cf [1], [51]) lorsque $e \rightarrow 0$, on a :

- $a_0(eka) \rightarrow 0$, $a_1(eka) \rightarrow 1$ et $b_1(eka) \rightarrow 1$ (cf Prop. (1.1) du chapitre 1),
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\alpha_n}{e} \sim ka \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\beta_n}{e} \sim ka \frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}$ (pour plus de détails cf. Eqs. (4.43) et (4.48) ultérieurement dans ce chapitre).

De plus, lorsque $e \rightarrow 0$, il est évident que $\sqrt{1-e^2} \rightarrow 1$, $\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \rightarrow 0$ et enfin, le demi axe principal a de l'ellipse tend vers le rayon R d'un cercle.

On obtient finalement que lorsque $e \rightarrow 0$, les différentes conditions DtN (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29) sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes :

- Pour la condition DtN1 : $\frac{\partial u}{\partial \xi} = kR \frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}$,
- Pour les trois conditions DtN2 (DtN2e, DtN2o, DtN2ae) :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = kR \left[\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} u + \left(\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} - \frac{H_1^{(1)'}(kR)}{H_1^{(1)}(kR)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

Or, comme $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi}$, on retrouve bien que lorsque $e \rightarrow 0$, la condition DtN1 construite (resp. les trois conditions DtN2 construites) pour des frontières elliptiques est équivalente (resp. sont équivalentes) à la condition DtN1 (resp. DtN2) construite pour des frontières circulaires.

• L'utilisation de conditions aux limites DtN locales approchées d'ordre supérieur à deux est inappropriée dans le cadre d'une méthode d'éléments finis classiques car elles nécessitent une régularité supérieure à C^0 . En conséquence, nous n'avons pas cherché à construire des conditions DtN d'ordre plus grand que deux.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons analyser mathématiquement puis numériquement la performance des conditions Dirichlet-to-Neumann (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29) que nous venons de construire. Nous allons dans un premier temps effectuer ces analyses pour le problème modal (dit problème du radiateur) puis pour le problème de scattering. Plus précisément, nous voulons analyser l'effet du nombre

d'onde ka et celui de l'excentricité e de l'ellipse sur la performance des conditions $DtN1$ (3.10), $DtN2e$ (3.13), $DtN2o$ (3.21) et $DtN2ae$ (3.29).

Pour effectuer cette analyse, nous nous plaçons dans un cadre OSRC [46] qui est adapté au régime basse fréquence [2]. Afin d'évaluer la performance des conditions construites, nous allons nous servir d'un outil fréquemment utilisé pour mesurer l'efficacité de conditions aux limites absorbantes : *l'impédance spécifique modifiée*. Cette quantité physique adimensionnelle qui caractérise le milieu physique tronqué de propagation est un bon indicateur de performance des conditions approchées. Dans le système de coordonnées elliptiques (ξ, θ) , cette impédance spécifique s'écrit [54] :

$$Z = \frac{i\sqrt{1-e^2} ka u}{\frac{\partial u}{\partial \xi}} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (3.42)$$

4 Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal

Nous allons procéder à l'analyse mathématique de performance des conditions aux limites DtN locales que nous avons précédemment construites dans le cas du problème modal, c'est-à-dire mode par mode. Pour cela, nous exprimons tout d'abord l'impédance spécifique (3.42) pour un mode u_n à la surface de l'ellipse $\{\xi = \xi_0\}$ (cf Eq. (13), p. 3626 dans [54]) :

$$\begin{aligned} Z_{n,even}^{ex2} &= \frac{i\sqrt{1-e^2} ka \operatorname{Re}_n^{(3)}(eka, e^{-1})}{\frac{\partial \left(\operatorname{Re}_n^{(3)}(kf \cosh \xi) \right)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}} = \frac{i eka}{\alpha_n} && \text{si } u_n \text{ est un mode pair} \\ Z_{n,odd}^{ex2} &= \frac{i\sqrt{1-e^2} ka \operatorname{Ro}_n^{(3)}(eka, e^{-1})}{\frac{\partial \left(\operatorname{Ro}_n^{(3)}(kf \cosh \xi) \right)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}} = \frac{i eka}{\beta_n} && \text{si } u_n \text{ est un mode impair} \end{aligned} \quad (4.43)$$

où les coefficients α_n et β_n ont été respectivement définis par (2.8) et (2.9). Les expressions (4.43) résultent du remplacement de u par u_n dans (3.42).

Nous commençons par donner le comportement basse fréquence de l'impédance exacte ainsi que celui à haute fréquence. Ces deux résultats seront utilisés ensuite comme référence lors de l'analyse de l'impédance spécifique modale.

Proposition 4.1 *Le comportement asymptotique de Z_n^{ex2} (que u_n soit un mode pair ou impair) lorsque $ka \rightarrow 0$ est donné par (cf Eq. (17), p. 3627 de [54]) :*

$$Z_n^{\text{ex2}} \sim \begin{cases} \pi \frac{ka}{2} + i ka \ln(ka) & \text{si } n = 0 \\ \frac{4\pi}{(n!)^2} \left(\frac{ka}{2}\right)^{(2n+1)} - i \frac{ka}{n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (4.44)$$

De même, lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (cf Eq. (25), p. 3629 de [54]), Z_n^{ex2} (que u_n soit un mode pair ou impair) vérifie :

$$Z_n^{\text{ex2}} \sim 1 - i \frac{1}{2ka} \quad (4.45)$$

Démonstration :

- Pour $ka \rightarrow 0$

Ce résultat a déjà été démontré dans [54] mais il est bon de le rappeler car on introduit des résultats qui nous seront utiles par la suite.

Dans le chapitre introductif sur les fonctions de Mathieu, nous avons déjà mentionné que :

$$Re_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right) \quad \text{et} \quad Ro_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Ms_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right) \quad (4.46)$$

On déduit des équations (4.43) et (4.46) que l'impédance spécifique exacte pour un mode pair par exemple, est égale à (cf (4.43)) :

$$Z_n^{\text{ex2}} = \frac{ieka}{\alpha_n} = \frac{i\sqrt{1-e^2}ka Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right) \right) \Big|_{\xi=\xi_0}} \quad (4.47)$$

Or, lorsque $ka \rightarrow 0$, on sait d'après [51] que :

$$\frac{\sqrt{1-e^2}ka Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right) \right) \Big|_{\xi=\xi_0}} \sim \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (4.48)$$

où $H_n^{(1)}(ka)$ désigne la fonction de Hankel de première espèce (cf chap. 9 dans [1]).

Ainsi, en utilisant les propriétés de récurrence des fonctions de Hankel (cf [1]), on en déduit que :

$$\frac{iH_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka} - \frac{H_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}} \quad (4.49)$$

Mais on connaît aussi le comportement des fonctions de Hankel (cf chap. 9 [1]) :

$$H_n^{(1)}(ka) \sim \begin{cases} 1 + i\frac{2}{\pi} \ln(ka) & ; n = 0 \\ \frac{1}{n!} \left(\frac{ka}{2}\right)^n - i\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{ka}\right)^n & ; n \geq 1 \end{cases} \quad (4.50)$$

En injectant (4.49) dans (4.48) et en appliquant (4.50), on obtient finalement :

$$Z_n^{ex2} \sim \begin{cases} \pi\frac{ka}{2} + ika \ln(ka) & ; n = 0 \\ \frac{4\pi}{(n!)^2} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2n+1} - i\frac{ka}{n} & ; n \geq 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

• Pour $ka \rightarrow +\infty$:

Comme lorsque $ka \rightarrow 0$, nous avons [51] :

$$Z_n^{ex2} \sim \frac{i\sqrt{1-e^2}kaMc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right)}{\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Mc_n^{(3)}\left(\xi, \frac{(kf)^2}{4}\right) \right) \Big|_{\xi=\xi_0}} \sim \frac{iH_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka} - \frac{H_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}} \quad (4.52)$$

(Nous avons pris, ici aussi, l'exemple d'une fonction de Mathieu paire et le résultat est identique avec une fonction impaire)

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le comportement des fonctions de Hankel est donné par (p. 346 dans [1]) :

$$H_n^{(1)}(ka) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \left[1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2(8ka)^2} + i\frac{4n^2-1}{8ka} \right] e^{i\left(\frac{4ka-(2n+1)\pi}{4}\right)} \quad (4.53)$$

Il vient donc que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{H_{n+1}^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \sim \frac{n + \frac{1}{2}}{ka} - i \quad (4.54)$$

On obtient ainsi le résultat (4.45) :

$$Z_n^{ex2} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka} - \frac{n + \frac{1}{2}}{ka} - i} \sim 1 - i\frac{1}{2ka}$$

en injectant (4.54) dans (4.52) et en faisant un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{ka}$.

□

Nous passons maintenant à l'analyse mathématique des nouvelles conditions dans le cadre OSRC. Nous commençons par définir les impédances approchées calculées à partir des conditions DtN.

4.1 Définition des impédances spécifiques modales approchées

Afin d'analyser la performance des différents conditions aux limites absorbantes DtN , nous allons calculer les impédances spécifiques approchées qui leur correspondent. Pour ce faire, il suffit de remplacer $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ grâce à une des conditions DtN (3.10), (3.13), (3.21) ou (3.29) dans l'expression (3.42) et d'appliquer cette impédance à u_n au lieu de u .

Proposition 4.2 *Pour le $n^{\text{ième}}$ mode elliptique, sur la surface de l'ellipse paramétrée par $\xi = \xi_0$, les impédances spécifiques approchées DtN sont données par :*

$$Z_n^{DtN1,2D} = \frac{ieka}{\alpha_0} \quad (4.55)$$

$$Z_n^{DtN2e,2D} = \frac{ieka(a_0 - a_1)}{(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) - c_n(\alpha_1 - \alpha_0)} \quad (4.56)$$

$$Z_n^{DtN2o,2D} = \frac{ieka(a_0 - b_1)}{(a_0\beta_1 - b_1\alpha_0) - c_n(\beta_1 - \alpha_0)} \quad (4.57)$$

$$Z_n^{DtN2ae,2D} = \frac{ieka(a_0 - b_1)\Theta}{(A_{ae}^* - c_n B_{ae}^*)} \quad (4.58)$$

où les paramètres A_{ae}^* et B_{ae}^* ont été définis par (3.31) et le coefficient c_n est donné par :

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } u_n \text{ est un mode pair} \\ b_n & \text{si } u_n \text{ est un mode impair} \end{cases} \quad (4.59)$$

Démonstration :

Pour le problème modal, on remplace $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ par une des conditions DtN dans l'expression (3.42) et on l'applique à un mode elliptique u_n afin de calculer les différentes impédances approchées DtN. On obtient ainsi les résultats suivants :

- Pour la condition $DtN1$:

La condition $DtN1$ posée sur $\{\xi = \xi_0\}$, appliquée au mode elliptique u_n , est donnée (cf Eq.(3.10)) par :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 u_n$$

Donc, lorsque $\xi = \xi_0$, on a :

$$Z_n^{DtN1,2D} = \frac{i\sqrt{1-e^2} ka u_n}{\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 u_n} = \frac{ieka}{\alpha_0}$$

• Pour la condition $DtN2e$:

En $\xi = \xi_0$, la condition $DtN2e$ appliquée à u_n est donnée par (3.13)

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(a_0 - a_1)e} \left[(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) u_n + (\alpha_0 - \alpha_1) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u_n \right) \right]$$

Et comme :

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u_n = -c_n u_n \quad (4.60)$$

où c_n est donné par Eq. (4.59), on a :

$$Z_n^{DtN2e,2D} = \frac{i\sqrt{1-e^2} ka u_n}{\frac{\sqrt{1-e^2}}{(a_0 - a_1)e} [(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) u_n - c_n (\alpha_0 - \alpha_1) u_n]} = \frac{ieka (a_0 - a_1)}{(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) - c_n (\alpha_1 - \alpha_0)}$$

• Pour la condition $DtN2o$:

La démonstration est la même que pour $DtN2e$ avec la condition donnée par (3.21) appliquée, en $\xi = \xi_0$ à u_n :

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(a_0 - b_1)e} \left[(a_0\beta_1 - b_1\alpha_0) u_n + (\alpha_0 - \beta_1) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u_n \right) \right]$$

et on utilise la propriété donnée par Eq. (4.60).

• Pour la condition $DtN2ae$:

La démonstration est identique aux deux précédentes pour $DtN2e$ et $DtN2o$ et on utilise cette fois la condition donnée par (3.29) appliquée à u_n , en $\xi = \xi_0$:

$$\frac{\partial u_n}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\Theta e} \left[A_{ae}^* u_n + B_{ae}^* \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u_n \right) \right]$$

où A_{ae}^* et B_{ae}^* ont été donnés (3.31). Puis, on utilise la propriété donnée par Eq. (4.60).

□

Remarque 4.3 Les différentes impédances approchées (4.55), (4.56), (4.57) et (4.58) peuvent s'écrire en fonction de l'impédance exacte modale donnée par (4.43). On a :

$$Z_n^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2} \quad (4.61)$$

$$Z_n^{DtN2e,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \frac{a_0 - c_n}{a_0 - a_1} \left[\frac{1}{Z_{1,even}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}} \right]} \quad (4.62)$$

$$Z_n^{DtN2o,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \frac{a_0 - c_n}{a_0 - b_1} \left[\frac{1}{Z_{1,odd}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}} \right]} \quad (4.63)$$

$$Z_n^{DtN2ae,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + A_1 \frac{1}{Z_0^{ex2}} + A_2 \frac{1}{Z_{1,even}^{ex2}} + A_3 \frac{1}{Z_{1,odd}^{ex2}}} \quad (4.64)$$

où Θ a déjà été défini en (3.29), c_n a été donné par (4.59) et :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-2a_0^2 - a_1^2 - b_1^2 + a_0a_1 + a_0b_1 + 2a_1b_1 + \delta(2a_0 - a_1 - b_1)}{\Theta} \\ A_2 &= \frac{a_0^2 + b_1^2 + \delta(-a_0 + 2a_1 - b_1) - a_1a_0 - a_1b_1}{\Theta} \\ A_3 &= \frac{a_0^2 + a_1^2 + \delta(-a_0 - a_1 + 2b_1) - b_1a_0 - a_1b_1}{\Theta} \end{aligned} \quad (4.65)$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sqrt{1 - e^2} \sin \theta \sin \theta_0 \\ \delta &= \left(\frac{e^2}{2} \cos(2\theta) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 \right) (ka)^2 + ika\Lambda \end{aligned} \quad (4.66)$$

Remarque 4.4 Nous avons déjà noté dans le paragraphe précédent que lorsque $e \rightarrow 0$ (on est dans le cas d'un cercle et non plus d'une ellipse), les conditions obtenues sont équivalentes à celles obtenues dans le cas d'une frontière circulaire [41]. Si on regarde les différentes impédances spécifiques approchées, lorsque $e \rightarrow 0$, les trois impédances DtN2 (4.56), (4.57) et (4.58) sont équivalentes (puisque les trois conditions sont équivalentes). De plus, on obtient l'impédance DtN1 (resp. les impédances DtN2) est équivalente (resp. sont équivalentes) à l'impédance DtN1 (resp. DtN2) obtenue dans le cas d'une frontière circulaire par [41]. On rappelle que ces impédances

sont données, pour le $n^{\text{ième}}$ mode cylindrique, sur la surface d'un cylindre de rayon R , par :

- Pour la condition DtN1 : $Z_{n,\text{cercle}} = Z_0^{\text{ex}2}$,
- Pour la condition DtN2 : $Z_{n,\text{cercle}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{\text{ex}2}} + n^2 \left(\frac{1}{Z_1^{\text{ex}2}} - \frac{1}{Z_0^{\text{ex}2}} \right)}$.

Remarque 4.5 Pour les trois impédances DtN2 (4.56), (4.57) et (4.58), on observe que pour le mode $n = 0$, elles coïncident avec $Z_0^{\text{ex}2}$, de même $Z_{1,\text{even}}^{\text{DtN}2e} = Z_{1,\text{even}}^{\text{DtN}2ae} = Z_{1,\text{even}}^{\text{ex}2}$ et $Z_{1,\text{odd}}^{\text{DtN}2o} = Z_{1,\text{odd}}^{\text{DtN}2ae} = Z_{1,\text{odd}}^{\text{ex}2}$, de par le mode de construction adopté pour ces conditions.

Maintenant, afin d'analyser les performances des conditions aux limites DtN construites, nous allons procéder à l'analyse asymptotique des impédances spécifiques approchées afin de les comparer aux résultats obtenus pour l'impédance spécifique exacte lorsque $ka \rightarrow 0$ (régime basse fréquence) (cf (4.44)) et lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (régime haute fréquence) (cf (4.45)).

4.2 Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow 0$

Le comportement asymptotique des différentes impédances spécifiques approchées DtN à basse fréquence ($ka \rightarrow 0$) est donné par la proposition qui suit :

Proposition 4.6 Le comportement asymptotique des impédances spécifiques approchées DtN pour le $n^{\text{ième}}$ mode elliptique (qu'il soit pair ou impair), lorsque $ka \rightarrow 0$, est donné par :

$$Z_n^{\text{DtN}1,2D} = Z_0^{\text{ex}2} \sim \pi \frac{ka}{2} + i ka \ln(ka) \quad , \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.67)$$

$$Z_n^{\text{DtN}2,2D} \sim \begin{cases} Z_0^{\text{ex}2} \sim \pi \frac{ka}{2} + i ka \ln(ka) & , \text{ pour } n = 0 \\ Z_1^{\text{ex}2} \sim \pi \frac{(ka)^3}{2} - i ka & , \text{ pour } n = 1 \\ \frac{\pi}{2n^2} (ka)^3 - i \frac{ka}{n^2} & , \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.68)$$

où $Z_n^{\text{DtN}2,2D}$ désigne indifféremment l'une des trois impédances spécifiques approchées $Z_n^{\text{DtN}2e,2D}$, $Z_n^{\text{DtN}2o,2D}$ ou $Z_n^{\text{DtN}2ae,2D}$.

Démonstration : Pour chacune des conditions DtN, nous allons donner successivement la méthode pour obtenir le comportement des impédances spécifiques approchées correspondantes lorsque $ka \rightarrow 0$.

- Pour la condition DtN1

Nous avons déjà indiqué que $Z_n^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2}$ (cf Eq. (4.61)), si bien qu'en utilisant le comportement de Z_n^{ex2} pour $n = 0$ lorsque $ka \rightarrow 0$ donné par Eq. (4.44), on obtient le résultat recherché.

- Pour la condition $DtN2e$

Nous savons que, par construction, $Z_0^{DtN2e} = Z_0^{ex2}$ et $Z_1^{DtN2e} = Z_1^{ex2}$, d'où le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$ en utilisant (4.44).

Etudions à présent le cas où $n \geq 2$. On sait (cf Eq. (4.62)) que :

$$Z_n^{DtN2e,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \frac{a_0 - c_n}{a_0 - a_1} \left[\frac{1}{Z_{1,even}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}} \right]}$$

En utilisant les comportements asymptotiques de Z_0^{ex2} et $Z_{1,even}^{ex2}$ donnés par (4.44) et sachant que (cf Eq. (36) p. 120 dans [51]) :

$$a_0 \sim -\frac{(eka)^4}{32} \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (4.69)$$

$$a_n(0) = b_n(0) = n^2 \text{ pour } n \geq 1, \quad (4.70)$$

on obtient que l'impédance spécifique approchée se comporte comme une fonction de ka , pour $n \geq 2$, définie par :

$$\phi(ka) = \frac{1}{\frac{1}{\pi \frac{ka}{2} + ika \ln(ka)} + \frac{-\frac{(eka)^4}{32} - n^2}{-\frac{(eka)^4}{32} - 1} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}(ka)^3 - ika} - \frac{1}{\pi \frac{ka}{2} + ika \ln(ka)} \right]} \quad (4.71)$$

Nous nous sommes servis du logiciel Mathematica afin d'écrire $\phi(ka)$ sous la forme d'une série de Taylor lorsque $ka \rightarrow 0$ que nous avons tronquée afin d'obtenir le résultat de la Proposition (4.6).

- Pour la condition $DtN2o$

Par construction $Z_0^{DtN2o} = Z_0^{ex2}$ et $Z_1^{DtN2o} = Z_1^{ex2}$, on obtient donc immédiatement le résultat annoncé pour $n = 0$ et $n = 1$ en utilisant (4.44).

Pour $n \geq 2$, le processus de démonstration est le même que pour $Z_n^{DtN2e,2D}$. En effet, nous venons de rappeler dans Eq. (4.70) que $a_1(0) = b_1(0)$. Cela implique que

$$Z_n^{DtN2o,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \frac{a_0 - c_n}{a_0 - b_1} \left[\frac{1}{Z_{1,odd}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}} \right]}$$

se comporte en 0 de la même façon que $Z_n^{DtN2e,2D}$, d'où le résultat.

- Pour la condition $DtN2ae$:

Comme précédemment, pour $n = 0$ et $n = 1$, on sait que $Z_0^{DtN2ae} = Z_0^{ex2}$ et $Z_1^{DtN2ae} = Z_1^{ex2}$, ce qui donne le résultat immédiatement.

Puis, pour le cas $n \geq 2$, on rappelle tout d'abord que $Z_n^{DtN2ae,2D}$ peut s'écrire sous la forme :

$$Z_n^{DtN2ae,2D} = \frac{ieka(a_0 - b_1)\Theta}{(A_{ae}^* - c_n B_{ae}^*)}$$

avec A_{ae}^* , B_{ae}^* et Θ tels que :

$$\begin{cases} A_{ae}^* = [(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - (a_0 + a_1 + b_1)(a_0\alpha_0 a_1\alpha_1 b_1\beta_1)] \\ B_{ae}^* = [(a_0 + a_1 + b_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - 3(a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)] \end{cases}$$

et $\Theta = 2(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)$

On peut alors écrire, en utilisant (4.47) et (4.48), que $Z_n^{DtN2ae,2D}$ se comporte comme une fonction de ka définie par :

$$\begin{aligned} \Psi(ka) &= \frac{2i(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)}{\left[(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - c_n(a_0 + a_1 + b_1)) \left(\frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + 2 \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right) \right.} \\ &\quad \left. + (3c_n - a_0 - a_1 - b_1) \left(a_0 \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + (a_1 + b_1) \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right) \right]} \\ &= \frac{2i(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)}{\left[(a_1^2 + b_1^2 - c_n a_1 - c_n b_1 + 2a_0 c_n - a_0 a_1 - a_0 b_1) \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \right.} \\ &\quad \left. + (2a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0 a_1 - a_0 b_1 - 2a_1 b_1 - 2a_0 c_n + a_1 c_n + b_1 c_n) \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right]} \end{aligned}$$

Or d'après (4.47) et (4.48), $Z_n^{exact} \sim \frac{iH_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)}$. On sait alors, en utilisant les comportements de l'impédance exacte lorsque $ka \rightarrow 0$ donné par l'Eq. (4.44), et les comportements des valeurs caractéristiques donnés par les Eqs. (4.69) et (4.70), que $Z_n^{DtN2ae,2D}$ se comporte comme une fonction de ka définie par :

$$\Psi^*(ka) = \frac{2\left(\frac{(eka)^8}{32^2} + \frac{(eka)^4}{16} + 1\right)}{\left[2(1 - n^2)\left(1 + \frac{(eka)^4}{32}\right) \frac{1}{\pi \frac{ka}{2} + i \ln(ka)} \right.} \quad (4.72)$$

$$\left. + \left(2\frac{(eka)^8}{32^2} - \frac{(eka)^4}{32}(1 + n^2) + 2n^2 \right) \frac{1}{\pi \frac{(ka)^3}{2} - ika} \right]}$$

On utilise alors le logiciel Mathematica pour obtenir une expression de $\Psi^*(ka)$ sous forme de série de Taylor que l'on tronque afin d'arriver au résultat annoncé.

□

On peut remarquer que, lorsque $ka \rightarrow 0$, l'impédance spécifique approchée correspondant à la condition DtN1 est indépendante du mode n contrairement à l'impédance exacte. La condition est exacte pour le mode $n = 0$ mais lorsque n augmente, on peut prévoir que la condition va très rapidement perdre de sa précision. On peut, de plus, observer que la partie réelle de Z_n^{DtN1} est d'ordre ka alors que celle de l'impédance spécifique exacte est d'ordre $(ka)^{2n+1}$, ce qui laisse aussi présager une perte rapide de performance.

En ce qui concerne les trois conditions DtN2 (3.13), (3.21) et (3.29), on remarque tout d'abord qu'elles ont toutes trois le même comportement asymptotique. A basse fréquence, il semble donc inutile de les considérer séparément. Les impédances approchées de ces conditions d'ordre 2 se comportent comme l'impédance exacte pour les modes $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est dû à leur construction. Par contre, lorsque $n \geq 2$, les conditions DtN2 vont être moins performantes à mesure que le mode n augmentera. On observe par exemple que la partie réelle de l'impédance approchée DtN2 est d'ordre $(ka)^3$, alors que celle de l'impédance exacte est d'ordre $(ka)^{2n+1}$. Cela permet de prévoir une perte rapide de performance pour les modes $n \geq 2$.

4.3 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$

La proposition suivante donne le comportement asymptotique des différentes impédances spécifiques approchées DtN à haute fréquence ($ka \rightarrow +\infty$) :

Proposition 4.7 *Le comportement asymptotique des impédances spécifiques approchées DtN pour le $n^{\text{ième}}$ mode elliptique (qu'il soit pair ou impair), lorsque $ka \rightarrow +\infty$, est donné par :*

$$Z_n^{DtN1,2D} \sim Z_n^{DtN2,2D} \sim Z_n^{ex2} \sim 1 - i\frac{1}{2ka}, \text{ pour } n \geq 0 \quad (4.73)$$

où $Z_n^{DtN2,2D}$ désigne indifféremment l'une des trois impédances spécifiques approchées $Z_n^{DtN2e,2D}$, $Z_n^{DtN2o,2D}$ ou $Z_n^{DtN2ae,2D}$.

Démonstration : Nous allons commencer par démontrer le résultat pour DtN1 puis ceux correspondant aux trois conditions d'ordre deux ($DtN2e$, $DtN2o$, $DtN2ae$).

- L'impédance spécifique approchée $Z_n^{DtN1,2D}$

Par définition (cf Eq. (4.61)), on a $Z_n^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2}$. Connaissant le comportement de Z_0^{ex2} lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (cf Eq. (4.45)), le résultat est immédiat.

- Les impédances spécifiques approchées $Z_n^{DtN2e,2D}$, $Z_n^{DtN2o,2D}$ et $Z_n^{DtN2ae,2D}$

D'après les résultats (4.62), (4.63), (4.64) et (4.52), on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 Z_n^{DtN2e,2D} &\sim \frac{i(a_0 - a_1)}{(a_0 - c_n) \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} + (c_n - a_1) \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}} \\
 Z_n^{DtN2o,2D} &\sim \frac{i(a_0 - b_1)}{(a_0 - c_n) \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} + (c_n - b_1) \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}} \\
 Z_n^{DtN2ae,2D} &\sim \frac{2i(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)}{\left[(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - c_n(a_0 + a_1 + b_1)) \left(\frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + 2 \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right) \right.} \\
 &\quad \left. + (3c_n - a_0 - a_1 - b_1) \left(a_0 \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + (a_1 + b_1) \frac{H_1^{(1)'}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Connaissant le comportement des fonctions de Hankel lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (cf. Eq. (4.52), (4.54)), on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{iH_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \sim 1 - \frac{i}{2ka}$$

On obtient immédiatement que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, les impédances approchées $Z_n^{DtN2,e}$, $Z_n^{DtN2,o}$ et $Z_n^{DtN2ae,2D}$ se comportent respectivement de la même façon que les fonctions de ka suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Phi_e(ka) &= \frac{(a_0 - a_1)}{(a_0 - c_n + c_n - a_1) \frac{1}{1 - \frac{i}{2ka}}} = 1 - \frac{i}{2ka} \\
 \Phi_o(ka) &= \frac{(a_0 - b_1)}{(a_0 - c_n + c_n - b_1) \frac{1}{1 - \frac{i}{2ka}}} = 1 - \frac{i}{2ka} \\
 \Phi_{ae}(ka) &= \frac{2(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)}{(2a_0^2 + 2a_1^2 + 2b_1^2 - 2a_0a_1 - 2a_0b_1 - 2a_1b_1) \frac{1}{1 - \frac{i}{2ka}}} = 1 - \frac{i}{2ka}
 \end{aligned}$$

□

La proposition précédente (Eq. (4.7)) montre que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, les impédances spécifiques exacte et approchées (DtN1 et DtN2) ont le même comportement

asymptotique qui est indépendant du mode n . Ce résultat laisse augurer une bonne performance des conditions approchées DtN d'ordre 1 et 2 pour le problème modal 2D en régime haute fréquence.

5 Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal

De façon à évaluer numériquement l'incidence du nombre d'onde et de l'allongement de l'ellipse modélisant la frontière artificielle sur la performance de nos conditions Dirichlet-to-Neumann, nous avons procédé à une série de tests mode par mode. L'objectif de ces tests est de comparer nos résultats avec les conditions DtN construites (3.10), (3.13), (3.21), (3.29) à ceux déjà obtenus avec les conditions BGT d'ordre 1 (1.1) et 2 (1.2) appliquées à des frontières elliptiques (cf Figs.(2) à (8) dans [54]). Nous avons effectué les tests pour trois modes pairs différents $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. Les résultats obtenus pour les modes impairs ne sont pas répertoriés car ils sont équivalents pour un même n à ceux des modes pairs, d'après l'analyse des comportements asymptotiques aux paragraphes 4.2 et 4.3. Nous n'avons pas effectué de test numérique pour le mode $n = 0$ puisque les conditions DtN d'ordre 1 et 2 construites sont toutes exactes pour ce mode. Pour chacun des modes évalués, nous avons étudié six valeurs de l'excentricité e allant de $e = 0.1$ où l'ellipse est proche d'un cercle, à $e = 0.9$ où l'ellipse est très allongée. Enfin, trois valeurs de ka ont été testées : $ka = 0.1$, $ka = 1$ et $ka = 10$. Les deux premières valeurs de ka correspondent à un régime basse fréquence alors que $ka = 10$ est considéré comme un régime haute fréquence.

Pour chacune des figures, nous avons représenté la valeur absolue des différentes impédances puis les erreurs relatives correspondantes à savoir la quantité $\frac{|Z_n^{ex2} - Z_n^{app,2D}|}{|Z_n^{ex2}|}$, où $Z_n^{app,2D}$ représente une des impédances approchées DtN ou BGT.

Pour le mode u_1 , nous avons comparé les deux conditions d'ordre 1 DtN1 et BGT1 (1.1), les trois conditions DtN2 étant exactes pour ce mode. Pour les modes u_2 et u_3 , nous avons évalué les performances des deux classes de conditions d'ordre 2 DtN2 et BGT2 (1.2). Nous avons vu dans la section précédente que les trois conditions DtN2 ont des comportements similaires. C'est pourquoi, par la suite, nous désignerons indifféremment par DtN2 l'une des trois conditions approchées (3.13), (3.21), (3.29).

Pour le mode u_1 , (cf Fig. (2.2)-(2.3)), on remarque que les deux conditions DtN1 et BGT1 n'ont pas un niveau de performance très satisfaisant, même s'il devient plus acceptable autour de $ka = 1$. On observe aussi que la valeur de l'excentricité e de l'ellipse n'influe pas sur la performance de la condition DtN1. A l'inverse, la performance de la condition BGT1 se détériore particulièrement pour ka compris entre 1 et 10 (zone où elle est la plus précise) lorsque $e \rightarrow 1$.

Pour le mode u_2 , la condition BGT2 dépendant de l'angle d'observation $\theta \in [0, 2\pi[$, nous représentons les résultats en fonction de cet angle, pour trois valeurs de ka : 0.1, 1 et 10 et pour chacune des six valeurs de e déjà choisies.

Lorsque $ka = 0.1$ (Fig. (2.4)-(2.5)), la précision des deux conditions DtN2 et BGT2 n'évolue pas lorsque l'excentricité augmente de 0.1 à 0.9. Le niveau de performance des conditions n'est pas particulièrement satisfaisant, les erreurs relatives (cf Fig. (2.5)) étant toutes supérieures à 15%.

Pour $ka = 1$ (Fig. (2.6)-(2.7)), lorsque l'ellipse représentant la frontière artificielle est proche d'un cercle ($e = 0.1$), la condition BGT2 est un peu plus précise que la condition DtN2. Par contre, plus l'excentricité e augmente et tend vers 1, plus la condition DtN2 est performante tandis que la condition BGT2 perd en précision.

Enfin, pour $ka = 10$ (Fig. (2.8)-(2.9)), lorsque l'ellipse représentant la frontière artificielle a une géométrie proche de la sphère ($e = 0.1$), les deux conditions d'ordre 2 sont très performantes. Puis lorsque $e \rightarrow 1$, la condition DtN2 garde un très bon niveau de précision (erreur relative $< 2\%$ pour toutes les excentricités). La proposition (4.7) permettait d'entrevoir le bon degré de performance de la condition DtN2 puisqu'elle montre que l'impédance modale approchée DtN2 se comporte, à haute fréquence, de la même façon que l'impédance modale exacte. Par contre, le niveau de performance de la condition BGT2 se détériore considérablement lorsque $e \rightarrow 1$ et en particulier pour certaines valeurs de θ . Ceci provient du fait que l'impédance modale approchée BGT2 a un comportement asymptotique à haute fréquence qui dépend de l'excentricité e et de l'angle θ (cf Eq. (27) p. 3629 dans [54]).

Pour le mode u_3 , on compare toujours la performance des deux conditions d'ordre 2, DtN2 et BGT2; les résultats sont donnés en fonction de l'angle d'observation $\theta \in [0, 2\pi[$ pour les mêmes valeurs de ka et e déjà considérées. Comme le laissent entrevoir les résultats obtenues pour $Z_n^{DtN2,2D}$ lorsque $ka \rightarrow 0$ (4.68), cette condition perd en précision lorsque n augmente.

Lorsque $ka = 0.1$ (Fig. (2.10)-(2.11)), la condition BGT2 est plus précise que la condition DtN2 mais leur degré de précision n'est pas satisfaisant, pour l'une comme pour l'autre.

Pour $ka = 1$ (Fig. (2.12)-(2.13)), la précision des deux conditions d'ordre 2 s'améliore mais dans ce cas là, c'est la performance de la condition DtN2 qui diminue lorsque $e \rightarrow 1$.

Enfin, lorsque $ka = 10$ (Fig. (2.14)-(2.15)), si la valeur de e est petite, les deux conditions sont performantes. Puis, lorsque l'ellipse formant la frontière artificielle s'allonge, seule la condition DtN2 garde un très bon niveau de précision, comme le laissait présager le résultat donné à l'Eq. (4.7).

Pour $n = 1$ et $n = 2$ en particulier, la condition DtN est plus performante que la condition BGT du même ordre pour des frontières allongées. Il faut noter aussi que plus l'excentricité e est proche de 1 plus la performance de la condition BGT2 se détériore et plus la dépendance en fonction de θ apparaît. Par contre, l'allongement de l'ellipse ne semble pas perturber la bonne performance de la condition DtN2 dans ces cas là.

Il est important de mentionner que nous avons rencontré des problèmes d'instabilités liés à l'utilisation des fonctions de Mathieu. Il convient de prendre des précaution lors de l'utilisation de ces dernières. Pour certaines valeurs de z ou de q , on peut observer ponctuellement d'importants pics reproduisant des phénomènes d'instabilités. Il faut donc éviter de prendre en compte ces points là en choisissant, par exemple lors d'un balayage sur une des deux variables, une discrétisation bien adaptée. Comme nous avons voulu comparer nos conditions aux conditions BGT étudiées par Reiner et al. [54], nous avons adopté le même balayage que dans [54] sur la variable q . En utilisant le même pas de discrétisation de $10^{-3+\frac{j}{20}}$ (pour j compris entre 20 et 80), on balaie des valeurs de ka comprises entre 10^{-2} et 10. Nous en avons essayé d'autres mais ces choix se sont avérés infructueux car ils conduisaient à beaucoup d'instabilité.

$$n = 1$$

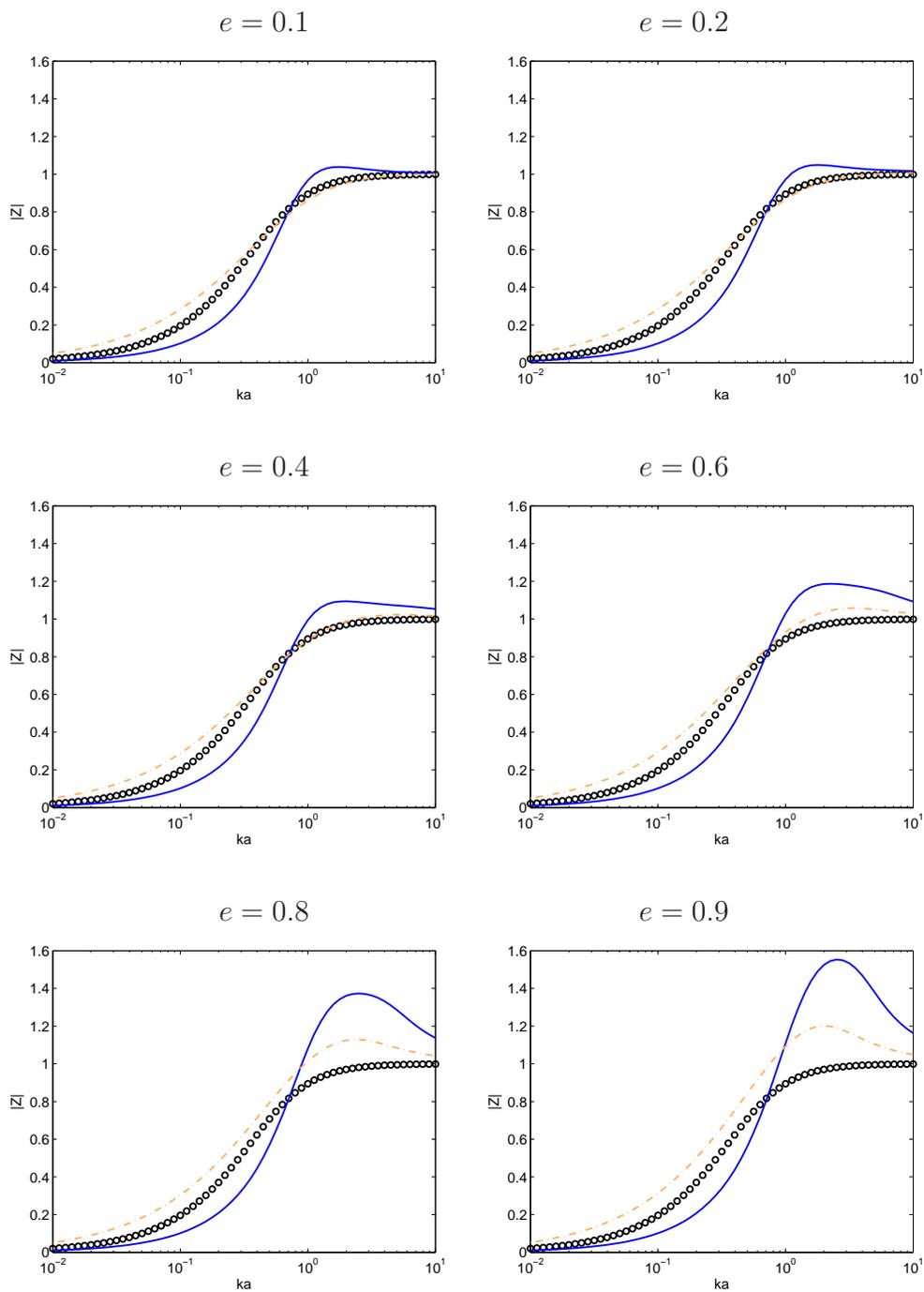


FIG. 2.2: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN1 (---), BGT1 (o o o).

$$n = 1$$

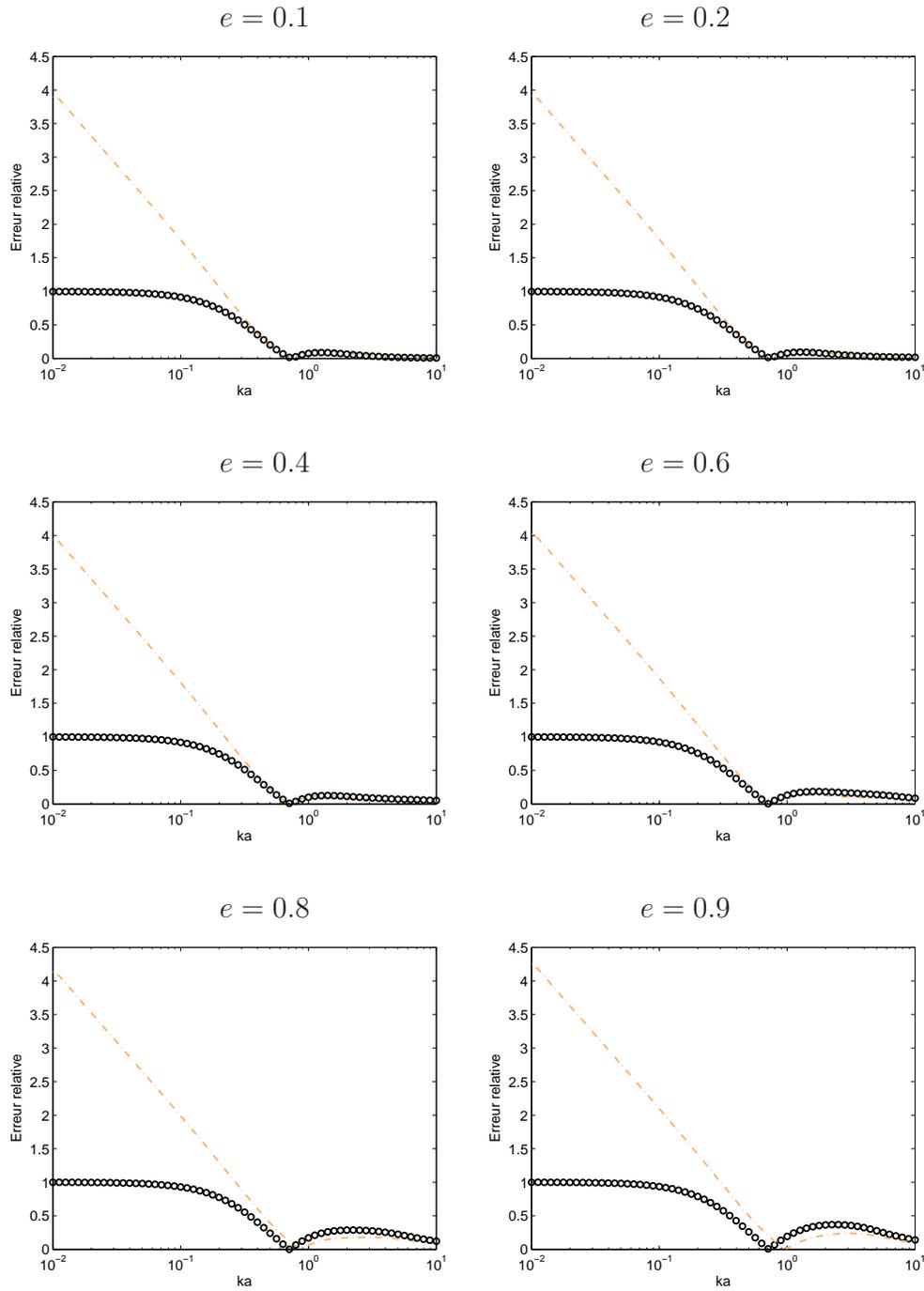


FIG. 2.3: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), BGT1 (o o o)

$$n = 2$$

$$ka = 0.1$$

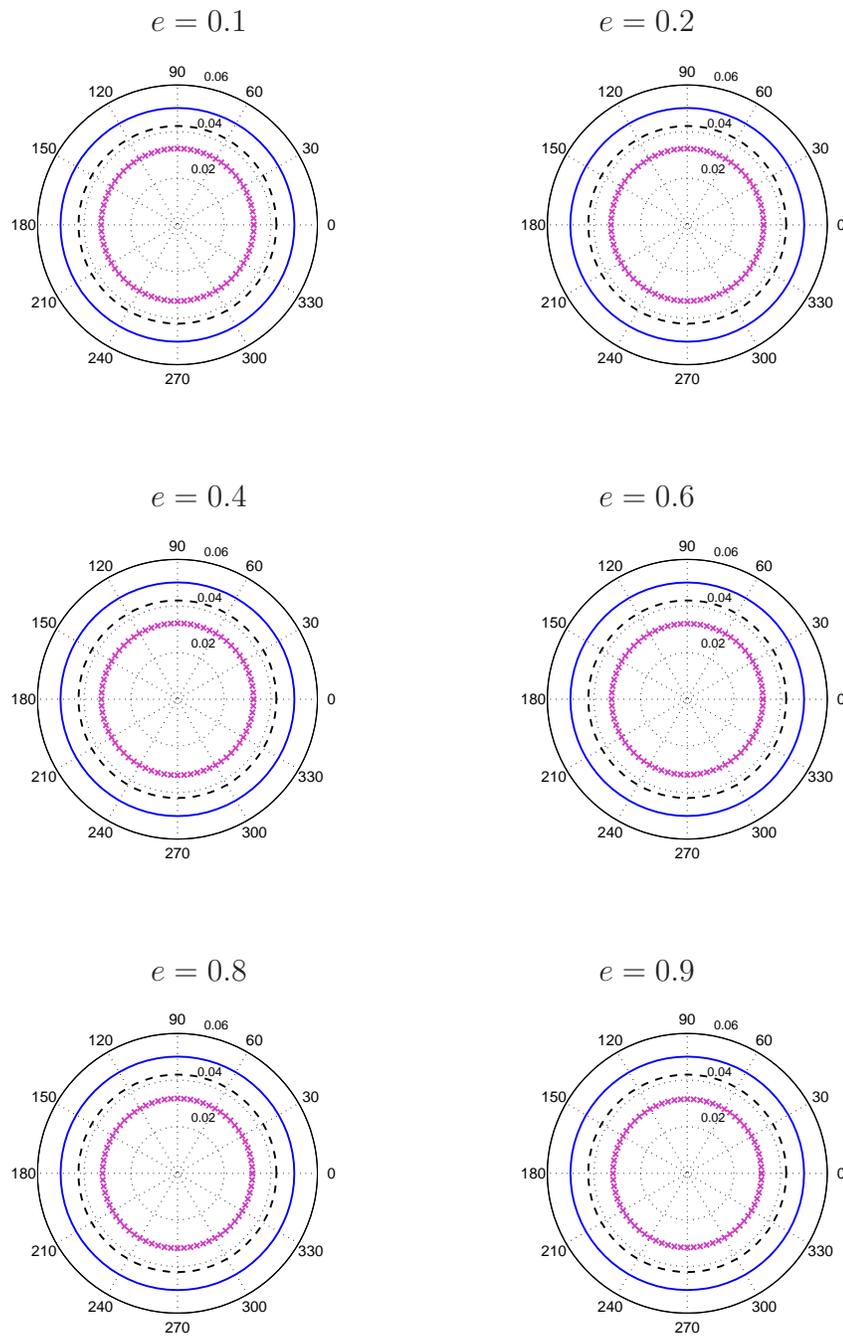


FIG. 2.4: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (---).

$$n = 2$$

$$ka = 0.1$$

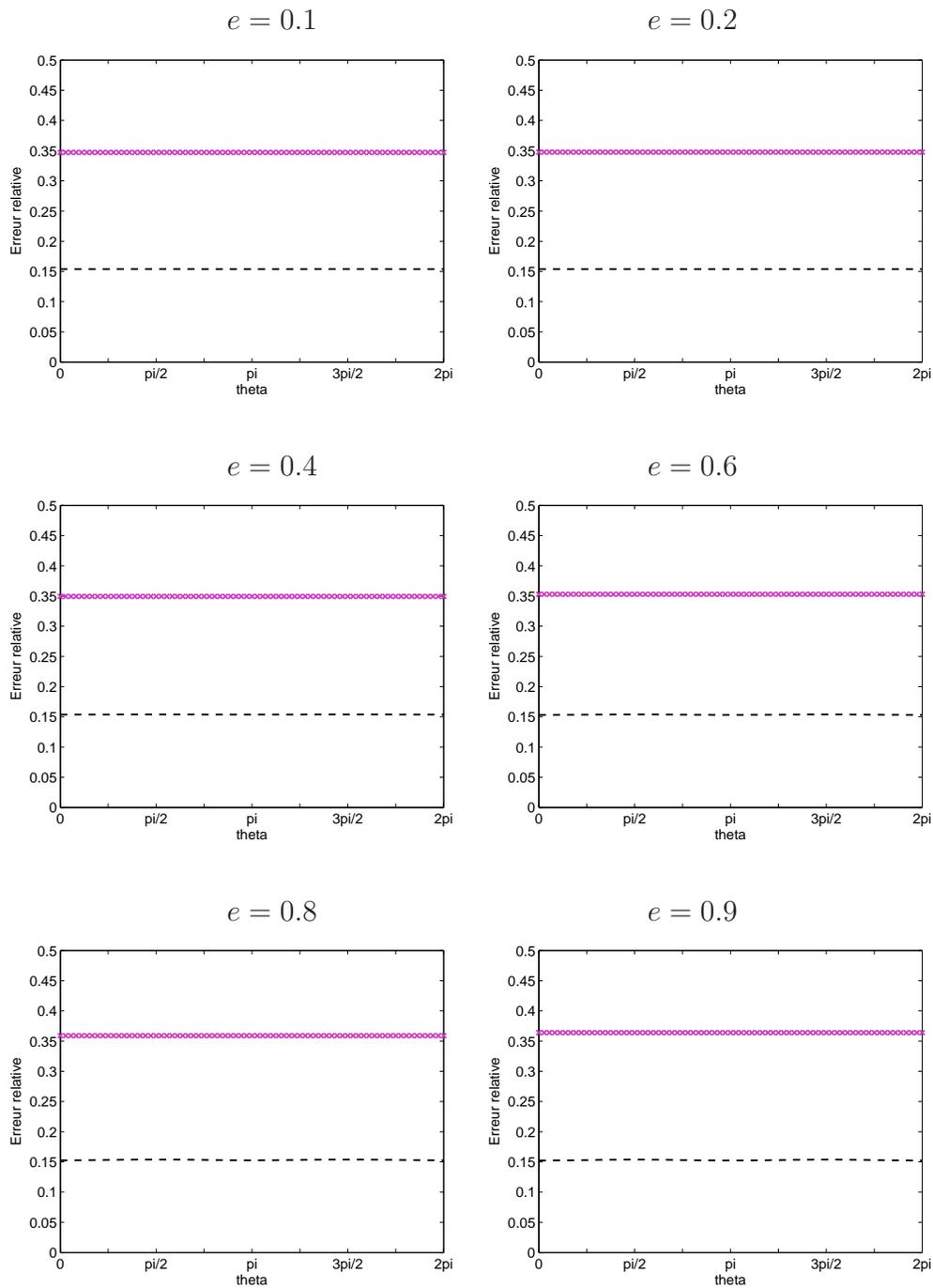


FIG. 2.5: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 (× × ×), BGT2 (---)

$$n = 2$$

$$ka = 1$$

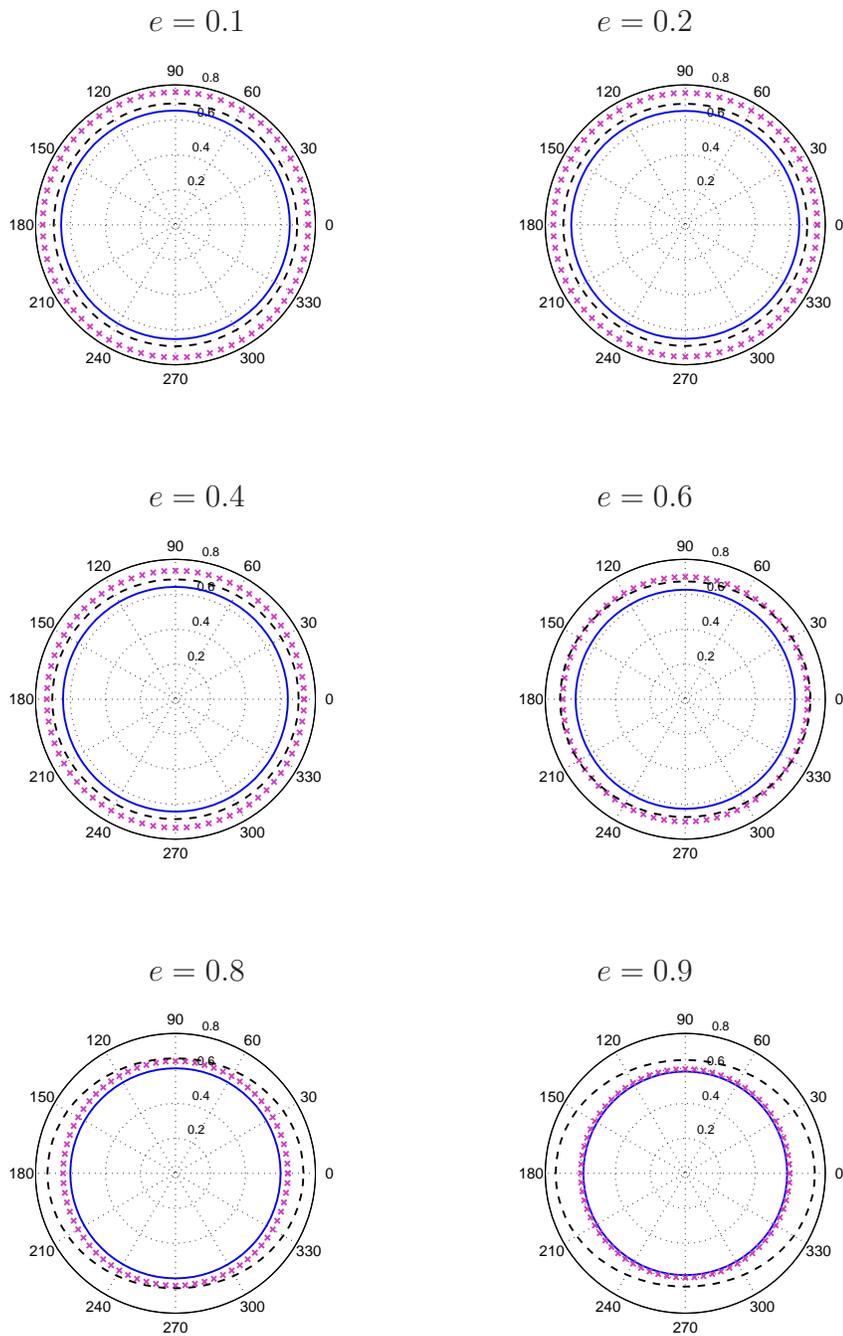


FIG. 2.6: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$n = 2$$

$$ka = 1$$

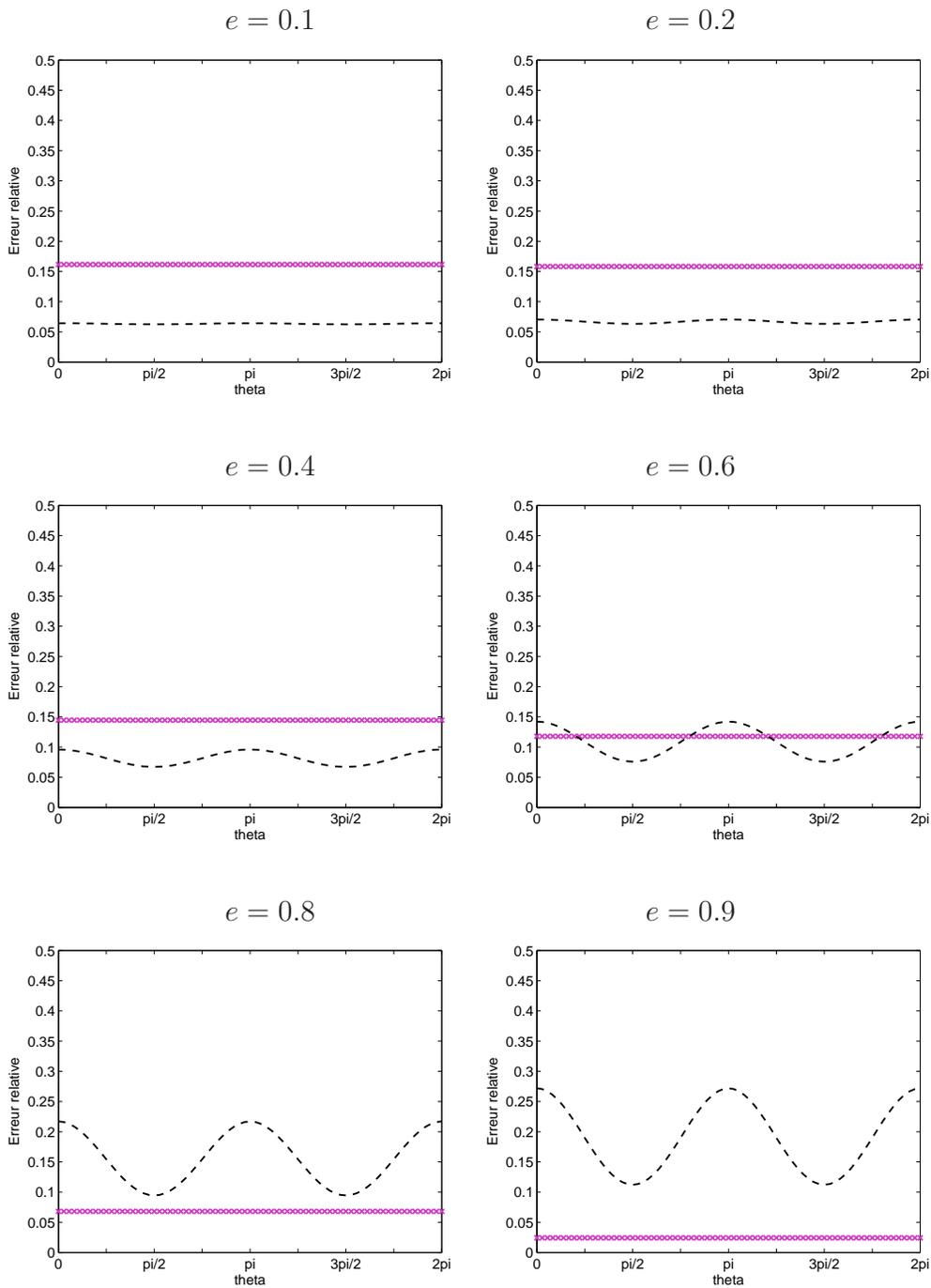


FIG. 2.7: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —)

$$n = 2$$

$$ka = 10$$

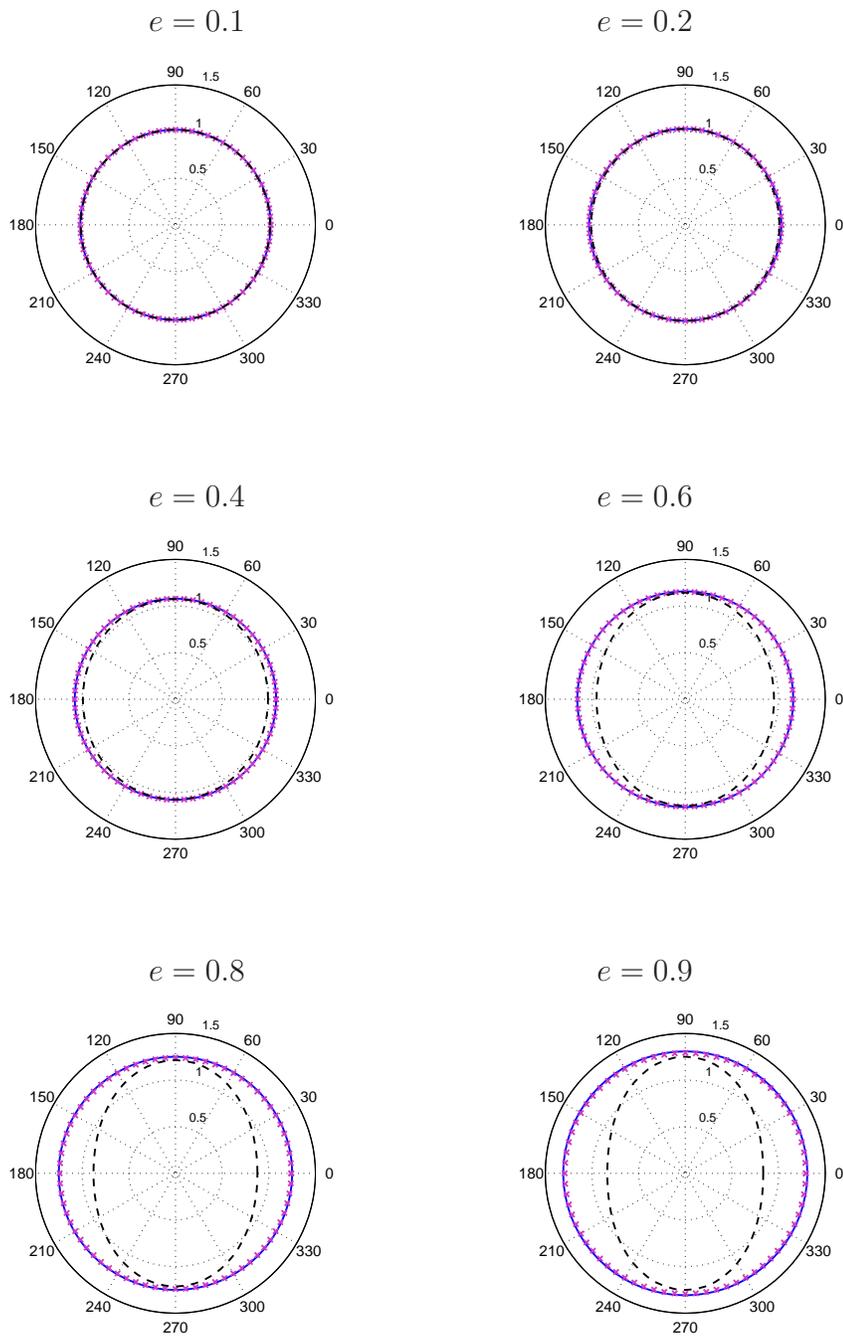


FIG. 2.8: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$n = 2$$

$$ka = 10$$

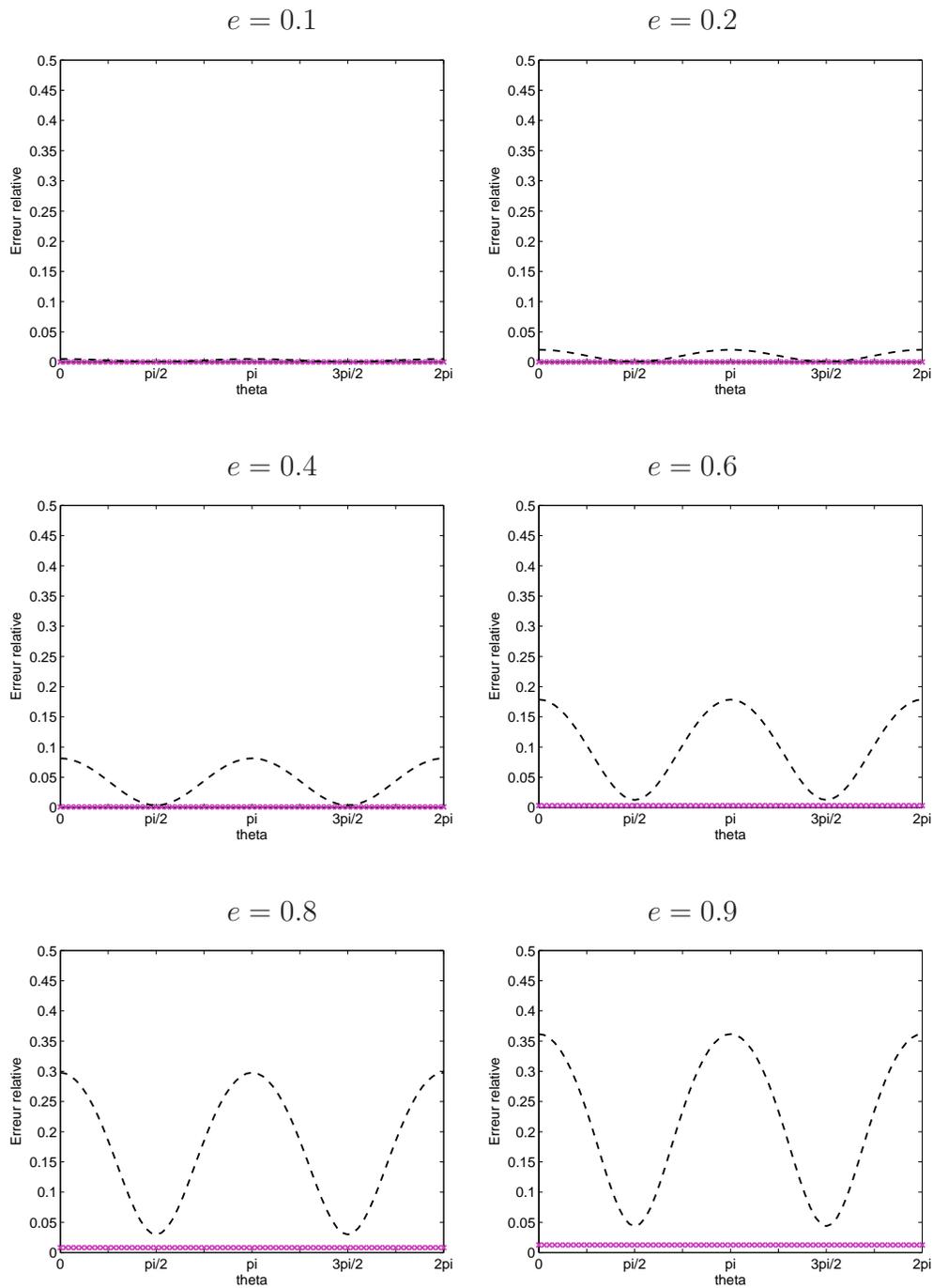


FIG. 2.9: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —)

$$n = 3$$

$$ka = 0.1$$

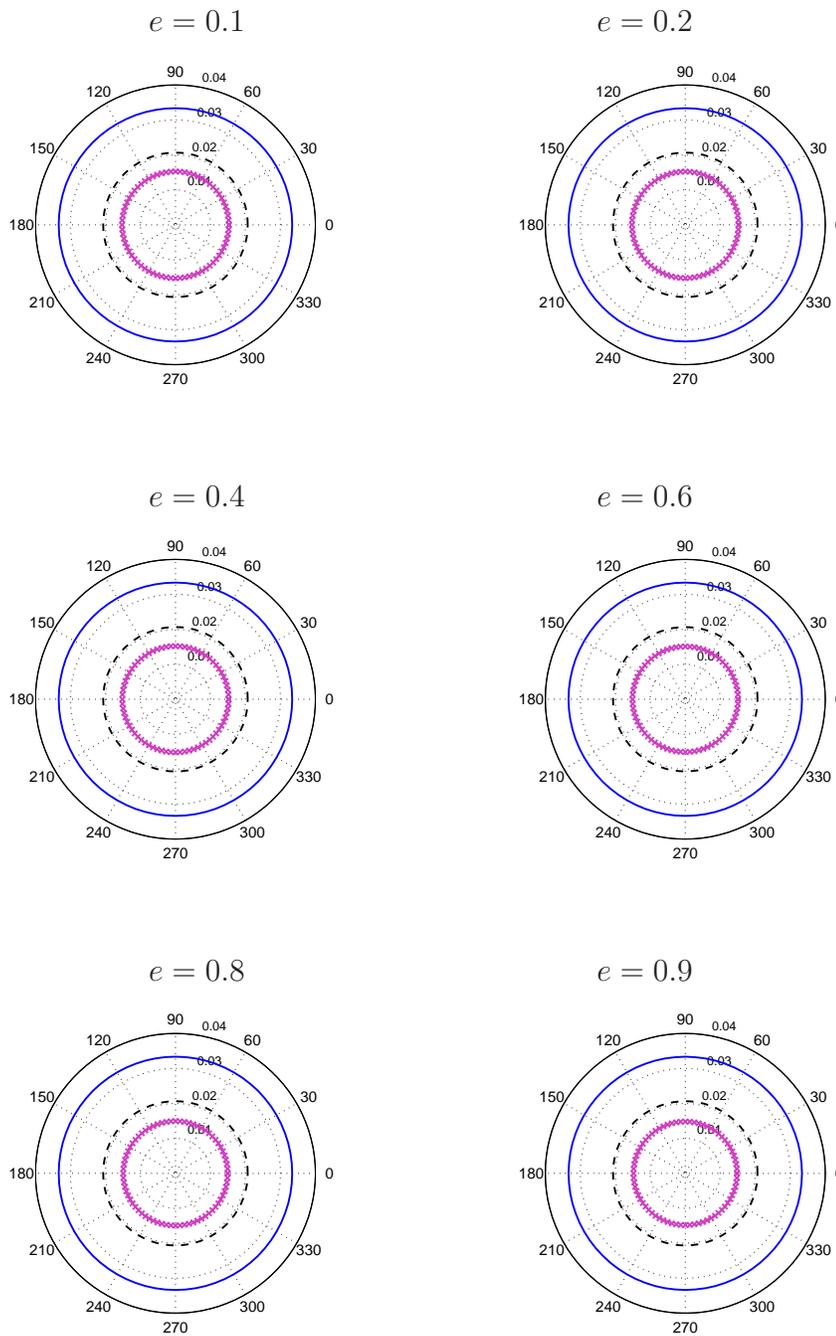


FIG. 2.10: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —).

$$n = 3$$

$$ka = 0.1$$

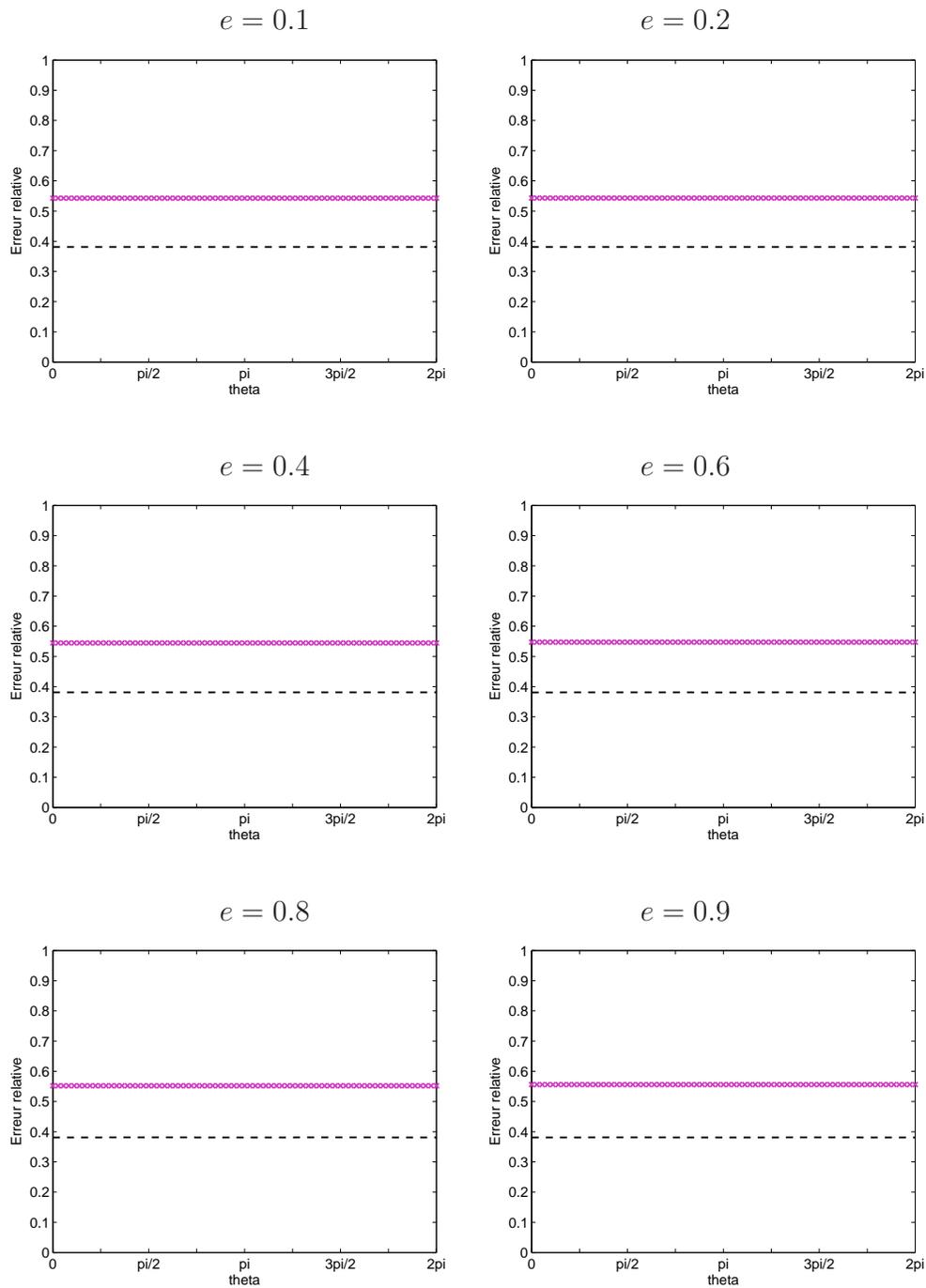


FIG. 2.11: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— — —)

$$n = 3$$

$$ka = 1$$

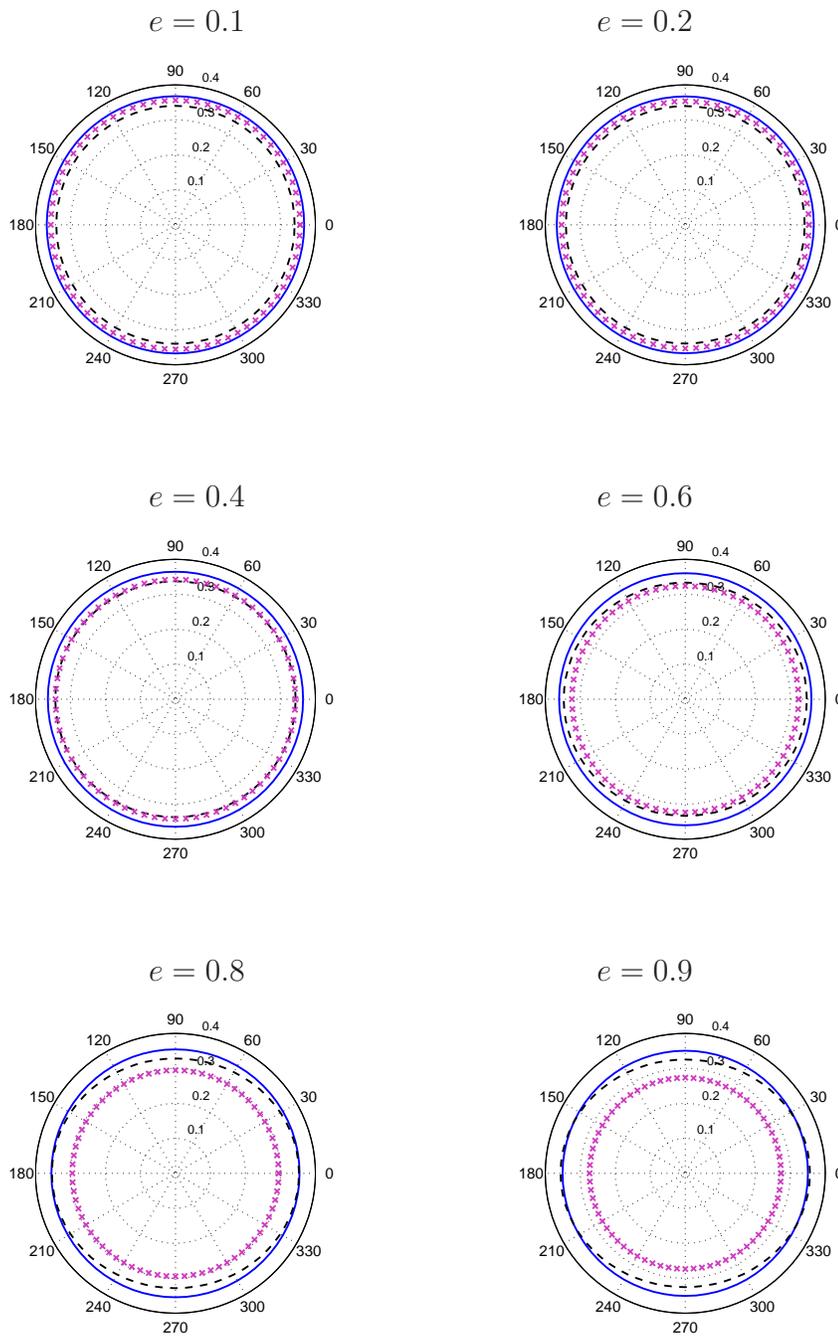


FIG. 2.12: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —).

$$n = 3$$

$$ka = 1$$

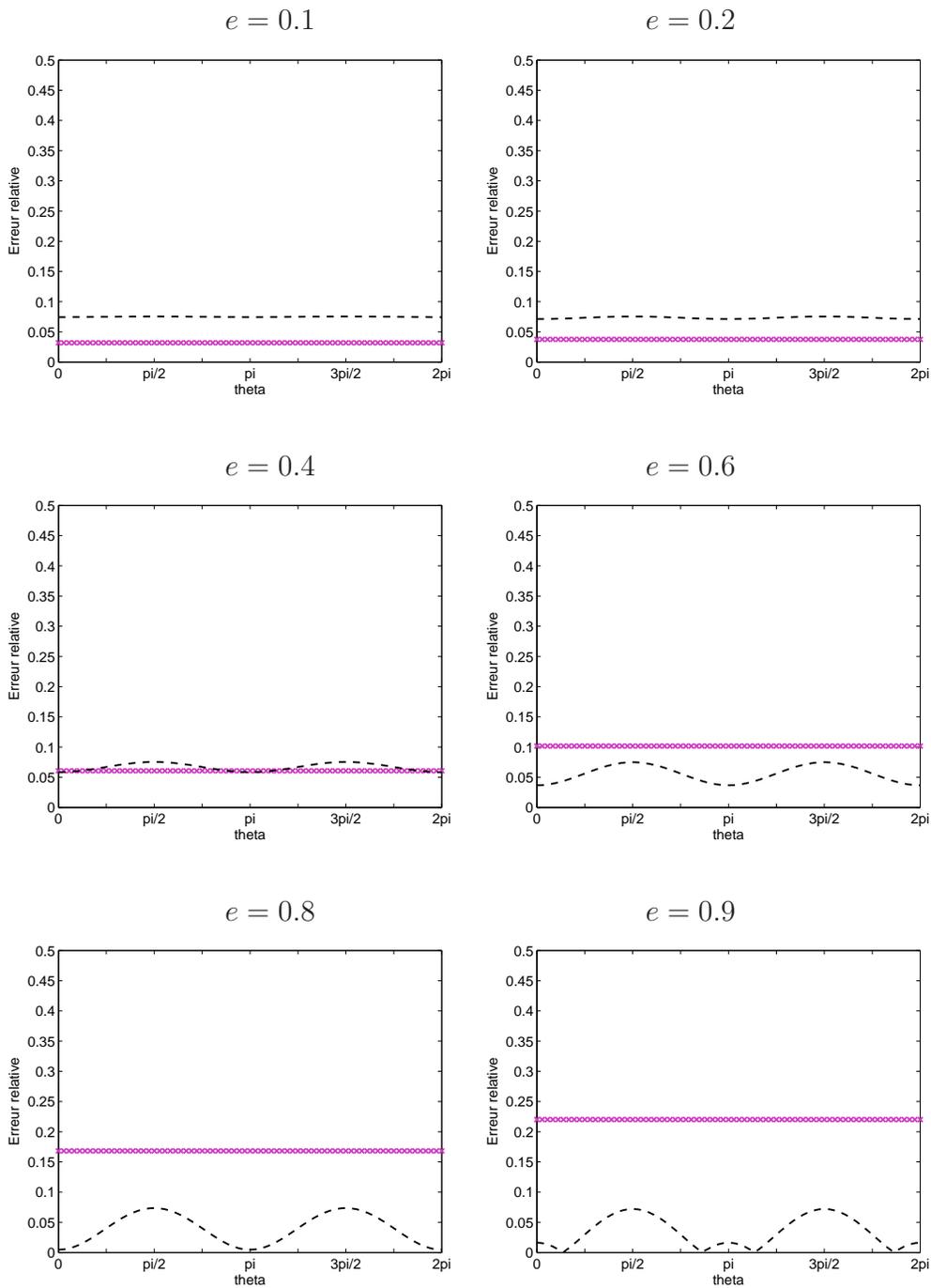


FIG. 2.13: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (---)

$$n = 3$$

$$ka = 10$$

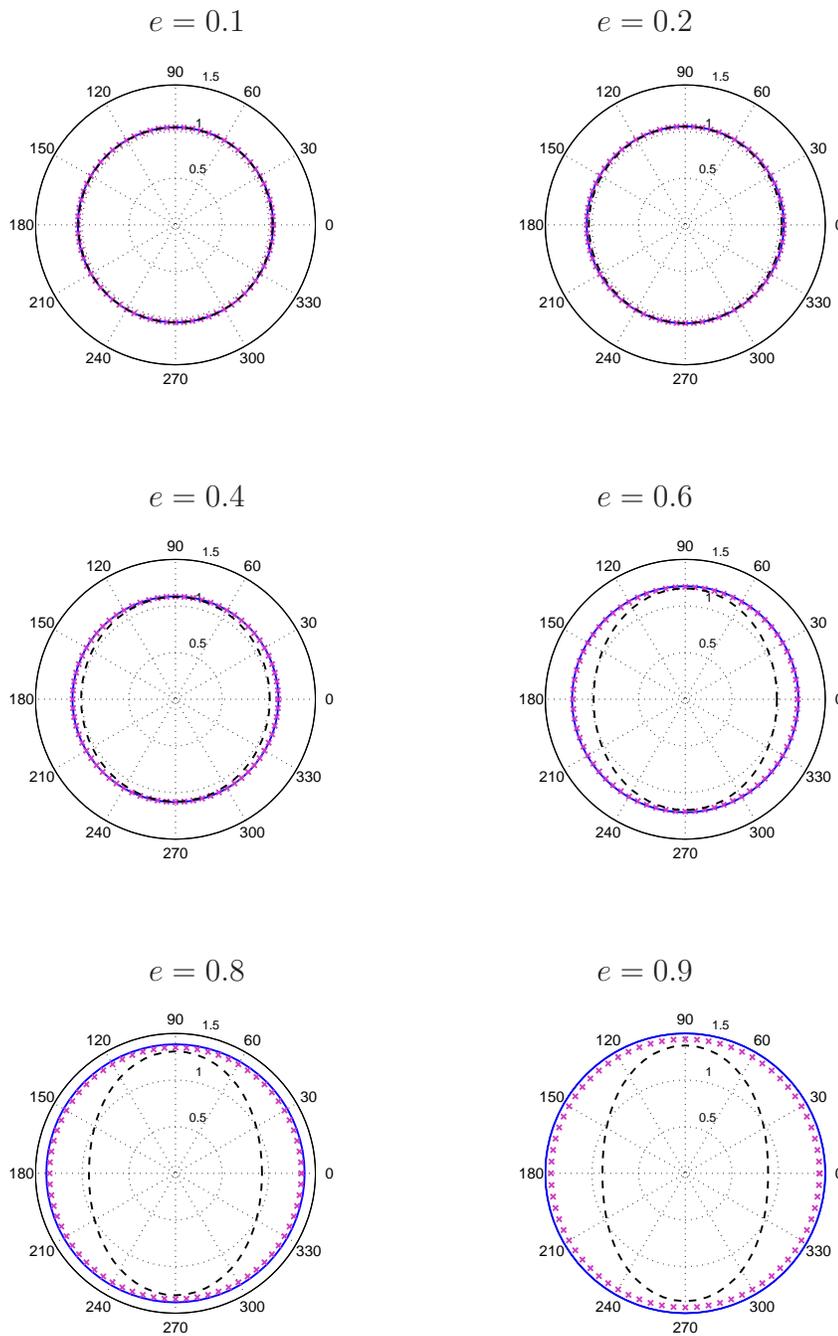


FIG. 2.14: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —).

$$n = 3$$

$$ka = 10$$

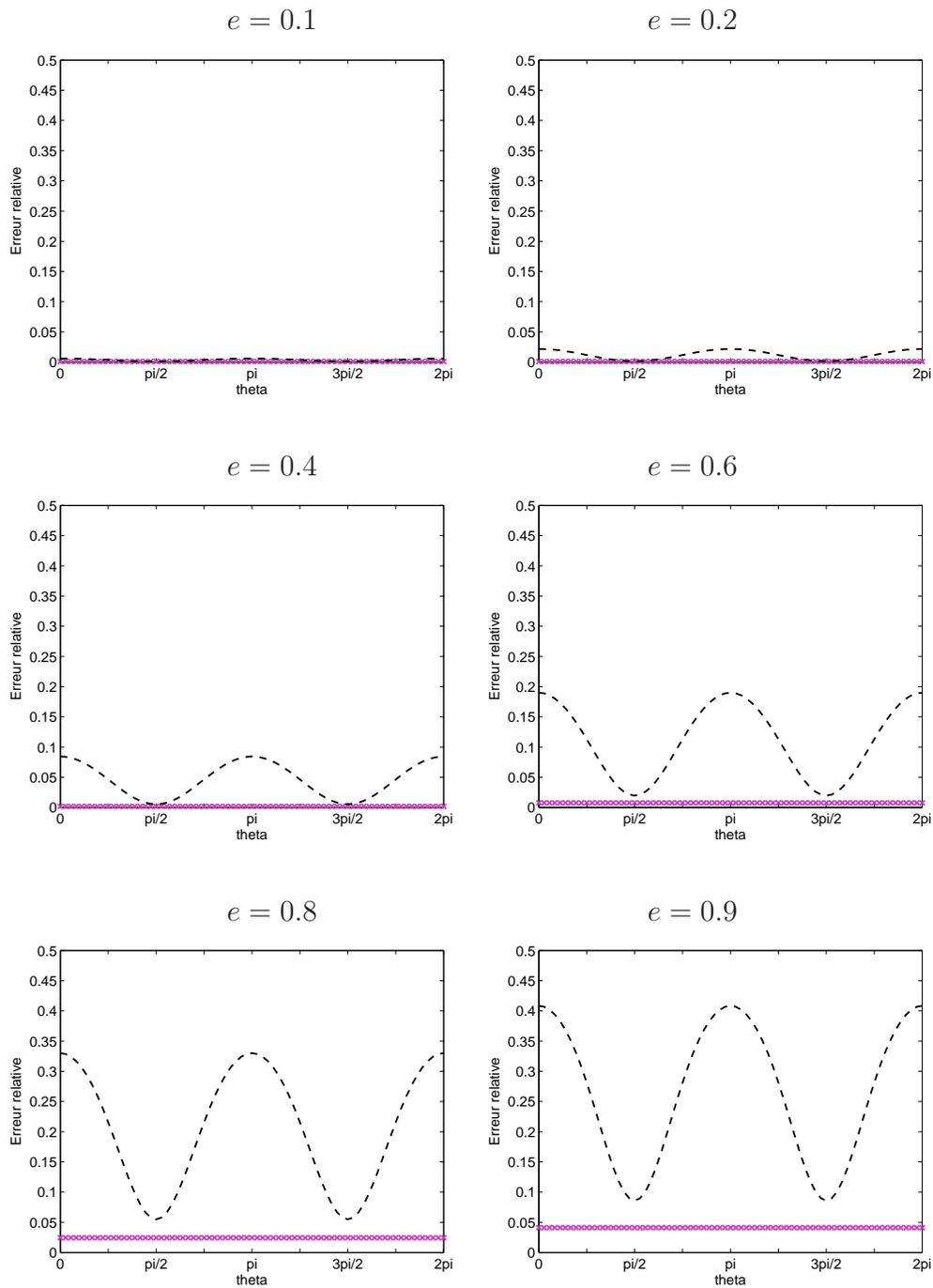


FIG. 2.15: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (---)

6 Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering

A présent, nous allons procéder à l'analyse mathématique de performance des conditions aux limites Dirichlet-to-Neumann locales d'ordre un ($DtN1$) et deux ($DtN2e$, $DtN2o$, $DtN2ae$) données respectivement par les équations (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29) lorsqu'elles sont appliquées dans le cas d'un problème de scattering bi-dimensionnel par un obstacle de forme elliptique. Pour procéder à cette analyse, nous plaçons dans le cadre d'une formulation OSRC (On-Surface Radiation Condition) [46], ce qui signifie que la frontière artificielle où l'on pose l'une des conditions DtN est posée sur le bord de l'obstacle Γ . Cette méthode permet de coupler sur le bord de l'obstacle Γ une condition de bord et une condition non réfléchissante. On résout alors un problème du type :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = Tu & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.74)$$

où Ω est le domaine de calcul.

Ce cadre nous permet d'écrire que $\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = Tu^{inc}$ sur Γ . Nous savons, d'après les travaux de X. Antoine [2], que ce cadre est adapté au régime basse fréquence.

De la même façon que pour l'analyse de performance modale (cf paragraphes 4 et 5), nous allons évaluer la précision des conditions DtN d'ordre 1 et 2 construites en comparant leurs impédances spécifiques approchées à l'impédance spécifique exacte pour le problème de scattering.

On rappelle (cf Eq. (33), p. 3635 dans [54]), que l'impédance spécifique exacte Z^{ex2} sur la surface de l'ellipse $\{\xi = \xi_0\}$ est donnée par :

$$Z^{ex2} = -\frac{i\sqrt{1-e^2}ka u^{inc}}{\frac{\partial}{\partial \xi} (u^{scat})|_{\xi=\xi_0}} \quad (6.75)$$

où u^{inc} est l'onde plane incidente, d'angle d'incidence θ_0 définie par :

$$u^{inc} = e^{ikf \cosh \xi (\cos \theta \cos \theta_0 + \tanh \xi \sin \theta \sin \theta_0)} \quad (6.76)$$

et u^{scat} est le champ acoustique diffracté par l'obstacle de forme elliptique i.e la solution du problème extérieur :

$$\begin{cases} \Delta u^{scat} + k^2 u^{scat} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{scat} = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u^{scat} - ik u^{scat} \right] = 0 \end{cases}$$

D'après [10], u^{scat} peut être représenté par le développement en fonctions de Mathieu suivant :

$$u^{scat} = -\sqrt{8\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} i^m K e_m R e_m^{(3)}(kf, \cosh \xi) S e_m(kf, \cos \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} i^m K o_m R o_m^{(3)}(kf, \cosh \xi) S o_m(kf, \cos \theta) \right) \quad (6.77)$$

où

$$\begin{cases} K e_m = \frac{1}{N_m^{(e)}} \frac{\text{Re}_m^{(1)}(eka, e^{-1}) \text{Se}_m(eka, \cos \theta_0)}{\text{Re}_m^{(3)}(eka, e^{-1})} \\ K o_m = \frac{1}{N_m^{(o)}} \frac{\text{Ro}_m^{(1)}(eka, e^{-1}) \text{So}_m(eka, \cos \theta_0)}{\text{Ro}_m^{(3)}(eka, e^{-1})} \end{cases} \quad (6.78)$$

Les fonctions $\text{Re}_m^{(3)}(eka, e^{-1})$, $\text{Ro}_m^{(3)}(eka, e^{-1})$, $\text{Se}_m(eka, \cos \theta_0)$ et $\text{So}_m(eka, \cos \theta_0)$ ont été définies au chapitre 1, et $N_m^{(e)}$ (resp. $N_m^{(o)}$) représentent les facteurs de normalisation associés respectivement aux fonctions de Mathieu angulaires paires et impaires (cf Eq. (18), p. 377 dans [60]).

Dans le cadre de ce travail, le champ u correspond à une approximation du champ exact u^{scat} par la méthode OSRC.

On rappelle (cf Eq. (38), p. 3637 dans [54]) que le comportement asymptotique de l'impédance spécifique exacte Z^{ex2} , lorsque $ka \rightarrow 0$, est donné par :

$$Z^{\text{ex2}} \sim Z_0^{\text{ex2}} \sim \pi \frac{ka}{2} + ika \ln(ka) ; \quad ka \rightarrow 0 \quad (6.79)$$

où Z_0^{ex2} est défini par l'équation (4.43) pour $n = 0$.

Par contre, on ne peut déterminer le comportement asymptotique de Z^{ex2} lorsque $ka \rightarrow +\infty$ en raison de la divergence des séries qui entrent en compte.

6.1 Définition des impédances spécifiques approchées pour le problème de scattering

Afin d'analyser la performance des différentes conditions aux limites absorbantes DtN , de la même façon que pour le problème modal, nous allons calculer les impédances spécifiques approchées qui leur correspondent. On définit une impédance spécifique approchée :

$$Z^{T,2D} = -\frac{i\sqrt{1-e^2}ka u^{\text{inc}}}{\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}} \quad (6.80)$$

où u est solution du problème (6.74).

Le contexte OSRC dans lequel nous nous sommes placés, nous permet d'écrire que $u = -u^{\text{inc}}$. Pour calculer les impédances spécifiques approchées, il suffit donc

d'appliquer les conditions absorbantes construites (3.10), (3.13), (3.21), (3.29) à u^{inc} donnée par (6.76) et de substituer cette expression à $\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi}$ en $\xi = \xi_0$ dans Eq. (6.80).

Nous obtenons alors, pour chacune des conditions DtN (3.10), (3.13), (3.21) et (3.29), les résultats suivants :

Proposition 6.1 *L'impédance spécifique approchée $Z^{DtN1,2D}$ correspondant à la condition Dirichlet-to-Neumann d'ordre 1 (DtN1), est donnée, en $\xi = \xi_0$, par :*

$$Z^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2} \quad (6.81)$$

Les impédances spécifiques approchées $Z^{DtN2e,2D}$, $Z^{DtN2o,2D}$ et $Z^{DtN2ae,2D}$ correspondant aux conditions Dirichlet-to-Neumann d'ordre 2 (DtN2e, DtN2o, DtN2ae), sont données, en $\xi = \xi_0$, par :

$$Z^{DtN2e,2D} = \frac{ika\sqrt{1-e^2}(a_0 - a_1)}{(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0) - (\alpha_1 - \alpha_0) \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right)} \quad (6.82)$$

$$Z^{DtN2o,2D} = \frac{ika\sqrt{1-e^2}(a_0 - b_1)}{(a_0\beta_1 - a_1\alpha_0) - (\beta_1 - \alpha_0) \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right)} \quad (6.83)$$

$$Z^{DtN2ae,2D} = \frac{ika\sqrt{1-e^2}\Theta}{A_{ae}^* - B_{ae}^* \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right)} \quad (6.84)$$

où A_{ae}^* et B_{ae}^* sont, on le rappelle, définis par :

$$\begin{cases} A_{ae}^* = [(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) + (a_0 + a_1 + b_1)(-a_0\alpha_0 - a_1\alpha_1 - b_1\beta_1)] \\ \text{et} \\ B_{ae}^* = [(a_0 + a_1 + b_1)(\alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1) - 3(a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)] \end{cases}$$

et Θ est donné par Eq. (3.30) : $\Theta = 2(a_0^2 + a_1^2 + b_1^2 - a_0a_1 - a_0b_1 - a_1b_1)$

Enfin, le coefficient Λ est défini par :

$$\Lambda = \cos \theta \cos \theta_0 + \sqrt{1-e^2} \sin \theta \sin \theta_0 \quad (6.85)$$

Démonstration : Pour l'impédance $DtN1$, la démonstration est immédiate. On utilise la définition de cette condition donnée par (3.10) et appliquée à u^{inc} , elle donne :

$$\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \alpha_0 u^{inc}$$

Enfin la méthode OSRC nous permet d'écrire que : $\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi} = -\frac{\partial u^{scat}}{\partial \xi}$, d'où le résultat en substituant dans (6.75).

On note (A, B) le couple de coefficients (qui représentent suivant le cas le couple (A_e, B_e) , (A_o, B_o) ou (A_{ae}, B_{ae})) correspondant aux différentes conditions DtN d'ordre 2. Par définition, ces conditions, lorsqu'elles sont appliquées à u^{inc} , s'écrivent :

$$\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi} = A u^{inc} + B \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u^{inc}$$

Or :

$$\frac{\partial^2 u^{inc}}{\partial \theta^2} - \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta u^{inc} = \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right) u^{inc}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi} = \left[A + B \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right) \right] u^{inc}$$

Pour chacune des trois conditions $DtN2e$, $DtN2o$ et $DtN2ae$, on remplace respectivement (A, B) par le couple (A_e, B_e) (3.20), (A_o, B_o) (3.28) ou (A_{ae}, B_{ae}) (3.40) et on obtient l'impédance spécifique approchée correspondante en remplaçant dans l'Eq.(6.76) $\frac{\partial u^{inc}}{\partial \xi} \left(= -\frac{\partial u^{scat}}{\partial \xi} \right)$ par $\left[A + B \left(ika\Lambda + (ka)^2 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{e^2(ka)^2}{2} \cos(2\theta) \right) \right] u^{inc}$.

□

De la même façon que dans le cas du problème modal, nous pouvons exprimer ces différentes impédances approchées en fonction des impédances exactes modales pour $n = 0$, $n = 1$ dans le cas pair et/ou $n = 1$ dans le cas impair suivant la condition DtN. Cela met en évidence les modes pour lesquels, chacune des conditions, a été construite pour être exacte.

Remarque 6.2 Les impédances spécifiques approchées DtN s'expriment en fonction de l'impédance spécifique exacte de la façon suivante :

$$Z^{DtN2e,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \left(\frac{a_0 - \delta}{a_0 - a_1} \right) \left(\frac{1}{Z_{1,even}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}} \right)} \quad (6.86)$$

$$Z^{DtN2o,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + \left(\frac{a_0 - \delta}{a_0 - b_1}\right) \left(\frac{1}{Z_{1,odd}^{ex2}} - \frac{1}{Z_0^{ex2}}\right)} \quad (6.87)$$

$$Z^{DtN2ae,2D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_0^{ex2}} + A_1 \frac{1}{Z_0^{ex2}} + A_2 \frac{1}{Z_{1,even}^{ex2}} + A_3 \frac{1}{Z_{1,odd}^{ex2}}} \quad (6.88)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-2a_0^2 - a_1^2 - b_1^2 + a_0a_1 + a_0b_1 + 2a_1b_1 + \delta(2a_0 - a_1 - b_1)}{\Theta} \\ A_2 &= \frac{a_0^2 + b_1^2 + \delta(-a_0 + 2a_1 - b_1) - a_1a_0 - a_1b_1}{\Theta} \\ A_3 &= \frac{a_0^2 + a_1^2 + \delta(-a_0 - a_1 + 2b_1) - b_1a_0 - a_1b_1}{\Theta} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Θ est défini par Eq. (3.30), et :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sqrt{1 - e^2} \sin \theta \sin \theta_0 \\ \delta &= \left(\frac{e^2}{2} \cos(2\theta) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 \right) (ka)^2 + ika\Lambda \end{aligned} \quad (6.90)$$

6.2 Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow 0$

Nous allons étudier le comportement en régime basse fréquence des impédances spécifiques DtN $Z^{DtN1,2D}$ (6.81), $Z^{DtN2e,2D}$ (6.86), $Z^{DtN2o,2D}$ (6.87) ou $Z^{DtN2ae,2D}$ (6.88), c'est-à-dire lorsque $ka \rightarrow 0$. Notre but est de comparer les résultats obtenus à ceux connus de l'impédance exacte (6.79) de façon à évaluer la performance des conditions DtN dans un contexte OSRC.

Proposition 6.3 *Le comportement asymptotique des impédances spécifiques approchées DtN, lorsque $ka \rightarrow 0$, est donné par :*

$$Z^{DtN1,2D} \sim Z^{DtN2,2D} \sim Z_0^{ex2} \sim \pi \frac{ka}{2} + ika \ln(ka) \quad (6.91)$$

où $Z^{DtN2,2D}$ désigne indifféremment l'une des trois impédances spécifiques approchées $Z^{DtN2e,2D}$, $Z^{DtN2o,2D}$ ou $Z^{DtN2ae,2D}$.

Démonstration :

- Pour l'impédance spécifique approchée $Z^{DtN1,2D}$

On sait que par définition $Z^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2}$ (6.81)

- Pour les impédances spécifiques approchées $Z^{DtN2e,2D}$, $Z^{DtN2o,2D}$ et $Z^{DtN2ae,2D}$

On commence par la démonstration pour les deux conditions d'ordre 2 $DtN2e$ (6.86) et $DtN2o$ (6.87) :

Les équations (6.86) et (6.87) nous permettent d'écrire :

$$Z^{DtN2e,2D} = Z_0^{\text{ex}2} \frac{1}{1 + \frac{a_0 + \delta}{a_0 - a_1} \left[\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{even}}^{\text{ex}2}} - 1 \right]} \quad (6.92)$$

$$Z^{DtN2o,2D} = Z_0^{\text{ex}2} \frac{1}{1 + \frac{a_0 + \delta}{a_0 - b_1} \left[\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{odd}}^{\text{ex}2}} - 1 \right]}$$

Par définition de δ , nous avons :

$$\delta = -ika\Psi_1(ka) \quad \text{avec } \Psi_1(ka) \rightarrow \Lambda \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (6.93)$$

ce qui implique, en utilisant (4.69), que :

$$a_0 + \delta = -ika\Psi_2(ka) \quad \text{avec } \Psi_2(ka) \rightarrow \Lambda \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (6.94)$$

Puis, (4.70) et (4.69) impliquent que :

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &\rightarrow 1 \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \\ b_1 - a_0 &\rightarrow 1 \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.95)$$

Enfin, en utilisant (6.86) (resp. (6.87)), on obtient que lorsque $ka \rightarrow 0$, $\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{even}}^{\text{ex}2}} - 1$ (resp. $\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{odd}}^{\text{ex}2}} - 1$) se comporte comme $\Psi_3(ka)$ avec :

$$\Psi_3(ka) = \ln(ka) + i\frac{\pi}{2} \quad (6.96)$$

Ainsi, d'après (6.94), (6.95) et (6.96) on déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{a_0 + \delta}{a_0 - a_1} \left[\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{even}}^{\text{ex}2}} - 1 \right] &\rightarrow 0 \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \\ \frac{a_0 + \delta}{a_0 - b_1} \left[\frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{odd}}^{\text{ex}2}} - 1 \right] &\rightarrow 0 \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.97)$$

et on en conclut que :

$$Z^{DtN2e,2D} \sim Z^{DtN2o,2D} \sim Z_0^{\text{ex}2} \quad (6.98)$$

Passons maintenant à la démonstration pour (6.88). On va donner une démonstration un peu moins détaillée car elle est assez similaire aux deux précédentes. On peut écrire (6.88) sous la forme :

$$Z^{DtN2ae,2D} = Z_0^{\text{ex}2} \frac{1}{(1 + A_1) + A_2 \frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{even}}^{\text{ex}2}} + A_3 \frac{Z_0^{\text{ex}2}}{Z_{1,\text{odd}}^{\text{ex}2}}} \quad (6.99)$$

Sachant que lorsque $ka \rightarrow 0$, $Z_{1,even}^{ex2} \sim Z_{1,odd}^{ex2}$, on peut écrire :

$$Z^{DtN2ae,2D} = Z_0^{ex2} \frac{1}{(1 + A_1) + (A_2 + A_3) \frac{Z_0^{ex2}}{Z_1^{ex2}}} \quad (6.100)$$

En utilisant le comportement des valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu en 0 données par (Eqs. (4.69)-(4.70)), nous pouvons démontrer que lorsque $ka \rightarrow 0$:

$$A_1 \rightarrow 0, \quad A_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad A_3 \rightarrow 0.$$

On peut alors en conclure que lorsque $ka \rightarrow 0$, $Z^{DtN2ae,2D} \sim Z_0^{ex2}$.

□

Le résultat donné par Eq. (6.3) laisse présager une très bonne performance des conditions approchées DtN d'ordre 1 et 2 en régime basse fréquence pour le problème de scattering bidimensionnel. On peut aussi supposer que la condition d'ordre 2 qui est exacte pour les deux premiers modes sera encore plus précise que la condition d'ordre 1 qui n'est exacte que pour $n = 0$. Les résultats numériques obtenus au paragraphe 7 en seront une illustration.

Remarque 6.4 *On peut remarquer que toutes les impédances spécifiques DtN approchées se comportent de la même façon que l'impédance spécifique exacte. Cela n'est pas le cas pour l'impédance spécifique approchée BGT2 (cf Eq. (40), p. 3637 dans [54]) qui, elle, dépend de l'excentricité e et de l'angle d'observation θ_0 . Ce résultat permet de prédire à basse fréquence une meilleure précision des conditions DtN, indépendamment de l'allongement de la frontière artificielle, comparé à la condition BGT2.*

Remarque 6.5 *On peut noter que lorsque $e = 0$ (cas du cercle) les comportements asymptotiques de $Z^{DtN1,2D}$, $Z^{DtN2,2D}$ (quelle que soit la condition d'ordre 2) sont identiques à ceux du cercle [41]. On a donc construit des conditions qui, dans le cas d'une frontière artificielle circulaire, correspondent aux conditions déjà connues.*

6.3 Analyse asymptotique lorsque $ka \rightarrow +\infty$

Dans cette partie, nous allons donner le comportement à haute fréquence des impédances spécifiques approchées correspondant aux différentes conditions aux limites de type Dirichlet-to-Neumann que nous avons construites. Nous ne pourrons, hélas, pas comparer les résultats obtenus à ceux de l'impédance exacte puisque le comportement asymptotique à l'infini ne peut être étudié. Ces résultats sont donnés à titre indicatif car nous savons aussi que le cadre OSRC dans lequel nous nous sommes placés dans cette partie n'est pas adapté au régime haute fréquence [2].

Proposition 6.6 Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le comportement asymptotique des différentes impédances spécifiques approchées est donné par :

$$Z^{DtN1,2D} \sim 1 - i \frac{1}{2ka} \quad (6.101)$$

$$Z^{DtN2e,2D} \sim 1 + \left(-\frac{i}{2} + \frac{e^2}{8}(1 + \cos(2\theta)) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 \right) \frac{1}{ka} \quad (6.102)$$

$$Z^{DtN2o,2D} \sim 1 - \frac{i}{2ka} + \frac{\sqrt{e\pi} \left(\frac{-e^2}{2}(1 + \cos(2\theta)) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 \right)}{32e^2 \exp(2eka)} \frac{1}{(ka)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.103)$$

$$Z^{DtN2ae,2D} \sim 1 + \left(-\frac{i}{2} + \frac{e^2}{16}(1 + \cos(2\theta)) - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right)^2 \right) \frac{1}{ka} \quad (6.104)$$

où Λ est, on le rappelle donné par Eq. (6.85).

Démonstration :

- Pour l'impédance spécifique approchée $Z^{DtN1,2D}$

D'après l'Eq. (6.81), $Z^{DtN1,2D} = Z_0^{ex2}$. En utilisant, l'équation (4.44) pour $n = 0$, on a immédiatement le résultat annoncé.

- Pour les impédances spécifiques approchées $Z^{DtN2e,2D}$, $Z^{DtN2o,2D}$ et $Z^{DtN2ae,2D}$

On utilise pour ces impédances leurs écritures respectives données par (6.86), (6.87) et (6.88).

On a déjà vu que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0^{ex2} \sim -i \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \\ \text{et} \\ Z_{1,even}^{ex2} \sim Z_{1,odd}^{ex2} \sim \frac{i}{\frac{1}{ka} - \frac{H_2^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)}} \end{array} \right.$$

D'après un résultat d'Abramovitz et al. (Eq. (9.1.27) dans [1]), on a :

$$H_2^{(1)}(ka) = \frac{2}{ka} H_1^{(1)}(ka) - H_0^{(1)}(ka)$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{Z_{1,even}^{exact}} \sim \frac{1}{Z_{1,odd}^{exact}} \sim \frac{i}{ka} - i \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} Z^{DtN2e,2D} &\sim \frac{1}{i \frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + i \left(\frac{a_0 - \delta}{a_0 - a_1} \right) \left(\frac{1}{ka} - \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} - \frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \right)} \\ Z^{DtN2o,2D} &\sim \frac{1}{i \frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + i \left(\frac{a_0 - \delta}{a_0 - b_1} \right) \left(\frac{1}{ka} - \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} - \frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \right)} \\ Z^{DtN2ae,2D} &\sim \frac{1}{(1 + A_1) i \frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} + (A_2 + A_3) \left(\frac{i}{ka} - i \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_1^{(1)}(ka)} \right)} \end{aligned}$$

On rappelle que les coefficients A_1 , A_2 et A_3 sont donnés par Eq. (6.89).

D'après les comportements à l'infini donnés dans [1], on sait que :

$$\frac{H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \sim -i \frac{1 + \frac{3i}{8ka} + \frac{15}{2(8ka)^2}}{1 - \frac{i}{8ka} - \frac{9}{2(8ka)^2}}$$

et,

$$a_0 \sim b_1 \sim -\frac{e^2(ka)^2}{2} + ka - \frac{1}{4}$$

$$a_1 \sim -\frac{e^2(ka)^2}{2} + 3ka - \frac{5}{4}$$

Enfin, d'après [51], lorsque $ka \rightarrow +\infty$

$$b_1 - a_0 \sim 2^5 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{e^2(ka)^2}{4} \right)^{\frac{3}{4}} \exp(-2eka)$$

Grâce à tous ces éléments, on écrit les impédances $Z^{DtN2e,2D}$, $Z^{DtN2o,2D}$ et $Z^{DtN2ae,2D}$ comme des fonctions de ka puis sous la forme de séries de Taylor, à l'aide du logiciel Mathematica. On obtient les comportements asymptotiques après une troncature adaptée des séries de Taylor obtenues.

□

On peut observer que lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le comportement asymptotique des trois impédances spécifiques approchées correspondant aux conditions DtN2 (3.13), (3.21), (3.29) ne sont pas égaux. On peut noter qu'ils ont une partie commune $1 - \frac{i}{2ka}$ puis que chacune des impédances a une partie qui lui est propre d'ordre $\frac{1}{ka}$.

7 Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering

Nous avons voulu tester numériquement la performance des conditions DtN construites en les comparant à la condition BGT d'ordre 2 en coordonnées elliptiques étudiée dans [54], lorsque ces conditions sont appliquées à la résolution d'un problème de scattering pour un obstacle elliptique, dans un contexte OSRC. Nous souhaitons connaître l'influence du nombre d'onde ka , de l'excentricité e et de l'angle d'incidence θ_0 sur ces performances. Comme les impédances spécifiques approchées $DtN1$, $DtN2$ et $BGT2$ dépendent de l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ les résultats sont représentés en coordonnées polaires, en fonction de cette variable. Nous avons testé trois valeurs de ka : 0.1, 1 et 10, six valeurs de e allant de 0.1 (cas proche du cercle) à 0.9 (ellipse allongée) et enfin trois angles d'incidence θ_0 : 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. La comparaison entre les conditions approchées se fait de deux façon différentes. Pour chaque test, on a représenté les valeurs absolues des différentes impédances approchées testées ainsi que l'erreur relative correspondant à chaque condition à travers la quantité $\frac{|Z^{ex2} - Z^{app,2D}|}{|Z^{ex2}|}$, où $Z^{app,2D}$ est l'une des impédances approchées DtN ou BGT.

À l'inverse du problème du radiateur (problème modal), la condition DtN2 montre un excellent niveau de précision pour la résolution de problème acoustique en régime basse fréquence ($ka = 0.1$ et $ka = 1$), comme le laissait entrevoir la proposition (6.91). De plus, les figures (Figs (2.16)-(2.27)) montrent clairement que ce bon niveau de performance ne dépend pas de l'excentricité e . Ces résultats suggèrent donc, en particulier, que les conditions DtN2 données par les équations (3.13)-(3.21)-(3.29) sont adaptées à des frontières artificielles allongées, dans un cadre OSRC, à basse fréquence.

La condition DtN2 est clairement plus performante que la condition BGT2 particulièrement pour des grandes valeurs d'excentricité. En effet, la condition BGT2 perd significativement en précision lorsque $e \geq 0.6$ (l'erreur relative de la condition BGT2 est supérieure à 40% alors que celle de DtN2 reste en dessous de 2% pour $ka = 0.1$). Cela montre que la condition DtN2 étend le domaine de performance satisfaisante à toutes les valeurs d'excentricité en régime basse fréquence. Lorsque $ka = 1$ les deux conditions d'ordre 2 DtN2 et BGT2 sont équivalentes pour de petites excentricités avec un niveau de performance assez bon (l'erreur relative est inférieure

ou égale à 13%). Par contre, lorsque la frontière artificielle est plus allongée, le niveau de précision de la condition DtN2 s'améliore alors que celui de BGT2 se détériore considérablement (pour certaines valeurs de θ en particulier).

Pour certaines valeurs de l'angle d'observation θ , la condition DtN1 est étonnamment plus performante que la condition d'ordre 2 DtN2. Cependant, l'erreur relative totale (i.e l'erreur relative moyenne pour tous les angles d'observation θ) de la condition absorbante DtN1 est significativement supérieure à celle de la condition DtN2.

De la même manière, on peut observer que pour certaines valeurs de θ , la condition DtN1 est aussi plus performante que la condition BGT2. Cela est particulièrement visible pour le cas $e = 0.9$ et $ka = 1$ (cf Figs (2.25)-(2.27)).

Par contre si l'on augmente la fréquence, soit $ka = 10$, la performance des conditions étudiées n'est pas vraiment satisfaisante comme l'on pouvait s'y attendre en se plaçant dans un cadre OSRC. Le niveau de précision des conditions DtN2 et BGT2 est équivalent pour de petites valeurs d'excentricité, il est même bon pour des valeurs de $\theta \in \mathcal{V}(\theta_0) \cup \mathcal{V}\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$. Lorsque $e \rightarrow 1$, la performance de la condition DtN2 reste satisfaisante si $\theta \in \mathcal{V}(\theta_0) \cup \mathcal{V}\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ mais l'erreur relative de DtN2 peut atteindre 35% dans le plus mauvais cas (cf Fig (2.32)). L'erreur relative pour la condition BGT2 peut atteindre jusqu'à 65%. Pour ce régime de fréquence et de grandes valeurs de e , la performance de BGT2 est à peu près équivalente à la performance de DtN1, cela est particulièrement visible à la Fig (2.33).

$$ka = 0.1$$

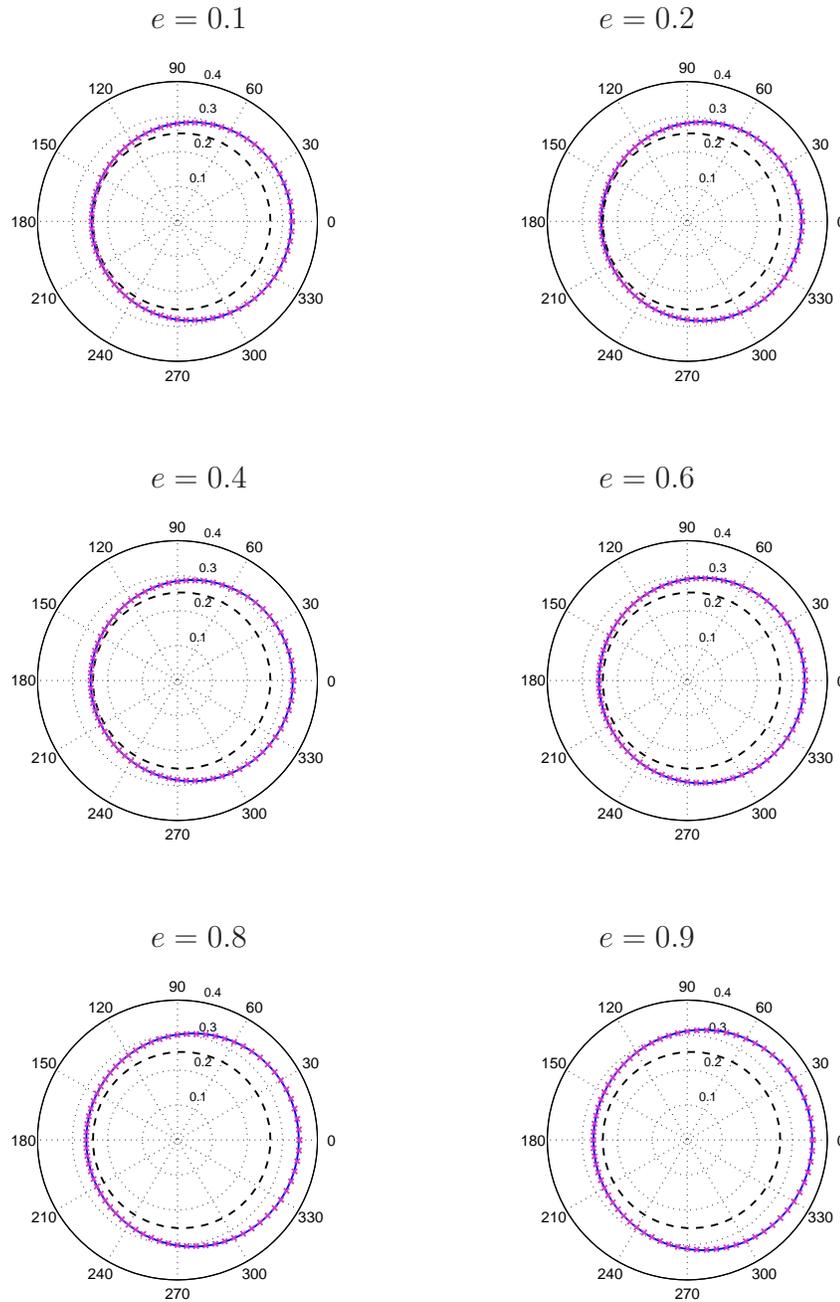


FIG. 2.16: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 0.1$$

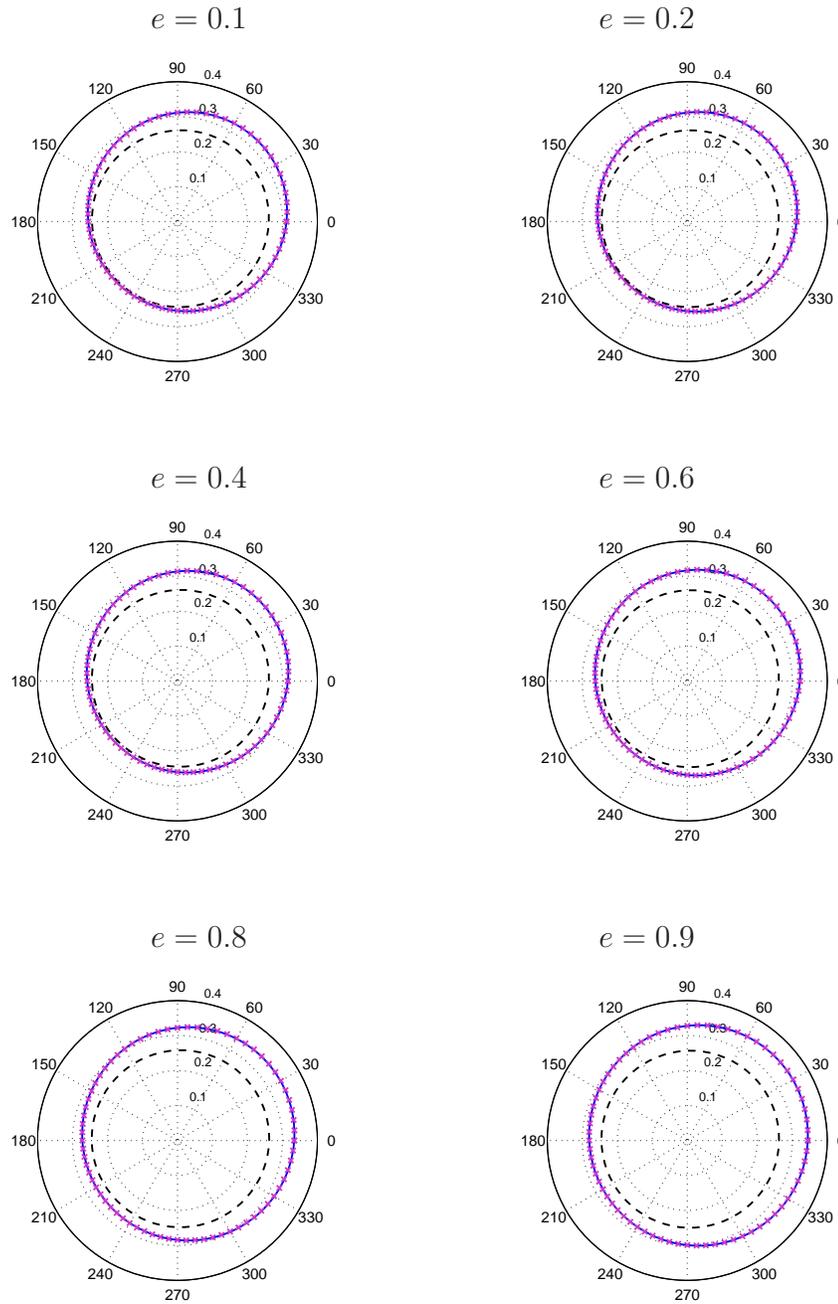


FIG. 2.17: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 0.1$$

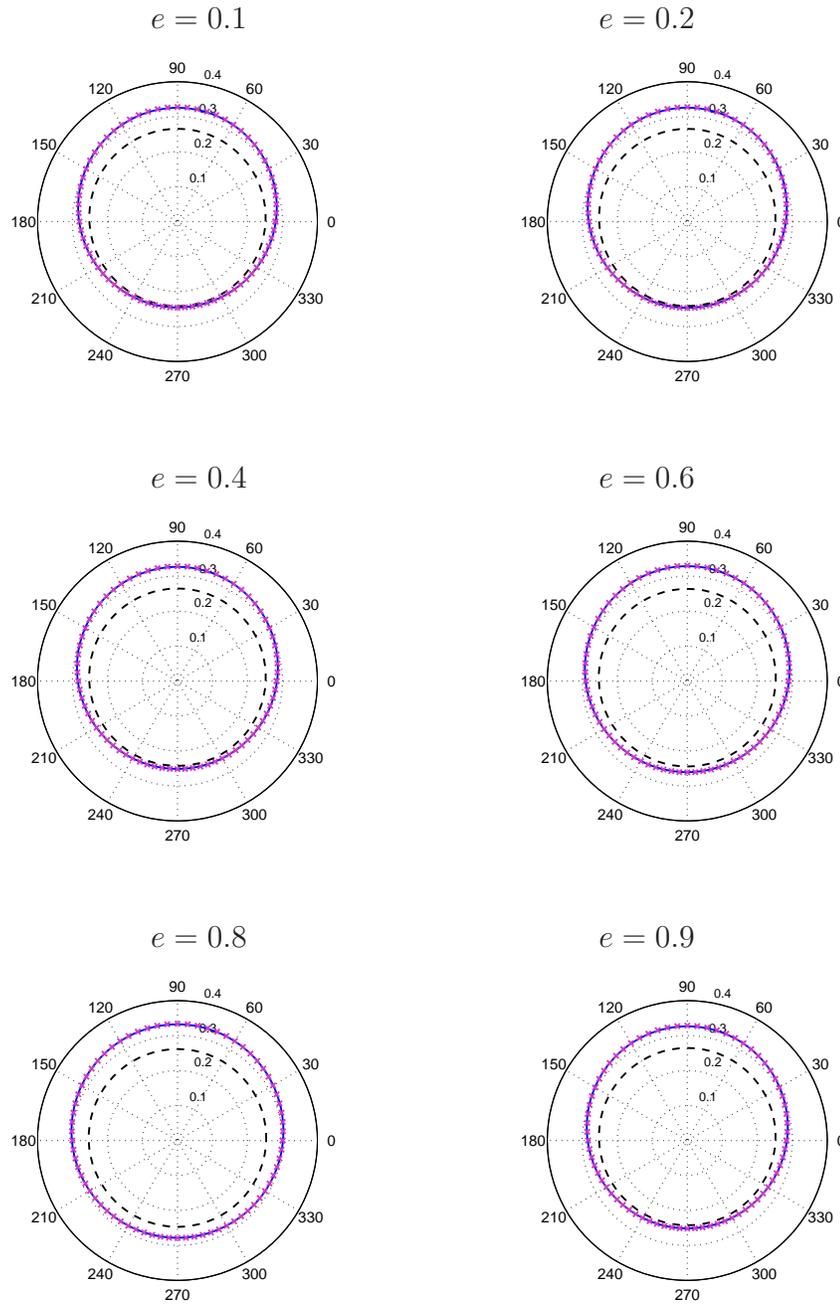


FIG. 2.18: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$ka = 0.1$$

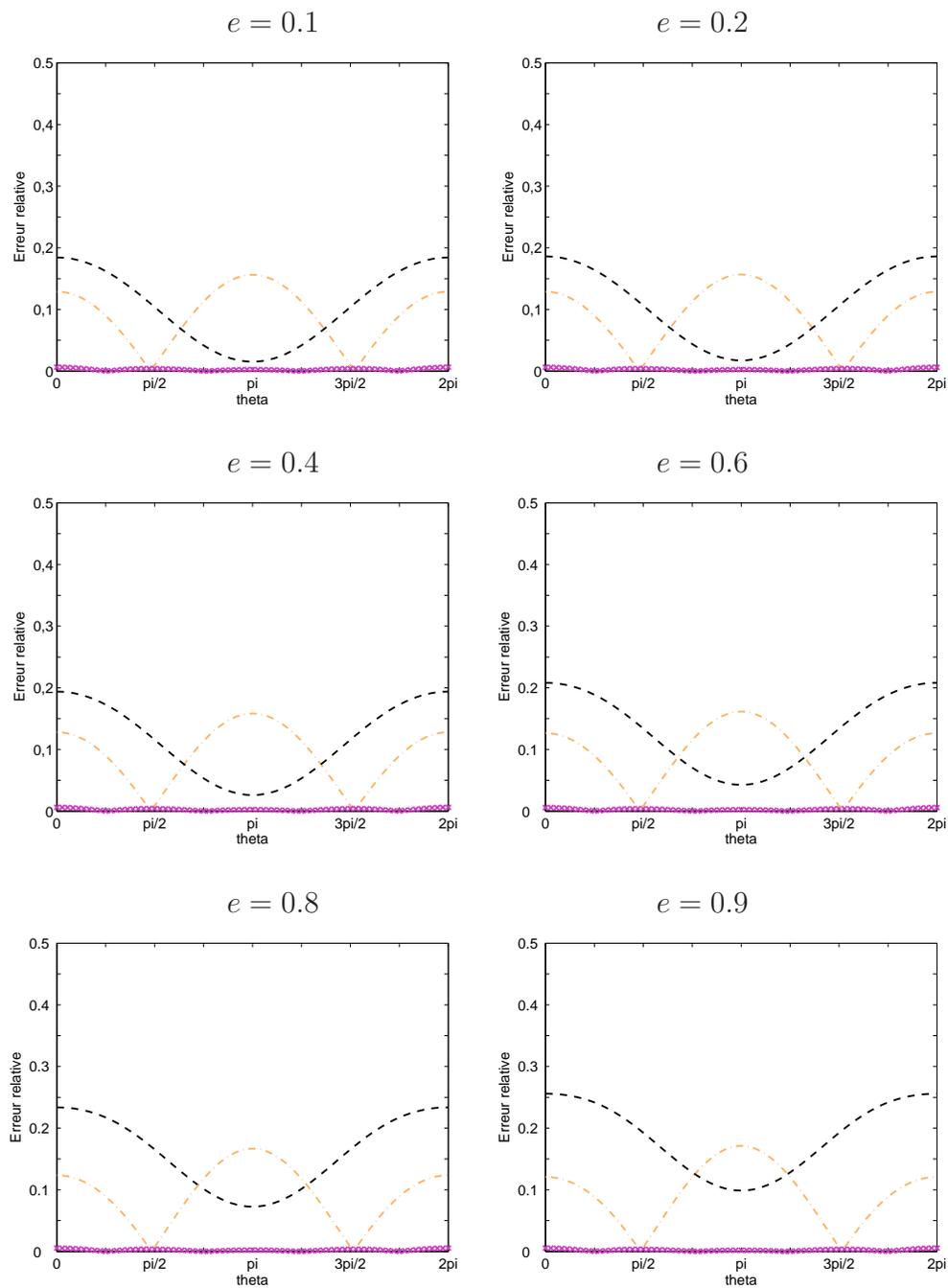


FIG. 2.19: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 0.1$$

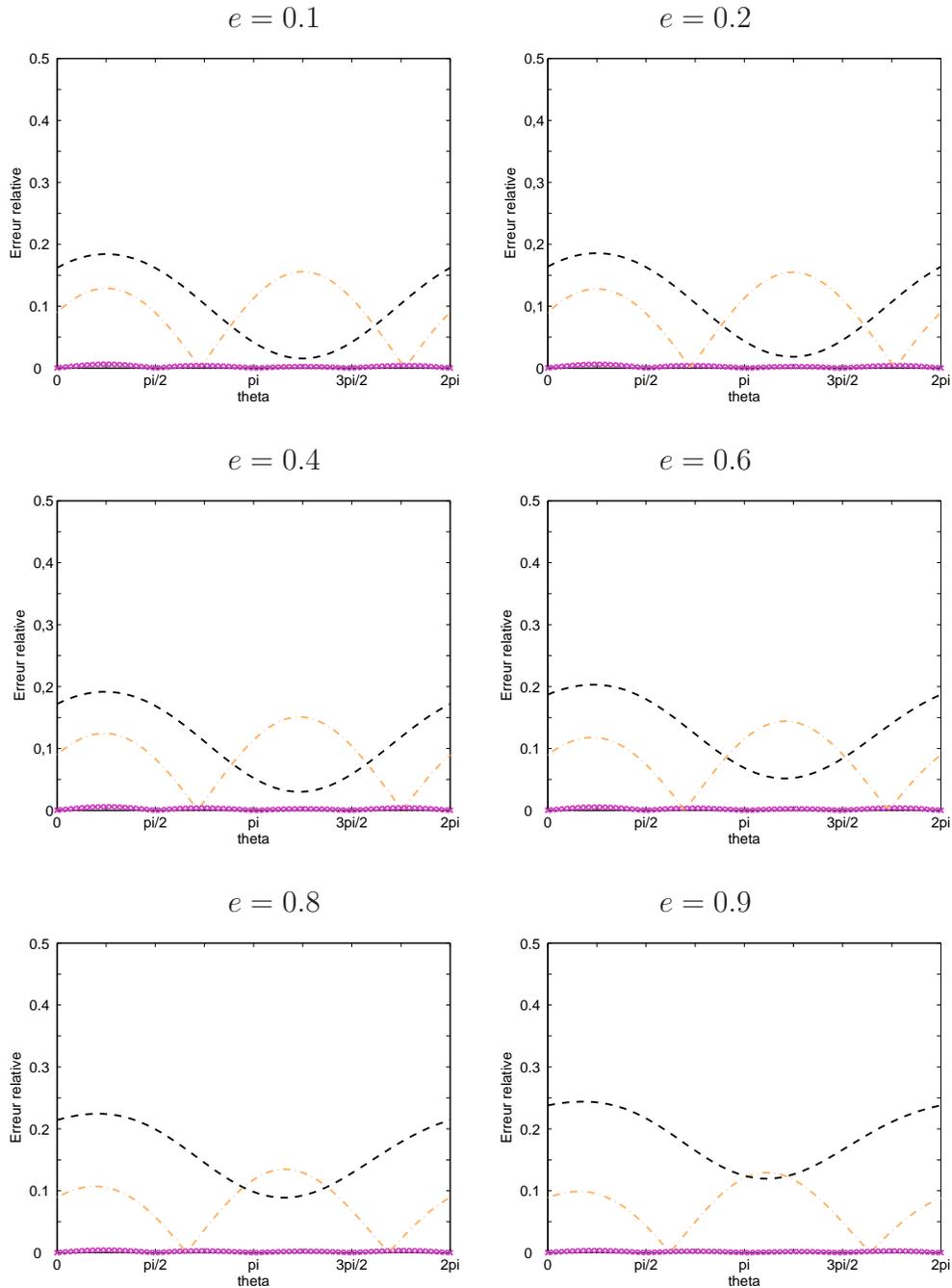


FIG. 2.20: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 0.1$$

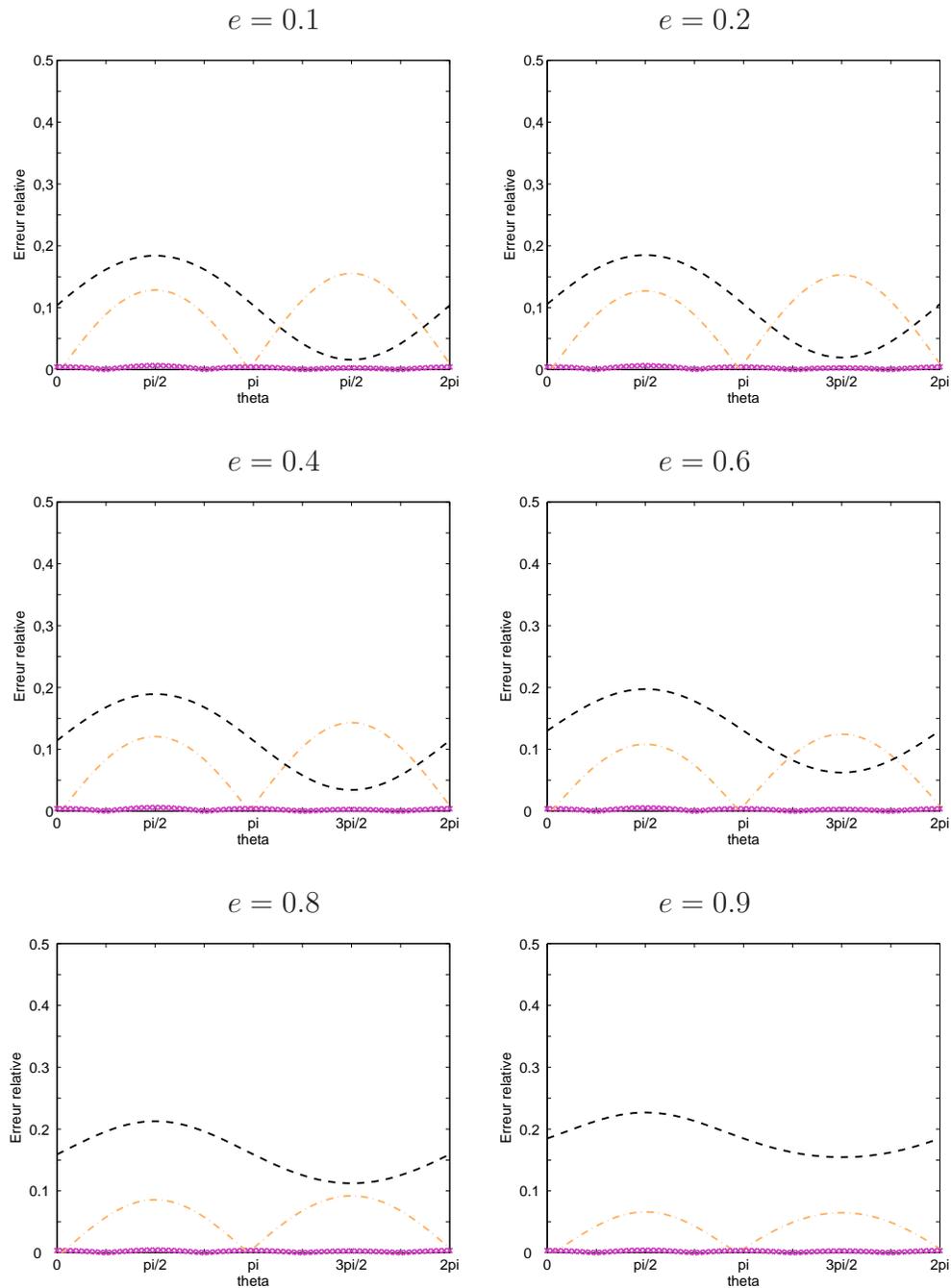


FIG. 2.21: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$ka = 1$$

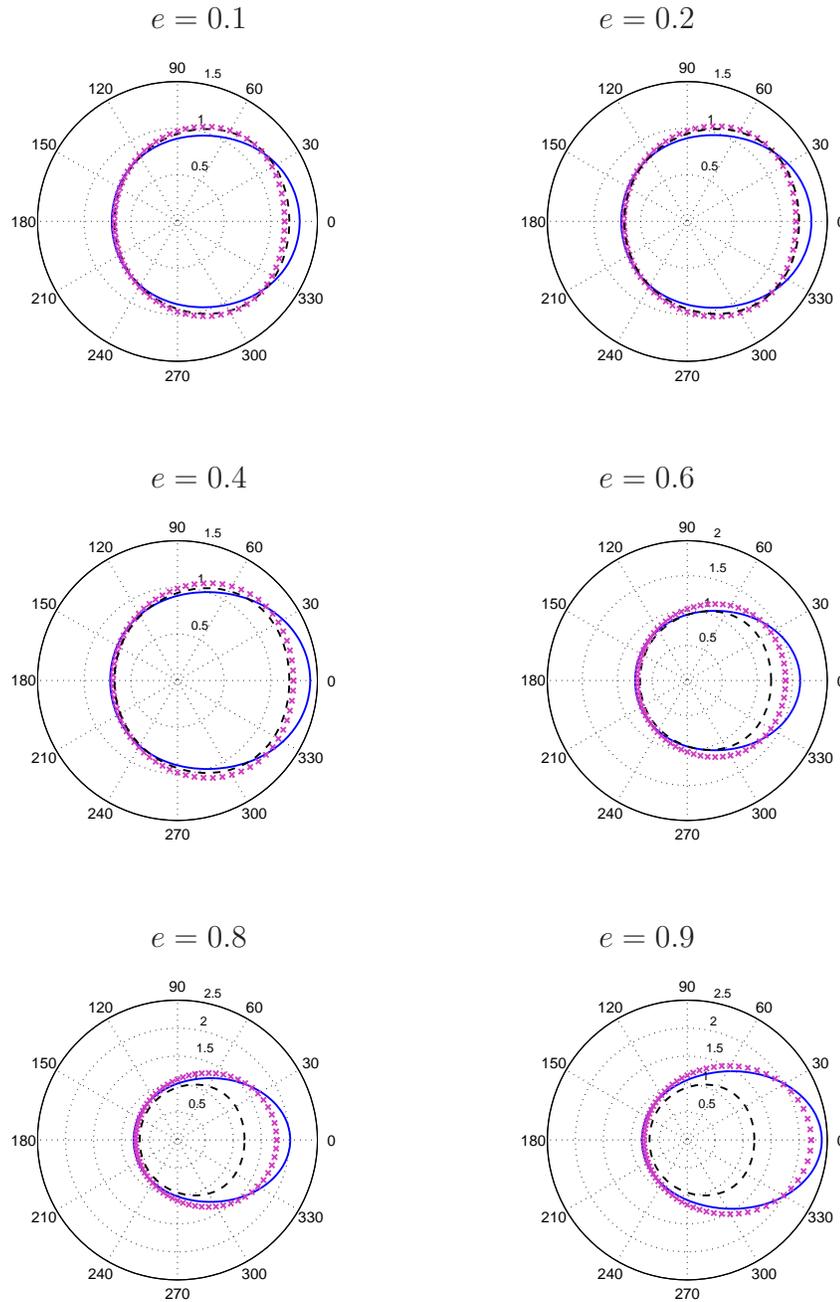


FIG. 2.22: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 1$$

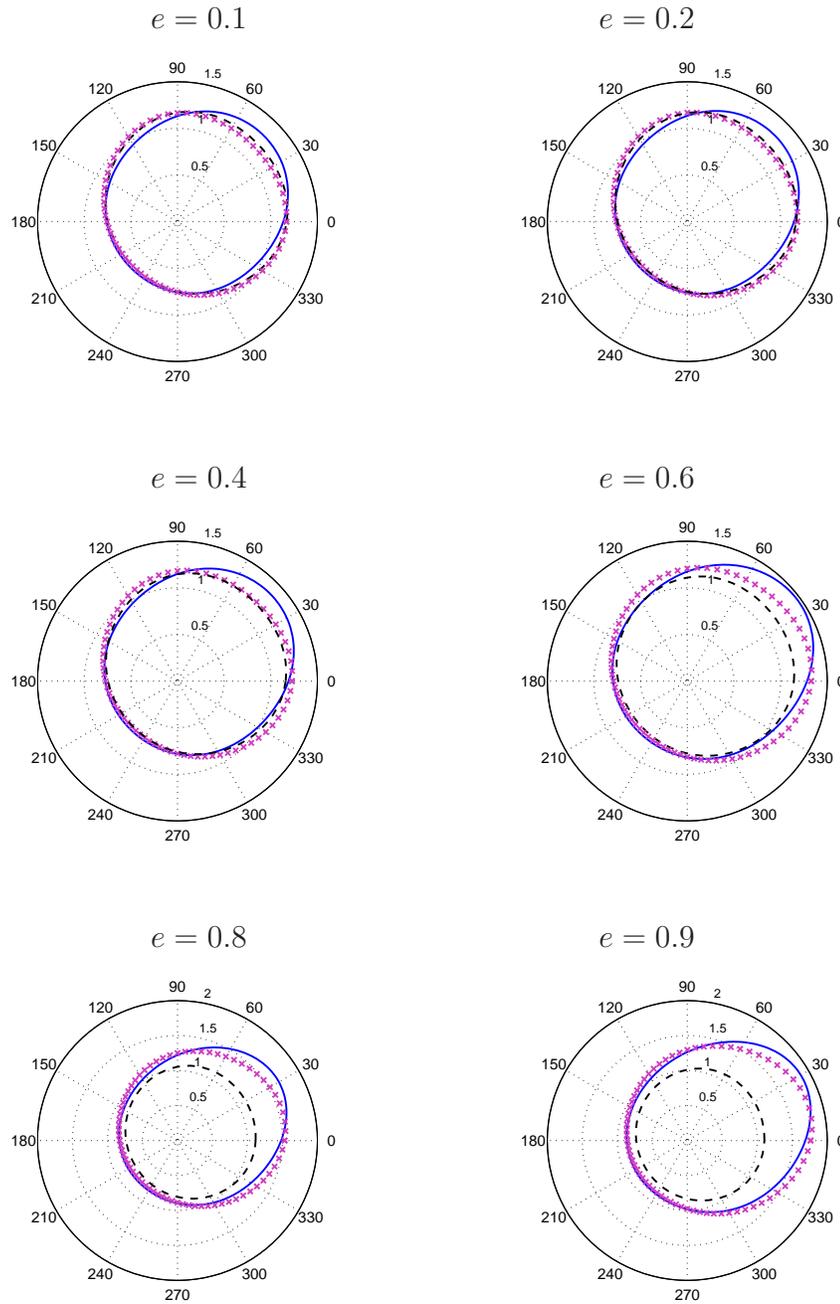


FIG. 2.23: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 1$$

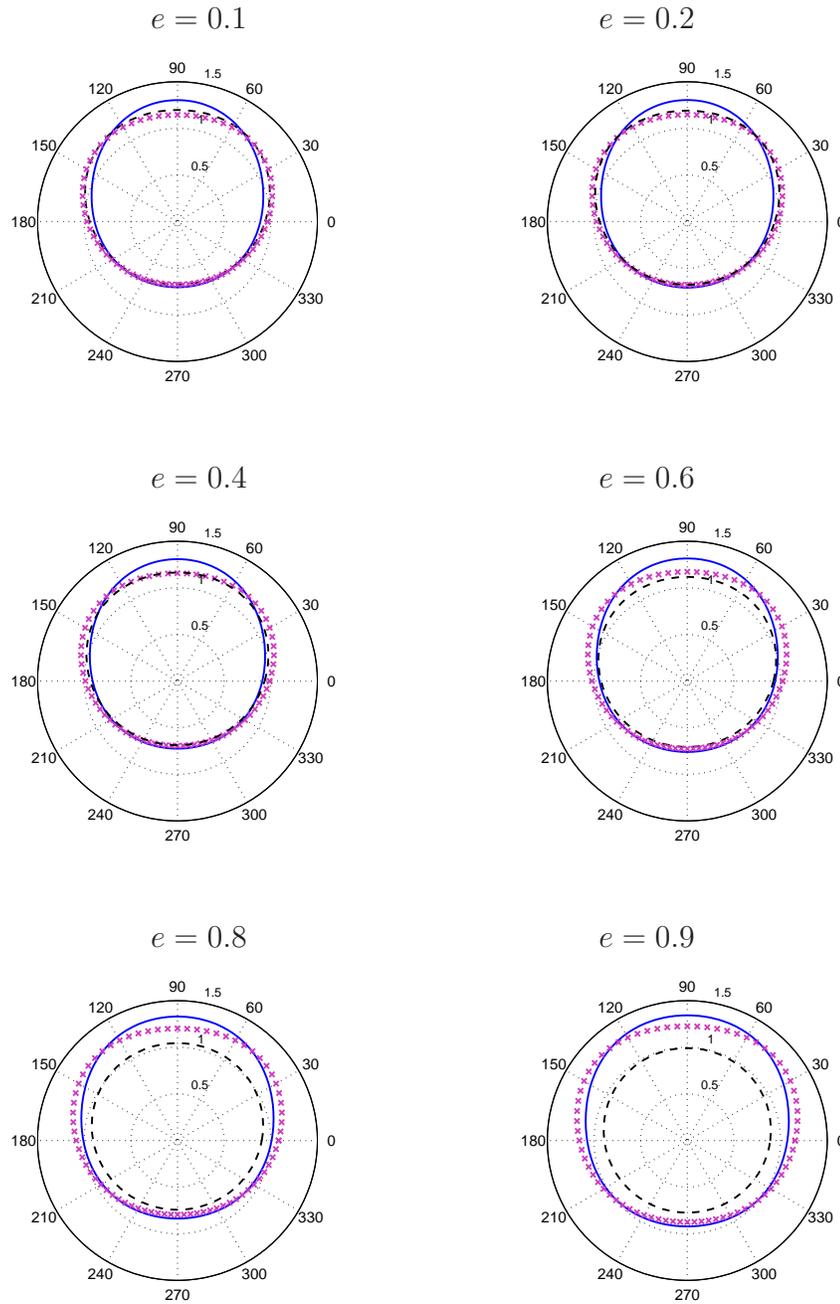


FIG. 2.24: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$ka = 1$$

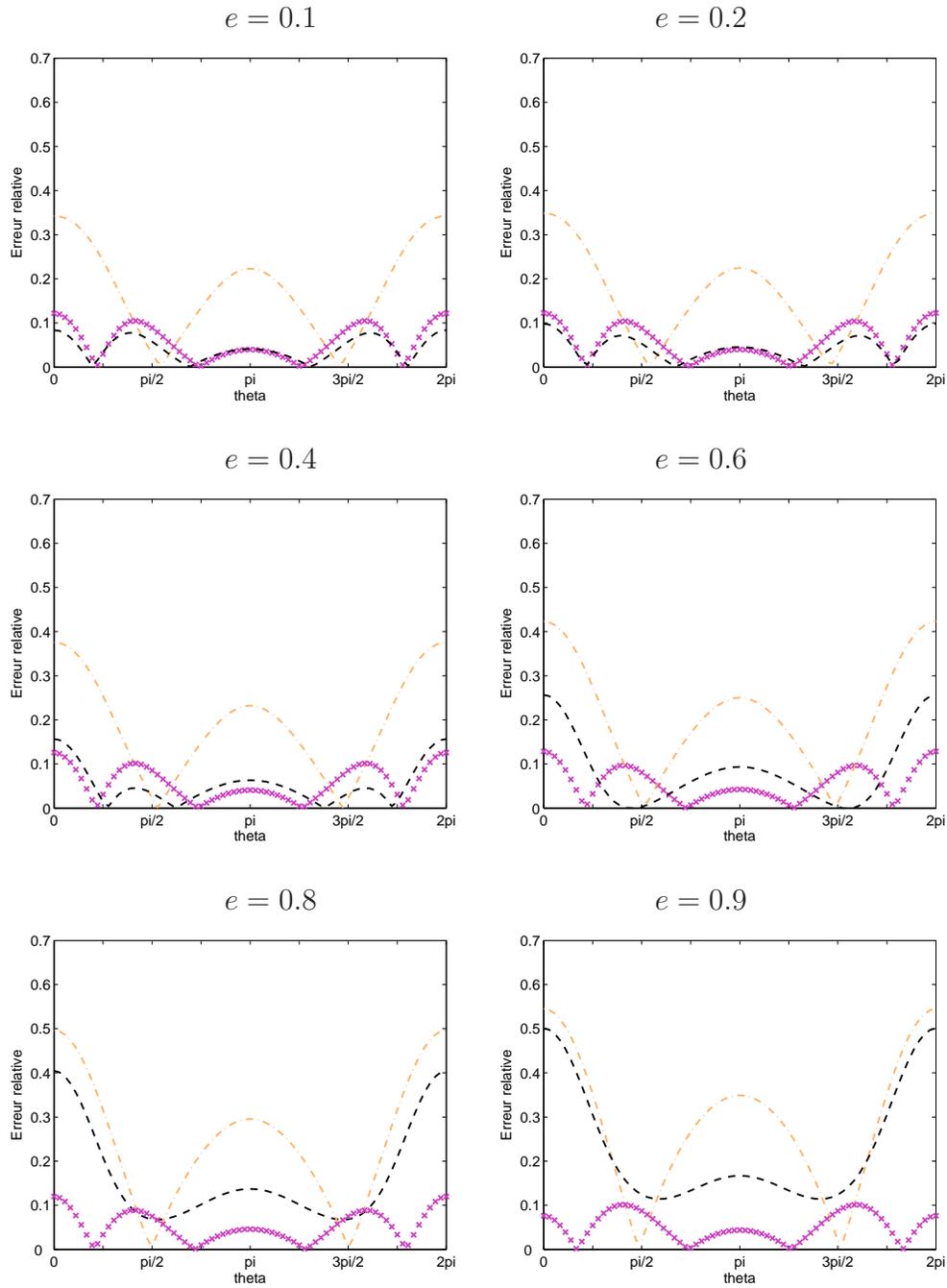


FIG. 2.25: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 1$$

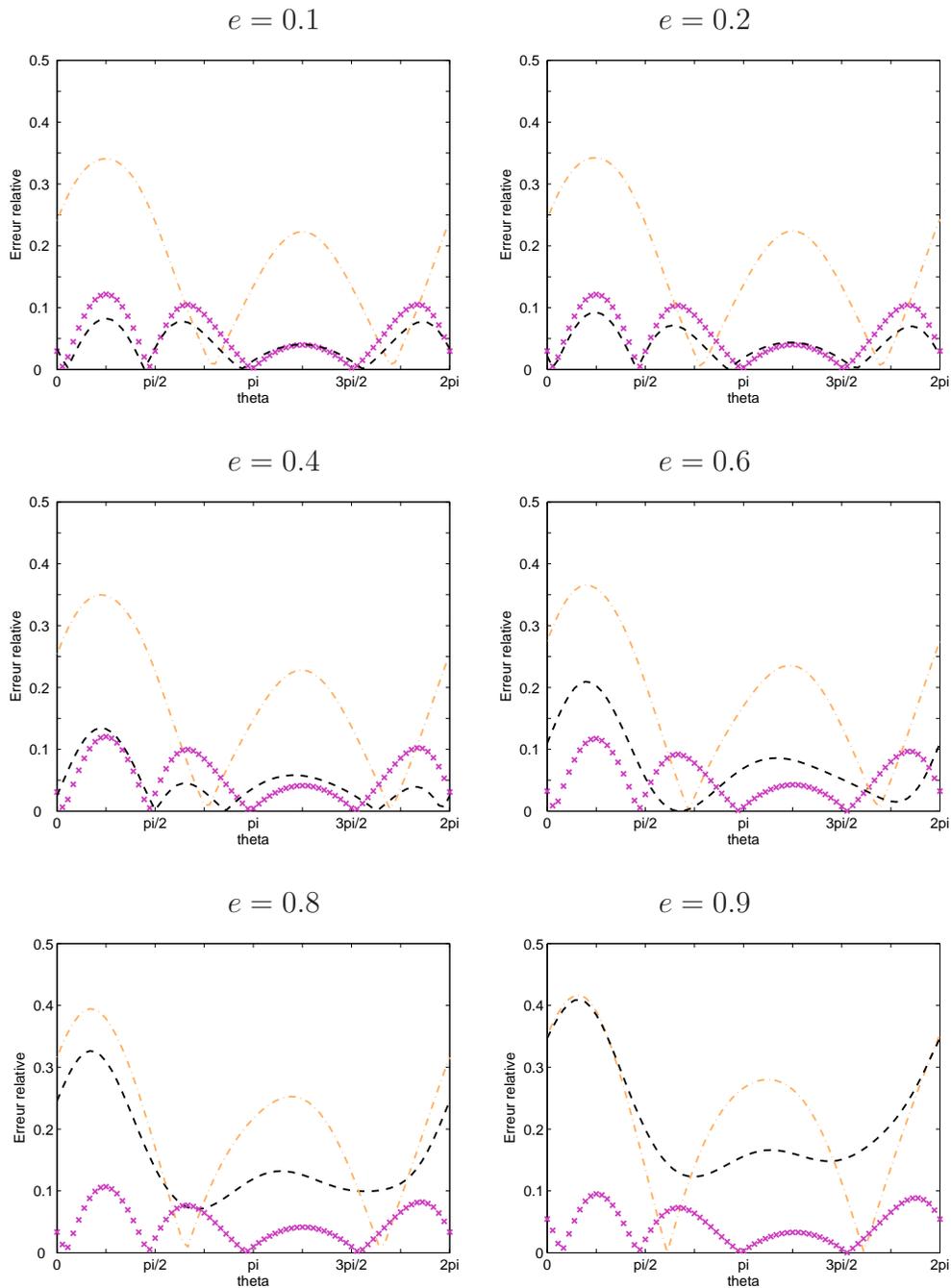


FIG. 2.26: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 1$$

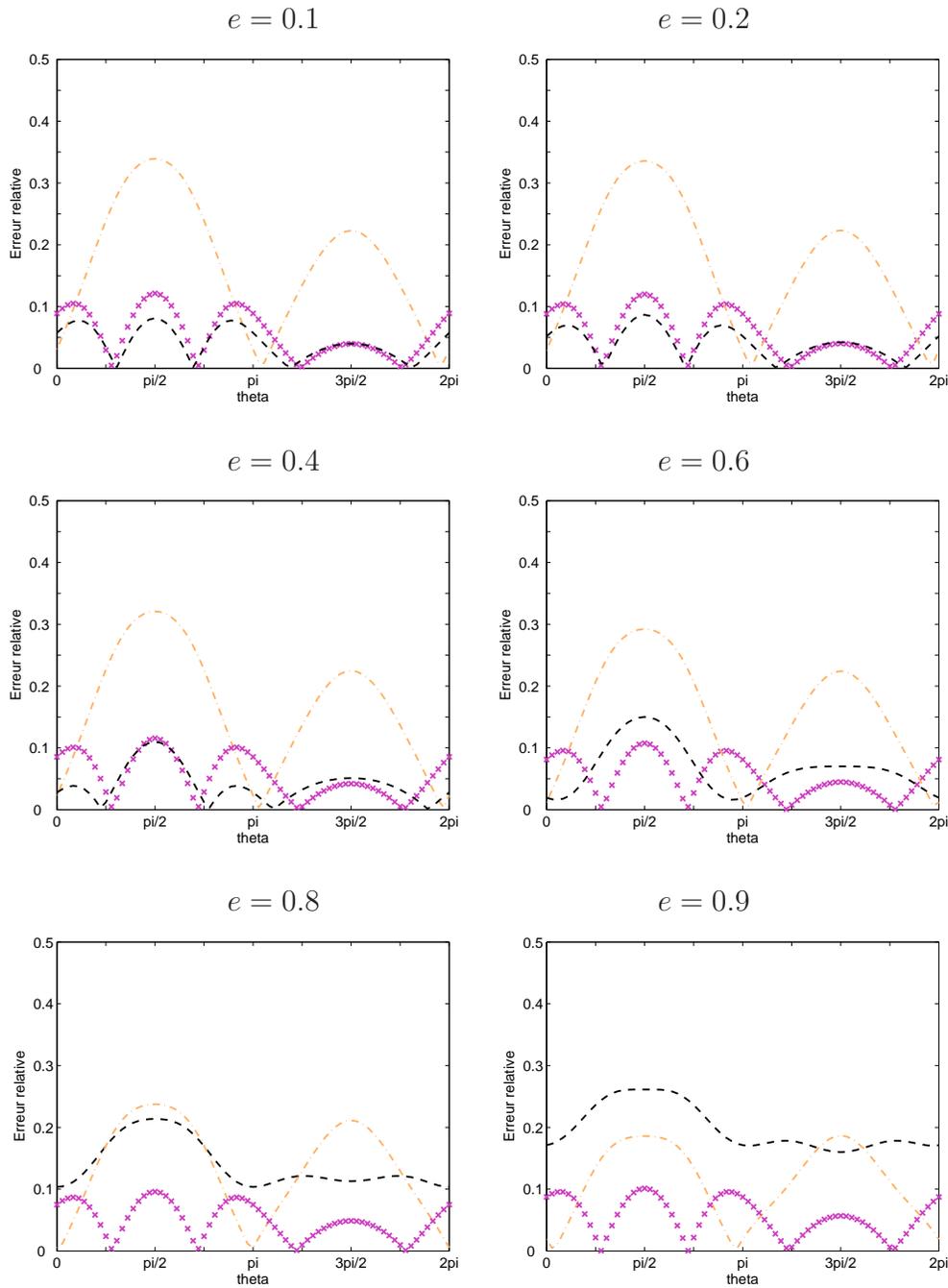


FIG. 2.27: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$ka = 10$$

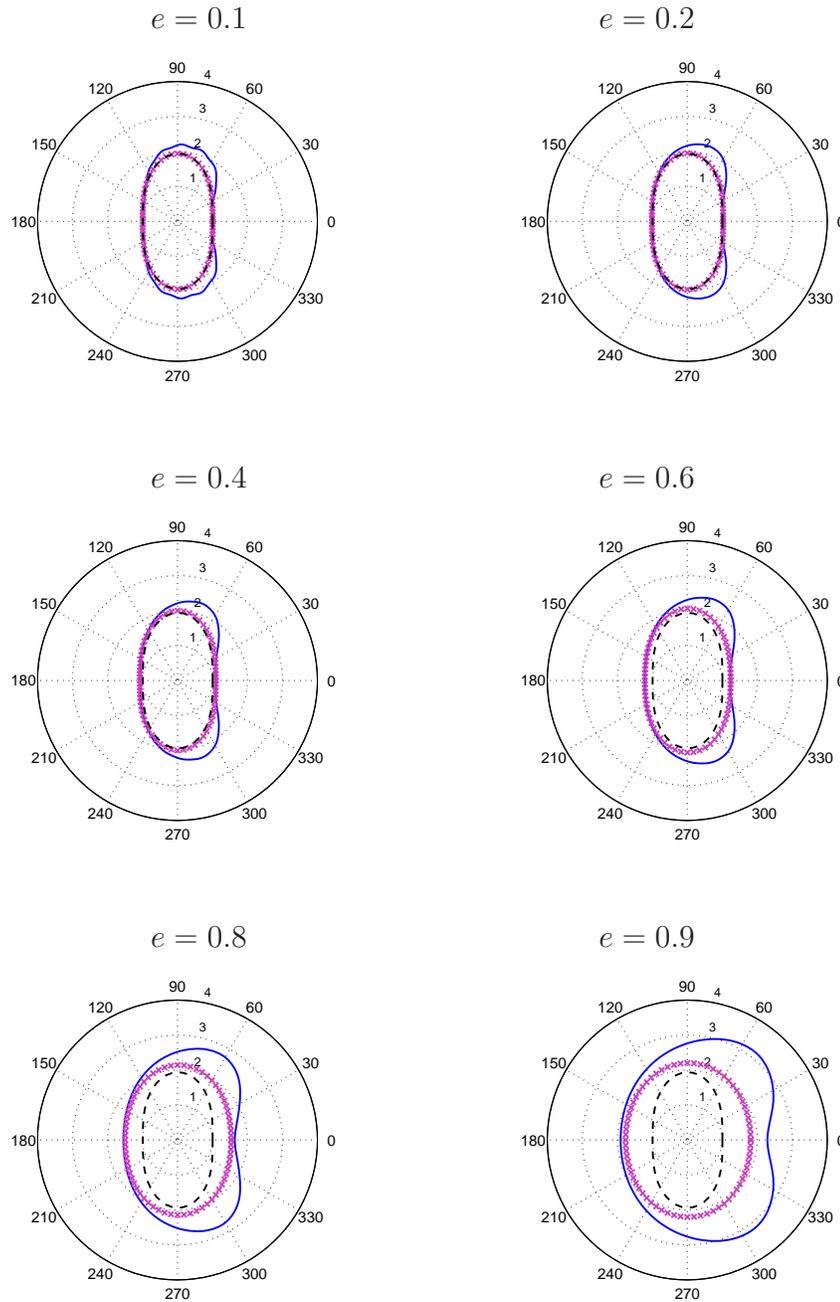


FIG. 2.28: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 10$$

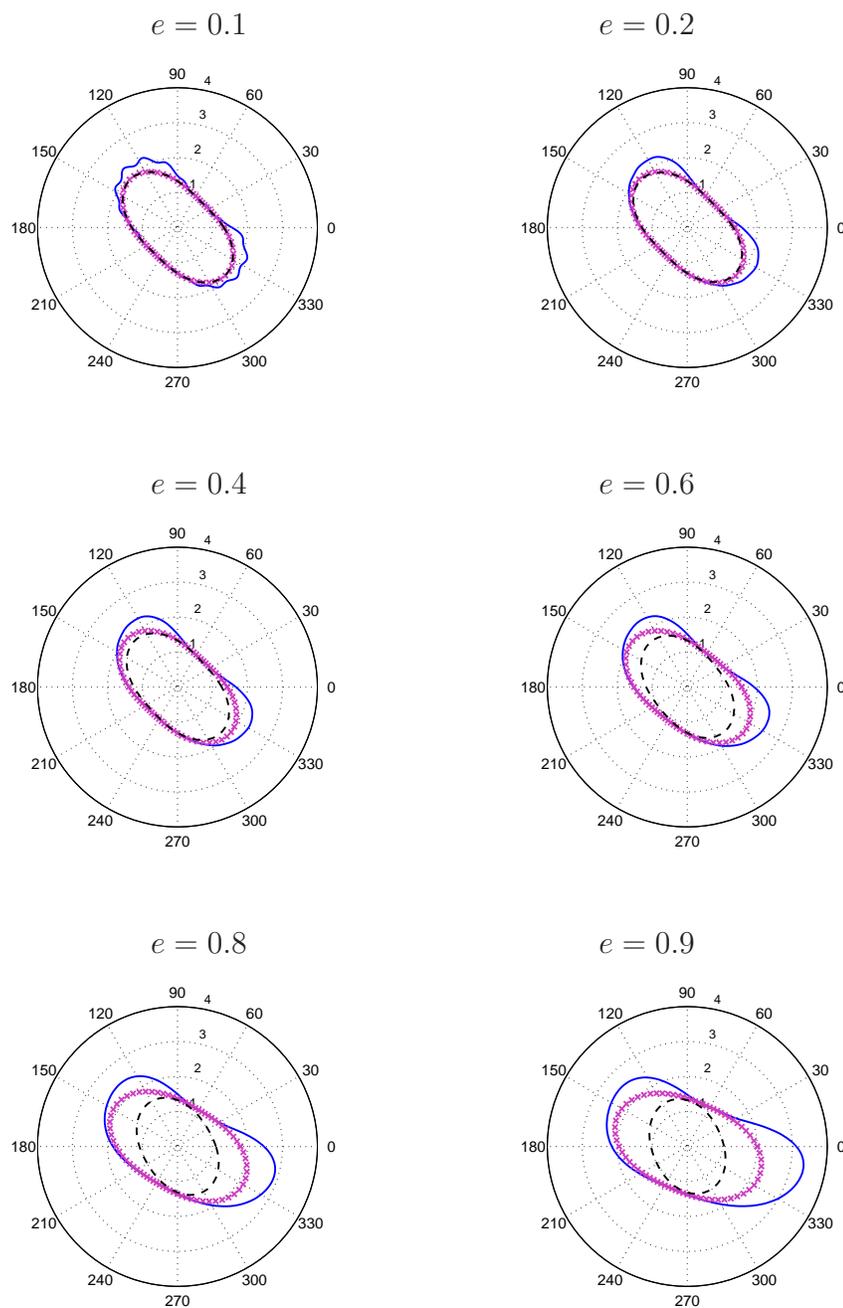


FIG. 2.29: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 10$$

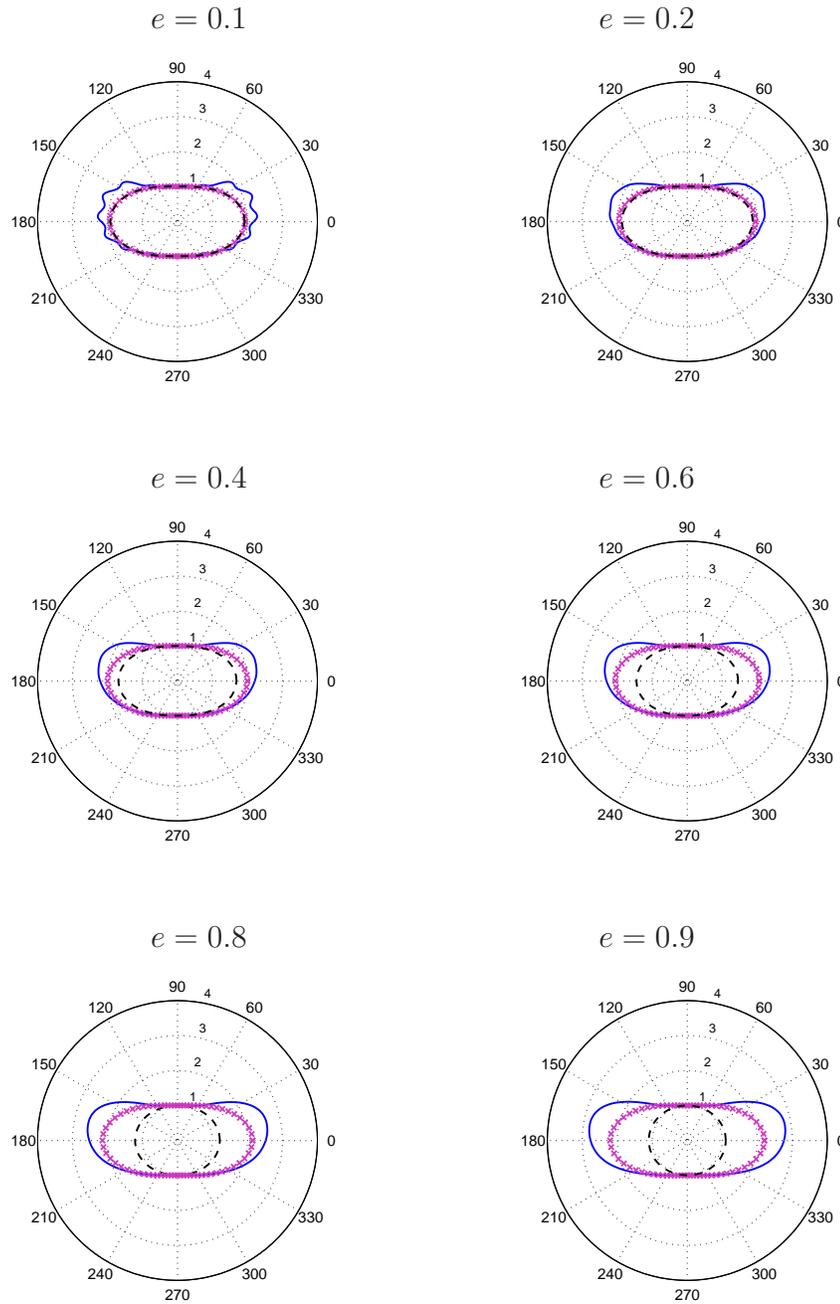


FIG. 2.30: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— — —) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$ka = 10$$

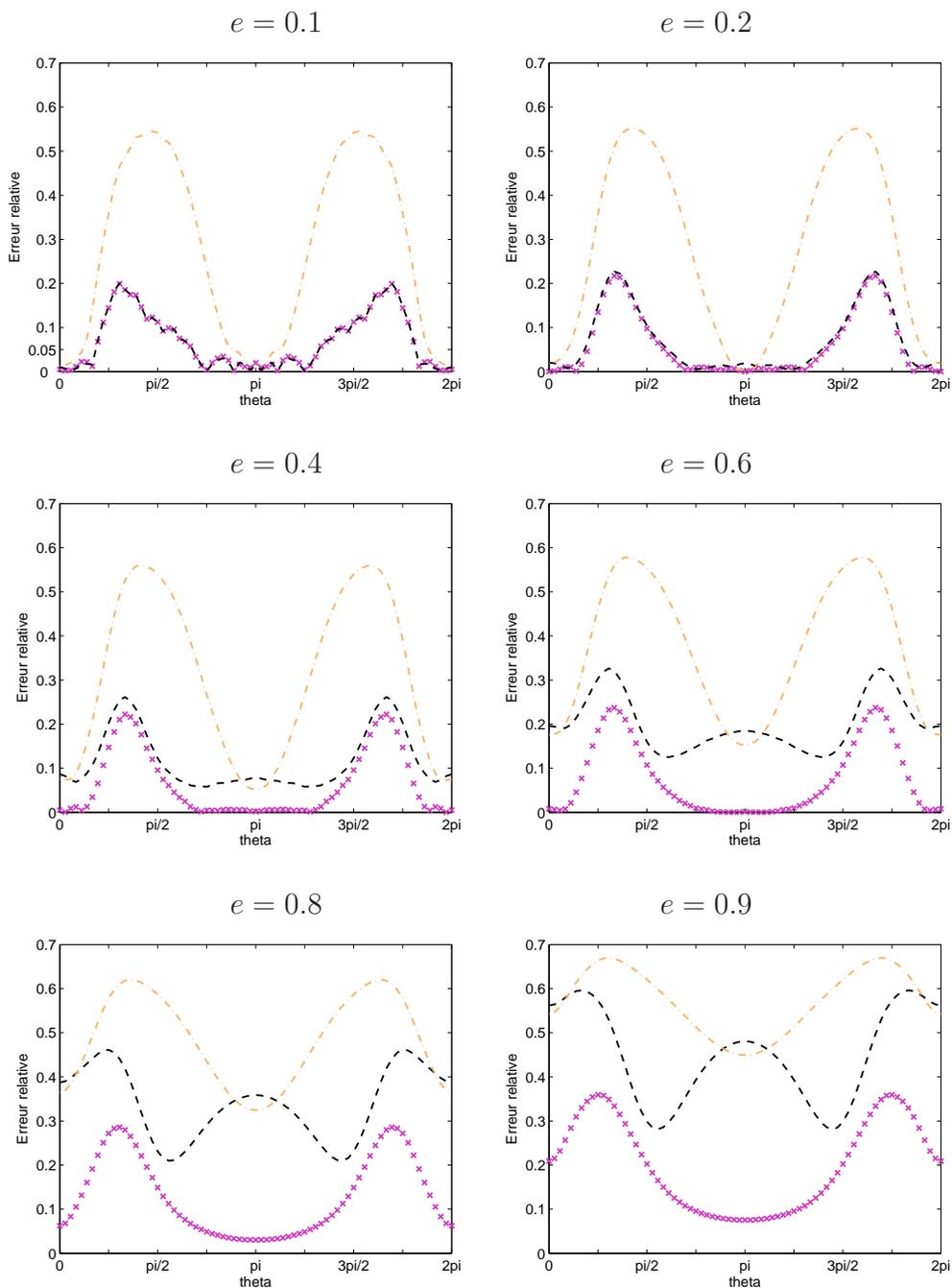


FIG. 2.31: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = 0$.

$$ka = 10$$

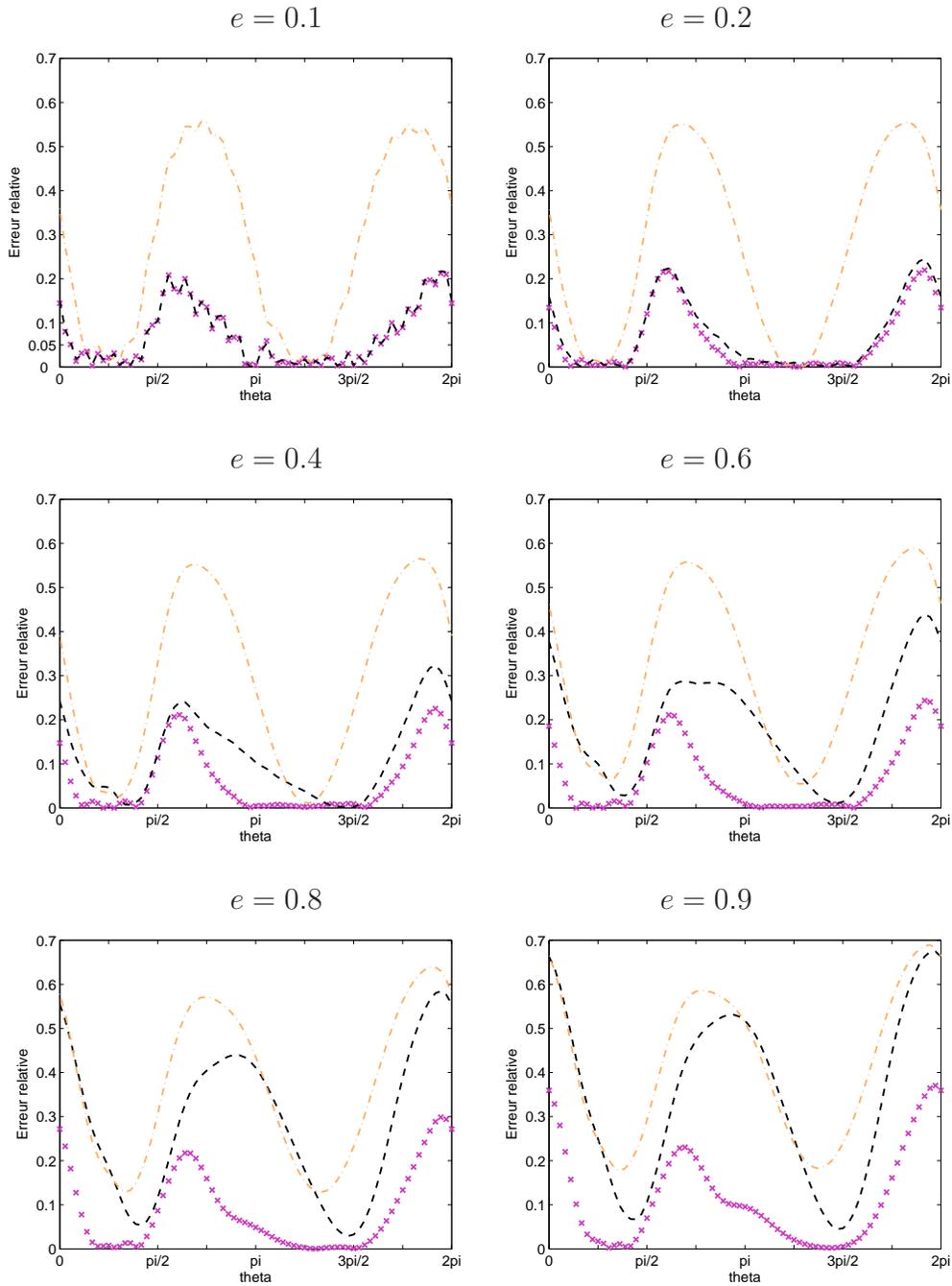


FIG. 2.32: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$ka = 10$$

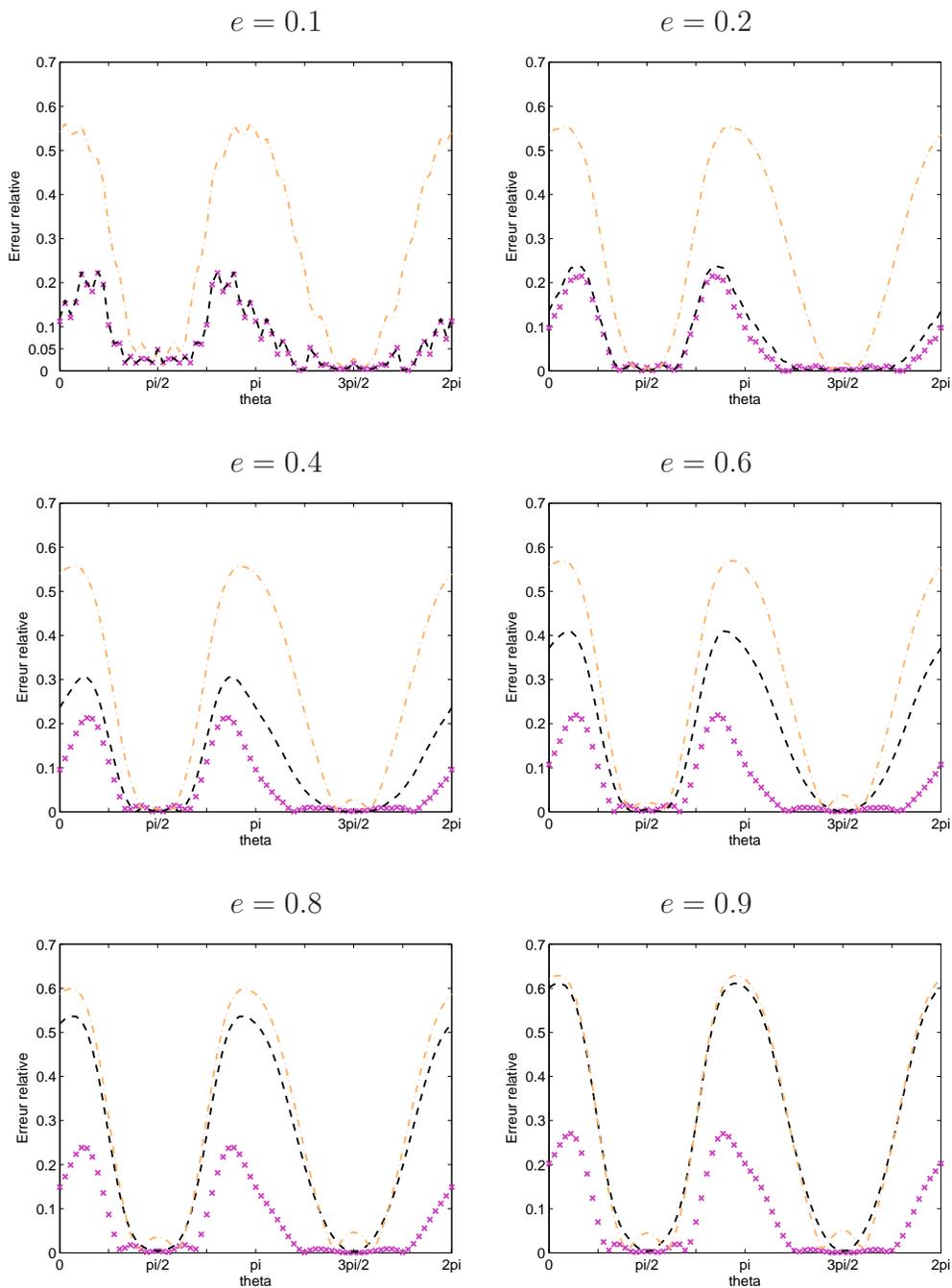


FIG. 2.33: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---), DtN2 (× × ×), BGT2 (---) pour l'angle d'incidence $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

8 Conclusion

Nous avons construit une nouvelle classe de conditions aux limites approchées locales de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre 1 (3.10) et d'ordre 2 (3.13), (3.21) et (3.29) pour des frontières artificielles de géométrie elliptique dans le cadre de la résolution d'un problème de scattering acoustique par un obstacle de forme allongée. Lors de la résolution du problème modal 2D, on observe que pour les premiers modes, la condition DtN1 (resp. DtN2) est plus performante que la condition BGT1 (resp. BGT2), mais lorsque l'on fait l'analyse pour des modes un peu plus grands ($n \geq 3$), on observe que les deux classes de condition ne sont pas précises. On peut noter que pour une excentricité proche de 1 (i.e pour des frontières très allongées), DtN2 est plus performante que BGT2 même si leurs performances ne sont pas satisfaisantes. Le cas du problème de scattering est très différent. Les travaux de Reiner et al. [54] ont montré que la condition BGT2 n'est plus performante lorsque $e \geq 0.6$. On peut observer ici que les conditions DtN2 délivrent, elles, un excellent niveau de précision à basse fréquence quelle que soit la valeur de l'excentricité de l'ellipse formant la frontière artificielle. On peut donc en conclure que les conditions DtN2 construites sont bien adaptées aux obstacles de forme allongée et même très allongée contrairement à la condition BGT2 dont le bon niveau de performance se limite à de petites valeurs d'excentricités. Enfin, les tests numériques effectués montrent bien que la formulation OSRC n'est pas adaptée, pour des régimes de fréquence élevée ($ka > 1$), aux conditions DtN, comme cela a déjà été mis en évidence dans [4, 41].

Chapitre 3

Construction et analyse de performance de conditions aux limites absorbantes de type DtN local pour des problèmes extérieurs d'Helmholtz : cas des frontières ellipsoïdales

Sommaire

1	Introduction	106
2	Préliminaires	107
3	Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales	108
4	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	112
5	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal	118
6	Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	135
7	Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering	141
8	Conclusion	161

1 Introduction

On s'intéresse cette fois à la résolution de l'équation d'Helmholtz dans un domaine borné Ω de dimension 3 dont la frontière intérieure Γ représente le bord d'un obstacle diffractant et la frontière extérieure Σ est absorbante. On s'intéresse donc au problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = Tu & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

où Δ désigne le Laplacien, k le nombre d'onde et n la normale unitaire extérieure à Ω . Sur Γ , le champ incident u est donné, et sur Σ , l'opérateur T caractérise la condition aux limites absorbante.

Les conditions absorbantes les plus utilisées dans le secteur industriel sont les conditions de type Bayliss-Gunzburger-Turkel (BGT) [9]. Ces conditions, écrites dans [54] pour des frontières sphéroïdales prolates, s'écrivent comme suit :

- Condition de Bayliss-Gunzburger-Turkel du 1^{er} ordre (BGT1) :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sqrt{1 - e^2} (ika - 1) u \quad (1.1)$$

- Condition de Bayliss-Gunzburger-Turkel de 2^{ème} ordre (BGT2) :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \sqrt{1 - e^2} \left[(ika - 1) u + \frac{1}{2(1 - ika)} \Delta_{\Gamma} u \right] \quad (1.2)$$

où Δ_{Γ} représente l'opérateur Laplace-Beltrami (3.13).

Remarque 1.1 *On peut remarquer que pour $e = 0$, les deux conditions (1.1) et (1.2) correspondent respectivement aux conditions BGT1 et BGT2 dans le cas de la sphère.*

Dans ce troisième chapitre, on va construire et analyser de nouvelles conditions aux limites de type Dirichlet-to-Neumann locales, pour des frontières de forme sphéroïdale prolata, c'est-à-dire adaptées à des obstacles de forme allongée. On rappelle qu'un sphéroïde prolata est un ellipsoïde de révolution dont l'axe de rotation est son axe principal. Comme dans le cas bidimensionnel, nous allons procéder à une analyse de performance mathématique puis numérique pour le problème modal puis pour le problème de scattering. L'objectif est, comme en 2D, de mesurer l'impact du nombre

d'onde et de l'allongement de la frontière sur la performance des conditions. Les tests de performance seront, dans ce chapitre aussi, réalisés en comparant nos résultats à ceux obtenus dans [54] en appliquant les conditions BGT [9] à frontières de forme sphéroïdale prolatae.

2 Préliminaires

On rappelle que les coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations :

$$\begin{aligned} x &= b \sin \varphi \cos \theta \\ y &= b \sin \varphi \sin \theta \\ z &= a \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\varphi \in [0, \pi[$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Les paramètres a et b représentent respectivement le demi-axe principal et le demi-axe secondaire du sphéroïde Γ et sont définis par :

$$\begin{aligned} a &= f \cosh \xi \\ b &= f \sinh \xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

où ξ désigne un nombre réel strictement positif et f représente la distance interfocale définie par :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.5)$$

Cette paramétrisation permet de représenter un sphéroïde prolatae donné en fixant ξ . On définit aussi l'excentricité e sur la surface d'un sphéroïde prolatae $\{\xi = \xi_0\}$, par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.6)$$

L'excentricité e caractérise l'allongement de la surface ellipsoïdale de l'obstacle. Elle satisfait $0 < e < 1$. Lorsque $e \rightarrow 0$, le sphéroïde prolatae dégénère en une sphère et lorsque $e \rightarrow 1$, le sphéroïde dégénère en un segment de longueur $2f$ sur l'axe z .

Le $mn^{\text{ème}}$ mode sphéroïdal prolatae u_{mn} ($m \leq n$) est défini par [57] :

$$u_{mn} = R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi) S_{mn}(kf, \cos \varphi) \cos m\theta \quad (2.7)$$

où les fonctions $R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi)$ sont les fonctions d'ondes sphéroïdales radiales de troisième espèce du $mn^{\text{ème}}$ mode et les fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ sont les fonctions d'ondes sphéroïdales angulaires du $mn^{\text{ème}}$ mode. Elles sont respectivement solutions des équations différentielles (2.34) et (2.35) données au chapitre 1.

Pour finir, nous introduisons le coefficient r_{mn} qui dépend des fonctions d'onde sphéroïdales radiales de troisième espèce $R_{mn}^{(3)}$, du nombre d'onde ka et de l'excentricité e :

$$r_{mn} = \frac{\frac{\partial R_{mn}^{(3)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})} ; \quad m \geq 0 \text{ et } n \geq m \quad (2.8)$$

Par abus de notations, nous désignerons dans tout ce qui suit $\frac{\partial R_{mn}^{(3)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})$ par $R_{mn}^{(3)'}(eka, e^{-1})$.

3 Dérivation des nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales

Pour la construction des nouvelles conditions de type Dirichlet-to-Neumann (DtN) locales appliquées à des obstacles de forme sphéroïdale prolata, nous allons utiliser la même approche que dans le cas bidimensionnel. Nous allons partir de conditions aux limites de type Robin avec des coefficients inconnus qui dépendent des valeurs caractéristiques sphéroïdales prolates. Nous imposons aux conditions qu'elles soient exactes pour les premiers modes u_{mn} . Ainsi, les coefficients recherchés sont l'unique solution d'un système linéaire algébrique. Nous allons construire une condition d'ordre un Eq. (3.9) puis une condition d'ordre deux Eq. (3.12).

3.1 La condition DtN d'ordre 1 (DtN1)

La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre un (DtN1), définie sur la surface sphéroïdale prolata $\{\xi = \xi_0\}$ est une condition de Robin qui est exacte pour le premier mode sphéroïdal prolata u_{00} .

Proposition 3.1 *La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre un (DtN1), définie sur la surface sphéroïdale prolata $\xi = \xi_0$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} r_{00} u \quad (3.9)$$

Démonstration :

Nous considérons une condition de type Robin qui est exacte pour le premier mode u_{00} donné par Eq. (2.7). Nous posons donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = Au$$

et la constante A doit satisfaire :

$$\sinh \xi \frac{\partial R_{00}^{(3)}}{\partial \xi}(kf, \cosh \xi) S_{00}(kf, \cos \theta) = A \left(R_{00}^{(3)}(kf, \cosh \xi) S_{00}(kf, \cos \theta) \right) \quad (3.10)$$

Ainsi, si $\xi = \xi_0$, en injectant Eqs. (2.4), (2.5), (2.6) dans Eq. (3.10), nous en déduisons la valeur de A qui convient, à savoir :

$$A = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} r_{00} \quad (3.11)$$

où r_{00} est défini par Eq. (2.8) pour $(m, n) = (0, 0)$.

□

3.2 Les conditions DtN d'ordre 2 (DtN2)

Comme dans le cas bidimensionnel, nous construisons la condition d'ordre 2 DtN2 à partir d'une condition de Robin qui est exacte des deux premiers modes de u_{mn} : u_{00} et u_{01} (cf (2.7) pour leur définition).

Proposition 3.2 *La condition aux limites locale de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre deux (DtN2), définie sur la surface sphéroïdale prolatae $\{\xi = \xi_0\}$, est donnée par :*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(\lambda_{01} - \lambda_{00}) e} \left[(\lambda_{01} r_{01} - \lambda_{00} r_{00} - (r_{00} - r_{01}) (eka)^2 \cos^2 \varphi) u + (r_{00} - r_{01}) \Delta_{\Gamma} u \right] \quad (3.12)$$

où Δ_{Γ} représente l'opérateur de Laplace-Beltrami, défini par

$$\Delta_{\Gamma} u = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (3.13)$$

Les coefficients r_{mn} ont été définis au préalable par Eq. (2.8).

Démonstration : Le but est de construire, à partir d'une condition de Robin à coefficients inconnus, une condition exacte pour les deux premiers modes u_{00} et u_{01} . On pose donc :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = A u + B (\Delta_{\Gamma} - (eka)^2 \cos^2 \varphi) u \quad (3.14)$$

où A et B sont des constantes (indépendantes de φ) à déterminer.

Il faut noter que, à l'inverse de la condition aux limites DtN2 construite pour des frontières sphériques [41], cette condition dépend de la variable angulaire φ . Cette dépendance est nécessaire pour la construction d'une condition aux limites symétrique puisque l'on rappelle que les fonctions d'onde sphéroïdales angulaires S_{mn} satisfont l'équation différentielle donnée par Eq. (2.35) du chapitre 1. Il est alors simple de vérifier que, pour tous les modes u_{mn} , on a :

$$\Delta_{\Gamma} u_{mn} = (-\lambda_{mn} + (eka)^2 \cos^2 \varphi) u_{mn} \quad (3.15)$$

Afin de déterminer les constantes A et B , on utilise le fait que, en $\xi = \xi_0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{00}}{\partial \xi} = A u_{00} + B (\Delta_\Gamma - (eka)^2 \cos^2 \varphi) u_{00} \\ et \\ \frac{\partial u_{01}}{\partial \xi} = A u_{01} + B (\Delta_\Gamma - (eka)^2 \cos^2 \varphi) u_{01} \end{cases} \quad (3.16)$$

Ainsi, en appliquant Eq. (3.15) pour $(m, n) = (0, 0)$ et $(m, n) = (0, 1)$, il vient que (A, B) est la solution unique du système linéaire 2×2 suivant :

$$\begin{cases} A - B \lambda_{00} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} r_{00} \\ A - B \lambda_{01} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} r_{01} \end{cases} \quad (3.17)$$

où les coefficients r_{mn} sont donnés par Eq. (2.8).

La condition aux limites DtN2 donnée par Eq. (3.12) découle directement de la résolution du système (3.17) qui conduit aux coefficients A et B donnés par (3.14).

□

Il est important de faire quelques observations concernant ces nouvelles conditions Dirichlet-to-Neumann :

- Les conditions (3.9), (3.12) sont dites *locales* car elles résultent d'un processus de localisation (par troncature) de l'opérateur DtN global dans [31, 29]. Dans [31] (cf [45] pour le cas de la sphère), l'opérateur DtN exact est construit dans le cas d'un sphéroïde prolata. C'est une condition aux limites non réfléchissante, qui en coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) s'écrit sur la frontière artificielle en $\xi = \xi_0$:

$$Tu = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \frac{\sinh \xi_0 R_{mn}^{(3)'}(kf, \cosh \xi_0)}{R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u(\xi_0, \theta', \varphi') S_{mn}^{(1)}(kf, \cos \theta) S_{mn}^{(1)}(kf, \cos \theta') \cos m(\theta - \theta')) d\theta' d\varphi' \right] \quad (3.18)$$

Les fonctions $R_{mn}^{(3)'}(kf, \cosh \xi_0)$ et $S_{mn}^{(1)}(kf, \cos \theta)$ ont été introduites au chapitre 1. Le signe ' après la deuxième somme indique que, lorsque $m = 0$, les termes sont multipliés par $\frac{1}{2}$.

Le caractère local de ces conditions est d'un grand intérêt d'un point de vue numérique. En effet, l'incorporation de ces conditions dans un code d'éléments finis introduit uniquement une matrice de masse et une matrice de rigidité définies sur la frontière extérieure. De plus, les coefficients λ_{mn} et r_{mn} peuvent être calculés une fois pour toutes au début des calculs.

- Il faut relever que lorsque $e = 0$ (le sphéroïde prolata est une sphère), les conditions (3.9) et (3.12) sont identiques aux conditions DtN tridimensionnelles

construites dans le cas d'une frontière sphérique de rayon R [39, 41], qui sont données par :

- Pour la condition DtN1 : $\frac{\partial u}{\partial r} = k \frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}$,
- Pour la condition DtN2 :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = k \left[\frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)} u + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)} - \frac{h_1^{(1)'}(kR)}{h_1^{(1)}(kR)} \right) \Delta_{\Gamma} u \right]$$

En effet, en utilisant les comportements asymptotiques des fonctions d'ondes sphéroïdales $R_{mn}^{(3)}$ ainsi que celui des valeurs propres sphéroïdales prolates λ_{mn} (cf [1], [20]) lorsque $e \rightarrow 0$, on a :

- $\lambda_{00}(eka) \rightarrow 0$ et $\lambda_{01}(eka) \rightarrow 2$ (cf Prop. (2.4) du chapitre 1).
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n \geq m, \frac{r_{mn}}{e} \sim ka \frac{h_n^{(1)'}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}$ (pour plus de détails cf. Eqs. (4.20) et (4.24) ultérieurement dans ce chapitre).

De plus, lorsque $e \rightarrow 0$, il est évident que $\sqrt{1-e^2} \rightarrow 1$, $\frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \rightarrow 0$ et enfin, le demi axe principal a du sphéroïde tend vers le rayon R d'une sphère.

On obtient finalement que lorsque $e \rightarrow 0$, les conditions DtN1 (3.9) et DtN2 (3.12) sont respectivement équivalentes aux conditions suivantes :

- Pour la condition DtN1 : $\frac{\partial u}{\partial \xi} = kR \frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}$,
- Pour la condition DtN2 :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = kR \left[\frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)} u + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0^{(1)'}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)} - \frac{h_1^{(1)'}(kR)}{h_1^{(1)}(kR)} \right) \Delta_{\Gamma} u \right]$$

Or, comme $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi}$, on retrouve bien que lorsque $e \rightarrow 0$, la condition DtN1 (resp. DtN2) construite pour des frontières sphéroïdales prolates est équivalente à la condition DtN1 (resp. DtN2) construite pour des frontières sphériques.

• Enfin, la construction de conditions approchées DtN locales d'ordre supérieur à deux est inappropriée pour l'utilisation de méthodes d'éléments finis conventionnelles car elles requièrent une régularité supérieure à C^0 . C'est pourquoi nous ne considérons que les deux conditions (3.9) et (3.12) dans ce qui suit.

Afin d'analyser mathématiquement puis numériquement la performance des conditions Dirichlet-to-Neumann (3.9), (3.12) construites pour le problème modal (dit problème du radiateur) puis pour le problème de scattering, et, afin d'évaluer l'effet du nombre d'onde ka et celui de l'excentricité de l'ellipse e sur la performance de ces conditions, nous allons comme dans le cas bidimensionnel utiliser *l'impédance spécifique modifiée*. De la même manière, nous effectuons cette analyse dans un cadre

OSRC [46] qui est adapté au régime basse fréquence [2]. Dans le système de coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) , l'impédance spécifique s'écrit [54] :

$$Z = \frac{i\sqrt{1-e^2}ka u}{\frac{\partial u}{\partial \xi}} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (3.19)$$

4 Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal

Dans un premier temps, nous allons effectuer l'analyse mathématique de performance des conditions aux limites DtN locales que nous venons de construire dans le cas du problème modal, c'est-à-dire mode par mode. Pour ce faire, il faut commencer par exprimer l'impédance spécifique (3.19) pour un mode mn à la surface du sphéroïde prolata Γ c.a.d. lorsque $\xi = \xi_0$ (cf Eq. (64), p. 3645 dans [54]) :

$$Z_{mn}^{\text{ex3}} = \frac{i\sqrt{1-e^2}ka R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})}{\frac{\partial}{\partial \xi} (R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1}))} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{ieka}{r_{mn}} \quad (4.20)$$

où les coefficients r_{mn} ont été définis par Eq. (2.8).

Les comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow 0$ et $ka \rightarrow +\infty$ de Z_{mn}^{ex3} sont connus [54] et on commence par les rappeler :

Proposition 4.1 *Le comportement asymptotique de Z_{mn}^{ex3} lorsque $ka \rightarrow 0$ est donné par :*

$$Z_{mn}^{\text{ex3}} \sim \left(\frac{(ka)^{n+1}}{(n+1)(2n-1)!!} \right)^2 - i \frac{ka}{n+1} \quad (4.21)$$

où la double factorielle est définie par :

$$n!! = \begin{cases} 1.3.5\dots(n-2)n & \text{pour } n \geq 0 \text{ impair} \\ 2.4.6\dots(n-2)n & \text{pour } n \geq 0 \text{ pair} \\ 1 & \text{pour } n = -1, 0 \end{cases}$$

Le comportement asymptotique de Z_{mn}^{ex3} lorsque $ka \rightarrow +\infty$ est, quant à lui, donné par :

$$Z_{mn}^{\text{ex3}} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad (4.22)$$

Démonstration : Ces deux comportements ont déjà été démontrés dans [54], nous allons cependant en rappeler la démonstration car elle nécessite d'introduire certains résultats utiles pour la suite.

- Lorsque $ka \rightarrow 0$:
On rappelle que :

$$Z_{mn}^{ex3} = \frac{i\sqrt{1-e^2}kaR_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})}{\left. \frac{\partial}{\partial \xi} (R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})) \right|_{\xi=\xi_0}} \quad (4.23)$$

On va tout d'abord utiliser le comportement asymptotique, lorsque $ka \rightarrow 0$, des fonctions d'ondes sphéroïdales radiales $R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})$. D'après [20] on sait que :

$$Z_{mn}^{ex3} \sim \frac{ih_n^{(1)}(ka)}{h_n'^{(1)}(ka)} \quad (4.24)$$

où les fonctions $h_n^{(1)}(ka)$ désignent les fonctions de Hankel sphériques (cf Chap. 1).

Or, on rappelle (cf Chap. 1) que :

$$\begin{aligned} h_n'^{(1)}(ka) &= \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka) \\ \text{et} \\ h_0^{(1)}(ka) &= -i\frac{\exp(ika)}{ka} \end{aligned} \quad (4.25)$$

De plus, d'après [1],

$$h_n^{(1)}(ka) \sim \frac{(ka)^n}{(2n+1)!!} - i\frac{(2n+1)!!}{(ka)^{n+1}} \quad ; \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (4.26)$$

et donc,

$$\frac{h_{n+1}^{(1)}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \sim \frac{2n+1}{ka} - i\left(\frac{(ka)^n}{(2n+1)!!}\right)^2 \quad (4.27)$$

Grâce à ces propriétés successives, on obtient :

$$Z_{mn}^{ex3} \sim \left(\frac{(ka)^{n+1}}{(n+1)(2n-1)!!}\right)^2 - i\frac{ka}{n+1} \quad ; \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (4.28)$$

- Lorsque $ka \rightarrow +\infty$:
On sait que :

$$Z_{mn}^{ex3} \sim \frac{ih_n^{(1)}(ka)}{h_n'^{(1)}(ka)} \quad (4.29)$$

et

$$h_n'^{(1)}(ka) = \frac{n}{ka}h_n^{(1)}(ka) - h_{n+1}^{(1)}(ka) \quad (4.30)$$

De plus, d'après [54] on a les propriétés suivantes lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$h_n^{(1)}(ka) = \frac{(-1)^n}{ka} \left(\frac{n(n+1)}{2ka} - i \right) \exp \left(i \left(ka + \frac{n\pi}{2} \right) \right) \quad (4.31)$$

ce qui implique :

$$\frac{h_{n+1}^{(1)}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \sim -i + \frac{n+1}{ka} \quad (4.32)$$

D'où le résultat :

$$Z_{mn}^{ex3} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad ; \text{ lorsque } ka \rightarrow +\infty \quad (4.33)$$

□

4.1 Définition des impédances spécifiques modales approchées

Pour étudier la performance des conditions aux limites absorbantes DtN que nous avons construites (3.9), (3.12), nous allons calculer les impédances spécifiques modales approchées qui leur correspondent afin de les comparer à l'impédance spécifique modale exacte (4.20). Nous rappelons (cf Chap 2) qu'il suffit pour cela de remplacer $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ par la condition DtN dans l'expression (3.19) et de calculer cette impédance pour u_{mn} au lieu de u . Nous obtenons les impédances spécifiques approchées suivantes :

Proposition 4.2 *Les impédances spécifiques approchées correspondant respectivement aux conditions approchées $DtN1$ (3.9) et $DtN2$ (3.12), pour le $mn^{\text{ème}}$ mode, sur la surface du sphéroïde prolate en $\xi = \xi_0$, sont données par :*

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} = \frac{ieka}{r_{00}} \quad (4.34)$$

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} = \frac{ieka(\lambda_{00} - \lambda_{01})}{(\lambda_{00}r_{01} - \lambda_{01}r_{00}) - \lambda_{mn}(r_{01} - r_{00})} \quad (4.35)$$

Démonstration : Comme dans le cas bidimensionnel, l'expression des impédances approchées $Z_{mn}^{DtN1,3D}$ et $Z_{mn}^{DtN2,3D}$ est obtenue en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ respectivement par l'opérateur DtN1 (3.9) l'opérateur DtN2 (3.12) et nous appliquons ces impédances à u_{mn} au lieu de u . On obtient immédiatement les deux résultats (4.34)-(4.35) donnés ci-dessus.

□

Remarque 4.3 Les impédances spécifiques approchées (4.34) et (4.35) peuvent s'écrire en fonction de l'impédance exacte modale donnée par (4.20). En effet, on a :

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{\text{ex}3} \quad (4.36)$$

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} = \frac{\lambda_{01} - \lambda_{00}}{(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{1}{Z_{00}^{\text{ex}3}} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \frac{1}{Z_{01}^{\text{ex}3}}} \quad (4.37)$$

L'impédance DtN2 (4.35) coïncide avec $Z_{00}^{\text{ex}3}$ pour le mode $(m, n) = (0, 0)$ et avec $Z_{01}^{\text{ex}3}$ pour le mode $(m, n) = (0, 1)$ comme prévu par construction.

Remarque 4.4 Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà remarqué que lorsque $e \rightarrow 0$ (le sphéroïde dégénère en une sphère), les conditions DtN construites sont équivalentes à celles obtenues dans le cas d'une frontière de forme sphérique de rayon R [41]. De ce fait, lorsque $e \rightarrow 0$, les impédances spécifiques approchées correspondantes sont équivalentes à celles obtenues dans le cas d'une frontière sphérique de rayon R par [41], qui sont données par :

$$Z_{n,\text{sphère}}^{DtN1,3D} = Z_{0,\text{sphère}}^{3,\text{exact}}$$

$$Z_{n,\text{sphère}}^{DtN1,3D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{0,\text{sphère}}^{3,\text{exact}}} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{Z_{1,\text{sphère}}^{3,\text{exact}}} - \frac{1}{Z_{0,\text{sphère}}^{3,\text{exact}}} \right)}$$

L'impédance $Z_{n,\text{sphère}}^{3,\text{exact}}$ est définie par :

$$Z_{n,\text{sphère}}^{3,\text{exact}} = \frac{i h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)'}(kR)} \quad (4.38)$$

les fonctions $h_n^{(1)}(kR)$ désignent les fonctions de Hankel sphériques (cf Chap. 1).

Afin d'évaluer la performance des conditions DtN que nous avons construites (3.9), (3.12), nous allons comparer le comportement asymptotique de leurs impédances spécifiques approchées respectives à ceux obtenus pour l'impédance spécifique exacte lorsque $ka \rightarrow 0$ (régime basse fréquence, (4.21)) et lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (régime haute fréquence, (4.22)).

4.2 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow 0$

La proposition suivante donne le comportement asymptotique des différentes impédances spécifiques approchées DtN lorsque $ka \rightarrow 0$ (basse fréquence) :

Proposition 4.5 Le comportement asymptotique, lorsque $ka \rightarrow 0$, des impédances spécifiques approchées DtN pour le $mn^{\text{ème}}$ mode est donné par :

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{ex3} \sim (ka)^2 - ika \quad , \text{ pour } m \geq 0 \text{ et } n \geq m \quad (4.39)$$

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim \begin{cases} (ka)^2 - ika & , \text{ pour } (m, n) = (0, 0) \\ \frac{(ka)^4}{2} - i \frac{ka}{2} & , \text{ pour } (m, n) = (0, 1) \\ -2 \frac{n(n+1) - 2}{(n(n+1) + 2)^2} (ka)^2 - i \frac{2ka}{n(n+1) + 2} & , \text{ pour } (m, n) \neq (0, 0), (0, 1) \end{cases} \quad (4.40)$$

Démonstration : Le comportement asymptotique de $Z_{mn}^{DtN1,3D}$ lorsque $ka \rightarrow 0$ est rapide à démontrer. En effet, nous avons remarqué que $Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{ex3}$.

Le comportement de Z_{mn}^{ex3} lorsque $ka \rightarrow 0$ est énoncé à la proposition 4.1 (cf Eq. (4.21)) et il en découle immédiatement que :

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{ex3} \sim \left(\frac{(ka)}{1(-1)!!} \right)^2 - ika = -ika + (ka)^2 \quad (4.41)$$

Le comportement asymptotique de l'impédance $Z_{mn}^{DtN2,3D}$ lorsque $ka \rightarrow 0$ est moins immédiat et nécessite quelques calculs. On rappelle que :

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} = \frac{ieka(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{R_{00}'^{(3)}(eka, e^{-1})}{R_{00}^{(3)}(eka, e^{-1})} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \frac{R_{01}'^{(3)}(eka, e^{-1})}{R_{01}^{(3)}(eka, e^{-1})}} \quad (4.42)$$

D'après les propriétés utilisées pour le comportement de Z_{mn}^{ex3} , il vient successivement que :

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{DtN2,3D} &\sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{h_0'^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \frac{h_1'^{(1)}(ka)}{h_1^{(1)}(ka)}} \\ &\sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{h_1^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \left(\frac{1}{ka} - \frac{h_2^{(1)}(ka)}{h_1^{(1)}(ka)} \right)} \\ &\sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \left(\frac{1}{ka} - i \right) + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \left(-\frac{2}{ka} - i \frac{(ka)^2}{9} \right)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

De plus, d'après C. Flammer [20], on connaît le comportement des valeurs propres $\lambda_{mn}(eka)$ lorsque $ka \rightarrow 0$:

$$\lambda_{mn}(eka) \sim n(n+1) \quad ; \text{ lorsque } ka \rightarrow 0 \quad (4.44)$$

On obtient donc,

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim \frac{2i}{-(2 - n(n+1)) \left(\frac{1}{ka} - i \right) + n(n+1) \left(-\frac{2}{ka} - i \frac{(ka)^2}{9} \right)} \quad (4.45)$$

ce qui nous permet finalement d'écrire :

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim -2 \frac{n(n+1) - 2}{(n(n+1) + 2)^2} (ka)^2 - i \frac{2ka}{n(n+1) + 2} \quad (4.46)$$

□

Remarque 4.6 *Tout d'abord, nous pouvons remarquer que le comportement asymptotique de Z_{mn}^{DtN1} (resp. Z_{mn}^{DtN2} ; $n \leq 1$) est identique à celui de l'impédance spécifique exacte Z_{00}^{ex3} (resp. Z_{mn}^{ex3} ; $n \leq 1$), ce qui est cohérent avec la méthode de construction des conditions aux limites DtN. De plus, pour $n \geq 2$, le comportement asymptotique de DtN2 est indépendant de l'excentricité e , et est identique au cas de la sphère (cf Eq. (92), p. 32 dans [41]) ce qui est aussi le cas de l'impédance spécifique approchée correspondant à la condition BGT d'ordre 2 appliquée au problème modal dans le cas d'obstacles de forme sphéroïdale prolate (cf Eq. (69), p. 3646 dans [54]). Enfin, le comportement asymptotique donné par Eq. (4.21) et Eq. (4.40) indique que pour des modes plus grands ($n \geq 2$), la partie réelle de l'impédance exacte tend vers 0, lorsque $ka \rightarrow 0$, plus rapidement que celle de l'impédance approchée DtN2. Cette observation suggère que la condition DtN2 ne sera très certainement pas appropriée pour des modes plus grands.*

4.3 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$

Le comportement asymptotique lorsque $ka \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire en régime haute fréquence, des impédances spécifiques approchées (4.34) et (4.35) est donné par la proposition suivante :

Proposition 4.7 *Le comportement asymptotique, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, des impédances spécifiques approchées DtN pour le $mn^{\text{ème}}$ mode est donné par :*

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} \sim Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad , \text{ pour } m \geq 0 \text{ et } n \geq m \quad (4.47)$$

Démonstration : Le comportement de $Z_{mn}^{DtN1,3D}$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$ est obtenu immédiatement puisque $Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{3,exact}$. On a donc :

$$Z_{mn}^{DtN1,3D} = Z_{00}^{3,exact} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad (4.48)$$

On rappelle que $Z_{mn}^{DtN2,3D}$ s'écrit :

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} = \frac{\lambda_{01} - \lambda_{00}}{(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{1}{Z_{00}^{ex3}} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \frac{1}{Z_{01}^{ex3}}}$$

En utilisant les Eqs. (4.29) et (4.30), il vient que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \frac{h_1^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)} + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \left(\frac{1}{ka} - \frac{h_2^{(1)}(ka)}{h_1^{(1)}(ka)} \right)} \quad (4.49)$$

En utilisant les résultats introduits pour l'étude de Z_{mn}^{ex3} , il vient :

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) \left(-i + \frac{1}{ka} \right) + (\lambda_{mn} - \lambda_{00}) \left(\frac{1}{ka} + i - \frac{2}{ka} \right)} \quad (4.50)$$

D'où,

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim \frac{i}{i - \frac{1}{ka}} \quad (4.51)$$

C'est-à-dire,

$$Z_{mn}^{DtN2,3D} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad ; \text{ lorsque } ka \rightarrow +\infty \quad (4.52)$$

□

Les résultats donnés par Eq. (4.22) et la proposition 4.7 laissent présager une très bonne performance des conditions DtN d'ordre 1 et 2 que nous avons construites, pour le problème modal tridimensionnel en régime haute fréquence. En effet, leurs impédances spécifiques modales respectives se comportent de la même façon que l'impédance spécifique modale exacte (4.22) et cela indépendamment du mode mn lorsque $ka \rightarrow +\infty$.

5 Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème modal

De façon à évaluer numériquement l'incidence du nombre d'onde et de l'allongement du sphéroïde modélisant la frontière sur la performance de nos conditions Dirichlet-to-Neumann, nous avons procédé à une série de tests mode par mode. Au

cours de ces tests, nous avons aussi comparé nos résultats à ceux obtenus avec les conditions BGT appliquées à des frontières sphéroïdales prolates (cf Figs.(16) à (21) dans [54]). Nous avons comparé les conditions d'ordre 1, DtN1 (3.9) et BGT1 (1.1), pour les modes $(m, n) = (0, 1)$, la condition DtN2 étant exacte pour ce mode. Puis nous avons comparé les conditions d'ordre 2, DtN2 (3.12) et BGT2 (1.2), pour les deux modes $(m, n) = (0, 2)$ et $(m, n) = (1, 1)$. Le mode $(m, n) = (0, 0)$ n'a pas été testé, les conditions DtN1 et DtN2 construites étant exactes pour ce mode. Pour chacun de ces cas, nous avons étudié six valeurs de l'excentricité e allant de $e = 0.1$ (sphéroïde proche d'une sphère), à $e = 0.9$ (sphéroïde très allongé). Enfin, trois valeurs de ka ont été testées : $ka = 0.1$, $ka = 1$ et $ka = 10$. Tous les résultats pour les deux modes $(m, n) = (0, 2)$ et $(m, n) = (1, 1)$ sont donnés en fonction de l'angle d'observation $\varphi \in [0, \pi[$ dont dépend l'impédance spécifique approchée de la condition BGT2 (cf Eq. (69) dans [54]). Enfin, pour chacun des tests effectués, nous avons représenté les valeurs absolues des différentes impédances que l'on compare ainsi que l'erreur relative correspondant à travers la quantité $\frac{|Z_{mn}^{ex3} - Z_{mn}^{app,3D}|}{|Z_{mn}^{ex3}|}$, où $Z_{mn}^{app,3D}$ est l'une des impédance approchée DtN ou BGT testée.

Pour le mode $(m, n) = (0, 1)$, nous comparons les conditions d'ordre 1, DtN1 et BGT1, pour chacune des six valeurs de e précédemment choisies et pour des valeurs de ka allant de 0.1 à 10. On peut observer que le niveau de performance des deux conditions testées n'est globalement pas satisfaisant. Pour de petites valeurs de e (0.1 et 0.2), les conditions DtN1 et BGT1 sont équivalentes (cf Fig. (3.1), mais lorsque $e \rightarrow 1$, DtN1 conserve un niveau de performance similaire alors que la performance de BGT1 se détériore considérablement (pour $e = 0.9$, erreur relative $> 75\%$). L'excentricité ne semble pas avoir d'incidence sur la précision de la condition approchée DtN1, celle-ci atteint un niveau correct uniquement lorsque ka s'approche de 10, quelle que soit la valeur de e (cf Fig. (3.2)).

On compare ensuite les conditions d'ordre 2, DTN2 et BGT2, en fonction de la valeur de l'angle d'observation $\varphi \in [0, \pi[$ (cf Fig (3.3)) et toujours en fonction de l'excentricité e et du nombre d'ondes. Seule la condition BGT2 dépend de l'angle ϕ , cependant cette dépendance n'est réellement visible que pour des valeurs de $e \geq 0.6$ lorsque $ka = 0.1$ et $ka = 1$. Lorsque $ka = 0.1$, la valeur de l'excentricité ne semble ici aussi n'avoir aucune incidence sur le niveau de performance de DtN2, l'erreur relative restant autour de 25% quelle que soit la valeur de e (cf Fig (3.4)). La précision de la condition DtN2 n'est donc pas vraiment satisfaisante pour ce cas test. Lorsque le sphéroïde formant la frontière artificielle a une géométrie proche de la sphère ($e = 0.1, 0.2$), la condition BGT2 est équivalente à la condition DtN2. Par contre, lorsque le sphéroïde s'allonge, le niveau de performance de BGT2 se détériore considérablement, puisque l'erreur relative est au dessus de 100% pour $e = 0.9$.

Pour $ka = 1$, le niveau de performance de la condition DtN2 reste bon pour toutes les excentricités testées, l'erreur relative est toujours inférieure à 10% (cf Fig. (3.6)). La précision de BGT2 est équivalente à celle de DtN2 pour de petites valeurs de e mais se détériore lorsque $e \rightarrow 1$ (cf Fig (3.5)). Le niveau de performance de BGT2 n'est plus bon lorsque $e \geq 0.6$, l'erreur relative atteint plus de 200% pour $e = 0.9$.

Enfin, lorsque $ka = 10$, comme dans les deux cas précédents, la valeur de e n'a pas d'incidence sur la performance de la condition DtN2. Celle-ci est très bonne, l'erreur relative de l'impédance spécifique approchée $Z_{02}^{DtN2,3D}$ étant bien inférieure à 10% pour toutes les excentricités testées (cf Fig. (3.8)). La condition BGT2 reste équivalente à DtN2 pour de petites valeurs de e (cf Fig. (3.7)), puis lorsque $e \rightarrow 1$, la performance de BGT2 se dégrade et n'est plus acceptable dès que $e \geq 0.6$, l'erreur relative étant encore supérieure à 100% pour $e = 0.9$.

On présente enfin les mêmes cas tests pour le mode $(m, n) = (1, 1)$. Pour $ka = 0.1$ et $ka = 1$, on observe des résultats assez similaires. En effet, la condition DtN2 a un niveau de performance assez bon jusqu'à $e = 0.8$ mais qui se détériore un peu à mesure que $e \rightarrow 1$ (cf Figs (3.10)-(3.12)). Pour de petites valeurs d'excentricité ($e = 0.1, 0.2$), la condition BGT2 reste équivalente à DtN2 puis son niveau de performance se dégrade au fur et à mesure que le sphéroïde prolate formant la frontière artificielle s'allonge. La condition n'est plus performante dès lors que $e \geq 0.6$ (cf Figs (3.9)-(3.11)).

Puis pour $ka = 10$, la condition DtN2 a un bon niveau de performance quelle que soit la valeur de e puisque l'erreur relative pour l'impédance approchée $Z_{11}^{DtN2,3D}$ est toujours inférieure à 10%. Comme dans tous les exemples précédents, BGT2 est équivalent à DtN2 pour de petites excentricités (cf Fig. (3.13)) puis perd en précision à mesure que l'excentricité augmente. Pour $e \geq 0.6$, la précision de BGT2 n'est plus satisfaisante (cf Fig (3.14)).

En résumé, les résultats obtenus sont assez similaires pour les modes $(m, n) = (0, 2)$ et $(m, n) = (1, 1)$. La condition DtN2 n'est pas très performante pour $ka = 0.1$, sa précision est nettement meilleure pour $ka = 1$ et $ka = 10$. Nous n'avons pas testé de modes supérieurs car les résultats asymptotiques obtenus pour DtN2 en basse fréquence (4.40) suggèrent que la performance de la condition va se détériorer à mesure que le mode augmente.

$$m = 0 \quad n = 1$$

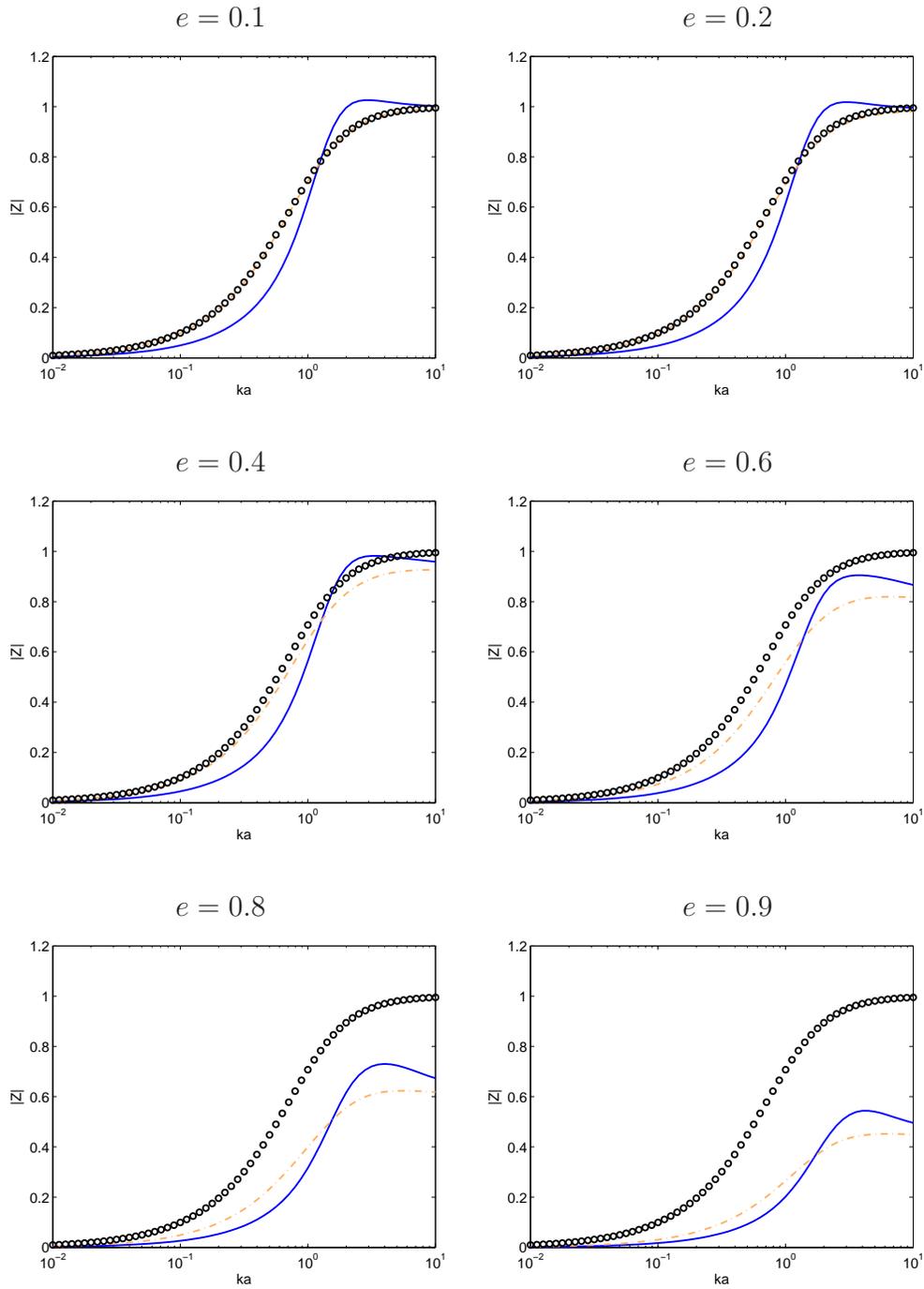


FIG. 3.1: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN1 (---), BGT1 (o o o).

$$m = 0 \quad n = 1$$

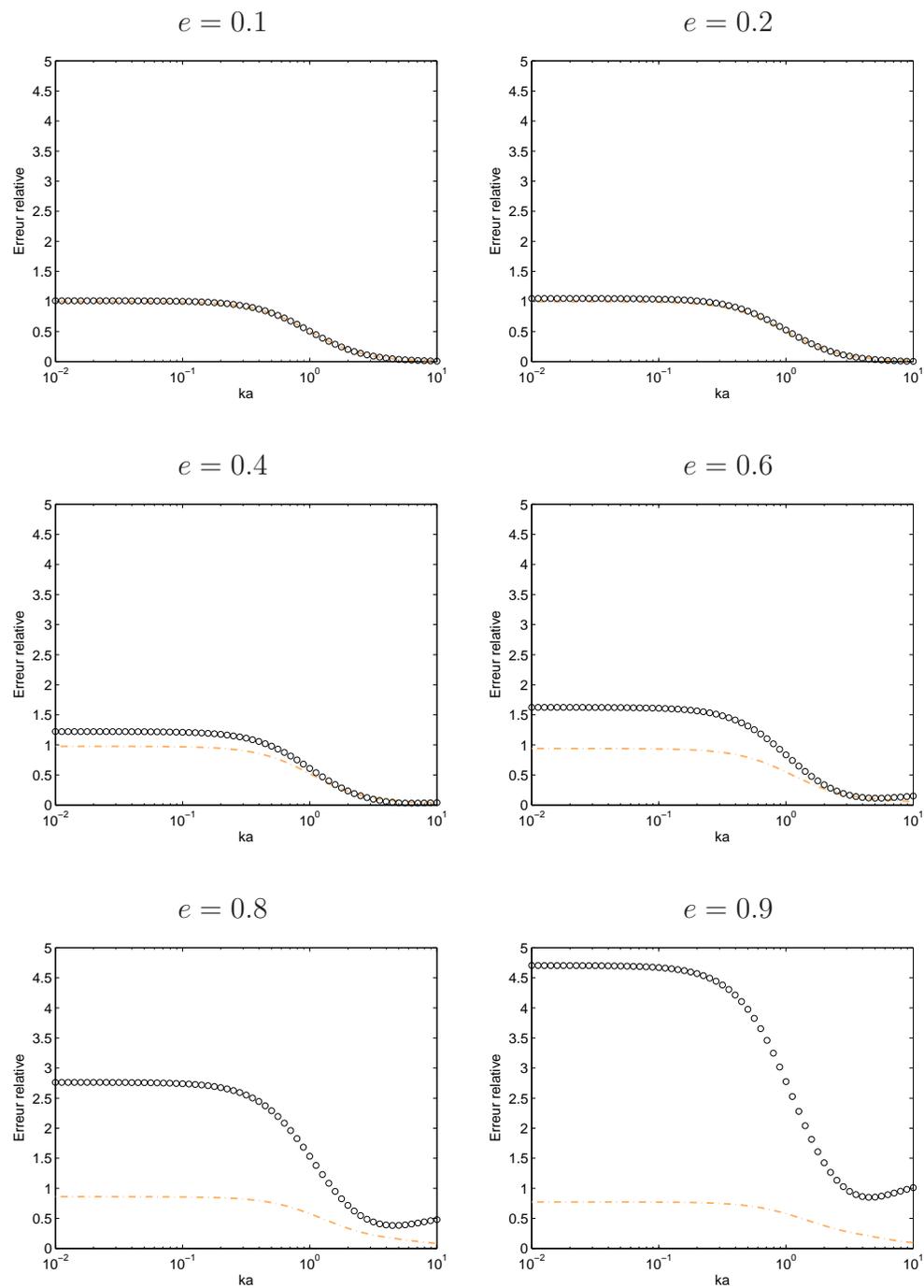


FIG. 3.2: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques DtN1 (---) et BGT1 (o o o).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 0.1$$

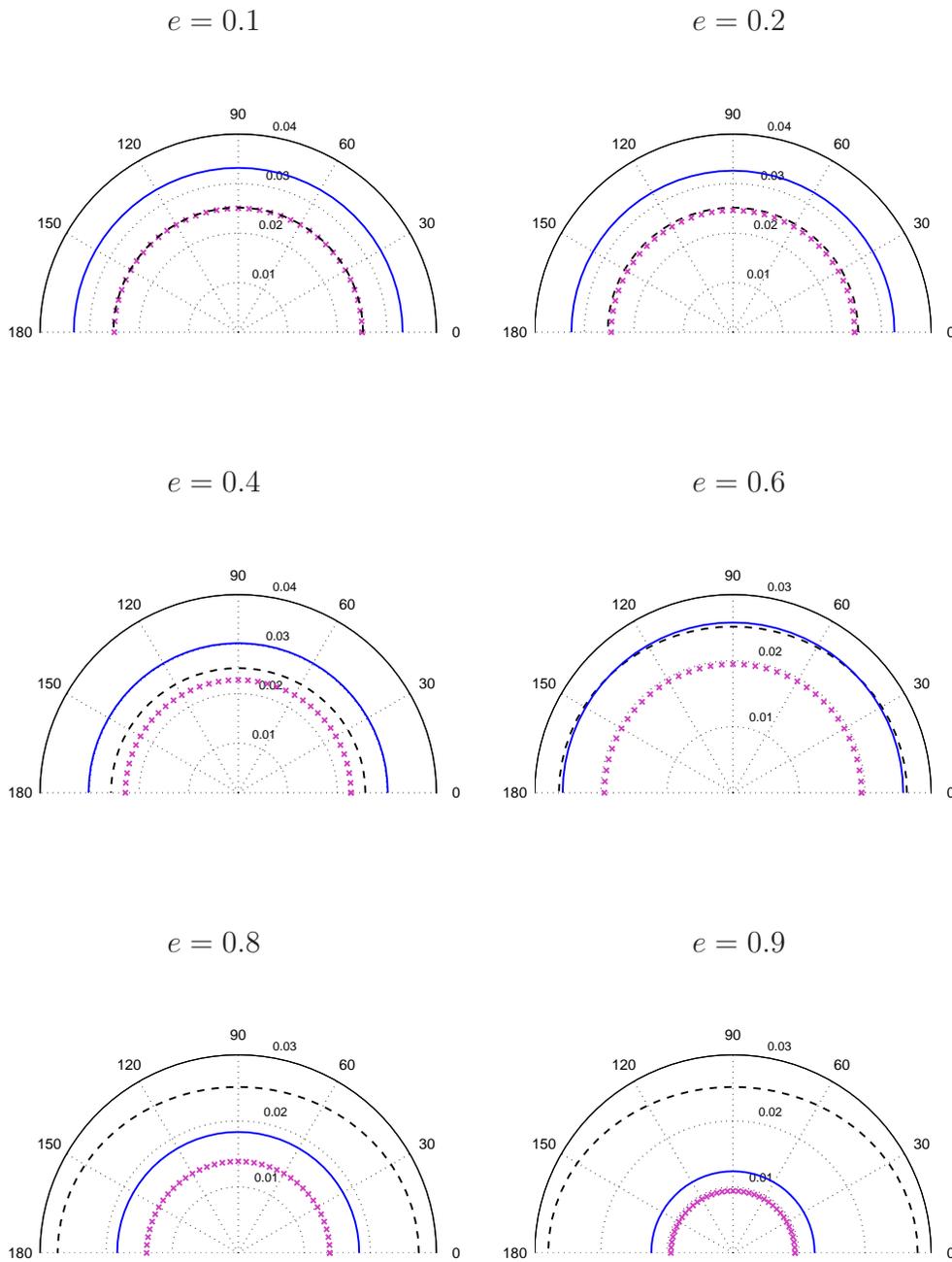


FIG. 3.3: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 0.1$$

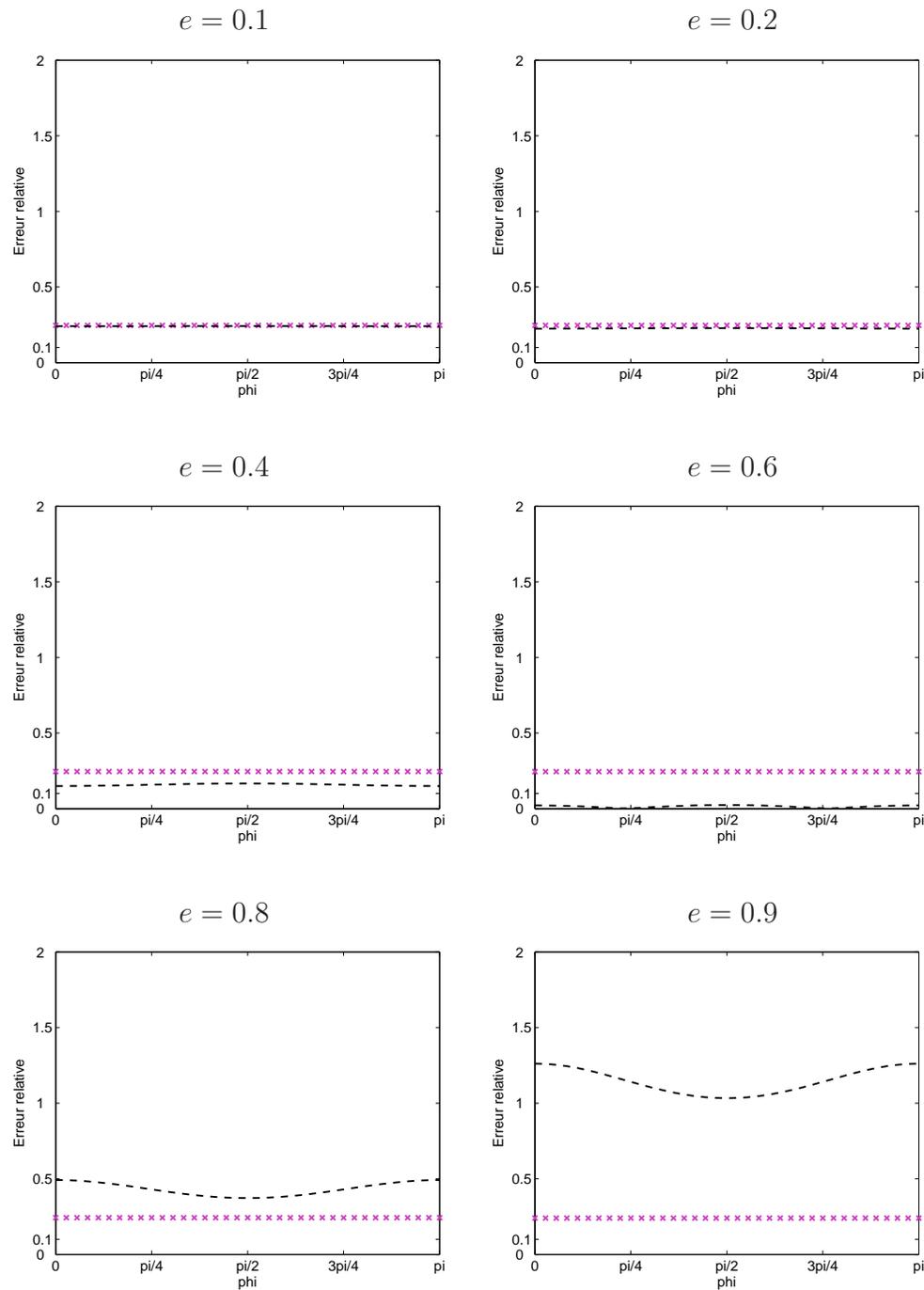


FIG. 3.4: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 1$$

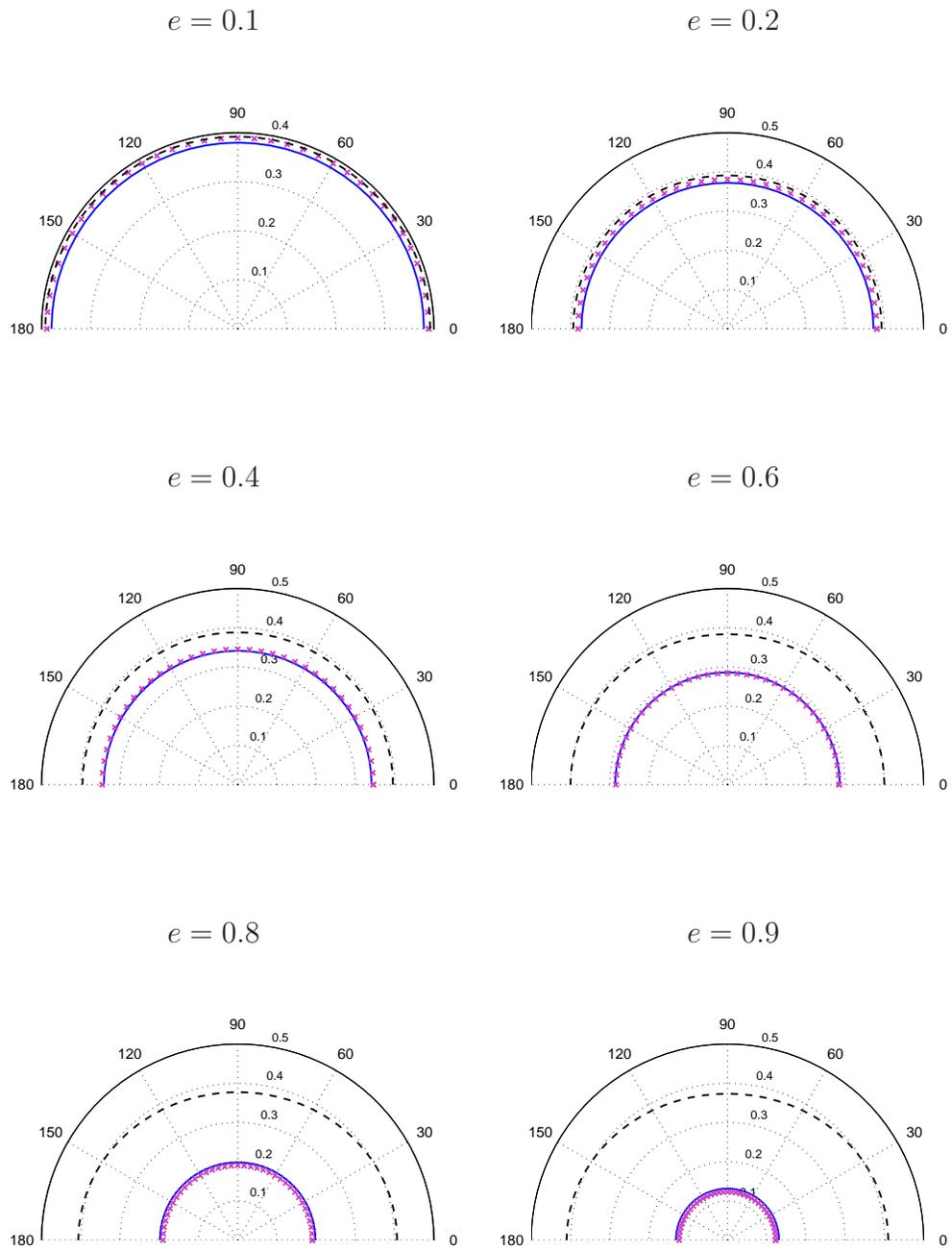


FIG. 3.5: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 1$$

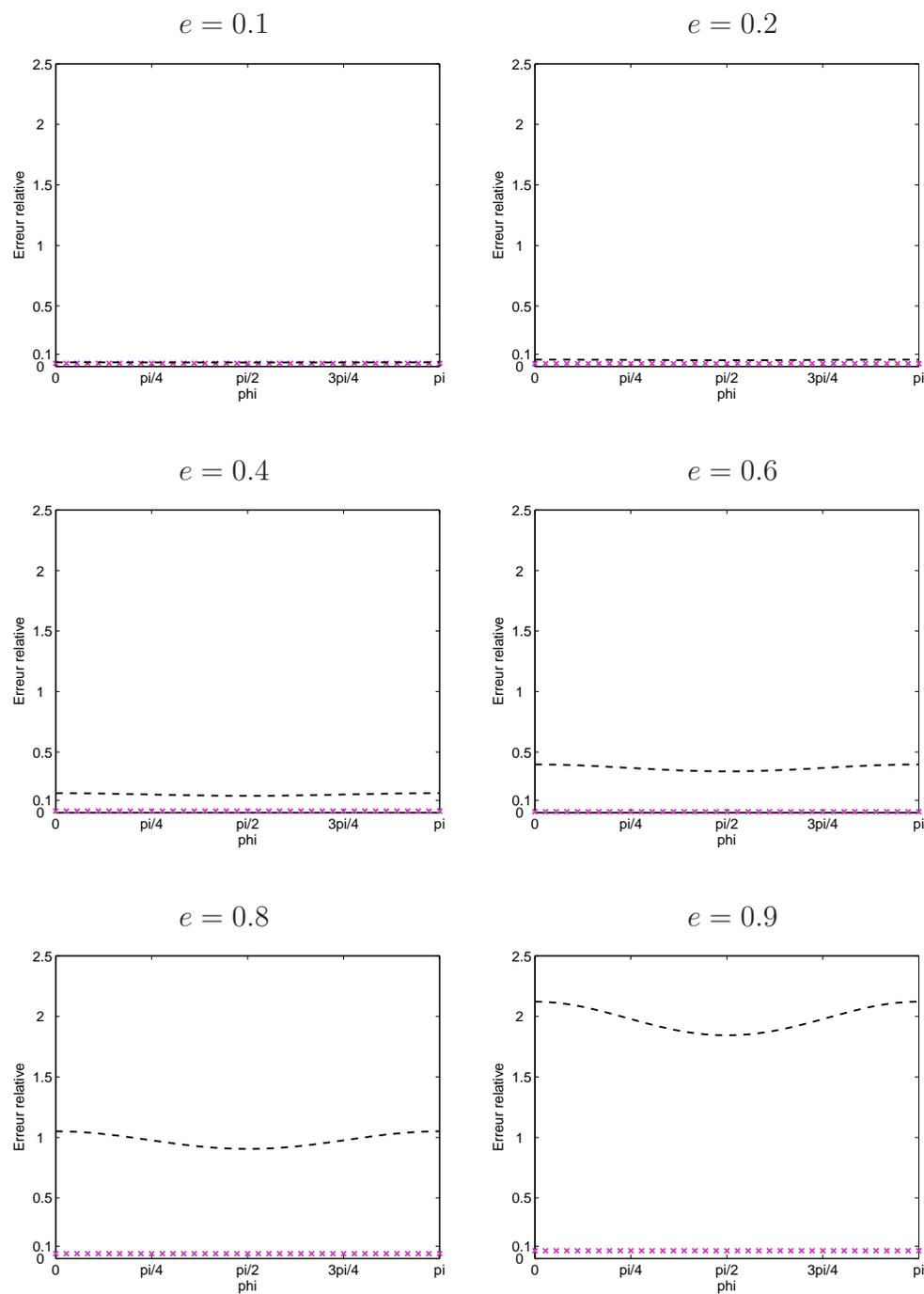


FIG. 3.6: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 10$$

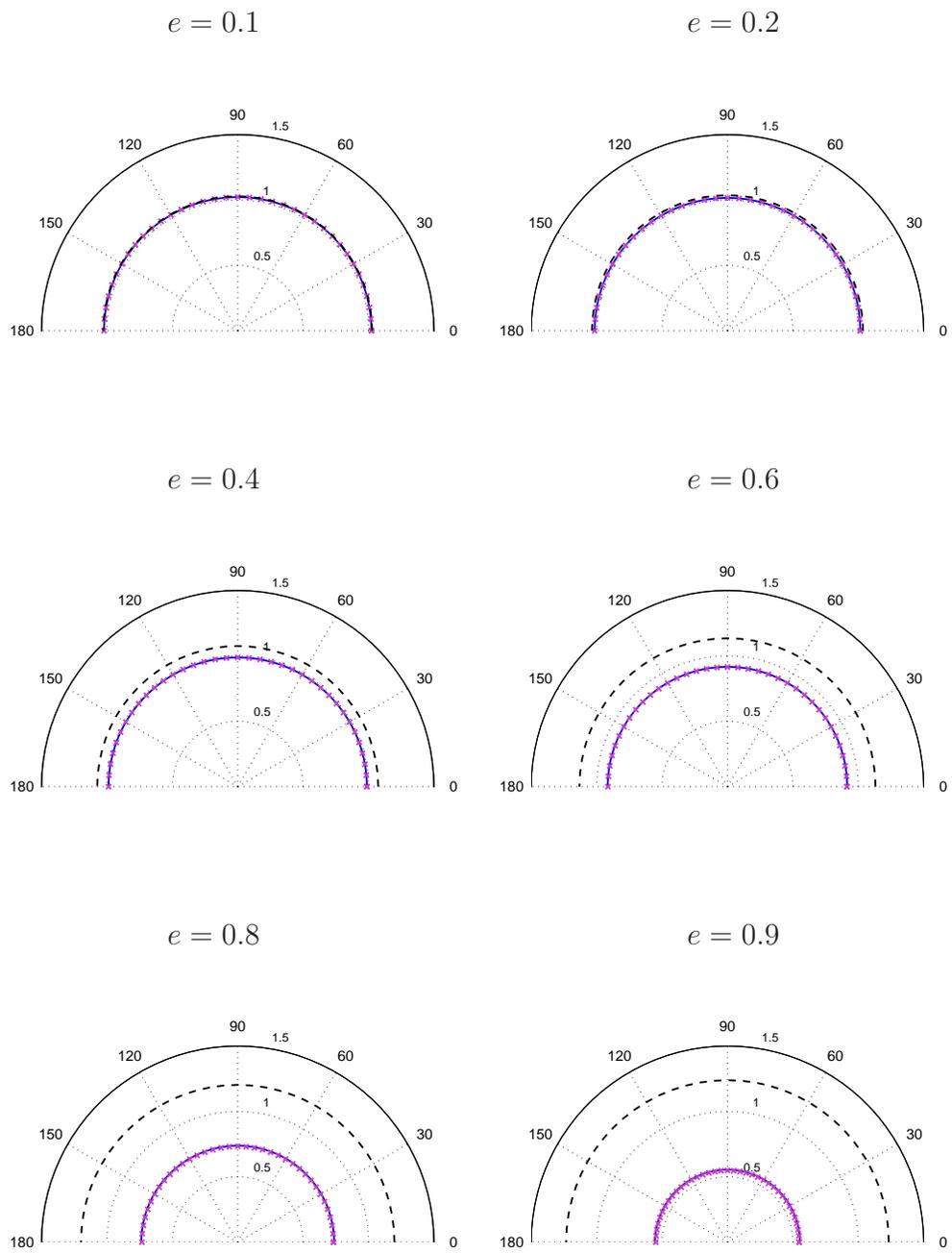


FIG. 3.7: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$m = 0 \quad n = 2$$

$$ka = 10$$

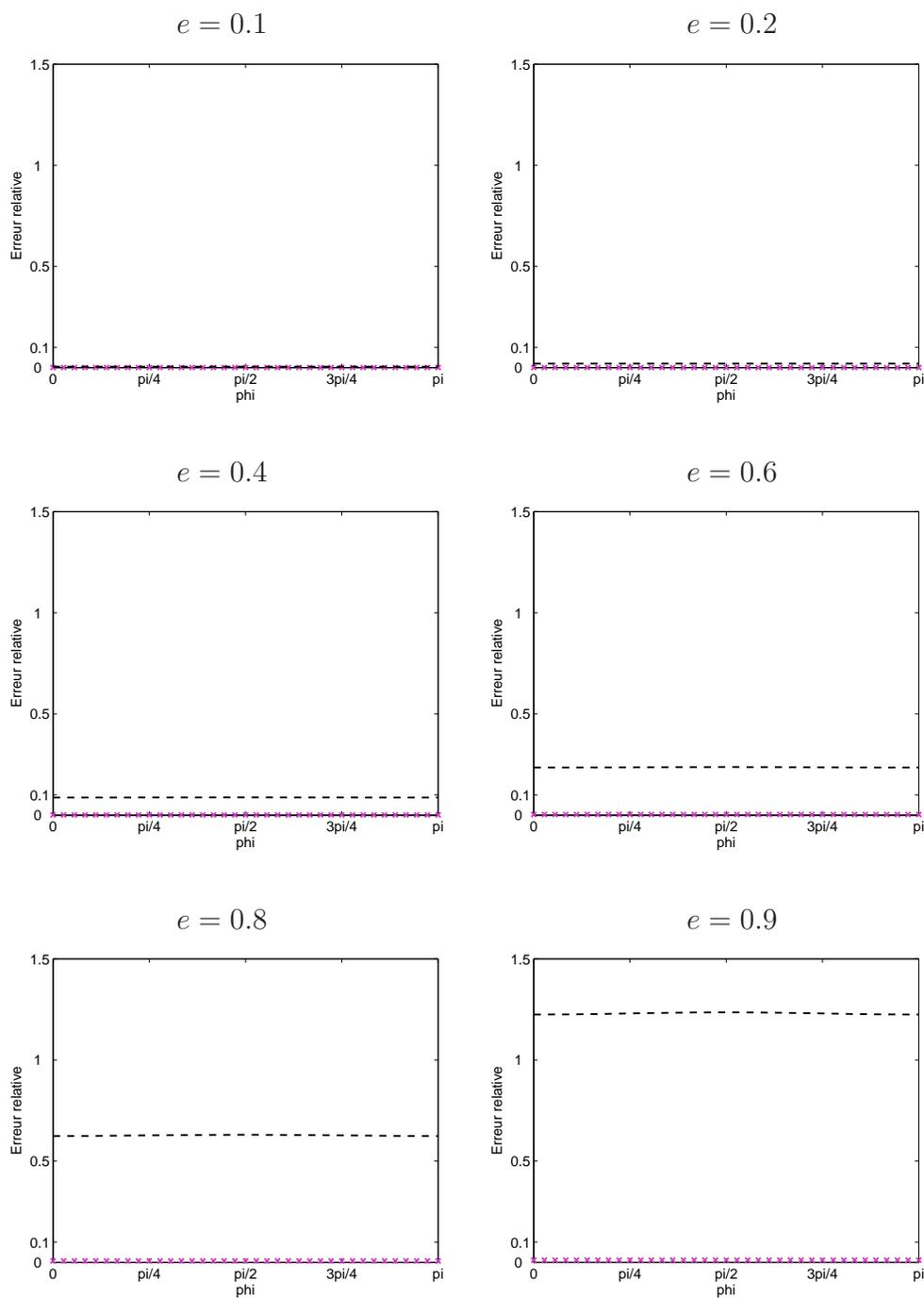


FIG. 3.8: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 0.1$$

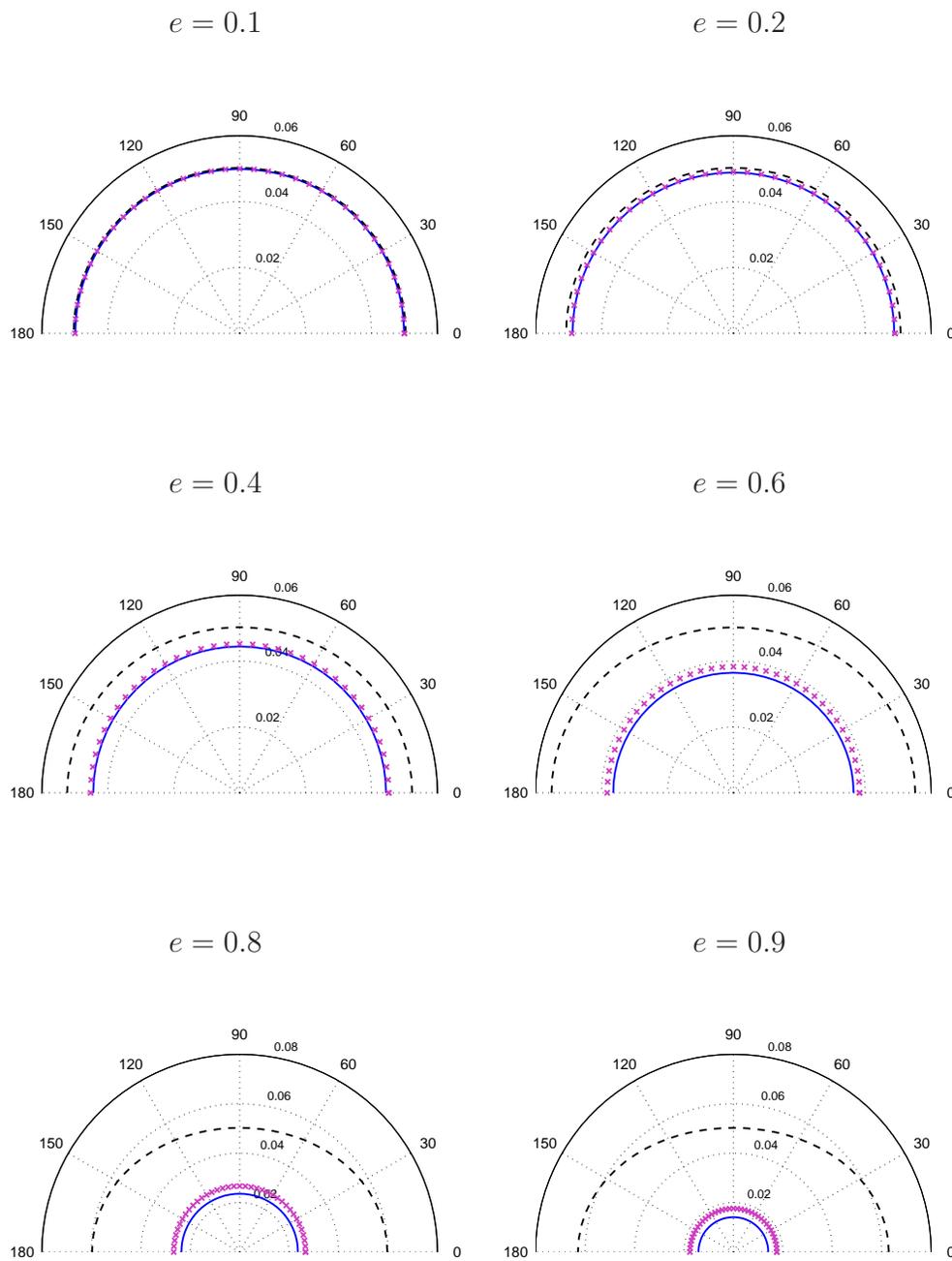


FIG. 3.9: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— — —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 0.1$$

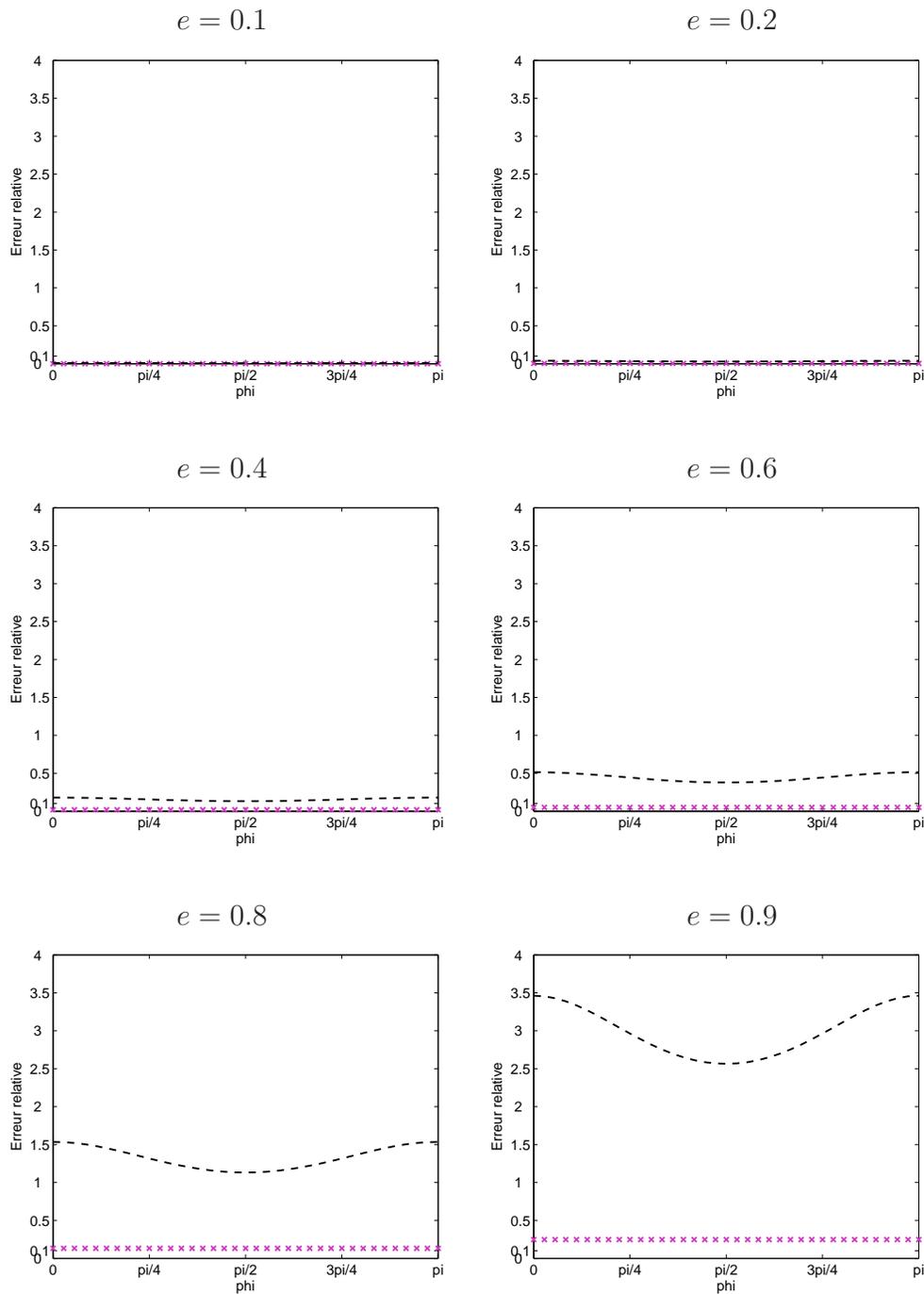


FIG. 3.10: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 1$$

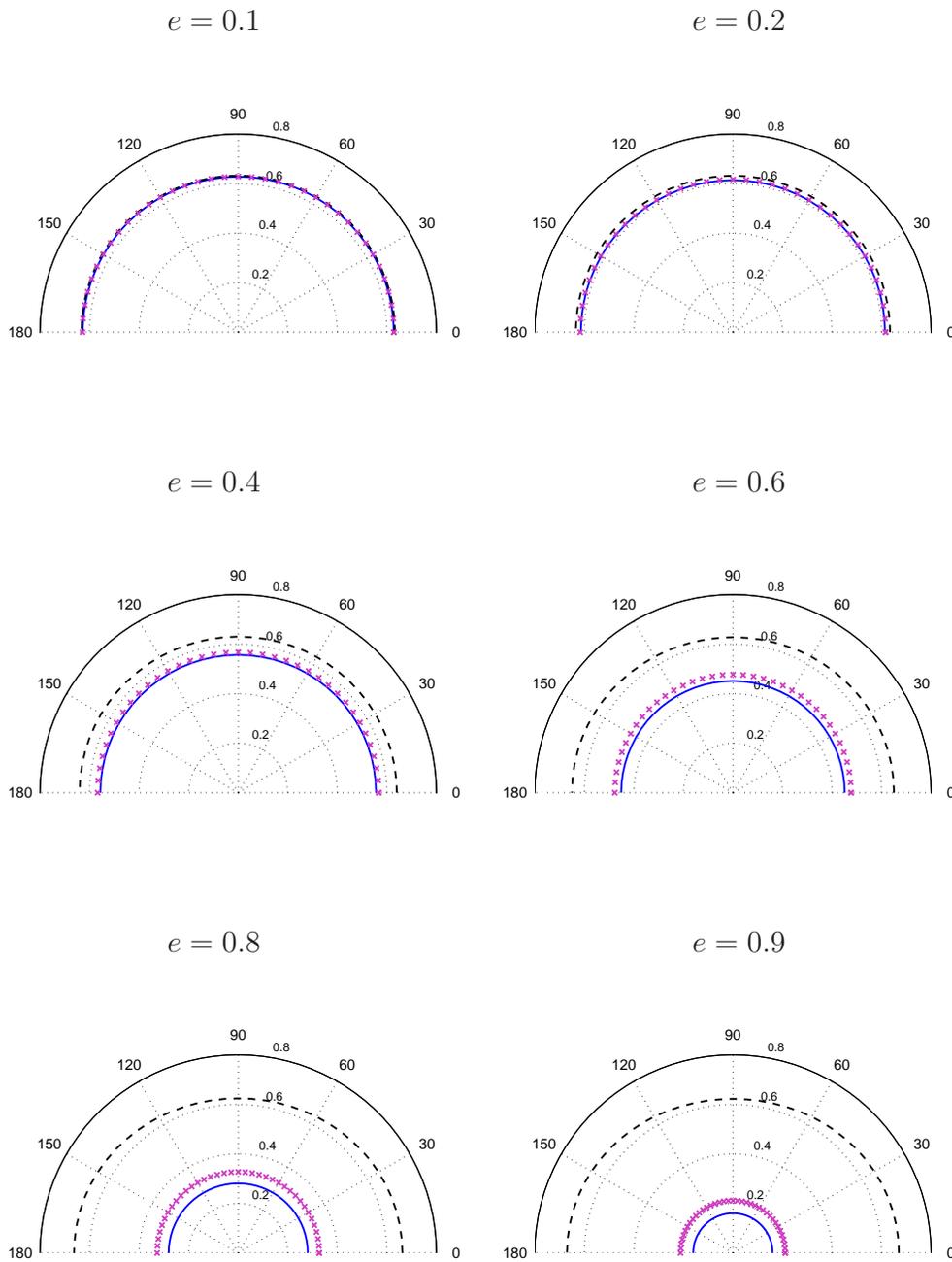


FIG. 3.11: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 1$$

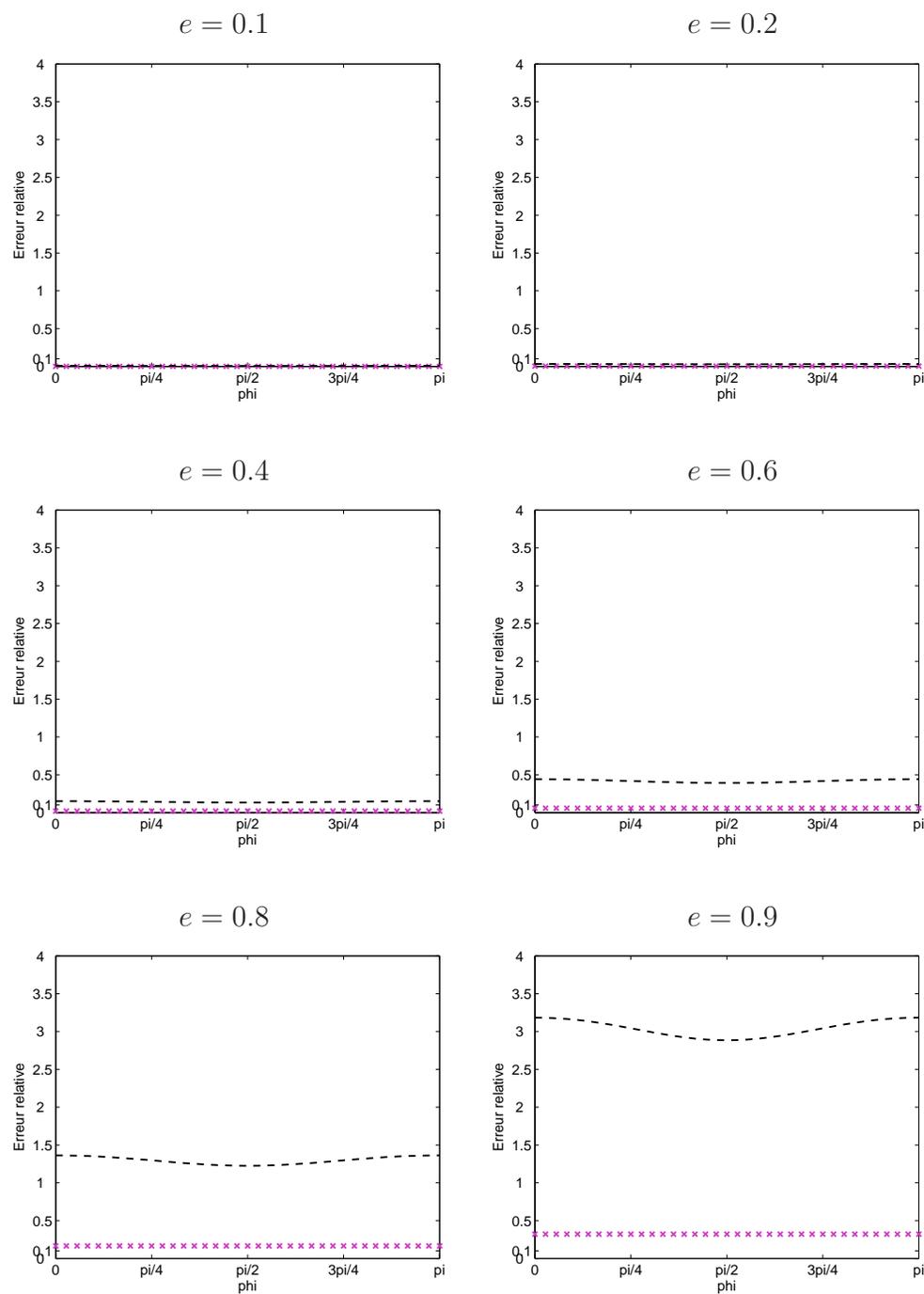


FIG. 3.12: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 10$$

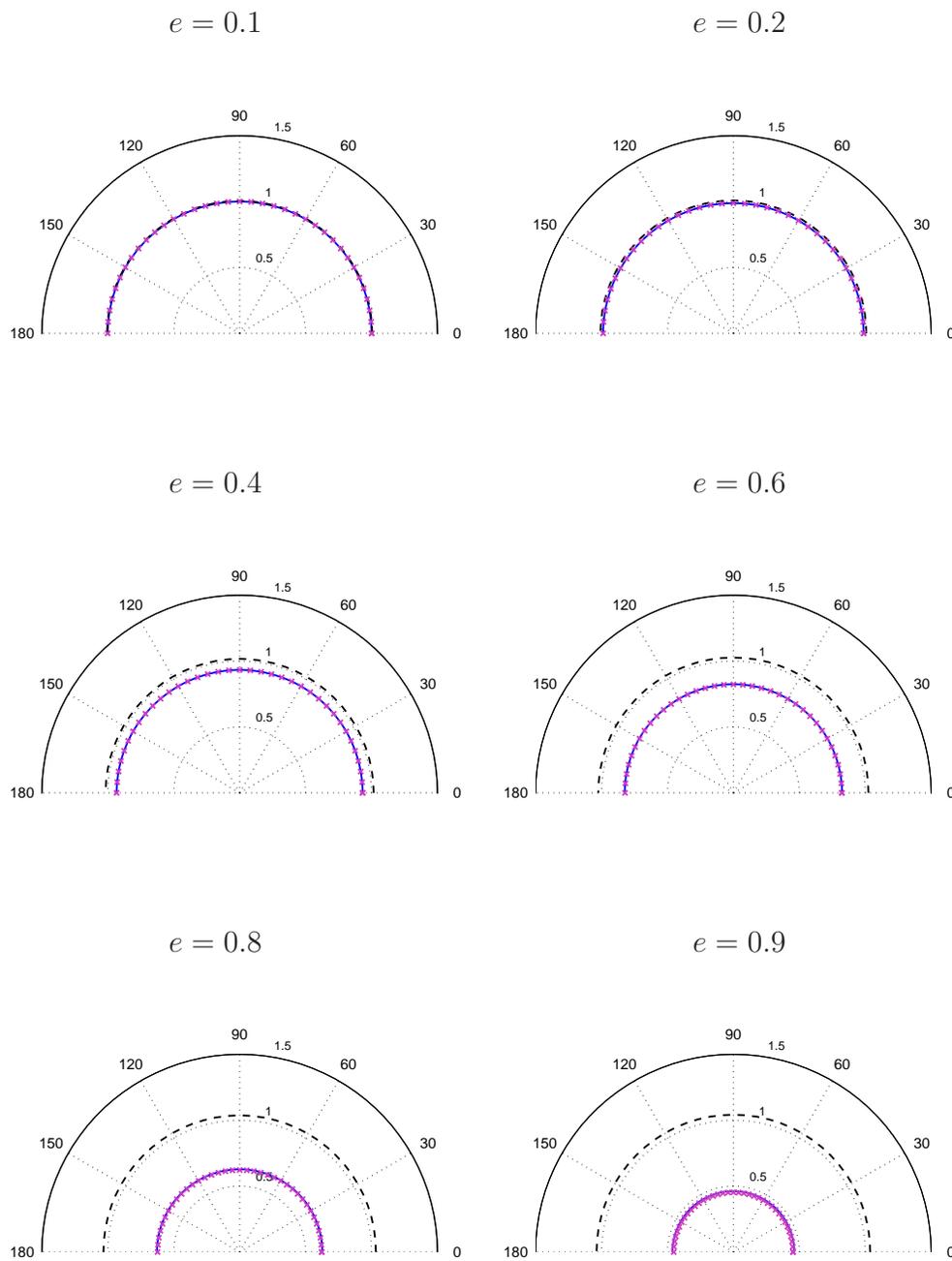


FIG. 3.13: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (—), DtN2 (× × ×), BGT2 (— —).

$$m = 1 \quad n = 1$$

$$ka = 10$$

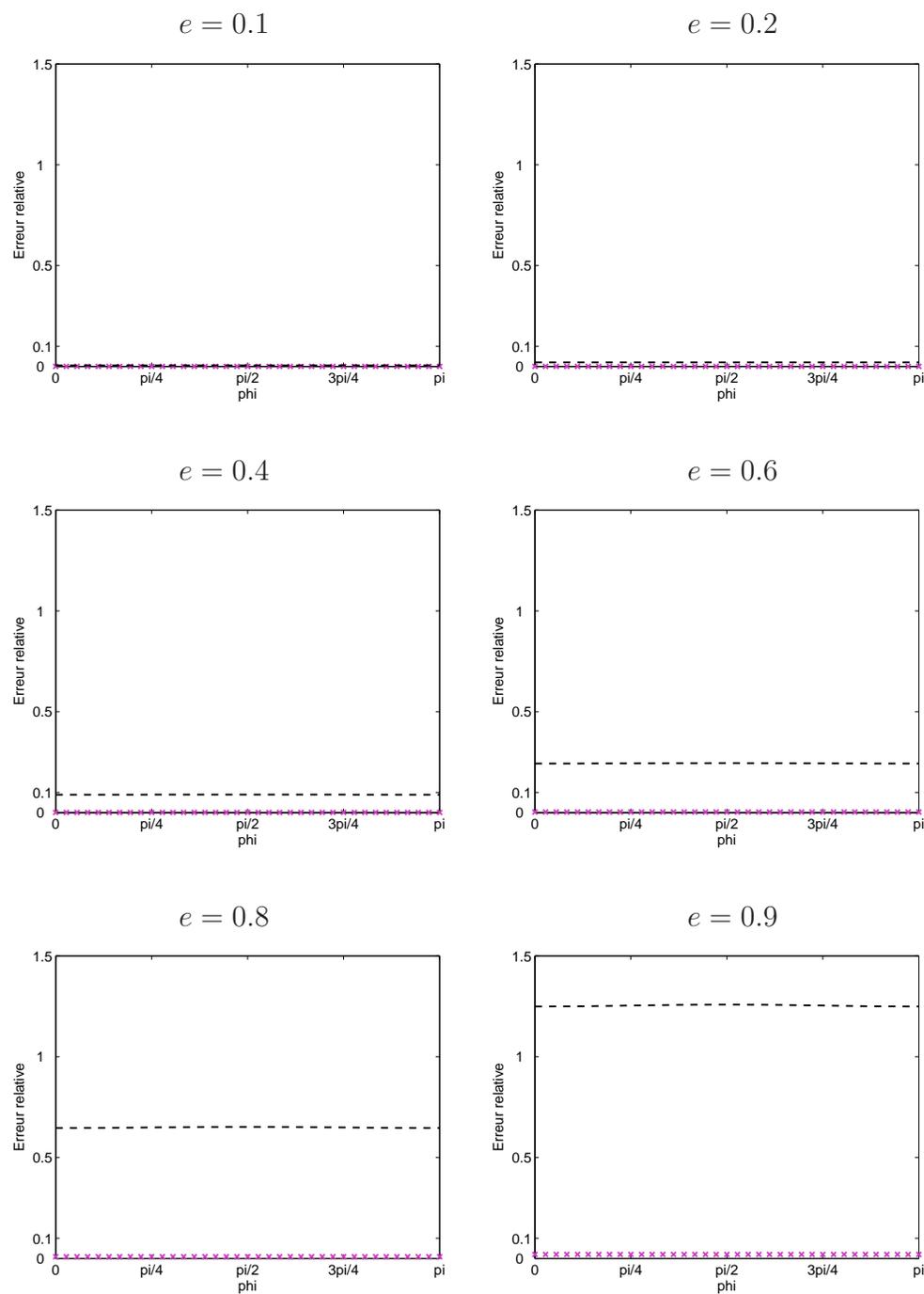


FIG. 3.14: Erreur relative des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 ($\times \times \times$), BGT2 (— —).

6 Analyse mathématique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering

Dans cette partie, nous allons procéder à l'analyse mathématique de performance des conditions aux limites DtN locales d'ordre un ($DtN1$) et deux ($DtN2$) données respectivement par les équations (3.9), (3.12) lorsqu'elles sont appliquées pour résoudre un problème de scattering tridimensionnel dans lequel l'obstacle est de forme sphéroïdale prolata. Comme dans le chapitre précédent, cette analyse est faite dans le cadre d'une formulation OSRC (On-surface radiation condition) [46], c'est-à-dire que l'on considère que la frontière artificielle, sur laquelle on applique l'une des conditions DtN, est posée sur le bord de l'obstacle Γ . Comme en 2D, on résout un problème du type :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = Tu & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (6.53)$$

où Ω est le domaine de calcul.

Ce cadre nous permet d'écrire que $\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} = Tu^{inc}$ sur Γ . Nous rappelons que, d'après les travaux de X. Antoine [2], ce cadre est adapté au régime basse fréquence.

Afin d'analyser la performance des conditions approchées construites, dans le cas d'un problème de scattering 3D, nous allons comparer les impédances spécifiques approchées à l'impédance spécifique exacte.

On rappelle (cf Eq. (85), p. 3649 dans [54]), que l'impédance spécifique exacte Z^{ex3} sur la surface du sphéroïde $\{\xi = \xi_0\}$ est donnée par :

$$Z^{ex3} = -\frac{i\sqrt{1-e^2}ka u^{inc}}{\frac{\partial}{\partial \xi} (u^{scat})|_{\xi=\xi_0}} \quad (6.54)$$

où u^{inc} est l'onde plane incidente, d'angle d'incidence φ_0 définie par :

$$u^{inc} = e^{ikf \cosh \xi (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \tanh \xi \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \theta)} \quad (6.55)$$

et u^{scat} est le champ acoustique diffracté par l'obstacle de forme sphéroïdale i.e la solution du problème extérieur :

$$\begin{cases} \Delta u^{scat} + k^2 u^{scat} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{scat} = -u^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u^{scat} - ik u^{scat} \right] = 0 \end{cases}$$

D'après [57], u^{scat} peut être représenté par la série suivante :

$$u^{\text{scat}} = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) A_{mn} i^n R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi) S_{mn}(kf, \cos \phi) \cos m\theta \quad (6.56)$$

où

$$A_{mn} = \frac{R_{mn}^{(1)}(eka, e^{-1}) S_{mn}(eka, \cos \phi_0)}{N_{mn} R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})} \quad (6.57)$$

et N_{mn} représente le facteur de normalisation des fonctions d'ondes sphéroïdales angulaires S_{mn} [20] et δ_{0m} est le symbole de Kronecker.

Dans le cadre de ce travail, le champ u correspond à une approximation du champ exact u^{scat} par la méthode OSRC.

Nous rappelons (cf Eq. (91), p. 3655 dans [54]), que le comportement asymptotique de l'impédance spécifique exacte Z^{ex3} du champ diffracté sur la surface du sphéroïde prolate, lorsque $ka \rightarrow 0$, est donné par :

$$Z^{\text{ex3}} \sim Z_{00}^{\text{ex3}} \sim (ka)^2 - ika \quad (6.58)$$

où Z_{00}^{ex3} est donné par Eq. (4.20) pour $m = n = 0$.

Comme dans le cas bidimensionnel, on ne peut déterminer le comportement asymptotique de Z^{ex3} lorsque $ka \rightarrow +\infty$ en raison de la divergence des séries qui entrent en compte.

6.1 Définition des impédances spécifiques approchées pour le problème de scattering

Toujours dans le but d'analyser la performance de nos différentes conditions aux limites absorbantes DtN , nous allons calculer les impédances spécifiques approchées qui leur correspondent. On définit une impédance spécifique approchée :

$$Z^{T,3D} = - \frac{i\sqrt{1 - e^2} ka u^{\text{inc}}}{\frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}} \quad (6.59)$$

où u est solution du problème (6.53).

Similairement au cas 2D, nous nous sommes placés dans un cadre OSRC, ce qui nous permet d'écrire que $u^{\text{scat}} = -u^{\text{inc}}$. On obtient l'expression des impédances spécifiques approchées en appliquant les conditions absorbantes construites (3.9), (3.12) à u^{inc} et en utilisant l'expression de l'onde plane donnée par (6.55) puis en substituant cette expression à $\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial \xi}$ sur $\{\xi = \xi_0\}$ dans Eq. (6.59).

Proposition 6.1 *L'impédance spécifique approchée $Z^{\text{DtN1},3D}$ correspondant à la condition Dirichlet-to-Neumann d'ordre 1 (DtN1), est donnée, sur la surface sphéroïdale prolatae $\{\xi = \xi_0\}$, par :*

$$Z^{\text{DtN1},3D} = Z_{00}^{\text{ex3}} \quad (6.60)$$

L'impédance spécifique approchée $Z^{\text{DtN2},3D}$ correspondant à la condition Dirichlet-to-Neumann d'ordre 2 (DtN2), est donnée, sur la surface sphéroïdale prolatae $\{\xi = \xi_0\}$, par :

$$Z^{\text{DtN2},3D} = \frac{ika e (\lambda_{01} - \lambda_{00})}{(\lambda_{01} r_{00} - \lambda_{00} r_{01}) + (r_{00} - r_{01}) \omega} \quad (6.61)$$

où r_{00} et r_{01} sont donnés par (2.8), et ω est défini par :

$$\begin{aligned} \omega = & ika \left(\frac{1}{\tan \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} - \alpha - \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \cos \theta \right) \\ & - (ka)^2 \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \varphi \right) \end{aligned} \quad (6.62)$$

avec

$$\alpha = \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \theta \quad (6.63)$$

Démonstration : Le contexte OSRC nous permettant de remplacer u^{scat} par $-u^{\text{inc}}$ dans (6.54), les résultats sont alors immédiats en utilisant les conditions DtN (3.9) et (3.12) ainsi que l'expression de u^{inc} donnée par (6.55) afin d'évaluer $\frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial \xi}$ en $\xi = \xi_0$.

□

Remarque 6.2 *Comme en 2D, l'impédance approchée DtN2 peut aussi être exprimée en fonction de l'impédance spécifique exacte modale :*

$$Z^{\text{DtN2},3D} = \frac{\lambda_{01} - \lambda_{00}}{\left(\frac{\lambda_{01}}{Z_{00}^{\text{ex3}}} - \frac{\lambda_{00}}{Z_{01}^{\text{ex3}}} \right) (-2i\alpha ka - (ka)^2 \delta - (eka)^2 \cos \varphi)} \quad (6.64)$$

$$\text{avec } \delta = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right)^2$$

Remarque 6.3 *Nous avons montré précédemment que lorsque $e \rightarrow 0$ les conditions DtN construites pour des frontières sphéroïdales prolates sont identiques à celles construites pour des frontières sphériques [41]. De ce fait, lorsque $e \rightarrow 0$ c'est-à-dire*

lorsque le sphéroïde prolate dégénère en une sphère, les impédances approchées DtN (6.60) et (6.64) sont identiques à celles obtenues dans le cas d'un obstacle de forme sphérique de rayon R , qui sont données par [41] :

$$Z_{sphère}^{DtN1,3D} = Z_{0,sphère}^{3,exact}$$

$$Z_{sphère}^{DtN2,3D} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{0,sphère}^{3,exact}} + \frac{kR}{2} (kR \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi) \left(\frac{1}{Z_{1,sphère}^{3,exact}} - \frac{1}{Z_{0,sphère}^{3,exact}} \right)}$$

où $Z_{n,sphère}^{3,exact}$ est donné par (4.38).

6.2 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow 0$

Cette partie est consacrée au comportement des différentes impédances spécifiques approchées en régime basse fréquence afin de comparer les résultats obtenus à ceux de l'impédance spécifique exacte (6.58).

La proposition suivante donne le comportement asymptotique des impédances approchées DtN d'ordre 1 et 2 lorsque $ka \rightarrow 0$.

Proposition 6.4 *Le comportement asymptotique de $Z^{DtN1,3D}$ lorsque $ka \rightarrow 0$ est donné par :*

$$Z^{DtN1,3D} \sim (ka)^2 - ika \quad (6.65)$$

Le comportement asymptotique de $Z^{DtN2,3D}$ lorsque $ka \rightarrow 0$ est donné par :

$$Z^{DtN2,3D} \sim (1 - \alpha) (ka)^2 - ika \quad (6.66)$$

où α a été défini par (6.63)

Démonstration : La démonstration est immédiate pour l'impédance approchée DtN1 puisque on a $Z^{DtN1,3D} = Z_{00}^{ex3}$. En utilisant le comportement asymptotique de l'impédance spécifique exacte modale pour le mode $(m, n) = (0, 0)$ donné par (4.21), on obtient le résultat (6.65).

La démonstration est un peu moins directe pour l'impédance approchée DtN2. On rappelle que $Z^{DtN2,3D}$ s'écrit sous la forme :

$$Z^{DtN2,3D} = \frac{ika e (\lambda_{01} - \lambda_{00})}{\frac{R_{00}^{(3)}(eka, e^{-1})}{R_{00}^{(3)}(eka, e^{-1})} (\lambda_{01} + \omega) - \frac{R_{01}^{(3)}(eka, e^{-1})}{R_{01}^{(3)}(eka, e^{-1})} (\lambda_{00} + \omega)} \quad (6.67)$$

où ω a été introduit en (6.62).

Dans l'analyse mathématique du problème modal, nous avons vu que :

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-\frac{h_1^{(1)}(ka)}{h_0^{(1)}(ka)}(\lambda_{01} + \omega) - \left(\frac{1}{ka} - \frac{h_2^{(1)}(ka)}{h_1^{(1)}(ka)}\right)(\lambda_{00} + \omega)} \quad (6.68)$$

Or, lorsque $ka \rightarrow 0$, on rappelle que (cf [1]) :

$$\frac{h_{n+1}^{(1)}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \sim \frac{2n+1}{ka} - i \left(\frac{(ka)^n}{(2n+1)!!} \right)^2 \quad (6.69)$$

$$\lambda_{mn}(eka) \sim n(n+1)$$

D'où,

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim \frac{2i}{-\left(\frac{1}{ka} - i\right)(2 + \omega) - \left(\frac{1}{ka} - \frac{3}{ka} + i\frac{(ka)^2}{9}\right)\omega} \quad (6.70)$$

On en conclut après une troncature adaptée du développement en série de Taylor réalisé avec Mathematica que :

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim -ika + (1 - \cos \varphi_0 \cos \varphi - \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos \theta)(ka)^2 \quad (6.71)$$

Finalement, il vient

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim -ika + (1 - \alpha)(ka)^2 \quad (6.72)$$

avec α donné par Eq. (6.63).

□

Remarque 6.5 Nous remarquons que le comportement asymptotique de l'impédance approchée Z^{DtN1} est identique à celui de l'impédance spécifique exacte Z^{ex3} (cf Eq. (6.58) et Eq. (6.65)).

Remarque 6.6 L'équation (6.66) permet d'observer que le comportement asymptotique de $Z^{\text{DtN2,3D}}$ en 0 dépend de l'excentricité e ainsi que de l'angle d'incidence φ_0 et des angles d'observation φ et θ . Cette dépendance a aussi été relevée sur le comportement asymptotique de l'impédance spécifique approchée BGT2 (cf Eq. (93), p. 3657 dans [54]).

Remarque 6.7 Lorsque $e \rightarrow 0$, les comportements asymptotiques de $Z^{\text{DtN1,3D}}$ et $Z^{\text{DtN2,3D}}$ sont identiques à ceux trouvés dans le cas d'une sphère de rayon R (cf Eq. (140) p. 47 dans [41]), lorsque $ka \rightarrow 0$:

$$Z_{\text{sphère}}^{\text{DtN1,3D}} \sim Z_{00}^{3,\text{exact}}$$

$$Z_{\text{sphère}}^{\text{DtN2,3D}} \sim (1 - \cos \varphi)(kR)^2 - ikR$$

6.3 Comportements asymptotiques lorsque $ka \rightarrow +\infty$

Dans cette partie, nous allons donner le comportement en régime haute fréquence des impédances spécifiques approchées correspondant aux différentes conditions aux limites de type Dirichlet-to-Neumann que nous avons construites. Ces résultats sont donnés à titre indicatif puisque nous ne pouvons pas les comparer analytiquement à ceux de l'impédance exacte (qu'on ne peut obtenir en raison de la divergence des séries entrant en compte).

Proposition 6.8 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le comportement asymptotique des impédances spécifiques approchées DtN d'ordre 1 et 2 est donné par :*

$$Z^{\text{DtN1,3D}} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad (6.73)$$

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad (6.74)$$

Démonstration : Comme lorsque $ka \rightarrow 0$, la démonstration est rapide puisque $Z^{\text{DtN1,3D}} = Z_{00}^{\text{ex3}}$. On utilise alors le comportement asymptotique lorsque $ka \rightarrow +\infty$ de Z_{00}^{ex3} donné par (4.22) et on a le résultat annoncé.

En ce qui concerne l'impédance approchée DtN2, nous avons déjà vu que :

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim \frac{i(\lambda_{01} - \lambda_{00})}{-\frac{h_1(ka)}{h_0(ka)}(\lambda_{01} + \omega) - \left(\frac{1}{ka} - \frac{h_2(ka)}{h_1(ka)}\right)(\lambda_{00} + \omega)} \quad (6.75)$$

et donc, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim \frac{i2eka}{\left(i - \frac{1}{ka}\right)(3eka + \omega) - \left(\frac{1}{ka} + i - \frac{2}{ka}\right)(eka + \omega)} \quad (6.76)$$

puisque'on rappelle que d'après [1], lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{h_{n+1}(ka)}{h_n(ka)} \sim -i + \frac{n+1}{ka} \quad (6.77)$$

$$\lambda_{mn}(eka) \sim (2n - 2m + 1)eka$$

Il vient donc que :

$$Z^{\text{DtN2,3D}} \sim \frac{i}{i - \frac{1}{ka}} \sim 1 - i \frac{1}{ka} \quad (6.78)$$

□

7 Analyse numérique de performance pour les nouvelles conditions aux limites absorbantes de type DtN locales - Problème de scattering

Nous avons procédé à différents tests afin d'évaluer numériquement l'impact du nombre d'onde ka et de l'allongement de la frontière sphéroïdale prolata (et de l'obstacle) caractérisé par l'excentricité e sur la performance de la condition aux limites DtN d'ordre 2 que nous avons construite et qui est donnée par (3.12) lorsque l'on résout un problème de scattering 3D dans un contexte OSRC. Nous avons comparé ces résultats à ceux obtenus pour la condition BGT2 appliquée à des frontières sphéroïdales prolates (cf Figs. (22) à (33) dans [54]). Nous avons testé trois valeurs pour l'angle d'incidence $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, trois valeurs de $ka : 0.1, 1, 10$ et six excentricités allant de $e = 0.1$ (sphéroïde proche de la sphère) à $e = 0.9$ (sphéroïde très allongé). De plus, comme les impédances dépendent dans ce cas là des angles d'observation $\varphi \in [0, \pi[$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, les résultats sont représentés en 3D, en fonction de ces deux variables (cf Figs. (3.15)-(3.32)). Comme pour les tests numériques précédents, nous avons représenté, pour chacun des tests effectués, les valeurs absolues des différentes impédances que l'on compare ainsi que l'erreur relative correspondante à travers la quantité $\frac{|Z^{ex3} - Z^{app,3D}|}{|Z^{ex3}|}$, où $Z^{app,3D}$ est l'une des impédances approchées DtN ou BGT testée.

On peut remarquer, de façon générale, qu'à l'inverse du problème modal (problème du radiateur), la condition DtN2 délivre un excellent niveau de performance à bas régime ($ka = 0.1, ka = 1$) quelle que soit la valeur de l'excentricité e . On observe aussi que pour chacune des trois valeurs de ka testées, les conditions DtN2 et BGT2 montrent un niveau de performance équivalent quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence ($\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$).

Pour $ka = 0.1$, les résultats représentés par Figs. (3.16), (3.18), et (3.20) indiquent que l'erreur relative de l'impédance approchée DtN2 est toujours inférieure à 2%, alors que la performance de la condition BGT2 se détériore considérablement lorsque $e \geq 0.6$ (l'erreur relative est supérieure à 40%). Cela montre un excellent niveau de performance de la condition DtN2 pour ce régime de fréquence quelle que soit l'excentricité du sphéroïde prolata formant la frontière artificielle. On peut aussi noter que pour des frontières ayant une géométrie proche de la sphère ($e = 0.1$), les conditions DtN2 et BGT2 sont équivalentes (cf Figs. (3.15)-(3.17)-(3.19)).

Lorsqu'on observe les résultats obtenus pour $ka = 1$, on voit que la condition DtN2 conserve un très bon niveau de précision pour ce régime de fréquence puisque l'erreur relative des valeurs absolues des impédances est toujours inférieure à 13% quelles que soient les valeurs de l'excentricité e , des angles d'observation (φ, θ) et de l'angle d'incidence φ_0 (cf Figs. (3.22)-(3.24)-(3.26)). La condition BGT2, qui est équivalente à DtN2 pour $e = 0.1, 0.2$ (cf Figs. (3.21)-(3.23)-(3.25)) a un niveau de performance convenable jusqu'à $e = 0.4$ puis sa précision se dégrade à mesure que

$e \rightarrow 1$.

Enfin, les résultats obtenus pour $ka = 10$ corroborent que le cadre OSRC n'est pas adapté à des régimes de fréquence élevés. Pour des excentricités allant de $e = 0.1$ à $e = 0.4$, les deux conditions DtN2 et BGT2 ont un niveau de performance équivalent (cf Figs. (3.27)-(3.29)-(3.31)). Leur précision est bonne pour certaines valeurs de φ et θ mais on observe des pics d'erreur au niveau des erreurs relatives (cf Figs. (3.28)-(3.30)-(3.32)) pour d'autres valeurs de ces angles (par exemple pour $\varphi_0 = 0$, l'erreur relative croît énormément pour $\varphi \in \mathcal{V}(\frac{\pi}{3})$ cf Fig.(3.28)). Le niveau de performance de la condition DtN2 reste similairement moyen pour les trois angles d'incidence testés tout en dégénéralant légèrement lorsque $e \rightarrow 1$. La condition BGT2 perd quant à elle énormément de précision lorsque le sphéroïde représentant la frontière artificielle s'allonge, l'erreur relative de BGT2 dépasse 100% pour certaines valeurs de φ et θ . On observe cependant que pour quelques rares valeurs de ces angles, la condition BGT2 montre un bon niveau de précision

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = 0$$

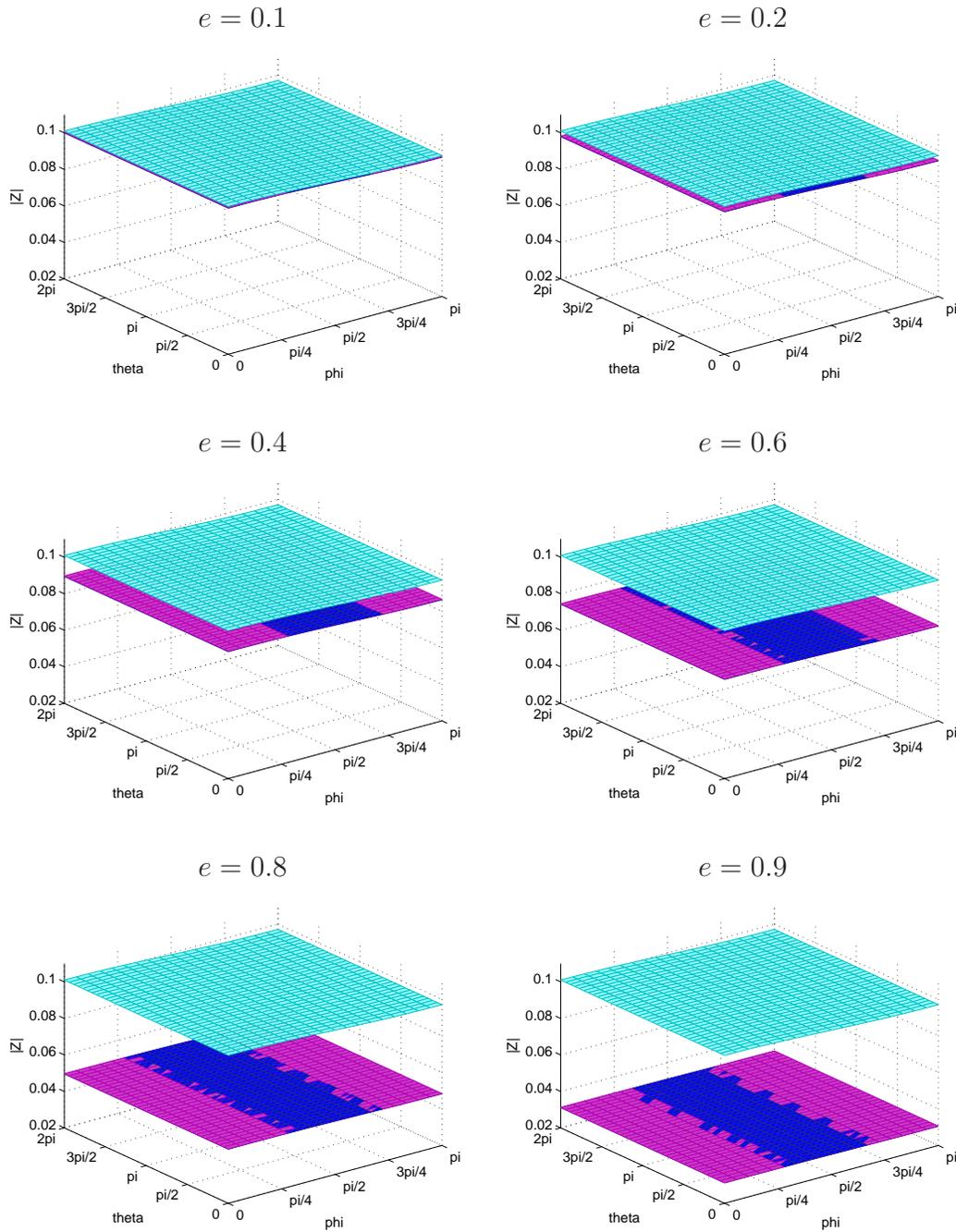


FIG. 3.15: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = 0$$

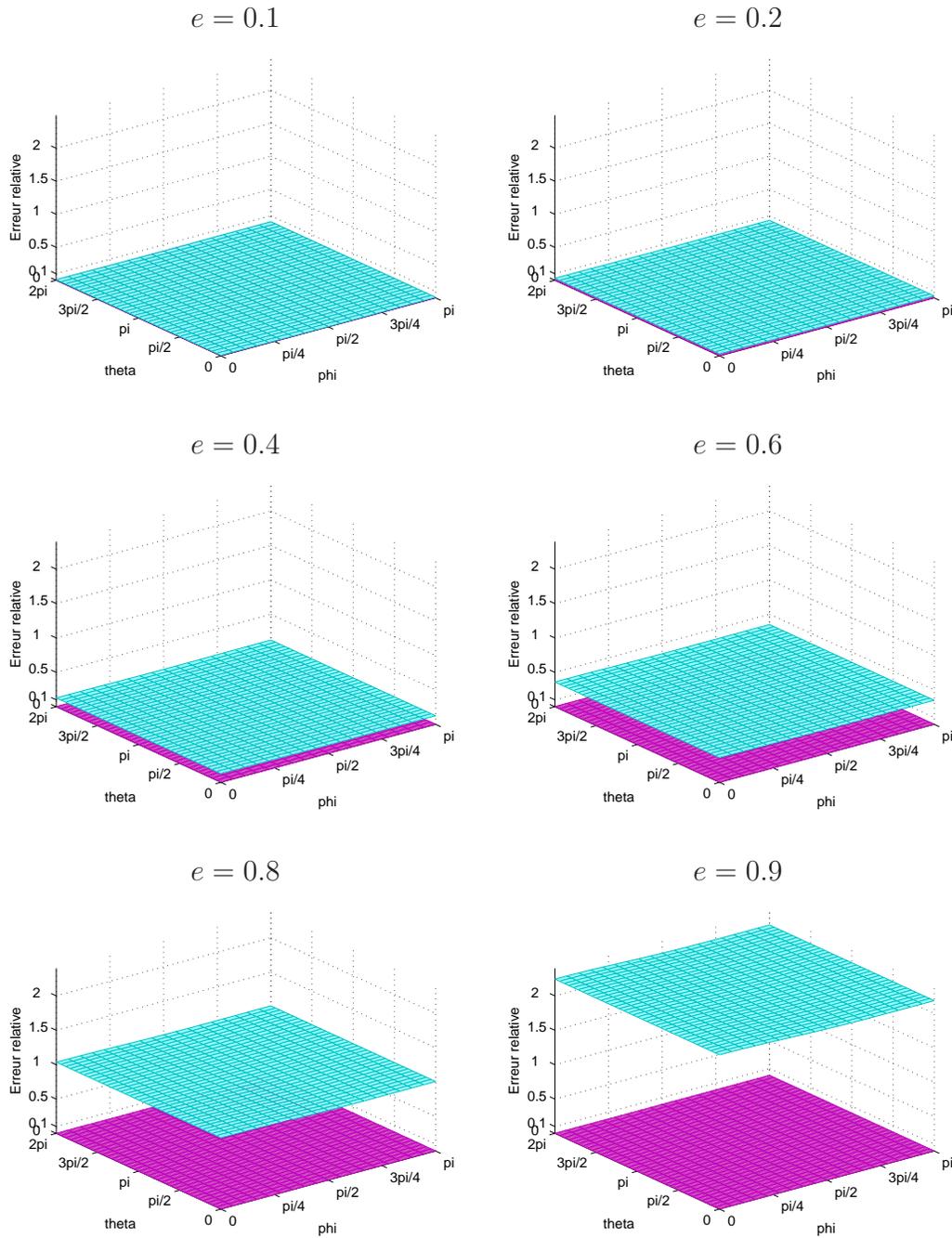


FIG. 3.16: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

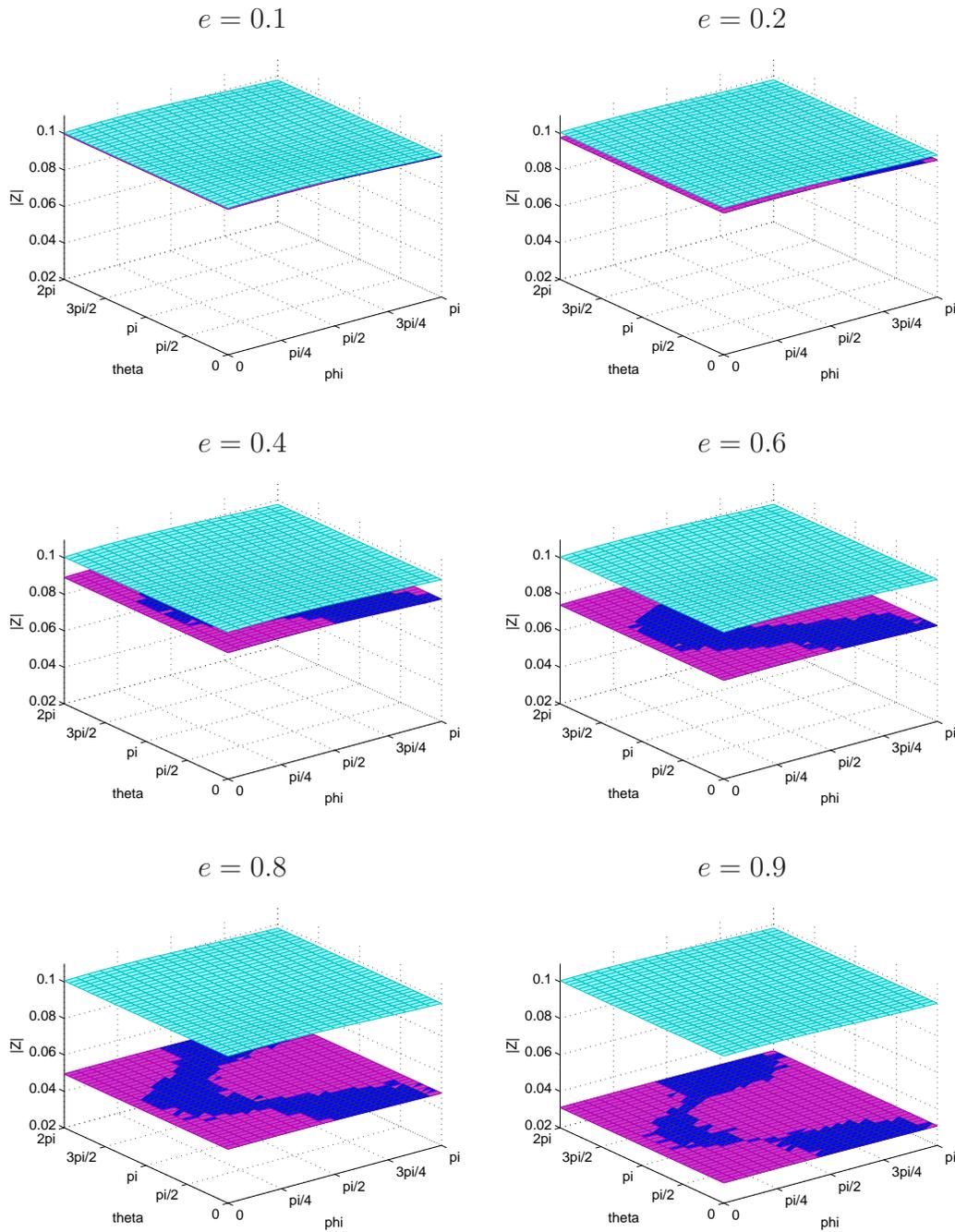


FIG. 3.17: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

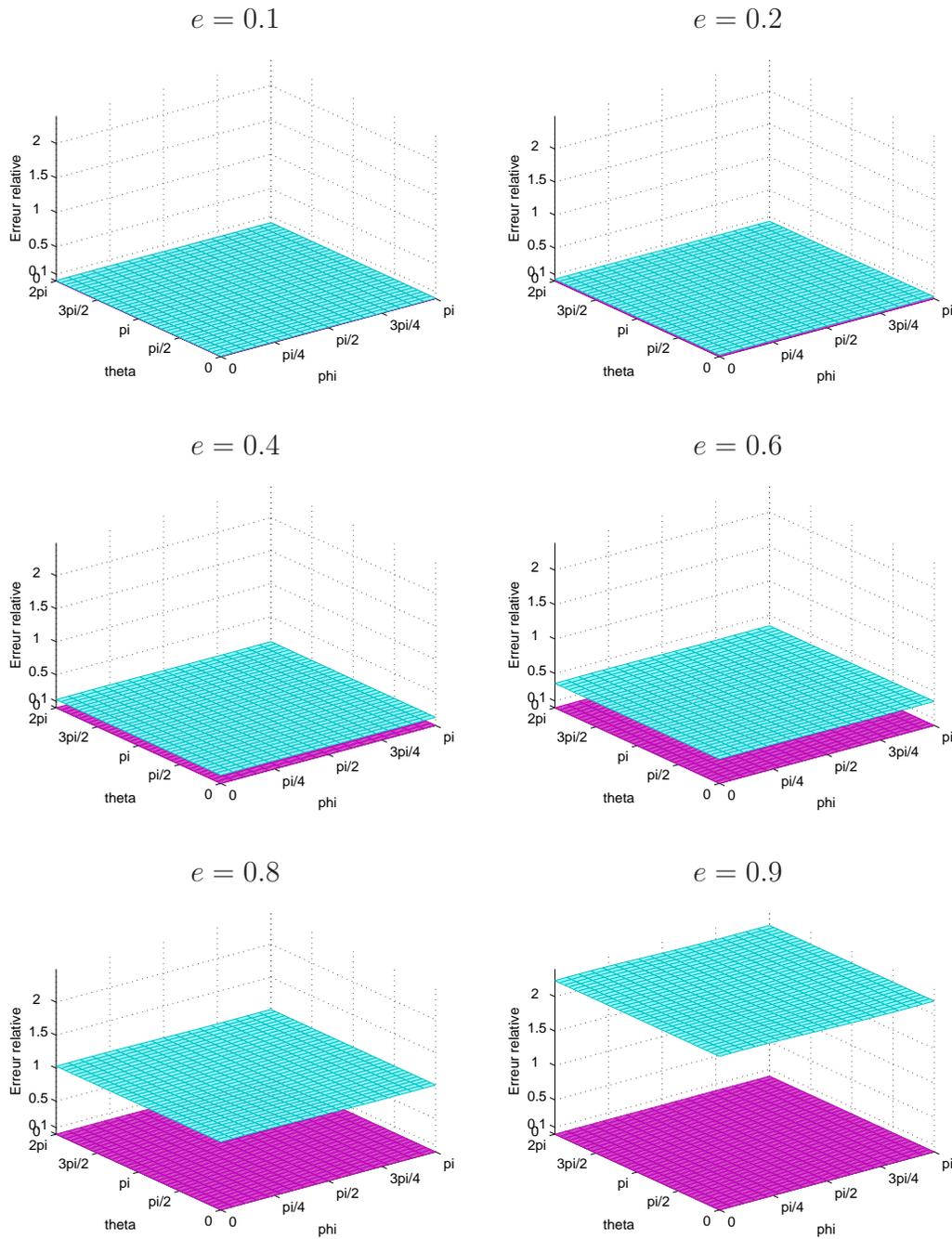


FIG. 3.18: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

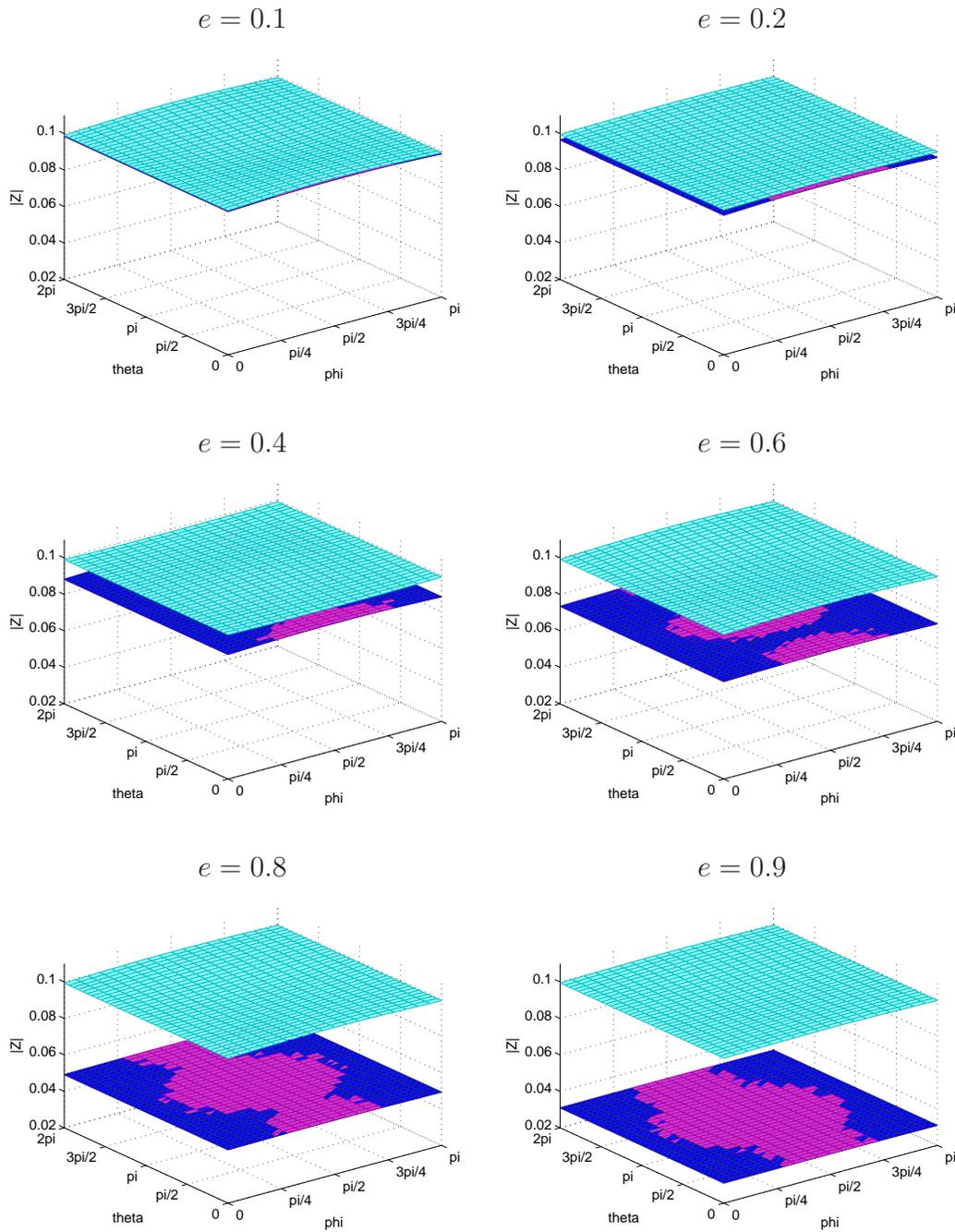


FIG. 3.19: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 0.1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

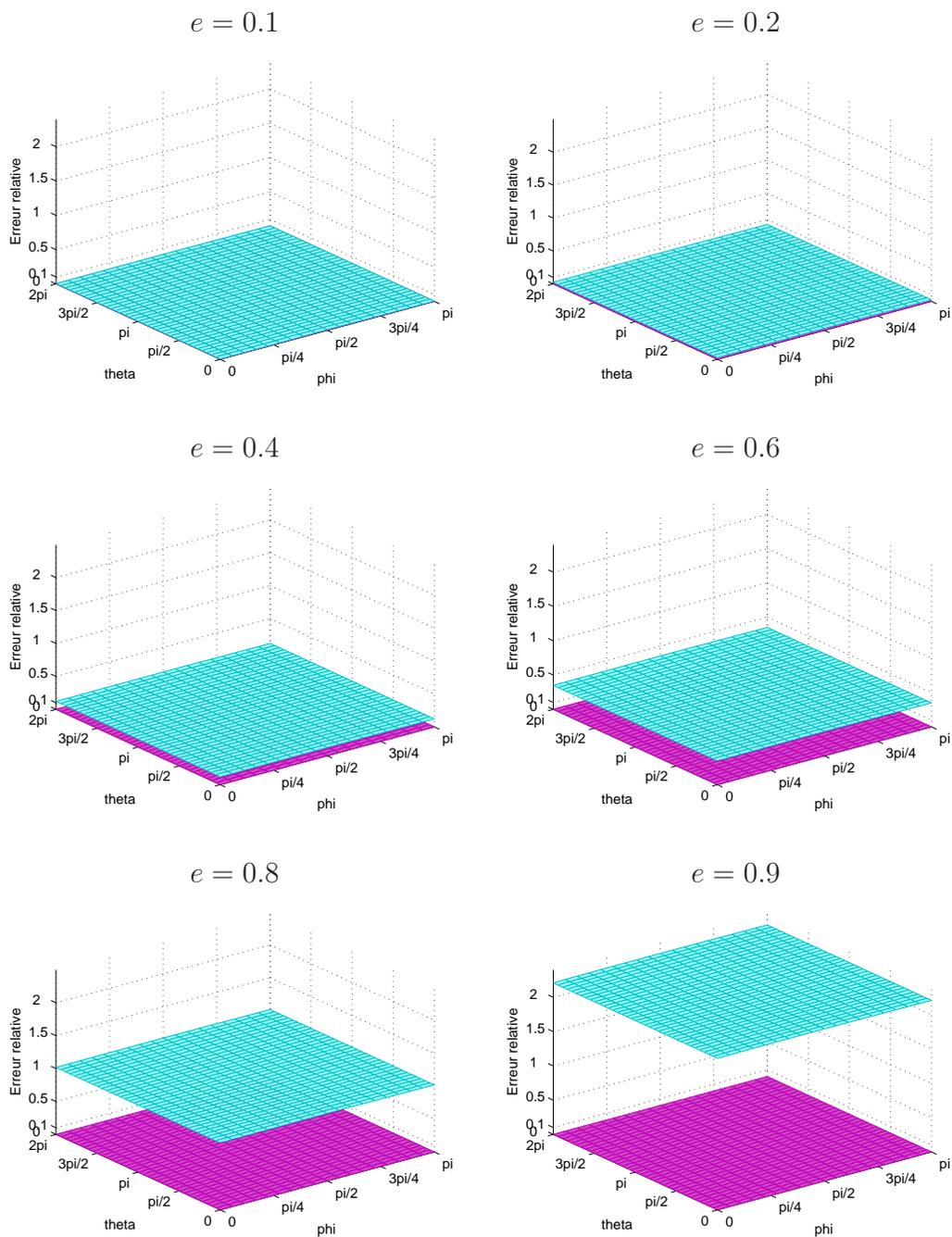


FIG. 3.20: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = 0$$

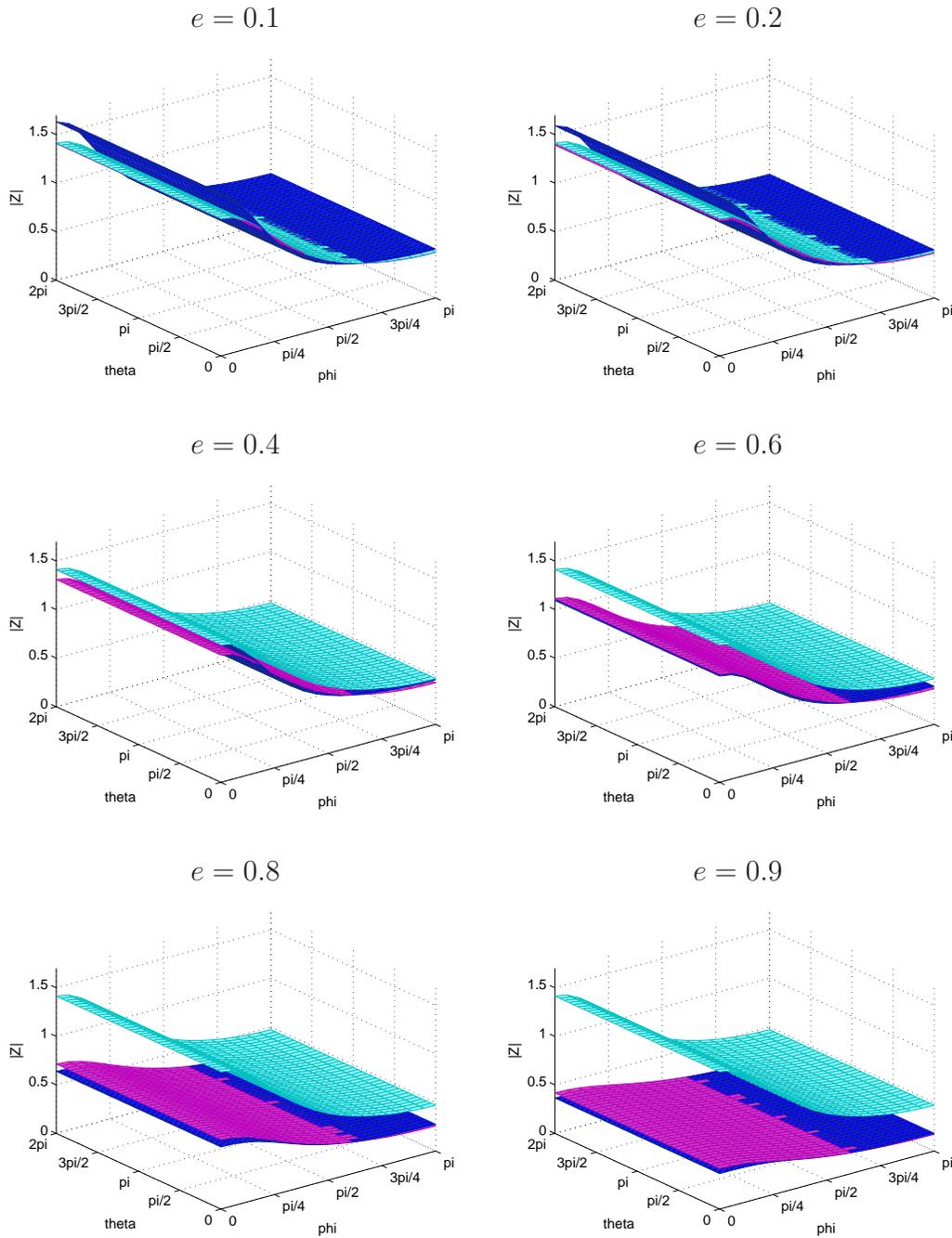


FIG. 3.21: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = 0$$

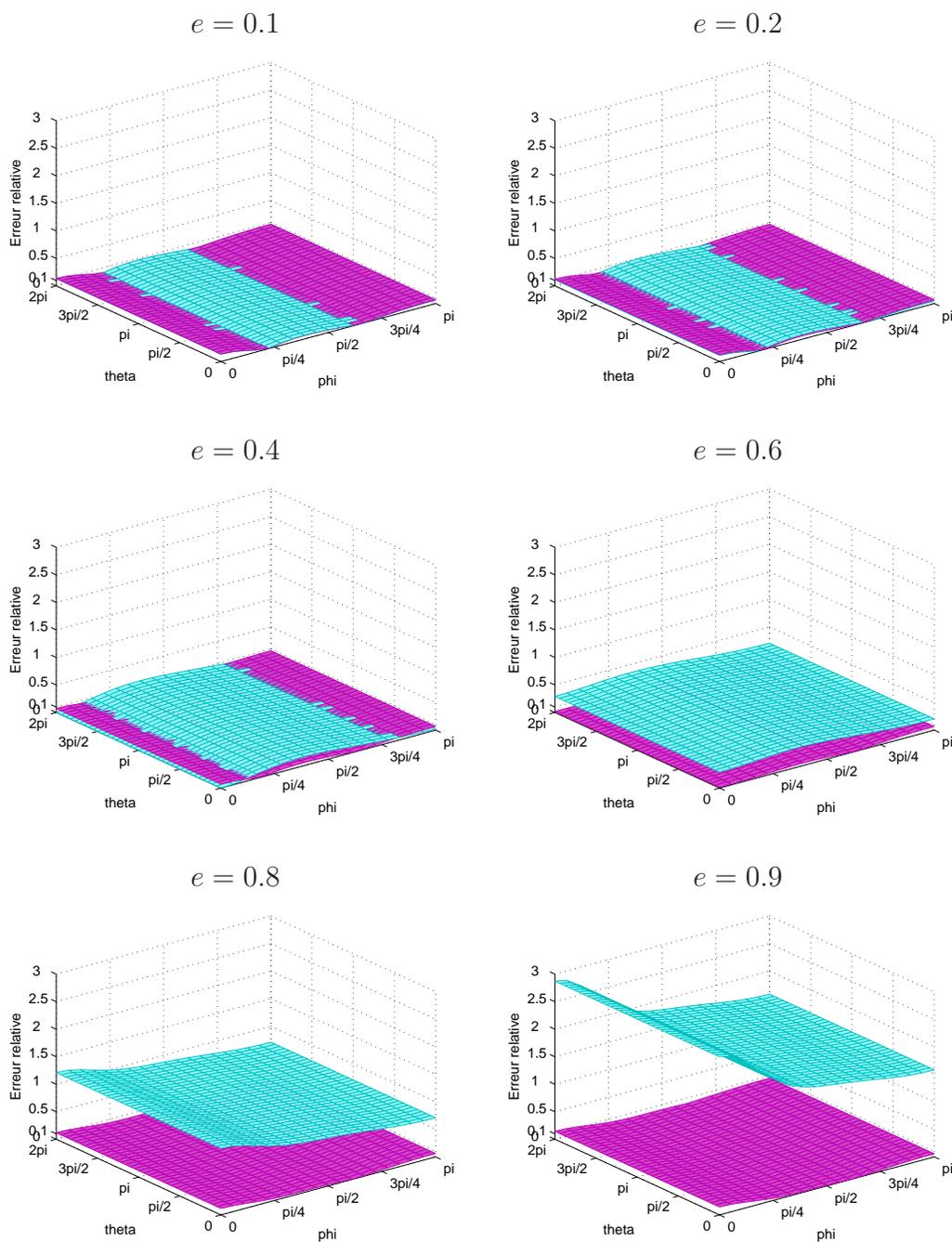


FIG. 3.22: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

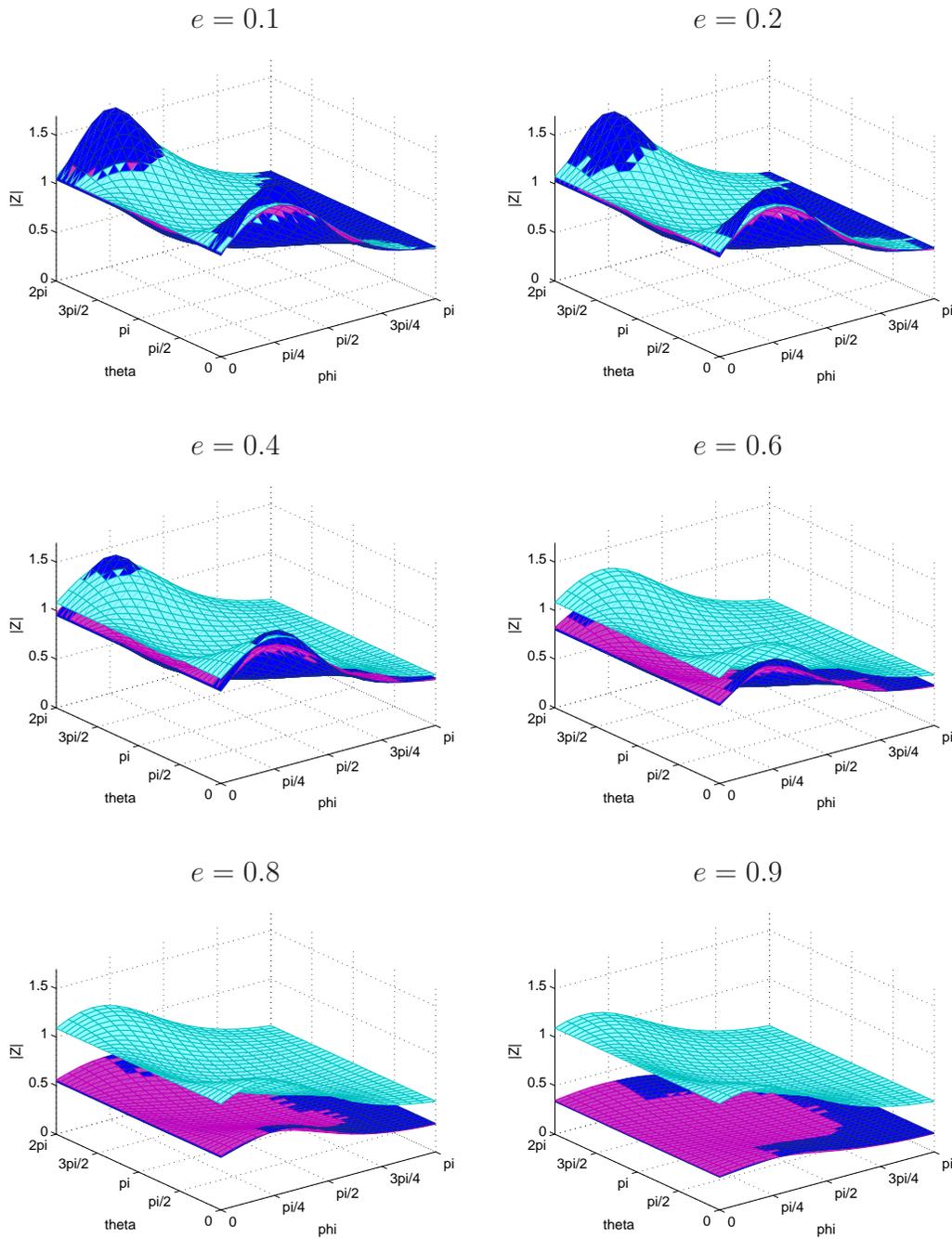


FIG. 3.23: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

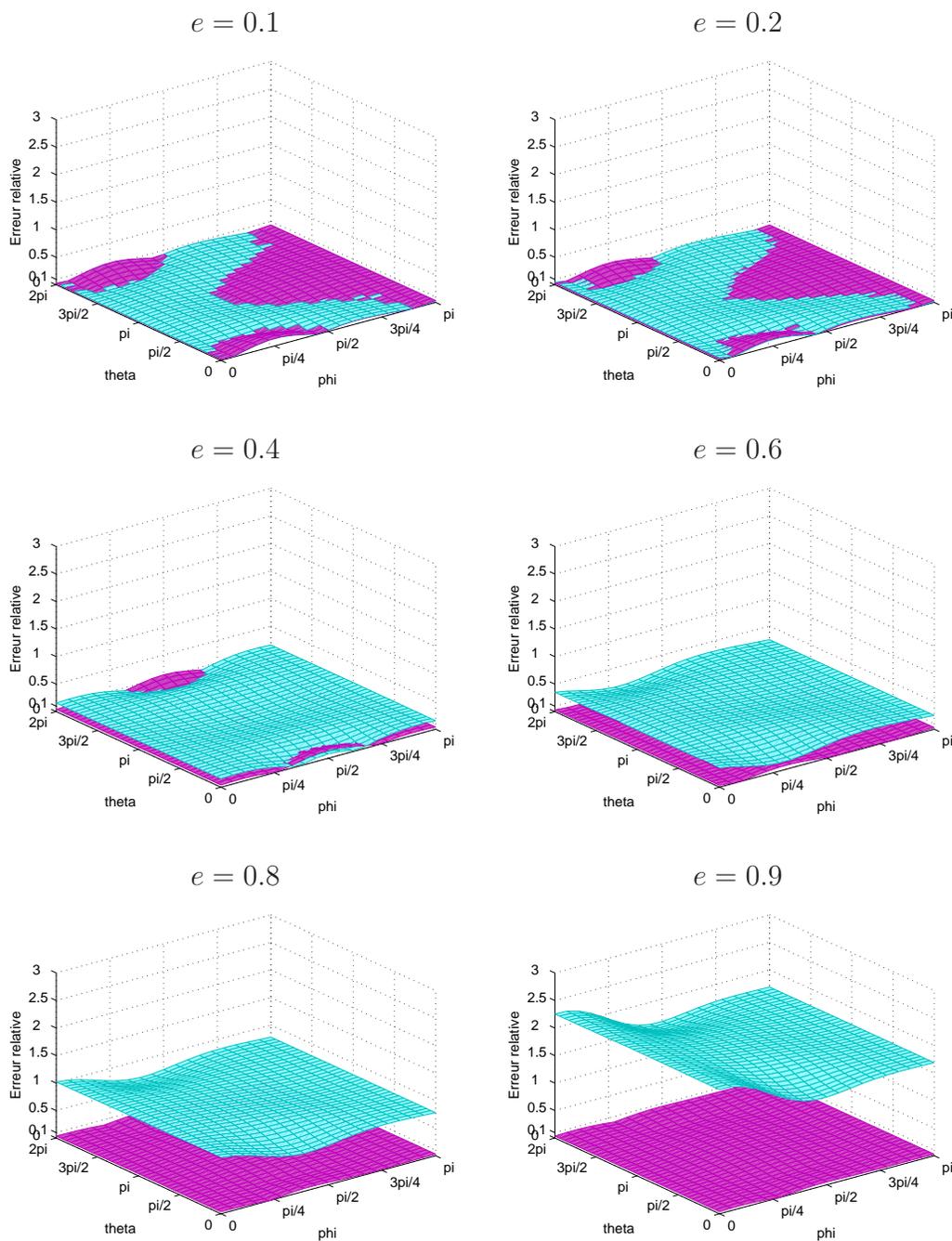


FIG. 3.24: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

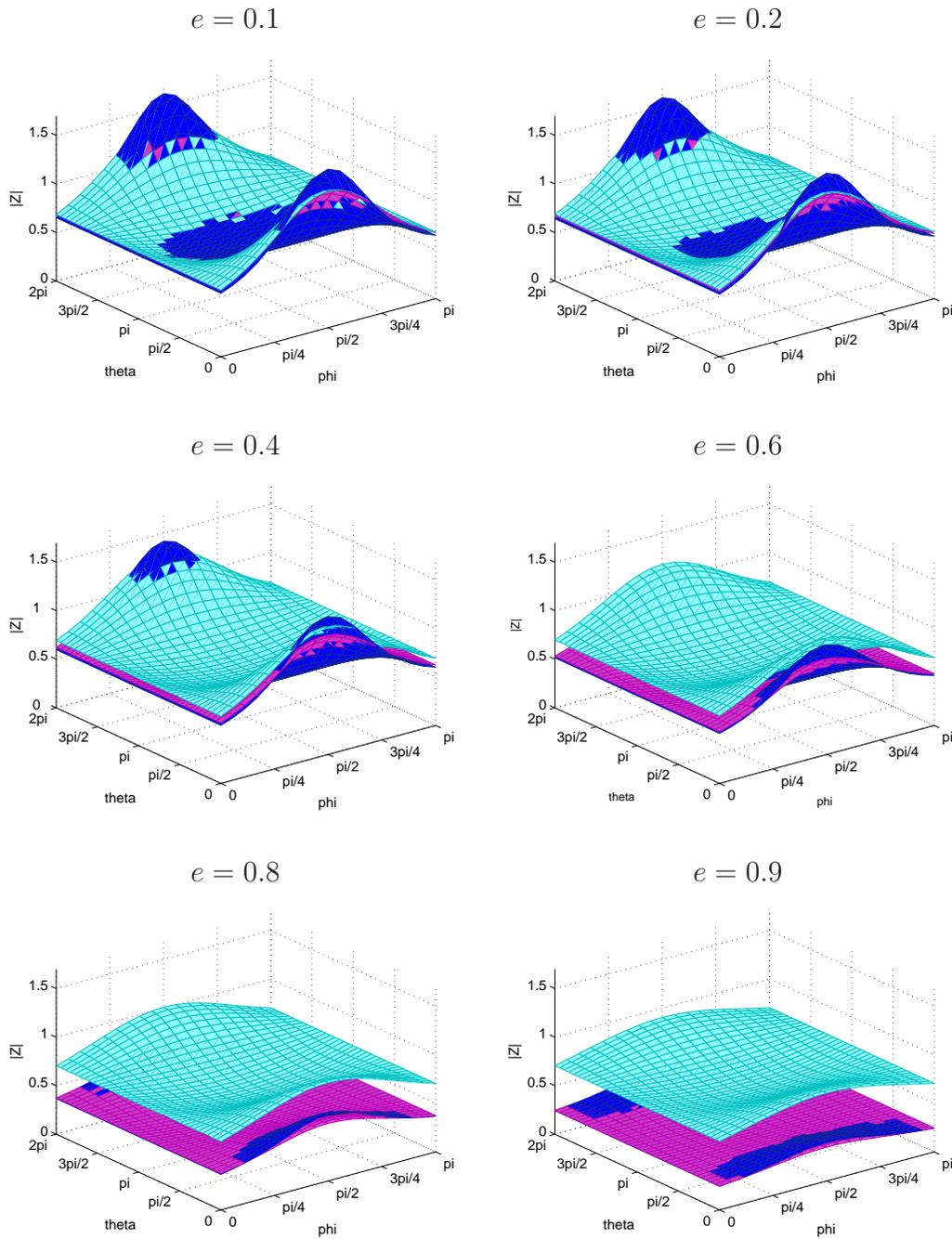


FIG. 3.25: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 1$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

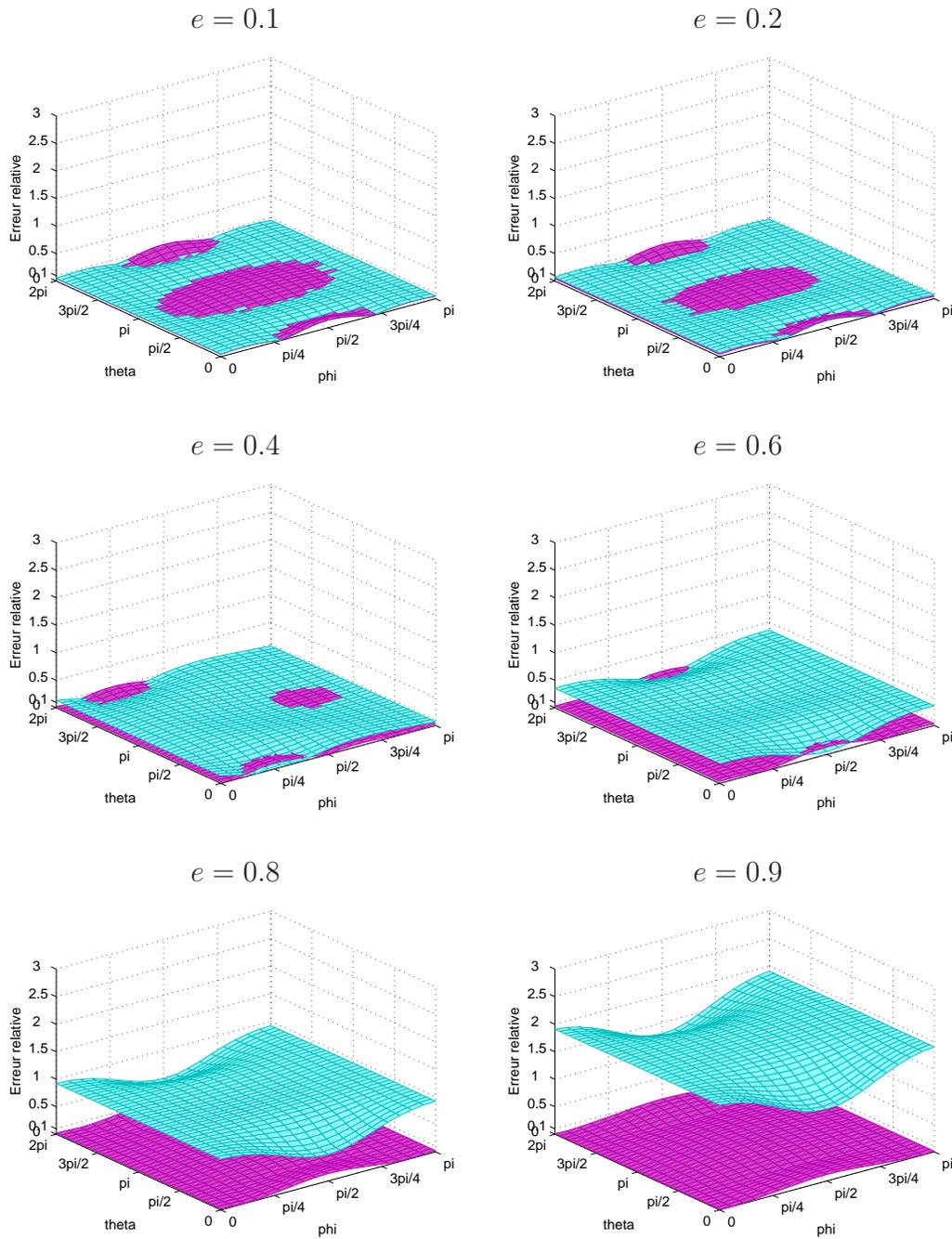


FIG. 3.26: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 10$$

$$\varphi_0 = 0$$

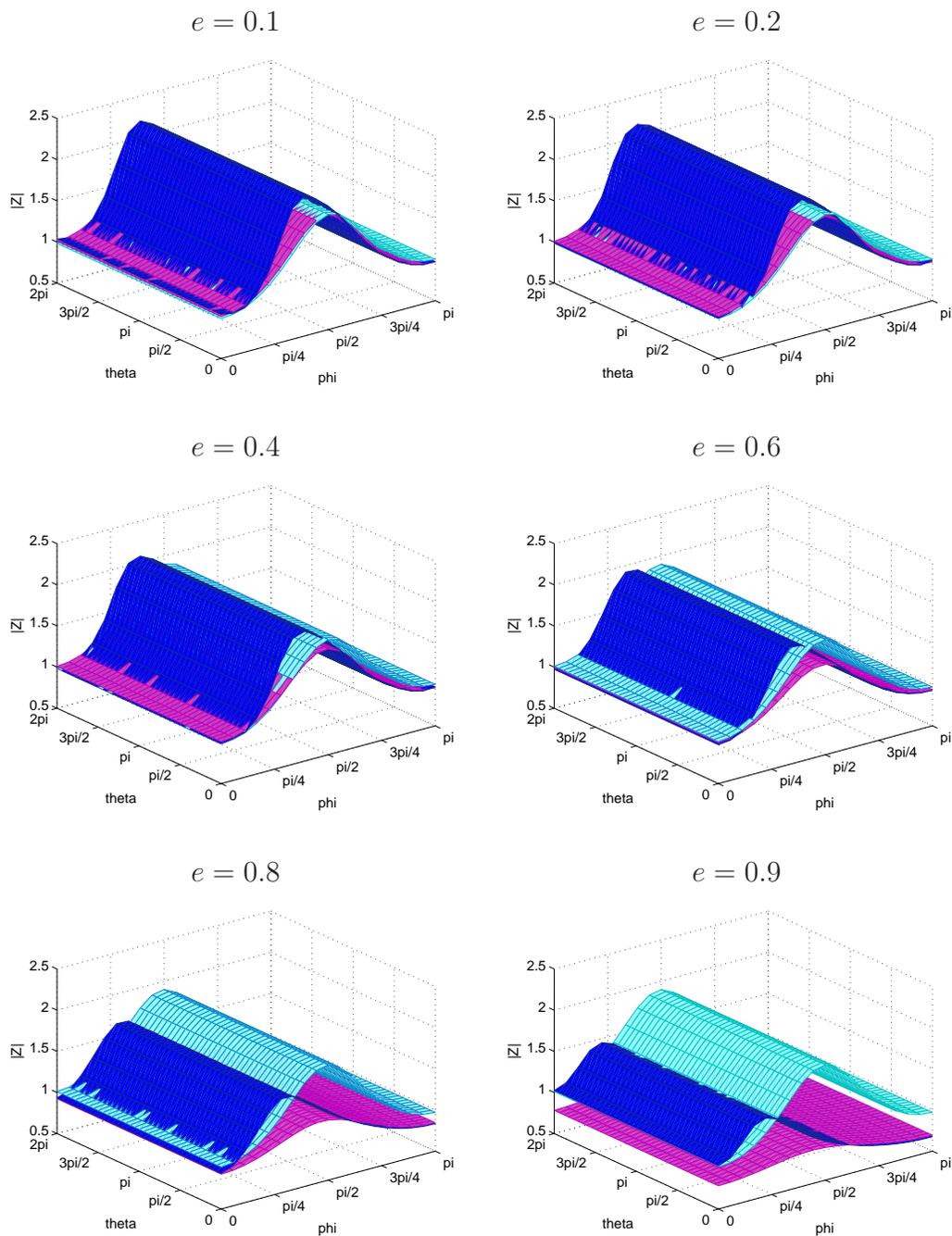


FIG. 3.27: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 10$$

$$\varphi_0 = 0$$

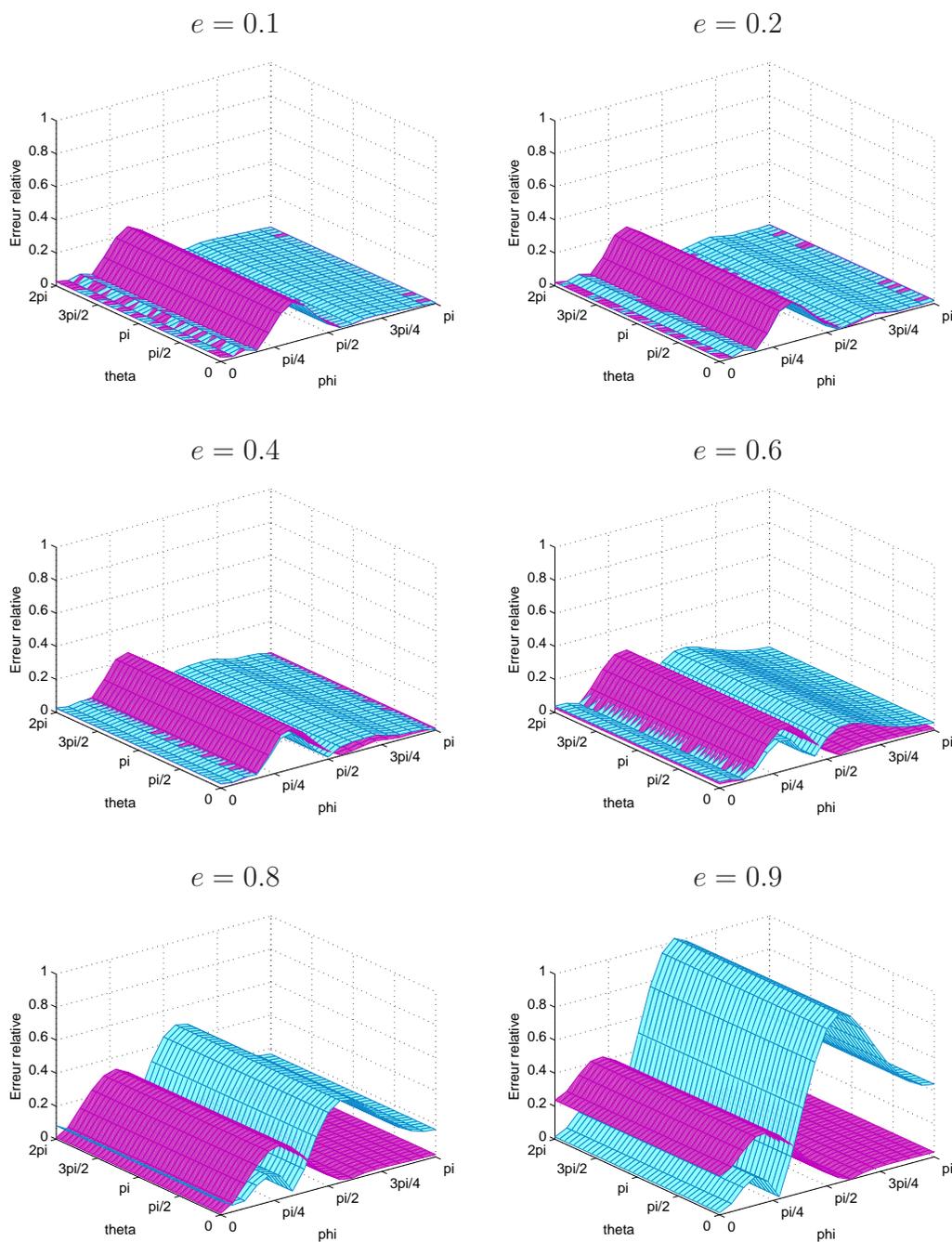


FIG. 3.28: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 10$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

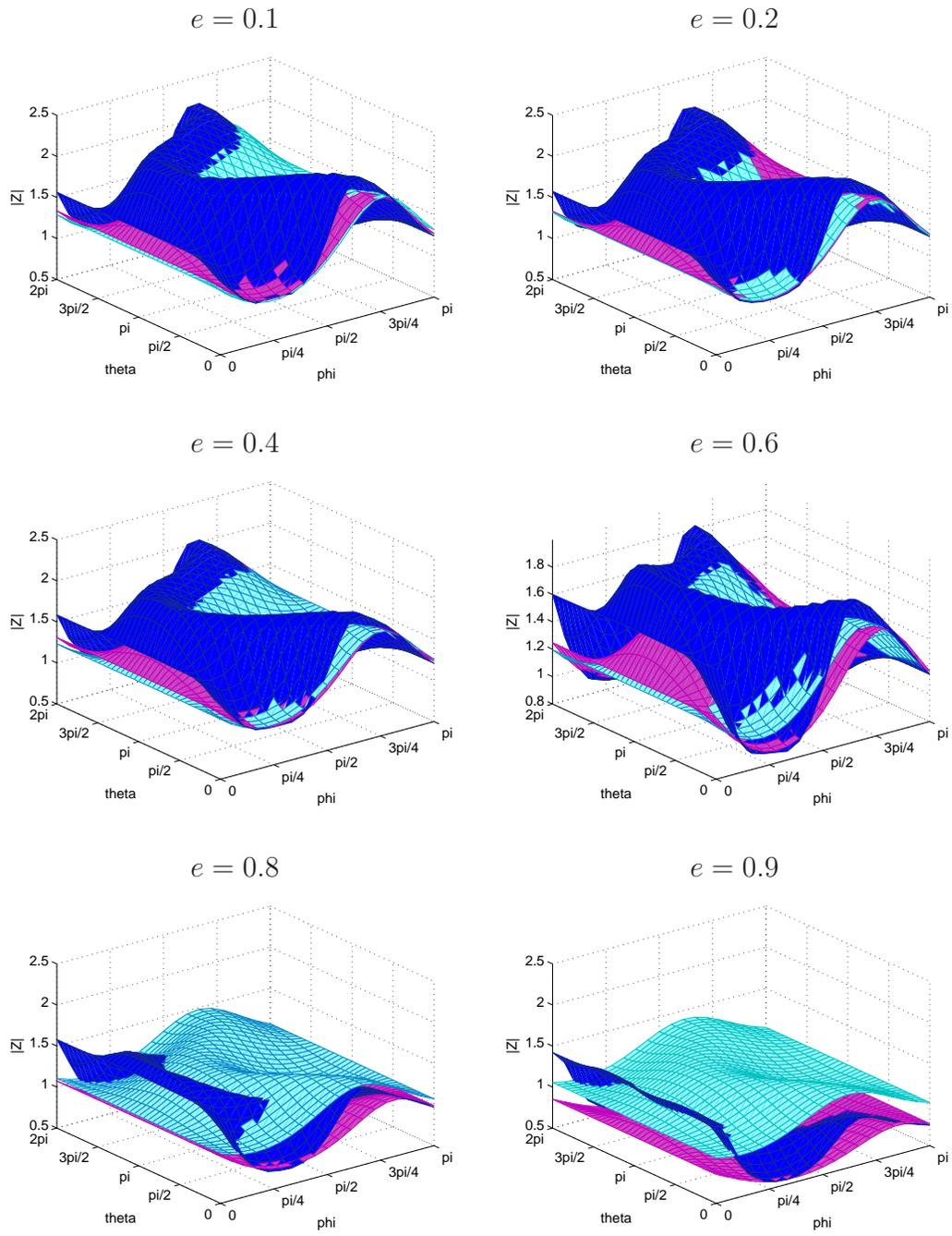


FIG. 3.29: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = \frac{10}{\pi}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

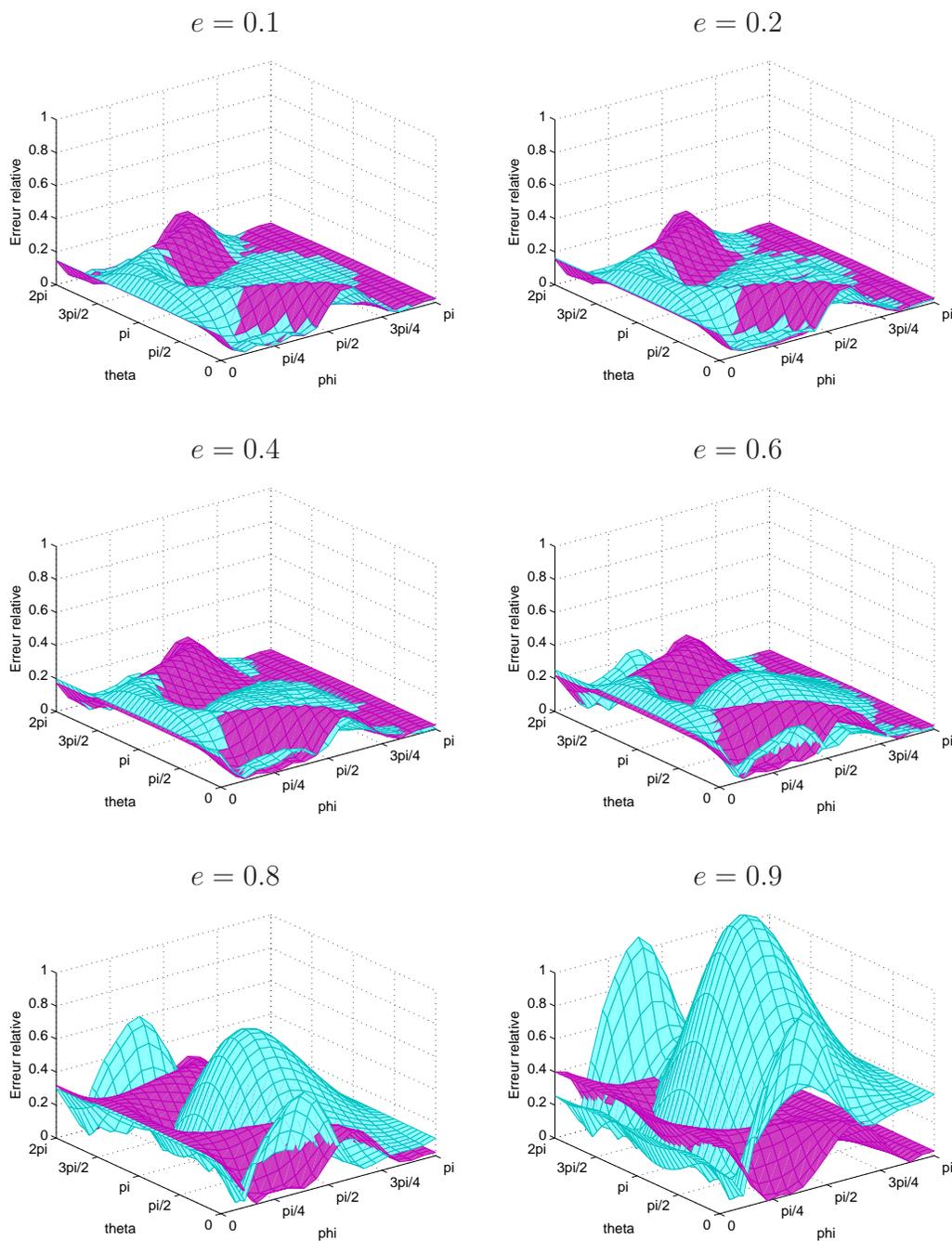


FIG. 3.30: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = \frac{10}{\pi}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

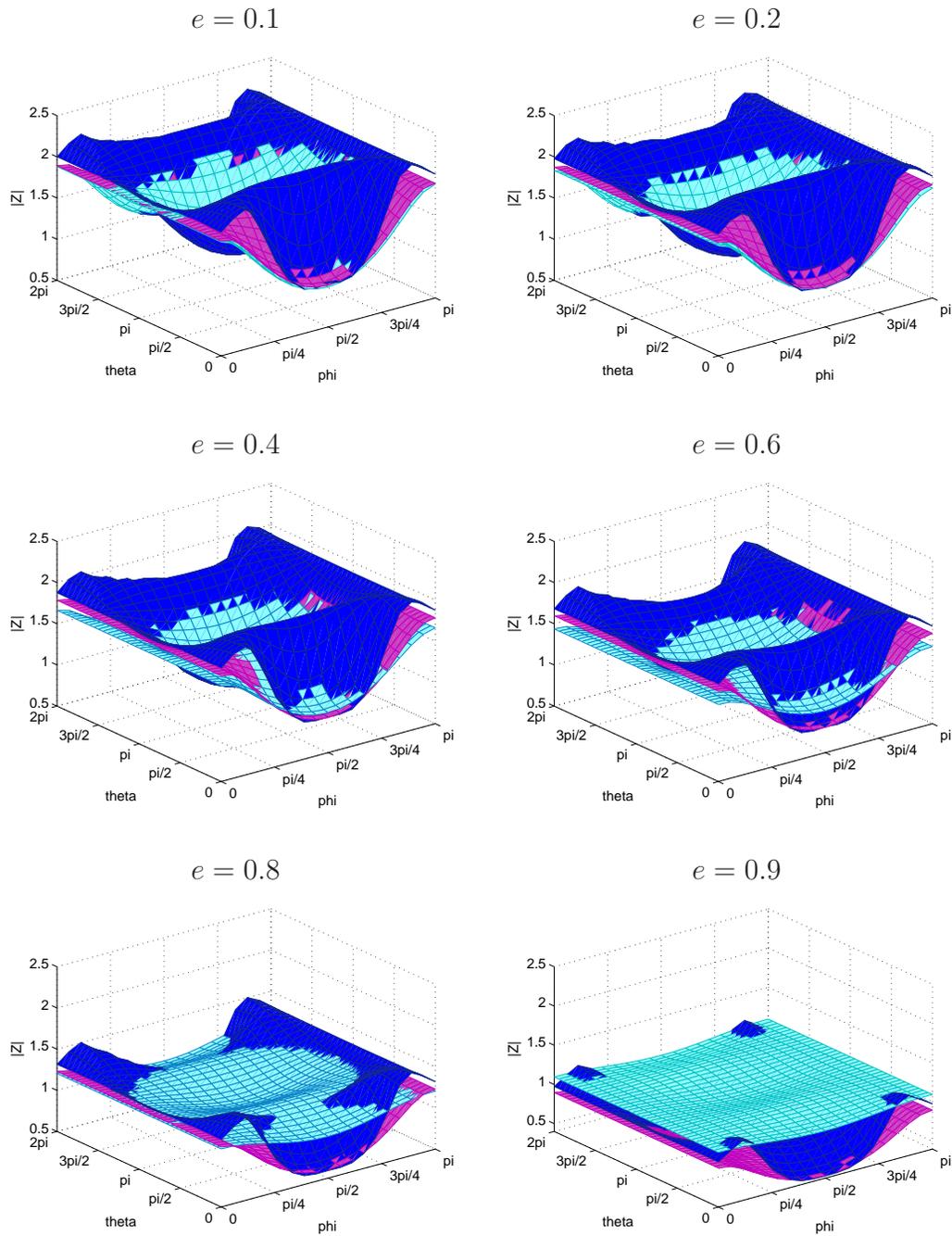


FIG. 3.31: Valeurs absolues des impédances spécifiques exacte (■), DtN2 (■), BGT2 (■).

$$ka = 10$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

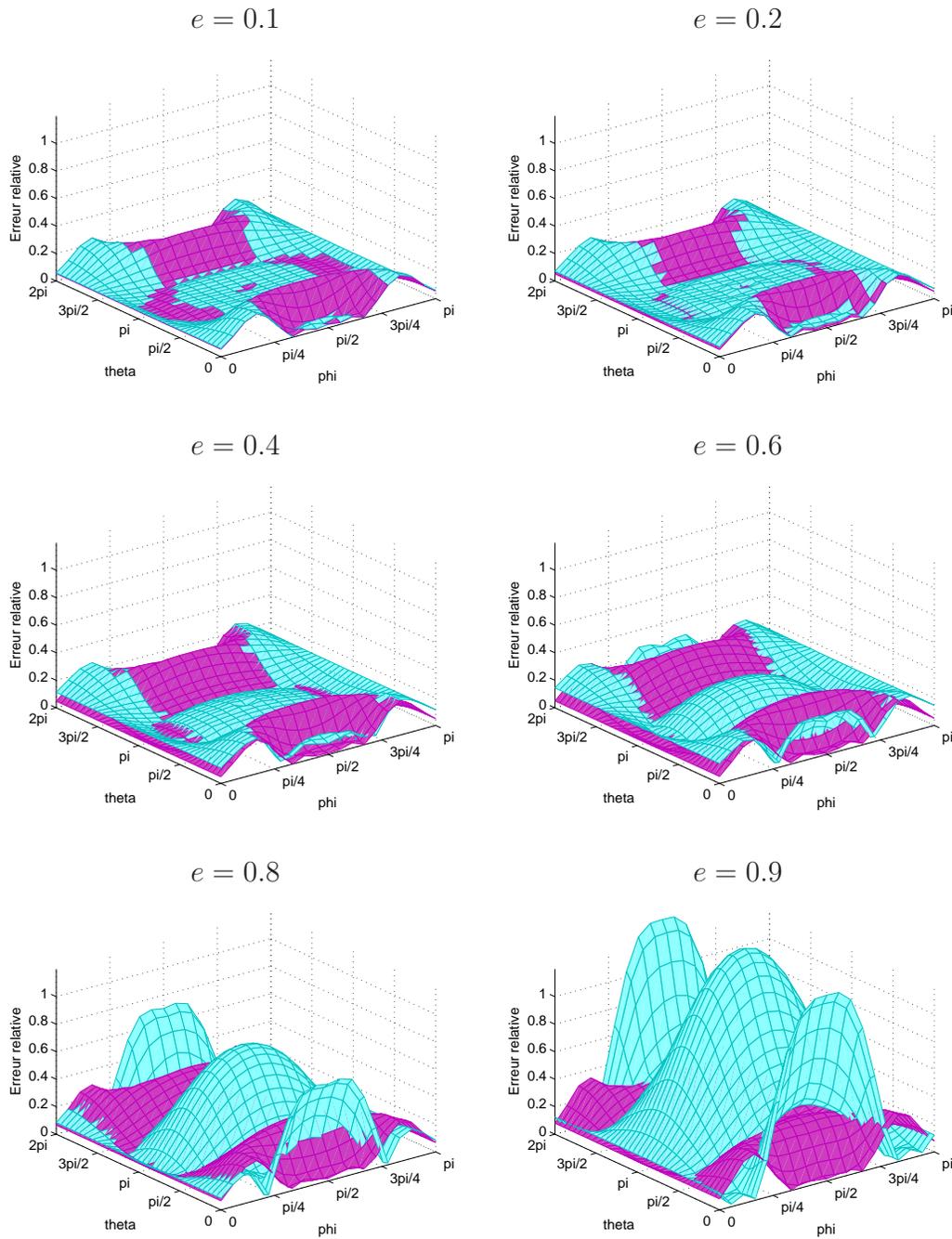


FIG. 3.32: Erreurs relatives des valeurs absolues des impédances spécifiques approchées DtN2 (■), BGT2 (■).

8 Conclusion

Comme dans le cas bidimensionnel (cf Chap 2), nous avons construit une nouvelle classe de conditions aux limites approchées locales de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre 1 (3.9) et d'ordre 2 (3.12) pour des frontières artificielles de géométrie sphéroïdale prolata dans le cadre de la résolution d'un problème de scattering 3D acoustique par un obstacle de forme allongée. La résolution du problème modal montre que pour les premiers modes, la condition DtN1 (resp. DtN2) est plus performante que la condition BGT1 (resp. BGT2), mais lorsque l'on fait l'analyse pour des modes supérieurs, on observe que les deux classes de condition ne sont pas précises. On peut noter que pour des excentricité proches de 1 (i.e pour des frontières très allongées), DtN2 est plus performante que BGT2 même si leurs performances ne sont pas satisfaisantes. Comme pour la résolution du problème 2D, les travaux de Reiner et al. [54] ont montré que la condition BGT2 (1.2) n'est plus performante lorsque $e \geq 0.6$. Dans ce chapitre, on a pu observer que la condition DtN2 (3.12) délivre un excellent niveau de précision à basse fréquence pour le problème de scattering 3D, quelle que soit la valeur de l'excentricité e du sphéroïde formant la frontière, des angles d'observation (φ, θ) et de l'angle d'incidence φ_0 . Cela montre que la condition DtN2 est une condition adaptée aux obstacles de forme allongée et même très allongée contrairement à la condition BGT2 dont le bon niveau de performance se limite à de petites excentricités. Enfin, grâce aux tests numériques effectués, nous avons pu mettre en évidence que le cadre OSRC n'est pas adapté aux régimes de fréquence élevés ($ka > 1$), avec des CLA de type DtN, comme cela a déjà été mis en évidence dans [4, 41].

Chapitre 4

Formulation en volume : le problème 2D

Sommaire

1	Introduction au problème	164
2	Expression des différents champs acoustiques	165
3	Détermination des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app}	168
4	Résultats numériques	182
5	Analyse haute fréquence	188

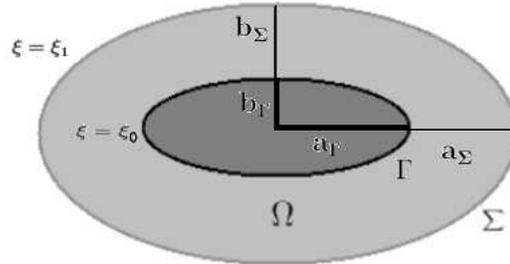
Le chapitre 2 de cette thèse a permis en particulier de confirmer ce qui avait déjà été observé dans divers travaux antérieurs [4, 6, 41], à savoir que le cadre OSRC n'est pas aussi précis en régime haute fréquence qu'en régime basse fréquence. On a pu voir, grâce aux tests numériques effectués pour une fréquence $ka = 10$ avec une formulation OSRC (Figs 2.28-2.33 du chapitre 2), que les conditions DtN testées dans ce contexte n'étaient plus performantes, alors que la condition DtN2 se montrait très précise pour les basses fréquences. Dans le but d'étudier la performance des conditions Dirichlet-to-Neumann que nous avons construites à haute fréquence, nous allons étudier la formulation en volume pour le problème de scattering bidimensionnel. Nous espérons notamment donner une idée de l'emplacement optimal de la frontière artificielle elliptique autour de l'obstacle de diffraction qui garantisse à la fois une solution du problème approché très précise et un domaine de calcul le plus petit possible.

1 Introduction au problème

Pour le problème de scattering bidimensionnel en volume que nous étudions, nous prenons en compte un obstacle de forme elliptique de surface Γ . Dans le système de coordonnées elliptiques (ξ, θ) , la frontière Γ est repérée par $\xi = \xi_0$ et son excentricité est notée e_Γ avec $e_\Gamma = \frac{1}{\cosh \xi_0}$. Le problème de scattering (ou problème exact) est posé en domaine non borné Ω^+ , complémentaire dans \mathbb{R}^2 de l'obstacle elliptique. On note $u^{ex,2D}$ le champ diffracté exact solution de ce problème extérieur :

$$\begin{cases} \Delta u^{ex,2D} + k^2 u^{ex,2D} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{ex,2D} = -u^{inc,2D} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u^{ex,2D} - ik u^{ex,2D} \right] = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Afin de résoudre par éléments finis ce problème de scattering, on entoure l'obstacle d'une frontière artificielle Σ , de forme elle aussi elliptique, et on délimite ainsi un domaine de calcul borné Ω . La frontière Σ est alors repérée par $\xi = \xi_1$ et son excentricité e_Σ est définie par $e_\Sigma = \frac{1}{\cosh \xi_1}$.



Sur la frontière artificielle Σ , on applique une des conditions aux limites absorbantes (CLA) de type Dirichlet-to-Neumann que nous avons construites au chapitre 2.

Le problème de scattering est alors résolu à l'intérieur du domaine de calcul Ω . On note $u^{app,2D}$ l'onde définie comme la solution du problème mixte :

$$\begin{cases} \Delta u^{app,2D} + k^2 u^{app,2D} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{app,2D} = -u^{inc,2D} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{app,2D}}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{T} u^{app,2D} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (1.2)$$

où Δ désigne le Laplacien, k le nombre d'onde et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sortant à l'obstacle. Nous imposons une condition de Dirichlet sur le bord Γ de l'obstacle

de diffraction et une des conditions DtN introduites au chapitre 3 sur la frontière artificielle Σ où l'opérateur \tilde{T} est défini par :

$$\tilde{T} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} T$$

T représente donc soit l'opérateur $DtN1$ soit un des opérateurs $DtN2$ pair ou impair que nous avons présentés précédemment (cf chapitre 2). L'opérateur \tilde{T} s'obtient en multipliant T par un coefficient qui provient de l'écriture de la dérivée normale en fonction de la dérivée par rapport à ξ . Nous renvoyons à l'annexe A pour des calculs détaillés. Enfin, $u^{inc,2D}$ désigne l'onde incidente que l'on choisira sous forme d'une onde plane.

Lorsque l'on introduit une CLA sur la frontière artificielle Σ placée autour de l'obstacle de diffraction le champ diffracté exact $u^{ex,2D}$ restreint à Ω n'est pas solution du problème approché (1.2). En effet, la condition posée sur Σ n'est pas vérifiée par le champ exact. Numériquement, cela se traduit par des réflexions générées par Σ qui vont polluer la solution calculée dans Ω . Si ces réflexions sont minimales, $u^{app,2D}$ est une bonne approximation de $u^{ex,2D}$ et on considère alors que la CLA posée sur la frontière artificielle Σ est performante. Afin de déterminer le niveau de performance de la CLA, nous voulons évaluer la précision du champ diffracté approché $u^{app,2D}$ par rapport au champ diffracté exact $u^{ex,2D}$. Notre objectif est de les comparer en fonction de l'éloignement de la frontière artificielle Σ par rapport à la surface de l'obstacle Γ . Pour ce faire, dans le paragraphe suivant, nous allons donner l'expression du champ diffracté exact et des différents champs acoustiques (incident et approché) intervenant dans le problème approché (1.2).

2 Expression des différents champs acoustiques

Lorsque l'on écrit le problème exact et le problème approché (1.2), trois champs acoustiques interviennent : le champ diffracté exact $u^{ex,2D}$, solution du problème exact, le champ incident $u^{inc,2D}$, donnée du problème, et le champ diffracté approché $u^{app,2D}$, solution du problème approché. Nous allons donner ici l'expression de ces différents champs, ce qui nous permettra par la suite d'évaluer la précision de la solution approchée *via* la comparaison avec la solution exacte.

2.1 Décomposition de la solution exacte $u^{ex,2D}$

On rappelle que le champ diffracté exact $u^{ex,2D}$ est solution du problème exact, c'est-à-dire du problème posé en domaine non borné Ω^+ , complémentaire dans \mathbb{R}^2 de l'obstacle elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^{ex,2D} + k^2 u^{ex,2D} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{ex,2D} = -u^{inc,2D} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u - iku \right] = 0 & \end{array} \right.$$

Le problème exact est posé en domaine infini et la condition de Sommerfeld [61] posée à l'infini garantit l'unicité de $u^{ex,2D}$. L'existence de $u^{ex,2D}$ a été démontrée dans [47] par exemple.

Dans le cas présent, la solution exacte peut s'exprimer comme un développement asymptotique de modes sortants $R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi)$, indépendants les uns des autres. En effet, il est démontré dans [10], Eq. (3.4), que la solution $u^{ex,2D}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$u^{ex,2D} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m^{exact} u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) \quad (2.3)$$

où $u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta)$ est définie par

$$u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) = R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \quad (2.4)$$

et le coefficient d_m^{exact} est donné, $\forall m \in \mathbb{N}$, par :

$$d_m^{exact} = \sqrt{8\pi} (-i)^{|m|+2} \frac{R_m^{(1)}(kf, \cosh \xi_0) S_m(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{N_m} R_m^{(3)}(kf, \cosh \xi_0)} \quad (2.5)$$

On rappelle que sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_0\}$, $\cosh \xi_0 = e_\Gamma^{-1}$ et $kf = e_\Gamma k a_\Gamma$ où a_Γ est le demi axe principal de cette ellipse et e_Γ sont excentricité (cf paragraphe 2 du chapitre 2).

Les fonctions $R_m^{(3)}$, S_m et N_m ont été respectivement définies Eqs. (1.25), (1.26) et (1.27) au chapitre 1.

2.2 Décomposition de l'onde incidente $u^{inc,2D}$

Dans le but d'identifier la solution approchée $u^{app,2D}$, nous avons besoin de connaître l'expression du champ incident $u^{inc,2D}$.

Ici, l'onde incidente à Γ est du type onde plane :

$$u^{inc,2D} = e^{ikf \cosh \xi (\cos \theta \cos \theta_0 + \tanh \xi \sin \theta \sin \theta_0)} \quad (2.6)$$

où θ_0 est l'angle d'incidence.

On sait d'après Stratton (cf Eq. (84) p 386 dans [60]) que, tout comme le champ diffracté exact, cette onde plane peut s'écrire comme une superposition de modes (découplés) :

$$u^{inc,2D} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m^{inc} u_m^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) \quad (2.7)$$

où

$$u_m^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) = R_m^{(1)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \quad (2.8)$$

et, $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$d_m^{inc} = \sqrt{8\pi} i^{|m|} \frac{S_m(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{N_m}} \quad (2.9)$$

Les fonctions $R_m^{(1)}$, S_m et N_m ont préalablement été définies respectivement par (1.25), (1.26) et (1.27) au chapitre 1.

2.3 Décomposition de la solution approchée $u^{app,2D}$

Notre but étant de comparer les champs diffracté exact et approché afin d'évaluer la précision des conditions Dirichlet-to-Neumann construites, nous avons besoin d'exprimer la solution du problème approché $u^{app,2D}$. D'après [52], l'onde acoustique $u^{app,2D}$, solution du problème (1.2), s'écrit comme une superposition de modes sortants et de modes rentrants représentant les réflexions non physiques générées par la frontière artificielle Σ . Plus précisément, le champ diffracté approché $u^{app,2D}$ s'écrit de la manière suivante :

$$u^{app,2D} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [d_m^{app} u_m^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) + \tau_m^{app} u_m^{(4)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta)] \quad (2.10)$$

où, pour $j = 3, 4$:

$$u_m^{(j)}(kf, \cosh \xi, \cos \theta) = R_m^{(j)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \quad (2.11)$$

Les fonctions $R_m^{(3)}$ et $R_m^{(4)}$ sont définies par (1.25), les fonctions S_m par (1.26) et N_m par (1.27) au chapitre 1.

Les modes sortants $u_m^{(3)}$ et rentrants $u_m^{(4)}$ vérifient respectivement la condition de radiation de Sommerfeld sortante et rentrante.

Les modes rentrants sont générés par la frontière artificielle, ils représentent l'effet de pollution que celle-ci peut engendrer. C'est pourquoi on nommera τ_m^{app} coefficient de réflexion du $m^{\text{ème}}$ mode elliptique.

Si l'on veut comparer les champs diffracté exact $u^{ex,2D}$ et approché $u^{app,2D}$, on voit, grâce aux Eqs. (2.3) et (2.10), que cela revient à comparer les deux coefficients correspondants aux modes sortants d_m^{exact} et d_m^{app} et à quantifier le coefficient de réflexion τ_m^{app} . Le champ diffracté approché est d'autant plus précis que d_m^{app} est proche de d_m^{exact} et que le coefficient de réflexion τ_m^{app} est petit. La prochaine étape de ce travail consiste alors à identifier ces différents coefficients.

3 Détermination des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app}

3.1 Calculs préliminaires

Avant d'identifier les différents coefficients, nous allons donner quelques résultats de calculs préliminaires qui vont nous être utiles par la suite.

Dans tout ce qui suit, afin d'alléger les notations, nous adopterons la notation suivante :

$$\text{Pour } j = 1, 3, 4 : R_m^{(j)'}(eka, e^{-1}) = \frac{\partial R_m^{(j)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})$$

D'après les calculs développés en annexe A, on a :

$$\frac{\partial u^{app,2D}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial u^{app,2D}}{\partial \xi} \quad (3.12)$$

On commence par calculer $\frac{\partial u^{app,2D}}{\partial \xi}$. Comme d_m^{app} et τ_m^{app} ne dépendent pas de ξ , on a, formellement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{app,2D}}{\partial \xi} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u_m^{app}}{\partial \xi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} \right) \\ &= \sinh \xi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[d_m^{app} R_m^{(3)'}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \right. \\ &\quad \left. + \tau_m^{app} R_m^{(4)'}(kf, \cosh \xi) \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \right] \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{app,2D}}{\partial n} &= \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\sinh \xi}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{S_m(kf, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \left[d_m^{app} R_m^{(3)'}(kf, \cosh \xi) \right. \\ &\quad \left. + \tau_m^{app} R_m^{(4)'}(kf, \cosh \xi) \right] \end{aligned}$$

3.2 Calcul des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app}

Dans le cas idéal d'une condition aux bords transparente posée sur Σ , nous avons $d_m^{app} = d_m^{exact}$ et $\tau_m^{app} = 0$ ce qui signifie que la condition ne génère aucune pollution dans le domaine de calcul Ω . L'introduction d'une condition aux limites absorbante (CLA) va perturber la solution de sorte que $d_m^{app} \neq d_m^{exact}$ et $\tau_m^{app} \neq 0$. Afin d'analyser le comportement des coefficients approchés, et donc la performance des conditions DtN, nous allons les calculer à partir du système suivant :

$$\begin{cases} u^{app,2D} = -u^{inc,2D} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{app,2D}}{\partial n} = \tilde{T} u^{app,2D} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.13)$$

qui s'écrit pour un mode u_m , $m \geq 0$ fixé (modes découplés) :

$$\begin{cases} u_m^{app} = -u_m^{inc} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_m^{app}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} T u_m^{app} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.14)$$

Or, pour un mode u_m fixé, $\frac{\partial u_m^{app}}{\partial n}$ s'écrit (cf paragraphe 3.1) :

$$\frac{\partial u_m^{app}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} \left(d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} \right)$$

et en couplant cette égalité avec la condition sur Σ de (3.14), on obtient :

$$d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} = T u_m^{app} \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.15)$$

La condition sur Γ de (3.14) peut, elle aussi, être simplifiée car, sur Γ :

$$\begin{cases} u_m^{app} = \left[d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \right] \frac{S_m(e_\Gamma k a_\Gamma, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \\ \text{et} \\ u_m^{inc} = d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \frac{S_m(e_\Gamma k a_\Gamma, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \end{cases} \quad (3.16)$$

Les équations (3.15) et (3.16) conduisent donc au système :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} = T \underbrace{(d_m^{app} u_m^{(3)} + \tau_m^{app} u_m^{(4)})}_{u_m^{app}} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour exprimer les coefficients du champ diffracté approché, il suffit à présent de choisir quel opérateur T on pose sur la frontière artificielle Σ .

Rappelons alors que, par construction, on a sur la frontière artificielle Σ :

$$\frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} = T u_m^{(3)} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} m = 0 & \text{si } T = T^{DtN1} \\ m = 0 \text{ et } m = 1 & \text{si } T = T^{DtN2e} \\ m = 0 \text{ et } m = -1 & \text{si } T = T^{DtN2o} \end{cases} \quad (3.18)$$

où T^{DtN1} , T^{DtN2e} et T^{DtN2o} sont les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann d'ordre 1 ou 2 que l'on a construits au chapitre 2 de cette thèse.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons donc identifier les coefficients approchés d_m^{app} et τ_m^{app} , suivant la condition DtN utilisée.

3.2.1 Cas de l'opérateur DtN1

On considère que l'on pose la condition DtN1 construite au chapitre 2 sur la frontière artificielle Σ délimitant le domaine de calcul. On rappelle que l'opérateur DtN1 s'écrit pour une excentricité donnée e_Σ :

$$T^{DtN1}u = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \alpha_0 (e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) u \quad (3.19)$$

où les coefficients α_m sont donnés, pour $m \in \mathbb{N}$, par :

$$\alpha_m (e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \frac{\frac{\partial R_m^{(3)}}{\partial \xi} (e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_m^{(3)} (e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \quad (3.20)$$

Nous allons d'abord présenter le cas particulier $m = 0$ pour lequel la condition DtN1 est exacte puis le résultat pour un mode u_m quelconque.

- Cas particulier lorsque $m = 0$.

Pour le mode $m = 0$, le système (3.17) devient :

$$\begin{cases} d_0^{app} Re_0^{(3)} (e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_0^{app} Re_0^{(4)} (e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_0^{inc} Re_0^{(1)} (e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_0^{app} \left(\frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial \xi} - T^{DtN1} u_0^{(3)} \right) + \tau_0^{app} \left(\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1} u_0^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.21)$$

Or, on sait que l'opérateur DtN1 vérifie par construction

$$\frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN1} u_0^{(3)}$$

Grâce à cette propriété, le système (3.21) devient :

$$\begin{cases} d_0^{app} Re_0^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_0^{app} Re_0^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_0^{inc} Re_0^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_0^{app} \left(\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1} u_0^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.22)$$

Comme $\left(\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1} u_0^{(4)} \right) \neq 0$, la condition sur Σ implique :

$$\tau_0^{app} = 0 \quad (3.23)$$

et la condition sur Γ de (3.22) devient :

$$d_0^{app} Re_0^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_0^{inc} Re_0^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})$$

ce qui entraîne

$$d_0^{app} = \frac{-d_0^{inc} Re_0^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{Re_0^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}$$

soit

$$d_0^{app} = \frac{-\sqrt{8\pi}i^0 Se_0(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) Re_0^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\sqrt{Ne_0} Re_0^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}$$

et donc

$$d_0^{app} = d_0^{exact} \quad (3.24)$$

On obtient comme couple solution du système (3.22) :

$$(d_0^{app}, \tau_0^{app}) = (d_0^{exact}, 0) \quad (3.25)$$

La condition DtN1 est bien transparente lorsque $m = 0$, cela était prévisible puisqu'elle a été construite exacte pour ce mode. Nous allons voir à présent ce qu'il en est pour un mode u_m quelconque.

- Modes $m \neq 0$.

Lorsque $m \neq 0$, le système (3.17) s'écrit :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) (d_m^{app} u_m^{(3)} + \tau_m^{app} u_m^{(4)}) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.26)$$

Or, pour $j = 3$ ou $j = 4$, et pour une excentricité donnée e_Σ , on a :

$$\frac{\partial u_m^{(j)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \frac{S_m(e_\Sigma ka_\Sigma, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} R_m^{(j)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \quad (3.27)$$

Ainsi, en combinant (3.27) et (2.10), on peut simplifier le système (3.26) :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_m^{app} \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + \tau_m^{app} \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.28)$$

où $\Upsilon_m^{(j)}$ est défini pour $j = 3$ ou $j = 4$ par :

$$\Upsilon_m^{(j)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(j)'}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - \alpha_0(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(j)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \quad (3.29)$$

Le couple $(d_m^{app}, \tau_m^{app})$ est donc solution de :

$$M_1 \begin{bmatrix} d_m^{app} \\ \tau_m^{app} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

où M_1 désigne la matrice

$$M_1 := \begin{bmatrix} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{bmatrix}$$

Le système (3.30) est donc inversible sous la condition :

$$\det(M_1) = R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \neq 0$$

Dans la suite, on fait donc l'hypothèse que l'on peut choisir Σ de telle sorte que $\det M_1 \neq 0$ et, dans ce cas, le système (3.30) est inversible avec pour solution :

$$\begin{bmatrix} d_m^{app} \\ \tau_m^{app} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(M_1)} \begin{bmatrix} \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & -R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ -\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} d_m^{app} = \frac{-1}{\det(M_1)} d_m^{inc} \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \tau_m^{app} = \frac{1}{\det(M_1)} d_m^{inc} \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} d_m^{app} = \frac{-d_m^{inc} \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \\ \tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \end{cases}$$

En conclusion,

Proposition 3.1 *Supposons qu'on ait choisi Σ telle que $\det(M_1) \neq 0$. Alors, pour l'opérateur DtN_1 , le champ diffracté approché est déterminé, $\forall m \in \mathbb{N}$, par les coefficients :*

$$\left\{ \begin{array}{l} d_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \\ \tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

où, pour un entier relatif m donné, d_m^{inc} est défini par (2.9).

Nous pouvons établir quelques propriétés du déterminant dans certains cas particuliers.

Lorsque $m = 0$, on peut écrire $\det(M_1)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= R_{0_\Gamma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} - R_{0_\Sigma}^{(3)'} R_{0_\Gamma}^{(4)} \\ &\quad + \frac{R_{0_\Sigma}^{(3)'}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}} \left(R_{0_\Gamma}^{(4)} R_{0_\Sigma}^{(3)} - R_{0_\Sigma}^{(4)} R_{0_\Gamma}^{(3)} \right) \\ &= R_{0_\Gamma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} - R_{0_\Sigma}^{(3)'} R_{0_\Sigma}^{(4)} \frac{R_{0_\Gamma}^{(3)}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Or,

$$R_{0_\Sigma}^{(3)'} R_{0_\Sigma}^{(4)} = -\Delta_W \left[R_{0_\Sigma}^{(3)}, R_{0_\Sigma}^{(4)} \right] + R_{0_\Sigma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'}$$

où Δ_W désigne le Wronskien.

On a, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \Delta_W \left[R_{m_\Sigma}^{(3)}, R_{m_\Sigma}^{(4)} \right] &= R_{m_\Sigma}^{(3)} R_{m_\Sigma}^{(4)'} - R_{m_\Sigma}^{(3)'} R_{m_\Sigma}^{(4)} \\ &= \left(R_{m_\Sigma}^{(1)} + i R_{m_\Sigma}^{(2)} \right) \left(R_{m_\Sigma}^{(1)'} - i R_{m_\Sigma}^{(2)'} \right) \\ &\quad - \left(R_{m_\Sigma}^{(1)'} + i R_{m_\Sigma}^{(2)'} \right) \left(R_{m_\Sigma}^{(1)} - i R_{m_\Sigma}^{(2)} \right) \\ &= -2i R_{m_\Sigma}^{(1)} R_{m_\Sigma}^{(2)'} + 2i R_{m_\Sigma}^{(2)} R_{m_\Sigma}^{(1)'} \\ &= -2i \Delta_W \left[R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

D'après les calculs développés en annexe C (cf Eq. (B.108)), on a :

Propriété 3.2

$$\Delta_W [R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)}] = \frac{2e_\Sigma}{\pi} \quad (3.34)$$

En combinant Eq. (3.33) et la propriété 3.2, on obtient donc que :

$$\Delta_W [R_{m_\Sigma}^{(3)}, R_{m_\Sigma}^{(4)}] = \frac{-4i e_\Sigma}{\pi} \quad (3.35)$$

On en déduit que pour $m = 0$,

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= R_{0_\Gamma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} - \frac{R_{0_\Gamma}^{(3)}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}} \left[\frac{4i}{\pi k a_\Sigma} + R_{0_\Sigma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} \right] \\ &= \frac{R_{0_\Gamma}^{(3)}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}} \left(\frac{-4i e_\Sigma}{\pi} \right) \end{aligned}$$

Si l'on se place, comme dans les tests numériques ultérieurs, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation ($a_\Sigma = \lambda a_\Gamma = \lambda a$ et $e = e_\Sigma = e_\Gamma$), on a donc :

Propriété 3.3 *Pour $m = 0$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:*

$$\det(M_1) \rightarrow \frac{-4i e}{\pi}$$

Cela signifie donc qu'à haute fréquence, lorsque λ tend vers 1, le déterminant tend vers 0 et le système n'est plus inversible. On retrouve donc que le cadre OSRC n'est pas adapté au régime haute fréquence.

Pour les autres modes, nous n'avons pas réussi à établir l'analogie de la propriété 3.3. Toutefois, nous avons effectué une étude numérique de $|\det(M_1)|$ qui est reportée sur les figures (4.1) et (4.2). Sur la figure (4.1), on a représenté les valeurs de $|\det(M_1)|$ en fonction de λ , pour différentes valeurs de m . On a pris $e = 0.9$ et $ka = 10$. On observe que $|\det(M_1)|$ est une fonction de λ qui semble être, pour $\lambda > 1$ toujours supérieure à $|\det(M_1)(\lambda)|$, et ce, pour tous les modes représentés. La figure (4.2) représente l'allure zoomée de $|\det(M_1)|$ au voisinage de $\lambda = 1$. On voit que pour tous les modes le déterminant converge vers une constante qui est de l'ordre de $\frac{4e}{\pi}$ ce qui illustre la propriété 3.3 et semble indiquer que ce résultat est valable quelle que soit la valeur de m .

$|det(M_1)|$ pour $e = 0.9$, $ka = 10$

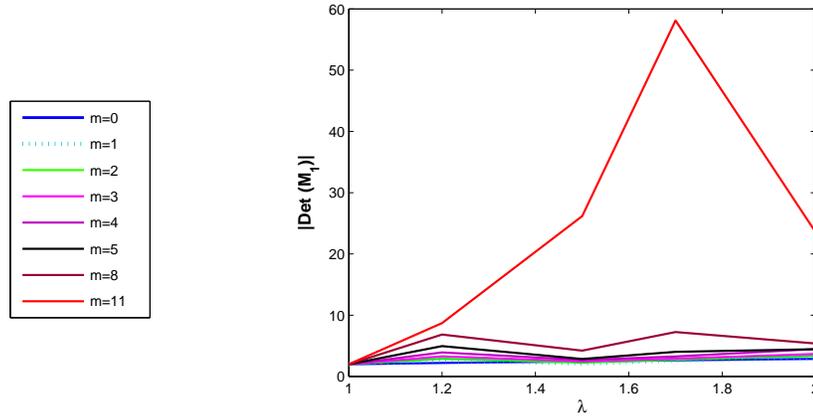


FIG. 4.1: $|det(M_1)|$ en fonction du paramètre de dilatation λ .

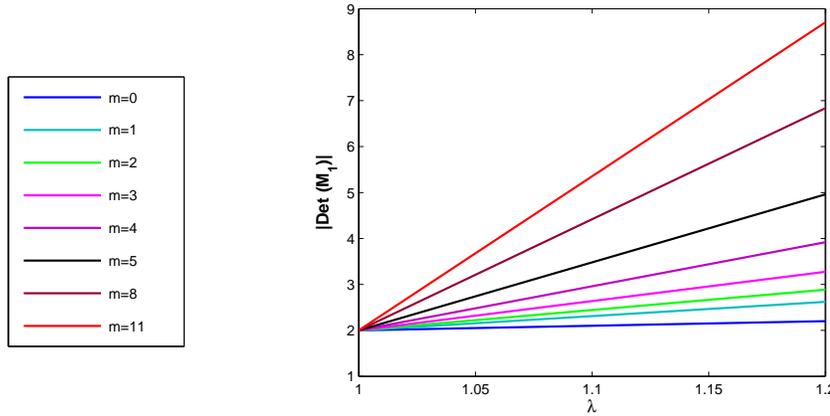


FIG. 4.2: Zoom de $|det(M_1)|$ au voisinage de $\lambda = 1$.

3.2.2 Cas de l'opérateur DtN d'ordre 2 (mode pair)

De la même manière que ci-dessus, nous allons identifier les coefficients d_m^{app} et τ_m^{app} correspondants. Nous avons vu numériquement que les trois conditions d'ordre 2 semblent équivalentes. Nous avons donc choisi de ne considérer ici que la condition $DtN2e$. On rappelle que, d'après le chapitre 2 de cette thèse, l'opérateur T^{DtN2e} s'écrit pour une excentricité donnée e_Σ :

$$T^{DtN2e}u = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma(a_0 - a_1)} \left[(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0)u + (\alpha_1 - \alpha_0) \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{e_\Sigma^2 (ka_\Sigma)^2}{2} \cos 2\theta u \right) \right] \quad (3.36)$$

où les coefficients α_m sont donnés par (3.20).

Les coefficients a_0 et a_1 représentent respectivement les caractéristiques des fonc-

tions de Mathieu périodiques Se_0 et Se_1 .

Nous allons commencer par présenter les cas particuliers $m = 0$ et $m = 1$ pour lesquels la condition DtN2 est exacte puis le résultat pour un mode m quelconque.

- Cas particuliers lorsque $m = 0$ ou $m = 1$.

Lorsque la frontière artificielle est construite à l'aide de l'opérateur T^{DtN2e} , on sait par construction que $\frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2e} u_0^{(3)}$ et $\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2e} u_1^{(3)}$.

- Cas $m = 0$:

Comme dans le cas de l'opérateur T^{DtN1} , on peut simplifier le système (3.17) pour $m = 0$ qui devient :

$$\begin{cases} d_0^{app} Re_0^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_0^{app} Re_0^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_0^{inc} Re_0^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_0^{app} \left(\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2e} u_0^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.37)$$

Comme $\left(\frac{\partial u_0^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2e} u_0^{(4)} \right) \neq 0$, on conclut que : $\tau_0^{app} = 0$

De la même façon que pour T^{DtN1} , l'équation posée sur Γ de (3.37) nous donne alors : $d_0^{app} = d_0^{exact}$.

On obtient comme couple solution du système (3.37) :

$$(d_0^{app}, \tau_0^{app}) = (d_0^{exact}, 0) \quad (3.38)$$

- Cas $m = 1$:

De même que précédemment, le fait que $\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2e} u_1^{(3)}$ nous permet de simplifier le système (3.17) dans le cas où $m = 1$:

$$\begin{cases} d_1^{app} Re_1^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_1^{app} Re_1^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_1^{inc} Re_1^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_1^{app} \left(\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2e} u_1^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.39)$$

Or $\left(\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2e} u_1^{(4)} \right) \neq 0$. On en conclut donc, d'après l'équation posée sur Σ de (3.39), que :

$$\tau_1^{app} = 0 \quad (3.40)$$

L'équation sur Γ nous donne alors : $d_1^{app} = d_1^{exact}$.

On obtient ainsi comme couple solution du système (3.39) :

$$(d_1^{app}, \tau_1^{app}) = (d_1^{exact}, 0) \quad (3.41)$$

Comme l'on s'y attendait la condition $DtN2e$ est bien transparente pour les modes $m = 0$ et $m = 1$.

- Cas des modes u_m pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

Si on applique sur la frontière artificielle Σ une condition de type $DtN2e$, le système (3.17) s'écrit :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_m^{app} \frac{\partial u_m^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_m^{app} \frac{\partial u_m^{(4)}}{\partial \xi} = T^{DtN2e} (d_m^{app} u_m^{(3)} + \tau_m^{app} u_m^{(4)}) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.42)$$

Pour un entier m fixé, l'expression de $T^{DtN2e} u_m$ peut être simplifiée grâce à une propriété des fonctions de Mathieu périodiques Se_m et So_m (cf Chap. 1). En effet, on rappelle (cf Eqs. (3.15) et (3.23) au Chap. 2) que :

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial \theta^2} = \left(-c_m + \frac{(eka)^2}{2} \cos 2\theta \right) u_m$$

où c_m est défini par

$$c_m = \begin{cases} a_m & \text{si } m \geq 0 \\ b_{|m|} & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

et donc :

$$T^{DtN2e} u_m = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma(a_0 - a_1)} \left[(a_0 \alpha_1 - a_1 \alpha_0) u_m + (\alpha_1 - \alpha_0) \underbrace{\left(\frac{d^2 u_m}{d\theta^2} - \frac{(e_\Sigma k a_\Sigma)^2}{2} \cos 2\theta u_m \right)}_{-c_m} u_m \right] \quad (3.44)$$

On rappelle que les fonctions a_m et b_m sont respectivement les fonctions caractéristiques paires et impaires associées aux fonctions de Mathieu périodiques Se_m et So_m (cf Chap. 1).

On rappelle aussi que pour $j = 3$ ou $j = 4$, et pour une excentricité donnée e_Σ , on a :

$$\frac{\partial u_m^{(j)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1 - e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \frac{S_m(eka, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} R_m^{(j)'}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \quad (3.45)$$

Grâce aux équations (3.44) et (3.45) et à l'expression de u_m^{app} donnée par (2.10), on peut simplifier le système (3.42) :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\sqrt{1-e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \frac{S_m(e_\Sigma k a_\Sigma, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} [d_m^{app} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + \tau_m^{app} \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})] = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.46)$$

où $\Psi_m^{(j)}$ est défini pour $j = 3$ ou $j = 4$ par :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(j)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = & \left(R_m^{(j)'}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} R_m^{(j)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Or, $\left(\frac{\sqrt{1-e_\Sigma^2}}{e_\Sigma} \frac{S_m(e_\Sigma k a_\Sigma, \cos \theta)}{\sqrt{N_m}} \right) \neq 0$, donc le système (3.46), devient :

$$\begin{cases} d_m^{app} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_m^{app} R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_m^{app} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + \tau_m^{app} \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.48)$$

Afin de résoudre (3.48), on écrit ce système sous forme de système matriciel :

$$Me_2 \begin{bmatrix} d_m^{app} \\ \tau_m^{app} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

où la matrice Me_2 est définie par :

$$Me_2 = \begin{bmatrix} R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Le système est alors inversible sous la condition :

$$\det(Me_2) = R_m^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \neq 0$$

Pour les calculs qui suivent, on fait l'hypothèse que l'on peut choisir Σ de telle sorte que $\det(Me_2) \neq 0$ et dans ce cas le système matriciel (3.30) est inversible et a pour solution :

$$\begin{bmatrix} d_m^{app} \\ \tau_m^{app} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(Me_2)} \begin{bmatrix} \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & -R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ -\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

On a donc :

$$\begin{cases} d_m^{app} = \frac{-1}{\det(Me_2)} d_m^{inc} \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \tau_m^{app} = \frac{1}{\det(Me_2)} d_m^{inc} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} d_m^{app} = \frac{-d_m^{inc} \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \\ \tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \end{cases}$$

et on en déduit,

Proposition 3.4 *Supposons qu'il existe Σ telle que $\det(Me_2) \neq 0$. Alors, pour l'opérateur $DtN2e$, le champ diffracté approché est représenté, $\forall m \in \mathbb{N}$, par les coefficients :*

$$\begin{cases} d_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \\ \tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_m^{(3)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_m^{(4)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \end{cases} \quad (3.52)$$

où, pour un mode m donné, d_m^{inc} est défini par (2.9).

Comme pour la condition DtN1, nous pouvons ici aussi établir quelques propriétés du déterminant $\det(Me_2)$ dans certains cas particuliers.

- Lorsque $m = 0$, on peut écrire $\det(Me_2)$ sous la forme :

$$\det(Me_2) = R_{0_\Gamma}^{(3)} \left[R_{0_\Sigma}^{(4)'} - \alpha_{0_\Sigma} R_{0_\Sigma}^{(4)} \right] - R_{0_\Gamma}^{(4)} \left[R_{0_\Sigma}^{(3)'} - \alpha_{0_\Sigma} R_{0_\Sigma}^{(3)} \right]$$

en utilisant la définition du coefficient α_{00_Σ} (cf Eq. (3.20)), on a alors :

$$\det(Me_2) = R_{0_\Gamma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} - R_{0_\Sigma}^{(3)'} R_{0_\Gamma}^{(4)} + \frac{R_{0_\Sigma}^{(3)'}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}} \left(R_{0_\Gamma}^{(4)} R_{0_\Sigma}^{(3)} - R_{0_\Sigma}^{(4)} R_{0_\Gamma}^{(3)} \right)$$

d'où

$$\det(Me_2) R_{0_\Gamma}^{(3)} R_{0_\Sigma}^{(4)'} - R_{0_\Sigma}^{(3)'} R_{0_\Sigma}^{(4)} \frac{R_{0_\Gamma}^{(3)}}{R_{0_\Sigma}^{(3)}}$$

On observe que, pour $m = 0$, $\det(M_1) = \det(Me_2)$ (cf Eq. (3.32)) et on en déduit que pour $m = 0$,

$$\det(Me_2) = \frac{R_{0_\Gamma}^{(3)} - 4i e_\Sigma}{R_{0_\Sigma}^{(3)} \pi}$$

Si l'on se place, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation, on a donc :

Propriété 3.5 *Pour $m = 0$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:*

$$\det(Me_2) \rightarrow \frac{-4i e}{\pi}$$

- Lorsque $m = 1$, on peut écrire $\det(Me_2)$ sous la forme :

$$\det(Me_2) = R_{1_\Gamma}^{(3)} \left[R_{1_\Sigma}^{(4)'} - \alpha_{1_\Sigma} R_{1_\Sigma}^{(4)} \right] - R_{1_\Gamma}^{(4)} \left[R_{1_\Sigma}^{(3)'} - \alpha_{1_\Sigma} R_{1_\Sigma}^{(3)} \right]$$

en utilisant la définition de α_1 sur Σ (cf Eq. (3.20)), on obtient :

$$\det(Me_2) = R_{1_\Gamma}^{(3)} R_{1_\Sigma}^{(4)'} - R_{1_\Sigma}^{(3)'} R_{1_\Gamma}^{(4)} + \frac{R_{1_\Sigma}^{(3)'}}{R_{1_\Sigma}^{(3)}} \left(R_{1_\Gamma}^{(4)} R_{1_\Sigma}^{(3)} - R_{1_\Sigma}^{(4)} R_{1_\Gamma}^{(3)} \right)$$

soit

$$\det(Me_2) = R_{1_\Gamma}^{(3)} R_{1_\Sigma}^{(4)'} - R_{1_\Sigma}^{(3)'} R_{1_\Sigma}^{(4)} \left[\frac{R_{1_\Gamma}^{(3)}}{R_{1_\Sigma}^{(3)}} \right]$$

d'où

$$\det(Me_2) = R_{1_\Gamma}^{(3)} R_{1_\Sigma}^{(4)'} + \left(\Delta_W \left[R_{1_\Sigma}^{(3)}, R_{1_\Sigma}^{(4)} \right] - R_{1_\Sigma}^{(3)} R_{1_\Sigma}^{(4)'} \right) \left[\frac{R_{1_\Gamma}^{(3)}}{R_{1_\Sigma}^{(3)}} \right]$$

On obtient alors :

$$\det(Me_2) = \Delta_W \left[R_{1_\Sigma}^{(3)}, R_{1_\Sigma}^{(4)} \right] \frac{R_{1_\Gamma}^{(3)}}{R_{1_\Sigma}^{(3)}}$$

Or, d'après Eq. (3.35), $\Delta_W \left[R_{1_\Sigma}^{(3)}, R_{1_\Sigma}^{(4)} \right] = \frac{-4i}{\pi k a_\Sigma}$, on en déduit que pour $m = 1$:

$$\det(Me_2) = \frac{R_{1_\Gamma}^{(3)}}{R_{1_\Sigma}^{(3)}} \frac{-4i e_\Sigma}{\pi}$$

Si l'on se place, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation, on a donc :

Propriété 3.6 Pour $m = 1$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:

$$\det(Me_2) \rightarrow \frac{-4ie}{\pi}$$

Comme avec la condition DtN1, cela signifie donc qu'à haute fréquence, lorsque λ tend vers 1, le déterminant tend vers 0 et le système n'est plus inversible. On retrouve donc que le cadre OSRC n'est pas adapté au régime haute fréquence.

Pour les autres modes, nous n'avons pas réussi à établir l'analogie des propriétés 3.5 et 3.6. Toutefois, nous avons effectué une étude numérique de $|\det(Me_2)|$ qui est reportée sur les figures (4.3) et (4.4). Sur la figure (4.3), on a représenté les valeurs de $|\det(Me_2)|$ en fonction de λ , pour différentes valeurs de m . On a pris $e = 0.9$ et $ka = 10$. On observe que $|\det(Me_2)|$ est une fonction croissante de λ , pour tous les modes représentés. La figure (4.4) représente l'allure zoomée de $|\det(Me_2)|$ au voisinage de $\lambda = 1$. On voit que pour tous les modes le déterminant converge vers une constante qui est de l'ordre de $\frac{4e}{\pi}$ ce qui illustre les propriétés 3.5 et 3.6 et semble indiquer que ce résultat est valable quelle que soit la valeur de m .

$|\det(Me_2)|$ pour $e = 0.9$, $ka = 10$

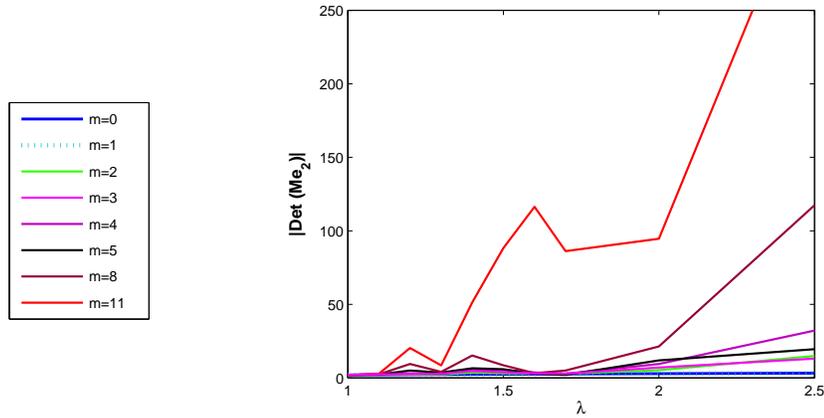


FIG. 4.3: $|\det(Me_2)|$ en fonction du paramètre de dilatation λ .

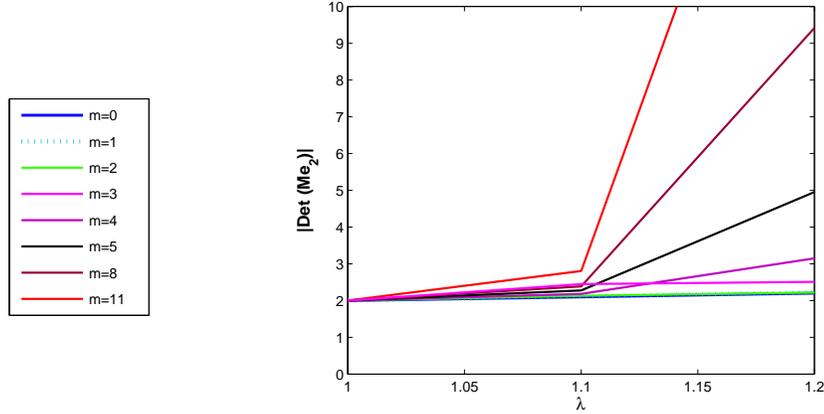


FIG. 4.4: Zoom de $|\det(Me_2)|$ au voisinage de $\lambda = 1$.

4 Résultats numériques

Nous espérons évaluer numériquement la précision des conditions Dirichlet-to-Neumann en fonction de l'éloignement de la frontière artificielle Σ par rapport à la surface de l'obstacle de diffraction Γ , en régime haute fréquence. L'identification des coefficients d_m^{app} et τ_m^{app} faite dans les paragraphes précédents va permettre cette analyse numérique de performance. Nous avons d'une part comparé les coefficients correspondants aux modes sortants : d_m^{app} et d_m^{exact} et d'autre part quantifié les coefficients de réflexion τ_m^{app} , en fonction de la valeur de λ qui sont, on le rappelle, générés par la frontière artificielle. Afin de simplifier l'analyse, nous avons choisi la frontière artificielle Σ conforme à la surface de l'obstacle Γ . L'ellipse Σ est une dilatation de l'ellipse Γ , leurs deux demi-axes principaux et secondaires respectifs sont ainsi liés par les relations :

$$a_\Sigma = \lambda a_\Gamma \quad \text{et} \quad b_\Sigma = \lambda b_\Gamma, \quad \text{avec } \lambda \geq 1 \quad (4.53)$$

Les relations précédentes impliquent alors que les deux ellipses Γ et Σ ont la même excentricité. En effet :

$$e_\Sigma = \sqrt{1 - \frac{b_\Sigma^2}{a_\Sigma^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\lambda \times b_\Gamma)^2}{(\lambda \times a_\Gamma)^2}} = e_\Gamma$$

Il est à noter que le cas $\lambda = 1$ correspond à la formulation OSRC.

Les résultats suivants ont été obtenus pour deux valeurs de ka : $ka = 10$ et $ka = 20$. Les tests ont été faits avec l'opérateur DtN2 pour trois angles d'incidence différents φ_0 : 0 , $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous avons pris en compte différentes distances entre la surface de l'obstacle Γ et la frontière artificielle Σ . Les tests suivants ont été réalisés pour des valeurs de λ comprises entre 1 (cas OSRC) et 2.5. Pour nous faire une idée de la performance de la condition DtN2, nous avons calculé deux quantités différentes :

• Pour commencer, nous avons voulu estimer les réflexions non physiques générées par la frontière artificielle en calculant :

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |\tau_m^{app,2D}|^2 \right)^{1/2}$$

• Puis nous avons voulu estimer la différence entre les coefficients correspondant aux modes sortants d_m^{app} et d_m^{ex} . Pour ce faire, nous avons calculé la quantité :

$$f(x) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{app} - d_m^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$$

Les résultats numériques confirment que la formulation OSRC n'est pas adaptée en régime haute fréquence. On peut en effet observer que pour $\lambda = 1$ (qui correspond au cas OSRC) la réflexion est maximale (Figs (4.5), (4.7)). On peut aussi noter que la valeur de l'angle d'incidence φ_0 ne semble pas avoir d'influence sur la qualité des résultats obtenus. On s'attend à ce que plus on éloigne la frontière artificielle de l'obstacle (i.e plus λ est grand) plus les réflexions générées par la frontière artificielle Σ sont minimales. Or dans les résultats obtenus pour la condition DtN2 nous observons des pics pour certaines valeurs de λ . On observe également des pics lors de l'estimation d'erreur entre les deux coefficients d_m^{app} et d_m^{ex} . Ces pics n'ont en fait pas lieu d'être, ils résultent des instabilités des fonctions de Mathieu qui sont particulièrement difficiles à enrayer. C'est pourquoi nous n'avons pas mené de tests numériques supplémentaires dans le cas du problème de scattering 2D, les résultats observés n'étant pas réellement exploitables.

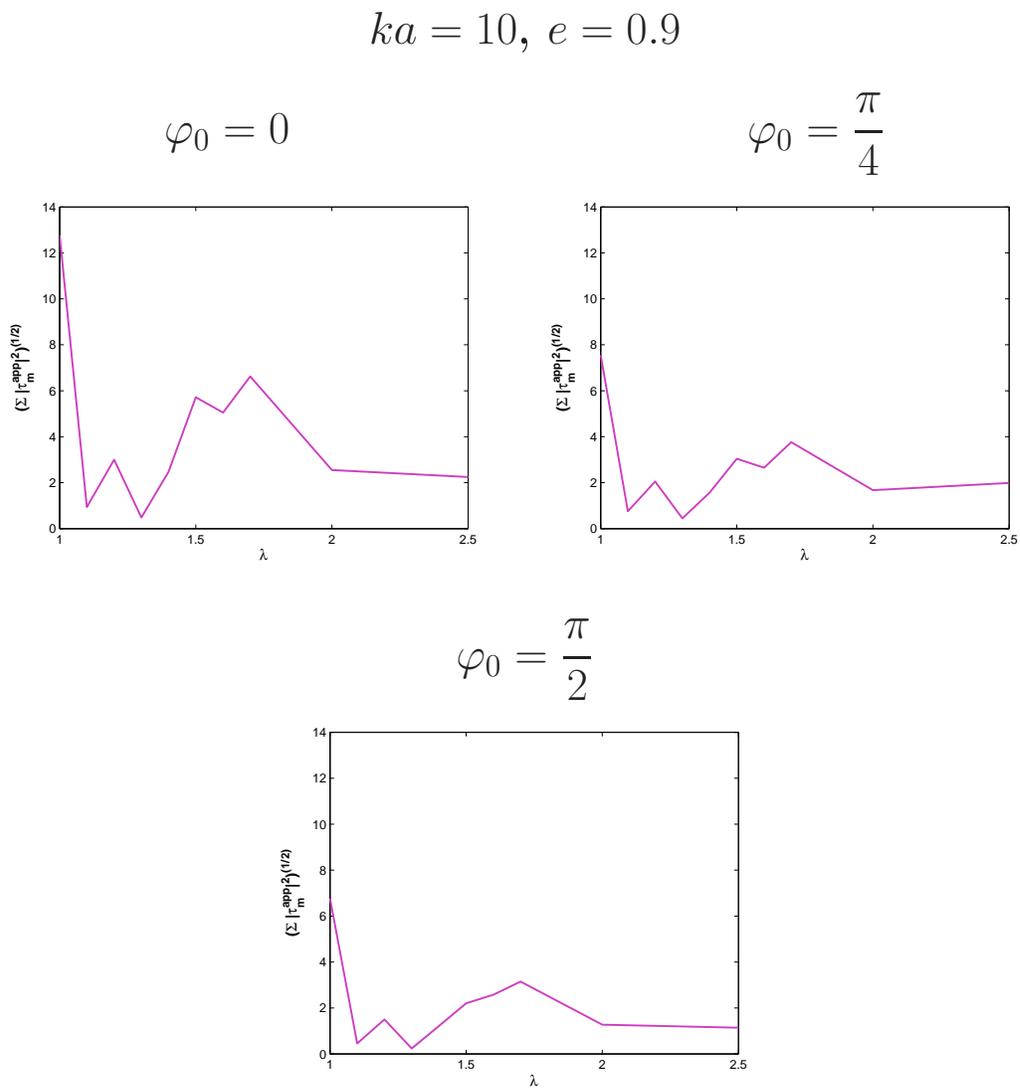
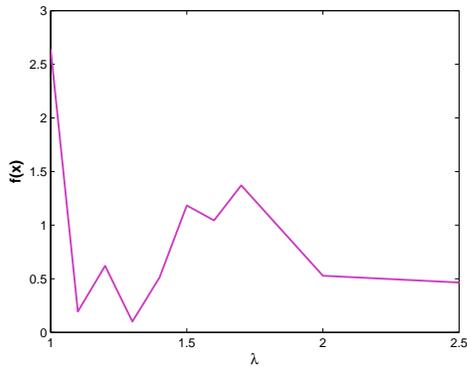


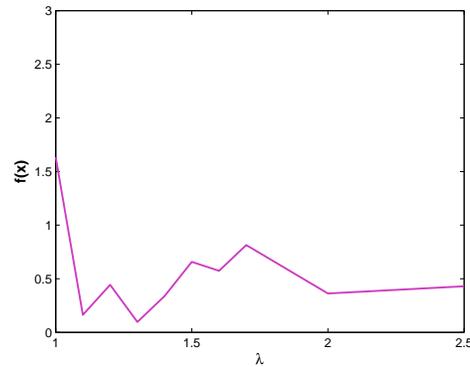
FIG. 4.5: $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |\tau_m^{app,2D}|^2 \right)^{1/2}$ pour la condition approchée DtN2 (—).

$$ka = 10, e = 0.9$$

$$\varphi_0 = 0$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

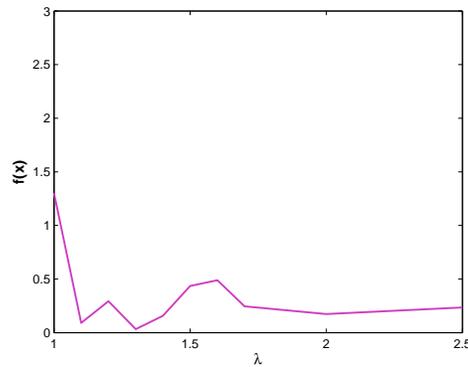
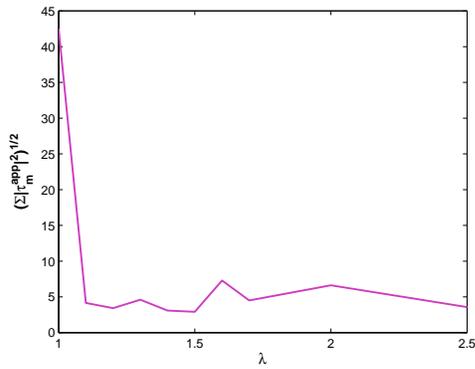


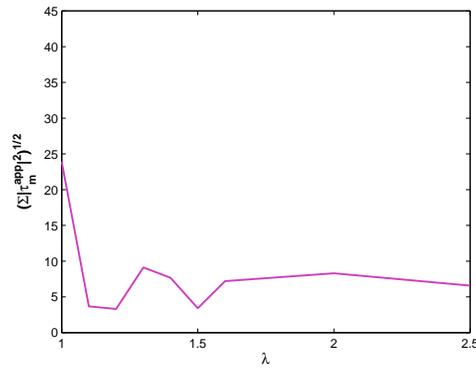
FIG. 4.6: $f(x) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{app} - d_m^{ex}|^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{ex}|^2\right)^{1/2}}$ pour la condition approchée DtN2 (—).

$$ka = 20, e = 0.9$$

$$\varphi_0 = 0$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

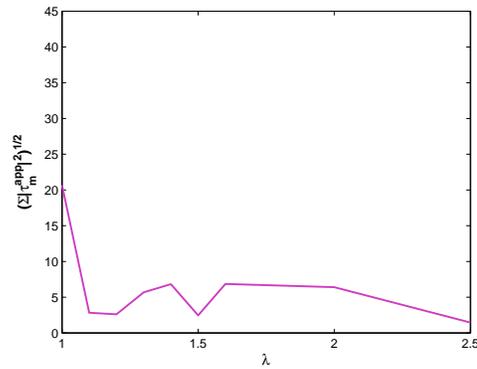
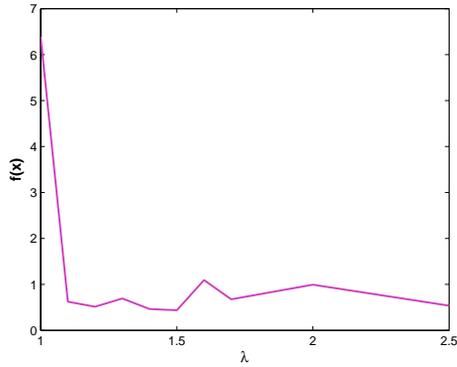


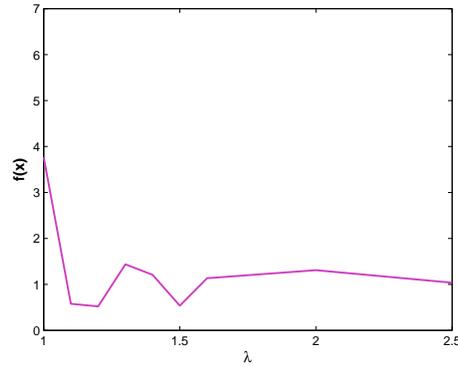
FIG. 4.7: $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |\tau_m^{app,2D}|^2 \right)^{1/2}$ pour la condition approchée DtN2 (—).

$$ka = 20, e = 0.9$$

$$\varphi_0 = 0$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$



$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

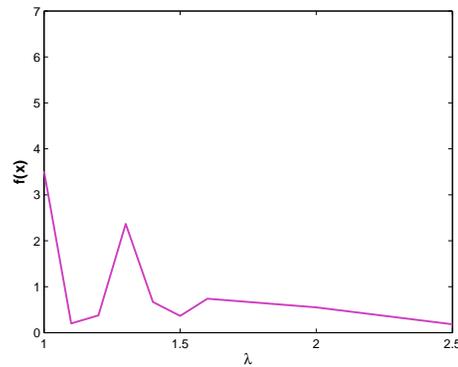


FIG. 4.8: $f(x) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{app} - d_m^{ex}|^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |d_m^{ex}|^2\right)^{1/2}}$ pour la condition approchée DtN2 (—).

5 Analyse haute fréquence

Numériquement, nous avons observé que la condition DtN2 est la plus performante et qu'elle ne nécessite pas de beaucoup éloigner la frontière Σ de celle de l'obstacle. Dans cette partie du chapitre 4, notre objectif est d'analyser le comportement du coefficient de réflexion τ_m^{app} en fonction de λ . Une étude directe aurait consisté à dériver $|\tau_m^{app}|$ par rapport à λ mais l'expression analytique de $|\tau_m^{app}|$ est suffisamment compliquée pour que nous ne puissions envisager cette approche. C'est pourquoi nous avons considéré le cas haute-fréquence en choisissant pour paramètre ka_Γ de façon à travailler sur un équivalent de $|\tau_m^{app}|$ dont l'expression est plus exploitable. On notera $|\widetilde{\tau_m^{app}}|$ cet équivalent.

Dans le lemme suivant, nous donnons un résultat intermédiaire concernant le coefficient d_m^{inc} :

Lemme 5.1 *Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$, d_m^{inc} est équivalent à $\widetilde{d_m^{inc}}$ et $\widetilde{d_m^{inc}}$ est borné indépendamment du mode m . Plus précisément,*

$$|\widetilde{d_m^{inc}}| < 2\kappa (\pi e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \quad (5.54)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Démonstration :

On rappelle que d_m^{inc} est donné par (2.9) :

$$d_m^{inc} = \begin{cases} \frac{\sqrt{8\pi} i^m Se_m(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{Ne_m}} = \sqrt{8} i^m ce_m \left(\theta_0, \frac{e_\Gamma^2 (ka_\Gamma)^2}{4} \right) & \text{si } m \geq 0 \\ \frac{-\sqrt{8\pi} i^m So_{|m|}(kf, \cos \theta_0)}{\sqrt{No_{|m|}}} = \sqrt{8} i^m se_m \left(\theta_0, \frac{e_\Gamma^2 (ka_\Gamma)^2}{4} \right) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (5.55)$$

Les fonctions ce_m et se_m sont les fonctions de Mathieu périodiques selon les notations adoptées par Abramovitz [1].

Or (cf [51] 1, 2.333), lorsque $q \rightarrow +\infty$ et $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$ce_m(\theta, q) \sim se_{m+1}(\theta, q) \sim \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{q} \right)^{1/4} (m!)^{-1/2} D_m(2q^{1/4} \cos \theta) \quad (5.56)$$

où les fonctions $D_m(2q^{1/4} \cos \theta)$ sont les fonctions paraboliques cylindriques (cf Chap 19 dans [1]).

Donc, lorsque $q \rightarrow +\infty$, on peut définir $\widetilde{d_m^{inc}}$, un équivalent de d_m^{inc} :

$$\widetilde{d_m^{inc}} = \begin{cases} \sqrt{8} i^m \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{q} \right)^{1/4} (m!)^{-1/2} D_m(2q^{1/4} \cos \theta) & \text{si } m \geq 0 \\ \sqrt{8} i^m \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{q} \right)^{1/4} ((m-1)!)^{-1/2} D_{m-1}(2q^{1/4} \cos \theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

D'après (19.3.1) et (19.13.1) de [1], on a :

$$D_m (2q^{1/4} \cos \theta) = 2^{-m/2} e^{-\sqrt{q} \cos^2 \theta} H_m \left(\sqrt{2} q^{1/4} \cos \theta \right) \quad (5.57)$$

où les fonctions $H_m (\sqrt{2} q^{1/4} \cos \theta)$ sont les polynômes d'Hermite (cf [1]).

De plus, selon (22.14.17) de [1] :

$$\left| H_m \left(\sqrt{2} q^{1/4} \cos \theta \right) \right| < e^{\sqrt{q} \cos^2 \theta} \kappa 2^{m/2} \sqrt{m!} \quad \text{avec } \kappa \approx 1.086435 \quad (5.58)$$

En utilisant (5.56), (5.57) et (5.58), on obtient donc que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$

$$\left| ce_m \left(\theta, \frac{e_\Gamma^2 (ka_\Gamma)^2}{4} \right) \right| < \kappa \left(\pi \frac{e_\Gamma ka_\Gamma}{4} \right)^{1/4}$$

et,

$$\left| se_m \left(\theta, \frac{e_\Gamma^2 (ka_\Gamma)^2}{4} \right) \right| < \kappa \left(\pi \frac{e_\Gamma ka_\Gamma}{4} \right)^{1/4}$$

Pour finir, d'après (5.55), on a :

$$|\widetilde{d_m^{inc}}| < 2 \kappa (\pi e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4}$$

□

5.1 Avec la condition DtN1

Nous rappelons que si l'on pose la condition DtN1 (3.19) sur la frontière artificielle Σ , la coefficient de réflexion τ_m^{app} s'écrit :

$$\tau_m^{app} = \frac{1}{\det(M_1)} d_m^{inc} \Upsilon_m^{(3)} (e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)} (e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})$$

avec (cf eq. (3.29)) :

$$\Upsilon_m^{(3)} (e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)'} (e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - \alpha_0 (e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(3)} (e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \quad (5.59)$$

Dans la suite, on pose :

Conjecture 5.2 (i) $\det(M_1) = \frac{-4i e_\Gamma}{\pi}$, pour $\lambda = 1$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.

(ii) $|\det(M_1)| \geq \frac{4 e_\Gamma}{\pi}$, pour tout $\lambda > 1$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Le point (i) est une généralisation de la proposition 3.3 (qui correspond à $m = 0$) et qui semble vérifiée au moins numériquement (cf Fig. (4.2)). Le point (ii) s'appuie sur l'étude numérique de $|\det(M_1)|$ (cf Fig. (4.1)) pour un échantillon de valeurs de m .

Lemme 5.3 *On suppose que $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$. Alors lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (i.e lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$),*

$$|\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4 (ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}} \quad (5.60)$$

Démonstration : On rappelle que :

$$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[\frac{R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right]$$

Or, (cf Eqs. (3.20) de ce chapitre et (2.9) du chapitre 2),

$$\frac{R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} = \begin{cases} \alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \text{si } m \geq 0 \\ \beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

Nous allons à présent différencier les cas $m \geq 0$ et $m < 0$.

* Si $m \geq 0$:

$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ peut s'écrire :

$$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) [\alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})] \quad (5.62)$$

Nous voulons un équivalent de $\alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ et $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$.

On rappelle que, lorsque $m \geq 0$ (cf Eq. (4.43)) :

$$\alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \frac{i e_\Sigma ka_\Sigma}{Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}}} \quad (5.63)$$

On va chercher un équivalent à l'ordre 3 de $\frac{1}{Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}}}$, sous l'hypothèse $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$.

D'après Eq. (4.52) du chapitre 2, on a, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka_\Sigma} - \frac{H_{m+1}^{(1)}(ka_\Sigma)}{H_m^{(1)}(ka_\Sigma)}}$$

Or d'après Eq. (4.53) du chapitre 2, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ et $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$:

$$H_m^{(1)}(ka_\Sigma) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} \left[1 - \frac{(4m^2 - 1)(4m^2 - 9)}{2(8ka_\Sigma)^2} + i \frac{4m^2 - 1}{8ka_\Sigma} \right] e^{i \left(\frac{4ka_\Sigma - (2m + 1)\pi}{4} \right)}$$

Donc, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}} \sim \frac{i}{\frac{m}{ka_\Sigma} - (-i) \frac{1 - \frac{(4(m+1)^2 - 1)(4(m+1)^2 - 9)}{2(8ka_\Sigma)^2} + i \frac{4(m+1)^2 - 1}{8ka_\Sigma}}{1 - \frac{(4m^2 - 1)(4m^2 - 9)}{2(8ka_\Sigma)^2} + i \frac{4m^2 - 1}{8ka_\Sigma}}}$$

On poursuit les calculs en écrivant un développement de Taylor à l'ordre 3, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ et $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$, de l'inverse de l'équivalent de $Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}}$ et on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{m|\Sigma}^{\text{ex2}}} &\sim 1 + \frac{i}{2ka_\Sigma} + \left(\frac{1}{8} - \frac{m^2}{2} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ &\quad - \frac{i}{(16)^2} (13 + 18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \end{aligned} \quad (5.64)$$

En combinant les équations (5.63) et (5.64), on obtient, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim i e_\Sigma ka_\Sigma \left[1 + \frac{i}{2ka_\Sigma} + \left(\frac{1}{8} - \frac{m^2}{2} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{(16)^2} (13 + 18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

On voit immédiatement que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim i e_\Sigma ka_\Sigma \left[1 + \frac{i}{2ka_\Sigma} + \frac{1}{8} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - i \frac{13}{(16)^2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right]$$

On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

En utilisant ce résultat, on peut écrire Eq. (5.62), lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, sous la forme :

$$\begin{aligned} \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) [\alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \\ &\quad + i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \\ &\quad - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})] \end{aligned}$$

d'où, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[-i e_\Sigma \frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_\Sigma}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] \end{aligned}$$

De plus, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, d'après [51]

$$R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim H_m^{(1)}(ka_\Sigma)$$

où $H_m^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel de première espèce (cf chap. 9 dans [1]).

Or, d'après [1] (cf Eq. (9.2.3) p.364), lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, on a :

$$H_m^{(1)}(ka_\Sigma) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} e^{i(ka_\Sigma - \frac{(n+1/2)\pi}{2})}$$

et il vient donc immédiatement que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} e^{i(ka_\Sigma - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \quad (5.67)$$

On obtient ainsi que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} |\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} \left| \frac{e_\Sigma}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. - i e_\Sigma \frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)} \right| \left| \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} e^{i(ka_\Sigma - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right| \end{aligned}$$

soit,

$$|\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4 (ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}}$$

* Si $m < 0$:

$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ peut s'écrire :

$$\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) [\beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})] \quad (5.68)$$

Nous avons besoin d'un équivalent de $\beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$. On rappelle que, lorsque $m < 0$ (cf Eq. (4.43)) :

$$\beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \frac{i e_\Sigma ka_\Sigma}{Z_{m|\Sigma}^{\text{ex}2}} \quad (5.69)$$

et comme, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, $Z_{m|\Sigma}^{\text{ex}2} \sim Z_{-m|\Sigma}^{\text{ex}2}$ (i.e les impédances paire et impaire sont équivalentes pour une même valeur de m , cf Prop. 4.1 Chap. 2), on a :

$$\beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim \alpha_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

et on se ramène alors au cas $m \geq 0$. □

Le lemme 5.3 permet de définir un équivalent de $|\tau_m^{\text{app}}|$ noté $|\widetilde{\tau}_m^{\text{app}}|$:

$$|\widetilde{\tau}_m^{\text{app}}| = \left| \frac{\widetilde{d}_m^{\text{inc}} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(M_1)} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4 (ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}} \quad (5.70)$$

et c'est cet équivalent que nous allons estimer.

La conjecture 5.2 nous dit d'abord que :

Lemme 5.4 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) :

$$|\widetilde{\tau}_m^{\text{app}}| \leq |\widetilde{d}_m^{\text{inc}}| |R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| \frac{\pi}{4 e_\Gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4 (ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}}$$

Le lemme suivant fournit une majoration de $|R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})|$ lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$.

Lemme 5.5 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$|R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| < \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Gamma}} \quad (5.71)$$

Démonstration : D'après [51], lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \sim J_m(ka_\Gamma)$$

Or, d'après [1] (cf Eq. (9.2.1)), lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$:

$$J_m(ka_\Gamma) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Gamma}} \cos\left(ka_\Gamma - \frac{(m + 1/2)\pi}{2}\right)$$

Il vient donc immédiatement que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$|R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| < \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Gamma}}$$

□

Les lemmes (5.1), (5.4) et (5.5) conduisent à la proposition suivante :

Proposition 5.6 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) et $\frac{m}{ka_\Sigma} \ll 1$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa m \pi^{1/4} \frac{e_\Sigma}{e_\Gamma^{3/4}} \left(\frac{a_\Gamma}{a_\Sigma} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4(ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}} \frac{1}{(ka_\Gamma)^{7/4}}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Démonstration : Si on combine les lemmes 5.1, 5.5 et 5.4 , on obtient que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) et $\frac{m}{ka_\Sigma} \ll 1$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\tau_m^{app}}| < 2 \kappa (\pi e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Gamma}} \frac{\pi}{4 e_\Gamma} \\ \times \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4(ka_\Sigma)^2} + \frac{m^2}{4}} \end{aligned}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

D'où le résultat annoncé après simplification de cette expression

□

Le résultat donné par la proposition 5.6 montre, qu'à haute fréquence et lorsque $\frac{m}{ka_\Sigma} \ll 1$, le coefficient de réflexion τ_m^{app} est majoré par une expression qui tend vers 0, lorsque l'on pose la condition DtN2 (3.36) sur Σ . Cela veut dire que l'effet de pollution généré diminue avec la fréquence. Afin d'aller plus loin dans l'analyse, considérons le cas où Σ est une dilatation de Γ . On obtient alors :

Corollaire 5.7 Si l'on adopte la même configuration géométrique que lors des tests numériques, à savoir $a_\Sigma = \lambda a_\Gamma$ (avec $\lambda > 1$) et $e_\Sigma = e_\Gamma$, la proposition 5.6 devient, lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa m \pi^{1/4} e_\Gamma^{1/4} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{(18 - 72m - 80m^2 - 80m^3 + 32m^4)^2}{16^4(\lambda ka_\Gamma)^2} + \frac{m^2}{4}} \frac{1}{(ka_\Gamma)^{7/4}}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Le corollaire 5.7 est valable lorsque $m \ll \sqrt{\lambda ka_\Gamma}$. On en déduit donc que pour tous les modes $m \ll \sqrt{\lambda ka_\Gamma}$,

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \frac{C e_\Gamma^{1/4}}{\sqrt{\lambda} (ka_\Gamma)^{3/4}}$$

où C est une constante positive.

On observe donc que pour tous les modes tels que $m \ll \sqrt{\lambda k a_\Gamma}$, le coefficient $|\tau_m^{app}|$ tend vers 0 quand $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$. De plus, on observe que le coefficient tend vers 0 lorsque $\sqrt{\lambda}$ devient grand.

Le résultat que nous avons obtenu ne nous permet pas de conclure pour tous les modes m . Nous reviendrons sur ce point à la suite de la prochaine section où nous considérons la condition DtN2.

5.2 Avec la condition DtN2

Nous rappelons que si l'on pose la condition DtN2e (3.36) sur la frontière artificielle Σ , la coefficient de réflexion τ_m^{app} s'écrit :

$$\tau_m^{app} = \frac{1}{\det(Me_2)} d_m^{inc} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_m^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})$$

avec (cf eq. (3.47)) :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = & \left(R_m^{(3)'}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} R_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right) \end{aligned}$$

où c_m est défini par Eq. (3.43).

Dans la suite, on pose :

Conjecture 5.8 (i) $\det(Me_2) = \frac{-4i e_\Gamma}{\pi}$, pour $\lambda = 1$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.

(ii) $|\det(Me_2)| \geq \frac{4 e_\Gamma}{\pi}$, pour tout $\lambda > 1$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Le point (i) est une généralisation de la proposition 3.5 (qui correspond à $m = 0$) et qui semble vérifiée au moins numériquement (cf Fig. (4.4)). Le point (ii) s'appuie sur l'étude numérique de $|\det(Me_2)|$ (cf Fig. (4.3)) pour un échantillon de valeurs de m .

Lemme 5.9 On suppose que $\frac{|m|}{\sqrt{k a_\Sigma}} \ll 1$. Alors, lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (i.e lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$),

* Si $m \geq 0$:

$$|\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(k a_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{1,m}}$$

avec

$$C_{1,m} = \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

* Si $m < 0$:

$$|\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{2,m}} \quad (5.72)$$

avec

$$C_{2,m} = \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

Démonstration : On rappelle que :

$$\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \\ + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

et on peut donc l'écrire sous la forme :

$$\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \left[\frac{R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

Or, (cf Eqs. (3.20) de ce chapitre et (2.9) du chapitre 2),

$$\frac{R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_m^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} = \begin{cases} \alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \text{si } m \geq 0 \\ \beta_{|m|}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

Donc, si $m \geq 0$, $\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ va s'écrire :

$$\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \left[\alpha_{m|\Sigma} + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - a_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - a_m)}{a_0 - a_1} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

et si $m < 0$, $\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ s'écrit :

$$\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \left[\beta_{|m||\Sigma} + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - b_{|m|}) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - b_{|m|})}{a_0 - a_1} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

Nous différencions les cas $m \geq 0$ et $m < 0$.

* Si $m \geq 0$:

On rappelle que d'après Eq. (5.66), lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$\alpha_m(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right]$$

On voit immédiatement que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\alpha_1(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + i \frac{182}{(16)^2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right]$$

Ainsi, $\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim & R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[\alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{i}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \right. \\ & \left. + \alpha_{0|\Sigma} \frac{a_1 - a_m}{a_0 - a_1} - \alpha_0(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \frac{a_0 - a_m}{a_0 - a_1} \right. \\ & \left. - i e_\Sigma ka_\Sigma \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + i \frac{182}{(16)^2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \frac{a_0 - a_m}{a_0 - a_1} \right] \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim & \left[\left(\frac{e_\Sigma (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5)}{16^2} + \frac{182 e_\Sigma (a_0 - a_m)}{(16)^2 (a_0 - a_1)} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ & \left. + i \left(-\frac{e_\Sigma m^2}{2} + \frac{e_\Sigma (a_0 - a_m)}{2 (a_0 - a_1)} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{aligned}$$

Or, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, d'après la proposition 1.1 du chapitre 1

$$a_{m|\Sigma} \sim -\frac{(e_\Sigma ka_\Sigma)^2}{2} + (2m + 1) e_\Sigma ka_\Sigma - \frac{(2m + 1)^2 + 1}{8}$$

On obtient alors que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\frac{a_0 - a_m}{a_0 - a_1} \sim m \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right)$$

ce qui entraîne pour $m \geq 0$ et $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim \left[\left(\frac{e_\Sigma(18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5)}{16^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{182e_\Sigma}{(16)^2} m \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. + i \left(-\frac{e_\Sigma m^2}{2} + \frac{e_\Sigma}{2} m \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{aligned}$$

On rappelle à présent le résultat donné par Eq. (5.67)

$$|R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}}$$

Il vient donc que lorsque $m \geq 0$, $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$ et $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} \left| \left[\frac{e_\Sigma(18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5)}{16^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{182e_\Sigma}{(16)^2} m \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right] \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. + i \left[-\frac{e_\Sigma m^2}{2} + \frac{e_\Sigma}{2} m \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right] \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right| \end{aligned}$$

soit,

$$|\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{1,m}}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{1,m} &= \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ &\quad + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

* Si $m < 0$:

On rappelle que dans ce cas là :

$$\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \left[\beta_{|m|_\Sigma} + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - b_{|m|}) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - b_{|m|})}{a_0 - a_1} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

On a vu lors de l'étude avec la condition DtN1 que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\beta_{|m|_\Sigma} \sim \alpha_m(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

soit,

$$\begin{aligned} \beta_{|m|_\Sigma} \sim & \alpha_0(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + i e_\Sigma k a_\Sigma \left[-\frac{m^2}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ & \left. - \frac{i}{(16)^2} (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \end{aligned}$$

On obtient donc après simplification que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ et $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim & \left[\left(\frac{e_\Sigma (18m - 72m^2 - 80m^3 - 80m^4 + 32m^5)}{16^2} + \frac{182e_\Sigma a_0 - b_{|m|}}{(16)^2 a_0 - a_1} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ & \left. i \left(-\frac{e_\Sigma m^2}{2} + \frac{e_\Sigma a_0 - b_{|m|}}{2 a_0 - a_1} \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] R_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{aligned}$$

Or, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, d'après la proposition 1.1 du chapitre 1

$$\beta_{|m|_\Sigma} \sim -\frac{(e_\Sigma k a_\Sigma)^2}{2} + (2|m| - 1) e_\Sigma k a_\Sigma - \frac{(2|m| - 1)^2 + 1}{8}$$

On obtient alors que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\frac{a_0 - b_{|m|}}{a_0 - a_1} \sim (1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma k a_\Sigma}$$

On obtient ainsi que lorsque $m < 0$ et $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim & R_m^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[\left(\frac{e_\Sigma (18|m| - 72|m|^2 - 80|m|^3 - 80|m|^4 + 32|m|^5)}{16^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{182e_\Sigma}{(16)^2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma k a_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ & \left. i \left(-\frac{e_\Sigma |m|^2}{2} + \frac{e_\Sigma}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma k a_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] \end{aligned}$$

Comme, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ (cf Eq. (5.67))

$$|R_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}}$$

il vient donc que lorsque $m < 0$ et $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Sigma}} \left| \left(\frac{e_\Sigma(18|m| - 72|m|^2 - 80|m|^3 - 80|m|^4 + 32|m|^5)}{16^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{182e_\Sigma}{(16)^2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right. \\ &\quad \left. + i \left(-\frac{e_\Sigma |m|^2}{2} + \frac{e_\Sigma}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right| \end{aligned}$$

soit,

$$|\Psi_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{2,m}} \quad (5.73)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{2,m} &= \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ &\quad + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

□

Le lemme (5.9) permet de définir $|\widetilde{\tau}_m^{app}|$:

* Si $m \geq 0$:

$$|\widetilde{\tau}_m^{app}| = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(Me_2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{1,m}} \quad (5.74)$$

avec

$$\begin{aligned} C_{1,m} &= \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ &\quad + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

* Si $m < 0$:

$$|\widetilde{\tau}_m^{app}| = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(Me_2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{2,m}} \quad (5.75)$$

avec

$$C_{2,m} = \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

La conjecture 5.8 nous dit d'abord que :

Lemme 5.10 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) et $\frac{m}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$:

* Si $m \geq 0$:

$$|\widetilde{\Upsilon}_m^{app}| \leq \frac{\pi}{4e_\Gamma} |\widetilde{d}_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{1,m}}$$

avec

$$C_{1,m} = \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

* Si $m < 0$:

$$|\widetilde{\Upsilon}_m^{app}| \leq \frac{\pi}{4e_\Gamma} |\widetilde{d}_m^{inc} R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{C_{2,m}}$$

avec

$$C_{2,m} = \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

Nous avons déjà montré précédemment au lemme 5.5 que l'on pouvait majorer $|R_m^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})|$ lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$. Il nous reste donc à estimer $|\Upsilon_m^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})|$ lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$.

Proposition 5.11 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (i.e lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) et $\frac{|m|}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$,

* Si $m \geq 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa m \pi^{1/4} \frac{e_\Sigma}{e_\Gamma^{3/4}} \left(\frac{a_\Gamma}{a_\Sigma}\right)^{3/2} \sqrt{C_{1,m}} \frac{1}{(ka_\Gamma)^{7/4}}$$

avec

$$C_{1,m} = \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma}\right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma}\right) \right]^2$$

* Si $m < 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa \pi^{1/4} \frac{e_\Sigma}{e_\Gamma^{3/4}} \left(\frac{a_\Gamma}{a_\Sigma}\right)^{3/2} \sqrt{C_{2,m}} \frac{1}{(ka_\Gamma)^{7/4}} \quad (5.76)$$

avec

$$C_{2,m} = \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} \right. \\ \left. + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma ka_\Sigma} \right) \right]^2$$

Démonstration : Si on combine les lemmes 5.54, 5.10 et 5.5 , on obtient que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$),

* Si $m \geq 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa (\pi e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{me_\Sigma}{(ka_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi ka_\Gamma}} \sqrt{C_{1,m}} \frac{\pi}{4 e_\Gamma}$$

avec

$$C_{1,m} = \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma}\right) \right]^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \\ + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1-m}{4e_\Sigma ka_\Sigma}\right) \right]^2$$

et $\kappa \approx 1.086435$.

* Si $m < 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa (\pi e_\Gamma k a_\Gamma)^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e_\Sigma}{(k a_\Sigma)^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi k a_\Gamma}} \sqrt{C_{2,m}} \frac{\pi}{4 e_\Gamma}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{2,m} = & \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} \right. \\ & \left. + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma k a_\Sigma} \right) \right]^2 \frac{1}{(k a_\Sigma)^2} \\ & + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Sigma k a_\Sigma} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

et $\kappa \approx 1.086435$. D'où le résultat annoncé après simplification de cette expression. \square

Le résultat donné par la proposition 5.11 montre, qu'à haute fréquence, le coefficient de réflexion τ_m^{app} , avec $\frac{|m|}{\sqrt{k a_\Sigma}} \ll 1$, est majoré en module par une expression qui tend vers 0, lorsque l'on pose la condition DtN2 (3.36) sur Σ . Cela veut dire que l'effet de pollution généré par cette condition décroît avec la fréquence comme dans le cas de la condition DtN1.

Corollaire 5.12 *Si l'on adopte la même configuration géométrique que lors des tests numériques, à savoir $a_\Sigma = \lambda a_\Gamma$ (avec $\lambda > 1$) et $e_\Sigma = e_\Gamma$, la proposition 5.11 devient, lorsque $k a_\Gamma \rightarrow +\infty$ et $\frac{|m|}{\sqrt{k a_\Sigma}} \ll 1$:*

* Si $m \geq 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa m \pi^{1/4} e_\Gamma^{1/4} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/2} \sqrt{C_{1,m}} \frac{1}{(k a_\Gamma)^{7/4}}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{1,m} = & \left[\frac{(-18 + 72m + 80m^2 + 80m^3 - 32m^4)}{16^2} + \frac{182}{256} \left(1 + \frac{1 - m}{4e_\Gamma \lambda k a_\Gamma} \right) \right]^2 \frac{1}{(\lambda k a_\Gamma)^2} \\ & + \left[\frac{-m}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - m}{e_\Gamma \lambda k a_\Gamma} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

* Si $m < 0$:

$$|\widetilde{\tau_m^{app}}| < \kappa \pi^{1/4} e_\Gamma^{1/4} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/2} \sqrt{C_{2,m}} \frac{1}{(k a_\Gamma)^{7/4}} \quad (5.77)$$

avec

$$C_{2,m} = \left[\frac{(-18|m| + 72|m|^2 + 80|m|^3 + 80|m|^4 - 32|m|^5)}{16^2} + \frac{182}{256} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Gamma \lambda k a_\Gamma} \right) \right]^2 \frac{1}{(\lambda k a_\Gamma)^2} + \left[\frac{-|m|^2}{2} + \frac{1}{2} \left((1 + |m|) + \frac{2 + 3|m| - |m|^2}{4e_\Gamma \lambda k a_\Gamma} \right) \right]^2$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

On peut donc alors vérifier que sous l'hypothèse $\frac{|m|}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que :

$$\sqrt{C_{1,m}} \leq C_1 \lambda k a_\Gamma, \quad \sqrt{C_{2,m}} \leq C_2 \lambda k a_\Gamma$$

ce qui entraîne qu'il existe C , constante positive telle que pour tout m vérifiant $\frac{|m|}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$,

$$|\widetilde{\tau}_m^{app}| \leq \frac{C}{(k a_\Gamma)^{1/4}}$$

On observe donc que sous l'hypothèse $\frac{|m|}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$, $|\tau_m^{app}|$ tend vers 0 quand $k a_\Gamma$ tend vers $+\infty$. Par contre, la dépendance en λ n'apparaît plus. Elle apparaît si on considère les modes tels que $\frac{|m|}{\sqrt{k a_\Gamma}} \ll 1$. Dans ce cas, on a aussi $\frac{|m|}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$ donc tous les calculs qui précèdent sont valables avec pour conclusion qu'à haute fréquence, pour tous les modes tels que $\frac{|m|}{\sqrt{k a_\Gamma}} \ll 1$, on a :

$$|\widetilde{\tau}_m^{app}| \leq \frac{C}{\lambda^{3/2} (k a_\Gamma)^{1/4}}$$

et on retrouve une estimation analogue à celle obtenue pour DtN1.

En conclusion, nous avons réussi à estimer le comportement du coefficient de réflexion à haute fréquence pour une plage de modes. En annexe D, nous avons reporté un travail débouchant sur une classification des modes en fonction de la valeur de m . Nous avons établi que si $\frac{2|m|}{e_\Sigma k a_\Sigma} \ll 1$, les modes sont propagatifs. Le comportement du coefficient de réflexion est donc établi pour une partie des modes propagatifs. Nous avons cherché à affiner les majorations de façon à élargir la gamme de modes considérés. Nous avons reporté en annexe E certains cas pour lesquels nous avons pu conclure. Toutefois, il reste encore du travail pour obtenir un résultat général.

L'objet de ce chapitre était d'étudier numériquement et de façon théorique les conditions DtN locales quand on résout le problème de scattering par la méthode des conditions aux limites absorbantes (CLA) standard. Nous souhaitions en particulier analyser l'influence de la position de la frontière artificielle sur la qualité de la solution. L'étude que nous proposons est analytique et porte sur le calcul des coefficients du champ approché développé en série de Mathieu [52]. Numériquement, nous avons été confrontés à des difficultés causées par les instabilités connues [34] des fonctions de Mathieu et les résultats numériques sont encore trop pollués pour que nous puissions en faire une analyse pertinente. On verra au chapitre suivant que le cas 3D se passe beaucoup mieux. Du point de vue théorique, nous avons obtenu des estimations du coefficient de réflexion associé à certains modes. La proposition (5.11) décrit le cas de la condition DtN2 et montre qu'à haute fréquence le coefficient de réflexion tend vers 0 d'autant plus significativement que la fréquence est élevée et la frontière artificielle est éloignée de l'obstacle. Ce résultat ne concerne pas l'ensemble des modes puisqu'il ne s'adresse qu'à une partie des modes propagatifs, il serait donc intéressant de l'étendre à tous les modes et nous renvoyons à l'annexe E pour quelques premiers résultats qui vont dans ce sens.

Chapitre 5

Formulation en volume : le problème 3D

Sommaire

1	Introduction au problème	207
2	Expression des différents champs acoustiques	209
3	Détermination des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app}	211
4	Résultats numériques	226
5	Analyse haute fréquence	247

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'évaluer les performances des nouvelles conditions DtN pour la résolution du problème de scattering à haute fréquence dans une formulation classique. Les conditions DtN vont donc être utilisées comme des conditions aux limites absorbantes. L'objectif de ce chapitre est d'analyser l'impact des nouvelles conditions en fonction de la distance à laquelle on place la frontière artificielle. On retrouve donc les mêmes préoccupations qu'au chapitre précédent mais on va voir que l'on peut développer une analyse plus poussée car les frontières sphéroïdales sont beaucoup plus stables numériquement.

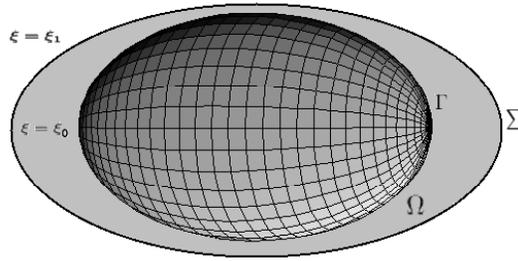
1 Introduction au problème

Nous étudions le cas d'un obstacle de forme ellipsoïdale de surface sphéroïdale prolatae Γ . Dans le système de coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) , la frontière

Γ est repérée par $\xi = \xi_0$ et on note e_Γ l'excentricité correspondante qui est définie par $e_\Gamma = \frac{1}{\cosh \xi_0}$. Le problème de scattering (ou problème exact) est posé en domaine non borné Ω^+ , complémentaire dans \mathbb{R}^3 de l'obstacle ellipsoïdal. On note $u^{ex,3D}$ le champ diffracté exact solution de ce problème extérieur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^{ex,3D} + k^2 u^{ex,3D} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{ex,3D} = -u^{inc,3D} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u^{ex,3D} - iku^{ex,3D} \right] = 0 & \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Afin de résoudre le problème de scattering, par éléments finis, on entoure l'obstacle d'une frontière artificielle Σ , de forme sphéroïdale prolata, qui délimite ainsi un domaine de calcul borné Ω . La frontière Σ est alors repérée par $\xi = \xi_1$, l'excentricité associée est notée e_Σ et est définie par $e_\Sigma = \frac{1}{\cosh \xi_1}$.



Le problème de scattering approché consiste donc à résoudre une équation d'Helmholtz à l'intérieur du domaine de calcul Ω . On note $u^{app,3D}$ l'onde acoustique définie comme le solution du problème mixte suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^{app,3D} + k^2 u^{app,3D} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^{app,3D} = -u^{inc,3D} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{app,3D}}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{T} u^{app,3D} & \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où Δ désigne le Laplacien, k le nombre d'onde et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sortant à Ω . Sur la surface Γ de l'obstacle de diffraction, on impose une condition de Dirichlet, et sur la frontière artificielle Σ , on applique une des conditions DtN introduites au chapitre 3. L'opérateur \tilde{T} est défini par :

$\tilde{T} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \varphi}} T$, où T représente soit l'opérateur $DtN1$ soit l'opérateur $DtN2$ dont le processus de construction a été donné précédemment au chapitre 3 de

cette thèse. L'opérateur \tilde{T} s'obtient en multipliant T par un coefficient qui provient de l'écriture de la dérivée normale en fonction de la dérivée par rapport à ξ . Nous renvoyons à l'annexe B pour des calculs détaillés.

Enfin, u^{inc} désigne l'onde incidente que l'on choisira sous forme d'une onde plane.

L'objectif de ce chapitre est similaire à celui du chapitre précédent. Nous avons défini artificiellement un domaine de calcul borné autour de l'obstacle de diffraction sur laquelle on pose une CLA dont on veut évaluer la performance. Nous voulons comparer les solutions du problème exact $u^{ex,3D}$ et du problème approché $u^{app,3D}$. Après identification, nous allons évaluer la précision du champ diffracté approché $u^{app,3D}$ par rapport au champ diffracté exact $u^{ex,3D}$, solution du problème exact posé en domaine non borné. Nous espérons comparer ces deux solutions en fonction de l'éloignement de la frontière artificielle Σ par rapport à la surface de l'obstacle Γ , c'est-à-dire en fonction du coefficient λ donné par Eq. (4.54). Nous allons commencer par donner l'expression du champ diffracté exact et des différents champs acoustiques (incident et approché) intervenant dans le problème approché (1.2).

2 Expression des différents champs acoustiques

Lors de la résolution des problèmes exact et approché (1.2), trois champs acoustiques interviennent : le champ diffracté exact $u^{ex,3D}$, solution du problème exact, le champ incident $u^{inc,3D}$ et le champ diffracté approché $u^{app,3D}$, solution du problème approché. Nous allons commencer par donner l'expression analytique de ces différents champs, ce qui nous permettra par la suite d'évaluer la précision de la solution approchée en comparaison avec la solution exacte.

2.1 Décomposition de la solution exacte $u^{ex,3D}$

On rappelle que $u^{ex,3D}$ représente la solution du problème exact, c'est-à-dire le problème posé en domaine non borné Ω^+ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^{ex,3D} + k^2 u^{ex,3D} = 0 & \text{dans } \Omega^+ \\ u^{ex,3D} = -u^{inc,3D} & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left[\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u^{ex,3D} - iku^{ex,3D} \right] = 0 & \end{array} \right.$$

La condition de Sommerfeld [61], posée à l'infini, permet de sélectionner les solutions sortantes du problème et garantit ainsi l'unicité pour (1.1).

Tout comme dans le cas 2D, la solution $u^{ex,3D}$ peut s'exprimer comme une superposition de modes sortants $R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi)$ découplés (cf [10]) :

$$u^{ex,3D} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} d_{mn}^{ex} u_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) \quad (2.3)$$

Dans cette expression, $u_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi)$ représente :

$$u_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) = R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \quad (2.4)$$

et le coefficient d_{mn}^{ex} est donné par :

$$d_{mn}^{ex} = -2\varepsilon_m \frac{i^n}{\sqrt{N_{mn}}} \frac{R_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi_0)}{R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi_0)} S_{mn}(kf, \cos \varphi_0) \quad (2.5)$$

où :

- les fonctions $R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi)$ désignent les fonctions sphéroïdales radiales de 3^{ème} espèce associées au (mn) ^{ème} mode (cf [20]) noté $u_{mn}^{(3)}$.
- les fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ désignent les fonctions sphéroïdales angulaires associées au (mn) ^{ème} mode (cf [20]).
- N_{mn} est le coefficient de normalisation associé aux fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$, il est défini par (cf [20] Eq (3.1.32) p. 22) :

$$N_{mn} = \int_{-1}^1 S_{mn}^2(kf, \cos \varphi) d\theta \quad (2.6)$$

- $\varepsilon_m = (2 - \delta_{0m})$ où δ_{0m} est le symbole de Kronecker.

2.2 Décomposition de l'onde incidente $u^{inc,3D}$

L'onde incidente à Γ est une donnée initiale du problème approché (1.2), son expression nous sera utile afin d'identifier la solution de ce problème. Nous supposons que le champ acoustique incident à la surface Γ de l'obstacle de diffraction est du type onde plane :

$$u^{inc,3D} = e^{ikf \cosh \xi (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \tanh \xi \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos \theta)} \quad (2.7)$$

où φ_0 est l'angle d'incidence.

On sait, d'après [60], que cette onde plane s'écrit elle aussi comme une somme de modes indépendants les uns des autres :

$$u^{inc,3D} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} d_{mn}^{inc} u_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) \quad (2.8)$$

où $u_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi)$ est donné par :

$$u_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) = R_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \quad (2.9)$$

et,

$$d_{mn}^{inc} = 2\varepsilon_m \frac{i^n}{\sqrt{N_{mn}}} S_{mn}(kf, \cos \varphi_0) \quad (2.10)$$

Les fonctions $R_{mn}^{(1)}(kf, \cosh \xi)$ sont les fonctions sphéroïdales radiales de 1^{ère} espèce associées au (mn) ^{ème} mode [1], [20] noté $u_{mn}^{(1)}$. Les fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ et N_{mn} ainsi que la variable ε_m ont été définies dans les deux paragraphes précédents.

2.3 Décomposition de la solution approchée $u^{app,3D}$

Comme dans le cas bidimensionnel, on sait d'après [52] que l'onde acoustique $u^{app,3D}$ s'écrit comme une superposition de modes sortants (donnés par les fonctions $R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi)$) auxquels s'ajoute une superposition de modes rentrants (donnés par les fonctions $R_{mn}^{(4)}(kf, \cosh \xi)$) représentant les réflexions non physiques générées par la frontière artificielle qui peuvent polluer considérablement le domaine de calcul si la CLA considérée n'est pas performante. La solution du problème approché (1.2) s'écrit donc comme suit :

$$u^{app,3D} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} [d_{mn}^{app} u_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) + \tau_{mn}^{app} u_{mn}^{(4)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi)] \quad (2.11)$$

où pour $j = 3, 4$, $u_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi)$ est donné par :

$$u_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi, \cos \varphi) = R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi) \frac{S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \quad (2.12)$$

Les fonctions $R_{mn}^{(3)}(kf, \cosh \xi)$ et $R_{mn}^{(4)}(kf, \cosh \xi)$ sont respectivement les fonctions sphéroïdales radiales de 3^{ème} et 4^{ème} espèce du (mn) ^{ème} mode (cf [20]). Les fonctions $S_{mn}(kf, \cos \varphi)$ sont quant-à-elles les fonctions sphéroïdales angulaires du (mn) ^{ème} mode (cf [20]).

Le coefficient τ_{mn}^{app} qui intervient sur les modes rentrants sera désigné par le terme "coefficient de réflexion" du mn ^{ème} mode puisqu'il représente les réflexions produites par la présence de la frontière artificielle autour de l'obstacle.

En accord avec les Eqs. (2.3) et (2.11), comparer les champs diffractés exact $u^{ex,3D}$ et approché $u^{app,3D}$ revient à comparer les deux coefficients correspondant aux modes sortants d_{mn}^{ex} et d_{mn}^{app} et à quantifier le coefficient correspondant aux modes rentrants de la solution approchée τ_{mn}^{app} .

3 Détermination des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app}

3.1 Calculs préliminaires

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques résultats de calculs préliminaires qui vont nous être utiles par la suite.

Dans tout ce qui suit, afin d'alléger les notations, nous adopterons la notation suivante :

$$\text{Pour } j = 1, 3, 4 : R_{mn}^{(j)'}(eka, e^{-1}) = \frac{\partial R_{mn}^{(j)}}{\partial \xi}(eka, e^{-1})$$

On sait que (cf Annexe B) :

$$\frac{\partial u^{app,3D}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\partial u^{app,3D}}{\partial \xi} \quad (3.13)$$

On commence par calculer $\frac{\partial u^{app,3D}}{\partial \xi}$. On suppose que d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app} ne dépendent pas ξ . Il vient donc, formellement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{app,3D}}{\partial \xi} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \underbrace{\left(d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} \right)}_{\frac{\partial u_{mn}^{app}}{\partial \xi}} \\ &= \sinh \xi \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \left[d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)'}(kf, \cosh \xi) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)'}(kf, \cosh \xi) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{app,3D}}{\partial n} &= \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \varphi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \left(d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\sinh \xi}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \varphi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{S_{mn}(kf, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \left[d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)'}(kf, \cosh \xi) \right. \\ &\quad \left. + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)'}(kf, \cosh \xi) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2 Identifications des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app}

Dans le cas idéal d'une condition aux bords transparente posée sur Σ , nous avons $d_{mn}^{app} = d_{mn}^{ex}$ et $\tau_{mn}^{app} = 0$ ce qui traduit le fait que la condition ne génère aucune pollution à l'intérieur du domaine de calcul Ω . L'introduction d'une CLA sur Σ va perturber la solution de sorte que d_{mn}^{app} n'est plus égal à d_{mn}^{ex} et $\tau_{mn}^{app} \neq 0$. Afin d'analyser le comportement des coefficients approchés, suivant la condition DtN considérée,

nous allons les identifier. Pour cela, nous commençons par résoudre un système du type :

$$\begin{cases} u^{app,3D} = -u^{inc,3D} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^{app,3D}}{\partial n} = \tilde{T}u^{app,3D} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.16)$$

soit pour un mode mn fixé (modes découplés, $m \geq 0$ et $n \geq m$) :

$$\begin{cases} u_{mn}^{app,3D} = -u_{mn}^{inc,3D} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial u_{mn}^{app,3D}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} T^{DtN} u_{mn}^{app,3D} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.17)$$

Or, pour un mode mn , (3.15) s'écrit :

$$\frac{\partial u_{mn}^{app,3D}}{\partial n} = \frac{1}{a_\Sigma \sqrt{1 - e_\Sigma^2 \cos^2 \theta}} \left(d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} \right)$$

et en couplant cette égalité avec la condition sur Σ de (3.17), on obtient :

$$d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} = T^{DtN} u_{mn}^{app,3D} \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.18)$$

La condition sur Γ du problème (3.17) peut, elle aussi, être simplifiée car, sur Γ :

$$\begin{cases} u_{mn}^{app,3D} = \left[d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \right] \frac{S_{mn}(e_\Gamma k a_\Gamma, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \\ \text{et} \\ u_m^{inc} = d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \frac{S_{mn}(e_\Gamma k a_\Gamma, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \cos m\theta \end{cases} \quad (3.19)$$

(3.19) et (3.18) conduisent donc au système :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} = T^{DtN} \underbrace{(d_{mn}^{app} u_{mn}^{(3)} + \tau_{mn}^{app} u_{mn}^{(4)})}_{u_{mn}^{app,3D}} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.20)$$

Rappelons alors que, par construction, on a sur la frontière artificielle Σ :

$$\frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} = T u_{mn}^{(3)} \quad \text{pour } \begin{cases} m = 0, n = 0 & \text{si } T = T^{DtN1} \\ m = 0, n = 0 \text{ et } m = 0, n = 1 & \text{si } T = T^{DtN2} \end{cases} \quad (3.21)$$

où T^{DtN1} et T^{DtN2} sont les opérateurs de type Dirichlet-to-Neumann que nous avons introduits au chapitre 3 de cette thèse.

3.2.1 Avec l'opérateur DtN d'ordre 1

On suppose dans ce paragraphe que l'on pose la condition DtN1 introduite dans le chapitre 3 sur la frontière artificielle Σ . On rappelle que, pour une excentricité donnée e , l'opérateur DtN1 s'écrit : On rappelle que d'après le chapitre 2, l'opérateur T^{DtN1} s'écrit pour une excentricité donnée e :

$$T^{DtN1}u = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} r_{00}(eka, e^{-1})u \quad (3.22)$$

où les coefficients r_{mn} sont donnés, pour $(m, n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, par :

$$r_{mn}(eka, e^{-1}) = \frac{R_{mn}^{(3)'}(eka, e^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1})} \quad (3.23)$$

Nous allons détailler la procédure d'identification des coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app} ce cas là. tout d'abord, on s'intéresse au cas particulier $(m, n) = (0, 0)$ pour lequel la condition DtN1 a été construite exacte puis on passera au cas général pour un mode (m, n) quelconque.

Pour le mode $m = 0, n = 0$, le système (3.20) devient :

$$\begin{cases} d_{00}^{app} R_{00}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{00}^{app} R_{00}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{00}^{inc} R_{00}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{00}^{app} \left(\frac{\partial u_{00}^{(3)}}{\partial \xi} - T^{DtN1}u_{00}^{(3)} \right) + \tau_{00}^{app} \left(\frac{\partial u_{00}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1}u_{00}^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.24)$$

Or, on sait que l'opérateur DtN d'ordre 1 vérifie par construction $\frac{\partial u_{00}^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN1}u_{00}^{(3)}$

Grâce à cette propriété, le système (3.24) devient donc :

$$\begin{cases} d_{00}^{app} R_{00}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{00}^{app} R_{00}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{00}^{inc} R_{00}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_{00}^{app} \left(\frac{\partial u_{00}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1}u_{00}^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.25)$$

Or $\left(\frac{\partial u_{00}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1}u_{00}^{(4)} \right) \neq 0$, donc la condition sur Σ implique :

$$\tau_{00}^{app} = 0 \quad (3.26)$$

Avec le résultat sur τ_{00}^{app} obtenu ci-dessus, la condition sur Γ de (3.25) devient :

$$d_{00}^{app} R_{00}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{00}^{inc} R_{00}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})$$

ce qui entraîne

$$d_{00}^{app} = \frac{-d_{00}^{inc} R_{00}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}{R_{00}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}$$

soit

$$d_{00}^{app} = -2\varepsilon_0 \frac{i^0}{\sqrt{N_{00}}} \frac{R_{00}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}{R_{00}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})} S_{00}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, \cos \varphi_0)$$

et donc

$$d_{00}^{app} = d_{00}^{exact} \quad (3.27)$$

On obtient comme couple solution du système (3.25) :

$$(d_{00}^{app}, \tau_{00}^{app}) = (d_{00}^{exact}, 0) \quad (3.28)$$

Ce résultat montre bien que la condition DtN1 est transparente pour le mode $(m, n) = (0, 0)$ puisque les coefficients correspondants aux modes sortants d_{00}^{app} et d_{00}^{exact} sont égaux et que le coefficient de réflexion τ_{00}^{app} est nul. Cela était prévisible puisque la condition a été construite exacte pour ce mode. Nous allons à présent voir ce qu'il en est pour un mode (m, n) quelconque.

- Modes $(m, n) \neq (0, 0)$.

Si on forme la frontière artificielle Σ à l'aide d'une condition de type DtN1, le système (3.20) s'écrit :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e_{\Sigma}^2}}{e_{\Sigma}} \alpha_0 (e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) (d_{mn}^{app} u_{mn}^{(3)} + \tau_{mn}^{app} u_{mn}^{(4)}) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.29)$$

Or pour $j = 3$ ou $j = 4$, et pour une excentricité donnée e , on a :

$$\frac{\partial u_{mn}^{(j)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cos m\theta \frac{S_{mn}(eka, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} R_{mn}^{(j)'}(eka, e^{-1}) \quad (3.30)$$

Ainsi, grâce à ce résultat et à l'expression de $u_{mn}^{app, 3D}$ donnée par (2.11), on peut simplifier le système (3.29) :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\sqrt{1-e_{\Sigma}^2}}{e_{\Sigma}} \cos m\theta \frac{S_{mn}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} [d_{mn}^{app} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})] = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.31)$$

où $\Upsilon_{mn}^{(j)}$ est défini pour $j = 3$ ou $j = 4$ par :

$$\Upsilon_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = (R_{mn}^{(j)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) - r_{00}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) R_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})) \quad (3.32)$$

On peut simplifier une dernière fois le système (3.31), cela donne :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{mn}^{app} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.33)$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) & \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{mn}^{app} \\ \tau_{mn}^{app} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

On note M_1 la matrice :
$$\begin{bmatrix} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) & \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \end{bmatrix}$$

Le système est donc inversible sous la condition :

$$\det(M_1) = R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \neq 0$$

Dans la suite, on fait l'hypothèse que l'on peut choisir Σ de telle sorte que $\det M_1 \neq 0$ et, dans ce cas, le système matriciel (3.34) est inversible avec pour solution :

$$\begin{bmatrix} d_{mn}^{app} \\ \tau_{mn}^{app} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(M_1)} \begin{bmatrix} \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) & -R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ -\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) & R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

On a donc :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{-1}{\text{Det}(M_1)} d_{mn}^{inc} \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{1}{\text{Det}(M_1)} d_{mn}^{inc} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{-d_{mn}^{inc} \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \end{cases}$$

En conclusion,

Proposition 3.1 *Supposons qu'il existe Σ telle que $\det M_1 \neq 0$. Alors, pour l'opérateur DtN_1 , le champs diffracté approché est déterminé, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n \geq m$, par les coefficients :*

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \end{cases} \quad (3.36)$$

où pour un mode mn donné, d_{mn}^{inc} est défini par (2.10).

Dans le cas de la 3D, nous pouvons établir quelques propriétés du déterminant dans certains cas particuliers.

Lorsque $(m, n) = (0, 0)$, on peut écrire $\det(M_1)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= R_{00\Gamma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} - R_{00\Sigma}^{(3)'} R_{00\Gamma}^{(4)} \\ &\quad + \frac{R_{00\Sigma}^{(3)'}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \left(R_{00\Gamma}^{(4)} R_{00\Sigma}^{(3)} - R_{00\Sigma}^{(4)} R_{00\Gamma}^{(3)} \right) \\ &= R_{00\Gamma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} - R_{00\Sigma}^{(3)'} R_{00\Sigma}^{(4)} \frac{R_{00\Gamma}^{(3)}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Or,

$$R_{00\Sigma}^{(3)'} R_{00\Sigma}^{(4)} = -\Delta_W [R_{00\Sigma}^{(3)}, R_{00\Sigma}^{(4)}] + R_{00\Sigma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'}$$

où Δ_W désigne le Wronskien.

On a, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ (avec $n \geq m$),

$$\begin{aligned} \Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(3)}, R_{mn\Sigma}^{(4)}] &= R_{mn\Sigma}^{(3)} R_{mn\Sigma}^{(4)'} - R_{mn\Sigma}^{(3)'} R_{mn\Sigma}^{(4)} \\ &= \left(R_{mn\Sigma}^{(1)} + iR_{mn\Sigma}^{(2)} \right) \left(R_{mn\Sigma}^{(1)'} - iR_{mn\Sigma}^{(2)'} \right) \\ &\quad - \left(R_{mn\Sigma}^{(1)'} + iR_{mn\Sigma}^{(2)'} \right) \left(R_{mn\Sigma}^{(1)} - iR_{mn\Sigma}^{(2)} \right) \\ &= -2iR_{mn\Sigma}^{(1)} R_{mn\Sigma}^{(2)'} + 2iR_{mn\Sigma}^{(2)} R_{mn\Sigma}^{(1)'} \\ &= -2i\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}] \end{aligned} \quad (3.38)$$

D'après [20] (cf Eq. (4.1.21) p 32 et Annexe C), on a :

Propriété 3.2

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}] = \frac{1}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} = \frac{1}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} \quad (3.39)$$

En combinant Eq. (3.38) et la propriété 3.2, on obtient donc que :

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(3)}, R_{mn\Sigma}^{(4)}] = \frac{-2i}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} \quad (3.40)$$

On en déduit que pour $(m, n) = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= R_{00\Gamma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} - \frac{R_{00\Gamma}^{(3)}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \left[\frac{2i}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} + R_{00\Sigma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} \right] \\ &= \frac{R_{00\Gamma}^{(3)}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \left(\frac{-2i}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} \right) \end{aligned}$$

Si l'on se place, comme à 2D, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation, on a donc :

Propriété 3.3 Pour $(m, n) = (0, 0)$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:

$$\det(M_1) \rightarrow \frac{-2i}{e_\Gamma k a_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}$$

Cela signifie donc qu'à haute fréquence, lorsque λ tend vers 1, le déterminant tend vers 0 et le système n'est plus inversible. On retrouve donc que le cadre OSRC n'est pas adapté au régime haute fréquence.

Pour les autres modes, nous n'avons pas réussi à établir l'analogie de la propriété 3.3. Toutefois, nous avons effectué une étude numérique de $|\det(M_1)|$ qui est reportée sur les figures (5.1) et (5.2). Sur la figure (5.1), on a représenté les valeurs de $|\det(M_1)|$ en fonction de λ , pour différentes valeurs de (m, n) . On a pris $e = 0.9$ et $ka = 10$. On observe que $|\det(M_1)|$ est une fonction croissante de λ , pour tous les modes représentés. La figure (5.2) représente l'allure zoomée de $|\det(M_1)|$ au voisinage de $\lambda = 1$. On voit que pour tous les modes, le déterminant converge vers une constante de l'ordre de $\frac{2}{e_{\Gamma}ka_{\Gamma}(e_{\Gamma}^{-2} - 1)}$ ce qui illustre la propriété 3.3 et semble indiquer que ce résultat est valable quel que soit le couple (m, n) .

$|\det(M_1)|$ pour $e = 0.9$, $ka = 10$

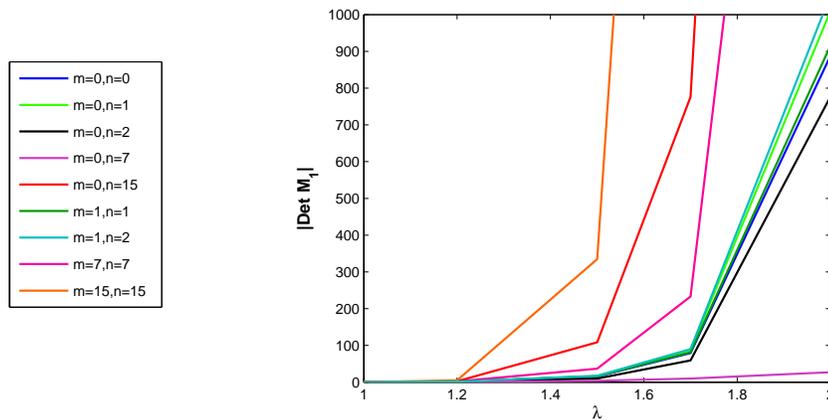


FIG. 5.1: $|\det(M_1)|$ en fonction du paramètre de dilatation λ .

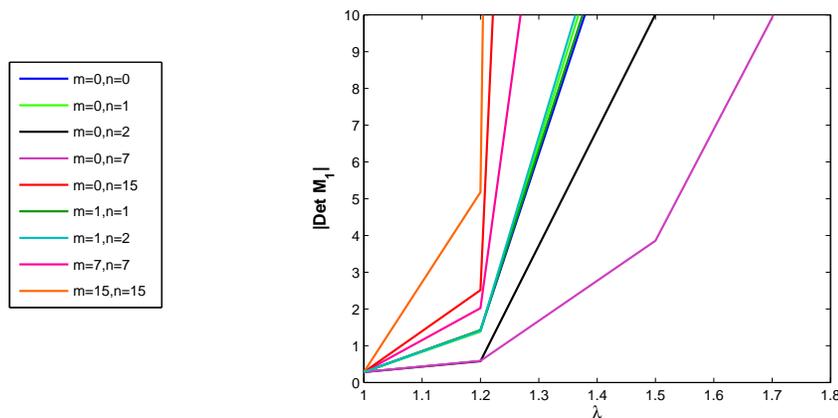


FIG. 5.2: Zoom de $|\det(M_1)|$ au voisinage de $\lambda = 1$.

3.2.2 Avec l'opérateur DtN d'ordre 2

Nous considérons à présent la condition $DtN2$ (construite au chapitre 3) sur la frontière artificielle Σ . De la même façon que pour la condition $DtN1$, nous allons identifier les coefficients d_{mn}^{app} et τ_{mn}^{app} qui définissent la solution approchée $u^{app,3D}$ du problème de scattering 3D dans ce cas là. On rappelle que pour une excentricité donnée e , l'opérateur $DtN2$ s'écrit :

$$T^{DtN2}u = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e(\lambda_{00} - \lambda_{01})} [(\lambda_{01}r_{00} - \lambda_{00}r_{01})u + (r_{00} - r_{01})(\Delta_\Gamma - (eka)^2 \cos^2 \varphi)u] \quad (3.41)$$

où les coefficients r_{mn} sont donnés par (3.23).

Les coefficients λ_{00} et λ_{01} représentent respectivement les valeurs propres associées aux fonctions sphéroïdales angulaires S_{00} et S_{01} .

Enfin, l'opérateur Δ_Γ désigne le Laplace Beltrami qui est défini, en coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) par :

$$\Delta_\Gamma = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Nous allons commencer par présenter la procédure d'identification des coefficients pour les cas particuliers des modes $(m, n) = (0, 0)$ et $(m, n) = (0, 1)$ pour lesquels la condition $DtN2$ est exacte puis nous passerons aux modes (m, n) quelconques.

- Cas particuliers lorsque $(m, n) = (0, 0)$ ou $(m, n) = (0, 1)$.

Lorsque la frontière artificielle est construite à l'aide de l'opérateur T^{DtN2} , on sait par construction que $\frac{\partial u_{00}^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2}u_{00}^{(3)}$ et $\frac{\partial u_{01}^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2}u_{01}^{(3)}$.

* Pour le mode $(m, n) = (0, 0)$:

Comme dans le cas de l'opérateur T^{DtN1} , on peut simplifier le système (3.20) avec $m = 0, n = 0$ qui devient :

$$\begin{cases} d_{00}^{app} R_{00}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) + \tau_{00}^{app} R_{00}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) = -d_{00}^{inc} R_{00}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_{00}^{app} \left(\frac{\partial u_{00}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN1}u_{00}^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.42)$$

Comme $\left(\frac{\partial u_{00}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2}u_{00}^{(4)} \right) \neq 0$, on conclut que : $\tau_{00}^{app} = 0$

De la même façon que pour T^{DtN1} , l'équation sur Γ de (3.42) nous donne alors : $d_{00}^{app} = d_{00}^{exact}$.

On obtient comme couple solution du système (3.42) :

$$(d_{00}^{app}, \tau_{00}^{app}) = (d_{00}^{exact}, 0) \quad (3.43)$$

* Pour le mode $(m, n) = (0, 1)$:

De même que précédemment, le fait que $\frac{\partial u_{01}^{(3)}}{\partial \xi} = T^{DtN2} u_{01}^{(3)}$ nous permet de simplifier le système (3.20) dans le cas où $m = 0, n = 1$:

$$\begin{cases} d_{01}^{app} R_{01}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{01}^{app} R_{01}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{01}^{inc} R_{01}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \tau_{01}^{app} \left(\frac{\partial u_{01}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2} u_{01}^{(4)} \right) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.44)$$

Or $\left(\frac{\partial u_{01}^{(4)}}{\partial \xi} - T^{DtN2} u_{01}^{(4)} \right) \neq 0$, on en conclut donc, d'après l'équation sur Σ de (3.44), que :

$$\tau_{01}^{app} = 0 \quad (3.45)$$

L'équation sur Γ nous donne alors : $d_{01}^{app} = d_{01}^{exact}$.

On obtient ainsi comme couple solution du système (3.44) :

$$(d_{01}^{app}, \tau_{01}^{app}) = (d_{01}^{exact}, 0) \quad (3.46)$$

Pour les modes $(m, n) = (0, 0)$ et $(m, n) = (0, 1)$ pour lesquels la condition DtN2 est exacte, les résultats (3.43) et (3.46) montrent bien que la frontière artificielle ne génère aucune réflexion polluant le domaine de calcul. Voyons ce qu'il en est pour un mode (m, n) quelconque.

- Modes $(m, n) \notin \{(0, 0); (0, 1)\}$.

Si on applique sur la frontière artificielle Σ une condition de type DtN2, le système (3.20) s'écrit :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(3)}}{\partial \xi} + \tau_{mn}^{app} \frac{\partial u_{mn}^{(4)}}{\partial \xi} = T^{DtN2} (d_{mn}^{app} u_{mn}^{(3)} + \tau_{mn}^{app} u_{mn}^{(4)}) & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.47)$$

Pour un mode mn fixé, l'expression de $(T^{DtN2}u_{mn}^{(j)})$ peut être simplifiée grâce à une propriété des fonctions d'onde sphéroïdales angulaires S_{mn} (cf [1], [20], [60]) :

$$T^{DtN2}u_{mn}^{(j)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e(\lambda_{00} - \lambda_{01})} [(\lambda_{01} - \lambda_{mn})r_{00}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + (\lambda_{mn} - \lambda_{00})r_{01}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})] u_{mn}^{(j)}$$

où les λ_{mn} sont valeurs propres associées aux fonctions sphéroïdales angulaires S_{mn} (cf [1], [20]).

On rappelle aussi (cf Eq. (3.30)) que pour $j = 3$ ou $j = 4$, et pour une excentricité donnée e , on a :

$$\frac{\partial u_{mn}^{(j)}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cos m\theta \frac{S_{mn}(eka, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} R_{mn}^{(j)'}(eka, e^{-1})$$

Grâce à ces résultats et à l'expression de $u_{mn}^{app,3D}$ donnée par (2.11), on peut simplifier le système (3.47) :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\sqrt{1-e_{\Sigma}^2}}{e_{\Sigma}} \cos m\theta \frac{S_{mn}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} [d_{mn}^{app} \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} \Psi_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})] = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.48)$$

où $\Psi_{mn}^{(j)}$ est défini pour $j = 3$ ou $j = 4$ par :

$$\Psi_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = R_{mn}^{(j)'}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} R_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \quad (3.49)$$

Or, $\left(\frac{\sqrt{1-e_{\Sigma}^2}}{e_{\Sigma}} \cos m\theta \frac{S_{mn}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, \cos \varphi)}{\sqrt{N_{mn}}} \right) \neq 0$, donc le système (3.48), devient :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) = -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & \text{sur } \Gamma \\ d_{mn}^{app} \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \tau_{mn}^{app} \Psi_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.50)$$

Afin de résoudre (3.48), on écrit ce système sous forme de système matriciel :

$$\begin{bmatrix} R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) & R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) & \Psi_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{mn}^{app} \\ \tau_{mn}^{app} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

On note M_2 la matrice :

$$\begin{bmatrix} R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) & R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \end{bmatrix}$$

Le système est alors inversible sous la condition :

$$\det(M_2) = R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \neq 0$$

Pour les calculs qui suivent, on fait l'hypothèse que l'on peut choisir Σ de telle sorte que $\det(M_2) \neq 0$ et, dans ce cas, le système matriciel (3.51) est inversible et a pour solution :

$$\begin{bmatrix} d_{mn}^{app} \\ \tau_{mn}^{app} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(M_2)} \begin{bmatrix} \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & -R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ -\Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) & R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

On a donc :

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{-1}{\det(M_2)} d_{mn}^{inc} \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{1}{\det(M_2)} d_{mn}^{inc} \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{-d_{mn}^{inc} \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} \end{cases}$$

Proposition 3.4 *Supposons qu'il existe Σ telle que $\det(M_2) \neq 0$. Alors, si on applique l'opérateur DtN_2 sur la frontière artificielle Σ , le champs diffracté approché est déterminé, $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n \geq m$, par les coefficients :*

$$\begin{cases} d_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \\ \tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(3)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \Psi_{mn}^{(4)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{\Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma k a_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - R_{mn}^{(4)}(e_\Gamma k a_\Gamma, e_\Gamma^{-1})} \end{cases} \quad (3.53)$$

où pour un mode mn donné, d_{mn}^{inc} est défini par (2.10).

Comme dans le cas de la condition DtN1, nous pouvons ici aussi établir quelques propriétés du déterminant $\det(M_2)$ dans certains cas particuliers.

- Lorsque $(m, n) = (0, 0)$, on peut écrire $\det(M_2)$ sous la forme :

$$\det(M_2) = R_{00\Gamma}^{(3)} \left[R_{00\Sigma}^{(4)'} - r_{00\Sigma} R_{00\Sigma}^{(4)} \right] - R_{00\Gamma}^{(4)} \left[R_{00\Sigma}^{(3)'} - r_{00\Sigma} R_{00\Sigma}^{(3)} \right]$$

en utilisant la définition du coefficient $r_{00\Sigma}$ (cf Eq. (3.23)), on a alors :

$$\det(M_2) = R_{00\Gamma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} - R_{00\Sigma}^{(3)'} R_{00\Gamma}^{(4)} + \frac{R_{00\Sigma}^{(3)'}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \left(R_{00\Gamma}^{(4)} R_{00\Sigma}^{(3)} - R_{00\Sigma}^{(4)} R_{00\Gamma}^{(3)} \right)$$

d'où

$$\det(M_2) = R_{00\Gamma}^{(3)} R_{00\Sigma}^{(4)'} - R_{00\Sigma}^{(3)'} R_{00\Gamma}^{(4)} \frac{R_{00\Gamma}^{(3)}}{R_{00\Sigma}^{(3)}}$$

On observe que, pour $(m, n) = (0, 0)$, $\det(M_1) = \det(M_2)$ (cf Eq. (3.37)) et on en déduit que pour $(m, n) = (0, 0)$,

$$\det(M_2) = \frac{R_{00\Gamma}^{(3)}}{R_{00\Sigma}^{(3)}} \left(\frac{-2i}{e_{\Sigma} k a_{\Sigma} (e_{\Sigma}^{-2} - 1)} \right)$$

Si l'on se place, comme à 2D, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation, on a donc :

Propriété 3.5 Pour $(m, n) = (0, 0)$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:

$$\det(M_2) \rightarrow \frac{-2i}{e_{\Gamma} k a_{\Gamma} (e_{\Gamma}^{-2} - 1)}$$

- Lorsque $(m, n) = (0, 1)$, on peut écrire $\det(M_2)$ sous la forme :

$$\det(M_2) = R_{01\Gamma}^{(3)} \left[R_{01\Sigma}^{(4)'} - r_{01\Sigma} R_{01\Sigma}^{(4)} \right] - R_{01\Gamma}^{(4)} \left[R_{01\Sigma}^{(3)'} - r_{01\Sigma} R_{01\Sigma}^{(3)} \right]$$

en utilisant la définition de r_{01} sur Σ (cf Eq. (3.23)), on obtient :

$$\det(M_2) = R_{01\Gamma}^{(3)} R_{01\Sigma}^{(4)'} - R_{01\Sigma}^{(3)'} R_{01\Gamma}^{(4)} + \frac{R_{01\Sigma}^{(3)'}}{R_{01\Sigma}^{(3)}} \left(R_{01\Gamma}^{(4)} R_{01\Sigma}^{(3)} - R_{01\Sigma}^{(4)} R_{01\Gamma}^{(3)} \right)$$

soit

$$\det(M_2) = R_{01\Gamma}^{(3)} R_{01\Sigma}^{(4)'} - R_{01\Sigma}^{(3)'} R_{01\Gamma}^{(4)} \left[\frac{R_{01\Gamma}^{(3)}}{R_{01\Sigma}^{(3)}} \right]$$

d'où

$$\det(M_2) = R_{01\Gamma}^{(3)} R_{01\Sigma}^{(4)'} + \left(\Delta_W \left[R_{01\Sigma}^{(3)}, R_{01\Sigma}^{(4)} \right] - R_{01\Sigma}^{(3)} R_{01\Sigma}^{(4)'} \right) \begin{bmatrix} R_{01\Gamma}^{(3)} \\ R_{01\Sigma}^{(3)} \end{bmatrix}$$

On obtient alors :

$$\det(M_2) = \Delta_W \left[R_{01\Sigma}^{(3)}, R_{01\Sigma}^{(4)} \right] \frac{R_{01\Gamma}^{(3)}}{R_{01\Sigma}^{(3)}}$$

Or, d'après Eq. (3.40), $\Delta_W \left[R_{01\Sigma}^{(3)}, R_{01\Sigma}^{(4)} \right] = \frac{-2i}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)}$, on en déduit que pour $(m, n) = (0, 1)$:

$$\det(M_2) = \frac{R_{01\Gamma}^{(3)}}{R_{01\Sigma}^{(3)}} \left(\frac{-2i}{e_\Sigma k a_\Sigma (e_\Sigma^{-2} - 1)} \right)$$

Si l'on se place, comme à 2D, dans le cas où Σ est une dilatation de Γ , $\lambda > 1$ désignant le paramètre de dilatation, on a donc :

Propriété 3.6 *Pour $(m, n) = (0, 1)$, lorsque $\lambda \rightarrow 1$:*

$$\det(M_2) \rightarrow \frac{-2i}{e_\Gamma k a_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}$$

Comme avec la condition DtN1, cela signifie donc qu'à haute fréquence, lorsque λ tend vers 1, le déterminant tend vers 0 et le système n'est plus inversible. On retrouve donc que le cadre OSRC n'est pas adapté au régime haute fréquence.

Pour les autres modes, nous n'avons pas réussi à établir l'analogie des propriétés 3.5 et 3.6. Toutefois, nous avons effectué une étude numérique de $|\det(M_2)|$ qui est reportée sur les figures (5.3) et (5.4). Sur la figure (5.3), on a représenté les valeurs de $|\det(M_2)|$ en fonction de λ , pour différentes valeurs de (m, n) . On a pris $e = 0.9$ et $ka = 10$. On observe que $|\det(M_2)|$ est une fonction croissante de λ , pour tous les modes représentés. La figure (5.4) représente l'allure zoomée de $|\det(M_2)|$ au voisinage de $\lambda = 1$. On voit que pour tous les modes, le déterminant converge vers une constante de l'ordre de $\frac{2}{e_\Gamma k a_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}$ ce qui illustre les propriétés 3.5 et 3.6 et semble indiquer que ce résultat est valable quel que soit le couple (m, n) .

$|det(M_2)|$ pour $e = 0.9$, $ka = 10$

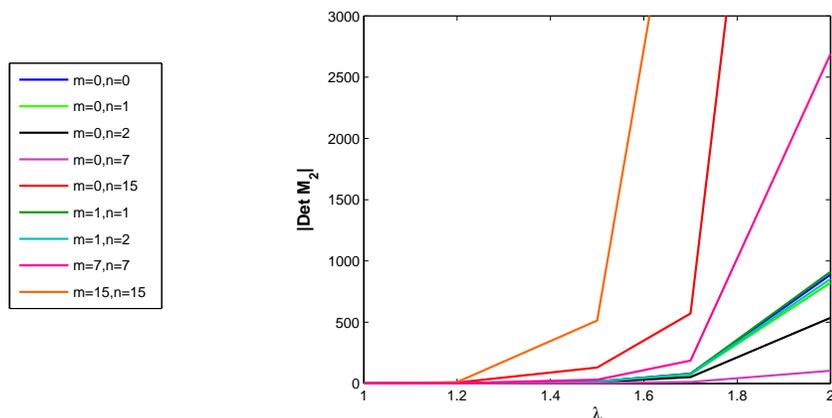


FIG. 5.3: $|det(M_2)|$ en fonction du paramètre de dilatation λ .

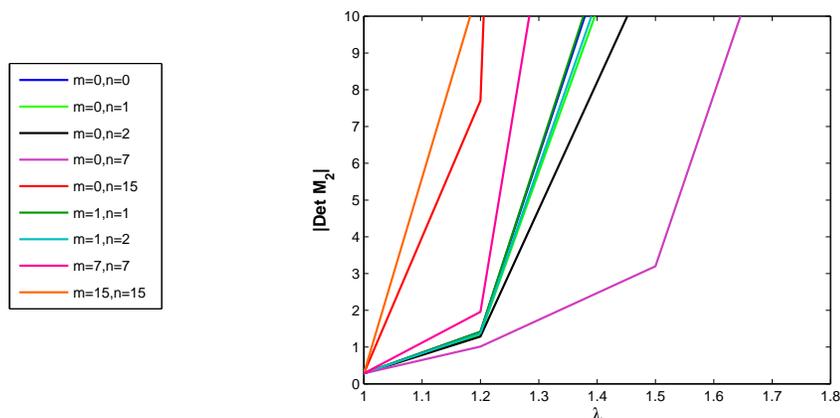


FIG. 5.4: Zoom de $|det(M_2)|$ au voisinage de $\lambda = 1$.

4 Résultats numériques

Le but de cette partie est d'essayer d'évaluer numériquement la précision des opérateurs Dirichlet-to-Neumann construits (cf Eqs. (3.22) et (3.41)) en fonction de l'éloignement de la frontière artificielle Σ par rapport à la surface Γ de l'obstacle de diffraction pour de hautes fréquences. Pour cette analyse, nous allons comparer le coefficient d_{mn}^{app} à d_{mn}^{ex} et quantifier le coefficient de réflexion τ_{mn}^{app} pour les conditions DtN1, DtN2 et BGT2 (pour un angle d'observation $\theta = \frac{\pi}{2}$). Afin de simplifier notre étude, nous adoptons un cas de figure similaire à celui présenté pour le problème 2D. On considère que la frontière artificielle Σ est conforme à la surface de l'obstacle de diffraction Γ . Le sphéroïde Σ est défini comme une dilatation du sphéroïde Γ , leurs

deux demi-axes principaux et secondaires respectifs sont donc liés par les relations :

$$a_\Sigma = \lambda a_\Gamma \quad \text{et} \quad \lambda \times b_\Sigma = b_\Gamma, \quad \text{avec } \lambda \geq 1 \quad (4.54)$$

Les relations précédentes impliquent aussi que les deux sphéroïdes Γ et Σ ont la même excentricité. En effet :

$$e_\Sigma = \sqrt{1 - \frac{b_\Sigma^2}{a_\Sigma^2}} = \sqrt{1 - \frac{(\lambda \times b_\Gamma)^2}{(\lambda \times a_\Gamma)^2}} = e_\Gamma$$

On rappelle que le cas $\lambda = 1$ correspond à la formulation OSRC.

Les résultats suivants ont été obtenus pour deux valeurs de ka : $ka = 10$ et $ka = 20$. Les tests ont été fait pour les angles d'incidence $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Nous avons pris en compte différentes distances entre la surface de l'obstacle sphéroïdal prolata Γ et la frontière artificielle Σ , le paramètre λ varie de 1 (formulation OSRC) à 2.

Nous avons effectué trois types de tests numériques différents :

- Nous avons, d'une part, quantifié les réflexions non physiques générées par la frontière artificielle en calculant :

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$$

- D'autre part, pour nous faire une idée de la différence entre les coefficients correspondant aux modes sortants d_{mn}^{app} et d_{mn}^{ex} , nous avons calculé la quantité :

$$f(x) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$$

- Enfin, nous avons voulu avoir une idée de la différence entre les champs diffractés exact $u_{mn}^{ex,3D}$ et approché u_{mn}^{app} en calculant la quantité :

$$g(x) = \frac{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} (|d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2) \right)^{1/2}}{\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$$

La première observation générale que l'on peut faire est que l'angle d'incidence φ_0 ne semble pas influencer grandement la performance des conditions testées, et ce,

quelle que soit la valeur de ka et l'excentricité prise en compte. On peut cependant noter que les réflexions parasites générées par la frontière semblent légèrement inférieures pour $\varphi_0 = 0$ (Figs. (5.5), (5.14)). Pour toutes les conditions testées, quelle que soit la valeur de l'excentricité e du sphéroïde Σ , les réflexions non physiques sont maximales pour le cas OSRC ($\lambda = 1$). Ces réflexions diminuent au fur et à mesure que l'on éloigne la frontière artificielle Σ de la surface Γ de l'obstacle de diffraction (i.e au fur et à mesure que λ augmente). La condition BGT2 génère bien plus de réflexions parasites que les deux conditions DtN, particulièrement dans le cadre OSRC. Ces réflexions générées par BGT2 sont présentes en quantité bien plus importante pour $ka = 20$ que pour $ka = 10$. Dans ce cas là, les conditions aux limites absorbantes DtN1 et DtN2 sont quasiment équivalentes, puis les réflexions diminuent plus vite avec la condition DtN2 lorsque λ augmente. On observe aussi qu'il n'est pas nécessaire d'éloigner beaucoup la frontière artificielle Σ de la surface de l'obstacle pour avoir de bons résultats avec la conditions DtN d'ordre 2. En effet, pour $ka = 10$, à partir de $\lambda = 1.2$, la solution approchée n'est pratiquement pas polluée par les réflexions (Figs. (5.5), (5.8) et (5.11)). On voit aussi que plus ka est grand, moins il est nécessaire d'éloigner la frontière artificielle de Γ pour avoir une bonne performance des conditions testées. Cela est particulièrement visible pour la condition DtN2 pour un sphéroïde très allongé ($e = 0.9$) : on obtient, par exemple, quasiment les mêmes bons résultats pour $ka = 10$ et $\lambda = 1.3$ (Figs. (5.5), (5.8) et (5.11)) et $ka = 20$ et $\lambda = 1.2$ (Figs. (5.14), (5.17) et (5.20)).

Si l'on compare maintenant les coefficients d_{mn}^{app} et d_{mn}^{ex} , on commence par remarquer que la différence est, là aussi, maximale pour $\lambda = 1$. Pour le cas OSRC, l'erreur entre les coefficients, représentée par la fonction $f(x)$, est bien plus petite pour les conditions DtN que pour la condition BGT2 (cf Figs. (5.6), (5.9), (5.12), (5.15), (5.18) et (5.21)). On peut aussi observer que pour la condition DtN2, les résultats s'améliorent à mesure que l'excentricité approche 1, ce qui n'est pas vraiment le cas pour BGT2. On a encore de très bons résultats à partir de $\lambda = 1.2$ lorsque $ka = 10$ pour la condition DtN2. La condition DtN1 qui est équivalente à DtN2 dans un cadre OSRC présente une erreur, pour les coefficients d_{mn}^{app} et d_{mn}^{ex} , qui décroît moins rapidement que l'erreur DtN2 lorsqu'on éloigne Σ de Γ . La condition BGT2, qui est bien moins précise en OSRC que les conditions Dirichlet-to-Neumann, nécessite que l'on prenne une valeur de $\lambda > 1.2$ pour obtenir des résultats aussi précis que ceux obtenus pour la condition DtN2, particulièrement pour des sphéroïdes très allongés ($e = 0.9$ cf Figs. (5.6), (5.9), (5.12), (5.15), (5.18) et (5.21)). On remarque aussi que pour $ka = 20$, il n'est pas nécessaire d'éloigner autant la frontière artificielle de la surface de l'obstacle que pour $ka = 10$, pour avoir de bons résultats, dans le cas des conditions DtN. Ceci est particulièrement visible pour les excentricités $e = 0.1$ et $e = 0.4$ car pour $e = 0.9$, les résultats sont très bons même si Σ est proche de Γ .

Enfin, la représentation de la fonction $g(x)$ (cf Figs. (5.7), (5.10), (5.13), (5.16), (5.19) et (5.22)), qui donne une idée de l'erreur entre les champs diffractés exact et approché, confirme les commentaires précédents.

$$ka = 10, \varphi_0 = 0$$

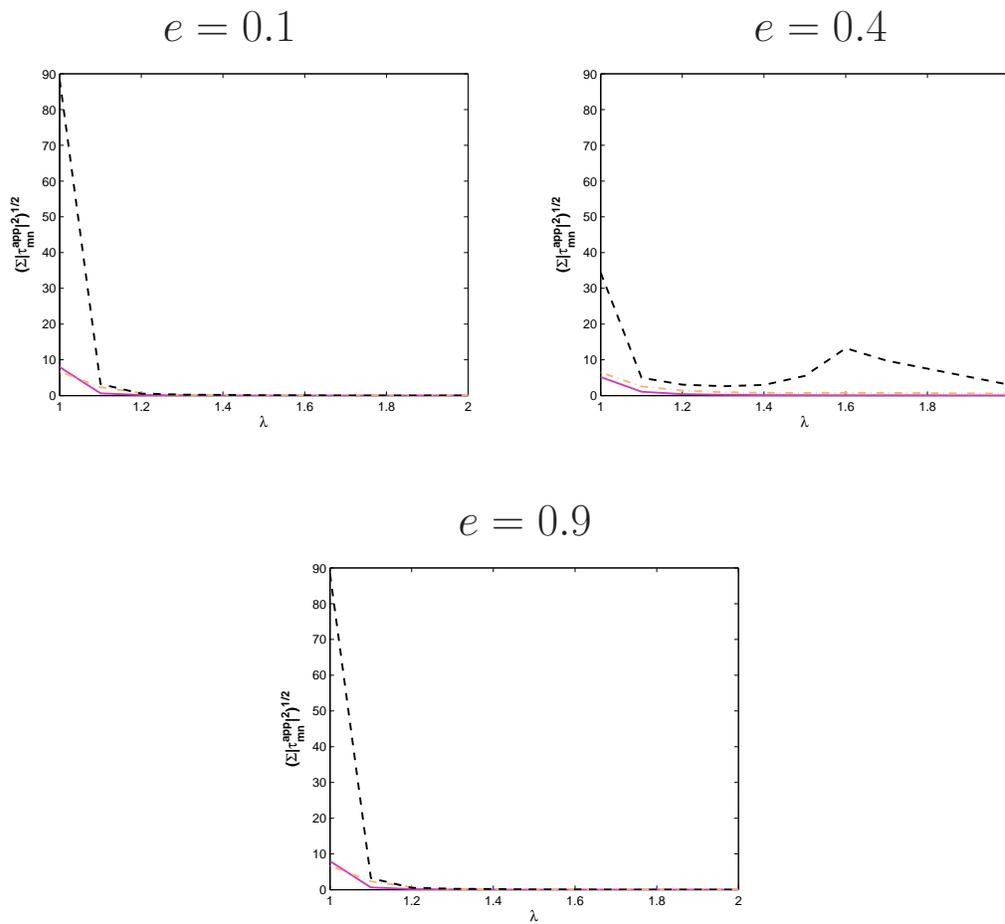


FIG. 5.5: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (- - -).

$$ka = 10, \varphi_0 = 0$$

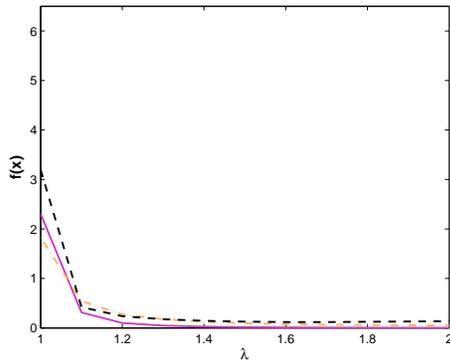
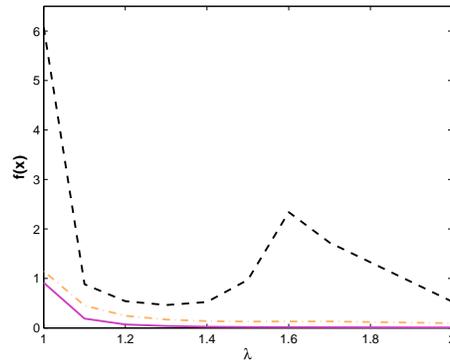
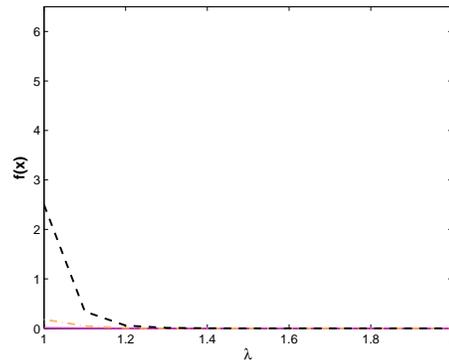
 $e = 0.1$

 $e = 0.4$

 $e = 0.9$


FIG. 5.6: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (---), BGT2 (---).

$$ka = 10, \varphi_0 = 0$$

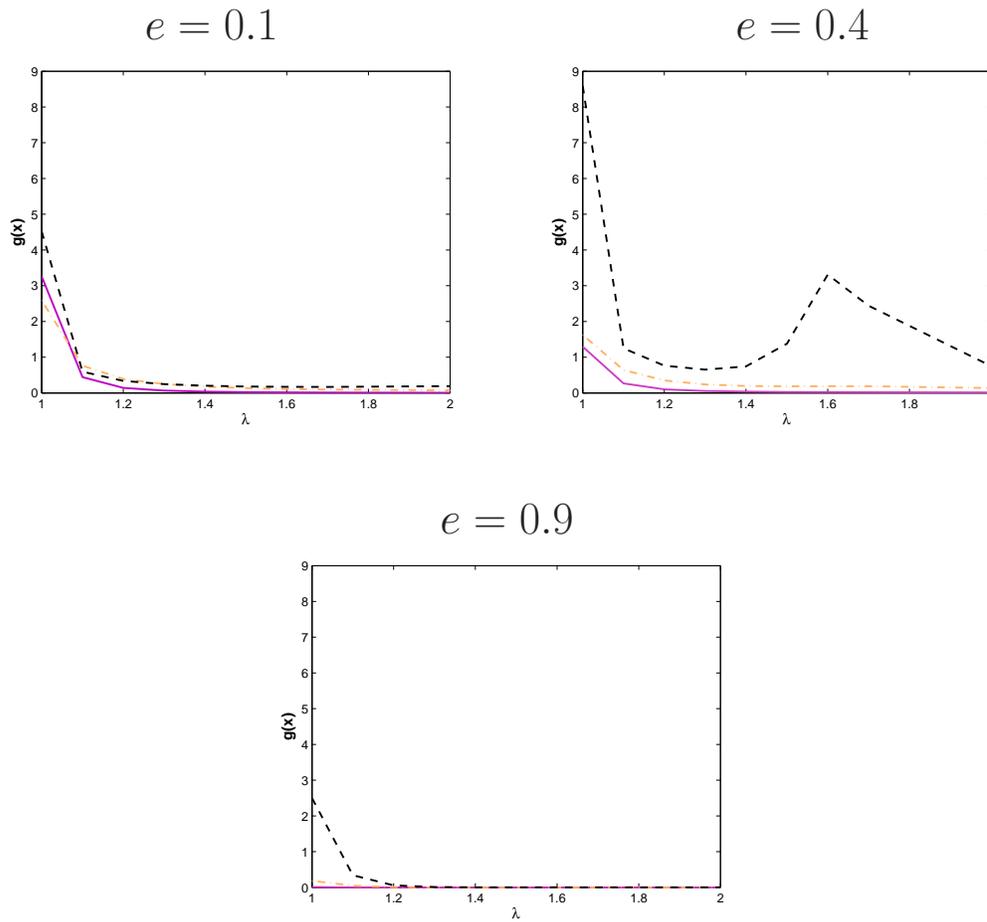


FIG. 5.7: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

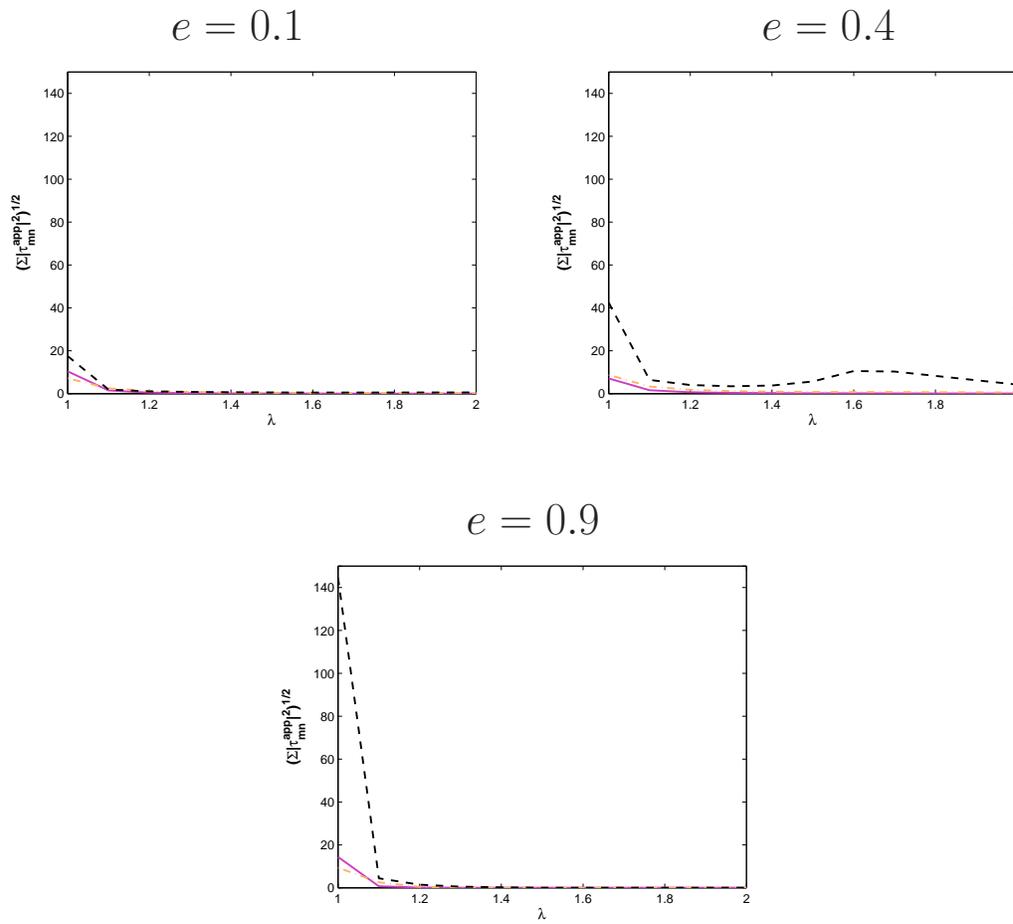


FIG. 5.8: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (- - -).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

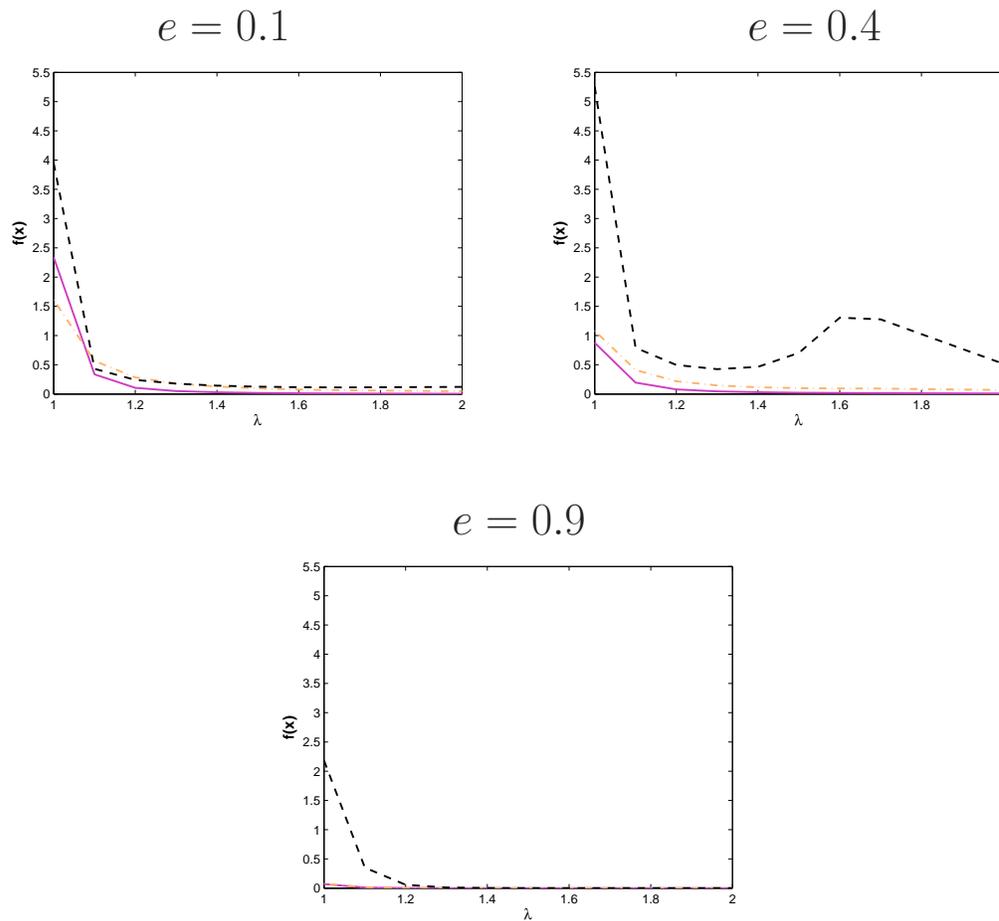


FIG. 5.9: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (---), BGT2 (---).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

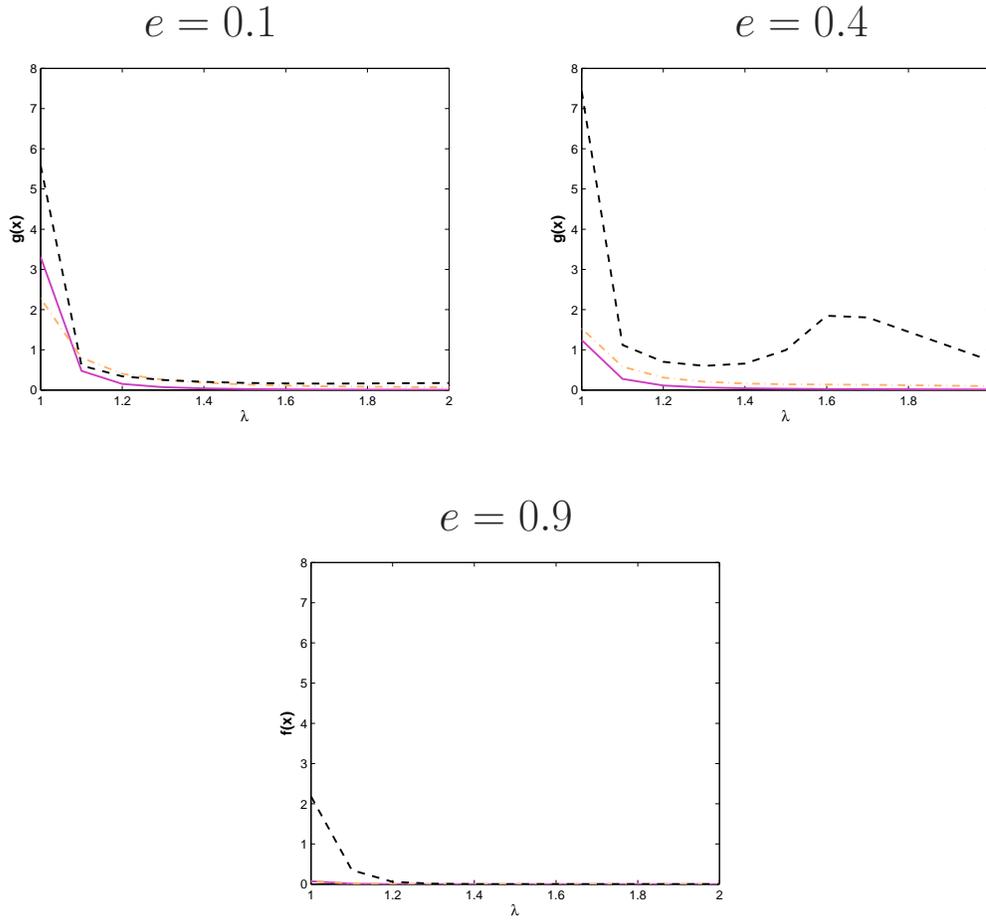


FIG. 5.10: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

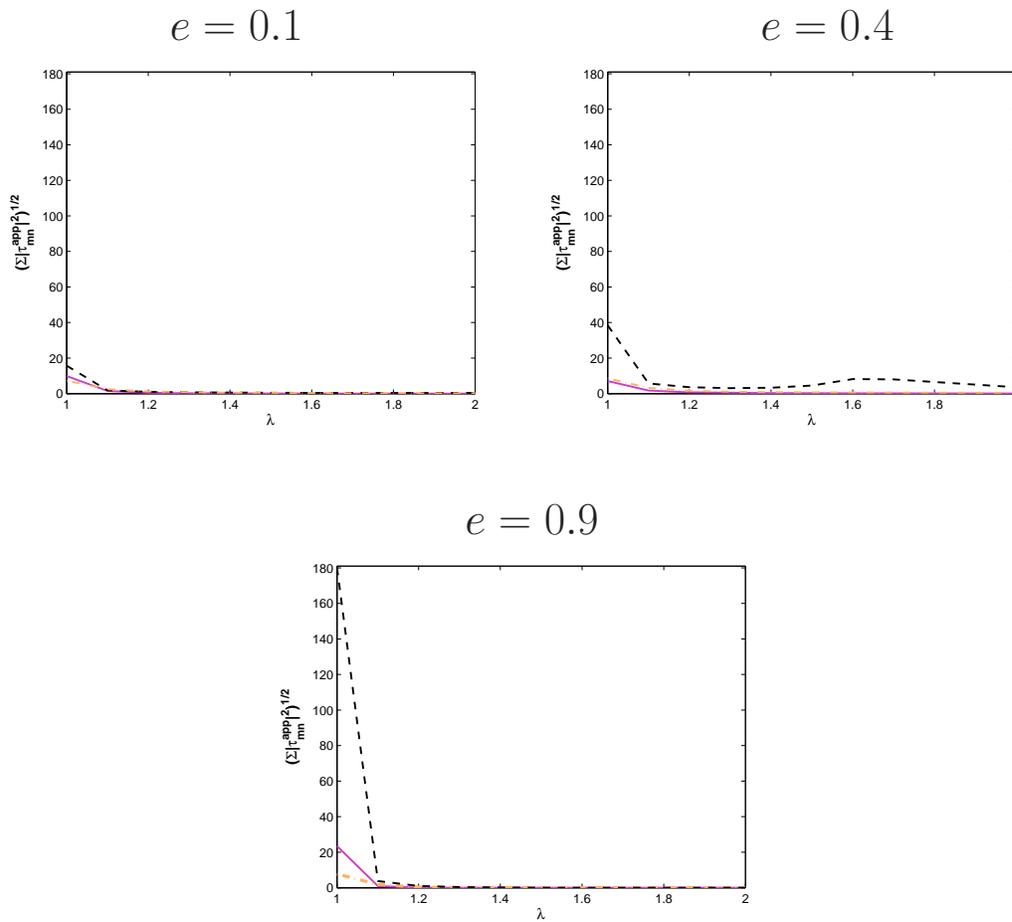


FIG. 5.11: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (— · —), BGT2 (—).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

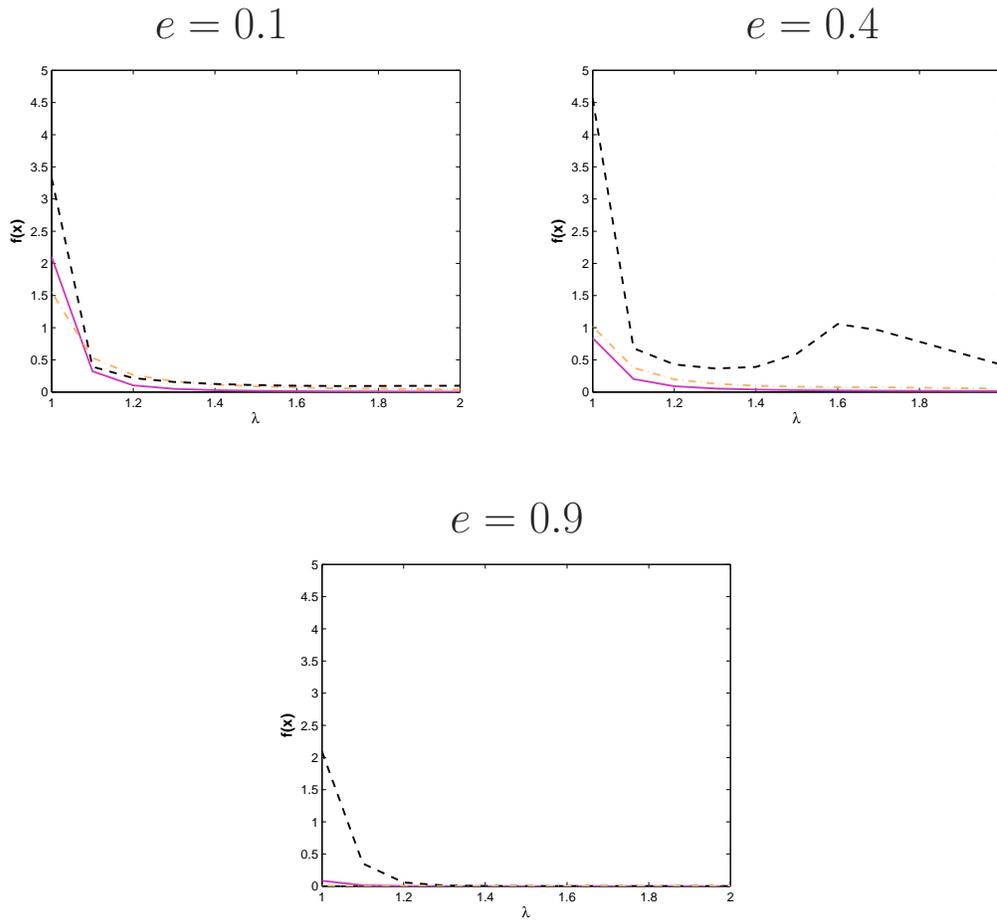


FIG. 5.12: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 10, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

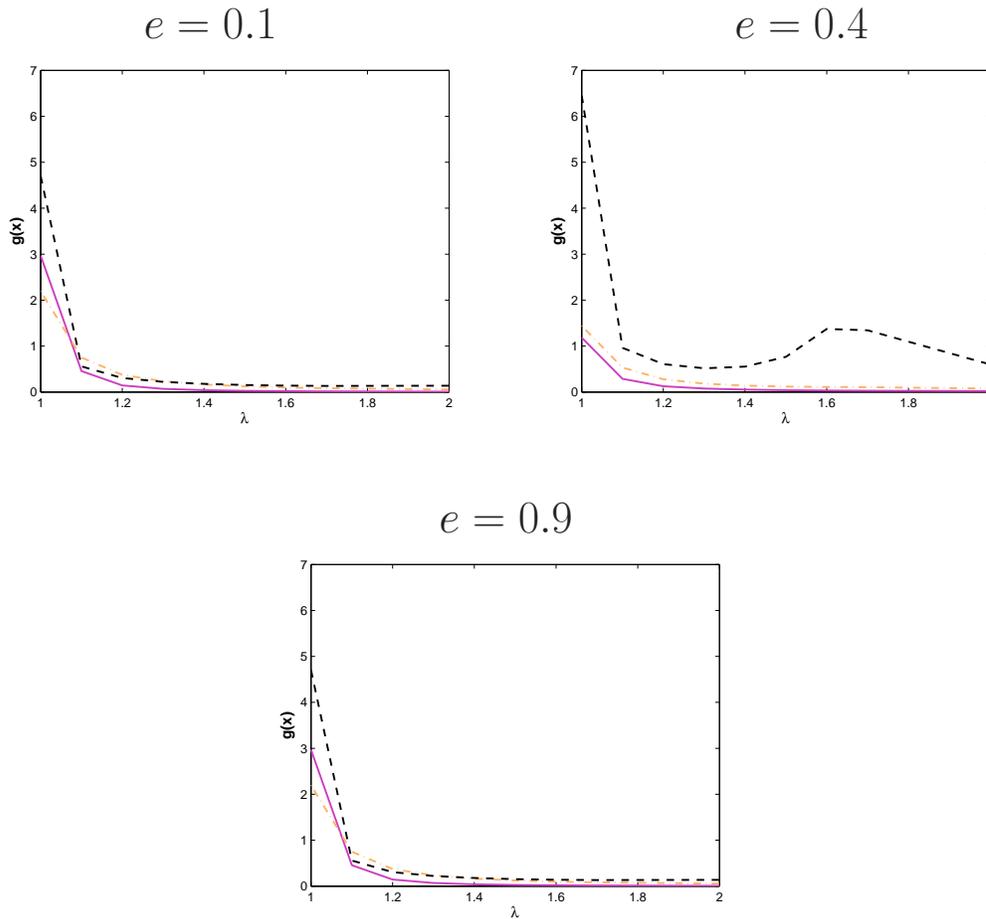


FIG. 5.13: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 20, \varphi_0 = 0$$

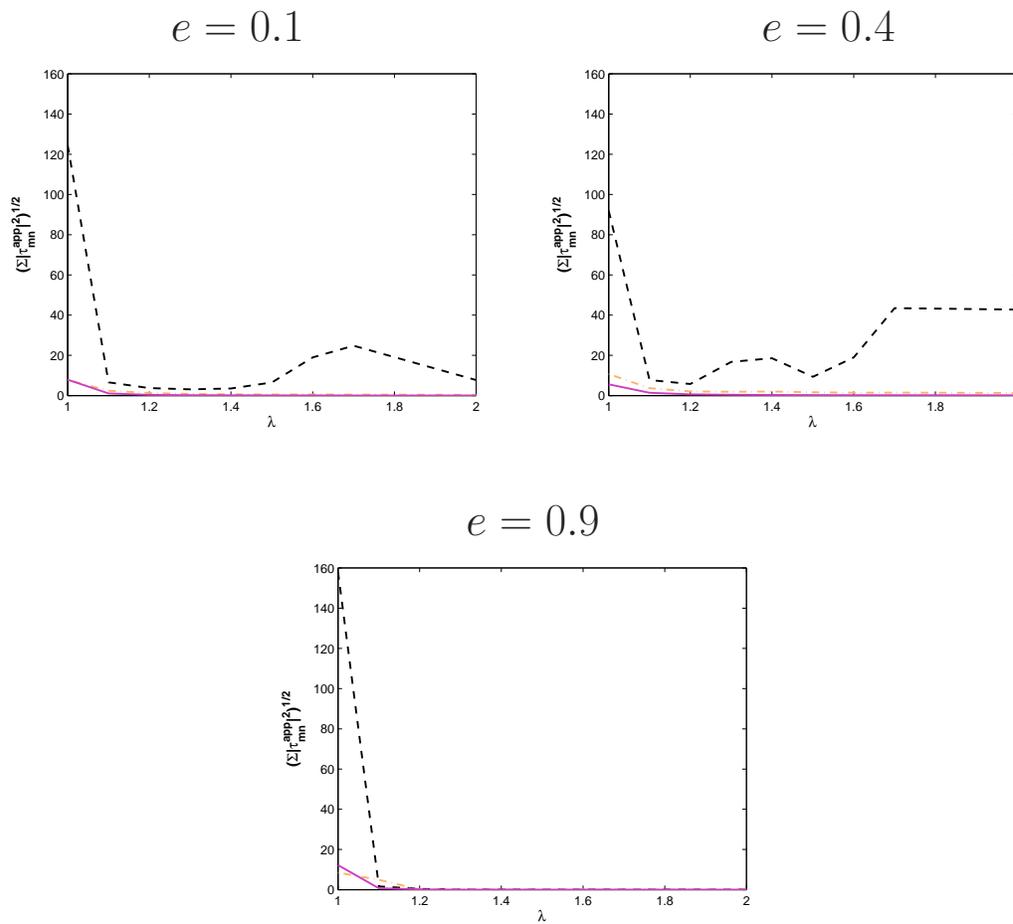
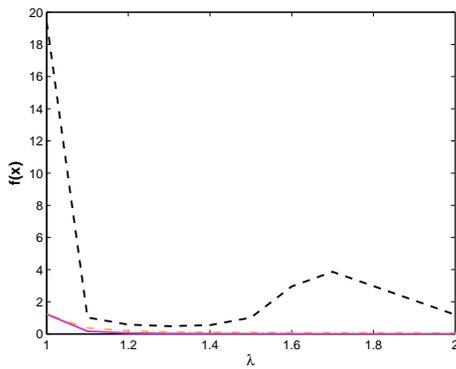


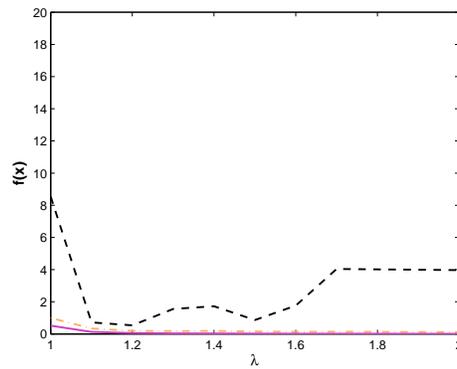
FIG. 5.14: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (- - -).

$$ka = 20, \varphi_0 = 0$$

$$e = 0.1$$



$$e = 0.4$$



$$e = 0.9$$

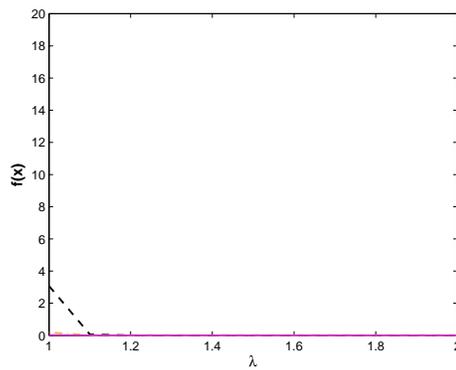
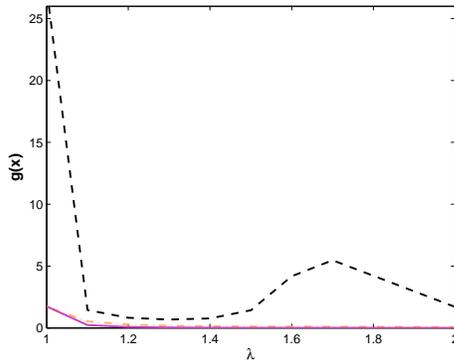


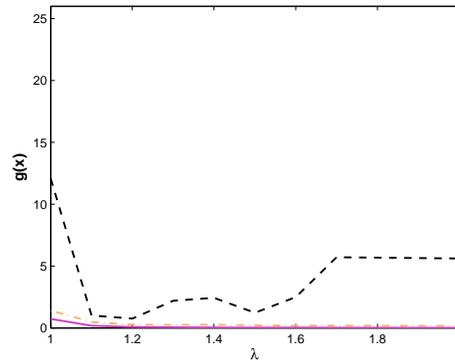
FIG. 5.15: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (---), BGT2 (—).

$$ka = 20, \varphi_0 = 0$$

$$e = 0.1$$



$$e = 0.4$$



$$e = 0.9$$

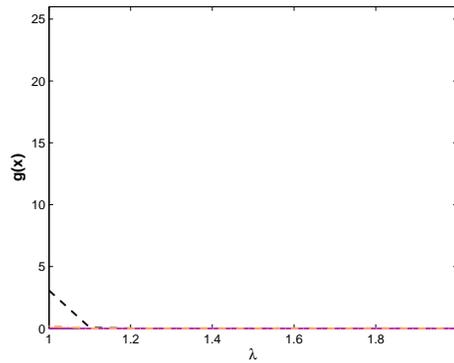


FIG. 5.16: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

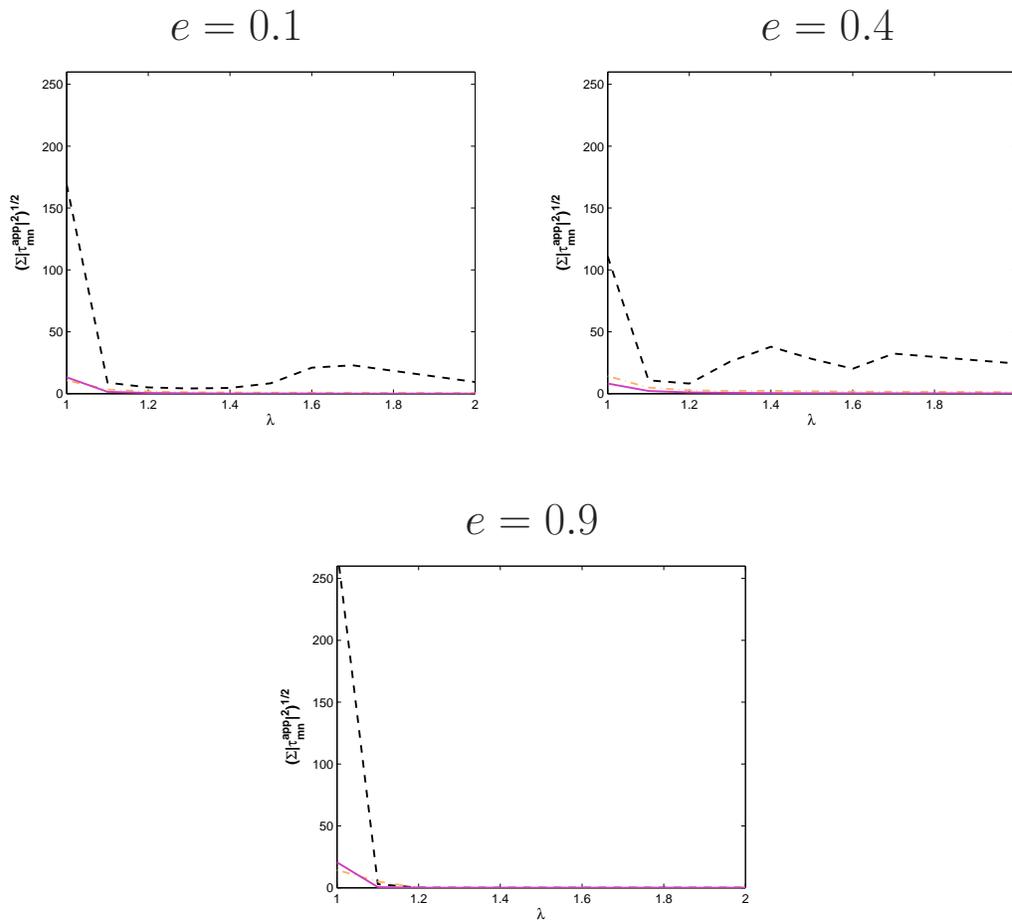


FIG. 5.17: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (····).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

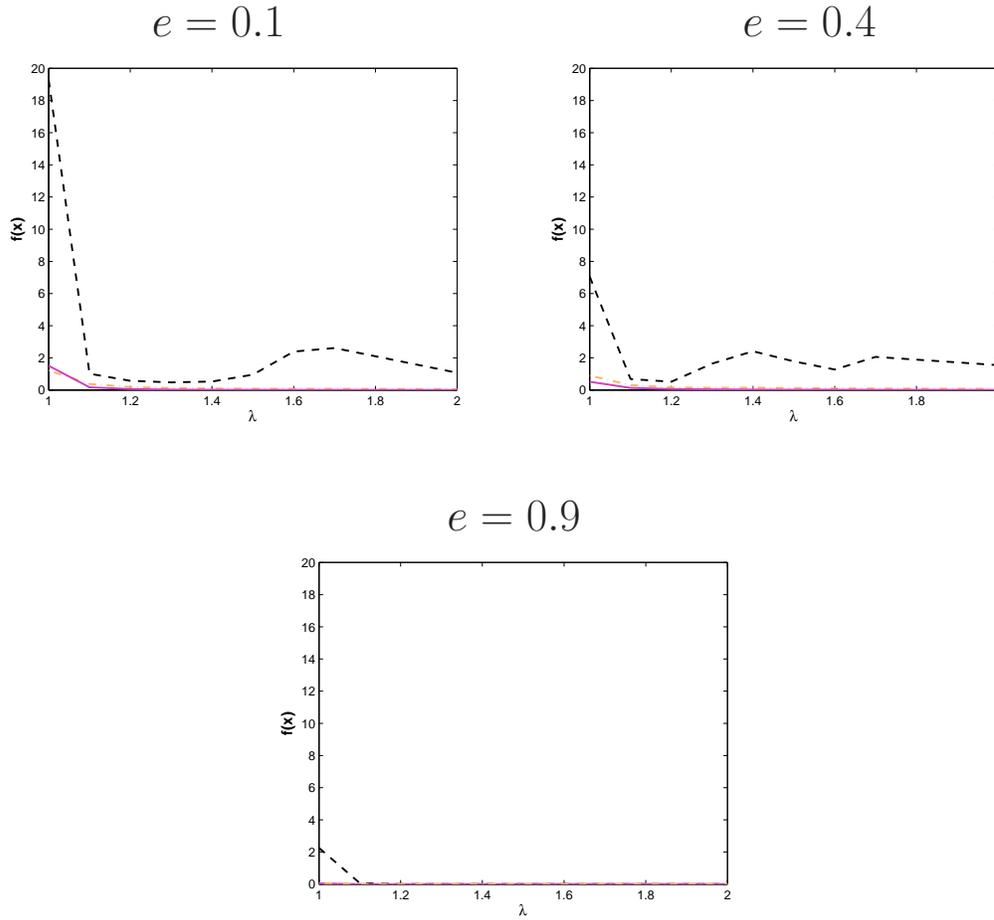
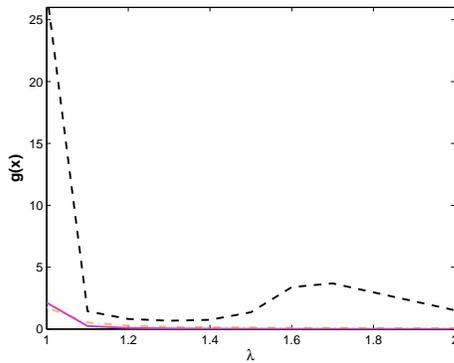


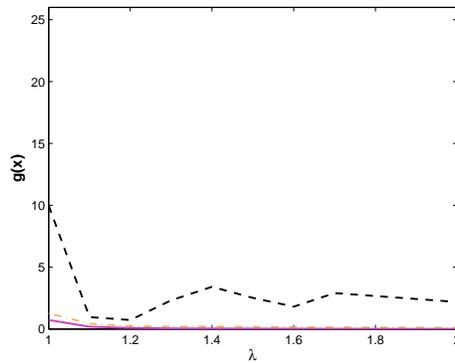
FIG. 5.18: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$e = 0.1$



$e = 0.4$



$e = 0.9$

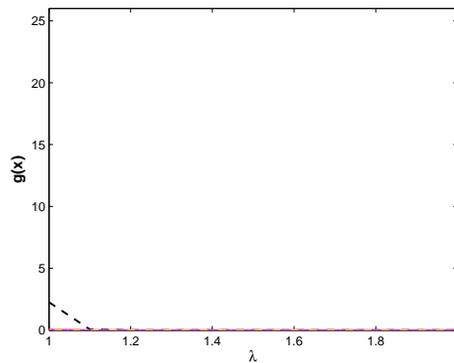


FIG. 5.19: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
 DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

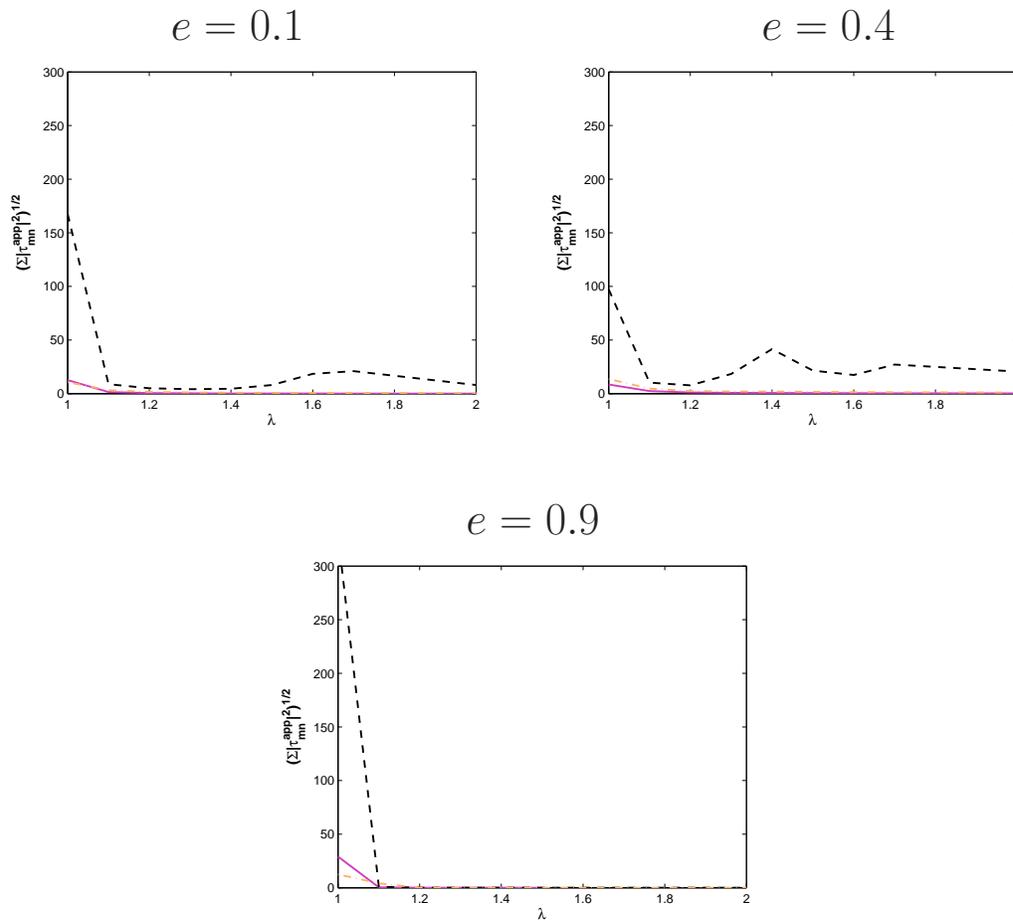


FIG. 5.20: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (— · —), BGT2 (—).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

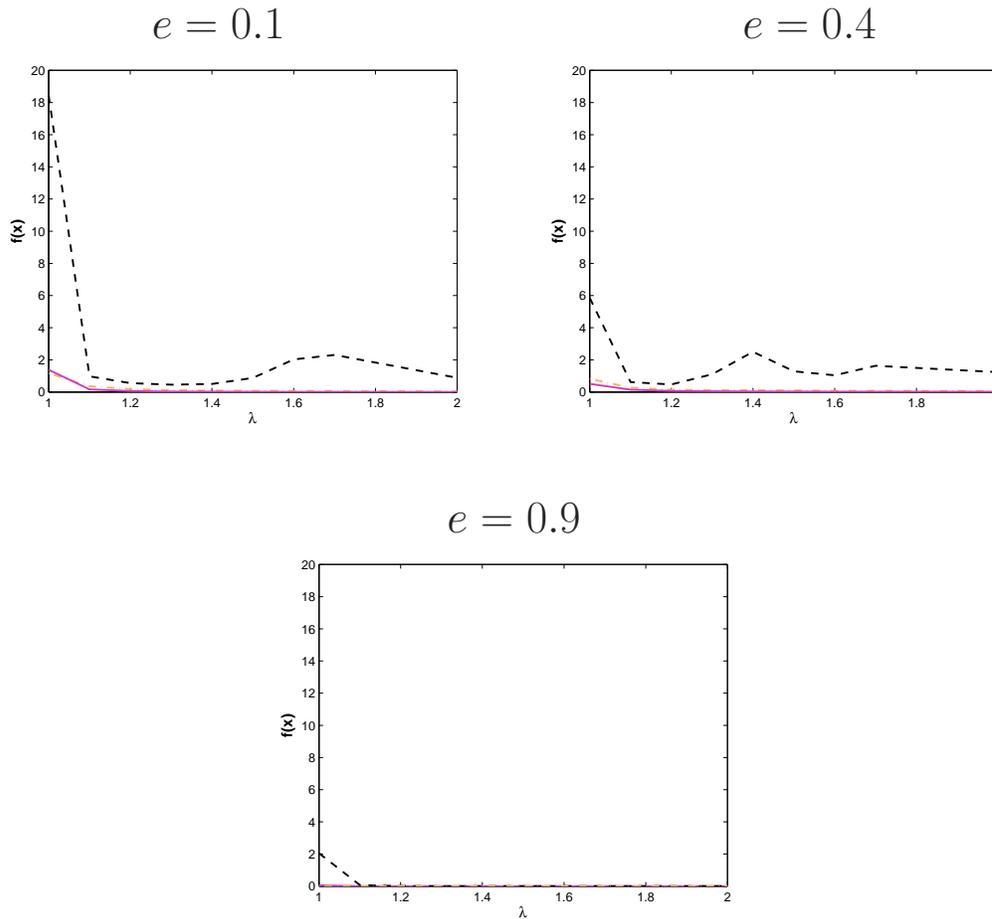
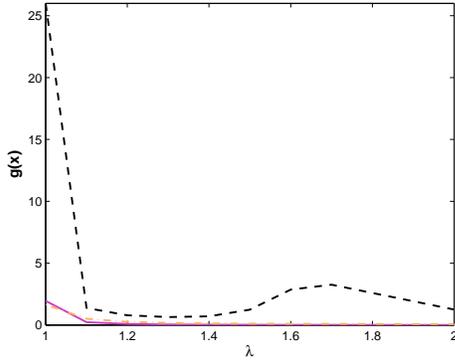


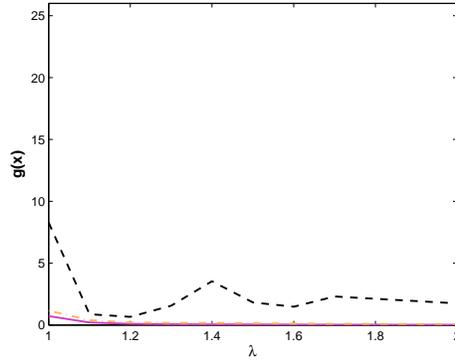
FIG. 5.21: $f(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

$$ka = 20, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$e = 0.1$



$e = 0.4$



$e = 0.9$

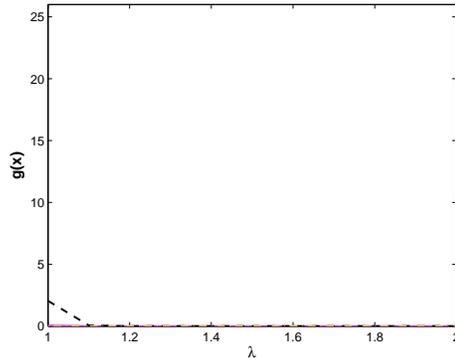


FIG. 5.22: $g(x) = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{app} - d_{mn}^{ex}|^2 + |\tau_{mn}^{app}|^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n |d_{mn}^{ex}|^2 \right)^{1/2}}$, pour les conditions approchées
 DtN1 (---), DtN2 (—), BGT2 (---).

5 Analyse haute fréquence

Dans cette partie, nous reprenons les mêmes idées que celles développées en dimension deux d'espace. Nous considérons un équivalent de $|\tau_m^{app}|$ que nous noterons $|\widetilde{\tau_m^{app}}|$.

Lemme 5.1 *Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$, le coefficient d_{mn}^{inc} équivalent à $\widetilde{d_{mn}^{inc}}$ et $\widetilde{d_{mn}^{inc}}$ est borné indépendamment du mode (m, n) . Plus précisément :*

$$|\widetilde{d_{mn}^{inc}}| < 4\kappa \left(\frac{\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi} \right)^{1/4} \quad (5.55)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Démonstration :

On rappelle tout d'abord que d_{mn}^{inc} est donné par (2.10) :

$$d_{mn}^{inc} = 2\varepsilon_m \frac{i^n}{\sqrt{N_{mn}}} S_{mn}(kf, \cos \varphi_0) \quad (5.56)$$

où les fonctions S_{mn} et N_{mn} sont, respectivement, les fonctions sphéroïdales angulaires du $(mn)^{\text{ème}}$ mode et leur coefficient de normalisation (cf [20]). Le coefficient ε_m est donné par $\varepsilon_m = (2 - \delta_{0m})$ (où δ_{0m} est le symbole de Kronecker), donc $|\varepsilon_m| \leq 2$.

Or (cf [51] 1, (2.333)), lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$:

$$\begin{aligned} S_{mn}(e_\Gamma ka_\Gamma, \cos \varphi) &\sim (-1)^m \left(\frac{4\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{(n+m)!}{2n+1} \right)^{1/2} \\ &\times (1 - \cos^2 \varphi)^{m/2} D_{nm} \left((2\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma})^{1/2} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

où les fonctions $D_{nm} \left((2\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma})^{1/2} \cos \theta \right)$ sont les fonctions paraboliques cylindriques (cf Chap 19 dans [1]).

On définit donc $\widetilde{d_{mn}^{inc}}$ l'équivalent de d_{mn}^{inc} par :

$$\widetilde{d_{mn}^{inc}} = 2\varepsilon_m \frac{i^n}{\sqrt{N_{mn}}} (-1)^m \left(\frac{4\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{(n+m)!}{2n+1} \right)^{1/2}$$

D'après (19.3.1) et (19.13.1) de [1], on a :

$$D_{nm} \left((2\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma})^{1/2} \cos \varphi \right) = 2^{(m-n)/2} e^{-\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma} \cos^2 \varphi} H_{n-m} \left(\sqrt{2}(e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \cos \varphi \right) \quad (5.58)$$

où les fonctions $H_{n-m} \left(\sqrt{2}(e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \cos \varphi \right)$ sont les polynômes d'Hermite (cf [1]).

De plus, selon (22.14.17) de [1] :

$$\left| H_{n-m} \left(\sqrt{2}(e_\Gamma ka_\Gamma)^{1/4} \cos \varphi \right) \right| < e^{\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma} \cos^2 \varphi} \kappa 2^{(n-m)/2} \sqrt{(n-m)!} \quad (5.59)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

En utilisant (5.57), (5.58) et (5.59), on obtient que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$|S_{mn}(e_\Gamma ka_\Gamma, \cos \varphi)| < \kappa \left| \frac{4\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi} \right|^{1/4} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{(n+m)!}{2n+1} \right)^{1/2} \sqrt{(n-m)!}$$

De plus, on sait (cf [51] **3**, 3.23 p 237) que :

$$N_{mn} = \int_{-1}^1 (S_{mn}(e_\Gamma ka_\Gamma, v))^2 dv = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (5.60)$$

On finit en combinant (5.56) et (5.60), ce qui donne :

$$|d_{mn}^{inc}| < 4\kappa \left(\frac{\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi} \right)^{1/4}$$

□

5.1 Avec la condition DtN1

Nous rappelons que si l'on pose la condition DtN1 (3.22), le coefficient de réflexion τ_{mn}^{app} s'écrit alors :

$$\tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(M_1)}$$

avec (cf Eq. (3.32)) :

$$\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_{mn}^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

Dans la suite, on pose :

Conjecture 5.2 (i) $\det(M_1) = \frac{-2i}{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}$, pour $\lambda = 1$ et $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq m$.

(ii) $|\det(M_1)| \geq \frac{2}{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}$, pour tout $\lambda > 1$ et $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq m$.

Le point (i) est une généralisation de la proposition 3.3 (qui correspond à $(m, n) = (0, 0)$) et qui semble vérifiée au moins numériquement (cf Fig. (5.2)). Le point (ii) s'appuie sur l'étude numérique de $|\det(M_1)|$ (cf Fig. (5.1)) pour un échantillon de valeurs de (m, n) .

Lemme 5.3 On suppose que $\frac{n}{\sqrt{2ka_\Sigma}} \ll 1$. Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$),

$$|\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{n(n+1)^2}{2} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1} \quad (5.61)$$

Démonstration : On rappelle que :

$$\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_{mn}^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

En factorisant par $R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$, il vient :

$$\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[\frac{R_{mn}^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} - r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right]$$

Or (cf Eq. (3.23)),

$$\frac{R_{mn}^{(3)'}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})} = r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$$

Donc, on peut écrire plus simplement :

$$\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) [r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) - r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})] \quad (5.62)$$

Nous allons, à présent, chercher un équivalent de $r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})$ lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$. On rappelle (cf Eq. (4.20) Chap.3) que :

$$r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) = \frac{ie_\Sigma ka_\Sigma}{Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}}} \quad (5.63)$$

On va donc chercher un équivalent, à l'ordre 3, de $\frac{1}{Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}}}$.

D'après Eqs. (4.29) et (4.30) du chapitre 3, on a, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka_\Sigma} - \frac{h_{n+1}^{(1)}(ka_\Sigma)}{h_n^{(1)}(ka_\Sigma)}}$$

Or, d'après Eq. (4.31) du chapitre 3, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$h_n^{(1)}(ka_\Sigma) = \frac{(-1)^n}{ka_\Sigma} \left(\frac{n(n+1)}{2ka_\Sigma} - i \right) e^{i(ka_\Sigma + \frac{n\pi}{2})}$$

Donc, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$

$$Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}} \sim \frac{i}{\frac{n}{ka_\Sigma} - \frac{-i \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2ka_\Sigma} - i \right)}{\frac{n(n+1)}{2ka_\Sigma} - i}}$$

On écrit alors $\frac{1}{Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}}}$ sous forme d'une série de Taylor à l'ordre 3, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ et $\frac{n}{\sqrt{2ka_\Sigma}} \ll 1$:

$$\frac{1}{Z_{mn|\Sigma}^{\text{ex3}}} \sim 1 + \frac{i}{ka_\Sigma} + \frac{1}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \quad (5.64)$$

En combinant Eqs. (5.63) et (5.64), on obtient que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, pour $\frac{n}{\sqrt{2ka_\Sigma}} \ll 1$,

$$r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim ie_\Sigma ka_\Sigma \left[1 + \frac{i}{ka_\Sigma} + \frac{1}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \quad (5.65)$$

On voit immédiatement que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim ie_\Sigma ka_\Sigma \left[1 + \frac{i}{ka_\Sigma} \right]$$

On peut donc écrire que :

$$r_{mn}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) + ie_\Sigma ka_\Sigma \left[\frac{1}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right] \quad (5.66)$$

En utilisant ce résultat, on obtient que Eq. (5.62) s'écrit, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + ie_\Sigma ka_\Sigma \left(\frac{1}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} - \frac{i}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right) - r_{00}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \right] \end{aligned}$$

d'où lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \left[\frac{e_\Sigma}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + i\frac{e_\Sigma}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)} \right]$$

Or, d'après [1] (cf Eqs. (21.9.4) et (21.9.5) p. 756), lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) \sim \frac{1}{ka_\Sigma} e^{i(ka_\Sigma - \frac{1}{2}(n+1)\pi)}$$

il vient donc immédiatement que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$|R_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{1}{ka_\Sigma}$$

On obtient ainsi que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$|\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{1}{ka_\Sigma} \left| \frac{e_\Sigma}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + i\frac{e_\Sigma}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)} \right|$$

et donc que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$|\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{e_\Sigma}{2(ka_\Sigma)^2} n(n+1)^2 \left| \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{(ka_\Sigma)} + i \right|$$

soit

$$|\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{n(n+1)^2}{2} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1} \quad (5.67)$$

□

Le lemme 5.3 permet de définir $|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}|$:

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| = \left| \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(M_1)} \right| \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{n(n+1)^2}{2} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1}$$

La conjecture 5.2 nous dit d'abord que, pour $\frac{n}{\sqrt{2ka_\Sigma}} \ll 1$,

Lemme 5.4 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc, $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$)

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq |d_{mn}^{inc}| |R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| \frac{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}{2} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{n(n+1)^2}{2} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1} \quad (5.68)$$

Nous allons à présent majorer $|R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})|$ lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ puisque $a_\Sigma > a_\Gamma$).

Lemme 5.5 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$|R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| < \frac{1}{ka_\Gamma} \quad (5.69)$$

Démonstration : D'après [1] (cf Eq. (21.9.4) p. 756), lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1}) \sim \frac{1}{ka_\Gamma} \cos \left[ka_\Gamma - \frac{1}{2}(n+1)\pi \right]$$

il vient donc immédiatement que lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$,

$$|R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| < \frac{1}{ka_\Gamma}$$

□

On peut ainsi en déduire la proposition suivante :

Proposition 5.6 Lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, et pour $\frac{n}{\sqrt{2ka_\Sigma}} \ll 1$, si l'on pose la condition $DtN1$ (3.22) sur Σ :

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq \kappa n(n+1)^2 \frac{e_\Gamma^{9/8}(e_\Gamma^{-2}-1)e_\Sigma}{\pi^{1/4}} \left(\frac{a_\Gamma}{a_\Sigma}\right)^{1/8} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1} \frac{1}{(ka_\Sigma)^{15/8}} \quad (5.70)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Démonstration : Si on combine les lemmes (5.1), (5.4) et (5.5), on obtient que, lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) :

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq 4\kappa \left(\frac{\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{n(n+1)^2}{2} \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + 1\right)} \frac{1}{ka_\Gamma} \frac{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2}-1)}{2}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

d'où le résultat après simplification de cette expression.

□

Si l'on adopte la même configuration géométrique que lors des tests numériques, à savoir $a_\Sigma = \lambda a_\Gamma$ (avec $\lambda > 1$) et $e_\Sigma = e_\Gamma$, la proposition 5.6 devient :

Corollaire 5.7 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$, pour tout n tel que $\frac{n}{\sqrt{2\lambda ka_\Gamma}} \ll 1$,

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq \kappa n(n+1)^2 \frac{e_\Gamma^{17/8}(e_\Gamma^{-2}-1)}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/8} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4} \frac{1}{(\lambda ka_\Gamma)^2} + 1} \frac{1}{(\lambda ka_\Gamma)^{15/8}} \quad (5.71)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

En tenant compte du fait que $\frac{n}{\sqrt{2\lambda ka_\Gamma}} \ll 1$, le résultat du corollaire 5.7 se simplifie en :

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous les modes n tels que $\frac{n}{\sqrt{2\lambda ka_\Gamma}} \ll 1$,

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda} (ka_\Gamma)^{3/8}}$$

On obtient donc que le module du coefficient de réflexion tend vers 0 avec la fréquence et que le taux de décroissance par rapport à λ (paramètre de dilatation) est en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

On retrouve donc le même type de résultat qu'à 2D.

5.2 Avec la condition DtN2

Nous rappelons que si l'on pose la condition DtN2 (3.41) construite sur Σ , le coefficient de réflexion τ_{mn}^{app} s'écrit alors :

$$\tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}{\det(M_2)}$$

avec (cf Eq. (3.49)) :

$$\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = R_{mn}^{(3)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$$

Conjecture 5.8 (i) $\det(M_2) = \frac{-2i}{e_{\Gamma} k a_{\Gamma} (e_{\Gamma}^{-2} - 1)}$, pour $\lambda = 1$ et $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq m$.

(ii) $|\det(M_2)| \geq \frac{2}{e_{\Gamma} k a_{\Gamma} (e_{\Gamma}^{-2} - 1)}$, pour tout $\lambda > 1$ et $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq m$.

Le point (i) est une généralisation des propositions 3.5 et 3.6 (qui correspondent à $(m, n) = (0, 0)$ et $(m, n) = (0, 1)$) et qui semble vérifiée au moins numériquement (cf Fig. (5.4)). Le point (ii) s'appuie sur l'étude numérique de $|\det(M_2)|$ (cf Fig. (5.3)) pour un échantillon de valeurs de (m, n) .

Lemme 5.9 On suppose que $\frac{n}{\sqrt{2ka_{\Sigma}}} \ll 1$. Lorsque $ka_{\Gamma} \rightarrow +\infty$ (et donc $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$),

$$|\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})| \sim \frac{e_{\Sigma}}{(ka_{\Sigma})^2} \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(ka_{\Sigma})^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m)\right)^2} \quad (5.72)$$

Démonstration : On rappelle que :

$$\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = R_{mn}^{(3)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$$

On peut donc l'écrire sous la forme :

$$\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = \left[\frac{R_{mn}^{(3)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})} + \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \right] R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$$

Or (cf Eq. (3.23)),

$$\frac{R_{mn}^{(3)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})}{R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})} = r_{mn}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$$

On obtient ainsi l'expression :

$$\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = \left[r_{mn|_{\Sigma}} + \frac{r_{00|_{\Sigma}}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|_{\Sigma}}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \right] R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \quad (5.73)$$

Or, d'après Eq. (5.66), lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$:

$$r_{mn|_{\Sigma}} := r_{mn}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \sim r_{00}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + ie_{\Sigma}ka_{\Sigma} \left[\frac{1}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_{\Sigma})^2} - \frac{i}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_{\Sigma})^3} \right]$$

On voit immédiatement que, lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$:

$$r_{01|_{\Sigma}} := r_{01}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \sim r_{00}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + ie_{\Sigma}ka_{\Sigma} \left[\frac{2}{(ka_{\Sigma})^2} - \frac{2i}{(ka_{\Sigma})^3} \right]$$

D'après les deux résultats ci-dessus, $\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$ (cf Eq. (5.73)) peut alors s'écrire, lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \sim & \left[r_{00|_{\Sigma}} + \frac{e_{\Sigma}}{4}n^2(n+1)^3 \frac{1}{(ka_{\Sigma})^2} + \frac{i}{2}n(n+1)^2 \frac{1}{(ka_{\Sigma})} \right. \\ & + r_{00|_{\Sigma}} \frac{\lambda_{01} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \\ & \left. - \left(r_{00|_{\Sigma}} \frac{\lambda_{00} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} + \left(\frac{2e_{\Sigma}}{ka_{\Sigma}} + i \frac{2e_{\Sigma}}{(ka_{\Sigma})^2} \right) \frac{\lambda_{00} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \right) \right] R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \sim & \left[\left(\frac{e_{\Sigma}}{4}n^2(n+1)^3 - 2e_{\Sigma} \frac{\lambda_{00} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \right) \frac{1}{(ka_{\Sigma})^2} \right. \\ & \left. + i \left(\frac{n(n+1)^2 e_{\Sigma}}{2} - 2e_{\Sigma} \frac{\lambda_{00} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \right) \frac{1}{ka_{\Sigma}} \right] R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \end{aligned}$$

Or, d'après [1] (cf Eqs. (21.9.4) et (21.9.5) p. 756), lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$,

$$R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \sim \frac{1}{ka_{\Sigma}} e^{i(ka_{\Sigma} - \frac{1}{2}(n+1)\pi)}$$

il vient donc immédiatement que lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$,

$$|R_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})| \sim \frac{1}{ka_{\Sigma}}$$

De plus, lorsque $ka_{\Sigma} \rightarrow +\infty$, d'après la proposition 2.4

$$\lambda_{mn} \sim (2n - 2m + 1)e_{\Sigma}ka_{\Sigma}$$

et il vient immédiatement que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\lambda_{00} - \lambda_{mn}}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} \sim (n - m)$$

On obtient ainsi que, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1}) &\sim \left[\left(\frac{e_\Sigma}{4} n^2 (n+1)^3 - 2e_\Sigma (n-m) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{n(n+1)^2 e_\Sigma}{2} - 2e_\Sigma (n-m) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right] e^{i(ka_\Sigma - \frac{1}{2}(n+1)\pi)} \end{aligned}$$

et donc, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} |\Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| &\sim \left| \left(\frac{e_\Sigma}{4} n^2 (n+1)^3 - 2e_\Sigma (n-m) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^3} \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{n(n+1)^2 e_\Sigma}{2} - 2e_\Sigma (n-m) \right) \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} \right| \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat annoncé, lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$,

$$|\Psi_{mn}^{(3)}(e_\Sigma ka_\Sigma, e_\Sigma^{-1})| \sim \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m) \right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m) \right)^2}$$

□

Le lemme 5.9 conduit à définir $|\widetilde{\tau}_{mn}^{app}|$:

$$|\widetilde{\tau}_{mn}^{app}| = \left| \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})}{\det(M_2)} \right| \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m) \right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m) \right)^2}$$

La conjecture 5.8 nous dit d'abord que :

Lemme 5.10 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\tau}_{mn}^{app}| &\leq |d_{mn}^{inc}| |R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})| \frac{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}{2} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \\ &\quad \times \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m) \right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m) \right)^2} \end{aligned}$$

Nous avons déjà montré dans l'étude de $|\widetilde{\tau}_{mn}^{app}|$, lorsque l'on considère la condition DtN1, que l'on pouvait majorer $|R_{mn}^{(1)}(e_\Gamma ka_\Gamma, e_\Gamma^{-1})|$ lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ puisque $a_\Sigma > a_\Gamma$). On peut ainsi en déduire la proposition suivante :

Proposition 5.11 Lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, et pour $\frac{n}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$,

$$\begin{aligned} |\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq & \kappa \frac{e_\Gamma^{9/8}(e_\Gamma^{-2} - 1)e_\Sigma}{\pi^{1/4}} \left(\frac{a_\Gamma}{a_\Sigma}\right)^{1/8} \\ & \times \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^{15/8}}} \end{aligned} \quad (5.74)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Démonstration : Si on combine les lemmes (5.1), (5.10) et (5.5) on obtient que, lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$ (et donc $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$) et pour $\frac{n}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq & 4\kappa \left(\frac{\sqrt{e_\Gamma ka_\Gamma}}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e_\Sigma}{(ka_\Sigma)^2} \frac{1}{ka_\Gamma} \frac{e_\Gamma ka_\Gamma (e_\Gamma^{-2} - 1)}{2} \\ & \times \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(ka_\Sigma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m)\right)^2} \end{aligned}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

d'où le résultat après simplification de cette expression.

□

Le résultat donné par la proposition 5.11 montre, qu'à haute fréquence, l'équivalent du module du coefficient de réflexion τ_{mn}^{app} avec $\frac{n}{\sqrt{ka_\Sigma}} \ll 1$ est majoré par une expression qui tend vers 0, lorsque l'on pose la condition DtN2 (3.41) sur Σ . Cela veut dire que l'effet de pollution généré diminue avec la fréquence.

Si l'on adopte la même configuration géométrique que lors des tests numériques, à savoir $a_\Sigma = \lambda a_\Gamma$ (avec $\lambda > 1$) et $e_\Sigma = e_\Gamma$, la proposition 5.11 devient :

Corollaire 5.12 Lorsque $ka_\Gamma \rightarrow +\infty$, pour $\frac{n}{\sqrt{\lambda ka_\Gamma}} \ll 1$:

$$\begin{aligned} |\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| \leq & \kappa \frac{e_\Gamma^{17/8}(e_\Gamma^{-2} - 1)}{\pi^{1/4}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/8} \\ & \times \sqrt{\left(\frac{n^2(n+1)^3}{4} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(\lambda ka_\Gamma)^2} + \left(\frac{n(n+1)^2}{2} - 2(n-m)\right)^2 \frac{1}{(\lambda ka_\Gamma)^{15/8}}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

avec $\kappa \approx 1.086435$

Dans le cas où $\frac{n}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$, le résultat du corollaire 5.12 se simplifie en : il existe C constante positive telle que :

$$|\widetilde{\tau_{mn}^{app}}| < \frac{C}{\lambda^{1/2} (k a_\Gamma)^{3/8}}$$

En annexe D, nous avons proposé une classification des modes à 3D. Lorsque $\frac{n}{\sqrt{\lambda k a_\Gamma}} \ll 1$, on a toujours $n - m \ll \frac{\lambda k a_\Gamma}{2e_\Gamma} \ll 1$, ce qui implique que les modes correspondants sont propagatifs. Le corollaire 5.12 ne concerne donc encore une fois qu'une partie des modes pour lesquels on observe que le coefficient de réflexion décroît vers 0 en fonction de $\frac{1}{\lambda}$ et de $\frac{1}{k a_\Gamma}$. En annexe E, nous avons reporté des résultats concernant des modes évanescents, en utilisant des propriétés particulières des fonctions sphéroïdales. On montre que le coefficient de réflexion décroît de façon exponentielle en supposant que $e > 0.5$.

Dans ce chapitre, nous avons considéré le calcul de la solution analytique du problème mixte (1.2) lorsque \widetilde{T} est donné par une des conditions DtN que nous avons construites au chapitre 3. La solution est décomposée en série de fonctions sphéroïdales rentrantes et sortantes dont nous avons calculé les coefficients en inversant un système matriciel d'ordre 2. Les résultats numériques montrent que quelle que soit la valeur de l'excentricité la condition DtN2 est performante et pour cela il n'est pas nécessaire de trop éloigner la frontière artificielle ($\lambda = 1.2$ suffit pour avoir une erreur inférieure à 10% pour $ka = 10$). Pour obtenir le même niveau de performance avec la condition BGT2, quand cela est possible (cf Fig. (5.7),(5.10), (5.13) pour $e = 0.1$), on observe qu'il faut placer la frontière artificielle plus loin ($\lambda > 1.4$). L'étude numérique semble donc montrer que la condition DtN2 est encore plus performante que la condition BGT2 à haute fréquence. Du point de vue théorique, nous obtenons des résultats similaires au cas 2D à savoir, pour une famille de modes propagatifs, on montre que le coefficient de réflexion tend vers 0 avec une décroissance du même type qu'à 2D. Ici encore, il serait intéressant de compléter ce résultat en considérant les autres modes et nous renvoyons à l'annexe E où sont présentés quelques résultats de ce type.

Annexe A : Géométrie différentielle pour la 2D

A Expression de la dérivée partielle par rapport au vecteur normal \mathbf{n}

Les coordonnées elliptiques (ξ, θ, z) sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$ et a et b sont respectivement le demi-axe principal et le demi-axe secondaire de l'ellipse considérée définis par :

$$\begin{aligned} a &= f \cosh \xi \\ b &= f \sinh \xi \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

ξ est un nombre réel strictement positif et f est la distance interfocale de l'ellipse qui vérifie :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}$$

On définit l'excentricité e par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (\text{A.78})$$

Le changement des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques est donné par une transformation φ dont la matrice jacobienne J_φ est définie par :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \sinh \xi \cos \theta & -f \cosh \xi \sin \theta \\ f \cosh \xi \sin \theta & f \sinh \xi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.79})$$

$$\delta = \det J_\varphi = f^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta) \quad (\text{A.80})$$

On pose $U(\xi, \theta) = u(x, y)$. Maintenant on calcule la normale unitaire \vec{n} en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \vec{\tau} = \begin{vmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\tilde{n}} = \begin{vmatrix} b \cos \theta \\ a \sin \theta \end{vmatrix}$$

$\vec{\tau}$ est la tangente à Γ , la normale $\vec{\tilde{n}}$ n'est pas unitaire, il faut donc la normaliser :

$$\left\| \vec{\tilde{n}} \right\|^2 = b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta$$

La normale unitaire \vec{n} a donc pour coordonnées :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\tilde{n}}}{\left\| \vec{\tilde{n}} \right\|} = \begin{vmatrix} \frac{b \cos \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \\ \frac{a \sin \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{f \sinh \xi \cos \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \\ \frac{f \cosh \xi \sin \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \end{vmatrix}$$

On va maintenant calculer ∇u :

$$J_{\varphi^{-1}} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} f \sinh \xi \cos \theta & f \cosh \xi \sin \theta \\ -f \cosh \xi \sin \theta & f \sinh \xi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.81})$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \delta^{-1} \left(f \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} - f \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \delta^{-1} \left(f \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} + f \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \vec{n} &= \frac{\delta^{-1}}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left(\begin{aligned} & f^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} - f^2 \sinh \xi \cos \theta \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ & + f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} + f^2 \sinh \xi \cos \theta \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned} \right) \\ &= \frac{\delta^{-1}}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \underbrace{(f^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \theta + f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \theta)}_{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} &= a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\
 &= a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)} \\
 &= a \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cos^2 \theta + 1} \\
 &= a \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cosh \xi}\right)^2}
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \frac{1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cosh \xi}\right)^2}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (\text{A.83})$$

B Equation d'Helmholtz en coordonnées elliptiques

En coordonnées cartésiennes (x, y) l'équation d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + k^2 u = 0 \quad (\text{B.84})$$

On rappelle que le changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées elliptiques est donné par une transformation φ dont la matrice jacobienne J_φ est définie par (A.79) :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \sinh \xi \cos \theta & -f \cosh \xi \sin \theta \\ f \cosh \xi \sin \theta & f \sinh \xi \cos \theta \end{pmatrix}$$

où

$$\delta = \det J_\varphi = f^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta)$$

On peut donc écrire :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) J_\varphi^{-1} \quad (\text{B.85})$$

où l'inverse de la matrice jacobienne (A.79) est, on le rappelle donné par (A.81) :

$$J_{\varphi^{-1}} = \delta^{-1} \begin{pmatrix} f \sinh \xi \cos \theta & f \cosh \xi \sin \theta \\ -f \cosh \xi \sin \theta & f \sinh \xi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Grâce à cette matrice, on peut exprimer :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{f \sinh \xi \cos \theta}{\delta}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{f \cosh \xi \sin \theta}{\delta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{f \cosh \xi \sin \theta}{\delta}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{f \sinh \xi \cos \theta}{\delta}\end{aligned}\tag{B.86}$$

Grâce à ces relations (B.86), on a vu dans la première partie que l'on obtenait les relations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \delta^{-1} f \left(\sinh \xi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} - \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \delta^{-1} f \left(\cosh \xi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{B.87}$$

Comme l'on souhaite écrire l'équation d'Helmholtz en coordonnées elliptiques, on doit exprimer les deux dérivées secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles par rapport à ξ et θ :

- On commence par exprimer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \delta^{-1} f \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

on sait aussi que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (\sinh \xi \cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \cosh \xi \cos \theta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \sinh \xi \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{f \sinh \xi \cosh \xi \cos^2 \theta}{\delta} + \frac{f \sinh \xi \cosh \xi \sin^2 \theta}{\delta} \\ &= \frac{f \sinh \xi \cosh \xi}{\delta}\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} (\cosh \xi \sin \theta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \sinh \xi \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \cosh \xi \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{f \sinh^2 \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} - \frac{f \cosh^2 \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \\
&= -\frac{f \cos \theta \sin \theta}{\delta}
\end{aligned}$$

Ensuite, on a besoin des expressions suivantes (A.82) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} \right] &= \delta^{-1} f \left(\sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) - \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right) \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} \right] &= \delta^{-1} f \left(\sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) - \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right)
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \delta^{-1} f \left[\frac{f \sinh \xi \cosh \xi}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{f \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right. \\
&\quad + \frac{f \sinh^2 \xi \cos^2 \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{f \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \xi} \\
&\quad \left. - \frac{f \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{f \cosh^2 \xi \sin^2 \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right]
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{f^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{f^2 \sinh \xi \cosh \xi}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\
&\quad + \frac{f^2 \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - 2 \frac{f^2 \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta}
\end{aligned} \tag{B.88}$$

- On exprime à présent $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \delta^{-1} f \left[\frac{\partial}{\partial y} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

On sait aussi que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} (\cosh \xi \sin \theta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cosh \xi \sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \sinh \xi \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial y} + \cosh \xi \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{f \sinh \xi \cosh \xi \sin^2 \theta}{\delta} + \frac{f \sinh \xi \cosh \xi \cos^2 \theta}{\delta} \\ &= \frac{f \sinh \xi \cosh \xi}{\delta}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} (\sinh \xi \cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sinh \xi \cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \cosh \xi \cos \theta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \sinh \xi \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{f \cosh^2 \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} - \frac{f \sinh^2 \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \\ &= \frac{f \cos \theta \sin \theta}{\delta}\end{aligned}$$

Ensuite, on a besoin des expressions suivantes (A.82) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} \right] &= \delta^{-1} f \left(\cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial U}{\partial \theta} \right] &= \delta^{-1} f \left(\cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right)\end{aligned}$$

En regroupant les résultats ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = & \delta^{-1} f \left[\frac{f \sinh \xi \cosh \xi}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{f \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right. \\ & + \frac{f \cosh^2 \xi \sin^2 \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{f \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} \\ & \left. + \frac{f \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{f \sinh^2 \xi \cos^2 \theta}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \frac{f^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{f^2 \sinh^2 \xi \cos^2 \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{f^2 \sinh \xi \cosh \xi}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ & + \frac{f^2 \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + 2 \frac{f^2 \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

Ainsi, en coordonnée elliptique, l'équation d'Helmholtz s'écrit (d'après (B.88) et (B.89)) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + k^2 u = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{f^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta)}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{f^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta)}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \\ & + 2 \frac{f^2 \sinh \xi \cosh \xi}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2 \frac{f^2 \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ & - 2 \frac{f^2 \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} + 2 \frac{f^2 \cosh \xi \sinh \xi \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \theta} + k^2 u = 0 \end{aligned}$$

L'équation d'Helmholtz s'écrit donc :

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + 2 \frac{f^2 \sinh \xi \cosh \xi}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2 \frac{f^2 \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + k^2 U = 0 \quad (\text{B.90})$$

Annexe B : Géométrie différentielle pour la 3D

A Expression de la dérivée partielle par rapport au vecteur normal \mathbf{n}

Les coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) sont liées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) par les relations :

$$\begin{aligned}x &= b \sin \varphi \cos \theta \\y &= b \sin \varphi \sin \theta \\z &= a \cos \varphi\end{aligned}\tag{A.91}$$

avec $\varphi \in [0, \pi[$, $\theta \in [0, 2\pi[$, a et b représentent respectivement le demi axe principal et le demi axe secondaire du sphéroïde et sont donnés par :

$$\begin{aligned}a &= f \cosh \xi \\b &= f \sinh \xi\end{aligned}\tag{A.92}$$

où f est la distance interfocale de la sphéroïde et ξ un nombre réel positif ou nul. De plus f vérifie la relation :

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}\tag{A.93}$$

De la même façon que dans le cas bidimensionnel, on définit l'excentricité e d'une sphéroïde prolata, pour $\xi = \xi_0$, par :

$$e = \frac{1}{\cosh \xi_0} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\tag{A.94}$$

Le changement en coordonnées sphéroïdes prolates est donné par une transfor-

mation ϕ dont la matrice jacobienne J_ϕ est définie par :

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \cosh \xi \sin \varphi \cos \theta & f \sinh \xi \cos \varphi \cos \theta & -f \sinh \xi \sin \varphi \sin \theta \\ f \cosh \xi \sin \varphi \sin \theta & f \sinh \xi \cos \varphi \sin \theta & f \sinh \xi \sin \varphi \cos \theta \\ f \sinh \xi \cos \varphi & -f \cosh \xi \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de J_ϕ est donné par :

$$\begin{aligned} \det(J_\phi) &= f \sinh \xi \cos \varphi (f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta + f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta) \\ &\quad + f \cosh \xi \sin \varphi (f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) \\ &= f \sinh \xi \cos \varphi \times f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi + f \cosh \xi \sin \varphi \times f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \\ &= f^3 \sinh^3 \xi \cos^2 \varphi \sin \varphi + f^3 \cosh^2 \xi \sinh \xi \sin^3 \varphi \\ &= f^3 \sinh \xi \sin \varphi (\sinh^2 \xi \cos^2 \varphi + \cosh^2 \xi \sin^2 \varphi) \end{aligned} \tag{A.95}$$

On veut calculer la normale unitaire \mathbf{n} en coordonnées sphéroïdales prolates. Si on note $\mathbf{M}(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ où x , y et z sont donnés par (A.91), une normale non unitaire \mathbf{N} va s'écrire :

$$\mathbf{N}(\varphi, \theta) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \tag{A.96}$$

On a :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} b \cos \varphi \cos \theta \\ b \cos \varphi \sin \theta \\ -a \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -b \sin \varphi \sin \theta \\ b \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.97}$$

et donc :

$$\mathbf{N}(\varphi, \theta) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} ab \sin^2 \varphi \cos \theta \\ ab \sin^2 \varphi \sin \theta \\ b^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \tag{A.98}$$

La norme de $\mathbf{N}(\varphi, \theta)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{N}\|^2 &= a^2 b^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \theta + a^2 b^2 \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + b^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= a^2 b^2 \sin^4 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &= b^2 \sin^2 \varphi (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \end{aligned} \tag{A.99}$$

la normale unitaire \mathbf{n} s'écrit donc :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \begin{pmatrix} \frac{a \sin \varphi \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{a \sin \varphi \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.100})$$

On va maintenant calculer ∇u . On commence pour ce faire à inverser la matrice jacobienne J_ϕ :

$$J_\phi^{-1} = \frac{1}{\det J_\phi} \begin{pmatrix} f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \cos \theta & f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \sin \theta & f^2 \sinh^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta & f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta & -f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \\ -f^2 \sin \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) & f^2 \cos \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

Or, si on note $u(x, y, z) = U(\xi, \varphi, \theta)$, on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}; \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) J_\phi^{-1} \quad (\text{A.101})$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\det J_\phi} \left(f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} + f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} - f^2 \sin \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\det J_\phi} \left(f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} + f^2 \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} + f^2 \cos \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\det J_\phi} \left(f^2 \sinh^2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \xi} - f^2 \cosh \xi \sinh \xi \sin^2 \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\nabla u \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\det J_\phi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \left(f^3 \cosh^2 \xi \sinh \xi \sin^3 \varphi \cos^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right. \\
&\quad + f^3 \cosh \xi \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\
&\quad - f^3 \cosh \xi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) \frac{\partial U}{\partial \theta} \\
&\quad + f^3 \cosh^2 \xi \sinh \xi \sin^3 \varphi \sin^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \xi} \\
&\quad + f^3 \cosh \xi \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\
&\quad + f^3 \cosh \xi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta (\cosh^2 \xi \sin^2 \varphi + \sinh^2 \xi \cos^2 \varphi) \frac{\partial U}{\partial \theta} \\
&\quad \left. + f^3 \sinh^3 \xi \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \xi} - f^3 \cosh \xi \sinh^2 \xi \cos \varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \\
&= \frac{1}{\det J_\phi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \underbrace{\left(f^3 \cosh^2 \xi \sinh \xi \sin^3 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + f^3 \sinh^3 \xi \cos^2 \varphi \sin \varphi \right)}_{\det J_\phi} \frac{\partial U}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (\text{A.103})$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} &= a \sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi} = a \sqrt{(1 - \cos^2 \varphi) + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi} \\
&= a \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}
\end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

où e est l'excentricité du sphéroïde considéré définie par (A.94).

On obtient le résultat recherché :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{A.105})$$

B Equation d'Helmholtz en coordonnées sphéroïdales prolates

Afin d'exprimer l'équation d'Helmholtz en coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) , nous devons exprimer le Laplacien. Pour ce faire, nous utilisons son expressions en coordonnées curvilignes orthogonales (cf Eq. (1.44) dans [53]) dans laquelle nous réinjectons les paramètres spécifiques aux coordonnées sphéroïdales prolates donnés par l'Eq. (1.77) dans [53]. Nous obtenons :

$$\Delta u = \frac{1}{f^2 \sinh \xi \sin \varphi (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi)} \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \sinh \xi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh \xi \sin \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u$$

L'équation d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{1}{f^2 \sinh \xi \sin \varphi (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi)} \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \sinh \xi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh \xi \sin \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + k^2 u = 0$$

soit,

$$\left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \sinh \xi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh \xi \sin \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 f^2 \sinh \xi \sin \varphi (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) \right] u = 0$$

On obtient ainsi que l'équation d'Helmholtz s'écrit en coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) :

$$\frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) u = 0$$

Annexe C : Calcul des Wronskiens

Dans cette annexe, nous allons développer le calculs des Wronskiens, notés Δ_W , utilisés dans certaines démonstration de la thèse en 2D et en 3D.

A Définition du Wronskien

On rappelle que si $y_1(c, \zeta)$ et $y_2(c, \zeta)$ sont deux solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0$$

le Wronskien associé à cette équation différentielle est, par définition :

$$\Delta_W [y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

et $\Delta_W [y_1, y_2]$ est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\Delta_W' = -a\Delta_W \tag{A.106}$$

où $\Delta_W' = \frac{\partial \Delta_W}{\partial \zeta}$.

B Calcul du Wronskien $\Delta_W \left[R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)} \right]$

On cherche à calculer le Wronskien suivant : $\Delta_W \left[R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)} \right]$.

On sait d'après Eqs. (1.21) et (1.22) du chapitre 1 que les fonctions de Mathieu du $m^{\text{ème}}$ mode et de $j^{\text{ème}}$ espèce ($j = 1, 2, 3, 4$) notées $R_{m_\Sigma}^{(j)}$ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 R_m^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z)}{\partial z^2} + (a_m(q) - 2q \cosh 2z) R_m^{(j)}(2\sqrt{q}, \cosh z) = 0$$

avec $q = \frac{(kf)^2}{4}$.

On fait le changement de variables suivants : $\zeta = \cosh z$ et $c = 2\sqrt{q} = kf$. On peut alors écrire que les fonctions $R_{m_\Sigma}^{(j)}(c, \zeta)$ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 R_m^{(j)}(c, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \frac{\partial R_m^{(j)}(c, \zeta)}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(a_m \left(\frac{c}{4} \right) - \frac{c}{2} (2\zeta^2 - 1) \right) R_m^{(j)}(c, \zeta) = 0$$

d'après Eq. (A.106)

$$\Delta'_W [R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)}] = -\frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} \Delta_W [R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)}]$$

On en déduit que :

$$\Delta_W [R_{m_\Sigma}^{(1)}, R_{m_\Sigma}^{(2)}] = \frac{C}{\zeta^2 - 1} \quad (\text{B.107})$$

où C est une constante que l'on peut déterminer en utilisant les comportements des fonctions $R_{m_\Sigma}^{(1)}$ et $R_{m_\Sigma}^{(2)}$ à l'infini. D'après [51], nous savons que lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$:

$$R_{m_\Sigma}^{(1)}(c, \zeta) \sim J_{m_\Sigma}(c\zeta) \text{ et } R_{m_\Sigma}^{(2)}(c, \zeta) \sim Y_{m_\Sigma}(c\zeta)$$

où J_m et Y_m sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce et d'ordre m (cf Chap. 9 dans [1]). Or, d'après [1] (cf Eqs. (9.2.1) et (9.2.2)), lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$:

$$J_m(c\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$$

$$Y_m(c\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$$

Donc, lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$:

$$R_{m_\Sigma}^{(1)}(c, \zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$$

$$R_{m_\Sigma}^{(2)}(c, \zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$$

Notons $f(x) = x \cos \left(\frac{1}{x^2} - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$ et $g(x) = x \sin \left(\frac{1}{x^2} - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right)$. Les fonctions f et g admettent une limite en 0 égale à 0. Elles peuvent donc être prolongées par 0 en 0. Ces deux fonctions sont donc continues sur \mathbb{R} et dérivables sur \mathbb{R}^* . On peut donc leur appliquer la règle de l'Hôpital, ce qui entraîne :

$$\frac{\partial R_{m_\Sigma}^{(1)}(c, \zeta)}{\partial \zeta} \sim \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial R_{m_\Sigma}^{(2)}(c, \zeta)}{\partial \zeta} \sim \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi c\zeta}} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) \right]$$

soit,

$$R_{m\Sigma}^{(1)'}(c, \zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c \zeta}} \left[\frac{-1}{2\zeta} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) - c \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) \right]$$

$$R_{m\Sigma}^{(2)'}(c, \zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi c \zeta}} \left[\frac{-1}{2\zeta} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) + c \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1/2)\pi}{2} \right) \right]$$

On obtient alors que, comme

$$\Delta_W [R_{m\Sigma}^{(1)}, R_{m\Sigma}^{(2)}] = R_m^{(1)}(c, \zeta) R_m^{(2)'}(c, \zeta) - R_m^{(1)'}(c, \zeta) R_m^{(2)}(c, \zeta)$$

lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$,

$$\Delta_W [R_{m\Sigma}^{(1)}, R_{m\Sigma}^{(2)}] \sim \frac{2}{\pi \zeta}$$

Ainsi, lorsque $\zeta \rightarrow +\infty$:

$$\frac{C}{\zeta^2 - 1} \sim \frac{2}{\pi \zeta}$$

ce qui implique que $C = \frac{2(\zeta^2 - 1)}{\pi \zeta}$, et on obtient finalement que :

$$\Delta_W [R_{m\Sigma}^{(1)}, R_{m\Sigma}^{(2)}] = \frac{2}{\pi \zeta}$$

Si l'on refait le changement de variable en sens inverse $\cosh \xi = \zeta$, on obtient que :

$$\Delta_W [R_{m\Sigma}^{(1)}(kf \cosh \xi), R_{m\Sigma}^{(2)}(kf \cosh \xi)] = \frac{2}{\cosh \xi}$$

Et donc pour une excentricité donnée $e = (\cosh \xi)^{-1}$, on a :

$$\Delta_W [R_{m\Sigma}^{(1)}(kf \cosh \xi), R_{m\Sigma}^{(2)}(kf \cosh \xi)] = \frac{2e}{\pi} \quad (\text{B.108})$$

C Calcul du Wronskien $\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}]$

On rappelle (cf Eq. (2.34) Chap. 1) que les fonctions d'ondes sphéroïdales prolatas radiales d'ordre mn et d'espèce j (pour $j = 1, 2, 3, 4$), notées $R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi)$, vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi)}{\partial \xi} \right) - \sinh \xi \left(\lambda_{mn} - (kf)^2 \cosh^2 \xi - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi} \right) R_{mn}^{(j)}(kf, \cosh \xi) = 0$$

Si l'on fait le changement de variable suivant : $\zeta = \cosh \xi$ et $c = kf$, elles vérifient l'équation suivante :

$$\frac{\partial R_{mn}^{(j)}(c, \zeta)}{\partial \zeta^2} + \frac{2\zeta}{(\zeta^2 - 1)} \frac{\partial R_{mn}^{(j)}(c, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{1}{(\zeta^2 - 1)} \left(\lambda_{mn} - (c)^2 \zeta^2 - \frac{m^2}{\zeta^2 - 1} \right) R_{mn}^{(j)}(c, \zeta) = 0$$

D'après Eq. (A.106), on a donc que $\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}]$ satisfait :

$$\frac{\partial \Delta_W(c, \zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{2\zeta}{(\zeta^2 - 1)} \Delta_W(\zeta)$$

donc,

$$\Delta_W(\zeta) = \frac{C}{\zeta^2 - 1}$$

où C est une constante que l'on peut déterminer en utilisant les comportements asymptotiques de $R_{mn}^{(1)}(c, \zeta)$ et $R_{mn}^{(2)}(c, \zeta)$ à l'infini. D'après [1] (cf Eqs. (21.9.4) et (21.9.5) p. 756), lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} R_{mn}^{(1)}(c, \zeta) &\sim \frac{1}{c\zeta} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \\ R_{mn}^{(2)}(c, \zeta) &\sim \frac{1}{c\zeta} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \end{aligned} \tag{C.109}$$

Notons $f(x) = x \cos \left(\frac{1}{x} - \frac{(n+1)\pi}{2} \right)$ et $g(x) = x \sin \left(\frac{1}{x} - \frac{(n+1)\pi}{2} \right)$. Les fonctions f et g admettent une limite en 0 égale à 0. Elles peuvent donc être prolongées par 0 en 0. Ces deux fonctions sont donc continues sur \mathbb{R} et dérivables sur \mathbb{R}^* . On peut donc leur appliquer la règle de l'Hôpital, ce qui entraîne que lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{mn}^{(1)'}(c, \zeta)}{\partial \zeta} &\sim \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{c\zeta} \cos \left(c\zeta - \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \right] \\ \frac{\partial R_{mn}^{(2)'}(c, \zeta)}{\partial \zeta} &\sim \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{c\zeta} \sin \left(c\zeta - \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \tag{C.110}$$

Comme,

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}] = R_{mn}^{(1)}(c, \zeta) R_{mn}^{(2)'}(c, \zeta) - R_{mn}^{(1)'}(c, \zeta) R_{mn}^{(2)}(c, \zeta)$$

on en déduit donc que, lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}, R_{mn\Sigma}^{(2)}] \sim \frac{1}{c\zeta^2}$$

Ainsi, lorsque $c\zeta \rightarrow +\infty$

$$\frac{C}{\zeta^2 - 1} \sim \frac{1}{c\zeta^2}$$

ce qui implique que $C = \frac{1}{c}$, et on obtient finalement que :

$$\Delta_W(\zeta) = \frac{1}{c(\zeta^2 - 1)}$$

Si l'on refait le changement de variable en sens inverse $\cosh \xi = \zeta$ et $kf = c$, on obtient que :

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}(kf \cosh \xi), R_{mn\Sigma}^{(2)}(kf \cosh \xi)] = \frac{1}{kf \sinh^2 \xi}$$

Et donc pour une excentricité donnée $e = (\cosh \xi)^{-1}$ (on rappelle que $kf = eka$), on a :

$$\Delta_W [R_{mn\Sigma}^{(1)}(kf \cosh \xi), R_{mn\Sigma}^{(2)}(kf \cosh \xi)] = \frac{1}{eka(e^{-2} - 1)} \quad (\text{C.111})$$

Annexe D : Classification des modes

Afin d'analyser les performances des nouvelles conditions DtN, nous avons établi des estimations qui ne sont valables que pour une certaine partie des modes. Afin de comprendre dans quel cadre les majorations sont valables, nous proposons une classification des modes qui permet de retrouver la classification connue en géométrie circulaire ou sphérique.

A Classification des modes pour le problème 2D

Dans cette partie, nous proposons une méthode de classification qui repose sur la partie principale de l'opérateur d'Helmholtz en coordonnées elliptiques, ce qui revient à représenter localement la surface elliptique par son plan tangent. Comme nous le disions auparavant, la méthode de classification que nous proposons nous permet de retrouver celle bien connue en coordonnées polaires ainsi que celle qui est appliquée en coordonnées cartésiennes. C'est pourquoi nous commençons par considérer ces deux cas plus simples.

A.1 Cas du système de coordonnées cartésiennes

On se place dans le cas où l'on analyse le comportement d'une onde au voisinage d'une surface $\{x = x_0\}$. En coordonnées cartésiennes (x, y) , on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u \right]$$

Si l'on effectue une transformée de Fourier partielle en y qui à $u := u(x, y)$ associe $\hat{u} := \hat{u}(x, k_y)$, on obtient l'équation algébrique :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = - (-k_y^2 + k^2) \hat{u}$$

Cette équation admet pour solution générale :

$$\hat{u}(x, k_y) = A(k_y) \exp \sqrt{k^2 - k_y^2} x + B(k_y) \exp -\sqrt{k^2 - k_y^2} x$$

avec,

$$\sqrt{k^2 - k_y^2} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_y^2} & \text{si } |k_y| < k \\ i\sqrt{k^2 - k_y^2} & \text{si } |k_y| > k \end{cases}$$

et les fonctions A et B sont ajustées à partir des données. On pose alors la définition suivante :

Définition A.1 *On dit que \hat{u} est un mode propagatif si $(\hat{u})^{-1} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}$ est négatif, évanescent si $(\hat{u})^{-1} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}$ est positif et rampant si $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = 0$*

La définition (A.1) est cohérente avec celle des trois régions recouvrant l'espace des fréquences qui sont les zones hyperboliques $\{k > |k_y|\}$ (les rayons se propagent), elliptique $\{k < |k_y|\}$ (les rayons sont évanescents) et "glancing" $\{k = |k_y|\}$ (les rayons sont rampants). Nous renvoyons par exemple à [62] pour plus de détails sur ces différentes zones.

A.2 Cas des coordonnées polaires

On sait [14] que dans le système de coordonnées polaires (r, θ) , l'opérateur d'Helmholtz $\Delta u + k^2 u$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u \quad (\text{A.112})$$

On s'intéresse aux modes u_n pour lesquels on pose comme définition :

Définition A.2 *Le mode u_n est un mode propagatif si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}$ est négatif, évanescent si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}$ est positif et rampant si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}$ est nul.*

La définition (A.2) est une généralisation de la définition (A.1). On voit donc qu'il s'agit de déterminer le signe de $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}$, ce qui n'est pas évident à moins de négliger les dérivées d'ordre 1. C'est pourquoi, on choisit de représenter l'opérateur d'Helmholtz par sa partie principale $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2$, si bien que l'on se ramène à étudier le signe de l'expression $u_n^{-1} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + k^2 u_n \right)$.

Proposition A.3 *Le mode u_n est propagatif si $n < kr$, évanescent si $n > kr$ et rampant si $n = kr$.*

Démonstration : Afin de classifier les modes, on cherche, d'après la définition (A.2), le signe de l'expression $u_n^{-1} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + k^2 u_n \right)$ car on sait que si u_n vérifie

l'équation d'helmholtz en coordonnées polaires, alors :

$$(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} = u_n^{-1} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} - k^2 u_n \right)$$

Or d'après [10], u_n s'écrit :

$$u_n = d_n^{ex} H_n^{(1)} \cos n\theta$$

avec $d_n^{ex} = -(2 - \delta_{0n})(-i)^n \frac{J_n(kr)}{H_n^{(1)}(kr)}$, où δ_{0n} est le symbole de Krönecker, J_n est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre n et $H_n^{(1)}$ est la fonction de Hankel de 1^{ère} espèce d'ordre n .

On obtient donc que $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} = -\frac{n^2}{r^2} u_n$. Ainsi :

$$(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} = u_n^{-1} \left(\frac{n^2}{r^2} - k^2 \right) u_n = \frac{n^2}{r^2} - k^2$$

On peut donc à présent classifier les différents modes et on a :

- * u_n est un mode propagatif si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} < 0 \Leftrightarrow n < kr$,
- * u_n est un mode évanescent si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} > 0 \Leftrightarrow n > kr$,
- * u_n est un mode rampant si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} = 0 \Leftrightarrow n = kr$.

□

A.3 Cas des coordonnées elliptiques

On sait (cf Annexe A) que dans le système de coordonnées elliptiques (ξ, θ) , l'opérateur d'Helmholtz s'écrit :

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{f^2 \sinh \xi \cosh \xi}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + 2 \frac{f^2 \cos \theta \sin \theta}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + k^2 \quad (\text{A.113})$$

où $\delta = f^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta)$.

On s'intéresse ici aux modes u_n pour lesquels on adopte, comme dans les cas cartésien et polaire, la définition :

Définition A.4 *Le mode u_n est un mode propagatif si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2}$ est négatif, évanescent si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2}$ est positif et rampant si $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2}$ est nul.*

Cette définition est cohérente avec la définition (A.1) puisque ξ joue le rôle de la variable radiale. On voit donc qu'il s'agit de déterminer le signe de $(u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2}$. Tout comme dans le cas des coordonnées polaires, ce n'est pas chose évidente à moins de négliger les dérivées d'ordre 1. C'est pour cela qu'on choisit de représenter l'opérateur d'Helmholtz par sa partie principale $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \delta k^2$, si bien que l'on se ramène à étudier le signe de l'expression $u_n^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right)$.

Proposition A.5 *Les différents modes u_n pairs peuvent être classifiés de la façon suivante, étant donnée $(a_n)_n$ la suite des valeurs caractéristiques :*

$$* a_n \ll k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes propagatifs,}$$

$$* a_n \simeq k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes rampants,}$$

$$* a_n \gg k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes évanescents.}$$

De manière identique, les différents modes u_n impairs peuvent être classifiés de la façon suivante, étant donnée $(b_n)_n$ la suite des valeurs caractéristiques :

$$* b_n \ll k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes propagatifs,}$$

$$* b_n \simeq k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes rampants,}$$

$$* b_n \gg k^2 f^2 \left(\cosh^2 \xi_1 - \frac{1}{2} \right) \text{ correspond aux modes évanescents.}$$

Les modes sont analysés au voisinage de l'ellipse $\{\xi = \xi_1\}$.

Démonstration : On va étudier le signe de $-\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right]$, tout d'abord pour un mode u_n pair. On rappelle que :

$$u_n = \begin{cases} u_{n,even} = \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) S e_n(kf, \cos \theta), & n \geq 0 \text{ (modes pairs)} \\ u_{n,odd} = \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi) S o_n(kf, \cos \theta), & n \geq 1 \text{ (modes impairs)} \end{cases}$$

Il vient alors sur l'ellipse $\{\xi = \xi_1\}$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] &= \left[\frac{\partial^2 \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) S e_n(kf, \cos \theta)}{\partial \theta^2} \right. \\ &\quad \left. + \delta k^2 \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) S e_n(kf, \cos \theta) \right] \\ &= \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) \left[\frac{\partial^2 S e_n(kf, \cos \theta)}{\partial \theta^2} + \delta k^2 S e_n(kf, \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

Or, d'après (1.23), Chap. 1,

$$S e_n(kf, \cos \theta) = \sqrt{\frac{N_n^{(e)}}{\pi}} c e_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)$$

et comme les fonctions $c e_n$ vérifient l'équation différentielle suivante (cf (1.20) Chap. 1) :

$$\frac{\partial^2 c e_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)}{\partial \theta^2} + \left(a_n - \frac{k^2 f^2}{2} \cos 2\theta \right) c e_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right) = 0,$$

il vient que les fonctions $S e_n$ satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 S e_n(kf, \cos \theta) \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)}{\partial \theta^2} + \left(a_n - \frac{k^2 f^2}{2} \cos 2\theta \right) S e_n(kf, \cos \theta) = 0$$

et, en utilisant le fait que $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, on obtient que les fonctions $S e_n$ vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 S e_n}{\partial \theta^2} + \left(a_n + \frac{k^2 f^2}{2} - (kf)^2 \cos^2 \theta \right) S e_n = 0 \quad (\text{A.114})$$

où a_n est la valeur caractéristique associée à la fonction $S e_n$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] &= \text{Re}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) S e_n(kf, \cos \theta) \left[\delta k^2 - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} + k^2 f^2 \cos^2 \theta \right] \\ &= \left[\delta k^2 - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} + k^2 f^2 \cos^2 \theta \right] u_n \end{aligned}$$

On sait que $\delta = f^2 (\sinh^2 \xi_1 \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi_1 \sin^2 \theta)$, donc :

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] &= \left[k^2 f^2 \sinh^2 \xi_1 \cos^2 \theta + k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 \sin^2 \theta - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} + k^2 f^2 \cos^2 \theta \right] u_n \\
 &= \left[k^2 f^2 \cos^2 \theta \underbrace{(1 + \sinh^2 \xi_1)}_{\cosh^2 \xi_1} + k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 \sin^2 \theta - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} \right] u_n \\
 &= \left[k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} \right] u_n \\
 &= \left[k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 - a_n - \frac{k^2 f^2}{2} \right] u_n
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$-u_n^{-1} \left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + a_n + \frac{k^2 f^2}{2} \right)$$

Les différents modes n peuvent alors être classifiés comme suit :

- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + a_n \right) \ll 0$ correspond aux modes propagatifs,
- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + a_n \right) \simeq 0$ correspond aux modes rampants,
- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + a_n \right) \gg 0$ correspond aux modes évanescents.

On effectue une démonstration similaire pour les modes u_n impairs :

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] &= \left[\frac{\partial^2 \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) S_{O_n}(kf, \cos \theta)}{\partial \theta^2} \right. \\
 &\quad \left. + \delta k^2 \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) S_{O_n}(kf, \cos \theta) \right] \\
 &= \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) \left[\frac{\partial^2 S_{O_n}(kf, \cos \theta)}{\partial \theta^2} + \delta k^2 S_{O_n}(kf, \cos \theta) \right]
 \end{aligned}$$

Or, d'après (1.23) Chap. 1

$$S_{O_n}(kf, \cos \theta) = \sqrt{\frac{N_n^{(o)}}{\pi}} se_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)$$

et comme les fonctions se_n vérifient l'équation différentielle suivante (cf (1.20) Chap. 1) :

$$\frac{\partial^2 se_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)}{\partial \theta^2} + \left(b_n - \frac{k^2 f^2}{2} \cos 2\theta \right) se_n \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right) = 0,$$

il vient alors que les fonctions So_n satisfont l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 So_n(kf, \cos \theta) \left(\theta, \frac{k^2 f^2}{4} \right)}{\partial \theta^2} + \left(b_n - \frac{k^2 f^2}{2} \cos 2\theta \right) So_n(kf, \cos \theta) = 0$$

et, en utilisant le fait que $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, on obtient que les fonctions So_n vérifient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 So_n}{\partial \theta^2} + \left(b_n + \frac{k^2 f^2}{2} - (kf)^2 \cos^2 \theta \right) So_n = 0 \quad (\text{A.115})$$

où b_n est la valeur caractéristique associée à la fonction So_n . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] &= \text{Ro}_n^{(3)}(kf, \cosh \xi_1) So_n(kf, \cos \theta) \left[\delta k^2 - b_n - \frac{k^2 f^2}{2} + k^2 f^2 \cos^2 \theta \right] \\ &= \left[\delta k^2 - b_n - \frac{k^2 f^2}{2} + k^2 f^2 \cos^2 \theta \right] u_n \end{aligned}$$

Comme $\delta = f^2 (\sinh^2 \xi_1 \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi_1 \sin^2 \theta)$, on obtient similairement au cas précédent :

$$\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right] = \left[k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 - b_n - \frac{k^2 f^2}{2} \right] u_n$$

Dans ce cas, on a :

$$-u_n^{-1} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} + \delta k^2 u_n \right) = \left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + b_n + \frac{k^2 f^2}{2} \right)$$

Les différents modes n peuvent alors être classifiés comme suit :

- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + b_n + \frac{k^2 f^2}{2} \right) \ll 0$ correspond aux modes propagatifs,
- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + b_n + \frac{k^2 f^2}{2} \right) \simeq 0$ correspond aux modes rampants,
- * $\left(-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + b_n + \frac{k^2 f^2}{2} \right) \gg 0$ correspond aux modes évanescents.

□

Corollaire A.6 *A haute fréquence, le mode u_n est propagatif si $n \ll \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2}$, évanescent si $n \gg \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2}$ et rampant si $n \simeq \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2}$.*

Démonstration :

Nous commençons la démonstration par les modes u_n pairs.

On considère le comportement de a_n lorsque $ka \rightarrow +\infty$: on rappelle que

$$a_n \sim -\frac{(\mathbf{k}f)^2}{2} + (2\mathbf{n} + 1)\mathbf{k}f - \frac{(2n + 1)^2 + 1}{8}$$

On a alors (en ne gardant que les termes en gras de l'expression ci-dessus) :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + a_n = 0$$

s'écrit :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} - \frac{(kf)^2}{2} + (2n + 1)kf \simeq 0$$

Or, comme $kf \neq 0$, on a :

$$-kf \cosh^2 \xi_1 + (2n + 1) \simeq 0$$

d'où

$$2n \simeq kf (\cosh^2 \xi_1) - 1$$

Ainsi, on obtient,

$$n \simeq \frac{kf (\cosh^2 \xi_1) - 1}{2}$$

Or, on rappelle que sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_1\}$, $\cosh \xi_1 = e_\Sigma^{-1}$ et $f \cosh \xi_1 = a_\Sigma$ où e_Σ est l'excentricité de l'ellipse considérée et a_Σ son demi axe principal. Il vient donc que :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + a_n \simeq 0 \Leftrightarrow n \simeq \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1} - 1}{2} \quad (\text{A.116})$$

On s'intéresse à présent aux modes u_n impairs. Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on rappelle que :

$$b_n \sim -\frac{(\mathbf{k}f)^2}{2} + (2\mathbf{n} - 1)\mathbf{k}f - \frac{(2n - 1)^2 + 1}{8}$$

On a alors (en ne gardant que les termes en gras de l'expression ci-dessus) :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + b_n + \frac{k^2 f^2}{2} = 0$$

s'écrit :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} - \frac{(kf)^2}{2} + (2n - 1)kf \simeq 0$$

Or, comme $kf \neq 0$, il vient :

$$-kf \cosh^2 \xi_1 + (2n - 1) \simeq 0$$

et, donc :

$$2n \simeq kf (\cosh^2 \xi_1) + 1$$

On obtient ainsi :

$$n \simeq \frac{kf \cosh^2 \xi_1 + 1}{2}$$

Or, sur la surface elliptique $\{\xi = \xi_1\}$, $\cosh \xi = e_\Sigma^{-1}$ et $f \cosh \xi_1 = a_\Sigma$ où e_Σ est l'excentricité de l'ellipse considérée et a_Σ son demi axe principal. On obtient ainsi :

$$-k^2 f^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{k^2 f^2}{2} + b_n \sim 0 \Leftrightarrow n \sim \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1} + 1}{2} \quad (\text{A.117})$$

Enfin, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1} - 1}{2} \sim \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2}$$

On peut ainsi classifier les modes, que u_n soit égal à $u_{n,even}$ ou $u_{n,odd}$, et on obtient :

$$* u_n \text{ est un mode propagatif si } (u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} \ll 0 \Leftrightarrow n \ll \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2},$$

$$* u_n \text{ est un mode évanescent si } (u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} \gg 0 \Leftrightarrow n \gg \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2},$$

$$* u_n \text{ est un mode rampant si } (u_n)^{-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} \simeq 0 \Leftrightarrow n \simeq \frac{ka_\Sigma e_\Sigma^{-1}}{2}.$$

□

B Classification des modes pour le problème 3D

On sait (cf Annexe B) que dans le système de coordonnées sphéroïdales prolates (ξ, φ, θ) , l'équation d'Helmholtz s'écrit :

$$\left[\frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi}{\sinh^2 \xi \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 f^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \varphi) \right] u = 0 \quad (\text{B.118})$$

On s'intéresse ici aux modes u_{mn} pour lesquels on pose comme définition :

Définition B.1 Le mode u_{mn} est un mode propagatif si $(u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2}$ est négatif, évanescent si $(u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2}$ est positif et rampant si $(u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2}$ est nul.

Cette définition est une généralisation de la définition (A.4) dans le cas bidimensionnel. On voit donc qu'il s'agit de déterminer le signe de $(u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2}$. On voit que cela n'est pas chose évidente à moins de négliger la dérivée d'ordre 1 par rapport à ξ .

Proposition B.2 Les différents modes u_{mn} peuvent être classifiés comme suit :

- * $\lambda_{mn} \ll (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1}$ correspond aux modes propagatifs,
- * $\lambda_{mn} \simeq (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1}$ correspond aux modes rampants,
- * $\lambda_{mn} \gg (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 - \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1}$ correspond aux modes évanescents.

Démonstration : Appliquons l'opérateur d'Helmholtz à un seul mode u_{mn} (cf Eq. (2.7) Chap. 3) sachant que l'on a :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u_{mn}}{\partial \varphi} \right) = \left(-\lambda_{mn} + (kf)^2 \cos^2 \varphi + \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right) u_{mn} \\ \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \theta^2} = -m^2 u_{mn} \end{cases}$$

Il vient donc,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial u_{mn}}{\partial \xi} \right) + \left[-\lambda_{mn} + (kf)^2 \cos^2 \varphi + \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right] u_{mn} \\ & \left[-m^2 \frac{\cosh^2 \xi_1 - \cos^2 \varphi}{\sinh^2 \xi_1 \sin^2 \varphi} + (kf)^2 (\cosh^2 \xi_1 - \cos^2 \varphi) \right] u_{mn} = 0 \end{aligned}$$

soit encore,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial u_{mn}}{\partial \xi} \right) + \left[-\lambda_{mn} + (kf)^2 \cos^2 \varphi + \frac{m^2}{\sin^2 \varphi} \right. \\ & \left. - m^2 \frac{\cosh^2 \xi_1 - \cos^2 \varphi}{\sinh^2 \xi_1 \sin^2 \varphi} + (kf)^2 (\cosh^2 \xi_1 - \cos^2 \varphi) \right] u_{mn} = 0 \end{aligned}$$

En regroupant les termes de même nature, on obtient donc :

$$\frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sinh \xi \frac{\partial u_{mn}}{\partial \xi} \right) = \left[\lambda_{mn} - (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} \right] u_{mn}$$

Afin de conclure, on procède comme dans le cas 2D : on néglige le terme d'ordre 1 en $\frac{\partial}{\partial \xi}$ et on obtient donc que $(u_{mn})^{-1} \frac{\partial u_{mn}}{\partial \xi}$ est du même signe que $\lambda_{mn} + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (kf)^2 \cosh^2 \xi_1$.

On obtient alors le résultat de la propriété B.2 en s'appuyant sur la définition B.1 :

$$* \lambda_{mn} + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 \ll 0 \text{ correspond aux modes propagatifs,}$$

$$* \lambda_{mn} + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 \simeq 0 \text{ correspond aux modes rampants,}$$

$$* \lambda_{mn} + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (kf)^2 \cosh^2 \xi_1 \gg 0 \text{ correspond aux modes évanescents.}$$

□

Corollaire B.3 *A haute fréquence, le mode u_{mn} est propagatif si $(n - m) \ll \frac{ka_\Sigma}{2ea_\Sigma}$, évanescent si $(n - m) \gg \frac{ka_\Sigma}{2e_\Sigma}$ et rampant si $(n - m) \simeq \frac{ka_\Sigma}{2e_\Sigma}$.*

Démonstration :

On travaille sur le sphéroïde $\{\xi = \xi_1\}$ donc $kf = e_\Sigma ka_\Sigma$. On rappelle que lorsque $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$ (cf Prop. 2.4 Chap. 1) :

$$\lambda_{mn} \sim (2n - 2m + 1)e_\Sigma ka_\Sigma$$

On a alors :

$$-\lambda_{mn} + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (e_\Sigma ka_\Sigma)^2 \cosh^2 \xi_1 = 0 \Rightarrow -(2n - 2m + 1)e_\Sigma ka_\Sigma + \frac{m^2}{\sinh^2 \xi_1} - (e_\Sigma ka_\Sigma)^2 \cosh^2 \xi_1 \simeq 0$$

et, comme $e_\Sigma ka_\Sigma \neq 0$, on en déduit que :

$$(2n - 2m + 1) \simeq e_\Sigma ka_\Sigma \cosh^2 \xi_1 - \frac{m^2}{e_\Sigma ka_\Sigma \sinh^2 \xi_1}$$

ce qui implique

$$n - m \simeq \frac{e_\Sigma ka_\Sigma \cosh^2 \xi_1}{2} - \frac{m^2}{2e_\Sigma ka_\Sigma \sinh^2 \xi_1} - \frac{1}{2}$$

Comme $ka_\Sigma \rightarrow +\infty$, on ne conserve que l'expression en gras et il vient :

On peut ainsi classifier les modes u_{mn} , à haute fréquence :

$$* u_{mn} \text{ est un mode propagatif si } (u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2} \ll 0 \Leftrightarrow (n - m) \ll \frac{ka_\Sigma}{2e_\Sigma},$$

$$* u_{mn} \text{ est un mode évanescent si } (u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2} \gg 0 \Leftrightarrow (n - m) \gg \frac{ka_\Sigma}{2e_\Sigma},$$

$$* u_{mn} \text{ est un mode rampant si } (u_{mn})^{-1} \frac{\partial^2 u_{mn}}{\partial \xi^2} \simeq 0 \Leftrightarrow (n - m) \simeq \frac{ka_\Sigma}{2e_\Sigma}.$$

□

Annexe E : Quelques pistes pour une minimisation du coefficient de réflexion

A Pour le problème en volume 2D

A.1 Prise en compte des modes rampants

La prise en compte des modes rampants par la condition absorbante utilisée est primordiale pour conclure à sa bonne performance. Cependant de nombreuses CLA ne les prennent pas en compte. Si cela est le cas, il existe des méthodes pour remédier à ce problème. On peut par exemple, ajouter une partie imaginaire positive au nombre d'onde qui devient $k_\varepsilon = k + i\varepsilon$ et trouver le paramètre de damping optimal ε_{opt} de façon à ce que ces rayons soient pris en compte par la CLA étudiée [15]. Nous allons dans ce paragraphe démontrer que les conditions DtN construites prennent bien en compte les rayons rampants en évaluant le coefficient de réflexion τ_m^{app} correspondant pour cette région en régime haute fréquence.

Afin de faciliter l'analyse qui suit, on considère que l'ellipse Σ est une dilatation de l'ellipse Γ . Leurs demi-axes principaux et secondaires respectives sont liés par les relations :

$$a_\Sigma = \lambda a_\Gamma \quad \text{et} \quad b_\Sigma = \lambda b_\Gamma, \quad \text{avec } \lambda > 1$$

De ce fait, on a vu au paragraphe 4 que $e_\Gamma = e_\Sigma$.

Pour plus de lisibilité, on notera dans tout ce qui suit, on notera : $e = e_\Gamma = e_\Sigma$, $a = a_\Gamma$ et $\lambda a = a_\Sigma$ avec $\lambda > 1$.

D'après le corollaire A.6, les modes u_m peuvent donc être classifiés comme suit :

Corollaire A.1 *A haute fréquence, le mode u_m est propagatif si $m \ll \frac{k\lambda a}{2e}$, évanescent si $m \gg \frac{k\lambda a}{2e}$ et rampant si $m \simeq \frac{k\lambda a}{2e}$.*

Nous allons ainsi étudier le comportement du coefficient de réflexion τ_m^{app} pour $m \simeq \frac{k\lambda a}{2e}$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$.

Nous avons démontré au chapitre 4 que l'on pouvait majorer en module $|\widetilde{d}_m^{inc}|$, l'équivalent de d_m^{inc} à haute fréquence. On obtient (cf lemme 5.1 Chap. 4) que lorsque $ka \rightarrow +\infty$,

$$|\widetilde{d}_m^{inc}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

Le coefficient d_m^{inc} est commun à tous les coefficients de réflexions quelle que soit la CLA considérée sur la frontière artificielle. Grâce au lemme précédent, nous allons pouvoir en déduire que $|\tau_m^{app}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4} f(e\lambda ka)$; où $f(e\lambda ka)$ est une fonction à déterminer dépendant des paramètres e , λ et ka et qui dépend de la condition aux limites absorbantes (CLA) étudiée. Nous aurons alors des indications sur la configuration géométrique à adopter pour que les modes rampants soient pris en compte. Dans un premier temps, nous allons étudier le comportement de τ_m^{app} dans la région des rayons rampants pour la condition DtN d'ordre 2 (3.36). Nous avons réussi à obtenir des résultats dans le cas de petites excentricités ($e \leq 0.5$).

Proposition A.2 *Si l'on suppose $0 < z_1 < z_2 < 1$ i.e $0 < \frac{2e}{\lambda} < 2e < 1$ ($e < 0.5$) :*

On montre que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$|\tau_{\frac{\lambda ka}{2e}}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4} \left| \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3}(\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} + i e^{-\frac{8}{3}(\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} \right| \quad (\text{A.119})$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

Puisque $\zeta_2^{3/2} < \zeta_1^{3/2}$, $|\tau_{\frac{\lambda ka}{2e}}| \rightarrow 0$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$. les rayons rampants sont bien pris en compte.

Démonstration : On rappelle que si l'on pose la condition DtN d'ordre 2 (3.36) sur la frontière artificielle Σ , le coefficient de réflexion s'écrit (cf Eq. (3.52)) :

$$\tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(eka, e^{-1})}{\frac{R_m^{(3)}(eka, e^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e\lambda ka, e^{-1})}{\Psi_m^{(3)}(ek\lambda a, e^{-1})} - R_m^{(4)}(eka, e^{-1})}$$

avec pour $j = 3, 4$ (cf (3.47)) :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) &= \left[R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \right] \end{aligned}$$

On pose $\delta_m = \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1}$ On obtient donc :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) &= \left(R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1}) + \delta_m R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \right) \\ &= R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \left[\delta_m + \frac{R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})} \right] \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le comportement de $\frac{R_m^{(j)'}}{R_m^{(j)}}(e\lambda ka, e^{-1})$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (cf Eqs. (1.22) du chap. 1 et (4.52) du chap. 2), on obtient :

$$\tau_m^{app} \sim \frac{d_m^{inc} J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka) \left[\frac{\frac{H_m^{(1)}(ka) H_m^{(2)}(\lambda ka)}{H_m^{(2)}(ka) H_m^{(1)}(\lambda ka)} \left[\frac{\delta_m + e\lambda ka \frac{H_m^{(2)'}}{H_m^{(2)}}(\lambda ka)}{H_m^{(2)}(\lambda ka)} \right]}{\frac{\delta_m + e\lambda ka \frac{H_m^{(1)'}}{H_m^{(1)}}(\lambda ka)}{H_m^{(1)}(\lambda ka)}} \right] - 1}$$

et donc pour les modes rampants $m \sim \frac{\lambda ka}{2e}$, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\tau_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{app} \sim \frac{d_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{inc} J_{\frac{\lambda ka}{2e}}(ka)}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(ka) \left[\frac{\frac{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}(ka) H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(ka) H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}(\lambda ka)} Q - 1 \right]}$$

avec

$$Q = \frac{\left[\frac{\delta_{\frac{\lambda ka}{2e}} + e\lambda ka \frac{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)'}}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}}(\lambda ka)}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(\lambda ka)} \right]}{\left[\frac{\delta_{\frac{\lambda ka}{2e}} + e\lambda ka \frac{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)'}}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}}(\lambda ka)}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}(\lambda ka)} \right]}$$

Nous allons commencer par étudier le comportement asymptotique de Q lorsque $ka \rightarrow +\infty$.

On sait d'après [1] (cf 9.3.6 p. 366 et 9.3.43-9.3.44 p 369) que si $\nu \rightarrow +\infty$ et $|\arg z| < \pi$, alors :

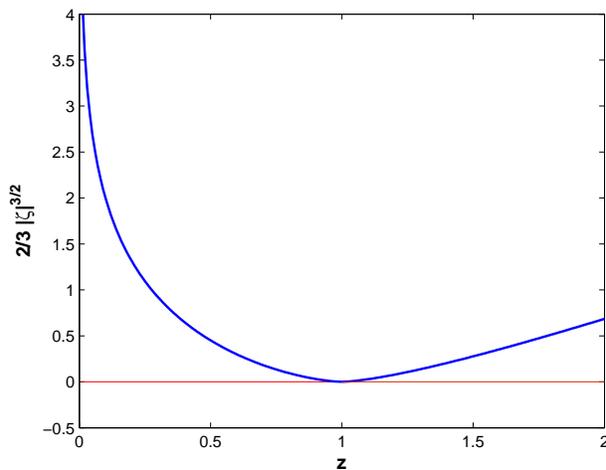
$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(\nu z) &\sim \left(\frac{4\zeta}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\nu^{1/3}} [\text{Ai}(\nu^{2/3}\zeta) - i\text{Bi}(\nu^{2/3}\zeta)] \\ H_\nu^{(2)}(\nu z) &\sim \left(\frac{4\zeta}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\nu^{1/3}} [\text{Ai}(\nu^{2/3}\zeta) + i\text{Bi}(\nu^{2/3}\zeta)] \\ H_\nu^{(1)'}(\nu z) &\sim -\frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta} \right)^{1/4} \frac{1}{\nu^{2/3}} [\text{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta) - i\text{Bi}'(\nu^{2/3}\zeta)] \\ H_\nu^{(2)'}(\nu z) &\sim -\frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta} \right)^{1/4} \frac{1}{\nu^{2/3}} [\text{Ai}'(\nu^{2/3}\zeta) + i\text{Bi}'(\nu^{2/3}\zeta)] \end{aligned} \tag{A.120}$$

Les fonctions Ai et Bi sont les fonctions d'Airy (cf p446 dans [1]).

et ζ est défini par :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} - \sqrt{1 - z^2} & \text{si } z \leq 1 \\ \frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2} = \sqrt{z^2 - 1} - \arccos \frac{1}{z} & \text{si } z > 1 \end{cases} \quad (\text{A.121})$$

Ces expressions sont choisies de telle sorte que lorsque z est positif ζ est réel. Dans notre cas, on considère soit $H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1),(2)}(ka)$, soit $H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1),(2)}(\lambda ka)$. En posant, $\nu = \frac{\lambda ka}{2e}$, on a donc soit $\nu z = ka$, soit $\nu z = \lambda ka$ ce qui donne soit $z = \frac{2e}{\lambda}$, soit $z = 2e$. On aura donc toujours $0 < z < 2$ puisque $0 < e < 1$ et $\lambda > 1$ et ζ est donc réel. Sur l'intervalle $]0; 2[$, $\frac{2}{3}|\zeta|^{3/2}$ a l'allure suivante :



On sait aussi, d'après [1] (cf (10.4.59), (10.4.61), (10.4.63) et (10.4.66) p. 448-449)

que si $|\arg(\nu^{2/3}\zeta)| < \frac{1}{3}\pi$ (ce qui est notre cas car ν et ζ sont réels), alors :

$$\text{Ai}(\nu^{2/3}\zeta) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}(\nu^{2/3}\zeta)^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)} \left(\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right]$$

$$\text{Bi}(\nu^{2/3}\zeta) \sim \pi^{-1/2}(\nu^{2/3}\zeta)^{-1/4}e^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)} \left(\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right]$$

$$\text{Ai}'(z) \sim \frac{-1}{2}\pi^{-1/2}(\nu^{2/3}\zeta)^{1/4}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-(6k+1)}{6k-1} \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)} \left(\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right]$$

$$\text{Bi}'(z) \sim \pi^{-1/2}(\nu^{2/3}\zeta)^{1/4}e^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(6k+1)}{6k-1} \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)} \left(\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}\right)^{-k} \right] \quad (\text{A.122})$$

On obtient alors, en combinant (A.120) et (A.122), que :

$$\frac{H_\nu^{(1)' }(\nu z)}{H_\nu^{(1)}(\nu z)} \sim \frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4} \right)^{1/2} \left(\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} + ie\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}}{\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} - ie\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)$$

$$\frac{H_\nu^{(2)' }(\nu z)}{H_\nu^{(2)}(\nu z)} \sim \frac{2}{z} \left(\frac{1-z^2}{4} \right)^{1/2} \left(\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} - ie\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}}{\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} + ie\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)$$

Si $z < 1$, $\frac{2}{3}\zeta^{3/2} \in \mathbb{R}^{+*}$ (cf Fig (A.1)), et donc lorsque $\nu \rightarrow +\infty$:

$$\frac{H_\nu^{(1)' }(\nu z)}{H_\nu^{(1)}(\nu z)} \sim \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \left(-1 + ie\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2} \right)$$

$$\frac{H_\nu^{(2)' }(\nu z)}{H_\nu^{(2)}(\nu z)} \sim \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \left(-1 - ie\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2} \right)$$

Pour obtenir le comportement de Q lorsque $ka \rightarrow +\infty$, il nous reste à obtenir celui de δ_m pour $m \sim \frac{\lambda ka}{2e}$. Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le coefficient δ_m se comporte comme suit :

$$\delta_m \sim -\frac{ie\lambda ka}{1 - \frac{i}{2\lambda ka}} \sim -ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} \quad (\text{A.123})$$

En effet, on rappelle que

$$\delta_m = \frac{\frac{R_0^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_0^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(a_1 - c_m) - \frac{R_1^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_1^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1}$$

Or, d'après l'étude des comportements asymptotiques des impédances déjà effectués (cf Chap. 2),

$$\frac{R_0^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_0^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{0|\Sigma}^{\text{ex2}}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

$$\frac{R_1^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_1^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{1|\Sigma}^{\text{ex2}}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

D'où

$$\delta_m \sim \frac{-ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

On obtient donc que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$Q \sim \frac{-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} + e\lambda ka \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \left(-1 + ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)}{-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} + e\lambda ka \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \left(-1 - ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)}$$

$$\sim 1$$

On reprend à présent les comportements donné par Eqs. (A.120) et (A.122) lorsque $\nu \rightarrow +\infty$, et on obtient :

$$\frac{H_\nu^{(2)}(\nu z)}{H_\nu^{(1)}(\nu z)} \sim \frac{\left(\frac{4}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} - ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)}{\left(\frac{4}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} + ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right)}$$

$$\sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} - ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}}}{\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} + ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}}}$$

Comme $\frac{2}{3}\zeta^{3/2} > 0$ (cf Fig (A.1)), lorsque $\nu \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{H_\nu^{(2)}(\nu z)}{H_\nu^{(1)}(\nu z)} &\sim \frac{-ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left(\frac{i}{2}e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} + 1 \right)}{ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left(\frac{-i}{2}e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} + 1 \right)} \\ &\sim -1 \left(1 + ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right) \\ \frac{H_\nu^{(1)}(\nu z)}{H_\nu^{(2)}(\nu z)} &\sim \frac{ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left(\frac{-i}{2}e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} + 1 \right)}{-ie^{\frac{2}{3}\nu\zeta^{3/2}} \left(\frac{i}{2}e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} + 1 \right)} \\ &\sim -1 \left(1 - ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta^{3/2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

On cherche à présent un équivalent de :

$$Q_1 = \frac{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}(ka) H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(ka) H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1)}(\lambda ka)} Q - 1$$

On va donc utiliser les résultats obtenus Eq. pour $\nu = \frac{\lambda ka}{2e}$ et pour :

$z_1 = \frac{2e}{\lambda}$ auquel on fait correspondre ζ_1 (et qui concerne $H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1),(2)}(ka)$), et

$z_2 = 2e$ auquel on fait correspondre ζ_2 (et qui concerne $H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(1),(2)}(\lambda ka)$).

Comme $\frac{2}{3}\zeta_1^{3/2}$ et $\frac{2}{3}\zeta_2^{3/2}$ sont toujours positifs (cf Fig. (A.1)) et $\frac{\lambda}{2e} > 0$, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} Q_1 &\sim \left(-1 + ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_1^{3/2}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta_1^{3/2}} \right) \left(-1 - ie^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} \right) \times 1 - 1 \\ &\sim \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta_1^{3/2}} + e^{-\frac{4}{3}\nu(\zeta_1^{3/2} + \zeta_2^{3/2})} + \frac{1}{16}e^{-\frac{8}{3}\nu(\zeta_1^{3/2} + \zeta_2^{3/2})} \right) \\ &\quad + i \left(e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_1^{3/2}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_1^{3/2} - \frac{8}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}\nu\zeta_1^{3/2} - \frac{4}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on a donc :

$$Q_1 \sim \frac{1}{16}e^{-\frac{8}{3}\nu(\zeta_1^{3/2} + \zeta_2^{3/2})} + i \left(e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{4}{3}\nu\zeta_1^{3/2}} \right)$$

Maintenant, si l'on note $\text{Denom} = H_{\frac{\lambda ka}{2e}}^{(2)}(ka)Q_1$, on a lorsque $ka \rightarrow +\infty$, pour $\nu = \frac{\lambda ka}{2e}$ et $z_1 = \frac{2e}{\lambda}$ (cf Eqs. (A.120) et (A.122)) :

$$\begin{aligned} \text{Denom} \sim & \left(\frac{4}{1 - \left(\frac{2e}{\lambda}\right)^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda ka}{2e} \pi}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} - i e^{\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} \right) \\ & \times \left[\frac{1}{16} e^{-\frac{8}{3} \nu (\zeta_1^{3/2} + \zeta_2^{3/2})} + i \left(e^{-\frac{4}{3} \nu \zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{4}{3} \nu \zeta_1^{3/2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.124})$$

Enfin, d'après [1] (cf (9.3.6) p. 366 et (10.4.59) p. 448), lorsque $\nu \rightarrow +\infty$ et $|\arg z| < \pi$

$$\begin{aligned} J_\nu(\nu z) & \sim \left(\frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}(\nu^{2/3} \zeta)}{\nu^{1/3}} \\ & \sim \left(\frac{4}{1 - z^2} \right)^{1/4} \frac{1}{2\sqrt{\nu\pi}} e^{-\frac{2}{3} \nu \zeta^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.125})$$

On a donc, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, pour $\nu = \frac{\lambda ka}{2e}$ et $z_1 = \frac{2e}{\lambda}$:

$$J_{\frac{\lambda ka}{2e}}(ka) \sim \left(\frac{4}{1 - \left(\frac{2e}{\lambda}\right)^2} \right)^{1/4} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda ka}{2e} \pi}} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} \quad (\text{A.126})$$

On a ainsi, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\frac{\lambda ka}{2e}}(ka)}{\text{Denom}} & \sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}}{\left[\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} - i e^{\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} \right] \left[\frac{1}{16} e^{-\frac{8}{3} \frac{\lambda ka}{2e} (\zeta_1^{3/2} + \zeta_2^{3/2})} + i \left(e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{4}{3} \nu \zeta_1^{3/2}} \right) \right]} \\ & \sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}}{\left[\frac{1}{32} e^{-\frac{10}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} - \frac{8}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} + e^{\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} - \frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} \right]} \\ & \quad + i \left[\frac{-1}{16} e^{-2 \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} - \frac{8}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} - \frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} - e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}} \right]} \\ & \sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}}{e^{\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} - \frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} - i e^{-\frac{2}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}} \end{aligned}$$

D'où, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{J_{\frac{\lambda ka}{2e}}(ka)}{\text{Denom}} \sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}}{e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} - i e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}} \quad (\text{A.127})$$

Dans le cas où $0 < z_1 < z_2 < 1$ i.e $0 < \frac{2e}{\lambda} < 2e < 1$ ($e < 0.5$), on sait d'après Fig. (A.1) que $\frac{2}{3} \zeta_2^{3/2} < \frac{2}{3} \zeta_1^{3/2}$, donc, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, Eq. (A.127) devient :

$$\begin{aligned} \frac{J_{\frac{\lambda ka}{2e}}(ka)}{\text{Denom}} &\sim \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2}}}{e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} \left(1 - i e^{-\frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_1^{3/2} + \frac{4}{3} \frac{\lambda ka}{2e} \zeta_2^{3/2}} \right)} \\ &\sim \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} \left(1 + i e^{-\frac{4}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} \right) \\ &\sim \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} + i e^{-\frac{8}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme (5.1), lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le coefficient d_m^{inc} est borné indépendamment du mode m et $|d_m^{inc}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4}$ avec $\kappa \approx 1.086435$.

Donc, lorsque $ka \rightarrow +\infty$,

$$|\tau_{\frac{\lambda ka}{2e}}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4} \left| \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} + i e^{-\frac{8}{3} (\zeta_1^{3/2} - \zeta_2^{3/2}) \frac{\lambda ka}{2e}} \right| \quad (\text{A.128})$$

Puisque $\zeta_2^{3/2} < \zeta_1^{3/2}$, $|\tau_{\frac{\lambda ka}{2e}}| \rightarrow 0$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$. les rayons rampants sont bien pris en compte. □

A.2 Prise en compte de modes particuliers

Nous avons réussi à obtenir des résultats pour les modes u_n tels que $n \sim \lambda ka > \frac{\lambda ka}{2e}$. Dans ce qui suit, on notera : $e = e_\Gamma = e_\Sigma$, $a = a_\Gamma$ et $\lambda a = a_\Sigma$ avec $\lambda > 1$.

Nous avons démontré précédemment (cf Lemme 5.1 Chap. 4), que lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on peut majorer en module $|\widetilde{d_m^{inc}}|$, un équivalent de d_m^{inc} à haute fréquence et on a :

$$|\widetilde{d_m^{inc}}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

Grâce au résultat obtenu au lemme 5.1, nous allons pouvoir en déduire que $|\tau_m^{app}| < 2 \kappa (\pi eka)^{1/4} f(e\lambda ka)$; où $f(e\lambda ka)$ est une fonction à déterminer dépendant des paramètres e , λ et ka et qui dépend de la condition aux limites absorbantes (CLA) étudiée.

Le coefficient d_m^{inc} est commun à tous les coefficients de réflexions quelle que soit la CLA considérée sur la frontière artificielle. On va donc dans un premier temps étudier le comportement de τ_m^{app} dans la région de rampants pour la condition DtN d'ordre 2 (3.36) puis on fera une remarque pour la condition DtN1 (3.19).

Lemme A.3 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$ et que le mode $m \simeq \lambda ka$, on a pour la condition DtN d'ordre 2 :*

$$\tau_{\lambda ka}^{app} \sim \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} d_{\lambda ka}^{inc} e^{-2\lambda ka (\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \quad (\text{A.129})$$

$$\text{où } \frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} > 0.$$

Démonstration : On rappelle maintenant que pour la condition DtN2e :

$$\tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(eka, e^{-1})}{\frac{R_m^{(3)}(eka, e^{-1}) \Psi_m^{(4)}(e\lambda ka, e^{-1})}{\Psi_m^{(3)}(ek\lambda a, e^{-1})} - R_m^{(4)}(eka, e^{-1})}$$

avec pour $j = 3, 4$ (cf (3.47)) :

$$\Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) = \left(R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1}) + \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1} R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \right)$$

$$\text{On pose } \delta_m = \frac{\alpha_{0|\Sigma}(a_1 - c_m) - \alpha_{1|\Sigma}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1}$$

On obtient donc :

$$\Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) = (R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1}) + \delta_m R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})) = R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \left[\delta_m + \frac{R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})} \right]$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on rappelle que le coefficient δ_m se comporte comme suit (cf (A.123)) :

$$\delta_m \sim -\frac{ie\lambda ka}{1 - \frac{i}{2\lambda ka}} \sim -ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka}$$

En effet, on rappelle que

$$\delta_m = \frac{\frac{R_0^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_0^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(a_1 - c_m) - \frac{R_1^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_1^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(a_0 - c_m)}{a_0 - a_1}$$

Or, d'après l'étude des comportements asymptotiques des impédances déjà effectués,

$$\frac{R_0^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_0^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{0|\Sigma}^{ex2}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

$$\frac{R_1^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_1^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{1|\Sigma}^{ex2}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

D'où

$$\delta_m \sim \frac{-ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}}$$

Donc, utilisant le comportement de $\frac{R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})}$ lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\tau_m^{app} \sim \frac{d_m^{inc} J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka) \left[\frac{H_m^{(1)}(ka) H_m^{(2)}(\lambda ka)}{H_m^{(2)}(ka) H_m^{(1)}(\lambda ka)} \left[\frac{\delta_m + e\lambda ka \frac{H_m^{(2)' }(\lambda ka)}{H_m^{(2)}(\lambda ka)}}{\delta_m + e\lambda ka \frac{H_m^{(1)' }(\lambda ka)}{H_m^{(1)}(\lambda ka)}} \right] - 1 \right]} \quad (\text{A.130})$$

On prend maintenant $m \simeq \lambda ka$:

$$\tau_{\lambda ka}^{app} \sim \frac{d_{\lambda ka}^{inc} J_{\lambda ka}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) \left[\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka) H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \left[\frac{\delta_{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}}{\delta_{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)}} \right] - 1 \right]} \quad (\text{A.131})$$

• Comportement des fonctions intervenant sur la frontière Γ lorsque $ka \rightarrow +\infty$ (cf 9.3.6 p366 dans [1]) :

$$J_{\lambda ka}(ka) \sim \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}} \quad (\text{A.132})$$

$$H_{\lambda ka}^{(1)}(ka) \sim \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta) - i \text{Bi}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}} \quad (\text{A.133})$$

$$H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) \sim \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta) + i \text{Bi}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}} \quad (\text{A.134})$$

où ζ est défini par (cf 9.3.38 p368 dans [1] et (A.121)) :

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}}{\frac{1}{\lambda}} \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}$$

Les fonctions Ai et Bi sont les fonctions d'Airy (cf p446 dans [1]).

On peut en déduire que :

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka)} \sim \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta) - i \text{Bi}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta) + i \text{Bi}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)} \quad (\text{A.135})$$

Or, d'après 10.4.9 p446, on a :

$$\text{Ai}(z) \mp i \text{Bi}(z) = 2e^{\mp i\pi/3} \text{Ai}(ze^{\pm i2\pi/3}) \quad (\text{A.136})$$

Donc, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka)} \sim \frac{e^{-i\pi/3} \text{Ai}(\zeta e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})}{e^{i\pi/3} \text{Ai}(\zeta e^{-i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})} \sim e^{-i2\pi/3} \frac{\text{Ai}(\zeta e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})}{\text{Ai}(\zeta e^{-i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})}$$

ζ étant un réel (cf (A.121)), on peut utiliser la propriété 10.4.59 p448 dans [1], qui est valable lorsque $|\arg z| < \pi$:

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(3k+1/2)}{54^k k! \Gamma(k+1/2)} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right)^{-k} \right)$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on en déduit que :

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \quad (\text{A.137})$$

Ainsi, on obtient l'équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka)} &\sim e^{-i2\pi/3} \frac{(\zeta e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}(\zeta e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})^{3/2}}}{(\zeta e^{-i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}(\zeta e^{-i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3})^{3/2}}} \\ &\sim e^{-i2\pi/3} \frac{e^{-i\pi/6}}{e^{i\pi/6}} \frac{e^{-\frac{2}{3}(\zeta^{3/2} e^{i\pi} \lambda ka)}}{e^{-\frac{2}{3}(\zeta^{3/2} e^{-i\pi} \lambda ka)}} \sim e^{-i\pi} \\ &\sim -1 \end{aligned}$$

• Comportement des fonctions intervenant sur la frontière Σ lorsque $ka \rightarrow +\infty$ [1] :

$$\begin{aligned} H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka) &\sim \frac{2^{1/3}(1 - i\sqrt{3})}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}} \\ H_{\lambda ka}^{(1)'}(\lambda ka) &\sim \frac{2^{2/3}(1 + i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \\ H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka) &\sim \frac{2^{1/3}(1 + i\sqrt{3})}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}} \\ H_{\lambda ka}^{(2)'}(\lambda ka) &\sim \frac{2^{2/3}(1 - i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma (cf [1]).

On en déduit alors que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{1/3}(1+i\sqrt{3})}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1-i\sqrt{3})} \sim \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \sim \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.139})$$

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{2/3}(1-i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1+i\sqrt{3})} \sim \frac{2^{1/3}3^{1/3}}{(\lambda ka)^{1/3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \quad (\text{A.140})$$

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{2/3}(1+i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1-i\sqrt{3})} \sim \frac{2^{1/3}3^{1/3}}{(\lambda ka)^{1/3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad (\text{A.141})$$

$$\text{On note : } Q_1 = \left[\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka) H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \frac{\left[\delta_{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)} \right]}{\left[\delta_{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \right]} - 1 \right],$$

$$\text{et } Q_2 = \left[\frac{\left(-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} \right) + \left(\frac{6}{\lambda ka} \right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}{\left(-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} \right) + \left(\frac{6}{\lambda ka} \right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}} \right].$$

De tout ce qui précède, on peut déduire que Q_2 se comporte, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, de la façon suivante :

$$Q_1 \sim -1 \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) Q_2 \quad (\text{A.142})$$

Or lorsque $ka \rightarrow +\infty$, on vérifie que :

$$Q_2 = \left[\frac{\left(-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} \right) + \left(\frac{6}{\lambda ka} \right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}{\left(-ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka} \right) + \left(\frac{6}{\lambda ka} \right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}} \right] \sim 1$$

Donc

$$Q_1 \sim \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right) \sim e^{-i2\pi/3}$$

Ainsi le dénominateur du coefficient τ_m^{app} (noté *Denom*) se comporte, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, comme suit :

$$\begin{aligned}
 Denom &\sim e^{-i2\pi/3} \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta) - i \text{Bi}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}} \\
 &\sim 2e^{-i2\pi/3} \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{e^{-i\pi/3}}{(\lambda ka)^{1/3}} \text{Ai}(e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3}\zeta) \\
 &\sim \frac{-2}{(\lambda ka)^{1/3}} \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \text{Ai}(e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3}\zeta)
 \end{aligned} \tag{A.143}$$

Afin d'obtenir un équivalent de $\tau_{\lambda ka}^{app}$, nous utilisons (A.132) et (A.137), qui donnent le comportement de $J_{\lambda ka}(ka)$:

$$\begin{aligned}
 J_{\lambda ka}(ka) &\sim \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}} \\
 &\sim \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\frac{1}{2}\pi^{-1/2} ((\lambda ka)^{2/3}\zeta)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)^{3/2}}}{(\lambda ka)^{1/3}}
 \end{aligned} \tag{A.144}$$

et on obtient donc pour $\tau_{\lambda ka}^{app}$:

$$\begin{aligned}
 \tau_{\lambda ka}^{app} &\sim \frac{d_{\lambda ka}^{inc} \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}}}{-2 \left(\frac{4\zeta}{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}(e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{(\lambda ka)^{1/3}}} \\
 &\sim \frac{d_{\lambda ka}^{inc} \text{Ai}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)}{-2 \text{Ai}(e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3}\zeta)} \\
 &\sim \frac{d_{\lambda ka}^{inc}}{-2} \frac{\frac{1}{2} \pi^{-1/2} ((\lambda ka)^{2/3}\zeta)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}((\lambda ka)^{2/3}\zeta)^{3/2}}}{\frac{1}{2} \pi^{-1/2} (e^{i2\pi/3}(\lambda ka)^{2/3}\zeta)^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}((\lambda ka)^{2/3}\zeta e^{i2\pi/3})^{3/2}}} \\
 &\sim d_{\lambda ka}^{inc} \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} \frac{e^{-\frac{2}{3}(\lambda ka \zeta^{3/2})}}{e^{\frac{2}{3}(\lambda ka \zeta^{3/2})}} \\
 &\sim \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} d_{\lambda ka}^{inc} e^{-2\lambda ka (\frac{2}{3}\zeta^{3/2})}
 \end{aligned} \tag{A.145}$$

□

Grâce aux lemmes précédents (5.1) et (A.3), on en déduit la propriété suivante :

Proposition A.4 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, $\lambda > 1$ et que le mode $m \simeq \lambda ka$, on a pour la condition DtN d'ordre 2 :*

$$|\tau_{\lambda ka}^{app}| < \kappa (\pi eka)^{1/4} e^{-2\lambda ka (\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \tag{A.146}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$ et $\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} > 0$.

La proposition (A.4) montre donc que si $\lambda > 1$, $\lim_{ka \rightarrow +\infty} \tau_{\lambda ka}^{app} = 0$. On remarque que la décroissance est exponentielle et que le paramètre de décroissance dépend de λ .

Remarque A.5 *On peut établir une proposition comparable pour la condition DtN d'ordre 1. En effet, on rappelle que pour cette CLA, le coefficient de réflexion s'écrit :*

$$\tau_m^{app} = \frac{d_m^{inc} R_m^{(1)}(eka, e^{-1})}{\frac{R_m^{(3)}(eka, e^{-1}) \Upsilon_m^{(4)}(e\lambda ka, e^{-1})}{\Upsilon_m^{(3)}(ek\lambda a, e^{-1})} - R_m^{(4)}(eka, e^{-1})}$$

avec pour $j = 3, 4$ (cf (3.29)) :

$$\Upsilon_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) = R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1}) - \alpha_{0|\Sigma} R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) = R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \left[-\alpha_{0|\Sigma} + \frac{R_m^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_m^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})} \right]$$

Or lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\alpha_{0|\Sigma} = \frac{R_0^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_0^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{0|\Sigma}^{\text{ex}2}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{2\lambda ka}} \sim ie\lambda ka + \frac{e}{2} + \frac{ie}{4\lambda ka}$$

Pour de grandes fréquences ($ka \rightarrow +\infty$), $(-\alpha_{0|\Sigma})$ a donc le même comportement asymptotique que le coefficient δ_m introduit lors de l'étude de la condition DtN2 (A.123). Cela implique que les opérateurs $\Upsilon_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1})$ et $\Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1})$, contenant respectivement les conditions DtN1 et DtN2, ont le même comportement asymptotique dans ce cas là. Ainsi les coefficients de réflexions des deux conditions vont eux aussi se comporter de façon identique dans la région des modes rampants. On peut donc écrire :

Proposition A.6 Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, $\lambda > 1$ et que le mode $m \simeq \lambda ka$, on a pour la condition DtN1 :

$$|\tau_{\lambda ka}^{\text{app}}| < \kappa (\pi eka)^{1/4} e^{-2\lambda ka(\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \quad (\text{A.147})$$

$$\text{avec } \kappa \approx 1.086435 \text{ et } \frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} > 0.$$

En choisissant des modes particuliers ($m \simeq \lambda ka$), nous avons pu exploiter des comportements asymptotiques particuliers des fonctions de Bessel. on obtient ainsi une allure plus précise du coefficient de réflexion, en comparaison à la majoration réalisée au chapitre 4. On peut observer que lorsque $e > 0.5$, les modes considérés sont des modes évanescents. Les propositions A.4 et A.6 viennent donc en complément des résultats du chapitre 4 où on ne considérait que des modes propagatifs.

B Prise en compte de modes particuliers pour le problème en volume 3D

Nous avons réussi à obtenir des résultats pour les modes tels que $n \sim \lambda ka$ et $m \in \mathbb{N}, m \leq n$.

Dans les résultats qui suivent, on notera : $e = e_\Gamma = e_\Sigma$, $a = a_\Gamma$ et $\lambda a = a_\Sigma$ avec $\lambda > 1$.

Nous avons démontré au chapitre 5 que l'on pouvait majorer en module $|\widetilde{d_{mn}^{\text{inc}}}|$ où $\widetilde{d_{mn}^{\text{inc}}}$ désigne un équivalent de d_{mn}^{inc} à haute fréquence. On obtient (cf lemme 5.1 Chap.

5) que lorsque $ka \rightarrow +\infty$,

$$|\widetilde{d_{mn}^{inc}}| < 4\kappa \left(\frac{\sqrt{eka}}{\pi} \right)^{1/4}$$

avec $\kappa \approx 1.086435$.

Grâce au lemme précédent, nous allons pouvoir en déduire que :

$$|\tau_{mn}^{app}| < 4\kappa \left(\frac{\sqrt{eka}}{\pi} \right)^{1/4} f(e\lambda ka)$$

où $f(e\lambda ka)$ est une fonction à déterminer dépendant des paramètres e , λ et ka et de la condition aux limites absorbante posée sur Σ , si $n \simeq \lambda ka$.

Nous allons commencer par étudier le comportement du coefficient de réflexion τ_{mn}^{app} pour des modes $n \simeq \lambda ka$ pour la CLA DtN2, puis nous mentionnerons remarque, les résultats obtenus pour la condition DtN1.

Lemme B.1 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$ et que le mode $n \simeq \lambda ka$, on a pour la condition DtN2 :*

$$\tau_{m\lambda ka}^{app} \sim \widetilde{\tau_{m\lambda ka}^{app}} = \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} d_{m\lambda ka}^{inc} e^{-2\lambda ka(\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \quad (\text{B.148})$$

Démonstration : On rappelle maintenant que, dans le cas de la condition DtN2 :

$$\tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \Psi_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})}{\Psi_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})} - R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma}ka_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}$$

avec pour $j = 3, 4$ (cf (3.49)) :

$$\Psi_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) = R_{mn}^{(j)'}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}} R_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})$$

$$\text{On pose } \delta_{mn} = \frac{r_{00|\Sigma}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - r_{01|\Sigma}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1}) &= R_{mn}^{(j)'}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) + \delta_{mn} R_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma}ka_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \\ &= R_{mn}^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1}) \left[\delta_{mn} + \frac{R_{mn}^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{mn}^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})} \right] \end{aligned}$$

Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, le coefficient δ_{mn} se comporte comme suit :

$$\delta_{mn} \sim -\frac{ie\lambda ka}{1 - \frac{i}{\lambda ka}} \sim -ie\lambda ka + e + \frac{ie}{\lambda ka} \quad (\text{B.149})$$

En effet, on rappelle que

$$\delta_{mn} = \frac{\frac{R_{00}^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{00}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(\lambda_{01} - \lambda_{mn}) - \frac{R_{01}^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{01}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})}(\lambda_{00} - \lambda_{mn})}{\lambda_{00} - \lambda_{01}}$$

Or, d'après l'étude des comportements asymptotiques des impédances déjà effectués,

$$\frac{R_{00}^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{00}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{00|\Sigma}^{\text{ex3}}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{\lambda ka}}$$

$$\frac{R_{01}^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{01}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{01|\Sigma}^{\text{ex3}}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{\lambda ka}}$$

D'où

$$\delta_{mn} \sim \frac{-ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{\lambda ka}}$$

De plus, on sait d'après [20] que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} R_{mn}^{(1)}(eka, e^{-1}) &\sim j_n(ka) \\ R_{mn}^{(3)}(eka, e^{-1}) &\sim h_n^{(1)}(ka) \quad R_{mn}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1}) \sim h_n^{(1)}(\lambda ka) \\ R_{mn}^{(4)}(eka, e^{-1}) &\sim h_n^{(2)}(ka) \quad R_{mn}^{(4)}(e\lambda ka, e^{-1}) \sim h_n^{(2)}(\lambda ka) \end{aligned}$$

où les fonctions j_n sont les fonctions de Bessel sphériques de 1^{ère} espèce et $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ les fonctions de Bessel sphériques de 3^{ème} espèce (cf Chap. 10 p 435 [1]).

Donc, utilisant le résultat (cf Chap.5) :

$$\frac{R_{mn}^{(j)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{mn}^{(j)}(e\lambda ka, e^{-1})} \sim e\lambda ka \frac{h_n^{(j-2)' }(\lambda ka)}{h_n^{(j-2)}(\lambda ka)}$$

, pour $j = 3, 4$ et lorsque $ka \rightarrow +\infty$

$$\tau_{mn}^{\text{app}} \sim \frac{d_{mn}^{\text{inc}} j_n(ka)}{h_m^{(2)}(ka) \left[\frac{h_n^{(1)}(ka) h_n^{(2)}(\lambda ka)}{h_n^{(2)}(ka) h_n^{(1)}(\lambda ka)} \left[\frac{\delta_{mn} + e\lambda ka \frac{h_n^{(2)' }(\lambda ka)}{h_n^{(2)}(\lambda ka)}}{\delta_{mn} + e\lambda ka \frac{h_n^{(1)' }(\lambda ka)}{h_n^{(1)}(\lambda ka)}} \right] - 1 \right]}$$

Or, d'après (p. 437 dans [1]), on a :

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z) \\ h_n^{(1)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(1)}(z) \\ h_n^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(2)}(z) \end{aligned}$$

où les fonctions J_n , $H_n^{(1)}$ et $H_n^{(2)}$ sont les fonctions de Bessel (cf Chap. 9 p 355 [1]) et ont été définies au chapitre 4.

On en déduit donc, grâce aux propriétés que l'on connaît sur les fonctions de Bessel, que :

$$\frac{h_n^{(1)'}(z)}{h_n^{(1)}(z)} = \frac{H_{n+1/2}^{(1)'}(z)}{H_{n+1/2}^{(1)}(z)} - \frac{1}{2z}$$

$$\frac{h_n^{(2)'}(z)}{h_n^{(1)}(z)} = \frac{H_{n+1/2}^{(2)'}(z)}{H_{n+1/2}^{(2)}(z)} - \frac{1}{2z}$$

Il découle de tout ce qui précède que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\tau_{mn}^{app} \sim \frac{d_{mn}^{inc} J_{n+1/2}(ka)}{H_{n+1/2}^{(2)}(ka) \left[\frac{H_{n+1/2}^{(1)}(ka) H_{n+1/2}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{n+1/2}^{(2)}(ka) H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda ka)} \left[\frac{\delta_{mn} + e\lambda ka \left(\frac{H_{n+1/2}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{n+1/2}^{(2)}(\lambda ka)} - \frac{1}{2\lambda ka} \right)}{\delta_{mn} + e\lambda ka \left(\frac{H_{n+1/2}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda ka)} - \frac{1}{2\lambda ka} \right)} \right] - 1 \right]}$$

On prend maintenant $n + 1/2 \sim \lambda ka$ avec $ka \rightarrow +\infty$ (donc $n \sim n + 1/2$) :

$$\tau_{m\lambda ka}^{app} \sim \frac{d_{m\lambda ka}^{inc} J_{\lambda ka}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) \underbrace{\left[\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka) H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{n+1/2}^{(2)}(ka) H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \underbrace{\left[\frac{-ie\lambda ka + \frac{\epsilon}{2} + \frac{ie}{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}}{-ie\lambda ka + \frac{\epsilon}{2} + \frac{ie}{\lambda ka} + e\lambda ka \frac{H_{\lambda ka}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)}} \right]}_{A_2} \right]}_{A_1} - 1}$$

D'après les comportements asymptotiques déjà obtenus au paragraphe A.2 de cette annexe , on sait que :

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(1)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{2/3}(1 + i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1 - i\sqrt{3})} \sim \frac{2^{1/3}3^{1/3}}{(\lambda ka)^{1/3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(2)' }(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{2/3}(1 - i\sqrt{3})}{3^{1/3}\Gamma(1/3)(\lambda ka)^{2/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1 + i\sqrt{3})} \sim \frac{2^{1/3}3^{1/3}}{(\lambda ka)^{1/3}} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}$$

On en déduit que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$A_2 \sim \frac{-ie\lambda ka + \frac{\epsilon}{2} + \frac{ie}{\lambda ka} + \left(\frac{6}{\lambda ka}\right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}}{-ie\lambda ka + \frac{\epsilon}{2} + \frac{ie}{\lambda ka} + \left(\frac{6}{\lambda ka}\right)^{1/3} e\lambda ka \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}} \sim 1$$

On sait aussi, toujours d'après le paragraphe A.2 de cette annexe que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(1)}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka)} \sim -1$$

$$\frac{H_{\lambda ka}^{(2)}(\lambda ka)}{H_{\lambda ka}^{(1)}(\lambda ka)} \sim \frac{2^{1/3}(1+i\sqrt{3})}{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)(\lambda ka)^{1/3}}{2^{1/3}(1-i\sqrt{3})} \sim \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \sim \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

On obtient donc que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$A_1 \sim \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right) \sim e^{-i2\pi/3}$$

Enfin, on a montré au paragraphe A.2 de cette annexe que lorsque $ka \rightarrow +\infty$:

$$\frac{J_{\lambda ka}(ka)}{H_{\lambda ka}^{(2)}(ka) A_1} \sim \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} e^{-2\lambda ka(\frac{2}{3}\zeta^{3/2})}$$

Ainsi, on obtient que, lorsque $ka \rightarrow +\infty$, $\tau_{m\lambda ka}^{app}$ admet comme équivalent $\widetilde{\tau_{m\lambda ka}^{app}}$ qui a pour expression :

$$\widetilde{\tau_{m\lambda ka}^{app}} = \frac{-1}{2e^{-i\pi/6}} \widetilde{d_{m\lambda ka}^{inc}} e^{-2\lambda ka(\frac{2}{3}\zeta^{3/2})}$$

où $\widetilde{d_{m\lambda ka}^{inc}}$ est, on le rappelle, un équivalent de d_{mn}^{inc} pour $n \simeq \lambda ka$.

□

Grâce aux lemmes précédents (5.1) et (B.1), on en déduit la propriété suivante :

Proposition B.2 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$ et que le mode est tel que $n \simeq \lambda ka$ ($\lambda > 1$) et $m \in \mathbb{N}, m \leq n$, dans le cas de la condition DtN2, on a :*

$$|\widetilde{\tau_{m\lambda ka}^{app}}| < 2\kappa \left(\frac{\sqrt{eka}}{\pi} \right)^{1/4} e^{-2\lambda ka(\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \quad (\text{B.150})$$

avec $\kappa \approx 1.086435$ et $\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} > 0$ (cf paragraphe A.1 de cette annexe).

La proposition précédente (B.2) prouve que $\lim_{ka \rightarrow +\infty} \tau_{m\lambda ka}^{app} = 0$ ($\lambda > 1$). On remarque que la décroissance est exponentielle et que le paramètre de décroissance dépend de λ .

Remarque B.3 *On peut établir une proposition comparable pour la condition DtN1. On rappelle que pour cette CLA, le coefficient de réflexion s'écrit :*

$$\tau_{mn}^{app} = \frac{d_{mn}^{inc} R_{mn}^{(1)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}{\frac{R_{mn}^{(3)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1}) \Upsilon_{mn}^{(4)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})}{\Upsilon_{mn}^{(3)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1})} - R_{mn}^{(4)}(e_{\Gamma} k a_{\Gamma}, e_{\Gamma}^{-1})}$$

avec pour $j = 3, 4$ (cf (3.32)) :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) &= R_{mn}^{(j)'}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) - r_{00}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) R_{mn}^{(j)}(e_{\Sigma} k a_{\Sigma}, e_{\Sigma}^{-1}) \\ &= R_{mn|\Sigma}^{(j)} \left[-r_{00|\Sigma} \frac{R_{mn|\Sigma}^{(j)'}}{R_{mn|\Sigma}^{(j)}} \right] \end{aligned}$$

Or lorsque $ka \rightarrow +\infty$, sur Σ :

$$r_{00|\Sigma} = \frac{R_{00}^{(3)'}(e\lambda ka, e^{-1})}{R_{00}^{(3)}(e\lambda ka, e^{-1})} = \frac{ie\lambda ka}{Z_{00|\Sigma}^{ex3}} \sim \frac{ie\lambda ka}{1 - i\frac{1}{\lambda ka}} \sim ie\lambda ka - e - \frac{ie}{\lambda ka}$$

Pour de grandes fréquences ($ka \rightarrow +\infty$), $(-r_{00|\Sigma})$ a donc le même comportement asymptotique que le coefficient δ_{mn} introduit lors de l'étude de la condition DtN2 (B.149). Cela implique que les opérateurs $\Upsilon_{mn}^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1})$ et $\Psi_{mn}^{(j)}(ek\lambda a, e^{-1})$, contenant respectivement les conditions DtN1 et DtN2, ont le même comportement asymptotique dans ce cas là. Ainsi les coefficients de réflexions des deux conditions vont eux aussi se comporter de façon identique pour les modes tels que $n \simeq \lambda ka$ et $m \ll \frac{\lambda ka}{2e}$.

On peut donc écrire :

Proposition B.4 *Lorsque $ka \rightarrow +\infty$, $\lambda > 1$ et que les modes tels que $n \simeq \lambda ka$ ($\lambda > 1$) et $m \in \mathbb{N}, m \leq n$, on a pour la condition DtN1 :*

$$|\widetilde{\tau_{m\lambda ka}^{app}}| < 2\kappa \left(\frac{\sqrt{eka}}{\pi} \right)^{1/4} e^{-2\lambda ka (\frac{2}{3}\zeta^{3/2})} \quad (\text{B.151})$$

$$\text{avec } \kappa \approx 1.086435 \text{ et } \frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \ln \left(\lambda \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} > 0.$$

Les résultats présentés aux propositions B.2 et B.4 sont valables pour $n \simeq \lambda ka$, $\lambda > 1$ et quel que soit l'entier naturel m dans $[0, n]$. En utilisant la classification des modes donnée dans l'annexe D, on observe que les propositions B.2 et B.4 donnent des informations sur le comportement de $|\tau_{mn}^{app}|$ à haute fréquence pour des modes propagatifs, ce qui affine les résultats du chapitre 5 mais aussi pour des modes évanescents et rampants. En effet, on a en fixant $n \simeq \lambda ka$ ($\lambda > 1$),

- Si $e > 0.5$ et $n \geq m \gg \left(\frac{2e-1}{2e}\right) \lambda ka$, le mode est propagatif,
- Si $e > 0.5$ et $m \ll \left(\frac{2e-1}{2e}\right) \lambda ka$, le mode est évanescent,
- Si $e > 0.5$ et $m \simeq \left(\frac{2e-1}{2e}\right) \lambda ka$, le mode est rampant.

Références

- [1] M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.
- [2] X. ANTOINE, *Conditions de radiation sur le bord*, Thèse de Doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 1997.
- [3] X. ANTOINE, H. BARUCQ, A. BENDALI, *Bayliss-Turkel-like radiation conditions on surface of arbitrary shape*, J. Math. Anal. Appl., 229 (1), 184–211, 1999.
- [4] X. ANTOINE, *Fast approximate computation of a time-harmonic scattered field using the On-Surface Radiation Condition method*, IMA J. Appl. Math., 66 (1), 83–110, 2001.
- [5] X. ANTOINE, M. DARBAS, Y.Y. LU, *An improved surface radiation condition for high-frequency acoustic scattering problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (33-36), 4060–4074, 2006.
- [6] A. ATLE, B. ENQUIST, *On surface radiation conditions for high-frequency wave scattering*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 204, 306–316, 2007.
- [7] H. BARUCQ, R. DJELLOULI, A. SAINT-GUIRONS, *Construction and performance analysis of local DtN absorbing boundary conditions for exterior Helmholtz problems. Part I : Elliptical shaped boundaries*, INRIA Research Report, No. 6394 (2007). Available online at : <http://hal.inria.fr/inria-00180471/fr/>.
- [8] H. BARUCQ, R. DJELLOULI, A. SAINT-GUIRONS, *Construction and performance analysis of local DtN absorbing boundary conditions for exterior Helmholtz problems. Part II : Prolate spheroid boundaries*, INRIA Research Report, No.6395 (2007). Available online at : <http://hal.inria.fr/inria-00180475/fr/>.
- [9] A. BAYLISS, M. GUNZBERGER, E. TURKEL, *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, SIAM J. Appl. Math., 42 (2), 430–451, 1982.
- [10] J.J. BOWMAN, T.B.A. SENIOR, P.L.E. USLENGHI, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1969.
- [11] D.C. CALVO, M.D. COLLINS, D.K. DALCO, *A higher-order on-surface radiation condition derived from an analytic representation of a Dirichlet-to-Neumann map*, IEEE Trans. Ant. Prop., 51, 1607–1614, 2003.
- [12] G. CHEN, J. ZHOU, *Boundary element methods*, Academic Press, Harcourt Brace, Jovanovitch Publishers, 1992.
- [13] D. COLTON, R. KRESS, *Integral Equations in Scattering Theory*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York, 1983.

-
- [14] R.G. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, T.2 L'Opérateur de Laplace*, Masson, 1998.
- [15] M. DARBAS, *Préconditionneurs analytiques de type Calderon pour les formulations intégrales des problèmes de diffraction d'ondes*, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse 1 et Toulouse 3, INSA Toulouse, 2004.
- [16] E. DARRIGRAND, *Couplage méthodes multipôles rapides et discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, 2002.
- [17] R. DJELLOULI, C. FARHAT, A. MACEDO, R. TEZAU, *Finite element solution of two-dimensional acoustic scattering problems using arbitrarily shaped convex artificial boundaries*, *Journal of Computational Acoustic*, 8 (1), 81–99, 2000.
- [18] B. ENGQUIST, A. MAJDA, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, *Math. Comp.*, 31, 629–651, 1977.
- [19] B. ENGQUIST, A. MAJDA, *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32 (3), 314–358, 1979.
- [20] C. FLAMMER, *Spheroidal Functions*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1957.
- [21] T.L. GEERS, *Doubly asymptotic approximations for transient motions of submerged structures*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 64 (5), 1500–1508, 1978.
- [22] T.L. GEERS, *Third-order doubly asymptotic approximations for computational acoustics*, *J. Comput. Acoust.*, 8 (1), 101–120, 2000.
- [23] D. GIVOLI AND J.B. KELLER, *A finite-element method for large domains*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 76, 41–66, 1989.
- [24] D. GIVOLI AND J.B. KELLER, *Nonreflecting boundary conditions for elastic waves*, *Wave Motion*, 12(3), 261–279, 1990.
- [25] D. GIVOLI, *Non-reflecting boundary conditions : a review*, *J. Comput. Phys.*, 94, 1–29, 1991.
- [26] D. GIVOLI, *Numerical Methods For Problems in Infinite Domains*, *Studies in Applied Mechanics*, 33, 1992.
- [27] D. GIVOLI, S. VIGDERGAUZ, *Artificial boundary conditions for 2D problems in geophysics*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 110, 87–101, 1993.
- [28] D. GIVOLI, I. PATLASHENKO, J.B. KELLER, *High-order boundary conditions and finite elements for infinite domains*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 143, 13–39, 1997.
- [29] D. GIVOLI, *Exact representations on artificial interfaces and applications in mechanics*, *AMR*, 52 (11), 333–349, 1999.

-
- [30] D. GIVOLI, *High-order local non-reflecting boundary conditions : a review*, Wave Motion, 39, 319–326, 2004.
- [31] M.J. GROTE, J.B. KELLER, *On nonreflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys., 122 (2), 231–243, 1995.
- [32] M.J. GROTE, J.B. KELLER, *Nonreflecting boundary conditions for time-dependent scattering*, J. Comp., Phys., 127 (1), 52–65, 1996.
- [33] B. GUSTAFSSON, *Far-field boundary conditions for time-dependent hyperbolic systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 9, 812–828, 1988.
- [34] J.C. GUTIERREZ-VEGA, S. CHAVEZ-CERDA, A. MENESES-NAVA, R.M. RODRIGUEZ-DAGNINO, *Theory and numerical analysis of the Mathieu functions*, Tecnologico de Monterey, NL, Mexico, 2003.
- [35] T. HAGSTROM, *Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Acta Numer., 8, 47–106, 1999.
- [36] T. HAGSTROM, A. MAR-OR, D. GIVOLI, *High-order local absorbing boundary conditions for the wave equation : Extensions and improvements*, Journal of Computational Physics, 227, 3322–3357, 2008.
- [37] L. HALPERN, *Artificial boundary conditions for incompletely parabolic perturbations of hyperbolic systems*, SIAM J. Math. Anal., 22, 1256–1283, 1991.
- [38] I. HARARI, *Computational methods for Problems of Acoustics with Particular Reference to Exterior Domains*, PhD thesis, Stanford university, May 1991.
- [39] I. HARARI, T.J.R. HUGHES, *Analysis of continuous formulations underlying the computation of time-harmonic acoustics in exterior domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 97 (1), 103–124, 1992.
- [40] I. HARARI, *A variationnal formulation for partitioned exterior problems*, IUTAM Symposium on Computational Methods for Unbounded domains, Proceedings of the IUTAM Symposium held in Boulder, Colorado, USA, July 27-31 1997, T.L. Geers, ed, 187–196, 1998.
- [41] I. HARARI, R. DJELLOULI, *Analytical study of the effect of wave number on the performance of local absorbing boundary conditions for acoustic scattering*, Applied Numerical Mathematics, 50, 15-47, 2004.
- [42] R.L. HIGDON, *Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation*, Math. Comp., 47, 437–459, 1986.
- [43] L. KALLIVOKAS, S. LEE, *Local absorbing boundaries of elliptical shape for scalar waves*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193, 4979–5015, 2004.
- [44] L. KALLIVOKAS, S. LEE, *Ellipsoidally-shaped local absorbing boundaries for three-dimensional scalar wave propagation*, Comput. Mech., 35, 11–23, 2004.

-
- [45] J.B. KELLER, D. GIVOLI, *Exact nonreflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys., 82 (1), 172–192, 1989.
- [46] G.A. KRIEGSMANN, A. TAFLOVE, K.R. UMASHANKAR, *A new formulation of electromagnetic wave scattering using an on-surface radiation boundary condition approach*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, 35 (2), 153–161, 1987.
- [47] P.D. LAX, R.S. PHILLIPS, *Scattering theory*, Academic Press, 1967.
- [48] E. MATHIEU, *Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville), 13, 137–203, 1968.
- [49] N.W. MCLACHLAN, *Theory and application of Mathieu functions*, Oxford University Press, London, 1947.
- [50] M. MEDVINSKY, E. TURKEL, U. HETMANIUK, *Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries*, J. Comput. Phys., in press, 2008.
- [51] J. MEIXNER, F.W. SCHAFLE, *Matieusche funktionen and spharoidfunktionen*, Springer Verlag, Berlin, 1954.
- [52] M. NIGSCH, *Numerical studies of time-independent and time-dependent scattering by several elliptical cylinders*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 204, 231–241, 2007.
- [53] P. POINCELOT, *Précis d'électromagnétisme théorique*, Paris, Dunod, 1963.
- [54] R.C. REINER, R. DJELLOULI, I. HARARI, *The performance of local absorbing boundary conditions for acoustic scattering from elliptical shapes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 195, 3622–3665, 2006.
- [55] R.C. REINER, R. DJELLOULI, *Improvement of the performance of the BGT2 condition for low frequency acoustic scattering problems*, Wave Motion, 43, 406–424, 2006.
- [56] A.J. SAFJAN, *Highly accurate non-reflecting boundary conditions for finite element simulation of transient acoustic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 152, 175–193, 1998.
- [57] T.B.A. SENIOR, *Scalar diffraction by a prolate spheroid at low frequencies*, Canad. J. Phys., 38 (7), 1632–1641, 1960.
- [58] I.L. SOFRONOV, *Conditions of complete transparency on the sphere for the three-dimensional wave equation*, Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 46, 397–401, 1993.
- [59] I.L. SOFRONOV, *An exact artificial boundary condition on a circle for the two-dimensional wave equation*, International journal of Numerical modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, 13 (5), 385–396, 2000.
- [60] J.A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.

-
- [61] A. SOMMERFELD, *Lecture on Theoretical Physics*, Academic Press, 1964.
- [62] M.E. TAYLOR, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [63] R. TEZAU, A. MACEDO, C. FARHAT, R. DJELLOULI, *Three-dimensional finite element calculations in acoustic scattering using arbitrarily shaped convex artificial boundaries*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53 (6), 1461–1476, 2002.
- [64] L.N. TREFETHEN, L. HALPERN, *Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions*, Math. Comp., 47, 421–435, 1986.
- [65] V.S. TSYNKOV, *Numerical solution of problems on unbounded domains : a review*, Appl. Numer. Math., 27 (4), 465–532, 1998.
- [66] E. TURKEL, *Iterative methods for the exterior Helmholtz equation including absorbing boundary conditions*, In : Computational Methods for Acoustics Problems, F. Magoulès (ed.), Saxe-Coburg Publications (To Appear).

Résumé :

Dans cette thèse, nous proposons une nouvelle classe de conditions aux limites absorbantes locales de type DtN (ou Robin généralisées) à utiliser pour des frontières artificielles de forme elliptique (2D) ou sphéroïdale prolata (3D), c'est-à-dire adaptées à des obstacles de forme allongée. Ces nouvelles conditions absorbantes sont construites de façon à être exactes pour les premiers modes. Elles peuvent être facilement incorporées dans un code d'éléments finis tout en préservant la structure locale du système algébrique. De plus, comme elles sont adaptées à des obstacles allongés, elles permettent de prendre en compte un domaine de calcul plus petit, ce qui contribue à limiter les coûts numériques. Nous montrons que la condition DtN d'ordre 2 construite est performante en régime basse fréquence pour les problèmes de scattering 2D et 3D, dans le cadre d'une formulation On-Surface Radiation Condition (OSRC). Cette condition conserve sa précision quel que soit l'allongement de la frontière artificielle elliptique (2D) ou ellipsoïdale (3D). Pour des régimes de fréquences plus élevées, on étudie la formulation en volume du problème. On observe qu'il n'est pas nécessaire de trop éloigner la frontière pour avoir un bon niveau de précision, et tout particulièrement lorsque l'on considère la condition DtN d'ordre 2. Afin de préciser cette observation, nous avons mené une analyse haute fréquence pour mesurer l'amplitude des réflexions parasites générées par la frontière artificielle. On montre que le coefficient de réflexion associé à une famille de modes propagatifs tend vers 0 comme une puissance inverse de λka où λ exprime la distance entre l'obstacle et la frontière artificielle et ka désigne la fréquence. De plus, en choisissant une sous-classe particulière de modes, on affine ce résultat et on obtient que si l'excentricité est supérieure à 0.5, le coefficient de réflexion tend vers 0 de façon exponentielle et ce résultat est valable pour toute la sous-classe de modes considérés, qu'ils soient propagatifs, rampants ou évanescents.

Mots clés : Conditions aux limites absorbantes, Equation d'Helmholtz, Coordonnées elliptiques, Coordonnées sphéroïdales prolates, Opérateur Dirichlet-to-Neumann, Conditions de radiation, Problèmes de scattering.

Construction and performance assessment of Dirichlet-to-Neumann absorbing conditions for ellipsoidal boundaries

Abstract :

New approximate local DtN boundary conditions are proposed to be set on elliptical- or prolate-spheroidal exterior boundaries when solving respectively two- or three-dimensional acoustic scattering problems by elongated obstacles. These new absorbing conditions are designed to be exact for the first modes. They can be easily incorporated in any finite element parallel code while preserving the local structure of the algebraic system. moreover, since the proposed conditions are applicable to exterior elliptical-shaped boundaries that are more suitable for surrounding elongated scatterers, they yield to smaller computational domains which contributes to limit computational burden. In the low frequency regime, using an on-surface radiation condition formulation, we perform the mathematical and numerical analysis of the effect of the frequency and the eccentricity values of the boundary on the accuracy of these conditions, when applied for solving radiating and scattering problems (2D and 3D). It reveals - in particular - that the new second-order DtN boundary condition retains a very good level of accuracy regardless of the slenderness of the boundary. In the high frequency regime we study the volumic formulation of the problem. It shows that it is not necessary to consider a big computational domain around the scatterer to obtain accurate results with the new second-order local DtN condition. The high frequency analysis of the reflection coefficient shows that it tends to 0 for propagative modes and it converges exponentially towards 0 for a special class of propagative, grazing and evanescent modes.

Keywords : Absorbing boundary conditions, Helmholtz equation, Elliptic coordinates, Prolate spheroidal coordinates, Dirichlet-to-Neumann operator, Radiating problems, Scattering problems