

# Quelques interactions de la topologie classique et quantique en dimension trois

Michael Eisermann

► **To cite this version:**

Michael Eisermann. Quelques interactions de la topologie classique et quantique en dimension trois. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. tel-00348433

**HAL Id: tel-00348433**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00348433>**

Submitted on 18 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

---

**Quelques interactions de la topologie  
classique et quantique en dimension trois**

---

---

Mémoire présenté par  
MICHAEL EISERMANN  
pour obtenir  
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES  
spécialité  
MATHÉMATIQUE

Soutenue le 14 décembre 2007 à l'Institut Fourier devant le jury composé de

Thomas FIEDLER (Toulouse)  
Nathan HABEGGER (Nantes)  
Michael HEUSENER (Clermont-Ferrand)  
Pierre VOGEL (Paris VII)  
Louis FUNAR (Grenoble)  
Christine LESCOP (Grenoble)  
Vlad SERGIESCU (Grenoble)

Au vu des rapports de Thomas FIEDLER, Colin ROURKE, et Pierre VOGEL.

Andrea, Jan, Hannah —  
nicht nichts ohne Euch  
aber nicht dasselbe

*Éminents Académiciens,  
Vous me faites l'honneur de me demander de fournir  
à l'Académie un rapport sur mon passé gordien.  
d'après Franz Kafka (1883-1924),  
Rapport pour une académie*

## Remerciements

Quand je suis arrivé début septembre chez le président de la commission d'habilitation, Michel Brion, pour discuter de mon projet d'habilitation avant la fin de l'année, Michel m'a convaincu que ce serait un défi sportif, d'abord pour moi, mais plus encore pour les rapporteurs. Je remercie d'autant plus sincèrement Thomas Fiedler, Colin Rourke, et Pierre Vogel d'avoir accepté et assumé ce travail.

J'étends mes remerciements à tous les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de leur participation à ma soutenance, malgré de multiples contraintes.

Durant mes premières années en France, Étienne Ghys à Lyon puis Christine Lescop et Vlad Sergiescu à Grenoble m'ont particulièrement soutenu et encouragé, et je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie également Christoph Lamm pour notre coopération qui a tenu si longtemps bien que nous nous soyons éloignés géographiquement et professionnellement.

Quant à l'éternelle aventure linguistique, en exagérant une citation de Weyl [96] je dirais : *The gods have imposed upon my writing the yoke of two foreign tongues that were not sung at my cradle*. Si j'ai réussi à m'en sortir c'est grâce à mes chers collègues français qui m'ont tout appris. Sylvain Gallot, Christine Lescop, et Alexis Marin m'ont patiemment expliqué des finesses de la langue française, qui est la leur. Les bizarreries subsistantes sont de ma propre fabrication artisanale.

Ainsi je conclus par l'expression de mon profond sentiment de soulagement. —

*Dans l'ensemble, je suis arrivé à ce que je voulais obtenir.  
Que l'on ne dise pas que ce n'était pas la peine.*



## Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	vii
1. Un bref aperçu historique	vii
2. Topologie classique vs quantique	vii
3. L'organisation de ce mémoire	viii
Publications	ix
1. Publications issues de la thèse	ix
2. Articles postérieurs à la thèse	ix
3. Articles soumis	ix
4. Vulgarisation	ix
Chapitre I. Invariants de type fini et variétés exotiques	1
1. Nœuds et complétion par homotopie	2
2. Variétés exotiques	4
3. La question de la torsion	6
4. Étude des nœuds locaux	8
5. Quelques perspectives	11
Chapitre II. Théorie des quandles	13
1. Définition et premiers exemples	13
2. Opérateurs de Yang-Baxter	14
3. Correspondance de Galois	18
4. Quelques perspectives	21
Chapitre III. Entrelacs rubans et unions symétriques	23
1. Le polynôme de Jones des entrelacs rubans	23
2. Unions symétriques	27
Bibliographie	31



## Introduction

### 1. Un bref aperçu historique

La fascination de l'homme pour les nœuds a une longue histoire mais leur étude mathématique est relativement récente. Ses débuts remontent au temps de Gauss, qui considéra des entrelacs dans ses travaux sur l'électromagnétisme, et qui donna une formule analytique pour le nombre d'enlacement. Il regarda aussi des tresses, par curiosité intellectuelle semble-t-il, mais aussi en tant que description pratique d'entrelacs.<sup>1</sup> L'étude des nœuds fut continuée, entre autre, par son élève Listing, à qui on doit l'invention du mot « topologie ».

Les premières tentatives de classification furent entreprises par des physiciens comme Helmholtz, Maxwell, Kelvin, et Tait. Ces travaux étaient combinatoires et plutôt empiriques, culminant dans la compilation par Tait et Little d'une longue table de diagrammes. À base de ces expériences, Tait formula trois conjectures qui devinrent célèbres, mais le manque d'outils adéquats rendit tout traitement théorique quasi impossible.<sup>2</sup>

Au début du 20<sup>e</sup> siècle, l'apparition de la topologie algébrique fournissait justement de tels outils, et permettait les premières applications à la théorie des nœuds. Dans les années suivantes les outils algébriques et géométriques en firent un domaine hautement développé, par Wirtinger, Dehn, Alexander, Artin, Reidemeister, Seifert, van Kampen, Whitehead, Fox, et bien d'autres. Les techniques et invariants de la topologie algébrique, comme le groupe fondamental, le polynôme d'Alexander, et leurs raffinements ingénieux, dominèrent alors la théorie des nœuds jusqu'au début des années 1980.

En 1984 Jones découvrit son invariant polynomial, qui ne ressemblait à aucun concept connu auparavant. En quelques années cette découverte a provoqué l'invention de nombreux autres invariants polynomiaux et des invariants dits quantiques, issus des représentations du groupe des tresses et souvent inspirés par des analogies avec la physique théorique. La notion des invariants de type fini, dont on parlera plus loin, donne un cadre commun à tous ces nouveaux invariants. Un des plus beaux succès du polynôme de Jones est la résolution des conjectures de Tait, formulées un siècle plus tôt.<sup>3</sup>

### 2. Topologie classique vs quantique

L'esquisse historique et la pratique actuelle suggèrent de mettre en opposition les approches « classique » et « quantique », ce qui explique le titre un peu énigmatique de ce mémoire. (En reprenant ces termes simplificateurs je frôle la polémique, certes, mais c'est pour une bonne cause.)

---

<sup>1</sup> Après réflexion il est surprenant que ces deux idées soient toujours d'actualité aujourd'hui, bien qu'à un niveau plus poussé : d'un côté les invariants de type fini, présentés analytiquement par l'intégrale de Kontsevich, de l'autre côté la théorie du groupe des tresses, ses représentations, et les invariants quantiques qui en découlent.

<sup>2</sup> Pour une présentation plus complète voir Moritz Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1999. Andrew Ranicki a rassemblé plusieurs textes sur l'histoire de la théorie des nœuds et en particulier une belle collection de sources numérisées ; voir <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/knots/>.

<sup>3</sup> Bien sûr, les invariants polynomiaux ont trouvé maintes autres applications à la théorie des nœuds et des 3-variétés. L'histoire ne s'arrête pas là : plus récemment la notion de catégorification a dégagé des aspects inattendus du polynôme de Jones. Ce développement fascinant a déjà fait ses premières preuves, mais on n'en parlera pas ici. Je ne parlerai pas non plus de la géométrie en dimension 3 et de la conjecture du volume qui a suscité d'intenses recherches autour du polynôme de Jones. Que les experts me pardonnent toutes ces omissions.



Malgré leurs mérites, les invariants quantiques restent peu compris du côté de la topologie algébrique, et parfois de la topologie tout court. Leur construction est souvent combinatoire ou algébrique et n’offre pas d’interprétation topologique évidente. On doit se contenter actuellement de quelques liens bien compris et de quelques conjectures.

Les invariants de type fini suscitent en eux-mêmes quelques mystères. Leurs réussites empiriques et théoriques ont provoqué la question de savoir si les invariants de type fini distinguent tous les nœuds. Cette question reste toujours ouverte pour les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$ . Le chapitre I y apporte quelques réponses pour les nœuds dans d’autres variétés.

À tout nœud  $K \subset \mathbb{S}^3$  on peut associer le groupe fondamental  $\pi_K := \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ , muni de deux éléments préférés, un méridien  $m_K$  et une longitude  $\ell_K$ . D’après les travaux de Waldhausen [94], cet invariant  $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$  classe les nœuds à isotopie près. On pourrait ainsi dire que toute l’information sur les nœuds est contenue dans leur groupe fondamental. Pour certains invariants comme le polynôme d’Alexander  $\Delta_K$ , la relation avec le groupe fondamental est bien comprise, en particulier il est possible de déduire  $\Delta_K$  du groupe  $\pi_K$ . Le chapitre II parlera d’une classe d’invariants (à savoir les quandles et leurs invariants homologiques) qui ressemblent aux invariants quantiques mais qui finalement se révèlent très proches du groupe fondamental.

Pour d’autres invariants comme le polynôme de Jones  $V_K$ , la relation avec le groupe fondamental reste obscure, alors qu’il doit y avoir — au moins théoriquement — une application  $(\pi_K, m_K, \ell_K) \mapsto V_K$ . Même si cette formulation est sans doute naïve et trop ambitieuse, il est tristement remarquable que les propriétés de  $V_K$  et de  $\pi_K$  semblent sans rapport. Ainsi l’opposition du polynôme d’Alexander et du polynôme de Jones donne un exemple extrême mais concret de notre ignorance : contrairement au polynôme d’Alexander, le polynôme de Jones ne reflète souvent pas des propriétés géométriques des nœuds. Par exemple pour tout nœud ruban, le polynôme d’Alexander est de la forme  $\Delta_K(t) = f(t)f(t^{-1})$  pour un certain  $f \in \mathbb{Z}[t^{\pm}]$ . Aucune propriété semblable n’est connue pour le polynôme de Jones. Le chapitre III explique les premiers éléments pour comprendre le polynôme de Jones des entrelacs rubans.

### 3. L’organisation de ce mémoire

Ce texte présente mes recherches mathématiques depuis ma thèse de doctorat en 2000. Elles se regroupent essentiellement sous la thématique esquissée dans cette introduction.<sup>4</sup> Dans la présentation qui suit, je m’appuie donc principalement sur mes articles cités ci-dessous, en ajoutant quelques extensions. Pour tenir compte du caractère particulier d’une habilitation et pour faciliter son décryptage, je citerai mes propres publications par [E<sub>1</sub>], [E<sub>2</sub>], [E<sub>3</sub>], . . . tandis que les références comme [1] renvoient vers la bibliographie à la fin de ce mémoire.

Je ne parlerai pas ici des travaux issus de ma thèse [E<sub>1</sub>], à savoir l’article [E<sub>2</sub>] sur les nombres de coloriage et la caractérisation géométrique des invariants de type fini [E<sub>3</sub>, 1ère partie]. Inévitablement quelques-uns des articles postérieurs font référence à ma thèse, par exemple certains résolvent des problèmes y soulevés, mais les articles [E<sub>n</sub>] pour  $n \geq 4$  en sont indépendants. La note [E<sub>4</sub>] sur les nœuds dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  annonce des résultats postérieurs à ma thèse qui sont publiés dans [E<sub>3</sub>, 2nde partie].

---

<sup>4</sup> Les articles [E<sub>13</sub>] et [E<sub>14</sub>] sortent du cadre topologique et ne seront pas discutés ici. Concernant la théorie du choix social et du théorème d’impossibilité d’Arrow je me permets néanmoins d’ajouter une remarque qui pourrait intéresser les topologues. Motivé par des considérations purement topologiques, Beno Eckmann a établi un lien remarquable entre le choix social et la théorie d’homotopie. Son article [27] est très agréable à lire et fournit un bel exemple des arguments topologiques dans un domaine appliqué. Mon objectif dans [E<sub>13</sub>], par contre, est entièrement combinatoire.

## Publications

### 1. Publications issues de la thèse

- [E<sub>1</sub>] *Knotengruppen-Darstellungen und Invarianten von endlichem Typ.*  
Bonner Mathematische Schriften 327, Bonn, 2000. (Dissertation, Bonn, 2000.)
- [E<sub>2</sub>] *The number of knot group representations is not a Vassiliev invariant.*  
Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 5, 1555–1561.
- [E<sub>3</sub>] *A geometric characterization of Vassiliev invariants.*  
Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 12, 4825–4846

### 2. Articles postérieurs à la thèse

- [E<sub>4</sub>] *Les invariants rationnels de type fini ne distinguent pas les nœuds dans  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .*  
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), no. 1, 51–55.
- [E<sub>5</sub>] *Invariants de Vassiliev et conjecture de Poincaré.*  
C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 334 (2002), no. 11, 1005–1010.
- [E<sub>6</sub>] *Homological characterization of the unknot.*  
J. Pure Appl. Algebra 177 (2003), no. 2, 131–157.
- [E<sub>7</sub>] *Vassiliev invariants and the Poincaré conjecture.*  
Topology 43 (2004), no. 5, 1211–1229. (Annoncé dans [E<sub>5</sub>].)
- [E<sub>8</sub>] *A surgery proof of Bing’s theorem characterizing the 3-sphere.*  
J. Knot Theory Ramifications 13 (2004), no. 2, 307–309.
- [E<sub>9</sub>] *Yang-Baxter deformations of quandles and racks.*  
Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 537–562.
- [E<sub>10</sub>] *Knot colouring polynomials.*  
Pacific J. Math. 231 (2007), 305–336.
- [E<sub>11</sub>] *Equivalence of symmetric union diagrams.* (with Christoph Lamm)  
J. Knot Theory Ramifications 16 (2007), no. 7, 879–898

### 3. Articles soumis

- [E<sub>12</sub>] *Quandle coverings and their Galois correspondence.*
- [E<sub>13</sub>] *Classification of arrovian juntas.*
- [E<sub>14</sub>] *Bimonotone enumeration.*
- [E<sub>15</sub>] *The Jones polynomial of ribbon links.*
- [E<sub>16</sub>] *A refined Jones polynomial for symmetric unions.* (with Christoph Lamm)

### 4. Vulgarisation

- [E<sub>17</sub>] *Nœuds et tresses.* Le Gluon, décembre 2006.
- [E<sub>18</sub>] *Comment fonctionne Google ?* Quadrature, avril 2008.



*Dieu a créé les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$ ,  
le reste est l'œuvre de l'homme.*  
d'après Leopold Kronecker (1823-1891)

## CHAPITRE I

### Invariants de type fini et variétés exotiques

Non seulement les nœuds sont des objets fascinants pour eux-mêmes, mais ils jouent également un rôle essentiel dans l'étude des variétés de dimension 3. Les invariants de type fini, aussi nommés invariants de Vassiliev ou Vassiliev-Goussarov d'après [92] et [41], sont devenus célèbres depuis les années 1990, cf. [10]. Beaucoup d'invariants sont de type fini, notamment les coefficients (dans un développement en série convenable) du polynôme d'Alexander-Conway, du polynôme de Jones, et de tous les invariants quantiques [5].

Leur abondance a motivé la question de Vassiliev : les invariants de type fini distinguent-ils tous les nœuds ? Actuellement nous ne disposons que de très peu d'indices pour nous guider. D'un côté les invariants de type fini distinguent toutes les tresses. La conjecture optimiste dirait que ceci se généralise aux nœuds. D'un autre côté on ne connaît pas d'invariants de type fini qui distinguent un nœud  $K$  du nœud opposé  $-K$  (où seule l'orientation du cercle a changé). La conjecture pessimiste dirait qu'ils y échouent systématiquement.

Initialement la théorie de Vassiliev fut conçue pour l'étude des nœuds dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , ou ce qui revient au même, dans la sphère  $\mathbb{S}^3$ . La définition combinatoire donnée par Goussarov [41] puis Birman-Lin [10] s'adapte immédiatement aux nœuds dans une 3-variété quelconque. Dans ce qui suit je propose d'étudier la question de Vassiliev en fonction de la variété ambiante  $V$ . Le but de ce chapitre est d'expliquer à quel point cette question est intimement liée à la topologie de  $V$ .

— \* —

Je présente ici mes articles [E<sub>4</sub>], [E<sub>5</sub>], [E<sub>7</sub>], [E<sub>8</sub>]. Avant de rentrer dans le vif du sujet je me permets quelques remarques préalables sur la stratégie générale.

REMARQUE 0.1 (généraliser avec modération). L'idée de varier l'espace ambiant  $V$  permet tout d'abord un plus large choix d'exemples. C'est aussi l'incarnation d'une stratégie éprouvée : au lieu de résoudre un problème on le généralise. Ce n'est pourtant pas vain car je résous ensuite le problème généralisé, au moins en partie, et j'arrive à analyser assez finement certains exemples bien choisis.

L'objectif est donc de mieux comprendre la situation générale des 3-variétés, et de mettre en évidence des phénomènes nouveaux, parfois inattendus, dont on ignore toujours l'existence pour la sphère  $\mathbb{S}^3$ . En contrepartie cette plus grande liberté a un prix, à savoir le caractère parfois exotique de la variété ambiante. Cette approche entraîne les pièges notoires des variétés de dimension 3, et exige ainsi une attention particulière.

REMARQUE 0.2 (géométrie et homotopie). Un des grands thèmes dans l'étude des variétés est l'interaction entre « géométrie » et « homotopie ». La description à homotopie près étant moins fine, elle permet plus souvent des solutions, typiquement par une reformulation algébrique. Dans des situations favorables on arrive à comprendre ensuite ce qu'il faut pour remonter au niveau géométrique.

L'étude des nœuds dans des 3-variétés et de leurs invariants s'inscrit parfaitement dans cette philosophie. Je commence donc par expliquer en quoi la théorie de Vassiliev est une complétion par homotopie. Ensuite j'explore quelques variétés exotiques, où les points de vue géométrique et homotopique diffèrent drastiquement, comme les variétés de Whitehead ou des fausses 3-sphères. (Ces dernières resteront pour toujours des exemples fictifs.) Je retournerai après au groupe modulaire des variétés fermées.

## 1. Nœuds et complétion par homotopie

La présentation générale suit essentiellement les articles [E<sub>3</sub>] et [E<sub>7</sub>]. J'ai saisi l'occasion de ce mémoire pour réorganiser le développement, essentiellement afin de souligner les idées jolies, en déléguant les détails techniques aux articles correspondants.

**1.1. Conventions.** Que les puristes me pardonnent si je cède aux anglicismes et dis *3-variété* pour variété de dimension 3. (En revanche je note une telle variété  $V$  pour rétablir l'équilibre.) Nous allons travailler dans la catégorie lisse ; en dimension 3 ceci n'est qu'une question de goût, car les approches lisses, affines par morceaux, et topologiques sont équivalentes. Toute 3-variété sera supposée lisse et orientée, et sauf indication ou construction contraire aussi connexe. Si  $V$  a un bord on supposera que d'éventuels nœuds se trouvent dans l'intérieur de  $V$ . Nous allons également supposer que tout plongement entre 3-variétés préserve l'orientation. Dans  $\mathbb{R}^n$  on note  $\mathbb{D}^n$  la boule unité fermée. Son bord  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$  est la sphère unité de dimension  $n - 1$ . Une  $n$ -cellule est un espace homéomorphe à  $\mathbb{D}^n$ .

**1.2. Nœuds et entrelacs.** Un *nœud* dans une 3-variété  $V$  est un plongement  $\kappa: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow V$ . Plus généralement, un *nœud singulier* est une immersion  $\kappa: \mathbb{S}^1 \looparrowright V$  dont tout point multiple est un point double suivant le modèle local  $\times$ . En particulier  $\kappa$  n'a qu'un nombre fini de singularités, et nous les supposons numérotées par  $1, \dots, n$ .

Passant à plusieurs composantes, un *entrelacs* est un plongement  $\kappa: \{1, \dots, c\} \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow V$  ; c'est donc la réunion de  $c$  nœuds disjoints  $\kappa_1, \dots, \kappa_c$ . De la même manière, un *entrelacs singulier* est une immersion  $\kappa: \{1, \dots, c\} \times \mathbb{S}^1 \looparrowright V$  suivant le modèle local  $\times$ . Par commodité on parlera ici quasi exclusivement des nœuds, mais la plupart des définitions et résultats s'étendent également aux entrelacs.

**1.3. Isotopie.** Deux nœuds singuliers sont *équivalents* (ou *isotopes*) s'ils ne diffèrent que par des difféotopies de  $V$  et de  $\mathbb{S}^1$ . On note  $\mathcal{K}_n$  l'ensemble des classes d'équivalence des nœuds  $n$ -singuliers, y compris l'ensemble  $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$  des classes des nœuds (non singuliers). Le lemme suivant est une application du théorème classique de Thom [89] sur l'extension des isotopies ; cf. Hirsch [44, Thm. 8.1.4].

LEMME 1.1 (isotopie). *Tout plongement  $\phi: V \hookrightarrow W$  de 3-variétés induit une application naturelle  $\mathcal{K}_* \phi: \mathcal{K}_* V \rightarrow \mathcal{K}_* W$  qui ne dépend que de la classe d'isotopie de  $\phi$ .*  $\square$

Si aucune confusion n'est à craindre nous n'insistons pas sur la distinction entre un nœud  $\kappa$ , son image  $\kappa(\mathbb{S}^1)$  dans  $V$ , et sa classe d'isotopie  $K = [\kappa]$ .

**1.4. Homotopie.** Soit  $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}\mathcal{K}_n$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre ayant pour base l'ensemble  $\mathcal{K}_n$ . On définit l'application  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $\delta: \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_{n-1}$  par la résolution de la  $n$ ème singularité suivant le modèle local  $\times \mapsto \times - \times$ . Évidemment les deux termes de cette différence sont homotopes par une homotopie préservant les points doubles et leur numérotation. Le lemme suivant établit la réciproque : toute homotopie entre deux nœuds singuliers peut être « discrétisée » en une suite finie de changements de croisements, voir [E<sub>7</sub>, Lem. 14] :

LEMME 1.2 (homotopie). *Deux nœuds  $n$ -singuliers  $K$  et  $K'$  sont homotopes fixant les  $n$  singularités si et seulement si  $K \equiv K'$  modulo  $\delta\mathcal{K}_{n+1}$ .*  $\square$

**1.5. Functorialité.** La filtration de Vassiliev  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots$  est définie par  $\mathcal{F}_n = \text{im}(\delta^n: \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{H}_0)$ . Les quotients  $\mathcal{H}_0/\mathcal{F}_n$  forment un système projectif ayant pour limite le  $\mathbb{Z}$ -module  $\hat{\mathcal{H}}_0 := \varprojlim \mathcal{H}_0/\mathcal{F}_n$ , et l'application canonique  $\alpha: \mathcal{H}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0$  a pour noyau  $\mathcal{F}_\omega := \bigcap_n \mathcal{F}_n$ .

Selon le lemme 1.1 la théorie de Vassiliev est un foncteur qui associe à toute 3-variété  $V$  une suite de  $\mathbb{Z}$ -modules  $(\mathcal{K}_* V, \delta)$  et à chaque plongement  $\phi: V \hookrightarrow W$  préservant l'orientation une famille d'applications  $\mathcal{K}_* \phi: \mathcal{K}_* V \rightarrow \mathcal{K}_* W$  commutant avec  $\delta$ .

Selon le lemme 1.2 on peut interpréter  $\mathcal{K}_0$  comme la complétion du module des nœuds  $\mathcal{K}_0$  par homotopie. De façon duale, un invariant des nœuds  $v: \mathcal{KV} \rightarrow A$  à valeurs dans un groupe abélien  $A$  est appelé *invariant de type fini* de degré  $n$  si  $v(\mathcal{F}_{n+1}) = 0$ .

Si l'on savait que  $\mathcal{F}_\omega = 0$  pour une variété  $V$ , alors les invariants de type fini distingueraient tous les nœuds dans  $V$ . Cette question reste largement ouverte pour la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Par contre on construira plus bas des exemples avec  $\mathcal{F}_\omega \neq 0$ .

J'ai choisi ici de travailler sur l'anneau  $\mathbb{Z}$  afin de garder un maximum d'information, car je parlerai de la torsion. Il est parfois nécessaire de travailler sur un autre anneau, comme  $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$  ou  $\mathbb{Q}$ , voir  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La définition s'étend à ce cadre sans changement.

**1.6. Nœuds locaux.** Nous commençons à illustrer les plongements entre 3-variétés par quelques exemples basiques qui nous seront utiles plus tard.

Quand on ôte un point  $p \in V$  d'une 3-variété  $V$ , le résultat  $W = V \setminus \{p\}$  supporte les mêmes nœuds, car l'inclusion  $\iota: W \hookrightarrow V$  induit une bijection  $\iota_*: \mathcal{KW} \xrightarrow{\sim} \mathcal{KV}$ . C'est le cas pour l'exemple classique  $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^3$ .

Pour toute 3-variété  $V$  nous avons, par la définition-même d'une variété, un recouvrement par des paramétrisations locales  $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$ . Celles-ci motivent la définition suivante :

**DÉFINITION 1.3.** Un nœud dans  $V$  est dit *local* s'il est contenu dans l'image d'un plongement  $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$ . On étendra cette définition également aux nœuds singuliers et aux entrelacs (ou plus généralement à toute partie compacte de  $V$ ).

Tous les plongements  $\phi: \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$  sont isotopes, car nous supposons que  $V$  est connexe et que  $\phi$  préserve l'orientation. C'est la classification des plongements des disques, valable en toute dimension et établie indépendamment par Milnor [72, Thm. 2.2], Palais [79, Thm B], et Cerf [17, Prop. II.5.7]. Voir aussi Hirsch [44, Thm. 8.3.1].

Tout plongement  $\phi: \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$  induit donc la même application  $\mathcal{KR}^3 \rightarrow \mathcal{KV}$ . Son image est l'ensemble des (classes d'isotopies) des nœuds locaux dans  $V$ .

**1.7. Nœuds non distinguables.** Les outils précédents nous permettent de donner une méthode assez générale pour construire des nœuds indistinguables par des invariants de type fini. Nous la formulons d'abord pour les variétés simplement connexes :

**LEMME 1.4.** *Soit  $V$  une 3-variété simplement connexe et soit  $h: V \hookrightarrow V$  un plongement qui préserve l'orientation. Alors aucun invariant de type fini ne distingue un nœud  $K$  et son image  $hK$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $h$  préserve l'orientation, tout plongement  $\phi: \mathbb{R}^3 \hookrightarrow V$  est isotope à  $h\phi$ . Par le lemme 1.1, tout nœud singulier local  $K^*$  est équivalent à son image  $hK^*$ . Puisque  $V$  est simplement connexe, tout nœud  $K \in \mathcal{K}_n$  est homotope à un nœud local  $K^*$ . Selon le lemme 1.2 il existe alors  $A \in \mathcal{K}_{n+1}$  tel que  $\delta A = K - K^*$ . Par functorialité on obtient  $\delta hA = hK - hK^*$  puis  $\delta(A - hA) = K - hK$ . Par extension linéaire, pour tout  $A_n \in \mathcal{K}_n$  il existe  $A_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$  tel que  $\delta(A_{n+1} - hA_{n+1}) = A_n - hA_n$ . Cet argument peut être itéré. Pour tout nœud  $K \in \mathcal{K}_0$  ceci montre que  $K - hK \in \mathcal{F}_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $K - hK \in \mathcal{F}_\omega$ .  $\square$

L'argument précédent ne repose que sur des propriétés homotopiques et fonctorielles. Soulignons donc que le lemme ne peut pas affirmer que  $K$  et  $hK$  soient effectivement distincts. Pour donner un exemple trivial, appliqué à la sphère  $\mathbb{S}^3$  le lemme est vide : ici tout plongement  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$  est un difféomorphisme, et tout difféomorphisme préservant l'orientation est isotope à l'identité, d'où  $hK = K$ .

En effet, la construction d'exemples non triviaux où  $hK \neq K$  est beaucoup plus délicate. Dans la suite nous allons explorer deux directions possibles : les variétés ouvertes contractiles, puis, avec quelques modifications, les variétés compactes.

## 2. Variétés exotiques

**2.1. Caractérisation de  $\mathbb{S}^3$  et de  $\mathbb{R}^3$ .** Comme je l'ai dit dans l'introduction, les nœuds jouent un rôle central pour la topologie des 3-variétés. En voici une belle illustration :

**THÉORÈME 2.1** (Bing [9], 1958). *Une 3-variété fermée connexe  $V$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^3$  si et seulement si tout nœud dans  $V$  est local.*

Je ne peux pas m'empêcher de redonner ici une preuve simple [E<sub>8</sub>] qui repose uniquement sur la présentation des 3-variétés par chirurgie et le théorème d'Alexander-Schönflies.

**DÉMONSTRATION.** Évidemment dans  $V \cong \mathbb{S}^3$  tout nœud est local.

Réciproquement, supposons que tout nœud dans  $V$  est local. En particulier  $V$  est simplement connexe et donc orientable. On peut alors appliquer le théorème de chirurgie de Lickorish [62] et Wallace [95] : il existe un entrelacs  $K \subset \mathbb{S}^3$  tel que la chirurgie sur  $\mathbb{S}^3$  le long de  $K$  produise la variété  $\chi(\mathbb{S}^3, K) \cong V$ . (On enlève un voisinage tubulaire de  $K$  puis on le recolte suivant une parallélisation donnée de  $K$ .) Par conséquent, il existe un entrelacs  $L \subset V$  tel que  $\chi(V, L) = \mathbb{S}^3$  : il suffit d'inverser la chirurgie précédente.

Notre hypothèse garantit que tout nœud dans  $V$  est local. On peut en déduire que tout entrelacs est local, voir [E<sub>8</sub>]. Appliqué à notre  $L$  dans  $V$  on peut donc placer  $L$  dans le facteur trivial de  $V \cong V \# \mathbb{S}^3$ . Ceci entraîne que  $\chi(V, L) \cong V \# V'$  où  $V' = \chi(\mathbb{S}^3, L)$ . En comparant avec la chirurgie précédente, nous constatons que  $\mathbb{S}^3 \cong V \# V'$ . Nous concluons que  $V \cong V' \cong \mathbb{S}^3$  par le théorème d'Alexander-Schönflies [1, 75, 63].  $\square$

Costich, Doyle et Galewski [20] ont généralisé le théorème de Bing à une caractérisation de l'espace euclidien, dont on énonce ici seulement le résultat :

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $W$  une 3-variété ouverte contractile. Si tout nœud dans  $W$  est local, alors  $W$  est homéomorphe à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .*  $\square$

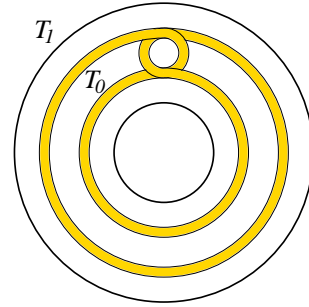
**2.2. Variétés de Whitehead.** Contrairement à l'intuition, il existe bien des 3-variétés ouvertes contractiles qui ne sont pas homéomorphes à  $\mathbb{R}^3$ . Le premier exemple fut découvert par Whitehead [97] en 1935 (après avoir conjecturé qu'il n'en existe aucun). Kister et Mc-Millan [71, 59] ont montré qu'il en existe même une infinité non dénombrable, deux à deux non homéomorphes. Ces variétés viennent en deux familles infinies non dénombrables, selon la propriété de se plonger dans  $\mathbb{R}^3$  ou non.

On appellera *variété de Whitehead* toute 3-variété ouverte contractile plongeable dans  $\mathbb{R}^3$  mais non homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . En voici une méthode de construction : Soit  $T_0$  un tore solide plongé dans l'intérieur d'un deuxième tore solide  $T_1 \subset \mathbb{R}^3$  comme indiqué dans la figure ci-contre. Bien que  $T_0$  soit noué dans  $T_1$  il se dénoue dans  $\mathbb{R}^3$ . Il existe donc un difféomorphisme  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $h(T_0) = T_1$ . On définit la famille  $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots$  par  $T_n = h^n(T_0)$ . La réunion  $W = \bigcup_n T_n$  est une 3-variété ouverte contractile plongée dans  $\mathbb{R}^3$  mais non homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . (Pour une discussion voir [E<sub>7</sub>].)

Nous en déduisons l'isomorphisme suivant :

**COROLLAIRE 2.3.** *Soit  $W$  une variété de Whitehead, et soient  $f: \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$  et  $g: W \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  deux plongements quelconques. Alors  $f$  et  $g$  induisent des isomorphismes mutuellement inverses  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3 / \mathcal{F}_n \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{K}W / \mathcal{F}_n W$  pour tout  $n$ . En particulier, l'algèbre des invariants de type fini est la même pour  $\mathbb{R}^3$  et  $W$ , à un isomorphisme canonique près.*

**DÉMONSTRATION.** D'un côté  $gf: \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  induit l'identité sur  $\mathcal{K}_* \mathbb{R}^3$ , donc aussi sur tout quotient  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3 / \mathcal{F}_n \mathbb{R}^3$ . De l'autre côté,  $fg: W \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$  n'induit pas l'identité sur  $\mathcal{K}_* W$  mais sur tout  $\mathcal{K}W / \mathcal{F}_n W$ , par le lemme 1.4.  $\square$



Précédemment Lin [65] avait obtenu un résultat similaire : pour toute 3-variété ouverte contractile  $W$ , le plongement  $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$  induit un isomorphisme  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3/\mathcal{F}_n \cong \mathcal{K}W/\mathcal{F}_n$ , éventuellement modulo 2-torsion. (L'existence de la 2-torsion est toujours une question ouverte.) Dans le cas d'une variété de Whitehead non seulement notre démonstration est considérablement simplifiée, mais elle assure aussi une conclusion plus forte :

**COROLLAIRE 2.4.** *Dans toute variété de Whitehead  $W$  il existe des nœuds distincts qui ne sont pas distinguables par les invariants de type fini.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $h: W \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow W$  un plongement préservant l'orientation. Le théorème 2.2 garantit l'existence d'un nœud non local  $K$  dans  $W$ . Son image  $hK$  est un nœud local, donc  $K \neq hK$ . D'après le lemme 1.4 nous avons  $K \equiv hK$  modulo  $\mathcal{F}_\omega$ .  $\square$

C'est le seul exemple connu où les invariants de type fini échouent à distinguer des nœuds. Une fois les outils mis en place, la construction est simple et élégante. Comme annoncé dans l'introduction, le prix à payer est le caractère exotique de la variété ambiante. On peut donc se demander si une telle pathologie peut se produire aussi dans une variété compacte. Cette question nous mène à la conjecture de Poincaré.

**2.3. La conjecture de Poincaré.** Une 3-sphère d'homotopie est une 3-variété qui est fermée et simplement connexe ( $\pi_0 = \pi_1 = 0$ ). Une telle variété est homotopiquement équivalente à la sphère  $\mathbb{S}^3$ , d'où son nom. La fameuse conjecture de Poincaré dit que toute 3-sphère d'homotopie est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Formulée en 1904, cette conjecture a suscité une énorme quantité de travaux en topologie, notamment différentielle et géométrique. Après environ 100 ans d'existence fructueuse elle a finalement été prouvée par Perelman en utilisant la méthode du flot de Hamilton. Je renvoie aux articles de Milnor [74] ou Rourke [85] pour une présentation globale du sujet.

Revenons sur la question de Vassiliev, interprétée au sens large : les invariants de type fini distinguent-ils les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$  puis dans toute 3-variété fermée ? Les arguments suivants montrent qu'une réponse affirmative implique la conjecture de Poincaré.

**THÉORÈME 2.5.** *Soit  $V$  une 3-variété simplement connexe contenant un nœud non local  $K$ . Alors les deux copies de  $K$  dans  $V \sharp V$  sont distinctes mais elles ne sont pas distinguées par les invariants de type fini.*

**DÉMONSTRATION.** La somme connexe  $V \sharp V$  admet un difféomorphisme  $h$  de période 2 qui préserve l'orientation et échange les deux copies de  $V$ . En particulier  $h$  échange les deux copies  $K_0$  et  $K_1$  du nœud  $K$ , et le lemme 1.4 entraîne qu'aucun invariant de type fini ne distingue  $K_0$  et  $K_1$ . Encore faut-il montrer que  $K_0$  et  $K_1$  sont distincts, ce qui résulte du corollaire 4.7 discuté plus bas.  $\square$

Le théorème précédent s'applique par exemple à toute 3-variété ouverte contractile qui ne se plonge pas dans  $\mathbb{R}^3$ , et qui échappe donc aux arguments du paragraphe précédent. Grâce au théorème 2.1 de Bing, on en déduit également le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.6.** *Si les invariants de type fini distinguent les nœuds dans toute sphère d'homotopie, alors ceci implique la conjecture de Poincaré.*

**DÉMONSTRATION.** Si  $V$  était une sphère d'homotopie qui n'était pas homéomorphe à  $\mathbb{S}^3$ , alors la somme connexe  $V \sharp V$  contiendrait des nœuds distincts qui ne seraient pas distingués par les invariants de type fini.  $\square$

Ce résultat n'est probablement pas une démarche prometteuse pour donner une preuve alternative de la conjecture de Poincaré. Il dit simplement que la question de Vassiliev est au moins aussi difficile que la conjecture de Poincaré.



### 3. La question de la torsion

Après notre excursion aux franges exotiques de la topologie en dimension 3, retournons aux variétés fermées, i.e. compactes sans bord. (Vous pouvez désormais rayer la mention « exotique » du titre.) Ici tout plongement  $V \hookrightarrow V$  est un difféomorphisme, et nous sommes donc amenés à étudier le groupe modulaire  $\pi_0 \text{Diff}_+(V)$ , rappelé plus bas.

Jusqu'ici nous avons discuté la question de Vassiliev : les invariants de type fini distinguent-ils tous les nœuds ? Étroitement liée est la question de la torsion. L'intégrale de Kontsevich permet de construire un *invariant universel* de type fini pour les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$ , mais cette construction ne marche qu'en caractéristique 0. Les invariants  $\nu: \mathcal{K} \rightarrow A$  à valeurs dans des groupes abéliens finis peuvent-ils contenir encore plus d'information ?

À nouveau on ne sait pas y répondre dans le cas de la sphère  $\mathbb{S}^3$ , mais nous verrons que la réponse est « oui » pour d'autres variétés.

**3.1. L'action du groupe modulaire.** On note  $\text{Diff}_+(V)$  le groupe des difféomorphismes préservant l'orientation et  $\pi_0 \text{Diff}_+(V)$  le *groupe modulaire* de  $V$ . C'est le groupe formé par les classes d'isotopie des difféomorphismes de  $V$ . Le groupe modulaire agit naturellement sur tous les objets dans  $V$ , en particulier nous avons une action sur les nœuds :

$$\alpha: \pi_0 \text{Diff}_+(V) \times \mathcal{KV} \rightarrow \mathcal{KV}, \quad [h] \cdot [K] = [hK].$$

Plusieurs questions naturelles viennent à l'esprit :

- (1) L'action  $\alpha$  est-elle fidèle ? C'est-à-dire : si  $hK$  est isotope à  $K$  pour tout  $K$ , le difféomorphisme  $h$  est-il isotope à l'identité ?
- (2) Existe-t-il un nœud  $K$  dans  $V$  tel que le groupe modulaire  $\pi_0 \text{Diff}(V, K)$  préservant  $K$  soit trivial ? Une réponse positive à (2) implique (1).

Ces questions n'avaient pas encore été traitées quand je les ai soulevées il y a quelques années. C'est un peu surprenant car le groupe modulaire des 3-variétés (tout comme pour les surfaces, d'ailleurs) a fait l'objet d'intenses recherches. D'un autre côté les nœuds sont ici peut-être plus une application qu'un outil de son étude. Voir par exemple l'article de Hatcher [43].

Ma contribution se limite à avoir popularisé la question. Par l'intermédiaire d'Allen Hatcher et de Darryl McCullough, c'est Robert Myers qui l'a résolue. En prolongeant ses travaux antérieurs, il a pu donner la réponse positive attendue :

**THÉORÈME 3.1 (Myers [78]).** *Le groupe modulaire  $\pi_0 \text{Diff}_+(V)$  d'une 3-variété connexe fermée orientée  $V$  agit fidèlement sur l'ensemble  $\mathcal{KV}$  des classes d'isotopies des nœuds dans  $V$ . Plus précisément, il existe une infinité de nœuds  $K$  dans  $V$  de sorte que le groupe modulaire  $\pi_0 \text{Diff}(V, K)$  de la paire  $(V, K)$  soit trivial. Autrement dit : si  $h \in \text{Diff}(V)$  envoie un tel nœud  $K$  sur un nœud isotope  $hK$ , alors  $h$  est isotope à l'identité.  $\square$*

**3.2. Torsion provenant du groupe modulaire.** Comparons l'action « géométrique » à l'action « homotopique » du groupe modulaire  $\pi_0 \text{Diff}_+(V)$ . Il agit sur les groupes d'homologie  $H_*V$  et d'homotopie  $\pi_*V$ , dont le groupe fondamental  $\pi_1V$  est primordial. Nous obtenons un homomorphisme naturel de groupes

$$\Phi: \pi_0 \text{Diff}_+(V) \rightarrow \text{Out } \pi_1(V).$$

Plus explicitement, pour tout point base  $p \in V$ , un difféomorphisme  $h: V \xrightarrow{\sim} V$  induit un isomorphisme de groupes  $h_\#: \pi_1(V, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, q)$  où  $h(p) = q$ . Comme  $V$  est supposée connexe, il existe un chemin  $\gamma$  de  $q$  vers  $p$ , ce qui nous permet de définir l'automorphisme  $\gamma_\# h_\#: \pi_1(V, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, p)$ . Différents choix de  $\gamma$  ne changent l'automorphisme  $\gamma_\# h_\#$  que par une conjugaison de  $\pi_1(V, p)$ . Ainsi nous pouvons définir  $\Phi$  par  $[h] \mapsto [\gamma_\# h_\#]$ .

Les classes modulaires dans le noyau de  $\Phi$  sont celles qui peuvent se représenter par des difféotopies  $h \in \text{Diff}_+(V)$  vérifiant  $h(p) = p$  et  $h_\# = \text{id}: \pi_1(V, p) \rightarrow \pi_1(V, p)$ . Par un léger abus de langage nous disons que  $[h]$  agit trivialement sur  $\pi_1V$ .

LEMME 3.2. *Soit  $\theta \in \pi_0 \text{Diff}_+(V)$  une classe modulaire qui est d'ordre fini  $m \geq 2$  et qui agit trivialement sur  $\pi_1 V$ . Alors un nœud  $K$  et son image  $\theta K$  sont indistinguables par les invariants de type fini rationnels ou à valeurs dans un groupe abélien sans  $m$ -torsion.*

DÉMONSTRATION. La classe modulaire  $\theta$  agit sur le module  $\mathcal{K}_n V$  par un automorphisme dont l'ordre est divisible par  $m$ . En travaillant sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$  nous pouvons définir une application  $*$  :  $\mathcal{K}_n V \rightarrow \mathcal{K}_n V$  par  $K^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta^i K$ . C'est une projection sur le sous-espace invariant par  $\theta$ .

Puisque  $\theta$  induit l'identité sur  $\pi_1 V$ , tout nœud  $n$ -singulier  $K$  est homotope à son image  $\theta K$ . Par discrétisation de cette homotopie (voir lemme 1.2), il existe  $A^i \in \mathcal{K}_{n+1} V$  tel que  $\delta A^i = K - \theta^i K$  pour tout  $i$ . En moyennant,  $A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m A^i$  donne  $\delta A = K - K^*$ . Par projection nous constatons que  $\delta A^* = 0$ , donc  $\delta(A - A^*) = K - K^*$ . Étendant cette construction par linéarité, on conclut que pour tout  $A_n \in \mathcal{K}_n V$  il existe  $A_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1} V$  tel que  $\delta(A_{n+1} - A_{n+1}^*) = A_n - A_n^*$ . Ceci s'itère pour tout  $n$ .

Pour tout nœud  $K \in \mathcal{K} V$  ceci implique que  $K - K^* \in \mathcal{F}_n V$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et par conséquent  $K - K^* \in \mathcal{F}_\omega V$ . Vu que  $\theta K^* = K^*$ , on conclut que  $K - \theta K \in \mathcal{F}_\omega V$ . Autrement dit,  $K$  et  $\theta K$  ne peuvent pas être distingués par des invariants de type fini à valeur dans un groupe abélien sans  $m$ -torsion.  $\square$

REMARQUE 3.3. L'argument ci-dessus s'applique à toute 3-variété connexe orientable. Si nous supposons  $V$  fermée, irréductible, et suffisamment grande, alors Waldhausen [94] a montré que  $\Phi: \pi_0 \text{Diff}_+(V) \rightarrow \text{Out} \pi_1(V)$  est un isomorphisme. Pour exploiter le lemme 3.2 il faudra regarder des variétés qui sont réductibles ou qui ne sont pas suffisamment grandes, pour espérer trouver un noyau  $\ker(\Phi)$  non trivial. Moralement ceci veut dire que le phénomène est plutôt rare, mais on verra qu'il se produit par exemple dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ .

**3.3. Nœuds dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ .** Pour montrer que le problème de la torsion est bien réel, j'ai analysé plus finement les nœuds dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ , voir [E3, 2nde partie].

Ici l'apparition de la torsion est liée au groupe fondamental  $\pi_1 \text{SO}(3) \cong \mathbb{Z}/2$  et à l'homéomorphisme de spin. Pour  $t \in [0, 1]$  soit  $\rho_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la rotation d'angle  $2\pi t$  autour d'un axe fixé. Le lacet  $\rho: [0, 1] \rightarrow \text{SO}(3)$  représente l'élément non trivial dans  $\pi_1 \text{SO}(3)$ .

Sur le cylindre  $C = [0, 1] \times \mathbb{S}^2$  on définit l'application  $h: C \rightarrow C$  par  $h(t, s) = (t, \rho_t(s))$ . L'homéomorphisme  $h$  fixe le bord  $\partial C = \{0, 1\} \times \mathbb{S}^2$  point par point, et  $h^2$  est isotope, relativement au bord, à l'identité. La classe d'isotopie  $[h]$  est l'élément non trivial du groupe modulaire  $\text{Diff}(C, \partial C)$ .

Pour toute sphère épaissie plongée  $\tau: [0, 1] \times \mathbb{S}^2 \hookrightarrow V$  on définit  $h_\tau: V \rightarrow V$  par  $h_\tau(x) = \tau h \tau^{-1}(x)$  si  $x$  est dans l'image de  $\tau$ , et  $h_\tau(x) = x$  sinon. On appelle  $h_\tau$  le *twist de Dirac* le long de la sphère  $\tau_0$ . Évidemment  $h_\tau$  est un homéomorphisme (que l'on peut facilement rendre lisse) et  $h_\tau^2$  est isotope à l'identité de  $V$ . Ainsi on obtient un élément  $[h_\tau] \in \text{Diff}(V)$  d'ordre 1 ou 2 qui agit trivialement sur  $\pi_1 V$ .

REMARQUE 3.4. D'après le lemme 3.2 les invariants de type fini sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  ne distinguent pas un nœud  $K$  et son image  $hK$ . Afin de trouver des exemples non triviaux où  $hK \neq K$  il faut et il suffit que  $\theta = [h]$  soit non trivial (i.e. d'ordre 2), grâce au théorème 3.1.

La variété évidente pour analyser cette construction est  $V = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Lieberum [64] a construit un invariant universel de type fini sur  $\mathbb{Q}$  (à la Kontsevich) pour les nœuds dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Pour analyser la partie torsion j'ai construit, de manière combinatoire, un invariant universel sur  $\mathbb{Z}$  de degré 1. Pour cela il a fallu notamment analyser l'algèbre des cordes sur  $\mathbb{Z}$ , qui se scinde en une partie libre et une partie de torsion non triviale.

THÉORÈME 3.5. *Soit  $|\cdot|: \mathcal{K}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$  l'application qui associe à chaque nœud  $K$  sa classe d'homologie. On sait déjà que  $K$  et  $hK$  sont indistinguables par les invariants de type fini sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ . Par contre, il existe un invariant  $v: \mathcal{K}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$  de degré 1 tel que  $v(K) \neq v(hK)$  pour tout  $K$  vérifiant  $|K| \in \{\pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\}$ .  $\square$*

L'exemple  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  est le premier à exhiber des phénomènes de torsion dans la théorie de Vassiliev. À ma connaissance il reste le seul résultat publié sur cette question.

Chernov [18] a construit l'invariant universel de degré 1 des nœuds dans un  $\mathbb{S}^1$ -fibré sur une surface  $F$  différente de  $\mathbb{S}^2$  et de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Dans ce cas il n'existe pas de torsion.

**3.4. Généralisations.** Pour résumer, on sait que les invariants de type fini peuvent mener à des phénomènes de torsion, et on voit clairement une possible origine géométrique. Bien sûr, il peut y avoir d'autres raisons, notamment dans le cas de la sphère  $\mathbb{S}^3$  une éventuelle partie de torsion ne serait certainement pas de cette origine géométrique.

En général la torsion reste assez mal comprise, mais au moins pour la torsion de provenance géométrique on peut espérer une clarification par les étapes suivantes :

Tout d'abord il serait intéressant d'approfondir les résultats pour  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  aux degrés supérieurs  $n \geq 2$ . La partie libre étant connue, une étude de la torsion compléterait la théorie de Vassiliev sur  $\mathbb{Z}$  pour la variété  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  :

- (1) Quelle est la partie de torsion en degré supérieur 2, 3, 4, ... ?
- (2) L'intégration combinatoire fonctionne-t-elle en degré 2, 3, 4, ... comme en degré 1, ou faut-il rajouter des relations au delà de celles qui sont évidentes ?
- (3) Combien d'information est contenue dans ces invariants de torsions ? Suffit-elle pour distinguer tout nœud  $K$  de son image  $hK$  ?

Il est plausible de s'attendre aux phénomènes similaires dans les espaces lenticulaires  $L(p, q)$ . Ici l'astuce du lemme 3.2 ne suffit pas, et une étude indépendante s'impose. Le groupe modulaire de  $L(p, q)$  a été déterminé par Bonahon [11].

Ensuite, il est naturel de considérer les sommes connexes. Dans  $V = V_1 \# V_2$  la sphère  $S$  séparant les deux facteurs définit un twist de Dirac  $h: V \rightarrow V$ . Si  $S$  borde une boule, c'est-à-dire si  $V_1 \cong \mathbb{S}^3$  ou  $V_2 \cong \mathbb{S}^3$ , alors  $h \simeq \text{id}$ . Plus généralement, si un des deux facteurs, disons  $V_1$ , est un espace lenticulaire, alors le twist de Dirac peut être défait par une rotation de  $V_1$ . (Les travaux de Gluck [39] suggèrent que  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ , et  $L(p, q)$  sont les seules variétés avec une telle symétrie par rotation.) En excluant ces cas exceptionnels, on arrive à la situation attendue où  $[h]$  est d'ordre 2. D'après le théorème 3.1 il existe donc une infinité de nœuds  $K$  tels que  $K \neq hK$ , et qui sont indistinguables par des invariants de type fini sur  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ . Il faudra ensuite comprendre s'ils sont distingués par les invariants dans  $\mathbb{Z}/2$ . On manque actuellement d'outils généraux pour le faire, mais une analyse fine me semble abordable.

Le noyau  $\Gamma(V) := \ker(\pi_0 \text{Diff}_+(V) \rightarrow \text{Out } \pi_1(V))$  a été décrit par McCullough [70] : en décomposant  $V = V_0 \# V_1 \# \dots \# V_n$  en facteurs premiers, le noyau  $\Gamma(V)$  est engendré par  $\Gamma(V_0), \Gamma(V_1), \dots, \Gamma(V_n)$  ainsi que les twists de Dirac le long des  $n$  sphères séparant les facteurs. Avec l'étude des sommes connexes on exhuste ainsi une des deux sources de torsion ; l'autre provient des facteurs irréductibles non suffisamment grands.

## 4. Étude des nœuds locaux

**4.1. Questions naturelles.** Dans notre étude des nœuds dans des 3-variétés apparaît naturellement le concept des nœuds locaux. Bien que ce soient les nœuds situés le plus trivialement possible dans une 3-variété, leur traitement n'est pas trivial. La notion suggère quelques conjectures plausibles :

- (1) L'application canonique  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{K}V$  est injective.
- (2) Plus généralement, pour toute somme connexe  $V = V_1 \# V_2$  les applications induites  $\mathcal{K}V_1 \rightarrow \mathcal{K}V$  et  $\mathcal{K}V_2 \rightarrow \mathcal{K}V$  sont injectives.
- (3) Pour toute somme connexe  $V = V_1 \# V_2$  on a  $\mathcal{K}V_1 \cap \mathcal{K}V_2 = \mathcal{K}\mathbb{R}^3$  (vus comme sous-ensembles de  $\mathcal{K}V$ ).

Pour (1) nous supposons que  $V$  est orientable ; sinon  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{K}V$  identifie les images miroir et ne peut pas être injective. La question (1) est un cas particulier de la question (2), en posant  $V_2 = \mathbb{S}^3$ . Dans (3) nous supposons tacitement l'injectivité des trois applications précédentes, afin d'identifier  $\mathcal{K}V_1$ ,  $\mathcal{K}V_2$ , et  $\mathcal{K}\mathbb{R}^3$  avec leurs images dans  $\mathcal{K}V$ .

REMARQUE 4.1. Ces affirmations apparaissent très plausibles, certes. Néanmoins elles ne semblent pas être des corollaires immédiats des propriétés générales des isotopies. En particulier je ne vois pas de raison pour qu'elles soient vraies en toute dimension, et la construction d'un contre-exemple en dimension supérieure, disons d'une 2-sphère nouée dans  $\mathbb{S}^4$  puis dans d'autres 4-variétés, serait sans doute intéressant.

REMARQUE 4.2. Après la décomposition le long des sphères, des questions analogues se posent pour la décomposition le long des tores (la décomposition JSJ). Ces questions ont été étudiées et résolues dans la thèse de Popescu-Pampu [81, 82]

Nous allons montrer dans la suite que l'affirmation (3) est vraie. Plus explicitement nous démontrons qu'un nœud non local ne peut pas traverser une 2-sphère. Pour ce faire je raffine une des techniques standards de « couper-coller » en dimension 3. Les affirmations (1) et (2) sont probablement d'une difficulté comparable, mais quelques tentatives m'ont convaincu qu'une étude approfondie indépendante sera nécessaire.

**4.2. Décomposition le long des sphères.** L'opération la plus fondamentale pour les 3-variétés est la somme connexe, notée  $V = V_1 \# V_2$ , et réciproquement le scindement de  $V$  en deux facteurs  $V_1$  et  $V_2$  le long d'une sphère les séparant. Ce procédé peut être itéré, et dans ce paragraphe nous rappelons une notation éprouvée pour décrire le découpage le long de plusieurs sphères simultanément, cf. [42].

Soit  $W$  une 3-variété compacte orientée dont le bord consiste en 2-sphères. Si  $W$  est connexe on obtient sa *clôture*  $\langle W \rangle$  en recollant une 3-cellule à toute 2-sphère du bord. Si  $W$  a plusieurs composantes connexes  $W_1, \dots, W_n$ , on définit sa *clôture connexe* par  $\langle W \rangle := \langle W_1 \rangle \# \dots \# \langle W_n \rangle$ .

EXEMPLE 4.3. On a  $\langle W \rangle \cong \mathbb{S}^3$  si et seulement si  $W$  est une collection de 3-sphères trouées, c'est-à-dire privées de l'intérieur d'un nombre fini de 3-cellules fermées disjointes.

Soit  $V$  une 3-variété compacte orientée. Un *système de sphères*  $S \subset V$  est une réunion finie non vide de 2-sphères disjointes dont chacune sépare sa composante de  $V$ . Un plongement  $\tau: [-1, +1] \times S \hookrightarrow V$  vérifiant  $\tau_0 = \text{id}_S$  paramétrise un voisinage tubulaire  $T$  de  $S$  dans  $V$ . Le *découpage* de  $V$  le long de  $S$  est la 3-variété non connexe  $V|S := V \setminus \text{int} T$ , dont le bord consiste en deux copies de  $S$ .

REMARQUE 4.4. Si  $V$  est une 3-variété connexe fermée orientée, alors pour tout système de 2-sphères  $S \subset V$  on a  $V \cong \langle V|S \rangle$ .

Une coorientation de  $S$  induit une coorientation du bord de  $V|S$ . Une composante de  $V|S$  est appelée *positive* resp. *négative* si son bord est coorienté vers l'intérieur resp. vers l'extérieur. Dans la suite on supposera toujours que la coorientation de  $S$  est *cohérente* dans le sens que toute composante de  $V|S$  est soit positive soit négative. Comme  $V$  est connexe et chaque sphère de  $S$  est séparante, il y a exactement deux coorientations cohérentes de  $S$ .

DÉFINITION 4.5. On note  $V|S^+$  et  $V|S^-$  la réunion des composantes positives et négatives, respectivement, de la décomposition  $V|S$ . Ainsi on obtient une présentation de  $V$  comme la somme connexe de deux variétés connexes fermées orientées :

$$V \cong \langle V|S^+ \rangle \# \langle V|S^- \rangle.$$

**4.3. Couper les variétés en quatre.** Le but de ce paragraphe est de montrer qu'un nœud non local ne peut pas traverser une 2-sphère. La technique employée est assez générale (et élégante) et semble d'intérêt indépendant.

Étant donné un deuxième système de sphères  $S_0$  transverse à  $S$ , on souhaite couper  $V$  le long de  $S$  et le long de  $S_0$  afin de définir  $V|S^+|S_0^+$ . La définition ci-dessus s'applique immédiatement au cas disjoint, où  $S \cap S_0 = \emptyset$ . Plus généralement, nous allons expliquer comment remplacer  $S_0$  par un système de 2-sphères  $S_*$  qui est disjoint de  $S$ , d'une manière suffisamment canonique, de sorte que le découpage  $\langle V|S^+|S_*^+ \rangle$  soit bien défini.

Ceci se réalise par une *chirurgie* sur  $S_0$  le long de  $S$  comme indiqué dans la figure 1. L'intersection  $C_0 := S_0 \cap S$  est une collection finie de cercles. Soit  $T_\varepsilon = \tau([- \varepsilon, + \varepsilon] \times S)$  un petit voisinage tubulaire de  $S$  de sorte que  $S_0 \cap T_\varepsilon = \tau([- \varepsilon, + \varepsilon] \times C_0)$ . On choisit un cercle  $C \subset C_0$  qui borde un disque  $D \subset S$  tel que  $\partial D = D \cap C_0 = C$ . On remplace alors le cylindre  $\tau([- \frac{\varepsilon}{2}, + \frac{\varepsilon}{2}] \times C)$  par deux disques  $\tau(\{- \frac{\varepsilon}{2}, + \frac{\varepsilon}{2}\} \times D)$ . Le résultat est un système de sphères  $S_1$  dont l'intersection  $C_1 := S_1 \cap S$  a une composante de moins. Par récurrence on arrive à un système de sphères  $S_* \subset V$  disjoint de  $S$ .

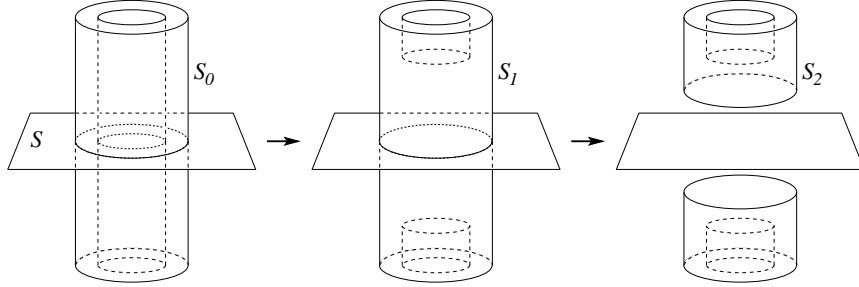


FIG. 1. Chirurgie sur  $S_0$  afin de rendre  $S_*$  disjoint de  $S$

Supposons de plus que  $S$  et  $S_0$  sont munies de coorientations cohérentes. La chirurgie produit  $S_*$  avec une coorientation cohérente induite par  $S_0$ . On définit alors la 3-variété  $V|S^+|S_0^+ := (V|S^+) \cap (V|S_0^+)$ . Les choix dans la construction de  $S_*$  ne changent  $V|S^+|S_0^+$  qu'en découpant ou recollant des 3-cellules. En particulier la clôture connexe  $\langle V|S^+|S_0^+ \rangle$  est bien définie. On obtient ainsi un découpage en quatre :

$$V \cong \langle V|S^+|S_0^+ \rangle \# \langle V|S^+|S_0^- \rangle \# \langle V|S^-|S_0^+ \rangle \# \langle V|S^-|S_0^- \rangle.$$

Le théorème suivant dit que ce découpage est invariant par des isotopies de  $S$  et de  $S_0$  :

**THÉOREME 4.6 ([E7]).** *Soit  $V$  une variété de dimension 3 contenant trois sphères  $S$ ,  $S_0$ ,  $S_1$  de dimension 2, séparantes et coorientées, de sorte que  $S_0$  et  $S_1$  soient transverses à  $S$ . Si  $S_0$  et  $S_1$  sont isotopes, alors  $\langle V|S^+|S_0^+ \rangle \cong \langle V|S^+|S_1^+ \rangle$ .  $\square$*

Ce résultat est une version d'isotopie du théorème d'Alexander-Schönflies, qui dit que le découpage de la sphère  $\mathbb{S}^3$  le long de n'importe quelle 2-sphère plongée  $S \subset \mathbb{S}^3$  produit deux boules, c'est-à-dire  $\mathbb{S}^3|S^+ \cong \mathbb{S}^3|S^- \cong \mathbb{D}^3$ . (En effet ce dernier s'obtient comme cas particulier, voir [E7].) Nous en déduisons le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.7.** *Soit  $V$  une 3-variété et soit  $S \subset V$  une 2-sphère séparante coorientée. Si un nœud  $K_0$  dans  $V|S^+$  est isotope à  $K_1$  dans  $V|S^-$ , alors il est local.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $S_0 \subset V|S^+$  une copie parallèle de  $S$  située du côté positif et munie de la même coorientation. Ceci entraîne  $V|S^-|S_0^+ = \emptyset$  alors que  $V|S^+|S_0^+ = V|S_0^+$  contient  $K_0$ . Par hypothèse il existe une difféotopie  $\Phi : [0, 1] \times V \rightarrow V$  partant de  $\Phi_0 = \text{id}_V$  telle que  $\Phi_1 K_0 = K_1$  soit contenu dans  $V|S^-$ . On peut supposer que la 2-sphère  $S_1 := \Phi_1 S_0$  est transverse à  $S$ . Grâce au théorème précédent on a  $\langle V|S^-|S_1^+ \rangle \cong \langle V|S^-|S_0^+ \rangle \cong \mathbb{S}^3$ , donc  $V|S^-|S_1^+$  est une collection de 3-sphères trouées. Comme le nœud  $K_1$  est contenu dans  $V|S^-|S_1^+$ , il est local dans  $V|S^-$ . Symétriquement  $K_0$  est local dans  $V|S^+$ .  $\square$

## 5. Quelques perspectives

L'étude des nœuds et la théorie des 3-variétés ont toujours été étroitement liées. Il n'est donc pas surprenant que l'esquisse précédente témoigne d'une fructueuse interaction dans le cas particulier de la question de Vassiliev : d'une part la topologie algébrique et des méthodes, souvent géométriques, propres aux 3-variétés, et d'autre part les nœuds dans des 3-variétés et leur théorie de Vassiliev, dont je n'ai mentionné que l'aspect homotopique.

Il y a beaucoup plus à dire sur chacun de ces thèmes, et je suis conscient du fait qu'en présentant mes travaux je n'ai exposé qu'une fraction minime et peu représentative du sujet. Néanmoins j'espère que ce survol illustre de manière convaincante que l'étude des nœuds mène souvent à des bonnes questions sur les 3-variétés, et fournit même parfois des outils pour y répondre. Dans cet esprit j'ajoute quelques perspectives afin de compléter le panorama autour de la question de Vassiliev.

**5.1. Questions concrètes.** Tout au long du développement précédent j'ai évoqué des questions qui se posent naturellement dans le contexte. Par souci de synthèse j'en souligne ici quelques-unes qui me semblent tout à fait abordables :

- L'étude des nœuds locaux et des notions voisines, comme la première étape de l'étude des nœuds dans des 3-variétés quelconques, cf. §4.1.
- L'action du groupe modulaire des 3-variétés en somme connexe et la construction d'un outillage adéquat pour les invariants de type fini (de torsion), cf. §3.4.
- La question d'hérédité est plus ambitieuse : si les invariants de type fini distinguent tous les nœuds dans  $V_1$  et  $V_2$ , distinguent-ils tous les nœuds dans  $V_1 \# V_2$  ?

Après avoir compris les sommes connexes on pourrait passer à la décomposition en variétés irréductibles, dont l'étude semble d'une difficulté plus élevée.

**5.2. Questions ouvertes.** Les questions développées ci-dessus constituent le début d'un programme qui vise à lier plus profondément la question de Vassiliev avec la théorie des 3-variétés. L'idée est d'appliquer les résultats et techniques de la dernière à la question de Vassiliev, mais réciproquement l'étude des nœuds générera probablement de bonnes questions sur les 3-variétés, comme nous l'avons déjà vu dans les exemples précédents.

Le problème central reste la question de Vassiliev pour  $\mathbb{S}^3$  : les invariants de type fini distinguent-ils tous les nœuds dans la sphère  $\mathbb{S}^3$  ? Évidemment, si la réponse est « non » pour  $\mathbb{S}^3$ , alors la réponse est « non » pour toute 3-variété. Une réponse positive serait sans doute plus satisfaisante, mais il n'existe pas encore d'approche prometteuse.

Entre-temps, on peut se poser la question réciproque : si la question de Vassiliev est vraie pour  $\mathbb{S}^3$ , est-elle vraie pour toute 3-variété fermée  $V$  ? En supposant résolus les problèmes reliés aux sommes connexes des 3-variétés, il suffira d'analyser les 3-variétés irréductibles. On pourrait ensuite s'intéresser à la décomposition canonique le long d'une famille maximale de tores (la décomposition JSJ), cf. Popescu-Pampu [81, 82].

Tout comme pour la décomposition le long des sphères, ceci sépare le travail en deux parties : d'une part les effets de la décomposition, d'autre part l'analyse des 3-variétés simples (non décomposable dans le sens JSJ).

Actuellement il n'est pas clair qu'il existe un rapport profitable entre la géométrisation des 3-variétés et la question de Vassiliev. Mais il est imaginable que l'on puisse ramener la question au cas central de  $\mathbb{S}^3$ . Naïvement parlant, étant donné un revêtement de 3-variétés  $p: \tilde{V} \rightarrow V$ , les questions de Vassiliev pour  $\tilde{V}$  et  $V$  sont-elles équivalentes ? ou bien : sous quelles conditions supplémentaires ? Comme conséquence de la géométrisation des 3-variétés, les revêtements universels qui peuvent apparaître sont homéomorphes à  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Oubliant la géométrie, leur théorie des nœuds est visiblement la même.

Ces remarques indiquent comment la question générale se développe en une hiérarchie de questions d'une difficulté assez variée. Peut-être la plus dure est la question initiale pour la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Bien sûr je regrette de ne pas avoir établi une *équivalence* entre la question

de Vassiliev pour  $\mathbb{S}^3$  et la conjecture de Poincaré. L'implication que j'ai montrée reste intéressante mais la situation n'est plus symétrique. Je pense d'autant plus que la question de Vassiliev mérite de l'attention dans tous ces aspects et variations : c'est une des facettes, particulière mais intéressante, de la topologie en dimension 3.

*Es stand noch nicht bei Morgenstern / Noch war nicht seine Zeit,  
Und Goethe lag es völlig fern / Es war noch nicht soweit.  
Erst David Joyce hat es geschaffen / Nun kann es alle Welt begaffen.  
So führt der Menschheit steter Wandel / von Goethe fort zum Quandel.  
Egbert Brieskorn, Goethe und das Quandel*

## CHAPITRE II

# Théorie des quandles

Si le premier chapitre était géométrique, le deuxième présente quelques concepts algébriques de la théorie des nœuds explorés dans [E<sub>6</sub>], [E<sub>9</sub>], [E<sub>10</sub>], [E<sub>12</sub>]. Je commence par les notions de quandle puis d'ensemble automorphe. Ce sont des solutions ensemblistes de l'équation de Yang-Baxter, dont j'étudie la théorie des déformations. L'homologie des quandles en est un cas particulier, qui a suscité beaucoup d'attention ces dernières années. J'y contribue par la théorie algébrique des revêtements et par leur correspondance de Galois, formellement analogue au traitement des groupes parfaits par Kervaire, et j'en déduis les groupes  $H_2(Q_K)$  et  $H^2(Q_K)$  du quandle  $Q_K$  associé à un nœud  $K \subset \mathbb{S}^3$ .

### 1. Définition et premiers exemples

Dans tout groupe  $(G, \cdot)$  la conjugaison à droite  $a * b := b^{-1} \cdot a \cdot b$  et son inverse, la conjugaison à gauche  $a \bar{*} b := b \cdot a \cdot b^{-1}$ , jouissent des propriétés suivantes :

$$(Q1) \quad a * a = a \quad \text{(idempotence)}$$

$$(Q2) \quad (a * b) \bar{*} b = (a \bar{*} b) * b = a \quad \text{(inversibilité à droite)}$$

$$(Q3) \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad \text{(auto-distributivité)}$$

En prenant ces propriétés pour axiomes, un *quandle* est un ensemble  $Q$  muni de deux opérations  $*, \bar{*}: Q \times Q \rightarrow Q$  vérifiant (Q1-Q3). Évidemment il suffit d'exiger que  $*$  soit inversible à droite, puis l'opération inverse  $\bar{*}$  s'en déduit. Ainsi les quandles modélisent la conjugaison dans un groupe, et l'axiomatisation apparaît naturelle dans toutes les situations où la multiplication est absente ou de nature secondaire. En voici quelques exemples :

**EXEMPLE 1.1.** La motivation principale pour l'étude des quandles provient des nœuds. Le théorème de Wirtinger [21] permet de lire une présentation par générateurs et relations du groupe  $\pi_K = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  sur un diagramme planaire d'un nœud ou entrelacs  $K \subset \mathbb{S}^3$ . Elle utilise la conjugaison mais non la multiplication du groupe, et peut donc être vue comme définissant un quandle  $Q_K$ . Dans ce cas les axiomes (Q1-Q3) correspondent précisément aux mouvements de Reidemeister, et ces observations ont mené Joyce [49] à initier la théorie des quandles. Comme application il a pu montrer que l'invariant  $K \mapsto Q_K$  classe les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$  à orientation près. Beaucoup d'auteurs ont indépendamment découvert ou redécouvert des notions équivalentes [88, 68, 69, 12, 37, 29, 24, 53].

**REMARQUE 1.2.** Tout groupe  $G$  définit un quandle  $\text{Conj}(G)$  avec la conjugaison pour opération. Réciproquement, étant donné un quandle  $Q$  on définit son *groupe adjoint*  $\text{Adj}(Q) = \langle Q \mid R \rangle$  comme le quotient du groupe  $F(Q)$  librement engendré par l'ensemble  $Q$  modulo les relations induites par la conjugaison,  $R = \{a * b = b^{-1} \cdot a \cdot b \mid a, b \in Q\}$ . La construction induit une application canonique  $\text{adj}: Q \hookrightarrow F(Q) \twoheadrightarrow \text{Adj}(Q)$ , qui vérifie  $\text{adj}(a * b) = \text{adj}(a) * \text{adj}(b)$ . Ainsi le groupe  $\text{Adj}(Q)$  peut être vu comme le « groupe enveloppant » du quandle  $Q$ . Remarquons toutefois que  $\text{adj}$  n'est en général pas injectif : beaucoup de quandles ne sont pas plongeables dans des groupes. Par exemple, le quandle  $Q_K$  d'un nœud  $K$  se plonge dans  $\text{Adj}(Q_K) = \pi_K$  si et seulement si  $K$  est premier [86], [E<sub>6</sub>].



EXEMPLE 1.3. Un *espace symétrique* est une variété riemannienne connexe  $V$  telle que tout point  $x \in V$  admette une isométrie  $s_x: V \xrightarrow{\sim} V$  qui renverse toute géodésique  $\gamma: ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow (V, x)$ , c'est-à-dire  $s_x \circ \gamma(t) = \gamma(-t)$ . Par conséquent, toute géodésique peut être prolongée en une géodésique complète  $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow V$ , et par le théorème de Hopf-Rinow  $V$  est une variété riemannienne complète. Puisque  $V$  est connexe, toute paire de points  $x, x' \in V$  peut être liée par une géodésique, ce qui implique que l'isométrie  $s_x$  est unique. On en déduit que  $(V, *)$  est un quandle pour l'opération  $x * y := s_y(x)$ .

Cette approche a été élaborée par Loos [68], qui l'a prise pour point de départ de son étude des espaces symétriques vus comme « quandles involutifs lisses ».

EXEMPLE 1.4. Tout groupe de Lie  $G$  est étroitement lié avec son algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = T_1 G$  par deux applications fondamentales : l'exponentielle  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  et l'action adjointe  $\text{ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , notée ici  $\text{ad}(g): x \mapsto x^g$ . Elles induisent une structure de quandle sur  $\mathfrak{g}$  par  $x * y := x^{\exp(y)}$ . Le crochet de Lie est la dérivée,  $[x, y] = \frac{d}{dt} [x * ty]_{t=0}$ .

Dans un certain sens le quandle  $(\mathfrak{g}, *)$  est à mi-chemin entre l'algèbre de Lie  $(\mathfrak{g}, [,])$  et le groupe de Lie  $(G, \cdot)$ . Évidemment il est préférable de disposer de la structure la plus forte de ces trois, à savoir la structure du *groupe* de Lie sur  $G$ .

Contrairement au cas de la dimension finie, les algèbres de Lie de dimension infinie ne se réalisent pas toutes comme l'algèbre associée à un groupe de Lie. Ce phénomène se produit même pour des algèbres de Lie de Banach, voir van Est et Korthagen [91] ou Serre [87, partie II, §V.8]. Il est donc intéressant à noter que la structure de quandle peut souvent être sauvée : sous des conditions topologiques modestes assurant la convergence [73], on peut définir  $x * y := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\dots [x, y], y] \dots, y]$ . L'antisymétrie  $[x, x] = 0$  implique (Q1), l'identité  $\exp(-y)\exp(y) = 1$  implique (Q2), et la relation de Jacobi implique (Q3).

## 2. Opérateurs de Yang-Baxter

**2.1. Ensembles automorphes.** Pour tout ensemble  $X$  avec produit  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  on peut définir les translations à droite,  $\rho_b: a \mapsto a * b$ . Ce sont des automorphismes de  $(X, *)$  si et seulement si les axiomes (Q2) et (Q3) sont satisfaits. Pour cette raison Brieskorn [12] appelle une telle structure  $(X, *)$  un *ensemble automorphe*.

DÉFINITION 2.1. Un *morphisme* entre deux ensembles automorphes  $Q$  et  $Q'$  est une application  $\phi: Q \rightarrow Q'$  vérifiant  $\phi(a * b) = \phi(a) * \phi(b)$ . Les ensembles automorphes et leurs morphismes forment une catégorie, dont les quandles sont une sous-catégorie pleine.

Le groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(Q)$  est formé des morphismes bijectifs  $\phi: Q \rightarrow Q$ . Par convention leur composition  $\phi\psi$  est définie par  $a^{(\phi\psi)} = (a^\phi)^\psi$  pour tout  $a \in Q$ .

Le groupe  $\text{Inn}(Q)$  des *automorphismes intérieurs* est le sous-groupe de  $\text{Aut}(Q)$  engendré par  $\rho_a$  avec  $a \in Q$ . Nous définissons  $\text{inn}: Q \rightarrow \text{Inn}(Q)$  par  $a \mapsto \rho_a$ .

Un ensemble automorphe  $Q$  est *homogène* si  $\text{Aut}(Q)$  agit transitivement sur  $Q$ . Plus spécifiquement,  $Q$  est dit *connexe* si le sous-groupe  $\text{Inn}(Q)$  agit transitivement.

**2.2. Représentations des tresses.** Brieskorn [12] a utilisé les ensembles automorphes pour décrire et analyser les actions du groupe des tresses dans son étude des singularités. Ce groupe fut introduit en 1925 par Emil Artin [4, 3], qui en donna la présentation suivante :

$$(1) \quad B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle.$$

DÉFINITION 2.2. Soit  $V$  un module sur un anneau commutatif  $\mathbb{A}$ . Un *opérateur de Yang-Baxter* est un automorphisme  $c: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  satisfaisant à la *relation de tresse*, aussi nommée *l'équation de Yang-Baxter* :

$$(2) \quad (c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes c)(c \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes c).$$

Dans ce chapitre tous les produits tensoriels seront sur  $\mathbb{A}$ .

L'équation (2) est d'abord apparue en physique théorique dans un article de Yang [98] sur le problème de  $n$  corps en dimension 1, et dans des travaux de Baxter [7, 8] sur des modèles de mécanique statistique exactement résolubles, puis en théorie quantique des champs [28]. Elle a une interprétation naturelle pour les représentations du groupe des tresses : nous pouvons définir un automorphisme  $c_i: V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$  par

$$c_i = \text{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes c \otimes \text{id}_V^{\otimes(n-i-1)} \quad \text{for } i = 1, \dots, n-1.$$

La présentation d'Artin (1) assure que pour tout  $n$  il existe une unique représentation  $\rho_c^n: \mathbb{B}_n \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{A}}(V^{\otimes n})$  telle que  $\rho_c^n(\sigma_i) = c_i$ .

Artin, après avoir introduit les groupes de tresses, aurait pu écrire l'équation (2) pour en déduire des représentations linéaires. Mais sans exemples non triviaux la théorie serait restée vide. En effet, il est remarquable que l'équation (2) admette des solutions. La plupart ont été découvertes seulement à partir des années 1980, en étudiant les déformations.

**2.3. Déformations.** Pour tout module  $V$  la transposition  $\tau: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  donnée par  $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$  est un opérateur de Yang-Baxter. Bien que trivial, cet opérateur admet des déformations non triviales :

EXEMPLE 2.3 (Jones [46]). Supposons que  $V$  est libre de rang 2, ayant  $(v, w)$  pour base. Alors  $(v \otimes v, v \otimes w, w \otimes v, w \otimes w)$  est une base du produit tensoriel  $V^{\otimes 2}$ . Considérons

$$c(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & q-q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \xrightarrow{q \mapsto 1} c(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $q \in \mathbb{A}^\times$  la matrice  $c(q)$  représente un opérateur de Yang-Baxter sur  $V^{\otimes 2}$ , et pour  $q = 1$  nous obtenons la solution initiale  $c(1) = \tau$ . L'opérateur  $c(q)$  permet de construire le célèbre polynôme de Jones [46, 47, 48]. Plus généralement, les déformations de  $\tau$  mènent aux invariants dits *quantiques* de nœuds et entrelacs.

Étant donné la matrice  $c(q)$  de l'exemple, on peut directement *vérifier* qu'elle satisfait à l'équation de Yang-Baxter (2). Par contre, la *construction* de telles solutions est un problème profond qui a motivé la théorie des *groupes quantiques*, cf. [25, 51, 50]. Les ensembles automorphes, quant à eux, fournissent des solutions « ensemblistes » [26] :

EXEMPLE 2.4 (Freyd-Yetter [37]). Tout ensemble automorphe  $Q$  induit un opérateur de Yang-Baxter  $c_Q$  sur  $\mathbb{A}$  comme suit. Soit  $V = \mathbb{A}Q$  le  $\mathbb{A}$ -module libre à base  $Q$ . On définit

$$c_Q: \mathbb{A}Q \otimes \mathbb{A}Q \rightarrow \mathbb{A}Q \otimes \mathbb{A}Q \quad \text{par } x \otimes y \mapsto y \otimes (x * y) \quad \text{pour tout } x, y \in Q.$$

l'axiome (Q2) assure que  $c_Q$  est un automorphisme, et l'axiome (Q3) entraîne que  $c_Q$  satisfait à l'équation de Yang-Baxter.

À l'instar de l'exemple 2.3 il est naturel de se demander si l'opérateur  $c_Q$  admet des déformations. L'opérateur trivial  $\tau$  en est un cas particulier : si  $x * y = x$  pour tout  $x, y \in Q$ , alors  $c_Q = \tau$  et la théorie des groupes quantiques fournit des déformations.

**2.4. Classification des déformations formelles.** L'ensemble des opérateurs de Yang-Baxter  $c: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  est stable sous l'action par conjugaison de  $\text{Aut}(V)$ , et des opérateurs conjugués donnent des représentations conjuguées des tresses. Un des objectifs de la théorie est donc de classier les solutions de l'équation de Yang-Baxter (2) à conjugaison près. Dans des cas favorables nous pouvons atteindre ce but au moins *localement*, c'est-à-dire que nous savons classier les déformations d'un opérateur de Yang-Baxter donné. Dans [E9] j'établis la classification suivante :

THÉORÈME 2.5. *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau complet par rapport à l'idéal  $\mathfrak{m}$ , et soit  $Q$  un ensemble automorphe tel que  $|\text{Inn}(Q)|$  est inversible dans  $\mathbb{A}$ . Alors toute déformation de Yang-Baxter de  $c_Q: \mathbb{A}Q^2 \rightarrow \mathbb{A}Q^2$  est conjuguée à une déformation entropique.  $\square$*

La définition des applications « entropiques » est un peu technique mais donne une description parfaitement explicite :

DÉFINITION 2.6. La base naturelle  $Q^n$  de  $\mathbb{A}Q^n = (\mathbb{A}Q)^{\otimes n}$  permet d'identifier une application  $\mathbb{A}$ -linéaire  $f: \mathbb{A}Q^n \rightarrow \mathbb{A}Q^n$  et sa matrice  $f: Q^n \times Q^n \rightarrow \mathbb{A}$ , reliées par

$$f: (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \mapsto \sum_{y_1, \dots, y_n} f \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n).$$

L'application  $f$  est dite *quasi-diagonale* si  $f \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} = 0$  lorsque  $\text{inn}(x_i) \neq \text{inn}(y_i)$  pour un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Elle est *fortement équivariante* si elle est équivariante sous l'action de  $\text{Inn}(Q)^n$ , c'est-à-dire que  $f \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 * \alpha_1, \dots, x_n * \alpha_n \\ y_1 * \alpha_1, \dots, y_n * \alpha_n \end{bmatrix}$  pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Inn}(Q)$ . Finalement,  $f$  est *entropique* si elle est quasi-diagonale et fortement équivariante.

Ce résultat rend précise l'intuition suivante : plus  $\ker(\text{inn})$  est grand, plus il y a de déformations. Le cas extrême est un quandle trivial où  $c_Q = \tau$ . Réciproquement, plus  $\text{Inn}(Q)$  est grand, moins il y a de déformations. Le théorème nous permet par exemple de déduire des résultats de rigidité comme le suivant :

COROLLAIRE 2.7. *Soit  $G$  un groupe ayant un centre trivial et qui est engendré par une classe de conjugaison  $Q \subset G$ . Alors toute déformation de  $c_Q$  sur  $\mathbb{Q}[[h]]$  est équivalente à  $s \cdot c_Q$  où  $s \in 1 + (h)$ . Autrement dit,  $c_Q$  est rigide sur  $\mathbb{Q}[[h]]$ .  $\square$*

Le cas général est discuté dans [E<sub>9</sub>]. Il existe notamment des exemples d'opérateurs non rigides, qui sont à mi-chemin entre les deux extrêmes.

**2.5. Cohomologie de Yang-Baxter.** Pour établir cette classification des déformations, j'ai procédé comme de coutume en théorie des déformations [38] : on introduit une cohomologie convenable qui classe les déformations infinitésimales, puis on intègre le résultat infinitésimal en un résultat complet (lorsque c'est possible). J'explique ici les principaux éléments, car cette cohomologie me semble d'un intérêt plus général.

Le complexe des cochaînes est construit sur les modules  $C^n = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(V^{\otimes n}, \mathfrak{m}V^{\otimes n})$ . Pour  $f \in C^n$  le cobord partiel  $d_i^n$  est donné, en notation matricielle, par :

$$(3) \quad (d_i^n f) \begin{bmatrix} x_0, \dots, x_n \\ y_0, \dots, y_n \end{bmatrix} = +f \begin{bmatrix} x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \\ y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n \end{bmatrix} \cdot \text{id} \begin{bmatrix} x_i^{x_{i+1} \cdots x_n} \\ y_i^{y_{i+1} \cdots y_n} \end{bmatrix} \\ -f \begin{bmatrix} x_0^{x_i}, \dots, x_{i-1}^{x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n \\ y_0^{y_i}, \dots, y_{i-1}^{y_i}, y_{i+1}, \dots, y_n \end{bmatrix} \cdot \text{id} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Puis le cobord total  $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  est défini par la somme alternée  $d^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n$ . (J'explique ici seulement le cas d'un opérateur  $c = c_Q$  provenant d'un ensemble automorphe  $Q$ ; le cadre général est développé dans [E<sub>9</sub>].) Ceci définit le *complexe des chaînes de Yang-Baxter* dont la cohomologie est appelé la *cohomologie de Yang-Baxter*, notée  $H_{\text{YB}}^n(c)$ , ou plus explicitement  $H_{\text{YB}}^n(c; \mathbb{A}, \mathfrak{m})$  pour indiquer l'anneau  $\mathbb{A}$  et l'idéal  $\mathfrak{m}$ . La cohomologie  $H_{\text{YB}}^2(c)$  classe les déformations infinitésimales :

PROPOSITION 2.8. *Soit  $c$  un opérateur de Yang-Baxter et supposons que l'idéal  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{A}$  vérifie  $\mathfrak{m}^2 = 0$ . Alors  $\tilde{c} = c(\text{id}_V^{\otimes 2} + f)$  est un opérateur de Yang Baxter si et seulement si  $d^2 f = 0$ . En plus,  $c$  et  $\tilde{c}$  sont conjugués par  $(\text{id}_V + g)$  si et seulement si  $f = d^1 g$ .  $\square$*

Le théorème 2.5 de classification s'obtient ensuite par le calcul suivant :

THÉORÈME 2.9. *Les cochaînes entropiques forment un sous-module  $E^n$  du module des cocycles  $Z^n$ . Si l'ordre du groupe  $\text{Inn}(Q)$  est inversible dans  $\mathbb{A}$ , alors  $Z^2 = E^2 \oplus B^2$ , c'est-à-dire que tout 2-cocycle est cohomologue à un unique cocycle entropique.  $\square$*

Un ingrédient essentiel est la symétrisation par rapport à l'action de  $\text{Inn}(Q)$ . Sans l'hypothèse  $|\text{Inn}(Q)| \in \mathbb{A}^\times$  la décomposition  $Z^2 = E^2 \oplus B^2$  n'est plus valable.

**2.6. Cohomologie des quandles.** Dans le développement précédent nous avons regardé *toutes* les déformations de  $c_Q$  dans l'espace des opérateurs de Yang-Baxter. On pourrait se concentrer sur les déformations de la forme  $\tilde{c}_Q(a \otimes b) = \lambda(a, b) \cdot c_Q(a, b)$  où  $\lambda: Q \times Q \rightarrow \Lambda$  est une application dans un groupe abélien  $\Lambda$ . Dans ce cas nous travaillons sur l'algèbre  $\mathbb{A} = \mathbb{K}\Lambda$  du groupe  $\Lambda$  sur un anneau  $\mathbb{K}$ . L'avantage est que ces déformations mènent à des calculs plus maniables. Elles sont classifiées par la cohomologie suivante :

**DÉFINITION 2.10.** Soit  $Q$  un ensemble automorphe et soit  $\Lambda$  un groupe abélien. Le  $\mathbb{Z}$ -module  $C^n = C^n(Q, \Lambda)$  des  $n$ -cochaînes est formé par les applications  $\lambda: Q^n \rightarrow \Lambda$ . [Pour la cohomologie des quandles nous exigeons en plus que  $\lambda(a_1, \dots, a_n) = 0$  si  $a_i = a_{i+1}$  pour un indice  $i$ .] L'application cobord  $\delta^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  est définie par

$$(\delta^n \lambda)(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left[ \lambda(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) - \lambda(a_0^{a_i}, \dots, a_{i-1}^{a_i}, a_{i+1}, \dots, a_n) \right].$$

Ceci définit un complexe de cochaînes  $(C^*, \delta^*)$ , dont la cohomologie  $H^n(Q, \Lambda)$  est appelée la cohomologie de l'ensemble automorphe  $Q$  [ou du quandle  $Q$ , respectivement].

**REMARQUE 2.11.** La spécialisation aux quandles est importante si l'on veut construire des invariants d'entrelacs, en calculant la trace de la représentation linéaire associée du groupe des tresses. Cette condition assure l'invariance par stabilisation (cf. [E10]), c'est-à-dire, le premier mouvement de Markov, respectivement de Reidemeister.

**2.7. Le cas modulaire.** Dans notre résultat de rigidité, nous avons vu que la cohomologie de Yang-Baxter  $H_{\text{YB}}^*(Q, \mathbb{Q}[[h]])$  est plus souvent triviale, ou au moins très contrainte. Ceci est dû au choix de l'anneau  $\mathbb{Q}[[h]]$  sur lequel les quandles se déforment mal.

D'un autre côté, de nombreux calculs menés par Carter et al. ont montré que la cohomologie des quandles  $H^*(Q, \mathbb{Z}/n)$  est souvent non triviale pour des quandles finis. Dans le cas relativement premier où  $|Q|$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/n$  nous obtenons la rigidité déjà vue. Il est donc naturel d'étudier le cas modulaire, c'est-à-dire, les déformations de Yang-Baxter de  $c_Q$  sur l'anneau  $\mathbb{Z}/n[[h]]$  où  $\text{pgcd}(|Q|, n) > 1$ .

**REMARQUE 2.12.** L'anneau  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/n[[h]]$  est complet par rapport à  $\mathfrak{m} = (h)$ . Puisque  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{Z}/n$ , nous retrouvons la cohomologie des quandles  $H^2(Q, \mathbb{Z}/n)$  comme sous-module de la cohomologie de Yang-Baxter  $H_{\text{YB}}^2(Q; \mathbb{A}/\mathfrak{m}^2)$ , où la première correspond aux déformations diagonales. Autrement dit, la cohomologie des quandles n'est que le niveau infinitésimal de la théorie des déformations formelles de Yang-Baxter sur  $\mathbb{Z}/n$ .

Dans cette optique les questions suivantes émergent naturellement :

- (1) Comment déterminer  $H_{\text{YB}}^2(c_Q; \mathbb{A})$  dans le cas modulaire ?
- (2) Quelle information de  $H_{\text{YB}}^2(c_Q; \mathbb{A})$  n'est pas encore incluse dans  $H^2(Q, \mathbb{Z}/n)$  ?
- (3) Quelles sont les obstructions supérieures dans le cas modulaire ?
- (4) Quels invariants d'entrelacs obtient-on ainsi ?

À ma connaissance personne n'a étudié cette approche, qui est à cheval entre les théories des quandles et des groupes quantiques. Je l'ai formulée ici pour les quandles et les ensembles automorphes, mais elle est déjà intéressante pour les classes de conjugaison  $Q \subset G$ . Le but immédiat est de fournir des exemples nouveaux et non triviaux, afin d'explorer et d'illustrer l'étendue de cette approche. L'objectif général sera de classifier et de comprendre les déformations sur  $\mathbb{Z}/n[[h]]$ , au moins pour certaines familles importantes.

### 3. Correspondance de Galois

Vu leur définition, les quandles sont très proches des groupes. En général la structure de quandle est moins forte, et elle mène à des théorèmes de structure beaucoup moins évolués. Du côté « homologique », par contre, les quandles se sont émancipés de leurs frères aînés ces dernières années, et ont donné lieu à une théorie étonnamment riche.

Tout d'abord les travaux de Fenn, Rourke, et Sanderson [29, 30] ont mis en évidence des espaces classifiants  $BQ$ , qui conduisent naturellement à une théorie d'homologie  $H_*(Q)$  et de cohomologie  $H^*(Q)$ . C'est celle déjà formulée ci-dessus, ce qui confirme d'ailleurs que le modèle topologique  $BQ$  est bien choisi. Ensuite l'école de Carter a élaboré de nombreuses applications aux entrelacs en dimension 3 et 4.

**3.1. Complètement de l'outillage.** Pour l'homologie et l'homotopie des variétés on a des outils très performants, comme les théorèmes de Papakyriakopoulos en dimension 3, la dualité de Poincaré, le théorème de Hurewicz, etc. Par exemple, pour un nœud  $K \subset \mathbb{S}^3$  ils permettent de déduire facilement que  $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$  puis  $\pi_q(\mathbb{S}^3 \setminus K) = H_q(\mathbb{S}^3 \setminus K) = 0$  pour tout  $q \geq 2$ . Par conséquent seul le groupe fondamental  $\pi_K = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  contient de l'information sur le type d'isotopie du nœud, mais son homologie  $H_*(\pi_K)$  est trivial.

Les quandles sont faits sur mesure pour les nœuds, ou plus généralement des entrelacs en codimension 2. La définition du quandle  $Q_K$  d'un nœud  $K$  est combinatoire : elle s'obtient à partir du diagramme planaire, comme la présentation de Wirtinger du groupe  $\pi_K$ , par générateurs et relations. Par contre, pour les quandles on ne dispose pas des outils mentionnés pour les groupes. En développant la théorie des revêtements et de leur correspondance de Galois [E12], j'ai pu fournir de tels outils (au moins en petit degré). Comme application j'ai pu déterminer  $H_2(Q_K)$  et  $H^2(Q_K)$ , cf. [E6]. Ces résultats témoignent que les propriétés homologiques du quandle  $Q_K$  sont sensiblement différentes du groupe  $\pi_K$ .

**3.2. Remarques préalables.** Pour  $q \in Q$  on note  $[q]$  sa composante connexe, i.e. l'orbite de  $q$  sous l'action de  $\text{Inn}(Q)$ . On note  $\pi_0(Q) = \{[q] \mid q \in Q\}$  l'ensemble des composantes connexes. Tout morphisme de quandles  $\phi : Q \rightarrow Q'$  induit une application d'ensembles  $\phi_* : \pi_0(Q) \rightarrow \pi_0(Q')$  par  $[x] \mapsto [\phi(x)]$ . Il est facile à vérifier que l'on a des isomorphismes naturels  $H_1(Q) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(Q)]$  et  $H^1(Q, \Lambda) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}[\pi_0(Q)], \Lambda)$ .

À titre d'exemple, les composantes de  $\text{Conj}(G)$  sont les classes de conjugaison du groupe  $G$ . Pour le quandle  $Q_L$  associé à un entrelacs  $L$ , les composantes de  $Q_L$  au sens algébrique correspondent aux composantes de  $L$  au sens topologique.

Après  $\pi_0(Q)$ , l'objectif est de mettre en évidence le groupe fondamental  $\pi_1(Q, q)$ , disons pour les quandles connexes, puis d'établir la relation avec  $H_2(Q)$  et  $H^2(Q)$ . En analogie avec les espaces topologiques je procède selon les lignes suivantes :

- (1) Introduire la catégorie des revêtements au dessus d'un quandle  $(Q, q)$ .
- (2) Identifier le revêtement universel (unicité, existence, description explicite).
- (3) Déduire  $\pi_1(Q, q)$  comme groupe d'automorphismes du revêtement universel.
- (4) Établir la correspondance de Galois entre revêtements et sous-groupes.

Je ne résumerai ici que les grandes lignes et renvoie à [E12] pour les détails et illustrations.

**3.3. Revêtements d'un quandle.** La notion de revêtement d'un quandle est purement algébrique. Elle ressemble à la théorie de Kervaire [54] des revêtements d'un groupe parfait, qu'il applique en K-théorie pour identifier le groupe de Milnor  $K_2(A)$  d'un anneau  $A$  avec le multiplicateur de Schur  $H_2(\text{GL}(A)')$ .

**DÉFINITION 3.1.** Un morphisme de quandles  $p : \tilde{Q} \rightarrow Q$  est un *revêtement* s'il est surjectif et si  $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$  implique  $\tilde{a} * \tilde{x} = \tilde{a} * \tilde{y}$  pour tout  $\tilde{a}, \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{Q}$ .

Autrement dit, un morphisme surjectif  $p : \tilde{Q} \rightarrow Q$  est un revêtement si et seulement si la représentation intérieure  $\text{inn} : \tilde{Q} \rightarrow \text{Inn}(\tilde{Q})$  factorise par  $p$ .

EXEMPLE 3.2. Un morphisme surjectif de groupes  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  donne un revêtement de quandles  $\text{Conj}(\tilde{G}) \rightarrow \text{Conj}(G)$  si et seulement si  $\ker(p) \subset \tilde{G}$  est un sous-groupe central.

Au niveau des groupes on ne voit donc que des extensions centrales. La catégorie des quandles étant beaucoup plus large, les revêtements exhibent souvent un caractère non abélien. En particulier le groupe fondamental  $\pi_1(Q, q)$  qui les gouverne n'est en général pas abélien. Voir [E<sub>12</sub>] pour des exemples et l'explication des tournants dangereux ; on y trouve aussi la construction explicite du revêtement universel.

**3.4. Groupe fondamental d'un quandle.** Le groupe adjoint  $\text{Adj}(Q)$  admet un unique homomorphisme  $\varepsilon: \text{Adj}(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$  vérifiant  $\varepsilon(Q) = \{1\}$ . On note  $\text{Adj}(Q)^\circ = \ker(\varepsilon)$  son noyau. Si  $Q$  est connexe, alors  $\varepsilon$  est l'abélianisation et  $\text{Adj}(Q)^\circ$  est le sous-groupe des commutateurs.

DÉFINITION 3.3. Pour tout quandle  $Q$  nous définissons son *groupe fondamental* basé en  $q \in Q$  par  $\pi_1(Q, q) := \{g \in \text{Adj}(Q)^\circ \mid q^g = q\}$ .

Cette définition peut être difficile à appliquer dans des calculs concrets. Néanmoins les calculs sont faisables dans de nombreux cas intéressants, cf. [E<sub>12</sub>].

On notera le choix judicieux du groupe  $\text{Adj}(Q)^\circ$  : l'approche ne marcherait pas avec un autre groupe agissant sur  $Q$ , comme  $\text{Adj}(Q)$  ou  $\text{Aut}(Q)$  ou  $\text{Inn}(Q)$ . Le bon choix n'est pas évident, mais se déduit de la construction du revêtement universel.

**3.5. Correspondance de Galois.** Les revêtements  $(\tilde{Q}, \tilde{q}) \rightarrow (Q, q)$  au dessus d'un quandle fixé  $(Q, q)$  forment une catégorie, notée  $\mathbf{Cov}(Q, q)$ . De même, les sous-groupes de  $\pi_1(Q, q)$  forment une catégorie, notée  $\mathbf{Sub}(\pi_1(Q, q))$

THÉORÈME 3.4 (correspondance de Galois). *Pour tout quandle connexe  $(Q, q)$  il existe une équivalence naturelle de catégories  $\mathbf{Cov}(Q, q) \cong \mathbf{Sub}(\pi_1(Q, q))$ . Sous cette équivalence tout sous-groupe distingué  $K \subset \pi_1(Q, q)$  correspond à un revêtement galoisien  $p: (\tilde{Q}, \tilde{q}) \rightarrow (Q, q)$  ayant pour groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(Q, q)/K$ .  $\square$*

Ce résultat correspond parfaitement à la théorie des revêtements connue des espaces topologiques. Les détails sont pourtant plus subtils :

- (1) Pour un revêtement de quandles  $p: (\tilde{Q}, \tilde{q}) \rightarrow (Q, q)$  l'homomorphisme induit  $p_*: \pi_1(\tilde{Q}, \tilde{q}) \rightarrow \pi_1(Q, q)$  n'est pas forcément injectif.
- (2) Si  $\tilde{Q}$  est simplement connexe, alors  $p$  est le revêtement universel de  $(Q, q)$ . Par contre, il se peut que  $p$  soit universel sans que  $\tilde{Q}$  soit simplement connexe.

Il est amusant de noter que ces deux défauts s'annulent mutuellement, ce qui permet de sauver la correspondance de Galois.

THÉORÈME 3.5 (isomorphisme de Hurewicz). *Pour tout quandle connexe  $Q$  nous avons un isomorphisme naturel  $H_2(Q) \cong \pi_1(Q, q)_{\text{ab}}$ . Pour tout groupe abélien  $\Lambda$  nous avons  $H^2(Q, \Lambda) \cong \text{Hom}(\pi_1(Q, q), \Lambda)$ .  $\square$*

Ainsi la connaissance explicite du revêtement universel de  $(Q, q)$  ou bien du groupe fondamental  $\pi_1(Q, q)$  permet de calculer aisément  $H_2(Q)$  et  $H^2(Q)$ . Ces résultats s'étendent aux quandles non connexes [E<sub>12</sub>]. Remarquons que les composantes connexes agissent les unes sur les autres : contrairement aux espaces topologiques, un quandle n'est en général pas une simple réunion de ses composantes connexes.

**3.6. Application aux nœuds.** J'ai montré dans [E<sub>6</sub>] que le quandle  $Q_L$  d'un nœud long  $L$  n'est pas isomorphe au quandle  $Q_K$  du nœud fermé  $K$  associé. Le quotient  $Q_L \rightarrow Q_K$  est plutôt le revêtement universel de  $Q_K$ . Ceci permet de calculer  $\pi_1(Q_K, q_K)$  et implique une série de conséquences auparavant inaccessibles.

THÉORÈME 3.6. *Soit  $K$  un nœud et  $Q_K$  le quandle associé. Alors on a*

$$H_2(Q_K) \cong H^2(Q_K) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ est trivial, et} \\ \mathbb{Z} & \text{si } K \text{ est non trivial.} \end{cases}$$

C'est ainsi dire une caractérisation homologique du nœud trivial. On peut encore préciser ce résultat : pour tout nœud  $K$  l'orientation permet de définir de manière canonique une classe caractéristique  $[K] \in H_2(Q_K)$ , qui ressemble à la classe fondamentale  $[V] \in H_n(V)$  d'une variété connexe fermée orientée  $V$  de dimension  $n$ . Le revêtement  $Q_L \rightarrow Q_K$  mentionné ci-dessus définit une classe  $[K^*] \in H^2(Q_K)$ .

THÉORÈME 3.7. *On a  $H_2(Q_K) = \langle [K] \rangle$  et  $H^2(Q_K) = \langle [K^*] \rangle$ . L'évaluation donne*

$$([K^*], [K]) = \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ est trivial, et} \\ 1 & \text{si } K \text{ est non trivial.} \end{cases}$$

Ce résultat répond à une question fondamentale sur l'homologie des quandles soulevée par Carter, Kamada, et Saito [15, Question 7.3] : la classe d'orientation  $[K]$  s'annule si et seulement si  $K$  est trivial. Le résultat se généralise aux entrelacs :

THÉORÈME 3.8. *Soit  $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$  un entrelacs. Alors l'homologie  $H_2(Q_K)$  est engendrée par  $[K_1], \dots, [K_n]$  et la cohomologie  $H^2(Q_K)$  est engendrée par  $[K^1], \dots, [K^m]$ . L'évaluation donne  $([K^i], [K_j]) = 0$  si  $i \neq j$ , puis*

$$([K^i], [K_i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } K_i \text{ est une composante triviale, et} \\ 1 & \text{si } K_i \text{ est une composante non triviale.} \end{cases}$$

REMARQUE 3.9. Ce théorème caractérise homologiquement les composantes triviales d'un entrelacs  $K$ . Malheureusement, on ne sait pas calculer algorithmiquement  $H_2(Q)$  d'un quandle  $Q$  donné par générateurs et relations. Ce problème est analogue au calcul de l'homologie  $H_2(G)$  d'un groupe  $G$  donné par générateurs et relations, cf. [E6], §10.

D'après le théorème il suffirait de savoir évaluer  $([K^i], [K_i])$ , mais même cette question plus restreinte reste algorithmiquement non résolue. La situation n'est pourtant pas sans espoir : la question analogue pour les groupes est le problème du mot, qui dans le cas du groupe  $\pi_K$  admet une solution algorithmique, cf. [E6], §10.

Il serait extrêmement intéressant d'en trouver une solution algorithmique *efficace*, c'est-à-dire polynomiale dans la longueur de la présentation, qui correspond ici au nombre de croisements du diagramme de l'entrelacs en question. A priori l'homologie s'y prête, mais les questions algorithmiques sont difficiles et restent en suspens.

Joyce [49] a pu montrer que  $K \mapsto Q_K$  classe les nœuds dans  $\mathbb{S}^3$  à orientation près. L'ambiguïté restante peut être enlevée par la classe d'orientation [E6]. Nous donnons ici tout de suite sa généralisation aux entrelacs [E12] :

THÉORÈME 3.10. *L'invariant  $K \mapsto (Q_K; [K_1], \dots, [K_n])$  classe les entrelacs orientés.*

Finalement, on peut utiliser ces techniques pour analyser le quandle  $Q_K^\pi \subset \pi_K$  donné par la classe de conjugaison d'un méridien de  $K$  :

THÉORÈME 3.11. *Si  $K$  est la somme connexe de nœuds premiers  $K_1, \dots, K_p$ , alors  $H_2(Q_K^\pi) \cong H^2(Q_K^\pi) \cong \mathbb{Z}^p$ . Plus précisément,  $H_2(Q_K^\pi)$  est librement engendré par les classes  $[K_1], \dots, [K_p]$ , et  $H^2(Q_K^\pi)$  est librement engendré par les classes duales  $[K^1], \dots, [K^p]$ .  $\square$*

Ces résultats montrent que contrairement à l'homologie du groupe  $\pi_K$ , l'homologie du quandle  $Q_K$  capte bien des informations non triviales sur l'entrelacs  $K$ .

**3.7. Polynômes de coloriage.** Puisque les quandles  $Q_K$  sont difficiles à manipuler, Carter et al. [14, 15, 13] ont proposé des invariants combinatoires calculables, qu'ils appellent *quandle 2-cocycle state-sum invariants*. Leur construction revient à la définition suivante : on fixe un quandle fini  $Q$  et une classe  $[\lambda] \in H^2(Q, \Lambda)$ , puis on définit

$$S_Q^\lambda: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda \quad \text{par} \quad S_Q^\lambda(K) := \sum_f ([\lambda], f_*[K])$$

où  $f$  parcourt tous les morphismes  $f: Q_K \rightarrow Q$ . En explicitant l'observation du §2.6 pour cet exemple,  $S_Q^\lambda$  peut être réalisé comme un invariant de Yang-Baxter [E10].

Dans [E10] j'explique comment on peut ramener cet invariant à des données beaucoup plus classiques et familières, à savoir le groupe fondamental  $\pi_K$  muni de méridien  $m_K$  et longueur  $\ell_K$ . L'invariant  $K \mapsto (\pi_K, m_K, \ell_K)$  fut déjà utilisé en 1914 par Dehn [22]. En 1957, Papakyriakopoulos [80] prouva qu'un nœud  $K$  est trivial si et seulement si  $\ell_K = 1$ . Les travaux de Waldhausen [94] entraînent que deux nœuds  $K$  et  $K'$  sont isotopes si et seulement s'il existe un isomorphisme  $(\pi_K, m_K, \ell_K) \cong (\pi_{K'}, m_{K'}, \ell_{K'})$ .

Il y a plusieurs méthodes d'extraire de l'information calculable de  $(\pi_K, m_K, \ell_K)$ . Dans notre cas on fixe un groupe fini  $G$  et un élément  $x \in G$ , puis on définit

$$P_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}G \quad \text{par} \quad P_G^x(K) := \sum_\rho \rho(l_K)$$

où  $\rho$  parcourt les homomorphismes de groupes  $\rho: \pi_K \rightarrow G$  vérifiant  $\rho(m_K) = x$ . C'est une extension naturelle du nombre de coloriage, étudié par Fox [31, 33], et je l'appelle donc le *polynôme de coloriage*. Cet invariant se comporte comme les invariants polynomiaux connus, sauf que  $\mathbb{Z}G$  n'est pas un anneau de polynômes. L'article [E10] donne de nombreux exemples et applications. En voici un des résultats généraux :

**THÉORÈME 3.12.** *Tout invariant  $S_Q^\lambda$  est la spécialisation d'un polynôme de coloriage : il existe un groupe  $(G, x)$  et une application  $\mathbb{Z}$ -linéaire  $\varphi: \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda$  tels que  $S_Q^\lambda(K) = \varphi P_G^x(K) \cdot |Q|$  pour tout nœud  $K$ .  $\square$*

Ce résultat donne une interprétation topologique très satisfaisante des invariants  $S_Q^\lambda$ , en termes classiques du groupe fondamental et de son système périphérique. La correspondance entre  $(Q, \lambda)$  et  $(G, x)$  n'est pourtant pas immédiate, et nécessite la théorie des revêtements des quandles, esquissée ci-dessus.

## 4. Quelques perspectives

**4.1. Invariants semi-quantiques.** Les invariants des nœuds construits à l'aide de l'homologie des quandles sont essentiellement des polynômes de coloriages [E10]. Ce sont des invariants assez fins, extraits du groupe fondamental et de son système périphérique, qui distinguent beaucoup de nœuds où d'autres invariants échouent. En particulier ils détectent des nœuds non inversibles [E10] ce qui est toujours une question ouverte pour les invariants quantiques, et plus généralement pour les invariants de type fini.

La cohomologie de Yang-Baxter contient et généralise la cohomologie des quandles, ce qui laisse espérer qu'une analyse plus complète mènera à de nouveaux invariants « semi-quantiques » et à une compréhension approfondie de ceux-ci. Je les appelle semi-quantiques parce qu'ils marient des aspects classiques (ici groupe fondamental et quandles) avec l'approche quantique (déformations des opérateurs de Yang-Baxter, ici  $c_Q$ ). Dans quels cas peut-on à nouveau ramener explicitement ces invariants semi-quantiques au groupe fondamental ? Qu'obtient-on comme information nouvelle ?

**4.2. Revêtements algébriques.** La théorie des revêtements des quandles marque un nouveau point de vue et fournit des outils qui ont déjà prouvé leur efficacité pour les quandles  $Q_K$  associés aux nœuds et entrelacs  $K$ . Les techniques s'appliquent tout particulièrement aux classes de conjugaison dans un groupe, ce qui crée une riche interaction entre la théorie des quandles et la théorie combinatoire des groupes. Cette approche est également intéressante pour étudier le groupe lui-même, pourvu que sa structure soit



gouvernée par la conjugaison. Les exemples donnés dans [E<sub>12</sub>] vont dans ce sens ; ils seront complétés par une étude des groupes de Coxeter et d'Artin, et plus généralement des groupes présentés principalement par des relations de conjugaison. Dans des cas favorables on arrive, par exemple, à en déduire  $H_2(G)$ . L'analogie avec l'approche de Kervaire aux groupes parfaits mérite également d'être précisée et exploitée.

**4.3. Quandles topologiques.** La théorie des quandles développée jusqu'ici est purement algébrique et ses objets sont discrets. Les exemples 1.3 (espaces symétriques) et 1.4 (algèbres de Lie) introduisent une forte motivation pour étudier les *quandles topologiques*, en analogie avec les groupes topologiques. Il est clair que les techniques algébriques s'adaptent à ce cadre plus général. Il reste à déployer des applications profitables.

*Symmetric means something like well-proportioned, well-balanced, and symmetry denotes that sort of concordance of several parts by which they integrate into a whole. Beauty is bound up with symmetry.*  
Hermann Weyl (1885-1955), *Symmetry*

## CHAPITRE III

# Entrelacs rubans et unions symétriques

Ce dernier chapitre présente mes résultats récents sur le polynôme de Jones des entrelacs rubans [E<sub>16</sub>]. Ils sont ensuite appliqués aux unions symétriques, dans des travaux en collaboration avec Christoph Lamm [E<sub>11</sub>], [E<sub>15</sub>]. Puisque le sujet est encore à un stade initial, ce chapitre est le plus bref et la liste des questions ouvertes est la plus longue.

### 1. Le polynôme de Jones des entrelacs rubans

**1.1. Nœuds bordants vs nœuds rubans.** Les nœuds bordants [*slice knots* en anglais] apparaissent naturellement dans l'étude des surfaces  $\Sigma \subset \mathbb{S}^4$  ayant des singularités [35, 67], c'est-à-dire, des points isolés où la surface n'est pas localement plate.

En intersectant  $\Sigma$  avec une petite 3-sphère  $S_x^\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon > 0$  centrée dans une singularité  $x \in \Sigma$ , on obtient un nœud  $K_x^\varepsilon \subset S_x^\varepsilon \cong \mathbb{S}^3$ , dont le type d'isotopie  $K_x = [K_x^\varepsilon]$  est indépendant de  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ainsi  $K_x$  est un invariant de la singularité  $x$ . La singularité  $x$  peut être effacée si  $K_x$  est bordant dans le sens suivant :

**DÉFINITION 1.1.** On considère  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$  via l'inclusion  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0)$ . Un nœud  $K \subset \mathbb{R}^3$  est *bordant* [ou *slice* en anglais] s'il borde un disque lisse  $D \subset \mathbb{R}_+^4$  proprement plongé dans  $\mathbb{R}_+^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \geq 0\}$  de sorte que  $\partial D = D \cap \mathbb{R}^3 = K$ . Plus restrictivement,  $D \subset \mathbb{R}_+^4$  est un *disque ruban* s'il n'a pas de minima locaux par rapport à la fonction hauteur  $h: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x_4$ . Un nœud  $K \subset \mathbb{R}^3$  est un *nœud ruban* [ou *ribbon knot* en anglais] s'il borde un disque ruban dans  $\mathbb{R}_+^4$ . (Voir la figure 2.)

**REMARQUE 1.2.** Tout nœud ruban borde un disque immergé  $f: \mathbb{D}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$  tel que toute singularité soit de type ruban comme indiqué dans la figure 1a. Pour la preuve on met le disque ruban dans  $\mathbb{R}_+^4$  en position de Morse par rapport à  $h$ , puis on procède du haut vers le bas par récurrence sur les points critiques.

Réciproquement, il est facile de voir comment un tel disque immergé dans  $\mathbb{R}^3$  donne un disque ruban plongé dans  $\mathbb{R}_+^4$  : on peut éliminer chaque singularité ruban en poussant la partie percée dans  $\mathbb{R}_+^4$ . Les disques immergés donnent souvent une représentation plus maniable qui permet de travailler dans  $\mathbb{R}^3$  au lieu de  $\mathbb{R}_+^4$ , comme illustré dans la figure 1b.

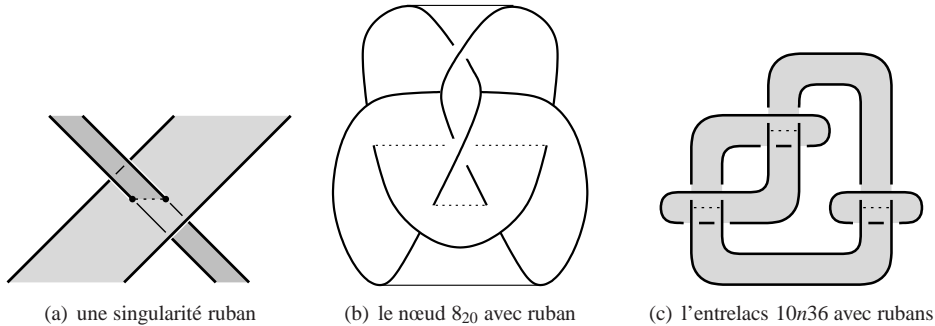


FIG. 1. Nœuds et entrelacs rubans

Par définition tout nœud ruban est bordant. Fox [32, Problem 25] posa la question réciproque : est-ce que tout nœud qui borde un disque  $D \subset \mathbb{R}_+^4$  borde aussi un disque ruban, c'est-à-dire sans minima locaux ? Cette question est devenue célèbre, mais même après 50 ans et d'énormes progrès, elle résiste toujours, cf. [58, Problem 1.33].

EXEMPLE 1.3. Pour tout nœud  $K$  on note par  $K^*$  le nœud inverse : c'est l'image miroir de  $K$  avec l'orientation du cercle inversée. La somme connexe  $K \# K^*$  est un nœud ruban, donc bordant. (Voir la figure 3a plus bas.)

REMARQUE 1.4. Les nœuds ne sont pas tous bordants : Fox et Milnor [35] ont montré que le polynôme d'Alexander de chaque nœud bordant est de la forme  $\Delta(K) = f(t)f(t^{-1})$  pour un  $f \in \mathbb{Z}[t^\pm]$ . Ceci impose une sévère restriction et exclut, par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit. On connaît d'autres obstructions, par exemple la signature (Murasugi [77], Tristram [90]). Le « plus petit » nœud ruban premier est  $6_1$  (figure 2).

REMARQUE 1.5. Les définitions se généralisent aux entrelacs  $L$  à  $n$  composantes : au lieu d'un seul disque  $D \subset \mathbb{R}_+^4$  on demande que  $L$  borde une collection de  $n$  disques disjoints plongés dans  $\mathbb{R}_+^4$ . Plus restrictivement, un entrelacs ruban à  $n$  composantes borde  $n$  disques rubans disjoints dans  $\mathbb{R}_+^4$  ; de manière équivalente il borde  $n$  disques immergés dans  $\mathbb{R}^3$  tels que toute singularité soit de type ruban. Remarquons toutefois qu'en général ces disques dans  $\mathbb{R}^3$  s'intersectent mutuellement (dans des singularités rubans).

DÉFINITION 1.6. Une *concordance* entre deux nœuds  $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^3$  est un plongement lisse propre  $c: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1]$  de sorte que  $c_0$  paramétrise  $K_0 \times \{0\}$  alors que  $c_1$  paramétrise  $K_1 \times \{1\}$ . C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des nœuds dans  $\mathbb{R}^3$ , strictement plus faible que l'isotopie. Un nœud est bordant si et seulement s'il est concordant au nœud trivial. La définition pour les entrelacs est analogue.

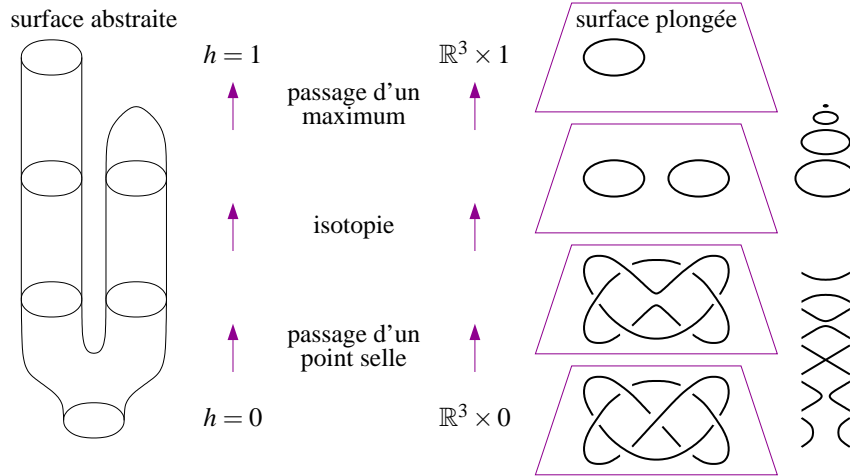


FIG. 2. Une concordance allant de  $K_0 = 6_1$  vers  $K_1 = \bigcirc$

REMARQUE 1.7. Les nœuds modulo concordance forment un groupe commutatif pour la multiplication induite par la somme connexe,  $[K] \cdot [L] = [K \# L]$ . L'inverse de la classe  $[K]$  est la classe  $[K^*]$  où  $K^*$  est le nœud inverse de  $K$ .

REMARQUE 1.8. Motivé par les nœuds rubans, Gordon [40] a introduit la notion de *concordance ruban* comme concordance sans minima locaux. Mise en position de Morse la surface n'a que des points selles et des maxima locaux, comme dans la figure 2. Un nœud est ruban si et seulement s'il est concordant-ruban au nœud trivial. La relation de concordance ruban, notée  $K_0 \succcurlyeq K_1$ , est réflexive et transitive mais non symétrique. Gordon conjecture qu'elle est anti-symétrique : si  $K_0 \succcurlyeq K_1$  et  $K_1 \succcurlyeq K_0$  alors  $K_0$  et  $K_1$  sont isotopes.

**1.2. Rappels sur le polynôme de Jones.** On note  $\mathbb{Z}[q^\pm]$  l'anneau des polynômes de Laurent dans la variable  $q = q^+$ , ayant pour inverse  $q^{-1} = q^-$ . Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des classes d'isotopie des entrelacs dans  $\mathbb{R}^3$ . Le théorème suivant a été découvert en trois étapes : par Alexander [2] puis Conway [19] pour  $N = 0$ , par Jones [46] pour  $N = 2$ , et finalement par HOMFLY-PT [36, 83] dans le cas général  $N \in \mathbb{N}$  :

THÉORÈME 1.9. *Pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe un unique invariant  $V_N : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^\pm]$  envoyant le nœud trivial sur  $V_N(\bigcirc) = 1$  et satisfaisant à la relation locale suivante :*

$$(4) \quad q^{-N} V_N \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) - q^{+N} V_N \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (q^- - q^+) V_N \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \right).$$

Le cas  $N = 0$  donne le polynôme d'Alexander-Conway,  $V_0(L) = \pm \Delta(L)$ . Le cas  $N = 1$  donne un invariant trivial,  $V_1(L) = 1$  pour tout  $L \in \mathcal{L}$ . Le cas  $N = 2$  donne le polynôme de Jones. Les polynômes d'Alexander et de Jones sont traditionnellement paramétrés par  $t = q^2$  ; je préfère ici la variable  $q = -t^{1/2}$  afin d'éviter des racines.

**1.3. Résultats principaux.** Très peu de valeurs du polynôme de Jones  $V(L) = V_2(L)$  admettent une interprétation en fonction des données de la topologie algébrique. Nous nous intéressons dans la suite au déterminant  $\det(L) = V(L)|_{(q \rightarrow i)}$ .

On définit la *nullité de Jones*  $\text{null}V(L)$  comme l'ordre du zéro en  $q = i$ . Par exemple, l'entrelacs trivial vérifie  $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$  et donc  $\text{null}V(\bigcirc^n) = n - 1$ . L'argument algébrique suivant majore la nullité de  $V(L)$  ; pour  $V_N$  avec  $N$  premier voir [E15].

PROPOSITION 1.10. *La nullité de Jones  $\text{null}V(L)$  est égale à la multiplicité du facteur de  $(q^+ + q^-)$  dans  $V(L)$ . Si l'entrelacs  $L$  a  $n$  composantes alors  $V(L)|_{(q \rightarrow 1)} = 2^{n-1}$  et par conséquent  $0 \leq \text{null}V(L) \leq n - 1$ .  $\square$*

Cette borne nous fournit un premier indice : l'inégalité analogue  $0 \leq \text{null}(L) \leq n - 1$  est bien connue de la nullité de Seifert, mise en évidence dans des travaux de Murasugi [77] sur la signature et la concordance des entrelacs dans  $\mathbb{S}^3$ . Pour les entrelacs rubans je montre que la nullité de Jones est en fait maximale :

THÉORÈME 1.11. *Pour tout entrelacs ruban à  $n$  composantes le polynôme de Jones  $V(L)$  est divisible par le polynôme  $V(\bigcirc^n) = (q^+ + q^-)^{n-1}$  de l'entrelacs trivial, et par conséquent  $\text{null}V(L) = n - 1$ .  $\square$*

À nouveau cette propriété correspond à la nullité de Seifert : pour tout entrelacs ruban  $L$  nous constatons donc l'égalité  $\text{null}(L) = \text{null}V(L)$ . Je ne sais pas si cette égalité s'étend à tous les entrelacs.

PROPOSITION 1.12. *Le déterminant de Jones  $\det V(L) := [V(L)/V(\bigcirc^n)]_{(q \rightarrow i)}$  d'un entrelacs ruban à  $n$  composantes est invariant par changement de croisements entre rubans. Par conséquent, si  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  borde une surface ruban immergée dans  $\mathbb{R}^3$  dont les  $n$  composantes ne s'intersectent pas mutuellement, alors  $\det V(L) = \det(K_1) \cdots \det(K_n)$ , et en particulier  $\det V(L)$  est un carré dans  $\mathbb{Z}$ .  $\square$*

Dans le cas général d'un entrelacs ruban où les différents disques immergés peuvent s'intersecter mutuellement, la multiplicativité n'est valable que modulo 32 :

THÉORÈME 1.13. *Tout entrelacs ruban  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  satisfait à la multiplicativité  $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n)$  modulo 32, et en particulier  $\det V(L) \equiv 1$  modulo 8.  $\square$*

Ces énoncés sont élégants mais leurs preuves sont techniques [E15] : elles requièrent une récurrence sur les diagrammes planaires des surfaces immergées  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Cette complexité est due à la définition combinatoire et non topologique du polynôme de Jones, et illustre bien le conflit entre topologie quantique et classique évoqué dans l'introduction.

Les résultats ci-dessus sont les premières propriétés connues, semble-t-il, du polynôme de Jones concernant les entrelacs rubans. À l'instar des invariants de type fini des entrelacs, ils laissent entrevoir une théorie des invariants de type fini des surfaces à bord [E15].

**1.4. Vers les entrelacs bordants.** Pour des raisons techniques j'établis mes résultats pour les entrelacs rubans, ce qui nous mène à la question suivante :

QUESTION 1.14. Les théorèmes 1.11 et 1.13 s'étendent-ils aux entrelacs bordants ?

Je soupçonne que ces résultats s'étendent à ce cadre général, et que les adaptations nécessaires dans les preuves ne seraient que d'une nature technique. Une réponse négative serait spectaculaire mais semble peu probable : existe-il un entrelacs bordant qui ne satisfasse pas aux critères rubans ci-dessus ? Il est plus plausible que le polynôme de Jones sera trop faible pour détecter des différences aussi subtiles, si jamais elles existent.

REMARQUE 1.15. Dans ce contexte on pourrait penser à une astuce d'Andrew Casson que j'ai apprise de Charles Livingston [67] : pour tout *nœud* bordant  $K$  il existe un *nœud* ruban  $L$  tel que  $K \# L$  soit ruban. Si l'on disposait d'une astuce similaire pour les *entrelacs*, alors les théorèmes précédents se généraliseraient immédiatement.

**1.5. Vers le polynôme HOMFLYPT.** Partant du polynôme de Jones, il semble naturel de tenter de généraliser le théorème 1.11 à d'autres invariants polynomiaux d'entrelacs, notamment le polynôme de HOMFLYPT dans sa version  $V_N$  :

QUESTION 1.16. Le théorème 1.11 s'étend-il aux polynômes  $V_N$  pour  $N \geq 3$  ?

Pour  $N = 0$  nous avons le polynôme d'Alexander-Conway : tout entrelacs ruban à  $n$  composantes vérifie  $V_0(L) = V_0(\bigcirc^n) \cdot \tilde{V}_0(L)$  parce que  $V_0(L)$  et  $V_0(\bigcirc^n)$  sont nuls pour  $n \geq 2$ . Le cas  $N = 1$  est trivial. Le théorème 1.11 assure le cas  $N = 2$ . La question pour  $N \geq 3$  est ouverte, mais quelques exemples suggèrent une réponse affirmative.

REMARQUE 1.17. Le crochet de Kauffman qui modélise le cas  $N = 2$  a été étendu à tout  $N \geq 2$  par Murakami-Ohtsuki-Yamada [76]. Bien que l'approche soit similaire, leur modèle est orienté et nécessairement plus raffiné. Ceci fait que dans la preuve du théorème 1.11 certains termes ne s'annulent plus comme souhaité et rendent l'argument plus difficile. Bien que plausible, cette généralisation nécessite encore de nouvelles idées.

QUESTION 1.18. Le théorème 1.11 se généralise-t-il au polynôme de Kauffman [52] ? La généralisation naïve est fautive : le polynôme de Kauffman  $F(L) \in \mathbb{Z}[a^\pm, z^\pm]$  de l'entrelacs ruban  $L = 10n36$  n'est pas divisible par  $F(\bigcirc^2)$ . Quelle serait la formulation correcte ?

**1.6. Vers l'homologie de Khovanov.** Actuellement le développement le plus fécond pour la compréhension topologique du polynôme de Jones est l'homologie de Khovanov [55, 6]. En suivant la philosophie de « catégorification » cette théorie associe à tout entrelacs  $L$  comme invariant une homologie bigraduée  $Kh(L) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} Kh_{i,j}(L)$ . Le polynôme  $P(t, q) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} t^i q^j \dim_{\mathbb{Q}}(Kh_{i,j}(L) \otimes \mathbb{Q})$  est un invariant de l'entrelacs  $L$  qui se spécialise pour  $t = -1$  au polynôme de Jones :  $P(-1, q) = V(L) \cdot (q^+ + q^-)$ .

QUESTION 1.19. Le théorème 1.11 se généralise-t-il à l'homologie de Khovanov ?

La généralisation naïve de l'équation  $V(L) = V(\bigcirc^n) \cdot \tilde{V}(L)$  serait un isomorphisme  $Kh(L) \cong Kh(\bigcirc^n) \otimes \tilde{K}h(L)$ , dont la factorisation  $P(L) = (q^+ + q^-)^n \cdot \tilde{P}(L)$  est une version affaiblie. Or, des exemples comme  $L = 10n36$  réfutent cette factorisation. Quelle est la formulation homologique du théorème 1.11 ?

REMARQUE 1.20. Au delà du comptage sommaire des dimensions, l'homologie de Khovanov contient des informations beaucoup plus subtiles, notamment elle est fonctorielle par rapport aux cobordismes [45, 56]. Ainsi Rasmussen [84] a pu établir une minoration du genre lisse et a donné une nouvelle preuve de la conjecture de Milnor sur le nombre de dénouement des nœuds toriques. En vue de ces propriétés il semble plausible que  $Kh(L)$  reflète plus particulièrement les propriétés des entrelacs bordants ou rubans, cf. [E15].

**1.7. Vers d'autres entrelacs.** Je me suis concentré ici sur les entrelacs rubans. Il se peut toutefois que d'autres conditions géométriques entraînent les mêmes conséquences :

QUESTION 1.21. Quelles conditions géométriques assurent que  $V(\bigcirc^n)$  divise  $V(L)$  ? Impliquent-elles que  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  vérifie  $\det V(L) \equiv \det(K_1) \cdots \det(K_n) \pmod{32}$  ?

Il se peut, par exemple, que ces critères soient également satisfaits par tout entrelacs  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  qui borde une surface compacte orientée  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\partial S_i = L_i$  pour tout  $i$ . Un tel entrelacs  $L$  est appelé *entrelacs bord*, ou *boundary link* en anglais. Rappelons que tout entrelacs  $L \subset \mathbb{R}^3$  borde une surface compacte orientée  $S \subset \mathbb{R}^3$  telle que  $\partial S = L$  : on peut toujours s'arranger pour que  $S$  soit connexe, dans quel cas on l'appelle une *surface de Seifert* de  $L$  ; en général, par contre, on ne peut pas réaliser  $S$  par  $n$  composantes disjointes  $S_1, \dots, S_n$ . Cette condition entraîne, entre autre, que la nullité de Seifert est maximale, c'est-à-dire que  $\text{null}(L) = n - 1$ .

QUESTION 1.22. Quels entrelacs vérifient  $\text{null}(L) = \text{null}V(L)$  ?

C'est trivialement vrai pour les nœuds et les entrelacs à deux composantes. Le théorème 1.11 l'assure pour les entrelacs rubans. L'égalité est préservée par les opérations usuelles : la somme connexe, la réunion disjointe, l'image miroir, inversion d'orientation, etc.

QUESTION 1.23. Si  $L$  et  $L'$  sont concordants, a-t-on  $\text{null}V(L) = \text{null}V(L')$  ? Si oui, quelle est la relation entre  $\det V(L)$  et  $\det V(L')$  ?

L'égalité de la question 1.22 entraîne l'invariance par concordance de la question 1.23 parce que la nullité de Seifert est invariante par concordance.

QUESTION 1.24. Quelles conséquences peut-on en déduire pour les nœuds rubans ? Peut-on ainsi dégager de nouvelles obstructions pour un nœud d'être ruban ?

Les théorèmes ci-dessus portent sur les entrelacs et ne donnent pas directement des renseignements sur les nœuds. L'idée de câblage est esquissée dans [E15] mais ne semble pas encore suffisante. Elle tisse, par contre, des liens avec le polynôme de Jones colorié qui code les polynômes de Jones des câblages d'un nœud, et qui pourrait refléter les conditions géométriques d'une manière analogue.

## 2. Unions symétriques

**2.1. Unions symétriques.** Les unions symétriques sont une belle construction introduite par Kinoshita et Terasaka [57] en 1957, simultanément au début des travaux indépendants de Fox et Milnor sur les singularités des surfaces [34].

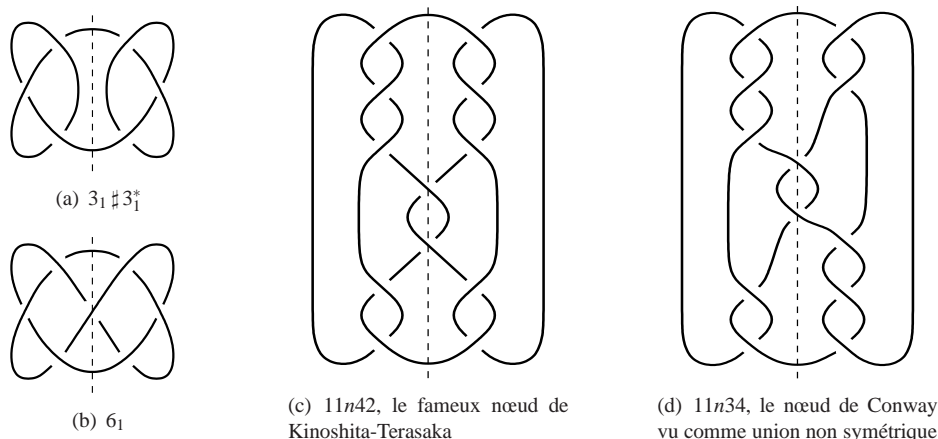


FIG. 3. Unions symétriques

Une *union symétrique* (à une composante) est un diagramme symétrique de la forme  $D \# D^*$  (figure 3a) où l'on autorise des croisements supplémentaires sur l'axe de symétrie (figure 3b). Ainsi le diagramme reste symétrique, seuls les croisements sur l'axe brisent légèrement la symétrie. Dans le cas de plusieurs composantes on exige que chacune soit une union symétrique et on autorise qu'elles s'entrelacent mutuellement [E<sub>16</sub>].

Non seulement les unions symétriques produisent de beaux diagrammes, elles fournissent aussi une construction élégante de nœuds et entrelacs rubans : d'après la figure 1b toute union symétrique donne lieu à une surface ruban symétrique. En particulier les unions symétriques généralisent la construction (trop restrictive) des sommes connexes  $K \# K^*$ .

Réciproquement, on peut se demander si tout nœud ruban se présente comme union symétrique. C'est une question ouverte, mais les quelques réponses connues suggèrent que les unions symétriques sont suffisamment générales pour être intéressantes [E<sub>11</sub>] :

- (1) Il existe 21 nœuds rubans premiers non triviaux avec au plus 10 croisements. Christoph Lamm [60, 61] a patiemment compilé une liste d'unions symétriques qui couvre tous ces exemples. (La collection continue à grandir et contient aussi presque tous les nœuds rubans avec 11 croisements.)
- (2) En 1975 Casson et Gordon [16] ont exhibé trois familles infinies de nœuds bordants à deux ponts. Récemment Lisca [66] a prouvé que ces familles exhaustent effectivement tous les nœuds bordants à deux ponts. Lamm [61] a montré que chacune se présente comme union symétrique, ce qui donne une démonstration élégante que les nœuds de ces trois familles sont tous rubans.

**2.2. Un raffinement du polynôme de Jones.** Au delà du problème de l'existence, il est intéressant de considérer la question de l'unicité d'une union symétrique. Il existe une notion assez naturelle d'équivalence symétrique entre deux unions symétriques : on autorise les mouvements de Reidemeister respectant la symétrie. Voir [E<sub>11</sub>] pour les détails.

Comme outil principal pour étudier l'(in)équivalence des unions symétriques, j'ai construit un raffinement du polynôme de Jones. Le développement complet pour les diagrammes quelconques est détaillé dans [E<sub>16</sub>] ; je l'abrège ici en spécialisant directement aux unions symétriques :

**THÉORÈME 2.1.** *À toute union symétrique  $D$  on peut associer un unique polynôme  $W_D(s, t) \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1/2}, t^{\pm 1}]$  comme suit. Si  $D$  n'a pas de croisements sur l'axe on pose*

$$(5) \quad W_D(s, t) = \left( \frac{s^{1/2} + s^{-1/2}}{t^{1/2} + t^{-1/2}} \right)^{n-1} V_L(t)$$

où  $V_L(t)$  est le polynôme de Jones de l'entrelacs  $L$  à  $n$  composantes représenté par  $D$ . Sinon on élimine les croisements sur l'axe en utilisant les relations locales suivantes :

$$(6) \quad W \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) = -s^{-1/2} W \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) - s^{-1} W \left( \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \right),$$

$$(7) \quad W \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) = -s^{+1/2} W \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \right) - s^{+1} W \left( \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \right).$$

Cette récurrence fait naturellement intervenir les unions symétriques à plusieurs composantes. La construction de l'invariant est laborieuse mais assez directe [E<sub>16</sub>]. La seule partie difficile est de montrer que  $W_D(s, t)$  n'a pas de dénominateur, et que c'est donc un honnête polynôme dans  $\mathbb{Z}[s^{\pm 1/2}, t^{\pm 1}]$ . Ceci est assuré par le théorème 1.11.

**THÉORÈME 2.2.** *L'application  $D \mapsto W_D(s, t)$  a les propriétés suivantes :*

- (1)  $W_D$  est invariant par les mouvements de Reidemeister symétriques.
- (2)  $W_D$  est invariant par mutations, flypes, et rotation autour de l'axe.
- (3) Si  $D \# D'$  est une somme connexe symétrique, alors  $W_{D \# D'} = W_D \cdot W_{D'}$ .
- (4) Le polynôme  $W_D$  est symétrique en  $t$ , c'est-à-dire  $W_D(s, t^{-1}) = W_D(s, t)$ ,

- (5) Si  $D^*$  est l'image miroir de  $D$ , alors  $W_{D^*}(s, t) = W_D(s^{-1}, t)$ .  
(6)  $W_D$  ne change pas quand on inverse l'orientation d'une composante.

Les évaluations suivantes en  $t$  correspondent aux évaluations connues du polynôme de Jones :

THÉORÈME 2.3. Soit  $D$  une union symétrique à  $n$  composantes. Alors on a :

- (1)  $W_D(s, \xi) = (-s^{1/2} - s^{-1/2})^{n-1}$  pour tout  $\xi \in \{1, \pm i, e^{\pm 2\pi i/3}\}$ .  
(2)  $\frac{\partial W_D}{\partial t}(s, 1) = 0$ .

Autrement dit,  $W_D - (-s^{1/2} - s^{-1/2})^{n-1}$  est divisible par  $(t-1)^2(t^2+1)(t^2+t+1)$ .  $\square$

Toute union symétrique  $D$  à une composante définit non seulement un nœud ruban  $K$  mais aussi deux nœuds partiels  $K_{\pm}$  à gauche et à droite de l'axe, cf. [E<sub>11</sub>], [E<sub>16</sub>]. Les spécialisations suivantes en  $s$  reflètent harmonieusement cette symétrie :

THÉORÈME 2.4. Soit  $D$  une union symétrique à une composante.

- (1) Pour  $s \mapsto t$  on obtient  $W_D(t, t) = V_K(t)$ , le polynôme de Jones de  $K$ .  
(2) Pour  $s \mapsto -1$  on obtient  $W_D(-1, t) = V_{K_-}(t) \cdot V_{K_+}(t)$ .

Ainsi,  $W_D(-1, -1) = \det(K) = \det(K_-) \cdot \det(K_+)$ .  $\square$

REMARQUE 2.5. La présentation d'un nœud ruban  $K$  comme union symétrique  $D$  introduit une structure supplémentaire précieuse. Nous en tirons profit ici pour construire l'invariant  $W_D(s, t)$  : c'est un relèvement du polynôme de Jones  $V_K(t)$  à cette structure plus riche ; la projection  $s \mapsto t$  oublie toute structure d'union symétrique.

La formule  $W_D(-1, t) = V_{K_-}(t) \cdot V_{K_+}(t)$  est particulièrement frappante, car elle ressemble à la formule de Fox-Milnor  $\Delta_K(t) = f(t) \cdot f(t^{-1})$  pour le polynôme d'Alexander d'un nœud bordant. Notre résultat dit que le même comportement peut être observé pour le polynôme de Jones, mais seulement indirectement via le polynôme raffiné  $W_D(s, t)$ .

**2.3. Applications.** Les deux unions symétriques  $D$  et  $D'$  de la figure 4 représentent le nœud  $9_{27}$ . En particulier, les diagrammes sont équivalents par des mouvements de Reidemeister usuels, non nécessairement symétriques, voir [E<sub>11</sub>, Fig. 8].

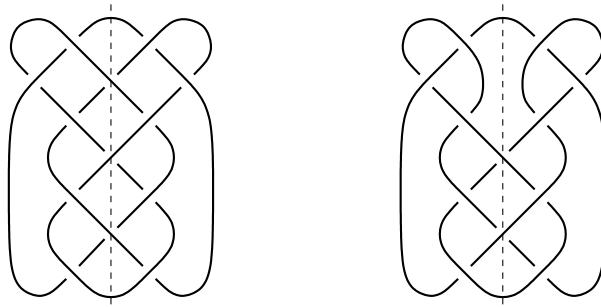


FIG. 4. Deux unions symétriques qui représentent le nœud  $9_{27}$

Remarquons d'abord que dans les deux cas les nœuds partiels sont  $D \mapsto (5_2, 5_2^*)$  et  $D' \mapsto (5_2, 5_2^*)$  : cet invariant géométrique ne fait donc pas obstacle à leur équivalence symétrique. Leurs polynômes raffinés, par contre, permettent cette distinction :

$$\begin{aligned} W_D(s, t) &= 1 + s^{-1} \cdot g(t) - s^{-2} \cdot f(t), \\ W_{D'}(s, t) &= 1 - g(t) + s \cdot f(t), \quad \text{où} \end{aligned}$$



$$g(t) = t^{-5} - 3t^{-4} + 6t^{-3} - 9t^{-2} + 11t^{-1} - 12 + 11t - 9t^2 + 6t^3 - 3t^4 + t^5,$$

$$f(t) = t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 4 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4.$$

Ces polynômes montrent que les diagrammes  $D$  et  $D'$  ne peuvent pas être équivalents par des mouvements de Reidemeister symétriques. Autrement dit, lors de la transformation entre  $D$  et  $D'$  les étapes intermédiaires brisent nécessairement la symétrie.

**REMARQUE 2.6.** La cause probable de cette inéquivalence symétrique est que les rubans associés à  $D$  et  $D'$  sont très différents. Pour prouver un tel énoncé il nous faudra des invariants raffinés pour les nœuds ruban, comme indiqué dans les questions ci-dessous.

**REMARQUE 2.7.** À titre d'illustration, les spécialisations  $s = t$  et  $s = -1$  donnent

$$W(t, t) = -t^{-5} + 3t^{-4} - 5t^{-3} + 7t^{-2} - 8t^{-1} + 9 - 7t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$$

$$W(-1, t) = (t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6)(t^{-1} - t^{-2} + 2t^{-3} - t^{-4} + t^{-5} - t^{-6})$$

On constate que  $W_D(s, t)$  capte bien la symétrie, alors qu'elle est perdue lors du passage au polynôme de Jones  $V_K(t) = W_D(t, t)$ . Ce dernier ne suggère pas de propriété particulière.

**2.4. Questions ouvertes.** Notre construction est très satisfaisante pour les unions symétriques, ce qui donne l'espoir de développer une approche similaire pour les nœuds rubans. Deux cheminements sont imaginables :

**QUESTION 2.8.** Est-ce que tout nœud ruban se présente comme union symétrique ?

Ce serait très joli, mais me semble peu probable.

**QUESTION 2.9.** La construction de notre invariant  $W$  s'étend-elle aux nœuds rubans ?

C'est plus probable, mais cela semble difficile. Plus explicitement, on considère un nœud ruban  $K$  muni d'une surface ruban  $S$ . L'objectif est de construire un invariant  $S \mapsto W_S(s, t)$  qui se spécialise pour redonner  $V_K(t)$ , tout comme le polynôme raffiné  $D \mapsto W_D(s, t)$  pour les unions symétriques. Le diagramme suivant résume cette approche :

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{union} \\ \text{symétrique} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{nœud ruban +} \\ \text{ruban spécifique} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{nœud bordant +} \\ \text{disque spécifique} \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{nœud ruban} \\ \text{symétrisable} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \{ \text{nœud ruban} \} & \longrightarrow & \{ \text{nœud bordant} \} \end{array}$$

Ici les flèches verticales oublient la structure supplémentaire. Dans la ligne supérieure nos questions se reformulent ainsi : Quels rubans se représentent comme union symétrique ? Sous quelles conditions cette représentation est-elle unique ? Peut-on construire un analogue du polynôme  $W$  pour les nœuds avec un ruban spécifique ? Étend-il le polynôme  $W$  ? ou faut-il passer à un quotient convenable de  $\mathbb{Z}[s^{\pm 1/2}, t^{\pm 1}]$  ?

**QUESTION 2.10.** Quant aux nœuds, peut-on en déduire des obstructions à être ruban ? ou à être une union symétrique ? (Le polynôme  $W_D(s, t)$  ne semble pas imposer de restrictions, mais une étude approfondie exhibera peut-être des obstructions.)

**QUESTION 2.11.** Peut-on construire des raffinements analogues pour les polynômes de HOMFLYPT ou de Kauffman ? Obtient-on des propriétés aussi belles ?

## Bibliographie

1. J. W. Alexander, *On the subdivision of 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **10** (1924), 6–8.
2. ———, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), no. 2, 275–306.
3. E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
4. ———, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (47-72), 1925.
5. D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), no. 2, 423–472.
6. ———, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 337–370 (electronic).
7. R. J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Physics **70** (1972), 193–228.
8. ———, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press Inc., London, 1982.
9. R. H. Bing, *Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be  $S^3$* , Ann. of Math. (2) **68** (1958), 17–37.
10. J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993), no. 2, 225–270.
11. F. Bonahon, *Difféotopies des espaces lenticulaires*, Topology **22** (1983), no. 3, 305–314.
12. E. Brieskorn, *Automorphic sets and braids and singularities*, Braids (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math., vol. 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 45–115.
13. J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. A. Nikiforou, and M. Saito, *Extensions of quandles and cocycle knot invariants*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no. 6, 725–738.
14. J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999), 146–156 (electronic).
15. J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), no. 3, 345–386.
16. A. J. Casson and C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots, À la recherche de la topologie perdue*, Progr. Math., vol. 62, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986, pp. 181–199.
17. J. Cerf, *Topologie de certains espaces de plongements*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 227–380.
18. V. Chernov, *The universal order one invariant of framed knots in most  $S^1$ -bundles over orientable surfaces*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 89–101 (electronic).
19. J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), Pergamon, Oxford, 1970, pp. 329–358.
20. O. L. Costich, P. H. Doyle, and D. E. Galewski, *A characterisation of punctured open 3-cells*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 295–298.
21. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, Ginn and Co., Boston, Mass., 1963.
22. M. Dehn, *Die beiden Kleeblattschlingen*, Math. Ann. **75** (1914), 402–413, English translation in [23].
23. ———, *Papers on group theory and topology*, Springer-Verlag, New York, 1987, Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell.
24. P. Dehornoy, *Braids and self-distributivity*, Progress in Mathematics, vol. 192, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
25. V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, Calif., 1986 (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 798–820.
26. ———, *On some unsolved problems in quantum group theory*, Quantum groups (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math., vol. 1510, Springer, Berlin, 1992, pp. 1–8.
27. B. Eckmann, *Social choice and topology : a case of pure and applied mathematics*, Expo. Math. **22** (2004), no. 4, 385–393.
28. L. Faddeev, *Integrable models in  $(1+1)$ -dimensional quantum field theory*, Recent advances in field theory and statistical mechanics (Les Houches, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 561–608.

29. R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406.
30. R. Fenn, C. Rourke, and B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 4, 321–356.
31. R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 120–167.
32. ———, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 168–176.
33. ———, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201.
34. R. H. Fox and J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and equivalence of knots*, Bull. Amer. Math. Soc. **63** (1957), 406.
35. ———, *Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots*, Osaka J. Math. **3** (1966), 257–267.
36. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 2, 239–246.
37. P. J. Freyd and D. N. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology*, Adv. Math. **77** (1989), no. 2, 156–182.
38. M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103.
39. H. Gluck, *Tangled manifolds*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 62–72.
40. C. McA. Gordon, *Ribbon concordance of knots in the 3-sphere*, Math. Ann. **257** (1981), no. 2, 157–170.
41. M. N. Gusarov, *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **193** (1991), 4–9, also in [93], pp. 167–172.
42. A. Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*, electronic document available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>.
43. ———, *Topological moduli spaces of knots*, electronic document available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/knotspaces.pdf>.
44. M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
45. M. Jacobsson, *An invariant of link cobordisms from Khovanov homology*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 1211–1251 (electronic).
46. V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111.
47. ———, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 2, 335–388.
48. ———, *On knot invariants related to some statistical mechanical models*, Pacific J. Math. **137** (1989), no. 2, 311–334.
49. D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.
50. C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.
51. C. Kassel, M. Rosso, and V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses, vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1997.
52. L. H. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), no. 2, 417–471.
53. ———, *Knots and physics*, third ed., Series on Knots and Everything, vol. 1, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001.
54. M. A. Kervaire, *Multiplicateurs de Schur et K-théorie*, Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham), Springer, New York, 1970, pp. 212–225.
55. M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 3, 359–426.
56. ———, *An invariant of tangle cobordisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 1, 315–327 (electronic).
57. S. Kinoshita and H. Terasaka, *On unions of knots*, Osaka Math. J. **9** (1957), 131–153.
58. R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Geometric topology (Athens, GA, 1993) (R. Kirby, ed.), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, Updated version available at <http://math.berkeley.edu/~kirby/>, pp. 35–473.
59. J. M. Kister and D. R. McMillan, Jr., *Locally euclidean factors of  $E^4$  which cannot be imbedded in  $E^3$* , Ann. of Math. (2) **76** (1962), 541–546.
60. C. Lamm, *Symmetric unions and ribbon knots*, Osaka J. Math. **37** (2000), no. 3, 537–550.
61. ———, *Symmetric union presentations for 2-bridge ribbon knots*, 2006, electronic document available at <http://www.arxiv.org/abs/math.GT/0602395>.

62. W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 531–540.
63. ———, *The irreducibility of the 3-sphere*, Michigan Math. J. **36** (1989), no. 3, 345–349.
64. J. Lieberum, *Invariants de Vassiliev pour les entrelacs dans  $S^3$  et dans les variétés de dimension trois*, Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, vol. 1998/30, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1998.
65. X.-S. Lin, *Finite type link invariants of 3-manifolds*, Topology **33** (1994), no. 1, 45–71.
66. P. Lisca, *Lens spaces, rational balls and the ribbon conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 429–472.
67. C. Livingston, *A survey of classical knot concordance*, Handbook of knot theory, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, pp. 319–347.
68. O. Loos, *Symmetric spaces.*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
69. S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160.
70. D. McCullough, *Topological and algebraic automorphisms of 3-manifolds*, Groups of self-equivalences and related topics (Montreal, PQ, 1988), Lecture Notes in Math., vol. 1425, Springer, Berlin, 1990, pp. 102–113.
71. D. R. McMillan, Jr., *Some contractible open 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 373–382.
72. J. W. Milnor, *Differentiable structures*, Mimeographed notes, Princeton, 1961.
73. ———, *Remarks on infinite-dimensional Lie groups*, Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1007–1057.
74. ———, *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), no. 10, 1226–1233.
75. E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 47.
76. H. Murakami, T. Ohtsuki, and S. Yamada, *Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs*, Enseign. Math. (2) **44** (1998), no. 3-4, 325–360.
77. K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422.
78. R. Myers, *Constructing knots with trivial mapping class group in closed orientable 3-manifolds*, electronic document available at <http://www.math.okstate.edu/~myersr/mcg.ps>.
79. R. S. Palais, *Extending diffeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 274–277.
80. C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. (2) **66** (1957), 1–26.
81. P. Popescu-Pampu, *Arbres de contact des singularités quasi-ordinaires et graphes d'adjacence pour les 3-variétés réelles*, Ph.D. thesis, Univ. Paris 7, 2001.
82. ———, *On a canonical placement of knots in irreducible 3-manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 8, 677–682.
83. J. H. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1988), no. 2, 115–139.
84. J. A. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, 2004, electronic document available at <http://www.arxiv.org/abs/math/0402131>.
85. C. Rourke, *The Poincaré conjecture*, electronic document available at <http://www.maths.warwick.ac.uk/~cpr/poincare.pdf>.
86. H. J. Ryder, *The structure of racks*, Ph.D. thesis, Warwick University, 1992.
87. J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1500, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 1964 lectures given at Harvard University.
88. M. Takasaki, *Abstraction of symmetric transformations*, Tohoku Math. J. **49** (1942), 145–207, in Japanese.
89. R. Thom, *La classification des immersions*, Séminaire Bourbaki, 10ème année : 1957/1958, Exposé 157.
90. A. G. Tristram, *Some cobordism invariants for links*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **66** (1969), 251–264.
91. W. T. van Est and Th. J. Korthagen, *Non-enlargible Lie algebras*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, Indag. Math. **26** (1964), 15–31.
92. V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications (V. I. Arnold, ed.), Adv. Soviet Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 23–69.
93. Oleg Viro (ed.), *Topology of manifolds and varieties*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
94. F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 56–88.
95. A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. **12** (1960), 503–528.
96. H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.
97. J. H. C. Whitehead, *A certain open manifold whose group is unity*, Quart. J. Math. **6** (1935), 268–279.
98. C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312–1315.