



**HAL**  
open science

# Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités

Germain Court

► **To cite this version:**

Germain Court. Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2006. Français. NNT: . tel-00341991

**HAL Id: tel-00341991**

**<https://theses.hal.science/tel-00341991>**

Submitted on 26 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2006 n°32



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par  
**GERMAIN COURT**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse :  
**Prévision objective de la rupture ductile en grandes déformations sous sollicitation dynamique : Modèle d'épuisement plastique à taux limités.**

Thèse soutenue le 15 Décembre 2006 à l'ENS de Cachan  
devant le Jury composé de MM. :

<b>ALAIN COMBESCURE</b>	Professeur, INSA Lyon	Président
<b>MILAN JIRASEK</b>	Professeur, Université de Prague	Rapporteur
<b>KHEMAIS SAANOUNI</b>	Professeur, Université de Troyes	Rapporteur
<b>OLIVIER ALLIX</b>	Professeur, ENS de Cachan	Directeur de thèse
<b>MICHEL MAHE</b>	AIRBUS Toulouse	Examineur
<b>JACKY FABIS</b>	ONERA Lille	Examineur

---

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)



J'ai effectué la première partie de mes travaux au LMT. Je retiendrai de ces deux années, à la fois la chance d'avoir pu travailler dans un environnement scientifique de très grande qualité, mais également le plaisir d'avoir évolué dans un laboratoire où l'ambiance est particulièrement chaleureuse. Je remercie Pierre LADEVÈZE pour m'y avoir accueilli, et tout particulièrement Olivier ALLIX pour tout ce qu'il a pu me transmettre, sa gentillesse, son enthousiasme et sa disponibilité.

Les "remerciements" se limitant traditionnellement à une seule page, il m'apparaît difficile de tenter de citer toutes celles et ceux avec qui j'ai partagé des moments précieux au LMT. Je tiens à souligner la place particulière de David VIOLEAU, depuis le DGM, au cours de la thèse (la 211 et les p'ti dej du vendredi), et jusqu'à la soutenance (épaulé par Eric pour la répétition). Je remercie également François HILD pour avoir toujours pris le temps de répondre à mes questions et m'avoir permis de goûter à la corrélation d'images.

Je souhaite remercier Michel MAHÉ et Christophe BRAND pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me proposant de travailler au sein du département ESAN d'AIRBUS, où j'ai mené la deuxième partie de mes travaux. Merci également à Benoît MALHERBE et à l'équipe de Dynamique Rapide, dans laquelle je me suis toujours senti intégré, tout en ayant suffisamment de liberté pour mener mes travaux de thèse dans ce contexte industriel. Je pense ainsi à Mathieu, Nicolas, Kishan et Jean-Marc pour les échanges du quotidien, les pauses-café et les discussions au sérieux bien souvent virtuel, mais au pouvoir décontractant bien réel.

J'aimerais exprimer toute ma gratitude au professeur Alain COMBESURE pour avoir accepté de présider mon jury, aux professeurs Milan JIRASEK et Khemais SAANOUNI pour s'être acquittés de la tâche de rapporteur, ainsi qu'à Jacky FABIS pour avoir également accepté de participer au jury et avec qui ce fut un véritable plaisir de venir échanger et travailler quelques jours à l'ONERA.

Je remercie mes amis et les membres de ma famille qui ont pu être présents lors de ma soutenance de thèse, pour leur soutien et pour m'avoir permis d'apprécier avec eux ce moment particulier.

Pour terminer, j'adresse naturellement une pensée des plus chaleureuses à Isabelle, Louise, Pierre et Oscar, pour leur présence au quotidien et pour toute la patience et la compréhension dont ils ont pu faire preuve tout au long de ce parcours ; Merci.



# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Notations	1
Introduction	5
<b>I Contexte et cadre de l'étude.</b>	<b>11</b>
<b>1 Contexte Industriel et objectifs scientifiques</b>	<b>15</b>
1 L'activité Dynamique Rapide chez AIRBUS . . . . .	15
1.1 Domaine d'activité . . . . .	15
1.2 Vers le Virtual Testing . . . . .	16
1.3 Simulations jusqu'à rupture . . . . .	18
2 Objectifs scientifiques . . . . .	21
2.1 Matériau ductile sollicité en dynamique jusqu'à rupture . . . . .	21
2.2 Illustration des limites d'un modèle classique . . . . .	22
2.3 Objectifs . . . . .	23
<b>2 Prédiction de la rupture : Les différentes approches</b>	<b>27</b>
1 Modèles "classiques" : approches par critère . . . . .	27
1.1 Critère en HPP . . . . .	28
1.2 Extension à l'élastoplasticité en grandes déformations . . . . .	28
1.3 Prévision objective de la rupture . . . . .	31
2 Limiteurs spatiaux de localisation . . . . .	32
2.1 Domaine d'influence d'une variable interne . . . . .	32
2.2 Milieu de degré et d'ordre supérieur . . . . .	39
2.3 Bilan des limiteurs spatiaux de localisation . . . . .	41
3 Limiteurs temporels de localisation . . . . .	41
3.1 Vision dynamique de la rupture . . . . .	42
3.2 Une première approche : le modèle à effet retard . . . . .	44
3.3 Modèles à taux limité . . . . .	46

3.4	Bilan des limiteurs temporels de localisation . . . . .	48
4	Etude de l'équation des ondes . . . . .	48
4.1	Principe . . . . .	49
4.2	Exemples . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Elastoplasticité-endommageable en Grandes Déformations</b>	<b>55</b>
1	Grandes déformations . . . . .	56
1.1	Lois entières . . . . .	56
1.2	Lois en taux . . . . .	56
1.3	Cadre des grandes déformations retenu . . . . .	59
2	Comportement élasto-plastique endommageable . . . . .	60
2.1	Eléments de thermodynamique des milieux continus . . . . .	60
2.2	Elasto-plasticité endommageable . . . . .	62
<b>II Modèle</b>		
<b>élastoplastique endommageable</b>		
<b>en grandes déformations</b>		
<b>d'épuisement plastique</b>		
<b>à taux limités.</b>		
		<b>69</b>
<b>4</b>	<b>Couplage endommagement-plasticité en grandes déformations :</b>	
	<b>Etude de l'objectivité de la prévision de la rupture.</b>	<b>73</b>
1	Problème modèle. . . . .	74
1.1	Loi de comportement . . . . .	75
1.2	Modélisation numérique . . . . .	76
1.3	Pertinence du problème modèle . . . . .	78
2	Modèles élasto-plastique endommageable . . . . .	79
2.1	Modèle "statique" . . . . .	79
2.2	Modèle à taux d'endommagement limité . . . . .	82
2.3	Conclusion . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Analyse du modèle</b>	
	<b>d'épuisement plastique à taux limités</b>	<b>91</b>
1	Présentation du modèle . . . . .	91
2	Taille de la zone de localisation . . . . .	94
2.1	Etude analytique - équation des ondes . . . . .	95
2.2	Résultats numériques . . . . .	98
2.3	Influence des paramètres . . . . .	100
3	Influence de la loi d'écroutissage . . . . .	101
4	Implémentation numérique du modèle . . . . .	103
5	Implémentation et premiers exemples en 2D. . . . .	104
5.1	Notations . . . . .	104
5.2	Intégration temporelle : Schémas de Newmark . . . . .	107

---

5.3	Principe de résolution . . . . .	109
5.4	Résultats numériques . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Comparaison essais/calculs : Vers l'identification du modèle</b>	<b>115</b>
1	Implémentation du modèle dans ABAQUS . . . . .	115
2	Investigations expérimentales . . . . .	116
2.1	Description des essais monotones jusqu'à rupture . . . . .	116
2.2	Description des essais de charge/décharge . . . . .	119
3	Vers l'identification du modèle . . . . .	119
3.1	Comportement avant localisation . . . . .	120
3.2	Phase de rupture . . . . .	123
3.3	Bilan . . . . .	127
4	Simulations prédictives : Eprouvettes lisses . . . . .	129
4.1	Simulations . . . . .	129
4.2	Observations expérimentales . . . . .	132
4.3	Comparaison simulations - essais . . . . .	133
5	Conclusion . . . . .	135
	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>
	<b>III Annexes</b>	<b>143</b>
	<b>Annexe I : Résolution par la MEF en 2D, élément Q4</b>	<b>145</b>
	<b>Annexe II : Intégration temporelle</b>	<b>147</b>
	<b>Annexe III : Lois de comportement</b>	<b>149</b>
	<b>Annexe IV : V-Umat</b>	<b>151</b>
	<b>Annexe V : Figures en couleur</b>	<b>153</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>



# Table des figures

1.1	Simulation d'impact d'oiseau sur la casquette de l'A380. . . . .	17
1.2	Pyramide des essais / simulations. . . . .	19
1.3	Influence du maillage (orientation/taille) - Configuration à rupture. . . . .	23
1.4	Influence du maillage (orientation/taille) - F(t). . . . .	23
2.1	Le taux d'endommagement n'est pas limité avec un modèle "classique".	43
2.2	Modèle "classique" : La configuration à rupture dépend du maillage. . . . .	44
2.3	Elasticité avec endommagement retardé. . . . .	45
2.4	Elasticité avec endommagement limité. . . . .	47
4.1	Essai quasi-statique jusqu'à rupture, vision dynamique de la rupture. . . . .	74
4.2	Problème modèle. . . . .	74
4.3	Loi de comportement, comportement linéaire. . . . .	76
4.4	Loi de comportement, Aluminium. . . . .	77
4.5	Elasticité en grandes déformations : F(Dl/10) et Eps(t). . . . .	78
4.6	Modèle "statique" : évolution spatiale et temporelle de la plasticité. . . . .	80
4.7	* Modèle "statique" : configuration à rupture (quand $d = d_c$ ). . . . .	81
4.8	Modèle statique : taux de plasticité non borné. . . . .	81
4.9	Modèle "statique", Aluminium : p(x) et F(Dl/10). . . . .	82
4.10	Modèle "statique" sans endommagement, Aluminium : p(x) et F(Dl/10). . . . .	83
4.11	Etats 1 et 2 des matériaux "linéaire" et "aluminium". . . . .	84
4.12	Modèle à taux d'endommagement limité, Aluminium : p(x). . . . .	86
4.13	Modèle à taux d'endommagement limité, Aluminium : F(Dl/10). . . . .	86
4.14	* Modèle à taux d'endommagement limité : configuration à rupture. . . . .	88
5.1	* Modèle d'épuisement plastique à taux limités - modélisation 1D : configuration à rupture indépendante de la taille de maille. . . . .	94
5.2	Variations temporelles de l'endommagement et de la plasticité. . . . .	94
5.3	Influence de la longueur initiale du barreau. . . . .	98
5.4	Estimation numérique de la longueur caractéristique. . . . .	99
5.5	Influence de la vitesse sur la taille de la zone de localisation. . . . .	100
5.6	Influence de $a$ et de $t_c$ sur la taille de la zone de localisation. . . . .	101
5.7	Influence de $E$ et de $\rho$ sur la taille de la zone de localisation. . . . .	101
5.8	Lois d'écroutissage : comportement matériau - réponse globale. . . . .	102

5.9	Comparaison entre les lois d'érouissage. . . . .	103
5.10	Eléments de référence, initial et actualisé en 2D. . . . .	106
5.11	"Dimensionnement" d'un cas test - résultats 1D et 1D <sup>+</sup> . . . . .	112
5.12	Résultats 2D avec Matlab. . . . .	113
6.1	Géométrie initiale et après essai des éprouvettes. . . . .	116
6.2	Montage d'essai dynamique - éprouvette trouée. . . . .	117
6.3	Identification du comportement élastoplastique. . . . .	121
6.4	Essais cycliques, estimation de l'endommagement. . . . .	122
6.5	Mesures de " $\dot{\epsilon}$ ". . . . .	123
6.6	Influence de " $x$ " et de " $\Delta t$ " sur une mesure de " $\dot{\epsilon}$ ". . . . .	124
6.7	Résolutions spatiales et temporelles nécessaires à la mesure d'un " $\dot{\epsilon}$ ". . . . .	124
6.8	Eprouvette trouée (zone d'étude) et courbes F(t). . . . .	126
6.9	* Comparaison essais/simulations, $\epsilon_{yy}$ , images 1 et 2. . . . .	126
6.10	* Comparaison essais/simulations, $\epsilon_{yy}$ , images 3 et 4. . . . .	127
6.11	Lois d'évolution de la plasticité et de l'endommagement. . . . .	128
6.12	* Eprouvette lisse, simulation - Modèles classique et à taux limité. . . . .	129
6.13	* Eprouvette lisse - Influence de l'orientation du maillage. . . . .	130
6.14	* ABAQUS 2D : indépendance à la taille de maille. . . . .	131
6.15	ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, F(t). . . . .	131
6.16	* ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, pré-localisation. . . . .	132
6.17	* ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, localisation. . . . .	133
6.18	Eprouvette lisse - modes de rupture. . . . .	133
6.19	* Eprouvette lisse, mode de rupture, bifurcation de mode. . . . .	134
6.20	* Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse, chemin de rupture. . . . .	134
6.21	Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse, F(t). . . . .	135
6.22	Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse, F(t) - rupture. . . . .	135

# Notations

## • Notations et opérations élémentaires

$X$  : Scalaire

$\underline{X}$  : Vecteur

$\mathbb{X}$  : Tenseur d'ordre 2

$\mathbf{X}$  : Tenseur d'ordre 4

$\underline{X}$  (*resp.*  $\underline{x}$ ) : coordonnée d'un point sur la configuration initiale (*resp.* déformée)

Dérivée temporelle :  $\frac{d}{dt}a = \dot{a}$

$\text{dev}\mathbb{A} = \mathbb{A} - 1/3\text{Tr}[\mathbb{A}]\cdot\mathbb{I} = \mathbb{A}^d$

$(\mathbb{X})_S = 1/2(\mathbb{X} + \mathbb{X}^t)$  et  $(\mathbb{X})_{AS} = 1/2(\mathbb{X} - \mathbb{X}^t)$

$\|\xi\|^2 = \xi : \xi = \text{Tr}[\xi^T \cdot \xi]$

## • Grandeurs statiques

$\sigma$  : tenseur des contraintes de Cauchy.

$\tau = J \cdot \sigma$  : tenseur des contraintes de Kirchhoff.

$\mathbb{S} = J \cdot \mathbb{F}^{-t} \cdot \sigma \cdot \mathbb{F}^{-1}$  : tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

$\mathbb{B} = \mathbb{F}^{-1} \cdot \sigma$  : tenseur des contraintes de Boussinesq.

## • Grandeurs cinématiques

$\mathbb{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$ ,  $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{-1} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}}$  et  $J = \det \mathbb{F} = \frac{\rho_0}{\rho}$ .

$\mathbb{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1}$  : gradient des vitesses.

$\mathbb{D} = (\mathbb{L})_S$  : taux eulérien des déformations,  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_e + \mathbb{D}_p$ .

$\mathbb{W} = (\mathbb{L})_{AS}$  : taux de rotation.

$\mathbb{F}$  : gradient des déplacements.

$\dot{\mathbb{E}} = (\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^t)_S = \mathbb{F}^t \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{F}$  : taux des déformations de Green-Lagrange.

◦ *Déformation ne dépendant pas du chemin suivi* :  $(\mathbb{F})$

Décomposition polaire de  $\mathbb{F}$  :  $\mathbb{F} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{U}$  ou  $\mathbb{F} = \mathbb{V} \cdot \mathbb{R}$ .

$\varepsilon^G = \frac{1}{2}(\mathbb{U}^2 - \mathbb{I})$  : Green-Lagrange.

$\varepsilon^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{V}^{-2})$  : Euler-Almansi [ $\varepsilon^g = \frac{1}{2}(\mathbb{V}^2 - \mathbb{I})$ ].

$\varepsilon^L = \text{Ln}(\mathbb{U})$  ou  $\varepsilon^l = \text{Ln}(\mathbb{V})$  Déformations logarithmiques.

$\varepsilon^U = \mathbb{U} - \mathbb{I}$  et  $\varepsilon^v = \mathbb{V} - \mathbb{I}$ .

◦ *Déformation dépendant du chemin suivi :*

$\varepsilon^S$  : (*resp.*  $\varepsilon^R$ ) déformation cumulée dont la dérivée de Jaumann (*resp.* Green Naghdi) est égale au taux eulérien des déformations  $\mathbb{D}$  :  $\frac{d}{dt} [\tilde{\varepsilon}^S]_R = \tilde{\mathbb{D}}$  ou  $\tilde{\varepsilon}^S = \int_R \tilde{\mathbb{D}}$ .

*Remarque :* La déformation par défaut  $\varepsilon$  représente la déformation  $\varepsilon^S$ .

• Objectivité

- Dérivée particulaire :  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{grad}\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{U}$
- Dérivée de Truesdell :  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^t = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{Tr}(\mathbb{D})$
- Dérivée de Jaumann :  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbb{W} - \mathbb{W} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbb{Q} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbb{Q}^t \boldsymbol{\tau} \mathbb{Q}) \cdot \mathbb{Q}^t$
- Dérivée de Green-Naghdi :  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau} = \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^t \boldsymbol{\tau} \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^t = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$  avec  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^t$ .

$\mathbb{Z}$  : quantité tensorielle exprimée sur le référentiel actuel  $R$

$\tilde{\mathbb{Z}}$  : transposé de  $\mathbb{Z}$  sur le référentiel tourné  $\tilde{R}$ .

• Elasticité

Rdc Hpp :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbb{I}$  ou bien  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \cdot \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbb{I} = 2\mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^d + k \cdot \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbb{I}$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} ; E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad k = \lambda + \frac{2}{3} \cdot \mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$\boldsymbol{\tau}^h = \frac{1}{3} \text{Tr}[\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbb{I}, \quad \boldsymbol{\tau}^d = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^h \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^d = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^h$$

$$\boldsymbol{\tau}^{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \|\boldsymbol{\tau}^d\|$$

• Plasticité

$$p(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbb{D}_{p(\tau)}\| d\tau$$

$$\mathbb{D}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad \text{et on note } \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\tau}^d}{\|\boldsymbol{\tau}^d\|}$$

• Endommagement

On définit  $R_\nu$  pour l'évolution de l'endommagement :

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3 \cdot (1-2\nu) \left( \frac{\boldsymbol{\tau}^h}{\boldsymbol{\tau}^{VM}} \right)^2$$

• Notations en 2D :

$$\text{Soit } \mathbb{X} \text{ un tenseur d'ordre 3 : } \underline{X} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{22} \\ X_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}_{3/6} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tenseur d'élasticité } \mathbb{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$$

• Vocabulaire :

- Problème de référence : structure métallique sollicitée en dynamique à rupture.
- Problème modèle : barreau 1D sollicité en traction.
- Comportement : "fragile" ou "ductile".
- Loi (ou relation) de comportement : lien entre les quantités statiques et cinématiques.

◦ Modèle (de comportement) : théorie HPP ou Grandes déformations, loi de comportement et lois d'évolution.

◦ Modèle "classique" : milieu continu régi par le principe de l'action locale, matériellement simple (milieu de Cauchy) et au comportement indépendant du temps et de la vitesse.



# Introduction

Dans le domaine de la conception et la justification des structures, l'industrie aéronautique et la société AIRBUS en particulier s'orientent aujourd'hui vers le *Virtual Testing*. L'objectif est de diminuer le nombre des essais structuraux les plus onéreux, sur les éléments de grande taille notamment, en ayant recours à la simulation et à des campagnes d'essais (réels) sur des éléments de taille plus réduite.

Le domaine de la dynamique rapide est particulièrement concerné par le *Virtual Testing*. En effet, lors d'une campagne d'essais associée à une étude dans ce domaine, le coût unitaire des prototypes est en général élevé en raison de la dimension des pièces étudiées (de l'ordre du mètre, voire du décamètre) et il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs exemplaires. Le nombre de prototypes s'explique par le fait que les essais sont en général destructifs, et qu'il est parfois nécessaire de prendre en compte plusieurs scénarios d'impacts (vitesse, masse, angle d'attaque du projectile) et conceptions de la structure (matériaux, géométrie, architecture ...). Pour ces raisons, l'utilisation de la simulation peut considérablement réduire les coûts et les durées des cycles de développements en dynamique rapide.

La maturité des codes de calcul par éléments finis en dynamique explicite, couplée aux performances de l'informatique, a permis de réaliser dans ce domaine, des simulations de plus en plus nombreuses et pertinentes depuis une quinzaine d'années. Il est désormais possible de mener des calculs, avec une approche conservative, qui permettent de justifier la tenue d'une structure. En revanche, la prévision d'une éventuelle rupture, de l'amorçage d'une fissure jusqu'à la ruine complète de la structure, ne peut se faire aujourd'hui sans l'utilisation de nombreux essais permettant de caler les modèles numériques pour une situation particulière.

Mener des simulations jusqu'à rupture de manière robuste constitue un enjeu industriel d'importance. Il s'agit par exemple de déterminer si une rupture locale est tolérable, c'est-à-dire être à même de garantir sa non-propagation. Un autre objectif, afin d'optimiser le dimensionnement d'une structure devant résister à un impact (trouver la solution la plus légère), est de pouvoir encadrer la solution retenue en connaissant précisément les marges associées, c'est-à-dire déterminer les conditions qui garantissent la tenue structurale tout comme les conditions qui conduisent à la rupture.

On se limite dans ce document à la simulation du problème de référence d'une "structure métallique initialement saine (non fissurée) sollicitée en dynamique jusqu'à rupture". Jusqu'à présent, lors de l'étude de ce problème de référence par simulation par Eléments Finis avec un code industriel, il est délicat d'interpréter les résultats et de leur donner un sens physique dès qu'un critère de rupture est localement atteint. La raison est que les modèles "classiques" de la mécanique continue de l'endommagement (c'est-à-dire locaux et indépendants du temps) ne sont pas adaptés à la prévision de la rupture car ils ne permettent pas de décrire de façon objective la phase post-pic du comportement [1] et par conséquent conduisent à des résultats de simulation qui dépendent du maillage une fois que la localisation est atteinte.

Dans le cadre de la mécanique continue, pour être à même de prévoir objectivement le développement des dégradations jusqu'à rupture, il est nécessaire de modifier, d'enrichir, la description du comportement du matériau. Les techniques les plus usitées dans la littérature sont regroupées sous des vocables différents et notamment ceux de "limiteurs de localisation" [2] et de "modèle de plasticité ou d'endommagement non-locaux". Ces techniques permettent de contrôler le phénomène de localisation des déformations, c'est-à-dire l'apparition et le développement de zones de petites tailles dans lesquelles les déformations restent continues mais se concentrent.

Elles consistent, chacune à leur manière, à introduire une longueur caractéristique dans le modèle; la taille minimum de la zone de localisation dépend alors des paramètres caractérisant les termes supplémentaires introduits. Ces approches (que nous qualifierons de "limiteurs spatiaux de localisation" dans ce travail) présentent l'avantage de régulariser le problème à la fois en statique et en dynamique, quelle que soit la formulation (HPP/Grandes déformations), et quel que soit le comportement du matériau sous réserve d'utiliser la variable interne "non-locale" adéquate. En revanche, elles nécessitent l'utilisation de conditions aux limites additionnelles, souvent difficiles à déterminer et à interpréter physiquement. De plus, concernant l'identification des paramètres spécifiques à ces modèles enrichis, aucune procédure claire ne s'est imposée, et pour que ces approches soient intégrées dans un code E.F., d'importants développements sont nécessaires.

Une autre voie possible, est celle des modèles dépendants du temps. Des modèles d'adoucissement visqueux ont par exemple été étudiés par Sluys [3, 4] ou Comi et Perego [5]. Ces travaux ne semblent pas avoir été poursuivis, peut-être parce que, tel quels, ils ne répondent pas complètement au problème posé par la localisation. Dans le cadre des composites stratifiés, Ladevèze a proposé une voie mixte introduisant une longueur caractéristique, correspondant à l'épaisseur du pli, associée à des modèles d'endommagement retardés (ou visco-endommagement) [6, 7, 8]. Étudiés précisément par Allix et Deü [9], il est apparu que la seule introduction de la viscosité était insuffisante pour garantir des prévisions objectives de la rupture.

Le concept qui s'est finalement dégagé a été celui de modèle à taux d'endomma-

gement limité. Par comparaison aux approches spatiales, ces modèles peuvent être interprétés comme des "limiteurs temporels de localisation". Les modifications interviennent alors pour des vitesses de chargement élevées et permettent de contrôler la dynamique de la phase de localisation. Dans ce cas, les modèles restent locaux et ne nécessitent pas l'utilisation de conditions aux limites additionnelles. La vision associée de la rupture semble saine : la rupture est un phénomène dynamique accompagné de variations temporelles des dégradations importantes mais finies. Allix et Deü ont proposé une démarche d'identification [10], démarche notamment mise en oeuvre pour des matériaux 3D C/C dans [11]. D'autres possibilités d'identification ont été proposées et appliquées dans les travaux de Combescure et Suffis pour des matériaux métalliques [12]).

En raison de leur étude beaucoup plus restreinte que les approches non-locales, la maîtrise de ces approches reste incomplète, tant du point de vue de la formulation des modèles que de leur exploitation numérique. Principalement développées pour des matériaux élastiques-endommageables dans le cadre H.P.P., la possibilité de leurs extension et de leur mise en oeuvre dans des situations plus complexes comme celles rencontrées dans ce travail mêlant plasticité, endommagement, grandes déformations (striction) et rupture, restait à étudier. Une première tentative dans ce sens, permettant de maîtriser l'apparition de la localisation en grandes déformations, a été effectuée par Suffis et Combescure [12]. Dans l'approche suivie, il apparaît nécessaire d'introduire un endommagement critique différent de 1, et de ce fait, cette approche ne répond pas complètement, à notre sens, au problème posé. L'objectif de cette thèse a alors été d'étudier la possibilité de l'extension des modèles à taux d'endommagement limité au cas de la rupture ductile des métaux en grandes transformations. L'enjeu industriel associé est celui de la simulation robuste du comportement de structures métalliques sollicitées en dynamique jusqu'à rupture, c'est-à-dire, la possibilité d'obtenir des résultats de calculs aux Eléments Finis indépendamment du maillage et satisfaisants au regard de la réalité expérimentale.

Dans la première partie de ce document (chapitres 1 à 3) le contexte et le cadre de l'étude sont présentés. La deuxième partie (chapitres 4 à 6), quant à elle, détaille comment étendre de façon cohérente les modèles d'endommagement à taux limités au cas de la rupture ductile, ainsi que la mise oeuvre numérique et les résultats obtenus avec le modèle proposé.

Ainsi, le premier chapitre précise le contexte industriel et les objectifs de cette étude.

Le deuxième chapitre présente, dans un premier temps, les critères permettant de mettre en évidence l'apparition de la perte d'unicité de la solution, lors de la résolution d'un problème modélisé par une approche classique. Puis, les avantages et les inconvénients de différentes techniques permettant de s'affranchir des problèmes

de dépendance au maillage sont exposés : les limiteurs spatiaux et temporels de localisation. Enfin, l'analyse de l'équation des ondes caractéristique des différentes techniques présentées précédemment est détaillée : une telle étude permet de conclure quant à l'efficacité d'un modèle vis-à-vis de la maîtrise de la localisation.

Le troisième chapitre précise les choix retenus pour modéliser le comportement des matériaux étudiés (aluminium, titane, acier).

L'apparition de la localisation, étape précédant la ruine d'une structure métallique, est pilotée par deux phénomènes : le premier est lié à la variation de géométrie de la structure, le second au comportement local du matériau. Ainsi ce chapitre présente différentes approches couramment utilisées pour travailler dans le cadre des grandes déformations et décrit la modélisation du comportement matériau retenue, pour mener des simulations jusqu'à rupture de structures métalliques en accord avec le cadre industriel de cette étude.

Le quatrième chapitre présente le problème modèle choisi pour dégager les principales propriétés d'un modèle vis-à-vis de la localisation et de la rupture. Il s'agit d'une formulation en grandes déformations d'un barreau 1D soumis à un chargement dynamique, exemple très simple mais permettant de dégager un certain nombre de points clés pour cette étude. Les propriétés de différentes modélisations d'un comportement élastoplastique endommageable sont alors exposées, notamment leur capacité à fournir des résultats quel que soit le maillage.

Il est alors mis en évidence que, limiter le taux d'endommagement repousse l'apparition de la perte d'unicité de la solution [13], mais ne permet pas de régulariser le problème jusqu'à l'endommagement critique  $d_c = 1$ . Et les résultats de simulation E.F. jusqu'à  $d_c = 1$  avec un comportement élasto-plastique endommageable et taux d'endommagement limité en grandes déformations dépendent du maillage. Ceci s'explique par le fait que l'instabilité matérielle principale pour des alliages qui s'endommagent peu avant localisation, est essentiellement pilotée par la plasticité.

Dans le modèle "d'épuisement plastique à taux limités" décrit dans le cinquième chapitre, les deux sources d'instabilité potentielles que sont la striction et l'endommagement sont régies par une même variable : "l'épuisement" plastique. Ce modèle permet ainsi de contrôler la phase de localisation jusqu'à rupture dans le cadre d'un comportement élasto-plastique endommageable en grandes déformations.

La présentation et les caractéristiques de ce modèle se limitent dans ce chapitre au cas 1D tout d'abord. Suite à la description du modèle, une analyse analytique propose une estimation de la longueur caractéristique de la zone de localisation en fonction des paramètres du modèle. Cette estimation est en accord avec les résultats d'une analyse numérique. L'influence de la loi d'écrouissage et quelques remarques au sujet de l'implémentation numérique de ce modèle sont ensuite précisées. Dans un second temps, les points clés liés à la résolution numérique de notre problème de référence sont déclinés. Il s'agit d'une formulation 2D Eléments

Finis développée sous Matlab. L'intégration en temps est assurée par le schéma itératif des différences centrées de la méthode de Newmark. Les capacités du modèle "d'épuisement plastique à taux limités" à fournir des résultats de simulation jusqu'à rupture indépendamment de la taille du maillage sont alors mises en évidence.

Le sixième chapitre décrit comment le modèle "d'épuisement plastique à taux limités" a été implémenté dans ABAQUS au moyen d'une V-Umat, ainsi qu'une campagne d'essais de traction jusqu'à rupture sur éprouvettes lisses et trouées en aluminium, filmés à l'aide d'une caméra rapide. Ces éprouvettes ont été préparées pour pouvoir être analysées par corrélation d'image, ce qui a été réalisé à l'aide de CORRELI [14], logiciel développé sous la houlette de François Hild. Ces essais ont été réalisés à l'ONERA-Lille dans le cadre d'une demande AIRBUS.

A partir d'une partie des résultats expérimentaux, un jeu de paramètres du modèle est déterminé afin de garantir des tailles de zone de localisation et des vitesses de propagation de fissure identiques entre essais et simulations. Le jeu de paramètres déterminé permet également d'obtenir de très bonnes corrélations calculs-essais avec l'autre partie des résultats expérimentaux.



## Première partie

Contexte et cadre de l'étude.



Dans cette première partie, nous nous intéressons au contexte et au cadre de cette étude. Trois chapitres sont consacrés à cette partie :

- Le chapitre 1 précise le contexte industriel et les objectifs de cette étude.
- Le chapitre 2 présente différentes approches pour mener des simulations jusqu'à rupture, en insistant sur les avantages et les inconvénients de différentes techniques permettant de s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage.
- Le chapitre 3 décrit et justifie, à la fois le cadre des grandes déformations, et les choix concernant la modélisation du comportement ductile retenus dans notre étude.



# Chapitre 1

## Contexte Industriel et objectifs scientifiques

*La première section de ce chapitre présente l'activité du service de dynamique rapide d'AIRBUS et les motivations qui l'ont amené à vouloir améliorer la robustesse des simulations dynamiques sur structures métalliques jusqu'à rupture. La deuxième section expose les objectifs scientifiques de cette étude.*

### 1 L'activité Dynamique Rapide chez AIRBUS

#### 1.1 Domaine d'activité

Le service de dynamique rapide d'AIRBUS (Vulnérabilité des structures) s'intéresse au comportement des structures d'avions soumis à des chargements mécaniques fortement dynamiques. La finalité est de garantir la tenue des pièces soumises à de tels chargements (aide au design ou support à la certification).

Les scénarios les plus fréquemment étudiés correspondent à l'étude d'impacts d'oiseau, de débris de pneumatiques ou d'impacts de débris dur, comme les "débris moteur" ou, par exemple, de jantes ou d'écrous lors d'un éclatement pneumatique violent. Dès ses premiers développements, l'industrie aéronautique a été confrontée aux conséquences, plus ou moins importantes, engendrées par ces types d'impacts. Un impact créant de faibles dommages peut rendre l'avion non opérationnel et imposer ainsi son immobilisation. Pour donner un ordre de grandeur de la fréquence à laquelle se produit de tels événements, plusieurs éclatements de pneus par an sont dénombrés sur l'ensemble de la flotte AIRBUS (ne créant des dommages qu'occasionnellement). Les conséquences peuvent parfois être beaucoup plus lourdes ; concernant

les impacts d'oiseaux, la fréquence est d'environ 10 cas par jour dans le monde, le premier décès a été enregistré en 1912 et plus récemment, depuis 1960, ce sont 79 avions civils qui ont été perdus dans le monde, faisant plus de 210 victimes.

Les matériaux utilisés en aéronautique sont essentiellement des matériaux métalliques (aluminium, ou plus rarement titane, voir acier) et composites. La présence des matériaux métalliques reste aujourd'hui encore très importante : la part en masse des métalliques est de 65 % sur l'A380. Même s'ils sont connus et largement utilisés depuis longtemps, ils bénéficient encore de nombreux développements (glare, nouveaux alliages : aluminium-lithium par exemple). Ils sont donc encore compétitifs face aux matériaux composites, notamment pour les parties soumises aux impacts, en raison de leur capacité d'absorption d'énergie mieux maîtrisée.

## 1.2 Vers le Virtual Testing

### • Utilisation de la simulation numérique

Le dimensionnement analytique d'une structure soumise à un impact est extrêmement délicat en raison de l'aspect très fortement non linéaire du phénomène (grandes déformations des structures, non linéarité matériau, rupture locale, contacts, comportement fluide d'un oiseau ... ). L'exemple de la conception de la partie supérieure frontale du cockpit (la casquette) des avions AIRBUS A300-B2, illustre cette difficulté.

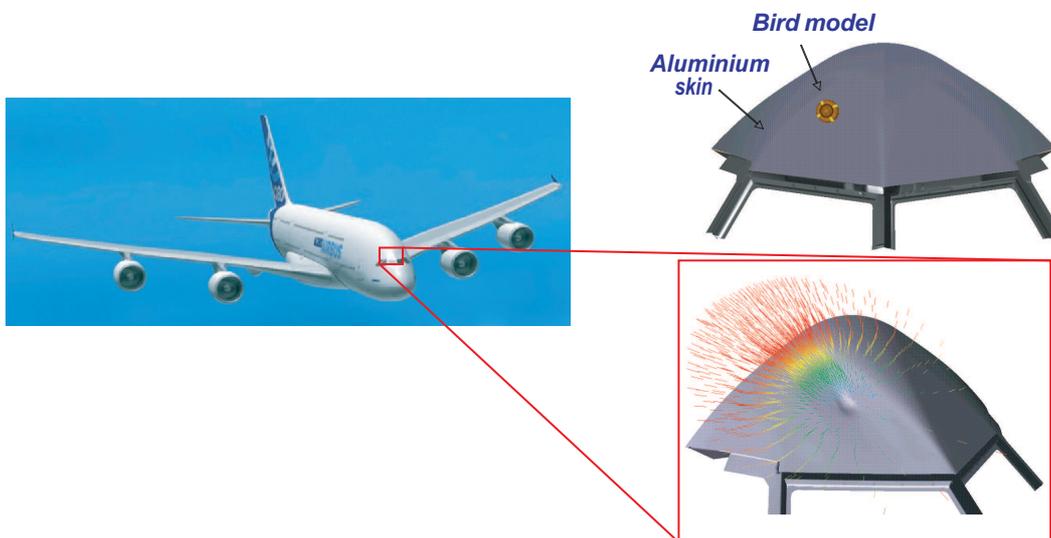
Au début des années 1970, la casquette des avions AIRBUS A300-B2 avait initialement été conçue en aluminium, sur la base de règles de conceptions essentiellement issues de l'expérience d'appareils anciens. Cependant, les essais d'impacts d'oiseau ayant montré que cette structure initiale n'offrait pas une tenue suffisante, cette configuration en aluminium a été abandonnée et remplacée au profit d'une structure similaire réalisée en titane. Et, pendant plus de 30 ans, c'est en titane que les casquettes des avions suivants ont été fabriquées. Le changement de matériau a permis d'assurer la tenue de la pièce en cas d'impact, mais l'augmentation du coût de la matière brute et du coût de fabrication (matériau dur, usinage difficile), ainsi que la plus grande rigidité de la pièce (difficulté lors du montage) en ont augmenté le coût final.

Cependant, la définition d'une nouvelle architecture permettant d'utiliser de l'aluminium aurait impliqué de définir, fabriquer et tester de nouvelles pièces, soumises à plusieurs scénarios d'impact, sans l'assurance de parvenir à déterminer une nouvelle configuration répondant aux exigences de certifications dans les délais impartis. Les coûts de développements associés (notamment la fabrication des prototypes et la réalisation des essais), en rapport avec les anticipations du nombre d'avions à produire n'ont pas justifié, à l'époque, d'autres investigations. Comme le montre cet exemple, les essais dans l'industrie aéronautique représentent, aujourd'hui encore, une part très importante du coût de développement d'un nouvel avion, sans pour

autant permettre une optimisation poussée du design.

Afin de réduire ces coûts, AIRBUS s'est naturellement orienté vers la simulation numérique. Au début des années 1990, les performances de l'informatique et les progrès réalisés dans le domaine des codes de calculs de dynamique rapide ont permis de développer rapidement la simulation numérique pour ces applications. Dans un premier temps, les efforts ont concerné la recherche, le développement et la validation de méthodes (200 essais environ d'impacts d'oiseaux sur des cibles en différents matériaux ont été effectués afin de mener des comparaisons calculs-essais sur des cas de référence).

Les premières applications d'aide au design avec l'outil numérique ont ainsi été rendues possibles quelques années plus tard (1996) et, aujourd'hui, les niveaux de validation atteints ont conduit les autorités de certification à accepter la simulation comme moyen de démonstration réglementaire pour différents types d'applications. Une fois qu'une méthode et un modèle numérique sont validés, l'utilisation de la simulation permet d'étudier facilement différentes configurations de design. Concernant l'A380, plusieurs architectures de casquettes (épaisseur de peau, taille, forme et espacement des raidisseurs, matériaux) soumises à différents scénarios d'impacts ont ainsi pu être analysées et ont permis de montrer la possibilité de définir une configuration en aluminium permettant de répondre aux exigences de certifications (cf. figure 1.1).



**Fig. 1.1:** Simulation d'impact d'oiseau sur la casquette de l'A380.

- Cadre de la simulation numérique en dynamique rapide

Les codes de calculs utilisés s'appuient sur la Méthode des Eléments Finis et un schéma d'intégration en temps explicite. La taille caractéristique des structures

étudiées dans le cadre de simulations d'impact ou de crash varie de quelques décimètres à quelques mètres, voire dizaines de mètres (tronçon avion, partie structurale de plusieurs mètres de longueur/largeur, avion complet ... ). Les modèles ont couramment plusieurs centaines de milliers d'éléments (voire plus d'un million), essentiellement des éléments "coques" d'une dimension caractéristique de 5 mm environ. Quelques heures à plusieurs journées de calcul sont généralement nécessaires à la résolution de tels problèmes, qui simulent des phénomènes physiques qui ne se déroulent que pendant quelques ms. L'une des contraintes les plus pénalisantes vis-à-vis des temps de calcul réside dans le caractère conditionnement stable du schéma d'intégration en temps, qui impose un pas de temps critique maximum en fonction de la plus petite taille caractéristique des éléments. Cette condition rend extrêmement contraignant un raffinement local du maillage.

- Vers le *Virtual Testing*

La conception et la justification des structures s'orientent aujourd'hui vers le *Virtual Testing* (cf. figure 1.2). L'objectif est de diminuer le nombre des essais structuraux les plus onéreux, sur les éléments de grande taille notamment, en ayant recours à la simulation et en s'appuyant sur des campagnes d'essais (réels) sur des éléments de taille plus réduite. Le domaine de la dynamique rapide est particulièrement concernée par le *Virtual Testing* comme nous venons de le voir avec les exemples de la casquette de l'A300-B2 et de l'A380.

Désormais, l'objectif n'est plus uniquement de dimensionner une structure pouvant être soumise à un impact, mais également de contribuer à proposer des conceptions optimales (réduction des marges), réduire les cycles et augmenter la confiance dans les résultats avant essais.

### 1.3 Simulations jusqu'à rupture

#### 1.3.1 Méthodologie actuelle, critère en $\sigma_{max}$ , $p_{max}$

Les codes de calculs Eléments Finis actuels proposent pour les comportements ductiles des critères en contrainte équivalente maximum ( $\sigma_{max}$ ) ou déformation plastique cumulée maximum ( $p_{max}$ ). La contrainte d'écrouissage est alors constante à partir de  $\sigma_{max}$  (ce qui a pour effet d'imposer la mise en place de la localisation des déformations), et l'élément est considéré comme rompu quand  $p_{max}$  est atteint.

Cette approche est facile à mettre en oeuvre dans un code de calcul et ne pose pas de difficulté d'identification : les valeurs de  $\sigma_{max}$  et de  $p_{max}$  peuvent être identifiées à partir d'un essai de traction. Avec une telle approche, il n'est pas nécessaire d'utiliser un comportement endommageable.

- Prise en compte de la finesse de maillage

Afin de s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage, il est possible de choi-

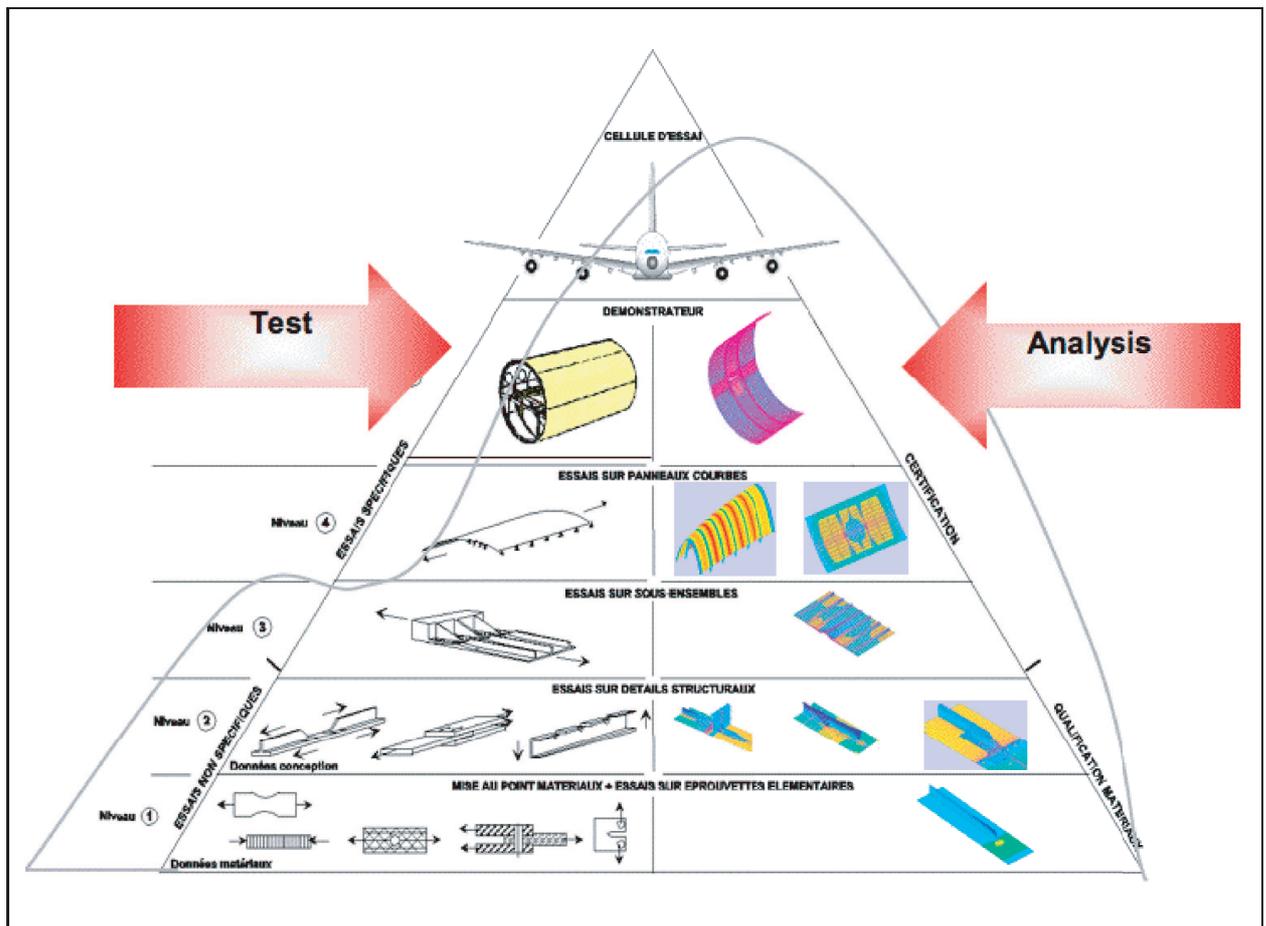


Fig. 1.2: Pyramide des essais / simulations.

sur la taille des éléments finis comme un paramètre du problème. La valeur de  $p_{max}$  peut être ajustée en fonction de la taille des éléments pour retrouver les valeurs globales de déformation ou de déplacement à rupture. Cette technique peut être utilisée pour recalibrer des simulations, mais ne permet pas d'être prédictif.

- Limites

Cette approche présente l'avantage d'être relativement facile à mettre en œuvre. En revanche, les limites de cette démarche sont importantes.

Dans le modèle, la plasticité cumulée est liée à la partie déviatrice du tenseur des contraintes, alors qu'expérimentalement, la rupture est davantage gouvernée par la pression hydrostatique. D'un point de vue physique, un critère de rupture en déformation plastique cumulée maximum n'est donc pas satisfaisant.

L'absence d'endommagement ne permet pas de faire chuter la contrainte lors de la rupture. Ainsi, lorsque le critère de rupture est atteint, la valeur de la contrainte

équivalente est maximale, ce qui n'est pas en accord avec une modélisation de la rupture par une approche continue.

Le fait que les paramètres matériaux dépendent du maillage n'a pas de signification physique, et les paramètres matériaux devant être ajustés en fonction de la nature de la sollicitation et de la discrétisation éléments finis, chaque calcul demande un traitement spécifique.

Mais surtout, avec les modèles disponibles, c'est-à-dire des modèles "classiques", dès que  $\sigma_{max}$  est atteint en un point de la structure, l'unicité de la solution du problème de mécanique continue associé est perdue, et la solution E.F. devient fortement dépendante au maillage. Il est alors très délicat de donner une interprétation physique des résultats au-delà de cet état critique (orientation et vitesse de propagation d'éventuelles fissures par exemple).

### 1.3.2 Nécessité de mener des simulations robustes jusqu'à rupture

La nécessité de pouvoir mener des simulations jusqu'à rupture de manière robuste est aujourd'hui réelle.

Tout d'abord, dans le cadre d'une politique de réduction des marges, il est nécessaire de pouvoir simuler finement une rupture pour s'approcher de la solution optimale, en déterminant aussi bien les conditions qui garantissent la tenue, tout comme les conditions qui conduisent à la ruine de la structure.

De plus, il est exigé que lors d'un impact, les systèmes vitaux de l'appareil soient protégés, mais la rupture partielle de certaines pièces peut parfois être tolérée. Cette protection est souvent assurée par la structure de l'avion elle-même. Les différents scénarios peuvent se décliner selon différents niveaux d'exigence pour l'ingénieur :

- Garantir qu'il n'y ait pas de perforation et absolument aucune rupture.
- Garantir qu'il n'y ait pas de perforation même si des ruptures locales au niveau de la sous structure sont tolérées et garantir qu'il y ait non-pénétration du projectile, même si des dommages significatifs sont engendrés. Ainsi, pour le choc à l'oiseau en général, il est nécessaire que la peau ne subisse aucune rupture, même si des raidisseurs internes ou leurs fixations sont rompus, et dans le cas des débris de pneus, ceux-ci ne doivent pas créer de déchirure qui pourrait leur permettre de pénétrer à l'intérieur de la structure.
- Estimer, à la suite d'un impact ayant créé des dommages, la taille de ces dommages ou la cinématique du projectile. Les impacts d'oiseaux sur bord d'attaque ou lèvres d'entrée d'air sont des "impacts multiples", c'est-à-dire qu'avant que le projectile ne soit stoppé, une partie de son énergie cinétique est absorbée

par une première structure qui peut être perforée. Lors d'un impact d'oiseau sur une lèvres d'entrée d'air, il est nécessaire d'évaluer les dommages post-impact pour mener une analyse de tenue résiduelle.

## 2 Objectifs scientifiques

### 2.1 Matériau ductile sollicité en dynamique jusqu'à rupture

Cette étude vise à proposer une méthode pour la simulation par éléments finis jusqu'à rupture de structures métalliques sollicitées en dynamique. Malgré de nombreux travaux sur ce sujet, il s'agit d'un problème qui reste encore ouvert, et les choix à effectuer pour mener à bien de telles simulations sont nombreux. Ces choix concernent aussi bien la modélisation mécanique (mécanique continue de l'endommagement ou mécanique de la rupture), que le comportement du matériau, le schéma d'intégration temporel, la nature des éléments finis utilisés (formulation classique ou enrichie du type PUM, XFEM ou G-FEM par exemple) ou encore la stratégie de résolution (approche directe ou multi-échelle).

On s'intéresse ici à des structures initialement saines, on choisit donc de modéliser leur comportement mécanique par une approche continue, même jusqu'à rupture. On ne cherche pas dans cette thèse à se concentrer sur la stratégie de calcul, l'objectif est de proposer une approche robuste et efficace pour modéliser, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, le phénomène de rupture. Les simulations ont ainsi été obtenues par une approche directe (mono-échelle) en utilisant la Méthode des Eléments Finis, avec des éléments "classiques" (avec une cinématique continue, sans enrichissement). Le chapitre 2 propose différentes démarches pour modéliser la rupture dans ce contexte.

On travaille dans le cadre des grandes déformations et le comportement des matériaux ductiles concernés par cette étude est modélisé par une loi élastoplastique endommageable ; le chapitre 3 précise et justifie les choix qui ont été retenus pour ces deux points. La loi de comportement étant endommageable, le critère de rupture correspond dans notre approche à  $d_c = 1$ . Enfin, dans cette étude, les simulations ont été résolues en dynamique, en utilisant un schéma d'intégration en temps de type explicite.

Cette thèse s'articule essentiellement autour du délicat problème de la gestion de la localisation et de la phase de rupture des matériaux métalliques. En effet, il est aujourd'hui admis que les modèles classiques ne sont pas adaptés à la prévision de la rupture car ils ne permettent pas de décrire de façon objective la phase post-pic du comportement [1].

On entend ici par "modèle classique" un milieu continu régi par le principe de l'action

locale [15, 16], matériellement simple (milieu de Cauchy [17]) et au comportement indépendant du temps (et de la vitesse).

## 2.2 Illustration des limites d'un modèle classique

Expérimentalement, lors du chargement d'une structure jusqu'à rupture, il est très fréquent d'observer avant la ruine du matériau, l'apparition de zones de faible épaisseur dans lesquelles se concentrent les déformations. Ce phénomène peut se produire à différentes échelles (de l'éprouvette de laboratoire au glissement de terrain) et pour différents matériaux (matériaux métalliques, granulaires, quasi-fragiles). Dans le cas des métaux, matériaux ductiles, la localisation des déformations apparaît quand l'augmentation de contrainte due à la réduction de section de la structure ne peut plus être compensée par l'écroutissement du matériau.

Ce phénomène ne peut pas être convenablement modélisé avec une approche "classique". Nous présentons ici quelques-unes des manifestations pathologiques des résultats de simulations avec une telle approche, dans le cas d'un matériau ductile.

Les figures 1.3 et 1.4 illustrent les résultats de simulations d'un essai de traction jusqu'à rupture d'une éprouvette en aluminium au comportement élastoplastique endommageable (éléments "quadrangle" - contrainte plane - intégration réduite); elles représentent la configuration de l'éprouvette à rupture en fin de chargement (1.3) et la valeur de l'effort au cours du temps (1.4) pour différents maillages. Le zoom "1" correspond à la configuration de l'éprouvette à rupture obtenue avec un premier maillage. Les maillages des zooms "2" et "3" diffèrent du maillage "1" par l'orientation du maillage (inclinaison initiale du maillage "1" :  $0^\circ$ , "2" :  $13^\circ$  et "3" :  $25^\circ$ ). Les maillages des zooms "4" et "5" sont respectivement plus fins et plus grossiers que le maillage "1". Il est manifeste sur cet exemple que les résultats dépendent fortement de la taille (taille de la zone de localisation, chute de l'effort ou énergie dissipée lors de la rupture) et de l'orientation (orientation de la rupture) du maillage.

Cette non-objectivité des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale représente aujourd'hui encore un des principaux obstacles au développement des simulations Éléments Finis pour la prévision de la rupture.

Il est important d'insister sur le fait que cette dépendance des résultats vis-à-vis du maillage est une conséquence du changement de nature des équations aux dérivées partielles associées à l'équilibre. Pour obtenir des résultats de simulation quel que soit le maillage, il faut que ces équations soient modifiées.

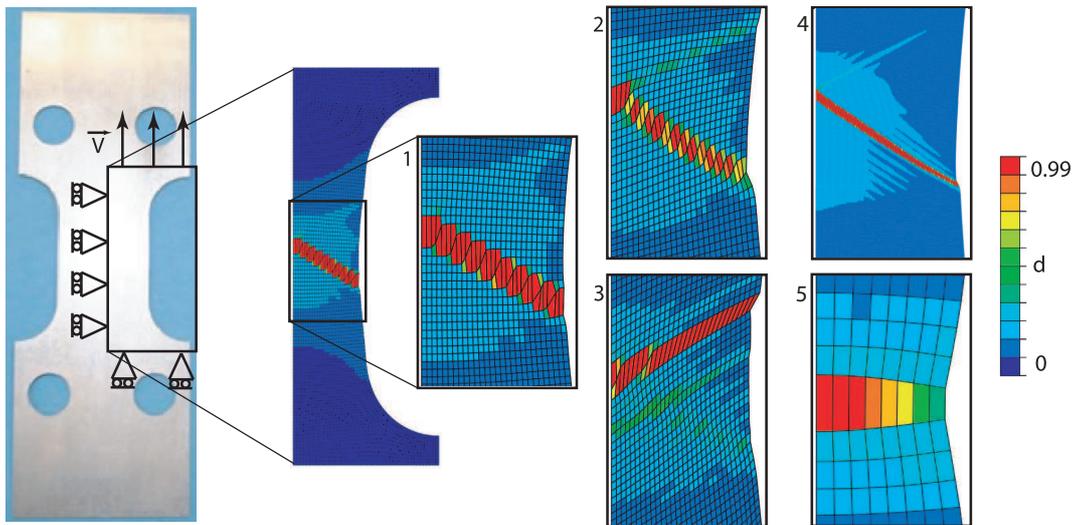


Fig. 1.3: Influence du maillage (orientation/taille) - Configuration à rupture.

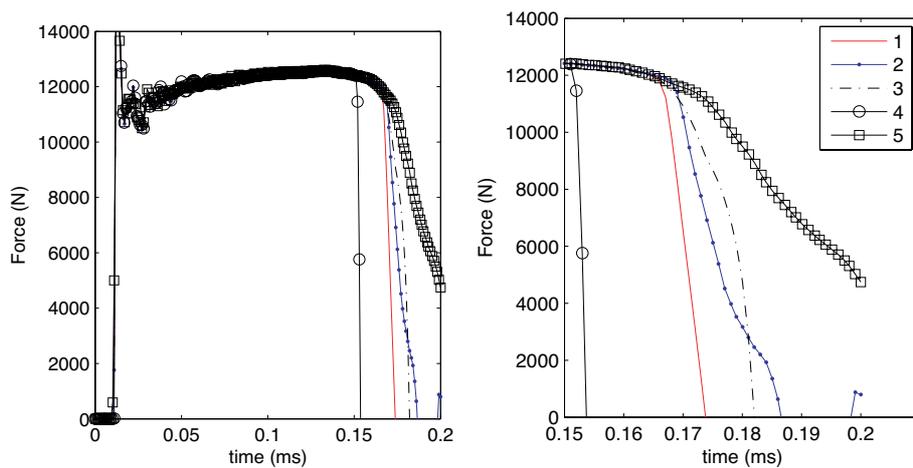


Fig. 1.4: Influence du maillage (orientation/taille) -  $F(t)$ .

## 2.3 Objectifs

Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, il existe différentes approches pour modifier les modèles classiques afin d'être cohérent jusqu'à rupture et ainsi pouvoir mener des simulations sans dépendance au maillage. Mais ces approches posent encore un certain nombre de difficultés au niveau de la construction du modèle (problème des conditions aux limites additionnelles des limiteurs spatiaux de localisation) et leur implémentation numérique reste complexe.

L'objectif de cette thèse est de proposer une approche pour simuler, de manière

robuste, le comportement de structures métalliques sollicitées en dynamique jusqu'à rupture. Les approches du type "limites temporels de localisation", qui visent à enrichir la modélisation du comportement en introduisant une description saine du phénomène dynamique de rupture, ont été privilégiées dans cette étude compte tenu de leur caractère local et identifiable.

### ■ Bilan du chapitre 1

L'activité du service de dynamique rapide d'AIRBUS est ici brièvement présentée. Le coût des essais nécessaires dans ce domaine d'activité et les performances de l'outil informatique, couplées aux capacités des codes de calculs de dynamique explicite ont motivé l'augmentation constante de la part de la simulation numérique dans ce domaine depuis une dizaine d'années.

Désormais, l'objectif n'est plus uniquement de déterminer le dimensionnement d'une structure pouvant être soumise à un impact, mais également de contribuer à proposer des conceptions optimales (réduction des marges), réduire les cycles et augmenter la confiance dans les résultats avant essais. Mais, ceci est d'autant plus délicat lorsque les pièces étudiées peuvent être partiellement rompues. Dans ce contexte, il est important de pouvoir mener des simulations robustes jusqu'à rupture.

Or, avec les modèles classiques actuellement disponibles dans les codes de calcul de dynamique rapide, l'unicité des résultats ne peut pas être garantie jusqu'à rupture. La raison est que le phénomène de localisation, précurseur de la ruine des matériaux, ne peut pas être modélisé avec les approches de la mécanique des milieux continus classiques; En effet, si tel est le cas, les résultats de simulations Eléments finis au-delà de l'apparition de la localisation deviennent dépendant du maillage (taille, orientation, nature des éléments). Pour pouvoir être cohérent jusqu'à rupture et ainsi obtenir des résultats de simulation sans dépendance au maillage, il est ainsi nécessaire de modifier les équations du modèle continu.

L'objectif de cette thèse est de proposer une approche pour simuler, de manière robuste, le comportement de structures métalliques sollicitées en dynamique jusqu'à rupture. Il s'agit donc, avant tout, de définir une modélisation cohérente, qui permettra d'obtenir des résultats de calcul indépendamment du maillage. Les approches du type "limiteurs temporels de localisation", qui visent à enrichir la modélisation du comportement en introduisant une description saine du phénomène dynamique de rupture, ont été privilégiées dans cette étude compte tenu de leur caractère local et identifiable.



## Chapitre 2

# Prédiction de la rupture : Les différentes approches

*Ce chapitre a pour but de décrire différentes approches associées à la prévision de la rupture locale, puis globale, résultant d'une instabilité mécanique qui entraîne la localisation des déformations. Pour des modèles "classiques", ou "non-régularisés", ces approches correspondent à des critères de localisation. Aux modèles "enrichis" les plus fréquents, les limiteurs spatiaux de localisation, sont liés la question des conditions aux limites additionnelles et des spécificités d'implémentation et de résolution numérique. Les modèles dépendants du temps, moins développés, nécessitent une résolution dynamique du problème.*

### 1 Modèles "classiques" : approches par critère

Comme nous l'avons spécifié dans le chapitre précédent, avec un modèle classique, il n'est pas possible de mener une simulation au-delà de l'apparition de la localisation des déformations, étape précédant la rupture. Un premier type d'approche est de considérer le point critique correspondant à la localisation comme un critère de rupture. L'approche est dite "conservative" dans la mesure où le critère (localisation/perte d'unicité) correspond à un phénomène physique qui précède la rupture (partielle ou complète). Il est ainsi possible de garantir qu'une structure résiste à une sollicitation donnée (garantie de tenue). En revanche, donner une quelconque interprétation des résultats au-delà de ce point critique, et dire si une éventuelle rupture n'est que très locale ou complète est très délicat.

Dans le cas HPP, les critères assurant l'unicité et la stabilité de la solution peuvent

être exprimés uniquement en fonction du comportement du matériau, en transformation finies, ces conditions dépendent également de la configuration atteinte.

## 1.1 Critère en HPP

Le critère de Drucker [18] permet de caractériser les matériaux au comportement indépendant du temps et stables. Cette stabilité entraîne l'unicité de la solution en HPP. Un matériau vérifie la condition de stabilité (ou inégalité) de Drucker [18] si :

$$\forall t \in [0, T] \text{ alors } \int_0^t Tr(\Delta\boldsymbol{\tau} \cdot \Delta\mathbb{D}) \cdot dt > 0 \text{ pour tous } (\boldsymbol{\tau}_i, \mathbb{D}_i) \text{ vérifiant sur } [0, T] \text{ la relation de comportement et } (\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\varepsilon) = (0, 0) \text{ pour } t = 0.$$

Une situation typique correspond à la plasticité à écrouissage strictement positif.

Pour des matériaux comme les matériaux endommageables ou à écrouissage négatif, une approche permettant de garantir que les conditions de localisation n'ont pas été atteintes consiste à assurer l'unicité du problème en vitesse. Ce type d'approche étant discuté dans la suite dans le cas des transformations finies, ne sera pas présenté dans le cadre HPP.

## 1.2 Extension à l'élastoplasticité en grandes déformations

En grandes déformations, les conditions d'instabilité dépendent également de la variation de configuration et ainsi des conditions aux limites (phénomène de flambage en compression et de striction en traction par exemple). L'unicité de la solution dépend du comportement local du matériau, mais aussi du comportement global de la structure.

Pour s'affranchir des difficultés liées à la géométrie, une approche consiste à considérer qu'avant localisation la solution est localement homogène, l'environnement étant schématisé par des conditions aux limites en vitesse plus ou moins contraintes. On examine alors différents scénarios de localisation possibles à partir du problème en vitesse : à différentes conditions aux limites, libres ou contraintes, correspondent des modes de localisation dit diffus ou localisés. Dans le cas de matériaux au comportement élasto-plastique, l'approche proposée par Cordebois-Ladevèze permet de montrer que ce sont des modes extrêmes qui encadrent toutes les situations possibles [19, 20, 21, 22]. Une autre voie consiste à traiter le problème en vitesse local et à examiner numériquement (sur la matrice tangente) s'il y a perte d'unicité de la solution.

On s'intéresse dans la suite aux critères de détection de la localisation, en particulier pour les matériaux au comportement élastoplastique, à plasticité associée. On se limite ici au comportement à l'intérieur du solide, sans détailler les conditions

complémentaires à une interface ou à la frontière du solide nécessaires pour que le problème mécanique reste bien posé (cf. [23] pour une discussion sur les conditions qu'il est nécessaire de vérifier pour que le problème mécanique reste bien posé).

La loi de comportement d'un solide élastoplastique est ici décrite par :

- la loi d'élasticité :  $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{K}_e \cdot \mathbb{D}_e$  où  $\boldsymbol{\tau}$  est la contrainte de Kirchhoff et  $\mathbb{D}_e$  la partie élastique du symétrique du gradient des vitesses  $\mathbb{D}$ .
- la fonction de charge  $f(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha})$  où  $\boldsymbol{\alpha}$  représente l'ensemble des variables d'écoulement.
- la règle d'écoulement :  $\mathbb{D}_p = \dot{\lambda} \cdot \mathbb{P}$  où  $\mathbb{P} = \boldsymbol{m}$  en plasticité associée
- les lois d'évolution des variables internes supposées avoir la forme :  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \cdot \boldsymbol{h}$ .

On définit le module instantané d'écoulement par  $H = -\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{h}$ .

### 1.2.1 Exemple : critère 1D de force maximale

Comme cela a été évoqué, les conditions d'instabilité dépendent de la variation de configuration. Le critère de Considère [24], qui correspond à la valeur maximale de l'effort qui est atteint en traction 1D, illustre simplement l'influence de la prise en compte de la variation de section. En écrivant que l'effort reste constant par rapport à la déformation  $\frac{dF}{d\varepsilon} = 0$ , on en déduit qu'en grandes déformations :

$$\frac{d\tau}{d\varepsilon} = \tau \text{ avec } \tau \text{ la contrainte de Kirchhoff : } \tau = J \cdot \sigma$$

Dans le cas d'un comportement élastoplastique associé, la perte d'unicité de la solution apparaît lorsque l'effort maximum est atteint. On obtient dans ce cas, en négligeant les déformations élastiques (c'est-à-dire  $\frac{d\varepsilon}{dp} \simeq 1$ ) :

$$\frac{d\tau}{dp} = \tau \cdot \frac{d\varepsilon}{dp}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\tau}{dp} = \tau.$$

Swift et Hill [25, 26] ont repris l'idée de force maximale et l'ont appliquée au cas de tôles minces.

### 1.2.2 Unicité en vitesse

Afin de s'affranchir de la question des conditions aux limites (frontière internes et externes du domaine  $\Omega$ ), il est possible de travailler dans un premier temps en considérant la configuration totalement ou localement figée.

#### • Condition de Hill

Soient  $(\dot{\boldsymbol{\tau}}_A, \mathbb{D}_A)$  et  $(\dot{\boldsymbol{\tau}}_B, \mathbb{D}_B)$  deux solutions distinctes du problème aux limites en vitesses et considérons les différences  $\Delta \dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}_A - \dot{\boldsymbol{\tau}}_B$  et  $\Delta \mathbb{D} = \mathbb{D}_A - \mathbb{D}_B$ .

L'unicité de la réponse en vitesse de déplacement est assurée si la fonctionnelle de Hill [27] est strictement convexe dans l'ensemble des vitesses cinématiquement

admissibles. Cette propriété est satisfaite si cette fonctionnelle admet une dérivée strictement monotone

$$\int_{\Omega} Tr(\Delta \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \Delta \mathbb{D}) \cdot d\Omega > 0$$

Cette condition sur la configuration  $\Omega$  suppose celle-ci figée, c'est à dire que l'on compare deux solutions sur la même configuration. Une hypothèse supplémentaire en élastoplasticité est de travailler sur le "solide linéaire de comparaison" (solide infini sans décharge permise : le matériau se charge uniformément avec le module tangent). Le critère de Hill fournit une condition suffisante d'unicité de la solution au problème en vitesse du solide réel : si l'unicité est vérifiée sur le solide linéaire de comparaison, alors, elle l'est aussi sur le solide réel.

- Condition de positivité du travail du second ordre

En supposant un état de la matière localement homogène, c'est à dire sans conditions aux limites imposées, une condition locale suffisante d'unicité est alors :

$$Tr(\dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbb{D}) > 0 \text{ dans } \Omega$$

Cette condition est appelée "condition de positivité du travail du second ordre".

Quand une formulation multilinéaire incrémentale des équations de comportement existe, la condition de positivité du travail du second ordre est équivalente à la définie-positivité du tenseur d'ordre 4  $(\mathbf{K}_p)_S$ , la partie symétrique de  $\mathbf{K}_p$  qui vérifie  $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{K}_p \cdot \mathbb{D}$  en régime plastique. Une condition nécessaire de perte d'unicité est alors :  $\det \mathbf{K}_p = 0$ .

Une analyse spectrale du tenseur élastoplastique tangent  $\mathbf{K}_p$  et de sa partie symétrique  $(\mathbf{K}_p)_S$  permet de déterminer des critères explicites de perte d'unicité et les modes de déformation associés (modes de bifurcation généraux). Runesson [28] a ainsi déterminé le module d'érouissage critique  $H^u$  correspondant au mode fondamental d'instabilité, qui vaut  $H^u = 0$  dans le cas d'un matériau à plasticité associée. Le mode associé est souvent appelé mode d'instabilité diffus.

- Discontinuité du gradient des vitesses ou mode localisé

Une analyse de bifurcations discontinues est associée à la perte d'unicité du problème en vitesse [27]. Le critère traduit en fait les conditions nécessaires et suffisantes de création d'une surface de discontinuité du taux de déformation à l'intérieur d'un solide (il s'agit alors d'un critère correspondant à des conditions aux limites). Il correspond à l'existence d'une direction  $\underline{n}$ , correspondant à l'orientation de la surface de discontinuité, telle que le tenseur acoustique  $\underline{n} \cdot \mathbf{K}_p \cdot \underline{n}$  soit singulier. la condition s'écrit donc :  $\det \underline{n} \cdot \mathbf{K}_p \cdot \underline{n} = 0$ .

Le critère de bifurcation discontinue correspond à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre. La sous section 4 présente quelques exemples d'étude de l'équation des

ondes caractérisant certains modèles évoqués dans ce chapitre.

Rice [29] a déterminé le module d'écroissage critique pour qu'un mode de bifurcation plastique/plastique devienne possible :  $H^{cr}$ .

- Bilan

Deux modules d'écroissage critique ont été définis :  $H^u$  correspond à la perte d'unicité des solutions tandis que  $H^{cr}$  est associée à l'existence possible de modes de bifurcations discontinus. Un module d'écroissage critique supplémentaire peut être défini : il s'agit de la valeur pour laquelle les modes de bifurcation généraux deviennent compatibles, ce qui correspond à la perte de définie-positivité du tenseur acoustique symétrisé. Cette condition est aussi appelée perte d'ellipticité forte.

### 1.2.3 Critère de Cordebois-Ladevèze

L'approche suivie par Cordebois-Ladevèze [19, 20, 21, 22] consiste à traiter le problème en vitesse pour des matériaux élasto-plastiques en grandes transformations sur la structure  $\Omega$  complète. Il s'en déduit des critères de striction qui dépendent des conditions aux limites, les critères localisés ou diffus apparaissant comme des cas limites. Le champ de vitesse associé à la perte d'unicité lorsque le chargement extérieur est figé correspond au mode localisé.

## 1.3 Prévision objective de la rupture

Une démarche pour mener des simulations de manière objective jusqu'à rupture, consiste à modifier les équations du problème mécanique. L'objectif est alors de pouvoir contrôler le phénomène de localisation des déformations, c'est-à-dire l'apparition et le développement de zones de petite taille dans lesquelles les déformations restent continues mais se concentrent.

Les différentes techniques de régularisation sont habituellement regroupées sous le terme de "limiteurs de localisation" [2]. Dans les sections suivantes, différentes approches sont présentées : tout d'abord celles qui reposent sur l'introduction de termes directement liés aux variations spatiales de quantités d'intérêt (limiteurs spatiaux), puis celles qui s'appuient sur l'exploitation des variations temporelles de certaines variables (limiteurs temporels).

- Remarque : Modèles à cinématique discontinue.

Une autre démarche consiste à déterminer les conditions pour lesquelles il peut y avoir localisation des déformations (analyse de bifurcation par exemple) puis d'assurer la régularisation par l'enrichissement de la cinématique du milieu continu en permettant l'apparition de surfaces de discontinuité du champ des déformations

(discontinuités faibles [30, 31, 32, 33]) ou du champ de déplacement (discontinuités fortes [34]).

Mais ces approches impliquent d'importantes modifications dans la structure d'un code Eléments-Finis pour pouvoir être intégrées. De plus, la transition "approche continue" - "rupture" reste délicate à déterminer (c'est-à-dire la détection de la localisation, liée à l'apparition des discontinuités dans la cinématique, et le critère de rupture).

## 2 Limiteurs spatiaux de localisation

Les limiteurs spatiaux de localisation sont des approches non-locales, par opposition à une modélisation mécanique strictement locale. Toutefois, précisons que le terme non-local est ici employé au sens "faible", c'est à dire qu'il sert à qualifier les modèles introduisant une longueur interne dans la description du comportement. Les modèles couramment appelés "non-locaux" au sens fort sont qualifiés ici "d'approche intégrale" ou à "gradient implicite" [35].

### 2.1 Domaine d'influence d'une variable interne

Les deux approches présentées dans cette section proposent d'étendre le domaine d'influence d'une variable interne; celle-ci est alors définie sur un domaine non restreint à un point matériel. La procédure consiste à utiliser une moyenne spatiale ou bien introduire l'effet du gradient de cette variable (approches "intégrales" et "différentielles" [36]). Une longueur caractéristique peut être directement reliée au domaine d'influence de la variable "non-locale".

- Modèle classique :

Les modèles présentés ci dessous peuvent être vus comme l'enrichissement d'un modèle local, dont les équations caractéristiques s'écrivent :

<ul style="list-style-type: none"> <li>◦ Equation d'équilibre : <math>\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \underline{0}</math> sur <math>\Omega</math></li> <li>◦ Equations constitutives : <math>(\boldsymbol{\sigma}, v_i) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, v_i)</math> sur <math>\Omega</math></li> <li>◦ Conditions aux limites : <math>\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}_{ext}</math> sur <math>\Gamma_F</math> et <math>u = u_{ext}</math> sur <math>\Gamma_u</math>.</li> </ul>
---

$v_i$  représente l'ensemble des variables internes du modèle, soit dans cette section la variable d'endommagement  $d$  et/ou la plasticité cumulée  $p$ .

Les modèles qui modifient le domaine d'influence d'une variable interne se caractérisent par l'introduction dans le membre de droite des équations constitutives d'une variable "non-locale"  $\bar{v}$  à la place de la variable "locale"  $v$ .

Dans les exemples suivants, la définition d'un modèle consiste donc à définir la variable "non-locale"  $\bar{v}$ .

### 2.1.1 Approche intégrale

Les premiers travaux des modèles appelés "non locaux" ont été réalisés par Kröner [37], et Eringen et Edelen [38].

Cette technique a été développée pour les problèmes de localisation par Pijaudier-Cabot et Bazant [39] dans le cadre d'un comportement élastique endommageable, puis appliquée au problème de fluage par Saanouni [40] et à différents types de lois de comportement par la suite (exemple : modèle de Gurson [41], [42]). Bazant et Jirasek ont proposé une synthèse des approches non-locales pour la plasticité et l'endommagement dans [35], que Jirasek et Rolshoven ont complétée dans le cadre de la plasticité [43].

De façon très schématique, cette approche consiste à remplacer en chaque point matériel une ou plusieurs variables locales du modèle par sa moyenne sur un voisinage du point considéré. En notant  $f(x)$  une variable locale du modèle sur le domaine  $\Omega$ , la variable "non-locale" qui lui est associée est calculée par :

$$\circ \bar{v}(x) = \int_{\Omega} \psi(x, s).v(s)ds \text{ où } \psi(x, s) \text{ est une fonction de pondération.}$$

En général, cette fonction correspond à une gaussienne :

$$\psi(x, s) = \frac{1}{(2.\pi)^{3/2}.\ell^3} \cdot \exp\left(-\frac{\|x - s\|^2}{2\ell^2}\right).$$

### 2.1.2 Approche différentielle

Les fondements des modèles à gradient de variable internes [44] reposent sur les travaux menés au cours des années 1960 par Toupin, Mindlin, Eringen et Germain qui ont permis de définir le cadre théorique des milieux de degré supérieurs (cf. section 2.2.1).

L'utilisation de gradients de variable interne pour la description du comportement matériau à une échelle mésoscopique a tout d'abord été proposée pour les matériaux métalliques, en s'appuyant sur les travaux d'Aifantis sur la description de la dynamique des dislocations à une échelle microscopique [45, 46, 47, 48].

Des modèles d'endommagement à gradient de variable interne on ensuite été proposés [49, 50].

Ces approches ont alors véritablement été utilisées comme limiteur de localisation au début des années 1990.

- Gradient explicite

Dans ce cas, le gradient de certaines variables apparaît directement dans les équations constitutives ou lois d'évolution du modèle. Cette méthode a initialement été appliquée à des modèles élastoplastiques sous l'hypothèse des petites déformations (pas de striction) afin de préciser l'épaisseur et la forme des bandes de cisaillement en régime adoucissant.

L'ajout de ces termes complémentaires peut, par exemple, intervenir :

- dans les équations d'équilibre après avoir modifié l'expression de la déformation totale [2] :

$$\circ \bar{v} = v + \alpha \cdot \Delta v \text{ avec } v = \varepsilon$$

- dans l'expression de la déformation plastique équivalente apparaissant dans la fonction seuil de plasticité [51], [52],  $\dot{\sigma} = h \cdot \dot{\bar{v}}$  où :

$$\circ \bar{v} = v - \frac{\bar{c}}{h} \cdot \Delta v \text{ avec } v = p$$

◦ *Remarque :*

Il n'est pas possible d'obtenir un état de contrainte nulle lorsque la rupture est atteinte avec une formulation à gradient explicite [53, 54].

- Gradient implicite

Dans ce cas, la variable "non-locale"  $\bar{v}$  est définie implicitement :

$$\circ \bar{v} - \alpha \cdot \Delta \bar{v} = v.$$

Ces modèles ont été initialement développés dans le cadre de l'endommagement. Peerlings a proposé un modèle élastique - fragile, avec une variable d'endommagement de type "Lemaitre" [55] dont l'évolution dépend d'une déformation équivalente  $v = \varepsilon$ . Au sujet de ce modèle, l'auteur a étudié l'équation des ondes [56] et détaillé son implémentation numérique dans le cadre d'une formulation Eléments Finis [57].

Engelen, Geers et Baaijens [54] ont ensuite développé cette approche dans le cadre d'un comportement élastoplastique endommageable (en petites déformations). Dans ce cas, la variable "non-locale" est la déformation plastique équivalente :  $v = p$ .

Les auteurs proposent alors de travailler avec un endommagement piloté par la variable "non-locale", alors que l'écroutissage reste piloté par la variable locale. La fonction seuil s'écrit ainsi :

$$f = \frac{\sigma^{VM}}{1 - d(\bar{p})} - R(p).$$

L'utilisation d'une modélisation à gradient implicite dans le but de contrôler la localisation a également fait l'objet de développements pour les comportements ductiles endommageables de type "Rousselier" [58] ou "Gurson" [59]. Dans ce dernier

cas,  $v = \dot{f}^*$  le taux de porosité.

### 2.1.3 Remarques

- Liens entre les approches

Les liens étroits entre les approches intégrales et différentielles ont été étudiés dès les premiers travaux sur ces approches (Kröner en 1967 [37]) et dès les premières propositions avec une vision "limiteur de localisation" (Bazant en 1984 [60]). Peerlings a proposé en 2001 [61] une étude sur les liens entre différentes approches, en s'intéressant particulièrement à l'influence de ces modèles sur la gestion de la localisation (un modèle intégral [39], un modèle à gradient explicite [2] et un modèle à gradient implicite [56]). Le comportement considéré dans cette étude est élastique fragile, et l'endommagement est piloté par la déformation "non-locale". Il est alors montré que le modèle à gradient implicite utilisé ici est équivalent au modèle intégral si la fonction de pondération introduite dans la convolution de celui-ci est prise égale à la fonction de Green.

Un modèle à gradient implicite est donc réellement "non-local" (*strongly nonlocal*). En revanche, un modèle à gradient explicite est local d'un point de vue mathématique car la valeur de la variable non locale en un point ne dépend que de la valeur locale de cette variable et de ses dérivées en ce même point (*weakly nonlocal*).

Ces modèles étant très proches à l'ordre 2, des similitudes entre les différentes approches sont observables. En revanche, il est important de préciser qu'ils peuvent conduire à des résultats très différents ([62, 57, 63]), d'autant plus en phase de localisation, au voisinage de la rupture, où les termes de degré supérieur deviennent prépondérant dans la réponse du modèle.

- Comportement du modèle au voisinage de la frontière du domaine  $\Omega$

Il s'agit de l'une des difficultés principales de ses approches, tant d'un point de vue continu que numérique. De plus, l'objectif de ces méthodes étant de pouvoir simuler finement la rupture, lors de l'apparition d'une fissure, ou du moins d'une zone très fortement endommagée, il se peut que de nouvelles frontières soient à prendre en compte.

Comme nous allons le voir, ces modèles contraignent le comportement mécanique à la frontière du domaine. "The existence of a boundary layer is an inevitable consequence of the nonlocal continuum concept" ([39], p. 1518).

Enfin, soulignons que les simulations révèlent que le comportement à rupture est très sensible aux conditions imposées à la frontière du domaine [64].

- *Approche intégrale.*

Dans le cas de l'approche intégrale, la difficulté est de définir une pondération convenable au voisinage de la frontière du solide. Il est nécessaire de ne pas prendre en

compte dans l'intégrale l'extérieur du domaine  $\Omega$  et afin d'assurer que la variable "non-locale" reste bornée, il est préférable de normaliser la fonction de pondération. Dans le cas 1D, cette fonction serait alors :

$$\circ \tilde{\psi}(y, x) = \frac{\psi(y, x)}{\Psi(x)} \text{ avec } \Psi(x) = \int_0^L \psi(y, x) \cdot dy$$

◦ *Approche à gradient explicite.*

Les modèles à gradient explicite reposent sur l'introduction de termes de degrés supérieurs dans les équations constitutives ou les lois d'évolution du modèle. La conséquence est que le degré de l'équation de mouvement et le nombre d'équations différentielles à résoudre augmentent. Il est ainsi nécessaire d'introduire une condition aux limites additionnelle pour résoudre le problème.

L'exemple considéré par Mühlhaus et Aifantis [51] permet d'illustrer ce point. Il s'agit d'un modèle élastoplastique avec plasticité associée et écrouissage isotrope adoucissant (en petites déformations) où la contrainte équivalente d'écrouissage dépend des gradients d'ordre 2 et 4 de la plasticité équivalente.

Afin de résoudre ce problème mécanique, il faut résoudre un système de quatre équations différentielles (au lieu de trois équations d'équilibre dans le cadre d'une théorie locale "classique"). La condition aux limites additionnelle s'applique au taux de plasticité  $\dot{p}$  sur  $\Gamma_{\dot{p}}$ , la frontière du domaine où  $\dot{p}$  évolue (frontière inconnue *a priori*).

Les auteurs proposent de déduire cette condition aux limites additionnelle à partir de l'écriture du problème sous la forme d'une formulation variationnelle ; même si ce point peut être discutable dans le cadre de la plasticité, comme les auteurs le précise.

La condition aux limites déterminée est alors égale à :

$$\circ \underline{[\nabla \dot{p} \cdot \underline{n}_{\dot{p}}]} \cdot \dot{p} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\dot{p}} \text{ où } \underline{n}_{\dot{p}} \text{ est le vecteur normal à la frontière } \Gamma_{\dot{p}}.$$

Cette condition peut être qualifiée de condition aux limites *ambiguë*, comme dans le cas du problème de Signorini [65, 66]. En effet, deux choix sont possibles :

$$\underline{\nabla \dot{p} \cdot \underline{n}_{\dot{p}}} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{p} = 0.$$

Si l'on distingue dans  $\Gamma_{\dot{p}}$  la partie qui correspond à une frontière interne  $\Gamma_{\dot{p},int}$  et la partie qui correspond à la frontière physique du domaine d'étude  $\Omega$  :  $\Gamma_{\dot{p},ext}$ , le choix est en général d'imposer  $\dot{p} = 0$  sur  $\Gamma_{\dot{p},int}$  par continuité (en effet  $\dot{p} = 0$  en zone élastique) et  $\underline{\nabla \dot{p} \cdot \underline{n}_{\dot{p}}} = 0$  afin que la plasticité puisse évoluer sur  $\Gamma_{\dot{p},ext}$ .

De la même manière, dans le cas d'un comportement élastique fragile, la condition aux limites additionnelle consiste en général à imposer  $\dot{d} = 0$  sur  $\Gamma_{d,int}$  et  $\underline{\nabla \dot{d}} \cdot \underline{n_d} = 0$  sur  $\Gamma_{d,ext}$ .

◦ *Approche à gradient implicite.*

Dans le cas des modèles à gradient implicite, une équation différentielle partielle supplémentaire est introduite dans le problème. Il s'agit d'une équation d'Helmholtz ( $\bar{v} - \alpha \cdot \Delta \bar{v} = \dots$ ) portant sur la variable supplémentaire  $\bar{v}$  pour laquelle une condition aux limites sur la frontière du domaine  $\Omega$  de type Neumann ou de type Dirichlet est nécessaire : il faut donc imposer, soit la valeur de  $\bar{v}$ , sa dérivée normale ou une combinaison linéaire des deux.

La condition aux limites de Neumann est retenue :

$$\circ \underline{\nabla \bar{v}} \cdot \underline{n_\Gamma} = 0.$$

Ce choix permet d'assurer que  $\bar{v} = v$  dans le cas d'un chargement homogène, ce qui ne serait pas forcément le cas avec une condition de type Dirichlet. De plus, avec cette condition aux limites, on a :  $\int_\Omega \bar{v} d\Omega = \int_\Omega v d\Omega$  [61]. Toutefois, même si ce choix s'accompagne de résultats de simulations par Eléments Finis acceptables (simulation jusqu'à rupture indépendantes du maillage), il n'existe aucune interprétation physique venant conforter ce choix de condition aux limites.

• Implémentation et résolution numérique

L'inconvénient majeur de ces méthodes est qu'elles nécessitent le développement d'éléments finis adaptés pour pouvoir être prises en compte dans un code de calcul Eléments Finis. De plus, le nombre de ddl ou d'inconnues aux points de Gauss du problème "non-local" augmente par rapport au problème local et il est possible que la symétrie de la matrice de raideur du problème local ne soit pas conservée, ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul de la résolution du problème "non-local".

◦ *Approche intégrale.*

Il existe différents choix dans la littérature au sujet de la variable "non-locale" et de la fonction de pondération à utiliser. Ce choix peut avoir d'importantes conséquences sur la résolution numérique du problème.

Il est ainsi préférable, de ce point de vue, d'utiliser comme variable "non-locale", une quantité qui puisse être estimée localement en chaque point de Gauss. Et concernant la fonction de pondération, si la matrice de raideur du problème Eléments Finis locale est symétrique, il est préférable de faire un choix qui permette de conserver cette symétrie pour le problème "non-local" [64].

Ainsi, les choix à effectuer pour le modèle continue "non-local" peuvent être fortement guidés par des considérations numériques afin de minimiser le surcoût engendré par cette méthode.

Concernant la résolution numérique d'un problème mécanique avec une approche non-locale, l'exemple suivant illustre les difficultés qui peuvent être rencontrées et les compromis nécessaires avec une telle approche. Peerlings utilise une matrice de raideur sécante pour la résolution du problème statique non-linéaire d'une poutre au comportement élastique endommageable sollicitée jusqu'à rupture [57]. Ce choix est justifié par le fait que la structure d'un opérateur tangent serait défavorable (l'encombrement de la matrice serait augmenté [67]). Mais en contrepartie, en phase post-pic, l'utilisation d'une matrice sécante est moins stable qu'une matrice tangente pour gérer la phase de "snap-back" caractéristique d'une modélisation statique d'une structure sollicitée jusqu'à rupture.

◦ *Approche à gradient explicite.*

L'utilisation d'un modèle à gradient explicite se traduit par l'introduction d'une inconnue nodale sur laquelle s'applique une condition aux limites additionnelle. Or cette inconnue nodale (plasticité cumulée ou endommagement) n'est en général définie que sur une partie du domaine  $\Omega$ ; les noeuds où cette variable est définie sont ainsi inconnus *a priori*.

Lasry et Belytschko soulignent quelques difficultés spécifiques à la résolution numérique du problème d'une poutre élastique adoucissante avec un modèle à gradient explicite [2] (cf. 2.1.2). Dans ce cas, le problème est résolu en dynamique par le schéma des différences centrées (cf. chapitre 5 et annexe III). Les auteurs précisent alors que le pas de temps utilisé correspond au pas de temps critique multiplié par un coefficient allant de 0.9 à 0.7, mais que dans certains cas un coefficient de 0.4 avait pu s'avérer nécessaire à la stabilité du schéma. De plus, dans ce cas, il existe un mode particulier de déformation à énergie nulle, que les auteurs proposent de contrôler par l'utilisation de deux lois de comportement combinées (locale et "non-locale"). Enfin, l'introduction d'un amortissement s'est révélée nécessaire pour pouvoir obtenir des résultats acceptables.

◦ *Approche à gradient implicite.*

La résolution d'un problème mécanique à gradient implicite est équivalente à celle d'un problème de thermo-mécanique (variable "non-locale"  $\leftrightarrow$  température). Le nombre de ddl augmente par rapport au problème local équivalent et la symétrie de l'opérateur à inverser dans le cas d'une résolution en statique est généralement perdue.

#### 2.1.4 Conclusion

Ces modèles peuvent être très efficaces pour gérer les problèmes de localisation. Il est en effet possible de mener des simulations par éléments finis jusqu'à rupture sans dépendance au maillage. Toutefois, comme nous venons de l'exposer, la question des conditions aux limites et l'implémentation numérique de ces modèles soulèvent de

nombreuses difficultés.

## 2.2 Milieu de degré et d'ordre supérieur

Les travaux des frères Cosserat (milieux d'ordre supérieurs [68]) de 1909 ont initié les développements des théories de milieux enrichis; ces développements se sont poursuivis au cours des années 1960. Ils répondaient à la nécessité de décrire la matière à l'échelle de la microstructure sans pour autant modéliser finement les détails et les processus de déformation des échelles les plus fines.

A la fin des années 1980, ces approches ont fait l'objet d'un regain d'intérêt, en raison des capacités de "limiteur de localisation" des modèles à longueurs internes. Ces approches présentent l'avantage de traiter le problème de localisation de manière plus systématique que les modèles à variable interne, mais ces approches étant plus complexes, elles ne sont présentées ici que dans le cadre d'un comportement élastique. Bien qu'étant éloigné du contexte de la rupture ductile en grandes déformations, cet exemple permet de présenter la manière dont une longueur interne est introduite dans la modélisation, dès la base de la description du comportement.

### 2.2.1 Milieu de degré supérieur - Théorie du second gradient

Les fondements théoriques des ces modèles ont été posés au début des années 1960 par Toupin, Mindlin et Eringen [69, 70, 71]. Une extension de l'application du principe des puissances virtuelles aux gradients d'ordre supérieur a également été proposée par Germain [72].

Plus récemment ces travaux ont été repris dans le cadre des limiteurs de localisation, par Chambon et al. par exemple (élasticité et plasticité : [73, 74, 75, 76, 77]).

On suppose que la puissance des efforts intérieurs dépend non seulement du taux de déformation mais également du gradient de la vitesse.

En se limitant ici, pour illustrer cette approche, à un comportement purement élastique, la puissance des efforts intérieurs s'écrit alors :

$$P_i = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \nabla \underline{\boldsymbol{v}}) . d\Omega$$

On note ici :

- le taux de déformation :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \underline{\boldsymbol{v}}$  (premier gradient des vitesses),
- le gradient des taux de déformation :  $\nabla \nabla \underline{\boldsymbol{v}}$  (second gradient des vitesses),
- le tenseur des contraintes :  $\boldsymbol{\sigma}$ ,
- un tenseur des contraintes d'ordre trois :  $\boldsymbol{\tau}$ .

L'application du principe des puissances virtuelles permet d'écrire l'équation d'équilibre local avec comme conditions aux limites :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{\text{div}} (\underline{\text{div}} \underline{\tau}) + \underline{b} = \underline{0} \quad (\underline{\sigma} - \underline{\text{div}} \underline{\tau}) \cdot \underline{n} = \underline{h} \text{ et } (\underline{\tau}) \cdot \underline{n} = \underline{M}$$

• Remarque :

Les milieux dont la description nécessite l'utilisation de gradient de variable interne (cf. section 2.1.2) sont des milieux de degré supérieur.

### 2.2.2 Milieu d'ordre supérieur - Exemple : Cosserat

Les travaux des frères Cosserat, publiés en 1909 [68] puis ceux de Mindlin et Eringen [78, 71] s'appuient sur la théorie des milieux d'ordre supérieur. L'idée est d'introduire, en chaque point matériel du milieu, des degrés de liberté de rotation supposés indépendants des déplacements.

Cette approche a été reprise par De Borst, Mühlhaus, Pamin, Sluys et Vardoulakis [79, 80, 81, 82, 83] pour traiter les problèmes de localisation dans le cadre de la théorie de Cosserat avec les restrictions : dimension 2 et déformations planes. Dans ce cas, chaque point matériel du milieu a trois degrés de liberté (deux translations selon  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ , et une rotation selon  $\underline{z}$ ).

On se restreint dans le bref descriptif suivant à la présentation du comportement élastique. Ce cadre a été repris par Sluys et De Borst [4] pour déterminer les caractéristiques vis-à-vis de la localisation de l'équation des ondes d'un milieu de Cosserat. On peut trouver par exemple dans [84] des détails sur la description d'un milieu de Cosserat en visco-plasticité.

La relation de comportement s'écrit alors  $\underline{\sigma} = \mathbb{H} \cdot \underline{\varepsilon}$ , avec :

$$\begin{aligned} - \underline{\sigma} &= (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, m_{xz}/l, m_{yz}/l)^T \\ - \underline{\varepsilon} &= (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, K_{xz} \cdot l, K_{yz} \cdot l)^T \\ - \mathbb{H} &= \begin{pmatrix} 2\mu a_1 & 2\mu a_2 & 2\mu a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu a_2 & 2\mu a_1 & 2\mu a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu a_2 & 2\mu a_2 & 2\mu a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \mu_c & \mu - \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu_c & \mu + \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a_1 = (1 - \nu)/(1 - 2\nu), a_2 = \nu/(1 - 2\nu) \text{ et } \mu = E/(2(1 + \nu))$$

Le paramètre  $l$  est homogène à une longueur et représente la longueur caractéristique

du matériau.

### 2.2.3 Conclusion

Ces approches permettent de régulariser les équations et ainsi de mener des simulations objectives jusqu'à rupture (uniquement pour des sollicitations de type mode II/cisaillement pour le modèle de Cosserat). Il est également intéressant de remarquer que les modèles du second gradient ou de Cosserat sont locaux. Toutefois, ces modèles sont bien plus complexes et plus difficiles à identifier que l'approche "classique" (ordre 1, degré 1). Leur implémentation numérique nécessite l'utilisation d'éléments finis adaptés et les calculs réalisés avec ce type de modèles sont particulièrement lourds (l'augmentation du nombre de ddl est très importante). Ainsi, si l'on ne cherche pas à décrire finement le comportement de la microstructure, l'utilisation des modèles à gradient de variable interne pour la maîtrise de la localisation est plus pertinente que celle des modèles de degré ou d'ordre supérieur, en raison de leur efficacité suffisante.

## 2.3 Bilan des limiteurs spatiaux de localisation

Les limiteurs spatiaux de localisation permettent d'obtenir des résultats de simulation jusqu'à rupture indépendamment du maillage. Une longueur interne, directement liée à la taille de la zone de localisation, est explicitement introduite. Dans les approches "non-locales" (à gradient ou à intégrale de variable interne), pour être efficace, la quantité d'intérêt modifiée doit correspondre à la source d'instabilité la plus sévère, et la modification doit permettre de contrôler la localisation des déformations, ce qui n'est pas forcément trivial [43]. En revanche, pour les approches s'appuyant sur les théories de degré ou d'ordre supérieur, la question du choix de la variable ne se pose pas.

Mais les limiteurs spatiaux nécessitent d'importantes modifications pour pouvoir être implémentés dans un code Eléments Finis. Les approches "non-locales" nécessitent l'utilisation de conditions aux limites additionnelles. Il n'existe aujourd'hui pas de signification physique pertinente de ces conditions aux limites, et leur choix et leur implémentation numérique ont fait l'objet de nombreux travaux. Les théories de degré ou d'ordre supérieur, quant à elles, alourdissent, de manière non négligeable, les procédures de calcul. Enfin, les paramètres matériaux supplémentaires introduits par ces méthodes de limiteurs spatiaux de localisation sont difficiles à identifier.

## 3 Limiteurs temporels de localisation

Une approche différente consiste à utiliser des modèles avec effet de vitesse. La description du comportement du matériau est alors enrichie par une description de

la rupture, en s'appuyant sur une vision dynamique de ce phénomène. L'avantage principal est que la résolution du problème mécanique reste locale. De plus, ces modèles ne nécessitent pas l'utilisation de conditions aux limites additionnelles. En revanche une résolution en dynamique (au moins localement) est nécessaire.

• Exemple élastique 1D

Les différentes approches de cette section sont illustrées par l'exemple d'un simple barreau 1D (cf. chapitre 4) au comportement élastique-endommageable soumis à un chargement dynamique. La relation de comportement s'écrit :

$$\tau = E.(1 - d).\varepsilon \text{ avec } \varepsilon(T) = \int_0^T D(t).dt$$

Les résultats numériques ont été obtenus avec les paramètres issus de [10, 85] :

- Comportement élastique :  $E=58\,000 \text{ Mpa}$  ;  $\nu=0.3$  et  $\rho_0 = 2.28 \cdot 10^{-3} \text{ g.mm}^{-3}$
- Comportement endommageable :  $d_c = 0.99$ ,  $\varepsilon_0 = 0.72 \%$ ,  $\varepsilon_c = 3.1 \%$
- Limitation du taux d'endommagement :  $a = 2.25$  ;  $t_c = 6.10^{-3} \text{ ms}$  ;

### 3.1 Vision dynamique de la rupture

Les limiteurs de localisation ont pour objectif de contrôler le phénomène de localisation : les limiteurs spatiaux en maîtrisant le domaine dans lequel les déformations se concentrent avant de conduire à la rupture, les limiteurs temporels en maîtrisant la dynamique de la rupture.

En effet, même pour des sollicitations globales quasi-statiques, le phénomène de rupture est un phénomène dynamique. Des résultats d'essais présentés dans le chapitre 6 permettent de valider cette hypothèse.

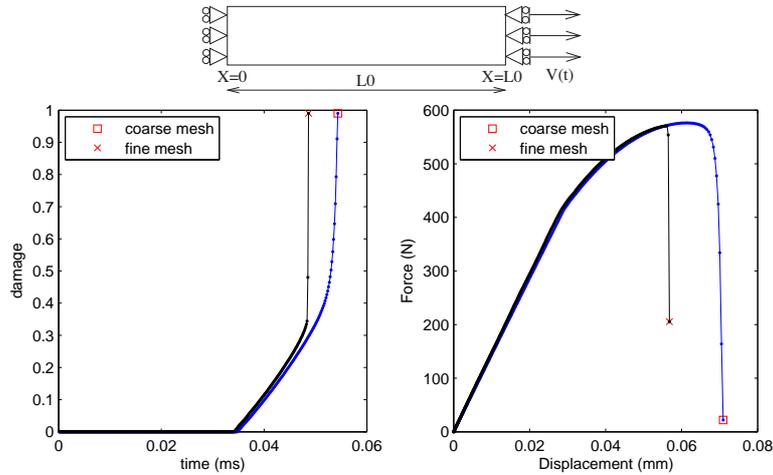
Avec cette vision de la rupture, la conséquence numérique de la perte d'unicité de la solution lors de la localisation se manifeste par l'augmentation, sans limite a priori, des variations temporelles de certaines quantités d'intérêt lorsque la taille de maille diminue.

• Exemple 1D : loi statique

On utilise ici une loi d'évolution d'endommagement très simple, en reliant linéairement endommagement et déformation élastique (ce qui est équivalent à une loi d'évolution gouvernée par le taux de restitution d'énergie) :

$$\text{Avec } d_{stat} = \sup_{(t)} \left\langle \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_c - \varepsilon_0} \right\rangle_+ \quad \left. \begin{array}{l} d = d_{stat} \text{ tant que } d < 1 \\ d = 1 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

La figure 2.1 montre que la rupture est un phénomène très dynamique et que, lorsqu'elle survient, les valeurs de taux d'endommagement calculées augmentent



**Fig. 2.1:** Le taux d'endommagement n'est pas limité avec un modèle "classique".

fortement quand la taille de maille diminue. Et dans ce cas, à partir d'un point de chargement critique, l'évolution des différentes quantités d'intérêt se concentre dans un unique élément. Ceci s'observe sur la figure 2.2 qui représente l'endommagement sur la configuration déformée.

On peut montrer que le point critique correspond à une déformation égale à  $\varepsilon_e^{lim} = 1 + \frac{\varepsilon_c}{2} - \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_c^2}{2}}$  et un endommagement égal à  $d^{lim} = \frac{\varepsilon_e^{lim} - \varepsilon_{e0}}{\varepsilon_{ec} - \varepsilon_{e0}}$ , soit  $d^{lim} = 0.35$  avec les valeurs numériques des différents paramètres retenues.

Ce résultat est tout à fait conforme aux résultats illustrés par les courbes de la figure 2.1. En effet, à partir de ce point critique, la vitesse d'évolution de l'endommagement dans l'élément où les déformations se localisent et la partie post-pic de la courbe Force/Déplacement dépendent de la finesse de maillage.

- Vers une dynamique contrôlée de la rupture

Dans le cadre d'une approche continue de l'endommagement, la variable d'endommagement peut être interprétée comme l'homogénéisation au niveau mésoscopique de micro-fissures ou micro-défauts. Avec un modèle dynamique classique (c'est-à-dire local est indépendant du temps), le taux de déformation ou d'endommagement devient infini dans la zone de localisation. Or, chaque micro-défaut ayant une vitesse de propagation finie, le taux d'endommagement devrait également être fini. C'est pour palier cette constatation non physique que les limiteurs temporels de localisation ont été proposés.

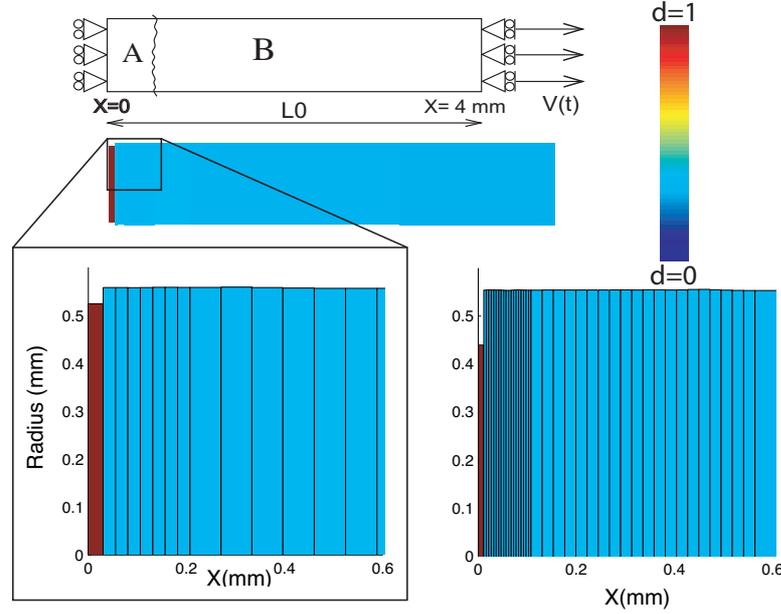


Fig. 2.2: Modèle "classique" : La configuration à rupture dépend du maillage.

### 3.2 Une première approche : le modèle à effet retard

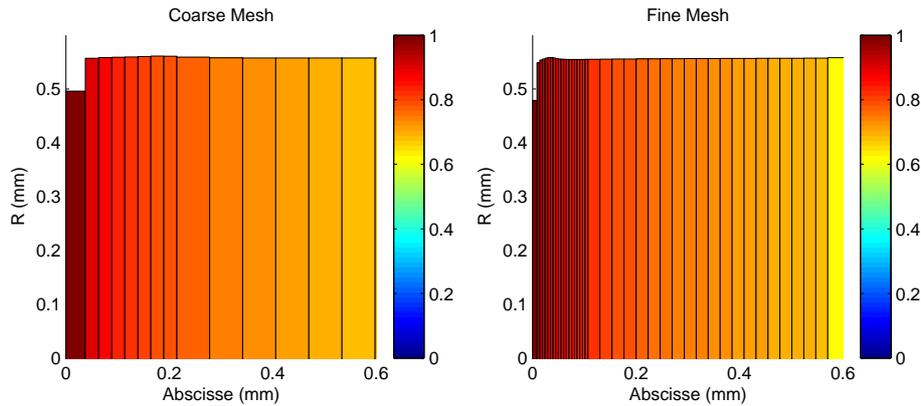
Le modèle d'endommagement à effet retard a été développé au LMT afin d'assurer que la solution du problème élastique endommageable reste unique jusqu'à rupture et permette ainsi d'obtenir des résultats de simulation indépendants du maillage [8]. L'idée de base consiste à modifier les lois d'évolution de l'endommagement développées en statique pour prendre en compte le fait que les variations d'endommagement dues aux variations de forces ne sont pas instantanées. L'état du matériau est pris en compte dans la description de la vitesse d'endommagement. Ainsi la rupture ne peut pas être instantanée car l'évolution de l'endommagement diminue quand la valeur de l'endommagement augmente. Les valeurs critiques d'endommagement et donc la rupture apparaissent alors avec un certain retard par rapport à un modèle d'évolution "statique".

La loi d'évolution de l'endommagement est alors donnée par :

$$\left. \begin{aligned} \dot{d} &= k \langle d_{stat} - d \rangle_+^n \text{ si } d < 1 \\ d &= 1 \text{ sinon} \end{aligned} \right\}$$

où  $k$  et  $n$  sont deux nouveaux paramètres d'endommagement qui caractérisent l'effet retard.

Cette expression est construite pour respecter les propriétés suivantes :



**Fig. 2.3:** Elasticité avec endommagement retardé.

- Lorsque le taux d’endommagement est faible, on retrouve l’expression de la loi d’évolution proposée en statique.
- Elle permet de prendre en compte un éventuel ”effet de vitesse” observé dans certains composites pour des chargements dynamiques rapides.
- Elle introduit dans le modèle une longueur caractéristique associée au phénomène de rupture (par l’intermédiaire temps caractéristique  $t_c^{ret} = 1/k$  et de la vitesse des ondes).

Mais ce premier modèle à effet retard ne permet pas de régulariser la solution d’un problème car la vitesse d’endommagement peut croître de façon illimitée avec la déformation  $\varepsilon$ . Les résultats de simulations par éléments finis dépendent du maillage.

- Exemple 1D : loi à effet retard

En utilisant la loi à effet retard, on peut constater que la configuration à rupture dépend du maillage (cf. figure 2.3) et que la vitesse d’endommagement augmente (sans qu’aucune limite ne puisse être atteinte) lorsque la taille de maille diminue. En fait, le modèle à effet retard ne permet pas de garantir des résultats de simulations objectifs vis-à-vis du maillage car le taux d’endommagement n’est pas borné.

- Remarque : Modèles visqueux.

Différents modèles visqueux visent à maîtriser le phénomène de localisation. Sluys a proposé un modèle équivalent à un modèle à gradient explicite, dans lequel le terme supplémentaire dans la loi de comportement est non plus un gradient (spatial) de la déformation, mais une dérivée temporelle de la déformation [3, 4]. Ce modèle 1D, décrit le comportement d’un matériaux en pointe de fissure, sollicité en mode I. Différentes approches ont également été proposées pour décrire le comportement de matériaux élastoplastiques [86], en s’appuyant sur les travaux de Peryzyna [87] ou Duvaut-Lions [88]. Needleman a également étudié l’influence d’un comportement

visqueux en cisaillement sur la localisation [89].

Dans ces approches, une longueur caractéristique n'est pas explicitement introduite, le paramètre matériau supplémentaire est en général homogène à un temps. Le problème étant résolu en dynamique, une longueur peut être déduite à partir de la vitesse de propagation des ondes élastiques par exemple.

Sans les avoir étudiées systématiquement, il nous semble que ces approches, comme dans le cas du modèle avec retard, ne permettent pas d'obtenir systématiquement des simulations objectives de la rupture. Cela dépend si de façon explicite ou implicite, la variable qui régit le phénomène d'instabilité à un taux contrôlé.

### 3.3 Modèles à taux limité

Nous venons donc de voir qu'un modèle retardant l'apparition de l'endommagement pour des chargements fortement dynamiques ne suffit pas à garantir l'unicité de la solution en phase post-pic. Afin que le taux d'endommagement reste fini, une modification de la loi d'évolution précédente a été proposée par Allix et Deü [9] dans le but de borner la vitesse d'endommagement. L'idée physique sous-jacente est que, l'endommagement étant la traduction de l'homogénéisation de fissures à une échelle plus fine, le fait qu'une fissure ait une vitesse de propagation finie, le taux d'endommagement doit également rester fini.

$$\left. \begin{aligned} \dot{d} &= \frac{1}{t_c} [1 - \exp(-a\langle d_{stat} - d \rangle_+)] \text{ si } d < 1 \\ d &= 1 \text{ sinon} \end{aligned} \right\}$$

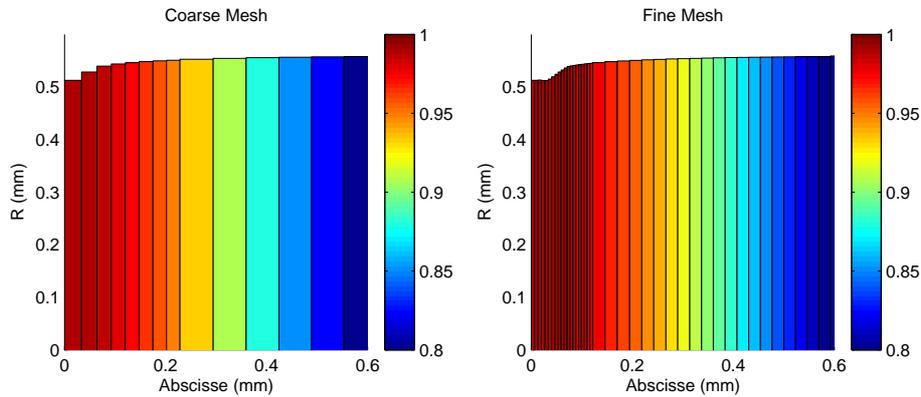
On peut remarquer qu'avec  $t_c = \frac{a}{k}$  et en considérant  $d_{stat} \simeq d$ , le développement limité à l'ordre 1 du modèle à taux limité correspond au modèle à effet retard.

L'utilisation d'une loi d'évolution de l'endommagement à taux limité entraîne que sur une courbe contrainte - déformation la valeur de la contrainte maximale augmente avec le taux d'endommagement. La contrainte en zone de localisation est alors plus importante qu'avec un modèle classique, si bien que la région au voisinage du premier point où la localisation apparaît ne se décharge pas élastiquement et le fait que le taux d'endommagement soit limité assure que cette région soit de taille non nulle.

Ainsi, la solution du problème dynamique jusqu'à rupture totale est unique et lors d'une simulation Eléments Finis les résultats (taille/orientation de la zone endommagée, énergie dissipée ...) sont indépendants du maillage.

- Remarques :

Le temps caractéristique  $t_c$  est extrêmement petit. Il est important de préciser qu'il n'est pas lié à un effet visqueux, mais au phénomène de rupture lui-même. Le paramètre  $a$  correspond au caractère plus ou moins fragile du matériau.



**Fig. 2.4:** Elasticité avec endommagement limité.

La valeur de  $t_c$  est telle, que le modèle à taux limité ne se différencie du modèle statique que pour des vitesses de chargement extrêmement élevées. En effet le "temps de rupture", durée séparant le début de la phase d'instabilité de celui la création de la fissure est en général très court. Ceci est cohérent avec les tailles extrêmement petites des zones de localisation. En effet d'une façon qualitative la taille de la zone de localisation est le produit d'une vitesse caractéristique des ondes par le temps de rupture. Les résultats fournis par le modèle à taux limité sont ainsi les mêmes que ceux qui sont obtenus avec le modèle statique, jusqu'à localisation, c'est-à-dire que le point critique correspondant à la chute de l'effort n'est pratiquement pas modifié par l'enrichissement du modèle statique. A partir de ce point critique, la valeur du taux d'endommagement est très proche de  $1/t_c$ ; l'endommagement atteint alors  $d_c$  très rapidement.

Comme suggéré dans [9] et mise en œuvre dans [11] pour des matériaux composites 3D C/C ou d'une autre façon dans [12] avec des matériaux métalliques, il est possible d'identifier les paramètres du modèle à taux d'endommagement limité, avec des essais du type "plaque-plaque" par exemple.

- Exemple 1D : loi à taux limité

La figure 2.4 représente la carte de l'endommagement sur la configuration déformée pour deux maillages différents en fin de chargement. On peut alors vérifier que l'on obtient le même résultat quel que soit le maillage.

- Vers l'élastoplasticité endommageable en transformations finies

Ce modèle a également été utilisé pour des matériaux métalliques (Titane-Aluminium), modélisés par un comportement élastoplastique endommageable, par Suffis et Combescur [85, 90, 13]. Il est possible avec le modèle d'endommagement à taux limité de repousser la perte d'unicité de la solution et d'obtenir ainsi des résultats de simula-

tion indépendamment du maillage lorsque la localisation des déformations apparaît. De plus, l'utilisation de ce modèle s'est avérée pertinente pour la simulation d'essais plaque/plaque [12].

En revanche, avec cette approche, il se peut que les résultats d'une simulation par Eléments Finis dépendent du maillage avant rupture complète (c'est-à-dire jusqu'à  $d = 1$ ). En effet, comme nous allons le détailler au chapitre 4, l'unicité de la solution est perdue très rapidement à partir de la mise en place de la localisation des déformations. Pour cette raison, les auteurs choisissent de travailler avec un endommagement critique ( $d_c = 0.05$  et  $d_c = 0.23$  dans le cas de deux alliages d'Aluminium), mais la contrainte est alors non nulle en zone rompue.

Afin de contrôler les principales sources d'instabilité (plasticité et endommagement), un modèle à taux limité dédié à l'élastoplasticité endommageable dans le cadre d'une formulation en grandes déformations a été proposé [91] (cf. chapitre 5).

### 3.4 Bilan des limiteurs temporels de localisation

Le modèle à taux d'endommagement limité, couplé à un comportement élastique endommageable, propose une vision objective de la rupture grâce à une description saine de la dynamique de ce phénomène. Ce modèle présente les avantages d'être local, de ne nécessiter aucune condition aux limites additionnelles et d'être extrêmement simple à implémenter dans un code de calcul. Toutefois, un modèle à taux d'endommagement limité ne répond pas à toutes nos exigences initiales pour un comportement élastoplastique endommageable (cf. 3.3 et chapitre 4), puisqu'il ne permet pas de mener systématiquement des simulations jusqu'à  $d = 1$  sans dépendance au maillage. Pour cette raison, un modèle à taux limité dédié à l'élastoplasticité endommageable dans le cadre d'une formulation en grandes déformations a été proposé (cf. chapitre 5). Enfin, précisons qu'un modèle à taux limité s'appuie sur une vision dynamique de la rupture, et nécessite par conséquent une résolution du problème mécanique en dynamique (du moins pour la phase de rupture).

## 4 Etude de l'équation des ondes

Nous venons de décrire dans les deux sections précédentes différentes approches pour qu'un modèle reste cohérent et permette ainsi de mener des simulations sans dépendance au maillage, jusqu'à rupture. L'étude de l'équation des ondes qui caractérise ces modèles permet de mettre en évidence leur efficacité pour contrôler le phénomène de localisation.

- Remarque :

Il serait également possible d'étudier l'efficacité d'un modèle en menant une analyse

de bifurcation. En effet, une telle approche repose sur la détection de discontinuité du champ des vitesses et permet donc de statuer sur la cohérence d'un modèle, même en phase de localisation. Il est ainsi possible d'appliquer cette méthode avec des modèles enrichis, qu'il s'agisse de modèle intégral [92] ou à gradient [93] par exemple.

## 4.1 Principe

En statique, la perte d'unicité de la solution est liée à la perte d'ellipticité des équations aux dérivées partielles associées à l'équilibre, et en dynamique, les équations de mouvement initialement hyperboliques deviennent elliptiques [94, 2]. La vitesse de propagation des ondes est alors imaginaire. Les informations ne pouvant plus se propager à l'intérieur du solide, la déformation tend à s'accumuler dans une partie arbitrairement petite [95], ce qui n'est évidemment pas réaliste.

Les phases de localisation et de rupture sont gouvernées par les termes de plus haute fréquence des équations d'équilibre. Ainsi, Le statut de l'équation des ondes dépend des termes de plus haut degré, et l'équation change de nature quand le coefficient devant le terme de plus haut degré s'annule.

L'analyse d'une équation des ondes consiste, dans le cadre de l'étude d'un modèle de limiteur de localisation, à se concentrer sur les termes de plus haut degré de l'équation et à mener une étude de dispersion, c'est-à-dire exprimer la vitesse de propagation des ondes et une longueur caractéristique en fonctions des données du problème [3, 4].

Dans le cadre des grandes déformations, il est important de tenir compte de la variation de géométrie dans l'écriture des équations d'équilibre.

En l'absence de forces volumiques, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma} = \rho \cdot \underline{\underline{\gamma}} \text{ (configuration courante) ou } \operatorname{div}_X [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbb{G}] = \rho_0 \cdot \underline{\underline{\gamma}} \text{ (configuration initiale)}$$

La relation en vitesse est alors :  $\operatorname{div}_X \left[ \frac{d(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbb{G})}{dt} \right] = \rho_0 \cdot \dot{\underline{\underline{\gamma}}}$ , soit en 1D :

$$[\dot{\boldsymbol{\tau}} - D\boldsymbol{\tau}]_{,x} = \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

L'équation des ondes est particulièrement appropriée à l'analyse d'une modélisation en 1D dans la mesure où, dans ce cas, on ne cherche pas à déterminer la direction de l'orientation de la discontinuité. Il est alors possible, à partir d'une équation, de voir l'influence des différents paramètres du modèle sur la localisation (influence d'un coefficient du modèle sur le terme de plus haut degré ou sur la longueur caractéristique par exemple).

## 4.2 Exemples

On se limite ici à des comportements élastiques ou élastoplastiques, éventuellement endommageables, en dimension 1.

On considère que le chargement est suffisamment lent pour être supposé quasi-statique. L'état du matériau est alors homogène dans la poutre avant localisation. On s'intéresse à l'évolution de la poutre lors de l'initiation de la localisation. On suppose donc, et il s'agit d'une hypothèse forte, que l'état de la poutre, à savoir les quantités  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$  et éventuellement  $d$  sont constantes.

L'analyse de l'équation des ondes sera reprise en détail dans le chapitre 5 pour l'étude du modèle "d'épuisement plastique à taux limités".

### 4.2.1 Lois classiques

L'équation des ondes dans le cas de l'utilisation d'une "classique" en grandes déformations peut se mettre sous la forme :

$$\beta^{cpt} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

L'indice "cpt" correspond au comportement. En notant ( $e$ ,  $p$  et  $d$ ) les indices relatifs aux comportements (élastique, plastique, et endommageable), on notera par exemple "epd" pour un comportement "élastoplastique endommageable".

Selon ce qui vient d'être précisé concernant le statut de l'équation des ondes, la perte d'unicité de la solution correspond ici à l'annulation du coefficient devant le terme de plus haut degré  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , soit :  $\beta^{cpt} = 0$ .

- Exemples :

En élasticité, on a en grandes déformations :

$$\beta^e = (1 - \varepsilon)$$

On peut remarquer qu'en grandes déformations l'unicité n'est pas garantie avec une simple loi élastique. Ici, avec la formulation proposée, la perte d'unicité correspond à  $\varepsilon = 100\%$ . Cet exemple irréel mais illustrant simplement l'influence d'une formulation en grandes déformations sur l'unicité de la solution sera repris au chapitre 5.

Afin de modifier un modèle pour éviter que l'équation des ondes ne change de statut avant rupture, deux voies sont possibles.

### 4.2.2 Enrichissement de l'équation - Introduction de termes

La première voie consiste à modifier le modèle afin d'enrichir l'équation des ondes par l'ajout de termes qui conduisent à augmenter le degré maximum de l'équation

(modèles à gradient explicite - second gradient) ou enrichir le coefficient devant le terme de degré maximum (Cosserat).

- Modèle à gradient explicite

La littérature offre plusieurs analyses de l'équation des ondes de différents modèles à gradient explicite, par exemple dans le cas d'un modèle de plasticité unidimensionnelle en HPP [4, 96].

Dans ce cas, la variable d'écrouissage est égale à la déformation plastique cumulée et pour un état de contrainte sur la surface seuil (comportement plastique), la relation de comportement s'écrit :

$$\dot{\sigma} = h \cdot \dot{\varepsilon}_p - \bar{c} \cdot \frac{\partial \dot{\varepsilon}_p}{\partial x^2}$$

On en déduit l'équation d'ondes puis la relation de dispersion :

$$\bar{c} \cdot \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \frac{(E + h)}{c_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - h \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad c_f = w/k = c_0 \cdot \sqrt{\frac{h + \bar{c} \cdot k^2}{E + h + \bar{c} \cdot k^2}}$$

On peut remarquer que dans ce cas le degré maximum de l'équation a augmenté (il est passé de 2 à 4). Le statut de l'équation étant donné par les termes de plus haut degré, on constate que ce statut est invariable puisque le coefficient devant le terme de degré 4 est constant ( $\bar{c}$ ) et ne s'annule donc pas, même si  $h < 0$ .

Concernant l'expression de la vitesse de phase, on peut vérifier que la relation est bien dispersive.

- Autres modèles

Chambon, Caillerie et El Hassan [73] ont proposé une analyse 1D d'un modèle du second gradient permettant de dégager une longueur d'onde caractéristique du modèle. Sluys et de Borst ont étudié en détail l'équation des ondes dans le cas de comportements visqueux [4] et dans le cas d'un milieu de Cosserat [4].

### 4.2.3 Suppression d'une source d'instabilité

Une autre voie consiste à modifier le modèle classique afin de supprimer une source d'instabilité, tout en gardant le même comportement global, c'est-à-dire l'apparition de la localisation des déformations accompagnée d'une chute de l'effort.

Supprimer une instabilité conduisant à la perte d'unicité du problème revient à diminuer le degré de la variable interne liée à cette instabilité dans l'équation des ondes. Ceci permet de modifier le coefficient devant le terme de plus au degré ( $\beta^{cpt}$ ) et éviter ainsi qu'il ne s'annule avant rupture, sans pour autant augmenter le degré maximum de l'équation et devoir introduire des Conditions aux Limites Additionnelles. La correction apportée permet ainsi de conserver le statut de l'équation des ondes, et donc l'unicité de la solution, au-delà du modèle "non-corrigé". On entend ici par "non-corrigé" le modèle classique (c'est-à-dire "local" et "statique")

et par "corrigé" le modèle classique enrichi d'un limiteur de localisation (modèle "non-local" dans le cas d'un limiteur spatial, modèle "dynamique" dans le cas d'un limiteur temporel).

- Exemples : modèles à taux limité

On se place ici dans le cas où pour les comportements (ed - ep - epd), la variable à taux limité correspond à l'endommagement ou la plasticité cumulée.

On note  $\theta$  la variable interne sur laquelle porte la correction. Dans le modèle "statique" la valeur de la variable d'état  $\theta_{stat}$  ne dépend que de l'état ( $\varepsilon$  par exemple), c'est-à-dire que  $\dot{\theta}_{stat}$  ne dépend que de  $D$  :  $f_{stat}(\theta_{stat}, \varepsilon) = 0$   
 Un modèle à taux limité consiste à utiliser une loi d'évolution pour  $\dot{\theta}$  pilotée par l'état, soit :  $f(\dot{\theta}, [\varepsilon, \theta]) = 0$ .

Les lois à taux limité peuvent s'écrire :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{t_c} [1 - \Phi] \quad \Phi = \exp[-a \cdot f_{stat}(\theta, \varepsilon)]$$

On a ici :

$$f(\dot{\theta}, [\varepsilon, \theta]) = f_{stat}(\theta, \varepsilon) - \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 - t_c \cdot \dot{\theta}}\right)$$

L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\beta_{\theta}^{cpt} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta \beta_{\theta}^{cpt}}{\beta_{\Gamma/D}} \cdot \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

où les termes  $\Delta \beta_{\theta}^{cpt}$  et  $\beta_{\Gamma/D}$  sont détaillés au chapitre 5.

Comme  $\dot{\theta}$  ne dépend que de l'état,  $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}$  correspond dans l'équation des ondes à un terme de degré 2 dans le modèle "statique" (une dérivée spatiale et une dérivée temporelle d'une variable dépendant de l'état), et à un terme de degré 1 dans le modèle "dynamique" (une dérivée spatiale d'une variable dépendant de l'état). En utilisant une loi assurant que  $\dot{\theta}$  reste fini, il est alors possible de négliger dans l'équation des ondes le terme relatif à  $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x}$  devant les termes de degré 2.

Le statut de cette équation ne dépend que de  $\beta_{\theta}^{cpt}$  (coefficient devant le terme de plus haut degré), correspondant au modèle de comportement "cpt" avec une loi d'évolution à taux limité pour la variable  $\theta$ .

Pour mener une étude de cette équation plus complète (détermination d'une longueur caractéristique ou relation de dispersion), il est nécessaire d'écrire un système de deux équations à deux inconnues ( $v$  la vitesse et  $\dot{\theta}$  la dérivée de la variable à taux limité par exemple). En effet, la définition *implicite* de la variable corrigée ne

permet pas d'en donner une expression en fonction de la vitesse ou de ses dérivées. Il est également nécessaire d'écrire un système de 2 équations pour l'étude de l'équation des ondes d'un modèle à gradient (spatial) implicite à partir de l'équation d'équilibre en vitesse du problème [57].

Une étude complémentaire de cette équation (ou ce système d'équation) des ondes est présentée dans le chapitre 5 pour estimer la longueur caractéristique du modèle d'épuisement plastique à taux limités ( $epd$ ,  $\theta = p$ ).

- Exemples en élasticité-endommageable

L'exemple d'un comportement élastique-endommageable est ici présenté, afin d'illustrer l'influence d'une modélisation à taux limité sur la localisation.

- *Modèle "statique"*.

Dans le cas d'une modélisation statique, on a :

$$\beta^{ed} = (1 - \varepsilon) \cdot (1 - d) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon^2 - (2 + \varepsilon_c) \cdot \varepsilon + \varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_0}$$

L'instabilité intervient quand  $\varepsilon^2 - (2 + \varepsilon_c) \cdot \varepsilon + \varepsilon_c = 0$ , soit si  $\varepsilon \ll 1$  :  $\varepsilon = \varepsilon_c/2$  (soit  $d = 1/2$  si  $\varepsilon_0 = 0$ ).

- *Modèle à taux d'endommagement limité.*

Avec une modélisation de l'endommagement à taux limité, la variable contrôlée est  $d$  et on a :  $f_{stat} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_c - \varepsilon_0} - d$  et  $d_{stat} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_c - \varepsilon_0}$  et l'équation des ondes s'écrit :

$$\beta_d^{ed} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta \beta_d^{ed}}{\beta_{d/D}} \cdot \frac{\partial d}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \text{ avec :}$$

$$\beta_d^{ed} = (1 - \varepsilon)(1 - d), \quad \Delta \beta_d^{ed} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \beta_{d/D} = \frac{1}{\varepsilon_c - \varepsilon_0}$$

Ainsi, le statut de l'équation se modifie lors de la rupture ( $d = 1$ ), ou lorsque l'état correspondant au changement de statut de l'équation du modèle élastique sans endommagement est atteint (c'est-à-dire  $\varepsilon = 1$ ). Le contrôle de l'évolution de l'endommagement assure que la perte d'unicité de la solution ne dépende pas de cet variable d'endommagement. Et le modèle "élastique-endommageable à taux d'endommagement limité" a ainsi le même comportement vis-à-vis de l'unicité que le modèle sans endommagement.

## ■ Bilan du chapitre 2

Il existe différentes approches pour mener des simulations jusqu'à rupture. Une première démarche consiste à mener des simulations jusqu'à l'apparition de la localisation, et considérer que la rupture intervient à cet instant. Cette approche est conservatrice dans la mesure où la localisation précède la rupture, et elle peut être utilisée avec un modèle classique. En revanche, il n'est pas possible de mener des simulations au-delà de l'amorce de la localisation, ou du moins de leur donner une interprétation physique. Une autre démarche consiste à utiliser une modélisation "enrichie" afin de prendre en compte ce phénomène de localisation, soit en autorisant l'apparition de discontinuité des champs de déplacement ou de déformation, soit en enrichissant les équations constitutives afin de pouvoir contrôler le phénomène de localisation des déformations, c'est-à-dire l'apparition et le développement de zones de petite taille dans lesquelles les déformations restent continues mais se concentrent. Dans ce dernier cas, les différentes techniques de régularisation sont habituellement regroupées sous le terme de "limiteurs de localisation" [2]; les limiteurs spatiaux reposent sur l'introduction de termes directement liés aux variations spatiales de quantités d'intérêt, les limiteurs temporels visent à contrôler les variations temporelles de certaines variables.

Les limiteurs spatiaux introduisent une longueur interne dans le modèle, par la prise en compte d'un effet d'une moyenne spatiale ou du gradient d'une variable interne dans les équations d'équilibre ou les équations d'évolution, ou bien par les théories de degré ou d'ordre supérieur. Cette longueur est liée à la zone dans laquelle les déformations se localisent. Même si ces approches permettent au final d'obtenir des résultats de simulations sans dépendance au maillage, elle présentent toutefois de nombreuses difficultés, tant au sujet de la construction du modèle (problème des conditions aux limites additionnelles) que pour leur intégration numérique.

Les limiteurs temporels s'appuient sur une vision dynamique de la rupture et ont pour objectif de maîtriser cette dynamique. Ainsi, un comportement élastique fragile couplé à un modèle à taux d'endommagement limité permet d'obtenir un modèle objectif, jusqu'à rupture. Ce modèle permet également de modéliser l'initiation de la localisation dans le cadre d'un comportement élastoplastique endommageable. Cette approche reste locale et ne nécessite pas l'utilisation de conditions aux limites additionnelles; en revanche une résolution en dynamique est inévitable.

Enfin, la dernière section de ce chapitre présente comment, à partir de l'analyse de l'équation des ondes, il est possible de conclure quant à l'efficacité de l'enrichissement d'un modèle, c'est-à-dire de déterminer si la solution reste unique, même au-delà de l'apparition de la localisation des déformations.

## Chapitre 3

# Elastoplasticité-endommageable en Grandes Déformations

*Ce chapitre décrit et justifie, à la fois le cadre des grandes déformations, et les choix concernant la modélisation du comportement ductile retenus dans notre étude.*

L'apparition de la localisation des déformations (qui est, en général, suivie de la ruine de la structure sollicitée) est due à la fois au comportement matériau et à un effet de structure.

Dans le cas particulier d'un essai de traction sur une éprouvette métallique par exemple, ce phénomène (striction) dépend tant de la valeur de la contrainte (comportement local du matériau), que de la valeur de la section courante (effet de structure). Ainsi, pour un matériau ductile, la chute de l'effort s'accompagne d'un écoulement positif : même si globalement l'effort chute, localement la contrainte augmente.

Pour cette raison, il est nécessaire d'utiliser une formulation en grandes déformations si l'on veut simuler le comportement d'une structure ductile jusqu'à rupture en accord avec ce phénomène. L'objet de la première section de ce chapitre est de préciser le cadre des grandes déformations dans lequel nous avons décidé de travailler.

En ce qui concerne la modélisation du comportement des matériaux ductiles, la quantité de propositions offertes par la littérature impose de faire un certain nombre de choix. La deuxième section détaille et justifie ces choix, qui ont pour objectif de modéliser le plus finement possible un comportement ductile jusqu'à rupture, en accord avec le contexte industriel de cette étude (structures métalliques de grandes tailles, nombreuses nuances d'alliages, sollicitées en dynamique).

# 1 Grandes déformations

Il existe différentes approches pour traiter un problème de mécanique dans le cadre des grandes déformations. Deux démarches sont en général distinguées. L'une est la théorie souvent appelée "de la déformation" au sens où l'état du matériau à l'instant  $t$  est notamment décrit par la déformation à cet instant. L'autre démarche est de construire des "lois en taux", par opposition avec les "lois entières" de la première approche.

## 1.1 Lois entières

Les formulations en lois entières reposent sur la notion d'état relâché, lié à une décomposition multiplicative du gradient des déplacements :  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_e \cdot \mathbb{F}_p$ .

La transformation  $\mathbb{F}_p$  fait passer de la position de référence à une position dite relâchée; notons que cet état relâché ne correspond pas à un vrai relâchement des efforts appliqués. Le problème d'élastoplasticité se ramène alors à l'étude d'un problème d'élasticité sur une configuration mobile dans le temps [97]. Cette décomposition est locale et doit être effectuée en chaque point du milieu.

La configuration relâchée, ou intermédiaire, n'est malheureusement définie qu'à une rotation près. Plusieurs théories sont donc possibles.

- Configuration intermédiaire [97, 98]
- Configuration naturelle locale [99]
- Décomposition polaire de  $\mathbb{F}_e$  et de  $\mathbb{F}_p$  [100]
- Décomposition du tenseur de Green en partie élastique et plastique [101]

• Remarque [102] : Dans les modèles de matériaux issus de cette théorie dite de la déformation, l'élasticité est complètement réversible; on parle d'hyperélasticité.

## 1.2 Lois en taux

Ces lois généralisent la décomposition additive du tenseur des vitesses de déformation utilisée en petites déformations ( $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p$ ) [103].

Elles reposent sur une décomposition additive du tenseur taux de déformation posée a priori :  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_e + \mathbb{D}_p$ , et une forme en taux pour la réponse élastique  $\check{\tau} = \mathbf{K}_e \cdot \mathbb{D}_e$  où  $\check{\tau}$  est une dérivée objective des contraintes de Kirchhoff et  $\mathbf{K}_e$  est le tenseur d'élasticité.

• Remarque [102] : Dans les modèles de matériaux issus des lois en taux, l'élasticité est partiellement réversible; on parle alors d'hypoélasticité (De Gayffier, Neffussi et Gilormini ont notamment donné des illustrations des manques de réversibilité de la

plupart des modèles classiques [104]).

- De manière générale, une loi en taux doit satisfaire les deux conditions suivantes :
- Les deux quantités reliées (taux de contrainte et taux de déformation) doivent être conjuguées.
  - Ces quantités doivent être objectives, c'est-à-dire attachées à la matière et donc vues de la même manière par tous les observateurs.

### 1.2.1 Objectivité

Deux quantités sont objectives si elles peuvent être calculées indépendamment du référentiel d'étude. Si la dérivée d'une quantité objective reste objective, cette dérivée est également qualifiée d'objective. La modélisation du comportement d'un matériau ne doit bien entendu pas dépendre du mouvement de l'observateur, la modélisation doit vérifier le principe d'indifférence matérielle, c'est pourquoi une relation de comportement doit associer des quantités objectives.

Par exemple, Le taux eulérien des déformations  $\mathbb{D}$  est une quantité objective [105, 100]. En revanche, la dérivée particulaire d'une grandeur objective comme  $\boldsymbol{\tau}$  ne l'est pas :  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{grad}\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{U}$ . La valeur de  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau}$  dépend du référentiel dans lequel elle est évaluée.

- Exemples de dérivées objectives :

- Dérivée de Truesdell -  $\frac{d_T}{dt}$  :

$$\frac{d_T}{dt}\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \cdot \mathbb{F} \cdot \dot{\mathbb{S}} \cdot \mathbb{F}^t = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbb{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbb{L} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{Tr}(\mathbb{D})$$

L'idée est ici de construire une "dérivée" du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  à partir de la dérivée particulaire du tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbb{S}$  ( $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \cdot \mathbb{F} \cdot \mathbb{S} \cdot \mathbb{F}^t$ ).

- Dérivée de Jaumann [106] (Zaremba-Jaumann-Noll, corotationnelle) -  $\frac{d_J}{dt}$  :

$$\frac{d_J}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbb{W} - \mathbb{W} \cdot \boldsymbol{\tau} \text{ avec } \mathbb{W} = (\mathbb{L})_{AS} = (\dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1})_{AS} = \frac{1}{2}(\mathbb{L} - \mathbb{L}^t).$$

Le taux de rotation  $\mathbb{W}$  est la partie antisymétrique du gradient des vitesses  $\mathbb{L}$ .

- Dérivée de Green-Naghdi [107] -  $\frac{d_G}{dt}$  :

$$\frac{d_G}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$\boldsymbol{\Omega}$  est le spin associé à la dérivée de Green-Naghdi :  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbb{R}} \cdot \mathbb{R}^t$ . L'isométrie polaire  $\mathbb{R}$  provient de la décomposition polaire du gradient des déplacements :  $\mathbb{F} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{U}$ . Le tenseur  $\mathbb{C} = \mathbb{F}^t \cdot \mathbb{F} = \mathbb{U}^2$  est symétrique donc diagonalisable. Le tenseur  $\mathbb{U}$  est alors

égal au tenseur ayant les mêmes directions principales que  $\mathbb{C}$  et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de  $\mathbb{C}$ ;  $\mathbb{R}$  s'obtient alors en écrivant  $\mathbb{R} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{U}^{-1}$ .

### 1.2.2 Grandeurs tournées

Cette notion a été proposée par Green en 1965 [103]. Un moyen de garantir l'objectivité des grandeurs utilisées dans les lois en taux consiste à travailler dans un référentiel objectif. Un référentiel est objectif s'il est défini de manière unique à partir de n'importe quel autre référentiel. La relation de comportement relie alors, dans ce référentiel objectif, la dérivée temporelle d'une "contrainte tournée" et un "taux eulérien des déformations tourné".

Deux observateurs sont reliés par une cinématique de solide rigide, le référentiel objectif obtenu sera donc défini à une cinématique de solide rigide près. Deux référentiels couramment utilisés sont le référentiel corotationnel et le référentiel en rotation propre. Comme ils sont utilisés afin d'écrire une relation de comportement (reposant sur la notion de déformation), ils visent à minimiser la part de cinématique de corps rigide du mouvement.

Si l'on note  $\mathbb{Z}_{(p,t)}$  une quantité tensorielle matérielle exprimée sur le référentiel actuel  $R$  à l'instant  $t$ , alors son transposé sur le référentiel tourné  $\tilde{R}$  est noté  $\tilde{\mathbb{Z}}_{(p,t)}$ . Le référentiel  $\tilde{R}$  est défini par l'isométrie  $\mathbb{I}_s$ , matrice de passage de  $R$  à  $\tilde{R}$  ( $\tilde{\mathbb{Z}}_{(p,t)} = \mathbb{I}_s^t \cdot \mathbb{Z}_{(p,t)} \cdot \mathbb{I}_s$ ). Dans ce référentiel tourné, les dérivées particulières des grandeurs matérielles du système sont toutes objectives, et le transport de ces dérivations sur le référentiel  $R$  conserve leur objectivité.

L'intérêt d'utiliser ces grandeurs tournées est que la relation de comportement s'écrit alors directement entre  $\frac{d}{dt} [\tilde{\tau}]_R$  et  $\tilde{\mathbb{D}}^e$ , c'est-à-dire entre deux grandeurs matérielles (à une dérivée temporelle dans le référentiel initial près), exprimées dans le référentiel tourné :  $\frac{d}{dt} [\tilde{\tau}]_R = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbb{D}}^e$  et leur calcul numérique (calcul incrémental) s'écrit très simplement ( $\tilde{\tau}_{(t+\Delta t)} = \tilde{\tau}_{(t)} + \Delta \tilde{\tau} = \tilde{\tau} + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbb{D}}^e \cdot \Delta t$  par exemple).

- Référentiel corotationnel - Dérivée de Jaumann,  $\mathbb{I}_s = \mathbb{Q}$

Comme nous venons de le préciser, la dérivée de Jaumann peut s'exprimer en fonction du taux de rotation  $\mathbb{W}$ , mais également à partir de l'isométrie corotationnelle  $\mathbb{Q}$  [108] :

$$\frac{d_J}{dt} \tau = \mathbb{Q} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbb{Q}^t \tau \mathbb{Q}) \cdot \mathbb{Q}^t$$

L'isométrie corotationnelle  $\mathbb{Q}$  s'obtient par intégration de  $\dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{W} \cdot \mathbb{Q}$ , avec  $\mathbb{Q}_{t=0} = \mathbb{I}$ . On vérifie bien sûr que cette expression est équivalente à la précédente utilisant le fait que  $\mathbb{Q}$  et une isométrie ( $\mathbb{Q}^t = \mathbb{Q}^{-1}$ ).

Le référentiel corotationnel est tel que le taux de rotation  $\tilde{\mathbb{W}}_{(p,t)}$  est nul à tout instant  $t$  [108, 109].

- Référentiel en rotation propre - Dérivée de Green-Naghdi,  $\mathbb{I}_s = \mathbb{R}$

De même, la dérivée de Green-Naghdi, peut s'exprimer en fonction du spin  $\mathbb{Q}$  ou de l'isométrie polaire  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{d_G}{dt} \boldsymbol{\pi} = \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^t \boldsymbol{\pi} \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^t$$

Le référentiel en rotation propre est tel que la rotation subie par les fibres matérielles qui sont axes principaux de déformation entre l'instant initial et l'instant présent  $y$  est nulle.

- Remarques :

$\mathbb{W}$  et  $\mathbb{Q}$  sont antisymétriques :  $\mathbb{W}^t = -\mathbb{W}$ .

$\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont des isométries :  $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q}^t = \mathbb{I}$ ,  $\mathbb{Q}^t = \mathbb{Q}^{-1}$ .

### 1.3 Cadre des grandes déformations retenu

Dans notre étude, l'utilisation d'une formulation en grandes déformations est nécessaire pour prendre en compte la variation de section de la structure étudiée au cours du chargement, afin de modéliser fidèlement la physique conduisant à la rupture ductile. Les différentes approches se différencient essentiellement par le traitement des rotations de la cinématique, pour la détermination des grandeurs matérielles utilisées dans la relation de comportement. Or, dans notre étude, les valeurs des rotations sont relativement faibles (sauf éventuellement très localement, en zone de rupture, où les niveaux de cisaillement peuvent être importants). Les différentes approches sont donc équivalentes ; le choix d'une formulation ne s'est donc justifié qu'en se basant sur sa simplicité de mise en oeuvre.

Dans les développements effectués avec *MATLAB* pour pouvoir mener des simulations en 2D, nous avons choisi de travailler sur la configuration eulérienne localement tournée par l'opérateur  $\mathbb{Q}_{(p,t)}$  en chaque particule  $p$  de la matière et à l'instant  $t$ , c'est-à-dire une formulation reposant sur la dérivée de Jaumann.

L'approche "loi en taux" est retenue compte tenue sa simplicité de mise en oeuvre (comme dans la plupart des codes de calcul). La formulation "dérivée de Jaumann" est préférée à une formulation "dérivée de Green-Naghdi" en raison du calcul aisé du taux de rotation  $\mathbb{W}$ . Comme les simulations sont effectuées à l'aide d'un schéma d'intégration en temps explicite, c'est-à-dire conditionnellement stable, nécessitant l'utilisation d'un pas de temps extrêmement faible, l'intégration explicite de  $\mathbb{W}$  pour déterminer l'isométrie corotationnelle  $\mathbb{Q}$  ne pose aucune difficulté, comme nous le verrons au chapitre 5. Il est possible de vérifier sur des exemples très simples que le niveau de précision d'une telle intégration est excellent (cisaillement pur d'un seul

élément par exemple, cf. [105]).

Des simulations ont également été effectuées à l'aide d'ABAQUS. Dans ce cas, le référentiel tourné définissant les quantités matérielles est, selon les éléments, soit le référentiel corotationnel, soit le référentiel en rotation propre, mais comme nous venons de le préciser, ces formulations sont équivalentes lorsque les rotations ne sont pas trop importantes (tant que le cisaillement  $\gamma$  reste inférieur à  $\pi/4$ ) [105].

## 2 Comportement élasto-plastique endommageable

Cette section détaille et justifie les choix retenus pour modéliser la loi de comportement des matériaux ductiles de cette étude (nombreux alliages différents d'aluminium, titane, ou acier) : des choix sont effectués concernant les variables internes de notre modèle et les lois d'évolution associées. Il s'agit de faire le bon compromis entre richesse nécessaire et complexité excessive du modèle, avec l'objectif de simuler le plus finement possible la rupture.

On se contente ici de présenter la modélisation "classique" d'un comportement ductile. Dans la seconde partie de ce document, nous présenterons des versions enrichies de cette modélisation, ayant pour objectif de contrôler la localisation.

### 2.1 Eléments de thermodynamique des milieux continus

L'objectif est ici de définir le cadre dans lequel s'inscrit la modélisation du comportement des matériaux étudiés.

Les lecteurs (francophiles) à la recherche d'éléments sur la thermodynamique des milieux continus pourront, par exemple, s'orienter vers les livres de : Salençon [110, 111], Lemaitre [112], ou bien Besson, Cailletaud, Chaboche et Forest [113].

#### 2.1.1 Premier principe - équation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée énergie interne, notée  $E$ , ayant la dimension d'un travail, telle que : A chaque instant, la somme de la dérivée particulière de l'énergie interne  $E$  du système  $\mathcal{S}$ , et de la dérivée particulière de l'énergie cinétique  $K$  de  $\mathcal{S}$ , est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système dans le mouvement réel,  $P_{(e)}(U)$  et du taux de chaleur reçue par le système  $\dot{Q}$  :

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{(e)}(U) + \dot{Q}$$

Le signe  $\circ$  pour le taux de chaleur reçue indique que cette grandeur n'est pas la dérivée particulaire d'une fonction quantité de chaleur qui serait définie explicitement.

En utilisant l'écriture différentielle, l'équation précédente se traduit par :  $dE + dK = d'W + d'Q$ , où les deux termes du second membre ne sont pas des différentielles exactes.

- Equation de l'énergie :

L'expression locale du premier principe de la thermodynamique s'écrit en représentation eulérienne :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} + r - \operatorname{div} \underline{q}$$

### 2.1.2 Second principe - inégalité fondamentale

Le deuxième principe de la thermodynamique des milieux continus postule l'existence d'un repérage universel de température, appelé "température absolue" noté  $T$ , positif, et d'une fonction de l'état thermodynamique du système, additive, appelée "entropie", notée  $S$ , tels que, à chaque instant, pour le système  $\mathcal{S}$  on a l'inégalité fondamentale :

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} dS$$

- Forme locale de l'inégalité fondamentale :

La forme locale de l'inégalité fondamentale s'écrit en représentation eulérienne :  $\rho \dot{s} + \frac{1}{T}(\operatorname{div} \underline{q} - r) \geq 0$ . Et en utilisant l'expression locale du premier principe de la thermodynamique, on obtient (puisque  $T > 0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} + \rho(T\dot{s} - \dot{e}) - \frac{1}{T}(\underline{q} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T) \geq 0$$

### 2.1.3 Energie libre et Dissipation volumique

Cette inégalité essentielle peut être transformée en introduisant la fonction thermodynamique appelé "énergie libre" ; l'énergie libre massique  $\Psi$ , définie par :  $\Psi = e - Ts$ , définit un potentiel qui dépend de la température et des variables d'état  $\alpha_I$ . On obtient l'inégalité dite de "Clausius-Duhem" :

$$\varphi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T}(\underline{q} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T) \geq 0$$

$\varphi_{(M,t)}$  représente la dissipation volumique provenant des irréversibilités de la transformation en  $M$  à l'instant  $t$ . On appelle  $\varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T})$  la "dissipation intrinsèque volumique" et  $\varphi_2 = -\frac{1}{T}(\underline{q} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T)$  la "dissipation thermique volumique" (et  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ).

En exprimant la dérivée de  $\Psi$  sous la forme :  $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial T}.\dot{T} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}.\dot{\alpha}_I$ , on a :

$$s = -\frac{\partial\Psi}{\partial T} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} - \rho \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}.\dot{\alpha}_I$$

• Remarques :

- Toute transformation vérifiant l'inégalité de Clausius-Duhem est dite thermodynamiquement admissible.
- Toute transformation au cours de laquelle la dissipation est nulle sur  $\mathcal{S}$  est dite réversible. Le théorème de l'intégrale nulle nous conduit alors à la relation locale :  $\varphi_{(M,t)} = 0, \forall M, \forall t$ .
- Toute transformation au cours de laquelle la dissipation est positive strictement sur  $\mathcal{S}$  est dite irréversible. Le théorème de l'intégrale nulle nous conduit alors à la relation locale :  $\varphi_{(M,t)} > 0, \forall M, \forall t$ .

Bien que le problème soit un problème thermomécanique, nous négligeons son aspect thermique et en conséquence le problème traité est purement mécanique. On considère en effet que le solide  $\mathcal{S}$  étudié est en transformation isotherme, sa température reste égale à la température ambiante en chacune de ses particules (la dissipation thermique est nulle).

La dissipation se réduit donc à sa part intrinsèque :

$$\varphi = \varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{D} - \rho \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}.\dot{\alpha}_I \geq 0$$

En multipliant l'expression précédente par  $J$ , on a :

$$\varphi_0 = J\varphi = \boldsymbol{\tau} : \mathbb{D} - \rho_0 \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_I}.\dot{\alpha}_I \geq 0$$

#### 2.1.4 Modèles standards généralisés

La construction d'une théorie de plasticité ou de viscoplasticité nécessite dans le cas général la définition d'une fonction de charge, d'une fonction d'écoulement et d'une fonction d'écrouissage. Dans le cas d'un matériau standard généralisé [114], ces trois entités sont définies par la donnée d'un seul potentiel.

## 2.2 Elasto-plasticité endommageable

On se place ici dans le cadre des matériaux standards généralisés. Cette classe de matériaux suppose que toute l'information concernant le comportement non-linéaire peut être résumée dans deux potentiels, l'énergie libre, qui décrit les relations entre

les variables d'état et les forces thermodynamique associées et les lois de comportement réversibles, et un potentiel de dissipation  $\phi^*$ , qui permet de caractériser les phénomènes dissipatifs.

Afin de définir la modélisation des matériaux étudiés, il faut tout d'abord préciser les variables qui définissent l'état de ce matériau : les "variables d'état" dont dépend l'énergie libre massique  $\Psi$ . Ensuite, compte tenu de la classe de modèle matériau retenue, nous préciserons l'écriture des lois d'évolutions de ces variables.

### 2.2.1 Choix des variables d'état et Expression de $\Psi$

En un point donné de  $\mathcal{S}$ , l'état physico-chimique de la matière est défini par des variables dites variables d'état. Leur nombre et leur nature dépendent des phénomènes à décrire. Dans les transformations envisagées pour  $\mathcal{S}$ , on exclut celles qui dépendent de processus chimiques.

On retient ici trois variables d'état pour décrire les grandes transformations élastoplastiques avec endommagement (c'est-à-dire les variables dont dépend  $\Psi$ ). Ces variables sont indépendantes.

- Elasticité

L'élasticité est décrite par le tenseur des déformations élastiques cumulées  $\tilde{\epsilon}_e^S$ .

On définit  $\tilde{\epsilon}_e^S$  comme la grandeur dont la dérivée de Jaumann est égale à  $\tilde{\mathbb{D}}_e$ , le taux eulérien des déformations élastiques :  $\tilde{\epsilon}_e^S(t) = \int_0^t \tilde{\mathbb{D}}_e(\tau).d\tau$ .

- Plasticité

On choisit ici de définir la plasticité par une modélisation isotrope. Un écrouissage mixte (isotrope et cinématique) serait certainement plus appropriée à la description du comportement des matériaux étudiés. Dans notre application, les chargements ne sont pas cycliques, ils sont monotones jusqu'à rupture (pas de compression plastique). Une approche uniquement isotrope peut ainsi être considérée suffisante dans un premier temps.

La fonction seuil se représente dans l'espace des contraintes principales de  $\pi$  par une surface convexe fermée contenant l'origine. Un écrouissage est isotrope si ses conséquences sur la fonction seuil  $f(\bar{\tau}, R)$  sont indépendantes des directions matérielles.

La variable d'écrouissage isotrope et sa force thermodynamique associée seront respectivement notées  $-r$  et  $R$ . Les variables  $r$  et  $R$  sont des scalaires reliés par la loi d'état  $R = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ .

- Endommagement

Lorsqu'un matériau s'endommage, des micro-fissures apparaissent (composites, matériaux fragiles ...) ou de petites cavités croissent (matériaux métalliques), si bien qu'une

partie de la matière seulement est soumise aux sollicitations mécaniques. L'endommagement peut ainsi être vu comme la traduction de l'homogénéisation de fissures à une échelle plus fine [115].

Une première approche couramment utilisée pour définir une variable d'endommagement repose sur la notion de contrainte effective [116]. Dans ce cas, les valeurs des contraintes locales ( $\sigma_{eff}$ ) multipliées par la surface effective  $S_{eff}$  sont égales aux contraintes macroscopiques ( $\sigma$ ) multipliées par la surface totale  $S$  :  $\sigma_{eff} \cdot S_{eff} = \sigma \cdot S$  soit  $\sigma_{eff} = \sigma \cdot \frac{1}{1 - \frac{S - S_{eff}}{S}} = \sigma \cdot \frac{1}{1 - d}$  où  $d = \frac{S - S_{eff}}{S}$  définit la variable d'endommagement. Cette notion d'endommagement local a pu être utilisée dans le cadre de la mécanique des milieux continus grâce à la notion de déformation équivalente proposée par Lemaitre au début des années 1970 [117]. Depuis, la mécanique de l'endommagement a fait l'objet de très nombreuses études et de nombreux développements (endommagement anisotrope, application aux matériaux composites, aux comportements ductile ou fragile ... [112]).

Une deuxième voie, plus spécifique aux matériaux métalliques, utilise comme variable d'endommagement la porosité du matériau (notée  $f$  en général). En effet, les matériaux métalliques contiennent des micro-défauts (cupules, inclusions, hétérogénéité) autour desquelles de petites cavités peuvent se créer (phase de nucléation), puis croître sous l'effet d'un chargement mécanique. La croissance de ces cavités s'accélère en phase de rupture (coalescence) pour donner lieu à la formation de fissures macroscopique, synonymes de rupture. Les deux principales approches décrivant cette physique sont les modèles de Gurson [118] et de Rousselier [119]. Le modèle de Gurson, par exemple, se base sur l'analyse limite d'une sphère creuse constituée d'un matériau rigide-parfaitement plastique et soumise à un chargement quelconque. Cette analyse fournit un critère de plasticité macroscopique approché, à partir duquel se déduisent immédiatement une loi d'écoulement plastique macroscopique et une loi d'évolution pour la porosité.

Dans les différentes approches, le matériau est totalement sain quand l'endommagement est nul, et la rupture du matériau correspond à une valeur de la variable d'endommagement égale à 1. L'approche de Lemaitre correspond à une vision générale de l'endommagement, sans se restreindre aux matériaux métalliques. L'approche de Gurson, et ses nombreuses versions enrichies [120], séduit par son contenu micro-mécanique de la rupture ductile (porosité initiale, germination puis coalescence des cavités, prise en compte de différentes familles de défauts ...). Dans le contexte de cette étude, précisons que ces deux approches présentent les mêmes manifestations pathologiques lors de simulations Eléments Finis, à savoir la dépendance des résultats au maillage si aucune précaution spécifique n'est prise.

Dans cette étude, l'approche de type Lemaitre a été retenue, en raison de la

simplicité des procédures d'identifications claires qui lui sont associées (mesure de raideur), de la plus grande liberté accordée par cette approche pour la définition de la loi d'évolution et également, compte tenue de la facilité d'implémentation numérique, tant en 1D, qu'en 2D (contraintes planes) ou 3D.

- Energie libre spécifique

L'énergie libre spécifique  $\Psi_{(\tilde{\varepsilon}_e^S, r, d)}$  est une fonction des trois variables d'état indépendantes qui caractérisent l'état élastoplastique endommageable du matériau au point considéré. On retient l'expression suivante :

$$\rho_0 \Psi_{(\tilde{\varepsilon}_e^S, r, d)} = \frac{1}{2} Tr[(1-d) \cdot \mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S] + \int_0^r h(\xi) d\xi$$

$h(r) = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r}$  est la fonction d'écroissance isotrope caractéristique du matériau.

Evaluation de la dissipation volumique :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= Tr[\tilde{\tau} \cdot \tilde{\mathbb{D}}] - \rho_0 \frac{d\Psi}{dt} \\ \varphi_0 &= Tr[(\tilde{\tau} - (1-d) \cdot \mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S) \cdot \tilde{\mathbb{D}}_e] + Tr[\tilde{\tau} \cdot \tilde{\mathbb{D}}_p] + \frac{1}{2} Tr[\mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S] \cdot \dot{d} - h(r) \cdot \dot{r} \end{aligned}$$

On en déduit :

- La loi d'état  $\tilde{\tau} = (1-d) \cdot \mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S$

- Et, avec les notations  $R = h(r)$  et  $\bar{Y}_d = \frac{1}{2} Tr[\mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S \cdot \tilde{\varepsilon}_e^S]$ ,  $\varphi_0 = Tr[\tilde{\tau} \cdot \tilde{\mathbb{D}}_p] - R \cdot \dot{r} + \bar{Y}_d \cdot \dot{d}$

### 2.2.2 Lois d'évolution

On ne cherche pas à déterminer explicitement la fonction  $\phi^*$  qui gouverne les lois d'évolution des variables  $\{\tilde{\mathbb{D}}_p, r, d\}$ . On se contente de déterminer une fonction seuil  $f$  pour les paramètres d'écroissance et une loi d'évolution  $\dot{d} = h(r, d, \tau)$  pour l'endommagement.

- Plasticité

- *fonction seuil*

Pour chaque point  $M$  du solide  $\mathcal{S}$  et à tout instant  $t$ , il existe une fonction scalaire  $f_{(\tilde{\tau}, R)}$  qui décrit la surface seuil telle que :

- Si  $f_{(\tilde{\tau}, R)} < 0$  alors le comportement ne peut qu'être élastique
- Si  $f_{(\tilde{\tau}, R)} = 0$  alors le comportement peut être élastoplastique. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour induire la plasticité.

On peut montrer, que dans le cas des matériaux standards généralisées, l'évolution de la plasticité du matériau ( $\tilde{\mathbb{D}}_p$  et  $p$ ) peut être totalement définie à partir de la

définition de la fonction seuil  $f$ .

On choisit une fonction seuil  $f$  répondant au critère de Von Misès :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}^d}{1-d} \right)^2 \right]} - R \text{ avec } \boldsymbol{\tau}^d \text{ le déviateur des contraintes : } \boldsymbol{\tau}^d = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{Tr}[\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbb{I}$$

On montre alors que les lois d'évolution qui gouvernent la plasticité prennent la forme suivante :

$$\dot{\mathbb{D}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, R)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}} \quad \text{et} \quad \dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, R)}{\partial R}$$

$\lambda$  est un scalaire appelé multiplicateur plastique, il se calcule à partir de la condition de consistance qui assure que la relation  $\dot{f}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, R) = 0$  soit toujours satisfaite lors du processus de plasticité, c'est-à-dire, que le phénomène d'écrouissage se développe de telle façon que le point de chargement reste sur la surface seuil.

On a ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_p &= \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\tau}^d}{\tau^{VM}} \text{ avec } \tau^{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \|\boldsymbol{\tau}^d\| \\ \mathbb{D}_p &= \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\boldsymbol{\tau}^d}{\|\boldsymbol{\tau}^d\|} = \frac{\dot{\lambda}}{1-d} \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{m} \text{ avec } \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\tau}^d}{\|\boldsymbol{\tau}^d\|} \text{ et } \dot{r} = \dot{\lambda} \end{aligned}$$

$p$  est la variable d'écrouissage (plasticité cumulée) :  $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \text{Tr}(\mathbb{D}_p \cdot \mathbb{D}_p) = \frac{\dot{\lambda}}{1-d}$ .

◦ *fonction d'écrouissage*

On définit la fonction d'écrouissage  $R$  en fonction de la plasticité cumulée  $p$

$$p(T) = \int_0^T \dot{p}(t) \cdot dt$$

On définit la fonction  $R(p)$  analytiquement, à l'aide de trois paramètres, un définissant la limite élastique  $\tau_0$ , et deux définissant la courbe d'écrouissage ( $b$  et  $n$ ), ou ( $\Delta\tau$  et  $c$ ). Deux formulations ont été retenues, une loi puissance et une loi exponentielle-saturante :

- loi puissance :  $R(p)_{stat}^P = \tau_0 + b \cdot p^n$ .
- loi exponentielle-saturante  $R(p)_{stat}^E = \tau_0 + \Delta\tau [1 - \exp(-c \cdot p)]$ .

#### • Endommagement

On définit une loi d'évolution d'endommagement pilotée par la plasticité cumulée, pondérée par une fonction du taux de triaxialité des contraintes [55, 121]. Cette pondération permet de prendre en compte le fait qu'expérimentalement l'endommagement est fortement lié à la pression hydrostatique, alors que dans notre modélisation l'évolution de la plasticité dépend de la partie déviatrice du tenseur des contraintes. De plus, afin de prendre en compte le phénomène de coalescence en phase de rupture, correspondant à une évolution de l'endommagement brutale, tout en gardant

une loi la plus simple possible, une loi d'évolution non-linéaire est retenue. On écrit ainsi que :

$$\text{Avec } d_{stat} = \left\langle \frac{R_\nu \cdot (p - p_0)}{p_c - p_0} \right\rangle_+^\alpha \quad \left. \begin{array}{l} d = d_{stat} \text{ tant que } d < 1 \\ d = 1 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

$$\text{Où } R_\nu = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \left( \frac{\tau^h}{\tau^{VM}} \right)^2$$

**■ Bilan du chapitre 3**

La modélisation des matériaux ductiles étudiés est définie dans ce chapitre. Il s'agit de présenter la modélisation "classique" d'un comportement ductile. Dans la seconde partie de ce document, nous présenterons des versions enrichies de cette modélisation, ayant pour objectif de contrôler la localisation.

Parmi les différentes approches pour travailler dans le cadre des grandes déformations, les approches qui reposent sur l'écriture de loi en taux, et sur la définition de référentiel tourné ont été privilégiées. Ainsi, les lois de comportement sont écrites par la suite dans le référentiel corotationnel.

Le comportement élastoplastique repose sur une décomposition additive du gradient des vitesses en une partie élastique et une partie plastique et les matériaux s'inscrivent dans la classe des matériaux standards généralisés. La plasticité est isotrope à écrouissage isotrope, définie à partir de la fonction seuil  $f$  et répond au critère de plasticité de Von Misès. L'endommagement est défini à partir d'une variable interne scalaire, il s'agit d'une approche de type Lemaitre, et la loi d'évolution non linéaire associée dépend de la plasticité cumulée et du taux de triaxialité des contraintes.

## Deuxième partie

Modèle  
élastoplastique endommageable  
en grandes déformations  
d'épuisement plastique  
à taux limités.



Cette deuxième partie présente le modèle "d'épuisement plastique à taux limités" :

- Le chapitre 4 présente les résultats de simulations d'une poutre en grandes déformations sollicitée en traction dynamique jusqu'à rupture, avec une modélisation "classique" et une modélisation à taux d'endommagement limité. Les limites de ces approches, mises en évidence par l'analyse de l'équation des ondes et des résultats de simulations, justifient l'intérêt de proposer un modèle "à taux de plasticité limité".
- Le chapitre 5 décrit le modèle "d'épuisement plastique à taux limités" proposé et dégage ses principales caractéristiques à partir d'une analyse 1D analytique et numérique. Dans un second temps, un cadre numérique pour évaluer les capacités du modèle à représenter le comportement jusqu'à rupture de structures élémentaires est proposé : il s'agit d'une formulation Eléments Finis en contraintes planes, en grandes déformations, couplée à une résolution en dynamique à l'aide du schéma des différences centrées. Les premiers résultats obtenus avec Matlab confirment alors les capacités du modèle à simuler la rupture ductile sans dépendance à la taille de maille.
- Le chapitre 6 concerne l'identification et la validation du modèle. La description de l'implémentation du modèle dans ABAQUS et les détails d'une campagne d'essais sont tout d'abord présentés. Des comparaisons calcul-essais permettent ensuite de déterminer un jeu de paramètres du modèle. Les simulations des essais dynamiques sur éprouvettes lisses confirment alors les capacités du modèle à prédire finement la rupture avec les valeurs identifiées.



# Chapitre 4

## Couplage endommagement-plasticité en grandes déformations : Etude de l'objectivité de la prévision de la rupture.

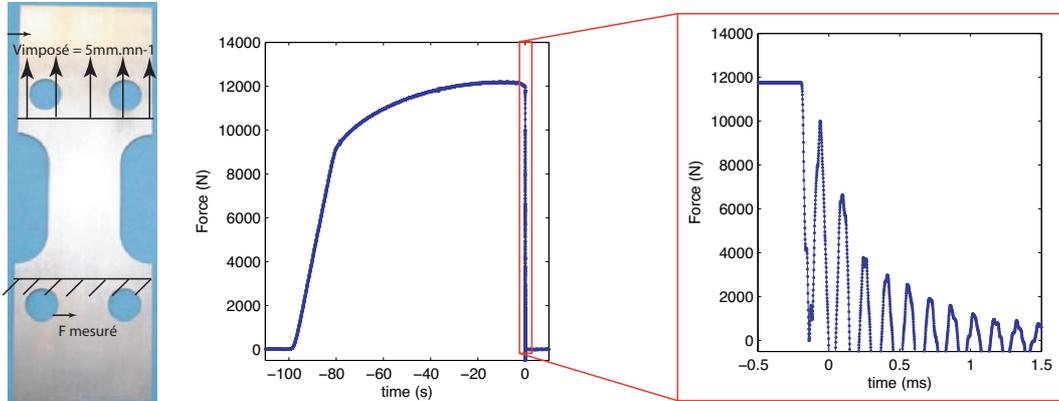
*L'étude d'un barreau au comportement élastoplastique endommageable, soumis à un chargement dynamique, permet de mettre en évidence les caractéristiques des modélisations "statiques" et à taux d'endommagement limité vis-à-vis de la maîtrise de la localisation.*

On s'intéresse dans ce chapitre, aux mécanismes conduisant à la rupture ductile en grandes déformations. L'analyse s'appuie sur une étude en 1D d'un barreau soumis à un chargement dynamique au comportement élastoplastique endommageable, en grandes déformations. Ce problème modèle, très simple, permet de prendre en compte les deux phénomènes (structure et matériau) qui conduisent à l'apparition de la localisation des déformations dans ce cadre.

- Vision dynamique de la rupture ductile

La figure 4.1 représente l'évolution temporelle de l'effort mesuré lors d'un essai de traction jusqu'à rupture sur une éprouvette en aluminium. La vitesse imposée est de  $5 \text{ mm.mn}^{-1}$ , ce qui permet de considérer que le chargement est quasi-statique, et la durée totale de l'essai est d'environ une centaine de secondes. La rupture, en revanche, est véritablement dynamique, puisqu'elle prend place en quelques dixièmes de millisecondes. La fréquence des oscillations de la mesure de l'effort correspond à

la fréquence de résonance du capteur (environ  $8\text{ kHz}$ ).



**Fig. 4.1:** Essai quasi-statique jusqu'à rupture, vision dynamique de la rupture.

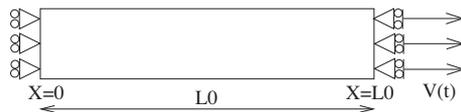
La rupture est donc véritablement un phénomène dynamique, même si elle intervient à la suite d'un chargement statique.

Comme cela a été évoqué dans le chapitre 2, les limiteurs temporels de localisation visent à contrôler cette dynamique de la rupture. Dans ce chapitre, les propriétés d'une modélisation "statique" et d'une modélisation à taux d'endommagement limité [12] sur l'objectivité des résultats sont ainsi détaillées. Les limites de ces approches sont mises en évidence par l'analyse de l'équation des ondes et des résultats de simulations numérique. Pour chacun des modèles, les exemples numériques sont obtenus avec les paramètres caractéristiques de deux matériaux différents.

## 1 Problème modèle.

Le problème modèle choisi est celui d'un barreau 1D soumis à une sollicitation dynamique (figure 4.2).

On note par la suite  $\tau = \tau_{11}$  et  $D = \frac{\partial v}{\partial x} = D_{11}$ . Afin de prendre en compte l'instabilité due à la variation de géométrie, une formulation en grandes déformations est



**Fig. 4.2:** Problème modèle.

bilité due à la variation de géométrie, une formulation en grandes déformations est

utilisée. La formulation retenue repose sur une décomposition additive du tenseur taux des déformations :  $D = D_e + D_p$ , avec  $\dot{p} = \langle D_p \rangle_+$ , et une loi en taux pour la réponse élastique (cf. chapitre 3).

On considère que la seule composante du tenseur des contraintes de Kirchhoff non nulle est  $\tau_{11}$ , en revanche les composantes 22 et 33 des tenseurs cinématiques ne sont pas imposées à 0 afin de prendre en compte les variations de section du barreau au cours du chargement. On considère ici que  $D_{22} = D_{33} = -\nu D_e - 0.5 D_p$  pour estimer la section sur la configuration déformée du barreau.

Cet exemple est très simple, mais pertinent pour dégager les principales propriétés d'un modèle vis-à-vis de la localisation et de la rupture.

### 1.1 Loi de comportement

On s'intéresse dans ce chapitre à un comportement élastoplastique endommageable. On utilise ainsi, dans le cas 1D, la modélisation présentée dans le chapitre 3.

- Elasticité

Relation contrainte-déformation élastique :

$$\tau = E.(1 - d).\varepsilon_e \text{ avec } \varepsilon_e(T) = \int_0^T D_e(t).dt$$

- Plasticité

On considère que le matériau est isotrope à plasticité isotrope, et son domaine d'élasticité est défini par la fonction seuil  $f(\tau, R) = \frac{\tau}{1-d} - R(p) = 0$ , où  $R(p)$  correspond à la contrainte d'écrouissage :  $R(p) = \tau_0 + b.p^n$ .

Le comportement élasto-plastique du matériau est alors caractérisé par :

- si  $f < 0$  ou si  $f = 0$  et  $df < 0$ , alors :  $D_p = 0$
- si  $f = 0$  et  $df = 0$ , alors :  $D_p = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau}$

On détermine alors  $\dot{\lambda}$  en écrivant la stationnarité de  $f$  :  $df = 0$ .

- Endommagement

Deux lois d'évolution de l'endommagement sont ici considérées.

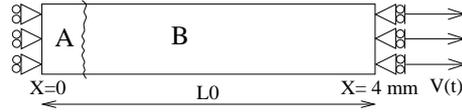
o La loi d'évolution de l'endommagement "statique", présentée dans le chapitre 3, se réduit en 1D (où  $R_\nu = 1$ ) à :

$$\text{Avec } d_{stat} = \left\langle \frac{p - p_0}{p_c - p_0} \right\rangle_+^\alpha \quad \left. \begin{array}{l} d = d_{stat} \text{ tant que } d < 1 \\ d = 1 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

◦ Avec une modélisation à taux limité, la loi d'évolution s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \dot{d} &= \frac{1}{t_c} [1 - \exp(-a \langle d_{stat} - d \rangle_+)] \text{ si } d < 1 \\ d &= 1 \text{ sinon} \end{aligned} \right\}$$

## 1.2 Modélisation numérique

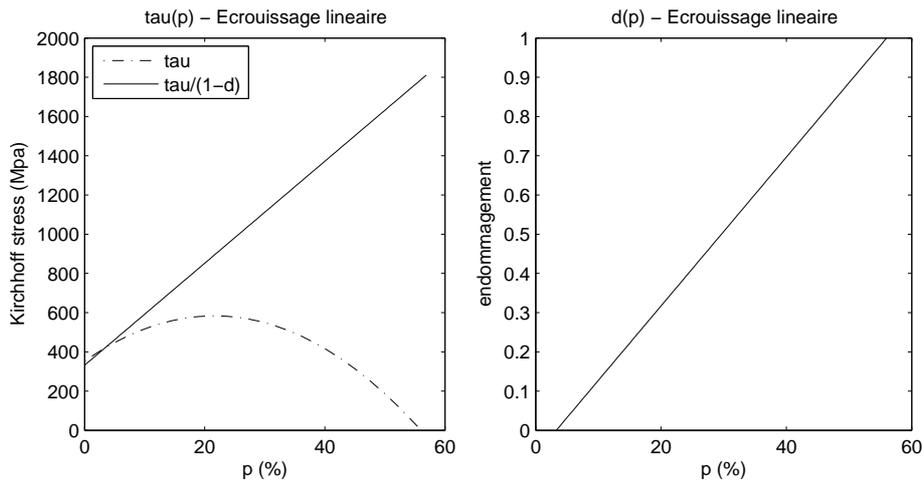


### • Matériau :

Deux jeux de paramètres matériaux sont ici considérés. Le premier, issu d'exemples précédents [10, 85], correspondant à des lois d'écrouissage et d'endommagement "linéaires", permet de comparer les résultats de simulations numériques à une étude analytique. Le second correspond aux propriétés d'un alliage "d'aluminium" 2024. La densité  $\rho_0$  des deux matériaux est de  $\rho_0 = 2.28 \cdot 10^{-3} \text{ g.mm}^{-3}$ .

Leurs comportements sont définis par les caractéristiques élastiques - plastiques - endommageables et relatives à la limitation du taux d'endommagement suivantes (cf. figures 4.3 et 4.4) :

	E (Mpa), $\nu$	$[\tau_0, b \text{ (Mpa)}], n$	$[p_0, p_c(\%)], d_c, \alpha$	taux limité : $a, t_c \text{ (ms)}$
Linéaire	58 000, 0.3	[332, 2 600], 1	[3.3, 56], 0.99, 1	2.25, 6e-3
Aluminium	75 000, 0.3	[332, 760], 0.7	[0, 60], 0.99, 3	0.225, 2e-3



**Fig. 4.3:** Loi de comportement, comportement linéaire.

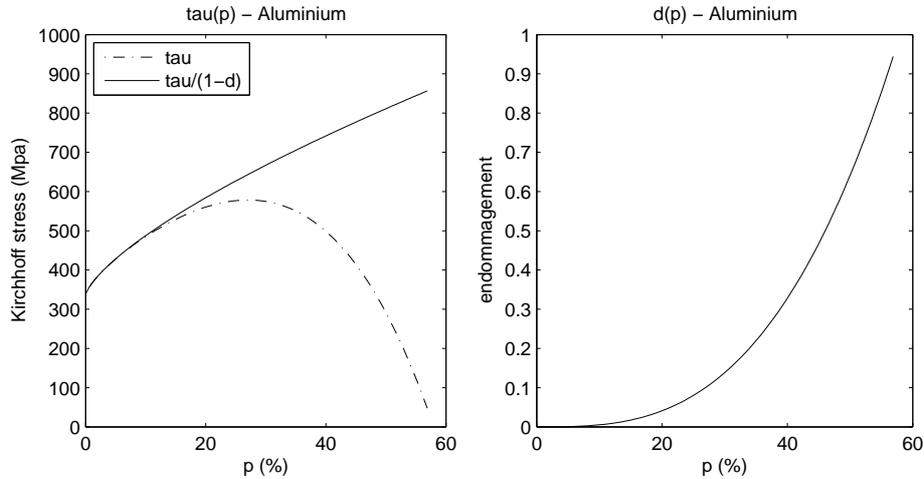


Fig. 4.4: Loi de comportement, Aluminium.

• Géométrie :

La longueur initiale du barreau est de 4 mm, longueur suffisamment grande devant la taille de la zone de localisation (cf. chapitre 5, section 2).

Dans un calcul 2D ou 3D les conditions aux limites seules nous assurent que la zone de localisation se situe au centre du barreau (zone "A" ici). En effet, comme dans ce cas la valeur de la section aux extrémités de la zone "B" est bloquée alors que partout ailleurs la section est "libre", plus on s'éloigne de l'extrémité de la zone "B", plus la section du barreau peut varier.

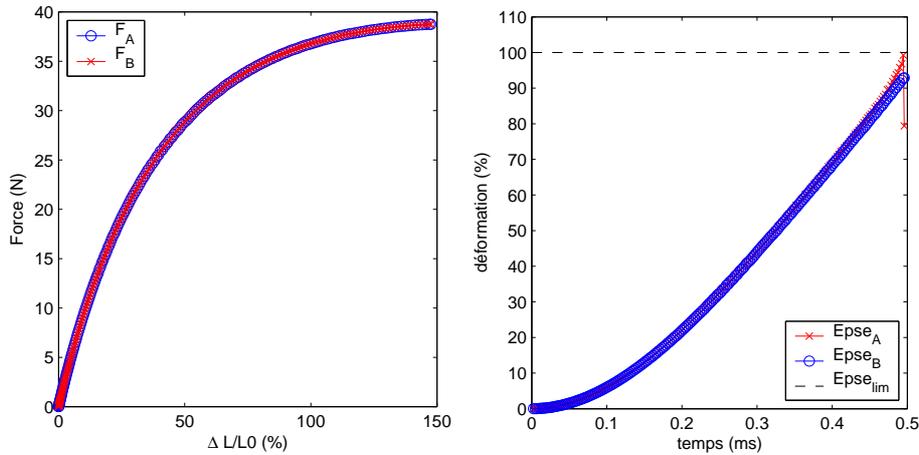
Mais dans ce simple exemple, il n'est pas possible de bloquer la valeur de la section. Afin, d'observer la localisation des déformations toujours dans la même zone ("A"), on choisit de travailler avec une section initiale non uniforme. La valeur de cette section (à  $t = 0$ ), égale à  $S(x) = S_0 \cdot (0.99 + 0.01 \frac{x^2}{L_0^2})$ , vérifie  $S(0) = 0.99 \cdot S(L_0)$  et  $\frac{dS}{dx}|_{x=0} = 0$ . On force ainsi la localisation à se situer dans la zone "A" du barreau sans pour autant accentuer l'effet de localisation (la section est quasi-uniforme dans la zone "A").

Dans la zone "A", le maillage est raffiné par rapport au reste de la structure.

• Discretisation temporelle :

Le problème étudié est résolu en dynamique à l'aide d'un schéma d'intégration en temps explicite (schéma de Newmark avec  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$  : schéma des différences centrées).

Dans chacune des zones "A" et "B", le pas de temps est égal à environ 83 % du pas de temps critique donné par la condition de Courant. La condition de raccord entre



**Fig. 4.5:** Elasticité en grandes déformations :  $F(Dl/l_0)$  et  $Eps(t)$ .

les deux zones correspondent à un effort extérieur constant imposé sur la zone "A", entre les deux instants séparés de la durée du pas de temps de la zone "B".

- Conditions aux limites :

L'extrémité gauche du barreau est "encastrée" (le déplacement selon  $x$  est bloqué, mais la variation de section est possible) alors que l'extrémité droite est soumise à une condition cinématique imposée.

### 1.3 Pertinence du problème modèle

Ce modèle a pour objectif de permettre une exploitation des résultats claire, tout en étant le plus fidèle possible à la réalité. Pour cette raison une formulation "1D" en "grandes déformations" a été retenue. L'intérêt de cette approche se justifie avec l'exemple suivant.

- Exemple : Comportement élastique.

Cet exemple très simple (mais totalement irréaliste) illustre ici l'importance d'une formulation en grandes déformations. En effet, le comportement est ici élastique, c'est-à-dire qu'avec la formulation retenue, le taux de contrainte de Kirchhoff est relié linéairement au taux eulérien des déformations, mais la courbe effort-déplacement admet toutefois un maximum (figure 4.5). Ceci s'explique par le fait qu'en grandes déformations, la variation de section est prise en compte, ainsi même si  $\sigma(t)$  augmente, l'effort  $F(t) = \sigma(t) \cdot S(t)$  peut diminuer.

Il est clair sur cet exemple qu'il faut distinguer le comportement local d'un matériau et le comportement global d'une structure. Le phénomène classique de striction dans les métaux apparaît alors que le comportement local du matériau

dans la zone de striction reste élasto-plastique à écrouissage positif.

Dans ce simple exemple de traction uniaxiale, il est possible de montrer que la solution du problème reste unique tant que l'effort augmente, mais l'unicité de la solution est perdue lorsque le maximum d'effort est atteint, ce qui correspond à une déformation cumulée de 100 % et une contrainte de Kirchhoff égale au module d'Young  $E$  (figure 4.5).

## 2 Modèles élasto-plastique endommageable

Dans cette section, les propriétés des modélisations "statique" et à taux d'endommagement limité sur l'objectivité des résultats sont détaillées.

### 2.1 Modèle "statique"

- Equation des ondes

Afin de simplifier l'analyse, on fait l'hypothèse que le chargement global est suffisamment lent pour qu'il puisse être considéré quasi-statique : le chargement est homogène avant localisation. On établit alors une équation des ondes du même type que dans la section 4 du chapitre 2.

L'équation des ondes s'écrit pour un comportement linéaire ( $n = 1$  et  $\alpha = 1$ ) :

$$\beta^{epd} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \beta^{epd} = \frac{(p_c - p) \cdot b \cdot (b + E) \cdot (1 - \tau_0/b - \varepsilon) - E \cdot (b \cdot \varepsilon + \tau_0)}{(p_c - p_0) \cdot (b + E)^2}$$

L'instabilité intervient avec le changement de nature de cette équation, c'est-à-dire quand  $\beta^{epd}$  s'annule. En caractérisant l'état critique par la déformation, alors  $\varepsilon = \varepsilon^{lim}$  est solution de l'équation du second ordre :

$$a_2 \cdot (\varepsilon^{lim})^2 + a_1 \cdot \varepsilon^{lim} + a_0 \quad \text{avec} : \quad \left. \begin{array}{l} a_2 = E \cdot b \\ a_1 = [(b + E) \cdot p_c + \tau_0] \cdot b + E \cdot (b - \tau_0) + E \cdot b \\ a_0 = [(b + E) \cdot p_c + \tau_0] \cdot (b - \tau_0) - E \cdot \tau_0 \end{array} \right\}$$

Avec les valeurs du matériau "linéaire" et en utilisant les relations entre  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$  et  $p$ , on trouve :

$$\varepsilon_1^{lim} = 17.03\% = 1.28\% + 15.75\% \quad \text{et on en déduit} \quad d_1^{lim} = 23.47\%.$$

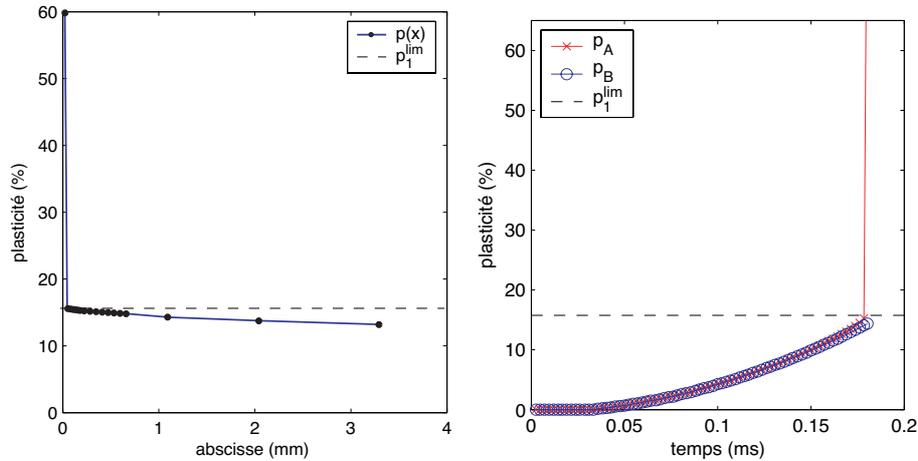


Fig. 4.6: Modèle "statique" : évolution spatiale et temporelle de la plasticité.

• Résultats numériques - comportement linéaire

La courbe de gauche de la figure 4.6 représente le profil de la plasticité le long du barreau en fin de chargement, c'est-à-dire quand l'endommagement a atteint  $d_c$  en un point du barreau. La courbe de droite correspond à l'évolution de la plasticité au cours du temps en un point de la zone "B" (zone qui se décharge élastiquement en phase de rupture) et en un point de la zone "A" (zone qui se charge jusqu'à rupture).

Il est alors possible de vérifier sur ces courbes que le chargement est effectivement quasi-homogène sur la structure avant localisation (la valeur de la plasticité en "A" est la même qu'en "B"). On peut également observer que l'état correspondant à la perte d'unicité de la solution est bien celui déterminé par l'étude de l'équation des ondes (avec  $p_1^{lim} = 15.75\%$ ). Cet état limite du barreau est alors appelé "état 1" (perte d'unicité de la solution pour un comportement élastoplastique endommageable). Une fois que cet état est atteint les déformations se concentrent dans un unique élément alors que le reste de la structure se décharge élastiquement (mais les valeurs des variables  $p$  et  $d$  restent constantes).

La figure 4.7 représente la configuration à rupture en zone "A" avec une cartographie couleur relative à la valeur de l'endommagement pour deux finesses de maillage différentes. On peut ainsi constater qu'au-delà de cet état critique, les déformations se localisent toujours dans un unique élément, même si le maillage est raffiné.

La figure 4.8 représente la valeur du taux de plasticité dans la zone "A" lorsque  $d = d_c$  pour différentes finesses de maillage, en fonction de différentes vitesses de sollicitations globales. En analysant les résultats de simulation avec une vision dyna-

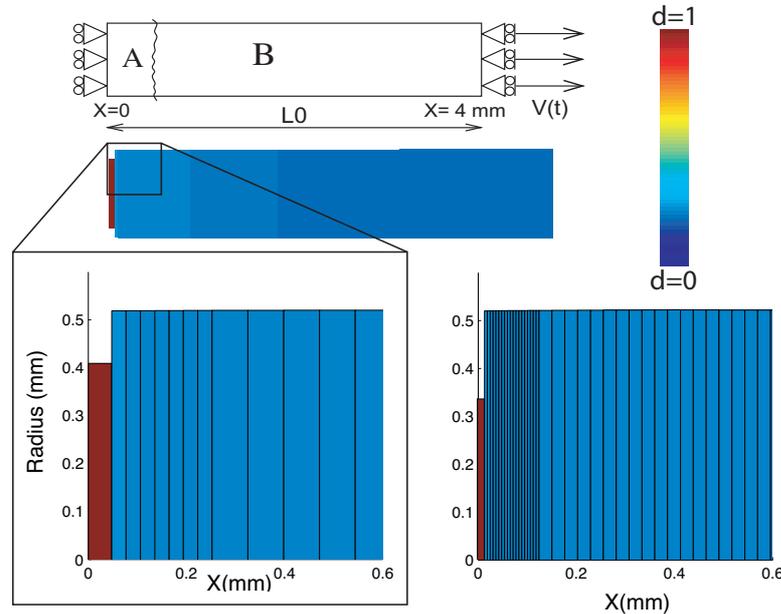


Fig. 4.7: \* Modèle "statique" : configuration à rupture (quand  $d = d_c$ ).

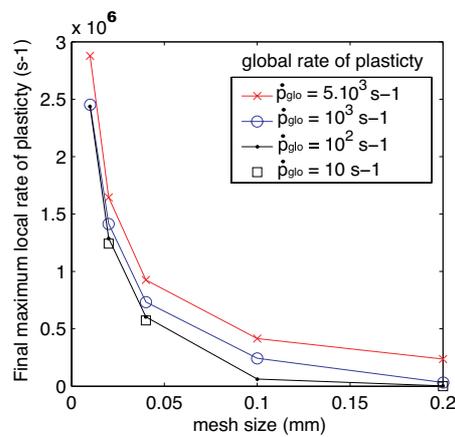


Fig. 4.8: Modèle statique : taux de plasticité non borné.

mique de la rupture, on peut noter que les valeurs des taux de déformation en phase de localisation sont bien plus élevées que les valeurs correspondant au chargement global et que ces valeurs locales augmentent sans limite a priori lorsque la taille de maille diminue.

- Résultats numériques - Aluminium

Dans ce cas, il n'existe pas de relation analytique entre  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$  et  $p$ . L'état critique

de ce matériau ne peut donc pas être caractérisé analytiquement par l'une de ses variables internes. En revanche, en traçant l'évolution spatiale du taux de plasticité en fin de chargement (figure 4.9, courbe de gauche), il est clair que la valeur limite de plasticité qui correspond à cet état est  $p_1^{lim} = 19.1\%$ . On peut vérifier sur la courbe de droite de la figure 4.9 que cet état correspond bien au pic d'effort.

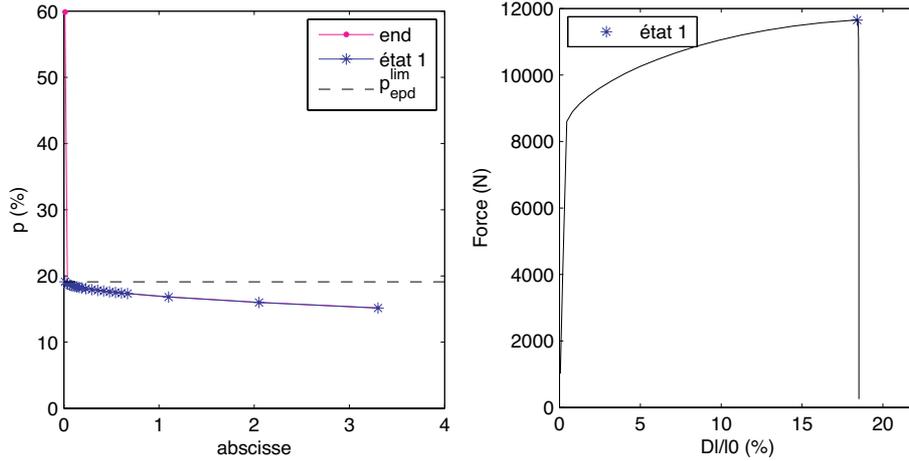


Fig. 4.9: Modèle "statique", Aluminium :  $p(x)$  et  $F(Dl/l_0)$ .

## 2.2 Modèle à taux d'endommagement limité

### 2.2.1 Préambule : Comportement élastoplastique - modèle statique

On présente dans un premier temps une analyse du modèle "statique" du comportement élastoplastique, sans endommagement. Les résultats exposés ici seront réutilisés (2.2.2). Sans endommagement, la fonction seuil s'écrit :

$$- f = \tau - R(p) = 0 \text{ avec ici } R(p) = \tau_0 + b.p^n$$

- Equation des ondes

Avec les hypothèses rappelées ci dessus et au chapitre 2, l'équation des ondes s'écrit ici pour un comportement à écrouissage linéaire ( $n = 1$ ) :

$$\beta^{ep} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \beta^{ep} = \frac{b}{b+E} \cdot (1 - \tau_0/b - \varepsilon)$$

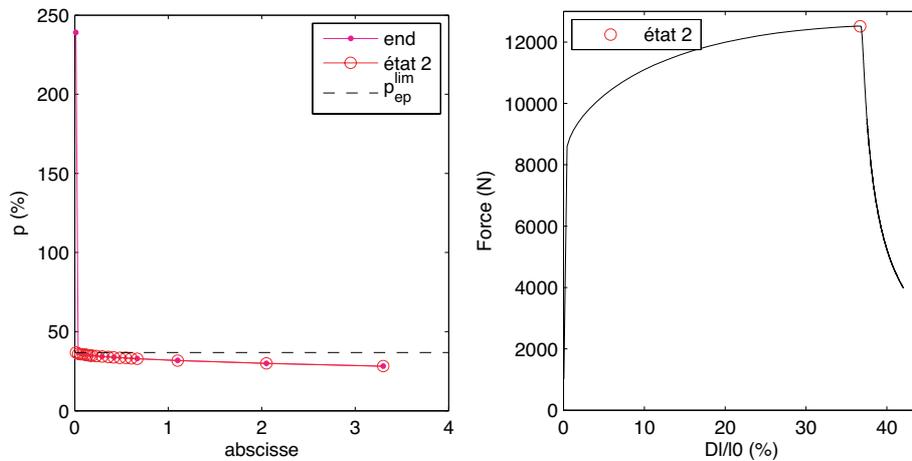
$$\text{L'instabilité intervient quand } \varepsilon = 1 - \tau_0/b = [\varepsilon_e] + [p] = \left[\frac{b}{b+E}\right] + \left[\frac{E}{b+E} - \tau_0/b\right].$$

Avec les valeurs du matériau "linéaire", on trouve :

$$\varepsilon_2^{lim} = 87.2\% = 4.3\% + 82.9\%.$$

- Résultats numériques - Aluminium

De la même manière que pour la modélisation "statique" d'un comportement élastoplastique avec endommagement, on caractérise (numériquement) par la valeur de la plasticité  $p_2^{lim}$ , l'état du matériau lorsque l'unicité des résultats n'est plus garantie. On détermine celle-ci à partir de la courbe de gauche de la figure 4.10 :  $p_2^{lim} = 36.75\%$ . En appelant cet état critique "état 2" (perte d'unicité de la solution pour un comportement élastoplastique sans endommagement), on vérifie alors sur la courbe de droite que cet état correspond au pic d'effort.



**Fig. 4.10:** Modèle "statique" sans endommagement, Aluminium :  $p(x)$  et  $F(Dl/l_0)$ .

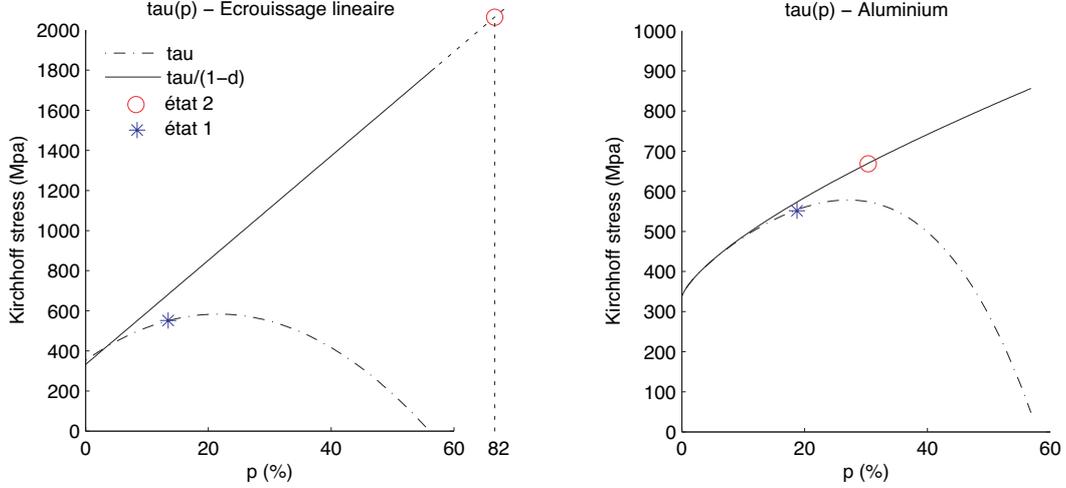
- Bilan de 2.1 et 2.2.1

On définit les états caractéristiques suivant :

- "état 1" : perte d'unicité de la solution pour une modélisation "statique" d'un comportement élastoplastique endommageable.
- "état 2" : perte d'unicité de la solution pour une modélisation "statique" d'un comportement élastoplastique sans endommagement.

$p^{lim}$	Linéaire	Aluminium
Etat 1	15.75 %	19.1 %
Etat 2	82.9 %	36.75 %

Ces points particuliers sont précisés sur les courbes caractéristiques du comportement des matériaux "linéaire" et "aluminium" (cf. figures 4.11).



**Fig. 4.11:** Etats 1 et 2 des matériaux "linéaire" et "aluminium".

### 2.2.2 Modèle à taux d'endommagement limité

- Equation des ondes

Avec un écrouissage linéaire, l'équation des ondes s'écrit ici :

$$\beta_d^{epd} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta \beta_d^{epd}}{\beta_{\dot{d}/D}} \cdot \frac{\partial \dot{d}}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{avec : } \left. \begin{aligned} \beta_d^{epd} &= \frac{1}{p_c - p_0} \cdot \frac{1}{b+E} \cdot [(p_c - p) \cdot b \cdot (1 - \tau_0/b - \varepsilon)] \\ \Delta \beta_d^{epd} &= \frac{E \cdot \varepsilon_e}{(p_c - p_0) \cdot (b+E)} = \frac{E \cdot (b \cdot \varepsilon + \tau_0)}{(p_c - p_0) \cdot (b+E)^2} \\ \beta_{\dot{d}/D} &= \frac{1}{p_c - p_0} \cdot \frac{b}{b+E} \end{aligned} \right\}$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu au chapitre 2, le terme  $\frac{\partial \dot{d}}{\partial x}$  est de degré inférieur à celui de  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  car  $\dot{d}$  n'est une fonction que de l'état :  $\dot{d}(d, \varepsilon)$ . Comme avec ce modèle, la valeur de  $\dot{d}$  est bornée, le statut de l'équation des ondes ne dépend que du terme de plus haut degré  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ . Ainsi, ce statut se modifie quand le coefficient devant  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , soit  $\beta_d^{epd}$ , s'annule.

On remarque alors que  $\beta_d^{epd} = 0$  pour les mêmes valeurs de déformations ( $\varepsilon, \varepsilon_e$  et  $p$ ) que lorsque  $\beta^{ep} = 0$  (cf. 2.2.1). Ainsi, l'instabilité due à l'endommagement est effectivement "contrôlée" : le modèle modifié a le même comportement vis-à-vis de l'unicité des résultats qu'un modèle élastoplastique sans endommagement. La perte d'unicité est donc repoussée avec un modèle à taux d'endommagement limité par rapport à un modèle "statique".

De plus, le modèle à taux d'endommagement limité ne modifie l'évolution de l'endommagement par rapport à un modèle "statique" que pour des sollicitations très fortement dynamiques, et, avec un tel modèle, la valeur de  $\dot{d}$  est très proche de

la valeur limite  $1/t_c$  en phase de localisation, tant que  $d \leq d_c$ . Ainsi, l'utilisation d'un modèle à taux d'endommagement limité ne modifie pas l'apparition de la localisation par rapport à une modélisation "statique" et permet de mener un calcul jusqu'à  $d = d_c$  (comme dans le cas de l'élasticité endommageable, cf. chapitre 2).

L'état correspondant au pic d'effort est donc caractérisé par l'état "1", et la perte d'unicité n'intervient que pour l'état "2". Il est clair que l'état "2" (pic d'effort d'un modèle "statique" sans endommagement) est postérieur à celui de l'état "1" (pic d'effort d'un modèle "statique" avec endommagement), mais il se peut toutefois que cet état soit atteint avant rupture.

Les états "1" et "2" sont d'autant plus proches que le matériau est peu endommageable avant localisation, ce qui est le cas des alliages d'aluminium, de série "2 000" en particulier. Dans les exemples numériques suivants, les caractéristiques du matériau "Aluminium" correspondent justement à un alliage 2024.

- Résultats numériques - Aluminium

Cet exemple va nous permettre de confirmer les résultats obtenus par l'analyse de l'équation des ondes et de les généraliser aux comportements à lois d'évolution non-linéaires.

Même si elles n'ont pas été déterminées analytiquement, les valeurs de plasticité correspondant aux états "1" et "2" ont pu être déterminées précédemment ( $p_1^{lim} = 19.1\%$  et  $p_2^{lim} = 36.75\%$ ). On peut alors vérifier sur la courbe représentant la plasticité en fonction de l'abscisse à différents instants (cf. figure 4.12) que lorsque  $p$  atteint  $p_1^{lim}$  les déformations se localisent, c'est-à-dire que la plasticité n'évolue plus en zone "B" (décharge élastique) et ne croît qu'en zone "A". Cet "état 1" correspond effectivement à une valeur d'effort très proche de la valeur maximale sur la courbe  $F(t)$  (cf. figure 4.13).

A partir de l'état "1", la phase de localisation débute et se déroule effectivement en deux étapes. Dans un premier temps, les déformations augmentent sans discontinuité en espace, puis, à partir de  $p = p_2^{lim}$ , les déformations se concentrent dans un unique élément (cf. figure 4.12, courbe de droite : zoom). A partir de l'état "2", l'instabilité n'est plus due à l'endommagement mais à l'instabilité plastique de la "matrice" (la "matrice" représente la partie matérielle sans endommagement). Le limiteur de localisation utilisé n'est donc plus efficace et les résultats deviennent dépendants du maillage. On constate sur la figure 4.13 que la dynamique de la rupture n'est plus contrôlée, l'effort chute aussi rapidement que ne l'autorise la taille de l'élément où les déformations se localisent.

- *Remarque :*

Les valeurs "statiques" des coefficients matériau ont été identifiées à partir de

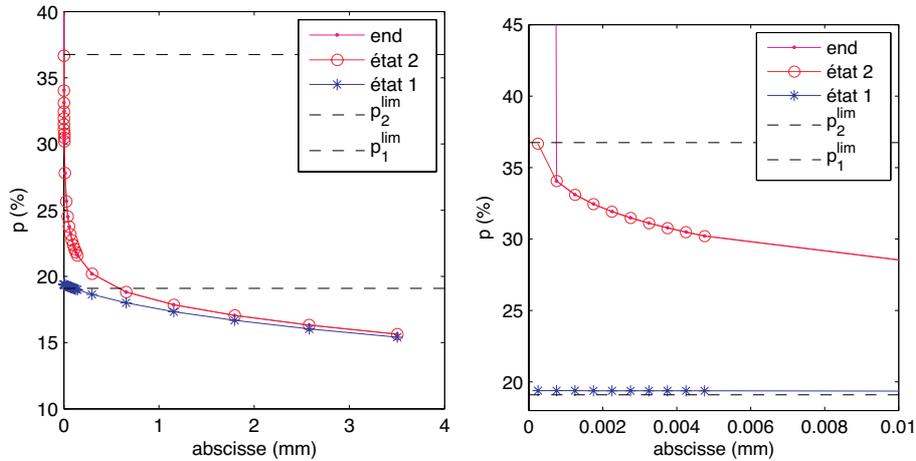


Fig. 4.12: Modèle à taux d'endommagement limité, Aluminium :  $p(x)$ .

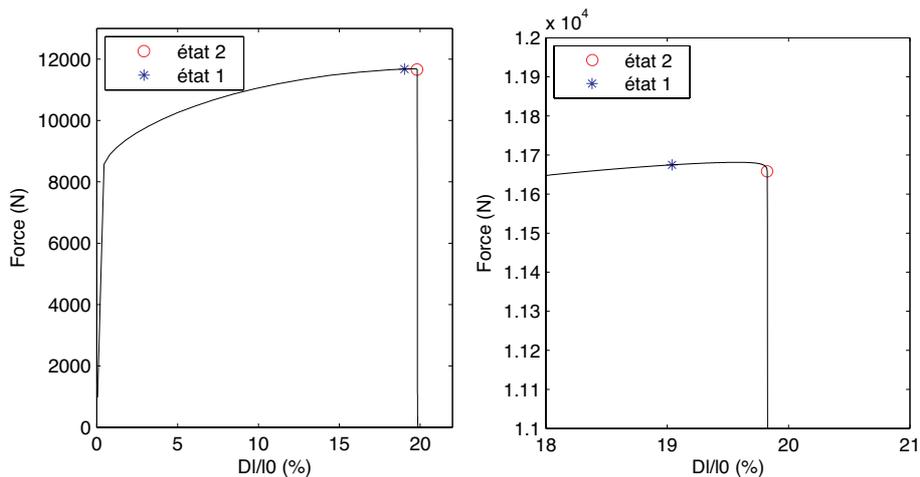


Fig. 4.13: Modèle à taux d'endommagement limité, Aluminium :  $F(DI/10)$ .

résultats d'essais de traction sur des éprouvettes en aluminium 2024 (cf. chapitre 6). Seules les valeurs de "a" et "t<sub>c</sub>" n'ont pas été identifiées à partir de ces essais. Suffis et Combescure [12] ont proposé pour un aluminium 7020-T6 les valeurs :  $a = 2.25$  et  $t_c = 2 \cdot 10^{-3}$  ms. Mais nous nous intéressons ici au phénomène de rupture (discrétisation spatiale extrêmement fine), pour un chargement quasi-statique (durée de chargement importante) avec une résolution numérique pour l'intégration en temps correspondant au schéma de Newmark (condition de Courant à respecter). Par conséquent, le nombre d'itérations nécessaires à la résolution de ce problème est très grand.

De plus, comme on s'intéresse à la phase de localisation jusqu'à ce que la rupture

soit atteinte, la finesse de la discrétisation spatiale nécessaire est d'autant plus importante. En effet, la taille de la zone de localisation diminue avec l'évolution de l'endommagement, comme cela a pu être montré avec d'autres modèles à partir de l'analyse de l'équation des ondes ou de résultats numériques [4, 122]. Ainsi, pour ne pas être contraint à utiliser un maillage excessivement fin, qui dans le cas de notre approche directe conduirait à des temps de calcul relativement longs, nous avons retenue une valeur de 0.225 pour le paramètre  $a$  (la taille de localisation est inversement proportionnelle à  $a$ , cf. chapitre 5, section 2).

- Résultats numériques - comportement linéaire

Dans ce cas, d'après les caractéristiques du comportement linéaire, il devrait être possible de mener des simulations jusqu'à rupture sans perte d'unicité de la solution et donc sans dépendance au maillage. En effet, "l'état 2" ( $p_2^{lim} = 82.9\%$ ), qui correspond à la perte d'unicité, est ici postérieur à la rupture ( $d_c = 0.99 - p_{d=dc \text{ en statique}} = 56\%$ ). Mais, l'analyse proposée ci-dessus correspond à un chargement quasi-statique et l'influence de la vitesse peut modifier notablement les conclusions de cette analyse.

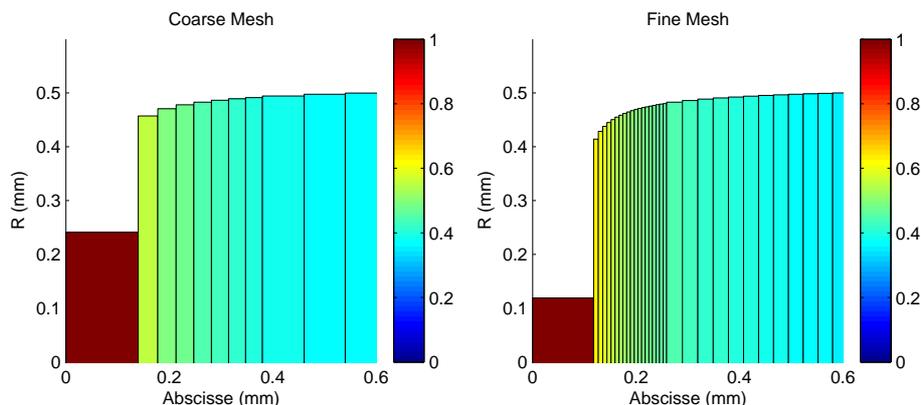
- *Effet de la vitesse de chargement*

Si la vitesse de chargement n'est pas négligeable, alors la loi d'évolution de l'endommagement du modèle à taux limité a pour premier effet de retarder l'évolution de l'endommagement. Par conséquent, pour une même valeur de plasticité, la valeur de l'endommagement est plus faible avec un modèle à taux limité qu'avec un modèle "statique". La localisation, puis la rupture, apparaissent ainsi pour une valeur de plasticité plus importante avec le modèle à taux limité, c'est-à-dire d'autant plus près, voir au-delà, de l'état "2", qui correspond à la perte d'unicité.

Une augmentation de la vitesse de chargement a donc pour effet de réduire la phase de localisation "contrôlée".

- *Résultats*

Les simulations ont ici été menées avec, comme condition aux limites, une rampe en vitesse de pente  $40 \text{ mm.ms}^{-2}$ . La figure 4.14 représente la configuration à rupture du barreau quand  $d = d_c$  pour deux finesses de maillage différentes. On vérifie qu'une partie de la phase de localisation a pu être simulée : après le pic d'effort, les déformations se concentrent sans discontinuité dans une zone de très faible épaisseur, mais de taille non nulle, estimée avec plusieurs éléments. Ceci s'observe par la diminution importante de la section, ou du "rayon", de plusieurs éléments en zone "A". Mais on peut également observer que les déformations se concentrent dans un unique élément avant la fin de la simulation, même lorsque le maillage est raffiné. Il est clair que le résultat obtenu ne correspond pas à la simulation d'une cinématique continue : la valeur de l'endommagement dans l'élément voisin de celui où  $d$  a atteint  $d_c = 0.99$  n'est que de 0.6 avec le maillage le plus fin.



**Fig. 4.14:** \* Modèle à taux d'endommagement limité : configuration à rupture.

### 2.3 Conclusion

Nous venons de constater que le contrôle de l'endommagement permet de repousser la perte d'unicité de la solution, mais pas forcément jusqu'à  $d_c = 1$ . En effet, il apparaît que l'endommagement n'est pas la principale source d'instabilité dans le cas de matériaux ductiles au comportement modélisé par une loi élastoplastique endommageable, d'autant plus quand les valeurs d'endommagement sont faibles lors de l'apparition de la localisation. L'instabilité provient essentiellement du comportement plastique de la matrice. De plus, l'effet de la vitesse de chargement tend à diminuer la phase de localisation "contrôlée".

Pour cette raison, une première démarche consiste à considérer que la rupture se met en place pour un endommagement critique inférieur à 1 [12]. Le principal inconvénient de cette approche est que la contrainte à rupture n'est alors pas nulle. De plus, la valeur limite correspondant à la perte d'unicité de la solution dépend de la vitesse de chargement.

Pour décrire la phase de rupture jusqu'à  $d_c = 1$  de manière continue et en assurant l'unicité de la solution, nous proposons d'utiliser un modèle contrôlant l'instabilité plastique, c'est-à-dire avec un formalisme de modèle à taux limité, d'utiliser un modèle élastoplastique endommageable à taux de plasticité limité. L'évolution de l'endommagement étant gouvernée par la plasticité, l'instabilité due à l'endommagement est alors également contrôlée avec un modèle de ce type. Comme nous allons le voir en détail dans le chapitre suivant, un modèle "d'épuisement plastique à taux limités" ("élastoplasticité endommageable à taux de plasticité limité et endommagement gouverné par la plasticité") a alors le même comportement vis-à-vis de la stabilité qu'un modèle élastique, la seule source d'instabilité non contrôlée étant l'instabilité élastique.

**■ Bilan du chapitre 4**

Le problème modèle d'un barreau 1D en grandes déformations, au comportement élastoplastique endommageable, soumis à une sollicitation de traction en quasi-statique, permet de mettre en évidence les limites des modélisations "statiques" et "à taux d'endommagement limité" à fournir une solution unique au problème mécanique continu, et par conséquent sans dépendance au maillage lors d'une résolution par Eléments Finis.

Cette analyse s'appuie sur l'étude de l'équation des ondes caractéristique de ces modèles et sur des résultats de simulations Eléments Finis. Elle permet de confirmer qu'avec un modèle "statique" tel que décrit au chapitre 3, la perte d'unicité de la solution de notre problème apparaît avec le maximum de l'effort atteint dans le barreau. A partir de cet état critique, il n'est plus possible de donner une interprétation pertinente des résultats de simulation : tant la configuration à rupture, que les évolutions temporelles des quantités d'intérêt post-traitées dépendent du maillage.

Une première modification de ce modèle "statique" consiste à utiliser une loi d'évolution pour l'endommagement à taux limité. Il est alors possible de repousser la perte d'unicité au-delà du pic d'effort. Mais l'analyse montre qu'un tel modèle ne permet pas de régulariser systématiquement (quelles que soient les valeurs des coefficients matériaux) notre problème jusqu'à rupture, c'est-à-dire  $d = 1$  dans l'approche visée.

C'est pourquoi nous proposons d'utiliser un modèle "élastoplastique endommageable à taux de plasticité limité et endommagement gouverné par la plasticité". Ce modèle fait l'objet d'une étude spécifique dans le chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Analyse du modèle d'épuisement plastique à taux limités

*Ce chapitre décrit tout d'abord le modèle d'épuisement plastique à taux limités et ses principales caractéristiques vis-à-vis de la localisation, en s'appuyant sur une analyse analytique et numérique 1D. Dans un second temps, un cadre numérique 2D pour évaluer les capacités du modèle est proposé : il s'agit d'une formulation Eléments Finis en contraintes planes, en grandes déformations, couplée à une résolution en dynamique à l'aide du schéma des différences centrées.*

### 1 Présentation du modèle

Le modèle d'épuisement plastique à taux limités a pour but d'enrichir la description du comportement matériau afin d'assurer l'objectivité des résultats jusqu'à rupture.

Comme nous l'avons déjà spécifié, l'apparition de la localisation des déformations est due à la fois à un effet de structure et au comportement matériau. Dans notre modélisation du comportement, les deux sources d'instabilité matérielle sont ici liées au comportement plastique et endommageable du matériau (cf. chapitre 3). De plus, avec les matériaux pris en compte dans cette étude, les valeurs de l'endommagement sont relativement faibles lors de la mise en place de la localisation, il en résulte que l'état correspondant à l'instabilité plastique-endommageable (à l'échelle du matériau) est très proche de l'état correspondant à l'instabilité purement plastique (qui correspondrait à un matériau non-endommagé). Dans ces conditions,

contrôler la variable d'endommagement uniquement ne garantit pas l'unicité de la solution de notre problème mécanique jusqu'à  $d = 1$  (cf. chapitre 4).

L'influence du temps de chargement sur les conditions de rupture est une question très discutée par les spécialistes d'impact et différents critères de rupture incluant explicitement le temps de rupture ont été proposés pour rendre compte des résultats expérimentaux. Quelques développements récents dans le domaine peuvent être trouvés dans [123, 124] : Curran et Seaman estiment ainsi que dans les métaux, un ordre de grandeur caractéristique du temps de coalescence est typiquement de l'ordre de  $10^{-6}$  secondes.

Pour décrire la dégradation associée à une plastification locale très importante (phénomène que l'on qualifiera d'épuisement plastique), un endommagement  $d$ , piloté par la plasticité cumulée  $p$ , est introduit. Ainsi, l'endommagement est également contrôlé. Les lois d'évolution de la plasticité et de l'endommagement sont :

- Plasticité

$$f = \frac{\tau}{1-d} - [R(p) + \frac{\tau_0}{a} \ln(\frac{1}{1-t_c p})] = 0 \text{ soit } \dot{p} = \frac{1}{t_c} [1 - \exp(-a[\frac{\tau/(1-d) - R(p)}{\tau_0}] )]$$

- Endommagement

$$\text{loi d'évolution } \left. \begin{array}{l} d = \sup_{(t)} \left\langle \frac{p-p_0}{p_c-p_0} \right\rangle_+^\alpha \text{ tant que } d < 1 \\ d = 1 \text{ sinon} \end{array} \right\}$$

- Remarques

Avec  $f_{stat}^d = d_{stat} - d$ , la loi d'évolution de l'endommagement à taux limité s'écrit :

$$\dot{d} = \frac{1}{t_c} [1 - \exp(-a \cdot f_{stat}^d)]$$

Et en notant  $f_{stat}^p$  la fonction seuil définissant le domaine de plasticité d'un modèle "statique" ou "classique", on peut remarquer que la loi d'évolution de la plasticité cumulée est ici analogue à celle de l'endommagement d'un modèle à taux d'endommagement limité :

$$\dot{p} = \frac{1}{t_c} [1 - \exp(-a \frac{f_{stat}^p}{\tau_0})]$$

On choisit ici de diviser  $f_{stat}^p$  par la limite élastique  $\tau_0$  afin de conserver un coefficient  $a$  sans dimension.

On peut également écrire la fonction seuil  $f$  sous la forme  $f = f_{stat}^p - \frac{\tau_0}{a} \ln(\frac{1}{1-t_c p})$ , cette expression est alors identique à celle employée par Comi et Driemeier par

exemple, pour la description de la loi d'évolution d'une variable d'endommagement non-locale employée avec un modèle élastique fragile [125].

- Analyse de l'équation des ondes - cohérence du modèle

En reprenant les hypothèses et les notations du chapitre 2, on peut montrer que l'équation des ondes peut se mettre sous la forme :

$$\beta_p^{epd} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta \beta_p^{epd}}{\beta_{\dot{p}/D}} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{avec : } \left. \begin{array}{l} \beta_p^{epd} = (1-d) \cdot (1-\varepsilon_e) \\ \Delta \beta_p^{epd} = \frac{E \cdot (\varepsilon + p_c - 2p)}{(p_c - p_0)(b+E)} \\ \beta_{\dot{p}/D} = \frac{E}{b+E} \end{array} \right\}$$

Ainsi, le statut de l'équation se modifie lorsque  $\beta_p^{epd} = (1-d) \cdot (1-\varepsilon_e) = 0$ , soit  $d = 1$  (rupture), ou lorsque  $\varepsilon_e = 1$  (instabilité élastique). Les instabilités liées à la plasticité et à l'endommagement sont donc contrôlées. La seule instabilité persistante est l'instabilité élastique, qui n'est jamais atteinte dans nos applications en raison du faible niveau des valeurs des déformations élastiques.

On peut également montrer qu'un modèle "élastoplastique endommageable à taux de plasticité limité et endommagement piloté par la déformation élastique" a le même comportement vis-à-vis de l'équation des ondes qu'un modèle élastique endommageable (seule la plasticité est alors contrôlée, les instabilités dues à l'élasticité et à l'endommagement étant toujours actives).

- Simulation numérique - objectivité des résultats

La figure 5.1 correspond aux résultats de simulation d'une poutre encastree en  $x = 0$  et soumise à une rampe en vitesse en  $x = L$ . Les courbes représentent la configuration à rupture et la carte de l'endommagement en fin de chargement (quand la valeur critique  $d_c = 1$  a été atteinte), sur la configuration déformée, pour deux finesses de maillages. On peut alors vérifier que les résultats sont indépendants de la finesse de maillage.

Dans le cadre d'une modélisation en 1D, un maillage n'est caractérisé que par la nature et la taille des éléments. Comme cela sera détaillé par la suite, un modèle d'épuisement plastique à taux limités permet également d'obtenir des résultats de simulation sans dépendance à l'orientation des éléments.

Les taux de plasticité et d'endommagement sont limités comme on peut le constater sur les figures 5.2; En effet, sur ces courbes représentant l'évolution de la plasticité et de l'endommagement en zone "A", la pente de l'évolution de la plasticité  $p$  au cours du temps est limitée à  $\frac{1}{t_c}$  et la pente de l'évolution de l'endommagement est limitée à  $\frac{1}{t_c} \cdot \frac{1}{p_c - p_0}$ .

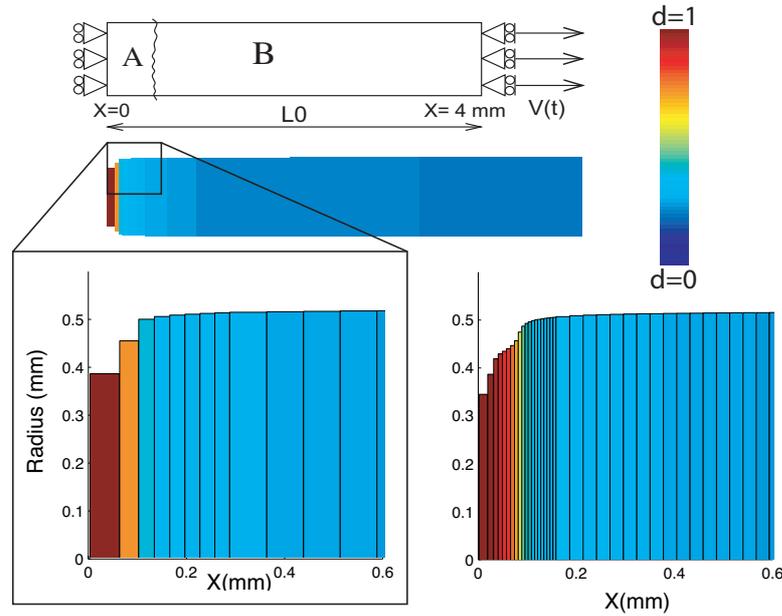


Fig. 5.1: \* Modèle d'épuisement plastique à taux limités - modélisation 1D : configuration à rupture indépendante de la taille de maille.

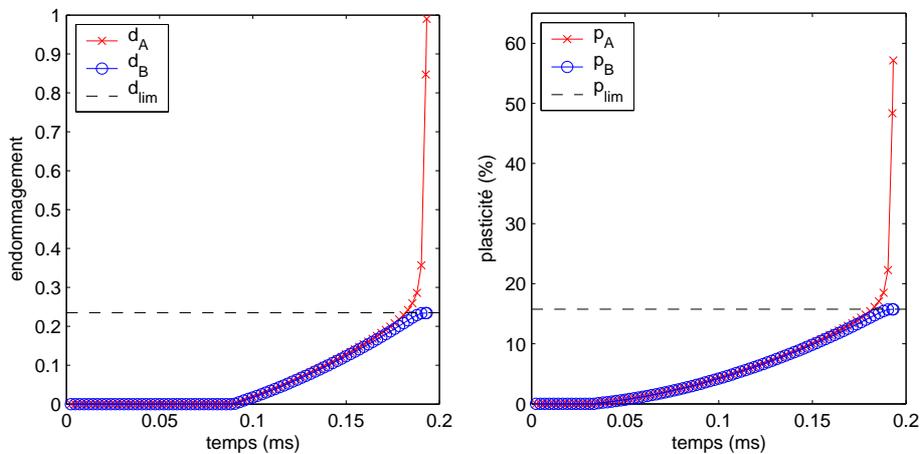


Fig. 5.2: Variations temporelles de l'endommagement et de la plasticité.

## 2 Taille de la zone de localisation

On s'intéresse dans cette partie à la taille de la zone de localisation. Une première estimation de cette taille, en s'appuyant sur une analyse détaillée de l'équation des ondes, est tout d'abord proposée. Puis, des résultats issus de simulations numériques sont présentés.

## 2.1 Etude analytique - équation des ondes

Les intérêts de mener une étude analytique pour estimer la taille caractéristique de la zone de localisation sont de pouvoir déterminer a priori la taille de maille critique en vue d'une résolution numérique, mais également d'estimer l'influence des paramètres du modèle sur cette taille caractéristique. Enfin, une estimation analytique, confirmée par des résultats numériques, permet de confronter ces résultats avec des données expérimentales pour valider le modèle.

Compte tenu de la complexité d'une telle étude, un certain nombre d'hypothèses, parfois fortes, sont à poser pour pouvoir mener un calcul.

Une première démarche consiste à considérer que la rupture est engendrée par le passage d'une seule onde mécanique, d'amplitude  $\Delta\sigma$ . Initialement, la structure est totalement saine, et sollicitée selon les limites du modèle jusqu'à rupture après le passage de l'onde ( $\dot{p} = 1/t_c$  ou  $\dot{d} = 1/t_c$ ). Cette démarche a été proposée par Suffis, Lubrecht et Combescure dans le cas d'un comportement élastique-fragile à taux d'endommagement limité [13, 12].

Une autre approche, suivie notamment par Sluys [3, 96], vise à déduire une longueur caractéristique du modèle à partir d'une analyse détaillée de l'équation des ondes. Allix, Feissel et Thévenet proposent d'appliquer cette démarche également avec un comportement élastique-fragile couplé à une loi d'endommagement à taux limitée [126].

Cette deuxième méthode est ici généralisée à un comportement élastoplastique à taux d'endommagement ou de plasticité limité. En effet, dans les applications visées, la rupture apparaît après plusieurs aller-retours d'ondes, d'autant plus avec des matériaux ductiles. Une simplification dans cette démarche consiste à considérer que l'état avant localisation a été atteint en quasi-statique. Cette hypothèse semble acceptable dans une gamme assez large de situations puisque les taux de déformations atteints dans la phase de localisation sont, en général, bien supérieurs à ceux rencontrés précédemment.

- Écriture de l'équation des ondes :

L'évolution d'une variable (endommagement ou plasticité), notée  $\theta$  et définie en statique à partir de  $f_{stat}^\theta$ , est ici décrite par :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{t_c}[1 - \Phi] \text{ et } \Phi = \exp[-a \cdot f_{stat}^\theta]$$

On définit alors l'évolution de  $\dot{\theta}$ , en définissant  $\dot{\theta} = \gamma$  et en supposant que  $f_{stat}^\theta$

ne dépende que de l'état et en particulier des variables  $\varepsilon$  et  $\theta$  :

$$\ddot{\theta} = \dot{\gamma} = \frac{1}{T_c} \cdot [\beta_{\Gamma/D} \cdot D - \gamma] \quad \text{avec} \quad \beta_{\Gamma/D} = -\frac{\frac{\partial f_{stat}^\theta}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f_{stat}^\theta}{\partial \theta}} = \frac{\partial \theta_{stat}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \gamma_{stat}}{\partial D} \quad \text{et} \quad T_c = \frac{t_c}{a \cdot \Phi \cdot \left(-\frac{\partial f_{stat}^\theta}{\partial \theta}\right)}$$

L'évolution du modèle est maintenant gouvernée par deux variables. On suppose de plus que le chargement est quasi statique. L'évolution du modèle est alors caractérisé autour d'un état d'équilibre défini par les valeurs de ses variables d'état  $\varepsilon = \varepsilon_e + p$  et  $d$ . On se ramène ainsi au système de deux équations :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \beta_\theta^{epd} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta \beta_\theta^{epd}}{\beta_{\Gamma/D}} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \text{(b)} \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{T_c} \cdot [\beta_{\Gamma/D} \cdot D - \gamma] \end{array} \right\}$$

Avec la relation  $\beta_\theta^{epd} - \Delta \beta_\theta^{epd} = \beta^{epd}$ , où  $\beta^{epd} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  dans le cas d'une loi "classique".

Des champs harmoniques sont introduits dans ce système, afin de définir ceux qui en sont solution. On pose ainsi  $v = V \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)}$  et  $\theta = \gamma = \Gamma \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)}$  et :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = -ik \cdot V \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -k^2 \cdot V \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} = -i \cdot k \cdot \Gamma \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot V \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot V \cdot e^{i(\omega \cdot t - k \cdot x)} \end{array} \right\}$$

Avec les paramètres adimensionnés  $\underline{\omega} = T_c \cdot \omega$  et  $\underline{k} = c_0 \cdot T_c \cdot k$ , on a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad [\beta_\theta^{epd} \cdot k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}] \cdot V - i \cdot k \cdot \frac{\Delta \beta_\theta^{epd}}{\beta_{\Gamma/D}} \cdot \Gamma = 0 \\ \text{(b)} \quad \frac{i \cdot k}{T_c} \cdot \beta_{\Gamma/D} \cdot V + (\frac{1}{T_c} + i \cdot \omega) \cdot \Gamma = 0 \end{array} \right\}$$

Les vitesses de phase et de groupe et une longueur caractéristique, liée à la zone d'influence de la densité d'énergie correspondant à la pulsation  $\omega$ , sont définis par :

$$c_e = Re\left(\frac{\omega}{k}\right) = c_0 \cdot \frac{\underline{\omega}}{k_r}, \quad c_g = Re\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right) = c_0 \cdot \left(\frac{\partial k_r(\underline{\omega})}{\partial \underline{\omega}}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad l_{ad} = \frac{1}{k_i} \quad \text{soit} \quad l = \frac{c_0 \cdot T_c}{k_i}$$

#### • Relation de dispersion.

Afin de déterminer ces grandeurs caractéristiques, on écrit la relation reliant  $\omega$  et  $k$  à partir de l'expression du déterminant de ce système.

$$[\beta_\theta^{epd} \cdot \underline{k}^2 - \underline{\omega}^2] \cdot [1 + i \cdot \underline{\omega}] - \Delta \beta_\theta^{epd} \underline{k}^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = \underline{\omega}^2 \cdot \frac{\beta_\theta^{epd} + \underline{\omega}^2 \cdot \beta_\theta^{epd} - i \cdot \underline{\omega} \cdot \Delta \beta_\theta^{epd}}{\beta_\theta^{epd2} + \underline{\omega}^2 \cdot \beta_\theta^{epd2}}$$

En écrivant  $\underline{k} = k_r + i.k_i$  (et  $\underline{k}^2 = 2.P.[a + i.b]$ ), on a :

$$k_i^2 = P.(\sqrt{a^2 + b^2} - a) \text{ et } k_r^2 = P.(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$$

avec  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{\omega}^2}{\beta^{epd2} + \underline{\omega}^2 \cdot \beta_x^{epd2}}$ ,  $a = \beta^{epd} + \underline{\omega}^2 \cdot \beta_\theta^{epd}$  et  $b = -\underline{\omega} \cdot \Delta\beta_\theta^{epd}$ .

• Hypothèse : rupture en quasi-statique.

On fait ici les hypothèses que le chargement est à la fois suffisamment lent pour être considéré quasi-statique, et en même temps que la rupture est fortement dynamique. On se place ainsi à l'amorce de la rupture. Cette hypothèse sera validée par la suite, puisque la taille de la zone de localisation est figée à partir de l'amorce du phénomène de concentration des déformations, jusqu'à la rupture complète de cette zone (cf. figure 5.9).

◦ *Rupture dynamique :*

On suppose que la rupture est fortement dynamique. Cette hypothèse répond aux observations expérimentales (cf. chapitre 4, figure 4.1) et reste en accord avec le modèle, qui prend en compte ce caractère dynamique de la rupture. On suppose donc que l'évolution de notre système dépend essentiellement des fréquences les plus élevées. On se place donc dans le cas limite  $\omega \rightarrow \infty$ , on a alors :

$$P \rightarrow \frac{1}{2 \cdot \beta_\theta^{epd2}} \quad a \rightarrow \beta_\theta^{epd} \cdot \underline{\omega}^2 \quad b \rightarrow -\Delta\beta_\theta^{epd} \cdot \underline{\omega} \quad \text{et comme } \frac{b}{a} \rightarrow 0, \text{ on a :}$$

$$k_i \rightarrow \sqrt{P \cdot \frac{b^2}{2 \cdot a}} = \frac{\Delta\beta_\theta^{epd}}{2 \cdot [\beta_\theta^{epd}]^{3/2}}, \quad k_r \rightarrow \sqrt{P \cdot 2 \cdot a} = \frac{\underline{\omega}}{\sqrt{\beta_\theta^{epd}}} \text{ et } c_e = c_g = c_0 \cdot \frac{\underline{\omega}}{k_r} = c_0 \cdot \sqrt{\beta_\theta^{epd}}$$

◦ *Chargement global quasi statique :*

Cette deuxième hypothèse permet de supposer que l'état avant rupture est le même que celui correspondant à l'amorce de la localisation avec un modèle "classique". On suppose donc que  $\Phi = 1$  et que l'état vérifie  $\beta^{epd} = 0$ , soit  $\beta_\theta^{epd} = \Delta\beta_\theta^{epd}$ . L'expression analytique de la longueur caractéristique est alors :

$$l_{ad} = \frac{2 \cdot [\Delta\beta_\theta^{epd}]^{3/2}}{\Delta\beta_\theta^{epd}} = 2 \cdot \sqrt{\Delta\beta_\theta^{epd}} \quad \text{soit} \quad l_{eqondes}^{epd} = 2 \cdot c_0 \cdot \frac{t_c}{a \cdot \left(-\frac{\partial f_{stat}}{\partial \theta}\right)} \cdot \sqrt{\Delta\beta_\theta^{epd}}$$

• Application : comportement élastoplastique endommageable à taux de plasticité limité.

Ici, la variable contrôlée est  $\theta = p$ . On a :

$$\left. \begin{aligned} f_{stat} &= \frac{E \cdot (\varepsilon - p) - (\tau_0 + b \cdot p)}{\tau_0} \text{ et } p_{stat} = \frac{E \cdot \varepsilon - \tau_0}{b + E} \text{ donc } \beta_{\Gamma/D} = \frac{\partial p_{stat}}{\partial \varepsilon} = \frac{E}{b + E} \\ \frac{\partial f_{stat}}{\partial p} &= -\frac{E + b}{\tau_0} \text{ donc } Tc = \frac{t_c}{a \cdot \Phi} \cdot \frac{\tau_0}{E + b} \\ \Delta\beta_p^{epd} &= \frac{E \cdot (\varepsilon + p_c - 2p)}{(p_c - p_0)(b + E)} \text{ et } \beta_p^{epd} = [(1 - d) \cdot (1 - \varepsilon_e)] \end{aligned} \right\}$$

$$l_{eqondes}^{epd} = 2 \cdot c_0 \cdot \frac{t_c}{a} \cdot \frac{\tau_0}{E+b} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot (\varepsilon + p_c - 2p)}{(p_c - p_0)(b + E)}} \text{ et } \varepsilon_e \text{ vérifie } \varepsilon_e^2 - \left(\varepsilon_{ec} + 2 \cdot \frac{b}{b+E}\right) \cdot \varepsilon_e + \frac{b}{b+E} \cdot \varepsilon_{ec} = 0$$

◦ *Application numérique*

Comportement élastique :  $E = 58\,000$  Mpa ;  $\nu = 0.3$  et  $\rho_0 = 2.28 \cdot 10^{-3}$  g.mm<sup>-3</sup>.

Comportement plastique :  $\tau_0 = 332$  Mpa,  $b = 2600$  Mpa et  $n = 1$ .

Comportement endommageable :  $d_c = 0.99$ ,  $p_0 = 0\%$ ,  $p_0 = 60\%$  et  $\alpha = 1$ .

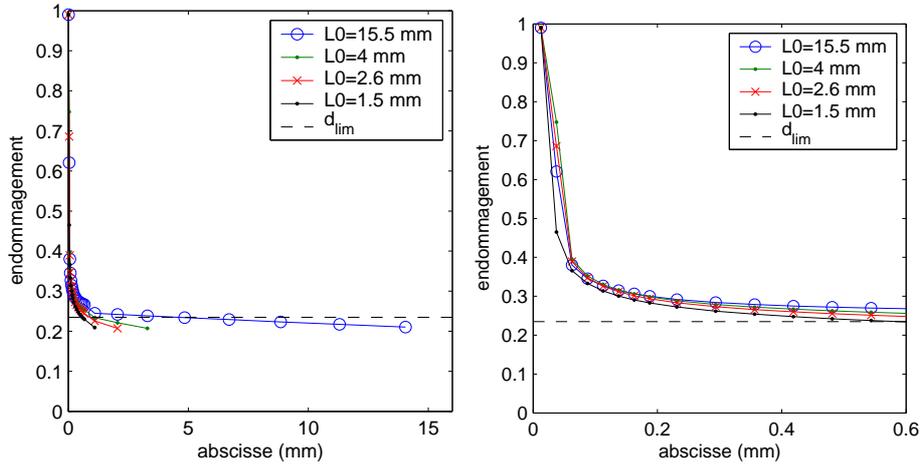
Limitation du taux de plasticité :  $a = 2.25$  ;  $t_c = 0.1$  ms.

$$\text{On trouve } l_{eqondes}^{epd} = 2.07 \text{ mm}$$

## 2.2 Résultats numériques

• Description du cas de référence.

Pour évaluer la taille de la zone de localisation, on simule le comportement d'un barreau 1D sollicité en traction, à la vitesse de référence de  $3 \text{ m.s}^{-1}$  ; Le problème modèle du barreau en traction est décrit au chapitre 4. On peut vérifier sur les courbes de la figure 5.3 que la longueur du barreau de  $4 \text{ mm}$  est suffisante pour que la décharge élastique puisse avoir lieu et que la taille de la zone qui se décharge n'influence alors pas la zone où la localisation se met en place.



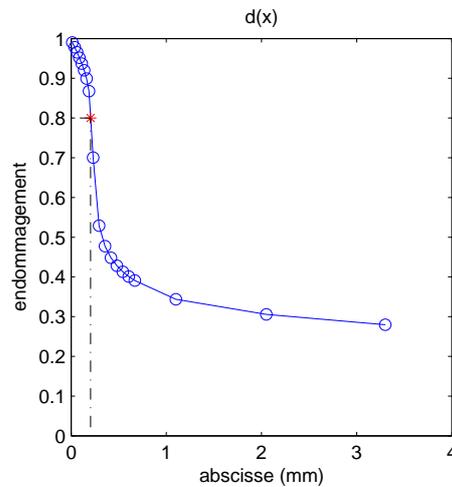
**Fig. 5.3:** Influence de la longueur initiale du barreau.

• Estimation de  $l$ .

A partir de l'évolution de l'endommagement en fonction de l'abscisse à la fin du chargement (quand l'endommagement a atteint  $d_c = 0.99$  en un point de la structure),

l'abscisse correspondant à une valeur d'endommagement de 0.8 est relevée (cette valeur est proche de  $\sqrt{2}/2$ ). Comme la figure 5.4 l'illustre, cette valeur correspond à un sixième environ de la taille caractéristique de la zone de localisation :

- compte tenu de la symétrie, un demi barreau est simulé, donc la valeur relevée correspond à la moitié de la distance séparant deux points où la valeur de l'endommagement est 0.8,
- la valeur de l'endommagement à l'abscisse délimitant la zone de localisation est davantage proche de 0.4 que de 0.8. Or l'abscisse correspondant à  $d = 0.4$  est environ le triple de celle où  $d = 0.8$ .



**Fig. 5.4:** Estimation numérique de la longueur caractéristique.

On relève ainsi une demie longueur correspondant à  $d = 0.8$  de  $0.205 \text{ mm}$ , soit  $l_{sim} = 1.23 \text{ mm}$  après la prise en compte du facteur 6.

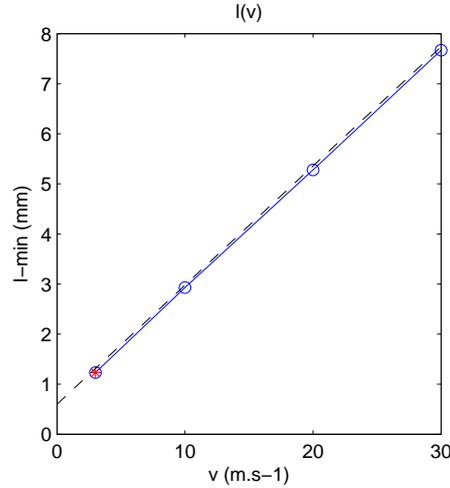
o *Correction avec l'influence de la vitesse*

L'influence de la vitesse sur la taille de la zone de localisation est représentée sur la figure 5.5. La vitesse de référence est de  $3 \text{ m.s}^{-1}$  (soit  $\dot{\epsilon}_{global} = 400 \text{ s}^{-1}$ ), on peut constater que pour des vitesses plus importantes, la taille de la zone de localisation augmente linéairement avec la vitesse, et la valeur limite correspondant à une sollicitation statique de  $l_{sim}^{ref} = 0.6 \text{ mm}$  est relevée.

En raison de la dissipation numérique liée à l'utilisation du schéma des différences centrées, non négligeable pour des vitesses de sollicitations faibles, les simulations n'ont pas été menées dans ce cas.

On retient ainsi les valeurs :

solution analytique	solution numérique
$l_{sim}^{ref} = 0.6 \text{ mm}$	$l_{eqondes} = 2.07 \text{ mm}$



**Fig. 5.5:** Influence de la vitesse sur la taille de la zone de localisation.

### 2.3 Influence des paramètres

On se propose de vérifier si l'influence de  $a$ ,  $t_c$ ,  $\rho$  et  $E$  sur la taille caractéristique de la zone de localisation déterminée numériquement est la même que dans l'expression de la longueur déterminée à partir de l'équation des ondes. D'après l'expression de la longueur caractéristique définie ci-dessus :

$$l = 2 \cdot c_0 \cdot \frac{t_c}{a} \cdot \frac{\tau_0}{E + b} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot (\varepsilon + p_c - 2p)}{(p_c - p_0)(b + E)}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_e^2 - \left(\varepsilon_{ec} + 2 \cdot \frac{b}{b + E}\right) \cdot \varepsilon_e + \frac{b}{b + E} \cdot \varepsilon_{ec} = 0$$

cette longueur caractéristique est proportionnelle à :

$$a^{-1}, \quad t_c, \quad \rho^{-1/2} \quad \text{et} \quad E^{-1/2} \quad \text{en considérant } b \ll E.$$

D'après les figures 5.6 et 5.7, les évolutions de  $l_{sim}$  en fonction de  $a$ ,  $t_c$ ,  $E$  et  $\rho$  sont globalement similaires à celles de  $l_{eqondes}$  (Les figures sont normalisées par  $l_{sim}^{ref}$ ).

La dépendance en fonction de  $t_c$  est bien linéaire dans les deux cas. En revanche, l'influence de  $a$  sur  $l_{simu}$  n'est pas exactement la même que sur  $l_{eqondes}$ , en raison des hypothèses "  $\Phi = 1$  " et " apparition de la localisation pour le même état qu'avec la loi classique " qui ne sont plus vérifiées quand  $a$  diminue.

Concernant  $E$  et  $\rho$ , ces paramètres sont directement liés à la dynamique de la sollicitation ( $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ) et au schéma d'intégration en temps puisqu'il s'agit d'un schéma de Newmark explicite. Ainsi, si  $c_0$  diminue, on s'éloigne de l'hypothèse de chargement homogène, et si  $c_0$  augmente, alors le pas de temps chute, et il est difficile de garantir la précision du résultat obtenu en raison du nombre très important de

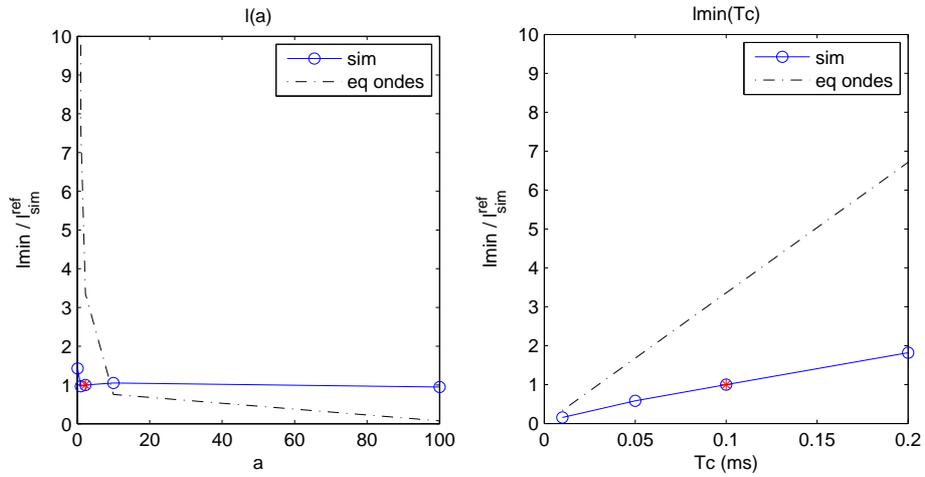


Fig. 5.6: Influence de  $a$  et de  $t_c$  sur la taille de la zone de localisation.

pas de temps nécessaires à la résolution.

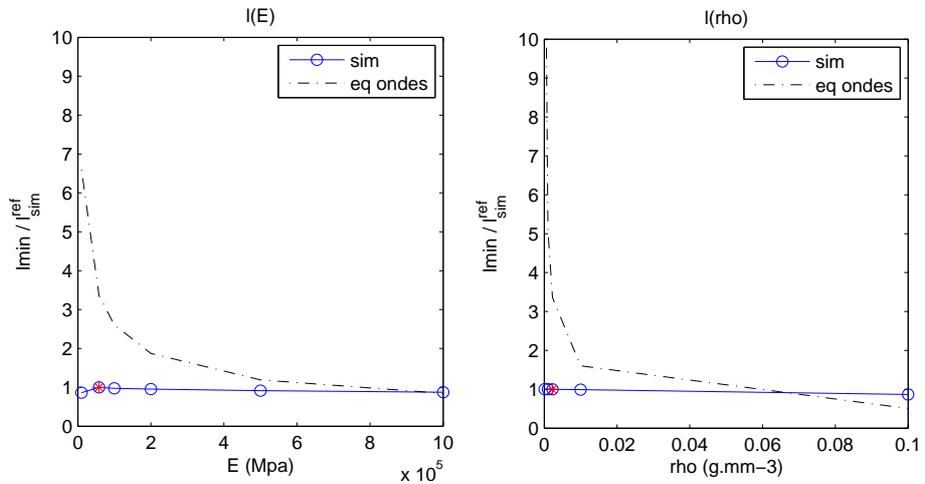


Fig. 5.7: Influence de  $E$  et de  $\rho$  sur la taille de la zone de localisation.

### 3 Influence de la loi d'érouissage

On s'attache dans cette section à l'influence de la loi d'érouissage statique  $R(p)_{stat}$  sur les résultats. Trois différentes lois ont été considérées (cf. figure 5.8) :

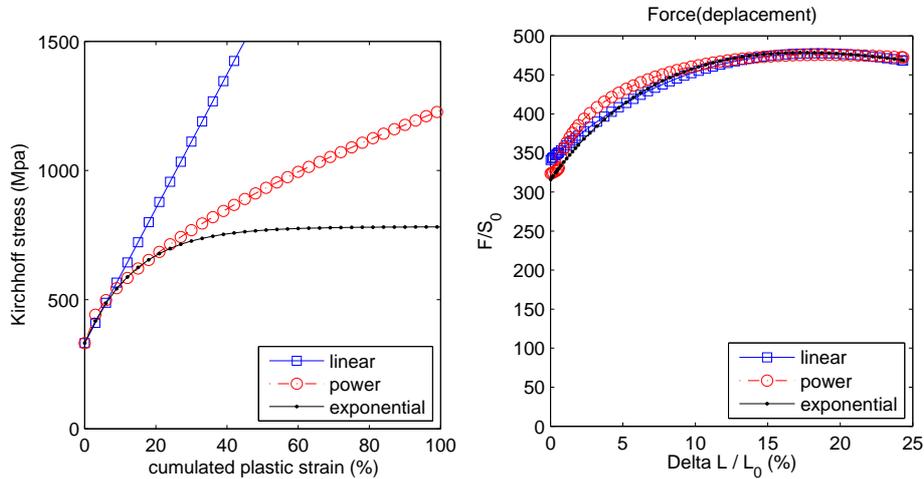
- o Loi d'érouissage statique linéaire  $R(p)_{stat}^L = \tau_0 + b.p$ .

- Loi d'écroutissement statique puissance  $R(p)_{stat}^P = \tau_0 + b.p^n$ .
- Loi d'écroutissement statique exponentielle  $R(p)_{stat}^E = \tau_0 + \Delta\tau[1 - \exp(-c.p)]$ .

Les caractéristiques matériau de ces lois sont les suivantes :

$R(p)_{stat}$	(Mpa)	(.)	$p_0(\%)$	$p_c(\%)$
$R(p)_{stat}^L$	$b = 2600$	$n = 1$	3.29	56
$R(p)_{stat}^P$	$b = 900$	$n = 0.6$	0	150
$R(p)_{stat}^E$	$\Delta\tau = 450$	$c = 7$	0	150

Ces valeurs, avec les paramètres élastiques  $E = 58\,000$  Mpa,  $\nu = 0.3$  et  $\tau_0 = 332$  Mpa, ont été déterminées afin de retrouver la même réponse globale  $F(U)$ .



**Fig. 5.8:** Lois d'écroutissement : comportement matériau - réponse globale.

Les résultats sont résumés sur la figure 5.9.

Les courbes de gauche représentent la valeur de la contrainte de Kirchhoff dans la zone "A" à différents pas de temps entre l'initiation de la localisation ( $t = 0.1880$  ms) et la rupture finale ( $t = 0.1964$  ms) pour la loi d'écroutissement exponentiel  $R(p)_{stat}^E$ . Avant que la localisation des déformations ne se mette en place, la contrainte est à peu près homogène le long du barreau ( $t = 0.1880$  ms), puis pour  $x < 0.1$  mm, le comportement reste élastoplastique endommageable, alors que pour  $x > 0.1$  mm le comportement matériau correspond à une décharge élastique.

Dans la zone de striction, la contrainte augmente dans un premier temps (l'écroutissement est prépondérant), puis chute en raison de l'évolution de l'endommagement qui atteint  $d_c = 0.99$  à  $t = 0.1964$  ms. Dans ce cas ( $R(p)_{stat}^E$ ), la rupture est alors convenablement simulée car la contrainte le long du barreau est proche de zéro à la fin de

la simulation.

Les courbes de droite représentent la contrainte de Kirchhoff dans la zone "A" au dernier pas de temps (quand l'endommagement a atteint  $d_c = 0.99$ ) pour les trois lois d'érouissage statiques  $R(p)_{stat}^L$ ,  $R(p)_{stat}^P$  et  $R(p)_{stat}^E$ .

Ces courbes montrent que l'utilisation d'une loi d'érouissage statique linéaire ne permet pas de simuler convenablement le phénomène de rupture, car la contrainte à rupture n'est pas négligeable.

Pour cette raison, une loi non linéaire semble mieux convenir à la description du phénomène de rupture (une loi saturante comme la loi exponentielle en particulier).

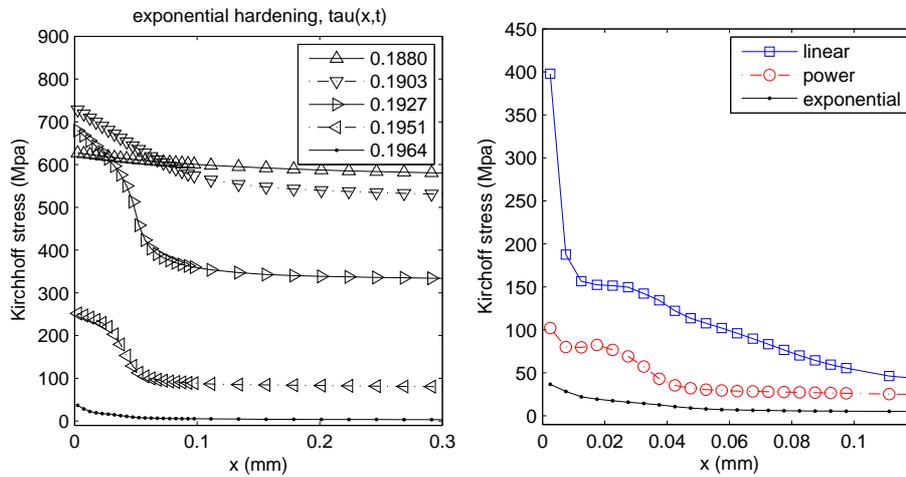


Fig. 5.9: Comparaison entre les lois d'érouissage.

## 4 Implémentation numérique du modèle

Avec un modèle "classique", c'est-à-dire sans limitation du taux de plasticité, l'utilisation de ces différentes lois dans une formulation éléments finis ne pose pas de difficultés. En revanche, quelques précautions semblent inévitables dans le cas d'un modèle à taux de plasticité limité.

- Contrainte liée à la limitation de  $\dot{p}$ .

Le calcul du taux de plasticité (en un point de gauss et à un pas de temps donné) se fait au moyen de la résolution d'une équation scalaire non linéaire par une méthode classique de Newton. A chaque itération, un taux de plasticité est estimé : il peut être supérieur ou inférieur à une valeur critique vers laquelle il s'agit de converger, il est alors utilisé pour l'itération suivante tant que le critère de convergence n'est

pas atteint. Dans le cas d'un modèle à taux de plasticité limité, si une estimation de  $\dot{p}$  est supérieure à la valeur maximale  $1/t_c$  alors cette valeur ne doit pas être utilisée directement à l'itération suivante :

En effet, au cours d'une itération intervient le calcul de  $\frac{\tau_0}{a} \ln\left(\frac{1}{1-t_c \cdot \dot{p}}\right)$  et si  $\dot{p} > 1/t_c$  alors  $\ln\left(\frac{1}{1-t_c \cdot \dot{p}}\right)$  n'est pas défini.

Donc au cours d'une itération :

- 1/ Avec  $\dot{p}_i$ , on estime  $d\dot{p}$  et  $\dot{p}_{i+1} = \dot{p}_i + d\dot{p}$
- 2/ Si  $\dot{p}_{i+1} > 1/t_c$  alors  $\dot{p}_{i+1} = \dot{p}_i + x \cdot (1/t_c - \dot{p}_i)$  avec  $x \in ]0; 1[$
- 3/ Si le critère de convergence est atteint, alors  $\dot{p} = \dot{p}_{i+1}$ , sinon retour à l'étape 1/ avec  $\dot{p}_i = \dot{p}_{i+1}$

- Critère de convergence.

De plus, dans le cas de l'érouissage non-linéaire ("exponentiel" en particulier), il est important de prendre deux précautions supplémentaires, en raison de la limite de précision numérique du code qui peut éventuellement être atteinte.

- Si  $|d\dot{p}|$  est trop faible, il se peut que les termes utilisés au cours de l'itération suivante ne soient pas suffisamment modifiés et que la solution oscille entre deux valeurs de  $\dot{p}$ .
- Si au cours d'une itération la valeur du taux de plasticité déterminé atteint une valeur  $\dot{p} > 1/t_c - \xi$ ,  $\xi$  étant la précision machine, alors, il convient d'utiliser  $\dot{p} = 1/t_c - \xi$  et de passer à l'étape suivante.

## 5 Implémentation et premiers exemples en 2D.

Un cadre numérique pour évaluer les capacités du modèle d'épuisement plastique à taux limités est ici proposé. Il s'agit d'une formulation Eléments Finis en contraintes planes, avec des éléments quadrangles linéaires isoparamétriques (Q4), en grandes déformations, couplée à une résolution en dynamique à l'aide du schéma des différences centrées (cf. annexe III).

### 5.1 Notations

- Indices

L'indice ".i" fait référence à un point, c'est-à-dire un noeud ou un point de Gauss et l'exposant ".I" correspond à l'élément I.

On note ainsi  $x_i$  une quantité au noeud  $i$ ,  $x_i^I$  une quantité au noeud  $i$  de l'élément I et  $x^I$  une quantité sur l'élément I.

- Vecteur des forces intérieures

On peut déterminer l'expression du vecteur des efforts intérieurs  ${}^{int}\underline{F}$  à partir de

celle de la puissance des efforts intérieurs  $^{int}P$ .

$$^{int}P = \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial \underline{x}} : \boldsymbol{\sigma} . d\Omega = \int_{\Omega} [L_{11} \cdot \sigma_{11} + L_{22} \cdot \sigma_{22} + (L_{12} + L_{21}) \cdot \sigma_{12}] . d\Omega = \underline{\dot{U}}^t \cdot ^{int}\underline{F} = \sum_I [\underline{\dot{U}}^I]^t \cdot ^{int}\underline{f}^I$$

On définit alors  $\underline{\sigma}^I$ ,  $\underline{D}^I$ ,  $\mathbb{A}_{\sqrt{2}}^I$ ,  $\mathbb{B}_{\xi}^I$  et  $\underline{\dot{U}}^I$  (et  $\underline{D}^I = \mathbb{A}_{\sqrt{2}}^I \cdot \mathbb{B}_{\xi}^I \cdot \underline{\dot{U}}^I$ ) :

$$\begin{aligned} \circ \underline{\sigma}^I &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2} \cdot \sigma_{12} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{D}^I = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \sqrt{2} \cdot D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}) \cdot \dot{u}_i \\ \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}) \cdot \dot{v}_i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}) \cdot \dot{u}_i + (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}) \cdot \dot{v}_i \end{bmatrix} \\ \circ \mathbb{A}_{\sqrt{2}}^I &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \\ \circ \mathbb{B}_{\xi}^I &= \begin{bmatrix} \Phi_{1,\xi} & 0 & \Phi_{2,\xi} & 0 & \Phi_{3,\xi} & 0 & \Phi_{4,\xi} & 0 \\ \Phi_{1,\eta} & 0 & \Phi_{2,\eta} & 0 & \Phi_{3,\eta} & 0 & \Phi_{4,\eta} & 0 \\ 0 & \Phi_{1,\xi} & 0 & \Phi_{2,\xi} & 0 & \Phi_{3,\xi} & 0 & \Phi_{4,\xi} \\ 0 & \Phi_{1,\eta} & 0 & \Phi_{2,\eta} & 0 & \Phi_{3,\eta} & 0 & \Phi_{4,\eta} \end{bmatrix} \\ \circ [\underline{\dot{U}}^I]^t &= [\dot{u}_1, \dot{v}_1, \dot{u}_2, \dot{v}_2, \dot{u}_3, \dot{v}_3, \dot{u}_4, \dot{v}_4] \end{aligned}$$

Et on note  $^{int}\underline{f}^I$  le vecteur des efforts intérieurs de l'élément  $I$

$$^{int}\underline{f}^I = \int_{\Omega_{xI}} [\mathbb{A}_{\sqrt{2}}^I \cdot \mathbb{B}_{\xi}^I]^t \cdot \underline{\sigma}^I . d\Omega_{cI}$$

◦ *Cas Particulier :*

On a besoin ici du gradient des vitesses complet  $\mathbb{L}$ , pas uniquement de sa partie symétrique  $\mathbb{D}$ , (ou  $\underline{D}^I$ ). Pour définir le référentiel corrotationnel, il est en effet nécessaire de calculer  $\mathbb{W}$  (ou  $\underline{W}^I$ ) la partie antisymétrique de  $\mathbb{L}$ .

On utilise donc :

$$\underline{L}^I = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \sqrt{2} \cdot D_{12} \\ W_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{,x} \\ \dot{v}_{,y} \\ \frac{\dot{u}_{,y} + \dot{v}_{,x}}{2} \\ \frac{\dot{u}_{,y} - \dot{v}_{,x}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}) \cdot \dot{u}_i \\ \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}) \cdot \dot{v}_i \\ \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}) \cdot \dot{u}_i + (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}) \cdot \dot{v}_i \\ \frac{1}{2} \cdot \sum_i (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}) \cdot \dot{u}_i - (\Phi_{i,\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Phi_{i,\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}) \cdot \dot{v}_i \end{bmatrix}$$

soit  $\underline{L}^I = \mathbb{A}_{bis}^I \cdot \mathbb{B}_{\xi}^I \cdot \underline{\dot{U}}^I$  avec  $\mathbb{A}_{bis}^I = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial y} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}$ .

• Vecteur des forces extérieures

De même, à partir de l'expression de la puissance des efforts extérieurs  $^{ext}P = \underline{\dot{U}}^t \cdot ^{ext}\underline{F}$ ,

on définit le vecteur des efforts extérieurs sur l'élément  $I$  :

$$\underline{f}^{extI} = \int_{\Omega_I} \sum_i \Phi_i \cdot \underline{\rho} \cdot \underline{b} \cdot d\Omega_I + \int_{\Gamma_{\Omega_I}} \sum_i \Phi_i \cdot \underline{t} \cdot d\Gamma_I \text{ avec } \underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ où } n \text{ est la normale à } \Gamma_I$$

- Matrice de Masse

La matrice de masse  $\mathbb{M}$  est définie à partir de la puissance des efforts d'inertie  $\underline{P}^{inert} = \underline{\dot{U}}^t \cdot \underline{F}^{inert}$  où  $\underline{F}^{inert}$  est le vecteur des forces d'inertie  $\underline{F}^{inert} = \mathbb{M} \cdot \underline{\ddot{U}}$ .

$$\mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega} \rho \cdot \Phi_i \cdot \Phi_j \cdot d\Omega$$

En pratique, on utilise une matrice de masse diagonalisée (*lumped*). Dans ce cas, la qualité des résultats n'est pas altérée, et la résolution numérique avec un schéma explicite est bien plus rapide. Il n'y a alors pas de matrice à assembler, ni à inverser, et la résolution peut se faire éléments par éléments.

- Calcul de  $J_{oc}$  :

A partir de  $\underline{L} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \sqrt{2} \cdot D_{12} \\ W_{12} \end{bmatrix}$  On peut estimer  $\underline{L} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} + W_{12} & 0 \\ D_{12} - W_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$

Avec  $D_{33} = D_{e33} + D_{p33}$ ; et dans le cas de l'hypothèse des contraintes planes, on a :  $D_{e33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(D_{e11} + D_{e22})$  et  $D_{p33} = -(D_{p11} + D_{p22})$ .

La variation d'épaisseur peut alors se calculer :  $ep = ep_0 \cdot \exp(\varepsilon_{33})$ .

On a alors  $\mathbb{F}_{n+1} = \mathbb{F}_n + \Delta \cdot \mathbb{F}$  avec  $\Delta \cdot \mathbb{F} = \Delta t \cdot \underline{L} \cdot \mathbb{F}$  et  $J_{oc} = \text{Det} \mathbb{F}$ .

On peut alors calculer  $\underline{\sigma} = \underline{\tau} / J_{oc}$ .

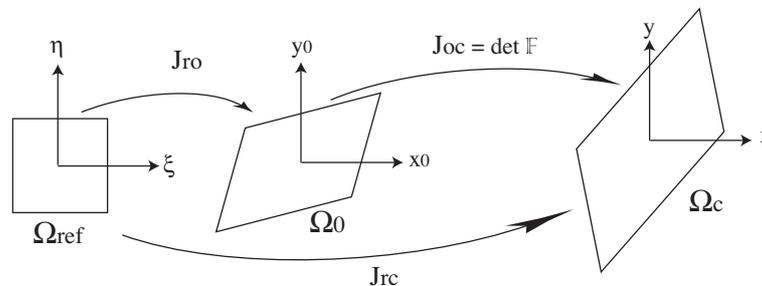


Fig. 5.10: Eléments de référence, initial et actualisé en 2D.

• Intégration numérique

Afin de calculer le vecteur des efforts intérieurs, on utilise la méthode de Gauss pour l'intégration spatiale :

$$\underline{intf}^I = \sum_i ([\mathbb{A}_{\sqrt{2}}^I \cdot \mathbb{B}_\xi^I]^t \cdot \underline{\sigma}^I)_{(\xi_i, \eta_i)} \cdot J_{rc(\xi_i, \eta_i)} \cdot ep_{(\xi_i, \eta_i)} \cdot \omega_i$$

## 5.2 Intégration temporelle : Schémas de Newmark

Quelques précisions supplémentaires au sujet des schémas de Newmark sont en annexe III.

### 5.2.1 Schémas de Newmark, cas général

Le problème consiste à déterminer  $u_{n+1}$ ,  $\dot{u}_{n+1}$  et  $\ddot{u}_{n+1}$  à partir de  $u_n$ ,  $\dot{u}_n$  et  $\ddot{u}_n$ . Pour trouver ces trois inconnues, on dispose de trois équations : l'équation de la dynamique et deux équations du schéma d'intégration.

• vitesse au pas  $n$  :

Dans le cas du schéma d'intégration de Newmark, les deux équations s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + dt_{n+1} \cdot \dot{u}_n + (1/2 - \beta) \cdot dt_{n+1}^2 \cdot \ddot{u}_n + \beta \cdot dt_{n+1}^2 \cdot \ddot{u}_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + (1 - \gamma) \cdot dt_{n+1} \cdot \ddot{u}_n + \gamma \cdot dt_{n+1} \cdot \ddot{u}_{n+1} \end{aligned} \right\}$$

• vitesse intermédiaire :

En posant  $\dot{u}_{n+1/2} = \frac{(u_{n+1} - u_n)}{dt}$  et  $dt_{n+1/2} = (dt_n + dt_{n+1})/2$ , on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + dt_{n+1/2} \cdot \dot{u}_{n+1/2} \\ \dot{u}_{n+1/2} &= \dot{u}_{n-1/2} + dt_{n+1} \cdot [(1/2 - \gamma + \beta) \cdot \ddot{u}_{n-1} + (1/2 + \gamma - 2\beta) \cdot \ddot{u}_n + \beta \cdot \ddot{u}_{n+1}] \end{aligned} \right\}$$

• Exemples de schémas

- $\gamma = 0, \beta = 0$  : L'intégration est alors purement explicite. On peut montrer que ce schéma est instable.
- $\gamma = 1/2, \beta = 0$  : Il s'agit dans ce cas d'un schéma conditionnellement stable, le schéma des différences centrées.
- $\gamma = 1/2, \beta = 1/2$  : Schéma de Fox et Gadwin.
- $\gamma = 1/2, \beta = 1/4$  : Schéma de l'accélération moyenne, le plus précis.
- $\gamma = 1/2, \beta = 1/6$  : Schéma de l'accélération linéaire.

### 5.2.2 Schéma des différences centrées

Il s'agit du schéma de Newmark, dans le cas particulier où  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$ .

- vitesse au pas  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + dt_{n+1} \cdot \dot{u}_n + \frac{dt_{n+1}^2}{2} \cdot \ddot{u}_n \\ \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{dt_{n+1}}{2} \cdot (\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}) \end{cases}$$

- vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + dt_{n+1} \cdot \dot{u}_{n+1/2} \\ \dot{u}_{n+1/2} = \dot{u}_{n-1/2} + dt_{n+1/2} \cdot \ddot{u}_n \end{cases}$$

- Condition de stabilité

La condition de stabilité impose ici que le pas de temps soit inférieur au pas de temps critique :  $\Delta t \leq \Delta t_c = \frac{2}{\omega}$ .

Une première démarche pour déterminer  $\Delta t_c$  consiste à chercher la plus grande pulsation admise par le système étudié. La pulsation maximale des pulsations élémentaires  $\omega_{elem}^{max}$  étant un majorant de la plus grande pulsation du système globale  $\omega_{glo}^{max}$ , il convient alors de déterminer  $max(\omega_{elem})$ . Cette première approche est rigoureuse, mais nécessite un temps de calcul qui n'est pas négligeable.

Une deuxième méthode repose sur le fait que  $\omega_{elem}^{max}$  correspond à l'inverse du plus petit des temps nécessaires au passage d'une onde à travers un élément. Connaissant la vitesse de propagation des ondes, il faut alors déterminer une longueur caractéristique pour chaque élément, correspondant en 2D, au plus petit rayon de l'ensemble des cercles inscrit des éléments.

Une méthode pour estimer cette longueur consiste à utiliser :

$l = \min(l_1, l_2)$  avec  $l_1 = S/\max(l_d)$  et  $l_2 = \min(l_c)$ , où  $S$  est la surface de l'élément,  $l_d$  (resp.  $l_c$ ) sont les longueurs des diagonales (resp. des côtés) de l'élément.

Même si cette deuxième méthode est moins rigoureuse, elle est bien plus rapide que la première. La plupart des codes de calcul déterminent  $\Delta t_c$  de cette manière, en appliquant un coefficient de sécurité de l'ordre de 0.8 à 0.9 en général.

- Intérêts, limites

Avec un schéma explicite,  ${}^{ext}\underline{F}_{n+1}$  et  ${}^{int}\underline{F}_{n+1}$  sont définis indépendamment de  $\ddot{\underline{U}}_{n+1}$ . Il est alors possible de résoudre l'équation d'équilibre :  $\mathbb{M} \cdot \ddot{\underline{U}}_{n+1} = {}^{ext}\underline{F}_{n+1} - {}^{int}\underline{F}_{n+1}$  en inversant la matrice de masse. Cette équation est donc particulièrement facile à résoudre, d'autant plus avec l'utilisation d'une matrice de masse diagonale. De plus, le fait que la résolution puisse se faire éléments par éléments à chaque itération, ce schéma est naturellement adapté à une résolution sur plusieurs processeurs.

Comme les calculs de l'accélération et de l'incrément de contrainte sont découplés, la résolution de l'équation d'équilibre est directe, elle ne nécessite pas une procédure itérative devant converger. Ce schéma est donc adapté aux problèmes non-linéaires (contact, loi de comportement non-linéaire).

En revanche, la condition de stabilité se révèle en pratique très pénalisante. Le pas de temps critique est en effet extrêmement faible, même devant les non-linéarités du problème. Le nombre d'itérations requises par un schéma explicite est ainsi bien plus important que le nombre d'itérations suffisantes pour la résolution du même problème à l'aide d'un schéma inconditionnellement stable. Et avec une approche "mono-échelle", le fait que le pas de temps critique dépende du plus petit des éléments rend un raffinement local du maillage très coûteux d'un point de vue temps de calcul.

Grâce aux performances de l'informatique et au développement d'éléments adaptés (intégration réduite notamment), il est tout à fait possible de mener aujourd'hui des simulations d'impact sur des structures de plusieurs mètres à l'aide d'un schéma explicite. Ce schéma est actuellement très répandu pour la simulation des problèmes d'impact, car il permet de traiter facilement de fortes non-linéarités (grandes déformations, non-linéarités matériau et contacts) jusqu'à rupture (possibilité "d'effacer" simplement des éléments rompus).

### 5.3 Principe de résolution

Le champ de déplacement du problème est donc trouvé à partir du champ des accélérations  $\underline{\ddot{U}}$  solution de :  $\mathbb{M}.\underline{\ddot{U}} + \underline{F}^{int} = \underline{F}^{ext}$ .

A chaque pas de temps, à partir des valeurs des champs de déplacement, vitesse et accélération connus à un pas de temps  $n$ , on cherche à déterminer les valeurs de ces champs au pas de temps  $n + 1$ .

#### Initialisation :

$\underline{U}_0$ ,  $\underline{\dot{U}}_0$  et  $\underline{\ddot{U}}_0$  sont connus, on pose  $\underline{\dot{U}}_{-1/2} = \underline{\dot{U}}_0$  et  $n = 0$ ,  $\Delta t_{1/2} = \frac{\Delta t_0}{2}$ .

#### • 0 Stabilité :

On détermine  $\Delta t_c$  selon l'une des deux méthodes présentée ci-dessus.

#### • 1 Vecteurs vitesse et déplacement

A partir des valeurs de  $\underline{U}_n$ ,  $\underline{\dot{U}}_n$  et  $\underline{\ddot{U}}_n$ , on cherche à déterminer  $\underline{U}_{n+1}$ ,  $\underline{\dot{U}}_{n+1}$  selon le schéma d'intégration en temps :

$$\underline{\dot{U}}_{n+1/2} = \underline{\dot{U}}_{n-1/2} + \Delta t_{n+1/2} \cdot \underline{\ddot{U}}_n.$$

$$\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_n + \Delta t_{n+1} \cdot \underline{\dot{U}}_{n+1/2}.$$

On estime alors le champ de déplacement à  $n+1/2$  :

$$\underline{U}_{n+1/2} = \frac{\underline{U}_{n+1} + \underline{U}_n}{2} = \underline{U}_n + 1/2 \cdot \Delta t_{n+1} \cdot \underline{\dot{U}}_{n+1/2}.$$

#### • 2 Vecteur contenant les composantes du gradient des vitesses :

En chaque point de Gauss de l'élément  $I$ , on calcule  $\underline{L}_{n+1/2}^I = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ \sqrt{2}.D_{12} \\ W_{12} \end{bmatrix} = \mathbb{A}_{bis(\underline{U}_{n+1/2}^I)}^I \cdot \mathbb{B}_{\xi}^I \cdot \dot{\underline{U}}_{n+1/2}^I$

• 3 Incrément de Déformation - Rotation

La déformation cumulée est l'intégrale dans le référentiel corotationnel du taux des déformations.

On a  $\tilde{\varepsilon}_{n+1} = \tilde{\varepsilon}_n + \Delta\tilde{\varepsilon}$  et  $\varepsilon_{n+1} = \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n+1} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t = \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_n \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t + \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \Delta\tilde{\varepsilon} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t$

On cherche donc à exprimer  $\Delta\mathbb{Q}$  (Incrément de la rotation du référentiel corotationnel par rapport au référentiel initial entre  $n$  et  $n+1$ ) et  $\Delta\tilde{\varepsilon}$  (incrément des déformations dans le référentiel corotationnel entre  $n$  et  $n+1$ ).

On choisit ici d'exprimer les variations de  $\mathbb{Q}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  entre  $n$  et  $n+1$  en fonction des valeurs de leurs dérivées temporelles  $\mathbb{W}$  et  $\tilde{\mathbb{D}}$  exprimées à  $n+1/2$  :

$$\begin{aligned} - \Delta\mathbb{Q} &= [\mathbb{I} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbb{W}_{n+1/2}]^{-1} \cdot [\mathbb{I} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbb{W}_{n+1/2}] \text{ et } \Delta\mathbb{Q} = \Delta\mathbb{Q}_{1/2} \cdot \Delta\mathbb{Q}_{1/2}. \\ - \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2} &= \Delta t \cdot \tilde{\mathbb{D}}_{n+1/2} \text{ avec } \tilde{\mathbb{D}}_{n+1/2} = \mathbb{Q}_{n+1/2}^t \cdot \mathbb{D}_{n+1/2} \cdot \mathbb{Q}_{n+1/2} \text{ et } \mathbb{Q}_{n+1/2} = \Delta\mathbb{Q}_{1/2} \cdot \mathbb{Q}_n. \end{aligned}$$

On note ici respectivement  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\theta_{1/2} = \Delta\theta/2$ ,  $\theta$  et  $\theta_t = \theta + \Delta\theta_{1/2}$ , les angles relatifs aux matrices de rotation  $\Delta\mathbb{Q}$ ,  $\Delta\mathbb{Q}_{1/2}$ ,  $\mathbb{Q}_n$  et  $\mathbb{Q}_{n+1/2}$ .

A partir de l'expression de  $\mathbb{W}_{n+1/2} = \begin{bmatrix} 0 & w & 0 \\ -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , on connaît l'expression de  $\Delta\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & -\text{Sin } \theta & 0 \\ \text{Sin } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  avec  $\text{Cos } \theta = \frac{4}{4+dt^2 \cdot w^2} - \frac{16 \cdot dt^2 \cdot w^2}{4+dt^2 \cdot w^2}$  et  $\text{Sin } \theta = -\frac{4 \cdot dt \cdot w}{4+dt^2 \cdot w^2}$ .  $\theta$  représente la rotation du référentiel corotationnel par rapport au référentiel initial.

On peut alors exprimer  $\tilde{\mathbb{D}}_{n+1/2}$  en fonction de  $\mathbb{D}_{n+1/2}$  et  $\theta/2$  :

$$\tilde{\mathbb{D}}_{n+1/2} = \begin{bmatrix} D_{11} \cdot \cos^2\theta + D_{22} \cdot \sin^2\theta + 2 \cdot D_{12} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta & (D_{22} - D_{11}) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + D_{12} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) & 0 \\ (D_{22} - D_{11}) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + D_{12} \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) & D_{11} \cdot \sin^2\theta + D_{22} \cdot \cos^2\theta - 2 \cdot D_{12} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• 4 Incrément de Contrainte - Déformations élastiques et plastiques

A chaque pas de temps, on connaît le taux de déformation totale dans le référentiel corotationnel :  $\Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2}$ .

◦ *Prédiction élastique*

On considère tout d'abord que le chargement est élastique, on a alors :

$\tilde{\varepsilon}_{n+1} = \tilde{\varepsilon}_n + \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{en+1} = \tilde{\varepsilon}_{en} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{pn+1} = \tilde{\varepsilon}_{pn}$  et  $p_n = p_{n+1}$ ,  $d_n = d_{n+1}$ . La relation de comportement s'écrit :  $\tilde{\tau}_{n+1}^{el} = (1 - d_n) \cdot \mathbf{K}_e \cdot \tilde{\varepsilon}_{en+1}$

On vérifie si  $\frac{\tau^{VM}}{1-d} \leq R_{(p)}$  où dans le cas d'un écrouissage isotrope pour un matériau répondant au critère de Von misès, on a :  $\tau^d = \tau - \frac{1}{3} \cdot \text{Tr}(\tau) \cdot \mathbb{I}$  et  $\tau^{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \text{Tr}(\tau^d \cdot \tau^d)} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \|\tau^d\|}$  et  $R_{(p)}$  définit la fonction l'écrouissage.

◦ *Chargement plastique*

Si  $\frac{\tau^{VM}}{1-d} \geq R(p)$ , le chargement est plastique et il faut déterminer  $(\Delta\tilde{\varepsilon}_{en+1/2}, \Delta\tilde{\varepsilon}_{pn+1/2}, \dot{p}_{n+1/2})$ , vérifiant :

$$\begin{aligned} - \Delta t \cdot \dot{p}_{n+1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot Tr(\Delta\tilde{\varepsilon}_{pn+1/2} \cdot \Delta\tilde{\varepsilon}_{pn+1/2})} \\ - \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2} &= \Delta\tilde{\varepsilon}_{en+1/2} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{pn+1/2} \\ - f_{(n+1)} &= 0 \text{ soit } \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot ||[E \cdot \varepsilon_{e(n+1)}]^d|| = R(p_{n+1}) \text{ où } p_{n+1} = p_n + \dot{p}_{n+1/2} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Plus de détails au sujet de la résolution de ces équations sont disponibles en annexe III, en 1D et 2D contraintes planes et en fonction de différentes fonctions d'érouissage  $R(p)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} - \tilde{\varepsilon}_{n+1} &= \tilde{\varepsilon}_n + \Delta\tilde{\varepsilon}_{n+1/2} \\ - \tilde{\varepsilon}_{en+1} &= \tilde{\varepsilon}_{en} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{en+1/2} \\ - \tilde{\varepsilon}_{pn+1} &= \tilde{\varepsilon}_{pn} + \Delta\tilde{\varepsilon}_{pn+1/2} \\ - \tilde{\tau}_{n+1} &= \tilde{\tau}_n + \Delta\tilde{\tau}_{n+1/2} \\ - p_{n+1} &= p_n + \dot{p}_{n+1/2} \cdot \Delta t \text{ et } d_{n+1} = \left\langle \frac{R\nu \cdot (p_{n+1} - p_0)}{p_c - p_0} \right\rangle_+ \\ &\text{avec } R_\nu = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3 \cdot (1 - 2\nu) \left( \frac{\tau^h}{\tau^{VM}} \right)^2 \end{aligned}$$

#### • 5 Contrainte - Déformations dans les repères corotationnel et initial

A partir des expressions des contraintes et déformations dans le repère corotationnel, et du taux de rotation  $\Delta Q_{1/2}$ , on exprime alors contraintes et déformations dans le repère initial.

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{n+1} &= \Delta Q_{1/2} \cdot \Delta Q_{1/2} \cdot \mathbb{Q}_n \\ \varepsilon_{n+1} &= \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{n+1} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t \\ \varepsilon_{en+1} &= \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{en+1} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t \\ \varepsilon_{pn+1} &= \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{pn+1} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t \\ \tau_{n+1} &= \mathbb{Q}_{n+1} \cdot \tilde{\tau}_{n+1} \cdot \mathbb{Q}_{n+1}^t \end{aligned}$$

#### • 6 Vecteur des forces intérieures au pas $n + 1$

Le calcul des vecteurs des efforts intérieurs élémentaires et l'assemblage s'obtiennent selon :  $\underline{int}f_{n+1}^I = \sum_i ([A_{\sqrt{2}}^I \cdot \mathbb{B}_\xi^I]^t \cdot \underline{\sigma}^I)_{(i)} \cdot J_{rc(i)} \cdot ep(i) \cdot \omega_i$  et  $\underline{int}F_{n+1} = \sum_I \underline{int}f_{n+1}^I$ .

#### • 7 Vecteur des forces extérieures au pas $n + 1$

$$\underline{ext}f^I = \int_{\Omega_I} \sum_i \Phi_i \cdot \rho \cdot \underline{b} \cdot d\Omega_I + \int_{\Gamma_{\Omega_I}} \sum_i \Phi_i \cdot \underline{t} \cdot d\Gamma_I \text{ avec } \underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ où } \underline{n} \text{ est la normale à } \Gamma_I.$$

et  $\underline{ext}F_{n+1} = \sum_I \underline{ext}f^I$

#### • 8 Vecteur des accélérations nodales $\underline{\ddot{U}}_{n+1}$

Enfin, la résolution de l'équilibre à  $n + 1$  permet de déterminer  $\underline{\ddot{U}}_{n+1}$  :

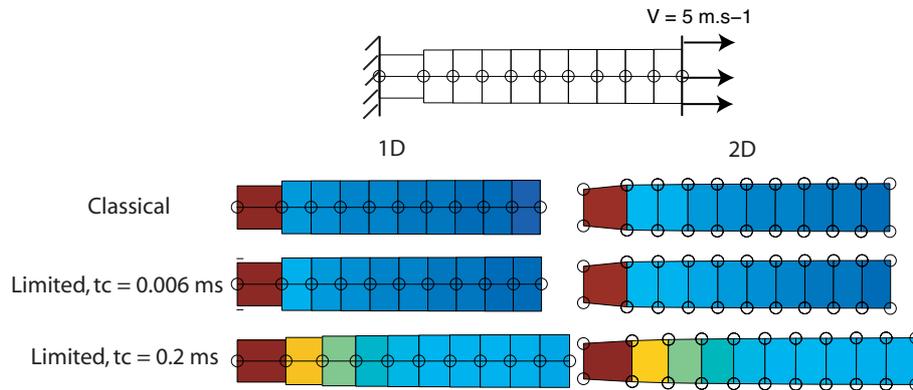
$$\underline{\ddot{U}}_{n+1} = \mathbb{M}^{-1} \cdot (\underline{ext}F_{n+1} - \underline{int}F_{n+1})$$

## 5.4 Résultats numériques

Une première étape dans la validation du modèle d'épuisement plastique à taux limités consiste à mener des simulations en 2D à l'aide d'un code explicite développé sous Matlab, selon la structure décrite précédemment. L'avantage d'un développement sous Matlab réside dans la maîtrise complète du code. Ceci permet de contrôler les différentes sources d'instabilité de la modélisation, à savoir l'intégration des éléments (absence de modes parasites avec des éléments Q4), la condition de stabilité en temps, la variation de géométrie (déformation et rotation), et le comportement du matériau (définition des quantités d'intérêts et de la loi de comportement). En revanche, les temps de calculs sont bien plus long avec un tel code qu'avec une version "commerciale". Pour cette raison, nous ne présenterons qu'un simple exemple qui a permis de confirmer qu'il est possible de mener des simulations avec un modèle d'épuisement plastique à taux limités jusqu'à rupture sans dépendance à la finesse de maillage.

Afin de déterminer un cas représentatif en limitant le temps de calcul, une première étude en 1D a permis de "dimensionner" un cas test.

La figure 5.11 représente trois exemples d'un barreau sollicité en traction, modélisé



**Fig. 5.11:** "Dimensionnement" d'un cas test - résultats 1D et 1D<sup>+</sup>.

en 1D sur la gauche et en 2D sur la droite. La configuration à rupture du premier, correspondant à un modèle classique, est caractéristique d'un résultat où la localisation dépend du maillage puisqu'elle ne prend place que dans une seule bande d'éléments. Dans le deuxième cas, le barreau est modélisé par un comportement à épuisement plastique à taux limités, mais avec un maillage qui se révèle excessivement grossier pour pouvoir capter la physique de la localisation compte tenu des paramètres matériau ( $t_c = 0.006 \text{ ms}$ ). Dans le troisième cas, le temps caractéristique ( $t_c = 0.2 \text{ ms}$ ) est justement déterminé pour que la finesse de maillage utilisée soit adaptée à la description de la rupture.

On peut alors vérifier que les résultats en 2D (sur la droite) avec une bande d'éléments

sont similaires aux résultats obtenus avec une modélisation 1D (sur la gauche).

• Résultats

La figure 5.12 présente les résultats obtenus en 2D avec la finesse de maillage ("coarse") et les caractéristiques matérielles précédemment déterminées. Il s'agit d'une plaque sollicitée en traction (un quart est considéré en raison de la symétrie du problème). Les résultats sont obtenus pour deux finesesses de maillage (Coarse et Fine) et deux modélisations du comportement (modélisation classique, modélisation d'épuisement plastique à taux limités).

On peut alors constater qu'avec un modèle d'épuisement plastique à taux limités, la largeur de la zone de localisation ne se réduit pas à un élément, même si le maillage est raffiné.

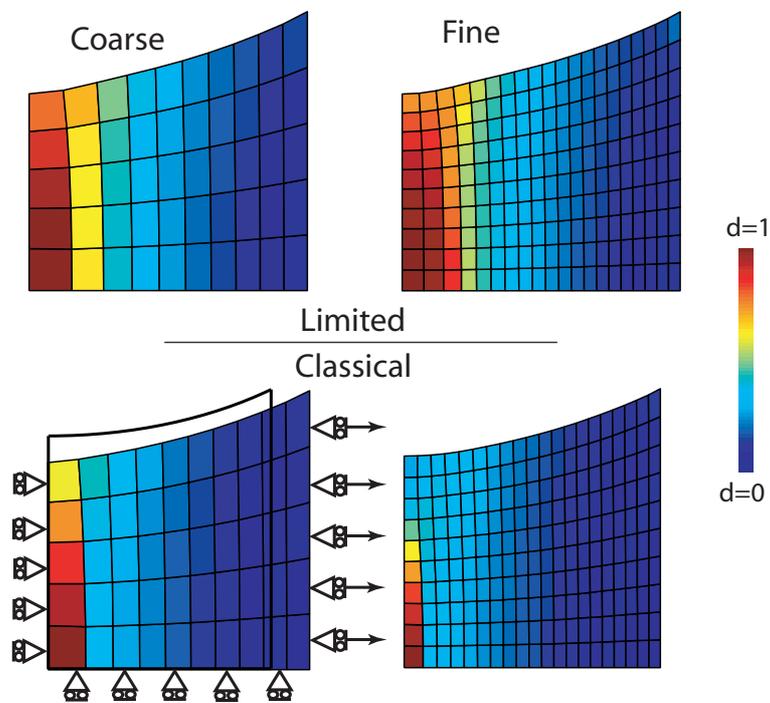


Fig. 5.12: Résultats 2D avec Matlab.

**■ Bilan du chapitre 5**

Le modèle d'épuisement plastique à taux limités permet d'enrichir la modélisation du comportement des matériaux ductiles grâce à une description appropriée de la rupture. Afin de prendre en compte la physique, et la dynamique, de la localisation des déformations et ainsi assurer l'objectivité du modèle, une loi d'évolution de  $\dot{p}$  qui ne dépend que de l'état et qui assure que  $\dot{p}$  soit borné est proposée. On peut alors vérifier à partir de l'écriture de l'équation des ondes que le modèle reste effectivement cohérent jusqu'à rupture, c'est-à-dire que les instabilités dues à la plasticité et à l'endommagement, qui est ici piloté par la plasticité, sont effectivement contrôlées.

Une analyse détaillée de l'équation des ondes permet d'estimer la taille de la zone de localisation en fonction des paramètres du modèle pour un chargement quasi statique. Une étude numérique permet de confirmer l'ordre de grandeur et l'influence des paramètres du modèle sur la longueur déterminée analytiquement.

Afin d'évaluer les capacités du modèle d'épuisement plastique à taux limités, une formulation Eléments Finis, en grandes déformations, en 2D - contraintes planes, couplée à une résolution en dynamique avec le schéma incrémental des différences centrées est ici décrite. Les étapes nécessaires à chaque pas de temps pour résoudre l'intégration en temps, vérifier le comportement, et résoudre l'équation d'équilibre sont précisées. Des exemples numériques obtenus avec un code développé sous Matlab sont proposés. Ils permettent de vérifier, sur une structure relativement simple, que des simulations jusqu'à rupture, avec une modélisation d'épuisement plastique à taux limités, sont bien indépendantes de la taille du maillage.

## Chapitre 6

# Comparaison essais/calculs : Vers l'identification du modèle

*Après avoir précisé comment le modèle d'épuisement plastique à taux limités a été implémenté dans ABAQUS, la deuxième section de ce chapitre décrit une campagne d'essais dédiée à l'identification du modèle. La troisième section confronte des simulations numériques à ces résultats expérimentaux afin d'identifier un jeu de paramètres du modèle, et la dernière section confirme qu'il est possible de mener des simulations prédictives avec ce jeu de données.*

### 1 Implémentation du modèle dans ABAQUS

Afin de pouvoir mener des simulations plus importantes qu'avec le code 2D développé sous Matlab (augmentation du nombre de *ddl*, et raffinement du maillage), le modèle d'épuisement plastique à taux limités a également été implémenté dans un code plus performant. Compte tenu du caractère local du modèle, il est tout à fait possible d'utiliser une "loi utilisateur" comme le proposent la plupart des codes.

Le modèle d'épuisement plastique à taux limité a été implémenté dans le code ABAQUS/Explicit au moyen d'une loi utilisateur V-Umat. La modélisation "classique" correspondant (c'est-à-dire celle du chapitre 3), a également été implémentée afin de mettre en évidence les avantages d'une modélisation à taux limités. Le fichier de la V-Umat de la modélisation à taux limité est donné à titre d'exemple en annexe III.

Les capacités du code permettent alors de mener des simulations fidèles aux essais présentés dans la section suivante, sans pour autant nécessiter des temps de résolution excessifs.

## 2 Investigations expérimentales

Dans le but de confronter des résultats de simulations obtenues avec le modèle d'épuisement plastique à taux limités à des résultats expérimentaux, des essais de traction jusqu'à rupture sur des éprouvettes métalliques ont été réalisés. Cette campagne d'essais, définie en s'appuyant sur une campagne précédente [127], a été menée au centre de l'ONERA de Lille.

### 2.1 Description des essais monotones jusqu'à rupture

Deux géométries d'éprouvettes ont été utilisées, sollicitées chacune à deux vitesses de sollicitation, constantes jusqu'à rupture :  $5 \text{ mm.mn}^{-1}$  et  $0.75 \text{ m.s}^{-1}$ .

- Géométrie et préparation des éprouvettes

Il s'agit d'éprouvettes non-conventionnelles, en Aluminium 2024-T3, de  $1 \text{ mm}$  d'épaisseur et de  $26 \text{ mm}$  de large, avec une longueur utile de  $26 \text{ mm}$ . Les deux géométries ont les mêmes dimensions "extérieures", les éprouvettes trouées se différenciant des éprouvettes lisses par la présence d'un trou de  $4 \text{ mm}$  de diamètre (cf. figures 6.1).

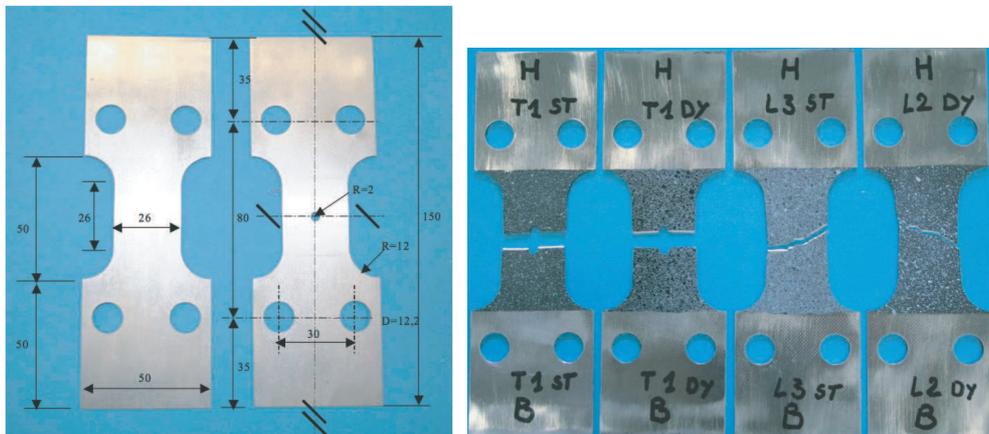


Fig. 6.1: Géométrie initiale et après essai des éprouvettes.

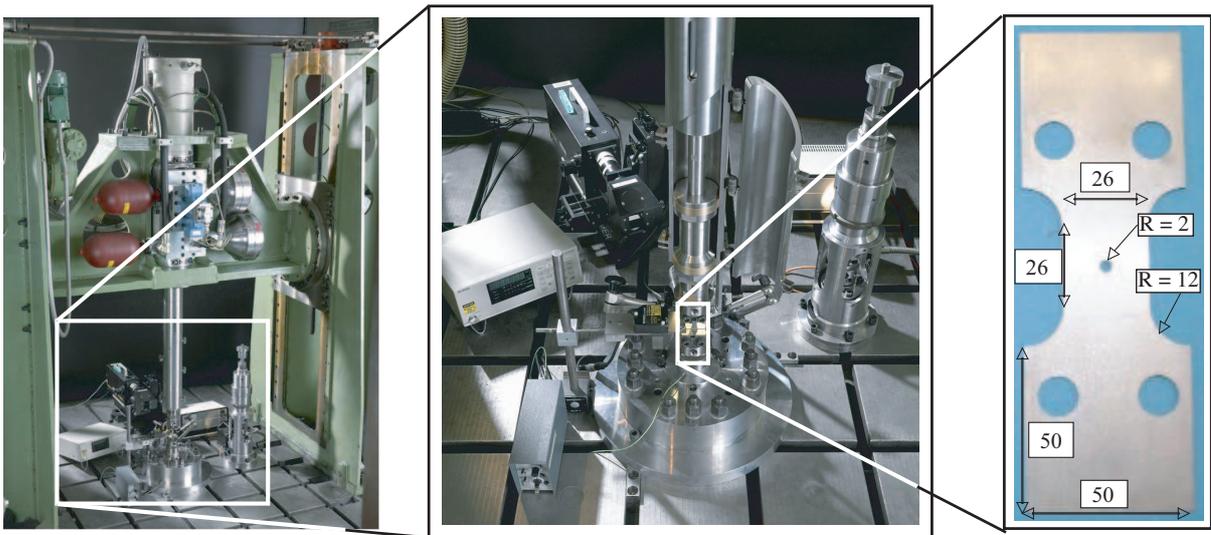
- Post-traitement, corrélation d'image

Les éprouvettes ont été préparées pour de la corrélation d'image. Un mouchetis de peinture a été appliqué sur la partie utile de l'éprouvette.

Les analyses ont été effectuées à l'aide de CORRELI Q4, logiciel de traitement d'images développé au LMT [128, 14].

- Actionneur

L'actionneur est un vérin hydraulique à double effet, de marque SCHENCK (cf. figure 6.2 - photo de gauche). Il est alimenté sous une pression de 350 bars, avec un débit de 150 l/h, et est asservi en déplacement grâce à une servovalve à trois étages. Ses capacités en charge sont :  $\pm 50 \text{ kN}$  en dynamique et  $\pm 69 \text{ kN}$  en statique. Sa vitesse maximale est de  $10 \text{ m.s}^{-1}$  et la course utile de la tige du vérin est de  $250 \text{ mm}$ .



**Fig. 6.2:** Montage d'essai dynamique - éprouvette trouée.

- Composition de la chaîne de mesure

- *Cellule de force piézoélectrique*

Le capteur d'effort est placé au sein d'un montage de caractérisation, développé pour répondre aux besoins spécifiques de la caractérisation dynamique des matériaux (cf. figure 6.2 - photo centrale) [129]. Il se situe entre la taque d'essai et le système d'accrochage inférieur. Il s'agit d'une cellule piézoélectrique mono-composante de marque KISTLER, pré-chargée à  $220 \text{ kN}$  pour pouvoir garder une rigidité supérieure à  $20 \text{ kN}.\mu\text{m}^{-1}$ , qu'elle soit sollicitée en traction ou en compression.

La fréquence de résonance, directement dépendante de cette raideur est élevée à vide (supérieure à  $40 \text{ kHz}$ ) mais elle chute fortement après adjonction des mors de serrage pour atteindre une valeur proche de  $8 \text{ kHz}$ . Cette valeur (proportionnelle à la racine carrée du rapport de la raideur sur la masse) est élevée dans ce montage grâce à l'utilisation de titane, et cautionne ainsi de bons résultats jusqu'à des vitesses de déformation de  $200 \text{ s}^{-1}$ .

La cellule, intégrée au montage, a été étalonnée avant la campagne d'essais sur une machine de traction-compression INSTRON.

◦ Capteur de déplacement optique

Destiné à mesurer le déplacement du mors supérieur, afin de vérifier le respect de la consigne de vitesse imposée constante, le capteur de déplacement Keyence est fondé sur le principe de triangulation optique. Il offre l'avantage d'une mise en oeuvre simple et un encombrement réduit pour des performances élevées :

- un diamètre de spot de  $0.05\text{ mm}$  dans le visible,
- un gain automatique en fonction de la réflexion de la cible,
- une étendue de mesure de  $\pm 8\text{ mm}$  avec une résolution de  $0.5\ \mu\text{m}$ ,
- une réponse en fréquence de  $20\text{ kHz}$  avec un échantillonnage à  $50\text{ kHz}$  pour une linéarité de  $\pm 0.05\%$  de la pleine échelle.

• Caméra rapide WEINBERGER - éclairage

Une caméra vidéo rapide haute résolution (VISARIO) a été utilisée pour saisir le comportement de l'éprouvette lors de son chargement, et en particulier saisir quelques images durant la fissuration des éprouvettes. La résolution est de  $1536 * 1024$  pixels à la cadence de référence de 1 000 images par seconde.

Pour cette application, et consécutivement aux essais préliminaires, la résolution a été réduite à  $768 * 512$  (resp.  $512 * 196$  pixels) pour accroître la cadence, afin d'atteindre 4 000 (resp. 10 000) images par seconde (valeur limite de ce matériel).

Pour les essais dynamiques les plus pénalisants, avec un champ de l'ordre de  $20\text{ mm}$ , le flou représente  $1/4$  pixels à l'échelle du détecteur CMOS. Cette valeur est compatible avec la taille du mouchetis appliqué sur la surface des éprouvettes.

Deux projecteurs HMI de forte puissance ( $2 * 1500\text{ W}$ ) ont permis de réduire le temps de pose au maximum pour limiter les flous sans avoir l'inconvénient de chauffer la structure (lumière froide). Pour l'ensemble des essais, le temps d'exposition se situe autour de 10 micro secondes, soit un déplacement maximum de l'éprouvette de l'ordre de  $7.5\ \mu\text{m}$  pendant la prise de vue.

• Centrale d'acquisition rapide - déclenchement de la caméra

Pour l'acquisition synchrone des données, un analyseur transitoire multi-voies a été utilisé (NICOLET Multipro). Il est équipé de 4 cartes MP120E d'une capacité maximale de 1 Méga échantillons par seconde chacune, avec une résolution sur 12 bits ; chaque carte étant sécable en 1, 2 ou 4 voies de mesure. C'est la carte d'acquisition qui pilote le déclenchement de la caméra sur le front montant ou descendant du signal d'effort selon que l'on s'intéresse à l'ensemble du phénomène ou simplement à la rupture.

• Vision dynamique des essais

La partie utile de l'éprouvette mesure environ 30 mm. La vitesse de déformation globale est donc d'environ  $25 s^{-1}$  et  $2.8 \cdot 10^{-3} s^{-1}$  pour les vitesses de sollicitations de  $0.75 m.s^{-1}$  et  $5 mm.mn^{-1}$ .

La distance entre les deux mords est de 55 mm, soit une temps de propagation de 22  $\mu s$  pour un aller-retour d'onde élastique (à la vitesse de  $5\,000 m.s^{-1}$ ).

La distance entre le centre de l'éprouvette et le capteur d'effort est d'environ 130 mm, ce qui correspond à un temps de propagation minimum de 26  $\mu s$  (en fait la vitesse de propagation est dans ce cas inférieure à  $5\,000 m.s^{-1}$  en raison du comportement plastique de l'éprouvette durant la charge et des pièces en contact entre l'éprouvette et le capteur).

A la cadence de 10 000 images par secondes, 100  $\mu s$  séparent deux images, avec un temps d'exposition de 10  $\mu s$ .

L'intervalle de temps minimum entre deux mesures d'effort est de 1  $\mu s$ .

## 2.2 Description des essais de charge/décharge

Des essais cycliques sur éprouvettes lisses ont été menés afin d'estimer la première partie de la loi d'évolution de l'endommagement (avant localisation).

Les essais ont été réalisés avec une machine de traction-compression INSTRON et les déformations ont été mesurées au moyen d'un équipement extensométrique conventionnel, à l'aide de jauges de déformation (TML de type YFLA 2) à grand allongement ( $\sim 15\%$ ).

Un premier essai monotone a permis de déterminer le comportement de l'éprouvette et ainsi spécifier les valeurs de chargement à imposer pour réaliser une succession de charges et de décharges jusqu'à rupture. Ensuite deux essais jusqu'à rupture, avec une décharge tout les 3% de déformation environ, ont pu avoir lieu.

## 3 Vers l'identification du modèle

Pour qu'un modèle puisse être mis en oeuvre et exploité, en particulier dans un contexte industriel, il est indispensable que les procédures d'identification qui lui sont associées soient claires. Il faut ainsi pouvoir déterminer les différents paramètres du modèle le plus précisément, mais également le plus simplement possible, en raison du nombre de nuances de matériaux particulièrement important. Pour une structure caractéristique, comme le cockpit de l'A380 par exemple, le nombre de nuances d'aluminium est de l'ordre de plusieurs dizaines. Les propriétés matériau dépendent en effet de la série de l'alliage (les séries les plus couramment utilisées sont les séries dites "2 000", "6 000" ou "7 000"), du traitement thermique et/ou surfacique, du procédé de fabrication (pièce usinée ou tôle laminée en général) et de l'épaisseur de la tôle mère.

Le comportement des matériaux métalliques est modélisé dans cette étude par :

- Relation contrainte-déformation élastique :

$$\tilde{\tau} = \mathbf{K}_e \cdot (1 - d) \cdot \tilde{\varepsilon}_e \text{ avec } \tilde{\varepsilon}_e(T) = \int_0^T \tilde{\mathbb{D}}_e(t) \cdot dt$$

- Décomposition additive du taux des déformations :

$$\tilde{\mathbb{D}} = \tilde{\mathbb{D}}_e + \tilde{\mathbb{D}}_p \text{ et } \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot Tr(\mathbb{D}_p \cdot \mathbb{D}_p)}$$

- Loi d'écroissage :

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} Tr\left[\left(\frac{\tilde{\tau}^d}{1-d}\right)^2\right]} - \left[R(p)_{stat} + \frac{\tau_0}{a} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-t_c \cdot \dot{p}}\right)\right] \text{ avec } R(p)_{stat} = \tau_0 + b \cdot p^n$$

- Loi d'évolution de l'endommagement :

$$d = \left\langle \frac{R_\nu \cdot (p - p_0)}{p_c - p_0} \right\rangle_+^\alpha$$

La première étape de la procédure d'identification concerne les paramètres relatifs au comportement du matériau jusqu'à localisation.

On détermine dans un premier temps le module d'Young et le coefficient de Poisson ( $E$ ,  $\nu$ ), puis la première partie de la loi d'évolution de l'endommagement, c'est-à-dire ( $p_0$ ) et un couple ( $\alpha$ ,  $p_c$ ) qui sera redéfini plus précisément par la suite. On estime ensuite les paramètres de la fonction d'écroissage ( $\tau_0$ ,  $b$ ,  $n$ ).

Dans un second temps, on détermine les paramètres directement liés à la modélisation de la rupture, à savoir ( $\alpha$ ,  $p_c$ ,  $a$ , et  $t_c$ ).

### 3.1 Comportement avant localisation

On considère ici que le chargement est quasi-statique et homogène. L'objectif est de déterminer les paramètres correspondant à la modélisation "classique" du comportement (cf. chapitre 3).

- Comportement élastoplastique

Le module d'Young, le coefficient de Poisson  $\nu$  et la loi d'écroissage  $R(p)$  sont déterminés à partir de la loi  $\tau(\varepsilon)$  caractéristique du matériau, obtenue à partir de la loi expérimentale  $F(U)$  et en supposant que :

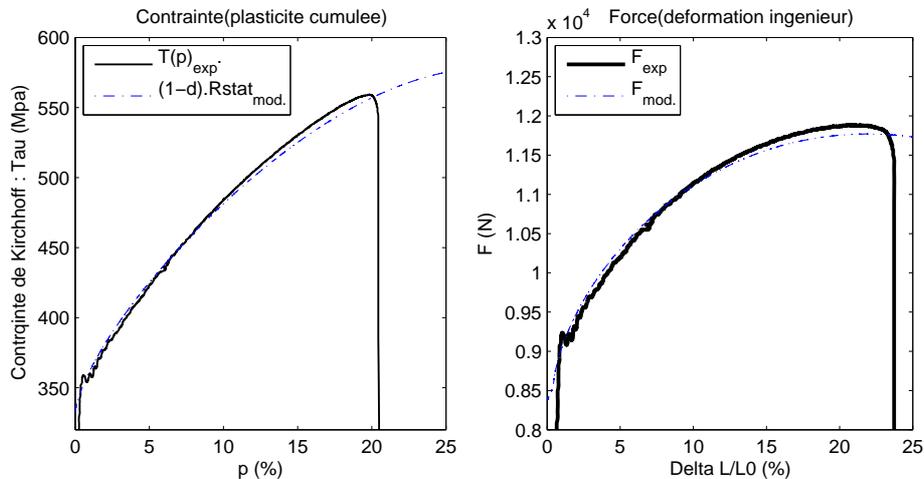
- $U$  correspond au déplacement relatif de deux points initialement distants de  $L_0$ , entre lesquels le champ des déformations peut être considéré homogène
- le chargement peut être modélisé en 1D

Connaissant  $F(U)$ ,  $L_0$  et  $S_0$ , on a alors :

$$\tau = \left(1 + \frac{U}{L_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{F}{S_0}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon = Ln\left(1 + \frac{U}{L_0}\right)$$

On suppose que l'on connaît les coefficients de la loi  $d(p)$ . Les coefficients  $b$  et  $n$  qui permettent de définir la courbe  $R(p)$  qui s'approche "au mieux" de  $\frac{\tau}{1-d}$  sont alors recherchés. Comme  $p$  dépend du modèle, et donc de l'identification, et que  $d$  dépend de  $p$ , une résolution itérative est nécessaire. Il est possible de supposer initialement que  $p = \varepsilon$ , car les déformations élastiques sont en général très faibles. La procédure converge en général très rapidement.

Une simple comparaison "graphique" entre les courbes  $(1-d).R_{stat}$  (modèle) et  $\tau(p)$  (expérimental) a été jugée suffisante ici (cf. courbes 6.3). Les écarts obtenus étant particulièrement faibles, le critère de comparaison n'a pas été davantage étudié ici.



**Fig. 6.3:** Identification du comportement élastoplastique.

#### • Endommagement

Il s'agit ici de définir la première partie de la loi  $d(p)$ , qui permettra de déterminer  $(p_0, p_c$  et  $\alpha)$ .

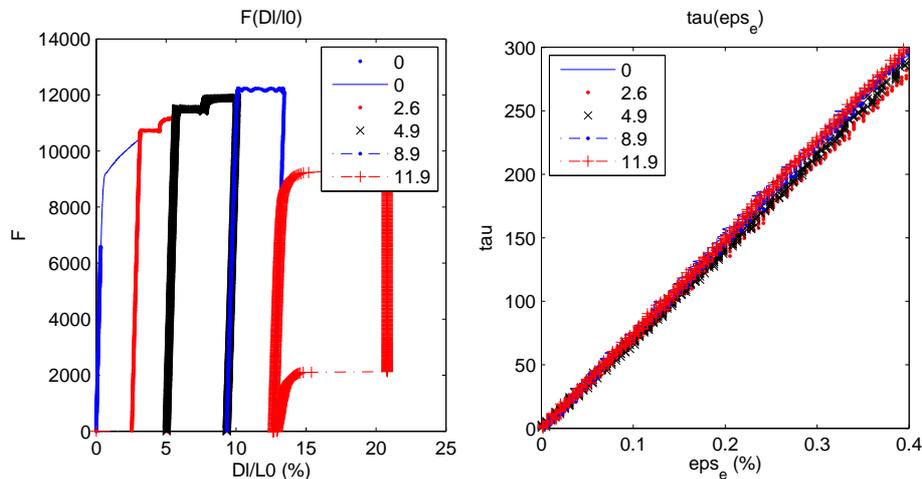
A partir des essais cycliques de charge-décharge, l'évolution du module d'Young au cours de l'évolution de la plasticité est estimée.

Les résultats de ces essais sont résumés sur les courbes de la figure 6.4. La première

charge correspond à environ 75 % de la limite élastique ; Le module d'Young initial est alors estimé à 76 GPa. Puis, les phases suivantes de charges-décharges, imposées à des valeurs de déformation totale de 3, 6, 9 et 12 % environ, permettent de déterminer des valeurs de module d'Young de 70, 73, 75 et 75 GPa.

En fait, pour déterminer ces valeurs de module d'Young, il est nécessaire de déterminer les coefficients de la fonction d'écroutissage. En effet, il faut pouvoir tracer la courbe caractéristique  $\tau(\varepsilon_e)$  (cf. courbes de droite, figure 6.4). On peut alors caractériser l'état de l'éprouvette lors d'une charge-décharge par sa valeur de plasticité cumulée : 2.6, 4.9, 8.9 et 11.9 %.

Pour ce matériau, les conclusions sont que les valeurs de l'endommagement sont particulièrement faibles avant localisation (valeurs de l'ordre de quelques %) et qu'il n'est pas possible de les déterminer précisément avec ces moyens de mesure.



**Fig. 6.4:** Essais cycliques, estimation de l'endommagement.

◦ *Remarque :*

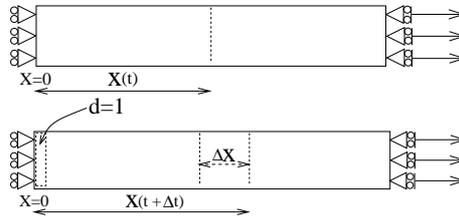
L'endommagement est essentiellement utilisé ici pour permettre de mener des simulations jusqu'à rupture en restant dans le cadre de la mécanique des milieux continus : l'endommagement permet d'atteindre un état de contrainte nulle quand la matière est rompue.

Le fait de ne pas pouvoir déterminer exactement le début de la loi d'évolution de l'endommagement n'est pas un problème, dans la mesure où l'influence sur le comportement d'un endommagement de l'ordre de quelques pourcents est négligeable. Il est essentiel que la définition de  $(1 - d_{(p)}) \cdot R(p)$  soit le plus fidèle possible à la contrainte  $\tau(\varepsilon)$  issue d'un essai de traction, en revanche, il n'est pas forcément primordial de déterminer l'évolution de  $d_{(p)}$  aussi précisément.

A partir de l'amorce de la localisation, et jusqu'à rupture, la valeur de l'endommagement va évoluer très rapidement et très localement jusqu'à 1. Or, avec une formulation "classique", la modélisation n'est alors plus cohérente et par conséquent les résultats dépendent du maillage, et avec un modèle "enrichi", de type loi à taux limité, la rupture (temps et taille caractéristique) sera essentiellement gouvernée par les paramètres du modèle enrichi, à savoir  $a$  et  $t_c$ .

## 3.2 Phase de rupture

### 3.2.1 Nécessité d'une identification "indirecte"



**Fig. 6.5:** Mesures de " $\dot{\varepsilon}$ ".

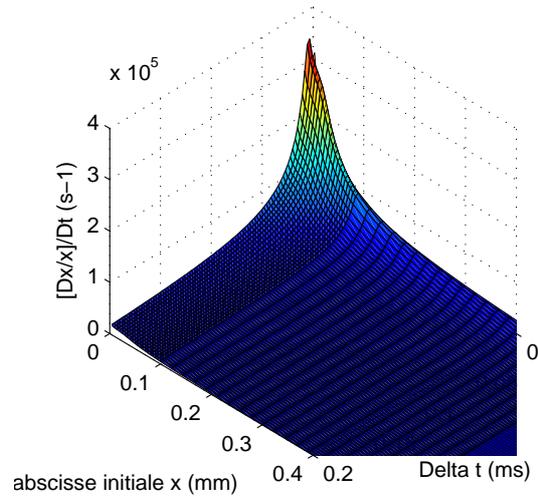
A partir du problème modèle 1D, on cherche à savoir, en supposant que le modèle à taux limité décrit convenablement la réalité, s'il est possible de déterminer "directement" les paramètres du modèle. On cherche donc à savoir quelle seraient les résolutions spatiales et temporelles nécessaires pour mesurer une déformation correspondant à  $p_c$ , dans la zone de localisation entre deux instants distinct de  $t_c$ . Une mesure passe par la détermination de différentes distances, ou positions, à différents instants. Un taux de déformation correspond donc à une expression du type  $\dot{\varepsilon} = \frac{[x+\Delta x(\Delta t)]/x}{\Delta t}$  (cf. figure 6.5) et la valeur de  $\dot{\varepsilon}$  est directement liée à celles de  $x$  et de  $\Delta t$ .

On s'intéresse aux valeurs maximales de  $\dot{\varepsilon}$ , on se place donc dans la situation où  $t + \Delta t$  correspond à la rupture du barreau ( $d = 1$  en  $x = 0$ ).

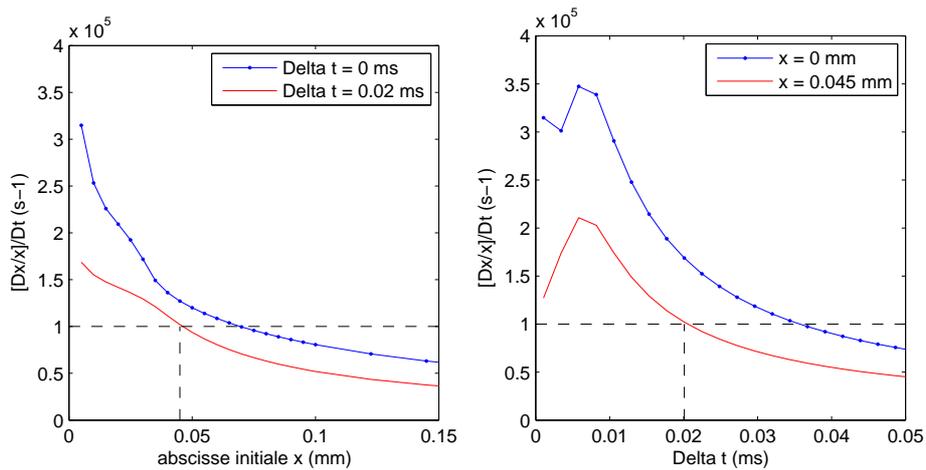
Les valeurs des coefficients matériau sont dans cet exemple :

- Comportement élastique :  $E = 58\,000$  Mpa ;  $\nu = 0.3$  et  $\rho_0 = 2.28 \cdot 10^{-3}$  g.mm $^{-3}$ .
- Comportement plastique :  $\tau_0 = 332$  Mpa,  $b = 900$  Mpa, et  $n = 0.6$ .
- Comportement endommageable :  $d_c = 0.99$ ,  $p_0 = 0$  %,  $p_c = 150$  % et  $\alpha = 1$ .
- Limitation du taux de plasticité :  $a = 2.25$  ;  $t_c = 6.10^{-3}$  ms.

On a donc  $\dot{p}_{max} = 1.7 \cdot 10^5$  s $^{-1}$



**Fig. 6.6:** Influence de "x" et de " $\Delta t$ " sur une mesure de " $\dot{\epsilon}$ "



**Fig. 6.7:** Résolutions spatiales et temporelles nécessaires à la mesure d'un " $\dot{\epsilon}$ ".

On peut alors observer sur la figure 6.6 que les valeurs maximales de  $\dot{\epsilon}$  peuvent atteindre  $\dot{\epsilon}_{max} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ , soit le double de  $\dot{p}_{max}$ . On peut également constater qu'une résolution spatiale de  $0.045 \text{ mm}$  couplée à une résolution temporelle de  $0.02 \text{ ms}$  sont nécessaires à la mesure d'un taux de déformation de l'ordre de  $10^5 \text{ s}^{-1}$  (cf. figure 6.7).

Cet exemple très simple n'a pas pour objectif d'élaborer un protocole expérimental pour mesurer directement un taux de déformation maximum, mais souligne juste combien une telle mesure peut être délicate avec des moyens "classiques" (Jauge, caméra rapide). Pour cette raison, il est préférable de recourir à une mesure "indi-

recte", en réalisant non plus un essai "matériau", mais un essai "structural".

Il est possible de déterminer les constantes d'un modèle à taux limité au moyen d'essais plaque-plaque [11, 12] par exemple, la section suivante présente un autre exemple d'essai structural permettant de déterminer ces paramètres, un simple essai de traction sur une éprouvette trouée.

### 3.2.2 Résultats obtenus avec l'éprouvette trouée

L'objectif est ici de pouvoir déterminer  $(\alpha, p_c, a \text{ et } t_c)$ .

Afin d'initialiser un premier jeu de données de  $a$  et  $t_c$ , on peut trouver un certain nombre de valeurs dans la littérature, relatives à une loi à taux d'endommagement limité. Après avoir estimé un premier jeu de paramètres qui correspondrait à cette loi, et en s'appuyant sur l'étude analytique proposée au chapitre 5, on peut alors déterminer un premier couple  $(a_0, t_{c0})$  permettant d'avoir un ordre de grandeur des valeurs recherchées. Ces valeurs sont ensuite ajustées en comparant les résultats de simulation aux résultats expérimentaux.

Origine	a	$t_c$ ( $\mu s$ )
[12] p. 91/98 Au4G1-T4	10	0.2
[12] p. 114 Alu 7020-T6	2.25	2
[12] Ta-6V	DONNEES	SNECMA
[10] p. 61 "composite"	10	2
[126] SiC/MAS-L	1	2

La deuxième étape consiste à estimer  $p_c$ , la valeur finale de la plasticité, valeur à rupture. Celle-ci est extrêmement locale, et donc difficile à estimer précisément. Il est par exemple possible de déterminer  $p_c$  à partir de la mesure de la section finale d'une éprouvette après rupture. Ici,  $p_c$  est directement estimé à partir du champ des déformations en pointe de fissure obtenu par corrélation d'image.

Les images de droites des figures 6.9 et 6.10 proviennent d'un post traitement par CORRELI Q4 des images d'essais (résolution multi-échelle à 3 niveaux, facettes - "Zone Of Interest" - de 12 pixels). Ces images ont été enregistrées à la cadence de 4000 images par secondes. En raison de la symétrie du problème et des résultats (deux fissures se créent lors de la rupture, chacune d'un côté du trou, et se propagent à la même vitesse jusqu'au bord de l'éprouvette), la zone d'étude a pu se limiter à une demie éprouvette.

Enfin, dans un troisième temps, le coefficient  $\alpha$  est déterminé, afin que le début de la loi analytique (avec  $p_0$  et  $p_c$  fixés) soit le plus proche possible des valeurs expérimentales.

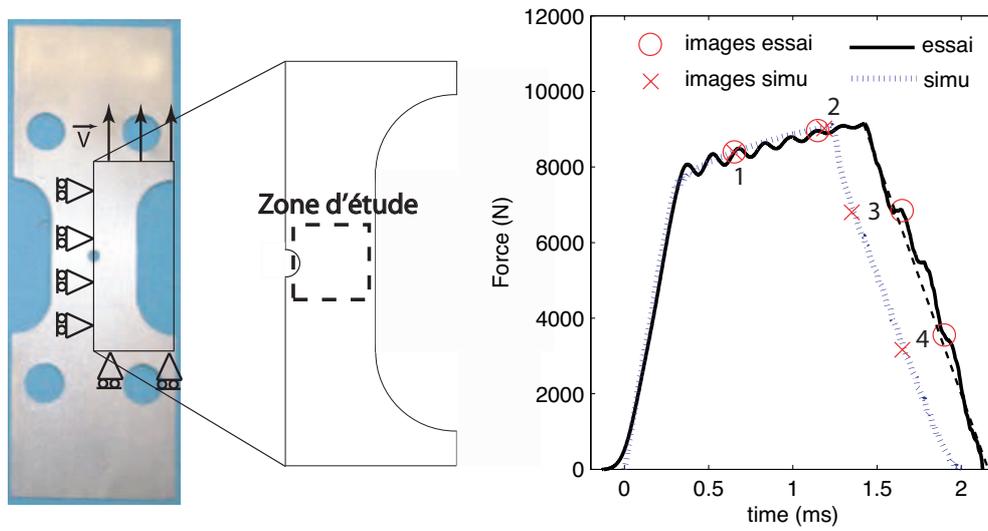


Fig. 6.8: Eprouvette trouée (zone d'étude) et courbes  $F(t)$ .

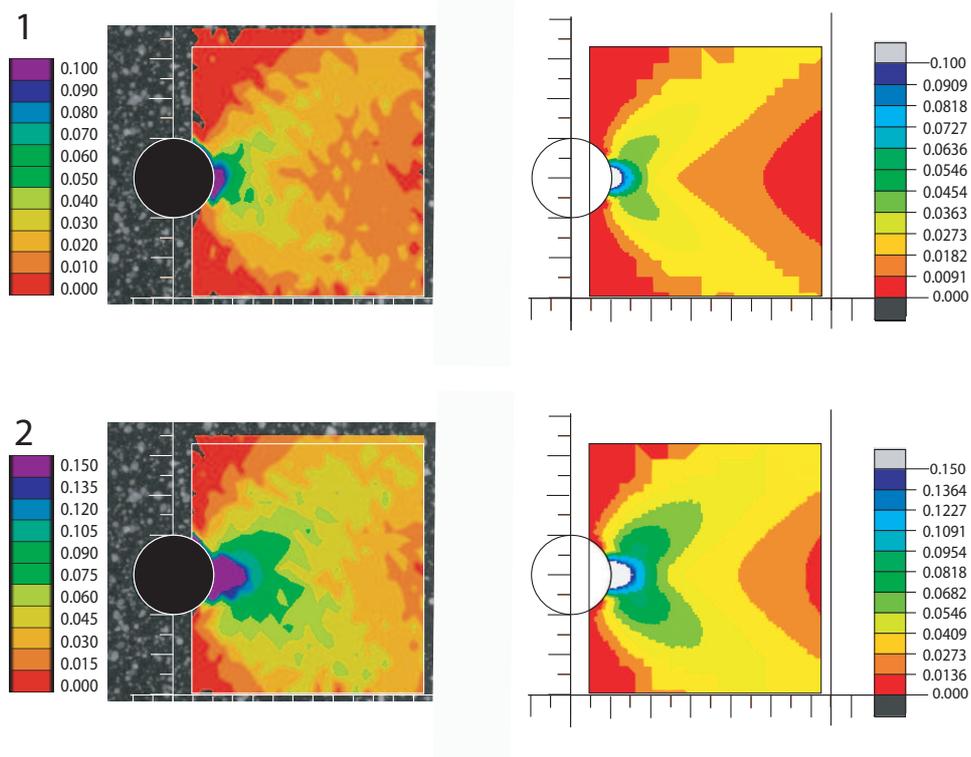


Fig. 6.9: \* Comparaison essais/simulations,  $\varepsilon_{yy}$ , images 1 et 2.

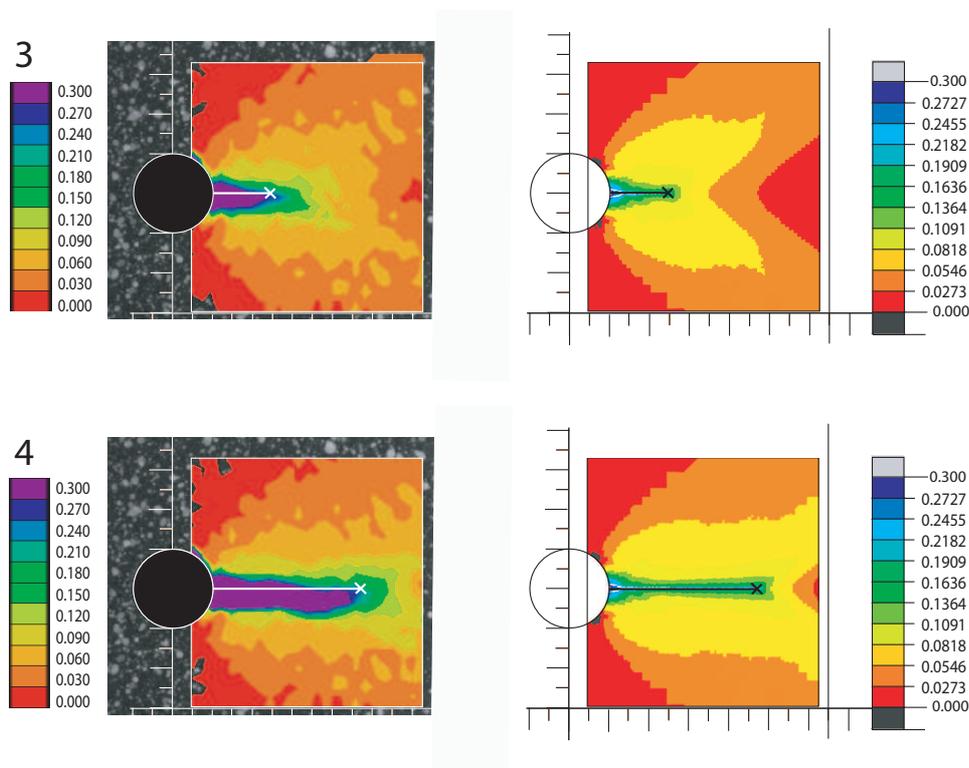


Fig. 6.10: \* Comparaison essais/simulations,  $\varepsilon_{yy}$ , images 3 et 4.

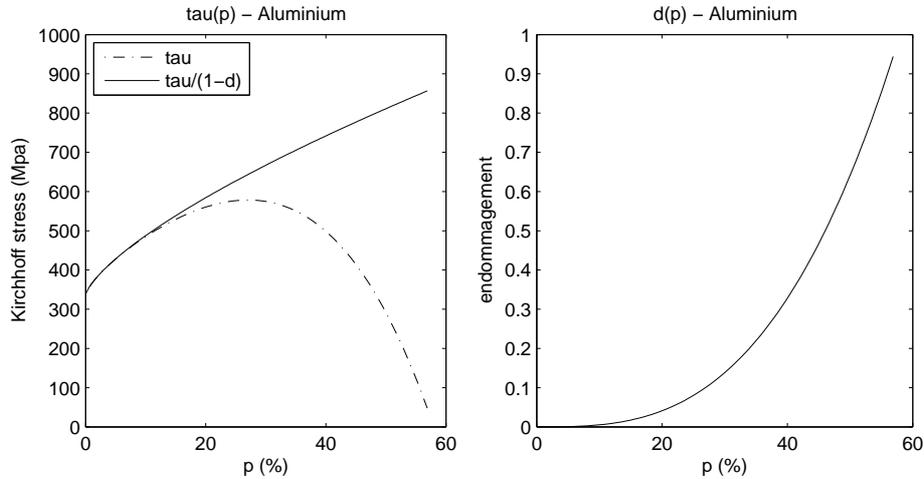
### 3.3 Bilan

On détermine finalement les valeurs suivantes :

E (Mpa), $\nu$	$[\tau_0, b$ (Mpa)], n	$[p_0, p_c(\%)]$ , $d_c, \alpha$	taux limité : $a, t_c$ ( $\mu s$ )
75 000, 0.3	[332, 760], 0.7	[0, 60], 0.99, 3	12, 75

Ce jeu de paramètre permet d'obtenir une vitesse d'avancée de fissure par simulation identique aux résultats expérimentaux. Ceci s'observe par exemple sur les courbes  $F(t)$  (cf. figure 6.8), en comparant les temps de chute d'effort.

Les champs de déplacements, ou de déformations, obtenus numériquement, sont tout à fait cohérents avec les résultats de l'analyse par corrélation d'image (cf. figures 6.9 et 6.10). On obtient la même cartographie globale (champ  $\varepsilon_{yy}$ ), et les valeurs maximales (60 % de plasticité cumulée) obtenues par simulation sont effectivement tellement locales, qu'elles ne peuvent pas être mesurées directement. Ceci s'explique par la qualité des images et la finesse du mouchetis qui ne sont pas adaptés à une telle résolution spatiale. Rappelons à ce sujet que les images ont été enregistrées à la cadence de 10 000 images par secondes, ce qui nécessite l'utilisation d'une caméra



**Fig. 6.11:** Loies d'évolution de la plasticité et de l'endommagement.

à la résolution limitée, accompagnée de projecteurs puissants, c'est-à-dire encombrants ...

Sur les images de la figure 6.10, la position de la pointe de fissure a été déterminée à partir des résultats numériques. Ensuite, la longueur déterminée a été reportée sur les images de gauches, issues des résultats expérimentaux. Les images présentées ici n'ont pas été post-traitées par une analyse de corrélation d'image dédiée à la mécanique de la rupture.

En revanche, avec les paramètres retenus, la valeur de la déformation globale correspondant à l'amorce de la fissure n'est pas identique expérimentalement et par simulation. Ceci s'explique par le fait que l'érouissage n'est ici défini que par deux coefficients  $b$  et  $n$ , ce qui est insuffisant pour décrire cette phase convenablement. Il s'agit en effet d'un phénomène fortement non linéaire, et tant les valeurs de contrainte que leur variations en fonction de la plasticité, au début et à la fin de l'érouissage, influencent l'amorce de la rupture.

Le nombre de nuances de matériaux utilisés au sein d'AIRBUS est très important comme cela a été précisé, et il ne sont en général caractérisés que par ces deux coefficients, dans un souci de compromis entre simplicité et précision.

L'objectif n'étant pas ici de se concentrer sur la phase d'érouissage, mais sur la rupture, une loi à deux coefficients a été conservée.

Afin de valider les valeurs des paramètres déterminées, surtout celles qui sont relatives à la description de la rupture, il faut maintenant procéder à une comparaison essai-calcul sur une autre configuration.

## 4 Simulations prédictives : Eprouvettes lisses

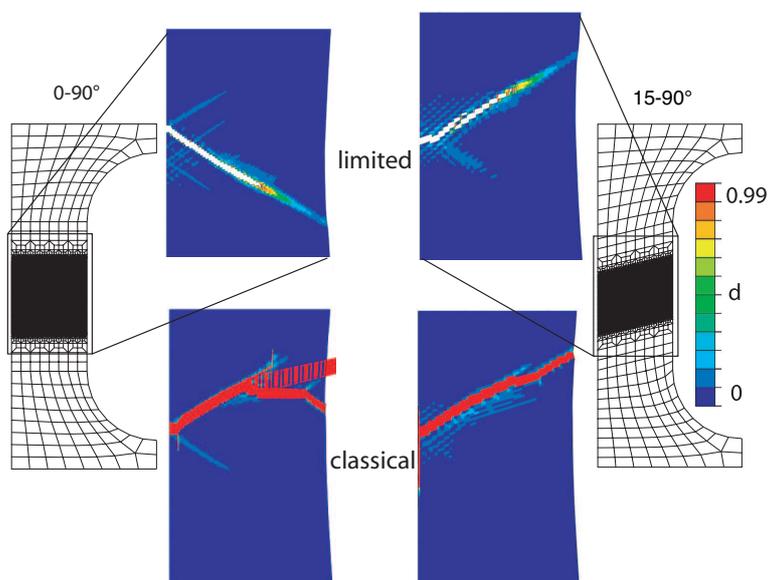
Une possibilité pour confirmer le jeu de paramètres déterminés aurait été de modifier la vitesse de sollicitation, nous présentons dans cette section des résultats relatifs à l'autre géométrie d'éprouvette (lisse), sollicitée à la même vitesse.

### 4.1 Simulations

Les simulations des éprouvettes lisses sollicitées en traction jusqu'à rupture avec le modèle d'épuisement plastique à taux limités conduisent à un mode de rupture en cisaillement. Ce mode découle de la description du comportement mécanique du matériau. Les figures 6.12 présentent les chemins de rupture obtenus avec des modélisations "classiques" et "d'épuisement plastique à taux limités" et deux orientations de maillages différentes. Pour les résultats correspondant au modèle d'épuisement plastique à taux limités, les éléments (quadrangle à un point d'intégration) où l'endommagement critique a été atteint, ont été effacés.

Pour ce mode de rupture en cisaillement, il existe deux solutions en statique correspondant à deux directions de bandes possibles. En dynamique, une des deux solutions est activée en raison de l'état non-homogène de la matière, qui dépend uniquement du chargement. Il ne devrait donc exister qu'une seule direction de bande en dynamique.

Or on peut constater sur les figures 6.12 que les résultats avec une modélisation



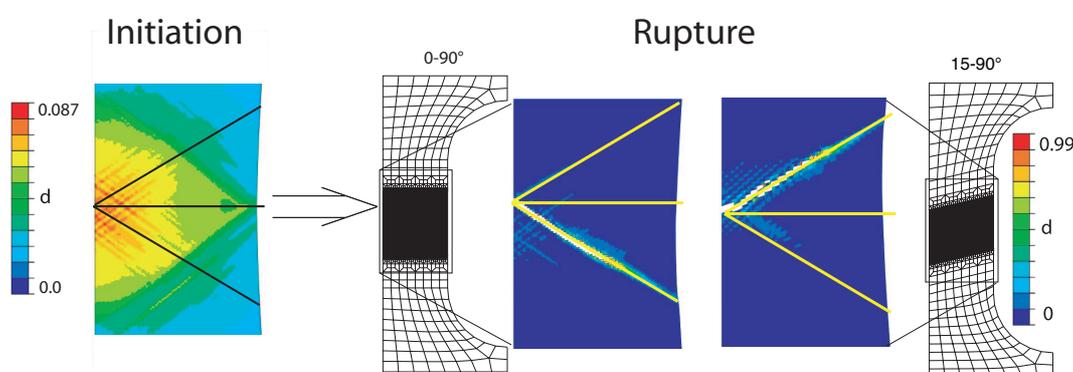
**Fig. 6.12:** \* Eprouvette lisse, simulation - Modèles classique et à taux limité.

d'épuisement plastique à taux limités "dépendent" du maillage, dans la mesure où

deux orientations de maillage différentes peuvent conduire à l'une ou l'autre des directions de cisaillement.

Ceci s'explique par le caractère extrêmement instable du problème. La figure 6.13 présente la cartographie de l'endommagement à l'amorce de la localisation. Les différentes bandes de concentration de l'endommagement susceptibles de conduire à une macro bande de localisation sont nombreuses. Dans ce cas, le problème mécanique est tellement sensible, que les approximations dues à la résolution numérique (intégration en temps, intégration en espace avec un seul point de Gauss, intégration de la loi de comportement) peuvent faire basculer la solution vers l'une des deux directions.

Mais on peut également vérifier que seulement ces deux solutions ne sont "ac-



**Fig. 6.13:** \* Epreuve lisse - Influence de l'orientation du maillage.

tivées" et que ces deux directions sont symétriques. Quel que soit le maillage, la solution numérique n'admet qu'une orientation possible de propagation de fissure (qui conduit à deux directions par symétrie). L'orientation de ces deux "bandes solution" dépend des choix qui ont été faits pour la modélisation mécanique du problème, mais ne dépend pas de l'orientation du maillage.

#### 4.1.1 Sensibilité à la finesse du maillage

Le modèle d'épuisement plastique à taux limités permet de fournir des résultats où la zone de localisation est de taille non-nulle. Sur la figure 6.14, l'image de droite est un zoom du résultat présenté en 6.12 avec le modèle d'épuisement plastique à taux limités. Ce zoom sur la pointe de fissure montre clairement que la zone de localisation peut être décrite avec plusieurs éléments.

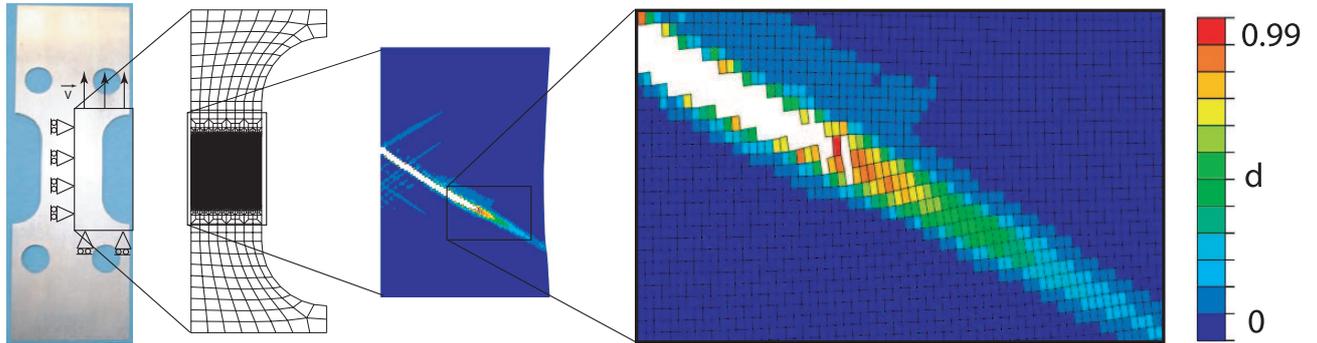


Fig. 6.14: \* ABAQUS 2D : indépendance à la taille de maille.

#### 4.1.2 Sensibilité à l'orientation du maillage

Le même exemple avec une vitesse de chargement plus élevée ( $48 m.s^{-1}$ ), permet de confirmer les capacités du modèle à obtenir des simulations sans dépendance à l'orientation du maillage. Les simulations de l'essai de traction sur éprouvette lisse sont ici obtenues avec deux maillages d'orientation différente (un maillage orienté à  $0 - 90^\circ$ , un second à  $15 - 90^\circ$ ) et deux modélisations du comportement (classique et à taux limités). La figure 6.15 décrit l'évolution de l'effort au cours du temps, les figures III et 6.17 représentent la valeur de l'endommagement sur l'éprouvette à deux instants différents ( $0.1 ms$  et  $0.18 ms$ ) spécifiés sur la figure 6.15.

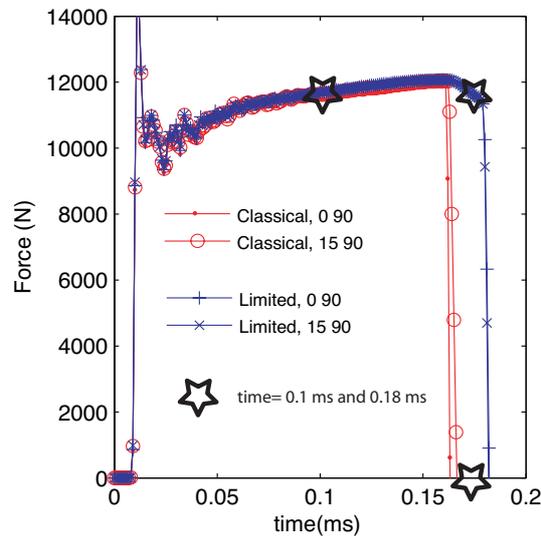


Fig. 6.15: ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage,  $F(t)$ .

Sur la figure III, correspondant à un état de l'éprouvette avant localisation ( $t =$

0.1 ms), on peut vérifier que les résultats sont identiques entre les deux modélisations et indépendants du maillage.

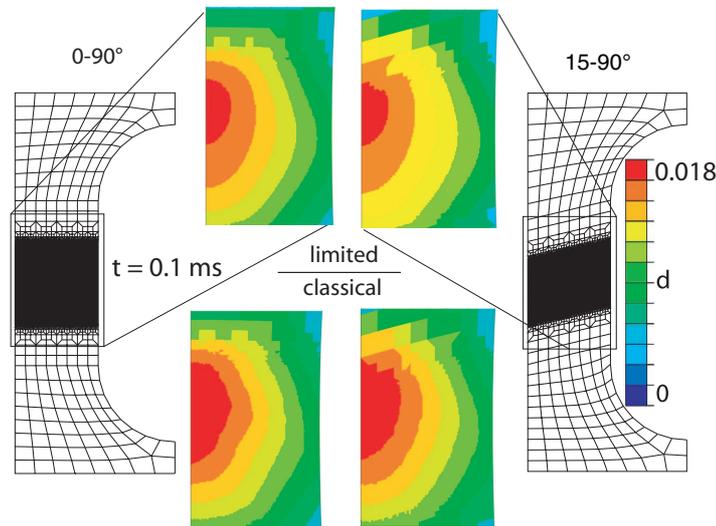


Fig. 6.16: \* ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, pré-localisation.

Sur la figure 6.17, on peut alors constater qu'avec une modélisation classique, le chemin de rupture ( $t = 0.18 ms$ ) est très sensible à l'orientation du maillage, ce qui n'est pas du tout le cas avec une modélisation d'épuisement plastique à taux limités.

## 4.2 Observations expérimentales

Contrairement au cas de l'éprouvette trouée, il existe plusieurs modes de rupture pour l'éprouvette lisse. Il peuvent être classés selon trois catégories. Comme le montre la figure 6.18, les éprouvettes peuvent en effet rompre selon une bande de cisaillement (images de gauche), ou bien en se fissurant orthogonalement à la direction de chargement (images de droite), ou alors, selon une combinaison des deux premiers modes (images centrales, initiation d'une fissure à  $0^\circ$ , puis bifurcation en cisaillement).

On peut également remarquer que la dynamique de la rupture diffère selon le mode. Une rupture en cisaillement est extrêmement rapide, le phénomène dure moins de  $100 \mu s$ , alors qu'une rupture selon une ouverture de fissure dure plusieurs centaines de  $\mu s$ .

En analysant les résultats par corrélation d'image d'un mode de rupture selon une ouverture de fissure, on peut remarquer que le phénomène peut à chaque instant bifurquer selon un mode en cisaillement. En effet, on constate sur la figure 6.19 des

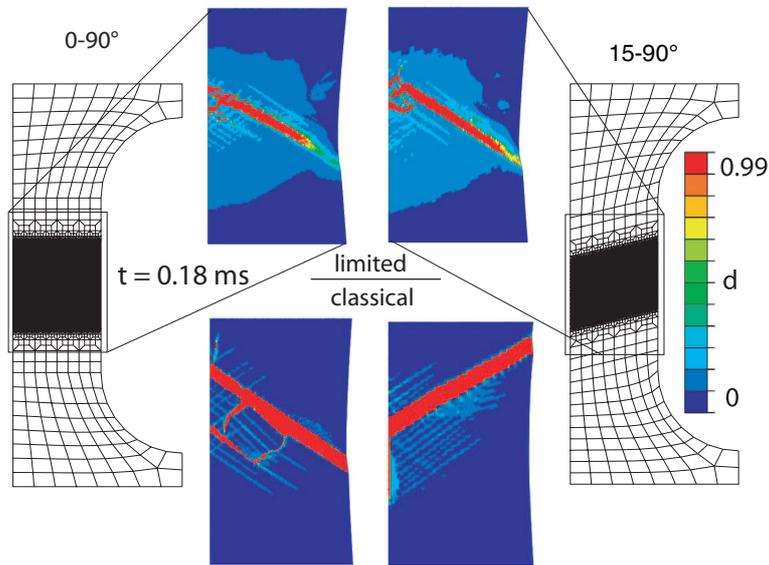


Fig. 6.17: \* ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, localisation.

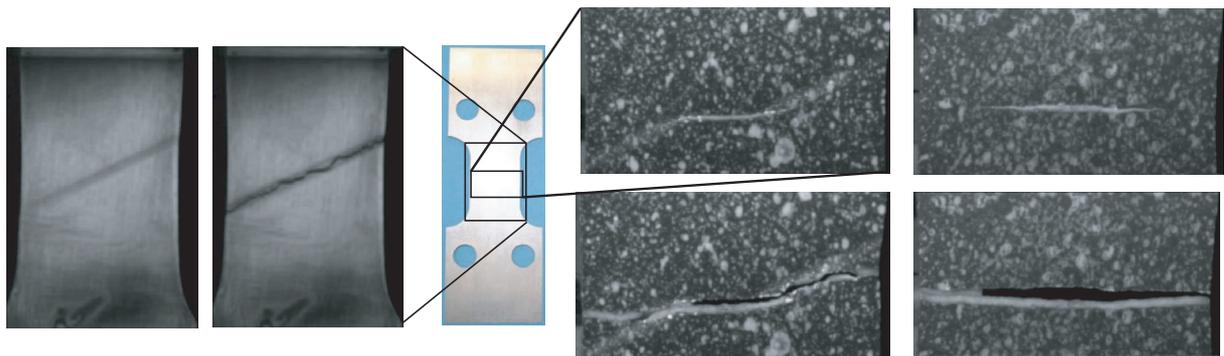


Fig. 6.18: Eprouvette lisse - modes de rupture.

zones en pointe de fissure, où les déformations se concentrent selon le mode de rupture en cisaillement.

### 4.3 Comparaison simulations - essais

La figure 6.20 permet de vérifier que l'orientation des bandes de cisaillement correspondant à la solution numérique est bien la même qu'expérimentalement.

La figure 6.21 trace les évolutions de l'effort en fonction du temps correspondant à deux essais et une simulation pour l'éprouvette lisse. La rupture s'amorce au même

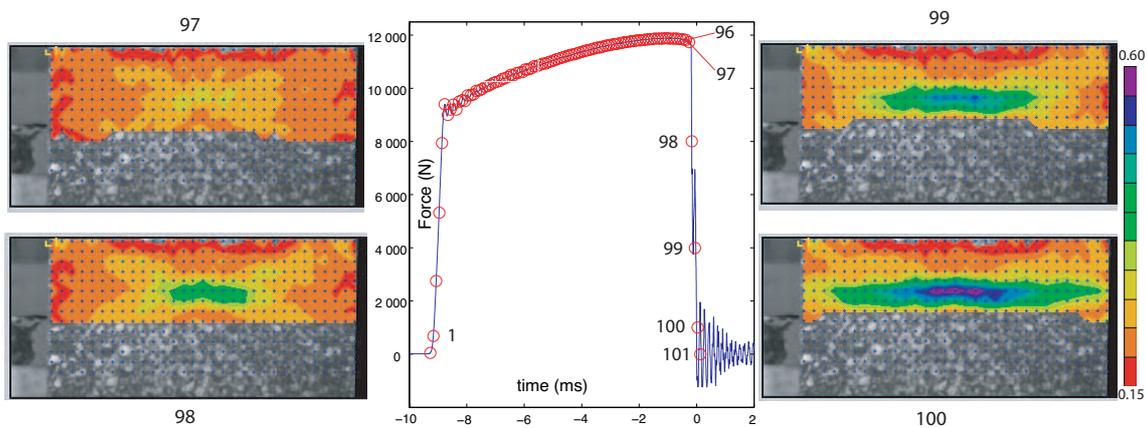


Fig. 6.19: \* Eprouvette lisse, mode de rupture, bifurcation de mode.

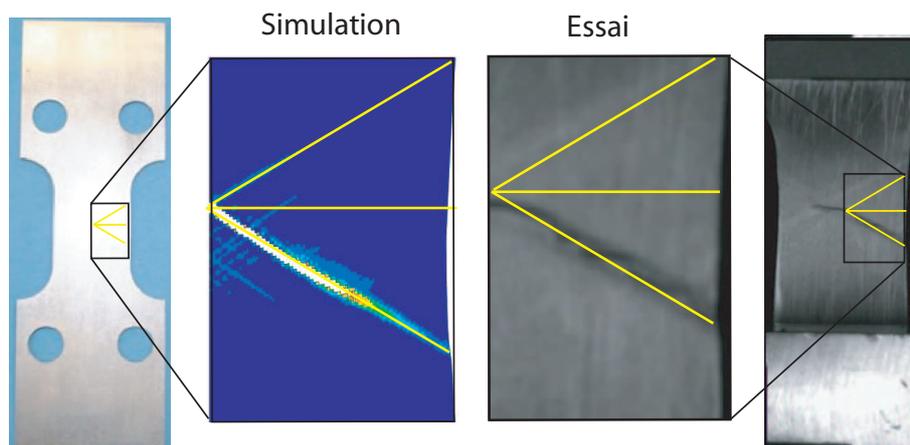


Fig. 6.20: \* Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse, chemin de rupture.

moment pour les deux essais, même si les modes de rupture diffèrent : "essai 1", mode en ouverture de fissure - "essai 2", mode en cisaillement. Numériquement, la rupture apparaît plus tôt qu'expérimentalement, comme dans le cas de l'éprouvette trouée.

En recalant les différentes courbes de manière à ce que la chute de l'effort débute à  $t = 0$ , on constate alors que le temps de rupture simulé est bien identique à la valeur mesurée (de l'ordre de  $0.06\text{ ms}$ ).

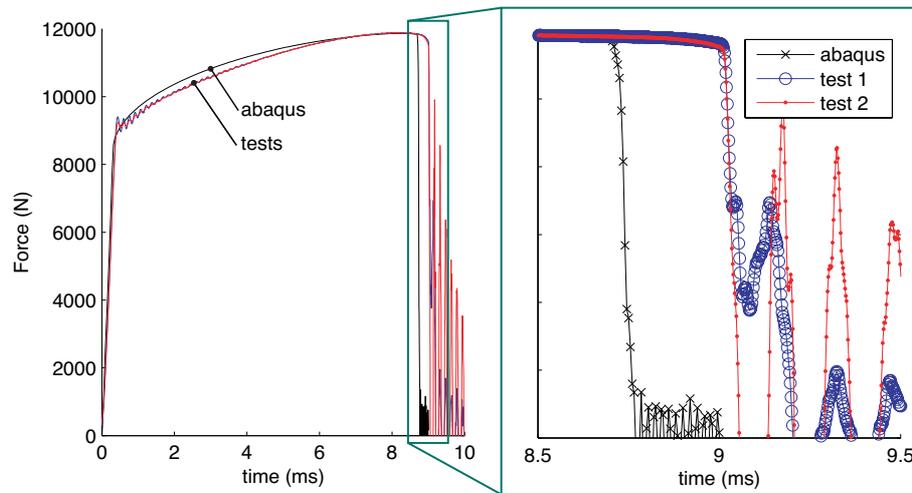


Fig. 6.21: Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse,  $F(t)$ .

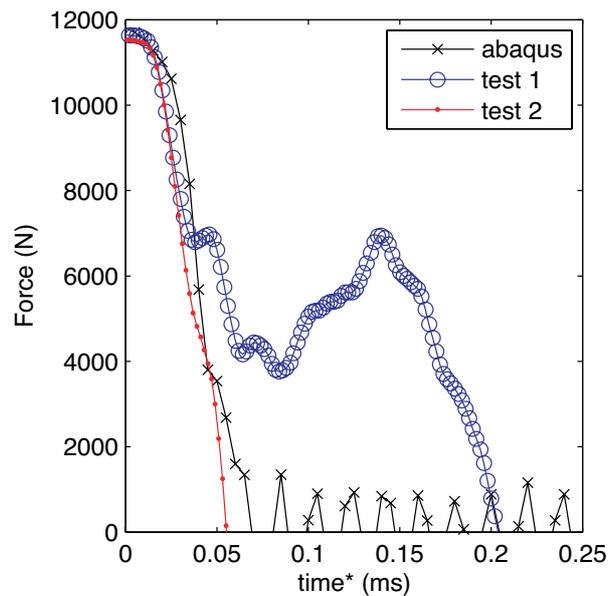


Fig. 6.22: Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse,  $F(t)$  - rupture.

## 5 Conclusion

Les essais ont donc permis d'identifier un jeu de paramètres du modèle. Ceux-ci ont été déterminés à partir des essais cycliques sur éprouvettes lisses et des essais sur éprouvettes trouées sollicitées à  $0.75 \text{ m.s}^{-1}$ . Le modèle permet ainsi de modéliser fidèlement le comportement jusqu'à rupture des éprouvettes trouées. Avec le même jeu de paramètres, il est également possible de simuler le comportement

des éprouvettes lisses jusqu'à rupture.

Une étape supplémentaire dans la validation du modèle consisterait à confronter des résultats de simulation numérique à des essais réalisés à vitesse plus élevée.

**■ Bilan du chapitre 6**

Afin de pouvoir mener des calculs sur des structures plus complexes, la modélisation d'épuisement plastique à taux limités a également été implémentée, au moyen d'une loi utilisateur (V-UMAT), dans ABAQUS. Les simulations d'une éprouvette lisse sollicitée en traction confirment alors la capacité du modèle à décrire finement, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les phases de localisation et de rupture d'une structure métallique. Des simulations obtenues avec des maillages d'orientations différentes montrent également que les résultats obtenus ne souffrent pas d'une dépendance à l'orientation du maillage. Ce chapitre décrit la campagne d'essais qui a permis de valider expérimentalement le modèle d'épuisement plastique à taux limités. Il s'agit d'essais de traction jusqu'à rupture sur des éprouvettes en Aluminium. Cette campagne a été définie en s'inspirant d'une étude précédente [127], et réalisée au centre de Lille de l'ONERA. Deux géométries d'éprouvettes ont été sollicitées à deux vitesses de sollicitation différentes. Afin de recueillir le maximum d'informations sur le phénomène particulièrement bref et local de rupture, une attention particulière a été portée aux moyens de mesures. Ainsi, les essais ont été filmés à l'aide d'une caméra rapide et dépouillés par corrélation d'image, à l'aide de CORRELI Q4[14]. Une deuxième partie de cette campagne a consisté à solliciter des éprouvettes lisses en traction avec des phases de charge-décharge afin de déterminer la première partie de la loi d'évolution de l'endommagement. Ces résultats expérimentaux ont permis d'identifier les paramètres du modèle pour l'alliage d'Aluminium utilisé, en s'appuyant sur les résultats des essais cycliques sur éprouvettes lisses et sur les résultats des essais dynamiques sur éprouvettes trouées. Des simulations des essais dynamiques sur éprouvettes lisses avec le jeu de paramètres identifiés ont confirmé les capacités du modèle à prédire finement la rupture.



# Conclusion

- Ce travail présente une modélisation permettant de mener des simulations robustes de structures métalliques sollicitées en dynamiques jusqu'à rupture. La difficulté relative à la dépendance des résultats au maillage avec l'utilisation d'une modélisation "classique" [1], a été levée grâce à la prise en compte dans la description du comportement des spécificités mécaniques de la rupture. En effet, la phase de localisation-rupture est vue ici comme un phénomène fortement dynamique, accompagné de variations temporelles des dégradations importantes mais finies.

Le modèle proposé s'inscrit ainsi dans la famille des "limiteurs temporels de localisation", en particulier des modèles à taux limités. Ces approches, moins étudiées que les formulations non-locales des "limiteurs spatiaux de localisation", présentent l'avantage de conserver un caractère local, et sont donc faciles à mettre en oeuvre et ne nécessitent pas l'utilisation de conditions aux limites additionnelles. En revanche, une résolution en dynamique est indispensable et ces approches présentaient certaines limites dans le cadre des matériaux métalliques. L'objectif de cette thèse a ainsi été de proposer une modélisation adaptée à un comportement élastoplastique endommageable en transformations finies.

En effet, l'apparition de la localisation des déformations et de la phase de rupture avec une telle modélisation, est gouvernée par les valeurs de la plasticité et de l'endommagement sur la géométrie courante de la structure. Le modèle à taux d'endommagement limité, proposé initialement dans le cadre des matériaux composites [9], a été étudié dans le cadre d'applications métalliques [85]. Mais, l'étude de l'équation des ondes et des résultats de simulations numériques montrent que l'utilisation d'une modélisation à taux d'endommagement limité ne permet pas de garantir l'unicité de la solution jusqu'à rupture (caractérisée par  $d_c = 1$ ) quels que soient les valeurs des coefficients matériaux.

Ceci s'explique par le fait qu'une telle approche ne contrôle pas l'évolution de la plasticité et reste ainsi sensible à l'instabilité plastique de la "matrice" du matériau. Et l'unicité de la solution est perdue lorsque cette instabilité est atteinte. L'état correspondant à cette perte d'unicité est d'autant plus proche de l'initiation de la localisation des déformations que les valeurs d'endommagement sont faibles à cet instant, ce qui est le cas de la plupart des alliages métalliques considérés dans cette

étude.

Le modèle "d'épuisement plastique à taux limité" a ainsi été proposé afin de contrôler les évolutions temporelles à la fois de la plasticité et de l'endommagement, et ainsi pouvoir mener des simulations robustes (sans dépendance au maillage) jusqu'à  $d_c = 1$ . L'étude de l'équation des ondes montre alors que les équations de ce modèle en dynamique conservent leur caractère hyperbolique jusqu'à rupture. Des simulations numériques en 1D et en 2D confirment les capacités du modèle à fournir des résultats quel que soit le maillage (taille et orientation des éléments notamment). Enfin, des comparaisons calculs-essais permettent de déterminer un jeu de paramètres du modèle assurant de très bonnes corrélations.

- Les enjeux industriels associés à la prévision de la rupture sont importants. Les applications pour lesquelles mener des simulations robustes jusqu'à rupture, notamment dans le cadre de l'activité de dynamique rapide chez AIRBUS sont nombreuses. Afin de pouvoir utiliser efficacement le modèle "d'épuisement plastique à taux limité" dans le cadre d'applications industrielles, deux voies de travail semblent se dessiner.

Tout d'abord, en ce qui concerne le comportement du matériau, il est important de continuer à améliorer la modélisation des phénomènes physiques qui conduisent à la rupture. Il s'agit de s'intéresser à la description de la courbe d'écrouissage, la nature de l'écrouissage (isotrope, cinématique, mixte), l'influence du taux de triaxialité des contraintes sur la loi d'évolution de l'endommagement, mais aussi aux paramètres spécifiques de la limitation du taux de plasticité ( $a$  et  $t_c$ ). Il est ainsi important de pouvoir mener d'autres campagnes d'essais permettant de vérifier, d'une part, que les paramètres sont bien des valeurs matériaux, c'est-à-dire indépendantes de la structure considérée (une éprouvette est véritablement une structure à l'échelle de la rupture) et d'autre part, que ce modèle permet de décrire la rupture qu'elle que soit la vitesse de sollicitation globale (ou du moins sur une plage de vitesse suffisamment large et précisément déterminée).

Un autre axe de travail concerne la mise en oeuvre numérique. Compte tenu du caractère local de la modélisation du comportement, aucune difficulté ne se présente pour son implémentation dans un code de calcul standard. En revanche, les échelles très différentes aux quelles se produisent les phénomènes mécaniques nécessitent un traitement adapté. En effet, dans le cadre d'une étude d'impact sur une structure d'avion, il est possible de distinguer trois échelles. Tout d'abord la structure elle même, qui est relativement grande (souvent plusieurs mètres), et dont les déformations à la frontière sont particulièrement faibles (afin de faciliter la définition des conditions aux limites). En général, les déformations sont importantes sur une partie relativement limitée de la structure : il s'agit de la deuxième échelle, au niveau de la zone d'impact. Dans le cas d'une sollicitation jusqu'à rupture, une

troisième échelle relative au phénomène de rupture lui-même est à considérer. Les grandeurs caractéristiques de ces trois échelles sont particulièrement différentes : chargement global :  $(m, 10^{-2}s)$  ; concentration des déformations :  $(10^{-2}m, 10^{-4}s)$  ; localisation-rupture :  $(10^{-4}m, 10^{-6}s)$ .

Ainsi, avec une stratégie numérique directe (résolution en dynamique explicite, avec un seul domaine et un seul pas de temps), le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un problème avec prise en compte de l'échelle la plus fine serait de 10 à 100, voire 1 000 fois plus long qu'un problème où seulement les deux premières échelles sont considérées.

En revanche, compte tenu du caractère très localisé et bref de la rupture, avec une stratégie adaptée, l'éventuel surcoût nécessaire à la prise en compte de cette troisième échelle pourrait être négligeable.



# Troisième partie

## Annexes



# Annexe I : Résolution par la MEF en 2D, élément Q4

L'hypothèse de base de la formulation consiste à considérer un champ de vecteurs position  $\underline{x}(\underline{X}, t)$  de la forme :  $\underline{x}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\underline{X}, t) \cdot \underline{x}_i(n)$ . Les  $\Phi_i(\underline{X})$  sont les fonctions de forme et les  $\underline{x}_i(n)$  sont les inconnues nodales.

Le champ des déplacements est défini de la même manière avec les déplacements nodaux :  $\underline{U}_i(\underline{X}, t) = \underline{x}_i(n) - \underline{X}_i$ . On a donc :  $\underline{U}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\underline{X}) \cdot \underline{U}_i(n)$

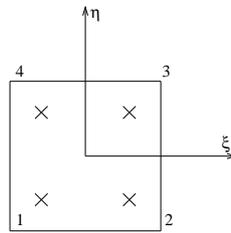
Le champ des vitesses est alors obtenu à partir de la dérivée temporelle des déplacements :  $\underline{\dot{U}}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\underline{X}) \cdot \dot{\underline{U}}_i(n)$

Et le champ des accélérations est obtenu à partir de la dérivée temporelle seconde des déplacements :  $\underline{\ddot{U}}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\underline{X}) \cdot \ddot{\underline{U}}_i(n)$

Les champs de position et de déplacement sont interpolés par les mêmes fonctions de forme  $\Phi_i(\xi, \eta)$  :  $\underline{x}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\xi, \eta) \cdot \underline{x}_i(n)$  et  $\underline{U}(\underline{X}, t) = \sum_i \Phi_i(\xi, \eta) \cdot \underline{U}_i(n)$

Les 4 fonctions de forme de l'élément de référence sont :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta) & \Phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \\ \Phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta) & \Phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \end{aligned}$$



Elément de référence.



# Annexe II : Intégration temporelle

## Stabilité : cas 1D

- Solution harmonique 1D

On se place dans le cas où l'équilibre dynamique s'écrit  $\ddot{u}_n + \omega^2 \cdot u_n = F_{ext}$ . On s'intéresse à la stabilité du schéma, c'est-à-dire à l'évolution de la solution particulière de l'équation différentielle précédente, on considère donc  $F_{ext} = 0$ .

En cherchant à écrire :  $\mathbb{A}_1 \cdot X_{n+1} = \mathbb{A}_2 \cdot X_n$  avec  $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ \dot{u}_{n-1/2} \end{bmatrix}$ , on a :

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ dt \cdot \omega^2 \cdot \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt \cdot \omega^2 \cdot [1 - \beta] & 1 + (dt \cdot \omega)^2 \cdot (1/2 - \gamma + \beta) \end{bmatrix}$$

- Stabilité - Précision

On cherche les conditions pour lesquelles les valeurs propres de  $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1^{-1} \cdot \mathbb{A}_2$  sont de norme inférieure ou égale à un. On a alors :

$$\det(\mathbb{A}_2 - \lambda \cdot \mathbb{A}_1) = (1 - \lambda) \cdot (1 + (dt \cdot \omega)^2 \cdot (1/2 - \gamma + \beta) - \lambda) + (\lambda \cdot dt) \cdot (dt \cdot \omega^2 \cdot [1 - \beta] + \lambda \cdot dt \cdot \omega^2 \cdot \beta)$$

$$\text{Soit } \det(\mathbb{A}_2 - \lambda \cdot \mathbb{A}_1) = \lambda^2 - 2 \cdot b \cdot \lambda + c \text{ avec } b = \frac{1 - \frac{(dt \cdot \omega)^2}{2} \cdot (\gamma + 1/2 - 2 \cdot \beta)}{1 + (dt \cdot \omega)^2 \cdot \beta} \text{ et } c = \frac{1 - (dt \cdot \omega)^2 \cdot (\gamma - 1/2 - \beta)}{1 + (dt \cdot \omega)^2 \cdot \beta}.$$

- Le schéma est inconditionnellement stable si  $c \leq 1$  et  $c \geq b^2$ , soit  $2 \cdot \beta \geq \gamma \geq 1/2$
- Le schéma est conditionnellement stable si  $c \leq b^2$ , et  $1 - 2 \cdot b + c \geq 0$ ,  $1 + 2 \cdot b + c \geq 0$ ; soit  $2 \cdot \beta \leq \gamma$  et  $\gamma \geq 1/2$ . La condition de stabilité porte sur le pas de temps et s'écrit :  $\Delta t \leq \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{\gamma/2 - \beta}}$ . Cette condition dépend donc de  $\omega_{max}$ , la plus grande pulsation admissible par le système.

On peut montrer que l'erreur est un  $0(\Delta t)$  si  $\gamma \neq 1/2$  et un  $0(\Delta t^2)$  pour  $\gamma = 1/2$ . Pour cette raison,  $\gamma = 1/2$  dans les schémas les plus couramment utilisés.

## Schéma accéléré, Intégration itérative

### Présentation

On se place dans le cadre de la solution harmonique, avec  $\gamma = 1/2$ , et initialement  $\beta = 0$  afin de déterminer explicitement une estimation de l'accélération, puis  $\beta \neq 0$  afin de repréciser cette valeur de l'accélération. L'objectif est de voir s'il est possible de combiner les schémas explicites et implicites afin de tirer partie de ces deux approches, c'est à dire combiner résolution explicite et inconditionnellement stable.

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + dt.\dot{u}_{n+1/2} \\ \dot{u}_{n+1/2} &= \dot{u}_{n-1/2} + dt.[\beta.\ddot{u}_{n-1} + (1-2\beta).\ddot{u}_n + \beta.\ddot{u}_{n+1}] \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ dt.\omega^2.\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt.\omega^2.[1-\beta] & 1 + (dt.\omega)^2.\beta \end{bmatrix}$$

- Prédiction explicite :  $\beta = 0$

$$\mathbb{A}_1^0.X_{n+1}^0 = \mathbb{A}_2^0.X_n \text{ avec } \mathbb{A}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{A}_2^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt.\omega^2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Itérations  $\beta \neq 0$  :

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1}^i - dt.\dot{u}_{n+1/2}^i &= u_n \\ \dot{u}_{n+1/2}^i &= \dot{u}_{n-1/2} + dt.[\beta.(\ddot{u}_{n-1} + \ddot{u}_{n+1}) + (1-2\beta).\ddot{u}_n] \end{aligned} \right\}$$

En écrivant :  $\ddot{u}_{n+1} + \omega^2.u_{n+1}^{(i-1)} = 0$ ,  $\ddot{u}_n + \omega^2.u_n = 0$  et  $u_{n-1} = u_n - dt.\dot{u}_{n-1/2}$  :

$$\dot{u}_{n+1/2}^i = \dot{u}_{n-1/2} - dt.\omega^2.[\beta(u_n - dt.\dot{u}_{n-1/2} + u_{n+1}^{i-1}) + (1-2\beta).u_n]$$

$$\dot{u}_{n+1/2}^i = [1 + \beta.(dt.\omega)^2].\dot{u}_{n-1/2} - dt.\omega^2.[(1-\beta).u_n + \beta.u_{n+1}^{i-1}]$$

### Limite et stabilité

On montre alors par récurrence que l'on peut écrire  $\mathbb{A}_1^i.X_{n+1}^i = \mathbb{A}_2^i.X_n$  avec :

$$\mathbb{A}_1^i = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbb{A}_2^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -dt.\omega^2.x^i & 1 \end{bmatrix}$$

et  $x^{i+1} = -\beta.(dt.\omega)^2.x^i + 1$ .

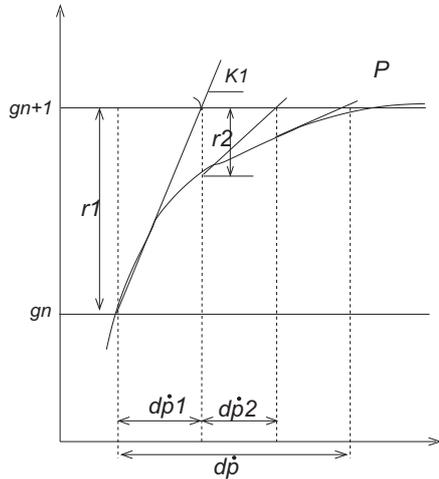
Or on sait que la suite  $x^{(i)}$  converge si la fonction  $f$  telle que  $x^{i+1} = |f(x^i)|$  est lipschitzienne de rapport  $k$  avec  $k < 1$ , c'est à dire si  $\forall(x,y), \exists k < 1$  ;  $|f(x) - f(y)| < k.|x - y|$ .

Ici  $f(x) = -\beta.(dt.\omega)^2.x + 1$  donc la suite converge si  $\boxed{\beta.(dt.\omega)^2 < 1}$ .

On montre alors que le schéma converge (vers le schéma implicite  $\beta \neq 0$ ) si la condition de courant est respectée.

# Annexe III : Lois de comportement

De manière générale, à partir de l'équation scalaire  $f_{(n)} = 0$ , on cherche à vérifier  $f_{(n+1)} = 0$ . On utilise pour cela la Méthode de Newton (voir figure III) :



$$f = g - P(\dot{p})$$

$$K_{(\dot{p}^{(m)})}^{(i)} = \left. \frac{\partial P}{\partial \dot{p}} \right|_{(\dot{p}^{(m)})} \quad r_{(\dot{p}^{(m)})}^{(i)} = g - P_{(\dot{p}^{(m)})}$$

$$d\dot{p}^{(i)} = \frac{r_{(\dot{p}^{(m)})}^{(i)}}{K_{(\dot{p}^{(m)})}^{(i)}} \quad \dot{p}^{(m)} = \sum_{i=1}^m (d\dot{p}^{(i)})$$

Résolution itérative - Méthode de Newton

## Cas 1D

Définition de la surface seuil :  $f = \frac{\tau}{1-d} - [R(p) + \tau_r(\dot{p})]$

On définit :  $g = \frac{\tau}{1-d}|_{(n)} + E.D.\Delta t - \tau_0$  et  $P_{(\dot{p})} = b.(p_{(n)} + \dot{p}.\Delta t)^n + E.\dot{p}.\Delta t + \tau_r(\dot{p})$

$$K_{(\dot{p}^m)}^{(i)} = \left. \frac{\partial P}{\partial \dot{p}} \right|_{(\dot{p}^m)} = b.n(p_{(n)} + \dot{p}^m.\Delta t)^{n-1} \Delta t + \frac{\partial \tau_r(\dot{p})}{\partial \dot{p}}$$

- Loi "statique" :  $\tau_r(\dot{p}) = 0$  et  $\frac{\partial \tau_r(\dot{p})}{\partial \dot{p}} = 0$ .
- Taux de plasticité limitée :  $\tau_r(\dot{p}) = \frac{\tau_0}{a} \ln\left(\frac{1}{1-t_c.\dot{p}}\right)$  et  $\frac{\partial \tau_r(\dot{p})}{\partial \dot{p}} = \frac{\tau_0}{a} \frac{t_c}{1-t_c.\dot{p}}$ .

## Cas 2D - CP

En 2D -Contraintes planes, les étapes sont :

- Chargement Elastique :  $\Delta \tilde{\underline{\varepsilon}}_e = \Delta \tilde{\underline{\varepsilon}}_{en+1}^{el} = \tilde{\underline{\varepsilon}}_{en} + \Delta \tilde{\underline{\varepsilon}}_e$  et  $\tilde{\underline{\tau}}^{el} = \mathbb{C} \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}_{en+1}^{el}$
- Vérification : avec  $\tau_{el}^{VM} = \sqrt{(\tilde{\tau}_{11}^2 + \tilde{\tau}_{22}^2 - \tilde{\tau}_{11} \cdot \tilde{\tau}_{22} + 3 \cdot \tilde{\tau}_{12}^2)}$ ,  $f_{el} = \tau_{el}^{VM} - R(p_n)$
- Si  $f_{el} \leq 0$ , alors  $\tilde{\underline{\tau}}_{n+1} = \tilde{\underline{\tau}}^{el}$  et  $\tilde{\underline{\varepsilon}}_{en+1} = \tilde{\underline{\varepsilon}}_{en+1}^{el}$ ,  $\tilde{\underline{\varepsilon}}_{pn+1} = \tilde{\underline{\varepsilon}}_{pn}$
- Sinon, détermination de  $\Delta\gamma$  en assurant  $f^2(\Delta\gamma) = 0$  [ $\Delta\gamma$  est en Mpa] :

$$\circ f^2(\Delta\gamma) = \bar{\tau}^2(\Delta\gamma) - \tilde{R}^2(\Delta\gamma) \equiv 0 \text{ avec}$$

$$\bar{\tau}^2(\Delta\gamma) = \frac{1}{4} \frac{(\tilde{\tau}_{e111} + \tilde{\tau}_{e122})^2}{[1 + \frac{E}{3(1-\nu)} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma]^2} + \frac{\frac{3}{4} \cdot (\tilde{\tau}_{e111} - \tilde{\tau}_{e122})^2 + 3\tilde{\tau}_{e112}^2}{[1 + 2\mu \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma]^2} \text{ et } \bar{\tau}^2(0) = \tau_{el}^{VM2}$$

$$\text{et } \tilde{R}(\Delta\gamma) = R(p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM} \cdot \Delta\gamma^{(k)}) + \tau_r(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM} \cdot \Delta\gamma^{(k)} / \Delta t)$$

◦ initialisation :  $\Delta\gamma^{(0)} = 0$

◦ itérations : tant que  $|g(\Delta\gamma^{(k)})| < TOL$

$$P(\Delta\gamma^{(k)}) = \bar{\tau}^2(\Delta\gamma^{(k)}) - \tilde{R}^2(\Delta\gamma^{(k)})$$

$$K(\Delta\gamma^{(k)}) = \frac{\partial P}{\partial \Delta\gamma} = 2\bar{\tau} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \Delta\gamma} - 2[\tilde{R}(\Delta\gamma^{(k)})] \cdot [\frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \Delta\gamma} + \frac{\partial \tau_r}{\partial \dot{p}} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial \Delta\gamma}] \text{ avec :}$$

$$- 2\bar{\tau} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \Delta\gamma} = \frac{-1}{2} \frac{(\tilde{\tau}_{e111} + \tilde{\tau}_{e122})^2 \cdot \frac{E}{3(1-\nu)} \sqrt{\frac{3}{2}}}{[1 + \frac{E}{3(1-\nu)} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma]^2} - 2 \cdot \frac{[\frac{3}{4} \cdot (\tilde{\tau}_{e111} - \tilde{\tau}_{e122})^2 + 3\tilde{\tau}_{e112}^2] \cdot 2\mu \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{[1 + 2\mu \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma]^2}$$

$$- \frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \Delta\gamma} = n \cdot b \cdot (p_{n+1})^{n-1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM}$$

$$\circ \Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} - \frac{P(\Delta\gamma^{(k)})}{K(\Delta\gamma^{(k)})} \text{ et } p_{n+1}^{(k+1)} = p_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM} \cdot \Delta\gamma^{(k+1)}$$

- Chargement Elastique :  $\tilde{\underline{\tau}} = \mathbb{E} \cdot \tilde{\underline{\varepsilon}}_{en+1}^{el}$  avec  $\mathbb{E} = [\mathbb{C}^{-1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma \cdot \mathbb{P}_3]^{-1}$

On peut éventuellement recalculer  $\tau^{VM}$  pour estimer  $p_{n+1}^{(k+1)}$ .

$$\bullet \underline{\Delta \tilde{\varepsilon}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta\gamma \cdot \mathbb{P}_3 \cdot \tilde{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}_{pn+1} = \underline{\tilde{\varepsilon}}_{pn} + \underline{\Delta \tilde{\varepsilon}}_p \text{ et } \underline{\tilde{\varepsilon}}_{en+1} = \underline{\tilde{\varepsilon}}_{en+1}^{el} - \underline{\Delta \tilde{\varepsilon}}_p$$

• Loi "statique" :

$$\tau_r(\dot{p}) = 0 \text{ et } \frac{\partial \tau_r(\dot{p})}{\partial \dot{p}} = 0.$$

• Taux de plasticité limitée :

$$\tau_r(\dot{p}) = \frac{\tau_0}{a} \ln\left(\frac{1}{1 - t_c \cdot \dot{p}}\right) \text{ et } \frac{\partial \tau_r(\dot{p})}{\partial \dot{p}} \cdot \frac{\partial \dot{p}}{\partial \Delta\gamma} = \frac{\tau_0}{a} \cdot \frac{t_c}{1 - t_c \cdot (\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM} \Delta\gamma^{(k)} / \Delta t)} \cdot (\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tau_{el}^{VM} / \Delta t)$$

# Annexe IV : V-Umat

```

subroutine vumat(
  1 nblock, ndir, nshr, nstatev, nfieldv, nprops, lanneal,
  2 stepTime, totalTime, dt, curname, coordMp, charLength,
  3 props, density, strainInc, relSpinInc,
  4 tempOld, stretchOld, defgradOld, fieldOld,
  5 stressOld, stateOld, enerInternOld, enerInelasOld,
  6 tempNew, stretchNew, defgradNew, fieldNew,
  7 stressNew, stateNew, enerInternNew, enerInelasNew )
  8
  9 include 'vaba_param.inc'
  10
  11 C The state variables are stored as:
  12 STATE(*,1) = equivalent plastic strain
  13 STATE(*,2,3,4,5) = strain component 11,22,33,12
  14 STATE(*,6,7,8) = E1 strain component 11,22,12
  15 STATE(*,9,10,11) = P1 strain component 11,22,12
  16 STATE(*,12,13,14) = damage, flaaag, dt
  17
  18 C All arrays dimensioned by (*) are not used in this algorithm
  19 dimension props(nprops), density(nblock),
  20 coordMp(nblock,*),
  21 charLength(*), strainInc(nblock,ndir+nshr),
  22 relSpinInc(*), tempOld(*),
  23 stretchOld(*), defgradOld(*),
  24 fieldOld(*), stressOld(nblock,ndir+nshr),
  25 stateOld(nblock,nstatev), enerInternOld(nblock),
  26 enerInelasOld(nblock), tempNew(*),
  27 stretchNew(*), defgradNew(*), fieldNew(*),
  28 stressNew(nblock,ndir+nshr), stateNew(nblock,nstatev),
  29 enerInternNew(nblock), enerInelasNew(nblock)
  30
  31 C
  32 character*80 curname
  33
  34 double precision E, nu, yield, b, n, rplim, c11, c12, c33, mu,
  35 sqrttwothirds, a, tauc, dpdt,
  36 plast, eps11, eps22, eps12, epse11, epse22, epse12,
  37 epsp11, epsp22, epsp12, s11, s22, s12, svme1, Rp,
  38 d1, d1, cont, drp, Pp1, Pp2, Pp3, Pp, rrp,
  39 k1, k2, kk31, kk32, kk, x, E11, E12, E33, svm,
  40 depp11, depp22, depp12, damm, sma11, sma22, sma12,
  41 p0, pc, dlim, Fy, Fyp, sd, Rnu, flaaag, tauv, dtauv
  42
  43 C
  44 parameter( zero = 0., one = 1., two = 2., three = 3.,
  45 third = one/three, half = .5, twothirds = two/three,
  46 threeHalfs = 1.5, plastlim=0.000001 )
  47
  48 C
  49 E = props(1)
  50 nu = props(2)
  51 yield = props(3)
  52 b = props(4)
  53 n = props(5)
  54 rplim = props(6)
  55 p0 = props(7)
  56 pc = props(8)
  57 dlim = props(9)
  58 a = props(10)
  59 tauc = props(11)
  60
  61 C
  62 c11 = E / ( 1 - nu**2 )
  63 c12 = c11 * nu
  64 c33 = c11 * ( 1 - nu )
  65 mu = E / ( 2*(1 + nu) )
  66 sqrttwothirds = sqrt( twothirds )
  67
  68 C
  69 do 100 i = 1, nblock

```

```

  70 plast = stateOld(i,1)
  71
  72 f (plastlim .ge. plast) plast=plastlim
  73
  74 eps11 = stateOld(i,2) + strainInc(i,1)
  75 eps22 = stateOld(i,3) + strainInc(i,2)
  76 eps12 = stateOld(i,5) + strainInc(i,4)
  77
  78 epse11 = stateOld(i,6) + strainInc(i,1)
  79 epse22 = stateOld(i,7) + strainInc(i,2)
  80 epse12 = stateOld(i,8) + strainInc(i,4)
  81
  82 epsp11 = stateOld(i,9)
  83 epsp22 = stateOld(i,10)
  84 epsp12 = stateOld(i,11)
  85
  86 damm = stateOld(i,12)
  87 flaaag = stateOld(i,13)
  88
  89 sma11 = (1-damm)*c11 * epse11 + (1-damm)*c12 * epse22
  90 sma22 = (1-damm)*c12 * epse11 + (1-damm)*c11 * epse22
  91 sma12 = (1-damm)*c33 * epse12
  92
  93 s11 = sma11/(1-damm)
  94 s22 = sma22/(1-damm)
  95 s12 = sma12/(1-damm)
  96
  97 svme1 = sqrt( s11**2 + s22**2 - s11*s22 + 3*s12**2 )
  98 Rp = yield + b*(plast)**n
  99
  100 F ( svme1 .ge. Rp ) then
  101
  102   103 d1=0.
  104   104 d1=0.
  105   105 cont=0.
  106   106 dpdt=0.
  107   107 rrp=1.1*rp1im
  108   108 d1=1.1*rp1im
  109
  110   109 continue
  111   110 F (abs(rrp) .le. rplim) go to 30
  112   111 continue
  113   112 F (abs(d1) .le. rplim) go to 30
  114   113 continue
  115   114 cont=cont+1
  116   115 Rp = yield + b*(plast+d1*sqrttwothirds*svme1)**n
  117   116 dRp=b*n*(plast+d1*sqrttwothirds*svme1)**(n-1)*
  118   117 sqrttwothirds*svme1
  119   118 tauv = (yield/a)*log(1/(1 - tauc*dpdt))
  120   119 dtauv=(yield/a)*(tauc/(1-tauc*dpdt))*(sqrttwothirds*svme1/dt)
  121
  122   120 Pp1 = ( 0.25*(s11 + s22)**2 ) /
  123   121 (1-( E/(3*(1-nu))*sqrt(1.5)*d1 ))**2
  124   122 Pp2 = ( 0.75 * (s11-s22)**2 + 3*s12**2 ) /
  125   123 (1+2*mu*sqrt(1.5)*d1)**2
  126   124 Pp3 = -( Rp + tauv )**2
  127   125 Pp = Pp1 + Pp2 + Pp3
  128   126 rrp = sqrt(Pp1+Pp2) - sqrt(-Pp3)
  129
  130   127 kk1 = -0.5 * ( (s11 + s22)**2 * ( E/(3*(1-nu))*sqrt(1.5) ) ) /
  131   128 (1-( E/(3*(1-nu))*sqrt(1.5)*d1 ))**2
  132   129 kk2 = -2*( 0.75 * (s11-s22)**2 + 3*s12**2 )**2*mu*sqrt(1.5) ) /
  133   130 (1+2*mu*sqrt(1.5)*d1)**2
  134   131 kk31 = Rp+tauv
  135   132 kk32 = dRp + dtauv
  136   133 kk = kk1 + kk2 - 2*kk31*kk32
  137
  138   134 d1=-Pp/kk

```

```

V_Umat.f.txt
D1=D1+dD1
dD1=D1*sqrttwoThirds*svme1/dt
if (dD1 >= (1/tauc) ) then
  D1=0.1*(D1-dD1) + 0.9*dD1/(sqrttwoThirds*svme1*tauc)
  dD1=D1*sqrttwoThirds*svme1/dt
if (dD1 >= (1/tauc - 0.0000001) ) then
  dD1=1/tauc - 0.0000001
  D1=dD1*dt/(sqrttwoThirds*svme1)
go to 30
endif
endif
go to 10
continue
30 continue
x=sqrt(1.5)*D1
E11=( 3*c11 + 2*x*c11**2 - 2*x*c12**2 )/
( x**2 * c11**2 - x**2 * c12**2 + 4*x*c11 - 2*x*c12 + 3)
E12=( 3*c12 - x*c12**2 + x*c11**2)/
( x**2 * c11**2 - x**2 * c12**2 + 4*x*c11 - 2*x*c12 + 3)
E33=(3 * c33)/(3 + x*c33)
s11 = E11 * epsel1 + E12 * epsel2
s22 = E12 * epsel1 + E11 * epsel2
s12 = E33 * epsel2
svm = sqrt( s11**2 + s22**2 - s11*s22 + 3*s12**2 )
plast = plast+ D1*sqrttwoThirds*svm
stateNew(i,1) = plast
depsp11 = D1*sqrt(1.5)*(2*s11-s22)/3
depsp22 = D1*sqrt(1.5)*(2*s22-s11)/3
depsp12 = D1*sqrt(1.5)*s12
stateNew(i,2) = epsp11
stateNew(i,3) = epsp22
stateNew(i,5) = epsp12
stateNew(i,6) = epsel1 - depsp11
stateNew(i,7) = epsel2 - depsp22
stateNew(i,8) = epsel2 - depsp12
stateNew(i,9) = epsp11 + depsp11
stateNew(i,10) = epsp22 + depsp22
stateNew(i,11) = epsp12 + depsp12
stateNew(i,14) = stepTime
depsel1 = strainInc(i,1) - depsp11
depsel2 = strainInc(i,2) - depsp22
depsel2 = strainInc(i,4) - depsp12
strainInc(i,3)=-nu/(1-nu)*(depsel1+depsel2)-(depsp11+depsp22)
stateNew(i,4)=stateOld(i,4) + strainInc(i,3)
stressNew(i,1)= s11*(1-damm)
stressNew(i,2)= s22*(1-damm)
stressNew(i,3)= 0
stressNew(i,4)= s12*(1-damm)
sd = (s11 + s22)/3
if (svm .eq. zero) then
  Rnu=1

```

Page 3

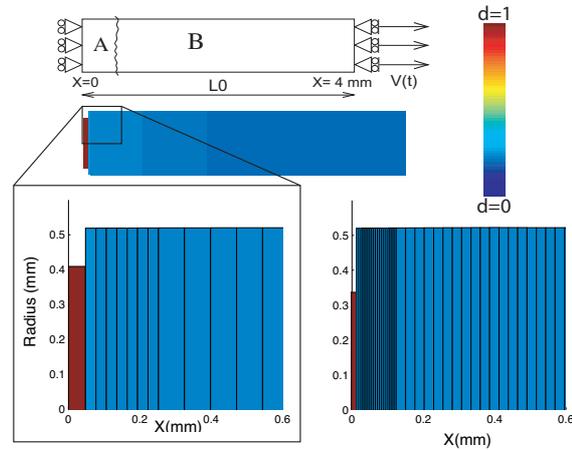
```

V_Umat.f.txt
else
  Rnu = twoThirds*(1+nu) + 3*(1-2*nu)*(sd/svm)**2
endif
Fyp=0.
Fy=( ( plast*Rnu - p0)/(pc - p0) )**3
if (Fy >= zero) then
  Fyp = Fy
endif
if (Fyp >= damm) then
  damm = Fyp
endif
if (damm >= dlim) then
  damm = dlim
  flaug = 0
endif
stateNew(i,12)= damm
stateNew(i,13)= flaug
stateNew(i,14)= dlim
else
stateNew(i,1) = plast
stateNew(i,2) = epsp11
stateNew(i,3) = epsp22
stateNew(i,5) = epsp12
stateNew(i,6) = epsel1
stateNew(i,7) = epsel2
stateNew(i,8) = epsel2
stateNew(i,9) = epsp11
stateNew(i,10) = epsp22
stateNew(i,11) = epsp12
stateNew(i,12)= damm
stateNew(i,13)= flaug
stateNew(i,14)= stepTime
depsel1 = strainInc(i,1)
depsel2 = strainInc(i,2)
depsel2 = strainInc(i,4)
strainInc(i,3)=-nu/(1-nu)*(depsel1+depsel2)
stateNew(i,4) = stateOld(i,4) + strainInc(i,3)
stressNew(i,1)= sma11
stressNew(i,2)= sma22
stressNew(i,3)= 0
stressNew(i,4)= sma12
endif
continue
return
end

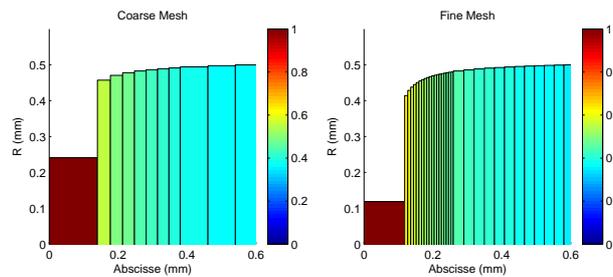
```

Page 4

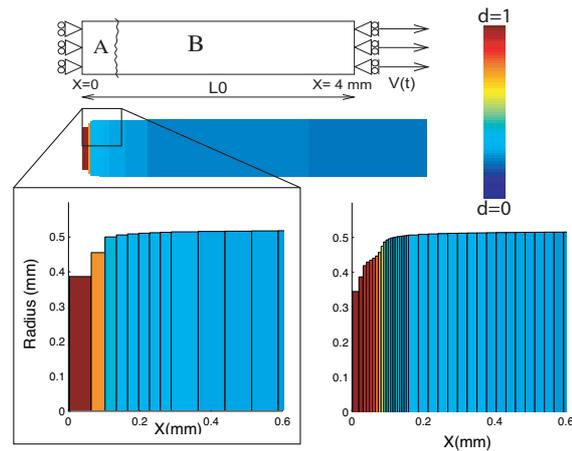
## **Annexe V : Figures en couleur**



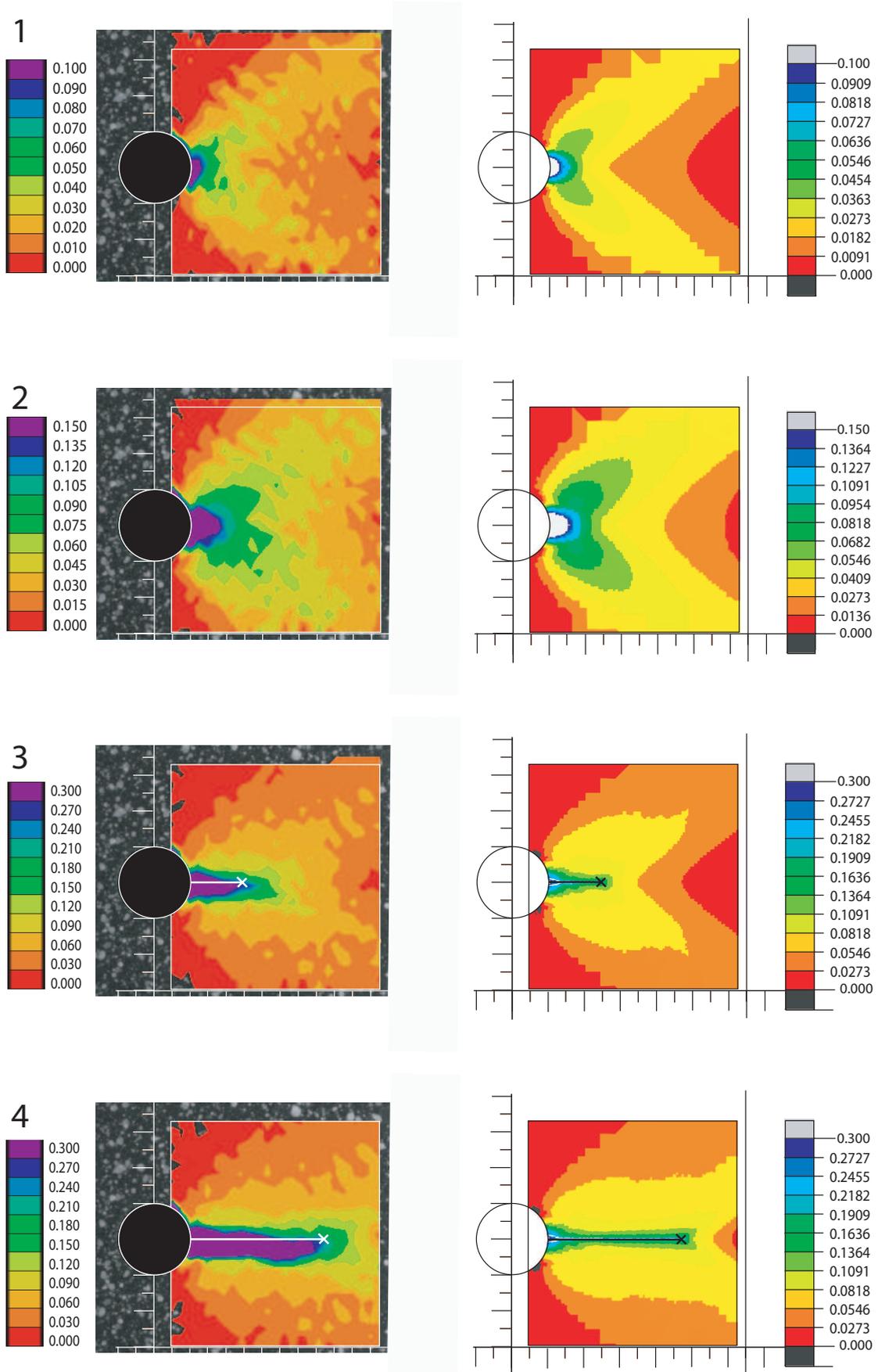
p81, Fig. 4.7 : Modèle "statique" : configuration à rupture (quand  $d = d_c$ ).



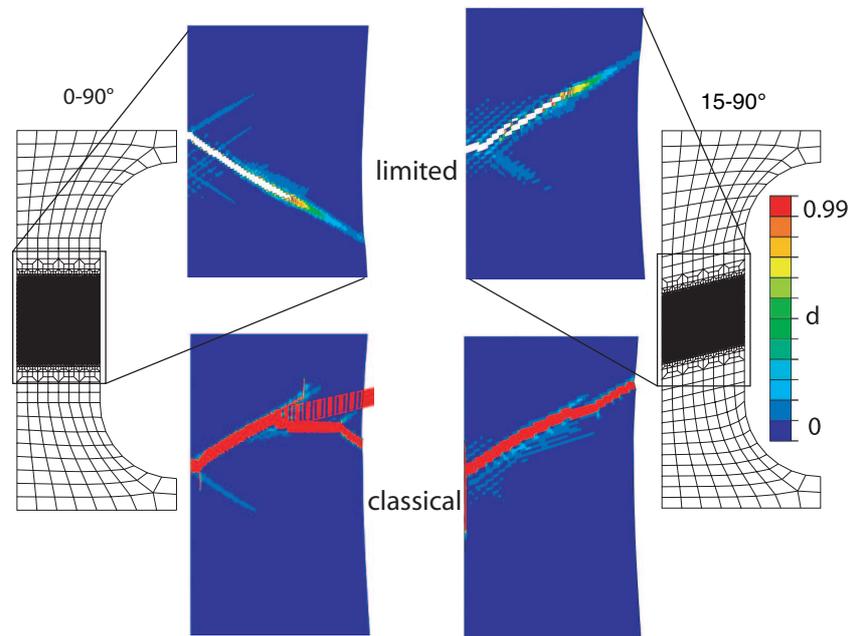
p88, Fig. 4.14 : Modèle à taux d'endommagement limité : configuration à rupture.



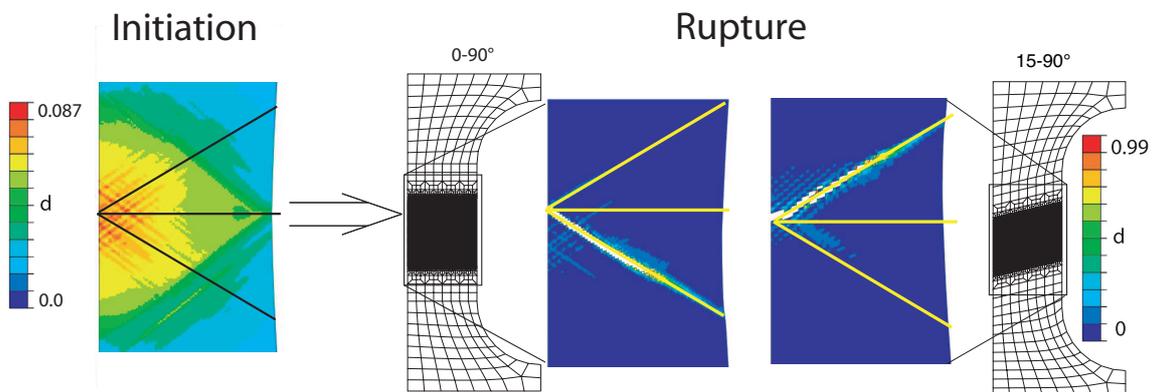
p94, Fig. 5.1 : Modèle d'époussement plastique à taux limités - modélisation 1D : configuration à rupture indépendante de la taille de maille.



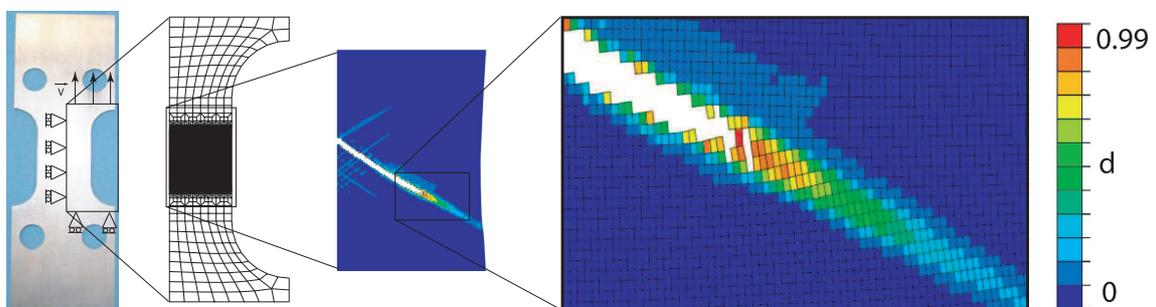
p126-127, Fig. 6.9-6.10 : Comparaison essais/simulations,  $\epsilon_{yy}$ , images 1,2, 3 et 4.



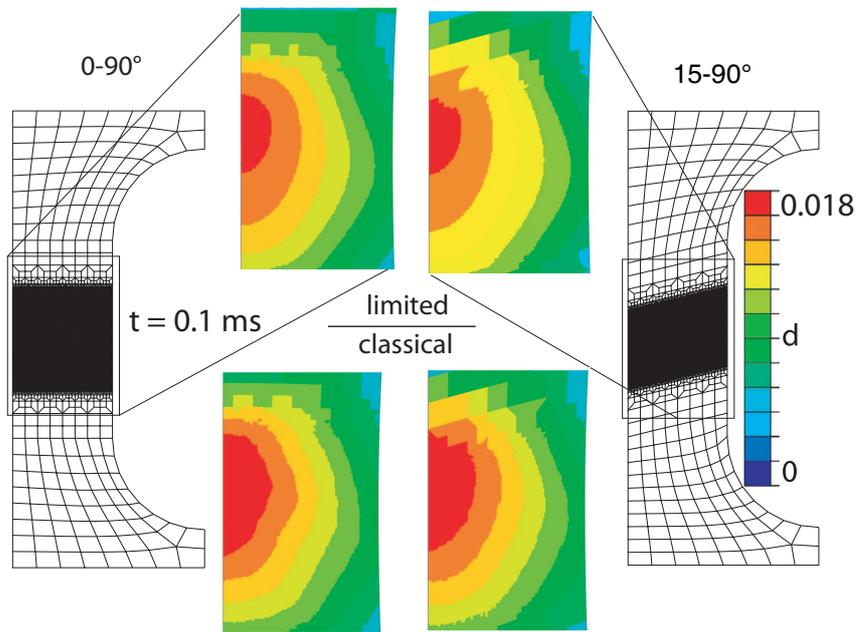
p129, Fig. 6.12 : Eprouvette lisse, simulation - Modèles classique et à taux limité.



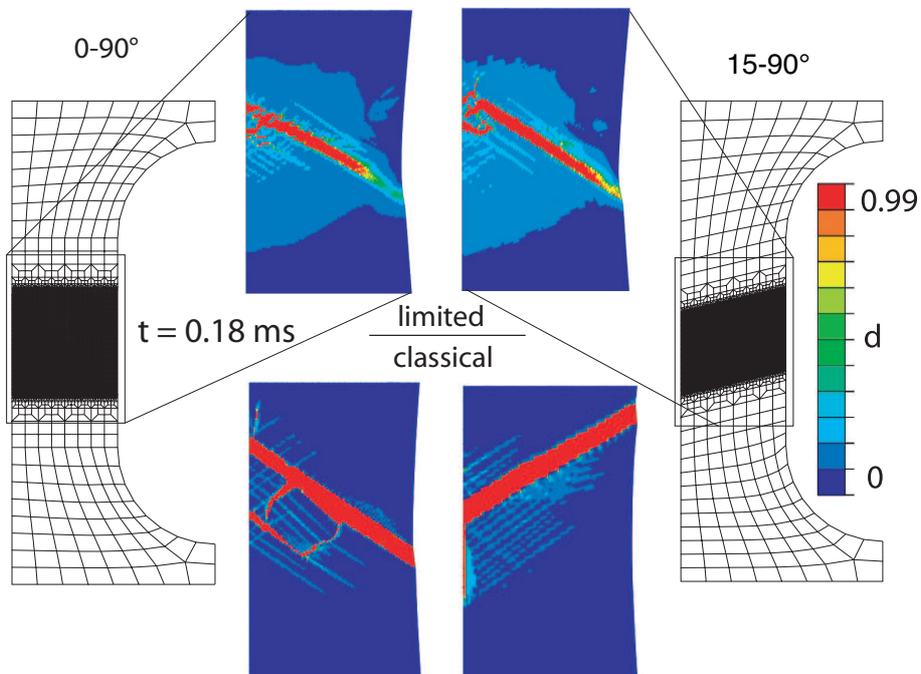
p130, Fig. 6.13 : Eprouvette lisse - Influence de l'orientation du maillage.



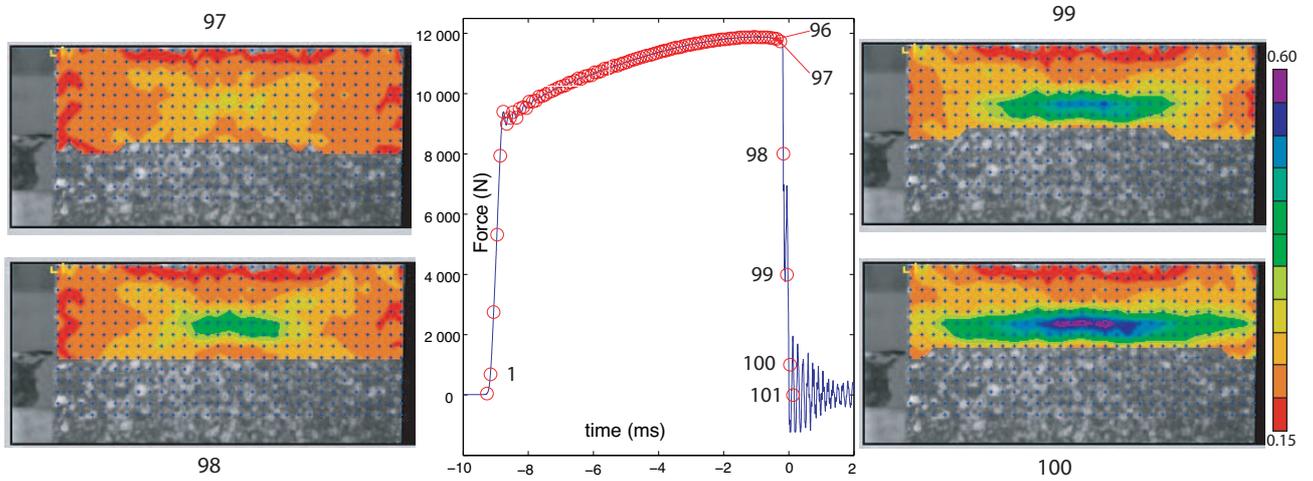
p131, Fig. 6.14 : ABAQUS 2D : indépendance à la taille de maille.



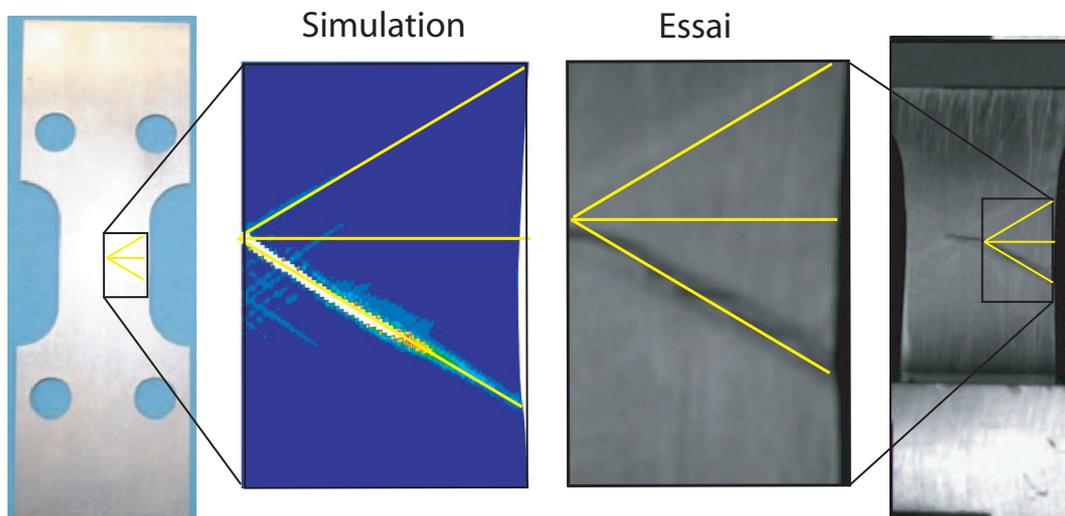
p132, Fig. 6.16 : ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, pré-localisation.



p133, Fig. 6.17 : ABAQUS 2D : influence de l'orientation du maillage, localisation.



p134, Fig. 6.19 : Epreuve lisse, mode de rupture, bifurcation de mode.



p134, Fig. 6.20 : Comparaison essais/simulations, éprouvette lisse, chemin de rupture.

# Bibliographie

- [1] Z.P. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *Journal of Engineering and Mechanics*, 102 :331–344, 1976.
- [2] D. Lasry and T. Belytschko. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6) :581–597, 1988.
- [3] L.J. Sluys and R. De Borst. Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium : Model formulation and one dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :2945–2958, 1992.
- [4] L.J. Sluys. *Wave propagation, localisation and dispersion in strain softening solids*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1992.
- [5] C. Comi and U. Perego. On visco-damage models for concrete at high strain rates. *Owen, D.R.J., Onate, E. and Hinton, E. (eds) Computational Plasticity. CIMNE, Barcelona 1997*, pages 1550–1555, 1997.
- [6] P. Ladevèze. About a damage mechanics approach. *Mechanics and Mechanisms of damage in composites and multi-materials*, eds Baptiste D.(London) :119–141, 1991.
- [7] P. Ladevèze and E. Le Dantec. Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composite Science and Technology*, 43 :257–267, 1992.
- [8] P. Ladevèze. Towards a fracture theory. *Third international conference on computational plasticity*, eds Owen, D.R.J, Hinton, E..(Cambridge : Pineridge Press) :1369–400, 1992.
- [9] O. Allix and J.F. Deü. Delay damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering transactions*, 45 :29–46, 1997.
- [10] J.F. Deü. *Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apports des mésomodèles avec endommagement retardé*. PhD thesis, LMT Cachan, 1997.
- [11] J. Sen-Gupta, O. Allix, P.A. Boucard, A. Fanget, and P.L. P.L. Hereil. Fracture prediction of a 3d c/c under impact. *Composite Science and Technology*, 65 :375–386, 2005.

- [12] A. Suffis. *Développement d'un modèle d'endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2004.
- [13] A. Suffis, A. Combescure, and A. Lubrecht. Damage model with delayed effect : Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristics length. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :3463–3476, 2003.
- [14] F. Hild, B. Raka, S. Baudequin, S. Roux, and F. Cantelaube. Multiscale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Appl. Optics*, IP 41(32) :6815–6828, 2002.
- [15] C. Truesdell and R.A. Toupin. The classical field theories. *Handbuch der Physik*, edited by S. Flügge, in. *New York Springer-Verlag*, III(1) :266–793, 1960.
- [16] C. Truesdell and W. Noll. The non linear field theories of mechanics. *Handbuch der Physik*, edited by S. Flügge, in. *New York Springer-Verlag*, III(3) :602, 1965.
- [17] A.L. Cauchy. Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. *leçons données à l'école royale polytechnique*, 1823.
- [18] D.C. Drucker. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal de Mécanique*, 3(2) :235–249, 1964.
- [19] J.P. Cordebois. *Critère d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations*. PhD thesis, Thèse d'état : Université Paris VI, 1983.
- [20] J.P. Cordebois and P. Ladevèze. Détermination et étude des courbes limites d'emboutissage des tôles minces. *Mémoires et Etudes Scientifiques - Revue de Métallurgie*, janvier 1984.
- [21] J.P. Cordebois and P. Ladevèze. Necking criterion applied in sheet metal forming. *Colloques internationaux du CNRS - N° 319 - Comportement plastique des solides anisotropes*, 1984.
- [22] J.P. Cordebois and P. Ladevèze. Sur la prévision des courbes limites d'emboutissage. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1986.
- [23] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate-dependent materials. some general considerations. in q.s. nguyen, editor. *Bifurcation and stability of dissipative systems*, pages 1–44, 1991. Springer Verlag.
- [24] A.G. Considere. Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. *Annales des Ponts et Chaussées*, 9(6) :574–775, 1885.
- [25] W. Swift. Plastic instability under plane strain conditions. *International Journal Frac. Mech.*, 1 :1–18, 1952.
- [26] R. Hill. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1 :19, 1952.

- [27] R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6 :236–249, 1958.
- [28] K Runesson and Z. Mroz. A note on non-associated flow rules. *International Journal of Plasticity*, 5 :639–658, 1989.
- [29] J.R. Rice. The localization of deformation. In *W.T. Kiter, ed, Theoretical and Applied Mechanics; North publishing Company*, 1976.
- [30] S.T. Pietruszczak and Z. Mroz. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Mechanics*, 17 :327–334, 1981.
- [31] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2) :189–214, 1987.
- [32] T. Belytschko, J. Fish, and B.E. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(1) :59–89, 1988.
- [33] M. Klisinski, K. Runesson, and S. Sture. Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(3) :575–587, 1991.
- [34] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *Journal of Computational Mechanics*, 12 :277–296, 1993.
- [35] Z.P. Bazant and M. Jirasek. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. *Journal of Engineering and Mechanics ASCE*, 128 :1119–1149, 2002.
- [36] D. Lasry and T. Belytschko. A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics. *Computers and Structures*, 33(3) :707–715, 1989.
- [37] E. Kröner. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, 3 :731–742, 1967.
- [38] A.C. Eringen and D.G.B. Edelen. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10 :233–248, 1966.
- [39] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bazant. Non local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533, 1987.
- [40] K. Saanouni, J.L. Chaboche, and P.M. Lesne. On the creep crack-growth prediction by a non local damage formulation. *European Journal of Mechanics and Solids*, 8 :437–459, 1989.
- [41] J.B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization. *Journal of Applied Mechanics*, 61 :236–242, 1994.
- [42] V. Tvergaard and A. Needleman. Effects of non-local damage in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 32(8-9) :1063–1077, 1995.

- [43] M. Jirasek and S. Rolshoven. Comparison of integral-type nonlocal plasticity models for strain-softening materials. *International Journal of Engineering Science*, 41 :1553–1602, 2003.
- [44] G.A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 15 :173–192, 1990.
- [45] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Transactions of ASME. J. Mat. Engng. Techn.*, 106 :326–330, 1984.
- [46] E.C. Aifantis. One the dynamical origin of dislocation patterns. *Mater. Sci. Eng.*, 81 :853, 1986.
- [47] E.C. Aifantis. The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 3 :211–247, 1987.
- [48] E.C. Aifantis. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal Eng Sci*, 30 :1279–1299, 1987.
- [49] T. Desoyer and F.S. Leroux. Etude de la localisation pour une loi de comportement élastique-endommageable avec gradients de déplacement d’ordre supérieur. *Comptes-rendus de l’Académie des sciences*, 318 :272–282, 1994.
- [50] M. Fremond and Bs. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual work. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8) :1083–1103, 1996.
- [51] H.B. Mühlhaus and E.C. Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28 :845–857, 1991.
- [52] R. De Borst and H.-B. Mühlhaus. Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :521–540, 1992.
- [53] C. Comi and U. Perego. A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3731–3755, 1996.
- [54] R.A.B. Engelen, M.D.G. Geers, and F.T.P. Baaijens. Non local implicit gradient-enhanced elasto-plasticity fro the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*, 19 :403–433, 2003.
- [55] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 :83–89, 1985.
- [56] R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. De Vree. Gradient enhanced damage for quasi brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :3391–3403, 1996.
- [57] R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, J.H.P. De Vree, and I. Spee. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. *European Journal of Mechanics and Solids*, 15 :937–953, 1996.

- [58] E. Lorentz and V. Cano. A non-local formulation applied to ductile damage. *Recent developpements in the modelling of rupture in solids, foz do iguaçu Brazil*, pages 13–18, 2003. A. Benallal S.P.B. Proença.
- [59] F. Reusch, B. Svendsen, and D. Klingbeil. Local and non-local guron-based ductile damage and failure modelling at large deformation. *European Journal of Mechanics and Solids*, 22(6) :779–792, nov-dec 2003.
- [60] Z.P. Bazant, T. Belytschko, and T.P. Chang. Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering and Mechanics*, 110 :1666–1692, 1984.
- [61] R.H.J. Peerlings, M.G.D Geers, R. De Borst, and W.A.M. Brekelmans. A critical comparison of non-local and gradient enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :7723–7746, 2001.
- [62] G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bazant. Dynamic stability analysis with nonlocal damage. *Computers and Structures*, 29(3) :503–507, 1988.
- [63] E. Lorentz and S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :2905–2936, 2003.
- [64] C. Comi and U. Perego. Numerical aspects of nonlocal damage analyses. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 10 :227–242, 2001.
- [65] G. Fichera. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. *Mechanics of solids*, 2 :391–424, 1984. C.C. Truesdell ed, Springer, Berlin.
- [66] C. Comi. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi brittle materials. *Mechanics of Cohesive-Frictionnal Materials*, 4 :17–36, 1999.
- [67] G. Pijaudier-Cabot and A. Huerta. Finite element analyses of bifurcation in non-local strain softening solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90 :905–919, 1991.
- [68] E. Cosserat and F. Cosserat. Théorie des corps déformables. *Hermann et fils*, 16 :155–177, 1909.
- [69] R.A. Toupin. Elastic materials with couple stress. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11 :385–414, 1962.
- [70] R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1 :417–438, 1965.
- [71] A.C. Eringen. Mechanics of micromorphic materials. *Goertler, H. and Sorger, P. (eds) Applied Mechanics. Proc 11th Int. Congress - Springer Berlin*, pages 131–138, 1966.
- [72] P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [73] R. Chambon, D. Caillerie, and N. El Hassan. One-dimensional localisation studied with second grade model. *European Journal of Mechanics*, 17 :637–656, 1998.

- [74] T. Matsushima, R. Chambon, and D. Caillerie. Second gradient models as a particular case of microstructured models : a large strain finite element analysis. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 328(II b) :176–186, 2000.
- [75] R. Chambon, D. Caillerie, and T. Matsushima. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :8503–8527, 2001.
- [76] R. Chambon, D. Caillerie, and C. Tamagnini. A finite deformation second gradient theory of plasticity. *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, 329(II b) :797–802, 2001.
- [77] C. Tamagnini, R. Chambon, and D. Caillerie. A second gradient elastoplastic cohesive-frictional model for geomaterials. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 329(II b) :735–739, 2001.
- [78] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 :51–78, 1964.
- [79] H.B. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnique*, 37 :271–283, 1987.
- [80] R. De Borst. Simulation of strain localisation : A reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8 :317–332, 1991.
- [81] R. De Borst and L.J. Sluys. Localisation in a cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90 :805–827, 1991.
- [82] H.B. Mühlhaus and E.C. De Borst, R. and Aifantis. Constitutive models and numerical analyses for inelastic materials with microstructure. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, (Eds. G. Beer, J.R. Booker and J.P. Carter), Balkema, Rotterdam and Boston, 33 :337–386, 1991.
- [83] R. De Borst, L.J. Sluys, H.-B. Mühlhaus, and J. Pamin. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 2(10) :99–12, 1993.
- [84] S. Forest, G. Cailletaud, and R. Sievert. A cosserat theory for elastoviscoplastic single crystals at finite deformation. *Archives of Mechanics*, 49 :705–736, 1997.
- [85] A. Suffis and A. Combescure. Modèle d'endommagement à effet retard, étude numérique et analytique de l'évolution de la longueur caractéristique. *Revue européenne des éléments finis*, 11(5), 2002.
- [86] B. Loret and J.H. Prevost. Dynamic strain localization in elasto-visco-plastic solids, part i. general formulation and one-dimensional examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83 :247–273, 1990.
- [87] P. Peryzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. *Recent Advances In Applied Mechanics*, 9 :243–377, 1966. Academic Press, New York.
- [88] G. Duvaut and J.L. Lions. Les inéquations en mécanique et en physique. *Dunod*, 1972. Paris.

- [89] A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :69–85, 1988.
- [90] A. Suffis and A. Combescure. Von mises plasticity coupled with delayed damage. *COMPLAS'03*, Barcelona, 2003.
- [91] G. Court, O. Allix, and M. Mahé. Modèle à taux de croissance limité pour la prévision de la rupture ductile de structures en grandes déformations. *Congrès Français de Mécanique*, 2005.
- [92] G. Pijaudier-Cabot and H. Benallal. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13) :1761–1775, 1993.
- [93] H. Benallal and V. Tvergaard. Non local continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(5) :741–770, 1995.
- [94] N. Triantafydillis and E.C. Aifantis. A gradient approach to localization of deformation : I. hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16 :225–237, 1986.
- [95] F.H. Wu and L.B. Freund. Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(2) :119–132, 1984.
- [96] L.J. Sluys, R. De Borst, and Mühlhaus H.B. Wave propagation, localisation and dispersion in a gradient-dependent medium. *International Journal of Solids and Structures*, 30(9) :1153–1171, 1993.
- [97] F. Sidoroff. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic plastic finite strain. *Arch. Mech.*, 25(2) :299–308, 1983.
- [98] A. Dogui. *Plasticité anisotrope en grandes déformations*. PhD thesis, Thèse d'état - Lyon, 1989.
- [99] J. Mandel. *Plasticité et viscoplasticité*. Springer-Verlag, CISM, Udine, 1971.
- [100] P. Rougee. *Mécanique des grandes transformations*. Springer-Verlag, Mathématiques et applications(25), 1997.
- [101] J.C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66 :199–219, 1988.
- [102] P. Ladevèze. Sur la theorie de la (visco-)plasticité en grandes déformations : une nouvelle famille de modèles avec ou sans endommagement et stratégie de calcul. Technical Report 220, LMT-Cachan, 1998.
- [103] A.E. Green and P.M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. of rat. Mech. Analysis*, 18 :251–281, 1965.

- [104] A. De Gayffier, G. Nefussi, and P. Gilormini. Transformations cycliques planes en hypoélasticité. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 326(2 b) :297–300, 1998.
- [105] P. Gilormini. Abaqus en grandes transformations : Quelles déformations et quels comportements? Technical Report 139, LMT-Cachan, 1992.
- [106] G. Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differential-gesetze sitzber. *akad. Wiss. Wien*, 120 :385–530, 1911.
- [107] A.E. Green and B.C. McInnis. Generalized hypo-elasticity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A 57(3) :220–230, 1967.
- [108] P. Ladevèze. Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations. Technical Report 9, LMT-Cachan, 1980.
- [109] A. Dogui and F. Sidoroff. Large strain formulation of anisotropic elasto plasticity for metal forming, computational methods for predicting material processing defects. *M. Predeleanu Editor*, 1987. Elsevier-Science.
- [110] J. Salençon. Mécanique des milieux continus - tome 1. *Cours à l'école polytechnique*, 1996.
- [111] J. Salençon. Mécanique des milieux continus - tome 2 - thermoélasticité. *Cours à l'école polytechnique*, 1996.
- [112] J. Lemaitre. A course on damage mechanics. *Springer-Verlag*, 1992.
- [113] J. Besson, G Cailletaud, J.L. Chaboche, and S. Forest. Mécanique non-linéaire des matériaux. *Hermès*, 2001.
- [114] B. Halphen and Q.S. N'Guyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 14(1) :39–63, 1975.
- [115] L.M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk - U.S.S.R. - Otd Tech Nauk*, 8 :26–31, 1958. in Russian.
- [116] Y.N. Rabatnov. Creep rupture. *Proceeding - XII Int. Conf. Appl. Mech. - Stanford*, 1968.
- [117] J. Lemaitre. Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading. *Proceedings-I.C.M. 1-Kyoto-Japan*, 1971.
- [118] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth - part i. yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.
- [119] G. Rousselier. An experimental and analytical study of ductile fracture and stable crack growth. *Specialists Meeting on Elastic-plastic Fracture Mechanics, Daresbury, OECD-NEA-CSNI report 32*, 2 :14.1–14.5, 1978.
- [120] V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. *Advances in Applied Mechanics*, 27 :83–151, 1990.
- [121] J. Lemaitre. Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, II :1125–1130, 1987.

- 
- [122] L.J. Sluys and R. De Borst. Dispersive properties of gradient-dependent and rate dependent media. *Mech. Mat.*, 18 :131–149, 1994.
- [123] D.R. Curran, L. Seaman, and D.A. Shockey. Dynamic failure of solids. *Physics Report (Review Section of Physics Letters)*, 147 :253–388, 1987.
- [124] N. F. Morozov and Y.V. Petrov. Incubation time based testing of materials. *European Journal of Mechanics and Solids*, 25 :670–676, 2006.
- [125] C. Comi and L. Driemeier. On gradient regularization for numerical analyses in the presence of damage. *De Borst, R. and Van Der Giessen, E. (eds) Material Insatibilities in Solids. IUTAM*, 26 :425–440, 1997.
- [126] O. Allix, P. Feissel, and P. Thevenet. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81 :1177–1191, 2003.
- [127] A.S. Bayart. *Modélisation multi-échelle d’un assemblage riveté aéronautique - vers un modèle de fragilisation structurale*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2005.
- [128] F. Hild, S. Roux, and Y. Berthaud. Analyse des performances de la détermination d’un champ de déplacement par corrélation d’images numériques. *Colloque - Nouveaux Moyens Optiques pour l’Industrie, II* :239–244, 1999.
- [129] G. Haugou. *Moyens d’essais et de caractérisation de lois de comportement matérielles en dynamique moyennes vitesses*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2003.