ETUDE DE LA DENSITE D'ETATS SURFACIQUES DE CERTAINS OPéRATEURS DE SCHRöDINGER.

Boutheina Souabni

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7

ED DE SCIENCES MATHÉMATIQUES DE PARIS CENTRE

DOCTORAT DE

MATHÉMATIQUES

présenté par

Boutheina SOUABNI

TITRE :

ÉTUDE DE LA DENSITÉ D'ÉTATS SURFACIQUES DE CERTAINS OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER

Thèse dirigée par :

Lech ZIELINSKI
Soutenue le : 8 juillet 2008

Jury :

Mme Anne BOUTET de MONVEL	
M. Petru COJUHARI	Rapporteur
M. Jean Michel COMBES	Rapporteur
M. Håkan ELIASSON	
M. Daniel LENZ	
M. Peter STOLLMANN	
M. Gunter STOLZ	
M. Lech ZIELINSKI	

0

Remerciements

Les mots ne suffiraient pas pour exprimer ma profonde gratitude envers Lech Zielinski, mon directeur de thèse. Sans sa confiance, sa générosité et sa patience, cette thèse n'aurait vu le jour. Je veux vivement le remercier pour la liberté qu'il m'a accordée et les responsabilités qu'il m'a confiées qui m'ont permis d'atteindre une maturité scientifique que je n'aurais pas imaginée auparavant. Ses qualités scientifiques exceptionnelles associées à ses qualités humaines aussi merveilleuses m'ont aidé à surmonter même les moments les plus délicats de cette thèse. Nos discussions sur le plan professionnel ont toujours été un moment fort agréable me permettant de retrouver réconfort et sérénité.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Jean Michel Combes et Petru Cojuhari en acceptant de lire mon manuscrit. Je les remercie vivement pour leurs bons rapports.

Un grand merci à Anne Boutet de Monvel, Håkan Eliasson, Daniel Lenz, Peter Stollmann, Gunter Stolz qui ont tous accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Jean-Jacques Sansuc pour tous ces conseils administratif.

Je ne saurais oublier ici le personnel de l'institut de mathématiques de jussieu et de la bibliothèque de recherche mathématique qui mettent à la disposition des doctorants un cadre de travail privilégié. Je tiens à saluer les énormes efforts que fournit notre chère secrétaire Mme Wasse pour nous faciliter toutes les taches lourdes. Je la remercie pour son sourire constant et serviabilité sans limite.

Tous mes remerciements à mes chers collègues avec qui j'ai partagé le même bureau 7C6 ces années de thèse sans qui l'ambiance de travail n'aurait pu être aussi chaleureuse. Merci Titem pour tes discussions et ton aide. Merci Masseye pour ta gentillesse. Je finirai par ma très chère Aicha, quel beau cadeau de t'avoir eu à mes côtés tout le long de ces années et jusqu'aux dernières heures pour finir ce long travail. C'était bien et tout simplement bien, même les moments les plus durs étaient bien grâce à ta présence. Ces beaux moments qu'on a partagés ensemble resteront à jamais gravés dans ma mémoire. Milles merci !

Ma dette de reconnaissance va en premier lieu à ceux grâce à qui j'ai vu le jour, à mes parents, sans qui je n'aurais jamais été ce que je suis, sans leurs nombreux sacrifices, ce travail n'aurait jamais pu aboutir. Vous êtes des parents exceptionnels, merci de m'avoir appris à ne jamais m'arrêter avant d'arriver, merci de m'avoir appris à donner

sans compter, merci de m'avoir indiqué les bons chemins, merci de m'avoir encouragé à réaliser des rêves chers. Merci maman pour tout les messages, ils étaient source de mon énergie, tu étais certes loin de moi mais toujours dans mes pensées. Merci papa, d'avoir cru en moi, ta confiance en moi était la clé de ma réussite. je ne peux écrire tout ce que j'ai envie de vous dire peur de ne jamais pouvoir s'arrêter, merci d'avoir été si formidables !

Je tiens à remercier, mon mari Jalel, pour avoir accepté tant de sacrifices pour l'aboutissement de cette thèse. Je le remercie pour le respect qu'il donne à mes choix et pour toutes les bonnes conditions qu'il sue me mettre pour motiver mon travail. Je lui dis tout simplement, merci d'avoir donné un meilleur sens à ma vie qui sans toi ne serait pas une vie !

Je tiens à remercier ma soeur Leila, qui j'ai partagé tous les bons moments de mon enfance. J'étais très sensible à ces nombreux conseil d'encouragement et à sa présence à ma soutenance. Un grand bisou pour Yesmine que Dieu la protège ...

j'associe mes sincères remerciements à mon frère Oussama. Je le remercie pour son aide sans limite, pour la chance que j'ai de l'avoir à mes côtés sur Paris. Je le remercie pour son affection, pour sa générosité, pour toute son attention et pour son écoute. Une petite pensée a mon petit frère Seifellah a qui me manque a Paris..

Un grand merci, à ma belle soeur Naziha et ses enfants Najah, Hassen, Wissem, Amira pour tout les aides. Merci Amor pour tout ce que tu a fait pour passer les difficultés informatique.

Tous mes remerciements à ma très chére tante Dalila pour l'amour qu'elle à témoigne depuis toutes petite.

Merci à toute ma famille qui a sue me soutenir de loin tout au long de ce parcours.

Ceux qui ne croient pas aux amis, c'est parce qu'ils n'ont jamais connu la mienne ! Un très grand merci à ma chère amie : Radhia et pour son aides et son soutien continu.

Je finirai par embrasser ma petite lumière qui a éclairé ma vie, **Aladin**, dont le regard innocent m'a toujours redonné sourire.

Je dédie cette thèse,
à celui qui m'appris à aimer cette science,
à celui qui m'appris à faire des maths,
à mon père..

Table des matières

Introduction

Cette thèse contient une étude spectrale de certaines classes d'opérateurs de Schrödinger continus (agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$) et discrets avec le potentiel du type surfacique. Le modèle de base est donné par la formule

$$H = -\Delta + V \tag{0.1}$$

où $-\Delta$ est le laplacien sur $\mathbb{R}^d$ et $(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x)$ est l'opérateur de multiplication par une fonction réelle de la variable $v(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ identifiée avec $x \in \mathbb{R}^d$, $d = d_1 + d_2$, décroissante assez rapidement par rapport à la variable $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, p. ex.

$$| v(x_1, x_2) | \leqslant C(1+ | x_2 |)^{-d_2-\delta_0} \tag{0.2}$$

pour certaines constantes $C, \delta_0 > 0$ et possédant des propriétés d'ergodicité par rapport à la variable $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ pour assurer l'existence de l'objet dit "la densité d'états surfaciques".

Cette introduction est divisée en parties suivantes :

(A) *La densité d'états des opérateurs de Schrödinger ergodiques*

(B) *La notion du déplacement spectral*

(C) *La densité d'états surfaciques*

(D) *Une brève description de résultats de la thèse*

(E) *Les énoncés des résultats de chaque chapitre*

(F) *L'index des notations essentielles*

(A) *La densité d'états des opérateurs de Schrödinger ergodiques*

La modélisation des phénomènes physiques en milieu désordonné conduit à l'étude de l'opérateur de Schrödinger aléatoire

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega$$

où $\omega \in \Omega$ et $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité $\mathbf{P}$. En particulier le modèle de la structure périodique d'un cristal idéal perturbée de manière homogène en moyenne spatiale devrait assurer l'existence de la limite thermodynamique comparant le volume avec le nombre des niveaux d'énergie du système restreint à une région bornée. Une théorie générale de ces modèles a été développée par L. Pastur ([53], [54]) qui a introduit la notion de la densité d'états d'opérateurs ergodiques. Dans le cas où V_ω est l'opérateur de multiplication par la fonction $v_\omega(x)$ on suppose que l'on a

$$v_\omega(x-z) = v_{\tau_z\omega}(x),$$

avec une application mesurable $\tau_z : \Omega \to \Omega$ conservant la mesure $\mathbf{P}$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ (respectivement $z \in \mathbb{Z}^d$). L'hypothèse de l'ergodicité signifie que l'on doit avoir $\mathbf{P}(A) = 0$ ou 1 si $A \in \mathcal{F}$ est τ_z-invariant pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ (respectivement $z \in \mathbb{Z}^d$).

Une classe des opérateurs de Schrödinger ergodiques est donnée par le potentiel presque périodique. En effet, suivant M. A. Shubin [59] on peut définir $\mathbf{P}$ comme la mesure de Haar sur le groupe compact engendré par la famille des translations du potentiel presque périodique.

Une autre classe des opérateurs de Schrödinger ergodiques est donnée par le modèle d'Anderson où on considère le potentiel localisé autour des sites du réseau $\mathbb{Z}^d$ avec des constantes de couplage formant une famille des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (p. ex. le cours de W. Kirsch [34] ou F. Klopp [40]).

Une définition de la densité d'états des opérateurs de Schrödinger ergodiques utilise les opérateurs $H^*_{\omega,L}$ définis sur $L^2(]-L;\ L[^d)$ comme $H^D_{\omega,L} = -\Delta + V_\omega$ avec les conditions de Dirichlet ou $H^N_{\omega,L} = -\Delta + V_\omega$ avec les conditions de Neumann au bord de $]-L;\ L[^d$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui décroît assez rapidement à l'infini, on pose

$$n^*_{\omega,L}(f) = (2L)^{-d}\mathrm{tr}\, f(H^*_{\omega,L}) = (2L)^{-d}\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n(H^*_{\omega,L})),$$

où $\lambda_1(H^*_{\omega,L}) \le \cdots \le \lambda_n(H^*_{\omega,L}) \le \lambda_{n+1}(H^*_{\omega,L}) \le \dots$ est la suite des valeurs propres (comptées avec leurs mulitiplicitées) de $H^*_{\omega,L}$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$) alors les limites

$$n(f) = \lim_{L\to\infty} n^D_{\omega,L}(f) = \lim_{L\to\infty} n^N_{\omega,L}(f)$$

existent $\mathbf{P}$-presque sûrement et sont indépendantes de ω. Ainsi le théorème de répresentation de Riesz permet d'écrire

$$n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mathcal{N}(\lambda),$$

où on intègre par rapport à la mesure dont la fonction de répartition

$$\mathcal{N}(\lambda) = \sup\{n(f) :\ 0 \le f \le 1,\ \ \mathrm{supp}\, f \subset]-\infty;\ \lambda[\}$$

s'appelle la densité d'états intégrée.

L'importance de la densité d'états se voit déjà sur le fait que son support (en tant que la mesure) vérifie

$$\operatorname{supp} n = \sigma(H_\omega) \tag{0.3}$$

P-presque sûrement. Des études plus fines de la nature du spectre et des propriétés dynamiques du transport sont également liées à la régularité de la densité d'états intégrée : on peut citer p. ex. les articles de R. Johnson, J. Moser, J. Avron, B. Simon ([2], [6],[7], [31],[41], [64]) en ce qui concerne les potentiels presque périodiques et J. M. Combes, P. D. Hislop, F. Klopp, S. Molchanov, P. Stollmann, W.Kirsch ([16],[21],[14],[34],[50],[62]) en ce qui concerne le modèle d'Anderson.

Un résultat fondamental concernant la régularité de la densité d'état intégrée est l'estimation

$$\mathbb{E}(n_L^*(\chi_{[E-\varepsilon,E+\varepsilon]}) \leqslant C\varepsilon, \tag{0.4}$$

obtenue par Wegner ([65]) pour le modèle d'Anderson discret (ici $\mathbb{E}(...)$ désigne l'espérance et $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$). Dans les travaux qui suivent, J. M. Combes, P. D. Hislop, S. Nakamura, A. Klein, W. Kirsch, E. Mourre, P. Stollmann, H. Zenk... (voir [12], [13], [16], [21],[14], [34], [62], [33], [68] et les références citées dans ces travaux) prouvent l'estimation de Wegner pour des modèles continus et pour des systèmes à N corps (voir aussi F. Klopp, H. Zenk [44] pour l'existence de la densité d'états des systèmes à N corps).

Les estimations de Wegner jouent un rôle clé dans l'analyse multi-échelles permettant de prouver des propriétés de la localisation (le spectre purement ponctuel presque sûrement) pour ces modèles ([3], [4], [5], [38], [29], [32], [62]).

(B) *La notion du déplacement spectral*

Sous l'hypothèse que le potentiel décroît assez rapidement à l'infini, on peut développer la théorie de la diffusion basée sur la fonction de déplacement spectral introduite par I. Lifshits et M. Krein ([49], [48]). Cette notion a donné lieu à de nombreux travaux (voir [66], [67] pour divers résultats et références). La fonction de déplacement spectral est définie de façon générale pour une paire d'opérateurs auto-adjoints (A, B) dont la différence est nucléaire, c'est à dire $|| \ A - B \ ||_{B_1} < \infty$ où $|| \ . \ ||_{B_1}$ désigne la norme trace. Elle est définie par la relation

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta(\lambda) df(\lambda) = \operatorname{tr}(f(B) - f(A)), \tag{0.5}$$

dite formule de trace. Dans cette relation, trA désigne la trace de A et f est une fonction d'une classe convenable. Quant à la fonction réelle ζ, elle doit être dans tous les cas localement intégrable. Il est clair que la validité de (0.5) pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ implique l'unicité de ζ à une constante près.

En vertu du théorème spectral, la fonction ζ est donnée formellement par la relation

$$\zeta(\lambda) = \mathrm{tr}(E_A(\lambda) - E_B(\lambda)), \tag{0.6}$$

où $E_A(\lambda)$ est la résolution spectrale de l'identité pour A et $E_B(\lambda)$ celle relative à B. Le problème est que la différence $E_A(\lambda) - E_B(\lambda)$ n'est pas forcément nucléaire. Cela est dû à la non-régularité de la fonction caractéristique de l'intervalle $]-\infty, \lambda]$. Néanmoins, la fonction de déplacement spectral ζ est donnée par la relation (voir[66])

$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \arg\det[I + (B - A)R_A(\lambda + i\varepsilon)], \tag{0.7}$$

où $R_A(z)$ est la résolvante de A.

La fonction ζ est reliée à la matrice de diffusion $S(\lambda)$ du couple (A, B) par la formule de Birman-Krein

$$\det S(\lambda) = exp(-2\pi\zeta(\lambda)), \tag{0.8}$$

pour tout $\lambda \in \sigma_{ac}(A)$.

Comme nous l'avons vu déjà, les fonctions ζ et n ont été introduites dans deux contextes différents. Mais pour l'opérateur de Schrödinger continu en dimension 1 pour un potentiel $v_L(x)$ qui est la restriction à l'intervalle $]-L, L[$ d'un certain champ aléatoire ergodique $v(x), x \in \mathbb{R}$. V. Kostrykin et R. Schrader ([45]) ont montré que si $\zeta_L(\lambda)$ est la fonction de déplacement spectral attachée à ce potentiel, alors la limite

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\zeta_L(\lambda)$$

existe, et elle coïncide avec la différence entre les densités d'états intégrées des deux opérateurs

$$-\frac{d}{dx} + v(x) \text{ et } -\frac{d}{dx}$$

agissant dans $L^2(\mathbb{R})$.

(C) *La densité d'états surfaciques*

Il s'agit d'un cas intermédiaire entre les deux théories précédentes. On rencontre cette situation particulière dans la théorie de l'état solide lorsqu'une surface sépare deux milieux homogènes ayant des propriétés différentes. De fait, dans une telle situation, on observe des ondes surfaciques qui se propagent le long de la surface de séparation et qui sont localisées au voisinage de cette surface. Ces ondes surfaciques correspondent à une partie du spectre qu'on appelle " spectre de surface" ([3], [4], [10],[28], [29], [30],[32],[38], [63] pour divers résultats et références).

Chahrour dans ([8],[9]) a considéré un potentiel v ergodique dans les directions longitudinales x_1 et décroissant dans les directions transversales x_2. Il a donc étudié le cas analogue de la densité d'état intégrée n et la fonction de déplacement spectral ζ. C'est pourquoi il a introduit une quantité analogue à n. C'est la densité d'états surfaciques N définie pour une classe de f par

$$\begin{aligned} N(f,H) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(\chi_L(f(H)-f(H^0)) \qquad (0.9) \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(f(H_L^*)-f(H_L^{0*})) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{x_2\in\mathbb{Z}^{d_1}} K_f((0,x_2),(0,x_2)), \end{aligned}$$

où H^0 est le laplacien discret, χ_L est la fonction caractéristique de $]-L,L[^d$, H_L^* et H_L^{0*} sont les restrictions des opérateurs H et H^0 à $]-L,L[^d$ avec la condition au bord (Neumann ou Dirichlet) et $K_f(\cdot,\cdot)$ est le noyau de l'opérateur $f(H)-f(H^0)$ pour un classe de $f\in C_0^3(\mathbb{R})$, donc la densité d'états surfaciques est définie comme une distribution d'ordre au plus 3.

L'outil principal de la preuve est l'identité de la résolvante qu'il a choisie convenablement. Contrairement à la densité d'état intégrée, la limite dans (0.9) n'est pas nécessairement positive, si f est positive ; cela est dû à la soustraction. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas conclure que la densité d'états surfaciques est une mesure positive. De plus Chahrour ([8]) a montré un théorème sur le spectre analogue à (0.3), à savoir

$$\mathrm{supp} N\backslash\sigma(H^0) = \sigma(H)\backslash\sigma(H^0).$$

Ces résultats sont semblables à ceux de H. English, W. Kirsch, M. Schröder, B. Simon [20] sur l'équation de Schrödinger continue dans un contexte un peu différent, car l'espace est partagé en deux demi-espaces, chacun portant un potentiel ergodique différent. Dans le cas continu les preuves sont souvent plus compliquées techniquement (par exemple [20] utilise des intégrales de Wiener).

Pour ce qui est de la théorie de la diffusion, rappelons que la fonction de déplacement spectral a été introduite et étudiée pour les potentiels décroissant à l'infini ([66],[67],[49],[48]). Mais ce cas sort de ce cadre. C'est pourquoi Chahrour ([8]) a introduit une quantité analogue à ζ c'est la fonction généralisée de déplacement spectral $\widetilde{\zeta}$ définie par

$$\int f'(\lambda)\widetilde{\zeta}(\lambda)d\lambda = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \int f'(\lambda)\zeta_L(\lambda)d\lambda$$

pour une classe de fonction $f \in C(\mathbb{R})$ avec ζ_L est la fonction de déplacement spectral du couple $(H^0 + v_L, H^0)$ avec v_L est la restriction de v à $]-L, L[^{d_1}$. De plus Kostrykin, Schrader ([47], [46]) et Chahrour ([8]) ont montré que la densité d'états surfaciques est une dérivée d'une fonction intégrable qui ressemble à la fonction généralisée de déplacement spectral.

La régularité de la densité d'états surfaciques joue un rôle fondamental dans l'étude de la localisation. Cette régularité est connue pour les opérateurs de Schrödinger surfaciques avec potentiel sous la forme d'une suite de variables aléatoires bornes indépendantes et identiquement distribues (voir [8], [10]) par contre pour le cas continu le résultat n'est pas encore connu, c'est pourquoi on va étudier l'approximation de la densité d'état surfaciques continue par la suite des densités surfaciques discrètes et ceci le but du Chapitre 1 dans le cas presque périodique et du Chapitre 2 dans le cas d'Anderson.

On peut aussi citer Kirsch et Warzel ([38]) en ce qui concerne la définition de densité d'états surfaciques utilisant les conditions aux bords de Neumann et Dirichlet.

(D) *Une brève description de résultats de la thèse.*

Dans le Chapitre 1 on considère H donné par (0.1) avec $v(x_1, x_2)$ presque périodique par rapport à x_1 et on décrit les opérateurs analogues discrets H^h, où $h > 0$ avec l'espace de configuration $h\mathbf{Z}^d$ au lieu de $\mathbf{R}^d$. On prouve alors le résultat sur l'approximation du spectre de H par le spectre de H^h analogue à celui de J. Herczynski [25] et on présente la preuve de l'existence de la densité d'états surfacique en expliquant les différentes manières de passer à la limite thérmodynamique en montrant que le passage à la limite thermodynamique pour H^h devient uniforme quand $h \to 0$. De plus on montre que le support de la densité d'états de H coïncide avec le spectre de H sur $]-\infty, 0]$ et dans le sens des distributions la densité d'états de H est la limite des densités d'états de H^h.

Dans le Chapitre 2 on étudie le modèle d'Anderson : on définit la densité d'états surfaciques suivant l'approche de F. Klopp [40] et on prouve que dans le sens des distributions la densité d'états surfacique du modèle continu est la limite des densités d'états surfaciques discrètes quand $h \to 0$.

Dans le Chapitre 3 on prouve les estimations utilisées dans le chapitres précédents. D'abord on estime la décroissance hors la diagonale dans une version plus faible que celle de Thomas-Combes ([11],[12],[22]), mais en contrôlant toutes les constantes uniformément par rapport à h. Puis on estime des effets perturbatifs du potentiel dans la version utile pour le problème à N corps considéré dans le Chapitre 5.

Dans le Chapitre 4 on généralise les résultats précédents au cas des potentiels avec singularités. En particulier on considère les fonctions presque périodiques dans les classes de Stepanov et des singularités du type coulombien en tenant compte des dimensions d_1 et d_2.

Dans le Chapitre 5 on étudie le modèle incluant les interactions entre N particules. Il s'agit d'une généralisation du modèle surfacique standard où le potentiel global est donné comme une somme des potentiels surfaciques. On prouve l'existence de la limite thermodynamique analogue à celle de la densité d'états surfacique standard sous l'hypothèse de l'existence de la densité d'états surfacique standard du problème avec un seul potentiel surfacique (correspondant à l'interaction entre deux particules). Il s'avère que la densité d'états surfacique généralisée du problème à N corps est la somme des densité d'états surfaciques correspondant aux sous-systèmes à 2 corps et sous certaines hypothèses cela assure le fait que le spectre du problème à N corps contient le spectre de chaque sous-système à 2 corps au dessous du spectre du hamiltonien libre. Cette affirmation est vraie en particulier dans le cas du modèle standard à N corps dans le champ extérieur presque périodique (sous l'hypothèse de la décroissance convenable pour des interactions entre les particules).

(E) *Les énoncés des résultats de chaque chapitre*

Chapitre 1

On suppose que (0.2) est satisfaite avec certains $C, \delta_0 > 0$ et $x_2 \mapsto v(\cdot, x_2)$ définit l'application continue $\mathbb{R}^{d_2} \to CAP(\mathbb{R}^{d_1})$, où $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ est défini comme le plus petit sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ contenant toutes les fonctions exponentielles $\{x_1 \to \mathrm{e}^{i\gamma\cdot x_1}\}_{\gamma\in\mathbb{R}^{d_1}}$.

Soit H l'opérateur

$$H = -\Delta + V$$

et pour tout $h \in]0;\ 1], H^h$ les opérateurs à différences finies agissant sur le réseau $h\mathbb{Z}^d = \{hn \in \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{Z}^d\}$ par

$$H^h = -\Delta^h + V^h$$

où V^h est défini à l'aide du potentiel v par la formule

$$(V^h\varphi)(hn) = v(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$$

et

$$(\Delta^h\varphi)(hn) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\varphi(hn + he_j) + \varphi(hn - he_j) - 2\varphi(hn)}{h^2},$$

Pour H et H^h cités ci-dessus on va montrer les théorèmes suivants :

Théorème 0.1. *Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la limite thermodynamique*

$$N(f, H) = \lim_{L\to\infty} N_L(f, H),$$

avec $N_L(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L(f(H) - f(-\Delta))$ et χ_L la fonction caractéristique du cube $] - L, L[^d$, existe.

La distribution $f \to N(f,H)$ s'appelle la densité d'états surfaciques de H.

Théorème 0.2. *Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la limite thermodynamique*

$$N(f,H^h) = \lim_{L\to\infty} N_L(f,H^h)$$

existe. De plus pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver h_ε, $L_\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{L\geq L_\varepsilon} \sup_{0<h\leq h_\varepsilon} \left| N(f,H^h) - N_L(f,H^h) \right| \; < \varepsilon,$$

avec, $N_L(f,H^h) = (2L)^{-d_1} \displaystyle\sum_{\{k\in\mathbb{Z}^d:\, hk\in[-T;\,T[^d\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h))\delta_{hk}, \delta_{hk}\rangle_h$

où $\delta_{hk}(hn) = 0$ si $n \neq k$ et $\delta_{hk}(hk) = 1$.

Le but principal de ce chapitre est de montrer que

Théorème 0.3. *Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$N(f,H) = \lim_{h\to 0} N(f,H^h).$$

On va mettre en évidence une relation entre $N(f,H)$ et le spectre de H.

Théorème 0.4. *On désigne par $\operatorname{supp} N(\cdot,H)$ le support de la distribution $f \to N(f,H)$ et $\sigma(H)$ le spectre de l'opérateur H. Alors*

$$\sigma(H) = \operatorname{supp} N(\cdot,H) \cup \sigma(-\Delta). \tag{0.10}$$

La relation (0.10) est analogue à la relation (0.3).

Chapitre 2

Dans ce chapitre on introduit les notations suivantes

$$H_\omega = -\Delta + W + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma v_\gamma$$

où $v_\gamma(x_1,x_2) = v(x_1-\gamma,x_2), v:\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ un potentiel et $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^{d_1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et bornées non constantes.

Nous supposerons que :

i) v est continue, vérifie que pour tout $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ il existe une constante C_N telle que

$$| v(x_1,x_2) | \leqslant C_N(1+ | x_1 |)^{-d_1-\varepsilon}(1+ | x_2 |)^{-N}.$$

ii)$W : \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel continu vérifiant

$$\begin{array}{ll} * & W(x_1+y_1,x_2) = W(x_1,x_2) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}, \\ * & \text{il} \quad \text{existe} \quad \delta_0 > d_2, C_N > 0 \quad | W(x_1,x_2) | \leqslant C_N(1+ | x_2 |)^{-\delta_0} \end{array}$$

pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

On définit la famille d'opérateurs H^h agissant sur $l(h\mathbb{Z}^d)$

$$H^h_\omega = -\Delta^h + W^h + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma v^h_\gamma$$

où $(W^h\varphi)(hn) = W(hn)\varphi(hn)$ et $(v^h_\gamma\varphi)(hn) = v_\gamma(hn)\varphi(hn)$ pour $\varphi \in l(h\mathbb{Z}^d)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite d'opérateurs de Schrödinger

$$H_{\omega,k} = H_\omega + \sum_{\gamma \in C^{d_1}_k \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma \sum_{\beta \in (2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}} \tau_{\gamma+\beta} v_\gamma$$

et le cas discret

$$H^h_{\omega,k} = H^h + \sum_{\gamma \in C^{d_1}_k \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma \sum_{\beta \in (2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}} \tau_{\gamma+\beta} v^h_\gamma$$

où $C^{d_1}_k = \{m \in \mathbb{Z}^{d_1}, m_j \in]-k-1/2, k+1/2] \quad \text{pour} \quad j = 1, ..., d_1\}$ est le cube de centre 0 et de coté $2k+1$ et τ_γ est la translation dans $\mathbb{R}^{d_1}$ par rapport à γ. Pour $\omega \in \Omega;$ $H_{\omega,k}$ et $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{\omega,\mathrm{k}}$ sont des opérateurs de Schrödinger $(2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}$ périodiques.

On introduit

$$\begin{aligned} N(\varphi, H_{\omega,k}) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(\chi^L_L(\varphi(H_{\omega,k}) - \varphi(H^0)) \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(\chi^\infty_L(\varphi(H_{\omega,k}) - \varphi(H^0)), \\ N(\varphi, H^h_{\omega,k}) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}^h(\chi^{h,L}_L(\varphi(H^h_{\omega,k}) - \varphi(H^{0,h})) \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}^h(\chi^{h,\infty}_L(\varphi(H^h_{\omega,k}) - \varphi(H^{0,h})). \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$. Dans ce chapitre on va montrer les théorèmes suivants :

Théorème 0.5. *Soient* $N_{k,\omega}^h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *définies par la formule* $\varphi \to N(\varphi, H_{\omega,k}^h)$. *Alors la suite* $(N_{k,\omega}^h)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *vers une limite* $N^h(\cdot, H_\omega)$ *; pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varepsilon > 0, h \in]0,1[$ *il existe* k_ε *tel que pour tout* $k > k_\varepsilon$ *on ait*

$$\mid N(\varphi, H_{\omega,k}^h) - N(\varphi, H_\omega^h) \mid < \varepsilon.$$

De plus la distribution $\varphi \to N(\varphi, H_\omega^h)$ *ne dépend pas de* ω *et on va l'appeler la densité d'états surfaciques pour l'opérateur* H_ω^h.

Théorème 0.6. *Soient* $N_{k,\omega} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *définie par la formule* $\varphi \to N(\varphi, H_{\omega,k})$. *Alors la suite* $(N_{k,\omega})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *vers une limite* $N(\cdot, H_\omega)$, *c'est à dire pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varepsilon > 0$, *il existe* k_ε *tel que pour tout* $k > k_\varepsilon$ *on ait*

$$\mid N(\varphi, H_{\omega,k}) - N(\varphi, H_\omega) \mid < \varepsilon.$$

De plus la distribution $\varphi \to N(\varphi, H_\omega)$ *ne dépend pas de* ω *et on va l'appeler la densité d'états surfaciques pour l'opérateur* H_ω.

Le résultat principal de ce chapitre est la généralisation du Théorème 0.3 pour l'opérateur de Schrödinger surfacique du type d'Anderson.

Théorème 0.7. *Pour toute fonction* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *on a*

$$\lim_{h\to 0} N(\varphi, H_\omega^h) = N(\varphi, H_\omega).$$

Chapitre 3

Dans ce chapitre on s'intéresse aux approximations de la résolvante en norme B_p pour aboutir à des estimations en norme trace. Pour un ensemble fixé $\mathcal{K}$, $(v_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ est une famille des fonctions réelles $v_\kappa \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, vérifiant la propriété suivante : que pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il existe des constantes $C_0, c_0 > 0$ telles que

$$||v_\kappa \varphi|| \leq (1 - c_0)||\Delta\varphi|| + C_0||\varphi||. \tag{0.11}$$

Sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère les opérateurs auto-adjoints

$$H_\kappa = -\Delta + V_\kappa, \quad (V_\kappa\varphi)(x) = v_\kappa(x)\varphi(x) \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

et sur $l^2(h(\mathbb{Z}^d))$ on considère

$$H_\kappa^h = -\Delta^h + V_\kappa^h, \quad (V_\kappa^h\varphi)(hn) = v_\kappa(hn)\varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d).$$

On abrège $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{B}^h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d))$ pour $p \geq 1$, $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(L^2(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{B}_p^h = \mathcal{B}_p(l^2(h\mathbb{Z}^d))$ et on définit $\chi_y \in \mathcal{B}$, $\chi_y^h \in \mathcal{B}^h$ par

$$(\chi_y\varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$(\chi_y^h\varphi)(hn) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d),$$

où $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0;\ 1[^d\}$ pour $y \in \mathbb{Z}^d$. Le but principal dans les estimations présentées dans ce chapitre est de montrer un résultat analogue à l'estimation de Thomas-Combes (voir [11],[12],[22]) pour les opérateurs H_κ, H_κ^h uniformément par rapport à h. Essentiellement, on va montrer les propositions suivantes :

Proposition 0.1. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y f(H_\kappa)\chi_{y'}||_{\mathcal{B}_1} \leq C_N(1 + |y - y'|)^{-N}$$

et

$$||\chi_y^h f(H_\kappa^h)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_N(1 + |y - y'|)^{-N}$$

soient valables pour tous $\kappa \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Pour étudier les effets perturbatifs, on introduit

$$\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}}(V_\kappa - V_{\kappa'})(I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}},$$

$$\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y, y') = \min\{\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y),\ \Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y')\}.$$

Pour $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ on va prouver

Proposition 0.2. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))\chi_{y'}||_{\mathcal{B}_1} \leq C_N(1 + |y - y'|)^{-N}\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y, y')$$

soient valables pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ et $y, y' \in \mathbb{Z}^d$.

Et pour le cas discret on introduit

$$\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}}^h(V_\kappa^h - V_{\kappa'}^h)(I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}_1^h}$$

$$\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y, y') = \min\{\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y),\ \Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y')\}$$

et on va montrer le résultat suivant :

Proposition 0.3. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y^h(f(H_\kappa^h) - f(H_{\kappa'}^h))\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_N(1 + |y - y'|)^{-N}\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y, y')$$

soient valables pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Chapitre 4

Dans ce chapitre on considère l'opérateur de multiplication

$$(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x),$$

pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et pour $\rho \geq 0$ on écrit $v \in \mathcal{V}^\rho$ si et seulement si

$$||v||_{\mathcal{V}^\rho} = \sup_{(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2}} (1 + |y_2|)^\rho ||\chi_{(y_1,y_2)}V(I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} < \infty,$$

où $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ est la norme de l'espace d'opérateurs bornés $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}$ et $\chi_y \in \mathcal{B}$ est définie par

$$(\chi_y\varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

avec $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0;\ 1[^d\}$.

On suppose l'existence des $C_0, c_0 > 0$ telles que

$$||v\varphi|| \leq (1 - c_0)||\Delta\varphi|| + C_0||\varphi||$$

soit satisfaite pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, ce qui permet de définir l'opérateur auto-adjoint

$$H = -\Delta + V,$$

et de considérer

$$N_L^{L'}(f, H) = (2L)^{-d_1}\,\mathrm{tr}\,\chi_L^{L'}(f(H) - f(-\Delta)),$$

où $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\chi_L^{L'} \in \mathcal{B}$ est donné par

$$(\chi_L^{L'}\varphi)(x) = \chi_{[-L;\ L[^{d_1}\times[-L';\ L'[^{d_2}}(x)\varphi(x),$$

pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

On désigne par $\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ l'ensemble des fonctions $v \in C(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$ telles que $x_2 \to v(\cdot, x_2)$ est une application continue $\mathbb{R}^{d_2} \to CAP(\mathbb{R}^{d_1})$, où $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ est muni de la norme héritée de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$. On va écrire $v \in \mathcal{V}_{\mathrm{pp}}^0$ si et seulement si $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est adhérent à $\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ dans la norme $||\cdot||_{\mathcal{V}^0}$ (c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ tel que $||v - v_\varepsilon||_{\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}} < \varepsilon$). Le théorème essentiel est la généralisation des Théorèmes 0.1 et 0.4.

Théorème 0.8. *Si* $v \in \mathcal{V}^0_{\mathrm{pp}} \cap \mathcal{V}^\rho$ *avec* $\rho > d_2$ *et* $f \in C_0^\infty(\mathrm{I\!R})$, *alors la limite*

$$N(f, H) = \lim_{L\to\infty} N_L^L(f, H)$$

existe dans $\mathcal{D}'(\mathrm{I\!R})$ *et on a*

$$\sigma(H) = [0; \infty[\cup \operatorname{supp} N(\cdot, H).$$

De même, on définit $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d))$ et on note par $-\Delta^h$ le Laplacien discret sur $l^2(hZ^d)$. Soit $\tilde{H}^h \in \mathcal{B}_h$ donné par la formule

$$\tilde{H}^h = -\Delta^h + \tilde{V}^h,$$

$$(\tilde{V}\varphi)(hn) = \tilde{v}^h(hn)\varphi(hn),$$

avec

$$\tilde{v}^h(hn) = h^{-d}\int_{[0;\,h[^d} dx\, v(hn + x).$$

On définit $\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1,\mathrm{pp}}$ comme la fermeture de $\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ dans $\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1}$ (c'est-à-dire que le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1}$ contenant $\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$). Si $v \in \mathcal{V}^{p_2,\rho}_{p_1} \cap \mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1,\mathrm{pp}}$ avec $\rho > d_2$, $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ et $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$, alors les assertions des Théorèmes 0.2 et 0.3 restent vraies avec $\tilde{H}^h$ au lieu de H^h.

Chapitre 5

On s'intéresse, dans cette partie, à l'analyse spectrale d'un système quantique formé d'un nombre fini de particules dont l'Hamiltonien est défini par un opérateur de Schrödinger aléatoire $H^\omega := -\Delta + V^\omega$ dans l'espace de Hilbert $L^2(X)$, où X est un espace euclidien de dimension finie et Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami. On suppose que l'espace de configuration X est un espace euclidien de dimension finie, $||\cdot||$ est la norme de $L^2(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(X))$ est l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur $L^2(X)$ et $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(L^2(X))$ l'idéal des opérateurs à trace sur $L^2(X)$. Pour plus de détails sur le problème à N corps voir [1]. Le but de ce chapitre est de montrer l'existence d'une limite thermodynamique. Cette limite définit un objet du type de la densité d'état qui correspond à la densité d'états surfaciques dans le cas du système à 2 corps .

On considère

$$H^0 = -\Delta_X + V_0,$$

où Δ_X désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X et V_0 est un opérateur de multiplication par la fonction réelle $v_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la borne relative nulle par rapport à Δ_X, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on ait

$$||V_0\varphi|| \leq \varepsilon||\Delta_X\varphi|| + C_\varepsilon||\varphi||,$$

où $(V_0\varphi)(x) = v_0(x)\varphi(x)$ pour $x \in X$.

On considère un ensemble fini $\mathcal{A}$ et $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels $X_a \subset X$ tels que $X_a \neq X$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Soit $\pi_a : X \to X_a$ la projection orthogonale sur X_a. On pose $\pi^a = I - \pi_a$, $X^a = \operatorname{Ker} \pi_a$. Alors π^a est la projection orthogonale sur X^a et X^a est le supplémentaire orthogonal de X_a dans X. Ensuite, on considère H donné par

$$H = H^0 + V, \tag{0.12}$$

avec

$$V = \sum_{a\in\mathcal{A}} V_a,$$

où V_a est un opérateur de multiplication par la fonction réelle $v_a \in L^2_{\text{loc}}(X)$ avec la borne relative nulle par rapport à Δ_X, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on ait

$$||V_a\varphi|| \leq \varepsilon||\Delta_X\varphi|| + C_\varepsilon||\varphi||,$$

où $(V_a\varphi)(x) = v_a(x)\varphi(x)$ pour $\varphi \in C_0^\infty(X)$. Pour $r > 0$, $y \in X$ soit $\chi_{B(y,r)} \in \mathcal{B}$ l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de la boule $B(y,r) = \{x \in X : |x-y| < r\}$, et on suppose que pour tout $a \in \mathcal{A}$ on peut trouver C_a, $\rho_a > 0$ tels que pour tout $y \in X$ on ait

$$||\chi_{B(y,1)}V_a(I-\Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} \leq C_a(1+|\pi^a y|)^{-\rho_a}.$$

On commence par introduire une quantité analogue à la densité d'états surfaciques dans le cas continu pour l'opérateur H défini par l'expression (0.12). On montre tout d'abord l'existence d'une telle quantité en tant que distribution sur une certaine classe des fonctions réelles. Pour cela on introduit

$$d_1 = \max\{\dim X_a : a \in \mathcal{A}\},\ \mathcal{A}_1 = \{a \in \mathcal{A} :\ \dim X_a = d_1\},$$

alors on définit

$$H_a = H^0 + V_a,$$

pour $a \in \mathcal{A}_1$.

Pour $L \geq 1$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on définit

$$N_L(f, H_a) = \frac{1}{\gamma_{d_1} L^{d_1}} \operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H_a) - f(H^0)).$$

où γ_{d_1} est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^{d_1}$. On peut énoncer :

Théorème 0.9. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que $\rho_a > d - d_1$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et la limite*

$$N(f, H_a) = \lim_{L\to\infty} N_L(f, H_a) \tag{0.13}$$

existe pour tout $a \in \mathcal{A}_1$. Alors la limite

$$N(f, H) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\gamma_{d_1} L^{d_1}} \operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H^0)) \tag{0.14}$$

existe et on a

$$N(f, H) = \sum_{a\in\mathcal{A}_1} N(f, H_a). \tag{0.15}$$

Ces résultats sont semblables à ceux de [20] dans le cas continu et de [8] dans le cas discret dans un contexte peu différent.

Index

Chapitre 1

Approximations discrètes de la densité d'états surfaciques presque périodique

1.1 Énoncés des résultats

Soit $d = d_1 + d_2$ avec $d_1,\ d_2 \in \mathbb{N}$. On identifie $x \in \mathbb{R}^d$ avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ et on s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec le potentiel continu, presque périodique par rapport $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ et décroit rapidement en variable $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$. Plus précisément soit $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ l'espace des fonctions continues presque périodiques $\mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C}$, défini comme le plus petit sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ contenant toutes les fonctions exponentielles $\{x_1 \to \mathrm{e}^{i\gamma\cdot x_1}\}_{\gamma\in\mathbb{R}^{d_1}}$ et soit $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction vérifiant les hypothèses

(H1) il existe $C,\ \delta_0 > 0$ tels que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ on ait

$$|v(x_1, x_2)| \le C(1 + |x_2|)^{-d_2-\delta_0} \tag{1.1}$$

(H2) la formule $x_2 \mapsto v(\cdot, x_2)$ définit l'application continue $\mathbb{R}^{d_2} \to CAP(\mathbb{R}^{d_1})$, où $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ est défini comme au dessus avec la norme héritée de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$.

Sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ on considère l'opérateur auto-adjoint

$$H = -\Delta + V, \tag{1.2}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace et

$$(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

Si $Z \subset \mathbb{R}^d$ alors $\chi_Z : \mathbb{R}^d \to \{0, 1\}$ désigne la fonction caractéristique de Z et pour $L, L' > 0$ soit $\chi_L^{L'}$ l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$(\chi_L^{L'}\varphi)(x) = \chi_{[-L;\, L[^{d_1}\times[-L';\, L'[^{d_2}}(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

Alors il est bien connu que ([55],[17]) pour toute fonction test $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ les opérateurs $\chi_L^{L'} f(-\Delta)$ et $\chi_L^{L'} f(H)$ appartiennent à la classe d'opérateurs à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et on peut introduire

$$N_L^{L'}(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \chi_L^{L'}(f(H) - f(-\Delta)). \tag{1.5}$$

Dans la Section 1.3 on donnera la démonstration de :

Théorème 1.1. *On suppose que le potentiel de l'opérateur de Schrödinger H vérifie les hypothèses* (H1) *et* (H2)*. Alors pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H) = \lim_{L\to\infty} N_L^L(f, H). \tag{1.6}$$

La distribution $f \to N(f, H)$ s'appelle la densité d'états surfaciques de H et on montrera le fait qu'elle est la limite des densités d'états surfaciques des opérateurs aux différences finies H^h agissant sur le réseau $h\mathbb{Z}^d = \{hn \in \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{Z}^d\}$ de taille $h \in]0;\ 1]$ quand $h \to 0$.

Plus précisément, soit $l^2(h\mathbb{Z}^d)$ l'espace de Hilbert dont les éléments sont les applications $\varphi : h\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ telles que

$$||\varphi||_h = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(hn)|^2\Big)^{1/2} < \infty, \tag{1.7}$$

et dont le produit scalaire est donné par la formule

$$\langle\varphi, \psi\rangle_h = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varphi(hn)\overline{\psi(hn)}. \tag{1.8}$$

Alors le laplacien discret agit sur $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ selon la formule

$$(\Delta^h\varphi)(hn) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\varphi(hn + he_j) - 2\varphi(hn) + \varphi(hn - he_j)}{h^2} \tag{1.9}$$

où $e_1 = (1, 0, ..., 0), \dots, e_d = (0, ..., 0, 1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit

$$H^h = -\Delta^h + V^h, \tag{1.10}$$

où V^h est défini à l'aide du potentiel v par la formule

$$(V^h\varphi)(hn) = v(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.11}$$

Par analogie au cas continu on définit

$$N_L^{L'}(f, H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k\in\mathbb{Z}^d :\, hk\in[-L;\, L[^{d_1}\times[-L';\, L'[^{d_2}\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h))\delta_{hk}, \delta_{hk}\rangle_h, \tag{1.12}$$

où $\delta_{hk}(hn) = 0$ si $n \neq k$ et $\delta_{hk}(hk) = 1$. Alors on a

Théorème 1.2. *On suppose que H^h est donné par* (1.10) *avec v vérifiant les hypothèses* (H1) *et* (H2). *Alors pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il existe la limite thermodynamique*

$$N(f, H^h) = \lim_{L\to\infty} N_L^L(f, H^h). \tag{1.13}$$

De plus pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver L_ε, $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{L\geq L_\varepsilon}\ \sup_{0<h\leq h_\varepsilon} \left| N(f, H^h) - N_L^L(f, H^h) \right| \ < \varepsilon. \tag{1.14}$$

En ce qui concerne les démonstrations présentées dans la suite, les résultats des Théorèmes 1.1 et 1.2 concernant la famille des pavés $[-L;\ L[^d$ seront obtenus grâce à l'étude des pavés $[-L;\ L[^{d_1}\times[-L';\ L'[^{d_2}$. En particulier on prouvera les théorèmes suivants :

Théorème 1.3. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $L' \geq 1$. Alors les limites*

$$N^{L'}(f, H) = \lim_{L\to\infty} N_L^{L'}(f, H), \qquad N^{L'}(f, H^h) = \lim_{L\to\infty} N_L^{L'}(f, H^h) \tag{1.15}$$

existent et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver L_ε, $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{L\geq L_\varepsilon}\ \sup_{0<h\leq h_\varepsilon} \left| N^{L'}(f, H^h) - N_L^{L'}(f, H^h) \right| \ < \varepsilon. \tag{1.16}$$

De plus il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $L' \geq 1$ on ait

$$|N^{L'}(f, H) - N(f, H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \tag{1.17}$$

$$\sup_{0<h\leq 1} |N^{L'}(f, H^h) - N(f, H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \tag{1.18}$$

Il est également possible de retrouver $N(f, H)$ et $N(f, H^h)$ utilisant le procédé suivant :

Théorème 1.4. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $L \geq 1$. Alors les limites*

$$N_L(f,H) = \lim_{L' \to \infty} N_L^{L'}(f,H), \qquad N_L(f,H^h) = \lim_{L' \to \infty} N_L^{L'}(f,H^h) \tag{1.19}$$

existent et on peut trouver une constante $C > 0$ telle que pour $L, L' \geq 1$ on ait

$$|N_L^{L'}(f,H) - N_L(f,H)| \leq CL'^{-\delta_0}, \tag{1.20}$$

$$\sup_{0<h\leq 1} |N_L^{L'}(f,H^h) - N_L(f,H^h)| \leq CL'^{-\delta_0}. \tag{1.21}$$

Si l'opérateur χ_L^∞ est défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$(\chi_L^\infty \varphi)(x) = \chi_{[-L;\, L[^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}}(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.22}$$

alors $\chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta))$ appartient à la classe d'opérateurs à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et on a les expressions

$$N_L(f,H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^\infty(f(H) - f(-\Delta)), \tag{1.23}$$

$$N_L(f,H^h) = \frac{1}{(2L)^{d_1}} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}^d :\, hk \in [-L;\, L[^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}\}} \langle (f(H^h) - f(-\Delta^h))\delta_{hk}, \delta_{hk} \rangle_h, \tag{1.24}$$

où la série (1.24) converge absolument. De plus on a

$$N(f,H) = \lim_{L \to \infty} N_L(f,H), \qquad N(f,H^h) = \lim_{L \to \infty} N_L(f,H^h) \tag{1.25}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver L_ε, $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{L \geq L_\varepsilon} \sup_{0<h\leq h_\varepsilon} \left| N_L(f,H^h) - N(f,H^h) \right| < \varepsilon. \tag{1.26}$$

Enfin dans la Section 1.4 on prouvera :

Théorème 1.5. *Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$N(f,H) = \lim_{h \to 0} N(f,H^h). \tag{1.27}$$

Théorème 1.6. *(a) On désigne par $\sigma(H)$ (respectivement $\sigma(H^h)$) le spectre de l'opérateur H (respectivement H^h). Alors*

$$\sigma(H) = \bigcap_{\kappa>0} \overline{\bigcup_{0<h<\kappa} \sigma(H^h)}, \tag{1.28}$$

ou autrement dit

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} :\ \liminf_{h \to 0} \operatorname{dist}(\sigma(H^h), \lambda) = 0\}. \tag{1.29}$$

(b) On désigne par $\operatorname{supp} N(\cdot,H)$ *(respectivement* $\operatorname{supp} N(\cdot,H^h)$*) le support de la distribution $f \to N(f,H)$ (respectivement $f \to N(f,H^h)$). Alors*

$$\sigma(H^h) = \operatorname{supp} N(\cdot,H^h) \cup \sigma(-\Delta^h), \tag{1.30}$$

$$\sigma(H) = \operatorname{supp} N(\cdot,H) \cup \sigma(-\Delta). \tag{1.31}$$

1.2 Idées de base

Soit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ l'idéal des opérateurs à trace. Si $(e_j)_{j\in J}$ est une base orthonormée de l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire J est dénombrable), alors par définition $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \sum_{j\in J} |\langle Ae_j,\, e_j\rangle_{\mathcal{H}}| < \infty$ et

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}} A = \sum_{j\in J} \langle Ae_j,\, e_j\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{pour } A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}). \tag{1.32}$$

Si $p \geq 1$ alors par définition $A \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow (A^*A)^{p/2} \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ et

$$||A||_{\mathcal{B}_p(\mathcal{H})} = \big(\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}(A^*A)^{p/2}\big)^{1/p}. \tag{1.33}$$

On abrège

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)), \qquad \mathcal{B}^h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \tag{1.34}$$

$$\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(L^2(\mathbb{R}^d)), \qquad \mathcal{B}_p^h = \mathcal{B}_p(l^2(h\mathbb{Z}^d)), \tag{1.35}$$

$$\mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^d)} A = \mathrm{tr}\, A, \qquad \mathrm{tr}_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} A^h = \mathrm{tr}^h A^h. \tag{1.36}$$

En introduisant l'opérateur $\chi_L^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$ défini par

$$(\chi_L^{h,L'}\varphi)(hn) = \chi_{[-L;\, L[^{d_1}\times[-L';\, L'[^{d_2}}(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d) \tag{1.37}$$

et en utilisant le fait que $(\delta_{hk})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est une base orthonormée de $l^2(h\mathbb{Z}^d)$ on trouve l'expression

$$N_L^{L'}(f, H^h) = (2L)^{-d_1}\, \mathrm{tr}^h\, \chi_L^{h,L'}(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \tag{1.38}$$

Dans la suite on considère le pavé unité $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0;\ 1[^d\}$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\chi_y \in \mathcal{B}$, $\chi_y^h \in \mathcal{B}^h$ par

$$(\chi_y\varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.39}$$

$$(\chi_y^h\varphi)(hn) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.40}$$

Soit $\mathcal{K}$ un ensemble (à préciser plus tard) et on suppose que $v_\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est réelle pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$. On va étudier les opérateurs auto-adjoints

$$H_\kappa = -\Delta + V_\kappa, \qquad H_\kappa^h = -\Delta^h + V_\kappa^h \tag{1.41}$$

$$(V_\kappa\varphi)(x) = v_\kappa(x)\varphi(x), \qquad (V_\kappa^h\varphi)(hn) = v_\kappa(hn)\varphi(hn). \tag{1.42}$$

L'énoncé du résultat clé pour la suite est le suivant :

Proposition 1.1. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $(H_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ donnés par* (1.41).

(a) On suppose qu'il existe $C_0 > 0$ telle que

$$||V_\kappa||_{\mathcal{B}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |v_\kappa(x)| \;\; \leq C_0 \tag{1.43}$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||\chi_y f(H_\kappa)||_{\mathcal{B}_1} + ||\chi_y^h f(H_\kappa^h)||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C, \tag{1.44}$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $y \in \mathbb{R}^d$ et $0 < h \leq 1$.

(b) Soit $\delta \geq 0$. On suppose

$$M_{\delta,\kappa,\kappa'} = \sup_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^d} (1+|x_2|)^\delta |v_\kappa(x_1,x_2) - v_{\kappa'}(x_1,x_2)| \;\; < \infty. \tag{1.45}$$

Alors, il existe $C_\delta > 0$ telle que

$$(1+|y_2|)^\delta ||\chi_{(y_1,y_2)}(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))\chi_{(y_1,y_2)}||_{\mathcal{B}_1} \leq C_\delta M_{\delta,\kappa,\kappa'}, \tag{1.46}$$

$$(1+|y_2|)^\delta ||\chi^h_{(y_1,y_2)}(f(H^h_\kappa) - f(H^h_{\kappa'}))\chi^h_{(y_1,y_2)}||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_\delta M_{\delta,\kappa,\kappa'} \tag{1.47}$$

pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y \in \mathbb{R}^d$ et $0 < h \leq 1$.

La Proposition 1.1 implique

Corollaire 1.1. *(a) Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$\sup_{L\geq 1} |N_L^{L_1}(f,H) - N_L^{L_2}(f,H)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}), \tag{1.48}$$

$$\sup_{L\geq 1} \sup_{0<h\leq 1} |N_L^{L_2}(f,H^h) - N_L^{L_1}(f,H^h)| \leq C_0(L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}). \tag{1.49}$$

(b) Les Théorèmes 1.1, 1.2 *et* 1.4 *résultent du Théorème* 1.3.

(c) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout L, $L' \geq 1$ on ait

$$\sup_{0<\rho\leq 1} |N^{L'}_{L+\rho}(f,H) - N_L^{L'}(f,H)| \leq CL^{-1}, \tag{1.50}$$

$$\sup_{0<\rho\leq 1} \;\; \sup_{0<h\leq 1} |N^{L'}_{L+\rho}(f,H^h) - N_L^{L'}(f,H^h)| \leq CL^{-1}. \tag{1.51}$$

Démonstration du corollaire 1.1. (a) On suppose $L_2 > L_1$. Alors

$$N_L^{L_2}(f, H^h) - N_L^{L_1}(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \mathrm{tr}^h(\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1})(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \tag{1.52}$$

On introduit

$$\Lambda(L, L_1) = (\mathbb{Z}^{d_1} \cap [-L;\ L[^{d_1}) \times (\mathbb{Z}^{d_2} \setminus [-(L_1 - 1);\ L_1 - 1[^{d_2}) \tag{1.53}$$

et on remarque que

$$\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1} = \sum_{y \in \Lambda(L,L_1)} \chi_y^h(\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1}). \tag{1.54}$$

Cependant, utilisant la Proposition 1.1 avec $V_\kappa^h = V^h$, $V_{\kappa'}^h = 0$ on voit que $M_{\delta,\kappa,\kappa'} < \infty$ avec $\delta = d_2 + \delta_0$ et (1.47) permet d'estimer

$$\left| \mathrm{tr}^h\, \chi_{(y_1,y_2)}^h(\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1})(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \right| \leq C(1 + |y_2|)^{-d_2-\delta_0},$$

donc la valeur absolue de (1.52) est majorée par

$$\sum_{\{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}:\ |y_2| \geq L_1 - 1\}} C(1 + |y_2|)^{-d_2-\delta_0} \ \leq C_1 L_1^{-\delta_0}.$$

(b) On va tout d'abord vérifier que le Théorème 1.2 résulte du Théorème 1.3 et du Corollaire 1.1(a). Pour obtenir l'assertion du Théorème 1.2 on doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de trouver L_ε, $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0<h<h_\varepsilon} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| \ < \varepsilon. \tag{1.55}$$

Soit $C_0 > 0$ la constante du Corollaire 1.1(a) et L'_ε tel que $C_0 {L'}_\varepsilon^{-\delta_0} < \varepsilon/8$. Ensuite l'assertion du Théorème 1.3 permet de trouver $L_\varepsilon \geq L'_\varepsilon$ et $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$\begin{gathered} L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \leq \\ |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| + |N^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \end{gathered} \tag{1.56}$$

pour $0 < h < h_\varepsilon$. Ainsi (1.56) et (1.49) impliquent

$$\begin{gathered} |N_{L_2}^{L_2}(f, H^h) - N_{L_1}^{L_1}(f, H^h)| \leq |N_{L_2}^{L'_\varepsilon}(f, H^h) - N_{L_1}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| + \\ \sum_{1 \leq k \leq 2} |N_{L_k}^{L_k}(f, H^h) - N_{L_k}^{L'_\varepsilon}(f, H^h)| \ \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + C_0(2{L'}_\varepsilon^{-\delta_0} + L_1^{-\delta_0} + L_2^{-\delta_0}) < \varepsilon, \end{gathered}$$

pour $L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon$, $0 < h < h_\varepsilon$.

Et il est clair que l'assertion du Théorème 1.1 s'obtient du Théorème 1.3 et du Corollaire 1.1(a) de manière analogue. En ce qui concerne le Théorème 1.4, il est évident l'assertion du Corollaire 1.1(a) implique l'existence des limites (1.19) et les estimations (1.20), (1.21). Ensuite pour justifier $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty \in \mathcal{B}_1$ on remarque que la suite $((f(H) - f(-\Delta))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$ est Cauchy dans $\mathcal{B}_1$ et sa limite dans $\mathcal{B}_1$ coïncide avec $(f(H) - f(-\Delta))\chi_L^\infty$ car $\lim_{L' \to \infty} ||\chi_L^\infty \varphi - \chi_L^{L'}\varphi|| = 0$ pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. De la même manière on trouve que $((f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{L'})_{L' \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{B}_1^h$ vers $(f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_L^{h,\infty}$, où

$$(\chi_L^{h,\infty}\varphi)(hn) = \chi_{[-L;\, L[^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}}(hn)\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.57}$$

Ainsi, on a

$$N_L(f, H^h) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^{h,\infty}(f(H^h) - f(-\Delta^h)), \tag{1.58}$$

et par conséquent, la série (1.24) converge absolument. Finalement pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $L'_\varepsilon > 0$ tel que

$$L \leq L'_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0<h\leq 1} \sup_{L \geq 1} |N_L(f, H^h) - N_L^L(f, H^h)| \leq C_0 L'^{-\delta_0} < \varepsilon/2,$$

donc (1.26) résulte de (1.14).

(c) Soit $\Lambda'(L) = \mathbb{Z}^{d_1} \cap ([-(L+2);\ L+2]^{d_1} \setminus [-(L-1);\ L-1]^{d_1})$. Alors

$$\chi_{L+\rho}^{h,L'} - \chi_L^{h,L'} = \sum_{y \in \Lambda'(L) \times \mathbb{Z}^{d_2}} \chi_y^h(\chi_L^{h,L_2} - \chi_L^{h,L_1}) \tag{1.59}$$

et compte tenu du fait que $\operatorname{card} \Lambda'(L) \leq C_0 L^{d_1 - 1}$ on a pu estimer le membre gauche de (1.51) par

$$C_1 L^{-1} \sup_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} ||\chi_{(y_1,y_2)}^h (f(H^h) - f(-\Delta^h))\chi_{(y_1,y_2)}^h||_{\mathcal{B}_1}$$
$$\leq C_2 L^{-1} \sum_{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} (1 + |y_2|)^{-d_2 - \delta_0} \leq C L^{-1}.$$

De la même façon on peut montrer le résultat pour le cas continu ce qui donne (1.50).

□

Corollaire 1.2. *Pour prouver le Théorème* 1.5 *il suffit de montrer que pour toute fonction* $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *on a*

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{tr}^h \Theta^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) = \operatorname{tr} \Theta(f(H) - f(-\Delta)), \tag{1.60}$$

où Θ *et* Θ^h *sont les opérateurs de multiplication*

$$(\Theta\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x) \ \ pour\ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{1.61}$$

$$(\Theta^h\varphi)(hn) = \theta(hn)\varphi(hn) \ \ pour\ \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.62}$$

Démonstration du Corollaire 1.2. L'assertion du Théorème 1.5 sera démontrée si on montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver L_ε, $h_\varepsilon > 0$ tels que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0<h<h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - N_L^L(f, H)| \ < \varepsilon. \tag{1.63}$$

Soit $C_0 > 0$ la constante du Corollaire 1.1(a) et L_ε tel que $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} < \varepsilon/8$. Ensuite, pour $L > 0$ on peut choisir $\theta_L \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $0 \leq \theta_L \leq 1$, $\theta_L = 1$ sur $[-L;\ L[^d$ et $\operatorname{supp}\theta_L \subset [-L-1;\ L+1[^d$. On introduit les opérateurs Θ_L et Θ_L^h définis par

$$(\Theta_L\varphi)(x) = \theta_L(x)\varphi(x) \ \text{ pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$(\Theta_L^h\varphi)(hn) = \theta_L(hn)\varphi(hn) \ \text{ pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d),$$

et on montre qu'il est possible de choisir L_ε tel que

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow \sup_{0<h<h_\varepsilon} |N_L^L(f, H^h) - \operatorname{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h))| \ < \varepsilon/4, \tag{1.64}$$

$$L \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_L^L(f, H) - \operatorname{tr}\Theta_L(f(H) - f(-\Delta))| \ < \varepsilon/4. \tag{1.65}$$

En effet, pour obtenir (1.64) on remarque que

$$\Theta_L^h - \chi_L^{h,L} = \sum_{y\in\Lambda(L,L)\cup(\Lambda'(L)\times\mathbb{Z}^{d_2})} \chi_y^h(\Theta_L^h - \chi_L^{h,L})$$

où $\Lambda(L, L)$ et $\Lambda'(L)$ sont identiques à celle de la démonstration du Corollaire 1.1. De la même manière on trouve

$$\sum_{y\in\Lambda'(L)\times\mathbb{Z}^{d_2}} |\operatorname{tr}^h(\Theta_L^h - \chi_L^{h,L})\chi_y^h(f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_0 L^{-\delta_0},$$

$$\sum_{y\in\Lambda(L,L)} |\operatorname{tr}^h(\Theta_L^h - \chi_L^{h,L})\chi_y^h(f(H^h) - f(-\Delta^h))| \leq C_1 L^{-1},$$

et (1.64) est assurée si $C_0 L_\varepsilon^{-\delta_0} + C_1 L_\varepsilon^{-1} < \varepsilon/4$. De manière analogue on obtient (1.65) et pour terminer la démonstration de (1.63) il suffit de remarquer que (1.60) assure l'existence de $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h<h_\varepsilon} \left|\operatorname{tr}^h \Theta_L^h(f(H^h) - f(-\Delta^h)) \ - \ \operatorname{tr}\Theta_L(f(H) - f(-\Delta))\right| < \varepsilon/2.$$

Lemme 1.1. *Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_2}$, $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$ pour $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$ tels que*

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} v_{\varepsilon,k}(x_2) e^{ix_1\gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon.$$

où $e^h_{\gamma_{\varepsilon,k}} \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$, $V^h_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$ sont donnés par

$$(e^h_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1)(hn_1) = \mathrm{e}^{ihn_1\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1(hn_1) \quad \textit{pour} \quad \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V^h_{\varepsilon,k}\varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2)\varphi_2(hn_2) \quad \textit{pour} \quad \varphi_2 \in h^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $w_\varepsilon(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)\theta_\varepsilon(x_2)$ où $\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_2})$ est choisie telle que $0 \le \theta_\varepsilon \le 1$ et $|v(x) - w_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ensuite on remarque que pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe $\delta' > 0$ tel que

$$|x_2 - x_2'| < \delta' \Rightarrow \sup_{x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}} |w_\varepsilon(x_1, x_2) - w_\varepsilon(x_1, x_2')| < \varepsilon'$$

et utilisant par exemple les formules de polynôme de Bernstein, on peut trouver les coefficients $c_{N,y_2,\nu,\varepsilon} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \operatorname{supp}\theta_\varepsilon$ on ait

$$\left| v(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \\ \{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} :\, |\nu| \le 2d_1 N(\varepsilon)\}}} v(x_1, y_2/N(\varepsilon)) c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

si $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ est choisi suffisamment grand.

Pour terminer la démonstration on remarque que $v(\cdot, N(\varepsilon)^{-1}y_2) \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ permet de trouver $N'(\varepsilon)$ et $c_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{C}$, $\gamma_{\varepsilon,k,y_2} \in \mathbb{R}^{d_1}$ pour $k = 1, \dots, N'(\varepsilon)$ tels que

$$\left| w_\varepsilon(x_1, x_2) - \sum_{\substack{y_2 \in \mathbb{Z}^{d_2} \cap \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \\ 1 \le k \le N'(\varepsilon)}} c_{\varepsilon,k,y_2} \mathrm{e}^{ix_1\gamma_{\varepsilon,k,y_2}} v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$v_{\varepsilon,k,y_2}(x_2) = \sum_{\{\nu \in \mathbb{Z}^{d_2} :\, |\nu| \le 2d_1 N(\varepsilon)\}} c_{N(\varepsilon),y_2,\nu,\varepsilon} x_2^\nu \theta_\varepsilon(x_2).$$

□

1.3 Démonstrations des Théorèmes 1.1-1.4

Les démonstrations sont basées sur l'étude de la famille d'opérateurs $(H_z)_{z\in\mathbb{R}^{d_1}}$ définit sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$H_z = -\Delta + V_z, \tag{1.66}$$

$$(V_z\varphi)(x) = v(x_1+z, x_2)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.67}$$

On commence par l'énoncé du résultat clé de cette section :

Proposition 1.2. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $L' \in \mathbb{N}$ et $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$. On pose*

$$u_{y_1}^{L'}(z) = \sum_{y_2\in[\![-L';\, L'[\![^{d_2}} \operatorname{tr} \chi_{(y_1,y_2)}(f(H_z) - f(-\Delta)), \tag{1.68}$$

où $[\![-L';\ L'[\![= \mathbb{Z} \cap [-L'; L'[$. *Alors* $u_{y_1}^{L'} \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$.

Démonstration de fait que la Proposition 1.2 implique le Théorème 1.1 :
Soit $T_{(z,0)}$ l'opérateur de la translation, $(T_{(z,0)}\varphi)(x) = \varphi(x_1 - z, x_2)$. Alors

$$H = T_{(z,0)}H_zT_{(-z,0)}, \qquad \chi_{(y_1,y_2)} = T_{(y_1,0)}\chi_{(0,y_2)}T_{(-y_1,0)}, \tag{1.69}$$

$$\operatorname{tr}\chi_{(y_1,y_2)}f(H) = \operatorname{tr}T_{(y_1,0)}\chi_{(0,y_2)}f(H_{y_1})T_{(-y_1,0)} \tag{1.70}$$

et il est clair que

$$u_{y_1}^{L'}(0) = u_0^{L'}(y_1). \tag{1.71}$$

Ainsi, notant $[L]$ la partie entière de L on peut écrire

$$(2[L])^{-d_1} \sum_{y_1\in[\![-L;L[\![^{d_1}} u_0^{L'}(y_1) = N_{[L]}^{L'}(f,H), \tag{1.72}$$

et compte tenu du Corollaire 1.1 il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $L_\varepsilon > 0$ tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f,H) - N_{L_2}^{L'}(f,H)| < \varepsilon. \tag{1.73}$$

Soit C_1 la constante de l'assertion du Corollaire 1.1(c) et soit $L_\varepsilon \geq 4C_1/\varepsilon$. Alors, pour obtenir (1.73) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]}^{L'}(f,H) - N_{[L_2]}^{L'}(f,H)| < \varepsilon/2. \tag{1.74}$$

Par définition de $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ on peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $c_{\varepsilon,k} \in \mathbb{C}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ tels que l'on ait

$$|u_0^{L'}(z) - u_\varepsilon^{L'}(z)| < \varepsilon/8, \tag{1.75}$$

avec

$$u_\varepsilon^{L'}(z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} \mathrm{e}^{iz\gamma_{\varepsilon,k}}. \tag{1.76}$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f,H) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in [\![-L;L[\![^{d_1}} u_\varepsilon^{L'}(y_1) \tag{1.77}$$

possède une limite quand $L \to \infty$. En effet, la condition de Cauchy pour $L \to N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f,H)$ assure l'existence de $L_\varepsilon > 0$ tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon,[L_2]}^{L'}(f,H) - N_{\varepsilon,[L_1]}^{L'}(f,H)| < \varepsilon/4, \tag{1.78}$$

et (1.75) permet d'estimer

$$|N_{[L]}^{L'}(f,H) - N_{\varepsilon,[L]}^{L'}(f,H)| \leq \varepsilon/8, \tag{1.79}$$

pour $L = L_1$ et $L = L_2$, donc l'inégalité triangulaire implique (1.74).

Il reste à justifier que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}$, la fonction

$$L \to N_{[L]}(\gamma) = (2[L])^{-d_1} \sum_{y_1 \in [\![-L;\, L[\![^{d_1}} \mathrm{e}^{iy_1\gamma} \tag{1.80}$$

possède une limite quand $L \to \infty$. Cependant dans le cas $\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$, l'assertion est évidente car

$$|1 - N_{[L]}(\gamma)| = |1 - (2[L])^{-d_1} \mathrm{card}\, [\![-L;\; L[\![^{d_1}| \leq C/L \to 0 \quad \text{quand } L \to \infty.$$

Il reste à étudier le cas $\gamma = (\gamma(1), ..., \gamma(d_1)) \notin 2\pi\mathbb{Z}^{d_1}$. Si $j_0 \in \{1, ..., d\}$ est tel que $\gamma(j_0) \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors on achève la démonstration en utilisant

$$\left| \sum_{\nu=-L}^{L-1} \mathrm{e}^{i\nu\gamma(j_0)} \right| \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{i\gamma(j_0)} - 1|}, \tag{1.81}$$

et

$$|N_{[L]}(\gamma)| = \Pi_{j=1}^{d_1} \left| \frac{1}{2[L]} \sum_{\nu=-L}^{L-1} \mathrm{e}^{i\nu\gamma(j)} \right| \leq 2L^{-1} |\mathrm{e}^{i\gamma(j_0)} - 1|^{-1} \to 0,$$

quand $L \to \infty$.

$\square$

Avant de commencer la démonstration de la Proposition 1.2 on va introduire des notations auxiliaires. Si $\mathcal{A}$ est un espace de Banach, alors $C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{A})$ désigne l'ensemble des applications $\Phi\ :\ \mathbb{R}^{d_1} \to \mathcal{A}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}$ $(k = 1, ..., N(\varepsilon))$ tels que

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{d_1}} ||\Phi(z) - \sum\nolimits_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k}\, \mathrm{e}^{iz\cdot\gamma_{\varepsilon,k}}||_{\mathcal{A}} < \varepsilon. \tag{1.82}$$

On remarque que $C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{A})$ est un espace de Banach avec la norme

$$||\Phi||_\infty = \sup_{z\in\mathbb{R}^{d_1}} ||\Phi(z)||_{\mathcal{A}}. \tag{1.83}$$

Lemme 1.2. *Si V_z est donné par* (1.67)*, alors la fonction $z \to V_z$ appartient à $C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B})$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a $||V - V_{0,\varepsilon}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ avec $V_{0,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V^{\varepsilon,k}$, où $V^{\varepsilon,k}$ désigne l'opérateur de multiplication par $v_{\varepsilon,k}(x) = \mathrm{e}^{i\gamma_{\varepsilon,k}x_1}\tilde{v}_{\varepsilon,k}(x_2)$ comme dans la Section 1.2. Alors

$$V_{z,\varepsilon} = T^{-1}_{(z,0)} V_{0,\varepsilon} T_{(z,0)} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} V^{\varepsilon,k}\mathrm{e}^{iz\gamma_{\varepsilon,k}} \tag{1.84}$$

et on a $||V_z - V_{z,\varepsilon}||_{\mathcal{B}} = ||T^{-1}_{(z,0)}(V - V_{0,\varepsilon})T_{(z,0)}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon.$ $\square$

Lemme 1.3. *Soit $p \geq 1$. Alors $C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_p)$ est un idéal bilatéral de l'algèbre de Banach $C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B})$. Si $\Phi_j \in C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_{p_j})$ pour $j = 1,\ 2$, alors on a $\Phi_1\Phi_2 \in C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_p)$ avec $p = p_1p_2/(p_1 + p_2)$.*

Démonstration. Si $\Phi_j \in C_{\rm pp}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_{p_j})$ et $\varepsilon > 0$, alors on peut trouver $N(\varepsilon)$ et $A_{\varepsilon,k,j} \in \mathcal{B}_{p_j}$, $\gamma_{\varepsilon,k,j} \in \mathbb{R}^{d_1}$ $(k = 1, ..., N\varepsilon)$ tels que

$$\Phi_{\varepsilon,j}(z) = \sum\nolimits_{k=1}^{N(\varepsilon)} A_{\varepsilon,k,j}\, \mathrm{e}^{iz\cdot\gamma_{\varepsilon,k,j}} \tag{1.85}$$

vérifie $||\Phi_j(z) - \Phi_{\varepsilon,j}(z)||_{\mathcal{B}_{p_j}} < \varepsilon(1 + ||\Phi_1||_\infty + ||\Phi_2||_\infty)^{-1}$. Puisque

$$\tfrac{1}{p} = \tfrac{1}{p_1} + \tfrac{1}{p_2} \Longrightarrow ||A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}||_{\mathcal{B}_p} \leq ||A_{\varepsilon,k,1}||_{\mathcal{B}_{p_1}} ||A_{\varepsilon,k',2}||_{\mathcal{B}_{p_2}}, \tag{1.86}$$

on peut trouver N_ε et $A_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}_p$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ $(k = 1, ..., N_\varepsilon^2)$ tels que

$$\Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z) = \sum\nolimits_{k=1}^{N_\varepsilon^2} A_{\varepsilon,k}\, \mathrm{e}^{iz\cdot\gamma_{\varepsilon,k}} \tag{1.87}$$

et on peut estimer $||\Phi_1(z)\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)\Phi_{\varepsilon,2}(z)||_{\mathcal{B}_p}$ par

$$||(\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z))\Phi_2(z)||_{\mathcal{B}_p} + ||\Phi_{\varepsilon,1}(z)(\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z))||_{\mathcal{B}_p} \leq$$

$$||\Phi_1(z) - \Phi_{\varepsilon,1}(z)||_{\mathcal{B}_{p_1}}||\Phi_2(z)||_{\mathcal{B}_{p_2}} + ||\Phi_{\varepsilon,1}(z)||_{\mathcal{B}_{p_1}}||\Phi_2(z) - \Phi_{\varepsilon,2}(z)||_{\mathcal{B}_{p_2}} < \varepsilon.$$

On en déduit $\Phi_1\Phi_2 \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_p)$ et en remplaçant $\mathcal{B}_{p_j}$ par $\mathcal{B}$ dans ce raisonnement on trouve que $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B})$ est une algèbre. Enfin utilisant le raisonnement analogue avec

$$||A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}||_{\mathcal{B}_p} \leq ||A_{\varepsilon,k,1}||_{\mathcal{B}}||A_{\varepsilon,k',2}||_{\mathcal{B}_p}, \tag{1.88}$$

on trouve que $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_p)$ est un idéal à gauche et pareillement

$$||A_{\varepsilon,k,1}A_{\varepsilon,k',2}||_{\mathcal{B}_p} \leq ||A_{\varepsilon,k,1}||_{\mathcal{B}_p}||A_{\varepsilon.k',2}||_{\mathcal{B}}, \tag{1.89}$$

permet de trouver que $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{B}_p)$ est un idéal à droite. □

On aura également besoin du

Proposition 1.3. *Soit* $\lambda_0 \geq 1 + 2||V||_{\mathcal{B}}$ *et pour* $m \in \mathbb{N}^*$ *on pose*

$$R_z^m = (-\Delta + V_z + \lambda_0 I)^{-m}, \qquad (R_z^h)^m = (-\Delta^h + V_z^h + \lambda_0 I)^{-m}. \tag{1.90}$$

Si $p \geq \max\{m,\, 2\}$, $p > d/2$ *et* $N \in \mathbb{N}$, *alors on peut trouver des constantes* $C_{N,m} > 0$ *telles que l'on ait*

$$||\chi_y R_z^m||_{\mathcal{B}_{p/m}} + ||\chi_y^h (R_z^h)^m||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} \leq C_{0,m}, \tag{1.91}$$

$$||\chi_y R_z^m \chi_{y'}||_{\mathcal{B}_{p/m}} + ||\chi_y^h (R_z^h)^m \chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} \leq C_{N,m}(1 + |y - y'|)^{-N} \tag{1.92}$$

pour tout $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ *et* $0 < h \leq 1$.

La démonstration de la Proposition 1.3 sera détaillée dans le Chapitre 3.

Démonstration de la Proposition 1.2.

On fixe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_0 \geq 2 + \frac{d}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Weierstrass permet de trouver un polynôme d'une variable réelle, $g_\varepsilon(s) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} s^k$, tel que

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0/2} \left|(\lambda + \lambda_0)^{m_0} f(\lambda) - g_\varepsilon\left((\lambda + \lambda_0)^{-1}\right)\right| < \varepsilon / C_{0,m_0}, \tag{1.93}$$

où C_{0,m_0} est la constante de la formule (1.91). En posant $f_\varepsilon(\lambda) = (\lambda + \lambda_0)^{-m_0} g_\varepsilon\left((\lambda + \lambda_0)^{-1}\right)$ on obtient

$$\lambda \geq \lambda_0/2 \ \Rightarrow \pm\left(f(\lambda) - f_\varepsilon(\lambda)\right) \leq \varepsilon(\lambda + \lambda_0)^{-m_0} / C_{0,m_0},$$

donc

$$\pm \operatorname{tr} \chi_y(f(H_z) - f_\varepsilon(H_z))\chi_y \leq \frac{\varepsilon}{C_{0,m_0}} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0} \chi_y < \varepsilon. \tag{1.94}$$

Ainsi, il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$z \to \operatorname{tr} \chi_y f_\varepsilon(H_z) = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k} \operatorname{tr} \chi_y R_z^{m_0+k},$$

appartient à $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$. Pour cela on va montrer que les fonctions $z \to \Phi_{y,m}(z) = \chi_y R_z^m$ appartiennent à $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_1)$ pour $m \geq m_0$. Plus précisément, on va établir

$$p \geq \max\{m,\, 2 + \tfrac{d}{2}\} \Rightarrow \Phi_{y,m} \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/m}) \tag{1.95}$$

par récurrence par rapport à $m \in \mathbb{N}^*$.

On commence par $m = 1$. On pose $R = (-\Delta + \lambda_0 I)^{-1}$ et

$$\Phi_{y,1,N}(z) = \chi_y R \sum_{k=0}^{N} (-V_z R)^k. \tag{1.96}$$

Puisque $||V_z R||_{\mathcal{B}} \leq 1/2$ on peut écrire

$$\Phi_{y,1}(z) = \chi_y R_z = \chi_y R(I + V_z R)^{-1} = \chi_y R \sum_{k=0}^{\infty} (-V_z R)^k \tag{1.97}$$

et on trouve

$$||\Phi_{y,1}(z) - \Phi_{y,1,N}(z)||_{\mathcal{B}_p} \leq ||\chi_y R||_{\mathcal{B}_p} \sum_{k=N+1}^{\infty} ||V_z R||_{\mathcal{B}}^k \leq 2^{-N} ||\chi_y R||_{\mathcal{B}_p}. \tag{1.98}$$

Ainsi pour montrer (1.95) pour $m = 1$ il suffit de savoir que $\Phi_{y,1,N} \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$. Mais les fonctions $z \to (V_z R)^k$ appartiennent à $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B})$ et $\chi_y R \in \mathcal{B}_p$, d'où $\Phi_{y,1,N} \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_p)$.

En utilisant le raisonnement par récurrence on suppose que l'assertion (1.95) est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Alors le Lemme 1.3 assure que

$$\Phi_{y,m+1,N} = \sum_{y' \in [\![-N;\, N[\![^d} \Phi_{y,1} \Phi_{y',m} \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$$

et en utilisant la Proposition 1.3 on peut estimer

$$N' > N \Rightarrow ||\Phi_{y,m+1,N'}(z) - \Phi_{y,m+1,N}(z)||_{\mathcal{B}_{p/(m+1)}} \leq$$

$$\sum_{y' \in [\![-N';\, N'[\![^d \setminus [\![-N;\, N[\![^d} ||\chi_y R_z \chi_{y'}||_{\mathcal{B}_p} ||\chi_{y'} R_z^m||_{\mathcal{B}_{p/m}}$$
$$\leq \sum_{y' \in \mathbb{Z}^d \setminus [\![-N;\, N[\![^d} C(1+|y-y'|)^{-d-1} \leq C'/N.$$

Ainsi, $\Phi_{y,m+1}$ est la limite de la suite $(\Phi_{y,m+1,N})_{N \in \mathbb{N}}$ dans $C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}_{p/(m+1)})$.

□

Proposition 1.4. *Soient $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $L' \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ et $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$. On pose*

$$u_{\rho,y_1}^{h,L'}(z) = \mathrm{tr}^h\, \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H_z^h) - f(-\Delta^h)), \tag{1.99}$$

où $\chi_{\rho,y_1}^{h,L'} \in \mathcal{B}^h$ est défini par la formule

$$(\chi_{\rho,y_1}^{h,L'}\varphi)(hn_1, hn_2) = \sum_{y_2 \in [\![-L';\, L'[\![^{d_2}} \chi_{\mathcal{C}(y_1,y_2)}(hn_1/\rho, hn_2)\varphi(hn_1, hn_2) \tag{1.100}$$

pour $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ et $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$.

Si $\varepsilon > 0$, $\rho \in [\frac{1}{2};\, 1]$ alors on peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} \in \mathbb{C}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$ ($k = 0, \ldots, N(\varepsilon)$) tels que

$$\sup_{0<h\leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^{d_1}} \left| u_{\rho,0}^{h,L'}(z) - \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} \mathrm{e}^{iz\gamma_{\varepsilon,k}} \right| < \varepsilon/8, \tag{1.101}$$

$$\sup_{0<h\leq 1} |c_{\varepsilon,k}^{h,\rho}| < \infty. \tag{1.102}$$

Démonstration du fait que la Proposition 1.4 implique le Théorème 1.2

Au début on observe que pour $\rho \in h\mathbb{N}$, $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ on peut écrire

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \mathrm{tr}^h\, T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,0}^{h,L'}(f(H_{\rho y_1}^h) - f(-\Delta^h))T_{(-\rho y_1,0)}^h, \tag{1.103}$$

où $T_{(\rho y_1,0)}^h$ est l'opérateur de la translation,

$$(T_{(\rho y_1,0)}^h\varphi)(hn) = \varphi(hn_1 - \rho y_1, hn_2) \quad \text{pour } \varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.104}$$

Compte tenu de

$$T_{(\rho y_1,0)}^h \chi_{\rho,0}^{h,L'} T_{(-\rho y_1,0)}^h = \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}, \qquad T_{(\rho y_1,0)}^h H_{\rho y_1}^h T_{(-\rho y_1,0)}^h = H^h \tag{1.105}$$

on obtient

$$u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = \mathrm{tr}^h\, \chi_{\rho,y_1}^{h,L'}(f(H^h) - f(-\Delta^h)). \tag{1.106}$$

En introduisant la notation $[L]_\rho = \rho[L/\rho]$ on trouve

$$\sum_{y_1 \in [\![-L/\rho;\ L/\rho[\![^{d_1}} \chi_{\rho,y_1}^{h,L'} = \chi_{[L]_\rho}^{h,L'} \tag{1.107}$$

et par conséquent

$$(2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in [\![-L/\rho;\ L/\rho[\![^{d_1}} u_{\rho,0}^{h,L'}(\rho y_1) = N_{[L]_\rho}^{L'}(f, H^h). \tag{1.108}$$

Compte tenu du Corollaire 1.1 il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $L_\varepsilon > 0$ tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H^h) - N_{L_2}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon. \tag{1.109}$$

Choisissant L_ε assez grand et utilisant le Corollaire 1.1(c) on voit que pour obtenir (1.109) il suffit de montrer que pour un choix convenable de $\rho(h,\varepsilon) \in [1/2;\ 1] \cap h\mathbb{N}$ on a

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{[L_1]_{\rho(h,\varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{[L_2]_{\rho(h,\varepsilon)}}^{L'}(f, H^h)| < \varepsilon/2. \tag{1.110}$$

Soient $c_{\varepsilon,k}^{h,\rho}$, $\gamma_{\varepsilon,k}$ choisis comme dans la Proposition 1.4 et

$$N_{\varepsilon,L}^{h,\rho} = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k}^{h,\rho} N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon,k}), \tag{1.111}$$

où

$$N_L^\rho(\gamma_{\varepsilon,k}) = (2[L]_\rho)^{-d_1} \sum_{y_1 \in [\![-L/\rho;\ L\rho[\![^{d_1}} \mathrm{e}^{i\rho y_1 \gamma_{\varepsilon,k}}. \tag{1.112}$$

Alors (1.101) avec $\rho = \rho(h,\varepsilon)$ assure que

$$|N_{[L]_{\rho(h,\varepsilon)}}^{L'}(f, H^h) - N_{\varepsilon,L}^{h,\rho(h,\varepsilon)}| < \varepsilon/8 \tag{1.113}$$

et pour obtenir (1.110) il suffit de montrer

$$L_2 \geq L_1 \geq L_\varepsilon \Rightarrow |N_{\varepsilon,L_1}^{h,\rho(h,\varepsilon)} - N_{\varepsilon,L_2}^{h,\rho(h,\varepsilon)}| < \varepsilon/4. \tag{1.114}$$

Ainsi, il suffit de prouver que (1.112) possède une limite quand $L \to \infty$ et le fait que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $h_\varepsilon > 0$, C_ε tels que

$$\sup_{0 < h \leq h_\varepsilon} \left| N_L^{\rho(h,\varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon,k}) - \lim_{L \to \infty} N_L^{\rho(h,\varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon,k}) \right| \leq C_\varepsilon / L. \tag{1.115}$$

On peut supposer $\gamma_{\varepsilon,0} = 0$ (avec la possibilité d'avoir $c^h_{\varepsilon,0} = 0$) et $\gamma_{\varepsilon,k} \neq 0$ pour $k = 1, ..., N(\varepsilon)$. Alors (1.115) pour $k = 0$ est évident et pour démontrer (1.115) avec $k \geq 1$ on pose

$$d_\varepsilon(t) = \inf_{1\leq k\leq N(\varepsilon)} \operatorname{dist}(t\gamma_{\varepsilon,k}, 2\pi\mathbb{Z}^d) \quad \text{pour } t > 0. \tag{1.116}$$

Alors la fonction $t \to d_\varepsilon(t)$ est continue et $\{t \in \mathbb{R} : d_\varepsilon(t) = 0\}$ est discrète. Ainsi on peut trouver $t(\varepsilon) \in [1/2;\ 3/4]$ tel que $d_\varepsilon(t) > 0$ et $h(\varepsilon) > 0$ tel que $t(\varepsilon) \leq t \leq t(\varepsilon) + h(\varepsilon) \Rightarrow d_\varepsilon(t) \geq d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$, donc sous l'hypothèse $0 < h \leq h(\varepsilon)$ il est possible de trouver $\rho(h, \varepsilon) \in [1/2;\ 1] \cap h\mathbb{N}$ tel que $d_\varepsilon(\rho(h, \varepsilon)) \geq d_\varepsilon(t(\varepsilon))/2$. Comme au début de cette section on peut estimer

$$|N_L^{\rho(h,\varepsilon)}(\gamma_{\varepsilon,k})| \leq 2L^{-1}|\mathrm{e}^{id_\varepsilon(t(\varepsilon))/2} - 1|^{-1}. \tag{1.117}$$

Ainsi on a démontré que le Théorème 1.2 résulte de la Proposition 1.4.

□

Démonstration de la Proposition 1.4. Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^h)_{0<h\leq 1}$ une famille d'espaces de Banach $\mathcal{A}^h$. Alors on écrira $\Phi \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ \mathcal{A})$ si et seulement si $\Phi = (\Phi^h)_{0<h\leq 1}$ est une famille d'applications $\Phi^h : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathcal{A}^h$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $A^h_{\varepsilon,k} \in \mathcal{A}^h$ $(k = 0, ..., N(\varepsilon))$ tels que

$$\sup_{0<h\leq 1} \sup_{z\in\mathbb{R}^{d_1}} ||\Phi^h(z) - \sum\nolimits_{j=0}^{N(\varepsilon)} A^h_{\varepsilon,k}\, \mathrm{e}^{iz\cdot\gamma_{\varepsilon,k}}||_{\mathcal{A}^h} < \varepsilon \tag{1.118}$$

et $\sup_{0<h\leq 1} ||A^h_{\varepsilon,k}||_{\mathcal{A}^h} < \infty$ pour $k = 0, ..., N(\varepsilon)$.

Alors $(z \to V^h_z)_{0<h\leq 1} \in C_{\mathrm{pp}}(\mathbb{R}^{d_1};\ (\mathcal{B}^h)_{0<h\leq 1})$ et le Lemme 1.3 restent valables également. Il reste à suivre la démonstration de la Proposition 1.4 en remplaçant R_z, V_z, R, $\mathcal{B}_{p/m}$ par $(R^h_z)_{0<h\leq 1}$, $(V^h_z)_{0<h\leq 1}$, $((-\Delta^h + \lambda_0 I)^{-1})_{0<h\leq 1}$ et $(\mathcal{B}^h_{p/m})_{0<h\leq 1}$ respectivement.

□

1.4 Démonstrations des Théorèmes 1.5 et 1.6

On note par $\mathcal{F}$ l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ donné par la formule

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\, dx \quad \text{pour } \varphi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1.119}$$

et on introduit la bijection isométrique $\mathcal{F}^h : l^2(h\mathbb{Z}^d) \to L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d)$ par la formule

$$(\mathcal{F}^h\varphi)(\xi) = (2\pi/h)^{-d/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{-ihn\cdot\xi}\varphi(hn) \quad \text{pour } \varphi \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^d). \tag{1.120}$$

Lemme 1.4. *Soit* $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *On définit* $\theta^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ *par* $\theta^h(hn) = \theta(hn)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}^d$. *Alors pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\sup_{0<h\leq 1} \sup_{\xi\in[-\pi/h;\ \pi/h[^d} h^{d/2}|\xi|^N \, |(\mathcal{F}^h\theta_h)(\xi)| \, < \infty. \tag{1.121}$$

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}$ posons $\theta_N^h = (-\Delta^h)^N\theta^h$. Il est clair que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |\theta_1^h(hn)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{1\leq j\leq d} |\partial_{x_j}^2\theta(x)| \leq C' \tag{1.122}$$

et plus généralement, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$C_N = \sup_{0<h\leq 1} \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |\theta_N^h(hn)| < \infty, \tag{1.123}$$

donc

$$|(\mathcal{F}^h\theta_N^h)(\xi)| \leq (2\pi/h)^{-d/2} \sum_{\{n\in\mathbb{Z}^d:\, hn\in\operatorname{supp}\theta_N^h\}} |\theta_N^h(hn)| \, \leq C_N h^{-d/2}. \tag{1.124}$$

De l'autre côté, on a $(\mathcal{F}^h\theta_N^h)(\xi) = \vartheta_h(\xi)^N(\mathcal{F}^h\theta^h)(\xi)$ avec

$$\vartheta_h(\xi) = \sum_{j=1}^d \frac{2-2\cos(h\xi_j)}{h^2} = \sum_{j=1}^d \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{h}{2}\xi_j\right). \tag{1.125}$$

Il reste à remarquer que

$$\xi \in [-\pi/h;\ \pi/h[^d \implies \tfrac{1}{4}|\xi|^2 \, \leq \vartheta_h(\xi) \, \leq |\xi|^2 \tag{1.126}$$

avec (1.124) impliquent(1.121) . □

On note J^h l'injection isométrique $L^2([\pi/h;\ \pi/h[^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ qui s'obtient en prolongeant les fonctions par la valeur 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus [-\pi/h;\ \pi/h[^d$. Alors

$$J^{h*}\varphi = \varphi_{|_{[-\pi/h;\ \pi/h[^d}} \in L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1.127}$$

est la formule de l'opérateur adjoint à J^h.

Pour $T > 0$ on définit $\chi_T \in \mathcal{B}$ par la formule

$$(\chi_T\varphi)(\xi) = \chi_{[-T;\,T[^d}(\xi)\varphi(\xi) \quad \text{pour } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.128}$$

Ensuite on définit $P_T \in \mathcal{B}$ et $P_T^h \in \mathcal{B}^h$ par

$$P_T = \mathcal{F}^*\chi_T\mathcal{F}, \qquad P_T^h = (J^h\mathcal{F}^h)^*\chi_T J^h\mathcal{F}^h \tag{1.129}$$

et on remarque que $T \geq \pi/h \Rightarrow P_T^h = I$.

Lemme 1.5. *Si $T' \geq 1$ est fixé, alors*

$$\lim_{T\to\infty} ||(I - P_T)\,\Theta\,P_{T'}||_{\mathcal{B}} = 0, \tag{1.130}$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{0<h\leq 1} ||(I - P_T^h)\,\Theta^h\,P_{T'}^h||_{\mathcal{B}^h} = 0. \tag{1.131}$$

Démonstration. Soit $\widetilde{\Theta}^h_{T,T'} \in \mathcal{B}(L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d))$ défini par

$$\widetilde{\Theta}^h_{T,T'} = \mathcal{F}^h(I - P_T^h)\Theta^h P_{T'}^h(\mathcal{F}^h)^*. \tag{1.132}$$

Alors

$$(\widetilde{\Theta}^h_{T,T'}\varphi)(\xi) = \int_{[-\pi/h;\ \pi/h[^d} K^h_{T,T'}(\xi,\xi')\varphi(\xi')\,d\xi', \tag{1.133}$$

$$K^h_{T,T'}(\xi,\xi') = (1 - \chi_{[-T;\,T[^d}(\xi))(\tfrac{h}{2\pi})^{d/2}(\mathcal{F}^h\theta^h)(\xi-\xi')\chi_{[-T';\,T'[^d}(\xi'). \tag{1.134}$$

En vertu du Lemme 1.4 pour $T > T'$ on peut estimer

$$\begin{aligned}|K^h_{T,T'}(\xi,\xi')| &\leq (1 - \chi_{[-T;\,T[^d}(\xi))C_N(1+|\xi-\xi'|)^{-N}\chi_{[-T';\,T'[^d}(\xi')\\ &\leq C_N|T-T'|^{-N/2}(1+|\xi-\xi'|)^{-N/2}\chi_{[-T';\,T'[^d}(\xi').\end{aligned} \tag{1.135}$$

Si $N > d$ alors on peut estimer

$$||\widetilde{\Theta}^h_{T,T'}||^2_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d))} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |K^h_{T,T'}(\xi,\xi')|^2\,d\xi d\xi' \leq$$

$$\int_{[-T';\,T'[^d} d\xi' \int_{[-\pi/h;\ \pi/h[^d} d\xi C_N^2|T-T'|^{-N}(1+|\xi-\xi'|)^{-N} \leq C'_N|T-T'|^{-N}$$

et pour terminer la démonstration de (1.131) on remarque que pour T' fixé on a

$$\begin{aligned}||(I-P_T)\Theta^h P_{T'}||_{\mathcal{B}^h} &= ||\widetilde{\Theta}^h_{T,T'}||_{\mathcal{B}(L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d))}\\ &\leq ||\widetilde{\Theta}^h_{T,T'}||_{\mathcal{B}_2(L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d))} \to 0 \quad \text{quand } T\to\infty.\end{aligned}$$

La démonstration de (1.130) est semblable : $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ assure le fait que $\mathcal{F}\theta$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ telle que

$$|\mathcal{F}\theta(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N} \tag{1.136}$$

et définissant l'opérateur $\widetilde{\Theta}_{T,T'} = \mathcal{F}(I-P_T)\Theta P_{T'}\mathcal{F}^*$ on trouve l'expression

$$(\widetilde{\Theta}_{T,T'}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{T,T'}(\xi,\xi')\varphi(\xi')\,d\xi', \tag{1.137}$$

$$K_{T,T'}(\xi,\xi') = (1-\chi_{[-T;\,T[^d}(\xi))(2\pi)^{-d/2}(\mathcal{F}\theta)(\xi-\xi')\chi_{[-T';\,T'[^d}(\xi'), \tag{1.138}$$

permettant d'appliquer le même raisonnement qu'auparavant. □

Lemme 1.6. *On suppose* $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et* Θ, Θ^h *comme dans le Corollaire* 2.4. *On pose*

$$\widetilde{\Theta} = \mathcal{F}\Theta\mathcal{F}^*, \qquad \widetilde{\Theta}^h = J^h\mathcal{F}^h\Theta^h(J^h\mathcal{F}^h)^*, \tag{1.139}$$

$$\widetilde{V} = \mathcal{F}V\mathcal{F}^*, \qquad \widetilde{V}^h = J^h\mathcal{F}^hV^h(J^h\mathcal{F}^h)^*. \tag{1.140}$$

Alors pour tout $T' > 0$ *on a*

$$\lim_{h\to 0} ||(\widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^h)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} ||(\widetilde{V} - \widetilde{V}^h)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} = 0. \tag{1.141}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h\leq h_\varepsilon} ||(\widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^h)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \tag{1.142}$$

Mais le Lemme 1.5 assure qu'il existe $T = T(\varepsilon) \geq T'$ tel que

$$||(I - \chi_T)\widetilde{\Theta}\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} = ||(I - P_T)\Theta P_{T'}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3, \tag{1.143}$$

$$||(I - \chi_T)\widetilde{\Theta}^h\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} = ||(I - P_T^h)\Theta^h P_{T'}^h||_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3, \tag{1.144}$$

donc pour obtenir (1.141) il suffit de prouver

$$\sup_{0<h\leq h_\varepsilon} ||\chi_T(\widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^h)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3. \tag{1.145}$$

On peut supposer que $h \leq h_\varepsilon \leq \pi/T \leq \pi/T'$. Alors

$$(\chi_T(\widetilde{\Theta}^h - \widetilde{\Theta})\chi_{T'})\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}^h_{T,T'}(\xi,\xi')\varphi(\xi')\,d\xi', \tag{1.146}$$

$$\widetilde{K}^h_{T,T'}(\xi,\xi') = (2\pi)^{-d/2}\chi_{[-T;\,T[^d}(\xi)(h^d\mathcal{F}^h\theta^h - \mathcal{F}\theta)(\xi-\xi')\chi_{[-T';\,T'[^d}(\xi'). \tag{1.147}$$

Ensuite on remarque que

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{K}^h_{T,T'}(\xi,\xi') = 0 \text{ pour } \xi,\xi' \in \mathbb{R}^d. \tag{1.148}$$

En effet, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a $h^d\mathcal{F}^h\theta^h(\xi) \to \mathcal{F}\theta(\xi)$ quand $h \to 0$, parce qu'il s'agit de la suite des sommes de Riemann de l'intégrale de la fonction appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour terminer la démonstration de la première assertion (1.141) on remarque qu'il existe $C_0 > 0$ telle que $|\widetilde{K}^h_{T,T'}(\xi,\xi')| \leq C_0\chi_{[-T;\,T[^{2d}}(\xi,\xi')$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que (1.148) implique

$$\limsup_{h\to 0} ||\chi_T(\widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^h)\chi_{T'}||^2_{\mathcal{B}} \leq \limsup_{h\to 0} ||\chi_T(\widetilde{\Theta} - \widetilde{\Theta}^h)\chi_{T'}||^2_{\mathcal{B}_2}$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\widetilde{K}^h_{T,T'}(\xi,\xi')|^2 \, d\xi \, d\xi' = 0.$$

Pour terminer la démonstration de la deuxième assertion (1.141) on doit trouver $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h\leq h_\varepsilon} ||(\widetilde{V} - \widetilde{V}^h)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \tag{1.149}$$

Le Lemme 1.1 assure l'existence de $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $v_{\varepsilon,k} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$, $k = 1, ..., N(\varepsilon)$ tels que l'on ait $||V - V_\varepsilon||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3$ avec

$$V_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes V_{\varepsilon,k},$$

où $e_{\gamma_{\varepsilon,k}} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_1}))$, $V_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))$ sont donnés par

$$(e_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1)(x_1) = \mathrm{e}^{ix_1\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1(x_1) \quad \text{pour} \quad \varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}^{d_1}),$$

$$(V_{\varepsilon,k}\varphi_2)(x_2) = v_{\varepsilon,k}(x_2)\varphi_2(x_2) \quad \text{pour} \quad \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2}).$$

On a également $||V^h - V^h_\varepsilon||_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon/3$ avec

$$V^h_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} e^h_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes V^h_{\varepsilon,k},$$

où $e^h_{\gamma_{\varepsilon,k}} \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}))$, $V^h_{\varepsilon,k} \in \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^{d_2}))$ sont donnés par

$$(e^h_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1)(hn_1) = \mathrm{e}^{ihn_1\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_1(hn_1) \quad \text{pour} \quad \varphi_1 \in l^2(h\mathbb{Z}^{d_1}),$$

$$(V^h_{\varepsilon,k}\varphi_2)(hn_2) = v_{\varepsilon,k}(hn_2)\varphi_2(hn_2) \quad \text{pour} \quad \varphi_2 \in h^2(h\mathbb{Z}^{d_2}).$$

Ainsi, au lieu de montrer (1.149) il suffit de prouver

$$\sup_{0<h\leq h_\varepsilon} ||(\widetilde{V}_\varepsilon - \widetilde{V}^h_\varepsilon)\chi_{T'}||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/3 \tag{1.150}$$

avec

$$\widetilde{V}_\varepsilon = \mathcal{F}V_\varepsilon\mathcal{F}^*, \qquad \widetilde{V}^h_\varepsilon = J^h\mathcal{F}^hV^h_\varepsilon(J^h\mathcal{F}^h)^*.$$

Ensuite, on remarque que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, où $\mathcal{F}_j$ pour $j = 1, 2$, est l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^{d_j})$ donné par la formule

$$(\mathcal{F}_j\varphi_j)(\xi_j) = (2\pi)^{-d_j/2} \int_{\mathbb{R}^{d_j}} \mathrm{e}^{ix_j\cdot\xi_j}\varphi_j(x_j)\, dx_j \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j})$$

et en introduisant $\widetilde{V}_{\varepsilon,k} = \mathcal{F}_2 V_{\varepsilon,k} \mathcal{F}_2^*$ on trouve

$$\widetilde{V}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \otimes \widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h$$

où $(T_{\gamma_{\varepsilon,k}}\varphi_2)(x_2) = \varphi_2(x_2 - \gamma_{\varepsilon,k})$ pour $\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}^{d_2})$.

De manière analogue $\mathcal{F}^h = \mathcal{F}_1^h \otimes \mathcal{F}_2^h$ avec $\mathcal{F}_j^h : l^2(h\mathbb{Z}^{d_j}) \to L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^{d_j})$ pour $j = 1,\, 2$, est donnée par la formule

$$(\mathcal{F}_j^h \varphi_j)(\xi_j) = (2\pi/h)^{-d_j/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}^{d_j}} \mathrm{e}^{ihn_j\cdot\xi_j} \varphi_j(hn_j) \quad \text{pour } f_j \in l^1 \cap l^2(h\mathbb{Z}^{d_j}),$$

et en introduisant encore $\widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h = J^h \mathcal{F}_2^h V_{\varepsilon,k}^h (J^h \mathcal{F}_2^h)^*$ on trouve que pour $h \le \pi/T$ on a

$$\widetilde{V}_\varepsilon^h \chi_T = \chi_{\pi/h} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \sum_{z\in\mathbb{Z}^{d_1}} T_{\gamma_{\varepsilon,k}+2\pi z/h} \chi_T^{(1)} \otimes \widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h \chi_T^{(2)},$$

où $\chi_T^{(j)} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_j}))$ avec $j = 1,\, 2$ est donné par la formule

$$(\chi_T^{(j)}\varphi_j)(x_j) = \chi_{[-T;\,T[^{d_j}}(x_j)\varphi_j(x_j) \quad \text{pour } \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{d_j}).$$

Dans la suite, on prend $h_\varepsilon = \pi/(T + \max_{1\le k\le N(\varepsilon)} |\gamma_{\varepsilon,k}|)$ et on remarque que

$$0 < h < h_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{V}_\varepsilon^h \chi_T = \sum_{z\in\mathbb{Z}^{d_1}} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \chi_T^{(1)} \otimes \widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h \chi_T^{(2)}.$$

Cependant la démonstration de la partie (a) donne pareillement

$$\lim_{h\to 0} ||(\widetilde{V}_{\varepsilon,k} - \widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)}||_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{d_2}))} = 0, \tag{1.151}$$

et compte tenu de

$$0 < h < h_\varepsilon \Rightarrow (\widetilde{V}_\varepsilon - \widetilde{V}_\varepsilon^h)\chi_T = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} T_{\gamma_{\varepsilon,k}} \chi_T^{(1)} \otimes (\widetilde{V}_{\varepsilon,k} - \widetilde{V}_{\varepsilon,k}^h)\chi_T^{(2)},$$

L'inégalité (1.150) résulte de (1.151). □

Lemme 1.7. *Soit* $\lambda_0 \ge 1 + 2||V||$ *et posons*

$$R = (-\Delta + V + \lambda_0 I)^{-1}, \qquad R^h = (-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1}, \tag{1.152}$$

$$\widetilde{R} = \mathcal{F}R\mathcal{F}^*, \qquad \widetilde{R}^h = J^h \mathcal{F}^h V^h (J^h \mathcal{F}^h)^*. \tag{1.153}$$

Alors $\lim_{h\to 0} ||\widetilde{R} - \widetilde{R}^h||_{\mathcal{B}} = 0$.

Démonstration. Compte tenu des expressions

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}_\circ \sum_{k=0}^{\infty} (-\widetilde{V}\widetilde{R}_\circ)^k, \qquad \widetilde{R}^h = \widetilde{R}^h_\circ \sum_{k=0}^{\infty} (-\widetilde{V}^h \widetilde{R}^h_\circ)^k,$$

où on a désigné

$$\widetilde{R}_\circ = \mathcal{F}(-\Delta + \lambda_0 I)^{-1}\mathcal{F}^*, \qquad \widetilde{R}^h_\circ = J^h\mathcal{F}^h(-\Delta^h + V^h + \lambda_0 I)^{-1}(J^h\mathcal{F}^h)^*,$$

il suffit de montrer

$$\lim_{h\to 0} ||\widetilde{R}_\circ - \widetilde{R}^h_\circ||_{\mathcal{B}} \ = 0, \qquad \lim_{h\to 0} ||\widetilde{V}\widetilde{R}_\circ - \widetilde{V}^h\widetilde{R}^h_\circ||_{\mathcal{B}} \ = 0. \tag{1.154}$$

D'abord on montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h\le h_\varepsilon} ||\widetilde{R}_\circ - \widetilde{R}^h_\circ||_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \tag{1.155}$$

Cependant

$$(\widetilde{R}_\circ\varphi)(\xi) = (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1}\varphi(\xi),$$
$$(\widetilde{R}^h_\circ\varphi)(\xi) = \chi_{[-\pi/h;\,\pi/h[^d}(\xi)(\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1}\varphi(\xi),$$

où ϑ_h est donné par (1.125) et on remarque qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$||(I - \chi_T)\widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d\setminus[-T;\,T[^d} (|\xi|^2 + \lambda_0)^{-1} \ \le C_0 T^{-2}, \tag{1.156}$$

$$h \le \pi/T \ \Rightarrow \ ||(I - \chi_T)\widetilde{R}^h_\circ||_{\mathcal{B}} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d\setminus[-T;\,T[^d} (\vartheta_h(\xi) + \lambda_0)^{-1} \ \le C_0 T^{-2}, \tag{1.157}$$

où la dernière estimation résulte de (1.126). Pour justifier (1.155) il suffit de choisir T tel que $C_0T^{-2} < \varepsilon/4$ et utiliser le fait que

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\xi\in[-T;\,T[^d} \left|\vartheta_h(\xi) - |\xi|^2\right| \ = 0. \tag{1.158}$$

Il reste à montrer l'existence de $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h\le h_\varepsilon} ||\widetilde{V}^h\widetilde{R}_\circ - \widetilde{V}\widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} < \varepsilon. \tag{1.159}$$

Soit T tel que $2||V||_{\mathcal{B}}C_0T^{-2} < \varepsilon/4$. Si $h_\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors

$$\sup_{0<h\le h_\varepsilon} ||\widetilde{V}^h(\widetilde{R}^h_\circ - \widetilde{R}_\circ)||_{\mathcal{B}} \le ||V||_{\mathcal{B}}||\widetilde{R}^h_\circ - \widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4, \tag{1.160}$$

et compte tenu du Lemme 1.6,

$$\sup_{0<h\le h_\varepsilon} ||(\widetilde{V}^h - \widetilde{V})\chi_T||_{\mathcal{B}} < \varepsilon/4. \tag{1.161}$$

Pour obtenir (1.159) on estime

$$\begin{aligned} ||\widetilde{V}^h\widetilde{R}_\circ - \widetilde{V}\widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} \;\le\; & ||\widetilde{V}^h(\widetilde{R}^h_\circ - \widetilde{R}_\circ)||_{\mathcal{B}} + ||(\widetilde{V}^h - \widetilde{V})\chi_T||_{\mathcal{B}}||\widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} \\ & + ||\widetilde{V}^h - \widetilde{V}||_{\mathcal{B}}||(I-\chi_T)\widetilde{R}_\circ||_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

et il reste à remarquer que (1.160), (1.161) permettent de majorer la dernière expression par $\frac{3}{4}\varepsilon + 2||V||_{\mathcal{B}}C_0T^{-2} < \varepsilon$. □

Lemme 1.8. *Pour démontrer le Théorème* 1.5 *il suffit de montrer que l'on a*

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{tr}^h\, P^h_T\Theta^h(R^h)^m\Theta^h \;=\; \mathrm{tr}\, P_T\Theta R^m\Theta, \tag{1.162}$$

pour tout $T \ge 1$ *et* $m \ge 2 + \frac{d}{2}$.

Démonstration. Compte tenu du Corollaire 1.2 il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de trouver $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{0<h\le h_\varepsilon} \left|\mathrm{tr}^h\, \Theta^h f(H^h)\Theta^h \;-\; \mathrm{tr}\,\Theta f(H)\Theta\right| < \varepsilon. \tag{1.163}$$

Montrons, qu'il existe $T(\varepsilon)$ tel que pour $T \ge T(\varepsilon)$ on a

$$||(I - P^h_T)\Theta^h f(H^h)\Theta^h||_{\mathcal{B}^h_1} < \varepsilon/4. \tag{1.164}$$

En effet, le membre gauche de (1.164) est majoré par $\zeta_1(h) + \zeta_2(h)$ avec

$$\zeta_1(h) = ||(I - P^h_T)\Theta^h P^h_{T'}||_{\mathcal{B}^h}\, ||f(H^h)\Theta^h||_{\mathcal{B}^h_1},$$

$$\zeta_2(h) = ||\Theta^h(I - P^h_{T'})(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h}\, ||(\lambda_0 I - \Delta^h)R^h||_{\mathcal{B}^h}\, ||g(H^h)\Theta^h||_{\mathcal{B}^h_1}$$

où on a noté $g(\lambda) = (\lambda_0 + \lambda)f(\lambda)$. Puisque

$$||(I - P^h_{T'})(\lambda_0 I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h} \;=\; \sup_{\xi\in[-\pi/h;\,\pi/h[^d\setminus[-T';\,T'[^d} |\lambda_0 + \vartheta_h(\xi)|^{-1} \;\le CT'^{-2},$$

on peut choisir T' suffisamment grand pour assurer $\zeta_2(h) < \varepsilon/8$ pour tout $h \in]0;\ 1]$ et ensuite le Lemme 1.5 permet de choisir T suffisamment grand pour assurer $\zeta_1(h) < \varepsilon/8$ pour tout $h \in]0;\ 1]$.

De manière analogue il est possible de trouver $T(\varepsilon)$ tel que

$$T \geq T(\varepsilon) \Rightarrow ||(I - P_T)\Theta f(H)\Theta||_{\mathcal{B}_1} < \varepsilon/4. \tag{1.165}$$

Dans le deuxième pas on considère une approximation de f par $(f_{\varepsilon'})_{\varepsilon'>0}$ comme dans la démonstration de la Proposition 1.2. Alors il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout $\varepsilon' > 0$,

$$||P_T^h \Theta^h (f - f_{\varepsilon'})(H^h)\Theta^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq \varepsilon' \, ||(R^h)^m \Theta^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_0 \varepsilon',$$

$$|\mathrm{tr}\, P_T \Theta (f - f_{\varepsilon'})(H)\Theta| \leq \varepsilon' \, ||(R^h)^m \Theta||_{\mathcal{B}_1} \leq C_0 \varepsilon'.$$

Soit $\varepsilon' = \varepsilon/(8C_0)$. Alors (1.163) résulte de

$$\sup_{0<h\leq h_\varepsilon} \left|\mathrm{tr}^h \, P_T^h \Theta^h f_{\varepsilon'}(H^h)\Theta^h \, - \, \mathrm{tr}\, P_T \Theta f_{\varepsilon'}(H)\Theta\right| < \varepsilon/4 \tag{1.166}$$

et on termine la démonstration en observant que (1.162) assure l'existence de $h_\varepsilon > 0$ tel que (1.166) soit satisfaite. $\square$

Démonstration du Théorème 1.5

La démonstration est basée sur les égalités

$$\mathrm{tr}\, P_T \Theta R^m \Theta P_T \, = \mathrm{tr}\, \chi_T \widetilde{\Theta} \widetilde{R}^m \widetilde{\Theta} \chi_T,$$

$$\mathrm{tr}^h \, P_T^h \Theta^h (R^h)^m \Theta^h P_T^h \, = \mathrm{tr}\, \chi_T \widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^m \widetilde{\Theta}^h \chi_T,$$

qui permettent d'écrire (1.162) sous la forme

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{tr}\, \chi_T \left(\widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^m \widetilde{\Theta}^h \, - \, \widetilde{\Theta} \widetilde{R}^m \widetilde{\Theta}\right) \chi_T \, = \, 0. \tag{1.167}$$

Pour démontrer (1.167) on remarque que

$$||\chi_T (\widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^m \widetilde{\Theta}^h \, - \, \widetilde{\Theta} \widetilde{R}^m \widetilde{\Theta})\chi_T||_{\mathcal{B}_1} \leq \zeta_1(h) + \zeta_2(h) + \zeta_3(h),$$

avec

$$\zeta_1(h) = ||\widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^m||_{\mathcal{B}_1} \, ||(\widetilde{\Theta}^h - \widetilde{\Theta})\chi_T||_{\mathcal{B}},$$

$$\zeta_2(h) = ||\widetilde{\Theta}^h ((\widetilde{R}^h)^m - \widetilde{R}^m)\widetilde{\Theta}||_{\mathcal{B}_1},$$

$$\zeta_3(h) = ||\chi_T (\widetilde{\Theta}^h - \widetilde{\Theta})||_{\mathcal{B}} \, ||\widetilde{R}^m \widetilde{\Theta}||_{\mathcal{B}_1}.$$

En utilisant

$$(\widetilde{R}^h)^m - \widetilde{R}^m = \sum_{m'=1}^{m} (\widetilde{R}^h)^{m'-1} (\widetilde{R}^h - \widetilde{R}) \widetilde{R}^{m-m'}$$

on peut estimer

$$\zeta_2(h) \leq \sum_{m'=1}^{m} ||\widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^{m'-1}||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} \, ||\widetilde{R}^h - \widetilde{R}||_{\mathcal{B}} \, ||\widetilde{R}^{m-m'}\widetilde{\Theta}||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}},$$

avec la convention que l'on utilise la norme $||\cdot||_{\mathcal{B}}$ au lieu de $||\cdot||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}}$ dans le cas $m'=1$ et au lieu de $||\cdot||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}}$ dans le cas $m'=m$. Mais

$$\sup_{0<h\leq 1} ||\widetilde{\Theta}^h (\widetilde{R}^h)^{m'-1}||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} = \sup_{0<h\leq 1} ||\Theta^h (R^h)^{m'-1}||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m'-1)}} < \infty,$$

est démontré dans le Chapitre 3 et de manière analogue on a

$$||\widetilde{R}^{m-m'}\widetilde{\Theta}||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} = ||R^{m-m'}\Theta||_{\mathcal{B}_{(m-1)/(m-m')}} < \infty.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 1.8, on trouve $\lim_{h\to 0}\zeta_2(h) = 0$. Pour terminer la démonstration on remarque de manière analogue que $\lim_{h\to 0}\zeta_1(h) = \lim_{h\to 0}\zeta_3(h) = 0$ résulte du Lemme 1.5.

□

Démonstration du Théorème 1.6.

Pour commencer on remarque que

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcap_{\kappa>0} \overline{\bigcup_{0<h<\kappa} \sigma(H^h)}$$

signifie que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\bigcup_{0<h<\kappa} \sigma(H^h)}$ pour un certain $\kappa > 0$, c'est-à-dire

$$\operatorname{dist}\left(\lambda, \bigcup_{0<h<\kappa} \sigma(H^h)\right) = \inf_{0<h<\kappa} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) > 0$$

pour un certain $\kappa > 0$ et il est clair que cela équivaut à

$$\liminf_{h\to 0} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) > 0.$$

Lemme 1.9. *Pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a $||f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} \to ||f(H)||_{\mathcal{B}}$ quand $h \to 0$.*

Démonstration. Comme dans la Section 3 on peut écrire

$$||(f-f_\varepsilon)(H)||_{\mathcal{B}} = ||(f-f_\varepsilon)(H^h)||_{\mathcal{B}^h} < \varepsilon \text{ avec } f_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{k,\varepsilon}(\lambda+\lambda_0)^{-k},$$

pour certains $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $c_{k,\varepsilon} \in \mathbb{C}$ $(k = 1, \dots, N(\varepsilon))$. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $||f_\varepsilon(H^h)||_{\mathcal{B}^h} \to ||f_\varepsilon(H)||_{\mathcal{B}}$ quand $h \to 0$. En utilisant les notations du Lemme 1.7 on observe que

$$||\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{k,\varepsilon}(R^h)^k||_{\mathcal{B}^h} = ||\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{k,\varepsilon}(\widetilde{R^h})^k||_{\mathcal{B}}$$

converge vers

$$||\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{k,\varepsilon}\widetilde{R}^k||_{\mathcal{B}} = ||\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{k,\varepsilon}R^k||_{\mathcal{B}},$$

quand $h \to 0$ du fait que $||\widetilde{R^h} - \widetilde{R}||_{\mathcal{B}} \to 0$ quand $h \to 0$. □

Démonstration de l'assertion (a). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\liminf_{h\to 0} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) > 0$. Il existe $\kappa > 0$ et $r > 0$ tels que $0 < h < \kappa \Rightarrow \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) \geq r$. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} f \subset]\lambda - r;\ \lambda + r[$ et $f(\lambda) = 1$. Alors $0 < h < \kappa \Rightarrow f(H^h) = 0$ et $||f(H)||_{\mathcal{B}} = \lim_{h\to 0} ||f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} = 0$ implique $f(H) = 0$, donc $\lambda \notin \sigma(H)$.

Supposons maintenant $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H)$. Alors il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f = 1$ sur $[\lambda - r/2;\ \lambda + r/2]$ et $\operatorname{supp} f \subset]\lambda - r;\ \lambda + r[$, où $r = \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H))$. Alors $f(H) = 0$ et on en déduit $\liminf_{h\to 0} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) > 0$. En effet, si $\liminf_{h\to 0} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(H^h)) = 0$, il existe une suite $h_k \to 0$ telle que $[\lambda - /2;\ \lambda + r/2] \cap \sigma(H^{h_k}) \neq \emptyset$ et $||f(H^{h_k})||_{\mathcal{B}^h} = \sup_{s\in\sigma(H^{h_k})} |f(s)| = 1$, la contradiction $1 = \lim_{h\to 0} ||f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} = ||f(H)||_{\mathcal{B}} = 0$.

□

Lemme 1.10. *Soit $u \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit l'ensemble*

$$\mathcal{P}_\varepsilon(u) = \{z \in \mathbb{R}^{d_1} : ||T_z u - u||_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})} \leq \varepsilon\},$$

où $T_z u(x_1) = u(x_1 - z)$. Alors on peut trouver $\rho_\varepsilon > 0$ tel que chaque boule de rayon ρ_ε rencontre $\mathcal{P}_\varepsilon(u)$, c'est-à-dire $B(x_1, \rho_\varepsilon) \cap \mathcal{P}_\varepsilon(u) \neq \emptyset$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$.

Démonstration. Pour $\gamma \in \mathbb{R}^{d_1}$ on note $\mathrm{e}_\gamma(x_1) = \mathrm{e}^{ix_1\gamma}$ et on observe que $\{T_z \mathrm{e}_\gamma\}_{z\in\mathbb{R}^{d_1}}$ est une partie compacte de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$. Si $u \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ et $\varepsilon > 0$ alors on peut trouver $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\gamma_{\varepsilon,k} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $c_{\varepsilon,k} \in \mathbb{C}$ $(k = 1, ..., N(\varepsilon))$ tels que l'on ait

$$||u - u_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})} < \varepsilon \text{ avec } u_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_{\varepsilon,k}\, \mathrm{e}_{\gamma_{\varepsilon,k}}.$$

Ensuite, on remarque que la fermeture de $\{T_z u_\varepsilon\}_{z\in\mathbb{R}^{d_1}}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ est une partie compacte de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$. En effet, si $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque, on peut en extraire une sous-suite $(z_{m_{j,1}})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $(T_{z_{m_{j,1}}}\mathrm{e}_{\gamma_{\varepsilon,1}})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$ et il est possible d'extraire des sous-suites $(z_{m_{j,k}})_{j\in\mathbb{N}}$, $k=1,...,N(\varepsilon)$, pour assurer la convergence de la sous-suite $(T_{z_{m_{j,N(\varepsilon)}}}u_\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$.

Ainsi il existe un recouvrement fini de $\{T_z u_{\varepsilon/3}\}_{z\in\mathbb{R}^{d_1}}$ par des boules de rayon $\varepsilon/3$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie $J_\varepsilon\subset\mathbb{R}^{d_1}$ telle que pour tout $x_1\in\mathbb{R}^{d_1}$ on peut trouver $z_\varepsilon(x_1)\in J_\varepsilon$ vérifiant

$$||T_{x_1}u_{\varepsilon/3}-T_{z_\varepsilon(x_1)}u_{\varepsilon/3}||_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})}=||T_{x_1-z_\varepsilon(x_1)}u_{\varepsilon/3}-u_{\varepsilon/3}||_{L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})}<\varepsilon/3,$$

c'est-à-dire $x_1-z_\varepsilon(x_1)\in\mathcal{P}_{\varepsilon/3}(u_{\varepsilon/3})\subset\mathcal{P}_\varepsilon(u)$. Ainsi $B(x_1,|z_\varepsilon(x_1)|)\cap\mathcal{P}_\varepsilon(u)\neq\emptyset$ et il suffit de prendre ρ_ε tel que $J_\varepsilon\subset B(0,\rho_\varepsilon)$. □

Démonstration de l'assertion (b). Dans le cas discret la démonstration a été donnée par Charour [8], donc il reste à considérer le cas continu. D'abord il est évident que

$$\operatorname{supp} N(\cdot,H)\setminus\sigma(-\Delta)\subset\sigma(H).$$

En effet, si $\lambda\notin\sigma(H)\cup\sigma(-\Delta)$ et $r=\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(H)\cup\sigma(-\Delta))$, alors $f(H)=0=f(-\Delta)$ pour toute $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} f\subset]\lambda-r;\ \lambda+r[$ et par conséquent $N(f,H)=0$ assure $\lambda\notin\operatorname{supp} N(\cdot,H)$. Pour montrer ensuite

$$\sigma(H)\setminus\sigma(-\Delta)\subset\operatorname{supp} N(\cdot,H),$$

on fixe $\lambda\in\sigma(H)\setminus\sigma(-\Delta)=\sigma(H)\cap]-\infty;\ 0[$ et on va prouver que l'on a $N(f,H)>0$ pour toute fonction $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f\geq 0$, $f=1$ au voisinage de λ et $\operatorname{supp} f\subset]-\infty;\ 0[$.

Pour commencer on va montrer l'existence de $L_0>0$ tel que

$$N_{L_0}^{L_0}(f,H)=(2L_0)^{-d_1}\operatorname{tr}\chi_{L_0}^{L_0}f(H)\ >0.$$

En effet, $\lambda\in\sigma(H)$ assure l'existence de $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}=1$ et $\langle f(H)\varphi,\varphi\rangle\geq 1/2$, donc

$$\limsup_{L\to\infty}\operatorname{tr}\chi_L^L f(H)\ \geq\limsup_{L\to\infty}\langle f(H)\chi_L^L\varphi,\chi_L^L\varphi\rangle=\langle f(H)\varphi,\varphi\rangle\geq 1/2.$$

Pour $L>0$ et $z\in\mathbb{R}^{d_1}$ on introduit

$$\mathcal{C}(z,L)=\{x_1\in\mathbb{R}^{d_1}:\ \frac{x_1}{L}-z\in[0;\ 1[^{d_1}\}\times[-L;\ L[^{d_2},$$

$$u^L(z)=\operatorname{tr}\chi_{\mathcal{C}(z,L)}f(H)=\operatorname{tr}\chi_{\mathcal{C}(0,L)}f(H_{zL}),$$

où $H_{zL} = T_{(zL,0)} H T_{(-zL,0)}$ comme dans la Section 3.

Dans la suite soit $L_0 > 0$ fixé tel que $u^{L_0}(0) > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que $2\varepsilon_0 < u^{L_0}(0)$. On fixe $\rho_0 > 1$ suffisamment grand et on remarque que $u^{L_0} \in CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ assure le fait que pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ il existe $z(x_1) \in \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(u^{L_0})$ tel que $z(x_1) - x_1 \in [0;\ \rho_0 - 1[^{d_1}$ en vertu du Lemme 1.10. Alors pour tout $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ on a

$$z(y_1\rho_0)L_0 + [0;\ L_0[^{d_1} \subset y_1\rho_0 L_0 + [0;\ (\rho_0 - 1)L_0[^{d_1} + [0;\ L_0[^{d_1},$$

et posant $L_1 = \rho_0 L_0$ on trouve $z(y_1\rho_0)L_0 + [0;\ L_0[^{d_1} \subset y_1 L_1 + [0;\ L_1[^{d_1}$ d'où

$$\mathcal{C}(z(y_1\rho_0), L_0) \subset \mathcal{C}(y_1, L_1)$$

et

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(\chi_{\mathcal{C}(y_1,L_1)} - \chi_{\mathcal{C}(z(y_1\rho_0),L_0)}) f(H) = \\ \operatorname{tr} f(H)^{1/2}(\chi_{\mathcal{C}(y_1,L_1)} - \chi_{\mathcal{C}(z(y_1\rho_0),L_0)}) f(H)^{1/2} \quad \geq 0.\end{gathered}$$

Ainsi $u^{L_1}(y_1) \geq u^{L_0}(z(y_1\rho_0))$ et puisque $|u^{L_0}(z(y_1\rho_0)) - u^{L_0}(0)| \leq \varepsilon_0$ résulte de $z(y_1\rho_0) \in \mathcal{P}_{\varepsilon_0}(u^{L_0})$, on trouve

$$u^{L_1}(y_1) \geq u^{L_0}(0) - \varepsilon_0 \geq \tfrac{1}{2} u^{L_0}(0).$$

Ensuite

$$L_1^{d_1} N(f, H) \geq \limsup_{k\to\infty} (2k)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_{kL_1}^{L_1} f(H)$$

et on termine la démonstration en remarquant que pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$(2k)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_{kL_1}^{L_1} f(H) = (2k)^{-d_1} \sum_{y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1} \cap [-k;\ k[^{d_1}} u^{L_1}(y_1) \ \geq \tfrac{1}{2} u^{L_0}(0).$$

□

Chapitre 2

Approximation de la densité d'états surfaciques pour un opérateur de Schrödinger surfacique du type d'Anderson

2.1 Introduction

L'étude mathématique des opérateurs de Schrödinger aléatoires surfaciques , autant dans le cas discret que continu, a commencé au début des années soixante dix. Elle s'est considérablement développée lors des trente dernières années et a présenté un terrain fertile d'interaction entre la physique et les mathématiques. Très riche en phénomènes, elle se situe à l'intersection de nombreux champs des mathématiques (équations aux dérivées partielles, théorie des probabilités, théorie des opérateurs, analyse harmonique, etc) ainsi que de la physique (mécanique quantique, physique statistique, théorie des champs, etc).

Cet opérateur fait l'objet de nombreuses études ([50],[51],[30],[37], [20], [19], [8] pour divers résultats et références). Par exemple Molchanov, Jaksic, Pastur, Khoruzhenko, Chahrour ([50],[51],[30],[37], [8]) ont montré que pour un modèle où le potentiel est une suite de variables aléatoires indépendante identiquement distribués, les branches surfaciques du spectre situées à l'extérieur de $\sigma(-\Delta)$. On dit alors que les états surfaciques sont localisés. Dans les travaux ([3],[38]) on montre la localisation (on a le spectre purement ponctuel).

Suivant l'approche de Klopp [40] on va définir la densité d'états surfaciques pour le modèle du type d'Anderson utilisant des approximations périodiques.

Soit $W : \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ un potentiel continu vérifiant :

i) $W(x_1 + y_1, x_2) = W(x_1, x_2)$ pour $y_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$.

ii) Il existe $\delta_0 > d_2$ et une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_1}$ on ait

$$| W(x_1, x_2) | \leqslant C(1+ | x_2 |)^{-\delta_0}.$$

Sur $L^2(\mathbb{R}^d)$; considérons l'opérateur de Schrödinger périodique par rapport à x_1

$$H = H^0 + W$$

où $H^0 = -\Delta$. Le modèle d'Anderson continu par rapport à x_1 est l'opérateur aléatoire

$$H_\omega = H + v_\omega = H + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma v_\gamma$$

où $v_\gamma(x_1, x_2) = v(x_1 - \gamma, x_2), v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ un potentiel et $(\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et bornées non constantes. Nous supposerons que v est continue, vérifie que pour tout $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ il existe une constante C_N telle que

$$| v(x_1, x_2) | \leqslant C_N(1+ | x_1 |)^{-d_1-\varepsilon}(1+ | x_2 |)^{-N}.$$

On considère la famille d'opérateurs H^h agissant sur $l^2(h\mathbb{Z}^d), h > 0$

$$H^h = H^{0,h} + W^h$$

avec $H^{0,h} = -\Delta^h$ est le laplacien discret défini par (1.9), W^h est l'opérateur de multiplication définit par $(W^h\varphi)(hn) = W(nh)\varphi(hn)$ pour tout $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ et

$$H^h_\omega = H^h + v^h_\omega,$$

où $(v^h_\omega\varphi)(hn) = v_\omega(hn)\varphi(hn)$ pour tout $\varphi \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$.

2.2 Les approximations périodiques

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite d'opérateurs de Schrödinger

$$H_{\omega,k} = H + \sum_{\gamma \in C_k^{d_1} \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma \sum_{\beta \in (2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}} \tau_{\gamma+\beta} v_\gamma$$

et le cas discret

$$H^h_{\omega,k} = H^h + \sum_{\gamma \in C_k^{d_1} \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \omega_\gamma \sum_{\beta \in (2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}} \tau_{\gamma+\beta} v^h_\gamma$$

où $C_k^{d_1} = \{m \in \mathbb{Z}^{d_1}, m_j \in]-k-1/2, k+1/2] \quad \text{pour} \quad j = 1, ..., d_1\}$ est le cube de centre 0 et de coté $2k+1$ et τ_γ est la translation dans $\mathbb{R}^{d_1}$ par rapport à γ. Pour $\omega \in \Omega$; $H_{\omega,k}$ et $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{\omega,\mathrm{k}}$ sont des opérateurs de Schrödinger $(2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}$ périodiques.

Utilisant Théorèmes 1.1 et 1.2 on peut introduire

$$\begin{aligned}
N(\varphi, H_{\omega,k}) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(\chi_L^L(\varphi(H_{\omega,k}) - \varphi(H^0)) \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}(\chi_L^\infty(\varphi(H_{\omega,k}) - \varphi(H^0)), \\
N(\varphi, H^h_{\omega,k}) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}^h(\chi_L^{h,L}(\varphi(H^h_{\omega,k}) - \varphi(H^{0,h})) \\
&= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^{d_1}} \mathrm{tr}^h(\chi_L^{h,\infty}(\varphi(H^h_{\omega,k}) - \varphi(H^{0,h})).
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer ainsi les Théorèmes suivants :

Théorème 2.1. *Soient $N^h_{k,\omega} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par la formule $\varphi \to N(\varphi, H^h_{\omega,k})$. Alors la suite $(N^h_{k,\omega})_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite $N^h(\cdot, H_\omega)$; pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varepsilon > 0, h \in]0,1[$ il existe k_ε tel que pour tout $k > k_\varepsilon$ on ait*

$$| N(\varphi, H^h_{\omega,k}) - N(\varphi, H^h_\omega) | < \varepsilon.$$

De plus la distribution $\varphi \to N(\varphi, H^h_\omega)$ ne dépend pas de ω et on va l'appeler la densité d'états surfaciques pour l'opérateur H^h_ω.

Théorème 2.2. *Soient $N_{k,\omega} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par la formule $\varphi \to N(\varphi, H_{\omega,k})$. Alors la suite $(N_{k,\omega})_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une limite $N(\cdot, H_\omega)$, c'est à dire pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varepsilon > 0$, il existe k_ε tel que pour tout $k > k_\varepsilon$ on ait*

$$| N(\varphi, H_{\omega,k}) - N(\varphi, H_\omega) | < \varepsilon.$$

De plus la distribution $\varphi \to N(\varphi, H_\omega)$ ne dépend pas de ω et on va l'appeler la densité d'états surfaciques pour l'opérateur H_ω.

Avant de montrer ces deux théorèmes on peut énoncer une généralisation du théorème 1.5 pour l'opérateur de Schrödinger surfacique du type d'Anderson

Théorème 2.3. *Pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a*

$$\lim_{h\to 0} N(\varphi, H^h_\omega) = N(\varphi, H_\omega).$$

2.3 Démonstrations des Théorèmes 2.1 et 2.2

Pour montrer les Théorèmes 2.1 et 2.2 on aura besoin de

Proposition 2.1. *Pour tout $m > max\{1, 1+d/2\}$; il existe une constante $C_{N,m} > 0$ telle que pour tout $z, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $(y, y') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ on a*

$$|| \chi_y^h (z - H_k^h)^{-1} (\lambda - H_k^h)^{-m} \chi_{y'}^h ||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_{N,m,\lambda} |Imz|^{-(N+1)} (1+ \mid y - y' \mid)^{-N}.$$

Démonstration. Le résultat découle immédiatement du fait que $d(z) \geqslant |Imz|$ et du Lemme 3.6 pour $p = m + 1$. □

Démonstration du Théorème 2.1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$N_{k,\omega}^h(\varphi) = \frac{1}{volc_k^{d_1}} \mathrm{tr}^h (\chi_{c_k^{d_1}}^h (\varphi(H_{\omega,k}^h) - \varphi(H^{0,h})) \chi_{c_k^{d_1}}^h)$$

avec $\chi_{c_k^{d_1}}^h(\varphi)(hn) = \chi_{c_k^{d_1}}(hn_1)\varphi(hn)$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $c_k^{d_1} = (2k+1)C_o$ le domaine fondamental de $(2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}$. En utilisant le fait que

$$\chi_{c_k^{d_1}}^h = \sum_{\gamma \in c_k^{d_1} \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \chi_{c_0^{d_1}+\gamma}^h,$$

la symétrie de $C_k^{d_1}$ et la propriété de cocylicité de la trace on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}^h (\chi_{c_k^{d_1}}^h (\varphi(H_{\omega,k}^h) - \varphi(H^{0,h})) \chi_{c_k^{d_1}}^h) \\ &\quad = \sum_{\gamma \in c_k^{d_1} \cap \mathbb{Z}^{d_1}} \mathrm{tr}^h (\tau_\gamma \chi_{c_0^{d_1}}^h (\varphi(H_{\omega,k}^h) - \varphi(H^{0,h})) \tau_\gamma \chi_{c_0^{d_1}}^h) \\ &\quad = \sum_{\gamma \in c_k^{d_1} \cap \mathbb{Z}^{d_1}} tr^h (\chi_{c_0^{d_1}+\gamma}^h (\varphi(H_{\omega,k}^h) - \varphi(H^{0,h})) \chi_{c_0^{d_1}+\gamma}^h). \end{aligned}$$

Or

$$volC_k^{d_1} = volC_0^{d_1}.\sharp(c_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}$$

où $\sharp(c)$ désigne le cardinal de c, on a donc

$$N_{k,\omega}^h(\varphi) = \frac{1}{vol(C_0^{d_1})\sharp(c_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}} \sum_{\gamma \in c_k^{d_1}} \mathrm{tr}^h (\chi_{c_k^{d_1}+\gamma}^h (\varphi(H_{\omega,k}^h) - \varphi(H^{0,h})) \chi_{c_k^{d_1}+\gamma}^h).$$

Comme les variables aléatoires $(\omega_\gamma)_\gamma$ sont indépendantes et identiquement distribuées on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{tr}^h(&\chi^h_{c_k^{d_1}}(\varphi(H^h_{\omega,k})-\varphi(H^{0,h}))\chi^h_{c_k^{d_1}}))\\ &= \sharp(c_k\cap\mathbb{Z})^{d_1}\mathbb{E}(tr^h(\chi^h_{c_0^{d_1}+\gamma}(\varphi(H^h_{\omega,k})-\varphi(H^{0,h}))\chi^h_{c_0^{d_1}+\gamma})),\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}(N^h_{k,\omega}(\varphi))=\frac{1}{vol(C_0^{d_1})}\mathbb{E}(\mathrm{tr}^h(\chi^h_{c_k^{d_1}+\gamma}(\varphi(H^h_{\omega,k})-\varphi(H^{0,h}))\chi^h_{c_k^{d_1}+\gamma})).$$

Pour tout $k\geq 0$ on définit

$$\alpha^h_{\gamma,k}(\omega)=\mathrm{tr}^h(\chi^h_{c_0^{d_1}+\gamma}(\varphi(H^h_{\omega,k})-\varphi(H^{0,h}))\chi^h_{c_0^{d_1}+\gamma}).$$

On va montrer la condition de Cauchy

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{k'\geq k}\mid\alpha^h_{\gamma,k}(\omega)-\alpha^h_{\gamma,k'}(\omega)\mid=0.$$

On fixe $\lambda_0>0$ assez grand pour assurer

$$I\leqslant\lambda_0+H^h_{\omega,k}\quad\text{et}\quad I\leqslant\lambda_0+H^h_{\omega},$$

pour tout ω dans Ω et $\forall h\in\mathbb{R}^*;k\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Helffer-Sjöstrand (voir [23]) :

$$\varphi(H)=\int_{\mathbb{C}}\partial_{\bar z}\widetilde{\varphi}(z)(z-H)^{-1}(\lambda_0+H)^{-q}d\bar z\wedge dz \tag{2.1}$$

où $\widetilde{\varphi}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ est une extension de φ telle que

a) $\forall z\in\mathbb{R},\widetilde{\varphi}(z)=\varphi(z)$

b) $\mathrm{supp}\widetilde{\varphi}\subset\{z\in\mathbb{C}\backslash\mid Imz\mid<1\}$

c) $\widetilde{\varphi}\in S(\{z\in\mathbb{C}\backslash\mid Imz\mid<1\})$

d) La famille des fonctions $x\mapsto\partial_{\bar z}\widetilde{\varphi}(x+iy).\mid y\mid^{-n}$ pour tout $\mid y\mid<1$ est bornée dans $S(\mathbb{R})$ et on a l'estimation suivante : $\forall n\geqslant 0,d\geqslant 0,\beta\geqslant 0$ il existe une constante $c_{n,\alpha,\beta}$ telle que

$$\sup_{|y|<1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\mid x^\alpha\partial_x^\beta(\mid y\mid^{-n}\partial_{\bar z}\widetilde{\varphi}(x+iy))\mid\leqslant c_{n,\alpha,\beta}\sup_{\beta'\leqslant n+\beta+2,\alpha'\leqslant\alpha}\sup_{x\in\mathbb{R}}\mid x^{\alpha'}\partial_x^{\beta'}\varphi\mid.$$

Une telle extension existe toujours pour $\varphi\in S(\mathbb{R})$ et en appliquant cette formule dans notre cas, on peut écrire

$$(\alpha^h_{\gamma,k}-\alpha^h_{\gamma,k'})(\omega)=\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\partial_{\bar z}\widetilde{\varphi}(z)\Lambda^h_{\omega,k,k'}(z)d\bar z\wedge dz$$

avec

$$\Lambda^h_{\omega,k,k'}(z)=\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}[(z-H^h_{\omega,k})^{-1}(\lambda_0+H^h_{\omega,k})^{-q}-(z-H^h_{\omega,k'})^{-1}(\lambda_0+H^h_{\omega,k'})^{-q}]\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}.$$

Comme $q>d/2$, la Proposition 2.1 assure que $\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}(\lambda_0+H^h_{\omega,k})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}$ et $\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(z-H^h_{\omega,k'})^{-1}(\lambda_0+H^h_{\omega,k'})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}$ est à trace donc $\Lambda^h_{\omega,k,k'}(z)$ est à trace et on a

$$\| \Lambda^h_{\omega,k,k'} \|_{\mathcal{B}_1}\leqslant A+B \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \| \chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}((z-H^h_{\omega,k})^{-1}-(z-H^h_{\omega,k'})^{-1})(\lambda_0-H^h_{\omega,k'})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma} \|_{\mathcal{B}_1^h} \\ &= \| \chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}\Delta^h_{v,k,k',\omega}(z-H^h_{\omega,k'})^{-1}(\lambda_0-H^h_{\omega,k'})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma} \|_{\mathcal{B}_1^h}, \end{aligned}$$

où,

$$\Delta^h_{v,k,k',\omega}=v^h_{\omega,k}-v^h_{\omega,k'}=\sum_{\{|\alpha|>k,\alpha\in\mathbb{Z}^{d_1},\alpha=\bar{\alpha} mod(2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}\}}(\omega_{\bar{\alpha}}-\omega_\alpha)v(hn_1-\alpha,hn_2),$$

et

$$\begin{aligned} B &= \| \chi^h_{C^{d_1}_{0+\gamma}}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}((\lambda_0+H^h_{\omega,k})^{-q}-(\lambda_0+H^h_{\omega,k'})^{-q})\chi^h_{C^{d_1}_{0+\gamma}} \|_{\mathcal{B}_1^h} \\ &= \| \chi^h_{C^{d_1}_{0+\gamma}}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}(\sum_{l=1}^{q-1}(\lambda_0+H^h_{\omega,k})^{l-q}\Delta^h_{v,k,k',\omega}(\lambda_0+H^h_{\omega,k'})^{-l})\chi^h_{C^{d_1}_{0+\gamma}} \|_{\mathcal{B}_1^h}. \end{aligned}$$

On va majorer en premier temps le terme A :

$$\begin{aligned} A \leqslant & \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{d_1}} \| \chi^h_{C^{d_1}_{0+\gamma}}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}\Delta^h_{v,k,k'}\chi^h_{\beta+C_0^{d_1}} \| \\ & \times \| \chi^h_{\beta+C_0^{d_1}}(z-H^h_{\omega,k'})^{-1}(\lambda_0-H^h_{\omega,k'})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma} \|_{\mathcal{B}_1^h} \\ \leqslant & \; M \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^{d_1},|\alpha|>k,\alpha\in\mathbb{Z}^{d_1}} \| \chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(z-H^h_{\omega,k})^{-1}v^h\chi^h_{\beta+\alpha+C_0^{d_1}} \| \\ & \times \| \chi^h_{\beta+C_0^{d_1}}(z-H^h_{\omega,k'})^{-1}(\lambda_0-H^h_{\omega,k'})^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma} \|_{\mathcal{B}_1^h} \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition 2.1 pour tout $N\in\mathbb{N}$ il existe une constante $c_N>0$ telle que

$$\| \chi^h_{\beta+C_0^{d_1}}(z-H^h_\omega)^{-1}(\lambda_0-H^h_\omega)^{-q}\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma} \|_{\mathcal{B}_1^h}\leqslant c_N \mid Imz \mid^{-N-1}(1+\mid \beta-\gamma \mid)^{-N}$$

et il existe K>0 telle que

$$\| \chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(z - H^h_{\omega,k})^{-1} v^h \chi^h_{\beta+\alpha+C_0^{d_1}} \| \leqslant \frac{K}{\mid Imz \mid} \| \tau_{\beta+\alpha-\gamma} v \|_{L^\infty(C_0^{d_1})}$$

avec τ_γ est la translation dans $\mathbb{R}^{d_1}$ par rapport à γ. Par conséquent

$$A \leqslant \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{|\alpha|>k, \alpha \in \mathbb{Z}^{d_1}} \frac{Kc_N}{\mid Imz \mid^{N+2} (1+ \mid \gamma - \beta \mid)^N} \| \tau_{\beta+\alpha-\gamma} v \|_{L^\infty(C_0^{d_1})} .$$

De même pour le terme B on a une estimation analogue

$$B \leqslant \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{|\alpha|>k, \alpha \in \mathbb{Z}^{d_1}} \frac{Kc_N}{\mid Imz \mid^{N+2} (1+ \mid \gamma - \beta \mid)^N} \| \tau_{\beta+\alpha-\gamma} v \|_{L^\infty(C_0)},$$

donc utilisant ces deux estimations et la décroissance de $\partial_{\bar z}\widetilde{\varphi}$ par rapport à l'axe réel et en vertu de (2.1) et (2.2) on a

$$\begin{aligned} \mid \mathbb{E} \quad & (tr^h(\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}(\varphi(H^h_{\omega,k}) - \varphi(H^h_{\omega,k'}))\chi^h_{C_0^{d_1}+\gamma}) \mid \\ & \leqslant \pi^{-1} \int_{\mathbb{C}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^{d_1}} \sum_{|\alpha|>k \alpha \in \mathbb{Z}^{d_1}} \frac{Kc_N \mid \partial_{\bar z}\widetilde{\varphi} \| \| \tau_{\beta+\alpha-\gamma} v \|_{L^\infty(C_0^{d_1})}}{\mid Imz \mid^{N+2} (1+ \mid \gamma - \beta \mid)^N} dz \wedge d\bar z. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Or $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}} \| \tau_\gamma v \|_{L^\infty(C_0^{d_1})} < \infty$, en vertu du théorème de convergence dominé, le membre gauche de (2.3) tend vers zéro pour tout $h \in]0,1]$ si $k \to \infty$. On peut conclure que $\alpha^h_{\gamma,k}(\omega)$ est une suite de Cauchy et donc convergente et on appelle $\alpha^h_\gamma(\omega)$ sa limite. De la même façon on peut montrer $\mid \alpha^h_{\gamma,k}(\omega) - \alpha^h_{0,k}(\omega) \mid \to 0$ si $k \to \infty$ donc α^h_γ satisfait $\alpha^h_\gamma(\tau_\beta(\omega)) = \alpha^h_{\gamma+\beta}(\omega)$ avec $\tau_\beta((\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}}) = ((\omega_{\gamma+\beta})_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}})$ pour tout $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}}$. Par conséquent pour montrer le théorème il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{\sharp(C_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}} \sum_{\gamma \in (C_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}} \mid \alpha^h_{\gamma,k}(\omega) - \alpha^h_\gamma(\omega) \mid \to 0$$

si $k \to \infty$. Alors l'existence $\lim_{k\to\infty} N^h_{k,\omega}(\varphi)$ sera prouvée si on montre la convergence de

$$T_k(\omega) = \frac{1}{\sharp(C_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}} \sum_{\gamma \in (C_k \cap \mathbb{Z})^{d_1}} \alpha^h_\gamma(\omega).$$

Soit P_0 la mesure définie sur une partie borélienne $A \subset \mathbb{R}$ comme la probabilité de $\{\omega_\gamma \in A\}$. Alors supp P_0 est compact et la famille des translations $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^{d_1}}$ possède la propriété de l'ergodicité sur l'espace produit $(\operatorname{supp} P_0)^{\mathbb{Z}^{d_1}}$. Ainsi le théorème de Birkhoff (voir par exemple [54]) s'applique à la famille $(\alpha_\gamma^h(\omega))_{\gamma\in\mathbb{Z}^{d_1}} = (\alpha_0^h(\tau_\gamma(\omega))_{\gamma\in\mathbb{Z}^{d_1}}$ en assurant l'existence de $\lim_{k\to\infty} T_k(\omega)$ presque sûrement et son indépendance de ω.

□

Démonstration du Théorème 2.2

On remarque que la Proposition 2.1 reste valable dans le cas continu donc en suivant la même démarche que la démonstration précédente en remplaçant $H^h_{\omega,k}$ par $H_{\omega,k}$, H^h_ω par H_ω et le $\Delta^h_{v,k,k',\omega}$ par

$$\Delta_v^{k,k'} = v_{\omega,k} - v_{\omega,k'} = \sum_{|\alpha|>k,\alpha\in\mathbb{Z}^{d_1},\alpha=\bar{\alpha} mod(2k+1)\mathbb{Z}^{d_1}} (\omega_{\bar{\alpha}} - \omega_\alpha)v(x_1-\alpha, x_2)$$

on peut démontrer le Théorème 2.2.

□

2.4 Démonstration du Théorème 2.3 :

Le théorème montre bien que la densité d'états surfaciques d'un opérateur de modèle d'Anderson continu (dans le sens d_1) peut être approximée par la densité d'états surfaciques continue. En effet,

$$\begin{aligned} | N_\omega(\varphi) - N^h_\omega(\varphi) | \leqslant & \quad | N_\omega(\varphi) - N_{k,\omega}(\varphi) | \\ & + \ | N_{k,\omega}(\varphi) - N^h_{k,\omega}(\varphi) | \\ & + \ | N^h_{k,\omega}(\varphi) - N^h_\omega(\varphi) | \ . \end{aligned}$$

D'une part, d'après le Théorème 2.2 et le théorème de Lebesgue on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k > k_\varepsilon$ on ait

$$\mathbb{E}(| N_\omega(\varphi) - N_{k,\omega}(\varphi) |) \leqslant \varepsilon/3.$$

D'autre part d'après le Chapitre 1 (Théorème 1.5) on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe h_ε tel que pour tout $h < h_\varepsilon$ on ait

$$\mathbb{E}(| N^h_{k,\omega}(\varphi) - N_{k,\omega}(\varphi) |) \leqslant \varepsilon/3.$$

En utilisant le Théorème 2.1 et le théorème de Lebesgue pour tout $\varepsilon > 0, h_0 \in]0,1[$, il existe k_ε tel que $k > k_\varepsilon$ on ait

$$\mathbb{E}(| N^h_{k,\omega}(\varphi) - N^h_\omega(\varphi) |) \leqslant \varepsilon/3.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe h_ε tel que pour tout $h < h_\varepsilon$ on ait

$$\mathbb{E}(\mid N_\omega^h(\varphi) - N_\omega(\varphi) \mid) \leqslant \varepsilon,$$

le théorème est démontré.

$\square$

Chapitre 3

Estimations de la décroissance

3.1 Énoncés

Soit $\mathcal{K}$ un ensemble fixé et soit $(v_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ une famille des fonctions réelles $v_\kappa \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On considère l'hypothèse qu'il existe des constantes $C_0, c_0 > 0$ telles que l'inégalité

$$||v_\kappa \varphi|| \leq (1 - c_0)||\Delta\varphi|| + C_0||\varphi|| \tag{3.1}$$

soit satisfaite pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors on peut définir les opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ par les formules

$$H_\kappa = -\Delta + V_\kappa, \tag{3.2}$$

$$(V_\kappa\varphi)(x) = v_\kappa(x)\varphi(x) \tag{3.3}$$

pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Comme auparavant, on abrège $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ et pour $p \geq 1$ on note $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_p(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on désigne par $\chi_\mathcal{C}(y)$ la fonction caractéristique du pavé $\mathcal{C}(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : x - y \in [0;\ 1[^d\}$ et on définit $\chi_y \in \mathcal{B}$ par la formule

$$(\chi_y\varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x)\varphi(x), \tag{3.4}$$

où $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On va montrer un résultat analogue à l'estimation de Thomas-Combes voir ([11],[12]),[22]) pour les opérateurs H_κ, H_κ^h uniformément par rapport à h. On a alors les Propositions suivantes :

Proposition 3.1. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que l'estimation*

$$||\chi_y f(H_\kappa)\chi_{y'}||_{\mathcal{B}_1} \leq C_N(1 + |y - y'|)^{-N} \tag{3.5}$$

soit valable pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $y, y' \in \mathbb{Z}^d$.

Pour étudier les effets perturbatifs on introduit

$$\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1+|y-\tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}}(V_\kappa - V_{\kappa'})(I-\Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}}$$

et

$$\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y,y') = \min\{\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y),\, \Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y')\},$$

pour $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et dans la Section 3 on va montrer

Proposition 3.2. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))\chi_{y'}||_{\mathcal{B}_1} \leq C_N(1+|y-y'|)^{-N}\Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y,y')$$

soient valables pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ et $y, y' \in \mathbb{Z}^d$.

On va démontrer les résultats analogues dans le cas discret. On suppose que $(v_\kappa^h)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ est une famille des suites $h\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ et qu'il existe des constantes $C_0, c_0 > 0$ telles que l'inégalité

$$\sup_{\kappa\in\mathcal{K}} ||v_\kappa^h \varphi^h||_h \leq (1-c_0)||\Delta^h\varphi^h||_h + C_0||\varphi^h||_h \tag{3.6}$$

soit satisfaite pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$ et $\varphi^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$. On considère les opérateurs définit sur $l^2(h\mathbb{Z}^d)$ par les formules

$$H_\kappa^h = -\Delta^h + V_\kappa^h, \tag{3.7}$$

$$(V_\kappa^h\varphi^h)(hn) = v_\kappa^h(hn)\varphi^h(hn) \tag{3.8}$$

pour $\varphi^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$.

On abrège $\mathcal{B}^h = \mathcal{B}^h(L^2(\mathbb{R}^d))$ et pour $p \geq 1$ on note $\mathcal{B}_p^h = \mathcal{B}_p^h(L^2(\mathbb{R}^d))$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on définit $\chi_y^h \in \mathcal{B}^h$ par

$$(\chi_y^h\varphi^h)(hn) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(hn)\varphi^h(hn) \tag{3.9}$$

où $\varphi^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$. Dans la Section 2 on va démontrer :

Proposition 3.3. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y^h f(H_\kappa^h)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_N(1+|y-y'|)^{-N} \tag{3.10}$$

soient valables pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Ensuite pour $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ on introduit

$$\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}}^h (V_\kappa^h - V_{\kappa'}^h)(I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}_1^h},$$

$$\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y, y') = \min\{\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y),\ \Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y')\},$$

et dans la Section 3 on va montrer

Proposition 3.4. *Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y^h (f(H_\kappa^h) - f(H_{\kappa'}^h))\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C_N (1 + |y - y'|)^{-N} \Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y, y')$$

soient valables pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Corollaire 3.1. *La partie (a) de la Proposition* 1.1 *du Chapitre* 1 *résulte de l'assertion de la Proposition* 3.1*.*

En effet, utilisant la décomposition

$$I = \sum_{y'\in\mathbb{Z}^d} \chi_{y'}^h \tag{3.11}$$

on peut estimer

$$||\chi_y^h f(H_\kappa^h)||_{\mathcal{B}_1^h} \leq \sum_{y'\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y^h f(H_\kappa^h)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq$$

$$\sum_{y'\in\mathbb{Z}^d} C_{d+1}(1 + |y - y'|)^{-d-1} = \sum_{y'\in\mathbb{Z}^d} C_{d+1}(1 + |y'|)^{-d-1} = C'_d < \infty$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $y \in \mathbb{Z}^d$, $0 < h \leq 1$ et de manière analogue

$$||\chi_y f(H_\kappa)||_{\mathcal{B}_1} \leq C'_d < \infty$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $y \in \mathbb{Z}^d$.

Un raisonnement analogue à celui du Corollaire 3.1 donne également

Corollaire 3.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C'_N > 0$ telle que les estimations*

$$||\chi_y (f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))||_{\mathcal{B}_1} \leq C'_N \Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y),$$

$$||\chi_y^h (f(H_\kappa^h) - f(H_{\kappa'}^h))||_{\mathcal{B}_1^h} \leq C'_N \Xi_N^{\kappa,\kappa'}(y),$$

soient valables pour tout $y \in \mathbb{Z}^d$, $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ et $0 < h \leq 1$.

Enfin l'assertion (b) de la Proposition 1.1 du Chapitre 1 résulte de

Corollaire 3.3. *Soit* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *et* $\delta \geq 0$.

(a) S'il existe $C > 0$ *telle que*

$$||\chi_{(y_1,y_2)}(V_\kappa - V_{\kappa'})(I-\Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} \leq C(1+|y_2|)^{-\delta},$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$, *alors il existe* $C' > 0$ *telle que*

$$||\chi_{(y_1,y_2)}(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'}))||_{\mathcal{B}_1} \leq C'(1+|y_2|)^{-\delta},$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$.

b) S'il existe $C > 0$ *telle que*

$$||\chi^h_{(y_1,y_2)}(V^h_\kappa - V^h_{\kappa'})(I-\Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h} \leq C(1+|y_2|)^{-\delta},$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ *et* $0 < h \leq 1$, *alors il existe* $C' > 0$ *telle que*

$$||\chi^h_{(y_1,y_2)}(f(H^h_\kappa) - f(H^h_{\kappa'}))||_{\mathcal{B}^h_1} \leq C'(1+|y_2|)^{-\delta},$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ *et* $0 < h \leq 1$.

Démonstration du corollaire 3.3 Si $y = (y_1, y_2)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, alors utilisant

$$(1+|y_2|)^\delta \leq (1+|y-\tilde{y}|+|\tilde{y}_2|)^\delta \leq (1+|y-\tilde{y}|)^\delta(1+|\tilde{y}_2|)^\delta$$

on voit que l'assertion (a) résulte du Corollaire 3.2 avec $N \geq d+1+\delta$, car

$$\Xi^{\kappa,\kappa'}_N(y) \leq C \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1+|y-\tilde{y}|)^{-d-1-\delta}(1+|\tilde{y}_2|)^{-\delta} \leq$$

$$C(1+|y_2|)^{-\delta} \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1+|y-\tilde{y}|)^{-d-1} = C'(1+|y_2|)^{-\delta}.$$

Il est clair que l'assertion (b) s'obtient de manière analogue.

$\square$

3.2 Démonstrations des Propositions 3.1 et 3.3

Les démonstrations des Propositions 3.1, 3.3 sont semblables. On commence par détailler la démonstration de la Proposition 3.3. Le raisonnement est basé sur un certain nombre des lemmes et on a besoin d'introduire des notations supplémentaires.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose

$$d(\lambda) = \inf_{0<h\leq 1} \inf_{\kappa\in\mathcal{K}} \min\{\mathrm{dist}\,(\sigma(H_\kappa^h),\, \lambda),\, 1\}, \tag{3.12}$$

où $\sigma(H_\kappa^h)$ désigne le spectre de H_κ^h. Dans la suite on note

$$R_\kappa^h(\lambda) = (H_\kappa^h - \lambda I)^{-1} \tag{3.13}$$

si $d(\lambda) > 0$ et on observe que

$$||R_\kappa^h(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} = \max\{1,\, 1/d(\lambda)\}. \tag{3.14}$$

Lemme 3.1. *On suppose $p \geq 2$ et $p > d/2$. Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que*

$$d(\lambda) > 0 \Longrightarrow \sup_{0<h\leq 1} \sup_{y\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y^h R_\kappa^h(\lambda)||_{\mathcal{B}_p^h} \leq C_1 d(\lambda)^{-1}. \tag{3.15}$$

Démonstration. D'abord on remarque que l'hypothèse (3.1) permet d'estimer

$$||(I - \Delta^h) R_\kappa^h(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} = ||I - V_\kappa R_\kappa^h(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} \leq C_0 d(\lambda)^{-1}$$

et par conséquent il suffit de prouver

$$\sup_{0<h\leq 1} \sup_{y\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y^h (I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}_p^h} < \infty. \tag{3.16}$$

Pour $\theta_h \in L^\infty([-\pi/h;\ \pi/h[^d)$ on définit $\Theta_h \in \mathcal{B}(L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d))$ par

$$(\Theta_h \varphi)(\xi) = \theta_h(\xi)\varphi(\xi) \quad \text{pour } \varphi \in L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d). \tag{3.17}$$

Soit $\mathcal{F}^h$ la transformée de Fourier discrète définie par la formule (1.120) du Chapitre 1. On définit

$$K_y(\theta_h) = \mathcal{F}^{h*}\, \Theta^h\, \mathcal{F}^h \chi_y^h \in \mathcal{B}^h, \tag{3.18}$$

et on remarque que l'estimation évidente

$$||K_y(\theta_h)\varphi||_h \leq ||\theta_h \mathcal{F}^h \chi_y^h \varphi||_h \leq \sup_{\xi\in[-\pi/h;\ \pi/h[^d} |\theta_h(\xi)|\, ||\varphi||_h \tag{3.19}$$

implique $||K_y(\theta_h)||_{\mathcal{B}^h} \leq ||\theta_h||_{L^\infty([-\pi/h;\ \pi/h[^d)}$.

On va démontrer qu'il existe une constante $\tilde{C} \geq 1$ telle que

$$||K_y(\theta_h)||_{\mathcal{B}_p^h} \leq \tilde{C}||\theta_h||_{L^p([-\pi/h;\ \pi/h[^d)}, \tag{3.20}$$

pour $p \geq 2$. En effet pour $p \geq 2$ (3.20) résulte par interpolation des espaces B_p^h si on prouve (3.20) pour p=2.

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ soit $\delta_{hk} \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$ tel que $\delta_{hk}(hk) = 1$ et $\delta_{hk}(hn) = 0$ si $n \neq k$. Alors $(\delta_{hk})_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est une base orthonormée de $l^2(h\mathbb{Z}^d)$ et (3.20) pour p=2 résulte de

$$||K_y(\theta_h)||^2_{B_2^h} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} ||\Theta_h \mathcal{F}^h \chi_y^h \delta_{hk}||^2_{L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d)}$$

$$= \sum_{\{k\in\mathbb{Z}^d:\, hk-y\in[0;\ 1[^d\}} ||\mathcal{F}^h\Theta_h\mathcal{F}^h\delta_{hk}||^2_{L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d)}$$

$$\leq h^{-d}\ (2\pi/h)^{-d}||\theta_h||^2_{L^2([-\pi/h;\ \pi/h[^d)}.$$

Cependant, on a $(\mathcal{F}^h\Delta^h\varphi)(\xi) = -\vartheta_h(\xi)(\mathcal{F}^h\varphi)(\xi)$ où

$$\vartheta_h(\xi) = \sum_{j=1}^{d} \frac{2(1-\cos(h\xi_j))}{h^2} = \sum_{j=1}^{d} \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{h\xi_j}{2}\right) \tag{3.21}$$

pour $\xi \in [-\pi/h;\ \pi/h[^d$, donc

$$(I-\Delta^h)^{-1}\chi_y^h = K_y(\theta_h) \text{ avec } \theta_h(\xi) = (\vartheta_h(\xi)+1)^{-1}. \tag{3.22}$$

En utilisant $\vartheta_h(\xi) \geq \frac{1}{4}|\xi|^2$ pour $\xi \in [-\pi/h;\ \pi/h[^d$ et le fait que

$$p > d/2 \Rightarrow \sup_{0<h\leq 1}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\tfrac{1}{4}|\xi|^2)^{-1}\, d\xi\ < \infty,$$

on voit que (3.16) découle de (3.20) . □

Lemme 3.2. *On suppose $p \geq 2$ et $p > d/2$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut, trouver une constante $C_N > 0$ telle que*

$$||\chi_y^h R_\kappa^h(\lambda)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_p^h} \leq C_N d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-N}. \tag{3.23}$$

pour $\kappa \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$, $0 < h \leq 1$.

Démonstration. Soit $B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r\}$ la boule de rayon $r > 0$ centrée en $y \in \mathbb{Z}^d$ et on définit $\chi^h_{y,r}, \Theta^h_{y,r} \in \mathcal{B}^h$ par

$$(\chi^h_{y,r}\varphi)(hn) = \chi_{B(y,r)}(hn)\varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(hZ^d)$$

$$(\Theta^h_{y,r}\varphi)(hn) = \theta_{y,r}(hn)\varphi(hn) \text{ pour } \varphi \in l^2(hZ^d)$$

avec $\theta_{y,r}(x) = \theta(|x-y|/r)$ où $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ est telle que $\operatorname{supp}\theta \subset [-3/2;\ 3/2]$, $0 \le \theta \le 1$ et $\theta = 1$ sur $[-1;\ 1]$.

Au lieu de (3.23) nous allons prouver que l'on a

$$L \le |y-y'| \Rightarrow ||\chi^h_y R^h_\kappa(\lambda)\chi_{y',L/2^N}||_{\mathcal{B}^h_p} \le C_N d(\lambda)^{-N-1}L^{-N}. \tag{3.24}$$

Il est clair que (3.24) est vrai pour $N = 0$ en vertu du Lemme 3.1. Dans la suite on considère $N \in \mathbb{N}^*$ dans le raisonnement par récurrence.

Utilisant $(I - \Theta^h_{y',L/2^N})\chi^h_{y',L/2^N} = 0$ et $\chi^h_y\Theta^h_{y',L/2^N} = 0$ si $4\sqrt{d} \le L \le |y-y'|$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \chi^h_y R^h_\kappa(\lambda)\Theta^h_{y',L/2^N} &= \chi^h_{y,L/2^N}[\Theta^h_{y',L/2^N},\, R^h_\kappa(\lambda)]\chi^h_{y',2^{-N}L} \\ &= \chi^h_y R^h_\kappa(\lambda)[-\Delta^h,\, \Theta^h_{y,L/2^N}]R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y',L/2^N}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On établie maintenant la suite on va établir l'existence de la constante $C'_N > 0$ telle

$$\sup_{0<h\le 1}\ \sup_{y'\in\mathbb{R}^d} ||[-\Delta^h,\, \Theta^h_{y',L/2^N}]R^h_\kappa(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} \le C'_N d(\lambda)^{-1}L^{-1}. \tag{3.26}$$

Soit $(\mathrm{e}_j)_{j=1,\dots,d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$(T^h_{\pm j}\varphi)(hn) = \varphi(h(n \pm \mathrm{e}_j)),$$

$$(\Theta^h\varphi)(hn) = \theta(hn)\varphi(hn),$$

$$(\Theta^h_{\pm j}\varphi)(hn) = \theta(h(n \pm \mathrm{e}_j))\varphi(hn)$$

et on remarque que

$$(T^h_{h\mathrm{e}_j} + T^h_{-h\mathrm{e}_j})\Theta^h = \Theta^h_j T^h_{h\mathrm{e}_j} + \Theta^h_{-j}T^h_{-h\mathrm{e}_j} =$$

$$\Theta^h(T^h_{h\mathrm{e}_j} + T^h_{-h\mathrm{e}_j}) + (\Theta^h_j + \Theta^h_{-j} - 2\Theta^h)T^h_{h\mathrm{e}_j} + (\Theta^h - \Theta^h_{-j})(T^h_{h\mathrm{e}_j} - T^h_{-h\mathrm{e}_j})$$

Par conséquent

$$[-\Delta^h,\, \Theta^h_{y,L/2^N}] = \sum_{j=1}^d \left(\widetilde{\Theta}^{h,+}_{y,N,L,j}T^h_{h\mathrm{e}_j} + \widetilde{\Theta}^{h,-}_{y,N,L,j}h^{-1}(T^h_{h\mathrm{e}_j} - T^h_{-h\mathrm{e}_j})\right) \tag{3.27}$$

où $\widetilde{\Theta}^{h,\pm}_{y,N,L,j} \in \mathcal{B}^h$ sont de la forme

$$(\widetilde{\Theta}^{h,\pm}_{y,N,L,j}\varphi)(hn) = \widetilde{\theta}^{h,\pm}_{y,N,L,j}(hn)\varphi(hn) \tag{3.28}$$

avec

$$\operatorname{supp} \widetilde{\theta}^{h,\pm}_{y,N,L,j} \subset \operatorname{supp} \theta_{y,L/2^N} + B(0,2h), \tag{3.29}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widetilde{\theta}^{h,\pm}_{y,N,L,j}(hn)| \le C_0 \max_{1\le|\nu|\le 2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\nu \theta_{y,L/2^N}(x)| \le C_1 L^{-1}. \tag{3.30}$$

On en déduit (3.26) compte tenu du fait que

$$||h^{-1}(T^h_{he_j} - T^h_{-he_j})R^h_\kappa(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} \le C_0 d(\lambda)^{-1} ||h^{-1}(T^h_{he_j} - T^h_{-he_j})(I-\Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h}$$

$$\le C_0 d(\lambda)^{-1} \sup_{-\pi/h\le\xi_j<\pi/h} 2h^{-1}|\sin(h\xi_j)| \left(1 + 4h^{-2}\sum_{j=1}^d \sin^2(h\xi_j/2)\right)^{-1}$$

$$\le 2C_0 d(\lambda)^{-1} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\xi_j|(1+\tfrac{1}{4}|\xi|^2)^{-1} \le C d(\lambda)^{-1}.$$

Dans la suite on suppose $2h \le L/2^{N+1}$ et par conséquent

$$(I - \chi^h_{y',L/2^{N-1}})[-\Delta^h,\, \Theta^h_{y',L/2^N}] = 0,$$

donc en utilisant (3.25) on peut estimer le membre gauche de (3.24) par

$$||\chi^h_y R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y',L/2^{N-1}}||_{\mathcal{B}^h_p}\, ||[-\Delta^h,\, \Theta^h_{y',L/2^N}]R^h_\kappa(\lambda)||_{\mathcal{B}^h}$$

$$\le C_{N-1} d(\lambda)^{-N} L^{-N+1} C'_N d(\lambda)^{-1} L^{-1}$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence (3.24) pour $N-1$ et (3.26). □

Lemme 3.3. *On suppose $p \ge 2$, $p > d/2$ et on fixe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $d(\lambda_0) \ge 1/2$. Si $m, N \in \mathbb{N}$ et $p \ge m+1$, alors on peut trouver une constante $C_{N,m}$ telle que les estimations*

$$||\chi^h_y R^h_\kappa(\lambda_0)^m R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}} \le C_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-N} \tag{3.31}$$

soient valables pour tout $y, y' \in \mathbb{R}^d$ et $0 < h \le 1$.

Démonstration. On abrège $R^h_\kappa(\lambda_0) = R^h_\kappa$ et $R^h_\kappa(\lambda_0)^m = R^{h,m}_\kappa$ pour $m \in \mathbb{N}$. On observe que le cas $m = 0$ a été traité dans le Lemme 3.2. Dans la suite, on fixe $m \ge 1$ et on suppose que l'assertion est vraie pour $m-1$. Utilisant le Lemme 3.2 avec λ_0 et $N+d+1$ au lieu de λ et N, on estime le membre gauche de (3.31) par

$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y^h R_\kappa^h \chi_{\tilde{y}}^h||_{\mathcal{B}_p^h} ||\chi_{\tilde{y}}^h R_\kappa^{h,m-1} R_\kappa^h(\lambda)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_{p/m}^h} \leq$$

$$C'_{N,m} \quad d(\lambda)^{-N-1} \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1+|y-\tilde{y}|)^{-N-d-1}(1+|\tilde{y}-y'|)^{-N}, \tag{3.32}$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence. On observe ensuite que l'inégalité

$$(1+|y-\tilde{y}|)(1+|\tilde{y}-y'|) \geq 1+|y-y'|$$

permet d'estimer (3.32) par

$$C'_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-N} \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} (1+|y-\tilde{y}|)^{-d-1},$$

c'est-à-dire $C_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-N}$. □

Démonstration de la Proposition 3.1

On fixe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $d(\lambda_0) \geq 1/2$ et on note $f_m(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m f(\lambda)$. On va exprimer $f_m(H_\kappa)$ à l'aide de la formule de Hellfer-Sjöstrand. Pour cela on note par $\widetilde{f}_m$ une extension analytique de f_m, c'est-à-dire $\widetilde{f}_m \in C^\infty(\mathbb{C})$ vérifie

a) $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \in \mathbb{R}$

b) $\mathrm{supp}\widetilde{f} \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \in \mathrm{supp}\, f, \ \ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$

c) pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ telle que

$$|\partial_{\bar{z}} \widetilde{f}_m(z)| \leq C_N |\mathrm{Im}\, z|^N,$$

où $\partial_{\bar{z}} \widetilde{f}_m(z) = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\widetilde{f}_m(x+iy)$ et $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

Alors utilisant l'expression

$$f_m(H_\kappa^h) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \widetilde{f}_m(z) R_\kappa^h(z) dz \wedge d\overline{z}$$

et $f(H_\kappa^h) = R_\kappa^h(\lambda_0)^m f_m(H_\kappa^h)$ on trouve

$$\chi_y^h f(H_\kappa^h)\chi_{y'}^h = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} \widetilde{f}_m(z) \chi_y^h R_\kappa^h(\lambda_0)^m R_\kappa^h(z)\chi_{y'}^h dz \wedge d\bar{z}.$$

On termine la démonstration en estimant $||\chi_y^h f(H_\kappa^h)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h}$ par

$$C_m \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} |\partial_{\bar z}\widetilde{f}_m(z)|\, ||\chi_y^h R_\kappa^h(\lambda_0)^m R_\kappa^h(z)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}_1^h} \leq$$

$$C_{N,m}(1+|y-y'|)^{-N} \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} |\operatorname{Im} z|^{-N-1}|\partial_{\bar z}\widetilde{f}_m(z)|$$

en vertu du Lemme 3.3 avec $p = m+1 \geq 1 + d/2$ et $d(z) \geq |\operatorname{Im} z|$.

□

3.3 Démonstrations des Propositions 3.2 et 3.4

Lemme 3.4. *On suppose $p > d/2$, $p \geq 2$, on fixe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $d(\lambda_0) > 1/2$ et on pose*

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa'}(\lambda, y, y') = ||\chi_y^h R_\kappa^h(\lambda_0)^m (R_\kappa^h(\lambda) - R_{\kappa'}^h(\lambda))\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}}. \tag{3.33}$$

Si $N, m \in \mathbb{N}$ et $p \geq m+1$, alors il existe une constante $C_{N,m} > 0$ telle que l'on ait

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa'}(\lambda, y, y') \leq C_{N,m}(1+|y-y'|)^{-N} d(\lambda)^{-2N-2}\Xi_{h,N}^{\kappa,\kappa'}(y, y') \tag{3.34}$$

pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Démonstration. On abrège $R_\kappa^h(\lambda_0)^m = R_\kappa^{h,m}$. Alors

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa'}(\lambda, y, y') = \sum_{\tilde y \in \mathbb{Z}^d} ||\chi_y^h R_\kappa^{h,m} R_\kappa^h(\lambda)\chi_{\tilde y}^h (V_{\kappa'}^h - V_\kappa^h)\chi_{\tilde y}^h R_{\kappa'}^h(\lambda)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}}$$

résulte de l'identité $\quad R_\kappa^h(\lambda) - R_{\kappa'}^h(\lambda) = R_\kappa^h(\lambda)(V_{\kappa'}^h - V_\kappa^h)R_{\kappa'}^h(\lambda) \quad$ et

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa'}(\lambda, y, y') \leq \sum_{\tilde y \in \mathbb{Z}^d} \min_{j\in\{1,2\}} \eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa',j}(\lambda, y, y', \tilde y),$$

où

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa',1}(\lambda, y, y', \tilde y) = ||\chi_y^h R_\kappa^{h,m} R_\kappa^h(\lambda)\chi_{\tilde y}^h||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}} ||\chi_{\tilde y}^h (V_\kappa^h - V_{\kappa'}^h) R_{\kappa'}^h(\lambda)||_{\mathcal{B}^h},$$

$$\eta_{h,m,p}^{\kappa,\kappa',2}(\lambda, y, y', \tilde y) = ||\chi_y^h R_\kappa^{h,m}||_{\mathcal{B}^h_{p/m}}\, ||R_\kappa^h(\lambda)(V_\kappa^h - V_{\kappa'}^h)\chi_{\tilde y}^h||_{\mathcal{B}^h}\, ||\chi_{\tilde y}^h R_{\kappa'}^h(\lambda)\chi_{y'}^h||_{\mathcal{B}^h_p}$$

avec la convention $||\chi_y^h R_\kappa^{h,m}||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} = ||\chi_y^h||_{\mathcal{B}^h} = 1$ si $m = 0$.

En introduisant

$$\Xi_h^{\kappa,\kappa'}(\tilde y) = ||\chi_{\tilde y}^h (V_\kappa^h - V_{\kappa'}^h)(I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h} \tag{3.35}$$

on peut estimer
$$||\chi^h_{\tilde{y}}(V^h_\kappa - V^h_{\kappa'})R^h_{\kappa'}(\lambda)||_{\mathcal{B}^h} \leq Cd(\lambda)^{-1}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y})$$
et en utilisant le Lemme 3.3 avec $2N$ au lieu de N on trouve
$$\eta^{\kappa,\kappa',1}_{h,m,p}(\lambda, y, y', \tilde{y}) \leq C'_{m,N}d(\lambda)^{-2N-2}(1 + |y - \tilde{y}|)^{-2N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y}).$$
Le raisonnement dans la démonstration du Corollaire 3.1 permet de voir que le Lemme 3.3 assure l'existence de $C_m > 0$ telle que $||\chi^h_y R^{h,m}_\kappa||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} \leq C_m$ et par conséquent
$$\eta^{\kappa,\kappa',2}_{h,m,p}(\lambda, y, y', \tilde{y}) \leq C''_{m,N}d(\lambda)^{-2N-2}(1 + |y' - \tilde{y}|)^{-2N}\Xi^{h,\kappa'}_\kappa(\tilde{y}).$$
Cependant,
$$\begin{aligned}\min\{(1 + |y - \tilde{y}|)^{-N}, (1 + |y' - \tilde{y}|)^{-N}\} &= (1 + \max\{|y - \tilde{y}|,\, |y' - \tilde{y}|\})^{-N} \\ &\leq (1 + \tfrac{1}{2}(|y - \tilde{y}| + |y' - \tilde{y}|))^{-N} \leq (1 + \tfrac{1}{2}|y - y'|)^{-N}\end{aligned}$$
permet d'estimer $\min_{j\in\{1,2\}} \eta^{\kappa,\kappa',j}_{h,m,p}(\lambda, y, y', \tilde{y})$ par
$$C_{m,N}d(\lambda)^{-2N-2}(1 + |y - y'|)^{-N} \min\{(1 + |y - \tilde{y}|)^{-N},\, (1 + |y' - \tilde{y}|)^{-N}\}\Xi^{\kappa,\kappa'}_\kappa(\tilde{y})$$
et pour terminer la démonstration on remarque que
$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} \min\{(1 + |y - \tilde{y}|)^{-N},\, (1 + |y' - \tilde{y}|)^{-N}\}\, \Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y}) \leq$$
$$\min\{\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}(1 + |y - \tilde{y}|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y}), \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}(1 + |y' - \tilde{y}|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y})\}$$
et la dernière expression est égale $\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y, y')$. □

Lemme 3.5. *Pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$, $0 < h \leq 1$ et $N \in \mathbb{N}$ on a*
$$\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y, y') \geq (1 + |y - y'|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y).$$

Démonstration. Si $\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y})$ est donné par la formule (3.35) alors
$$\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y') = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}(1 + |y' - \tilde{y}|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y}) \geq$$
$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}(1 + |y' - y| + |y - \tilde{y}|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y}) \geq$$
$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}(1 + |y' - y|)^{-N}(1 + |y - \tilde{y}|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_h(\tilde{y})$$
et la dernière somme est égale $(1 + |y - y'|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y)$. □

Lemme 3.6. *On suppose $p > d/2$, $p \geq 2$, on fixe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $d(\lambda_0) > 1/2$ et on pose*

$$\widetilde{\eta}^{\kappa,\kappa'}_{h,m,p}(\lambda, y, y') = ||\chi^h_y(R^h_\kappa(\lambda_0)^m - R^h_{\kappa'}(\lambda_0)^m)R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}} \tag{3.36}$$

Si $m, N \in \mathbb{N}$ et $p \geq m+1$, alors on peut trouver une constante $\widetilde{C}_{N,m} > 0$ telle que l'on ait

$$\widetilde{\eta}^{\kappa,\kappa'}_{h,m,p}(\lambda, y, y') \leq \widetilde{C}_{N,m}(1 + |y - y'|)^{-N} d(\lambda)^{-4N-2}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y, y') \tag{3.37}$$

pour tout $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $y, y' \in \mathbb{Z}^d$ et $0 < h \leq 1$.

Démonstration. On abrège $R^h_\kappa = R^h_\kappa(\lambda_0)$ et $R^h_\kappa(\lambda_0)^m = R^{h,m}_\kappa$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$\chi^h_y(R^{h,m}_\kappa - R^{h,m}_{\kappa'})R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'} = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\in\{1,2\}} B^{\kappa,\kappa',j}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y})$$

avec

$$B^{\kappa,\kappa',1}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y}) = \chi^h_y(R^h_\kappa - R^h_{\kappa'})R^{h,m-1}_\kappa \chi^h_{\tilde{y}} R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}$$
$$B^{\kappa,\kappa',2}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y}) = \chi^h_y R^h_{\kappa'}(R^{h,m-1}_{\kappa'} - R^{h,m-1}_\kappa)\chi^h_{\tilde{y}} R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}.$$

Utilisant le Lemme 3.4 avec $m-1$, $2N$, λ_0 au lieu de m, N, λ et le Lemme 3.2 on peut estimer

$$||B^{\kappa,\kappa',1}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y})||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}} \leq$$
$$||\chi^h_y(R^h_{\kappa'} - R^h_\kappa)R^{h,m-1}_\kappa \chi^h_{\tilde{y}}||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} ||\chi^h_{\tilde{y}} R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_p} \leq$$
$$C'_{N,m} d(\lambda)^{-4N-2}(1 + |y - \tilde{y}|)^{-2N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y)(1 + |\tilde{y} - y'|)^{-2N}.$$

Ainsi

$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} ||B^{\kappa,\kappa'}_{h,m,p}(\lambda, y, y', \tilde{y})||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}} \leq$$
$$C'_{N,m} d(\lambda)^{-4N-2}(1 + |y - y'|)^{-2N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y) \leq$$
$$\tilde{C}_{N,m} d(\lambda)^{-4N-2}(1 + |y - y'|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y, y'),$$

où la dernière inégalité résulte du Lemme 3.5.

Si $m = 1$ alors $B^{\kappa,\kappa',2}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y}) = 0$ et par conséquent l'assertion du lemme est vraie pour $m = 1$. Supposons maintenant que $m \geq 2$ et l'assertion du lemme est vraie pour $m - 1$. Alors $||B^{\kappa,\kappa',2}_{h,m,\lambda}(y, y', \tilde{y})||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}}$ s'estime par

$$||\chi^h_y R^h_{\kappa'}(R^{h,m-1}_{\kappa'} - R^{h,m-1}_\kappa)\chi^h_{\tilde{y}}||_{\mathcal{B}^h_{p/m}} ||\chi^h_{\tilde{y}} R^h_\kappa(\lambda)\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_p} \leq$$

$$C'_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1 + |y - \tilde{y}|)^{-2N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y')(1 + |y - \tilde{y}|)^{-2N}$$

et comme auparavant on trouve

$$\sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^d} ||B^{\kappa,\kappa',2}_{h,m,p}(\lambda, y, y', \tilde{y})||_{\mathcal{B}^h_{p/(m+1)}}$$

$$\leq \bar{C}_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-2N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y) \leq$$

$$C'_{N,m} d(\lambda)^{-N-1}(1+|y-y'|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y,y'),$$

terminant démonstration par récurrence. □

Démonstration de la Proposition 3.2

Soit $\widetilde{f}_m$ une extension presque-analytique de $f_m(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m f(\lambda)$ comme dans la démonstration de la Proposition 3.1. Alors, en utilisant la formule de Helffer-Sjöstrand

$$f(H^h_\kappa) - f(H^h_{\kappa'}) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}}\widetilde{f}_m(z)\left(R^{h,m}_\kappa R^h_\kappa(z) - R^{h,m}_{\kappa'} R^h_{\kappa'}(z)\right) dz\wedge d\bar{z},$$

où $R^{h,m}_\kappa = R^h_\kappa(\lambda_0)^m$. On termine la démonstration en estimant

$$||\chi^h_y(f(H^h_\kappa) - f(H^h_{\kappa'}))\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_1} \leq$$

$$C_m \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} |\partial_{\bar{z}}\widetilde{f}_m(z)|\, ||\chi^h_y \left(R^{h,m}_\kappa R^h_\kappa(z) - R^{h,m}_{\kappa'} R^h_{\kappa'}(z)\right)\chi^h_{y'}||_{\mathcal{B}^h_1} \leq$$

$$C_{N,m}(1+|y-y'|)^{-N}\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}(y,y') \sup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} |\mathrm{Im}\, z|^{-4N-2}|\partial_{\bar{z}}\widetilde{f}_m(z)|,$$

où la dernière inégalité résulte des Lemmes 3.4 et 3.6 compte tenu de

$$R^{h,m}_\kappa R^h_\kappa(z) - R^{h,m}_{\kappa'} R^h_{\kappa'}(z) = R^{h,m}_\kappa(R^h_\kappa(z) - R^h_{\kappa'}(z)) + (R^{h,m}_\kappa - R^{h,m}_{\kappa'})R^h_{\kappa'}(z)$$

et $d(z) \geq |\mathrm{Im}\, z|$.

□

Démonstration de la Proposition 3.4

On observe qu'il s'agit de la version continue de l'assertion de la Proposition 3.2 et il suffit de suivre le raisonnement analogue en utilisant R_κ au lieu de R^h_κ et $\Xi^{\kappa,\kappa'}_N$ au lieu de $\Xi^{\kappa,\kappa'}_{h,N}$.

□

Chapitre 4

Les potentiels avec singularités

4.1 Énoncés des résultats

On suppose que $v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction réelle telle qu'il existe des constantes $C_0, c_0 > 0$ vérifiant l'estimation

$$||v\varphi|| \leq (1 - c_0)||\Delta\varphi|| + C_0||\varphi||,$$

pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors on peut définir l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$H = -\Delta + V,$$

où $(V\varphi)(x) = v(x)\varphi(x)$ pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Comme auparavant on désigne par $|| \cdot ||_{\mathcal{B}}$ la norme de l'espace d'opérateurs bornés $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{B}$, pour $y \in \mathbb{Z}^d$ on note $\mathcal{C}(y) = y + [0;\ 1[^d$, on définit les opérateurs χ_y, $\chi_L^{L'} \in \mathcal{B}$ par les formules

$$(\chi_y\varphi)(x) = \chi_{\mathcal{C}(y)}(x)\varphi(x),$$

$$(\chi_L^{L'}\varphi)(x) = \chi_{[-L;\ L[^{d_1} \times [-L';\ L'[^{d_2}}(x)\varphi(x)$$

où $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on s'intéresse à la quantité

$$N_L^{L'}(f, H) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^{L'}(f(H) - f(-\Delta)),$$

pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Définition de $\mathcal{V}^\rho$. Pour $\rho \geq 0$ on écrit $v \in \mathcal{V}^\rho$ si et seulement si

$$||v||_{\mathcal{V}^\rho} = \sup_{(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}} (1 + |y_2|)^\rho ||\chi_{(y_1, y_2)} V(I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} < \infty.$$

On a alors

Théorème 4.1. *On suppose $v \in \mathcal{V}^\rho$ avec $\rho > d_2$ et $L' \geq 1$. Alors la limite*

$$N_L(f, H) = \lim_{L' \to \infty} N_L^{L'}(f, H)$$

existe et pour un certain $C > 0$ on a

$$\sup_{L \geq 1} |N_L(f, H) - N_L^{L'}(f, H)| \leq C L'^{d_2 - \rho}.$$

Définition de $\mathcal{V}_{\rm pp}$. On désigne par $\mathcal{V}_{\rm pp}$ l'ensemble des fonctions $v \in C(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ telles que $x_2 \to v(\cdot, x_2)$ est une application continue $\mathbb{R}^{d_2} \to CAP(\mathbb{R}^{d_1})$, où $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ est muni de la norme héritée de $L^\infty(\mathbb{R}^{d_1})$.

Définition de $\mathcal{V}^0_{\rm pp}$. $v \in \mathcal{V}^0_{\rm pp}$ si et seulement si $v \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ est adhérent à $\mathcal{V}_{\rm pp}$ dans la norme $||\cdot||_{\mathcal{V}^0}$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\rm pp}$ tel que $||v - v_\varepsilon||_{\mathcal{V}^0} < \varepsilon$.

Théorème 4.2. *Si $v \in \mathcal{V}^0_{\rm pp}$, $L' \geq 1$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors il existe la limite*

$$N^{L'}(f, H) = \lim_{L \to \infty} N_L^{L'}(f, H).$$

Théorème 4.3. *Si $v \in \mathcal{V}^0_{\rm pp} \cap \mathcal{V}^\rho$ avec $\rho > d_2$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors on a l'existence des limites*

$$N(f, H) = \lim_{L \to \infty} N_L^L(f, H) = \lim_{L' \to \infty} N^{L'}(f, H),$$

et $f \to N(f, H)$ est une distribution $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec le support vérifiant

$$\sigma(H) = [0; \infty[\cup \operatorname{supp} N(\cdot, H).$$

Notre but suivant est de décrire des conditions d'intégrabilité locale permettant d'estimer la norme de $\mathcal{V}^\rho$ et assurant la possibilité d'utiliser l'approximation discrète. Dans le Chapitre 5 on considère des interactions du type à N corps où un cas important est fourni par le potentiel de la forme

$$v(x_1, x_2) = w(x_1) \mathrm{e}^{-c|x_2|} |x_2|^{-1}$$

avec $d_1 = 3(N-1)$, $d_2 = 3$ et $c > 0$ (l'interaction du type de Yukawa).

Pour pouvoir étudier des cas comme le potentiel indiqué ci dessus on va distinguer les propriétés des régularités en direction de $\mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Définition de $L^{p_2}_{p_1}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2})$. $\varphi \in L^{p_2}_{p_1}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2})$ si et seulement si $\varphi \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ est telle que

$$||\varphi||_{L^{p_2}_{p_1}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} |\varphi(x_1, x_2)|^{p_2} dx_2 \right)^{p_1/p_2} dx_1 \right)^{1/p_1} < \infty.$$

Définition de $\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}$. On va écrire $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}$ si et seulement si $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ est tel que

$$||v||_{\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}} = \sup_{(y_1,y_2)\in\mathbb{Z}^{d_1}\times\mathbb{Z}^{d_2}} (1+|y_2|)^\rho ||\chi_{(y_1,y_2)}v||_{L_{p_1}^{p_2}(\mathbb{R}^{d_1},\mathbb{R}^{d_2})} < \infty.$$

Définition de $\mathcal{V}_{p_1,\mathrm{pp}}^{p_2}$. On va écrire $v \in \mathcal{V}_{p_1,\mathrm{pp}}^{p_2}$ si et seulement si $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,0}$ est adhérent à $\mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ dans la norme de $\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,0}$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{V}_{\mathrm{pp}}$ tel que $||v - v_\varepsilon||_{\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,0}} < \varepsilon$.

Proposition 4.1. *On suppose $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ et $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$. Si $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,0}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que l'on ait*

$$||v\varphi|| \leq \varepsilon||\Delta\varphi|| + C_\varepsilon||\varphi||$$

pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C = C_{p_1,p_2,\rho}$ telle que l'on ait

$$||v||_{\mathcal{V}^\rho} \leq C||v||_{\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}}$$

pour tout $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}$.

Comme dans le Chapitre 1 on désigne par $||\cdot||_h$ la norme de $l^2(h\mathbb{Z}^d)$, on abrège $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}(l^2(h\mathbb{Z}^d))$ et on note par $-\Delta^h$ le laplacien discret sur $l^2(h\mathbb{Z}^d)$.

Dans la suite $\tilde{H}^h \in \mathcal{B}_h$ est défini par la formule

$$\tilde{H}^h = -\Delta^h + \tilde{V}^h,$$

$$(\tilde{V}^h\varphi^h)(hn) = \tilde{v}^h(hn)\varphi^h(hn),$$

avec

$$\tilde{v}^h(hn) = h^{-d}\int_{[0;\,h[^d} v(hn+x)\,dx.$$

Théorème 4.4. *Si $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho} \cap \mathcal{V}_{p_1,\mathrm{pp}}^{p_2}$ avec $\rho > d_2$, $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ et $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$, alors les assertions des Théorèmes $1.2 - 1.6$ du Chapitre 1 restent vraies avec $\tilde{H}^h$ au lieu de H^h.*

Définition des fonctions presque périodiques de Stepanov $S^{p_1}AP(\mathbb{R}^{d_1})$

Soit $\mathcal{L}_{\mathrm{unif}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})$ l'espace de Banach défini par la condition $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathrm{unif}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})$ si et seulement si $\varphi \in L_{\mathrm{loc}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})$ vérifie

$$||\varphi||_{\mathcal{L}_{\mathrm{unif}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} = \sup_{y_1\in\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{[0;\,1[^d} |\varphi(x_1+y_1)|^{p_1} dx_1\right)^{1/p_1} < \infty.$$

On définit l'espace $S^{p_1}AP(\mathbb{R}^{d_1})$ comme l'ensemble des fonctions $v \in \mathcal{L}_{\mathrm{unif}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})$ qui sont adhérents à $CAP(\mathbb{R}^{d_1})$ dans la norme de $\mathcal{L}_{\mathrm{unif}}^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})$.

Exemple. Pour $r > 0$ on considère

$$v_r(x_1, x_2) = w_1(x_1)|x_2|^{-r} w_2(x_2)$$

avec

$$\begin{cases} w_1 \in S^{p_1} AP(\mathbb{R}^{d_1}) \\ |w_2(x_2)| \leq C(1 + |x_2|)^{-\rho} \end{cases}$$

où $C > 0$ est une constante. Alors on a $v_r \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho} \cap \mathcal{V}_{p_1,\mathrm{pp}}^{p_2}$ si $r < d_2/p_2$.

4.2 Démonstrations

Soit $(H_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ la famille d'opérateurs du Chapitre 3 et

$$N_L^{L'}(f, H_\kappa, H_{\kappa'}) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_L^{L'}(f(H_\kappa) - f(H_{\kappa'})). \tag{4.1}$$

Démonstration du Théorème 4.1. En utilisant les estimations du Chapitre 3 dans le raisonnement de la Section 2 du Chapitre 1 on trouve

$$|N_L^{L_1}(f, H_\kappa, H_{\kappa'}) - N_L^{L_2}(f, H_\kappa, H_{\kappa'})| \leq C(L_1^{d_2-\rho} + L_2^{d_2-\rho})||v_\kappa - v_{\kappa'}||_{\mathcal{V}^\rho},$$

donc la condition $||v_\kappa - v_{\kappa'}||_{\mathcal{V}^\rho} < \infty$ avec $\rho > d_2$ assure l'existence de

$$N_L(f, H_\kappa, H_{\kappa'}) = \lim_{L' \to \infty} N_L^{L'}(f, H_\kappa, H_{\kappa'}). \tag{4.2}$$

Dans le cas particulier $H_{\kappa'} = -\Delta$ et $H_\kappa = H$ on trouve l'assertion énoncée.

$\square$

Démonstration du Théorème 4.2. Il suffit de vérifier que pour tout $\kappa \in \mathcal{K} =]0;1[$ il existe v_κ vérifiant (H1), (H2) du Chapitre 1 tel que

$$\sup_{L \geq 1} |N_L^{L'}(f, H) - N_L^{L'}(f, H_\kappa)| = \sup_{L \geq 1} |N_L^{L'}(f, H, H_\kappa)| < \kappa/4. \tag{4.3}$$

En effet, si v_κ vérifie (H1), (H2) du Chapitre 1, alors on a l'existence de $\lim_{L \to \infty} N_L^{L'}(f, H_\kappa)$ et on peut trouver $L(\kappa) > 0$ tel que

$$L_2 \geq L_1 \geq L(\kappa) \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H_\kappa) - N_{L_2}^{L'}(f, H_\kappa)| < \kappa/4,$$

ce qui implique la condition de Cauchy

$$L_2 \geq L_1 \geq L(\kappa) \Rightarrow |N_{L_1}^{L'}(f, H) - N_{L_2}^{L'}(f, H)| < \kappa,$$

et l'existence de $\lim_{L\to\infty} N_L^{L'}(f,H)$.

Soit $\vartheta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \le \vartheta_0 \le 1$ et $\vartheta_0 = 1$ sur $[-1;\,1]$. On définit

$$H^{L''} = -\Delta + V^{L''}, \tag{4.4}$$

où $L'' \ge 1$ et $(V^{L''}\varphi)(x) = v^{L''}(x)\varphi(x)$ pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

$$v^{L''}(x_1,x_2) = v(x_1,x_2)\vartheta_0(|x_2|/L''). \tag{4.5}$$

Alors, on peut estimer

$$|N_L^{L'}(f,H,H^{L''})| \le C_N \sum_{y_2\in\mathbb{Z}^{d_2}\cap[-L';\,L']^{d_2}} \eta_N(y_2,L),$$

avec

$$\begin{aligned}\eta_N(y_2,L) &= \sum_{\tilde{y}_2\in\mathbb{Z}^{d_2}} (1+|y_2-\tilde{y}_2|)^{-N} \sup_{y_1\in\mathbb{Z}^{d_1}} ||\chi_{(y_1,\tilde{y}_2)}(V-V^{L''})(I-\Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} \\ &\le C_N \sum_{\{\tilde{y}_2\in\mathbb{Z}^{d_2}:\,|\tilde{y}_2|\ge L''\}} (1+|y_2-\tilde{y}_2|)^{-N}||v||_{\mathcal{V}^0}.\end{aligned}$$

Donc pour $N > d_2$ on trouve

$$L'' \ge L''(\kappa) \Rightarrow |N_L^{L'}(f,H,H^{L''})| \le C'_N L''^{d_2-N}||v||_{\mathcal{V}^0} < \kappa/8 \tag{4.6}$$

si $L''(\kappa)$ est fixé suffisamment grand.

Ensuite on observe que $\operatorname{supp} v^{L''(\kappa)} \subset \mathbb{R}^{d_1}\times[-L''(\kappa);\ L''(\kappa)]^{d_2}$ permet d'utiliser la définition de $\mathcal{V}^0_{\mathrm{pp}}$ pour assurer l'existence de v_κ vérifiant (H1), (H2) du Chapitre 1 et

$$|N_L^{L'}(f,H_\kappa,H^{L''(\kappa)})| \le C||v^{L''(\kappa)}-v_\kappa||_{\mathcal{V}^0} < \kappa/8. \tag{4.7}$$

On termine la démonstration en remarquant que (4.6) et (4.7) assurent (4.3).

□

Démonstration du Théorème 4.3. L'existence et l'égalité des limites pour H résultant des propriétés analogues pour les opérateurs H_κ décrits dans la démonstration précédente. Pour prouver l'assertion concernant le support on remarque que

$$N(f,H) = \lim_{\kappa\to 0} N(f,H_\kappa),$$

et

$$||f(H)-f(H_\kappa)||_{\mathcal{B}} \le C||v-v_\kappa||_{\mathcal{V}^0} \to 0,$$

quand $\kappa \to 0$ implique $||f(H_\kappa)||_{\mathcal{B}} \to ||f(H)||_{\mathcal{B}}$ quand $\kappa \to 0$. Ainsi suivant le raisonnement du Chapitre 1 on trouve

$$\sigma(H) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{0<\kappa\leq\varepsilon} \sigma(H_\kappa)}$$

et de manière semblable $\sigma(H) = [0; \infty[\cup \operatorname{supp} N(\cdot, H)$ résulte de l'égalité $\sigma(H_\kappa) = [0; \infty[\cup \operatorname{supp} N(\cdot, H_\kappa)$.

□

La démonstration de la Proposition 4.1 sera donnée dans la Section 3.

Avant de commencer la démonstration du Théorème 4.4 on compare la nouvelle formule de la discrétisation avec celle du Chapitre 1. Plus précisément on va montrer

Lemme 4.1. *On suppose que v vérifie les hypothèses* (H1), (H2) *et H^h est défini comme dans le Chapitre* 1. *Si $\tilde{H}^h$ est défini comme dans la Section* 1 *de ce chapitre, alors*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{L,L'\geq 1} |N_L^{L'}(f, H^h, \tilde{H}^h)| = 0 \tag{4.8}$$

et les énoncés des Théorèmes $1.2 - 1.6$ *du Chapitre* 1 *restent valables avec $\tilde{H}^h$ au lieu de H^h.*

Démonstration. Si $\rho > d_2$, alors les résultats du Chapitre 3 permettent d'estimer

$$|N_L^{L'}(f, H^h, \tilde{H}^h)| \leq \sup_{n_1\in\mathbb{Z}^{d_1}, n_2\in\mathbb{Z}^{d_2}} (1+|hn_2|)^\rho |(v^h - \tilde{v}^h)(hn_1, hn_2)|$$

et la dernière expression tend vers 0 quand $h \to 0$ si $\rho < d_2 + \delta_0$. En effet, $(x_1, x_2) \to (1+|x_2|)^\rho v(x_1, x_2)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ si $\rho < d_2 + \delta_0$ et

$$|(v^h - \tilde{v}^h)(hn_1, hn_2)| \leq \sup_{x\in[0;\,h[^d} |v(hn) - v(hn+x)|.$$

Ainsi, $N_L^{L'}(f, H^h, \tilde{H}^h) = N_L^{L'}(f, H^h) - N_L^{L'}(f, \tilde{H}^h) \to 0$ quand $h \to 0$ uniformément par rapport à $L, L' \geq 1$ et de plus, (4.8) assure que les énoncés des théorèmes 1.2-1.5 du Chapitre 1 restent valables avec $\tilde{H}^h$ au lieu de H^h.

Afin d'obtenir l'assertion du Théorème 1.6 du Chapitre 1 pour $\tilde{H}^h$ en suivant le raisonnement précédent, il suffit de prouver l'égalité

$$\sigma(H) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\bigcup_{0<h\leq\varepsilon} \sigma(\tilde{H}^h)},$$

qui résulte du fait que $||f(\tilde{H}^h)||_{\mathcal{B}^h} \to ||f(H)||_{\mathcal{B}}$ quand $h \to 0$. Cependant

$$||f(\tilde{H}^h) - f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} \leq \sup_{n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}, n_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} C(1+|hn_2|)^\rho |(v^h - \tilde{v}^h)(hn_1, hn_2)|,$$

tend vers 0 quand $h \to 0$, donc $||f(\tilde{H}^h)||_{\mathcal{B}^h} - ||f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} \to 0$ quand $h \to 0$ et le résultat du Chapitre 1 assure $||f(H^h)||_{\mathcal{B}^h} \to ||f(H)||_{\mathcal{B}}$ quand $h \to 0$. $\square$

Dans la suite on décrit la version discrète des normes $\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}$. Pour une application $\varphi^h : h\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ on pose

$$||\varphi^h||_{l_{p_1}^{p_2}(h\mathbb{Z}^{d_1}, h\mathbb{Z}^{d_2})} = \left(\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \left(\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} |\varphi^h(hn_1, hn_2)|^{p_2} \right)^{p_1/p_2} \right)^{1/p_1},$$

et

$$||\varphi^h||_{\mathcal{V}_{p_1,h}^{p_2,\rho}} = h^{\frac{d_1}{p_1}+\frac{d_2}{p_2}} \sup_{(y_1,y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}} (1+|y_2|)^\rho ||\chi_{(y_1,y_2)}^h \varphi^h||_{l_{p_1}^{p_2}(h\mathbb{Z}^{d_1}, h\mathbb{Z}^{d_2})}.$$

Alors on a

Proposition 4.2. *Il existe une constante $C = C_{p_1,p_2,\rho}$ telle que l'on ait*

$$\sup_{0<h\leq 1} ||\tilde{v}^h||_{\mathcal{V}_{p_1,h}^{p_2,\rho}} \leq C ||v||_{\mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}}, \tag{4.9}$$

pour tout $v \in \mathcal{V}_{p_1}^{p_2,\rho}$.

La démonstration de cette proposition sera donnée dans la Section 3.

La démonstration du Théorème 4.4 se base sur

Proposition 4.3. *Soient $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ tels que $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$. On suppose que $\tilde{v}^h : h\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ vérifie la condition $\sup_{0<h\leq 1} ||\tilde{v}^h||_{\mathcal{V}_{p_1,h}^{p_2,\rho}} < \infty$. Alors*

(a) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que l'on ait

$$||\tilde{v}^h \varphi^h||_h \leq \varepsilon ||\Delta^h \varphi^h||_h + C_\varepsilon ||\varphi^h||_h, \tag{4.10}$$

pour tout $\varphi^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$, $0 < h \leq 1$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$,

(b) il existe une constante $C = C_{p_1,p_2,\rho}$ telle que l'on ait

$$(1+|y_2|)^\rho ||\chi_{(y_1,y_2)}^h \tilde{V}^h (I - \Delta^h)^{-1}||_{\mathcal{B}^h} \leq C ||\tilde{v}^h||_{\mathcal{V}_{p_1,h}^{p_2,\rho}}, \tag{4.11}$$

pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ et $0 < h \leq 1$.

La démonstration de cette proposition sera donnée dans la Section 3.

Démonstration du Théorème 4.4 Dans la suite on suppose que $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$ satisfont $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$ et $(v^h_\kappa)_{\kappa\in\mathcal{K}}$ est une famille des suites $h\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{\kappa\in\mathcal{K}} \sup_{0<h\leq 1} ||v^h||_{\mathcal{V}^{p_2,\rho}_{p_1,h}} < \infty. \tag{4.12}$$

Comme dans le Chapitre 3, on note

$$H^h_\kappa = -\Delta^h + V^h_\kappa, \tag{4.13}$$

$$(V^h_\kappa \varphi^h)(hn) = v^h_\kappa(hn)\varphi^h(hn), \tag{4.14}$$

et on considère

$$N^{L'}_L(f, H^h_\kappa, H^h_{\kappa'}) = (2L)^{-d_1} \mathrm{tr}\, \chi^{h,L'}_L (f(H^h_\kappa) - f(H^h_{\kappa'})).$$

En combinant l'assertion de la Proposition 4.2 avec les estimations du Chapitre 3, on trouve

$$\sup_{L\geq 1} |N^{L'}_L(f, H^h_\kappa, H^h_{\kappa'})| \leq C L'^{d_2} ||v^h_\kappa - v^h_{\kappa'}||_{\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1,h}}, \tag{4.15}$$

et comme précédemment $\rho > d_2$ assure

$$|N^{L_1}_L(f, H_\kappa, H_{\kappa'}) - N^{L_2}_L(f, H_\kappa, H_{\kappa'})| \leq C(L_1^{d_2-\rho} + L_2^{d_2-\rho}) ||v^h_\kappa - v^h_{\kappa'}||_{\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1,h}}.$$

Dans le cas particulier $H^h_\kappa = -\Delta^h$ et $H^h_{\kappa'} = \tilde{H}^h$ défini à l'aide de $v \in \mathcal{V}^{p_2,\rho}_{p_1}$ on obtient l'existence de $N_L(f, \tilde{H}^h) = \lim_{L'\to\infty} N^{L'}_L(f, \tilde{H}^h)$ et l'estimation

$$\sup_{0<h\leq 1} \sup_{L\geq 1} |N_L(f, \tilde{H}^h) - \lim_{L'\to\infty} N^{L'}_L(f, \tilde{H}^h)| \leq C L'^{d_2-\rho}. \tag{4.16}$$

On observe que l'utilisation du critère de Cauchy de manière analogue comme dans les démonstrations des Théorème 4.2 et 4.3 permet d'obtenir les assertions des théorèmes 1.2-1.6 du chapitre 1 avec $\tilde{H}^h$ et $v \in \mathcal{V}^{p_2,\rho}_{p_1} \cap \mathcal{V}^{p_2}_{p_1,\mathrm{pp}}$ sachant l'existence d'une famille $(\tilde{H}^h_\kappa)_{0<\kappa\leq 1}$ telle que

$$\sup_{L,L'\geq 1} |N^{L'}_L(f, \tilde{H}^h, \tilde{H}^h_\kappa)| < \kappa/4, \tag{4.17}$$

où $\tilde{H}^h_\kappa = \Delta^h + \tilde{V}^h_\kappa$ avec $\tilde{v}^h_\kappa$ défini à l'aide de v_κ vérifiant les hypothèses (H1), (H2).

Ainsi, pour compléter la démonstration on remarque que

$$|N^{L'}_L(f, \tilde{H}^h, \tilde{H}^h_\kappa)| \leq C L'^{d_2} ||\tilde{v}^h - \tilde{v}^h_\kappa||_{\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1,h}} \leq C' L'^{d_2} ||v - v_\kappa||_{\mathcal{V}^{p_2,0}_{p_1}},$$

et l'hypothèse $v \in \mathcal{V}^{p_2}_{p_1,\mathrm{pp}} \cap \mathcal{V}^{p_2,\rho}_{p_1}$ permet de trouver v_κ vérifiant les hypothèses (H1), (H2) de la même façon que celle de la démonstration du Théorème 4.2.

□

4.3 Estimations des normes

Pour j =1, 2, $0 < h \leq 1$ et $p \geq 1$ on définit $l^p(h\mathbb{Z}^{d_j})$ comme l'ensemble des applications $\varphi_j^h : h\mathbb{Z}^{d_j} \to \mathbb{C}$ telles que

$$||\varphi_j^h||_{l^p(h\mathbb{Z}^{d_j})} = \left(\sum_{n_j \in \mathbb{Z}^{d_j}} |\varphi_j^h(hn_j)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

De plus $l^\infty(h\mathbb{Z}^{d_j})$ désigne l'ensemble des applications bornées $\varphi_j^h : h\mathbb{Z}^{d_j} \to \mathbb{C}$ et on note

$$||\varphi_j^h||_{l^\infty(h\mathbb{Z}^{d_j})} = \sup_{n_j \in \mathbb{Z}^{d_j}} |\varphi_j^h(hn_j)|.$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$ et $y_j \in \mathbb{Z}^{d_j}$ on note

$$\mathcal{C}(y) = y + [0;\ 1[^d, \qquad \mathcal{C}'(y) = y + [0;\ 2[^d,$$

$$\mathcal{C}(y_j) = y_j + [0;\ 1[^{d_j}, \qquad \mathcal{C}'(y_j) = y_j + [0;\ 2[^{d_j}.$$

Démonstration de la Proposition 4.2. On pose

$$\widetilde{w}^h(x_1, hn_2) = \int_{[0;\ h[^{d_2}} v(x_1, x_2 + hn_2)\, h^{-d_2} dx_2.$$

Alors

$$\tilde{v}^h(hn_1, hn_2) = \int_{[0;\ h[^{d_1}} \widetilde{w}^h(hn_1 + x_1, hn_2)\, h^{-d_1} dx_1,$$

et l'inégalité de Hölder assure

$$|\tilde{v}^h(hn_1, hn_2)|^{p_1} \leq \int_{[0;\ h[^{d_1}} |\widetilde{w}^h(hn_1 + x_1, hn_2)|^{p_1} h^{-d_1} dx_1.$$

Donc

$$h^{d_1} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} \chi_{\mathcal{C}(y_1)}(hn_1) |\tilde{v}^h(hn_1, hn_2)|^{p_1} \leq \int_{\mathcal{C}'(y_1)} |\widetilde{w}^h(x_1, hn_2)|^{p_1} dx_1,$$

et introduisant la notation

$$\tilde{v}_{y_1}^h(hn_1, hn_2) = \chi_{\mathcal{C}(y_1)}(hn_1) \tilde{v}^h(hn_1, hn_2),$$

$$\widetilde{w}_{y_1}^h(x_1, hn_2) = \chi_{\mathcal{C}'(y_1)}(x_1) \widetilde{w}^h(x_1, hn_2),$$

on trouve
$$h^{d_1/p_1}||\tilde{v}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||_{l^2(h\mathbb{Z}^{d_1})} \leq ||\widetilde{w}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})}.$$
Ensuite on pose $v_{y_1}(x_1, x_2) = \chi_{\mathcal{C}'(y_1)}(x_1)v(x_1, x_2)$ et on remarque que

$$||\widetilde{w}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} \leq \int_{[0;\, h[^{d_2}} ||v_{y_1}(\cdot, x_2 + hn_2)||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} h^{-d_2} dx_2$$

résulte de la convexité de la norme, donc

$$h^{d_1/p_1}||\tilde{v}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||^{p_2}_{l^2(h\mathbb{Z}^{d_1})} \leq \int_{[0;\, h[^{d_1}} ||v_{y_1}(\cdot, x_2 + hn_2)||_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} h^{-d_2} dx_2$$

et l'inégalité de Hölder assure

$$h^{\frac{d_1 p_2}{p_1}}||\tilde{v}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||^{p_2}_{l^2(h\mathbb{Z}^{d_1})} \leq \int_{[0;\, h[^{d_1}} ||v_{y_1}(\cdot, x_2 + hn_2)||^{p_2}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} h^{-d_2} dx_2.$$

Ainsi

$$h^{d_2 + \frac{d_1 p_2}{p_1}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} \chi_{\mathcal{C}(y_2)}(hn_2)||\tilde{v}^h_{y_1}(\cdot, hn_2)||^{p_2}_{l^2(h\mathbb{Z}^{d_1})} \leq \int_{\mathcal{C}'(y_2)} ||v_{y_1}(\cdot, x_2)||^{p_2}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^{d_1})} dx_2$$

et finalement
$$h^{\frac{d_2}{p_2} + \frac{d_1}{p_1}}||\chi_{\mathcal{C}(y)}\tilde{v}^h||_{l^{p_2}_{p_1}(h\mathbb{Z}^{d_1}, h\mathbb{Z}^{d_2})} \leq ||\chi_{\mathcal{C}'(y)}v||_{L^{p_2}_{p_1}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2})}$$
donne l'assertion de la proposition.

□

Lemme 4.2. *On suppose $p \geq 2$ et $0 < d/p < s$. Alors il existe une constante $C = C_{s,p,d}$ telle que*
$$||w^h \varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} \leq C h^{d/p}||w^h||_{l^p(h\mathbb{Z}^d)}\, ||(I - \Delta^h)^{s/2}\varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)}, \tag{4.18}$$
pour tout $\varphi^h \in l^2(h\mathbb{Z}^d)$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}^h$ est la transformée de Fourier définie dans la Section 4 du chapitre 1, alors
$$||\varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} = ||\mathcal{F}^h\varphi^h||_{L^2([-\pi/h;\, \pi/h[^d)}, \tag{4.19}$$
et définissant
$$\vartheta^h_s(\xi) = \left(1 + \sum_{j=1}^{d} \frac{2(1 - \cos(h\xi_j))}{h^2}\right)^s,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ on trouve

$$||(I-\Delta^h)^{s/2}\varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} = ||\vartheta_s^h \mathcal{F}^h \varphi^h||_{L^2([-\pi/h;\, \pi/h[^d)}.$$

Si $p \geq 2$ alors on peut trouver $q' \in [1; 2]$ tel que $1/q' = 1/p + 1/2$. Alors l'inégalité de Hölder donne

$$||\mathcal{F}^h\varphi^h||_{L^{q'}([-\pi/h;\, \pi/h[^d)} \leq ||\vartheta_{-s}^h||_{L^p([-\pi/h;\, \pi/h[^d)} ||\vartheta_s^h \mathcal{F}^h \varphi^h||_{L^2([-\pi/h;\, \pi/h[^d)},$$

et compte tenu du fait que $ps > d$ assure

$$\sup_{0<h\leq 1} ||\vartheta_{-s}^h||_{L^p([-\pi/h;\, \pi/h[^d)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2/4)^{-ps/2} d\xi\right)^{1/p} < \infty,$$

il existe une constante C telle que

$$||\mathcal{F}^h\varphi^h||_{L^{q'}([-\pi/h;\, \pi/h[^d)} \leq C||(I-\Delta^h)^{s/2}\varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)}. \tag{4.20}$$

Compte tenu de (4.19) et

$$||\varphi^h||_{l^\infty(h\mathbb{Z}^d)} \leq (2\pi/h)^{-d/2}||\mathcal{F}^h\varphi^h||_{L^2([-\pi/h;\, \pi/h[^d)}, \tag{4.21}$$

on peut utiliser le théorème de l'interpolation des espaces L^p pour assurer

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \Rightarrow ||\varphi^h||_{l^q(h\mathbb{Z}^d)} \leq (2\pi/h)^{d/q-d/2}||\mathcal{F}^h\varphi^h||_{L^{q'}([-\pi/h;\, \pi/h[^d)}. \tag{4.22}$$

Pour terminer on remarque que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ permet d'utiliser l'inégalité de Hölder

$$||w^h\varphi^h||_{l^2(h\mathbb{Z}^d)} \leq ||w^h||_{l^p(h\mathbb{Z}^d)}||\varphi^h||_{l^q(h\mathbb{Z}^d)},$$

ce qui termine la démonstration en vertu de (4.20) et (4.22) où on utilise $\frac{d}{2} - \frac{d}{q} = \frac{d}{p}$. $\square$

démonstration de la Proposition 4.3. On peut décomposer

$$\Delta^h = \Delta_1^h \otimes I_2 + I_1 \otimes \Delta_2^h,$$

où Δ_j^h désigne le laplacien discret sur $l^2(h\mathbb{Z}^{d_j})$ et I_j désigne l'opérateur de l'identité sur $l^2(h\mathbb{Z}^{d_j})$ pour j =1, 2. L'hypothèse $\frac{d_1}{p_1} + \frac{d_2}{p_2} < 2$ permet de trouver $s_1 > d_1/p_1$ et $s_2 > d_2/p_2$ tels que $s_1 + s_2 < 2$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$||(I_1-\Delta_1^h)^{s_1/2} \otimes (I_2-\Delta_2^h)^{s_2/2}\varphi^h||_h \leq \varepsilon||\Delta^h\varphi^h||_h + C_\varepsilon||\varphi^h||_h.$$

Pour simplifier on suppose $\operatorname{supp} \tilde{v}^h \subset [0;\ 1]^d$ et on montre

$$||\tilde{v}^h \varphi^h||_h \leq C h^{\frac{d_1}{p_1}+\frac{d_2}{p_2}} ||\tilde{v}^h||_{l^{p_2}_{p_1}(h\mathbb{Z}^{d_1},h\mathbb{Z}^{d_2})} ||(I_1 - \Delta_1^h)^{s_1/2} \otimes (I_2 - \Delta_2^h)^{s_2/2} \varphi^h||_h. \tag{4.23}$$

En introduisant

$$\varphi^h_{s_1}(\cdot, hn_2) = (I_1 - \Delta_1^h)^{s_1/2} \varphi^h(\cdot, hn_2),$$
$$\widetilde{w}^h(hn_2) = h^{d_1/p_1} ||\tilde{v}^h(\cdot, hn_2)||_{l^{p_1}(h\mathbb{Z}^{d_1})},$$

on trouve que le Lemme 4.2 avec d_1 au lieu de d et $v^h(\cdot, hn_2)$ au lieu de w^h donne

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} |(\tilde{v}^h \varphi^h)(hn_1, hn_2)|^2 \leq \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}} |\widetilde{w}^h(hn_2) \varphi^h_{s_1}(hn_1, hn_2)|^2. \tag{4.24}$$

En utilisant le Lemme 4.2 avec d_2 au lieu de d et $\widetilde{w}^h$ au lieu de w^h on trouve

$$\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}^{d_2}} |\widetilde{w}^h(hn_2) \varphi^h_{s_1}(hn_1, hn_2)|^2 \leq ||\widetilde{w}^h||^2_{l^{p_2}(h\mathbb{Z}^{d_2})} |\varphi^h_{s_1,s_2}(hn_1, hn_2)|^2 \tag{4.25}$$

avec

$$\varphi^h_{s_1,s_2}(hn_1, \cdot) = (I_2 - \Delta_2^h)^{s_2/2} \varphi^h(hn_1, \cdot).$$

Ainsi (4.24) et la sommation des inégalités (4.25) par rapport à $n_1 \in \mathbb{Z}^{d_1}$ donnent

$$||\tilde{v}^h \varphi^h||_h \leq C h^{\frac{d_1}{p_1}+\frac{d_2}{p_2}} ||\widetilde{w}^h||_{l^{p_2}_{p_1}(h\mathbb{Z}^{d_2})} ||\varphi^h_{s_1,s_2}||_h,$$

c'est-à-dire on obtient (4.23).

□

Démonstration de la Proposition 4.1. On observe qu'il s'agit de la version continue de l'assertion de la Proposition 4.3 et il suffit de suivre le raisonnement analogue en utilisant la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ au lieu de $\mathcal{F}^h$ et les laplaciens sur $\mathbb{R}^{d_j}$ au lieu de Δ^h_j.

□

Chapitre 5

Problème à N corps

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à un modèle mathématique d'un système quantique dans un milieu non-homogène avec des propriétés d'homogénéité en moyenne spatiale permettant la définition d'une limite thermodynamique qui compare le volume avec le nombre des niveaux d'énergie en dessous d'une valeur donnée pour le système restreint à une région bornée. On désigne par H (respectivement H^0) l'hamiltonien du système avec interactions (respectivement sans interactions). On suppose que l'hamiltonien du système est un opérateur de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la forme

$$H = H^0 + V, \tag{5.1}$$

où V est l'opérateur de multiplication par le potentiel d'interactions entre les particules du système.

Un cas particulier de N particules sans interactions dans un champ extérieur périodique ou presque périodique est donné par l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ de la forme

$$(H^0\varphi)(x_1, ..., x_N) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \Delta_{x_j}\varphi(x_1, ..., x_N) + v_j(x_j)\varphi(x_1, ..., x_N), \tag{5.2}$$

où $m_j > 0$ est la masse de la particule numéro j, $x_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, x_j^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$ est sa position, $\Delta_{x_j} = \partial^2_{x_j^{(1)}} + +\partial^2_{x_j^{(2)}} + \partial^2_{x_j^{(3)}}$ et le potentiel extérieur $v_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est périodique ou presque périodique pour $j = 1, ..., N$.

On pose $\mathcal{A} = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : 1 \le j < k \le N\}$ et

$$\pi^{(j,k)}(x_1, ..., x_N) = x_j - x_k \text{ pour } (j,k) \in \mathcal{A}.$$

Alors, on suppose que V est donné par la formule

$$(V\varphi)(x) = \sum_{a\in\mathcal{A}} v_a(\pi^a x)\varphi(x) \tag{5.3}$$

où le potentiel de l'interaction entre les particules numéro j et k s'exprime par la fonction $v_{(j,k)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui décroît rapidement à l'infini.

Pour décrire le cas général on suppose que l'espace de configuration X est un espace euclidien de dimension finie, $||\cdot||$ est la norme de $L^2(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L^2(X))$ est l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur $L^2(X)$ et $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(L^2(X))$ l'idéal des opérateurs à trace sur $L^2(X)$. On considère

$$H^0 = -\Delta_X + V_0, \tag{5.4}$$

où Δ_X désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X et V_0 est un opérateur de multiplication par la fonction réelle $v_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la borne relative nulle par rapport à Δ_X, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on ait

$$||V_0\varphi|| \leq \varepsilon||\Delta_X\varphi|| + C_\varepsilon||\varphi|| \tag{5.5}$$

où $(V_0\varphi)(x) = v_0(x)\varphi(x)$ pour $x \in X$.

On peut remarquer que l'opérateur (5.2) s'écrit sous la forme (5.4) si $X = (\mathbb{R}^{3N}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle(x_1,\ldots,x_N),(y_1,\ldots,y_N)\rangle = \sum_{j=1}^N 2m_j x_j\cdot y_j$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on désigne par $E_{]-\infty,\lambda]}(H^0)$ le projecteur spectral de H^0 sur $]-\infty,\lambda]$ et $\chi_{B(y,r)} \in \mathcal{B}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de la boule $B(y,r) = \{x \in X : |x-y| < r\}$ pour $r > 0$, $y \in X$. La relation de base entre le volume et le nombre des niveaux d'énergie est donnée par

Proposition 5.1. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors sous l'hypothèse faite sur V_0 on a*

$$\sup_{y\in X} ||\chi_{B(y,1)}E_{]-\infty,\lambda]}(H^0)||_{\mathcal{B}_1} < \infty \tag{5.6}$$

et par conséquent il existe une constante $C_\lambda > 0$ telle que pour tout $L \geq 1$ on ait

$$\nu_L^{H^0}(\lambda) = \operatorname{tr}\chi_{B(y,L)}E_{]-\infty,\lambda]}(H^0) \leq C_\lambda L^{\dim X}. \tag{5.7}$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement la traduction de la démonstration du Corollaire 3.2 du Chapitre 3.

Pour décrire V on considère un ensemble fini $\mathcal{A}$ et $(X_a)_{a\in\mathcal{A}}$ une famille finie des sous-espaces vectoriels $X_a \subset X$ tels que $X_a \neq X$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Soit $\pi_a : X \to X_a$ la projection orthogonale sur X_a. On pose $\pi^a = I - \pi_a$, $X^a = \operatorname{Ker}\pi_a$. Alors π^a est la projection orthogonale sur X^a qui est le supplémentaire orthogonal de X_a dans X. On considère

$$V = \sum_{a \in \mathcal{A}} V_a, \tag{5.8}$$

où V_a est un opérateur de multiplication par la fonction réelle $v_a \in L^2_{\text{loc}}(X)$ avec la borne relative nulle par rapport à Δ_X, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on ait

$$||V_a \varphi|| \leq \varepsilon ||\Delta_X \varphi|| + C_\varepsilon ||\varphi|| \tag{5.9}$$

où $(V_a \varphi)(x) = v_a(x)\varphi(x)$ pour $\varphi \in C_0^\infty(X)$. De plus on suppose que pour tout $a \in \mathcal{A}$ on peut trouver C_a, $\rho_a > 0$ tels que l'on ait

$$||\chi_{B(y,1)} V_a (I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}} \leq C_a (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a} \tag{5.10}$$

pour tout $y \in X$.

Dans la suite $H = H^0 + V$ avec H^0 vérifiant (5.4-5.5) et V vérifiant (5.8-5.10). Alors l'assertion de la Proposition 5.1 reste vraie pour H, c'est-à-dire pour une certaine constante C_λ on a

$$\nu_L^H(\lambda) = \operatorname{tr} \chi_{B(y,L)} E_{]-\infty,\lambda]}(H) \leq C_\lambda L^{\dim X}. \tag{5.11}$$

Dans la suite on note

$$d = \dim X, \qquad d_1 = \max\{\dim X_a : a \in \mathcal{A}\} \tag{5.12}$$

et on énonce le résultat suivant :

Proposition 5.2. *Soit $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ et*

$$H' = H^0 + \sum_{a \in \mathcal{A}'} V_a, \tag{5.13}$$

avec la convention $H' = H^0$ si $\mathcal{A}' = \emptyset$. Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\rho' = \min\{\rho_a : a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'\}. \tag{5.14}$$

(a) Si $\rho_a = d - d_a \Rightarrow d_a < d_1$ pour tout $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ alors

$$\operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H')) = O(L^{d_1} + L^{d-\rho'}). \tag{5.15}$$

(b) S'il existe $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ tel que $\rho_a = d - d_a = d - d_1$ alors

$$\operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H')) = O(L^{d_1} \ln L + L^{d-\rho'}). \tag{5.16}$$

Utilisant l'assertion de la Proposition 5.2 avec $H' = H^0$ on voit que pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) L^{-d}(d\nu_L^H(\lambda) - d\nu_L^{H^0}(\lambda)) = \operatorname{tr} L^{-d}\chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H')) \to 0$$

quand $L \to \infty$. Ceci correspond au résultat du travail de F. Klopp, H. Zenk [44] décrivant l'équivalence de l'existence de la densité d'états standards pour H et pour H^0, c'est-à-dire l'existence de la limite faible des mesures $L^{-d}d\nu_L^H$ et $L^{-d}d\nu_L^{H^0}$ quand $L \to \infty$, ainsi que l'égalité de ces limites si elles existent.

Par conséquent, des informations concernant le spectre de H peuvent être obtenues uniquement par une étude plus fine du comportement des mesures $d\nu_L^H$ quand $L \to \infty$. Pour cela on introduit

$$\mathcal{A}_1 = \{a \in \mathcal{A} :\ \dim X_a = d_1\}, \tag{5.17}$$

$$H_a = H^0 + V_a, \tag{5.18}$$

où $a \in \mathcal{A}_1$ et pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $L \geq 1$, on définit

$$N_L(f, H_a) = \frac{1}{\gamma_{d_1} L^{d_1}} \operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H_a) - f(H^0)), \tag{5.19}$$

où γ_m désigne le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^m$.

Notre résultat principal est

Théorème 5.1. *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On suppose que $\rho_a > d - d_1$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et la limite*

$$N(f, H_a) = \lim_{L\to\infty} N_L(f, H_a) \tag{5.20}$$

existe pour tout $a \in \mathcal{A}_1$. Alors la limite

$$N(f, H) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\gamma_{d_1} L^{d_1}} \operatorname{tr} \chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H^0)) \tag{5.21}$$

existe et on a

$$N(f, H) = \sum_{a \in \mathcal{A}_1} N(f, H_a). \tag{5.22}$$

On en déduit

Corollaire 5.1. *On suppose que $\rho_a > d - d_1$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $f \to N(f, H_a)$ définit une distribution $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathcal{A}_1$. Alors*

(a) La formule $f \to N(f, H)$ définit une distribution $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(b) La restriction de la distribution $N(\cdot, H_a)$ à $\mathbb{R}\setminus\sigma(H^0)$ est une mesure positive dont le support vérifie

$$\operatorname{supp} N(\cdot, H_a) \setminus \sigma(H^0) \subset \sigma(H_a) \setminus \sigma(H^0)$$

et la restriction de la distribution $N(\cdot, H)$ à $\mathbb{R} \setminus \sigma(H^0)$ est une mesure positive dont le support vérifie

$$\operatorname{supp} N(\cdot, H) \setminus \sigma(H^0) \subset \sigma(H) \setminus \sigma(H^0).$$

(c) La formule (5.22) *assure*

$$\operatorname{supp} N(\cdot, H) \setminus \sigma(H^0) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}_1} \operatorname{supp} N(\cdot, H_a) \setminus \sigma(H^0)$$

et compte tenu de (b) on a

$$\bigcup_{a\in\mathcal{A}_1} \operatorname{supp} N(\cdot, H_a) \setminus \sigma(H^0) \subset \sigma(H) \setminus \sigma(H^0).$$

Corollaire 5.2. *On suppose que $\rho_a > d - d_1$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $f \to N(f, H_a)$ définit une distribution $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que*

$$\operatorname{supp} N(\cdot, H_a) \setminus \sigma(H^0) = \sigma(H_a) \setminus \sigma(H^0)$$

pour tout $a \in \mathcal{A}_1$. Alors

$$\bigcup_{a\in\mathcal{A}_1} \sigma(H_a) \setminus \sigma(H^0) \subset \sigma(H) \setminus \sigma(H^0).$$

Pour commenter l'hypothèse de l'existence de $N(f, H_a)$ on peut se servir d'une isométrie $j_a : \mathbb{R}^d \to X$ donnée par

$$j_a(x^{(1)}, ..., x^{(d)}) = \sum_{j=1}^{d} x^{(d)} \mathrm{e}_j,$$

où $(\mathrm{e}_j)_{j=1,\dots,d}$ est une base orthonormée de X telle que $\mathrm{e}_j \in X_a$ pour $j = 1, \dots, d_1$. On a alors

Proposition 5.3. *On suppose que pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a $\rho_a > d - d_1$ et pour tout $a \in \mathcal{A}_1$ on a $v_a \circ j_a \in \mathcal{V}^0_{\mathrm{pp}}$ et $v_0 \circ j_a \in CAP(\mathbb{R}^d)$ ou bien $S^pAP(\mathbb{R}^d)$ avec $p \geq 2$, $p > d/2$, en notations du Chapitre 4. Alors*

(a) Pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a l'existence de la limite (5.20) *et*

$$N(f, H_a) = (2L)^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_{[-L;\, L]^d}(f(-\Delta + \widetilde{V}_{0,a} + \widetilde{V}_a) - f(-\Delta + \widetilde{V}_{0,a})),$$

où pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a défini

$$(\widetilde{V}_a\varphi)(x) = v_a(j_a(x))\varphi(x), \qquad (\widetilde{V}_{0,a}\varphi)(x) = v_0(j_a(x))\varphi(x).$$

(b) Si $V_0 = 0$, alors on a $\operatorname{supp} N(\cdot, H_a) \setminus \sigma(H^0) = \sigma(H_a) \setminus \sigma(H^0)$.

5.2 Démonstration de la Proposition 5.2

Dans la suite, X est muni d'une base orthonormée fixée $(\mathrm{e}_j)_{j=1,\dots,d}$, on identifie $x = x^{(1)}\mathrm{e}_1 + \cdots + x^{(d)}\mathrm{e}_d$ avec $(x^{(1)}, \dots x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ et pour $y \in X$ on écrit $y \in \mathbb{Z}^d$ si et seulement si $y = y^{(1)}\mathrm{e}_1 + \cdots + y^{(d)}\mathrm{e}_d$ avec $y^{(1)}, \dots, y^{(d)} \in \mathbb{Z}$. Enfin χ_y est l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique du cube $\mathcal{C}(y)$ comme dans le Chapitre 1. Dans toute la suite, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est fixée.

Lemme 5.1. *Si H et H' vérifient les hypothèses de la Proposition 5.2 alors*

$$||\chi_y\left(f(H) - f(H')\right)||_{\mathcal{B}_1} \leq C \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'} (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a}. \tag{5.23}$$

Démonstration. En vertu du Corollaire 3.2 du Chapitre 3 on a

$$||\chi_y\left(f(H) - f(H')\right)||_{\mathcal{B}_1} \leq C_N \Xi_N(y)$$

avec

$$\Xi_N(y) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}} \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'} V_a (I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}}.$$

Ainsi on peut estimer

$$\Xi_N(y) \leq \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'} \Xi_N^a(y),$$

où

$$\Xi_N^a(y) = \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} ||\chi_{\tilde{y}} V_a (I - \Delta)^{-1}||_{\mathcal{B}}.$$

En vertu de l'hypothèse (5.10) on a

$$\Xi_N^a(y) \leq C \sum_{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{-N} (1 + |\pi^a \tilde{y}|)^{-\rho_a}$$

et $(1 + |y - \tilde{y}|)(1 + |\pi^a \tilde{y}|) \geq 1 + |\pi^a y|$ permet d'estimer $\Xi_N^a(y)$ par

$$C(1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (1 + |y - \tilde{y}|)^{\rho_a - N} = C'(1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a}$$

si on choisit $N > d + \rho_a$. □

Lemme 5.2. *Pour $a \in \mathcal{A}$ on pose $d_a = \dim X_a$ et*

$$\Phi_a(L) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap B(0,2L)} (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a}. \tag{5.24}$$

(a) Si $\rho_a + d_a > d$ alors $\Phi_a(L) = O(L^{d_a})$.
(b) Si $\rho_a + d_a = d$ alors $\Phi_a(L) = O(L^{d_a} \ln L)$.
(c) Si $\rho_a + d_a < d$ alors $\Phi_a(L) = O(L^{d-\rho_a})$.

Démonstration. Dans la suite on suppose que $L \geq L_0$ où L_0 est fixé en fonction de la dimension d. Alors on peut majorer

$$\Phi_a(L) \leq C \int_{B(0,3L)} (1 + |\pi^a x|)^{-\rho_a} dx.$$

Ensuite, on observe que $B(0, 3L) \subset B_a(3L) + B^a(3L)$ où

$$B_a(r) = B(0, r) \cap X_a, \quad B^a(r) = B(0, r) \cap X^a$$

et compte tenu du fait que $\operatorname{vol} B_a(3L) = \gamma_{d_a}(3L)^{d_a}$ on trouve

$$\Phi_a(L) \leq C' L^{d_a} \Phi_{d-d_a,\rho_a}(L)$$

avec

$$\Phi_{m,\rho}(L) = \int_{\{z\in\mathbb{R}^m:\, |z|\leq 3L\}} (1 + |z|)^{-\rho} dz = c_d \int_0^{3L} s^{m-1}(1 + s)^{-\rho} ds,$$

donc on a

$$\begin{cases} \rho > m \Rightarrow \Phi_{m,\rho}(L) = O(1), \\ \rho = m \Rightarrow \Phi_{m,\rho}(L) = O(\ln L), \\ \rho < m \Rightarrow \Phi_{m,\rho}(L) = O(L^{m-\rho}) \end{cases}$$

et les assertions (a), (b), (c) en résultent. □

Démonstration de la Proposition 5.2. Si $L \geq L_0$ alors on peut écrire

$$\chi_{B(0,L)} = \chi_{B(0,L)} \sum_{y\in\mathbb{Z}^d\cap B(0,2L)} \chi_y$$

et le Lemme 5.1 permet d'estimer $||\chi_{B(0,L)}(f(H) - f(H'))||_{\mathcal{B}_1}$ par

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^d\cap B(0,2L)} ||\chi_y \left(f(H) - f(H')\right)||_{\mathcal{B}_1} \leq \sum_{a\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'} \Phi_a(L),$$

où $\Phi_a(L)$ est défini dans le Lemme 5.2.

Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ tel que $\rho_a < d - d_a$. Alors le Lemme 5.2(c) assure

$$\Phi_a(L) \leq CL^{d-\rho_a} \leq CL^{d-\rho'}.$$

Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ tel que $\rho_a > d - d_a$. Alors le Lemme 5.2(a) assure

$$\Phi_a(L) \leq CL^{d_a} \leq CL^{d_1}.$$

Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ tel que $\rho_a = d - d_a$ et $d_a < d_1$. Alors le Lemme 5.2(b) assure

$$\Phi_a(L) \leq CL^{d_a} \ln L \leq CL^{d_1},$$

ce qui termine la démonstration de l'assertion (a).

Pour obtenir l'assertion (b) il reste à remarquer que

$$\rho_a = d - d_a = d - d_1 \Rightarrow \Phi_a(L) \leq CL^{d_1} \ln L$$

résulte du Lemme 5.2(b).

□

5.3 Démonstration du Théorème 5.1

Dans cette section on suppose que toutes les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites. Pour commencer on remarque qu'au lieu de prouver l'assertion du Théorème 5.1 pour l'opérateur H, il suffit de la prouver pour l'opérateur

$$H' = H^0 + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} V_a. \tag{5.25}$$

En effet, on a

Lemme 5.3. *Si H' est donné par* (5.25) *et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors*

$$\lim_{L \to \infty} L^{-d_1} \operatorname{tr} \chi_{B(0,L)} \left(f(H) - f(H') \right) = 0. \tag{5.26}$$

Démonstration. En vertu du Lemme 5.1 on a

$$||\chi_{B(0,L)} \left(f(H) - f(H') \right) ||_{\mathcal{B}_1} \leq C \sum_{a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1} \Phi_a(L)$$

avec $\Phi_a(L)$ du Lemme 5.2 et la démonstration s'achève en utilisant les estimations du Lemme 5.2 pour $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$. □

La suite de la démonstration utilise une partition de la boule $B(0, L)$ en $2 + \operatorname{card} \mathcal{A}_1$ parties deux à deux disjointes. Si $Y \subset X$ et $r > 0$ alors on note

$$B(Y, r) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, Y) < r\} = Y + B(0, r).$$

On fixe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et on définit

$$X_+^\varepsilon(L) = B(0,L) \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{A}_1} B(X_a, 2L^\varepsilon), \tag{5.27}$$

$$X_a^\varepsilon(L) = B(0,L) \cap B(X_a, 2L^\varepsilon) \setminus \bigcup_{a' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{a\}} B(X_{a'}, 2L^\varepsilon) \tag{5.28}$$

pour tout $a \in \mathcal{A}_1$ et

$$X_-^\varepsilon(L) = X_+^\varepsilon(L) \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{A}_1} X_a^\varepsilon(L). \tag{5.29}$$

Lemme 5.4. *Pour $a \in \mathcal{A}_1$ on pose $\Gamma_a^\varepsilon(L) = \mathbb{Z}^d \cap B(0,2L) \setminus B(X_a, L^\varepsilon)$ et*

$$\Phi_a^\varepsilon(L) = \sum_{y \in \Gamma_a^\varepsilon(L)} (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_a}. \tag{5.30}$$

Soit $\rho_1 = \min_{a \in \mathcal{A}_1} \rho_a$. Si $0 < \rho_1 \varepsilon < \rho_1 + d_1 - d$ alors $\Phi_a^\varepsilon(L) = O(L^{d_1 - \varepsilon\rho_1})$.

Démonstration. Si $y \in \Gamma_a^\varepsilon(L)$ alors $|\pi^a y| \geq L^\varepsilon$ et par conséquent

$$(1 + |\pi^a y|)^{-\rho_1} \leq (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_1\varepsilon - (1-\varepsilon)\rho_1} \leq L^{-\rho_1\varepsilon}(1 + |\pi^a y|)^{-(1-\varepsilon)\rho_1}.$$

Il reste à remarque que l'hypothèse $\rho_1 - \rho_1\varepsilon > d - d_1$ permet d'estimer

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d \cap B(0,2L)} (1 + |\pi^a y|)^{-\rho_1 + \rho_1\varepsilon} = O(L^{d_1})$$

comme dans la démonstration du Lemme 5.1 . □

Lemme 5.5. *On définit $\chi_{+,L}^\varepsilon \in \mathcal{B}$ par la formule*

$$(\chi_{+,L}^\varepsilon \varphi)(x) = \chi_{X_+^\varepsilon(L)}(x)\varphi(x) \tag{5.31}$$

pour $\varphi \in L^2(X)$ et on pose

$$G_{+,L}^\varepsilon = \chi_{+,L}^\varepsilon \left(f(H') - f(H^0) \right). \tag{5.32}$$

Alors $||G_{+,L}^\varepsilon||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1 - \varepsilon\rho_1})$.

Démonstration. Compte tenu du fait que $\chi_{+,L}^\varepsilon \chi_y \neq 0 \Rightarrow y \in \bigcap_{a \in \mathcal{A}_1} \Gamma_a^\varepsilon(L)$, on peut estimer

$$||G_{+,L}^\varepsilon||_{\mathcal{B}_1} \leq \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} ||\chi_y G_{+,L}^\varepsilon||_{\mathcal{B}_1} \leq C \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \Phi_a^\varepsilon(L)$$

avec $\Phi_a^\varepsilon(L)$ du Lemme 5.4, donc l'assertion énoncée résulte de l'assertion du Lemme 5.4. □

Lemme 5.6. *Pour $a \in \mathcal{A}_1$ on pose*

$$G^{\varepsilon}_{a,L} = \chi^{\varepsilon}_{a,L} \left(f(H') - f(H_a) \right), \tag{5.33}$$

où $\chi^{\varepsilon}_{a,L} \in \mathcal{B}$ est défini pour $\varphi \in L^2(X)$ par la formule

$$(\chi^{\varepsilon}_{a,L}\varphi)(x) = \chi_{X^{\varepsilon}_a(L)}(x)\varphi(x). \tag{5.34}$$

Alors $||G^{\varepsilon}_{a,L}||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1 - \varepsilon\rho_1})$.

Démonstration. Compte tenu du fait que $\chi^{\varepsilon}_{a,L}\chi_y \neq 0 \Rightarrow y \in \bigcup_{a' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{a\}} \Gamma^{\varepsilon}_a(L)$, on peut estimer

$$||G^{\varepsilon}_{a,L}||_{\mathcal{B}_1} \leq \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} ||\chi_y G^{\varepsilon}_{a,L}||_{\mathcal{B}_1} \leq C \sum_{a' \in \mathcal{A}_1 \setminus \{a\}} \Phi^{\varepsilon}_{a'}(L),$$

avec $\Phi^{\varepsilon}_{a'}(L)$ du Lemme 5.4, donc l'assertion énoncée résulte de l'assertion du Lemme 5.4. □

Démonstration du Théorème 5.1. Compte tenu du Lemme 5.3 il suffit de montrer

$$\lim_{L \to \infty} L^{-d_1} \mathrm{tr}\, G_L = 0$$

avec

$$G_L = \chi_L \left(f(H') - f(H^0) - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \left((f(H_a) - f(H^0) \right) \right).$$

Soit $\chi^{\varepsilon}_{-,L} \in \mathcal{B}$ défini par la formule

$$(\chi^{\varepsilon}_{-,L}\varphi)(x) = \chi_{X^{\varepsilon}_{-}(L)}(x)\varphi(x),$$

pour $\varphi \in L^2(X)$. On peut alors écrire la décomposition

$$\chi_L = \chi^{\varepsilon}_{+,L} + \chi^{\varepsilon}_{-,L} + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} \chi^{\varepsilon}_{+,L}$$

et exprimer

$$G_L = G^{\varepsilon}_{+,L} + G^{\varepsilon}_{-,L} + \sum_{a \in \mathcal{A}_1} (G^{\varepsilon}_{a,L} + \tilde{G}^{\varepsilon}_{a,L}),$$

où $G^{\varepsilon}_{+,L}$ sont comme dans le Lemme 5.5, $G^{\varepsilon}_{a,L}$ sont comme dans le Lemme 5.6,

$$\tilde{G}^{\varepsilon}_{a,L} = \chi^{\varepsilon}_{+,L} \left(f(H_a) - f(H^0) \right),$$

$$G^{\varepsilon}_{-,L} = \chi^{\varepsilon}_{-,L} \left(f(H) - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} f(H_a) \right).$$

On observe que $||G^{\varepsilon}_{+,L}||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1-\varepsilon\rho_1})$ en vertu du Lemme 5.5 et il est possible de remplacer H' par H_a dans le raisonnement, donc on a aussi $||\tilde{G}^{\varepsilon}_{a,L}||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1-\varepsilon\rho_1})$. Ensuite $||G^{\varepsilon}_{a,L}||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1-\varepsilon\rho_1})$ est assuré par le Lemme 5.6 et pour terminer la démonstration il reste à prouver l'existence de $\kappa > 0$ tel que

$$||G^{\varepsilon}_{-,L}||_{\mathcal{B}_1} = O(L^{d_1-\kappa}).$$

Pour obtenir cette dernière estimation on écrit

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y \chi^{\varepsilon}_{-,L} f(H)||_{\mathcal{B}_1} \leq C \operatorname{card} \Gamma^{\varepsilon}(L),$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_1} \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} ||\chi_y \chi^{\varepsilon}_{-,L} f(H_a)||_{\mathcal{B}_1} \leq C \operatorname{card} \Gamma^{\varepsilon}(L),$$

où $\Gamma^{\varepsilon}(L) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \ \chi_y \chi^{\varepsilon}_{-,L} \neq 0\}$. Cependant

$$\Gamma^{\varepsilon}(L) \subset \cup_{a\in\mathcal{A}_1} \cup_{a'\in\mathcal{A}_1\setminus\{a\}} \Gamma_{a,a'}(L)$$

avec $\Gamma^{\varepsilon}_{a,a'}(L) = \mathbb{Z}^d \cap B(0, 3L) \cap B(X_a, 3L^{\varepsilon}) \cap B(X_{a'}, 3L^{\varepsilon})$. Mais

$$B(X_a, 3L^{\varepsilon}) \cap B(X_{a'}, 3L^{\varepsilon}) = B(X_{a,a'}, 3L^{\varepsilon}),$$

où $X_{a,a'} = X_a \cap X_{a'}$. On désigne par $X^{a,a'}$ le supplémentaire orthogonal de $X_{a,a'}$ dans X. Alors

$$\operatorname{card} \Gamma^{\varepsilon}_{a,a'}(L) \leq \operatorname{vol}\left(X_{a,a'} \cap B(0, 4L) + X^{a,a'} \cap B(0, 4L^{\varepsilon})\right)$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{vol} X_{a,a'} \cap B(0, 4L) &= \gamma_{d(a,a')} (4L)^{d(a,a')}, \\ \operatorname{vol} X^{a,a'} \cap B(0, 4L^{\varepsilon}) &= \gamma_{d-d(a,a')} (4L^{\varepsilon})^{d-d(a,a')}, \end{aligned}$$

où $d(a, a') = \dim X_{a,a'}$. Ainsi

$$\operatorname{card} \Gamma^{\varepsilon}_{a,a'}(L) \leq C L^{d(a,a')+\varepsilon(d-d(a,a'))} = L^{\varepsilon d+(1-\varepsilon)d(a,a')}$$

et compte tenu de $d(a, a') \leq d_1 - 1$ on obtient

$$\operatorname{card} \Gamma^{\varepsilon}_{a,a'}(L) \leq C L^{\varepsilon d+(1-\varepsilon)(d_1-1)} = C L^{d_1-\kappa}$$

avec $\kappa = 1 - \varepsilon(d + 1 - d_1) > 0$ si $\varepsilon < 1/d$.

□

Bibliographie

[1] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians,* Birkhauser Verlag, Progress in Mathematics. vol 135 (1996).

[2] J. Bellisard, E. Scoppola, *The density of states for almost Schrödinger operators and the frequency module periodic* , Com. Math. Phy.(85).(2). (1982).

[3] A. Boutet de Monvel, P. Stollmann, *Dynamical localization for continuum random surface models,* Arch. Math. 80.(2003) 87-97.

[4] A. Boutet de Monvel, P. Stollmann, G. Stolz, *Absence of continuous random spectral types for certain nonstationary random models,* Ann. Henri Poincare(6).(2005) 309-326.

[5] A. Boutet de Monvel, A. Surkova, , *Localisation des états de surface pour une classe d'opérateurs de Schrödinger discrets à potentiels de surface quasi périodiques,* Helv. Phy. Acta72(5).(1998) 459-490.

[6] J. Avron, B. Simon, *Almost periodic Schrödinger operators . The integrated density of states,* Duke Math Journal 50 (1983) 369-391.

[7] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral theory of random Schrödinger operators,* Birkhauser, Boston Inc., Boston, (1990).

[8] A. Chahrour, *Densité d'états surfaciques et fonction de déplacement spectral pour un opérateur de Schrödinger surfacique ergodique,* Helv. Phys. Acta 72, (1999)93-122.

[9] A. Chahrour, *On the spetrum of Schrödinger operator with periodic surface potential,* Lett. Math. phys 52,(2000) 197-209.

[10] A. Chahrour, J. Sahbani *On the spectral and scattering theory of the Schrödinger operator with surface potential,* Rev. Math. Phys 12,(2000) 561-573.

[11] J.M. Combes, *Properties of some connected kernels in multiparticle systems,* Jour. Math. Phys 12,(1971) 1719-1731.

[12] J.M. Combes, L. Thomas, *Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators,* Com. Math. Phys 34,(1973) 251-270.

[13] J.M.Combes, P.D Hislop, E. Mourre, *Spectral averaging, perturbation of singular spectra, and localization ,* Trans. Amer. Math. Soc 348,(1996) 4883-4884.

[14] J.M.Combes, P.D Hislop, S.Nakamura , *The L^p-theory of the spectral shift function, the Wegner estimate, and the integrated density of states for some random operators,* Comm. Math. Phy 218 (2001) 113-130.

[15] J.M.Combes, P.D Hislop, F. Klopp , *Regularity properties for the density of states of random Schrödinger operators,* Contemporary Mathematics, Vol. 339, pp. 2003) 15-25 (2003).

[16] J.M.Combes, P.D Hislop, F. Klopp , *An optimal Wegner estimate and its application to the global continuity of the integrated density of states for random Schrödinger operators,* Duke. Math.J.140 (2007) 468-498.

[17] E.B. Davies, *Properties of the Green's function of some Schrödinger operators,* J.London Math.Soc.7(1974) 483-491.

[18] E.B. Davies, *Heat kernels and spectral theory,* Combridge University press,1995.

[19] H. English, W. Kirsch, M. Schröder, B. Simon, *Density of surface states in discrete models,* Phys. Rev. Lett. Volume 61 (1988) 1261-1262.

[20] H. English, W. Kirsch, M. Shröder, B. Simon, *Random Hamiltonians ergodic in all but One direction,* Comm.Math.Phys ,128(1990) 613-625.

[21] W. Fischer , T. Hupfer,H. Leschke, P. Mûller, *Existence of the density of states for multi-dimensional continuum Schrödinger operators with Gaussian random potentials,* Comm. Math. Phys ,190(1997) 133-143.

[22] F. Germinet, A. Klein, *Operator kernel estimates for functions of generalized Schrödinger operators,* Proc.Amer.Soc.131 (2003) 911-920.

[23] B. Helffer, J. Sjôstrand, *On diamagnetism and the de Haas-Van Alphen effect,* Ann.Inst. Henri Poincaré sér. Phys. Théor. (1990)52, 303 .

[24] J.Herczynski, *Schrödinger operators with almost periodic potentials in non-separable Hilbert spaces,* Banach Center Publ (1987). vol.19. PWN, Warsaw.

[25] J.Herczynski, *Finite-difference approximation of almost periodic Schrödinger operators,* Nonlinear Anlysis (1995). vol25. n 08. 821-829.

[26] J.Herczynski, L. Zielinski, *On discret approximation of almost periodic Schrödinger operators,* preprint.

[27] V.Jaksic, Y. Last, *Surface states and spectra,* Comm.Math.Phy.,218,(2001), 459-477.

[28] V.Jaksic, S. Molchanov, *On the surface spectrum in dimension two,* Helv.phy. Acta.,71(6),(1998), 629-657.

[29] V.Jaksic, S. Molchanov, *localization of surface spectra,* Comm. Math. Phy.,208(1),(1999), 153-172.

[30] V.Jaksic, S. Molchanov, L. Pastur, *On the propagation properties of surface waves, in wave propagation in complex media,* 143-154, IMA Vol. Math. Appl.,96, Springer, New York,1998.

[31] R.Johnson, J.Moser, *The rotation number for almost periodic potentials,* Comm. Math. Phys (1982) 403-437.

[32] B A.Khoruzhenko, L. Pastur, *The localization of surfac states : an exactly solvable model,* Phy.Rap (1997) 109-126.

[33] W. Kirsch, *A Wegner estimte for multi-particle random Hamiltonians,* Preprint arxiv 2007.

[34] W. Kirsch, *An invitation to random Schrödinger operator,* Priprint arxiv 2007.

[35] W. Kirsch, F. Klopp, *The band-edge of the density of surfacic states,* Mathematical Physics, Analysis and Geometry, vol 8,(2006) pp. 315 - 360 (2006).

[36] W. Kirsch, F. Martinelli, *On the density of states of Schrödinger operators with a random potential,* J. Phys. A : Math. Gen .15 (1982) 2139-2156.

[37] W. Kirsch, B.Metzger. , *The integrated density of states for random Schrödinger operators,* (2006) Arxiv :math-ph0608066v1.

[38] W. Kirsch, S. Warzel, *Anderson localization and Lifshits tails for random surface potentials,* J. Funct. Anal 230,(2006) 222-250.

[39] F. Klopp, *An asymptotic expansion for the density of states of a Random Schrödinger operators with Bernoulli disorder,* random Operator and Stoch Equ vol 3, N4, (1995) 315-331.

[40] F. Klopp, *A short introduction to the theory of random Schrödinger operators,* colloquium Francais-Vietnamaise de mathématique à Chi Minh City mars 1997.

[41] F. Klopp, *Internal Lifshits tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators,* Duke Math. J.98, (1999) 335-396.

[42] F. Klopp, *Lifshitz tails for random perturbations of periodic Schrödinger operators,* Proc.Indian Acad. Sci.(Math. Sci.)112 (2002) 147-162.

[43] F. Klopp, N. Filonov, *Absolute continuity of the spectrum of a Schrödinger operator with a potential which is periodic in some directions and decays in others ,* Documenta Mathematica, vol. 9, (2004)pp. 107–121 . Erratum dans le même tome.

[44] F. Klopp, H . Zenk, *The integrated density of states for an interacting multielectron homogeneous model,* preprint.

[45] V. Kostrykin, R. Schrader, *Scattering theory approach to random Schrödinger operators in one dimension ,* Rev. Math. Phys. 11, (1999) 187-242.

[46] V. Kostrykin, R. Schrader, *The density of states and the spectral shift density of random Schrödinger operators ,* Rev. Math. Phys. 12, (2000) 807-84.

[47] V. Kostrykin, R. Schrader, *Regularity of the surface density of states ,* Journal of Functional Anal 187 (2001) 227-246 .

[48] M.G. Krein, *On the perturbation determinant and trace formula for unitary selfadjoint operators ,* Soviet. Mat.Dokl, 3 (1962).

[49] I.M. Lifshits, *On a problem in perturbation theory,* Uspekhi Mat. Nauk, 7, 1, (47) (1952), 171-180.

[50] S. Molchanov, *The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator,* Comm.Math.Phy.78(1981) 429-446.

[51] S. Molchanov, B. Vainberg *Schrödinger operators with matrix potentials, transition from the absotutely continous to the singular spectrum,* J. Funct. Anal 215(1) (2004)111-129.

[52] S. Nakumura, *A Remark on the Dirichlet-Neumann Decoupling and the integrated density of states,* Journal. Functional Analysis 197 (2001)136-152.

[53] L.Pastur, *Spectra of random selfadjoint operators,* Russian Math. Surv28, (1973) 1-67.

[54] L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost periodic operators,* Springer Verlag, Heidelberg (1992).

[55] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical physics,* I : Functional Analysis II : Fourier Analysis, Self-Adjointess, III : Scattering Theory, IV Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1975-1980.

[56] D. Robert, *Autour de l'approximation semi classique,* Birkhauser, Boston 1987.

[57] M.A.Shubin, *Theorems on coincidence of the spectra of almost periodic operators,* Sib. Math. 17, 200-215 (1976).

[58] M.A.Shubin, *Pseudo-differential operators and spectral theory,* Springer-Verlag .

[59] M.A.Shubin, *Pseudo-differantial almost periodic operators and von Neumann algebras,,* Trans. Moscow Math. Soc. 1 17, 103-166 (1979).

[60] B. Simon, *Schrödinger semigroups,* Bull Am. Math. Soc. 7, (1982).

[61] B. Souabni, *Densité d'état surfacique pour une classe d'opérateurs de Schrödinger du type à N-corps,* preprint.

[62] P. Stollmann, *Wegner estimates and localization for continuum Anderson models with some singular distributions,* Arch. Math.75 , (2000) 307-311.

[63] A. Surkova, *Quelques propriétés spectrales d'opérateurs aux différences finies à coefficients périodiques et presque périodiques,* thèse de doctorat paris 7, (2000).

[64] I. Vaselic, *Localization for random perturbation of periodic Schrödinger operators with regular Floquet eigenvalues ,* Technical raport univ Bochum (2004).

[65] F. Wegner, *Bounds on the density of states in disordered systems,* Z. Phys. B44, (1981) 9-15.

[66] R. Yafaev, M.Sh. Birman, *The spectral shift function,* St. Petersburg Math.j. vol.4 (1993), n.5 883-710.

[67] R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory, General Theory,* American Mathematical Society, (1992).

[68] H. Zenk, *An interacting multielectron Anderson model,* Preprint mp-arc 03-410.