

Modélisation des déséquilibres mécaniques dans les écoulements diphasiques : Approches par relaxation et par modèle réduit

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 31 octobre 2008

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE**

Spécialité Mécanique Energétique

par

Mathieu LABOIS

Composition du jury

<i>Directeur :</i>	Hervé Guillard
<i>Rapporteurs :</i>	Christophe Berthon Bruno Després
<i>Examineurs :</i>	Marc Grandotto Jean-Marc Hérard Richard Saurel

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Cette thèse a été financée par le CEA dans le cadre du projet NEPTUNE, qui est un projet de co-développement entre le CEA, EDF, l'IRSN et AREVA-NP.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Hervé Guillard pour m'avoir permis de faire cette thèse et pour son investissement tout au long de celle-ci, son œil critique et ses suggestions m'ont souvent permis de faire avancer ce travail.

Je souhaite également remercier Marc Grandotto pour m'avoir permis de trouver cette thèse, pour son accueil au CEA Cadarache, pour les discussions sur la compréhension physique des écoulements diphasiques et pour ses calculs avec les logiciels NEPTUNE CFD et GENEPI.

Un grand merci à Thibaud Kloczko et David Rey pour leur aide lors de l'implémentation de mes modèles dans le logiciel NUM3SIS, et pour la vie au quotidien et leur humour ravageur.

Je remercie également Christophe Berthon et Bruno Després d'avoir accepté le rôle de rapporteur de ce travail de thèse, ainsi que pour leurs relectures minutieuses et leurs conseils avisés.

Merci également aux équipes SMASH et OPALE de l'INRIA Sophia-Antipolis et aux membres du service SSTH du CEA Cadarache pour leurs aides techniques et/ou logistiques et pour les cadres agréables dans lesquels elles m'ont permis de travailler. Je citerai dans le désordre M. Argente, Y. Mesri, R. Duvigneau, B. Chaigne, L. Blanchard, J.-A. Désidéri du côté de Sophia-Antipolis, et M. Belliard, S. Pascal, G. Willermoz, D. Soussan, Y. Blanchet, S. Mallevall et E. Rodriguez du côté de Cadarache.

Je souhaite également remercier R. Saurel, J.-M. Hérard, O. Le Métayer, A. Murrone, P. Helluy, F. Duval et N. Seguin pour les diverses discussions que nous avons eues et qui m'ont aidé tout au long de la thèse.

Je souhaite enfin remercier pour diverses raisons tout au long de ces trois ans Mathieu, Céline, Wassim, Yannick et toute la famiglia : Gégé et Martine, Céline et Matthieu et Faustine (pour l'un de ses premiers voyages), Sophie et Ludo, Lili et Baptiste. Je suis désolé pour vous, mais il faudra maintenant trouver une autre destination pour les vacances.

Table des matières

Nomenclature	1
Introduction Générale	5
Chapitre 1 Modélisation des écoulements diphasiques	9
1.1 Écriture d'un modèle diphasique à deux vitesses et deux pressions	9
1.1.1 Équations monophasiques	9
1.1.2 Extension des équations monophasiques au domaine étudié	10
1.1.3 Équations sur les grandeurs moyennes	11
1.1.4 Équation sur la fraction volumique	16
1.2 Fermeture entropique du modèle	17
1.2.1 Équations d'état	17
1.2.2 Écriture de l'équation de production d'entropie	18
1.2.3 Fermeture entropique du modèle diphasique	21
1.3 Détermination des temps de relaxation	24
1.3.1 Relaxation des pressions	24
1.3.2 Relaxation des vitesses	25
1.3.3 Relaxation des températures	26
1.3.4 Relaxation des potentiels chimiques	26
1.3.5 Ordres de grandeur	26
Chapitre 2 Une hiérarchie de modèles pour les écoulements diphasiques	29
2.1 Développements de Chapman-Enskog	30
2.1.1 Modèle réduit à l'ordre 0	32
2.1.2 Modèle réduit à l'ordre 1	32
2.2 Modèle à deux vitesses et une pression	34
2.2.1 Modèle à l'ordre 0	36
2.2.2 Équivalence avec le modèle bi-fluide	40
2.2.3 Modèle à l'ordre 1	41
2.2.4 Équations d'état	44
2.3 Modèle à une vitesse et une pression	45

2.3.1	Modèle réduit à l'ordre 0	45
2.3.2	Modèle réduit à l'ordre 1	49
2.3.3	Équations d'état	51
2.4	Modèle de Navier-Stokes multi-composantes	52
2.4.1	Modèle réduit à l'ordre 0	52
2.4.2	Modèle réduit à l'ordre 1	60
2.4.3	Équations d'état	63
2.5	Modèle à l'équilibre homogène	66
2.5.1	Modèle réduit à l'ordre 0	66
2.5.2	Modèle réduit à l'ordre 1	72
2.5.3	Équations d'état	76
2.6	Conclusion	77
Chapitre 3 Méthodes de relaxation pour la modélisation des déséquilibres méca-		
niques		79
3.1	Introduction	79
3.2	Propriétés mathématiques du modèle à sept équations	80
3.2.1	Hyperbolicité	80
3.2.2	Structures des ondes	82
3.3	Approximation numérique du système hyperbolique	86
3.3.1	Solveur de Riemann approché	86
3.3.2	Résolution numérique	88
3.4	Méthodes de relaxation des pressions et des vitesses	90
3.4.1	Méthode à pas fractionnaires	90
3.4.2	Relaxation des vitesses	91
3.4.3	Relaxation des pressions	93
3.5	Résultats numériques et validation	96
3.5.1	Problème d'interface	96
3.5.2	Problèmes multfluides	98
3.6	Conclusion	105
Chapitre 4 Modèles réduits pour la modélisation des déséquilibres mécaniques		107
4.1	Introduction	107
4.2	Propriétés mathématiques du modèle	108
4.2.1	Hyperbolicité	109
4.2.2	Structure des ondes	110
4.2.3	Invariants de Riemann	112
4.2.4	Entropie mathématique	112
4.3	Approximation numérique	114

4.3.1	Méthode à pas fractionnaires	114
4.3.2	Pas convectif	115
4.3.3	Pas dissipatif	119
4.4	Résultats numériques et validation	123
4.4.1	Advection d'interface	123
4.4.2	Problèmes multifluides	125
4.5	Conclusion	135
Chapitre 5	Étude de la propagation d'ondes de choc	137
5.1	Introduction	137
5.2	Relations de sauts pour le modèle à cinq équations non dissipatif	138
5.2.1	Relations de Rankine-Hugoniot	138
5.2.2	Fermeture des relations de saut	138
5.3	Ondes progressives pour le modèle (4.1)	139
5.3.1	Relations de saut pour le modèle dissipatif à cinq équations	139
5.3.2	Structure du choc	141
5.4	Validation des modèles	144
5.4.1	Mélange époxy-spinel	144
5.4.2	Mélange uranium-molybdène	146
5.4.3	Mélange époxy-enstatite	147
5.4.4	Mélange époxy-périclase	149
5.5	Conclusion	150
Chapitre 6	Écoulements diphasiques multidimensionnels	151
6.1	Schémas numériques	151
6.1.1	Modèle à deux vitesses et deux pressions	151
6.1.2	Modèle dissipatif à une vitesse et une pression	153
6.1.3	Relaxation des températures	157
6.2	Résultats numériques	158
6.2.1	Interaction choc-bulle	158
6.2.2	Chute d'une goutte	162
6.2.3	Écoulement dans un tuyau avec une contraction et une expansion	165
6.3	Conclusion	170
Conclusion et perspectives		171
Bibliographie		173
Annexes		179

Annexe A Pression interfaciale**pour un modèle à une pression développé à l'ordre 1 179****Annexe B Expressions de la pression selon la discrétisation 181**

B.1 Forme originale de l'équation sur la fraction volumique 182

B.2 Forme modifiée de l'équation sur la fraction volumique 183

Annexe C Étude de la convergence du pas de résolution du terme source dissipatif 185

Table des figures

3.1	Advection d'une interface entre fluides purs. Résultats après 200 μs , sur un maillage de 1001 nœuds	97
3.2	Tube à choc multifluide. Résultats après 200 μs , sur un maillage de 1201 nœuds	99
3.3	Principe du problème d'Hugoniot.	100
3.4	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-spinel.	101
3.5	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-enstatite.	102
3.6	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-périclase.	103
3.7	Problème d'Hugoniot pour un mélange uranium-molybdène.	104
4.1	Advection d'interface : variables de mélange. Modèle à cinq équations (gauche) et à sept équations (droite).	124
4.2	Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : premier tube à choc eau-air. Masse volumique, vitesse et pression.	126
4.3	Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : premier tube à choc eau-air. Fraction volumique et fraction massique.	127
4.4	Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : deuxième tube à choc eau-air. Masse volumique, vitesse et pression.	129
4.5	Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : deuxième tube à choc eau-air. Fraction volumique et fraction massique.	130
4.6	Évolution du profil de la fraction volumique de l'air. Modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et modèle à sept équations (droite).	130
4.7	Déroulement du cas-test de Ransom.	131
4.8	Cas-test de Ransom : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite).	132
4.9	Sédimentation : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations, avec une loi d'état de type gaz raide pour l'eau.	133
4.10	Sédimentation : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et pour le modèle à sept équations (droite), avec une loi d'état de type gaz parfait pour l'eau.	133
4.11	Montée d'un mélange eau-vapeur dans un tube vertical : Conditions aux bords	134
4.12	Montée d'un mélange eau-vapeur dans un tube vertical : comparaison entre les résultats du modèle à cinq équations dissipatif et ceux de GENEPI [37].	135
5.1	Résolution numérique des équations (5.12) avec Maple [86] et avec un schéma numérique de type volumes finis.	142
5.2	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-spinel : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et les fermetures des relations de Rankine-Hugoniot.	145
5.3	Problème d'Hugoniot pour un mélange uranium-molybdène : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et les fermetures des relations de Rankine-Hugoniot.	146

5.4	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-enstatite : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et la fermeture des relations de Rankine-Hugoniot [80]. . . .	148
5.5	Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-périclase : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et la fermeture des relations de Rankine-Hugoniot [80]. . . .	149
6.1	Cellule du maillage C_i construite autour du nœud i	152
6.2	Interaction choc-bulle : schéma de la géométrie initiale.	158
6.3	Interaction choc-bulle : Isovaleurs de la fraction volumique $\alpha_{R22} = 0.5$ et pressions aux temps $2.5 \cdot 10^{-4}$ s, $5.0 \cdot 10^{-4}$ s et $1.0 \cdot 10^{-3}$ s. Résultats du modèle à cinq équations non dissipatif.	159
6.4	Interaction choc-bulle : Comparaison entre le modèle non dissipatif à cinq équations sans relaxation des températures (haut) et avec relaxation (bas). Vitesse de mélange, pression et fraction volumique du gaz R22.	159
6.5	Interaction choc-bulle : Comparaison des pressions pour le modèle à cinq équations non dissipatif (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations instantanées (droite).	160
6.6	Interaction choc-bulle : Comparaison des fractions volumiques du gaz R22 pour le modèle à cinq équations non dissipatif (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations instantanées (droite).	160
6.7	Interaction choc-bulle : Comparaison des pressions pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations à temps finis (droite).	161
6.8	Interaction choc-bulle : Comparaison des fractions volumiques du gaz R22 le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations à temps finis (droite).	161
6.9	Chute d'une goutte : schéma de la géométrie initiale.	162
6.10	Chute d'une goutte : résultats après 0.8 s. Résultats sur la fraction volumique du gaz de la goutte. Modèle à cinq équations (gauche) et à sept équations (droite). $\varepsilon_u = 0$	163
6.11	Chute d'une goutte : résultats après 0.8 s. Fraction volumique du gaz de la goutte. Coupe dans l'axe vertical.	163
6.12	Chute d'une goutte : résultats après 0.8 s. Résultats sur la fraction volumique du gaz de la goutte. Modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et à sept équations avec relaxations à temps finis (droite). $\varepsilon_u = 10^{-2}$ s.	164
6.13	Écoulement dans un tuyau avec changements soudains de la section : géométrie et conditions aux bords.	165
6.14	Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à cinq équations non dissipatif.	166
6.15	Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à cinq équations dissipatif.	167
6.16	Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à sept équations.	168
6.17	Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le logiciel GENEPI [37].	169

Nomenclature

Grandeurs caractéristiques des écoulements diphasiques

k	indice désignant la phase k
k'	indice désignant la phase $k' = 3 - k$
I	indice désignant l'interface entre deux phases
X_k	fonction caractéristique de la phase k
$\underline{n}_k$	vecteur normal à l'interface et extérieur à la phase k
$\underline{\sigma}$	vecteur vitesse de l'interface
α	fraction volumique
Y	fraction massique
ρ	masse volumique en kg.m^{-3}
$\underline{u}$	vecteur vitesse en m.s^{-1}
p	pression en Pa
i	énergie spécifique interne en J.kg^{-1}
e	énergie spécifique totale en J.kg^{-1} ; $e = i + \frac{u^2}{2}$
h	enthalpie spécifique interne en J.kg^{-1} ; $h = i + \frac{p}{\rho}$
s	entropie spécifique en $\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
T	température en K
g	potentiel chimique en J.kg^{-1} ; $g = h - sT$
ν	volume spécifique en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$
C_v	chaleur spécifique à volume constant en J.K^{-1}
C_p	chaleur spécifique à pression constante en J.K^{-1}
γ	rapport des chaleurs spécifiques $\frac{C_p}{C_v}$
p_∞	pression de référence de la loi d'état de type gaz raide en Pa
i_0	énergie interne de référence de la loi d'état de type gaz raide en J.kg^{-1}
s_0	entropie de référence de la loi d'état de type gaz raide en $\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
c	vitesse du son en m.s^{-1}
c_I	vitesse du son à l'interface en m.s^{-1}
$\bar{C}$	module de compressibilité en $\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-2}$; $\bar{C} = \rho c^2$
C_I	module de compressibilité à l'interface en $\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-2}$; $C = \rho c_I^2$
$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes de viscosité en $\text{kg.m}^{-3}\text{s}^{-1}$
$\underline{q}$	flux de chaleur en W.m^{-2}
$\underline{f}_k^v$	ensemble des forces volumiques
$\dot{\alpha}$	terme de variation de la fraction volumique
$\underline{M}^d$	forces de frottement à l'interface
$\underline{Q}_I$	flux de chaleur interfacial
Γ	terme de transfert de masse

ε_p	temps de relaxation des pressions en s
ε_u	temps de relaxation des vitesses en s
ε_T	temps de relaxation des températures en s
ε_g	temps de relaxation des potentiels chimiques en s
μ_p	coefficient de relaxation des pressions en Pa^{-1}
μ_u	coefficient relaxation des vitesses en kg.m^{-3}
μ_T	coefficient de relaxation des températures en $\text{J.m}^{-3}\text{K}^{-1}$
μ_g	coefficient de relaxation des potentiels chimiques en $\text{K.kg}^2.\text{J}^{-1}\text{m}^{-3}$
R	rayon d'une particule de la phase dispersée en m
S_V	aire interfaciale par unité de volume en m^{-1}
C_D	coefficient de traînée
Re	nombre de Reynolds
$\underline{u}_r$	vitesse relative entre les phases en m.s^{-1}
$\underline{a}_r$	composante hors équilibre de la vitesse relative en m.s^{-2}
$\underline{u}_s$	vitesse d'une onde de choc en m.s^{-1}
m	débit massique à travers un choc en $\text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}$

Grandeurs géométriques et temporelles

Ω	ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
$\underline{x}$	point appartenant au domaine Ω
$\partial\Omega$	bord du domaine Ω
t	temps

Opérateurs et tenseurs

$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$	dérivée partielle en ξ de la fonction scalaire ϕ
$\frac{\partial\underline{u}}{\partial\xi}$	dérivée partielle en ξ du vecteur $\underline{u}$
$\nabla\phi$	gradient de la fonction ϕ égal au vecteur $\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, i = 1, \dots, N$
$\underline{u}.\underline{v}$	produit scalaire des vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$ égal à $\sum_i u_i v_i$
$\underline{u} \otimes \underline{v}$	tenseur d'ordre deux de coefficients $(\underline{u} \otimes \underline{v})_{ij} = u_i v_j$
$\text{div } \underline{u}$	divergence du vecteur $\underline{u}$ égale à $\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
$\text{div } \bar{\tau}$	divergence du tenseur $\bar{\tau}$ égale au vecteur $\sum_i \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i}, i = 1, \dots, N$
$\ \underline{u}\ $	norme L_2 du vecteur $\underline{u}$ égale à $\sqrt{\sum_i u_i^2}$
$\frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{v}}$	Jacobien de coefficients $\left(\frac{\partial\underline{u}}{\partial\underline{v}}\right)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial v_j}$

Grandeurs liées à la discrétisation

Δt pas de temps

Δx distance entre deux points dans le cas unidimensionnel

C_i cellule construite autour du nœud i

V_i volume de la cellule C_i

∂C_i bord de la cellule C_i

$v(i)$ ensemble des nœuds voisins du nœud i

∂C_{ij} interface entre les nœuds i et j , égale à $\partial C_i \cap \partial C_j$

$\underline{n}_{ij}$ vecteur normal moyen lié à l'interface et égal à $\int_{\partial C_{ij}} \underline{n} dl$

Introduction Générale

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude des écoulements diphasiques, de leur modélisation à leur simulation numérique. Les écoulements diphasiques consistent en deux fluides qui ont des propriétés thermodynamiques différentes et peuvent interagir ensemble. Ces phénomènes interviennent dans de très nombreuses applications. En premier lieu, citons les générateurs de vapeurs des centrales nucléaires, où apparaissent des mélanges eau-vapeur, ainsi que les écoulements pour les cuves de réacteurs. Les mélanges diphasiques se rencontrent aussi dans des applications très éloignées du domaine nucléaire, parmi lesquelles l'étude des explosifs ou la modélisation de brouillard pour l'aéronautique. De nombreuses difficultés apparaissent dans ces études, notamment au niveau de la modélisation de ces écoulements et des phénomènes complexes qui apparaissent. Les travaux sur ces types d'écoulements utilisent deux types d'approches pour la modélisation : les approches Lagrangiennes, où l'on suit une particule, et la modélisation Eulérienne, où l'on étudie un volume fluide immobile. Notre travail se portera sur cette dernière approche. Pour ce type de modélisation, un processus d'homogénéisation est généralement utilisé pour obtenir les équations décrivant ce système. Mais la résolution analytique de ces équations semble hors de portée, à cause de la complexité des différents termes obtenus, comme les termes de turbulence et d'échange interfaciaux. Le problème de la fermeture de ces équations se pose également.

La modélisation des écoulements diphasiques se fait généralement en émettant l'hypothèse de l'égalité entre les pressions des deux fluides. Ce type de modélisation a été très largement étudié et est utilisé par de nombreux codes industriels, parmi lesquels NEPTUNE CFD [8], CATHARE [7] ou RELAP [87]. Cependant, ce modèle souffre de sa non-hyperbolicité, ce qui pose des problèmes pour la création de schémas numériques : ceci peut introduire des problèmes mal posés, et il existe un pas minimal pour la discrétisation spatiale lorsque l'on veut simuler numériquement ces écoulements. Une approche alternative a été développée par Baer et Nunziato [4]. Elle consiste à ne plus supposer l'égalité des pressions, mais à ajouter une nouvelle équation sur le transport de la fraction volumique. Ce modèle possède l'avantage d'être hyperbolique, et permet donc d'utiliser des schémas numériques classiques basés sur la résolution des problèmes de Riemann approchés. Cependant, il est coûteux en terme de temps de calcul. Ce modèle a néanmoins fait l'objet d'un intérêt croissant ces dernières années [77, 32, 27]. Une autre manière de contourner le problème de la non-hyperbolicité des modèles à deux vitesses et une pression consiste à supposer l'égalité des vitesses en plus de celle des pressions. Un nouveau modèle est alors obtenu, qui a été l'objet de nombreuses études pour la simulation des explosifs ou l'interaction choc-bulle [49, 78, 67]. Cependant, l'hypothèse d'une vitesse unique le rend inapte à la simulation d'écoulements où de grands déséquilibres mécaniques apparaissent entre les phases.

Le projet Neptune est une coopération entre EDF, AREVA, le CEA et l'IRSN, qui vise à développer un logiciel de simulation numérique des écoulements diphasiques intéressant l'industrie nucléaire. Il utilise actuellement un modèle à deux vitesses et une pression, dont les faiblesses numériques sont palliées par différentes méthodes, comme l'ajout de termes de masse ajoutée. Des actions de recherches sont néanmoins effectuées afin de réfléchir à de nouveaux modèles pour l'avenir. Cette thèse s'inscrit dans ce cadre, et nous chercherons à développer des modèles ayant de bonnes propriétés mathématiques

et thermodynamiques. L'accent sera mis sur l'hyperbolicité des modèles développés ainsi que sur leur respect du principe d'entropie. Le développement des méthodes numériques permettant de simuler ces écoulements sera un autre objectif, ainsi que l'implémentation et la validation de ces méthodes pour des simulations multidimensionnelles sur des machines parallèles.

Notre travail de thèse s'est organisé selon trois axes : une hiérarchisation des modèles utilisés pour la simulation des écoulements diphasiques, la recherche de modèles et méthodes numériques pour la simulation d'écoulements caractérisés par des déséquilibres mécaniques entre les phases et un équilibre des pressions, que l'on peut notamment rencontrer dans les générateurs de vapeurs, et l'implémentation de ces méthodes dans un logiciel massivement parallèle pour la simulation multidimensionnelle des écoulements diphasiques.

Dans la première partie de cette thèse, on cherche à créer une hiérarchie de modèles pour les écoulements diphasiques, selon l'utilisation ou non d'hypothèses sur l'égalité des pressions, des vitesses, des températures ou des potentiels chimiques. Cette hiérarchisation nous permet de relier les différents modèles trouvés dans la littérature entre eux, non seulement les modèles de types Baer-Nunziato et les modèles bi-fluides à une seule pression, mais également les modèles à une vitesse et une pression, les modèles relaxés homogènes (HRM) ou modèles de Navier-Stokes multi-composantes, et les modèles à l'équilibre homogène (HEM).

La deuxième partie s'attache à la simulation des écoulements caractérisés par un équilibre des pressions et un déséquilibre des vitesses en utilisant des méthodes hyperboliques. Ceci sera fait par l'utilisation de deux approches : les approches par relaxations, où un modèle à deux vitesses et deux pressions est utilisé, avec des méthodes de retour à l'équilibre de ces grandeurs, et une approche par modèle réduit, où l'ajout de termes du second ordre permet au modèle à une vitesse et une pression de prendre en compte les déséquilibres de vitesses.

Dans la dernière partie, la simulation numérique de différents écoulements diphasiques sera étudiée. Tout d'abord, on s'intéressera à la propagation d'ondes de choc dans des alliages, puis on cherchera à simuler des écoulements multidimensionnels, en utilisant les différents modèles hyperboliques développés dans ce travail.

Le présent mémoire est découpé de la manière suivante :

Le premier chapitre s'attache à la présentation de la modélisation des écoulements diphasiques. Nous introduirons ainsi le processus d'homogénéisation qui permet d'obtenir les équations utilisées pour la modélisation de ce type d'écoulements. Une fermeture de ce modèle sera également proposée, qui assure le respect par celui-ci du principe d'entropie, c'est-à-dire une production positive de l'entropie de mélange. L'obtention des temps de retour à l'équilibre des différentes grandeurs physiques et mécaniques sera enfin étudiée, ce qui permettra d'obtenir les ordres de grandeurs de ces temps pour les cas qui nous intéressent.

Le deuxième chapitre de ce mémoire porte sur l'utilisation des développements de Chapman-Enskog pour la création d'une hiérarchie de modèles pour la simulation des écoulements diphasiques. Ceci permet de montrer que l'ensemble des modèles utilisés pour ces écoulements sont reliés entre eux, et se différencient uniquement par des hypothèses sur les équilibres entre les pressions, les vitesses, les températures et les potentiels chimiques. Ces développements permettent aussi d'obtenir des modèles à l'ordre un, où des termes du second ordre apparaissent. Ces termes permettent de représenter des déséquilibres de grandeurs mécaniques ou thermodynamiques, bien que le modèle ne comporte qu'une seule de ces grandeurs. Enfin, nous proposons des lois d'état qui permettent la fermeture de ces mo-

dèles, qui sont dérivées en supposant que chaque phase se comporte comme un fluide monophasique gouverné par des lois d'état de type gaz raide.

Dans le troisième chapitre, on s'intéressera à l'utilisation de méthodes de relaxation pour la modélisation d'écoulements comportant des déséquilibres de vitesses et des pressions. Après avoir présenté une méthode numérique pour la partie hyperbolique du système, nous introduirons des méthodes de retour à l'équilibre des vitesses et de pressions, d'abord de manière instantanée, puis en utilisant des méthodes de relaxation à temps finis. Il a en effet été montré que l'utilisation de méthodes de relaxation instantanée des pressions permet de simuler les écoulements à deux vitesses et une pression, mais souffre aussi des faiblesses de ce type de modèles [45]. Nos méthodes seront validées en reprenant plusieurs cas-tests de la littérature et en les comparant avec des données expérimentales.

Le quatrième chapitre portera sur l'étude d'un nouveau modèle pour la simulation des écoulements comprenant des déséquilibres mécaniques. Ce modèle a été obtenu par l'utilisation de développements de Chapman-Enskog sur le modèle à une vitesse et deux pressions. Bien que ce modèle ne possède qu'une vitesse et une pression, les développements à l'ordre un permettent d'obtenir des termes dissipatifs où apparaissent des dérivées du second ordre, et qui permettent de prendre en compte les déséquilibres mécaniques. Une méthode numérique pour la résolution numérique de ce modèle est ensuite développée. Celle-ci est basée sur l'utilisation d'un pas fractionnaire : le système hyperbolique sans terme dissipatif est résolu dans un premier temps, puis on se concentre sur la résolution des termes du second ordre. Différents cas-tests mettent en évidence la capacité de cette méthode à simuler des écoulements complexes, pouvant impliquer des contre-courants.

Nous nous intéresserons dans le cinquième chapitre à la propagation d'ondes de choc dans des mélanges diphasiques. Dans le cas des ondes progressives, le modèle dissipatif à une vitesse et une pression se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires, qui peut être résolu numériquement dans le cas des gaz parfaits. Le schéma numérique de type volumes finis, développé dans le chapitre précédent, sera utilisé afin d'étudier différentes fermetures des relations de Rankine-Hugoniot proposées dans la littérature [75, 80], que nous validons par comparaison avec des données expérimentales.

Le sixième chapitre portera sur la simulation d'écoulements multidimensionnels. L'adaptation de nos schémas numériques au cas multidimensionnel sera présentée dans un premier temps, puis nous étudierons différents cas-tests qui ont été simulés en utilisant le logiciel massivement parallèle de l'INRIA, NUM3SIS [50]. Le premier cas portera sur l'interaction entre un choc et une bulle de gaz, et permettra de valider nos méthodes pour un nombre de Mach important. Le deuxième problème consistera en l'étude de la chute d'une goutte. Bien que ce soit un problème d'interface où l'utilisation d'une méthode de simulation du déséquilibre des vitesses ne se justifie pas à priori, on utilisera des modèles ne supposant pas l'égalité des vitesses. On verra alors que la prise en compte de ces déséquilibres permet de réduire la diffusion de ces modèles. Enfin, on s'intéressera au cas d'un écoulement eau-air dans un tuyau comprenant une contraction et une expansion soudaines. Des variations de pressions apparaissent au niveau des changements de section, et entraînent la séparation des phases. Ce phénomène de séparation ne peut pas être retrouvé lorsque le modèle à cinq équations sans terme dissipatif est utilisé, mais apparaît lorsque nous utilisons le modèle à sept équations avec des relaxations à temps finis, ou avec un modèle utilisant une vitesse de dérive [37].

Chapitre 1

Modélisation des écoulements diphasiques

Sommaire

1.1	Écriture d'un modèle diphasique à deux vitesses et deux pressions	9
1.1.1	Équations monophasiques	9
1.1.2	Extension des équations monophasiques au domaine étudié	10
1.1.3	Équations sur les grandeurs moyennes	11
1.1.4	Équation sur la fraction volumique	16
1.2	Fermeture entropique du modèle	17
1.2.1	Équations d'état	17
1.2.2	Écriture de l'équation de production d'entropie	18
1.2.3	Fermeture entropique du modèle diphasique	21
1.3	Détermination des temps de relaxation	24
1.3.1	Relaxation des pressions	24
1.3.2	Relaxation des vitesses	25
1.3.3	Relaxation des températures	26
1.3.4	Relaxation des potentiels chimiques	26
1.3.5	Ordres de grandeur	26

1.1 Écriture d'un modèle diphasique à deux vitesses et deux pressions

Les écoulements en mécanique des fluides sont modélisés en utilisant deux grandes familles de modélisations. La méthode Lagrangienne s'attache à suivre le parcours d'une particule quand la méthode Eulérienne s'intéresse à ce qui se passe dans un domaine fixe. Nous nous intéressons ici à la modélisation Eulérienne, et les équations qui gouvernent l'écoulement sont obtenues suivant un procédé d'homogénéisation [24, 46], qui est rappelé dans ce paragraphe.

1.1.1 Équations monophasiques

On s'intéresse à un écoulement diphasique où le fluide étudié est composé de deux phases notées $k = 1$ et 2 . Ces deux composantes sont considérées immiscibles ; elles sont séparées par des interfaces supposées infiniment minces, au travers desquelles s'opèrent des transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Chacune d'elles occupe donc un sous-domaine $\Omega_k(t)$ du domaine fluide Ω , tels que $\Omega_1(t) \cap \Omega_2(t) = \emptyset$ et $\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) = \Omega$. Ainsi, on peut considérer que sur chaque sous-domaine $\Omega_k(t)$, la phase k peut être décrite en utilisant les équations de Navier-Stokes monophasiques pour les

écoulements compressibles, qui s'écrivent

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_k \underline{u}_k) = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_k \underline{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) + \nabla p_k - \operatorname{div} \underline{\tau}_k = \rho_k \underline{f}_k^v \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho_k e_k + p_k) \underline{u}_k) + \operatorname{div} (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) = \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k \quad (1.1.3)$$

où l'on note ρ_k la masse volumique dans le sous-domaine $\Omega_k(t)$, $\underline{u}_k$ le vecteur vitesse de la phase k , p_k sa pression et $e_k = i_k + \frac{\underline{u}_k^2}{2}$ son énergie spécifique totale, avec i_k l'énergie spécifique interne. $\underline{\tau}_k$ représente le tenseur des contraintes visqueuses de la phase k , $\underline{q}_k$ son flux de chaleur. Enfin, $\underline{f}_k^v$ représente les forces volumiques appliquées sur la phase k . Ces équations sont complétées par une loi d'état complète pour chaque phase.

1.1.2 Extension des équations monophasiques au domaine étudié

Les variables appliquées à la phase k que nous venons d'introduire ne sont définies a priori que sur le sous-domaine $\Omega_k(t)$ occupé par cette phase. Il faut donc les étendre sur l'ensemble du domaine fluide Ω ; nous le faisons en supposant que ces variables sont égales à 0 sur $\Omega_{k'}(t)$ le domaine complémentaire de $\Omega_k(t)$. On souhaite maintenant définir des équations qui soient également valables sur l'ensemble du domaine Ω . Multiplions donc les équations (1.1) par la fonction caractéristique $X_k(t)$ du sous-domaine $\Omega_k(t)$, qui est définie comme suit

$$X_k(\underline{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_k(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans les manipulations formelles qui vont suivre, les produits entre les grandeurs phasiques $\psi_k \cdot \underline{n}_k \delta$ doivent être définis, où ψ_k est une grandeur générique de la phase k , discontinue sur l'interface entre les phases $\partial\Omega_k(t)$, $\underline{n}_k$ le vecteur unité sortant et normal à l'interface entre les phases $\partial\Omega_k(t)$, δ la fonction caractéristique de $\partial\Omega_k(t)$. Pour cela, on considère que ψ_k peut être étendue à $\bar{\Omega}_k(t)$ l'adhérence de $\Omega_k(t)$, et donc sur l'interface $\partial\Omega_k(t)$, puis on écrit la modélisation suivante

$$\psi_k(\underline{x}, t) \underline{n}_k(\underline{x}, t) \delta(\underline{x}, t) = \begin{cases} \psi_k(\underline{x}, t) \underline{n}_k(\underline{x}, t) & \text{si } \underline{x} \in \partial\Omega_k(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

Si nous introduisons une fonction scalaire ϕ , un vecteur $\underline{u}$ et un tenseur $\underline{\tau}$, la fonction caractéristique X_k vérifie les propriétés suivantes, en considérant les dérivées au sens des distributions

$$\nabla (X_k \phi) = X_k \nabla \phi - \phi \underline{n}_k \delta \quad (1.4.1)$$

$$\operatorname{div} (X_k \underline{u}) = X_k \operatorname{div} \underline{u} - \underline{u} \cdot \underline{n}_k \delta \quad (1.4.2)$$

$$\operatorname{div} (X_k \underline{\tau}) = X_k \operatorname{div} \underline{\tau} - \underline{\tau} \underline{n}_k \delta \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_k \phi) = X_k \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k \delta \quad (1.4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_k \underline{u}) = X_k \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k) \delta \quad (1.4.5)$$

avec σ la vitesse de l'interface entre les phases $\partial\Omega_k(t)$.

Multiplions les équations de Navier-Stokes monophasiques (1.1) par la fonction caractéristique X_k , on obtient les équations suivantes

$$X_k \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_k \underline{u}_k) \right) = 0 \quad (1.5.1)$$

$$X_k \left(\frac{\partial \rho_k \underline{u}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) + \nabla p_k - \operatorname{div} \underline{\tau}_k \right) = X_k \rho_k \underline{f}_k^v \quad (1.5.2)$$

$$X_k \left(\frac{\partial \rho_k e_k}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho_k e_k + p_k) \underline{u}_k) + \operatorname{div} (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \right) = X_k \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k \quad (1.5.3)$$

En utilisant les propriétés (1.4) de la fonction caractéristique X_k et en utilisant la notion de dérivée au sens des distributions, les équations (1.5) peuvent être réécrites en introduisant les fonctions caractéristiques des phases à l'intérieur des opérateurs différentiels. Cette manipulation permet d'obtenir les équations suivantes, valides sur l'ensemble du domaine :

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_k \rho_k) + \operatorname{div} (X_k \rho_k \underline{u}_k) + \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta = 0 \quad (1.6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X_k \rho_k \underline{u}_k) + \operatorname{div} (X_k \rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) + \nabla X_k p_k - \operatorname{div} (X_k \underline{\tau}_k) \\ + \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta - \rho_k \underline{u}_k (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k) \delta + p_k \underline{n}_k \delta - \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \end{aligned} = X_k \rho_k \underline{f}_k^v \quad (1.6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (X_k \rho_k e_k) + \operatorname{div} (X_k (\rho_k e_k + p_k) \underline{u}_k) + \operatorname{div} (X_k (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k)) \\ + \rho_k e_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta + p_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta + (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \end{aligned} = X_k \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k \quad (1.6.3)$$

1.1.3 Équations sur les grandeurs moyennes

Le sous-domaine $\Omega_k(t)$ occupé par la phase k peut être formé de plusieurs zones non connectées, des bulles par exemple. Ces zones peuvent être plus petites que la taille des éléments du maillage utilisé pour la simulation numérique. On ne peut donc pas utiliser les équations (1.6) telles quelles, mais celles-ci doivent être homogénéisées.

Le procédé d'homogénéisation [24, 46] se poursuit donc par l'introduction d'un opérateur de moyenne $\langle . \rangle$. On fait l'hypothèse que cet opérateur vérifie les propriétés de linéarité $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ et d'idempotence $\langle \langle a \rangle \rangle = \langle a \rangle$, et peut être commuté avec les opérateurs différentiels. Une grandeur instantanée ϕ peut alors être décomposée en une somme d'une valeur moyenne $\langle \phi \rangle$ et d'une valeur fluctuante ϕ' qui vérifie $\langle \phi' \rangle = 0$. La moyenne statistique $\langle \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N \phi$, valide pour le cas présent d'écoulements instationnaires hétérogènes, sera utilisé.

Pour écrire les équations homogénéisées, nous définissons également la fonction $\alpha_k = \langle X_k \rangle$. Puisque X_k est définie comme la fonction caractéristique du domaine $\Omega_k(t)$, α_k peut être interprétée comme la fraction volumique de la phase k , en considérant l'opérateur $\langle . \rangle$ comme une moyenne volumique. Cette grandeur prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, et vérifie la contrainte de saturation $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

On introduit pour la suite la moyenne Eulérienne définie par

$$\bar{\phi}_k = \frac{\langle X_k \phi_k \rangle}{\alpha_k} \quad (1.7)$$

Une grandeur phasique ϕ_k peut donc se décomposer en sa moyenne Eulérienne et une valeur fluctuante, $\phi_k = \bar{\phi}_k + \phi'_k$. En utilisant la propriété d'idempotence de l'opérateur moyenne, on montre que le terme de fluctuation vérifie l'équation $\langle X_k \phi'_k \rangle = 0$. Nous introduisons également la moyenne de Favre, notée $\tilde{\phi}_k$, qui sera utilisée pour les moyennes sur les vitesses et les énergies internes. Elle est définie par l'équation suivante

$$\tilde{\phi}_k = \frac{\langle X_k \rho_k \phi_k \rangle}{\alpha_k \bar{\rho}_k} \quad (1.8)$$

où $\bar{\rho}_k$ est la densité phasique moyennée en utilisant la moyenne Eulérienne (1.7) $\bar{\rho}_k = \frac{\langle X_k \rho_k \rangle}{\alpha_k}$.

On peut ainsi décomposer la grandeur ϕ_k , $\phi_k = \tilde{\phi}_k + \phi''_k$, où le terme de fluctuation ϕ''_k vérifie l'égalité $\langle X_k \bar{\rho}_k \phi''_k \rangle = 0$. L'opérateur moyenne $\langle . \rangle$ est introduit dans les équations (1.6), ce qui donne le système suivant

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k \rangle + \text{div} \langle X_k \rho_k \underline{u}_k \rangle + \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = 0 \quad (1.9.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k \underline{u}_k \rangle + \text{div} \langle X_k \rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k \rangle + \nabla \langle X_k p_k \rangle - \text{div} \langle X_k \underline{\tau}_k \rangle \\ + \langle \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \underline{u}_k (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle = \langle X_k \rho_k f_k^v \rangle \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X_k \rho_k e_k \rangle + \text{div} \langle X_k (\rho_k e_k + p_k) \underline{u}_k \rangle + \text{div} \langle X_k (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \rangle \\ + \langle \rho_k e_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = \langle X_k \rho_k f_k^v \underline{u}_k \rangle \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Nous utilisons les définitions de la moyenne Eulérienne et de la moyenne de Favre pour réécrire l'équation de conservation de la masse (1.9.1), qui devient alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k) + \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = 0 \quad (1.10)$$

De la même manière, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.9.2) se réécrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k \otimes \tilde{\underline{u}}_k) + \nabla (\alpha_k \bar{p}_k) - \text{div} \left(\alpha_k \left(\underline{\tau}_k - \overline{\rho_k \underline{u}_k'' \otimes \underline{u}_k''} \right) \right) \\ + \langle \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \underline{u}_k (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle = \alpha_k \overline{\rho_k f_k^v} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Selon la définition (1.8), l'énergie spécifique totale de la phase k , e_k , vérifie l'égalité $\langle X_k \rho_k e_k \rangle = \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{e}_k$, ce qui permet de déduire l'égalité $\tilde{e}_k = \tilde{i}_k + \frac{\tilde{u}_k^2}{2} + \frac{\alpha_k \overline{\rho_k \underline{u}_k''^2}}{2}$, avec $\tilde{i}_k$ l'énergie spécifique interne de la phase k . En utilisant cette expression et en utilisant les moyennes Eulérienne et de Favre, on peut manipuler l'équation de conservation de l'énergie (1.9.3) qui devient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{e}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k) \underline{\tilde{u}}_k) \\
& + \operatorname{div} \left(\alpha_k \left(\underline{\bar{q}}_k - \underline{\bar{\tau}}_k \underline{\tilde{u}}_k + \overline{\rho_k h_k \underline{u}_k''} + \frac{\overline{\rho_k \underline{u}_k^2 \underline{u}_k''}}{2} - \underline{\bar{\tau}}_k \underline{u}_k'' \right) \right) \\
& + \langle \rho_k e_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

où l'enthalpie spécifique de la phase k est introduite, $h_k = i_k + \frac{p_k}{\rho_k}$. On définit maintenant le tenseur de viscosité "turbulente" $\underline{\tau}_k^T = -\overline{\rho_k \underline{u}_k'' \otimes \underline{u}_k''}$ et le flux de chaleur "turbulent" $\underline{q}_k^T = \overline{\rho_k h_k \underline{u}_k''} + \frac{\overline{\rho_k \underline{u}_k^2 \underline{u}_k''}}{2} - \underline{\bar{\tau}}_k \underline{u}_k''$. Ces deux derniers termes modélisent l'énergie de convection "turbulente" et le travail dû à la turbulence. Les équations de conservation (1.10), (1.11) et (1.12) s'écrivent alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \underline{\tilde{u}}_k) + \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = 0 \tag{1.13.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k \underline{\tilde{u}}_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \underline{\tilde{u}}_k \otimes \underline{\tilde{u}}_k) + \nabla (\alpha_k \bar{p}_k) - \operatorname{div} \left(\alpha_k (\underline{\bar{\tau}}_k + \underline{\tau}_k^T) \right) \\
& + \langle \rho_k (\underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \rho_k \underline{u}_k (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k) \delta \rangle + \langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle - \langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \underline{f}_k^v}
\end{aligned} \tag{1.13.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{e}_k}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k) \underline{\tilde{u}}_k) + \operatorname{div} \left(\alpha_k (\underline{\bar{q}}_k + \underline{q}_k^T - \underline{\bar{\tau}}_k \underline{\tilde{u}}_k) \right) \\
& + \langle \rho_k e_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle p_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle + \langle (\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle = \overline{\alpha_k \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k}
\end{aligned} \tag{1.13.3}$$

Dans la suite de ce travail, nous ferons l'hypothèse simplificatrice de négliger les termes de turbulence $\frac{\overline{\rho_k \underline{u}_k^2 \underline{u}_k''}}{2}$, $\underline{\tau}_k^T$ et $\underline{q}_k^T$. Il faut maintenant définir physiquement les autres termes de ces équations.

Tout d'abord, le terme $\langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle$ de l'équation (1.13.1), qui sera noté Γ_k dans la suite, représente le transfert de masse à l'interface entre les phases. Des termes apparaissent aussi dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, qui reprennent l'expression du transfert de masse. Ceci amène à la définition de la vitesse $\underline{u}_\Gamma$ et de l'enthalpie interne spécifique h_Γ associées à ce transfert de masse. Les définitions associées à ce phénomène peuvent être résumées par les équations suivantes

$$\Gamma_k \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \tag{1.14.1}$$

$$\underline{u}_\Gamma \Gamma_k \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \tag{1.14.2}$$

$$h_\Gamma \Gamma_k \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle \rho_k h_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \tag{1.14.3}$$

On peut ensuite interpréter le terme $\langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle$ de l'équation de conservation de l'énergie (1.13.2) comme le terme de force de traînée interfaciale, qui sera noté par la suite $\underline{M}_k^d$. Cette expression se retrouve dans l'équation (1.13.3). La vitesse de la phase k à l'interface entre les phases, notée $\underline{u}_{k,I}$, doit

aussi être définie. Les définitions relatives à la force de traînée sont données par

$$\underline{M}_k^d \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.15.1)$$

$$\underline{u}_{k,I} \cdot \underline{M}_k^d \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \underline{\tau}_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.15.2)$$

L'équation de conservation de l'énergie (1.13.3) contient également le terme $-\langle q_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle$ qui peut être compris comme le flux de chaleur entre les deux phases à leur interface. La définition suivante est donc introduite

$$Q_{k,I} \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle q_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.16)$$

Il reste à modéliser le terme $\langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle$ de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et le terme $\langle p_k \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k \delta \rangle$ de l'équation de conservation de l'énergie. Pour cela, la pression de la phase k à l'interface $p_{k,I}$ est introduite, ainsi que les modélisations suivantes

$$p_{k,I} \nabla \alpha_k \stackrel{\text{déf}}{=} -\langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.17.1)$$

$$\langle p_k \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} p_{k,I} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} \quad (1.17.1)$$

En utilisant toutes ces notations dans les équations (1.13), ces dernières peuvent être réécrites

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k) = \Gamma_k \quad (1.18.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{\underline{u}}_k \otimes \tilde{\underline{u}}_k) + \nabla (\alpha_k \bar{p}_k) - \text{div} (\alpha_k \underline{\tau}_k) = \\ \underline{u}_\Gamma \Gamma_k + p_{k,I} \nabla \alpha_k + \underline{M}_k^d + \alpha_k \overline{\rho_k f_k^v} \end{aligned} \quad (1.18.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k \tilde{e}_k}{\partial t} + \text{div} (\alpha_k (\bar{\rho}_k \tilde{e}_k + \bar{p}_k) \tilde{\underline{u}}_k) + \text{div} (\alpha_k (\bar{q}_k - \underline{\tau}_k \tilde{\underline{u}}_k)) = \\ \left(h_\Gamma + \frac{u_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma_k - p_{k,I} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \underline{M}_k^d \cdot \underline{u}_{k,I} + Q_{k,I} + \alpha_k \overline{\rho_k f_k^v \cdot \underline{u}_k} \end{aligned} \quad (1.18.3)$$

Ces équations sont utilisées pour chaque phase k . Nous devons maintenant nous assurer que ce système d'équations assure la conservation de la masse du mélange, de sa quantité de mouvement et de son énergie. Les échanges entre les phases doivent donc être équilibrés : la quantité de masse transférée de la phase 1 à la phase 2, représentée par le terme source Γ_1 , doit être l'opposée de la quantité de masse transférée de la phase 2 à la phase 1, Γ_2 . Des conditions similaires doivent être vérifiées sur les transferts de quantité de mouvement et d'énergie. Ces conditions se traduisent par les équations

suivantes

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0 \quad (1.19.1)$$

$$\sum_{k=1}^2 \underline{M}_k^d = 0 \quad (1.19.2)$$

$$\sum_{k=1}^2 Q_{k,I} = 0 \quad (1.19.3)$$

$$\sum_{k=1}^2 p_{k,I} \nabla \alpha_k = 0 \quad (1.19.4)$$

On introduit l'hypothèse selon laquelle le vecteur des forces volumiques extérieures, le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur sont égaux à leurs valeurs moyennes ($\underline{\tau}_k = \underline{\tau}_k$, $\underline{q}_k = \underline{q}_k$, $\underline{f}_k^v = \underline{f}_k^v$). De plus, puisque les termes de turbulence ont été négligés, les écritures des équations peuvent être simplifiées en supprimant les notations “ $\sim$ ” et “ $\sim$ ”. En conclusion de ce processus d'homogénéisation des équations, on obtient le système suivant

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \underline{u}_k) = \Gamma_k \quad (1.20.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \underline{u}_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k \underline{u}_k \otimes \underline{u}_k) + \nabla (\alpha_k p_k) + \operatorname{div} (-\alpha_k \underline{\tau}_k) = \\ \underline{u}_\Gamma \Gamma_k + p_{k,I} \nabla \alpha_k + \underline{M}_k^d + \alpha_k \rho_k \underline{f}_k^v \end{aligned} \quad (1.20.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k e_k) + \operatorname{div} (\alpha_k \rho_k e_k + \alpha_k p_k) \underline{u}_k + \operatorname{div} \left(\alpha_k \left(\underline{q}_k - \underline{\tau}_k \underline{u}_k \right) \right) = \\ \left(h_\Gamma + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma_k - p_{k,I} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \underline{M}_k^d \cdot \underline{u}_{k,I} + Q_{k,I} + \alpha_k \rho_k \underline{f}_k^v \cdot \underline{u}_k \end{aligned} \quad (1.20.3)$$

avec les différents termes sources définis par les expressions suivantes

$$\Gamma_k = - \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.1)$$

$$\underline{u}_\Gamma \Gamma_k = - \langle \rho_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.2)$$

$$h_\Gamma \Gamma_k = - \langle \rho_k h_k (\underline{u}_k - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.3)$$

$$\underline{M}_k^d = \langle \underline{\tau}_k \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.4)$$

$$\underline{u}_{k,I} \cdot \underline{M}_k^d = \langle \underline{\tau}_k \underline{u}_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.5)$$

$$Q_{k,I} = - \langle q_k \cdot \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.6)$$

$$p_{k,I} \nabla \alpha_k = - \langle p_k \underline{n}_k \delta \rangle \quad (1.21.7)$$

Ce système correspond à la forme générale des modèles diphasiques obtenus en utilisant le processus d'homogénéisation présenté par Ishii [46] et Drew et Passman [24]. En utilisant les équations

de conservation des transferts interfaciaux (1.19), ces transferts ne seront plus notés en fonction de la phase, mais seront écrits $\Gamma = \Gamma_1 = -\Gamma_2$, $\underline{M}^d = \underline{M}_1^d = -\underline{M}_2^d$ et $Q_I = Q_1 = -Q_2$. Enfin, nous remarquons à partir de l'équation (1.19.4) l'égalité $p_{1,I} = p_{2,I} = p_I$.

1.1.4 Équation sur la fraction volumique

De nombreuses hypothèses et modélisations restent à donner pour fermer le système (1.20). L'égalité de pression entre les deux phases est l'hypothèse la plus courante dans les travaux sur les écoulements bi-fluides [21, 46, 18] ainsi que dans les programmes industriels de simulation [39, 87, 51]

$$p_1 = p_2 \quad (1.22)$$

Cependant, il est bien connu que le modèle obtenu est alors non-hyperbolique [84]. Cette caractéristique du modèle peut mener à des instabilités numériques, comme on peut le voir dans plusieurs travaux sur ce modèle [76, 45]. Une solution proposée est d'ajouter de nouveau termes sources qui peuvent rendre le modèle hyperbolique [13, 90].

Dans le travail présent, nous avons décidé de ne pas retenir cette hypothèse d'égalité des pressions. Une modélisation différente est utilisée, avec l'introduction d'une équation supplémentaire sur la fraction volumique, définie par l'équation $\alpha_k = \langle X_k \rangle$, où l'on rappelle que $X_k(t)$ est la fonction caractéristique du volume $\Omega_k(t)$ occupé par la phase k . À partir des équations (1.4.1) et (1.4.4), en utilisant la fonction $\phi = 1$, on peut écrire l'équation

$$\frac{\partial \langle X_k \rangle}{\partial t} = \langle \sigma \cdot \nabla X_k \rangle \quad (1.23)$$

Le terme $\langle \sigma \cdot \nabla X_k \rangle$ est décomposé de manière arbitraire sous la forme suivante

$$\langle \sigma \cdot \nabla X_k \rangle = \dot{\alpha}_k - \underline{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha_k \quad (1.24)$$

où $\dot{\alpha}_k$ représente la variation de la fraction volumique et $\underline{u}_\alpha$ la vitesse d'advection de α_1 . Une équation supplémentaire est alors obtenue sur l'advection de la fraction volumique de la phase

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha_1 = \dot{\alpha}_1 \quad (1.25)$$

Ceci donne alors un modèle à deux vitesses et deux pressions pour la simulation des écoulements

diphasiques, qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) = \Gamma \quad (1.26.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1) + \nabla (\alpha_1 p_1) - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{\tau}_1) \\ = \underline{u}_\Gamma \Gamma + p_I \nabla \alpha_1 + \underline{M}^d + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \end{aligned} \quad (1.26.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 e_1) + \operatorname{div} ((\alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_1 p_1) \underline{u}_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 (\underline{q}_1 - \underline{\tau}_1 \underline{u}_1)) \\ = \left(h_\Gamma + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma - p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{M}^d \cdot \underline{u}_I + Q_I + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \cdot \underline{u}_1 \end{aligned} \quad (1.26.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) = -\Gamma \quad (1.26.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2) + \nabla (\alpha_2 p_2) - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{\tau}_2) \\ = -\underline{u}_\Gamma \Gamma - p_I \nabla \alpha_1 - \underline{M}^d + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \end{aligned} \quad (1.26.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 e_2) + \operatorname{div} ((\alpha_2 \rho_2 e_2 + \alpha_2 p_2) \underline{u}_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 (\underline{q}_2 - \underline{\tau}_2 \underline{u}_2)) \\ = - \left(h_\Gamma + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma + p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \underline{M}^d \cdot \underline{u}_I - Q_I + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \cdot \underline{u}_2 \end{aligned} \quad (1.26.6)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha_1 = \dot{\alpha}_1 \quad (1.26.7)$$

1.2 Fermeture entropique du modèle

Le modèle à deux vitesses et deux pressions (1.26) n'est toujours pas fermé. Il doit encore être complété par des équations d'état liant les variables d'état, et des hypothèses de modélisation doivent être proposées pour le terme de transfert de masse Γ , la force de traînée interfaciale $\underline{M}^d$, le flux de chaleur interfacial Q_I , et le terme de variation de la fraction volumique $\dot{\alpha}_1$, ainsi que sur les différentes vitesses $\underline{u}_\Gamma$, $\underline{u}_I$ et $\underline{u}_\alpha$, la pression à l'interface p_I et l'enthalpie de transfert de masse h_Γ , et enfin sur les tenseurs de contraintes visqueuses phasiques $\underline{\tau}_k$ et les flux de chaleur phasiques $\underline{q}_k$. Dans ce paragraphe, nous allons proposer des fermetures pour ces termes pour que la production d'entropie de mélange, qui sera également définie, soit positive, ce qui permettra de respecter l'approche phénoménologique de la thermodynamique des processus irréversibles [19].

1.2.1 Équations d'état

Pour chaque phase, les équations d'état liant la pression p_k , l'énergie interne i_k , la masse volumique ρ_k la température T_k et l'entropie spécifique s_k doivent être connues. Dans ce travail, des équations de type "gaz raide" [64, 57] seront utilisées pour les deux phases. Ces lois d'état permettent en effet de

modéliser des gaz, mais aussi des liquides et des solides. Elles s'écrivent

$$i_k(p_k, \rho_k) = \frac{p_k + \gamma p_{k,\infty}}{(\gamma_k - 1) \rho_k} + i_{k,0} \quad (1.27.1)$$

$$T_k(p_k, \rho_k) = \frac{p_k + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k} \quad (1.27.2)$$

$$s_k(p_k, \rho_k) = C_{v_k} \ln \left(\frac{p_k + p_{k,\infty}}{(C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k)^{\gamma_k}} \right) + s_{k,0} \quad (1.27.3)$$

où le rapport des chaleurs spécifiques γ_k , la pression de cohésion $p_{k,\infty}$, l'énergie de référence $i_{k,0}$ et l'entropie de référence $s_{k,0}$ sont des constantes dépendant des propriétés thermodynamiques du fluide. Une méthode de détermination de ces paramètres dans le cas des écoulements diphasiques est proposée par Le Métayer, Massoni et Saurel [57].

1.2.2 Écriture de l'équation de production d'entropie

Nous souhaitons utiliser une fermeture du modèle (1.26) de telle manière que la production d'entropie du mélange soit positive. Il faut donc obtenir l'équation de la production d'entropie du mélange s . Mais avant cela, définissons les variables de mélange qui seront nécessaires : la masse volumique ρ , la vitesse $\underline{u}$, l'énergie spécifique interne i , la pression p et l'entropie spécifique s . Ces variables sont définies comme suit

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \quad (1.28.1)$$

$$\rho \underline{u} = \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \quad (1.28.2)$$

$$\rho i = \alpha_1 \rho_1 i_1 + \alpha_2 \rho_2 i_2 \quad (1.28.3)$$

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \quad (1.28.4)$$

$$\rho s = \alpha_1 \rho_1 s_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 \quad (1.28.5)$$

La fraction massique de la phase k est également définie par l'expression

$$Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho} \quad (1.29)$$

Selon l'approche phénoménologique de la thermodynamique des processus irréversibles [19], la forme générale de l'équation de la production d'entropie s'écrit

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \text{div } \underline{F}_s = \Delta_s \quad (1.30)$$

où $\underline{F}_s$ représente le flux d'entropie et Δ_s le terme de production d'entropie, qui doit être positif. Le flux d'entropie est défini comme la somme des flux d'entropie phasique $\underline{F}_s = \alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u}_2$. On introduit également la notion de dérivée totale, ou dérivée Lagrangienne, d'une quantité ϕ par rapport à la vitesse phasique $\underline{u}_k$, qui peut s'écrire

$$\frac{D_k \phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \phi \quad (1.31)$$

Avec cette notation et en utilisant les différentes définitions qui ont été introduites, nous pouvons réécrire l'équation de production de l'entropie de mélange

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u}_2) = \\ \alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 s_1}{Dt} + \alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 s_2}{Dt} + s_1 \left(\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) \right) + s_2 \left(\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Il faut désormais déterminer les dérivées totales des entropies spécifiques phasiques afin d'obtenir l'expression de la production d'entropie. En supposant que chaque composante du mélange se comporte comme un fluide monophasique, on utilise pour chaque phase la relation de Gibbs, qui lie les différentielles de l'entropie spécifique, de l'énergie spécifique interne et de la masse volumique

$$T_k ds_k = di_k - \frac{p_k}{\rho_k^2} d\rho_k \quad (1.33)$$

Nous cherchons maintenant à déterminer les dérivées totales des énergies spécifiques internes de chaque phase et des densités phasiques. Commençons par évaluer ces dernières. À partir des équations de conservation des masses (1.26.1) et (1.26.4), et de l'équation d'advection de la fraction volumique (1.26.7), on obtient les expressions des dérivées totales

$$\alpha_1 \frac{D_1 \rho_1}{Dt} = -\alpha_1 \rho_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 + \rho_1 (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \Gamma - \rho_1 \dot{\alpha}_1 \quad (1.34.1)$$

$$\alpha_2 \frac{D_2 \rho_2}{Dt} = -\alpha_2 \rho_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 - \rho_2 (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 - \Gamma + \rho_2 \dot{\alpha}_1 \quad (1.34.2)$$

Pour obtenir les dérivées totales des énergies spécifiques internes de chaque phase, nous manipulons d'abord le système (1.26) pour obtenir les dérivées totales des énergies cinétiques spécifiques et des énergies totales spécifiques de chaque phase

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 \rho_1}{2} \frac{D_1 \underline{u}_1^2}{Dt} &= -\underline{u}_1 \cdot \nabla (\alpha_1 p_1) + \underline{u}_1 \cdot \operatorname{div}(\alpha_1 \underline{\tau}_1) \\ &\quad + \underline{u}_1 \cdot (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1) \Gamma + p_I \underline{u}_1 \cdot \nabla \alpha_1 + \underline{u}_1 \cdot \underline{M}^d + \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{f}_1^v \end{aligned} \quad (1.35.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 \rho_2}{2} \frac{D_2 \underline{u}_2^2}{Dt} &= -\underline{u}_2 \cdot \nabla (\alpha_2 p_2) + \underline{u}_2 \cdot \operatorname{div}(\alpha_2 \underline{\tau}_2) \\ &\quad - \underline{u}_2 \cdot (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2) \Gamma - p_I \underline{u}_2 \cdot \nabla \alpha_1 - \underline{u}_2 \cdot \underline{M}^d + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \underline{f}_2^v \end{aligned} \quad (1.35.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 e_1}{Dt} &= -\underline{u}_1 \cdot \nabla (\alpha_1 p_1) - \alpha_1 p_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - \operatorname{div}(\alpha_1 (\underline{q}_1 - \underline{\tau}_1 \underline{u}_1)) \\ &\quad + \left(h_\Gamma - e_1 + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma + p_I \underline{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha_1 + \underline{u}_I \cdot \underline{M}^d + \underline{Q}_I - p_I \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{f}_1^v \end{aligned} \quad (1.36.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 e_2}{Dt} &= -\underline{u}_2 \cdot \nabla (\alpha_2 p_2) - \alpha_2 p_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 - \operatorname{div}(\alpha_2 (\underline{q}_2 - \underline{\tau}_2 \underline{u}_2)) \\ &\quad - \left(h_\Gamma - e_2 + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma - p_I \underline{u}_\alpha \cdot \nabla \alpha_1 - \underline{u}_I \cdot \underline{M}^d - \underline{Q}_I + p_I \dot{\alpha}_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \underline{f}_2^v \end{aligned} \quad (1.36.1)$$

À partir de ces expressions, on obtient alors facilement les expressions des dérivées totales des énergies internes

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 i_1}{Dt} &= -\alpha_1 p_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) + p_I (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 \\ &\quad + \left(h_\Gamma - i_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) \Gamma + (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d + Q_I - p_I \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (1.37.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 i_2}{Dt} &= -\alpha_2 p_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 + \alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) - p_I (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 \\ &\quad - \left(h_\Gamma - i_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \Gamma - (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d - Q_I + p_I \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (1.37.2)$$

La relation de Gibbs (1.33) permet d'obtenir les expressions des dérivées Lagrangiennes des entropies spécifiques phasiques à partir des équations (1.34) et (1.37), qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha_1 \rho_1 T_1 \frac{D_1 s_1}{Dt} &= (p_I - p_1) (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \\ &\quad + \left(h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) \Gamma + (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d + Q_I - (p_I - p_1) \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (1.38.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 \rho_2 T_2 \frac{D_2 s_2}{Dt} &= -(p_I - p_2) (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 + \alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \\ &\quad - \left(h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \Gamma - (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d - Q_I + (p_I - p_2) \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (1.38.2)$$

La production de l'entropie de mélange peut maintenant être exprimée. En utilisant les équations de conservation des masses de chaque phase (1.26.1) et (1.26.4), l'équation (1.32) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u}_2) = \alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 s_1}{Dt} + \alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 s_2}{Dt} + (s_1 - s_2) \Gamma \quad (1.39)$$

On utilise les expressions des dérivées totales des entropies spécifiques phasiques (1.38) pour obtenir l'expression de la production d'entropie de mélange, ce qui donne après quelques manipulations

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 s_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 s_2) =$$

$$\left(\frac{1}{T_1} (p_I - p_1) (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_1) - \frac{1}{T_2} (p_I - p_2) (\underline{u}_\alpha - \underline{u}_2) \right) \cdot \nabla \alpha_1 \quad (1.40.1)$$

$$+ \frac{\alpha_1}{T_1} \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 + \frac{\alpha_2}{T_2} \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 \quad (1.40.2)$$

$$- \frac{1}{T_1} \operatorname{div}(\alpha_1 \underline{q}_1) - \frac{1}{T_2} \operatorname{div}(\alpha_2 \underline{q}_2) \quad (1.40.3)$$

$$+ \left(\frac{1}{T_1} \left(h_\Gamma + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) - \frac{1}{T_2} \left(h_\Gamma + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \right) \Gamma \quad (1.40.4) \quad (1.40)$$

$$- \left(\frac{1}{T_1} (p_I - p_1) - \frac{1}{T_2} (p_I - p_2) \right) \dot{\alpha}_1 \quad (1.40.5)$$

$$+ \left(\frac{1}{T_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) - \frac{1}{T_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \cdot \underline{M}^d \quad (1.40.6)$$

$$+ \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) Q_I \quad (1.40.7)$$

$$+ \left(\frac{g_2}{T_2} - \frac{g_1}{T_1} \right) \Gamma \quad (1.40.8)$$

où $g_k = h_k - s_k T_k$ représente le potentiel chimique spécifique de la phase k , avec $h_k = i_k - \frac{p_k}{\rho_k}$ l'enthalpie interne spécifique de la phase k .

1.2.3 Fermeture entropique du modèle diphasique

On souhaite fermer le système (1.26) de telle manière que la production d'entropie du mélange donnée par l'équation (1.40) soit positive pour tous les écoulements. Pour cela, il est suffisant que chaque ligne de cette équation soit positive quelles que soient les variables d'état. Ainsi, le tenseur $\underline{\tau}_k$ des contraintes visqueuses pour la phase k est modélisé par la fonction $\underline{\tau}_k = \eta_k \left(\nabla \underline{u}_k + \nabla^T \underline{u}_k - \frac{2}{3} \operatorname{div} \underline{u}_k \underline{I} \right)$, où η_k est un coefficient positif et $\underline{I}$ est le tenseur unité. Cette modélisation classique assure la positivité du terme $\underline{\tau}_k : \nabla \underline{u}_k$, et donc de la ligne (1.40.2). Nous modélisons également le flux de chaleur $\underline{q}_k$ par la loi de Fourier $\underline{q}_k = -\lambda_k \nabla T_k$, où le coefficient de conductivité thermique λ_k a une valeur positive. Cette modélisation assure la positivité de la ligne (1.40.3).

L'enthalpie h_Γ et la vitesse $\underline{u}_\Gamma$, associées au transfert de masse, doivent être définies de telle manière que la ligne (1.40.4) soit positive. Plusieurs couples $(h_\Gamma, \underline{u}_\Gamma)$ peuvent être utilisés ; une possibilité est de prendre $\underline{u}_\Gamma = \frac{1}{2} (\underline{u}_1 + \underline{u}_2)$ et $h_\Gamma = -\frac{1}{8} (\underline{u}_1 + \underline{u}_2)^2$, ce qui assure alors la nullité de cette ligne.

Pour la suite, nous choisissons d'identifier la vitesse interfaciale $\underline{u}_I$ à la vitesse d'advection de la fraction volumique $\underline{u}_\alpha$, et noterons désormais cette vitesse $\underline{u}_I$. Comme cette vitesse est une vitesse interfaciale, on considère qu'elle peut s'écrire

$$\underline{u}_I = \xi \underline{u}_1 + (1 - \xi) \underline{u}_2 \quad (1.41)$$

avec $\xi \in [0, 1]$, ce qui assure l'équilibre cinématique puisque la relation $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \Rightarrow \underline{u}_I = \underline{u}_1 = \underline{u}_2$ est vérifiée. On suppose également que la pression interfaciale p_I vérifie la relation $\underline{u}_1 = \underline{u}_2$ et $p_1 = p_2 \Rightarrow p_I = p_1 = p_2$, ce qui assure qu'un écoulement homogène le restera. Dans le paragraphe suivant, les différents modèles utilisés pour la vitesse et la pression interfaciale sont discutés.

Vitesses et pressions interfaciales

Différentes modélisations ont été proposées afin de modéliser la vitesse et la pression interfaciales, et certaines ont été étudiées dans la thèse de Guillemaud [41]. Tout d'abord, Ransom et Hicks [73] ont proposé de prendre simplement la moyenne des grandeurs phasiques comme grandeurs interfaciales

$$\underline{u}_I = \frac{1}{2}\underline{u}_1 + \frac{1}{2}\underline{u}_2 \quad (1.42.1)$$

$$p_I = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \quad (1.42.2)$$

Lhuillier [60] reprend la même fermeture pour la vitesse, mais utilise pour la pression interfaciale l'expression $p_I = \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2$: à la limite monophasique, la pression interfaciale prend la valeur de la phase qui disparaît. Glimm, Saltz et Sharp [33, 34] reprennent cette expression, et l'appliquent également pour la vitesse

$$\underline{u}_I = \alpha_2 \underline{u}_1 + \alpha_1 \underline{u}_2 \quad (1.43.1)$$

$$p_I = \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2 \quad (1.43.2)$$

Citons Saurel et Abgrall [77] et Murrone [66] qui emploient la vitesse du centre de masse comme vitesse interfaciale et une moyenne barycentrique utilisant la fraction volumique pour la pression interfaciale

$$\underline{u}_I = Y_1 \underline{u}_1 + Y_2 \underline{u}_2 \quad (1.44.1)$$

$$p_I = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \quad (1.44.2)$$

Toutefois, ces couples $(\underline{u}_I, p_I)$ présentent le défaut de ne pas assurer la positivité de la ligne (1.40.1) dans l'équation de production de l'entropie du système. Nous ne retiendrons pas ces fermetures, et présentons maintenant des fermetures qui assurent une production d'entropie. Deux approches ont été utilisées dans la littérature pour assurer cette propriété. La première est de trouver une fermeture telle que les deux termes $\frac{1}{T_1} (p_I - p_1) (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1$ et $-\frac{1}{T_2} (p_I - p_2) (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1$ soient positifs, ce qui signifie que chaque phase doit vérifier le principe d'entropie. Baer et Nunziato [4] ont employé cette approche, et ont proposé la fermeture

$$\underline{u}_I = \underline{u}_k \quad (1.45.1)$$

$$p_I = p_{k'} \quad (1.45.2)$$

avec $k = 1$ ou $k = 2$ et $k' = 3 - k$. Cette fermeture a été reprise par Kapila *et al.* [48], ainsi que par Gavriluk et Saurel [29], et assure une production d'entropie nulle pour les deux phases, en ce qui concerne les termes de la ligne (1.40.1). Saurel, Gavriluk et Renaud [78] proposent également une fermeture plus complexe, obtenue avec la méthode des équations discrètes

$$\underline{u}_I = \frac{\underline{Z}_1 \underline{u}_1 + \underline{Z}_2 \underline{u}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \text{sign} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) \frac{p_2 - p_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (1.46.1)$$

$$p_I = \frac{\underline{Z}_1 p_2 + \underline{Z}_2 p_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \text{sign} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 (\underline{u}_2 - \underline{u}_1)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (1.46.2)$$

avec $\underline{Z}_k = \rho_k c_k$ l'impédance acoustique de la phase k .

Une autre approche a été utilisée par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [17, 27], qui proposent une fermeture qui assure uniquement une production d'entropie de mélange positive, mais ne préjuge pas de la production des entropies phasiques. Ils jugent que chaque phase considérée comme un fluide monophasique ne représente pas un système isolé, et n'a pas besoin de satisfaire le principe d'entropie. Ils cherchent donc à annuler la ligne (1.40.1) dans son ensemble, et non les termes $(p_I - p_k)(\underline{u}_I - \underline{u}_k)$. Pour définir la vitesse interfaciale, ils rappellent également que $\underline{u}_I$ peut être considérée comme la vitesse de la surface de contact entre les deux phases, et qu'il faut éviter qu'une zone de mélange se crée à ce niveau. Ceci se traduit mathématiquement par la nécessité d'avoir un champ associé à la valeur propre $\underline{u}_I$ linéairement dégénéré. Cette propriété est vérifiée pour trois modélisations de la vitesse interfaciale

$$\underline{u}_I = \xi \underline{u}_1 + (1 - \xi) \underline{u}_2 \quad \xi \in \{0, 1, Y_1\} \quad (1.47)$$

Une fois la vitesse interfaciale modélisée, il faut trouver une pression interfaciale p_I qui annule la ligne (1.40.1), pour obtenir une production d'entropie de mélange. On obtient cette annulation avec l'expression suivante

$$p_I = \frac{(Y_1 T_1)^{-1} (1 - \xi)}{(Y_1 T_1)^{-1} (1 - \xi) + (Y_2 T_2)^{-1} \xi} p_1 + \frac{(Y_2 T_2)^{-1} \xi}{(Y_1 T_1)^{-1} (1 - \xi) + (Y_2 T_2)^{-1} \xi} p_2 \quad (1.48)$$

On peut remarquer que si $\xi = 0$ ou 1 , on retrouve alors la fermeture (1.45).

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons la fermeture proposée par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [17, 27] en utilisant la vitesse du centre de masse comme vitesse interfaciale ($\xi = Y_1$). La vitesse et la pression interfaciale s'écrivent alors

$$\underline{u}_I = Y_1 \underline{u}_1 + Y_2 \underline{u}_2 \quad (1.49.1)$$

$$p_I = \frac{Y_2 T_2}{Y_1 T_1 + Y_2 T_2} p_1 + \frac{Y_1 T_1}{Y_1 T_1 + Y_2 T_2} p_2 \quad (1.49.2)$$

Termes interfaciaux

Il nous reste désormais à modéliser les termes d'échange interfaciaux pour fermer notre modèle. Introduisons pour cela les temps de relaxation $\varepsilon_{\{p,u,T,g\}}$ relatifs à la pression, la vitesse, la température et le potentiel chimique, et les valeurs positives $\mu_{\{p,u,T,g\}}$. Au vu de la forme de l'équation de production d'entropie, les termes d'échanges interfaciaux doivent être écrits de la manière suivante pour assurer une production d'entropie positive.

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\mu_p}{\varepsilon_p} (p_1 - p_2) \quad (1.50.1)$$

$$\underline{M}^d = \frac{\mu_u}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad (1.50.2)$$

$$Q_I = \frac{\mu_T}{\varepsilon_T} (T_2 - T_1) \quad (1.50.3)$$

$$\Gamma = \frac{\mu_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{g_2}{T_2} - \frac{g_1}{T_1} \right) \quad (1.50.4)$$

Les modélisations de $\dot{\alpha}_1$, $\underline{M}^d$ et Q_I sont classiques. Ces fermetures ont la même forme que celles définies par Hurisse [44]. La modélisation de $\dot{\alpha}_1$ est d'ailleurs courante dans la littérature sur les modèles à deux vitesses et deux pressions [77, 27] ; des termes prenant en compte la contrainte inter-granulaire

peut également être insérés [4, 5]. La forme du terme de traînée interfaciale est aussi largement utilisée dans la littérature [47, 52, 65], où elle s'écrit généralement

$$\underline{M}^d = \frac{1}{8} S_V \rho_2 C_D |\underline{u}_2 - \underline{u}_1| (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad (1.51)$$

avec C_D le coefficient de traînée et S_V l'aire interfaciale par unité de volume, lorsque la phase 2 représente la phase prédominante. La modélisation du flux de chaleur se retrouve aussi dans la littérature [49].

En revanche, le transfert de masse est souvent modélisé de la manière suivante [8, 51]

$$\Gamma_k = -\frac{\lambda_\Gamma (T_{sat} - T_k)}{h_{sat} - h_k} \quad (1.52)$$

où l'indice *sat* représente un état de saturation entre les phases, et λ_Γ est un coefficient de transfert de masse. Cette expression est notamment utilisée pour les problèmes de changement de phase, où il n'y a pas de réaction chimique, et montre que le transfert de masse est considéré comme une fonction du transfert de chaleur. Cependant, ce terme n'assure pas une production d'entropie positive.

Il reste à modéliser les coefficients $\mu_{\{p,u,T,g\}}$. Afin de respecter l'homogénéité des équations (1.26), nous prenons les valeurs

$$\mu_p = \frac{1}{p_I} \quad (1.53.1)$$

$$\mu_u = \frac{1}{\rho} \quad (1.53.2)$$

Ces valeurs ont été prises pour qu'elles restent dans les intervalles $\left[\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\right]$ et $[\rho_1, \rho_2]$, respectivement. En ce qui concerne μ_T et μ_g , les choix d'Hurisse [44] sont repris

$$\mu_T = \frac{\alpha_1 \rho_1 C_{v1} \alpha_2 \rho_2 C_{v2}}{\alpha_1 \rho_1 C_{v1} + \alpha_2 \rho_2 C_{v2}} \quad (1.54.1)$$

$$\mu_g = \frac{\alpha_1 \rho_1 \alpha_2 \rho_2}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2} \quad (1.54.2)$$

1.3 Détermination des temps de relaxation

On recherche dans cette partie des méthodes d'estimation des temps de relaxation $\varepsilon_{\{p,u,T,g\}}$ des différentes grandeurs physiques. Ces estimations permettront d'ordonner ces différents temps, et pourront alors être utilisées pour construire des modèles réduits en considérant que certains phénomènes physiques sont à l'équilibre.

1.3.1 Relaxation des pressions

Dans ce paragraphe, on cherche une estimation du temps de mise à l'équilibre des pressions des deux phases, pour les écoulements à bulles. Pour cela, nous reprenons le travail de Le Métayer [56]. Si les pressions sont différentes, des ondes acoustiques vont se propager à l'intérieur de la phase dispersée, ainsi que dans la phase prédominante.

En ce qui concerne la phase dispersée, les ondes vont se propager jusqu'au centre de la bulle, puis se réfléchir vers l'interface entre les deux phases. Si l'écart de pression entre les phases est relativement faible, on peut considérer que les pressions sont équilibrées après cet aller-retour des ondes acoustiques. En considérant que le temps de trajet aller-retour des ondes dans la phase prédominante est beaucoup

plus grand, le temps de relaxation des pressions peut être évalué comme le temps nécessaire aux ondes acoustiques pour effectuer cet aller-retour entre l'interface entre les phases et le centre des bulles. Ce temps peu être estimé comme suit, en supposant que les bulles sont sphériques

$$\varepsilon_p = \frac{2R_p}{c_p} \quad (1.55)$$

où R_p est le rayon moyen des bulles et c_p la vitesse du son à l'intérieur de la phase dispersée. Le temps de relaxation des pressions peut alors être estimé à priori, et sera considéré comme constant par la suite.

Nous pouvons noter que dans le cas des explosifs granulaires, Kapila *et al.* [49] proposent la formule suivante pour estimer le temps de retour à l'équilibre des pressions

$$\varepsilon_p = \frac{\mu_C}{p_2} \quad (1.56)$$

avec μ_C la viscosité de compaction et p_2 la pression de la phase prédominante.

1.3.2 Relaxation des vitesses

Nous présentons maintenant une évaluation du temps de relaxation des vitesses dans les cas des écoulements à bulles. Pour simplifier, on notera 1 la phase dispersée et 2 la phase continue. À partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement du système (1.26), l'expression de la dérivée totale de la vitesse pour la phase dispersée peut être obtenue

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \underline{u}_1}{Dt} = -\nabla (\alpha_1 p) + p_I \nabla \alpha_1 + \underline{M}^d + \alpha_1 \rho_1 \underline{g} \quad (1.57)$$

Les vitesses tendent vers une valeur commune à cause du terme de traînée interfaciale $\underline{M}^d$, qui s'écrit selon la fermeture (1.50.2)

$$\underline{M}^d = \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad (1.58)$$

Or le terme de traînée interfaciale est souvent modélisé dans la littérature comme suit [47, 52, 65]

$$\underline{M}^d = \frac{1}{8} S_V \rho_2 C_D |\underline{u}_2 - \underline{u}_1| (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad (1.59)$$

où C_D est le coefficient de traînée et S_V la surface interfaciale par unité de volume. Si l'on considère que les bulles de la phase dispersée sont des particules sphériques qui ont toutes le même rayon R , S_V peut être calculée comme le rapport de la surface d'une bulle sur son volume, multiplié par la fraction volumique de la phase dispersée.

$$S_V = \frac{\alpha_1 S_{bubble}}{V_{bubble}} = \alpha_1 \frac{4\pi R^2}{4/3\pi R^3} = \alpha_1 \frac{3}{R} \quad (1.60)$$

Par ailleurs, nous évaluerons le coefficient de traînée en utilisant la formule proposée par Clift *et al.* [15]

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.1925 Re^{0.63}) \quad (1.61)$$

avec le nombre de Reynolds Re donné par

$$Re = \frac{\alpha_2 \rho_2 2R |\underline{u}_2 - \underline{u}_1|}{\mu_2} \quad (1.62)$$

où μ_2 est la viscosité dynamique de la phase 2. En identifiant les expressions (1.58) et (1.59), on peut alors obtenir une expression du temps de relaxation des vitesses

$$\varepsilon_u = \frac{8\rho R}{3\alpha_1\rho_2 C_D |\underline{u}_2 - \underline{u}_1|} \quad (1.63)$$

Cette expression pourra être utilisée pour déterminer à priori le temps de relaxation des vitesses, qui sera considéré comme une constante pour la suite de ce travail.

Remarquons également que Kapila *et. al* [49] utilise l'expression suivante pour l'étude d'explosifs granulaires

$$\varepsilon_u = \frac{\alpha_1\rho_1}{\delta} \quad (1.64)$$

où δ représente un coefficient de traînée entre les phases.

1.3.3 Relaxation des températures

Pour évaluer le temps de relaxation des températures, le raisonnement utilisé pour déterminer le temps de relaxation des pressions est repris : nous supposons que le temps de relaxation est le temps nécessaire pour une particule de la phase dispersée de revenir à la même température que la phase qui l'entoure. Nous appliquons ce raisonnement pour les écoulements à bulles, mais il a également été utilisé dans [49] l'étude d'explosifs. Le temps caractéristique du transport conductif dans une particule est donné par la formule suivante [49]

$$\varepsilon_c = \frac{\rho_p C_{v_p}}{\theta_p} L_p^2 \quad (1.65)$$

où ρ_p est la masse volumique de la particule, C_{v_p} sa chaleur spécifique à volume constant, et θ_p le coefficient de conductivité thermique. L_p est une longueur caractéristique ; le rayon de la particule est choisi pour cela, car c'est la longueur que doit parcourir l'information pour que toute la particule soit à température constante. Le temps de relaxation des températures s'écrit donc sous la forme suivante

$$\varepsilon_T = \frac{\rho_p C_{v_p}}{\theta_p} R^2 \quad (1.66)$$

1.3.4 Relaxation des potentiels chimiques

Nous n'avons pas trouvé de méthode pour déterminer le temps de relaxation des potentiels chimiques de manière analytique. En effet, l'expression du transfert de masse est souvent donnée dans la littérature en fonction des températures de phases [79, 88, 8], et il n'existe pas, à notre connaissance, de méthode pour évaluer ce temps de relaxation en fonction des potentiels chimiques des phases. De plus, il n'y a pas de consensus sur les coefficients pour les modèles de condensation et de vaporisation [82].

On se reportera donc aux évaluations empiriques données dans les cas-tests NEPTUNE [8] pour les temps caractéristiques de changement de phase entre l'eau et sa vapeur. Ceux-ci sont généralement de l'ordre de 0.1 à 1 s.

1.3.5 Ordres de grandeur

On détermine les ordres de grandeur des différents temps de relaxation, afin de créer une hiérarchie entre eux. Regardons tout d'abord le cas-test AMOVI [70], où des bulles d'air remontent dans une colonne d'eau à pression atmosphérique (10^5 Pa) à une vitesse de 10 m.s^{-1} . La masse volumique de l'eau est fixée à 1000 kg.m^{-3} et celle de l'air à 1 kg.m^{-3} . La viscosité de l'air est égale à $\mu_{air} =$

$1.74 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, celle de l'eau à $\mu_{eau} = 1.003 \cdot 10^{-3}$ Pa.s [61], et les conductivités thermiques sont égales à $\theta_{air} = 0.025 \text{ J.s}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $\theta_{eau} = 0.6 \text{ J.s}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ [72]. Enfin, les chaleurs spécifiques à volume constant sont $C_{v_{air}} = 717.5 \text{ J.K}^{-1}$ et $C_{v_{eau}} = 201.1 \text{ J.K}^{-1}$. La fraction volumique de l'air pour ce cas-test est supposée égale à $\alpha_{air} = 0.2$. En utilisant les différentes formules obtenues dans les paragraphes précédents, on obtient les temps de relaxations suivants

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= 5.3 \cdot 10^{-5} \text{ s} \\ \varepsilon_u &= 3.0 \cdot 10^{-1} \text{ s} \\ \varepsilon_T &= 5.7 \cdot 10^{-1} \text{ s}\end{aligned}$$

Dans ce cas-test, le temps de relaxation des pressions est très petit et beaucoup plus faible que les temps de relaxation des températures et des vitesses, qui sont du même ordre de grandeur. Comme il ne peut pas y avoir de transfert de masse dans ce cas-test, puisque les deux matériaux sont différents, nous avons également $\varepsilon_g = \infty$.

On souhaite également connaître les ordres de grandeurs des temps de relaxations pour les écoulements incluant des chocs. On étudie donc le cas d'un tube à choc avec un mélange eau-air à pression 10^9 Pa à gauche ($x < 0.5$ m) et 10^5 Pa à droite. Initialement, la densité de l'eau est de 1000 kg.m^{-3} et celle de l'air est de 1 kg.m^{-3} pour l'ensemble du domaine. Les vitesses sont nulles et la fraction volumique de l'air est de 0.2 tout le long du tube. Afin d'avoir une évaluation raisonnable des temps de relaxations pour ce cas-test, on souhaite connaître la pression, la vitesse et la densité des différentes phases à l'abscisse $x = 0.5$ m et pour $t = 200 \mu\text{s}$: ainsi, nous aurons ces valeurs lorsque l'écoulement est complètement développé. Un solveur de Riemann exact est donc utilisé pour résoudre les problèmes de tubes à choc monophasiques pour l'eau puis pour l'air, avec les conditions initiales précédentes, et en modélisant le comportement des deux phases par les équations d'Euler. Les estimations suivantes sont obtenues à l'abscisse $x = 0.5$ m : $\rho_{air} = 0.575 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{eau} = 910 \text{ kg.m}^{-3}$, $u_{air} = 19600 \text{ m.s}^{-1}$, $u_{eau} = 232 \text{ m.s}^{-1}$, $p_{air} = 4.61 \cdot 10^8$ Pa, $p_{eau} = 4.56 \cdot 10^8$ Pa. Le rayon de bulle est fixé à $R = 5 \cdot 10^{-4}$ m, la fraction volumique de l'air à $\alpha_{air} = 0.2$. Les temps de relaxations peuvent alors être estimés pour ce type de problème en utilisant les différentes formules présentées dans les paragraphes précédents

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= 3.0 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ \varepsilon_u &= 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ \varepsilon_T &= 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ s}\end{aligned}$$

Les temps de relaxations sont ici très différents les uns des autres, et leur hiérarchie est claire, avec une relaxation des pressions quasiment instantanée, une mise à l'équilibre des vitesses très rapide, et enfin un retour à l'équilibre des températures qui se fait relativement lentement.

Enfin, nous pouvons citer des estimations de ces temps de relaxation pour le cas d'explosifs granulaires, proposés dans [49]

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= 3.0 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ \varepsilon_u &= 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ s} \\ \varepsilon_T &= 1.8 \cdot 10^{-2} \text{ s}\end{aligned}$$

Pour ce type de matériau, l'échelle de temps de l'écoulement est d'environ 10^{-4} s. On peut voir que les temps de relaxation des pressions et des vitesses sont très faibles par rapport à l'échelle de temps, et du même ordre de grandeur, alors que le temps de relaxation des températures est très grand : l'écoulement est en déséquilibre thermique.

Ces résultats sont finalement utilisés pour estimer que, dans les types d'écoulements qui nous intéressent, une hiérarchie générale peut être établie entre les temps de relaxations des différentes grandeurs physiques

$$\varepsilon_p \ll \varepsilon_u \ll \varepsilon_T \ll \varepsilon_g \quad (1.67)$$

Chapitre 2

Une hiérarchie de modèles pour les écoulements diphasiques

Sommaire

2.1	Développements de Chapman-Enskog	30
2.1.1	Modèle réduit à l'ordre 0	32
2.1.2	Modèle réduit à l'ordre 1	32
2.2	Modèle à deux vitesses et une pression	34
2.2.1	Modèle à l'ordre 0	36
2.2.2	Équivalence avec le modèle bi-fluide	40
2.2.3	Modèle à l'ordre 1	41
2.2.4	Équations d'état	44
2.3	Modèle à une vitesse et une pression	45
2.3.1	Modèle réduit à l'ordre 0	45
2.3.2	Modèle réduit à l'ordre 1	49
2.3.3	Équations d'état	51
2.4	Modèle de Navier-Stokes multi-composantes	52
2.4.1	Modèle réduit à l'ordre 0	52
2.4.2	Modèle réduit à l'ordre 1	60
2.4.3	Équations d'état	63
2.5	Modèle à l'équilibre homogène	66
2.5.1	Modèle réduit à l'ordre 0	66
2.5.2	Modèle réduit à l'ordre 1	72
2.5.3	Équations d'état	76
2.6	Conclusion	77

Le modèle à deux vitesses et deux pressions (1.26) est un modèle complexe et coûteux d'un point de vue numérique. Or il n'est pas toujours nécessaire de garder l'ensemble des variables d'état du système ; on peut au contraire faire l'approximation de l'équilibre entre certaines grandeurs phasiques. Par ailleurs, selon le paragraphe 1.3.5, dans certaines situations physiques une hiérarchie peut être établie entre les temps de relaxation des pressions, vitesses, températures et potentiels chimiques, avec l'ordre

$$\varepsilon_p \ll \varepsilon_u \ll \varepsilon_T \ll \varepsilon_g \quad (2.1)$$

Dans ce chapitre une hiérarchie de modèles pour les écoulements diphasiques est donc développée. Dans le modèle le plus complexe, les variables d'état des deux phases seront totalement en déséquilibre,

tandis que le modèle le plus simple considérera que l'équilibre thermodynamique est réalisé entre les deux phases. Pour établir chaque modèle, nous allons utiliser la technique des développements de Chapman-Enskog, qui sera présentée au prochain paragraphe. Chaque modèle sera écrit à l'ordre ε^0 puis à l'ordre ε^1 , ce dernier permettant de retrouver l'influence du déséquilibre entre les grandeurs phasiques sur les autres variables d'état. Des lois d'état pour chaque modèle seront également proposées, en supposant que les deux phases suivent des lois d'état de type gaz raide (1.27).

2.1 Développements de Chapman-Enskog

La procédure générale pour déterminer un modèle réduit par les développements de Chapman-Enskog est brièvement présentée. Une référence classique sur l'approche par relaxation pour les systèmes hyperboliques est [12]. Cependant, cette dernière ne considère que des systèmes sous forme conservative et ne peut donc pas s'appliquer ici. La technique de Chapman-Enskog exposée maintenant est un peu plus générale et s'applique aussi aux systèmes sous forme non-conservative tels que (1.26). Notons que pour une discussion détaillée des développements de Chapman-Enskog, le lecteur peut également se référer à Natalini [68]. On considère un système hyperbolique contenant un terme source raide

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{R(\underline{W})}{\varepsilon} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (2.2)$$

où le vecteur d'état $\underline{W} = \underline{W}(x, t)$ appartient à Ω , un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$. On s'intéresse au comportement des solutions de (2.2) lorsque ε tend vers zéro, c'est-à-dire les solutions qui sont proches de $\mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^N; \underline{R}(\underline{W}) = 0\} \quad (2.3)$$

Les hypothèses suivantes sont introduites :

Hypothèse 1 : le système d'équations $\underline{R}(\underline{W}) = 0$ définit de façon implicite une sous-variété de dimension n , avec $0 < n < N$. Rappelons rapidement la définition d'une sous-variété de dimension n :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $R_1, \dots, R_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ des fonctions de classe C^1 . On introduit l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $\underline{W}$ tels que

$$\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^N; R_1(\underline{W}) = 0, \dots, R_N(\underline{W}) = 0\} \quad (2.4)$$

Si parmi les différentielles $DR_1(\underline{W}), \dots, DR_N(\underline{W})$, les n premières sont indépendantes en tout point de $\mathcal{E}$, alors ce dernier est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$.

Hypothèse 2 : nous supposons également que nous connaissons une paramétrisation explicite de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire pour tout vecteur $\underline{W} \in \mathcal{E}$, il existe un difféomorphisme M de ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur V_W un voisinage de $\underline{W} \in \mathcal{E}$ tel que

$$\begin{aligned} M : \omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow V_W \subset \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^N \\ \underline{w} &\rightarrow \underline{W} = \underline{M}(\underline{w}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cette paramétrisation sera appelée Maxwellienne par la suite. Nous noterons également dans la suite $R'(\underline{W})$ la matrice Jacobienne de $\underline{R}$ évaluée en $\underline{W}$.

Hypothèse 3 : on fera l'hypothèse que le noyau et l'image de $R'(M(\underline{w}))$ sont en somme directe, c'est-à-dire $\ker(R'(M(\underline{w}))) \oplus \text{Rng}(R'(M(\underline{w}))) = \mathbb{R}^N$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1 : Pour tout vecteur $\underline{w} \in \omega$, les vecteurs colonnes de la matrice Jacobienne $dM_w = \frac{DM}{Dw}$ forment une base de $\ker(R'(M(\underline{w})))$.

Preuve : Puisque M est un difféomorphisme de ω sur $\underline{W} \in \mathcal{E}$, dM_w est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $T_W(\mathcal{E})$ l'espace tangent à $\mathcal{E}$ en $\underline{W}$. Les vecteurs de dM_w forment donc une base de $T_W(\mathcal{E})$. Or, comme la sous-variété d'équilibre $\mathcal{E}$ est définie implicitement par le système (2.3), $T_W(\mathcal{E})$ est en fait $\ker(R'(M(\underline{w})))$, ce qui entraîne le résultat.

Notons maintenant $\{dM_w^1, \dots, dM_w^n\}$ les vecteurs colonnes de la matrice Jacobienne dM_w , et introduisons une base $\mathcal{I}_{N-n} = \{I^1, \dots, I^{N-n}\}$ de l'image de $R'(M(\underline{w}))$. La matrice de dimension $N \times N$ $B = [dM_w^1, \dots, dM_w^n, I^1, \dots, I^{N-n}]$ est inversible. On note P et Q les matrices formées par les n premières lignes et les $N - n$ dernières colonnes de B^{-1} , respectivement. Nous avons alors le résultat

Proposition 2 : Soient $\{dM_w^1, \dots, dM_w^n\}$ la base du sous-espace $\ker(R'(M(\underline{w})))$ et $\{I^1, \dots, I^{N-n}\}$ la base du sous-espace $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$. Alors, dans ces bases, P est la matrice de projection sur $\ker(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ et Q est la matrice de projection sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\ker(R'(M(\underline{w})))$.

Preuve : Soient $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{b} \in \mathbb{R}^{N-n}$. Tout vecteur $\underline{W} \in \mathbb{R}^N$ peut être décomposé en deux parties

$$\underline{W} = \sum_{j=1}^n \underline{a}^j dM_w^j + \sum_{j=1}^{N-n} \underline{b}^j I^j \quad (2.6)$$

où les composantes $\sum_{j=1}^n \underline{a}^j dM_w^j$ et $\sum_{j=1}^{N-n} \underline{b}^j I^j$ sont évidemment la projection sur $\ker(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ la projection sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\ker(R'(M(\underline{w})))$, respectivement. L'équation (2.6) peut être réécrite sous la forme matricielle

$$\underline{W} = B \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et puisque que la matrice B est inversible, on obtient

$$\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = B^{-1} \underline{W} = \begin{pmatrix} P\underline{W} \\ Q\underline{W} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

ce qui donne le résultat.

Les propriétés suivantes sont vérifiées par la matrice P

Proposition 3 :

$$PdM_w = Id(n) \quad (2.9.1)$$

$$\forall \underline{V} \in \text{Rng}(M(\underline{w})) \quad P\underline{V} = 0 \quad (2.9.2)$$

où nous avons introduit $Id(n)$ la matrice identité de dimension $n \times n$

Preuve : Le résultat (2.9.1) provient de l'égalité $B^{-1}B = Id(n)$. L'égalité (2.9.2) vient du fait que, pour tout $\underline{W} \in \mathbb{R}^N$, $R'(M(\underline{w}))\underline{W}$ appartient à l'image de $R'(M(\underline{w}))$.

La propriété suivante est également vérifiée

Proposition 4 : Il existe une matrice inversible Λ de dimension $N - n \times N - n$ telle que

$$R'(M(\underline{w})) = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} B^{-1} \quad (2.10)$$

Preuve : Notons $\mathcal{I}_{N-n}$ la matrice de dimension $N \times N - n$ composée par la base $\{I^1, \dots, I^{N-n}\}$ de $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} B^{-1}R'(M(\underline{w}))B &= \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} R'(M(\underline{w}))(dM_w, \mathcal{I}_{N-n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ QR'(M(\underline{w})) \end{pmatrix} (dM_w, \mathcal{I}_{N-n}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ QR'(M(\underline{w}))dM_w & QR'(M(\underline{w}))\mathcal{I}_{N-n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

et le résultat vient du fait que les vecteurs qui composent dM_w et $\mathcal{I}_{N-n}$ sont dans le noyau et l'image de $R'(M(\underline{w}))$, respectivement. Dans les paragraphes suivants, nous noterons $\Lambda = QR'(M(\underline{w}))\mathcal{I}_{N-n}$.

2.1.1 Modèle réduit à l'ordre 0

Pour obtenir un modèle réduit à l'ordre ε^0 , on décompose les vecteurs d'état $\underline{W}$ sous la forme

$$\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon \underline{V} \quad (2.12)$$

où $M(\underline{w}) \in \mathcal{E}$ et $\underline{V}$ est une fluctuation. Introduisons cette expression dans le système (2.2) et développons ce système. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M(\underline{w})}{\partial t} + A(M(\underline{w}))\frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - R'(M(\underline{w}))\underline{V} \\ &+ \varepsilon \left[\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + A(M(\underline{w}))\frac{\partial \underline{V}}{\partial x} + \left[\frac{\partial A}{\partial \underline{W}_i} \underline{V}_i \right] \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - \frac{1}{2} R''(M(\underline{w}))(\underline{V}, \underline{V}) \right] = \\ &\underline{S}(M(\underline{w})) + \varepsilon S'(M(\underline{w}))\underline{V} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

En multipliant cette équation par la matrice de projection P et en utilisant les propriétés (2.9) de cette matrice, on peut alors écrire

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + PA(M(\underline{w}))dM_w \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = P\underline{S}(M(\underline{w})) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.14)$$

et le système réduit à l'ordre ε^0 est obtenu en négligeant les termes d'ordre ε .

2.1.2 Modèle réduit à l'ordre 1

Soit $\underline{W}$ un vecteur proche de $\mathcal{E}$ que nous écrirons sous la forme $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon \underline{V}$. D'après l'équation (2.13), les termes d'ordre ε font apparaître le vecteur $\underline{V}$ des fluctuations. Il va donc être nécessaire d'exprimer ce vecteur en fonction de $\underline{w}$. Pour cela, nous choisissons de prendre $\underline{V}$ comme un élément de $\text{Rng } R'(M(\underline{w})) : \underline{V} \in \text{Rng } R'(M(\underline{w}))$. Notons que ce choix n'est pas restrictif, puisque selon l'hypothèse 3, $\ker(R'(M(\underline{w})))$ et $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ sont en somme directe. Nous allons voir par la suite que ce choix permet en effet d'exprimer $\underline{V}$ en fonction de $\underline{w}$.

En utilisant l'expression $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon \underline{V}$, la multiplication du système (2.13) par la matrice ${}^t[P, Q]$ donne les deux systèmes suivants

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + PA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \\
& + \varepsilon P \left[\frac{\partial V}{\partial t} + A(M(\underline{w})) \frac{\partial V}{\partial x} + \left[\frac{\partial A}{\partial W_i} V_i \right] \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - \frac{1}{2} R''(M(\underline{w}))(\underline{V}, \underline{V}) \right] = \\
& P\underline{S}(M(\underline{w})) + \varepsilon PS'(M(\underline{w}))\underline{V} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
& QA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - QR'(M(\underline{w}))\underline{V} \\
& + \varepsilon Q \left[\frac{\partial V}{\partial t} + A(M(\underline{w})) \frac{\partial V}{\partial x} + \left[\frac{\partial A}{\partial W_i} V_i \right] \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - \frac{1}{2} R''(M(\underline{w}))(\underline{V}, \underline{V}) \right] = \\
& Q\underline{S}(M(\underline{w})) + \varepsilon QS'(M(\underline{w}))\underline{V} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Si l'on néglige les termes d'ordre ε dans l'équation (2.16), celle-ci se réécrit

$$QA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - QR'(M(\underline{w}))\underline{V} = Q\underline{S}(M(\underline{w})) \tag{2.17}$$

Le système (2.17) a une solution unique. En effet, nous avons choisi $\underline{V} \in \text{Rng } R'(M(\underline{w}))$ et Q est la projection sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la base $\mathcal{I}_{N-n}$. Écrivant alors $\underline{V}$ sous la forme $\underline{V} = \mathcal{I}_{N-n}\underline{v}$, on obtient d'après la proposition 4

$$QR'(M(\underline{w}))\underline{V} = QR'(M(\underline{w}))\mathcal{I}_{N-n}\underline{v} = \Lambda\underline{v} \tag{2.18}$$

et puisque Λ est une matrice inversible, on aura

$$\Lambda\underline{v} = \Lambda^{-1} \left(QA(M(\underline{v}))dM_w \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} - Q\underline{S}(M(\underline{w})) \right) \tag{2.19}$$

où Λ est la matrice $N - n \times N - n$ apparaissant dans l'équation (2.11), qui s'écrit sous la forme $\Lambda = QR'(M(\underline{w}))\mathcal{I}_{N-n}$. Une expression explicite pour $\underline{V}$ peut alors être obtenue

$$\underline{V} = \mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} - E(\underline{w}) \tag{2.20}$$

avec $\mathcal{D}(\underline{w})$ et $E(\underline{w})$ définis par

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\underline{w}) &= \mathcal{I}_{N-n} \Lambda^{-1} QA(M(\underline{w}))dM_w \\
E(\underline{w}) &= \mathcal{I}_{N-n} \Lambda^{-1} Q\underline{S}(M(\underline{w}))
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Un système réduit à l'ordre ε^1 peut être écrit en introduisant l'expression (2.20) dans le système

(2.15) et en négligeant les termes d'ordre ε^2 , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + PA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \\ & + \varepsilon P \left(A(M(\underline{w})) \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial A}{\partial \underline{W}_i} \left(\mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} \right)_i \right] \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} R''(M(\underline{w})) \left(\mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} - E(\underline{w}), \mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} - E(\underline{w}) \right) \right) = \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & P \underline{S}(M(\underline{w})) + \varepsilon P S'(M(\underline{w})) \mathcal{D}(\underline{w}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} \\ & + \varepsilon P \left(A(M(\underline{w})) \frac{\partial}{\partial x} (E(\underline{w})) + \left[\frac{\partial A}{\partial \underline{W}_i} (E(\underline{w}))_i \right] \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Le formalisme qui vient d'être exposé peut, dans certains cas particuliers, sembler un peu lourd. Il a cependant les avantages d'être systématique et de permettre la construction de modèle à l'équilibre en n'introduisant qu'un minimum d'hypothèses physiques, celles sur les vitesses de relaxation. De plus, il est facilement implémentable sous un système de calcul formel (par exemple Maple [86]) et permet donc d'obtenir les systèmes réduits sans risque d'erreurs de calcul.

2.2 Modèle à deux vitesses et une pression

Dans ce paragraphe, les développements de Chapman-Enskog sont utilisés sur le modèle à deux vitesses et deux pressions (1.26). En faisant tendre ε_p vers 0, nous obtiendrons un modèle à deux vitesses et une pression. Les lois de fermeture proposées dans le premier chapitre sont reprises, notamment $\dot{\alpha}_1 = \frac{\mu_p}{\varepsilon_p} (p_1 - p_2)$. Pour simplifier les calculs, on utilise le vecteur d'état des variables primitives $\underline{W} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p_1, p_2, \alpha_1)$. Il est donc nécessaire de déterminer d'abord les équations sur les pressions phasiques.

Si l'on introduit les notations $\chi_k = \left(\frac{\partial i_k}{\partial \rho_k} \right)_{p_k}$ et $\kappa_k = \left(\frac{\partial i_k}{\partial p_k} \right)_{\rho_k}$, les formes différentielles des énergies spécifiques internes vérifient la relation

$$di_k = \chi_k d\rho_k + \kappa_k dp_k \quad (2.23)$$

Cette expression et la relation de Gibbs (1.33) permettent d'obtenir

$$dp_k = \frac{1}{\kappa_k} \left(\frac{p_k}{\rho_k^2} - \chi_k \right) d\rho_k + \frac{T_k}{\kappa_k} ds_k \quad (2.24)$$

La vitesse du son c_k de la phase k est définie par l'expression $c_k^2 = \left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = \frac{1}{\kappa_k} \left(\frac{p_k}{\rho_k^2} - \chi_k \right)$. La vitesse du son de la phase k à l'interface entre les phases est également définie par $c_{k,I} = \frac{1}{\kappa_k} \left(\frac{p_I}{\rho_k^2} - \chi_k \right)$, et les modules de compressibilité adiabatiques $C_k = \rho_k c_k^2$ et $C_{k,I} = \rho_k c_{k,I}^2$. Les équations sur les densités phasiques (1.34) et sur les entropies (1.38) sont utilisées pour trouver les dérivées totales des pressions

phasiques à partir de l'expression (2.24) de la différentielle de la pression phasique

$$\begin{aligned} \frac{D_1 p_1}{Dt} + C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 = \\ \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \right) - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} \dot{\alpha}_1 \\ + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} Q_I + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} \left(h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} + C_1 \kappa_1 \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.25.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2 p_2}{Dt} + C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 + \frac{C_{2I}}{\alpha_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 = \\ \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \right) + \frac{C_{2I}}{\alpha_2} \dot{\alpha}_1 \\ - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} Q_I - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \left(h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} + C_2 \kappa_2 \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.25.2)$$

Le système complet auquel nous allons appliquer la méthode de Chapman-Enskog pour la relaxation des pressions s'écrit donc pour les variables $\underline{W} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p_1, p_2, \alpha_1)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) = \Gamma \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) = -\Gamma \quad (2.27)$$

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \underline{u}_1}{Dt} = -\nabla (\alpha_1 p_1) + \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 \right) + (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1) \Gamma + p_I \nabla \alpha_1 + \underline{M}^d + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \quad (2.28)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \underline{u}_2}{Dt} = -\nabla (\alpha_2 p_2) + \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 \right) - (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2) \Gamma - p_I \nabla \alpha_1 - \underline{M}^d + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_1 p_1}{Dt} + C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 = \\ \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \right) - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$+ \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} Q_I + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} \left(h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} + C_1 \kappa_1 \right) \Gamma$$

$$\begin{aligned} \frac{D_2 p_2}{Dt} + C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 + \frac{C_{2I}}{\alpha_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 = \\ \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \right) + \frac{C_{2I}}{\alpha_2} \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$- \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} Q_I - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \left(h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} + C_2 \kappa_2 \right) \Gamma$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_I \cdot \nabla \alpha_1 = \dot{\alpha}_1 \quad (2.32)$$

2.2.1 Modèle à l'ordre 0

Appliquons la procédure présentée dans le paragraphe 2.1.1 sur le système (2.26 - 2.32) avec les variables primitives $\underline{W} = {}^t(\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p_1, p_2, \alpha_1)$. Ce système peut être écrit sous la forme matricielle suivante

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{R(\underline{W})}{\varepsilon_p} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (2.33)$$

où la matrice $A(\underline{W})$, le terme source raide $R(\underline{W})$ et le terme source $\underline{S}(\underline{W})$ s'écrivent

$$A(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & 0 & \alpha_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u}_2 & 0 & \alpha_2\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u}_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & -\frac{p_I - p_1}{\alpha_1\rho_1} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{u}_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} & \frac{p_I - p_2}{\alpha_2\rho_2} \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & \underline{u}_1 & 0 & -\frac{C_{1I}(\underline{u}_I - \underline{u}_1)}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & \underline{u}_2 & \frac{C_{2I}(\underline{u}_I - \underline{u}_2)}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{u}_I \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\underline{R}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_p \frac{C_{1I}(p_1 - p_2)}{\alpha_1} \\ \mu_p \frac{C_{2I}(p_1 - p_2)}{\alpha_2} \\ \mu_p (p_1 - p_2) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\underline{S}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ -\Gamma \\ \frac{1}{\alpha_1\rho_1} \left(\underline{M}^d + (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1) \Gamma + \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 \right) + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \right) \\ \frac{1}{\alpha_2\rho_2} \left(-\underline{M}^d - (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2) \Gamma + \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 \right) + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \right) \\ \frac{1}{\alpha_1\rho_1\kappa_1} \left((\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d + Q_I + \left(h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} + C_1\kappa_1 \right) \Gamma + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \right) \\ \frac{1}{\alpha_2\rho_2\kappa_2} \left(-(\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d - Q_I - \left(h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} + C_2\kappa_2 \right) \Gamma + \alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Les solutions sont supposées proches de l'équilibre en pression, c'est-à-dire qu'elles sont proches du sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^7$ défini par $\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^7; \underline{R}(\underline{W}) = 0\}$, qui est de dimension 6. On peut connaître explicitement une paramétrisation de ce sous-ensemble. Si le vecteur de dimension 6 $\underline{w} = {}^t(\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p, \alpha_1)$ est introduit, une paramétrisation de $\mathcal{E}$, appelée Maxwellienne par la suite, est donnée par

$$M : \underline{w} \rightarrow M(\underline{w}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ p \\ p \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

La matrice Jacobienne de cette transformation s'écrit immédiatement

$$dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Intéressons-nous au comportement des différentes variables lorsque le temps de relaxation ε_p tend vers 0. Dans ce cas, les pressions phasiques p_1 et p_2 tendent vers une valeur commune, qui sera notée p . Selon sa définition (1.49.2), la pression à l'interface p_I tend aussi vers cette valeur commune p . En conséquence, les vitesses du son à l'interface $c_{k,I}$ tendent vers les vitesses du son c_k et les modules de compressibilité à l'interface C_{kI} tendent vers les modules C_k . On peut donc écrire la matrice Jacobienne de $\underline{R}(M(\underline{w}))$

$$R'(M(\underline{w})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_p \frac{C_1}{\alpha_1} & \mu_p \frac{C_1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_p \frac{C_2}{\alpha_2} & -\mu_p \frac{C_2}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_p & -\mu_p & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Cette matrice est de rang 1 ; une base peut être donnée par le vecteur $I^1 = {}^t \left(0, 0, 0, 0, -\frac{C_1}{\alpha_1}, \frac{C_2}{\alpha_2}, 1 \right)$. Écrivons maintenant la matrice B , définie par $B = [dM_{\underline{w}}, I^1]$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{C_1}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{C_2}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Cette matrice est inversible, et permet retrouver P la matrice de projection sur $\ker(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ et Q la matrice de projection sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\ker(R'(M(\underline{w})))$. Celles-ci sont en effet formées par les six premières colonnes et la dernière colonne de B^{-1} , respectivement.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{-\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Nous pouvons alors calculer la matrice $PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}}$, qui est la matrice du système réduit (2.14).

$$PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & 0 & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u}_2 & 0 & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u}_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{u}_2 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1 C_2 \underline{u}_1 + \alpha_2 C_1 \underline{u}_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{C_1 C_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{-\alpha_1 \alpha_2 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1 \underline{u}_1 + \alpha_1 C_2 \underline{u}_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Par définition de la Maxwellienne $M(\underline{w})$, on a $\underline{R}(M(\underline{w})) = 0$, et les termes sources du modèle réduit sont donnés uniquement par $\underline{PS}(M(\underline{w}))$. On peut donc écrire le système réduit à une pression à l'ordre 0 en utilisant l'équation (2.14) et en négligeant les termes d'ordre ε_p^1

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) = \Gamma \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) = -\Gamma \quad (2.45)$$

$$\alpha_1 \rho_1 \frac{D_1 \underline{u}_1}{Dt} + \alpha_1 \nabla p - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{\tau}_1) = \underline{M}^d + (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1) \Gamma + \alpha_1 \rho_1 f_1^v \quad (2.46)$$

$$\alpha_2 \rho_2 \frac{D_2 \underline{u}_2}{Dt} + \alpha_2 \nabla p - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{\tau}_2) = -\underline{M}^d - (\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2) \Gamma + \alpha_2 \rho_2 f_2^v \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha_1 C_2 \underline{u}_1 + \alpha_2 C_1 \underline{u}_2) \cdot \nabla p + C_1 C_2 \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2) = \\
& \frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1) \right) + \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\
& + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \cdot \underline{M}^d + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I \\
& + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \right) \Gamma
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \alpha_2 C_1 \operatorname{div} \alpha_1 \underline{u}_1 - \alpha_1 C_2 \operatorname{div} \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p = \\
& \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1) \right) - \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\
& + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \cdot \underline{M}^d + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I \\
& + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \right) \Gamma
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Ce système peut être manipulé pour le réécrire sous forme conservative, en utilisant les variables d'état ${}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1, \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2, \alpha_1 \rho_1 e_1, \alpha_2 \rho_2 e_2)$. Il s'écrit alors

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) = \Gamma \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) = -\Gamma \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1) + \alpha_1 \nabla p - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{\tau}_1) = \underline{M}^d + \underline{u}_\Gamma \Gamma + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2) + \alpha_2 \nabla p - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{\tau}_2) = -\underline{M}^d - \underline{u}_\Gamma \Gamma + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 (\rho_1 e_1 + p) \underline{u}_1) - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 \underline{u}_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1) = \tag{2.54}$$

$$-p \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_I \cdot \underline{M}^d + \left(h_\Gamma + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma + Q_I + \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \cdot \underline{f}_1^v$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 (\rho_2 e_2 + p) \underline{u}_2) - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 \underline{u}_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2) = \tag{2.55}$$

$$p \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \underline{u}_I \cdot \underline{M}^d - \left(h_\Gamma + \frac{\underline{u}_\Gamma^2}{2} \right) \Gamma - Q_I + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \cdot \underline{f}_2^v$$

2.2.2 Équivalence avec le modèle bi-fluide

On peut montrer que les solutions régulières du système (2.50 - 2.55) sont aussi solutions du modèle bi-fluide largement utilisé dans la littérature (voir par exemple [31, 51, 62, 65]). Nous reprenons pour cela la démonstration présentée par Murrone [66].

Tout d'abord, notons que le modèle (2.50 - 2.55) possède la même forme que les modèles bi-fluides classiques. Montrons maintenant qu'en utilisant l'hypothèse d'égalité des pressions $p_1 = p_2$, utilisée dans les modèles bi-fluides, l'équation (2.49) sur la fraction volumique α_1 peut être retrouvée, ce qui donne le modèle (2.50 - 2.55).

Pour cela, on dérive l'égalité $p_1(\rho_1, i_1) = p_2(\rho_2, i_2)$ et exprimons les dérivées des pressions phasiques en fonction des dérivées des masses volumiques et des énergies internes, en utilisant l'équation (2.23). La relation suivante est alors obtenue

$$\frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial i_1}{\partial t} - \frac{\chi_1}{\kappa_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial i_2}{\partial t} - \frac{\chi_2}{\kappa_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \quad (2.56)$$

À partir des expressions des dérivées totales des densités phasiques (1.34.1) et (1.34.2) et celles des énergies internes phasiques (1.37.1) et (1.37.2), nous pouvons retrouver les dérivées en temps de ces variables, qui s'écrivent

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -\frac{\rho_k}{\alpha_k} \frac{D_k \alpha_k}{Dt} - \operatorname{div} \rho_k \underline{u}_k + (-1)^{k+1} \frac{\Gamma}{\alpha_k} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_k}{\partial t} = & -\underline{u}_k \cdot \nabla i_k - \frac{p}{\rho_k} \operatorname{div} \underline{u}_k \\ & + \frac{1}{\alpha_k \rho_k} \left(\alpha_k \underline{\tau}_k : \nabla \underline{u}_k - \operatorname{div} (\alpha_k \underline{q}_k) + p (\underline{u}_I - \underline{u}_k) \cdot \nabla \alpha_k - p \dot{\alpha}_k + (-1)^{k+1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d \right. \\ & \left. + (-1)^{k+1} Q_I + (-1)^{k+1} \left(C_k \kappa_k + h_\Gamma - i_k + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_k)^2}{2} \right) \Gamma \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Rappelons que le module de compressibilité C_k de la phase k est défini par $C_k = \frac{\rho_k}{\kappa_k} \left(\frac{p}{\rho_k^2} - \chi_k \right)$. Nous pouvons alors introduire les expressions des dérivées en temps (2.57) et (2.58) dans l'équation (2.56), ce qui donne après quelques manipulations algébriques l'équation d'évolution de la fraction volumique

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + ((\alpha_2 C_1 \underline{u}_1 + \alpha_1 C_2 \underline{u}_2) + (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) (\underline{u}_I - \underline{u}_I)) \cdot \nabla \alpha_1 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2) + \alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p = \\ & \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1) \right) - \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\ & + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \cdot \underline{M}^d + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I \\ & + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_1)^2}{2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2 + \frac{(\underline{u}_\Gamma - \underline{u}_2)^2}{2} \right) \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.59)$$

Cette équation est la même que l'équation du modèle réduit sur la fraction volumique (2.49). Le modèle réduit à une pression obtenu à partir du modèle (1.26) par des développements de Chapman-Enskog est donc le même que le modèle classique bi-fluide à six équations.

2.2.3 Modèle à l'ordre 1

On cherche maintenant à déterminer un modèle réduit à l'ordre ε^1 , qui permet de prendre en compte les déséquilibres de pression. Pour simplifier les écritures, Le terme source $\underline{S}(\underline{W})$ n'est pas pris en compte dans ce paragraphe. On décompose le vecteur $\underline{W}$ en écrivant $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon_p \underline{V}$, avec $\underline{V} = {}^t((\alpha_1 \rho_1)^1, (\alpha_2 \rho_2)^1, u_1^1, u_2^1, p_1^1, p_2^1, \alpha_1^1)$. Puisque nous faisons l'hypothèse $V \in \text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$, la propriété (2.9) $P\underline{V} = 0$ peut être utilisée, avec P la matrice (2.41). Les relations suivantes sont alors obtenues

$$(\alpha_1 \rho_1)^1 = 0 \quad (2.60.1)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)^1 = 0 \quad (2.60.2)$$

$$\underline{u}_1^1 = 0 \quad (2.60.3)$$

$$\underline{u}_2^1 = 0 \quad (2.60.4)$$

$$p_1^1 = -\frac{C_1}{\alpha_1} \alpha_1^1 \quad (2.60.5)$$

$$p_2^1 = \frac{C_2}{\alpha_2} \alpha_1^1 \quad (2.60.6)$$

Le vecteur $\underline{V}$ peut donc être entièrement exprimé en fonction du terme de fluctuation de la fraction volumique α_1^1 . Il faut maintenant déterminer ce dernier terme. On rappelle l'équation (2.17)

$$QA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - QR'(M(\underline{w})) \underline{V} = 0 \quad (2.61)$$

où Q est la matrice (2.42), A est la matrice (2.34) et $R'(M(\underline{w}))$ est la matrice (2.39). La résolution de ce système donne l'expression de α_1^1

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 = \frac{1}{\mu_p} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} & [\alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \text{div } \underline{u}_1 - C_2 \text{div } \underline{u}_2) \\ & - (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1] \end{aligned} \quad (2.62)$$

On souhaite écrire le modèle réduit à l'ordre 1 en utilisant le vecteur des variables conservatives $\underline{W}_c = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1, \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2, \alpha_1 \rho_1 e_1, \alpha_2 \rho_2 e_2, \alpha_1)$. Il faut donc connaître les fluctuations de ces variables. Les expressions des fluctuations de masses et de quantités de mouvement sont rapidement obtenues à partir du système (2.60)

$$(\alpha_1 \rho_1)^1 = 0 \quad (2.63.1)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)^1 = 0 \quad (2.63.2)$$

$$(\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1)^1 = 0 \quad (2.63.3)$$

$$(\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2)^1 = 0 \quad (2.63.4)$$

De plus, puisque les équations d'état de type gaz raide sont utilisées, nous pouvons écrire les égalités $\alpha_k \rho_k e_k = \alpha_k \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1} + \alpha_k \rho_k \frac{\underline{u}_k^2}{2}$ et $C_k = \rho_k c_k^2 = \gamma_k (p_k + p_{k,\infty})$, ce qui permet d'obtenir $p_k^1 = -\alpha_k^1 \gamma_k (p^0 + p_{k,\infty})$, où l'exposant 0 représente la composante à l'équilibre de la variable. On peut

donc écrire

$$\begin{aligned}
\alpha_k \rho_k e_k &= (\alpha_k^0 + \varepsilon_p \alpha_k^1) \frac{(p^0 + \varepsilon_p p_k^1) + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1} + (\alpha_k \rho_k)^0 \frac{(\underline{u}_k^0)^2}{2} \\
&= \alpha_k^0 \frac{p^0 + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1} + (\alpha_k \rho_k)^0 \frac{(\underline{u}_k^0)^2}{2} + \frac{\varepsilon_p}{\gamma_k - 1} (\alpha_k^1 (p^0 + \gamma_k p_{k,\infty}) + \alpha_k^0 p_k^1) \\
&= (\alpha_k \rho_k e_k)^0 + \frac{\varepsilon_p}{\gamma_k - 1} \alpha_k^1 (p^0 + \gamma_k p_{k,\infty} - \gamma_k (p^0 + p_{k,\infty})) \\
&= (\alpha_k \rho_k e_k)^0 - \frac{\varepsilon_p}{p^0} \alpha_k^1
\end{aligned} \tag{2.64}$$

On obtient alors les expressions des composantes hors équilibre des énergies phasiques

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \rho_1 e_1)^1 &= -p^0 \alpha_1^1 \quad (2.65.1) \\
(\alpha_2 \rho_2 e_2)^1 &= p^0 \alpha_1^1 \quad (2.65.1)
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire $(\rho e)^1 = 0$. Il reste à obtenir l'expression de la pression interfaciale p_I à l'ordre 1, à partir de sa définition (1.49.2). Des calculs décrits en annexe A donnent

$$p_I = p^0 + \varepsilon_p \frac{\alpha_1^0 Y_1^0 T_1^0 C_2^0 - \alpha_2^0 Y_2^0 T_2^0 C_1^0}{\alpha_1^0 \alpha_2^0 (Y_1^0 T_1^0 - Y_2^0 T_2^0)} \alpha_1^1 \tag{2.66}$$

Nous supprimons dans la suite les exposants 0 afin d'alléger les écritures. Introduisons maintenant les décompositions $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon_p \underline{V}$ dans le système (1.26), et sommions les équations de conservation des énergies, qui sont redondantes. Ceci donne

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 = 0 \tag{2.67.1}$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 = 0 \tag{2.67.2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1) + \alpha_1 \nabla p \\
&\quad + \varepsilon_p (\alpha_1^1 \nabla p - p_I^1 \nabla \alpha_1 - \nabla C_1 \alpha_1^1) = 0 \tag{2.67.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2) + \alpha_2 \nabla p_2 \\
&\quad + \varepsilon_p (-\alpha_1^1 \nabla p + p_I^1 \nabla \alpha_1 + \nabla C_2 \alpha_1^1) = 0 \tag{2.67.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_1 p) \underline{u}_1) + \operatorname{div} ((\alpha_2 \rho_2 e_2 + \alpha_2 p) \underline{u}_2) \\
&\quad + \varepsilon_p \operatorname{div} (((\underline{u}_1 - \underline{u}_2) p + C_2 \underline{u}_2 - C_1 \underline{u}_1) \alpha_1^1) = 0 \tag{2.67.5}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_I \cdot \nabla \alpha_1 - \mu_p \frac{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1}{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_1^1 + \varepsilon_p \frac{D_I \alpha_1^1}{Dt} = 0 \tag{2.67.6}$$

Si l'on remplace le terme de fluctuation α_1^1 par son expression (2.62), on obtient alors le système suivant, en notant $\frac{D_I}{Dt}$ la dérivée totale par rapport à la vitesse $\underline{u}_I$

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 = 0 \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1) + \alpha_1 \nabla p \\ & + \varepsilon_p \left(\left(\nabla p - \frac{\alpha_1 Y_1 T_1 C_2 - \alpha_2 Y_2 T_2 C_1}{\alpha_1 \alpha_2 (Y_1 T_1 - Y_2 T_2)} \nabla \alpha_1 \right) \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \Bigg) \\ & - \nabla \left(C_1 \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2) + \alpha_2 \nabla p_2 \\ & + \varepsilon_p \left(\left(\nabla p + \frac{\alpha_1 Y_1 T_1 C_2 - \alpha_2 Y_2 T_2 C_1}{\alpha_1 \alpha_2 (Y_1 T_1 - Y_2 T_2)} \nabla \alpha_1 \right) \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \Bigg) \\ & + \nabla \left(C_2 \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_1 p) \underline{u}_1) + \operatorname{div} ((\alpha_2 \rho_2 e_2 + \alpha_2 p) \underline{u}_2) \\ & + \varepsilon_p \operatorname{div} \left(((\underline{u}_1 - \underline{u}_2) p + C_2 \underline{u}_2 - C_1 \underline{u}_1) \frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\alpha_1 C_2 \underline{u}_2 + \alpha_2 C_1 \underline{u}_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \cdot \nabla \alpha_1 \\ & + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \cdot \nabla p + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2) \\ & + \varepsilon_p \frac{D_I}{Dt} \left(\frac{1}{\mu_p} \left(\frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla p}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} + \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 (C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2)}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 Y_2 C_1 - \alpha_1 Y_1 C_2) (\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1}{(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)^2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ce système est très complexe et il est difficile de donner un sens physique aux termes du second ordre qui apparaissent dans son expression. À notre connaissance, il n'a jamais été considéré dans la littérature diphasique.

2.2.4 Équations d'état

On veut maintenant déterminer les équations d'état qui complètent le modèle à six équations (2.44 - 2.49). Puisque le système ne contient qu'une seule pression p pour le mélange, nous voulons relier celle-ci à la masse volumique du mélange $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ et à l'énergie spécifique interne du mélange $i = Y_1 i_1 + Y_2 i_2$. Rappelons que chaque phase prise comme un fluide monophasique suit une loi d'état de type gaz raide

$$p = (\gamma_k - 1) \rho_k (i_k - i_{k,0}) - \gamma p_{k,\infty} \quad (2.74)$$

Les coefficients de mélange γ , p_∞ et i_0 doivent être trouvés de telle sorte qu'ils vérifient

$$p = (\gamma - 1) \rho (i - i_0) - \gamma p_\infty \quad (2.75)$$

Pour cela, les équations d'état (2.74) sont utilisées pour écrire les expressions des énergies internes i_k , comme proposé par Saurel, Gavriluk et Renaud [78]. En utilisant la définition de la fraction massique $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$, nous pouvons développer l'expression de l'énergie interne du mélange comme suit

$$i = \frac{\alpha_1}{\rho} \frac{p + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{p + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} + Y_1 i_{1,0} + Y_2 i_{2,0} \quad (2.76)$$

L'introduction de cette expression dans l'équation (2.75), permet d'obtenir

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(\frac{p}{\rho} \left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) Y_1 i_{1,0} + Y_2 i_{2,0} - i_0 \right) \quad (2.77)$$

On en déduit les expressions de γ , p_∞ et i_0 par identification

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \quad (2.78.1)$$

$$i_0 = Y_1 i_{1,0} + Y_2 i_{2,0} \quad (2.78.2)$$

$$\frac{\gamma p_\infty}{\gamma - 1} = \alpha_1 \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \alpha_2 \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \quad (2.78.3)$$

Remarquons que ces coefficients ne sont plus des constantes comme pour les fluides monophasiques, mais qu'ils dépendent des fractions volumiques ou massiques. La pression devient alors une fonction de la masse volumique et de l'énergie interne de mélange, mais aussi de la fraction volumique et de la fraction massique. Finalement, en utilisant ces paramètres thermodynamiques du mélange, les équations d'état qui complètent le système (2.44 - 2.49) s'écrivent

$$p(\rho, i, \alpha_1, Y_1) = (\gamma - 1) \rho (i - i_0) - \gamma p_\infty \quad (2.79.1)$$

$$T_k(p, \rho_k) = \frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k} \quad (2.79.2)$$

$$s_k(p, \rho_k) = C_{v_k} \ln \left(\frac{p + p_{k,\infty}}{(C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k)^{\gamma_k}} \right) + s_{0,k} \quad (2.79.2)$$

2.3 Modèle à une vitesse et une pression

Suivant l'ordre des temps de retour à l'équilibre proposé en (1.67), nous allons maintenant envisager des situations où la mise en équilibre des vitesses est rapide. Pour cela, on reprend la démarche asymptotique générale utilisant les développements de Chapman-Enskog exposée au paragraphe 2.1 pour obtenir à partir du système (2.44 - 2.49) un modèle à une vitesse et une pression. Ceci n'est pas équivalent à une relaxation simultanée des pressions et des vitesses à partir du modèle à deux vitesses et deux pressions, comme réalisée par Murrone [66] par exemple. En effet, une relaxation simultanée des deux grandeurs signifie que l'on considère que les temps de retour à l'équilibre ε_p et ε_u sont du même ordre de grandeur, alors que dans le cas présent nous supposons que $\varepsilon_p \ll \varepsilon_u$. Cette différence aura une influence sur les termes du second ordre que nous obtiendrons. Ce modèle est obtenu par la relaxation des vitesses, ce qui signifie que nous considérons le temps ε_u comme petit. Dans ce paragraphe, puisque le temps de relaxation des pressions ε_p est considéré comme beaucoup plus petit que celui des vitesses ε_u , on ne prends pas comme point de départ le modèle (2.68 - 2.73), qui inclut des termes d'ordre ε_p issus du déséquilibre des pressions, mais le modèle (2.44 - 2.49) ; l'équilibre des pressions est donc supposé.

2.3.1 Modèle réduit à l'ordre 0

Nous reprenons le modèle à six équations (2.44 - 2.49), qui s'écrit avec le vecteur d'état $\underline{W} = {}^t(\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p, \alpha_1)$. Comme nous l'avons vu précédemment, le système peut être écrit sous forme matricielle

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{R(\underline{W})}{\varepsilon_u} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (2.80)$$

où la matrice $A(\underline{W})$ est donnée par l'équation (2.43) et s'écrit

$$A(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 & 0 & \alpha_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u}_2 & 0 & \alpha_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u}_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{u}_2 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1 C_2 \underline{u}_1 + \alpha_2 C_1 \underline{u}_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{C_1 C_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{-\alpha_1 \alpha_2 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\underline{u}_1 - \underline{u}_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \frac{\alpha_2 C_1 \underline{u}_1 + \alpha_1 C_2 \underline{u}_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Le terme source raide $\underline{R}(\underline{W})$ contient les termes provenant de la force de traînée interfaciale. Si l'on utilise la définition (1.50.2) $\underline{M}^d = \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$, le terme $\underline{R}(\underline{W})$ devient

$$\underline{R}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}{\alpha_1 \rho_1} \\ -\rho \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}{\alpha_2 \rho_2} \\ \rho \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \cdot \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \\ \rho \frac{\underline{u}_2 - \underline{u}_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \right) \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

Le terme $\underline{S}(\underline{W})$ regroupe les termes sources ne dépendant pas de la force de traînée, et peut être écrit

$$\underline{S}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ -\Gamma \\ \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} \left(\frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_2}{2} \Gamma + \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 \right) + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v \right) \\ \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \left(-\frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_2}{2} \Gamma + \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 \right) + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \right) \\ \frac{1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \left[\left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} (C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} (C_2 \kappa_2 h_\Gamma - h_2) \right) \Gamma \right. \\ \left. + \frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \right) + \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \right) \right] \\ \frac{1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \left[\left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2) \right) \Gamma \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u}_1 - \operatorname{div} \left(\alpha_1 \underline{q}_1 \right) \right) - \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u}_2 - \operatorname{div} \left(\alpha_2 \underline{q}_2 \right) \right) \right] \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Comme prévu par la théorie générale présentée dans le paragraphe 2.1, on suppose que les solutions du système (2.44 - 2.49) sont proches du sous-ensemble de $\mathbb{R}^6$ $\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^6; \underline{R}(\underline{W}) = 0\}$, qui est de dimension 5. On obtient facilement une paramétrisation de ce sous-ensemble. Si l'on note le vecteur de $\mathbb{R}^5$ $\underline{w} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \underline{u}, p, \alpha_1)$, alors une paramétrisation explicite de $\mathcal{E}$ est donnée par la Maxwellienne $M(\underline{w})$, qui s'écrit

$$M : \underline{w} \rightarrow M(\underline{w}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \underline{u} \\ \underline{u} \\ p \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

On peut obtenir la matrice Jacobienne $dM_{\underline{w}}$ de la Maxwellienne $M(\underline{w})$. Celle-ci s'écrit

$$dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Remarquons ici que, puisque les vitesses phasiques $\underline{u}_k$ tendent vers une valeur commune $\underline{u}$, la vitesse interfaciale $\underline{u}_I$ tend aussi vers cette valeur commune $\underline{u}$ d'après l'expression (1.49.1). De même, le transfert de quantité de mouvement dû au transfert de masse s'écrit désormais $\underline{u}\Gamma$, et la dérivée totale d'une variable ϕ est définie par $\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\phi$. Après ces considérations, nous pouvons maintenant écrire la matrice Jacobienne du terme source raide $R(\underline{W})$ évalué en $M(\underline{w})$

$$R'(M(\underline{w})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{\alpha_1\rho_1} & -\frac{\rho}{\alpha_1\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\rho}{\alpha_2\rho_2} & \frac{\rho}{\alpha_2\rho_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Cette matrice est de rang 1, et une base de cette matrice est fournie par le vecteur

$$I^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{Y_1} \\ -\frac{1}{Y_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

La matrice $B = [dM_{\underline{w}}, I^1]$ peut alors être écrite

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{Y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{Y_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Cette matrice est inversible. Les cinq premières lignes de la matrice inverse B^{-1} donnent la matrice de projection P sur $\ker(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$, et la dernière ligne forme la matrice de projection Q sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\ker(R'(M(\underline{w})))$. Ces matrices s'écrivent

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_1 Y_2 & -Y_1 Y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

La matrice $PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}}$ est calculée, et permet d'obtenir un modèle réduit à l'ordre 0

$$PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} \underline{u} & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u} & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & \underline{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} & 0 & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Le terme source du système réduit est donné par $PS(M(\underline{w}))$, puisque $PR(M(\underline{w})) = 0$ par définition. On introduit le tenseur des contraintes visqueuses moyennes $\underline{\tau} = \alpha_1 \underline{\tau}_1 + \alpha_2 \underline{\tau}_2$. Nous pouvons alors écrire un modèle à une vitesse et une pression

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \underline{u}) = \Gamma \quad (2.92.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_2 \rho_2 \underline{u}) = -\Gamma \quad (2.92.2)$$

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} + \nabla p - \operatorname{div} \underline{\tau} = \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \quad (2.92.3)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{Dp}{Dt} + C_1 C_2 \operatorname{div} \underline{u} = \\ & \frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div}(\alpha_1 \underline{q}_1) \right) + \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div}(\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\ & + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I + \left(\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} (C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} (C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2) \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.92.4)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{D\alpha_1}{Dt} + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \operatorname{div} \underline{u} = \\ & \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div}(\alpha_1 \underline{q}_1) \right) - \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div}(\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\ & + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2) \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.92.5)$$

La partie convective de ce modèle est équivalente au modèle proposé par Murrone et Guillard [66, 67]. Dans ces travaux, ce modèle avait été obtenu en considérant que $\varepsilon_p \approx \varepsilon_u \ll 1$. On voit ici qu'il est équivalent à l'ordre 0 en ε de faire une relaxation en pression, puis en vitesse. Dans la littérature diphasique récente, le modèle (2.92) a reçu une grande attention [49, 94, 71]. On notera que d'autres modèles à cinq équations ont aussi été proposés récemment [92]. Après quelques manipulations algébriques, le modèle peut être réécrit en fonction des variables conservatives ${}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \rho \underline{u}, \rho e, \alpha_1)$.

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}) = \Gamma \quad (2.93.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}) = -\Gamma \quad (2.93.2)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p - \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} = \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \quad (2.93.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho e + p) \underline{u}) - \operatorname{div} (\underline{\underline{\tau}} \underline{u}) + \operatorname{div} \underline{q} = \underline{u} \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v) \quad (2.93.4)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{D \alpha_1}{D t} + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \operatorname{div} \underline{u} = \\ & \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} \left(\alpha_1 \underline{\underline{\tau}}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1) \right) - \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \left(\alpha_2 \underline{\underline{\tau}}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2) \right) \\ & + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I + \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} (C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} (C_2 \kappa_2 + h_\Gamma - h_2) \right) \Gamma \end{aligned} \quad (2.93.5)$$

2.3.2 Modèle réduit à l'ordre 1

Pour simplifier les écritures, le terme source $\underline{S}(\underline{W})$ n'est pas pris en compte dans ce paragraphe. Le vecteur $\underline{W}$ se décompose en deux parties, $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon_u \underline{V}$, avec $M(\underline{w})$ les variables représentant un système où les vitesses sont à l'équilibre et $\underline{V}$ le vecteur de fluctuations ${}^t((\alpha_1 \rho_1)^1, (\alpha_2 \rho_2)^1, \underline{u}_1^1, \underline{u}_2^1, p^1, \alpha_1^1)$, qui appartient au sous-ensemble $Rng(R'(M(\underline{w})))$. Selon l'équation (2.9.2), nous avons alors l'égalité $P\underline{V} = 0$, où P est la matrice (2.89). Le développement de ce système d'équations donne

$$(\alpha_1 \rho_1)^1 = 0 \quad (2.94.1)$$

$$(\alpha_2 \rho_2)^1 = 0 \quad (2.94.2)$$

$$Y_1 \underline{u}_1^1 + Y_2 \underline{u}_2^1 = 0 \quad (2.94.3)$$

$$p^1 = 0 \quad (2.94.4)$$

$$\alpha^1 = 0 \quad (2.94.5)$$

Par ailleurs, nous reprenons l'équation (2.17), qui s'écrit

$$QA(M(\underline{w})) \frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} - QR'(M(\underline{w})) \underline{V} = 0 \quad (2.95)$$

Le développement de cette équation donne

$$(\underline{u}_1^1 - \underline{u}_2^1) = Y_1 Y_2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \nabla p \quad (2.96)$$

Les équations (2.94.3) et (2.96) nous permettent de trouver les expressions des fluctuations des vitesses, après quelques manipulations

$$\underline{u}_1^1 = Y_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 - \rho_2)}{\rho^2} \nabla p \quad (2.97.1)$$

$$\underline{u}_2^1 = -Y_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 - \rho_2)}{\rho^2} \nabla p \quad (2.97.2)$$

Nous introduisons maintenant la vitesse relative $\underline{u}_r = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$. En rappelant que la vitesse de la phase k se décompose sous la forme $\underline{u}_k = \underline{u} + \varepsilon_u \underline{u}_k^1$, la vitesse relative s'exprime de la manière suivante

$$\underline{u}_r = \varepsilon_u (\underline{u}_1^1 - \underline{u}_2^1) = \varepsilon_u \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 - \rho_2)}{\rho^2} \nabla p = \varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p \quad (2.98)$$

Cette expression définit la vitesse relative par une sorte de loi de Darcy, faisant intervenir le gradient de pression. Cette expression a déjà été obtenue dans un cadre isotherme par Guillard et Duval [40]. Les vitesses des deux phases peuvent elles s'écrire

$$\underline{u}_1 = \underline{u} + Y_2 \underline{u}_r = \underline{u} + \varepsilon_u Y_2 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p \quad (2.99.1)$$

$$\underline{u}_2 = \underline{u} - Y_1 \underline{u}_r = \underline{u} - \varepsilon_u Y_1 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p \quad (2.99.2)$$

On peut alors écrire le modèle à cinq équations à l'ordre 1

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}) = - \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 Y_2 \underline{u}_r) \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}) = \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 Y_1 \underline{u}_r) \quad (2.101)$$

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \underline{g} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{Dp}{Dt} + C_1 C_2 \operatorname{div} \underline{u} \\ & + (\alpha_1 C_2 Y_2 - \alpha_2 C_1 Y_1) \underline{u}_r \cdot \nabla p + C_1 C_2 \underline{u}_r \cdot \nabla \alpha_1 + C_1 C_2 (\alpha_1 \operatorname{div} (Y_2 \underline{u}_r) - \alpha_2 \operatorname{div} (Y_1 \underline{u}_r)) = \\ & \rho \left(\frac{Y_1 C_1}{\rho_2 \kappa_2} + \frac{Y_2 C_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (\underline{u}_r)^2 \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{D\alpha_1}{Dt} + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \operatorname{div} \underline{u} = \\ & - \alpha_1 \alpha_2 \underline{u}_r \cdot \nabla p - \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div} (Y_2 \underline{u}_r) + C_2 \operatorname{div} (Y_1 \underline{u}_r)) - (\alpha_2 C_1 Y_2 - \alpha_1 C_2 Y_1) \underline{u}_r \cdot \nabla \alpha_1 \\ & + \rho \left(\frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) (\underline{u}_r)^2 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Par des manipulations algébriques, on peut montrer que les solutions régulières de ce système vérifient aussi le système d'équations suivant, écrit en fonction des variables conservatives

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \operatorname{div} ((\alpha_1 \rho_1) \underline{u}) = -\operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{u}_r) \quad (2.105.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) + \operatorname{div} ((\alpha_2 \rho_2) \underline{u}) = \operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{u}_r) \quad (2.105.2)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p = \rho \underline{g} \quad (2.105.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho e + p) \underline{u}) = \operatorname{div} ((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 \underline{u}_r) + \rho \underline{u} \cdot \underline{g} \quad (2.105.4)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{D\alpha_1}{Dt} + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \operatorname{div} \underline{u} = \\ (Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) \underline{u}_r \cdot \nabla \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div} (Y_2 \underline{u}_r) + C_2 \operatorname{div} (Y_1 \underline{u}_r)) \\ - \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \underline{u}_r \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (2.105.5)$$

où $h_k = i_k + \frac{p}{\rho_k}$ définit l'enthalpie spécifique interne de la phase k .

2.3.3 Équations d'état

On suppose que chaque phase est gouvernée par une loi d'état de type gaz raide. À partir de ces équations d'état, nous voulons obtenir les équations d'état du mélange qui complètent le système à une vitesse et une pression (2.93).

La masse volumique du mélange $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$, les fractions massiques $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$ et l'énergie interne du mélange $i = e - \frac{\underline{u}^2}{2}$ sont facilement déterminées. La pression $p(\rho, i, \alpha_1, Y_1)$ peut ensuite être retrouvée en utilisant la même procédure que celle présentée dans le paragraphe 2.2.4 pour le modèle à deux vitesses et une pression. Les équations d'état peuvent donc être données

$$p(\rho, i, \alpha_1, Y_1) = (\gamma - 1) \rho (i - i_0) - \gamma p_\infty \quad (2.106.1)$$

$$T_k(p, \rho_k) = \frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k} \quad (2.106.2)$$

$$s_k(p, \rho_k) = C_{v_k} \ln \left(\frac{p + p_{k,\infty}}{(C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k)^{\gamma_k}} \right) + s_{k,0} \quad (2.106.2)$$

avec les coefficients thermodynamiques du mélange γ , i_0 et p_∞ définis par

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} \quad (2.107.1)$$

$$i_0 = Y_1 i_{1,0} + Y_2 i_{2,0} \quad (2.107.2)$$

$$\frac{\gamma p_\infty}{\gamma - 1} = \alpha_1 \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \alpha_2 \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \quad (2.107.3)$$

Le modèle dissipatif (2.105) est un système nouveau qui à notre connaissance n'a pas été étudié dans la littérature diphasique. Il se présente comme la version anisotherme du modèle décrit par Guillard et Duval [40]. L'étude mathématique et numérique de ce modèle fera l'objet du chapitre 4.

2.4 Modèle de Navier-Stokes multi-composantes

Le modèle (2.92) à une vitesse et une pression est un modèle où les températures des deux phases sont différentes. À partir de ce modèle à deux températures, on souhaite désormais obtenir un modèle de Navier-Stokes multi-composantes, ou modèle homogène relaxé (HRM), par la relaxation des températures. Dans ce paragraphe, nous négligerons les termes d'ordre ε_u , car les temps de relaxation des vitesses sont considérés comme beaucoup plus petits que les temps de relaxation des températures.

2.4.1 Modèle réduit à l'ordre 0

Avant de procéder à l'étude du système relaxé en températures, le modèle à cinq équations (2.92) sera exprimé en utilisant le vecteur d'état $\underline{W} = {}^t(T_1, T_2, \underline{u}, p, \alpha_1)$ pour des raisons de simplicité des calculs. On procède donc d'abord à un changement de variables. Le système (2.92), écrit avec le vecteur $\tilde{W} = {}^t(\alpha_1 \rho_1, \alpha_2 \rho_2, \underline{u}, p, \alpha_1)$, s'exprime sous la forme matricielle

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \tilde{A}(\tilde{W}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = \frac{\tilde{R}(\tilde{W})}{\varepsilon_T} + \tilde{S}(\tilde{W}) \quad (2.108)$$

Si nous introduisons les notations suivantes

$$\hat{C} = \alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1 \quad (2.109)$$

$$\Phi = \frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2} \quad (2.110)$$

$$\Psi = \frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \quad (2.111)$$

la matrice $\tilde{A}(\tilde{W})$, le terme source raide $\frac{\tilde{R}(\tilde{W})}{\varepsilon_T}$ et le second terme source $\tilde{S}(\tilde{W})$ s'écrivent

$$\tilde{A}(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u} & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u} & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} & \underline{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\hat{C}_1 - C_2)}{\hat{C}} & 0 & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

$$\frac{\tilde{R}(\tilde{W})}{\varepsilon_T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{Q_I}{\hat{C}} \Phi \\ \frac{Q_I}{\hat{C}} \Psi \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

$$\underline{\tilde{S}}(\underline{\tilde{W}}) = \begin{pmatrix} \Gamma \\ -\Gamma \\ \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \underline{\tau} + \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \right) \\ C_2 \left(\Gamma(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1 \right) \\ \frac{\hat{C} \rho_1 \kappa_1}{\alpha_2 \left(\Gamma(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1 \right)} + \frac{C_1 \left(-\Gamma(C_2 \kappa_1 + h_\Gamma - h_2) + \alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2 \right)}{\hat{C} \rho_2 \kappa_2} \\ \frac{\alpha_2 \left(\Gamma(C_1 \kappa_1 + h_\Gamma - h_1) + \alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1 \right)}{\hat{C} \rho_1 \kappa_1} - \frac{\alpha_1 \left(-\Gamma(C_2 \kappa_1 + h_\Gamma - h_2) + \alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2 \right)}{\hat{C} \rho_2 \kappa_2} \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

Introduisons les notations $\eta_k = \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial T_k} \right)_{p_k}$ et $\theta_k = \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p_k} \right)_{T_k}$. Ainsi, nous pouvons écrire les formes différentielles des densités phasiques

$$d\rho_k = \eta_k dT_k + \theta_k dp \quad (2.115)$$

Ce qui permet d'exprimer la différentielle du vecteur $\underline{\tilde{W}}$ en fonction de celle du vecteur $\underline{W}$

$$d\underline{\tilde{W}} = G d\underline{W} \quad (2.116)$$

avec la matrice de changement de variables

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \theta_1 & \rho_1 \\ 0 & \alpha_2 \eta_2 & 0 & \alpha_2 \theta_2 & -\rho_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

On peut alors écrire

$$G^{-1} G \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + G^{-1} \tilde{A}(\underline{\tilde{W}}) G \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{G^{-1} \tilde{R}(\underline{\tilde{W}})}{\varepsilon_T} + G^{-1} \underline{\tilde{S}}(\underline{\tilde{W}}) \quad (2.118)$$

soit, en définissant la matrice $A(\underline{W}) = G^{-1} \tilde{A} G$, et les vecteurs $\underline{R}(\underline{W}) = G^{-1} \tilde{R}(\underline{\tilde{W}})$ et $\underline{S}(\underline{W}) = G^{-1} \underline{\tilde{S}}(\underline{\tilde{W}})$,

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{\underline{R}(\underline{W})}{\varepsilon_T} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (2.119)$$

Les produits matriciels peuvent alors être calculés pour obtenir les expressions suivantes pour la matrice $A(\underline{W})$ et les vecteurs sources du système. Le vecteur source $\underline{S}(\underline{W})$ est décomposé en deux vecteurs, $\underline{S}_\Gamma(\underline{W})$ comprenant les termes fonctions du terme d'échange de masse Γ et $\underline{S}_F(\underline{W})$ comprenant les termes non interfaciaux, par souci de clarification.

$$A(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u} & 0 & \frac{C_2(\theta_1 C_1 - \rho_1)}{\eta_1 \hat{C}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u} & \frac{C_1(\theta_2 C_2 - \rho_2)}{\eta_2 \hat{C}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{u} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} & \underline{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2)}{\hat{C}} & 0 & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

$$\frac{\underline{R}(\underline{W})}{\varepsilon_T} = \begin{pmatrix} -Q_I \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \\ -Q_I \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \\ 0 \\ \frac{Q_I}{\hat{C}} \Phi \\ \frac{Q_I}{\hat{C}} \Psi \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

$$\underline{S}_\Gamma(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma}{\alpha_1 \eta_1} \left(1 - \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_2 + \alpha_2 \rho_1)(\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1)}{\rho_1 \kappa_1 \hat{C}} + \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_1 - \alpha_1 \rho_1)(\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2)}{\rho_2 \kappa_2 \hat{C}} \right) \\ \frac{\Gamma}{\alpha_2 \eta_2} \left(-1 - \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_2 - \alpha_2 \rho_2)(\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1)}{\rho_1 \kappa_1 \hat{C}} + \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_1 + \alpha_1 \rho_2)(\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2)}{\rho_2 \kappa_2 \hat{C}} \right) \\ 0 \\ \Gamma \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} \left(\frac{\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1}{\rho_1 \kappa_1 C_1} - \frac{\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2}{\rho_2 \kappa_2 C_2} \right) \\ \Gamma \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\hat{C}} \left(\frac{\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} + \frac{\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

$$\underline{S}_F(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \left(\frac{(\alpha_1 \theta_1 C_2 + \alpha_2 \rho_1) (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1)}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_1 + \alpha_1 \rho_1) (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2)}{\rho_2 \kappa_2} \right) \\ \frac{-1}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \left(\frac{(\alpha_2 \theta_2 C_2 + \alpha_2 \rho_2) (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1)}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_1 + \alpha_1 \rho_2) (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2)}{\rho_2 \kappa_2} \right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \underline{\tau} + \alpha_1 \rho_1 f_1^v + \alpha_2 \rho_2 f_2^v \right) \\ \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} \left(\frac{\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1}{\rho_1 \kappa_1 C_1} + \frac{\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2}{\rho_2 \kappa_2 C_2} \right) \\ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\hat{C}} \left(\frac{\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} - \frac{\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \right) \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

Le modèle dissipatif à cinq équations (2.92) peut maintenant être écrit en fonction des variables ${}^t(T_1, T_2, \underline{u}, p, \alpha_1)$. On obtient alors le système

$$\begin{aligned} \frac{DT_1}{Dt} + \frac{C_2 (\theta_1 C_1 - \rho_1)}{\eta_1 \hat{C}} \operatorname{div} \underline{u} &= -Q_I \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \\ &+ \frac{\Gamma}{\alpha_1 \eta_1} \left(1 - \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_2 + \alpha_2 \rho_1) (\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1)}{\rho_1 \kappa_1 \hat{C}} + \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_1 - \alpha_1 \rho_1) (\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2)}{\rho_2 \kappa_2 \hat{C}} \right) \\ &- \frac{1}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \left(\frac{(\alpha_1 \theta_1 C_2 + \alpha_2 \rho_1) (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1)}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{(\alpha_1 \theta_1 C_1 + \alpha_1 \rho_1) (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2)}{\rho_2 \kappa_2} \right) \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} \frac{DT_2}{Dt} + \frac{C_1 (\theta_2 C_2 - \rho_2)}{\eta_2 \hat{C}} \operatorname{div} \underline{u} &= -Q_I \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \\ &+ \frac{\Gamma}{\alpha_2 \eta_2} \left(-1 - \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_2 - \alpha_2 \rho_2) (\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1)}{\rho_1 \kappa_1 \hat{C}} + \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_1 + \alpha_1 \rho_2) (\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2)}{\rho_2 \kappa_2 \hat{C}} \right) \\ &- \frac{1}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \left(\frac{(\alpha_2 \theta_2 C_2 + \alpha_2 \rho_2) (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1)}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{(\alpha_2 \theta_2 C_1 + \alpha_1 \rho_2) (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2)}{\rho_2 \kappa_2} \right) \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \left(\operatorname{div} \underline{\tau} + \alpha_1 \rho_1 f_1^v + \alpha_2 \rho_2 f_2^v \right) \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} + \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} \underline{u} &= \frac{Q_I}{\hat{C}} \Phi + \Gamma \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} \left(\frac{\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1}{\rho_1 \kappa_1 C_1} - \frac{\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2}{\rho_2 \kappa_2 C_2} \right) \\ &+ \frac{C_1 C_2}{\hat{C}} \left(\frac{\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1}{\rho_1 \kappa_1 C_1} + \frac{\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2}{\rho_2 \kappa_2 C_2} \right) \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha_1}{Dt} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2)}{\hat{C}} \underline{u} &= \frac{Q_I}{\hat{C}} \Psi + \Gamma \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\hat{C}} \left(\frac{\kappa_1 C_1 + h_\Gamma - h_1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} + \frac{\kappa_2 C_2 + h_\Gamma - h_2}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \right) \\ &+ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\hat{C}} \left(\frac{\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_1 \underline{q}_1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} - \frac{\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} \alpha_2 \underline{q}_2}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} \right) \end{aligned} \quad (2.128)$$

Les solutions de ce système sont considérées comme proches du sous-ensemble de $\mathbb{R}^5$ $\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^5; \underline{R}(\underline{W}) = 0\}$. Ce sous-ensemble est de dimension 4, et on peut en connaître explicitement une paramétrisation donnée par la Maxwellienne $M(\underline{w})$, avec $\underline{w} = {}^t(T, \underline{u}, p, \alpha_1)$, définie par

$$M : \underline{w} \rightarrow M(\underline{w}) = \begin{pmatrix} T \\ T \\ \underline{u} \\ p \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

La matrice Jacobienne de cette fonction est facilement obtenue. Elle s'écrit

$$dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

Il nous faut maintenant déterminer la matrice Jacobienne du terme source raide $R'(\underline{W})$, évaluée sur la Maxwellienne $M(\underline{w})$. Rappelons que le flux de chaleur interfacial a été défini par l'équation (1.50) et s'écrit $Q_I = \frac{\mu_T}{\varepsilon_T} (T_2 - T_1)$. Si l'on note ϕ une variable prise parmi $T_1, T_2, p, \underline{u}$ et α_1 , la dérivée de $R(\underline{W})$ par rapport à cette variable s'écrira

$$\frac{\partial R(\underline{W})}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -Q_I \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \right) - \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \\ -Q_I \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \right) - \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \\ 0 \\ Q_I \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\Phi}{\hat{C}} \right) + \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\Phi}{\hat{C}} \\ Q_I \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\Psi}{\hat{C}} \right) + \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\Psi}{\hat{C}} \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

Or, puisque l'on évalue la Matrice Jacobienne sur $M(\underline{w})$, on a égalité $T_1 = T_2 = T$, et donc le flux de chaleur interfacial Q_I est nul. La dérivée du terme source raide s'écrit alors

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial \phi}(M(\underline{w})) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} \\ -\frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} \\ 0 \\ \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\Phi}{\hat{C}} \\ \frac{\partial Q_I}{\partial \phi} \frac{\Psi}{\hat{C}} \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

Ce qui permet d'écrire la matrice Jacobienne $R'(M(\underline{w}))$

$$R'(M(\underline{w})) = \begin{pmatrix} \frac{\mu_T(\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi)}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} & -\frac{\mu_T(\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi)}{\alpha_1 \eta_1 \hat{C}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu_T(\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi)}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} & -\frac{\mu_T(\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi)}{\alpha_2 \eta_2 \hat{C}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_T \Phi}{\hat{C}} & \frac{\mu_T \Phi}{\hat{C}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_T \Psi}{\hat{C}} & \frac{\mu_T \Psi}{\hat{C}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

Cette matrice est de rang 1. Une base de cette matrice peut être facilement déterminée

$$I^1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1} \\ \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2} \\ 0 \\ \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (2.134)$$

Écrivons maintenant la matrice $B = [dM_w, I^1]$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_1 & 0 & \alpha_1 \theta_1 & \rho_1 & \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1} \\ \alpha_2 \eta_2 & 0 & \alpha_2 \theta_2 & -\rho_2 & \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Psi \end{pmatrix} \quad (2.135)$$

Pour simplifier les écritures des matrices de projection P et Q , obtenues en calculant l'inverse de la matrice B , nous introduisons les notations suivantes

$$\hat{H} = \alpha_1 \rho_2 \eta_1 + \alpha_2 \rho_1 \eta_2 \quad (2.136)$$

$$\hat{\Theta} = \alpha_1 \rho_2 \theta_1 + \alpha_2 \rho_1 \theta_2 \quad (2.137)$$

$$\Delta_{\theta_k \eta_{k'}} = \theta_1 \eta_2 - \theta_2 \eta_1 \quad (2.138)$$

$$\rho \kappa = \alpha_1 \rho_1 \kappa_1 + \alpha_2 \rho_2 \kappa_2 \quad (2.139)$$

Les matrices de projection s'écrivent alors comme suit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\rho_2 \Psi - \alpha_2 \theta_2 \Phi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & \frac{\rho_1 \Psi + \alpha_1 \theta_1 \Phi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2 \Phi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2 \Phi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2 \Psi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2 \Psi}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \eta_1 \eta_2}{\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

On peut maintenant obtenir la matrice $PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}}$. Celle-ci s'écrit, après quelques manipulations algébriques,

$$PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} \underline{u} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi (\rho_2 \theta_1 C_1 - \rho_1 \theta_2 C_2) + \Psi (\rho_1 \rho_2 \hat{C} - C_1 C_2 \hat{\Theta})}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 \eta_2 C_2 - \rho_2 \eta_1 C_1) + C_1 C_2 \Phi \hat{H}}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi (\hat{C} (\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}))}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

On en déduit un système contenant une pression, une vitesse et une température. Selon l'équation (2.14), ce système s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{w}} \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = P\underline{S}_\Gamma(M(\underline{w})) + P\underline{S}_F(M(\underline{w})) \quad (2.143)$$

et peut être développé pour donner le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
& \hat{C} \left(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \right) \frac{DT}{Dt} + \left(\alpha_1 \alpha_2 \Phi (\rho_2 \theta_1 C_1 - \rho_1 \theta_2 C_2) + \Psi (\rho_1 \rho_2 \hat{C} - C_1 C_2 \hat{\Theta}) \right) \operatorname{div} \underline{u} \\
& + \hat{\Theta} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) = \\
& \Gamma \frac{\hat{C}}{\rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2} \left((\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 (C_1 \theta_1 - \rho_1) + \alpha_2 \kappa_2 (C_2 \theta_2 - \rho_2)) + \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \right) \quad (2.144.1)
\end{aligned}$$

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} + \nabla p - \operatorname{div} \underline{\tau} = \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \quad (2.144.2)$$

$$\begin{aligned}
& \hat{C} \left(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \right) \frac{Dp}{Dt} + \left(\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 \eta_2 C_2 - \rho_2 \eta_1 C_1) + C_1 C_2 \Phi \hat{H} \right) \operatorname{div} \underline{u} \\
& - \hat{H} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) = \\
& - \Gamma \frac{\hat{C}}{\rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2} \left((\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2) \right) \quad (2.144.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{C} \left(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \right) \frac{D\alpha_1}{Dt} \\
& + \left(\alpha_1 \alpha_2 \left(\Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi \left(\hat{C} (\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \right) \right) \right) \operatorname{div} \underline{u} \\
& + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) = \\
& \Gamma \frac{\hat{C}}{\rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2} (\rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2))) \quad (2.144.4)
\end{aligned}$$

Réécrivons ce système en utilisant les variables conservatives $^t(\rho, \rho \underline{u}, \rho e, Y_1)$. Après quelques manipulations algébriques des équations précédentes, nous obtenons le modèle suivant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{u} = 0 \quad (2.145.1)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p - \operatorname{div} \underline{\tau} = \alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v \quad (2.145.2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho e \underline{u} + p \underline{u}) + \operatorname{div} \underline{q} - \operatorname{div} \underline{\tau} \underline{u} = \underline{u} \cdot (\alpha_1 \rho_1 \underline{f}_1^v + \alpha_2 \rho_2 \underline{f}_2^v) \quad (2.145.3)$$

$$\rho \frac{DY_1}{Dt} = \Gamma \quad (2.145.4)$$

On retrouve alors le modèle de Navier-Stokes multi-composantes. Ce modèle est aussi connu sous le nom de modèle homogène relaxé, et a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature (voir par exemple [55, 22, 38, 83]).

2.4.2 Modèle réduit à l'ordre 1

Nous souhaitons maintenant déterminer un modèle à l'ordre ε_T , pour que les petites fluctuations de température puissent être prises en compte. Les termes source ne seront pas écrits dans ce paragraphe, sauf les termes provenant des échanges de chaleur entre phases, pour simplifier les écritures.

Le vecteur des perturbations autour de l'équilibre est noté $\underline{V} = {}^t (T_1^1, T_2^1, \underline{u}^1, p^1, \alpha_1^1)$. On sait que $\underline{V} \in \text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$, et que le vecteur $I^1 = {}^t \left(\frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1}, \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2}, 0, \Phi, \Psi \right)$ est une base de ce sous-ensemble. Les termes de fluctuation vérifient donc les relations suivantes, où β est un paramètre à déterminer

$$T_1^1 = \frac{\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi}{\alpha_1 \eta_1} \beta \quad (2.146.1)$$

$$T_2^1 = \frac{\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi}{\alpha_2 \eta_2} \beta \quad (2.146.2)$$

$$\underline{u}^1 = 0 \quad (2.146.3)$$

$$p_1^1 = \Phi \beta \quad (2.146.4)$$

$$\alpha_1^1 = \Psi \beta \quad (2.146.5)$$

De plus, le vecteur $\underline{V}$ vérifie l'équation (2.17)

$$QR'(M(\underline{w}))\underline{V} = QA(M(\underline{w}))\frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \quad (2.147)$$

qui peut s'écrire sous forme développée

$$-\frac{\mu_T (\alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \Phi + \hat{H} \Psi)}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} (T_2^1 - T_1^1) = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.148)$$

soit

$$(T_2^1 - T_1^1) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\mu_T (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.149)$$

La résolution des équations (2.146) et (2.149) permet alors de connaître le vecteur de fluctuation

$$T_1^1 = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \theta_1 \Phi + \rho_1 \Psi) \frac{\alpha_2 \eta_2 (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\mu_T (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.150.1)$$

$$T_2^1 = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 \theta_2 \Phi - \rho_2 \Psi) \frac{\alpha_1 \eta_1 (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\mu_T (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.150.2)$$

$$\underline{u}^1 = 0 \quad (2.150.3)$$

$$p_1^1 = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 \eta_1 \eta_2 \Phi (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\mu_T (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.150.4)$$

$$\alpha_1^1 = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^2 \eta_1 \eta_2 \Psi (C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} - \eta_1 C_1 \rho_2 + \eta_2 C_2 \rho_1)}{\mu_T (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \text{div } \underline{u} \quad (2.150.5)$$

Écrivons maintenant le système à l'ordre 1 en utilisant le vecteur des variables conservatives ${}^t(\rho, \rho \underline{u}, \rho e, Y_1)$. Pour cela, il faut trouver le vecteur de fluctuations ${}^t((\rho)^1, (\rho \underline{u})^1, (\rho e)^1, Y_1^1)$. On suppose que les deux phases se comportent comme deux fluides monophasiques qui suivent les équations d'état de type gaz raide (1.27). Elles sont gouvernées par les équations suivantes

$$\rho_k = \frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k}(\gamma_k - 1) T_k} \quad (2.151.1)$$

$$\rho_k i_k = \frac{p + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1} + \rho_k i_{k,0} \quad (2.151.2)$$

Les expressions de η_k , θ_k et κ_k peuvent en être déduites.

$$\eta_k = \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial T_k} \right)_p = -\frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k}(\gamma_k - 1) T_k^2} = -\frac{\rho_k}{T_k} \quad (2.152.1)$$

$$\theta_k = \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p} \right)_{T_k} = \frac{1}{C_{v_k}(\gamma_k - 1) T_k^2} \quad (2.152.2)$$

$$\kappa_k = \left(\frac{\partial i_k}{\partial p} \right)_{\rho_k} = \frac{C_{v_k} T_k}{p + p_{k,\infty}} = \frac{1}{\rho_k(\gamma_k - 1)} \quad (2.152.3)$$

En rappelant que le module de compressibilité adiabatique C_k est égal à $\gamma_k(p + p_{k,\infty})$ dans le cas des gaz raides, on peut aussi exprimer la fraction $\frac{\Phi}{\Psi}$. Celle-ci est égale à

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\frac{C_2}{\rho_1 \kappa_1} - \frac{C_1}{\rho_2 \kappa_2}}{\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2}} = \frac{\frac{C_2}{\gamma_2 - 1} - \frac{C_1}{\gamma_1 - 1}}{\frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}} \quad (2.153)$$

Les fluctuations des masses $\alpha_k \rho_k$ doivent maintenant être évaluées. Pour cela, la masse est écrite en fonction de la pression et la température, et celles-ci sont décomposées en utilisant les expressions (2.146). Dans cette décomposition, nous notons par un exposant 0 la composante de la variable à l'équilibre, et par un exposant 1 la composante hors équilibre.

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k &= \alpha_k \frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k}(\gamma_k - 1) T_k} \\ &= \frac{1}{C_{v_k}(\gamma_k - 1)} \frac{\alpha_k^0(p^0 + p_{k,\infty}) + \varepsilon_T(\alpha_k^1(p^0 + p_{k,\infty}) + \alpha_k^0 p^1)}{T^0 + \varepsilon_T T_k^1} \\ &= \frac{1}{C_{v_k}(\gamma_k - 1)} \left(\frac{\alpha_k^0(p^0 + p_{k,\infty})}{T^0} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\varepsilon_T}{(T^0)^2} (T^0(\alpha_k^1(p^0 + p_{k,\infty}) + \alpha_k^0 p^1) + \alpha_k^0(p^0 + p_{k,\infty}) T_k^1) \right) \\ &= (\alpha_k \rho_k)^0 + \frac{\varepsilon_T \beta}{C_{v_k}(\gamma_k - 1)(T^0)^2} ((-1)^{k+1} (p^0 + p_{k,\infty}) T^0 \Psi + \alpha_k^0 T^0 \Phi \\ &\quad + \alpha_k^0(p^0 + p_{k,\infty}) \frac{\theta_k}{\eta_k} \Phi + (-1)^{k+1} \alpha_k^0(p^0 + p_{k,\infty}) \frac{\rho_k}{\alpha_k \eta_k} \Psi) \end{aligned} \quad (2.154)$$

En remplaçant les termes η_k et θ_k par leurs expressions, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\alpha_k \rho_k &= (\alpha_k \rho_k)^0 + \frac{\varepsilon_T \beta}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) (T^0)^2} \left((-1)^{k+1} (p^0 + p_{k,\infty}) T^0 \Psi + \alpha_k^0 T^0 \Phi \right. \\
&\quad \left. - \alpha_k^0 T^0 - (-1)^{k+1} (p^0 + p_{k,\infty}) T^0 \Psi \right) \\
&= (\alpha_k \rho_k)^0
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Ce qui permet d'obtenir $(\alpha_k \rho_k)^1 = 0$. Les fluctuations de la masse du mélange ρ^1 et de la fraction massique Y_1^1 sont donc nulles, puisque ce sont des fonctions des masses $\alpha_k \rho_k$. De plus, $\underline{u}^1 = 0$ selon l'équation (2.146.3), et la fluctuation de la quantité de mouvement $(\rho \underline{u})^1$ est elle aussi nulle. Il reste à déterminer la fluctuation de l'énergie du système. Celle-ci peut être décomposée comme suit

$$\begin{aligned}
\rho e &= \alpha_1 \rho_1 i_1 + \alpha_1 \rho_1 \frac{u^2}{2} + \alpha_2 \rho_2 i_2 + \alpha_2 \rho_2 \frac{u^2}{2} \\
&= \alpha_1 \frac{p + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \alpha_2 \frac{p + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} + \rho i_0 + \rho \frac{u^2}{2} \\
&= \alpha_1^0 \frac{p^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + \alpha_2^0 \frac{p^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \\
&\quad + \varepsilon_T \left(\frac{p^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \alpha_1^1 + \frac{p^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \alpha_2^1 + \left(\frac{\alpha_1^0}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2^0}{\gamma_2 - 2} \right) p^1 \right) + \rho i_0 + \rho \frac{u^2}{2} \\
&= (\rho e)^0 + \varepsilon_T \beta \left(\left(\frac{p^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} - \frac{p^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) \Psi^0 + \left(\frac{\alpha_1^0}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2^0}{\gamma_2 - 2} \right) \Phi^0 \right)
\end{aligned} \tag{2.156}$$

L'équation (2.153) est utilisée pour réécrire le terme de fluctuation de l'énergie du système

$$\rho e = (\rho e)^0 + \varepsilon_T \beta \Psi \left(\left(\frac{p^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} - \frac{p^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) + \left(\frac{\alpha_1^0}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2^0}{\gamma_2 - 2} \right) \frac{\frac{C_2^0}{\gamma_2 - 1} - \frac{C_1^0}{\gamma_1 - 1}}{\frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1}} \right) \tag{2.157}$$

et la définition du module de compressibilité adiabatique $C_k^0 = \gamma_k (p^0 + p_{k,\infty})$ permet d'écrire

$$\rho e = (\rho e)^0 + \varepsilon_T \beta \Psi \left(\frac{p^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} - \frac{p^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} - \frac{\gamma_1 (p^0 + p_{1,\infty})}{\gamma_1 - 1} + \frac{\gamma_2 (p^0 + p_{2,\infty})}{\gamma_2 - 1} \right) \tag{2.158}$$

$$\rho e = (\rho e)^0$$

L'ensemble des fluctuations des variables conservatives sont déterminées ; celles-ci sont toutes égales à zéro.

$$\rho^1 = 0 \tag{2.159.1}$$

$$(\rho \underline{u})^1 = 0 \tag{2.159.2}$$

$$(\rho e)^1 = 0 \tag{2.159.3}$$

$$Y^1 = 0 \tag{2.159.4}$$

On peut alors écrire le modèle de Navier-Stokes multi-composantes comprenant des fluctuations de température entre les phases

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u})^0 = 0 \quad (2.160.1)$$

$$\frac{\partial (\rho \underline{u})^0}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u})^0 + \nabla p^0 + \varepsilon_T \nabla p^1 = 0 \quad (2.160.2)$$

$$\frac{\partial (\rho e)^0}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\rho e)^0 \underline{u}^0 + p^0 \underline{u}^0 \right) + \varepsilon_T \operatorname{div} p^1 \underline{u}^0 = 0 \quad (2.160.3)$$

$$\rho \frac{D^0 Y_1^0}{Dt} = 0 \quad (2.160.4)$$

L'expression de la variation de pression (2.150.4) est utilisée pour développer ce modèle

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u})^0 = 0 \quad (2.161.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho \underline{u})^0}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u})^0 + \nabla p^0 \\ + \varepsilon_T \nabla \left(\frac{(\alpha_1^0 \alpha_2^0)^2 \Phi^0 \eta_1^0 \eta_2^0 (C_1^0 C_2^0 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} + \eta_1^0 C_1^0 \rho_2^0 - \eta_2^0 C_2^0 \rho_1^0)}{\mu_T (\Psi^0 \hat{H}^0 + \alpha_1^0 \alpha_2^0 \Phi^0 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}^0)^2} \operatorname{div} \underline{u}^0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.161.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho e)^0}{\partial t} + \operatorname{div} \left((\rho e)^0 \underline{u}^0 + p^0 \underline{u}^0 \right) \\ + \varepsilon_T \operatorname{div} \left(\frac{(\alpha_1^0 \alpha_2^0)^2 \Phi^0 \eta_1^0 \eta_2^0 (C_1^0 C_2^0 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} + \eta_1^0 C_1^0 \rho_2^0 - \eta_2^0 C_2^0 \rho_1^0)}{\mu_T (\Psi^0 \hat{H}^0 + \alpha_1^0 \alpha_2^0 \Phi^0 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}^0)^2} \underline{u}^0 \operatorname{div} \underline{u}^0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.161.3)$$

$$\rho \frac{D^0 Y_1^0}{Dt} = 0 \quad (2.161.4)$$

2.4.3 Équations d'état

Les équations d'état qui permettent de fermer le système (2.144) doivent maintenant être déterminées. Nous reprenons pour cela le travail de Lagoutière [53], qui a montré que ces équations d'état existent dans le cas général, puis nous les écrivons pour le cas où les deux phases sont gouvernées par des équations de type gaz raide.

Existence des équations d'état

On introduit les hypothèses suivantes : pour chaque phase k , l'énergie spécifique interne $i_k \left(\frac{1}{T_k}, \frac{p_k}{T_k} \right)$ et le volume spécifique $\nu_k \left(\frac{1}{T_k}, \frac{p_k}{T_k} \right)$ (avec $\nu_k = \frac{1}{\rho_k}$) sont des fonctions C^1 , et les entropies spécifiques phasiques $s_k \left(\frac{1}{T_k}, \frac{p_k}{T_k} \right)$ sont concaves. Puisque chaque phase se comporte comme un fluide monophasique, il existe une bijection entre (ν_k, i_k) , et $\left(\frac{1}{T_k}, \frac{p_k}{T_k} \right) = \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right)$, selon les équations d'état de ces

phases. Nous reprenons maintenant la démonstration de Lagoutière [53] qui montre que dans le cas du modèle de Navier-Stokes multi-composantes, il existe une bijection entre les couples de variables d'état (ρ, i) et (p, T) . Dans ce modèle, les fractions massiques Y_k sont des constantes connues, et les égalités suivantes peuvent être écrites

$$s = Y_1 s_1 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) + Y_2 s_2 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) = s \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) \quad (2.162.1)$$

$$i = Y_1 i_1 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) + Y_2 i_2 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) = i \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) \quad (2.162.2)$$

$$\nu = Y_1 \nu_1 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) + Y_2 \nu_2 \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) = \nu \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) \quad (2.162.3)$$

Définissons une application F comme suit

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+} & \rightarrow \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right) & \rightarrow (\nu, i) \end{cases} \quad (2.163)$$

Cette fonction est une fonction de classe C^1 . Les fractions massiques Y_k sont des variables d'état indépendantes : la matrice Jacobienne de F est définie par

$$\nabla F = \frac{\partial \begin{pmatrix} \nu \\ i \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{p}{T} \end{pmatrix}} = Y_1 \frac{\partial \begin{pmatrix} \nu_1 \\ i_1 \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{p}{T} \end{pmatrix}} + Y_2 \frac{\partial \begin{pmatrix} \nu_2 \\ i_2 \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{p}{T} \end{pmatrix}} \quad (2.164)$$

Puisque l'entropie phasique s_k est concave, sa dérivée seconde par rapport à (ν_k, i_k) forme une matrice définie négative, qui est donc inversible. Selon la relation de Gibbs (1.33), la différentielle de l'entropie phasique peut être écrite $ds_k = \frac{1}{T} di_k + \frac{p}{T} d\nu_k$, et la matrice des dérivées secondes peut être écrite

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{p}{T} \end{pmatrix}}{\partial (\nu_k, i_k)} \quad (2.165)$$

avec la matrice inverse, qui est aussi une matrice définie négative, donnée par

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} \nu_k \\ i_k \end{pmatrix}}{\partial \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{p}{T} \end{pmatrix}} \quad (2.166)$$

Ainsi, ∇F est une somme de matrices définies négatives, donc elle est elle-même une matrice définie négative. On utilise le théorème de l'inverse local [85] pour dire que F est inversible sur le domaine $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$, ce qui permet de conclure qu'une solution unique $\left(\frac{1}{T}, \frac{p}{T} \right)$, c'est-à-dire une solution unique (p, T) , correspond au couple (ν, i) .

Détermination des équations d'état

Les équations d'état qui relient les variables d'état du modèle de Navier-Stokes multi-composantes sont maintenant déterminées en supposant que chaque phase k est gouvernée par des équations d'état de type gaz raide. Pour chacune d'entre elles, on peut écrire

$$i_k = \frac{C_{v_k} T (p + \gamma_k p_{k,\infty})}{p + p_{k,\infty}} + i_{k,0} \quad (2.167.1)$$

$$\rho_k = \frac{1}{\nu_k} = \frac{p + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) T} \quad (2.167.2)$$

$$s_k = C_{v_k} \ln \left(\frac{T^{\gamma_k}}{(p + \gamma_k p_{k,\infty})^{\gamma_k}} \right) + s_{k,0} \quad (2.167.3)$$

Il faut donc déterminer la pression p et la température T en fonction du volume spécifique du mélange ν , l'énergie interne spécifique de mélange i et la fraction massique Y_1 . Pour ce faire, nous utilisons les relations

$$Y_1 \nu_1 + Y_2 \nu_2 = \nu \quad (2.168.1)$$

$$Y_1 i_1 + Y_2 i_2 = i \quad (2.168.2)$$

Le remplacement des énergies phasiques i_k et des volumes spécifiques phasiques ν_k par leurs expressions (2.167.1) et (2.167.2) donne le système d'équations

$$Y_1 \frac{C_{v_1} (\gamma_1 - 1) T}{p + p_{1,\infty}} + Y_2 \frac{C_{v_2} (\gamma_2 - 1) T}{p + p_{2,\infty}} = \nu \quad (2.169.1)$$

$$Y_1 \frac{C_{v_1} T (p + \gamma_1 p_{1,\infty})}{p + p_{1,\infty}} + Y_2 \frac{C_{v_2} T (p + \gamma_2 p_{2,\infty})}{p + p_{2,\infty}} = i \quad (2.169.2)$$

Ces équations peuvent être manipulées et réécrites de la manière suivante

$$T = \frac{\nu (p + p_{1,\infty}) (p + p_{2,\infty})}{Y_1 C_{v_1} (\gamma_1 - 1) (p + p_{2,\infty}) + Y_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1) (p + p_{1,\infty})} \quad (2.170.1)$$

$$A_0 + A_1 p + A_2 p^2 = 0 \quad (2.170.2)$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(Y_1 C_{v_1} \gamma_1 + Y_2 C_{v_2} \gamma_2) p_{1,\infty} p_{2,\infty} - \frac{i - Y_1 i_{1,0} - Y_2 i_{2,0}}{\nu} (Y_1 C_{v_1} (\gamma_1 - 1) p_{2,\infty} + Y_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1) p_{1,\infty})}{\nu} \\ A_1 &= \frac{Y_1 C_{v_1} (p_{2,\infty} + \gamma_1 p_{1,\infty}) + Y_2 C_{v_2} (p_{1,\infty} + \gamma_2 p_{2,\infty}) - \frac{i - Y_1 i_{1,0} - Y_2 i_{2,0}}{\nu} (Y_1 C_{v_1} (\gamma_1 - 1) + Y_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1))}{\nu} \\ A_2 &= Y_1 C_{v_1} + Y_2 C_{v_2} \end{aligned} \quad (2.171)$$

Selon le résultat du paragraphe précédent, la relation entre le couple (p, T) et le couple (ν, i) existe et est unique lorsque l'on suppose la fraction massique Y_1 constante. Nous sommes dans un tel cas, ce qui implique l'existence de solutions réelles du système d'équations (2.170), et donc la positivité du discriminant $\Delta = A_1^2 - 4A_0A_2$. Deux solutions réelles peuvent être obtenues pour la pression p . Pour déterminer la racine de l'équation (2.170.2) qui doit être utilisée, nous regardons le cas $Y_1 = 0$: avec cette valeur de Y_1 , nous devons obtenir $\nu_2(p, T) = \nu$ et $i_2(p, T) = i$. Cette vérification permet de

sélectionner l'une des deux racines, et donc d'obtenir la pression p .

Une fois que la pression et la température sont connues, la fraction volumique peut être déterminée en utilisant l'équation

$$\alpha_1 = \frac{Y_1 \nu_1(p, T)}{\nu} \quad (2.172)$$

ce qui nous permet finalement de déterminer de manière unique les variables p , T , et α_1 en fonction de ν , i et Y_1 .

Ces équations sont inversibles : si l'on connaît la pression p , la température T et la fraction volumique α_1 , les densités phasiques ρ_k et les énergies spécifiques internes i_k peuvent être trouvées en utilisant les équations (2.167), ce qui permet de retrouver la densité du mélange ρ , l'énergie du mélange i et la fraction massique Y_1 . Les équations d'état sont donc complètement déterminées.

2.5 Modèle à l'équilibre homogène

Le modèle (2.144) est un modèle où les vitesses, les pressions et les températures des deux phases sont égales. Seuls les potentiels chimiques sont différents : si l'on suppose que les deux fluides représentent la phase gazeuse et la phase liquide d'un même fluide, cela signifie que le mélange n'est pas à saturation. Dans certains cas, il peut être intéressant d'utiliser un système simplifié, supposant cette saturation. Nous chercherons dans ce paragraphe à déterminer un tel modèle, appelé modèle à l'équilibre homogène ou HEM. Le système (2.144) est utilisé comme point de départ à une relaxation des potentiels chimiques $g_k = i_k + \frac{p}{\rho_k} - s_k T$ qui permettra d'obtenir leur mise à l'équilibre. Dans ce paragraphe, les termes d'ordre ε_T sont négligés, car le temps de relaxation des températures est considéré comme beaucoup plus petit que le temps de relaxation des potentiels chimiques ε_g .

2.5.1 Modèle réduit à l'ordre 0

La relaxation des potentiels chimiques sera effectuée en utilisant le vecteur d'état $\underline{W} = (g_1, g_2, \underline{u}, \alpha)$. Un changement de variable est donc nécessaire avant la procédure de relaxation, puisque le système (2.144) est écrit en utilisant le vecteur $\tilde{W} = (T, \underline{u}, p, \alpha)$. Rappelons que le terme d'échange de masse est défini par $\Gamma = \frac{\mu_g}{T\varepsilon_g} (g_2 - g_1)$, et que ce système s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + \tilde{A}(\tilde{W}) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = \frac{\tilde{R}(\tilde{W})}{\varepsilon_g} + \tilde{S}(\tilde{W}) \quad (2.173)$$

où la matrice $\tilde{A}(\tilde{W})$ et les termes sources $\tilde{R}(\tilde{W})$ et $\tilde{S}(\tilde{W})$ sont données par les expressions

$$\tilde{A}(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi (\rho_2 \theta_1 C_1 - \rho_1 \theta_2 C_2) + \Psi (\rho_1 \rho_2 \hat{C} - C_1 C_2 \hat{\Theta})}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{u} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\rho_1 \eta_2 C_2 - \rho_2 \eta_1 C_1) + C_1 C_2 \Phi \hat{H}}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & \underline{u} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi (\hat{C} (\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}))}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.174)$$

$$\tilde{R}(\tilde{W}) = \frac{\mu_g (g_2 - g_1)}{T \rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2 (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 (C_1 \theta_1 - \rho_1) + \alpha_2 \kappa_2 (C_2 \theta_2 - \rho_2)) + \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \\ 0 \\ -(\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2) \\ \rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \end{pmatrix} \quad (2.175)$$

$$\tilde{S}(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{\Theta}}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \\ \frac{1}{\rho} \text{div} \underline{\tau} + \underline{f}^v \\ \frac{\hat{H}}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \\ \frac{-\alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \text{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \end{pmatrix} \quad (2.176)$$

Selon l'expression des potentiels chimiques $g_k = i_k + \frac{p}{\rho_k} - s_k T$, leurs différentielles sont données par

$$dg_k = di_k + \frac{1}{\rho_k} dp - \frac{p}{\rho_k^2} d\rho_k - s_k dT - T ds_k \quad (2.177)$$

L'utilisation de la relation de Gibbs (1.33) nous permet de simplifier cette expression en

$$dg_k = \frac{1}{\rho_k} dp - s_k dT \quad (2.178)$$

L'inversion de ces expressions donne l'expression des différentielles de la pression et de la température en fonction de celles des potentiels chimiques

$$dp = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} (s_1 dg_2 - s_2 dg_1) \quad (2.179.1)$$

$$dT = \frac{1}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} (\rho_2 dg_2 - \rho_1 dg_1) \quad (2.179.2)$$

On peut en déduire l'égalité $d\tilde{W} = G dW$ avec G la matrice de changement de variable

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_1}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} & \frac{\rho_2}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\rho_1 \rho_2 s_2}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} & \frac{\rho_1 \rho_2 s_1}{\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.180)$$

Cette relation entre les différentielles des vecteurs d'état $\underline{W}$ et $\tilde{W}$ permet d'écrire

$$G^{-1} G \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + G^{-1} \tilde{A}(\tilde{W}) G \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{G^{-1} \tilde{R}(\tilde{W})}{\varepsilon_g} + G^{-1} \tilde{S}(\tilde{W}) \quad (2.181)$$

soit

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{\underline{R}(\underline{W})}{\varepsilon_g} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (2.182)$$

où l'on a introduit la matrice $A(\underline{W}) = G^{-1} \tilde{A} G$, et les vecteurs $\underline{R}(\underline{W}) = G^{-1} \tilde{R}(\tilde{W})$ et $\underline{S}(\underline{W}) = G^{-1} \tilde{S}(\tilde{W})$. Les expressions de ces différents éléments sont les suivantes

$$A(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \underline{u} & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi(\rho_1 C_2 (\eta_2 + \rho_1 s_1 \theta_2) - \rho_2 C_1 (\eta_1 + \rho_1 s_1 \theta_1)) + \Psi(\rho_1 s_1 (C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) + C_1 C_2 \hat{H})}{\rho_1 \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 \\ 0 & \underline{u} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi(\rho_1 C_2 (\eta_2 + \rho_2 s_2 \theta_2) - \rho_2 C_1 (\eta_1 + \rho_2 s_1 \theta_1)) + \Psi(\rho_2 s_2 (C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) + C_1 C_2 \hat{H})}{\rho_2 \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & 0 \\ -\frac{\rho_1 \rho_2 s_2}{\rho(\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2)} & \frac{\rho_1 \rho_2 s_1}{\rho(\rho_1 s_1 - \rho_2 s_2)} & \underline{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi(\hat{C}(\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}))}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.183)$$

$$\underline{R}(\underline{W}) = \frac{\mu_g (g_2 - g_1)}{T \rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2 \left(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} \right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1} \left((\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 s_1 (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) - \alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 - \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2) - \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \right) \\ \frac{1}{\rho_2} \left((\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 s_2 (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) - \alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 - \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2) - \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \right) \\ 0 \\ \rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \end{pmatrix} \quad (2.184)$$

$$\underline{S}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 s_1 \Theta + \hat{H}}{\rho_1 \hat{C}(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \\ \frac{\rho_2 s_2 \Theta + \hat{H}}{\rho_2 \hat{C}(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau} + \underline{f}^v \\ - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}}{\hat{C}(\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left(\frac{C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi}{\rho_1 \kappa_1} (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1)) + \frac{C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi}{\rho_2 \kappa_2} (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2)) \right) \end{pmatrix} \quad (2.185)$$

Supposons que les solutions du système (2.182) sont proches du sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^4; \underline{R}(\underline{W}) = 0\}$. Ce sous-ensemble de dimension 3 peut être paramétrisé explicitement par la Maxwellienne de $\underline{w} = {}^t(g, u, \alpha_1)$, donnée par

$$M : \underline{w} \rightarrow M(\underline{w}) = \begin{pmatrix} g \\ g \\ \underline{u} \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.186)$$

La matrice Jacobienne de la Maxwellienne peut être exprimée comme suit

$$dM_{\underline{w}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.187)$$

Par ailleurs, on peut écrire l'expression de la matrice Jacobienne du terme source raide évalué en $M(\underline{W})$

$$R'(M(\underline{W})) = \frac{\mu_g ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2))}{T \rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \begin{pmatrix} -J & J & 0 & 0 \\ -K & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L & L & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.188)$$

où les termes J , K et L représentent les expressions suivantes

$$J = \rho_2 ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 s_1 (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) - \alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 - \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2) - \hat{\Theta} (h_1 - h_2)) \quad (2.189.1)$$

$$K = \rho_1 ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_2 s_2 (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) - \alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 - \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2) - \hat{\Theta} (h_1 - h_2)) \quad (2.189.2)$$

$$L = \rho_1 \rho_2 (\rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2))) \quad (2.189.3)$$

Avec ces notations, on remarque que la matrice $R'(M(\underline{W}))$ a pour base le vecteur $I^1 = {}^t(J, 0, K, L)$. On peut alors écrire la matrice $B = [dM_{\underline{W}}, I^1]$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & J \\ 1 & 0 & 0 & K \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \end{pmatrix} \quad (2.190)$$

et son inverse nous donne les matrices P et Q , qui sont les matrices de projection $\ker(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ et sur $\text{Rng}(R'(M(\underline{w})))$ dans la direction $\ker(R'(M(\underline{w})))$, respectivement. P est formée par les trois premières lignes de B^{-1} et Q par sa dernière ligne

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{K}{J-K} & \frac{J}{J-K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L}{J-K} & \frac{L}{J-K} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.191)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{J-K} & -\frac{1}{J-K} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.192)$$

Exprimons maintenant la matrice $PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{W}}$ du système réduit à trois équations

$$PA(M(\underline{w}))dM_{\underline{W}} = \begin{pmatrix} \underline{u} & M & 0 \\ \frac{\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2)}{\rho \Delta_{\rho_k s_k}} & \underline{u} & 0 \\ 0 & N & \underline{u} \end{pmatrix} \quad (2.193)$$

avec les termes M et N qui s'écrivent

$$\begin{aligned} M &= [\alpha_1 \alpha_2 \Phi (\rho_1 C_2 ((\rho_1 J - \rho_2 K) \eta_2 + \rho_1 \rho_2 (s_2 J - s_1 K) \theta_2) - \rho_2 C_1 ((\rho_1 J - \rho_2 K) \eta_1 + \rho_1 \rho_2 (s_2 J - s_1 K) \theta_1))] / \\ &\quad [\rho_1 \rho_2 \hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})] \\ &\quad + [\Psi ((C_1 C_2 \hat{H} - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) (s_2 J - s_1 K) + C_1 C_2 \hat{H} (\rho_1 J - \rho_2 K))] / \\ &\quad [\hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})] \end{aligned} \quad (2.194)$$

$$\begin{aligned}
N = & \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi L}{J - K} \left(\frac{(\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_2 - s_1) (\rho_1 C_2 \theta_2 - \rho_2 C_1 \theta_1)}{\rho_1 \rho_2 \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right. \\
& + \frac{\Psi (s_2 - s_1) (C_1 C_2 \hat{H} - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) + C_1 C_2 \Psi \hat{H} (\rho_1 - \rho_2)}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \Bigg) \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi (\hat{C} (\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}))}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})}
\end{aligned} \tag{2.195}$$

Le terme source du modèle est donné par

$$\begin{aligned}
\underline{S}(\underline{W}) = & \left(\begin{aligned} & \frac{\rho_1 J (\rho_2 s_2 \Theta + \hat{H}) - \rho_2 K (\rho_1 s_1 \Theta + \hat{H})}{\rho_1 \rho_2 (J - K) \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \zeta \\ & \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau} + \underline{f}^v \\ & - \frac{L (\rho_1 (\rho_2 s_2 \Theta + \hat{H}) - \rho_2 (\rho_1 s_1 \Theta + \hat{H})) \alpha_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2 (J - K) \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}}{\rho_1 \rho_2 (J - K) \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \zeta \end{aligned} \right) \tag{2.196}
\end{aligned}$$

$$\text{où } \zeta = \left(\frac{(C_2 \Psi - \alpha_2 \Phi) (\alpha_1 \underline{\tau}_1 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1))}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{(C_1 \Psi + \alpha_1 \Phi) (\alpha_2 \underline{\tau}_2 : \nabla \underline{u} - \operatorname{div} (\alpha_2 \underline{q}_2))}{\rho_2 \kappa_2} \right).$$

On obtient un modèle réduit à trois équations, où les potentiels chimiques sont à l'équilibre, en utilisant le vecteur d'état $\underline{w} = {}^t(g, \underline{u}, \alpha_1)$. Ce système s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{Dg}{Dt} + & ([\alpha_1 \alpha_2 \Phi (\rho_1 C_2 ((\rho_1 J - \rho_2 K) \eta_2 + \rho_1 \rho_2 (s_2 J - s_1 K) \theta_2) \\
& - \rho_2 C_1 ((\rho_1 J - \rho_2 K) \eta_1 + \rho_1 \rho_2 (s_2 J - s_1 K) \theta_1))] / \\
& [\rho_1 \rho_2 \hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})] \\
& + [\Psi ((C_1 C_2 \hat{H} - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) (s_2 J - s_1 K) + C_1 C_2 \hat{H} (\rho_1 J - \rho_2 K))] / \\
& [\hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})]] \operatorname{div} \underline{u} \\
& - \frac{\rho_1 J (\rho_2 s_2 \Theta + \hat{H}) - \rho_2 K (\rho_1 s_1 \Theta + \hat{H})}{\rho_1 \rho_2 (J - K) \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \zeta = 0
\end{aligned} \tag{2.197}$$

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2)}{\rho \Delta_{\rho_k s_k}} \nabla g - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau} = \underline{f}^v \tag{2.198}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D\alpha_1}{Dt} + & \left(\frac{\alpha_1\alpha_2\Phi L}{J-K} \left(\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_2 - s_1)(\rho_1 C_2 \theta_2 - \rho_2 C_1 \theta_1)}{\rho_1 \rho_2 \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right. \right. \\
& + \frac{\Psi (s_2 - s_1) (C_1 C_2 \hat{H} - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) + C_1 C_2 \Psi \hat{H} (\rho_1 - \rho_2)}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \left. \right) \\
& + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} (C_1 - C_2) + \Psi (\hat{C} (\rho_1 \eta_2 - \rho_2 \eta_1) - C_1 C_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}))}{\hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \Big) \operatorname{div} \underline{u} \\
& + \frac{L (\rho_1 (\rho_2 s_2 \Theta + \hat{H}) - \rho_2 (\rho_1 s_1 \Theta + \hat{H})) \alpha_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2 (J - K) \Delta_{\theta_k \eta_{k'}}}{\rho_1 \rho_2 (J - K) \hat{C} (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \zeta = 0
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Après de nombreuses manipulations algébriques, ce système peut être réécrit en utilisant les variables conservatives ${}^t(\rho, \rho \underline{u}, \rho e)$. On obtient alors le modèle à l'équilibre homogène, ou HEM

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u}) = 0 \tag{2.200.1}$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p - \operatorname{div} (\underline{\tau}) = \rho \underline{f}^v \tag{2.200.2}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho e + p) \underline{u} + \operatorname{div} (\alpha_1 \underline{q}_1 + \alpha_2 \underline{q}_2 - \underline{\tau} \underline{u}) = \rho \underline{f}^v \cdot \underline{u} \tag{2.200.3}$$

Ce modèle est bien connu, et est utilisé à de nombreuses reprises pour la simulation des écoulements multiphasiques [14, 20, 74].

2.5.2 Modèle réduit à l'ordre 1

Dans ce paragraphe, on cherche un modèle à l'ordre ε_g , qui permet de prendre en compte les petites différences de potentiels chimiques entre les phases. Nous ne tiendrons pas compte ici des tenseurs des contraintes visqueuses $\underline{\tau}_k$, des flux de chaleur $\underline{q}_k$ et des forces extérieures $\underline{f}_k^v$. Le vecteur d'état se décompose sous la forme $\underline{W} = M(\underline{w}) + \varepsilon_g \underline{V}$, avec $\underline{V} = {}^t(g_1^1, g_2^1, \underline{u}^1, \alpha_1^1)$. Puisque V appartient à l'image de $R'(M(\underline{w}))$, une base de ce vecteur est $I^1 = {}^t(J, 0, K, L)$. On en déduit les relations entre les variables de fluctuations

$$g_1^1 = \frac{J}{L} \alpha_1^1 \tag{2.201.1}$$

$$g_2^1 = \frac{K}{L} \alpha_1^1 \tag{2.201.2}$$

$$\underline{u}^1 = 0 \tag{2.201.3}$$

Pour trouver l'expression de α_1^1 , l'égalité (2.17) est utilisée. Elle s'écrit

$$QR'(M(\underline{w}))\underline{V} = QA(M(\underline{w}))\frac{\partial M(\underline{w})}{\partial x} \tag{2.202}$$

et peut être développée pour donner

$$\begin{aligned}
& \mu_g \left(\frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2)(\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) + (\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2))}{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right)}{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right) (g_2^1 - g_1^1) = \\
& - \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2))}{\rho_1 \rho_2 \hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right)}{\rho_1 \rho_2 \hat{C} (J - K) (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \right) \operatorname{div} \underline{u}
\end{aligned} \tag{2.203}$$

On peut en déduire l'expression de $g_2^1 - g_1^1$

$$\begin{aligned}
g_2^1 - g_1^1 &= - \frac{\rho_1 \rho_2 \kappa_1 \kappa_2 T}{\mu_g \hat{C}} \\
& \left[\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2)) \right. \\
& \quad \left. - \Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right) \right] / \\
& \left[(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2)(\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) + (\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2)) \right. \\
& \quad \left. + (h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right) \right] \operatorname{div} \underline{u}
\end{aligned} \tag{2.204}$$

En utilisant les équations (2.201), l'expression de la fluctuation de la fraction volumique est obtenue

$$\begin{aligned}
\alpha_1^1 &= \frac{L}{K - J} (g_2^1 - g_1^1) = \\
& \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T}{\mu_g \hat{C}} \left[\rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \right) \\
& \left(\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2)) \right. \\
& \quad \left. - \Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C}) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right) \right] / \\
& \left[(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2)(\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) + (\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2)) \right. \\
& \quad \left. + (h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right) \right]^2 \operatorname{div} \underline{u}
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Exprimons maintenant le modèle réduit à l'ordre 1 en utilisant les variables conservatives ${}^t(\rho, \rho \underline{u}, \rho e)$. Pour cela, les fluctuations de ces variables doivent être connues, tout comme celle de la pression qui intervient dans les équations (2.200). Pour les déterminer, nous allons chercher une base de $Rng(R'(M(\underline{u})))$ lorsque ces variables sont utilisées, ce qui permettra de relier les fluctuations des variables conservatives à celles de la fraction volumique α_1 .

On s'intéresse d'abord aux fluctuations des variables conservatives. Selon le système (2.144), le terme source raide s'écrit dans la base $\underline{W}_c = {}^t(\rho, \rho \underline{u}, \rho e, \rho Y_1)$ sous la forme

$$R_c(\underline{W}_c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{pmatrix} \quad (2.206)$$

Une base de la matrice Jacobienne de ce terme source raide peut donc être trouvée facilement

$$I_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.207)$$

Ce qui signifie que nous avons les égalités suivantes

$$\rho^1 = 0 \quad (2.208.1)$$

$$(\rho \underline{u})^1 = 0 \quad (2.208.2)$$

$$(\rho e)^1 = 0 \quad (2.208.3)$$

Regardons maintenant l'expression de la fluctuation de la pression. Selon l'expression (2.175), le terme source raide s'exprime de la manière suivante lorsque l'on utilise le vecteur d'état $\underline{\tilde{W}} = {}^t(T, \underline{u}, p, \alpha_1)$

$$\underline{\tilde{R}}(\underline{\tilde{W}}) = \frac{\mu_g (g_2 - g_1)}{T \rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2 (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 (C_1 \theta_1 - \rho_1) + \alpha_2 \kappa_2 (C_2 \theta_2 - \rho_2)) + \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \\ 0 \\ -(\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2) \\ \rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \end{pmatrix} \quad (2.209)$$

Lorsque nous sommes dans le sous-ensemble $\mathcal{E} = \{\underline{W} \in \mathbb{R}^4; \underline{\tilde{R}}(\underline{\tilde{W}}) = 0\}$, nous avons l'égalité des potentiels chimiques $g_1 = g_2 = g$. Le terme $(g_2 - g_1)$ s'annule donc, et les dérivées de $\underline{\tilde{R}}(\underline{\tilde{W}})$ par rapport à ϕ , avec $\phi \in \{T, \underline{u}, p, \alpha\}$ s'écrivent

$$\frac{\partial \underline{\tilde{R}}(\underline{\tilde{W}})}{\partial \phi} = \frac{\mu_g}{T \rho_1 \kappa_1 \rho_2 \kappa_2 (\Psi \hat{H} + \alpha_1 \alpha_2 \Phi \Delta_{\theta_k \eta_{k'}})} \frac{\partial (g_2 - g_1)}{\partial \phi} \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 (C_1 \theta_1 - \rho_1) + \alpha_2 \kappa_2 (C_2 \theta_2 - \rho_2)) + \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \\ 0 \\ -(\rho_1 - \rho_2)(\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2) \\ \rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

On trouve facilement une base de $\tilde{R}'(\underline{\tilde{W}})$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} (\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 (C_1 \theta_1 - \rho_1) + \alpha_2 \kappa_2 (C_2 \theta_2 - \rho_2)) + \hat{\Theta} (h_1 - h_2) \\ 0 \\ -(\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2) \\ \rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2)) \end{pmatrix} \quad (2.211)$$

d'où l'on déduit l'expression de p^1 , puisque le vecteur $\tilde{V} = {}^t(T^1, \underline{u}^1, p^1, \alpha_1^1)$ appartient à cette base

$$\begin{aligned} p^1 &= \frac{-(\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) - \hat{H} (h_1 - h_2)}{\rho \kappa (\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) + \alpha_1 \alpha_2 \Delta_{\theta_k \eta_{k'}} ((h_1 - \kappa_1 C_1) - (h_2 - \kappa_2 C_2))} \alpha_1^1 = \\ &= -\frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T}{\mu_g \hat{C}} \left((\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) + \hat{H} (h_1 - h_2) \right) \\ &\quad \left[\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2)) \right. \\ &\quad \left. - \Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \left(C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C} \right) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right) \right] / \\ &\quad \left[(\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) + (\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2)) \right. \\ &\quad \left. + (h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right) \right]^2 \operatorname{div} \underline{u} \end{aligned} \quad (2.212)$$

Le système réduit à l'ordre 1, qui prend en compte les petites fluctuations des potentiels chimiques, peut maintenant être écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{u} = 0 \quad (2.213.1)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p + \varepsilon_g \nabla p^1 = 0 \quad (2.213.2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho e + p) \underline{u} + \varepsilon_g \operatorname{div} (p^1 \underline{u}) = 0 \quad (2.213.3)$$

que l'on peut développer en remplaçant p^1 par son expression

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{u} = 0 \quad (2.214)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p \\ &- \varepsilon_g \nabla \left(\frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T}{\mu_g \hat{C}} \left((\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) + \hat{H} (h_1 - h_2) \right) \right. \\ &\quad \left[\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2)) \right. \\ &\quad \left. - \Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \left(C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C} \right) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right) \right] / \\ &\quad \left[(\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) + (\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2)) \right. \\ &\quad \left. + (h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right) \right]^2 \operatorname{div} \underline{u} \Big) = 0 \end{aligned} \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho e) + p) \underline{u} \\
& - \varepsilon_g \operatorname{div} \left(\frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \kappa_1 \kappa_2 T}{\mu_g \hat{C}} \left((\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 \eta_1 C_1 + \alpha_2 \kappa_2 \eta_2 C_2) + \hat{H} (h_1 - h_2) \right) \right. \\
& \left. [\alpha_1 \alpha_2 \Phi ((\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 C_2 \eta_2 - \rho_2 C_1 \eta_1) + \rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\rho_2 C_1 \theta_1 - \rho_1 C_2 \theta_2)) \right. \\
& \left. - \Psi \left(\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \left(C_1 C_2 \Theta - \rho_1 \rho_2 \hat{C} \right) - C_1 C_2 (\rho_1 - \rho_2) \hat{H} \right) \right] / \\
& \left. [(\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) (\alpha_1 \kappa_1 (\rho_1 - C_1 \theta_1) + \alpha_2 \kappa_2 (\rho_2 - C_2 \theta_2)) \right. \\
& \left. + (\rho_1 - \rho_2) (\alpha_1 \kappa_1 C_1 \eta_1 + \alpha_2 \kappa_2 C_2 \eta_2)) \right. \\
& \left. + (h_1 - h_2) \left((\rho_1 - \rho_2) \hat{H} - (\rho_1 \rho_2 (s_1 - s_2) \Theta) \right) \right]^2 \underline{u} \operatorname{div} \underline{u} \Big) = 0
\end{aligned} \tag{2.216}$$

2.5.3 Équations d'état

Nous souhaitons désormais décrire les équations d'état qui permettent de fermer le modèle à l'équilibre homogène, en supposant que chaque phase se comporte comme un fluide monophasique gouverné par les équations d'état de type gaz raide. Pour cela, les travaux de Le Métayer, Massoni et Saurel [58] sont repris. Rappelons tout d'abord que, puisque chaque phase est gouvernée par les équations d'état de type gaz raide, elle suit les équations suivantes

$$i_k(p_k, T_k) = \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{p_k + p_{k,\infty}} C_{v_k} T_k + i_{k,\infty} \tag{2.217.1}$$

$$\rho_k(p_k, T_k) = \frac{p_k + \gamma_k p_{k,\infty}}{(\gamma_k - 1) C_{v_k} T_k + i_{k,\infty}} \tag{2.217.2}$$

$$s_k(p_k, T_k) = C_{v_k} \ln \left(\frac{T_k^{\gamma_k}}{(p_k + p_{k,\infty})^{\gamma_k - 1}} \right) + s_{k,0} \tag{2.217.3}$$

De plus, puisque nous sommes à l'équilibre thermodynamique, nous avons l'égalité des pressions, températures et potentiels chimiques

$$p_1 = p_2 = p \tag{2.218.1}$$

$$T_1 = T_2 = T \tag{2.218.2}$$

$$g_1 = g_2 = g \tag{2.218.3}$$

L'utilisation des équations (2.217) permet d'écrire le potentiel chimique de chaque phase en fonction de sa pression et de sa température

$$g_k(p_k, T_k) = i_k + \frac{p_k}{\rho_k} - s_k T_k = \gamma_k C_{v_k} T_k - T_k \left(C_{v_k} \ln \left(\frac{T_k^{\gamma_k}}{(p_k + p_{k,\infty})^{\gamma_k - 1}} \right) + s_{k,0} \right) + i_{k,0} \tag{2.219}$$

et on peut déduire du système (2.218) la relation entre la pression et la température le long de la courbe de saturation

$$\begin{aligned}
& (\gamma_1 - 1) C_{v_1} \ln(p + p_{1,\infty}) - (\gamma_2 - 1) C_{v_2} \ln(p + p_{2,\infty}) = \\
& \frac{i_{2,0} - i_{1,0}}{T} + (\gamma_1 C_{v_1} - \gamma_2 C_{v_2}) \ln T - ((\gamma_1 C_{v_1} - s_{1,0}) - (\gamma_2 C_{v_2} - s_{2,0}))
\end{aligned} \tag{2.220}$$

Cette équation possède deux solutions T lorsque la pression p est connue ; on choisit la valeur de la température qui n'excède pas la température du point critique, où la masse volumique de la vapeur

égale la masse volumique du liquide. La densité du mélange ρ et son énergie interne $\rho i = \rho e - \frac{u^2}{2}$ peuvent s'écrire en fonction des grandeurs phasiques

$$\rho = \alpha_1 \rho_1 + (1 - \alpha_1) \rho_2 = \rho(\alpha_1, p) \quad (2.221.1)$$

$$\rho i = \alpha_1 \rho_1 i_1 + (1 - \alpha_1) \rho_2 i_2 = \rho i(\alpha_1, p) \quad (2.221.2)$$

On peut déduire de ce système l'équation

$$i(\rho, p) = \frac{1}{\rho} \left(\rho_2 i_2 - \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} (\rho_2 i_2 - \rho_1 i_1) \right) \quad (2.222)$$

Rappelons que la vitesse du son du mélange c est définie par l'équation

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_\rho^{-1} \left(\frac{p}{\rho^2} - \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_p \right) \quad (2.223)$$

À partir de cette définition et de l'équation d'état (2.222), nous pouvons en déduire l'équation suivante

$$\frac{1}{\rho c^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} + T \left(\frac{\alpha_1 \rho_1}{C_{p1}} \left(\frac{ds_1}{dp} \right)^2 + \frac{\alpha_2 \rho_2}{C_{p2}} \left(\frac{ds_2}{dp} \right)^2 \right) \quad (2.224)$$

où $\frac{ds_k}{dp}$ représente la dérivée de l'entropie phasique le long de la courbe de saturation $T(p)$, dont l'expression est donnée par l'équation (2.220). Remarquons que l'expression de la vitesse du son de Wallis $\frac{1}{\rho c^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}$ [24] apparaît dans cette expression ; elle représente la vitesse du mélange lorsque l'on suppose seulement l'égalité des pressions.

La vitesse du son du mélange c est donc définie puisque les vitesses du son de chaque phase c_k sont définies. De plus, on remarque que $c^2 \geq 0$ selon l'équation (2.224), et la courbe de saturation $T(p)$ définie par l'équation (2.220) donne $\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\nu = \frac{dT}{dp} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\nu$ et $(\rho c)^2 \frac{dT}{dp} = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\nu$, soit $(\rho c)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_\nu \geq \left(\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\nu \right)^2$. À partir de cette relation et de $c^2 > 0$, nous pouvons dire que l'équation d'état du mélange est convexe.

2.6 Conclusion

Nous avons déterminé dans ce chapitre une hiérarchisation des différents modèles pour l'étude des écoulements diphasiques, qui peuvent être classés selon les équilibres entre les phases qui sont supposés être réalisés. Chacun de ces modèles est fermé par l'utilisation d'équations d'état pour le mélange, déterminées à partir des équations de type gaz raide. Par ailleurs, l'utilisation de développements de Chapman-Enskog à l'ordre un pour chaque modèle obtenu permet d'utiliser un modèle réduit pour prendre en compte de faibles déséquilibres thermodynamiques ou mécaniques entre les phases.

Grâce à cette hiérarchisation des modèles diphasiques, on peut concevoir deux approches différentes pour étudier les écoulements en déséquilibre mécanique sans utiliser le modèle à une pression et deux vitesses. En effet, il est possible soit d'utiliser le modèle à deux pressions et deux vitesses et d'appliquer des méthodes de relaxation sur ces grandeurs, soit d'utiliser le modèle à une pression et une vitesse avec les termes issus du développement de Chapman-Enskog à l'ordre un, qui permettent de retrouver le déséquilibre mécanique. Ces deux approches sont étudiées successivement dans les chapitres suivants.

Chapitre 3

Méthodes de relaxation pour la modélisation des déséquilibres mécaniques

Sommaire

3.1	Introduction	79
3.2	Propriétés mathématiques du modèle à sept équations	80
3.2.1	Hyperbolicité	80
3.2.2	Structures des ondes	82
3.3	Approximation numérique du système hyperbolique	86
3.3.1	Solveur de Riemann approché	86
3.3.2	Résolution numérique	88
3.4	Méthodes de relaxation des pressions et des vitesses	90
3.4.1	Méthode à pas fractionnaires	90
3.4.2	Relaxation des vitesses	91
3.4.3	Relaxation des pressions	93
3.5	Résultats numériques et validation	96
3.5.1	Problème d'interface	96
3.5.2	Problèmes multifluides	98
3.6	Conclusion	105

3.1 Introduction

Au vu des défaillances du modèle diphasique à deux vitesses et une pression (2.50 - 2.55), et notamment sa non-hyperbolicité relevée entre autres par Stewart et Wendroff [84] et mise en avant dans des simulations par Hérard et Hurisse [45], des méthodes alternatives sont recherchées afin de calculer les écoulements diphasiques. Nous allons proposer dans ce chapitre une de ces méthodes qui consiste à utiliser un modèle à deux vitesses et deux pressions, qui possède l'avantage d'être hyperbolique, et d'utiliser ensuite les termes de traînée interfaciale et d'évolution de la fraction volumique pour équilibrer les vitesses et les pressions. Ces méthodes ont notamment été développées par Saurel et Abgrall [77] et Gallouët, Hérard et Seguin [27].

Une fois le principe de la méthode posé, il faut maintenant développer les méthodes numériques pour discrétiser en temps et en espace. En temps, une méthode à pas fractionnaires est généralement utilisée. Elle permet d'effectuer un pas de convection hyperbolique où les vitesses et les pressions sont libres l'une par rapport à l'autre, puis d'effectuer un pas de relaxation permettant le retour à l'équilibre [77, 27]. Ces méthodes à pas fractionnaires ont pour avantage une grande robustesse, au détriment de

la précision [26]. Les méthodes de retour à l'équilibre sont généralement effectuées en utilisant des relaxations instantanées, où l'on considère que les pressions retournent à l'équilibre avec une vitesse infinie [54]. Mais les résultats du paragraphe 1.3.5 montrent que les temps de relaxation, bien que très courts par rapport à l'évolution générale de ce système, ne sont pas nuls. De plus, l'utilisation d'un modèle à sept équations avec uniquement l'utilisation de relaxations instantanées des pressions équivaut à utiliser un modèle à six équations comme on l'a montré au chapitre 2, et on retrouve les problèmes numériques rencontrés avec ce modèle. Si des méthodes de relaxation en temps finis sont couramment utilisées pour différents problèmes physiques (voir par exemple [36, 9]), à notre connaissance seuls Gallouët, Hérard et Seguin [27] et Guillemaud [41] se sont intéressés à des méthodes numériques permettant de prendre en compte un temps fini de retour à l'équilibre des pressions pour l'étude des modèles diphasiques à deux vitesses et deux pressions.

Dans ce chapitre, quelques propriétés du modèle à deux vitesses et deux pressions seront d'abord présentées, suivies par une approximation numérique de ce modèle. On s'intéressera ensuite aux méthodes de relaxation, avec une présentation des méthodes de mise à l'équilibre des vitesses et des pressions de manière instantanée ou en un temps fini. Ces méthodes seront validées par plusieurs cas-tests en une dimension.

3.2 Propriétés mathématiques du modèle à sept équations

On s'intéresse aux propriétés du modèle à deux vitesses et deux pressions (2.26 - 2.32), qui est rappelé ici en utilisant le vecteur des variables primitives $\underline{W} = {}^t(\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, p_1, p_2, \alpha_1)$. Cette étude a été réalisée entre autres dans [77, 27]. Dans ce chapitre, les échanges interfaciaux de masse et de chaleur ne sont pas pris en compte, tout comme les contraintes visqueuses et les flux de chaleur. Le système s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1\rho_1) + \operatorname{div}(\alpha_1\rho_1\underline{u}_1) = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2\rho_2) + \operatorname{div}(\alpha_2\rho_2\underline{u}_2) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\alpha_1\rho_1 \frac{D_1\underline{u}_1}{Dt} = -\nabla(\alpha_1 p_1) + p_I \nabla \alpha_1 + \underline{M}^d \quad (3.1.3)$$

$$\alpha_2\rho_2 \frac{D_2\underline{u}_2}{Dt} = -\nabla(\alpha_2 p_2) - p_I \nabla \alpha_1 - \underline{M}^d \quad (3.1.4)$$

$$\frac{D_1 p_1}{Dt} + C_1 \operatorname{div} \underline{u}_1 - \frac{C_{1I}}{\alpha_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \nabla \alpha_1 = -\frac{C_{1I}}{\alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{\alpha_1 \rho_1 \kappa_1} (\underline{u}_I - \underline{u}_1) \cdot \underline{M}^d \quad (3.1.5)$$

$$\frac{D_2 p_2}{Dt} + C_2 \operatorname{div} \underline{u}_2 + \frac{C_{2I}}{\alpha_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \nabla \alpha_1 = \frac{C_{2I}}{\alpha_2} \dot{\alpha}_1 - \frac{1}{\alpha_2 \rho_2 \kappa_2} (\underline{u}_I - \underline{u}_2) \cdot \underline{M}^d \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u}_I \cdot \nabla \alpha_1 = \dot{\alpha}_1 \quad (3.1.7)$$

3.2.1 Hyperbolicité

Tout d'abord, on montre que ce modèle est hyperbolique. L'invariance par rotation du système peut être vérifiée aisément, ce qui permet de ne considérer que le cas unidimensionnel. Nous avons vu dans le paragraphe 2.2.1 que ce système peut s'écrire sous forme matricielle

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + A(\underline{W}) \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} = \frac{R(\underline{W})}{\varepsilon_p} + \underline{S}(\underline{W}) \quad (3.2)$$

où la matrice $A(\underline{W})$, peut être écrite sous la forme suivante, dans le cas unidimensionnel,

$$A(\underline{W}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \alpha_1 \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \alpha_2 \rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & -\frac{p_I - p_1}{\alpha_1 \rho_1} \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} & \frac{p_I - p_2}{\alpha_2 \rho_2} \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & u_1 & 0 & -\frac{C_{1I}(u_I - u_1)}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & u_2 & \frac{C_{2I}(u_I - u_2)}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_I \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec $C_k = \rho_k c_k^2$, où c_k est la vitesse du son dans la phase k , et $C_{k,I} = \rho_k c_{k,I}^2$, où $c_{k,I}$ est la vitesse du son interfaciale de la phase k . Le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit

$$P(\lambda) = (u_I - \lambda)(u_1 - \lambda)(u_2 - \lambda) \left((u_1 - \lambda)^2 - \frac{C_1}{\rho_1} \right) \left((u_2 - \lambda)^2 - \frac{C_2}{\rho_2} \right) \quad (3.4)$$

On en déduit ses valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_I \\ \lambda_2 &= u_1 - c_1 & \lambda_3 &= u_1 & \lambda_4 &= u_1 + c_1 \\ \lambda_5 &= u_2 - c_2 & \lambda_6 &= u_2 & \lambda_7 &= u_2 + c_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où la vitesse interfaciale u_I s'écrit $u_I = Y_1 u_1 + Y_2 u_2$. Toutes ces valeurs propres sont réelles, et les vecteurs propres à droite qui leur sont associés sont les suivants

$$\underline{r}_1(\underline{W}) = \begin{pmatrix} -\frac{p_I - p_1 + C_{1,I}}{(u_I - u_1)^2 - c_1^2} \\ \frac{p_I - p_2 + C_{2,I}}{(u_I - u_2)^2 - c_2^2} \\ -\frac{(u_I - u_1)(p_I - p_1 + C_{1,I})}{\alpha_1 \rho_1 ((u_I - u_1)^2 - c_1^2)} \\ \frac{(u_I - u_2)(p_I - p_2 + C_{2,I})}{\alpha_2 \rho_2 ((u_I - u_2)^2 - c_2^2)} \\ -\frac{C_{1,I}(u_I - u_1)^2 + c_1^2(p_I - p_1)}{\alpha_1 ((u_I - u_1)^2 - c_1^2)} \\ \frac{C_{2,I}(u_I - u_2)^2 + c_2^2(p_I - p_2)}{\alpha_2 ((u_I - u_2)^2 - c_2^2)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\underline{r}_2(\underline{W}) &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{c_1^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_1 c_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_3(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_4(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{c_1^2} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{r}_5(\underline{W}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_2}{c_2^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_2 c_2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_6(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_7(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_2}{c_2^2} \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_2 c_2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

On vérifie facilement que ces sept vecteurs sont indépendants et engendrent $\mathbb{R}^7$ même dans les cas de résonance où les valeurs propres se confondent. Le système est donc hyperbolique.

3.2.2 Structures des ondes

Montrons dans ce paragraphe que dans les cas non résonants, les champs caractéristiques associés aux valeurs propres u_I , u_1 et u_2 sont linéairement dégénérés, alors que les champs associés aux valeurs propres $u_1 \pm c_1$ et $u_2 \pm c_2$ sont vraiment non-linéaires ; ces notions sont définies par exemple dans [35]. Ces propriétés seront ici démontrées pour deux phases gouvernées par des équations d'état de type gaz raide, avec la fermeture $u_I = Y_1 u_1 + Y_2 u_2$. Une étude complète de la structure des ondes du modèle à sept équations dans le cas général peut être trouvée dans [41]. On s'intéresse d'abord à la valeur propre $\lambda_1(\underline{W}) = u_I$, pour laquelle la proposition suivante peut être introduite.

Proposition 5 : Le champ caractéristique associé à la valeur propre $\lambda_1(\underline{W}) = u_I$ est linéairement dégénéré : pour chaque état admissible $\underline{W}$ on peut écrire l'équation

$$\nabla_W \lambda_1(\underline{W}) \cdot \underline{r}_1(\underline{W}) = 0 \tag{3.8}$$

Preuve : L'expression du vecteur $\underline{r}_1(\underline{W})$ est donnée par la relation (3.6), et la dérivée de $\lambda_1(\underline{W})$ s'exprime de la manière suivante

$$\nabla_W \lambda_1(\underline{W}) = {}^t \left(\frac{Y_2}{\rho} (u_1 - u_2), -\frac{Y_1}{\rho} (u_1 - u_2), Y_1, Y_2, 0, 0, 0 \right) \tag{3.9}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\nabla_W \lambda_1(\underline{W}) \cdot \underline{r}_1(\underline{W}) &= -\frac{Y_2}{\rho} (u_1 - u_2) \frac{p_I - p_1 + C_{1,I}}{(u_I - u_1)^2 - c_1^2} - \frac{Y_1}{\rho} (u_1 - u_2) \frac{p_I - p_2 + C_{2,I}}{(u_I - u_2)^2 - c_2^2} \\
&\quad - Y_1 \frac{(u_I - u_1)(p_I - p_1 + C_{1,I})}{\alpha_1 \rho_1 ((u_I - u_1)^2 - c_1^2)} + Y_2 \frac{(u_I - u_2)(p_I - p_2 + C_{2,I})}{\alpha_2 \rho_2 ((u_I - u_2)^2 - c_2^2)} \\
&= -\frac{(p_I - p_1 + C_{1,I})}{\alpha_1 \rho_1 ((u_I - u_1)^2 - c_1^2)} (Y_2 (u_1 - u_2) + (u_I - u_1)) \\
&\quad - \frac{(p_I - p_2 + C_{2,I})}{\alpha_2 \rho_2 ((u_I - u_2)^2 - c_2^2)} (Y_1 (u_1 - u_2) - (u_I - u_2)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 5.

Les propriétés du système ne changeant pas selon la base, nous utilisons maintenant le vecteur d'état $\underline{Q} = {}^t(s_1, s_2, u_1, u_2, p_1, p_2, \alpha_1)$ pour démontrer les prochaines propriétés, pour simplifier les démonstrations. Dans cette base, la matrice du système convectif devient

$$A(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(p_I - p_1)(u_I - u_1)}{\alpha_1 \rho_1 T_1} \\ 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(p_I - p_2)(u_I - u_2)}{\alpha_2 \rho_2 T_2} \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & -\frac{p_I - p_1}{\alpha_1 \rho_1} \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & \frac{1}{\rho_2} & \frac{p_I - p_2}{\alpha_2 \rho_2} \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & u_1 & 0 & -\frac{C_{1I}(u_I - u_1)}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & u_2 & \frac{C_{2I}(u_I - u_2)}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_I \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

et les vecteurs propres à droites $\underline{r}_{Q,k}$ associés aux valeurs propres λ_k s'écrivent dans cette base

$$\underline{r}_{Q,1}(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} -\frac{p_I - p_1}{\alpha_1 \rho_1 T_1} \\ \frac{p_I - p_2}{\alpha_2 \rho_2 T_2} \\ -\frac{(u_I - u_1)(C_{1I} + p_I - p_1)}{\alpha_1 \rho_1 (u_I - u_1)^2 - \alpha_1 C_1} \\ \frac{(u_I - u_2)(C_{2I} + p_I - p_2)}{\alpha_2 \rho_2 (u_I - u_2)^2 - \alpha_2 C_2} \\ -\frac{C_{1I} \rho_1 (u_I - u_1)^2 + C_1 (p_I - p_1)}{\alpha_1 \rho_1 (u_I - u_1)^2 - \alpha_1 C_1} \\ \frac{C_{2I} \rho_2 (u_I - u_2)^2 + C_2 (p_I - p_2)}{\alpha_2 \rho_2 (u_I - u_2)^2 - \alpha_2 C_2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\underline{r}_{Q,2}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\rho_1 c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \underline{r}_{Q,3}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \underline{r}_{Q,4}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \rho_1 c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underline{r}_{Q,5}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\rho_2 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} & \underline{r}_{Q,6}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \underline{r}_{Q,7}(\underline{Q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \rho_2 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Regardons maintenant les champs caractéristiques associés à u_1 et u_2 . On peut introduire la proposition suivante, relative à ces vitesses d'onde.

Proposition 6 : Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\lambda_3(\underline{Q}) = u_1$ et $\lambda_6(\underline{Q}) = u_2$ sont linéairement dégénérés : pour chaque état admissible $\underline{Q}$, on peut écrire

$$\nabla_Q \lambda_3(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,3}(\underline{Q}) = \nabla_Q \lambda_6(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,6}(\underline{Q}) = 0 \tag{3.14}$$

Preuve : Calculons tout d'abord les expressions de $\nabla_Q \lambda_3(\underline{Q})$ et de $\nabla_Q \lambda_6(\underline{Q})$. On obtient les expressions

$$\begin{aligned}
\nabla_Q \lambda_3(\underline{Q}) &= \nabla_Q u_1 = {}^t \left(\frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \frac{\partial u_1}{\partial s_2}, \frac{\partial u_1}{\partial u_1}, \frac{\partial u_1}{\partial u_2}, \frac{\partial u_1}{\partial p_1}, \frac{\partial u_1}{\partial p_2}, \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \right) = {}^t(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\nabla_Q \lambda_6(\underline{Q}) &= \nabla_Q u_2 = {}^t \left(\frac{\partial u_2}{\partial s_1}, \frac{\partial u_2}{\partial s_2}, \frac{\partial u_2}{\partial u_1}, \frac{\partial u_2}{\partial u_2}, \frac{\partial u_2}{\partial p_1}, \frac{\partial u_2}{\partial p_2}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right) = {}^t(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Pour chacune de ces valeurs propres, les équations suivantes peuvent être écrites

$$\begin{aligned}
\nabla_Q \lambda_3(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,3}(\underline{Q}) &= {}^t(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \cdot {}^t(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0 \\
\nabla_Q \lambda_6(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,6}(\underline{Q}) &= {}^t(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \cdot {}^t(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ce qui conclue la démonstration.

Étudions enfin les champs caractéristiques associés aux valeurs $\lambda_i, i \in \{2, 4, 5, 7\}$. Pour ces champs, le résultat suivant peut être démontré

Proposition 7 : Les champs caractéristiques associés aux valeurs propres $\lambda_i(\underline{Q}), i \in \{2, 4, 5, 7\}$ sont vraiment non-linéaires : nous avons pour chaque état admissible $\underline{Q}$

$$\nabla_Q \lambda_i(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,i}(\underline{Q}) \neq 0 \quad i \in \{2, 4, 5, 7\} \tag{3.17}$$

Preuve : Calculons tout d'abord les vecteurs $\nabla_Q \lambda_i(\underline{Q})$. Ces vecteurs s'écrivent

$$\begin{aligned}
\nabla_Q \lambda_2(\underline{Q}) &= \nabla_Q(u_1 - c_1) = {}^t \left(- \left(\frac{\partial c_1}{\partial s_1} \right)_{p_1}, 0, 1, 0, - \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1}, 0, 0 \right) \\
\nabla_Q \lambda_4(\underline{Q}) &= \nabla_Q(u_1 + c_1) = {}^t \left(0, \left(\frac{\partial c_1}{\partial s_1} \right)_{p_1}, 0, 1, 0, \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1}, 0 \right) \\
\nabla_Q \lambda_5(\underline{Q}) &= \nabla_Q(u_2 - c_2) = {}^t \left(- \left(\frac{\partial c_2}{\partial s_2} \right)_{p_2}, 0, 1, 0, - \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2}, 0, 0 \right) \\
\nabla_Q \lambda_7(\underline{Q}) &= \nabla_Q(u_2 + c_2) = {}^t \left(0, \left(\frac{\partial c_2}{\partial s_2} \right)_{p_2}, 0, 1, 0, \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

On utilise maintenant les expressions (3.13) des vecteurs propres à droite dans la base $\underline{Q}$ pour écrire les égalités suivantes concernant les valeurs propres λ_i , $i \in \{2, 4, 5, 7\}$

$$\begin{aligned}
\nabla_Q \lambda_2(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,2}(\underline{Q}) &= {}^t \left(- \left(\frac{\partial c_1}{\partial s_1} \right)_{p_1}, 0, 1, 0, - \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1}, 0, 0 \right) \cdot {}^t(0, 0, 1, 0, -\rho_1 c_1, 0, 0) \\
&= 1 + \rho_1 c_1^2 \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1} \\
\nabla_Q \lambda_4(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,4}(\underline{Q}) &= {}^t \left(\left(\frac{\partial c_1}{\partial s_1} \right)_{p_1}, 0, 1, 0, \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1}, 0, 0 \right) \cdot {}^t(0, 0, 1, 0, \rho_1 c_1, 0, 0) \\
&= 1 + \rho_1 c_1^2 \left(\frac{\partial c_1}{\partial p_1} \right)_{s_1} \\
\nabla_Q \lambda_5(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,5}(\underline{Q}) &= {}^t \left(- \left(\frac{\partial c_2}{\partial s_2} \right)_{p_2}, 0, 1, 0, - \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2}, 0, 0 \right) \cdot {}^t(0, 0, 0, 1, 0, -\rho_2 c_2, 0) \\
&= 1 + \rho_2 c_2^2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2} \\
\nabla_Q \lambda_7(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_{Q,7}(\underline{Q}) &= {}^t \left(\left(\frac{\partial c_2}{\partial s_2} \right)_{p_2}, 0, 1, 0, \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2}, 0, 0 \right) \cdot {}^t(0, 0, 0, 1, 0, \rho_2 c_2, 0) \\
&= 1 + \rho_2 c_2^2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial p_2} \right)_{s_2}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Il nous reste alors à montrer que $1 + \rho_k c_k^2 \left(\frac{\partial c_k}{\partial p_k} \right)_{s_k}$ n'est jamais nul pour $k = 1, 2$. Rappelons que la vitesse du son est définie par $c_k^2 = \left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = \left(\left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} \right)^{-1}$. L'égalité suivante peut alors être écrite

$$\left(\frac{\partial c_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} = \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \left(\left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} \right)^{-1} \right)_{s_k} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho_k}{\partial p_k^2} \right)_{s_k} \left(\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} \right)^{-3/2} \tag{3.20}$$

Puisque chaque phase est gouvernée par des lois d'état de type gaz raide, l'utilisation de l'équation

(1.27.3) permet d'écrire l'expression de la masse volumique en fonction de la pression et de l'entropie, ainsi que ses dérivées premières et secondes en fonction de la pression

$$\rho_k(p_k, s_k) = \frac{(p_k + p_{k,\infty})^{1/\gamma_k}}{C_{v_k}^{(\gamma_k-1)} \left(\exp \frac{s_k - s_{k,0}}{C_{v_k}} \right)^{1/\gamma_k}} \quad (3.21.1)$$

$$\left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} = \frac{(p_k + p_{k,\infty})^{-\frac{\gamma_k-1}{\gamma_k}}}{C_{v_k} \gamma (\gamma_k - 1) \left(\exp \frac{s_k - s_{k,0}}{C_{v_k}} \right)^{1/\gamma_k}} \quad (3.21.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \rho_k}{\partial p_k^2} \right)_{s_k} = \frac{(p_k + p_{k,\infty})^{-\frac{2\gamma_k-1}{\gamma_k}}}{C_{v_k} \gamma^2 \left(\exp \frac{s_k - s_{k,0}}{C_{v_k}} \right)^{1/\gamma_k}} \quad (3.21.3)$$

À partir de ces expressions, on peut exprimer la dérivée de la vitesse du son en fonction de la pression

$$\left(\frac{\partial c_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} = \frac{\gamma_k - 1}{2\gamma_k (p_k + p_{k,\infty})} \left(\frac{(p_k + p_{k,\infty})^{-\frac{\gamma_k-2}{\gamma_k}}}{C_{v_k} \gamma (\gamma_k - 1) \left(\exp \frac{s_k - s_{k,0}}{C_{v_k}} \right)^{1/\gamma_k}} \right)^{-1/2} \quad (3.22)$$

La condition $\left(\frac{\partial c_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} > 0$ est donc équivalente à l'hypothèse $\gamma_k > 1$, avec $\gamma_k = \frac{C_{p_k}}{C_{v_k}}$. Cette hypothèse est vérifiée, et nous avons donc $1 + \rho_k c_k^2 \left(\frac{\partial c_k}{\partial p_k} \right)_{s_k} > 1$: les champs caractéristiques associés à ces valeurs propres sont donc vraiment non-linéaires.

3.3 Approximation numérique du système hyperbolique

Une méthode d'approximation numérique de la partie convective du modèle à sept équations (3.1) est maintenant présentée. Pour résoudre ce système, on utilise un schéma numérique quasi-conservatif de type volumes finis. Il est basé sur le schéma VF-Roe [3, 27], qui implique la résolution d'un problème de Riemann linéarisé pour chaque interface entre les cellules de contrôles du maillage. Nous présentons donc un solveur de Riemann approché avant de développer le schéma numérique.

3.3.1 Solveur de Riemann approché

La méthode présentée a été proposée par Andrianov, Saurel et Warnecke [3]. Le système d'équations est formulé en utilisant les variables primitives $\underline{V} = {}^t(\alpha_1, \rho_1, u_1, p_1, \rho_2, u_2, p_2)$. Le problème de Riemann à l'interface entre deux cellules s'écrit

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + A(\underline{V}) \frac{\partial \underline{V}}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

$$\underline{V}(x, 0) = \begin{cases} \underline{V}_L & x \leq 0 \\ \underline{V}_R & x > 0 \end{cases}$$

Notons dans ce paragraphe les valeurs à l'interface $\phi = \frac{1}{2}(\phi_L + \phi_R)$. La matrice A du système convectif peut alors être écrite

$$A(\underline{V}) = \begin{pmatrix} u_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1(u_I - u_1)}{\alpha_1} & u_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_I - p_1}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & u_1 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_1 c_{1,I}^2(u_I - u_1)}{\alpha_1} & 0 & \rho_1 c_1^2 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_2(u_I - u_2)}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & u_2 & \rho_2 & 0 \\ \frac{p_I - p_2}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & \frac{1}{\rho_2} \\ \frac{\rho_2 c_{2,I}^2(u_I - u_2)}{\alpha_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 c_2^2 & u_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où les valeurs aux interfaces de u_I et p_I sont calculées à partir du vecteur moyen, et où les vitesses du son sont données par

$$c_k^2 = \frac{\frac{p_k}{\rho_k^2} - \left(\frac{\partial i_k}{\partial \rho_k} \right)_{p_k}}{\left(\frac{\partial i_k}{\partial p_k} \right)_{\rho_k}} \quad (3.25.1)$$

$$c_{k,I}^2 = \frac{\frac{p_I}{\rho_k^2} - \left(\frac{\partial i_k}{\partial \rho_k} \right)_{p_k}}{\left(\frac{\partial i_k}{\partial p_k} \right)_{\rho_k}} \quad (3.25.2)$$

Dans le paragraphe précédent, on a montré que le système est hyperbolique, et les vecteurs propres à droite peuvent être écrits dans la base $\underline{V} = {}^t(\alpha_1, \rho_1, u_1, p_1, \rho_2, u_2, p_2)$

$$\begin{aligned} \underline{r}_1(\underline{V}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ -c_1 \sigma_2 \left(\rho_1 \left(\sigma_1 - c_{1,I}^2 \right) + p_1 - p_I \right) \\ \alpha_1 \sigma_2 (u_1 - u_I) \left(p_1 - p_I - \rho_1 c_{1,I}^2 \right) / \rho_1 \\ \alpha_2 \sigma_1 \left(\rho_2 c_{2,I}^2 (u_I - u_2)^2 - c_2^2 (p_2 - p_I) \right) \\ -c_2 \sigma_1 \left(\rho_2 \left(\sigma_2 - c_{2,I}^2 \right) + p_2 - p_I \right) \\ \alpha_2 \sigma_1 (u_2 - u_I) \left(p_2 - p_I - \rho_2 c_{2,I}^2 \right) / \rho_2 \\ \alpha_2 \sigma_1 \left(\rho_2 c_{2,I}^2 (u_I - u_2)^2 - c_2^2 (p_2 - p_I) \right) \end{pmatrix}, \underline{r}_2(\underline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \\ -c_1 \\ \rho_1 c_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{r}_3(\underline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{r}_4(\underline{V}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_1 \\ c_1 \\ \rho_1 c_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{r}_5(\underline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_2 \\ -c_2 \\ \rho_2 c_2^2 \end{pmatrix}, \underline{r}_6(\underline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{r}_7(\underline{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_2 \\ c_2 \\ \rho_2 c_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec $\sigma_1 = c_1^2 + (u_1 - u_I)^2$ et $\sigma_2 = c_2^2 + (u_2 - u_I)^2$. Le vecteur $\Delta \underline{V} = \underline{V}_R - \underline{V}_L$ peut être exprimé dans cette base en écrivant

$$\Delta \underline{V} = \sum_{k=1}^7 b_k \underline{r}_k(\underline{V}) \quad (3.27)$$

avec les coefficients b_k donnés par les expressions suivantes, où l'on note ΔV_i la $i^{\text{è}}$ composante de $\Delta \underline{V}$ et r_{ki} la $i^{\text{è}}$ composante de $\underline{r}_k$.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\Delta V_1}{r_{11}} \\ b_2 &= \frac{\Delta V_3 \rho_1 c_1 + \Delta V_4 - b_1 (r_{13} \rho_1 b_1 + r_{14})}{2 \rho_1 c_1^2} \\ b_3 &= \frac{-\Delta V_3 \rho_1 c_1 + \Delta V_4 + b_1 (r_{13} \rho_1 b_1 - r_{14})}{2 \rho_1 c_1^2} \\ b_4 &= \Delta V_2 - b_1 r_{12} - \rho_1 (b_1 + b_3) \\ b_5 &= \frac{\Delta V_6 \rho_2 c_2 + \Delta V_7 - b_1 (r_{16} \rho_2 b_2 + r_{14})}{2 \rho_2 c_2^2} \\ b_6 &= \frac{-\Delta V_6 \rho_2 c_2 + \Delta V_7 - b_1 (r_{16} \rho_2 b_2 - r_{14})}{2 \rho_2 c_2^2} \\ b_7 &= \Delta V_5 - b_1 r_{15} - \rho_2 (b_5 + b_6) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le vecteur d'état à l'interface du problème de Riemann peut être facilement approché par

$$\underline{V}^* = \underline{V}_L + \sum_{\lambda_k < 0} b_k \underline{r}_k(\underline{V}) \quad (3.29)$$

Ce solveur de Riemann peut être utilisé dans un schéma numérique de type Godunov pour la résolution de la partie convective du modèle à sept équations.

3.3.2 Résolution numérique

On utilise un schéma numérique de type Godunov développé par Andrianov, Saurel et Warnecke [3]. Cette méthode est rappelée dans ce paragraphe. Le système hyperbolique que nous devons résoudre s'écrit sous la forme suivante, en une dimension

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{U})}{\partial x} + \underline{H}(\underline{U}) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = 0 \quad (3.30)$$

où le vecteur d'état $\underline{U}$, le flux $\underline{F}(\underline{U})$ et le terme non-conservatif $\underline{H}(\underline{U})$ s'écrivent

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 e_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 e_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \underline{F}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 u_1 \\ \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 p_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 e_1 + p_1) u_1 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2 \\ \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 p_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 e_2 + p_2) u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{H}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_I \\ -p_I u_I \\ 0 \\ p_I \\ p_I u_I \\ u_I \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Notons $\Delta\alpha_1$ une discrétisation de $\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}$ qui reste à déterminer, et $\underline{U}_{i+1/2}^* (\underline{U}_i, \underline{U}_{i+1})$ le vecteur d'état à l'interface entre les cellules i et $i+1$, calculé en utilisant le solveur de Riemann approché proposé au paragraphe précédent. Une discrétisation de type Godunov est utilisée pour résoudre les équations du système (3.30) sur les masses, les quantités de mouvement et les énergies. Nous notons ϕ_i^n la variable ϕ dans la cellule i à l'instant n . Ce schéma s'écrit alors en une dimension

$$\underline{U}_i^{n+1} = \underline{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F \left(\underline{U}_{i+1/2}^* (\underline{U}_i^n, \underline{U}_{i+1}^n) \right) - F \left(\underline{U}_{i-1/2}^* (\underline{U}_{i-1}^n, \underline{U}_i^n) \right) \right) - \Delta t \underline{H}(\underline{U}_i^n) \Delta\alpha_1 \quad (3.32)$$

Le développement de ce système donne les équations suivantes sur les masses, les quantités de mouvement et les énergies

$$(\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} = (\alpha_k \rho_k)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k u_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k u_k)_{i-1/2}^* \right) \quad (3.33.1)$$

$$(\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} = (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k)_{i-1/2}^* \right) - (-1)^k \Delta t (p_I)_i^n \Delta\alpha_1 \quad (3.33.2)$$

$$(\alpha_k \rho_k e_k)_i^{n+1} = (\alpha_k \rho_k e_k)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k u_k (\rho_k e_k + p_k))_{i+1/2}^* - (\alpha_k u_k (\rho_k e_k + p_k))_{i-1/2}^* \right) - (-1)^k \Delta t (p_I)_i^n (u_I)_i^n \Delta\alpha_1 \quad (3.33.3)$$

Pour déterminer la discrétisation $\Delta\alpha_1$, le principe selon lequel un écoulement uniforme doit rester uniforme dans le temps [1] est utilisé. Cela signifie que, si les pressions et les vitesses phasiques sont égales, elles le restent avec notre schéma numérique. Introduisons donc dans les équations (3.33)

$$\begin{aligned} (u_k)_i^n &= (u_k)_i^{n+1} = (u_k)_{i\pm 1/2}^* = u_I = u = \text{constante}, \quad k = 1, 2 \\ (p_k)_i^n &= (p_k)_i^{n+1} = (p_k)_{i\pm 1/2}^* = p_I = p = \text{constante}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le système (3.33) devient alors, en notant $i_k = e_k - \frac{u_k^2}{2}$ l'énergie spécifique interne de la phase k

$$(\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} = u (\alpha_k \rho_k)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k)_{i-1/2}^* \right) \quad (3.35.1)$$

$$(\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} u = (\alpha_k \rho_k)_i^n u - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u^2 \left((\alpha_k \rho_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k)_{i-1/2}^* \right) + p \left((\alpha_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k)_{i-1/2}^* \right) \right) - (-1)^k \Delta t p \Delta\alpha_1 \quad (3.35.2)$$

$$(\alpha_k \rho_k i_k)_i^{n+1} = (\alpha_k \rho_k i_k)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left((\alpha_k \rho_k i_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k i_k)_{i-1/2}^* + p \left((\alpha_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k)_{i-1/2}^* \right) \right) - (-1)^k \Delta t p u \Delta\alpha_1 \quad (3.35.3)$$

Si l'on multiplie l'équation (3.35.1) par $-u$ et on somme le résultat avec l'équation (3.35.2), l'expression de $\Delta\alpha_1$ peut être trouvée. Elle s'écrit

$$\Delta\alpha_1 = (-1)^{k+1} \frac{(\alpha_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k)_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (3.36)$$

L'introduction de cette expression dans l'équation (3.35.3) nous permet de simplifier celle-ci, qui devient

$$(\alpha_k \rho_k i_k)_{i_i}^{n+1} = (\alpha_k \rho_k i_k)_{i_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} u \left((\alpha_k \rho_k i_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k i_k)_{i-1/2}^* \right) \quad (3.37)$$

Des équations d'état de type gaz raide sont appliquées aux deux phases. L'énergie interne phasique peut alors être écrite $\rho_k i_k = \frac{p + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1}$. C'est donc une constante, ce qui permet de trouver la discrétisation pour l'équation sur la fraction volumique

$$(\alpha_k)_i^{n+1} = (\alpha_k)_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k)_{i-1/2}^* \right) \quad (3.38)$$

Dans le cas général, notre schéma numérique s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k)_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k u_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k u_k)_{i-1/2}^* \right) \end{aligned} \quad (3.39.1)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k)_{i+1/2}^* - (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k p_k)_{i-1/2}^* \right) \\ &\quad + (-1)^{k+1} (p_I)_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_1)_{i+1/2}^* - (\alpha_1)_{i-1/2}^* \right) \end{aligned} \quad (3.39.2)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_k \rho_k e_k)_i^{n+1} &= (\alpha_k \rho_k e_k)_i^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_k u_k (\rho_k e_k + p_k))_{i+1/2}^* - (\alpha_k u_k (\rho_k e_k + p_k))_{i-1/2}^* \right) \\ &\quad + (-1)^{k+1} (p_I)_i^n (u_I)_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_1)_{i+1/2}^* - (\alpha_1)_{i-1/2}^* \right) \end{aligned} \quad (3.39.3)$$

$$(\alpha_1)_i^{n+1} = (\alpha_1)_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_1)_{i+1/2}^* - (\alpha_1)_{i-1/2}^* \right) \quad (3.39.4)$$

3.4 Méthodes de relaxation des pressions et des vitesses

3.4.1 Méthode à pas fractionnaires

Une méthode à pas fractionnaires est utilisée pour implémenter les méthodes de relaxation des pressions et des vitesses [54, 45] : une fois le pas convectif résolu, on résout les équations différentielles ordinaires associées à la relaxation des vitesses puis celles associées à la relaxation des pressions. La relaxation des vitesses est effectuée en premier, bien que le temps de relaxation des pressions soit très inférieur à celui des vitesses. Cet ordre a une importance : nous pouvons voir que le terme de traînée $\underline{M}^d$ est présent dans les équations d'évolution des pressions du système (3.1), et donc la relaxation des vitesses a une influence sur les pressions de chaque phase, alors que la relaxation des pressions n'a pas d'influence sur les vitesses. Effectuer la relaxation des vitesses avant celles des pressions permet donc d'impliciter complètement le schéma numérique pour les relaxations.

On utilise l'algorithme suivant pour la résolution du système à deux vitesses et deux pressions avec relaxations

- Calcul des vecteurs d'état après le pas convectif $\underline{W}^{n+1/2} = \underline{W}^n + R(\underline{W}^n)$
- Calcul des relaxations des vitesses $\underline{W}_u^{n+1/2} = \underline{W}_u^{n+1/2} + R_u(\underline{W}_u^{n+1/2})$
- Calcul des relaxations des pressions $\underline{W}^{n+1} = \underline{W}_u^{n+1/2} + R_p(\underline{W}^{n+1})$

3.4.2 Relaxation des vitesses

La procédure de relaxation des vitesses vise à résoudre le système suivant, où l'on ne prend en compte que les termes de traînée interfaciale $\underline{M}^d = \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) &= \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 e_1) &= \underline{u}_I \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 e_2) &= -\underline{u}_I \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_u} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

On utilise une méthode de relaxation instantanée des vitesses développée par Saurel et Abgrall [77], où l'on suppose que $\varepsilon_u = 0$, et une méthode de relaxation à temps fini ($\varepsilon_u > 0$) qui en est directement inspirée. Dans les présentations des méthodes de relaxation qui suivent, nous noterons ϕ_k^0 les variables issues du pas convectif et ϕ_k^* les variables après relaxation des vitesses.

Relaxation instantanée ($\varepsilon_u = 0$)

On peut facilement déduire du système (3.40) les deux équations suivantes sur les vitesses $\underline{u}_k$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) = 0 \tag{3.41.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) = -\frac{\rho}{\varepsilon_p} \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho_1} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \right) (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \tag{3.41.2}$$

D'après l'équation (3.40), les masses volumiques partielles $\alpha_1 \rho_1$ et $\alpha_2 \rho_2$ sont constantes pendant la relaxation des vitesses. Les équations précédentes peuvent donc être intégrées, ce qui donne

$$\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^* + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^* = \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^0 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^0 \tag{3.42.1}$$

$$\underline{u}_2^* - \underline{u}_1^* = (\underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0) \exp \left(-\frac{\rho t}{\varepsilon_u} \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho_1} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \right) \right) \tag{3.42.2}$$

Puisque les masses volumiques partielles sont constantes, la densité de mélange $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ l'est aussi. On déduit que la fraction massique $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$ est également constante ($Y_k^* = Y_k^0$), tout comme la vitesse d'interface $\underline{u}_I = \frac{\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^* + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^*}{\rho} = Y_1^* \underline{u}_1^* + Y_2^* \underline{u}_2^*$, selon l'équation (3.42). Supposons que $\varepsilon_u = 0$. Ceci est équivalent à chercher la solution du système précédent lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire

trouver la solution stationnaire du système. On peut facilement voir que l'équation (3.42.2) devient alors

$$\underline{u}_2^* - \underline{u}_1^* = 0 \quad (3.43)$$

Une solution du système (3.42) peut donc être déterminée

$$\underline{u}_1^* = \underline{u}_2^* = \frac{\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^0 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^0}{\rho} \quad (3.44)$$

On retrouve ici l'expression de la vitesse interfaciale $\underline{u}_I$, qui correspond donc à la vitesse d'équilibre de l'écoulement diphasique. Il nous faut maintenant retrouver la variation d'énergie due aux relaxations des vitesses. La manipulation du système (3.40) permet l'obtention des équations d'évolution des énergies internes $i_k = e_k - \frac{\underline{u}_k^2}{2}$

$$\alpha_k \rho_k \frac{\partial i_k}{\partial t} = u_I \cdot \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} - \frac{\partial \underline{u}_k^2 / 2}{\partial t} \quad (3.45)$$

En rappelant que $\underline{u}_I$ est constante en fonction du temps, selon l'équation (3.41.1), on approche l'intégration de cette équation par

$$i_k^* = i_k^0 + \underline{u}_I (\underline{u}_k^* - \underline{u}_k^0) - \frac{1}{2} \left((\underline{u}_k^*)^2 - (\underline{u}_k^0)^2 \right) \quad (3.46)$$

et le résultat $\underline{u}_1 = \underline{u}_I$ est utilisé pour réécrire cette équation sous la forme

$$i_k^* = i_k^0 + \frac{1}{2} (\underline{u}_I - \underline{u}_k^0)^2 \quad (3.47)$$

Relaxation à temps fini ($\varepsilon_u > 0$)

Le temps de relaxation ε_u est maintenant considéré comme étant supérieur à zéro. Avant d'intégrer le système (3.40), on note que la vitesse d'interface est constante ($\underline{u}_I = Y_1^* \underline{u}_1^* + Y_2^* \underline{u}_2^* = Y_1^0 \underline{u}_1^0 + Y_2^0 \underline{u}_2^0$) puisque les masses volumiques partielles $\alpha_k \rho_k$ et la quantité de mouvement du mélange sont constantes durant la relaxation. L'intégration entre les temps $t = 0$ et $t = \Delta t$, où Δt est le pas de temps de l'étape convective, donne

$$\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^* + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^* = \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1^0 + \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2^0 \quad (3.48.1)$$

$$(\underline{u}_2^* - \underline{u}_1^*) = (\underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0) \exp \left(-\frac{\rho \Delta t}{\varepsilon_u} \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho_1} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \right) \right) \quad (3.48.2)$$

que l'on peut transformer sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{u}_1^* &= \underline{u}_I - Y_2 (\underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon_u} \frac{1}{Y_1 Y_2} \Delta t \right) \\ \underline{u}_2^* &= \underline{u}_I + Y_1 (\underline{u}_2^0 - \underline{u}_1^0) \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon_u} \frac{1}{Y_1 Y_2} \Delta t \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'intégration des équations sur les énergies donne à nouveau les expressions suivantes sur les énergies internes

$$i_k^* = i_k^0 + \underline{u}_I (\underline{u}_k^* - \underline{u}_k^0) - \frac{1}{2} \left((\underline{u}_k^*)^2 - (\underline{u}_k^0)^2 \right) \quad (3.50)$$

3.4.3 Relaxation des pressions

La relaxation des pressions vise à résoudre le système contenant les termes fonctions de $\dot{\alpha}_1 = \frac{p_I}{\varepsilon} (p_1 - p_2)$. Ce système d'équations différentielles ordinaires s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 e_1) &= -p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 e_2) &= p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_p p_I} (p_1 - p_2)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

On reprend la méthode de Lallemand [54] pour la relaxation instantanée des pressions. Cependant, effectuer une relaxation instantanée du système revient à utiliser le modèle à deux vitesses et deux pressions pour résoudre le modèle bi-fluide classique à une seule pression, et les problèmes inhérents à ce dernier modèle apparaissent également lorsque l'on effectue une relaxation instantanée des pressions [45]. Une méthode de relaxation des pressions à temps finis a donc également été développée, pour que celles-ci restent différentes. Dans les paragraphes suivants, les notations ϕ^0 et ϕ^* désigneront la variable ϕ avant et après la procédure de relaxation, respectivement.

Relaxation instantanée ($\varepsilon_p = 0$)

La méthode de relaxation instantanée des pressions développée par Lallemand [54] est développée pour N phases gouvernées par des équations d'état de type gaz raide, données par les relations (1.27). Dans le cas $N = 2$, qui est présenté dans ce paragraphe, la procédure de relaxation est directe. On cherche à résoudre les équations sur les énergies phasiques

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} &= -p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \\
\frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} &= p_I \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

L'intégration de ces équations entre les bornes 0 et Δt , avec Δt le pas de temps du pas convectif, donne les expressions

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 \rho_1 e_1)^* - (\alpha_1 \rho_1 e_1)^0 &= - \int_0^{\Delta t} p_I dt \\
(\alpha_2 \rho_2 e_2)^* - (\alpha_2 \rho_2 e_2)^0 &= \int_0^{\Delta t} p_I dt
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Nous effectuons le changement de variable $d\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} dt$ pour obtenir les expressions

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \rho_1 e_1)^* - (\alpha_1 \rho_1 e_1)^0 &= - \int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^*} p_I d\alpha_1 \\ (\alpha_2 \rho_2 e_2)^* - (\alpha_2 \rho_2 e_2)^0 &= \int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^*} p_I d\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Une approximation trapézoïdale est utilisée pour l'évaluation des intégrales des expressions précédentes

$$\int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^*} p_I d\alpha_1 \approx \frac{p_I^0 + p_I^*}{2} (\alpha_1^* - \alpha_1^0) \quad (3.55)$$

Puisque les deux phases sont gouvernées par des équations d'état de type gaz raide, l'énergie de chaque phase vérifie

$$\alpha_k \rho_k e_k = \alpha_k \frac{p + \gamma_k p_{k,\infty}}{\gamma_k - 1} + \alpha_k \rho_k \frac{\underline{u}_k^2}{2} \quad (3.56)$$

On remarque que les masses $\alpha_k \rho_k$ et les vitesses $\underline{u}_k$ sont constantes durant la procédure de relaxation des pressions. Les équations (3.54) peuvent alors être manipulées pour devenir

$$\begin{aligned} \alpha_1^* (p_1^* + \gamma_1 p_{1,\infty}) - \alpha_1^0 (p_1^0 + \gamma_1 p_{1,\infty}) - &= -(\gamma_1 - 1) \frac{p_I^0 + p_I^*}{2} \Delta\alpha_1 \\ \alpha_2^* (p_2^* + \gamma_2 p_{2,\infty}) - \alpha_2^0 (p_2^0 + \gamma_2 p_{2,\infty}) - &= (\gamma_2 - 1) \frac{p_I^0 + p_I^*}{2} \Delta\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

où $\Delta\alpha_1 = \alpha_1^* - \alpha_1^0$. Puisqu'une relaxation instantanée est effectuée, les pressions sont égales entre elles à l'instant Δt , d'où l'on déduit l'égalité $p_1^* = p_2^* = p_I^* = p^*$. Le système précédent nous permet d'obtenir une équation du second degré sur $\Delta\alpha_1$

$$A_0 + A_1 \Delta\alpha_1 + A_2 (\Delta\alpha_1)^2 = 0 \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \alpha_1^0 \alpha_2^0 (p_1^0 - p_2^0) \\ A_1 &= \frac{1}{2} (\alpha_1^0 ((\gamma_2 + 1) (p_1^0 + p_{2,\infty}) + (\gamma_2 - 1) (p_I^0 + p_{2,\infty})) \\ &\quad + \alpha_2^0 ((\gamma_1 + 1) (p_2^0 + p_{1,\infty}) + (\gamma_1 - 1) (p_I^0 + p_{1,\infty}))) \\ A_2 &= \frac{1}{2} ((\gamma_1 - \gamma_2) p_I^0 + (\gamma_2 + 1) \gamma_1 p_{1,\infty} - (\gamma_1 + 1) \gamma_2 p_{2,\infty}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Notons que la positivité du discriminant $\Delta = A_1^2 - 4A_0A_2$ n'est pas assurée dans cette équation, et donc que nous ne sommes pas certains d'obtenir une solution avec cette méthode. Remarquons aussi que, lorsque nous cherchons les racines de ce polynôme, des erreurs d'arrondis peuvent survenir du fait des différences d'ordres de grandeur entre A_1 et $\sqrt{\Delta}$ d'une part (avec $\Delta = A_1^2 - 4A_0A_2$), et la différence $|A_1| - \sqrt{\Delta}$ d'autre part, ce qui peut mener à des problèmes numériques. Ces racines seront donc évaluées en utilisant les formules suivantes pour éviter ce problème numérique

$$da_1^* = -\text{sign}(A_1) \frac{|A_1| + \sqrt{\Delta}}{2A_2} \quad da_2^* = -\text{sign}(A_1) \frac{2A_0}{|A_1| + \sqrt{\Delta}} \quad (3.60)$$

Il faut maintenant déterminer quelle racine utiliser pour obtenir la fraction volumique après relaxation des pressions. Tout d'abord, l'équation (3.57) permet d'obtenir la relation suivante entre les pressions et la variation de la fraction volumique

$$(p_1^0 - p_2^0) = \left(\frac{1}{\alpha_1^0} \left(\frac{\gamma_1 - 1}{2} p_I^0 + \frac{\gamma_1 + 1}{2} p_1^0 + \gamma_1 p_{1,\infty} \right) + \frac{1}{\alpha_2^0} \left(\frac{\gamma_2 - 1}{2} p_I^0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} p_2^0 + \gamma_2 p_{2,\infty} \right) \right) \Delta\alpha_1 \quad (3.61)$$

Remarquons que le signe de $\Delta\alpha_1$ est le même que celui de $p_1^0 - p_2^0$. La racine est donc choisie de la manière suivante :

- Si les racines sont de signes différents, nous prenons la valeur qui a le même signe que $p_1^0 - p_2^0$
- Si elles ont le même signe, nous prenons la valeur qui vérifie $\alpha_1^0 + \Delta\alpha_1 \in [0, 1]$.

La valeur de la fraction volumique après relaxation, α_1^* , est donc obtenue. Les équations (3.57) sont alors utilisées pour mettre à jour les énergies phasiques et finir le processus de relaxation.

Relaxation à temps fini ($\varepsilon_p > 0$)

Une méthode de relaxation des pressions à temps fini est maintenant développée. Pour cela, on cherche à résoudre implicitement le système d'équations différentielles ordinaires (3.51) à l'instant du pas de temps convectif Δt .

Le système (3.51) est transformé pour utiliser les pressions comme variables d'état. Ce nouveau système d'équations différentielles ordinaires peut être déduit du système (3.1) et s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) = 0 \quad (3.62.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) = 0 \quad (3.62.2)$$

$$\frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} = 0 \quad (3.62.3)$$

$$\frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t} = 0 \quad (3.62.4)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_p} \frac{C_{1I}}{\alpha_1 p_I} (p_1 - p_2) \quad (3.62.5)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{C_{2I}}{\alpha_2 p_I} (p_1 - p_2) \quad (3.62.6)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{1}{p_I} (p_1 - p_2) \quad (3.62.7)$$

Nous rappelons que $C_{k,I}$ est le module de compressibilité de la phase k à l'interface entre les phases et s'écrit, pour les lois d'état de type gaz raide, sous la forme $C_{k,I} = \gamma_k (p_I + p_{k,\infty})$. Il ne semble pas possible de trouver une solution analytique à ces équations, puisque la pression interfaciale p_I n'est pas constante durant la relaxation. Les équations (3.62) sont donc discrétisées sous la forme suivante, où l'exposant 0 indique une valeur avant la procédure de relaxation, et * indique une valeur après relaxation

$$\begin{aligned}
\frac{p_1^* - p_1^0}{\Delta t} &= -\frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\gamma_1 (p_I^* + p_{1,\infty})}{\alpha_1^* p_I^*} (p_1^* - p_2^*) \\
\frac{p_2^* - p_2^0}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\gamma_2 (p_I^* + p_{2,\infty})}{(1 - \alpha_1^*) p_I^*} (p_1^* - p_2^*) \\
\frac{\alpha_1^* - \alpha_1^0}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{1}{p_I^*} (p_1^* - p_2^*)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Ces équations sont résolues en utilisant une méthode de Newton, ce qui permet d'obtenir les valeurs des pressions p_k^* et de la fraction volumique α_1^* après relaxation des pressions.

3.5 Résultats numériques et validation

3.5.1 Problème d'interface

On s'intéresse tout d'abord à l'advection de l'interface entre deux fluides purs, afin de s'assurer que le type de relaxation effectué n'influe pas sur ce phénomène : puisque les phases sont séparées, il ne doit pas y avoir de retour à l'équilibre. Ce cas-test consiste en un tube de longueur 1 m, rempli à gauche de l'interface ($x < 0.5$ m) d'eau et à droite d'air, où les deux phases ont une vitesse de 1000 m.s^{-1} . Les valeurs initiales du problème sont résumées dans la table

état gauche	état droit	
$\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$	
$\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	
$u = 1000 \text{ m.s}^{-1}$	$u = 1000 \text{ m.s}^{-1}$	
$p = 10^5 \text{ Pa}$	$p = 10^5 \text{ Pa}$	
$\alpha_1 = 10^{-8}$	$\alpha_1 = 1.0 - 10^{-8}$	(3.64)

Les fluides ne sont pas tout à fait purs dans ce cas-test, mais une petite fraction de la phase dispersée est présente de chaque côté : les solveurs de type VF-Roe ne sont pas adaptés aux fluides purs, et ceci pourrait mener à des échecs numériques. Chaque phase suit une loi d'état de type gaz raide, dont les coefficients thermodynamiques sont les suivants

$$\begin{aligned}
\gamma_{air} &= 1.4 & p_{air,\infty} &= 0 \text{ Pa} \\
\gamma_{eau} &= 4.4 & p_{eau,\infty} &= 6.0 \cdot 10^8 \text{ Pa}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Le calcul est effectué sur 1001 nœuds, en utilisant le modèle à sept équations sans relaxation, avec relaxations instantanées et avec relaxation à temps finis, où nous prenons $\varepsilon_p = 10^{-6} \text{ s}$ et $\varepsilon_u = 10^{-4} \text{ s}$. Les résultats pour la masse volumique, les vitesses, les pressions et les fractions volumiques sont présentées sur la Figure 3.1. Aucune différence n'est remarquée entre les différentes méthodes de relaxation, ce qui valide les méthodes présentées dans les paragraphes précédents pour ce type de problème.

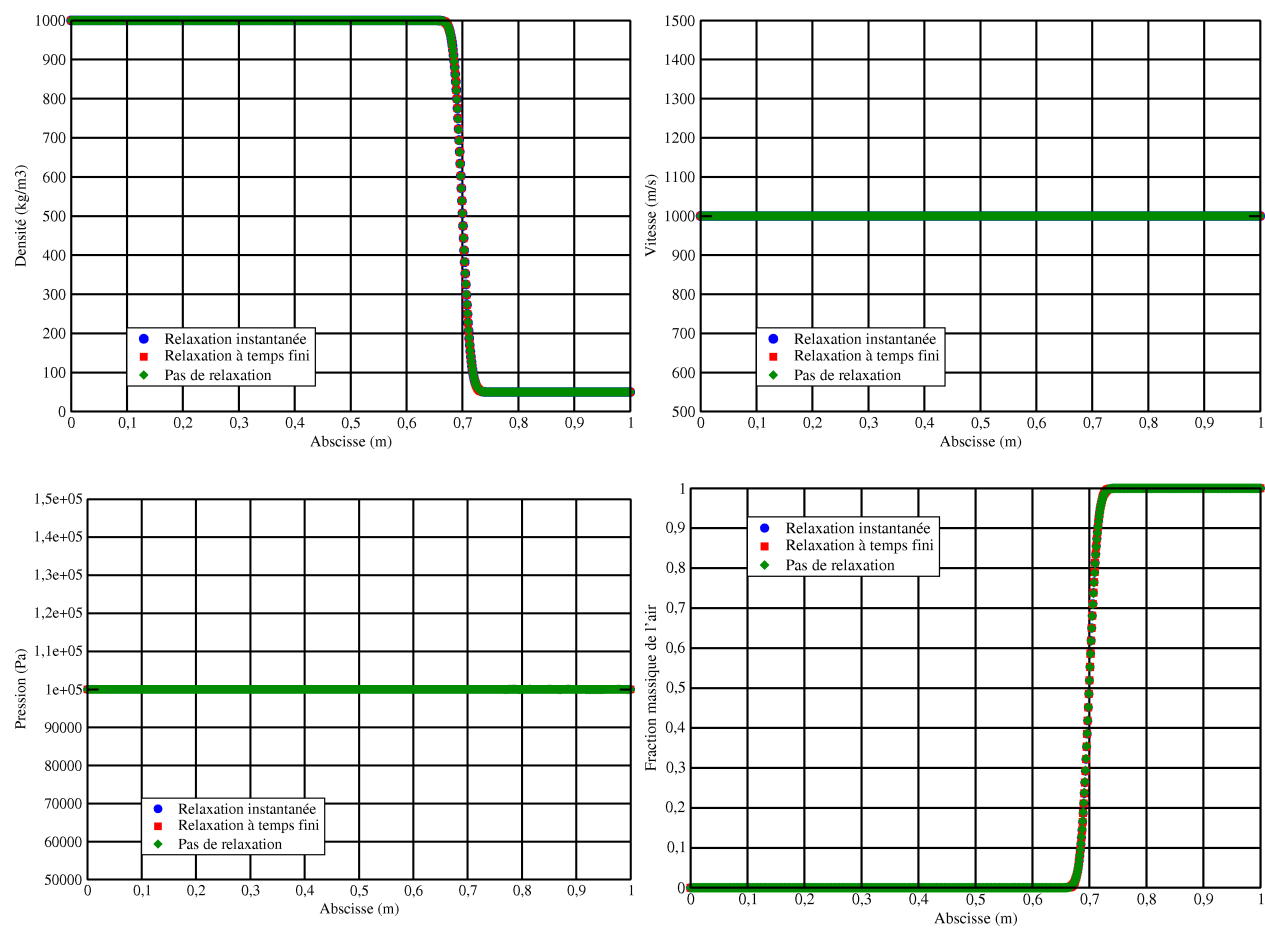


FIG. 3.1 – Advection d’une interface entre fluides purs. Résultats après $200 \mu\text{s}$, sur un maillage de 1001 nœuds

3.5.2 Problèmes multifluides

Tube à choc

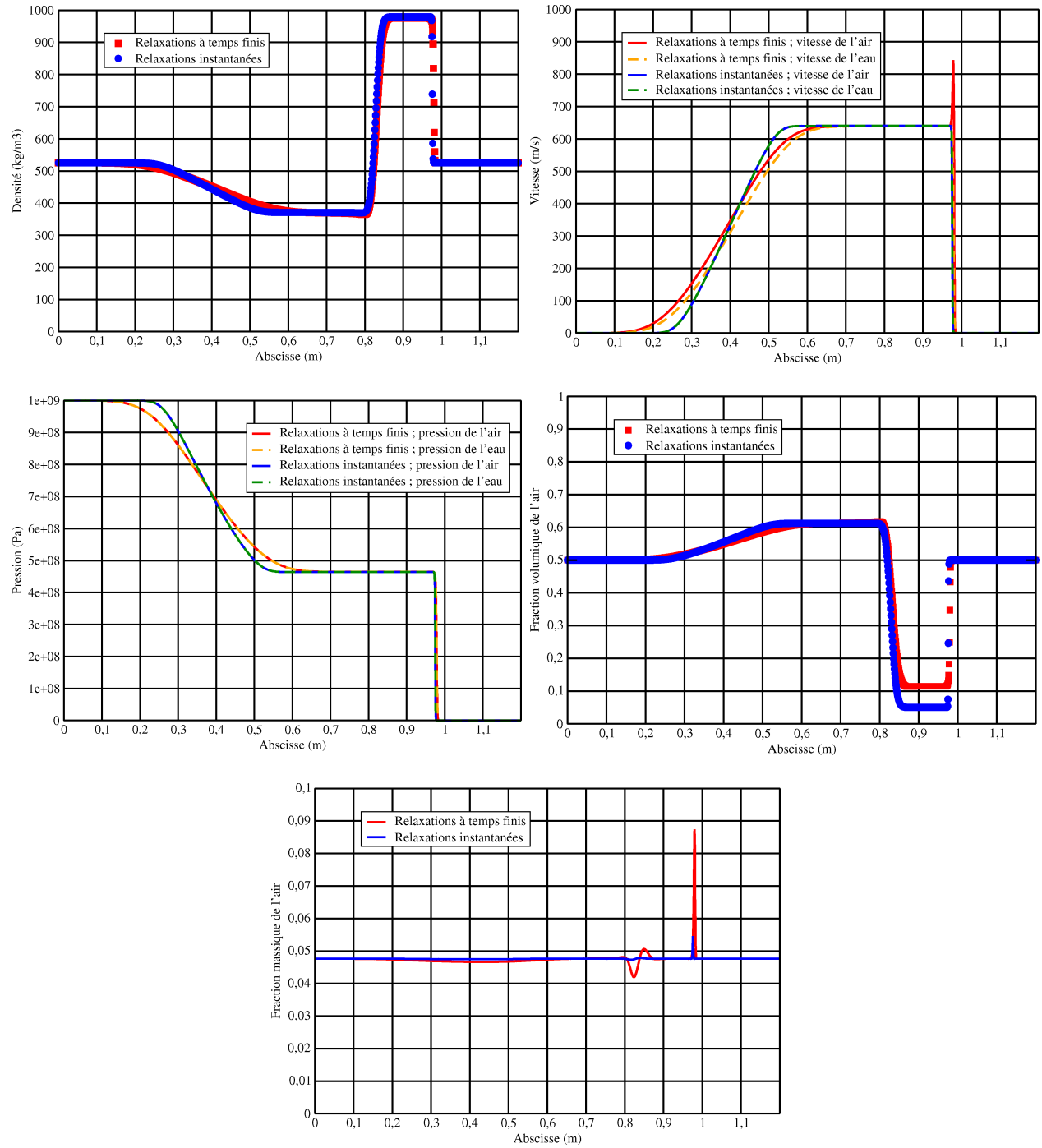
Considérons maintenant un tube à choc eau-air, qui est un cas-test proposé par Murrone [66]. Ce cas-test consiste en un tube de longueur 1.2 m, rempli d'un mélange homogène d'air et d'eau, avec une fraction volumique $\alpha_1 = 0.5$ homogène le long du tube. La partie gauche du tube ($x > 0.7$ m) est à haute pression, alors que la partie droite est sous pression atmosphérique. Les conditions initiales de ce cas-test sont les suivantes

$$\begin{array}{cc|cc}
 \text{état gauche} & & \text{état droit} & \\
 \rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3} & & \rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3} & \\
 \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & & \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & \\
 u = 0 \text{ m.s}^{-1} & & u = 0 \text{ m.s}^{-1} & \\
 p = 10^9 \text{ Pa} & & p = 10^5 \text{ Pa} & \\
 \alpha_1 = 0.5 & & \alpha_1 = 0.5 &
 \end{array} \quad (3.66)$$

Les deux phases sont à nouveau gouvernées par les équations de type gaz raide. Pour déterminer le temps de relaxation des vitesses, la viscosité dynamique de l'eau est égale à $\mu_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pa.s, et nous supposons que le rayon des bulles est donné par $R = 5 \cdot 10^{-4}$ m. Afin de connaître à priori la masse volumique et la vitesse relative, nécessaire pour le calcul du nombre de Reynolds, un solveur de Riemann exact pour les équations d'Euler [89] est utilisé, ce qui permet de simuler des chocs monophasiques pour l'eau et l'air, avec les données initiales présentées ci-dessus. Les valeurs des variables d'état à $x = 0.7$ sont récupérées. On obtient pour les masses volumiques $\rho_{air} = 28.8 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{eau} = 910 \text{ kg.m}^{-3}$, pour les vitesses $u_{air} = 2770 \text{ m.s}^{-1}$ et $u_{eau} = 232 \text{ m.s}^{-1}$, et pour les pressions $p_{air} = 4.61 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $p_{eau} = 4.56 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Pour l'évaluation de Re , nous avons pris $\alpha_{air} = 0.5$, ce qui donne, selon les formules du paragraphe 1.3.2, $Re = 1.15 \cdot 10^6$, $C_D = 2.64 \cdot 10^{-2}$ et enfin $\varepsilon_u = 2.05 \cdot 10^{-5}$ s. Le temps de relaxation des pressions est lui égal à $\varepsilon_p = 2.11 \cdot 10^{-7}$ s.

Les calculs sont effectués sur un maillage de 1201 nœuds, en utilisant des méthodes de relaxations en utilisant comme condition CFL la valeur $\min(0.005n, 0.8)$, où n représente le nombre d'itérations. En effet, une condition CFL égale à 0.8 dès le début du calcul peut mener à des échecs numériques lors de chocs violents : les vitesses des ondes sont sous-estimées au début du test à cause des vitesses initiales nulles. Les résultats après 200 μs sont présentés sur la Figure 3.2 pour les relaxations instantanées et les relaxations à temps finis.

La solution se compose d'une détente, d'une surface de contact et d'un choc. Les résultats obtenus avec les relaxations instantanées sont en excellent accord avec ceux de Murrone [66], qui avait également réalisé ce test en utilisant des méthodes de retours immédiats à l'équilibre pour les vitesses et les pressions. Lorsque l'on compare les résultats obtenus avec les différents modèles de relaxation, on s'aperçoit qu'au niveau du contact, les vitesses et pressions sont égales, alors que dans les zones de détente et de choc, on note une différence entre les résultats obtenus avec des relaxations instantanées, et ceux obtenus avec des relaxations à temps finis. En effet, les vitesses et les pressions des phases sont strictement identiques entre elles pour les relaxations instantanées, alors qu'elles sont différentes à la fois dans la zone de choc et celle de détente pour des temps de relaxation non nuls. De plus, on remarque un pic de la vitesse de l'air dans la zone de choc ; ce phénomène sera retrouvé lorsqu'on utilisera une approche par modèle réduit dans le chapitre 4. La fraction massique n'est pas constante dans la zone de choc ; ce phénomène sera étudié dans le chapitre 5. La seconde variation de cette fraction, au niveau du contact, est un effet transitoire, qui se déplace vers la droite et s'atténue dans le temps.

FIG. 3.2 – Tube à choc multifluide. Résultats après $200 \mu\text{s}$, sur un maillage de 1201 nœuds

Mélange	ρ_1 (kg.m ⁻³)	ρ_2 (kg.m ⁻³)	α_1
Époxy-Spinel	1185	3622	0.595
Époxy-Enstatite	1185	3622	0.54
Époxy-Périclase	1185	3584	0.569
Uranium-Molybdène	18930	10208	0.814

TAB. 3.1 – Données initiales pour les différents problèmes d'Hugoniot.

Propagation d'ondes de choc

Nous souhaitons maintenant valider nos méthodes de relaxation à partir de données expérimentales. On s'intéresse donc au problème d'Hugoniot pour des alliages solides. Ce problème consiste en un tube d'alliage sur lequel frappe un piston, comme schématisé sur la Figure 3.3. De nombreuses expériences ont été réalisées sur ce problème, et un grand nombre d'entre elles ont été regroupées par Bushman, Lomonosov et Khishchenko [11]. Des résultats d'expériences de Marsh [63], qui a mesuré la vitesse du choc, ainsi que la pression, le volume spécifique et la fraction volumique après le choc, sont utilisés pour la validation des calculs. Des calculs numériques sur ce problème ont été réalisés à de nombreuses reprises par Saurel *et al.* [77, 80, 30].

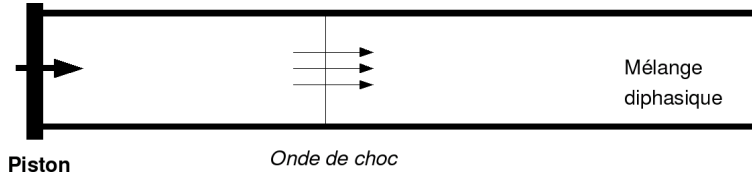


FIG. 3.3 – Principe du problème d'Hugoniot.

Nous réalisons nos simulations numériques sur des maillages de 5000 nœuds, avec un nombre de CFL de 0.8, sauf aux premières itérations où il est égal à $0.005n$, avec n le nombre d'itérations, afin d'éviter les échecs numériques dus à la discontinuité initiale entre le mélange à l'état initial et la condition au bord d'impact du piston. Les valeurs du coefficient de traînée et de la viscosité de compaction n'ont pas été trouvées pour les différents mélanges étudiés, ce qui nous empêche d'utiliser les équations (1.56) et (1.64) pour déterminer les temps de relaxation. Ils ont donc été fixés arbitrairement à $\varepsilon_p = 10^{-12}$ s et $\varepsilon_u = 10^{-7}$ s.

Des cas-tests sont effectués sur des mélanges d'époxy-spinel, époxy-enstatite, époxy-périclase et uranium-molybdène à pression $p = 10^5$ Pa. Les données initiales pour ces cas-tests sont données dans la Table 3.1 ; chaque matériau est modélisé par des équations de type gaz raide dont les paramètres thermodynamiques sont présentés dans la Table 3.2. Les simulations sont réalisées en utilisant des vitesses de piston allant de 500 à 4000 m.s⁻¹, sauf pour le mélange uranium-molybdène où les vitesses du piston sont comprises entre 300 et 2400 m.s⁻¹. Les Figures 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 présentent les différents résultats pour le modèle à deux vitesses et deux pressions, avec relaxations instantanées et relaxations à temps fini. Les différences entre les résultats sont surtout visibles lorsque l'on regarde la fraction volumique.

Les différentes figures montrent que les méthodes de relaxations instantanées et celles de relaxations à temps finis donnent des résultats équivalents et en bon accord avec les données expérimentales. L'écart entre les deux modèles est inférieur à la dispersion des résultats expérimentaux, mais il semble que les relaxations à temps fini donnent des résultats qui semblent un peu plus proches des données

Matériau	γ	p_{∞} (Pa)
Époxy	2.43	$5.3 \cdot 10^9$
Spinel	1.62	$1.41 \cdot 10^{11}$
Enstatite	2.14	$4.06 \cdot 10^{10}$
Périclase	3.49	$4.57 \cdot 10^{10}$
Uranium	3.17	$4.04 \cdot 10^{10}$
Molybdène	2.98	$9.33 \cdot 10^{10}$

TAB. 3.2 – Propriétés thermodynamiques des différents matériaux utilisés pour les problèmes d'Hugoniot.

expérimentales, surtout pour les grandes vitesses d'impact. Ceci est vrai notamment en ce qui concerne le mélange époxy-spinel (Figure 3.4). Les résultats de ce modèle aussi des données expérimentales, par rapport au modèle avec relaxations instantanées, pour le mélange époxy-enstatite (Figure 3.5). On remarque cependant des divergences avec les résultats expérimentaux, notamment en ce qui concerne la fraction volumique. Les différentes méthodes de relaxation donnent en revanche des résultats numériques très proches pour les mélanges époxy-périclase (Figure 3.6) et uranium-molybdène (Figure 3.7), sauf en ce qui concerne les fractions volumiques, où nous ne pouvons pas conclure quant au meilleur modèle. Une explication possible de ces résultats est le fait que les temps de relaxation utilisés sont trop petits pour obtenir des différences visibles pour ces mélanges.

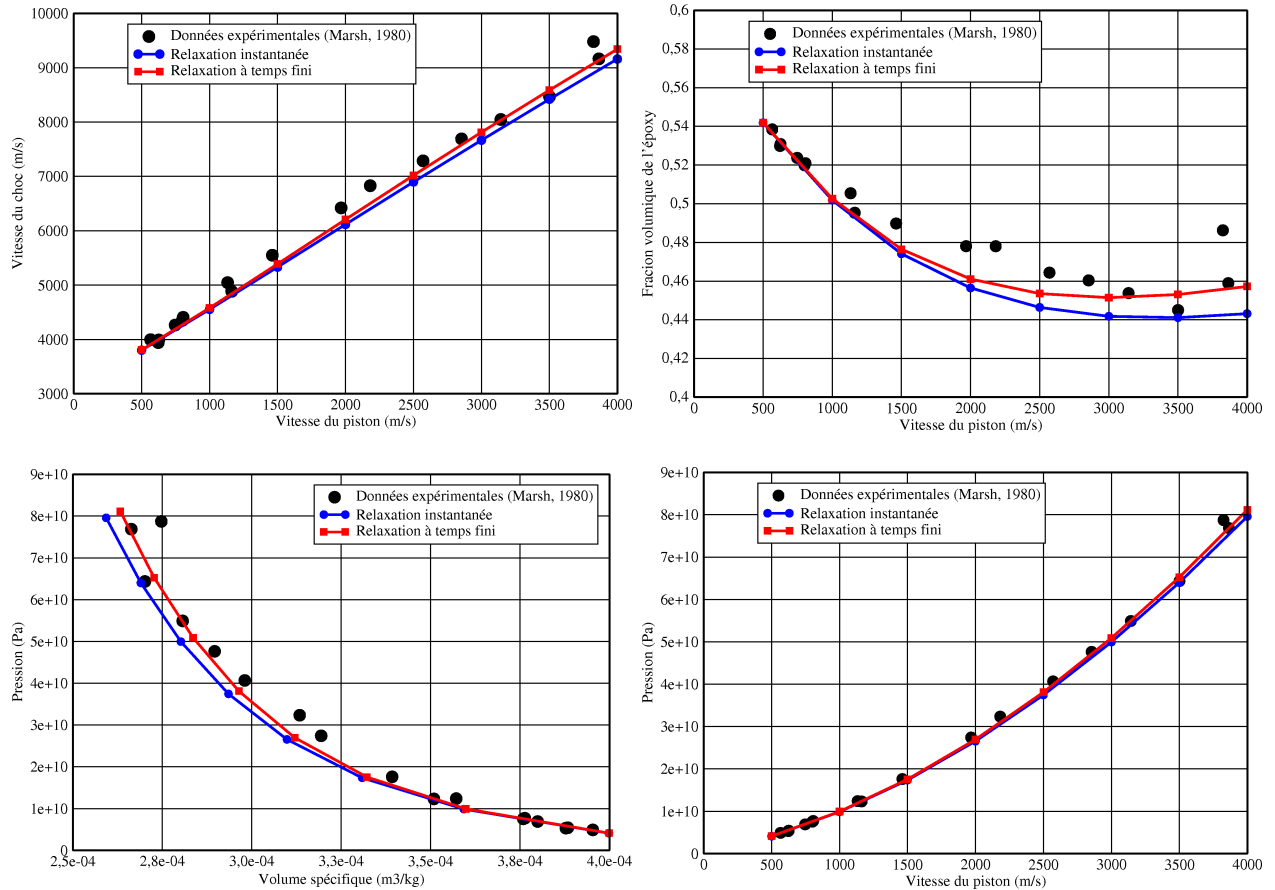


FIG. 3.4 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-spinel.

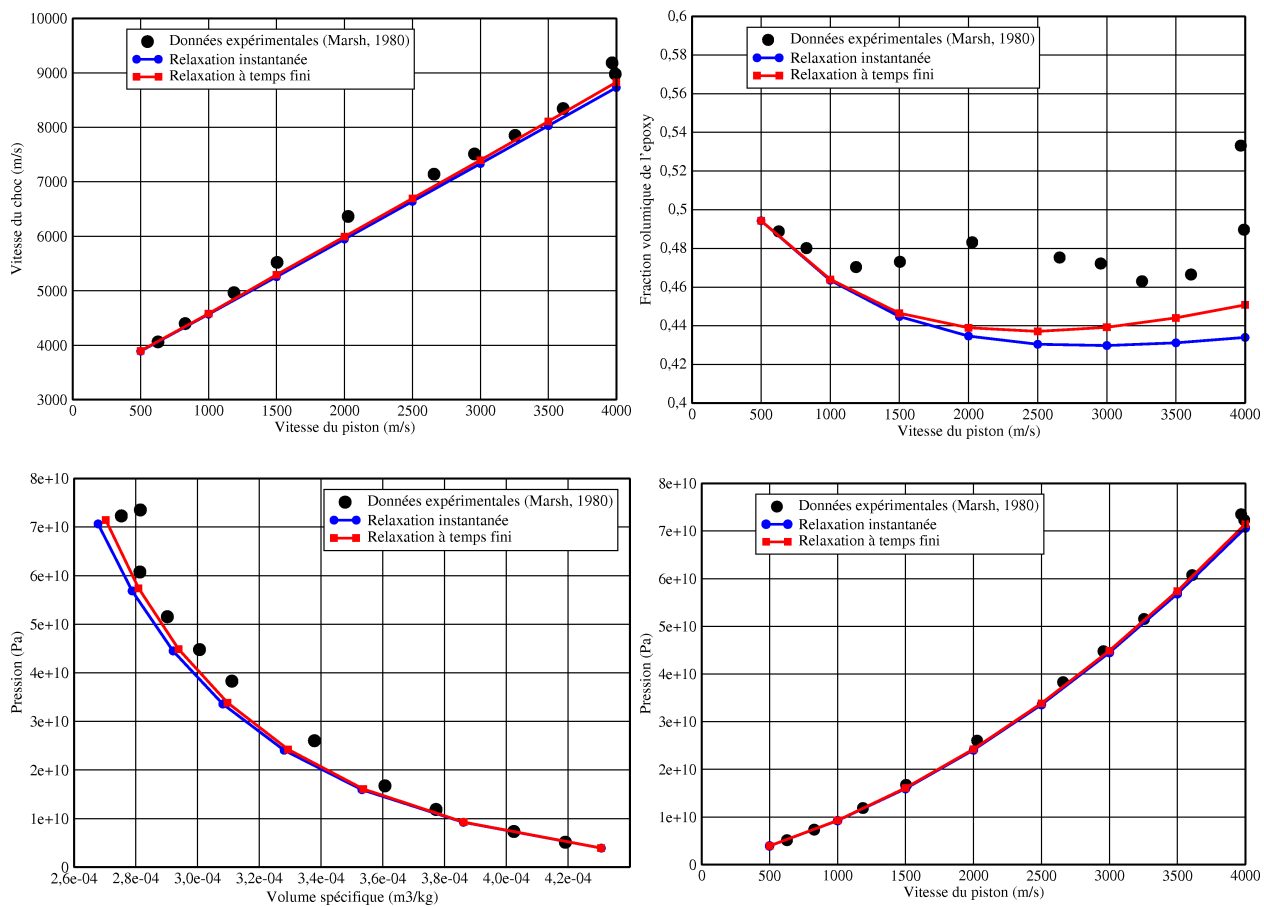


FIG. 3.5 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-enstatite.

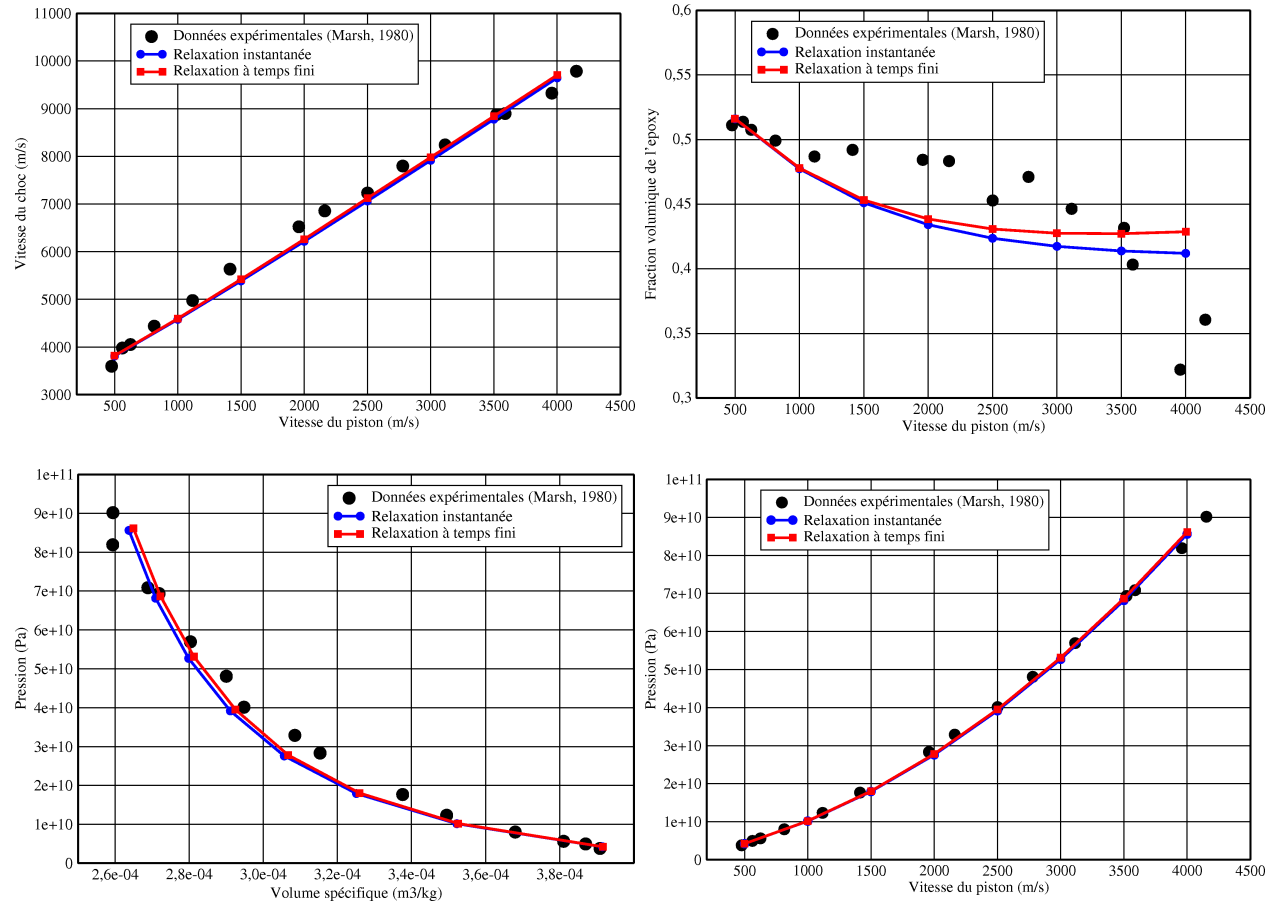


FIG. 3.6 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-périclase.

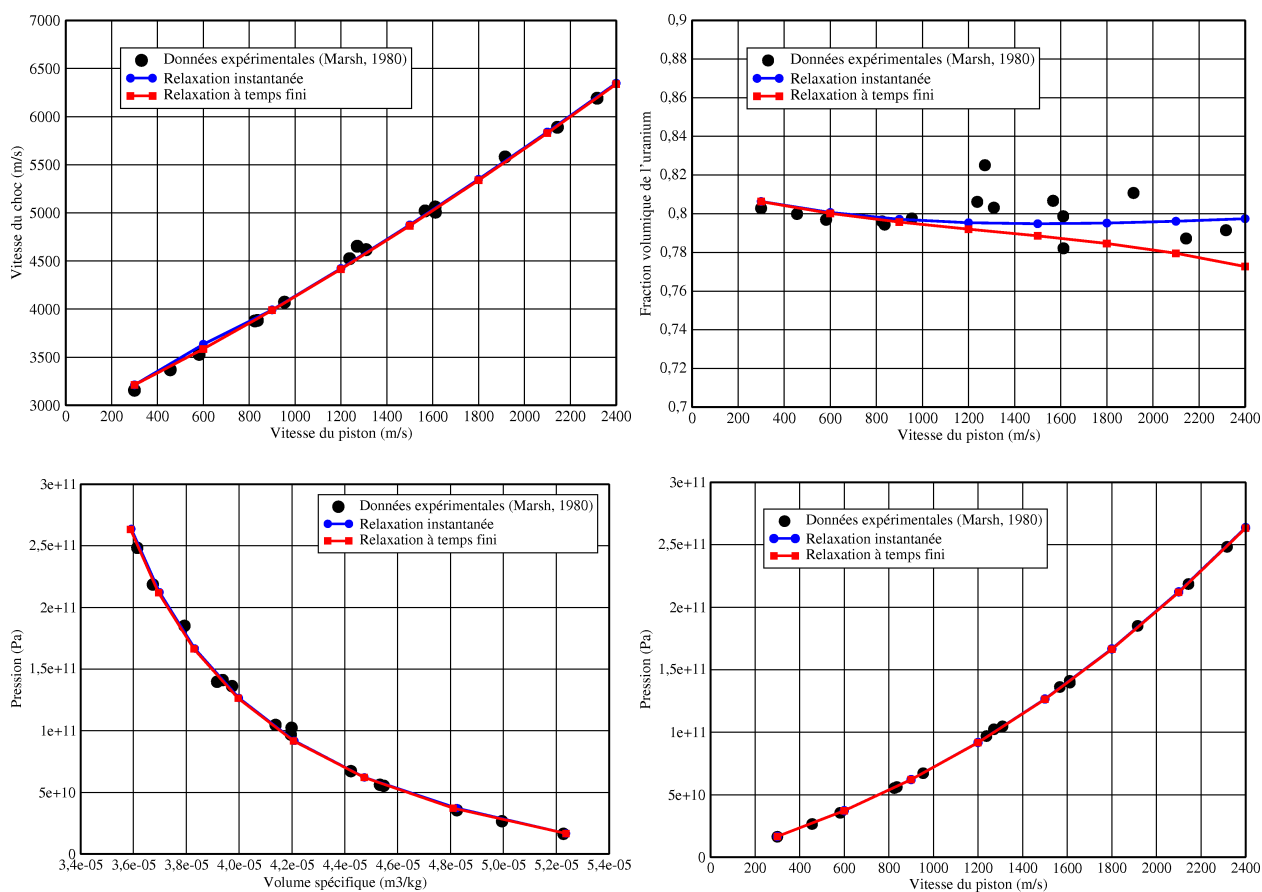


FIG. 3.7 – Problème d'Hugoniot pour un mélange uranium-molybdène.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle à deux vitesses et deux pressions pour la simulation des écoulements diphasiques a été présenté. Ce modèle a l'avantage d'être hyperbolique, et il est une alternative sérieuse à l'utilisation du modèle bi-fluide à une pression et deux vitesses.

Des méthodes de relaxations à temps finis ont également été développées pour la relaxation des pressions et des vitesses lorsque l'on utilise le modèle à deux vitesses et deux pressions. Ces méthodes permettent de voir certains phénomènes physiques, comme la variation des fractions massiques dans les zones de choc, et nous avons montré que des relaxations à temps finis donnent des résultats plus proches des données expérimentales que des relaxations instantanées lorsque la propagation d'ondes de choc dans des mélanges solides est étudiée.

Chapitre 4

Modèles réduits pour la modélisation des déséquilibres mécaniques

Sommaire

4.1	Introduction	107
4.2	Propriétés mathématiques du modèle	108
4.2.1	Hyperbolicité	109
4.2.2	Structure des ondes	110
4.2.3	Invariants de Riemann	112
4.2.4	Entropie mathématique	112
4.3	Approximation numérique	114
4.3.1	Méthode à pas fractionnaires	114
4.3.2	Pas convectif	115
4.3.3	Pas dissipatif	119
4.4	Résultats numériques et validation	123
4.4.1	Advection d'interface	123
4.4.2	Problèmes multifluides	125
4.5	Conclusion	135

4.1 Introduction

La simulation des écoulements diphasiques se fait généralement au moyen de modèles à une vitesse et deux pressions. La littérature est importante à ce sujet (Par exemple [31, 28, 62]) et de nombreux codes industriels, comme Neptune [39], utilisent ce modèle. Cependant ce modèle est non-hyperbolique [84] et peut mener à des problèmes mal posés.

Une alternative est d'utiliser un modèle à deux vitesses et deux pressions puis d'appliquer des méthodes de relaxations. Cette méthode a été présentée au chapitre précédent ; le modèle convectif utilisé est alors hyperbolique, mais cette procédure a pour principal inconvénient son coût en terme de temps de calcul.

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode qui provient du cheminement inverse. Un modèle à une vitesse et une pression seulement sera en effet utilisé. Celui-ci a déjà été étudié dans [49, 67] entre autres. Mais puisqu'il ne possède qu'une seule vitesse sous sa forme classique, il n'est pas adapté à la modélisation des écoulements complexes incluant des phénomènes de contre-courants.

On utilisera donc le modèle (2.105), qui est le résultat d'un développement de Chapman-Enskog à l'ordre un ; la procédure pour l'obtenir a été présentée dans le paragraphe 2.3. On montrera dans ce chapitre que ce modèle est hyperbolique et dissipatif. De plus, même s'il ne possède qu'une vitesse, les termes du second ordre permettent de prendre en compte les déséquilibres de vitesse entre les phases. Une approximation numérique de type volumes finis, utilisant une approche par pas fractionnaires, sera également présentée : elle consiste à d'abord résoudre numériquement le pas convectif, qui ne prend en compte que la partie hyperbolique du système, puis le pas dissipatif dans un second temps. Quelques cas-tests numériques seront enfin présentés, qui mettront en évidence la capacité du modèle à prendre en compte les phénomènes provenant des déséquilibres de vitesse.

4.2 Propriétés mathématiques du modèle

Le modèle étudié est le modèle dissipatif à cinq équations (2.105). En utilisant le vecteur des variables conservatives $\underline{W} = {}^t(\rho Y_1, \rho, \rho \underline{u}, \rho e, \alpha_1)$, nous pouvons écrire ce système

$$\frac{\partial \rho Y_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho Y_1 \underline{u}) = -\operatorname{div}(\rho Y_1 Y_2 \underline{u}_r) \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho e + p) \underline{u}) = \operatorname{div}((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 \underline{u}_r) \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{D\alpha_1}{Dt} + \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \operatorname{div} \underline{u} = \\ & (Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) \underline{u}_r \cdot \nabla \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div}(Y_2 \underline{u}_r) + C_2 \operatorname{div}(Y_1 \underline{u}_r)) \\ & - \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \underline{u}_r \cdot \nabla p \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

avec la vitesse relative $\underline{u}_r$ définie par

$$\underline{u}_r = \varepsilon_u \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\rho^2} (\rho_1 - \rho_2) \nabla p = \varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p \quad (4.2)$$

Étudions tout d'abord quelques propriétés mathématiques de ce modèle. Pour simplifier les écritures, quelques manipulations algébriques sur le système (4.1) sont effectuées pour le réécrire en utilisant le vecteur d'état entropique $\underline{Q} = {}^t(s_1, s_2, \underline{u}, p, Y_1)$. Le système suivant est alors obtenu, avec

$$\underline{u}_r = \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{Ds_1}{Dt} = \varepsilon_u \left(-Y_2 \underline{a}_r \cdot \nabla s_1 + \frac{Y_2}{Y_1 T_1} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.3.1)$$

$$\frac{Ds_2}{Dt} = \varepsilon_u \left(Y_1 \underline{a}_r \cdot \nabla s_2 + \frac{Y_1}{Y_2 T_2} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.3.2)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \underline{g} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{Dp}{Dt} + C_1 C_2 \operatorname{div} \underline{u} \\ & + \varepsilon_u ((\alpha_1 Y_2 C_2 - \alpha_2 Y_1 C_1) \underline{a}_r \cdot \nabla p + C_1 C_2 \underline{a}_r \cdot \nabla \alpha_1 + C_1 C_2 (\alpha_1 \operatorname{div} Y_2 \underline{a}_r - \alpha_2 \operatorname{div} Y_1 \underline{a}_r)) = \\ & \varepsilon_u \rho \left(\frac{Y_1 C_1}{\rho_2 \kappa_2} + \frac{Y_2 C_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) \underline{a}_r^2 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \operatorname{div} (Y_1 \underline{u}) = -\frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.3.5)$$

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas unidimensionnel pour décrire les propriétés mathématiques du modèle. Ces propriétés sont néanmoins facilement prolongées au cas multidimensionnel.

4.2.1 Hyperbolicité

Si l'on ne considère que les termes différentiels du premier ordre dans le système (4.3), on peut écrire ce système sous la forme

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + A(\underline{Q}) \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} = 0 \quad (4.4)$$

avec $\underline{Q} = {}^t(s_1, s_2, u, p, Y_1)$ et $A(\underline{Q})$ qui s'écrit

$$A(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \rho \hat{c}^2 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice s'écrit alors $P(\lambda) = (u - \lambda)^3 ((u - \lambda)^2 - \hat{c}^2)$, où $\hat{c}$ est la vitesse du son dans un mélange diphasique [93, 24], définie par l'équation

$$\frac{1}{\rho \hat{c}^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2} \quad (4.6)$$

Les valeurs propres du système (4.4) peuvent donc être exprimées

$$\begin{aligned} \lambda_1(\underline{Q}) &= u - \hat{c} \\ \lambda_2(\underline{Q}) &= \lambda_3(\underline{Q}) = \lambda_4(\underline{Q}) = u \\ \lambda_5(\underline{Q}) &= u + \hat{c} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Toutes ces valeurs propres sont réelles. Les vecteurs propres à droite $\underline{r}_j$ associés aux valeurs propres λ_j peuvent être écrits comme suit

$$\underline{r}_1(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{c} \\ -\rho\hat{c}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_2(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$\underline{r}_3(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_4(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_5(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{c} \\ \rho\hat{c}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres du système (4.3) sont toutes réelles, et leurs vecteurs propres associés engendrent $\mathbb{R}^5$. Le modèle est donc hyperbolique.

Les vecteurs propres à gauche sont choisis $\underline{l}_j(\underline{Q})$ de manière à ce que nous ayons la propriété $\underline{l}_i(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_j(\underline{Q}) = \delta_{ij}$. Ceux-ci se lisent

$$\underline{l}_1(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\hat{c}} \\ -\frac{1}{2\rho\hat{c}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{l}_2(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\underline{l}_3(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{l}_4(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{l}_5(\underline{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\hat{c}} \\ \frac{1}{2\rho\hat{c}^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Structure des ondes

On rappelle dans ce paragraphe le travail de Murrone [66] qui montre que les champs caractéristiques associés à la valeur propre u sont linéairement dégénérés, alors que ceux associés aux autres valeurs propres sont vraiment non-linéaires. La définition de ces notions peut être trouvée dans [35]. On peut tout d'abord écrire cette proposition concernant les ondes de vitesse $u - \hat{c}$ et $u + \hat{c}$

Proposition 8 : Les champs caractéristiques associés aux ondes de vitesse $\lambda_1(\underline{Q}) = u - \hat{c}$ et $\lambda_5(\underline{Q}) = u + \hat{c}$ sont vraiment non-linéaires : pour chaque état admissible $\underline{Q}$ nous avons

$$\nabla_{\underline{Q}} \lambda_1(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_1(\underline{Q}) \neq 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla_{\underline{Q}} \lambda_5(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_5(\underline{Q}) \neq 0 \quad (4.11)$$

Preuve : on peut obtenir l'égalité suivante à partir des expressions des valeurs propres et des vecteurs propres

$$\nabla_{\underline{Q}} \lambda_1(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_1(\underline{Q}) = \nabla_{\underline{Q}} \lambda_5(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_5(\underline{Q}) = \hat{c} + \rho\hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p} \quad (4.12)$$

La démonstration de la proposition 8 consiste à prouver que l'expression $\hat{c} + \rho \hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p}$ est toujours non-nulle. Pour cela, remarquons tout d'abord que la masse volumique du mélange ρ et la vitesse du son dans le mélange $\hat{c}$ vérifient les relations suivantes

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{\rho_k} \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{(\rho \hat{c})^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k c_k)^2} \quad (4.14)$$

De plus, quelques manipulations algébriques nous permettent de montrer que la dérivée de la vitesse du son dans le mélange $\hat{c}$ peut être écrite

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \phi} = -\hat{c} \left(\frac{(\rho \hat{c})^2}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{(\rho \hat{c})^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) \quad (4.15)$$

Si l'expression $\hat{c}$ est dérivée en fonction de la pression p , l'expression suivante est obtenue avec l'aide des équations (4.13) et (4.14)

$$\hat{c} + \rho \hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p} = \hat{c} - \rho \hat{c}^3 \left(\frac{(\rho \hat{c})^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k c_k)^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{\rho_k} \right) \right) \quad (4.16)$$

qui peut être transformée

$$\hat{c} + \rho \hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p} = \hat{c} - \rho \hat{c}^3 \left(\frac{(\rho \hat{c})^2}{2} \sum_{k=1}^2 Y_k \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{(\rho_k c_k)^2} \right) - \rho \sum_{k=1}^2 Y_k \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho_k} \right) \right) \quad (4.17)$$

Rappelons que la vitesse du son est définie par $\frac{1}{c_k^2} = \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p} \right)_{s_k}$, et introduisons la notation $\psi_k = \left(\frac{\partial c_k}{\partial p} \right)_{s_k}$. L'utilisation de ces expressions permet alors d'écrire

$$\hat{c} + \rho \hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p} = \hat{c} - \rho \hat{c}^3 \left(-\frac{(\rho \hat{c})^2}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{2Y_k (1 + \rho_k c_k \psi_k)}{\rho_k^3 c_k^4} + \rho \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k}{(\rho_k c_k)^2} \right) \quad (4.18.1)$$

$$= \hat{c} - \rho \hat{c}^3 \left(-(\rho \hat{c})^2 \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k (1 + \rho_k c_k \psi_k)}{\rho_k^3 c_k^4} + \frac{1}{\rho c_k^2} \right) \quad (4.18.2)$$

$$= \rho^3 \hat{c}^5 \sum_{k=1}^2 \frac{Y_k (1 + \rho_k c_k \psi_k)}{\rho_k^3 c_k^4} \quad (4.18.3)$$

Si l'hypothèse $\psi_k = \left(\frac{\partial c_k}{\partial p} \right)_{s_k} > 0$ est introduite, alors on peut en déduire $(1 + \rho_k c_k \psi_k) > 1$, et donc

$$\hat{c} + \rho \hat{c} \frac{\partial \hat{c}}{\partial p} > 0 \quad (4.19)$$

Pour les équations d'état de type gaz raide, l'hypothèse $\psi_k > 0$ est équivalente à $\gamma_k > 1$, où γ_k est le rapport des chaleurs spécifiques de la phase k . Cette hypothèse est donc vérifiée pour ce type

d'équations d'état.

On s'intéresse maintenant aux champs caractéristiques associés à l'onde de vitesse u .

Proposition 9 : Le champ caractéristique associé à l'onde de vitesse $\lambda_2(\underline{Q}) = \lambda_3(\underline{Q}) = \lambda_4(\underline{Q}) = u$ est linéairement dégénéré : pour $i \in \{2, 3, 4\}$ et pour tous les états admissibles $\underline{Q}$ nous avons l'égalité

$$\nabla_Q \lambda_i(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_i(\underline{Q}) = 0 \quad (4.20)$$

Preuve : Selon l'expression des valeurs propres λ_i , $i \in \{2, 3, 4\}$, l'égalité suivante peut être écrite

$$\nabla_Q \lambda_i(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_i(\underline{Q}) = {}^t(0, 0, 1, 0, 0) \cdot \underline{r}_i(\underline{Q}) \quad (4.21)$$

et le résultat de la proposition 9 est obtenu en remplaçant les vecteurs $\underline{r}_i(\underline{Q})$ par leurs expressions (4.8).

4.2.3 Invariants de Riemann

Les invariants de Riemann $\omega(\underline{Q})$ du système convectif du modèle (4.3) sont déterminés dans ce paragraphe. Ceux-ci sont définis par les équations

$$\nabla_Q \omega(\underline{Q}) \cdot \underline{r}_k(\underline{Q}) = 0 \quad (4.22)$$

Considérons tout d'abord les invariants de Riemann associés à la valeur propre $\lambda_1(\underline{Q}) = u - \hat{c}$. Si l'on cherche des invariants ω tels que $\nabla_Q \omega$ est colinéaire aux vecteurs propres à gauche $\underline{l}_2(\underline{Q})$, $\underline{l}_3(\underline{Q})$ et $\underline{l}_4(\underline{Q})$, l'expression (4.8) du vecteur propre $\underline{r}_1(\underline{Q})$ permet de voir facilement que les entropies phasiques s_1 et s_2 et la fraction massique Y_1 sont des invariants de Riemann pour cette phase. L'évaluation du dernier invariant de Riemann, dont le gradient $\nabla_Q \omega$ doit être colinéaire au vecteur $\underline{l}_5(\underline{Q})$, donne

$$\omega = u + \int_p \frac{1}{\rho \hat{c}} dp \quad (4.23)$$

Les invariants de Riemann associés à la valeur propre $\lambda_1(\underline{Q}) = u - \hat{c}$ sont donc

$$\left\{ s_1, s_2, Y_1, u + \int_p \frac{1}{\rho \hat{c}} dp \right\} \quad (4.24)$$

Examinons maintenant les invariants de Riemann associés à la valeur propre $\lambda_5(\underline{Q}) = u + \hat{c}$. La même procédure que précédemment donne les quatre valeurs suivantes

$$\left\{ s_1, s_2, Y_1, u - \int_p \frac{1}{\rho \hat{c}} dp \right\} \quad (4.25)$$

Enfin, les invariants de Riemann associés à l'onde de vitesse u sont facilement trouvés. Ce sont

$$\{u, p\} \quad (4.26)$$

4.2.4 Entropie mathématique

Nous montrons dans ce paragraphe que le modèle à cinq équations obtenu par les développements de Chapman-Enskog à l'ordre un vérifie le principe d'entropie, et plus précisément que les termes du second ordre engendrent une production d'entropie physique pour chaque phase. Ce système possède donc deux entropies indépendantes. Du point de vue mathématique, cela se traduit par les deux propriétés suivantes relatives aux entropies phasiques s_1 et s_2 du modèle (4.3)

Proposition 10 : Les paires $(-\alpha_1\rho_1s_1, -\alpha_1\rho_1s_1\underline{u})$ et $(-\alpha_2\rho_2s_2, -\alpha_2\rho_2s_2\underline{u})$ sont des paires entropie - flux d'entropie pour le système (4.3) privés de ses termes du second ordre, tout comme les combinaisons convexes de ces deux paires.

Proposition 11 : Les paires $(-\alpha_1\rho_1s_1, -\alpha_1\rho_1s_1\underline{u})$ et $(-\alpha_2\rho_2s_2, -\alpha_2\rho_2s_2\underline{u})$ sont des paires entropie - flux d'entropie consistantes avec les termes du second ordre du système (4.3).

Preuves : Rappelons tout d'abord les équations (4.3.1) et (4.3.2), qui gouvernent les évolutions des entropies spécifiques phasiques, et les équations sur les masses volumiques de chaque phase obtenues à partir des équations (4.1.1) et (4.1.2)

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla s_1 = \varepsilon_u \left(-Y_2 \underline{a}_r \cdot \nabla s_1 + \frac{Y_2}{Y_1 T_1} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.27.1)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla s_2 = \varepsilon_u \left(Y_1 \underline{a}_r \cdot \nabla s_2 + \frac{Y_1}{Y_2 T_2} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.27.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1) + \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 \underline{u}) = -\varepsilon_u \operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.28.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2) + \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 \underline{u}) = \varepsilon_u \operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.28.2)$$

Ces équations peuvent être combinées pour obtenir les équations qui gouvernent les entropies de chaque phase $\alpha_k \rho_k s_k$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 s_1) - \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u}) = \varepsilon_u \left(\operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 s_1 \underline{a}_r) - \frac{\rho Y_2}{T_1} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.29.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 s_2) - \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u}) = \varepsilon_u \left(-\operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 s_2 \underline{a}_r) - \frac{\rho Y_1}{T_2} \underline{a}_r^2 \right) \quad (4.29.2)$$

Si l'on ne tient pas compte des termes d'ordre ε_u , ces équations peuvent être simplifiées

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 s_1) - \operatorname{div} (\alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u}) = 0 \quad (4.30.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \rho_2 s_2) - \operatorname{div} (\alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u}) = 0 \quad (4.30.2)$$

ce qui donne le résultat de la Proposition 10. Montrons maintenant que ces paires sont consistantes avec les termes du second ordre. Nous rappelons qu'une entropie mathématique $\eta(\underline{Q})$ est consistante avec des termes du second ordre s'il existe trois fonctions régulières $\underline{G}(\underline{Q})$, $\underline{H}(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q})$ et $S(\underline{Q})$ qui vérifient l'équation

$$\frac{\partial \eta(\underline{Q})}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{G}(\underline{Q}) = \nabla \cdot \underline{H}(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) + S(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) \quad (4.31)$$

où $\underline{G}(\underline{Q})$ est le flux défini dans la paire entropie - flux d'entropie et $S(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) \leq 0$. Dans le cas présent, selon les équations (4.29), nous prenons

$$\begin{aligned}
\eta_1(\underline{Q}) &= -\alpha_1 \rho_1 s_1 & \eta_2(\underline{Q}) &= -\alpha_2 \rho_2 s_2 \\
\underline{G}_1(\underline{Q}) &= -\alpha_1 \rho_1 s_1 \underline{u} & \underline{G}_2(\underline{Q}) &= -\alpha_2 \rho_2 s_2 \underline{u} \\
\underline{H}_1(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) &= \varepsilon_u \rho Y_1 Y_2 s_1 \underline{a}_r & \underline{H}_2(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) &= -\varepsilon_u \rho Y_1 Y_2 s_1 \underline{a}_r \\
S_1(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) &= -\varepsilon_u \rho \frac{Y_2}{T_1} \underline{a}_r^2 & S_2(\underline{Q}, \nabla \cdot \underline{Q}) &= -\varepsilon_u \rho \frac{Y_1}{T_2} \underline{a}_r^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ce qui conclut la preuve de la Proposition 11.

Une entropie de mélange peut alors être définie : $\eta = \eta_1 + \eta_2$, et les fonctions $\underline{G} = \underline{G}_1 + \underline{G}_2$, $\underline{H} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2$ et $S = S_1 + S_2$ y sont associées pour montrer que cette entropie est une entropie mathématique consistante avec les termes du second ordre.

4.3 Approximation numérique

4.3.1 Méthode à pas fractionnaires

On se place dans ce paragraphe au cas unidimensionnel. La solution du système (4.1) est approchée en fractionnant ce système en plusieurs pas, comme l'ont effectué Guillard et Duval [40] pour un modèle multiphasique isotherme comportant aussi des termes du second ordre. Le premier pas consiste à la résolution du système convectif privés des termes du second ordre. Durant ce pas, le temps est avancé d'un pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Si le vecteur d'état est noté $\underline{W} = {}^t(\rho Y_1, \rho, \rho u, \rho e, \alpha_1)$, nous pouvons écrire ce pas convectif

$$\frac{\tilde{W}^{n+1} - W^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \underline{F}(\underline{W}^n) + H(\underline{W}^n) \operatorname{div} \underline{u} = B(\underline{W}^n) \tag{4.33}$$

où $\tilde{W}^{n+1}$ représente la solution numérique du pas convectif et où les différents termes s'expriment comme suit

$$\underline{F}(\underline{W}) = \begin{pmatrix} \rho Y_1 u \\ \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho e + p) u \\ \alpha_1 u \end{pmatrix} \quad H(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \end{pmatrix} \quad B(\underline{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \\ \rho u g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

Une fois que la solution intermédiaire $\tilde{W}^{n+1}$ est connue, nous effectuons un nouveau pas, qui sera appelé pas dissipatif, et correspond à l'intégration des termes du second ordre. Ce pas s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{W^{n+1} - \tilde{W}^{n+1}}{\Delta t} &= \varepsilon_u D_a(\underline{W}^{n+1,a}, \nabla \cdot \underline{W}^{n+1,a}) \cdot \nabla \alpha_1^{n+1,a} \\
&\quad + \varepsilon_u D_s(\underline{W}^{n+1,s}, \nabla \cdot \underline{W}^{n+1,s}) \|\nabla p^{n+1,s}\|^2 \\
&\quad - \varepsilon_u D_c(\underline{W}^{n+1}, \nabla \cdot \underline{W}^{n+1})
\end{aligned} \tag{4.35}$$

où $\underline{W}^{n+1,a}$ et $\underline{W}^{n+1,s}$ sont des états intermédiaires qui seront explicités dans la suite, et où les termes D_a , D_s et D_c s'écrivent

$$D_a(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W}) = {}^t \left(0, 0, 0, 0, \frac{Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} a_r \right)$$

$$D_s(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W}) = {}^t \left(0, 0, 0, 0, -\frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)} \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \right)$$

$$D_c(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W}) = {}^t (\nabla \cdot (\rho Y_1 Y_2 a_r), 0, 0, \nabla \cdot ((h_1 - h_2) \rho Y_1 Y_2 a_r), \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div} (Y_2 a_r) + C_2 \operatorname{div} (Y_1 a_r)))$$

Le terme $D_a(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W}) \cdot \nabla \alpha$ sera appelé dans la suite le “terme d’advection dissipative”, et le terme $D_c(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W})$ sera nommé le “terme de convection dissipative”, car ils ont des formes analogues à des termes d’advection et de diffusion, respectivement. Enfin, le dernier terme $D_s(\underline{W}, \nabla \cdot \underline{W}) \|\nabla p\|^2$ est appelé “terme source dissipatif”.

Le développement des méthodes numériques a été effectué en utilisant des équations d’état de type gaz raide pour les deux phases. Dans ce cas, le terme $\kappa_k = \left(\frac{\partial i_k}{\partial \rho_k} \right)_{p_k}$, qui apparaît dans l’expression du terme source dissipatif, peut être écrit $\kappa_k = \frac{1}{(\gamma_k - 1) \rho_k}$.

4.3.2 Pas convectif

Pour la résolution du pas convectif, (4.33) un schéma quasi-conservatif de type volumes finis est utilisé. Il est basé sur les solveurs VFRoe-ncv [10]. Le problème de Riemann peut être écrit de la manière suivante, où l’on utilise les indices L et R pour noter les états à gauche et à droite de l’interface

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + A(<\underline{Q}>) \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} = 0 \quad (4.37)$$

$$\underline{Q}(x, 0) = \begin{cases} \underline{Q}_L & x < 0 \\ \underline{Q}_R & x > 0 \end{cases}$$

avec $\underline{Q} = {}^t(s_1, s_2, u, p, Y_1, \dots)$, $<.\> = \frac{(\cdot)_L + (\cdot)_R}{2}$ et $A(<\underline{Q}>)$ la matrice définie par l’équation (4.5). La solution approchée de l’état à l’interface est notée $\underline{Q}_{LR}^*$. Elle est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{LR}^* &= \underline{Q}_L + \sum_{\lambda_i < 0} {}^t \underline{L}_i(<\underline{Q}>) (\underline{Q}_R - \underline{Q}_L) \underline{r}_i(<\underline{Q}>) \\ &= \underline{Q}_R - \sum_{\lambda_i > 0} {}^t \underline{L}_i(<\underline{Q}>) (\underline{Q}_R - \underline{Q}_L) \underline{r}_i(<\underline{Q}>) \end{aligned} \quad (4.38)$$

où λ_i sont les valeurs propres (4.7), $\underline{r}_i(\underline{Q})$ sont les vecteurs propres à droite (4.8) et $\underline{L}_i(\underline{Q})$ sont les vecteurs propres à gauche (4.9).

Pour résoudre numériquement le système, on transforme l’équation sur la fraction volumique α_1

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \underline{u} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2)}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.39)$$

qui devient

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \underline{u}) - \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.40)$$

Cette réécriture sera justifiée dans la suite de ce paragraphe. Nous introduisons le vecteur d'état sous la forme $\underline{W} = {}^t(\rho Y_1, \rho, \rho u, \rho e, \alpha_1)$ correspondant à $\underline{Q}$, et particulièrement $\underline{W}_{i+1/2}^*$ la solution au problème de Riemann (4.37) entre les états $\underline{Q}_i$ et $\underline{Q}_{i+1}$, écrite avec les variables ${}^t(\rho Y_1, \rho, \rho u, \rho e, \alpha_1)$. Le système à une vitesse et une pression peut être écrit

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{W})}{\partial x} + \underline{B}(\underline{W}) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.41)$$

avec $\underline{B}(\underline{W}) = {}^t\left(0, 0, 0, 0, -\frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1}\right)$. Regardons tout d'abord la partie conservative

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}(\underline{W})}{\partial x} = 0 \quad (4.42)$$

Cette partie est discrétisée sur chaque cellule du maillage

$$\frac{\underline{W}_i^{n+1,c} - \underline{W}_i^n}{\Delta t} + \frac{\underline{F}(\underline{W}_{i+1/2}^*) - \underline{F}(\underline{W}_{i-1/2}^*)}{\Delta x_i} = 0 \quad (4.43)$$

où $\underline{W}_{i+1/2}^*$ est la solution du problème de Riemann linéarisé entre les états $\underline{W}_i$ et $\underline{W}_{i+1}$. Le vecteur flux $\underline{F}(\underline{W}_{ij}^*)$ peut être exprimé comme suit

$$\underline{F}(\underline{W}_{i+1/2}^*) = \begin{pmatrix} (\rho Y_1 u)_{i+1/2}^* \\ (\rho u)_{i+1/2}^* \\ (\rho u^2)_{i+1/2}^* + p_{i+1/2}^* \\ ((\rho e + p) u)_{i+1/2}^* \\ (\alpha_1)_{i+1/2}^* \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

La partie non conservative $\underline{B}(\underline{W}) \frac{\partial u}{\partial x}$ est prise en compte en utilisant un schéma semi-implicite. Si l'on note $\underline{W}_i^{n+1,c}$ le résultat de la résolution numérique de la partie conservative, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.45)$$

est approchée par l'équation suivante

$$\frac{(\alpha_1)_i^{n+1} - (\alpha_1)_i^{n+1,c}}{\Delta t} = \frac{(\alpha_1)_i^{n+1} C_2 (\underline{W}_i^{n+1})}{(\alpha_1)_i^{n+1} C_2 (\underline{W}_i^{n+1}) + \left(1 - (\alpha_1)_i^{n+1}\right) C_1 (\underline{W}_i^{n+1})} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x_i} \quad (4.46)$$

et un algorithme de Newton est utilisé pour trouver les fractions volumiques $(\alpha_1)_i^{n+1}$. Cette méthode assure la positivité de la fraction volumique pour ce pas.

Solveur acoustique

Pour résoudre le problème de Riemann, nous utilisons un solveur acoustique, qui a été développé par Murrone et Guillard [67] pour le modèle multiphasique à une vitesse et une pression, plutôt que les solveurs VFRoe-ncv classiques. Ce solveur est choisi car il est plus robuste pour les écoulements où le nombre de Mach est faible [66]. Il consiste à linéariser les caractéristiques de chaque côté de la discontinuité. L'intersection de ces caractéristiques donne les expressions de la vitesse et de la pression à l'interface entre les états gauche et droit.

Si l'on multiplie le système (4.37) par les vecteurs propres à gauche $\underline{L}_i(\underline{Q})$, le système suivant est obtenu

$${}^t \underline{L}_i(\underline{Q}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + A(\underline{Q}) \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.47)$$

et peut être réécrit sous la forme

$${}^t \underline{L}_i(\underline{Q}) \cdot \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \lambda_i(\underline{Q}) \frac{\partial \underline{Q}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.48)$$

Introduisons les vecteurs $\underline{Q}_L^*$ et $\underline{Q}_R^*$, qui représentent les états à gauche et à droite de la discontinuité de contact, et linéarisons l'équation (4.48). On obtient alors

$$\begin{cases} {}^t \underline{L}_5(\underline{Q}_L) \cdot (\underline{Q}_L^* - \underline{Q}_L) = 0 \\ {}^t \underline{L}_1(\underline{Q}_R) \cdot (\underline{Q}_R^* - \underline{Q}_R) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Les expressions (4.9) des vecteurs propres à gauche sont utilisées pour obtenir les deux équations suivantes

$$\begin{cases} \rho_L \hat{c}_L (u_L^* - u_L) + (p_L^* - p_L) = 0 \\ \rho_R \hat{c}_R (u_R^* - u_R) + (p_R^* - p_R) = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Puisque l'on se place autour de la discontinuité de contact, on peut noter que $u_L^* = u_R^* = u^*$ et $p_L^* = p_R^* = p^*$. Les expressions de la vitesse et de la pression à l'interface entre les deux états peuvent donc être obtenues

$$u^* = \frac{\rho_L \hat{c}_L u_L + \rho_R \hat{c}_R u_R}{\rho_L \hat{c}_L + \rho_R \hat{c}_R} - \frac{p_R - p_L}{\rho_L \hat{c}_L + \rho_R \hat{c}_R} \quad (4.51.1)$$

$$p^* = \frac{\rho_L \hat{c}_L p_L + \rho_R \hat{c}_R p_R}{\rho_L \hat{c}_L + \rho_R \hat{c}_R} - \frac{\rho_L \hat{c}_L \rho_R \hat{c}_R (u_R - u_L)}{\rho_L \hat{c}_L + \rho_R \hat{c}_R} \quad (4.51.2)$$

Finalement, la solution à l'interface du problème de Riemann est donnée par

$$\underline{Q}\left(\frac{x}{t}, \underline{Q}_L, \underline{Q}_R\right) = \begin{cases} \underline{Q}_L & \text{si } \frac{x}{t} < u_L - \hat{c}_L \\ \underline{Q}_L^* & \text{si } u_L - \hat{c}_L < \frac{x}{t} < u^* \\ \underline{Q}_R^* & \text{si } u^* < \frac{x}{t} < u_R + \hat{c}_R \\ \underline{Q}_R & \text{si } u_R + \hat{c}_R < \frac{x}{t} \end{cases} \quad (4.52)$$

Formulation de l'équation sur la fraction volumique

Expliquons maintenant la réécriture de l'équation (4.39) sous la forme (4.40). Ceci a été effectué afin d'éviter la propagation d'erreurs numériques. Seul le cas unidimensionnel est considéré ici. De plus, pour simplifier les écritures de ce paragraphe, les valeurs des interfaces gauche et droite de la cellule seront notées $(.)_L$ et $(.)_R$, respectivement. L'exposant $n+1$ notant la solution de l'équation est également supprimé, et les notations $C_{k,i} = C_k(\underline{W}_i)$ et $\alpha = \alpha_1$ sont introduites afin d'alléger les équations. Puisque des équations d'état de type gaz raide sont utilisées, on rappelle l'expression du module de compressibilité $C_{k,i} = (\rho_k c_k)_i^2 = \gamma_k((p)_i + p_{k,\infty})$. Rappelons également l'équation (2.107.3) qui définit la pression de cohésion du mélange p_∞

$$\frac{\gamma p_\infty}{\gamma - 1} = \alpha \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \quad (4.53)$$

Selon l'équation (4.43), l'énergie totale de mélange à l'instant $n + 1$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} (\rho e)_i &= (\rho e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(((\rho e)_R + p_R) \underline{u}_R - ((\rho e)_L + p_L) \underline{u}_L \right) \\ &= (\rho e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\left(\frac{\gamma_R}{\gamma_R - 1} (p_R + p_{\infty,R}) + \frac{u_R^2}{2} + \rho_R i_{0,R} \right) \underline{u}_R \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\gamma_L}{\gamma_L - 1} (p_L + p_{\infty,L}) + \frac{u_L^2}{2} + \rho_L i_{0,L} \right) \underline{u}_L \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

On souhaite déterminer l'expression de la pression au temps $n + 1$, qui est définie par $p_i = (\gamma_i - 1) \rho \left(e - \frac{u^2}{2} - i_{0,i} \right) - \gamma_i p_{\infty,i}$. Nous discrétisons l'équation (4.39) qui devient

$$\frac{\alpha_i - \alpha_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{\alpha_R - \alpha_L}{\Delta x} + \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i) (C_{1,i} - C_{2,i})}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} \frac{u_R - u_L}{\Delta x} = 0 \quad (4.55)$$

et des manipulations algébriques détaillées dans l'annexe B donnent l'expression de la pression p_i

$$\begin{aligned} \frac{p_i}{\gamma_i - 1} &= \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} - \frac{1}{2} \left((\rho u^2)_i - (\rho u^2)_i^n \right) - (\rho_i i_{0,i} - \rho_i^n i_{0,i}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R}{\gamma_R - 1} p_R u_R - \frac{\gamma_L}{\gamma_L - 1} p_L u_L \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \left(\alpha_R u_R - \alpha_L u_L - \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i) (C_{1,i} - C_{2,i})}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} (u_R - u_L) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \left((1 - \alpha_R) u_R - (1 - \alpha_L) u_L - \left(1 - \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i) (C_{1,i} - C_{2,i})}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} \right) (u_R - u_L) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dans ce cas, si l'on suppose que la pression de cohésion $p_{1,\infty}$ est beaucoup plus grande que $p_{2,\infty}$, ce qui est le cas si la phase 1 est un liquide et la phase 2 est un gaz, les erreurs d'arrondis présentes dans la seconde ligne de l'expression (4.56) vont se propager très rapidement, à cause du terme $\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1}$ qui est beaucoup plus grand que les autres termes de l'expression. Ceci est à l'origine d'instabilités numériques.

Au contraire, l'équation (4.40) est discrétisée de la manière suivante

$$\frac{\alpha_i - \alpha_i^n}{\Delta t} + \frac{\alpha_R u_R - \alpha_L u_L}{\Delta x} + \frac{\alpha_i C_{2,i}}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} \frac{u_R - u_L}{\Delta x} = 0 \quad (4.57)$$

À partir de cette équation et de l'équation (4.54), nous obtenons l'expression de p_i au temps $n + 1$ après de nombreuses manipulations algébriques décrites dans l'annexe B

$$\begin{aligned} \frac{p_i}{\gamma_i - 1} &= \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} - \frac{1}{2} \left((\rho u^2)_i - (\rho u^2)_i^n \right) - (\rho_i i_{0,i} - \rho_i^n i_{0,i}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R}{\gamma_R - 1} p_R u_R - \frac{\gamma_L}{\gamma_L - 1} p_L u_L \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \frac{\alpha_i C_{2,i}}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} + \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \frac{(1 - \alpha_i) C_{1,i}}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}} \right) (u_R - u_L) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ainsi, si $p_{1,\infty} \gg p_{2,\infty}$ et $p_{1,\infty} \gg p$, le terme $\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1}$ est multiplié dans ce cas par le terme $\frac{\alpha_i C_{2,i}}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}}$, dont l'ordre de grandeur est $\frac{\max(p, p_{2,\infty})}{p_{1,\infty}} \ll 1$. Les erreurs d'arrondis ne se propageront donc pas dans ce cas, car le terme $\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \frac{\alpha_i C_{2,i}}{\alpha_i C_{2,i} + (1 - \alpha_i) C_{1,i}}$ n'est pas prépondérant dans cette expression.

4.3.3 Pas dissipatif

Le pas dissipatif vise à la résolution des équations aux dérivées partielles qui ne comporte que les termes dissipatifs. Le système à résoudre s'écrit alors de la manière suivante, en utilisant les variables d'état ${}^t(\rho Y_1, \rho, \rho \underline{u}, \rho e, \alpha_1)$

$$\frac{\partial \rho Y_1}{\partial t} = -\varepsilon_u \operatorname{div}(\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.59.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.59.2)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} = 0 \quad (4.59.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = \varepsilon_u \operatorname{div}((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.59.4)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = & \varepsilon_u ((Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) \underline{a}_r \cdot \nabla \alpha_1 \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div}(Y_2 \underline{a}_r) + C_2 \operatorname{div}(Y_1 \underline{a}_r))) \\ & - \varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \|\nabla p\|^2 \end{aligned} \quad (4.59.5)$$

La masse volumique du mélange ρ et la quantité de mouvement $\rho \underline{u}$ ne varient lors de cette étape. Le système précédent peut donc être simplifié, et s'écrit en fonction des variables ${}^t(Y_1, i, \alpha_1)$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div}(\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.60.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div}((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.60.2)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = & \varepsilon_u ((Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) \underline{a}_r \cdot \nabla \alpha_1 \\ & - \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div}(Y_2 \underline{a}_r) + C_2 \operatorname{div}(Y_1 \underline{a}_r))) \\ & - \varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \|\nabla p\|^2 \end{aligned} \quad (4.60.3)$$

Ce système est résolu en utilisant à nouveau une méthode à pas fractionnaires, où les différents pas concernent le terme d'advection dissipative, le terme source dissipatif, puis le terme de convection dissipative. Le premier système résolu ne possède donc que le terme d'advection dissipative, et s'écrit

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = 0 \quad (4.61.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (4.61.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\varepsilon_u}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} (Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) \underline{a}_r \cdot \nabla \alpha_1 \quad (4.61.3)$$

La partie concernant le terme source dissipatif est ensuite résolue

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = 0 \quad (4.62.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (4.62.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_u}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \|\nabla p\|^2 \quad (4.62.3)$$

et finalement nous cherchons à résoudre le système contenant le terme de convection dissipative

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.63.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} ((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 \underline{a}_r) \quad (4.63.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_u}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \alpha_1 \alpha_2 (C_1 \operatorname{div} (Y_2 \underline{a}_r) + C_2 \operatorname{div} (Y_1 \underline{a}_r)) \quad (4.63.3)$$

Les méthodes de résolution numérique de chaque système sont présentées dans les paragraphes suivants.

Pas d'advection dissipative

Durant cette étape, la fraction volumique α_1 est la seule à évoluer. L'équation à résoudre s'écrit

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \varepsilon_u \frac{Y_2 \alpha_2 C_1 - Y_1 \alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \underline{a}_r \cdot \nabla \alpha_1 = 0 \quad (4.64)$$

Les vecteurs d'état $\tilde{W}_i^{n+1}$, qui représentent les solutions du pas convectif, sont connus. Cette équation peut être résolue en utilisant un schéma explicite "upwind" à l'ordre 1. Dans le cas unidimensionnel, elle est discrétisée de la manière suivante, en notant $\alpha = \alpha_1$ et $Y = Y_1$ par souci de lisibilité

$$\frac{\alpha_i^* - \tilde{\alpha}_i^{n+1}}{\Delta t} + u_{ai} \left(\tilde{W}^{n+1} \right) \nabla \alpha \left(\tilde{W}^{n+1} \right) = 0 \quad (4.65)$$

On cherche la valeur de la fraction volumique α_i^* . La vitesse d'advection dissipative $u_{ai} \left(\tilde{W}^{n+1} \right)$ s'exprime de la manière suivante

$$u_{ai} \left(\tilde{W}^{n+1} \right) = \frac{\varepsilon_u}{2\Delta x} \frac{(1 - \tilde{Y}_i^{n+1}) (1 - \tilde{\alpha}_i^{n+1}) \tilde{C}_{1i}^{n+1} - \tilde{Y}_i^{n+1} \tilde{\alpha}_i^{n+1} \tilde{C}_{2i}^{n+1}}{\tilde{\alpha}_i^{n+1} \tilde{C}_{2i}^{n+1} + (1 - \tilde{\alpha}_i^{n+1}) \tilde{C}_{1i}^{n+1}} \frac{\tilde{Y}_i^{n+1} - \tilde{\alpha}_i^{n+1}}{\tilde{\rho}_i^{n+1}} (\tilde{p}_{i+1}^{n+1} - \tilde{p}_{i-1}^{n+1}) \quad (4.66)$$

et le gradient de la fraction volumique est approché par

$$\nabla \alpha \left(\tilde{W}^{n+1} \right) = \begin{cases} \frac{\tilde{\alpha}_i^{n+1} - \tilde{\alpha}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} & \text{si } u_{ai} \left(\tilde{W}^{n+1} \right) > 0 \\ \frac{\tilde{\alpha}_{i+1}^{n+1} - \tilde{\alpha}_i^{n+1}}{\Delta x} & \text{si } u_{ai} \left(\tilde{W}^{n+1} \right) < 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

Le schéma est explicite, et une condition CFL doit être appliquée pour en assurer la stabilité. Le nombre de CFL doit être inférieur à 1, ce qui signifie

$$\Delta t \leq \min_{1 \leq i \leq N} \frac{\Delta x}{|u_{ai}|} \quad (4.68)$$

En pratique, cette condition est généralement vérifiée. Cependant, si ce n'est pas le cas, nous réduisons le pas de temps pour cette étape et des sous-itérations sont effectuées jusqu'à ce que le pas de temps de l'étape convective soit atteint. Ceci permet d'assurer que la fraction volumique reste dans l'intervalle $[0, 1]$.

Pas de traitement du terme source dissipatif

À nouveau, seule la fraction volumique α_1 varie durant cette étape, comme le montre le système (4.62). L'équation qui doit être résolue numériquement s'écrit

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)} \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \|\nabla p\|^2 \quad (4.69)$$

Puisque l'on suppose que chaque phase est gouvernée par une loi d'état de type gaz raide, cette équation peut être simplifiée et réécrite

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)} (\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 Y_1 (\gamma_2 - 1) - \alpha_2 Y_2 (\gamma_1 - 1)) (Y_1 - \alpha_1)) \|\nabla p\|^2 \quad (4.70)$$

On connaît les variables d'état suite au pas d'advection dissipative; celles-ci sont notés ϕ^a , et on cherche à déterminer la fraction volumique α_1^* . Les notations $\alpha = \alpha_1$ et $Y = Y_1$ sont également introduites par souci de lisibilité. Cette équation est résolue numériquement en utilisant un schéma semi-implicite, qui peut s'écrire en une dimension

$$\frac{\alpha_i^* - \alpha_i^a}{\Delta t} + \varepsilon_u \frac{(p_{i+1}^a - p_{i-1}^a)^2}{4(\Delta x)^2 \rho_i^a (\alpha_i^a C_{2i}^a + (1 - \alpha_i^a) C_{1i}^a)} \quad (4.71)$$

$$(Y_i^a - \alpha_i^*) (\alpha_i^* (1 - \alpha_i^*) + (\alpha_i^* Y_i^a (\gamma_2 - 1) - (1 - \alpha_i^*) (1 - Y_i^a) (\gamma_1 - 1)) (Y_i^a - \alpha_i^*)) = 0$$

On remarque que, puisque le gradient de pression est évalué à partir de résultats déjà connus, la résolution de cette équation peut se faire de manière locale. Un algorithme de Newton est utilisé pour cela. Un choix attentif de la valeur initiale de α_i^* permet à l'algorithme de Newton de converger et d'assurer que la fraction volumique reste entre 0 et 1. Ce choix de la valeur initiale pour l'algorithme de Newton et la convergence de cet algorithme sont discutés dans l'annexe C.

Pas de convection dissipative

Nous effectuons maintenant le pas de convection dissipative. Puisque la masse volumique du mélange et la vitesse sont constantes durant cette étape, ce pas consiste à trouver une solution approchée au système d'équations

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} (Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \nabla p) = 0 \quad (4.72.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} ((h_1 - h_2) Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \nabla p) = 0 \quad (4.72.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \varepsilon_u \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \left(C_1 \operatorname{div} \left(Y_2 \frac{(Y_1 - \alpha_1)}{\rho} \nabla p \right) + C_2 \operatorname{div} \left(Y_1 \frac{(Y_1 - \alpha_1)}{\rho} \nabla p \right) \right) = 0 \quad (4.72.3)$$

Ces équations sont discrétisées de la manière suivante en une dimension, en notant les variables issues du pas de résolution du terme source dissipatif avec un exposant s et les variables issues de l'étape actuelle avec un exposant $*$.

$$Y_i^* - Y_i^s + \frac{\Delta t \varepsilon_u}{\Delta x \rho_i^s} \left(\rho_{i+1/2}^s g(\underline{W}_i^*, \underline{W}_{i+1}^*) - \rho_{i-1/2}^s g(\underline{W}_{i-1}^*, \underline{W}_i^*) \right) = 0 \quad (4.73.1)$$

$$i_i^* - i_i^s +$$

$$\frac{\Delta t \varepsilon_u}{\Delta x \rho_i^s} \left(\left(h_{1i+1/2}^* - h_{2i+1/2}^* \right) \rho_{i+1/2}^s g(\underline{W}_i^*, \underline{W}_{i+1}^*) - \left(h_{1i-1/2}^* - h_{2i-1/2}^* \right) \rho_{i-1/2}^s g(\underline{W}_{i-1}^*, \underline{W}_i^*) \right) = 0 \quad (4.73.2)$$

$$\alpha_i^* - \alpha_i^s + \frac{\Delta t \varepsilon_u}{\Delta x} \frac{\alpha_i^* (1 - \alpha_i^*)}{\alpha_i^* C_{2i}^* + (1 - \alpha_i^*) C_{1i}^*}$$

$$\left(\left(C_{1i}^* (1 - Y_{i+1/2}^*) + C_{2i}^* Y_{i+1/2}^* \right) \underline{a}_{r i+1/2}^* - \left(C_{1i}^* (1 - Y_{i-1/2}^*) + C_{2i}^* Y_{i-1/2}^* \right) \underline{a}_{r i-1/2}^* \right) = 0 \quad (4.73.3)$$

où l'on note $\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_{i+1})$ la variable à l'interface entre les cellules i et $i+1$. Les enthalpies phasiques à l'interface $h_{ki+1/2}$ sont calculées à partir des variables d'état à l'interface $Y_{i+1/2}$, $i_{i+1/2}$, $\rho_{i+1/2}$ et $\alpha_{i+1/2}$, et les vitesses relatives entre les phases $\varepsilon_u a_r$ sont calculées en utilisant la formule

$$a_{r i+1/2}^* = \frac{Y_{i+1/2}^* - \alpha_{i+1/2}^* p_{i+1}^* - p_i^*}{\rho_{i+1/2}^s \Delta x} \quad (4.74)$$

Enfin, la fonction $g(\underline{W}_i, \underline{W}_{i+1})$ est définie par l'équation suivante

$$g(\underline{W}_i, \underline{W}_{i+1}) = f(Y_i, Y_{i+1}) (a_r)_{i+1/2}^+ + f(Y_{i+1}, Y_i) (a_r)_{i+1/2}^- \quad (4.75)$$

où la notation $(a_r)^\pm = \frac{1}{2} (a_r \pm |a_r|)$ est utilisée, et où $f(Y_i, Y_{i+1})$ est une discrétisation monotone de $F(Y) = Y(1 - Y)$ qui doit satisfaire les propriétés suivantes

- f est une fonction localement continue Lipchitzienne de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$
- $f(Y, Y) = F(Y)$ pour tout $Y \in [0, 1]$
- $f : (a, b) \rightarrow f(a, b)$ de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}$ est croissante en fonction de a et décroissante en fonction de b .

Eymard, Gallouët et Herbin [25] proposent différentes expressions pour définir la fonction f . Nous choisissons ici une forme de Lax-Friedrichs modifiée

$$f(a, b) = \frac{a(1-a) + b(1-b)}{2} + \frac{1}{2}(a-b) \quad (4.76)$$

En effet, cette forme assure l'égalité $f(a, b) = f(1-b, 1-a)$ et donc une symétrie sur la fonction g existe, $g(Y_i, Y_{i+1}) = -g(1-Y_i, 1-Y_{i+1})$, ce qui entraîne le fait que la résolution numérique de cette étape n'est pas modifiée lorsque l'on permute les phases 1 et 2.

Un algorithme de Newton est utilisé pour résoudre de manière implicite le système d'équations (4.73). Un système linéaire avec une matrice tridiagonale doit alors être résolu, ce qui est fait en utilisant l'algorithme de Thomas.

Le choix de cette discrétisation a été guidé par le fait que, lorsque l'on doit résoudre uniquement l'équation sur la fraction massique (4.73.1), cette discrétisation assure que Y_1 reste dans l'intervalle $[0, 1]$. Cependant, du fait de l'influence des autres équations du système, cette propriété n'est pas vraie dans le cas présent. Le pas de temps pour cette étape est donc réduit si nécessaire, et des sous-cyclages sont effectués jusqu'à ce que le pas de temps convectif soit atteint pour assurer l'admissibilité des résultats de cette étape.

4.4 Résultats numériques et validation

4.4.1 Advection d'interface

On considère un premier cas-test qui est une advection d'interface entre de l'air et de l'eau. On souhaite vérifier que, pour cette simulation, le modèle dissipatif à cinq équations ne rajoute pas de diffusivité par rapport au modèle classique à cinq équations. Les deux phases sont gouvernées par des lois d'état de type gaz raide, et leurs propriétés thermodynamiques sont les suivantes

$$\begin{array}{llll} \text{Phase 1 (air)} & \gamma_1 = 1.4 & p_{1,\infty} = 0 \text{ Pa} \\ \text{Phase 2 (eau)} & \gamma_2 = 4.4 & p_{2,\infty} = 6.0 \cdot 10^8 \text{ Pa} \end{array} \quad (4.77)$$

Le calcul est effectué sur un domaine de 1 m, discrétisé sur 1001 nœuds. L'interface entre l'eau et l'air est située à $x = 0.5$ m et les deux états autour de cette discontinuité sont donnés par

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{état gauche} \\ \rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\ u = 1000 \text{ m.s}^{-1} \\ p = 10^5 \text{ Pa} \\ \alpha_1 = 10^{-8} \end{array} & \begin{array}{l} \text{état droit} \\ \rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} \\ u = 1000 \text{ m.s}^{-1} \\ p = 10^5 \text{ Pa} \\ \alpha_1 = 1.0 - 10^{-8} \end{array} \end{array} \quad (4.78)$$

Les fluides ne sont pas purs mais contiennent une petite proportion de l'autre phase, car la méthode numérique ne permet pas de manipuler des fluides purs. Un CFL constant de 0.8 est appliqué pour cette simulation. La Figure 4.1 présente les résultats de ce cas-test après $200 \mu\text{s}$, avec la pression, la masse volumique du mélange, la vitesse et la fraction volumique pour le modèle à cinq équations avec et sans terme dissipatif. Le temps de relaxation des vitesses est fixé à $\varepsilon_u = 10^{-4}$ s. Ces résultats sont comparés avec ceux du modèle à sept équations (3.1).

Les résultats issus des deux modèles sont très proches l'un de l'autre, et ce cas-test assure donc que les termes dissipatifs du modèle à cinq équations ne jouent aucun rôle lorsqu'il n'y a pas de gradient de pression, comme nous pouvions nous y attendre.

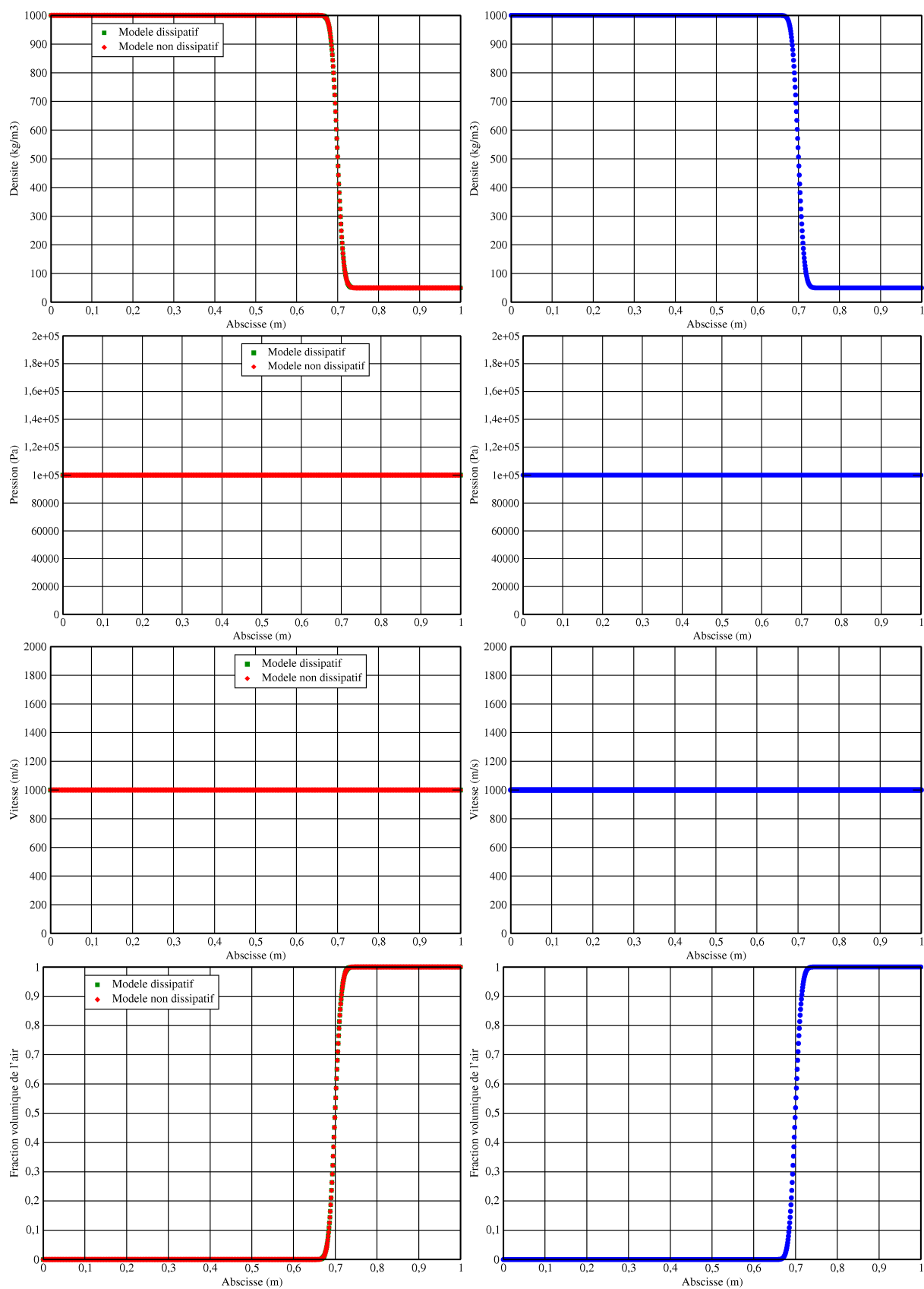


FIG. 4.1 – Advection d'interface : variables de mélange. Modèle à cinq équations (gauche) et à sept équations (droite).

4.4.2 Problèmes multifluides

Premier tube à choc eau-air

On présente maintenant les résultats numériques pour un tube à choc eau-air, qui a déjà été effectué pour le modèle à sept équations dans le paragraphe 3.5.2. Ce cas-test consiste en un tube de longueur 1.2 m, rempli d'air et d'eau (phases 1 et 2, respectivement), avec une fraction volumique $\alpha_1 = 0.5$ homogène le long du tube. Celui-ci est divisé en deux chambres : une chambre haute pression pour $x < 0.7$ m, où la pression est égale à $p = 10^9$ Pa, et une chambre basse pression ($x > 0.7$ m) avec $p = 10^5$ Pa. Les conditions initiales du cas-test sont présentées dans la table suivante

état gauche	état droit	
$\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_1 = 50 \text{ kg.m}^{-3}$	
$\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	
$u = 0 \text{ m.s}^{-1}$	$u = 0 \text{ m.s}^{-1}$	
$p = 10^9 \text{ Pa}$	$p = 10^5 \text{ Pa}$	
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_1 = 0.5$	(4.79)

Comme précédemment, les deux phases sont gouvernées par les équations de type gaz raide, avec les propriétés thermodynamiques données dans les expressions (4.77). Les temps de relaxation utilisés sont $\varepsilon_u = 2.05 \cdot 10^{-5}$ s et $\varepsilon_p = 2.11 \cdot 10^{-7}$ s ; leurs obtentions sont décrites dans le paragraphe 3.5.2.

Un maillage de 1201 nœuds a été utilisé pour les calculs numériques, et la condition CFL est égale à $\min(0.005n, 0.8)$, où n représente le nombre d'itérations. Des échecs numériques ont lieu lorsqu'on utilise un CFL de 0.8 pour les premières itérations. Les résultats après 200 μ s sont présentés sur les Figures 4.2 et 4.3, pour les modèles à cinq et sept équations. Notons que pour le modèle à cinq équations, les vitesses de l'eau et de l'air proposées ne sont pas des variables d'état (il n'y a qu'une vitesse de mélange dans ce système), mais ont été reconstruites en utilisant les équations (2.99).

Les résultats obtenus avec le modèle dissipatif à cinq équations sont en bon accord avec ceux obtenus avec le modèle à sept équations avec relaxations à temps fini. De plus, les résultats du modèle à cinq équations non dissipatif sont en excellent accord avec ceux de Murrone [66], qui a utilisé le même modèle. on remarque notamment que le déséquilibre des vitesses et la variation de la fraction volumique dans la zone de choc que l'on note pour le modèle à sept équations se retrouvent en grande partie pour le modèle à cinq équations dissipatif, alors que ces phénomènes n'apparaissent pas dans les résultats du modèle non dissipatif. Les pressions sont également en excellent accord. Notons toutefois qu'une différence apparaît entre le modèle à sept équations et le modèle à cinq équations dissipatif lorsque l'on regarde la fraction volumique, entre la zone de contact et la zone de choc. En conclusion de ce cas test, notre nouveau modèle permet de prendre en compte des phénomènes indécélables avec le modèle non dissipatif, particulièrement dans la zone de choc.

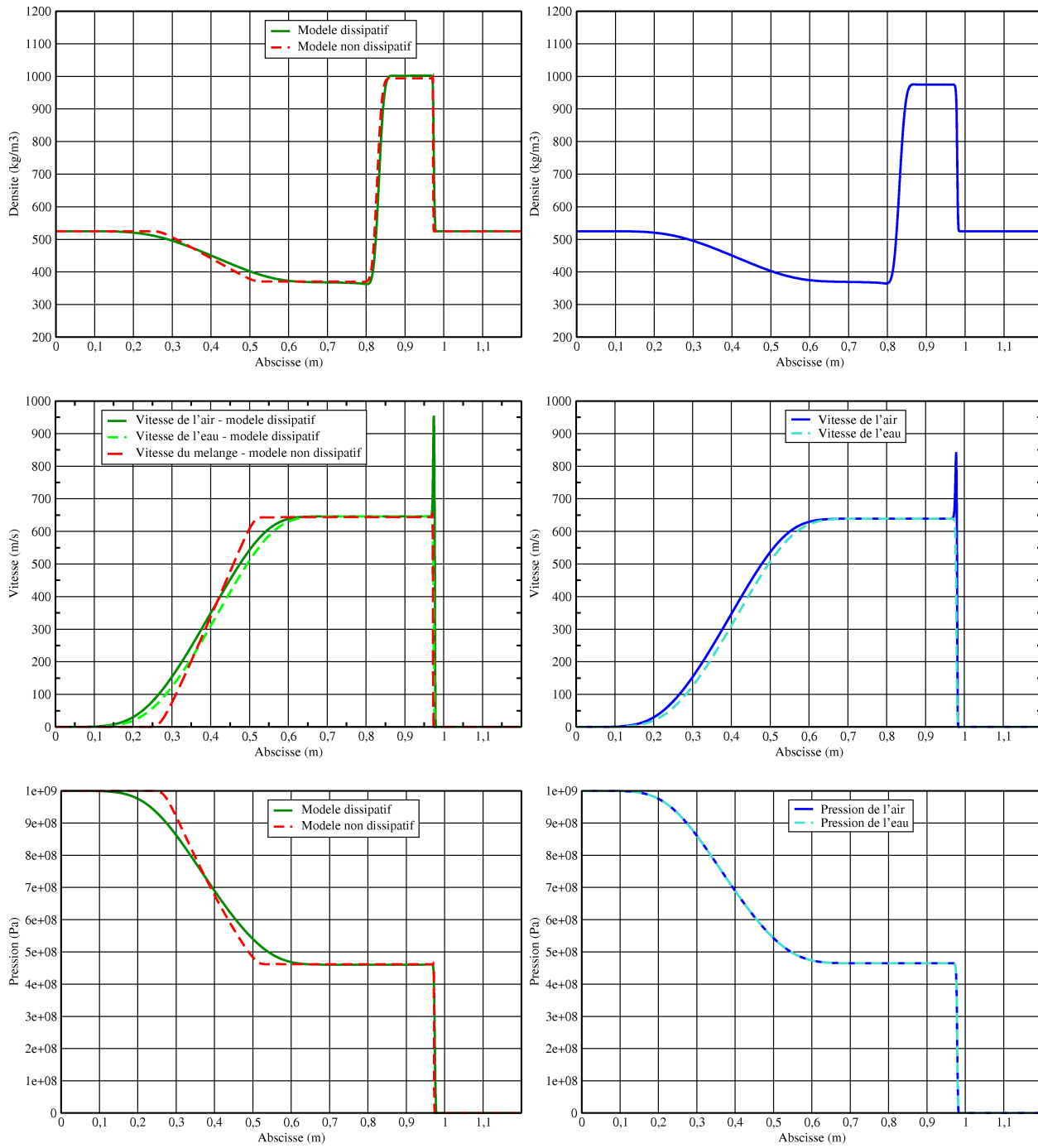


FIG. 4.2 – Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : premier tube à choc eau-air. Masse volumique, vitesse et pression.

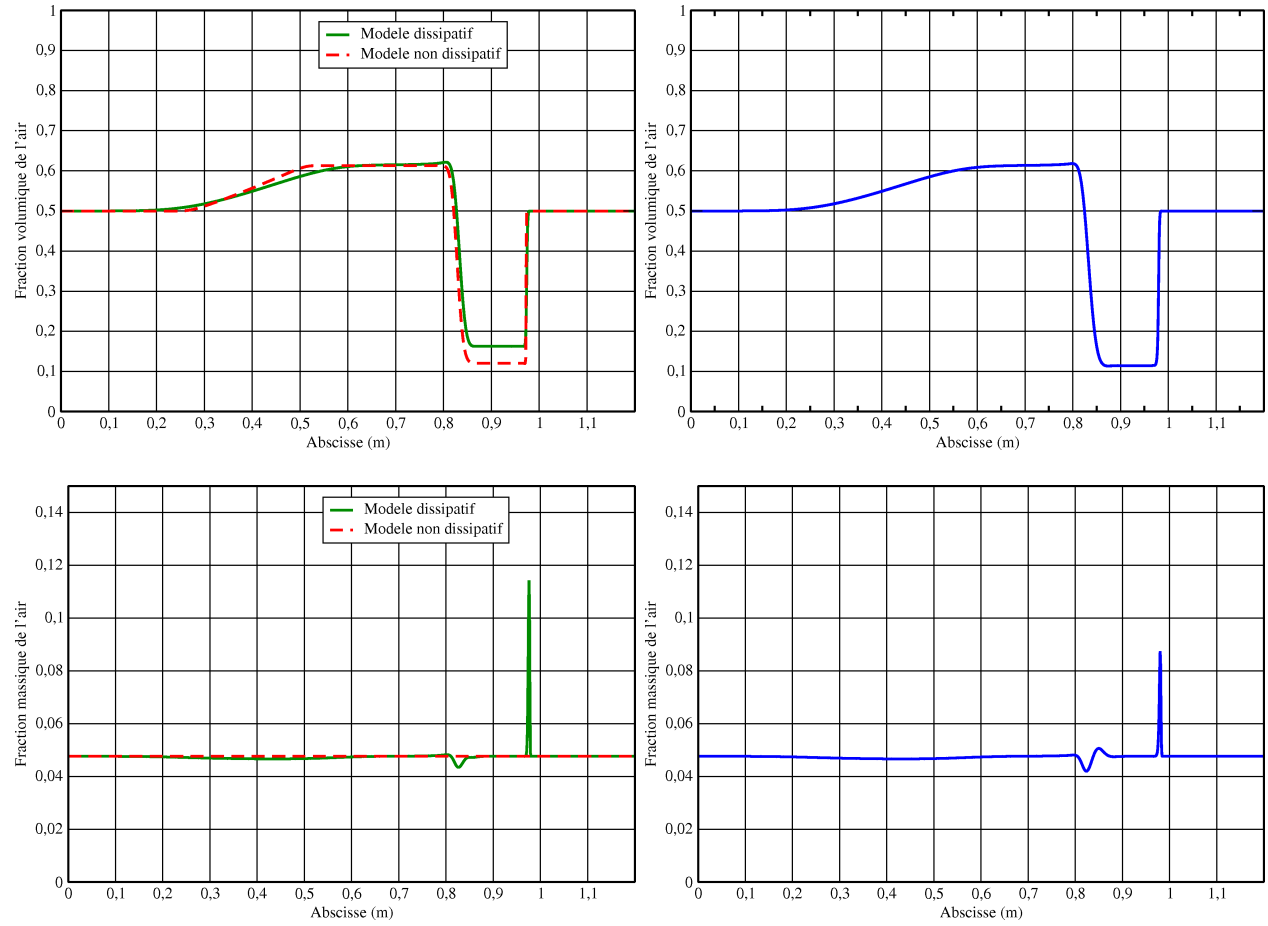


FIG. 4.3 – Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : premier tube à choc eau-air. Fraction volumique et fraction massique.

Deuxième tube à choc eau-air

Ce deuxième cas-test a également été proposé par Murrone [66]. Il s'agit d'un tube à choc dans les mêmes conditions que le cas-test précédent, sauf que la masse volumique de l'air est désormais égale à 1 kg.m^{-3} et la fraction volumique de l'air est maintenant de 0.2 dans la chambre à haute pression et 0.8 dans la chambre à basse pression. Les données initiales sont résumées dans la table suivante

$$\begin{array}{cc|cc}
 \text{état gauche} & & \text{état droit} & \\
 \rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3} & & \rho_1 = 1 \text{ kg.m}^{-3} & \\
 \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & & \rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3} & \\
 u = 0 \text{ m.s}^{-1} & & u = 0 \text{ m.s}^{-1} & \\
 p = 10^9 \text{ Pa} & & p = 10^5 \text{ Pa} & \\
 \alpha_1 = 0.2 & & \alpha_1 = 0.8 &
 \end{array} \quad (4.80)$$

On utilise un maillage de 1001 nœuds sur 1 m, et la discontinuité est placée à $x = 0.7 \text{ m}$. La condition de CFL a été fixée à $\min(0.001n, 0.8)$ pour éviter les problèmes numériques causés par la discontinuité lors des premières itérations.

Comme dans le cas précédent, un solveur de Riemann exact a été utilisé afin d'évaluer les variables des deux grandeurs pour un choc monophasique, pour déterminer les temps de relaxations. Les valeurs suivantes sont obtenues à la discontinuité : $\rho_{air} = 0.575 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{eau} = 910 \text{ kg.m}^{-3}$, $u_{air} = 19600 \text{ m.s}^{-1}$, $u_{eau} = 232 \text{ m.s}^{-1}$, $p_{air} = 4.61 \cdot 10^8 \text{ Pa}$, $p_{eau} = 4.56 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. On utilise un rayon de bulle de $R = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, et on suppose $\alpha_{air} = 0.2$ pour déterminer ε_u . À partir de la formule (1.63), nous obtenons alors le temps de relaxation des vitesses $\varepsilon_u = 2.63 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. La formule (1.55) donne le temps de relaxation des pressions, $\varepsilon_p = 2.99 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, ce qui équivaut pratiquement à une égalité des pressions.

Les résultats sont présentés sur les Figures 4.4 et 4.5 à l'instant $t = 200 \mu\text{s}$, pour les modèles à cinq et sept équations. Notons qu'à nouveau nos résultats pour le modèle à cinq équations non dissipatif sont les mêmes que ceux obtenus par Murrone, qui utilise le même modèle dans [66]. Cette fois encore, le modèle réduit dissipatif permet de reproduire de manière assez fidèle les résultats du modèle à deux vitesses et deux pressions, particulièrement en ce qui concerne la pression et la variation de la fraction massique de l'air dans la zone de choc. Cette zone de choc a d'ailleurs une certaine épaisseur, alors que le modèle non dissipatif ne voit pas cette zone. La principale différence entre les résultats des modèles à cinq et sept équations est la présence d'une oscillation de la masse volumique et de la fraction volumique au niveau de la discontinuité de contact, qui est beaucoup moins importante dans les résultats du modèle réduit dissipatif. Cependant, cette oscillation est un effet transitoire s'estompant avec le temps, comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.6. Un maillage deux fois plus fin a également été utilisé pour vérifier que la diminution des oscillations n'est pas un effet numérique. Les mêmes résultats sont obtenus, nous avons donc bien une convergence en maillage et l'oscillation est bien un effet transitoire. On remarque également dans les résultats du modèle dissipatif à cinq équations un pic de la vitesse de l'air dans la zone de choc, qui n'apparaît pas avec le modèle à sept équations.

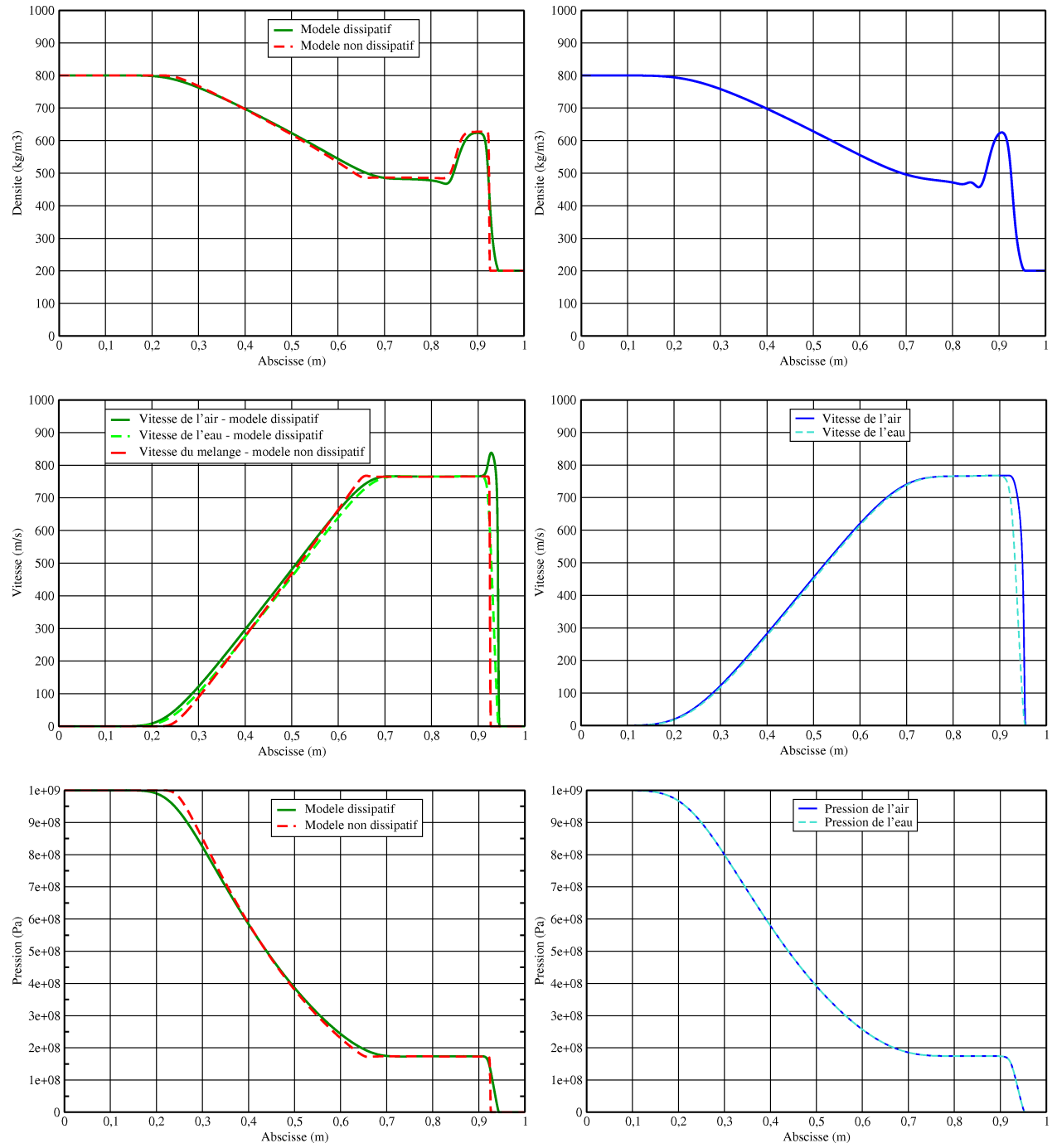


FIG. 4.4 – Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : deuxième tube à choc eau-air. Masse volumique, vitesse et pression.

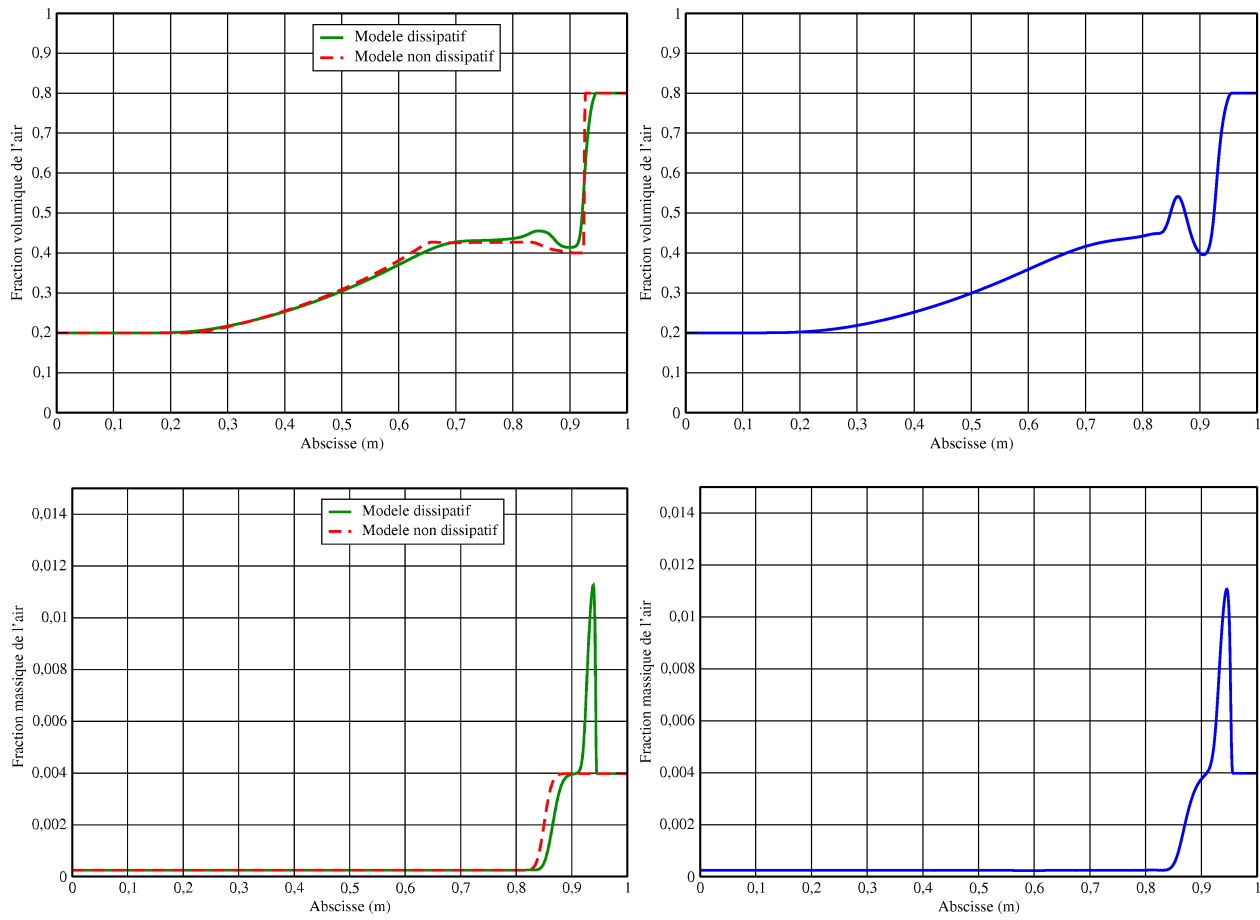


FIG. 4.5 – Comparaison entre les modèles à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite) : deuxième tube à choc eau-air. Fraction volumique et fraction massique.

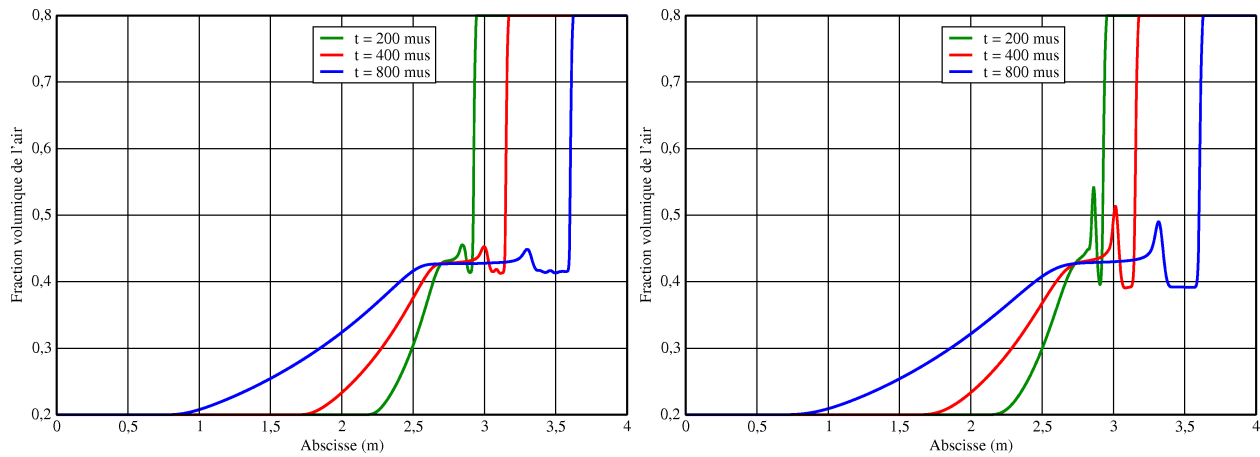


FIG. 4.6 – Évolution du profil de la fraction volumique de l'air. Modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et modèle à sept équations (droite).

Cas-test de Ransom

On s'intéresse maintenant à des cas-tests à faible nombre de Mach. Le premier est le test du robinet d'eau de Ransom. Ce cas-test très répandu [16, 77, 40] est formé par un tube de 12m de longueur, où une colonne d'eau est entourée d'air. La gravité s'applique à l'instant $t = 0$ s, et le jet d'eau s'affine alors, comme nous pouvons le voir sur la Figure 4.7 qui explique schématiquement le déroulement du cas-test.

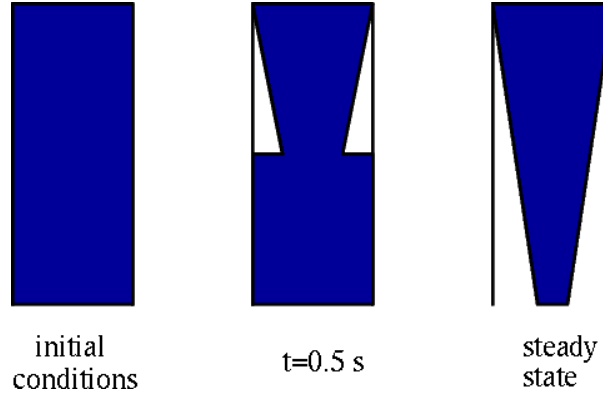


FIG. 4.7 – Déroulement du cas-test de Ransom.

Initialement, le mélange est homogène avec une fraction volumique de l'air égale à $\alpha_{air} = 0.2$, la masse volumique et la vitesse de l'air sont $\rho_{air} = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $u_{air} = 0 \text{ m.s}^{-1}$, celles de l'eau sont $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $u_{eau} = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Les propriétés thermodynamiques de chaque phase sont données par les relations (4.77). À $t = 0$ s, on applique la gravité $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$, ce qui cause un rétrécissement du jet d'eau. Les vitesses de l'eau et de l'air doivent alors être très différentes, car l'air va remonter du bas du tube pour prendre la place de l'eau. Le modèle à cinq équations sans terme dissipatif échoue alors complètement à reproduire les résultats des modèles à deux vitesses.

Nous présentons nos résultats sur la Figure 4.8. Les résultats ont été obtenus pour un maillage de 1001 nœuds. Ce cas-test est généralement effectué sans terme de traînée interfaciale ($\varepsilon_u = \infty$) lorsqu'on utilise des modèles à deux vitesses [76]. Dans nos calculs, le temps de relaxation des vitesses a été fixé arbitrairement à $\varepsilon_u = 2.0 \cdot 10^2 \text{ s}$: une telle valeur pour ε_u va ainsi réduire fortement les frottements entre les phases. Cette valeur a été utilisée aussi bien pour le modèle à cinq équations avec termes dissipatifs (4.1) que pour le modèle à sept équations (3.1), afin de pouvoir comparer nos résultats pour des cas similaires. Le temps de relaxation des pressions est fixé à $\varepsilon_p = 10^{-12} \text{ s}$, ce qui équivaut pratiquement à imposer l'égalité des pressions des deux phases.

Une solution analytique existe pour un cas proche du robinet de Ransom, selon [42] : si l'on fait les hypothèses supplémentaires de l'incompressibilité du liquide et si l'on suppose que les variations de pression du gaz sont négligeables, alors on peut obtenir une solution exacte de l'évolution de la fraction volumique de l'air

$$\alpha_{air} = \begin{cases} 1 - \frac{1 - \alpha_{air}^0 u_{eau}^0}{\sqrt{2gx + (u_{eau}^0)^2}} & \text{si } x < u_{eau}^0 t + \frac{gt^2}{2} \\ \alpha_{air}^0 & \text{si } x > u_{eau}^0 t + \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (4.81)$$

La Figure 4.8 montre que le modèle dissipatif à cinq équations donne de très bons résultats pour ce cas-test, et notamment qu'il est moins diffusif que le modèle à sept équations. Ceci peut notamment

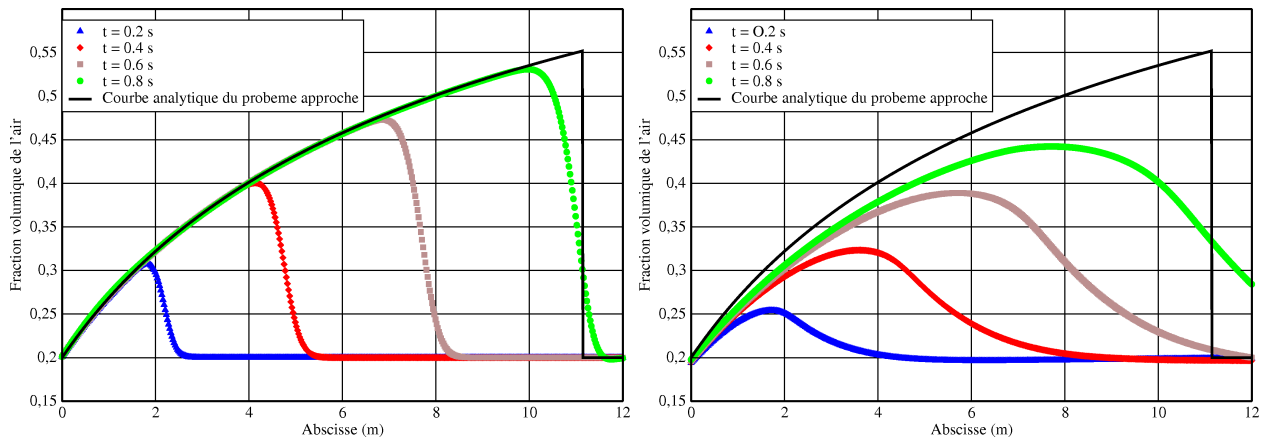


FIG. 4.8 – Cas-test de Ransom : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations (droite).

s'expliquer par le fait que les vitesses d'ondes sont beaucoup plus faibles dans le modèle à cinq équations pour ce cas-test, et donc que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution à un instant donné est plus faible. Cette propriété a une deuxième conséquence : le temps de calcul est beaucoup plus faible pour le modèle à cinq équations : pour calculer la solution à $t = 0.6$ s, le temps de calcul a été de 85.4 s avec le modèle à cinq équations dissipatif, contre 977 s avec le modèle à sept équations. Par ailleurs, nos résultats pour le modèle à cinq équations sont très proches de ceux obtenus par Guillard et Duval [40], qui ont réalisé ce cas-test dans le cadre isotherme avec un temps de relaxation qui peut être évalué à $8.0 \cdot 10^4$ s.

Sédimentation

Le cas-test de la sédimentation est aussi répandu pour l'étude des écoulements multiphasiques à bas Mach [16, 27]. Dans ce test, on considère un tube de longueur 7.5 m rempli initialement d'un mélange homogène d'eau et d'air, avec une fraction volumique initiale égale à $\alpha_{eau} = 0.5$. Des conditions aux bords de réflexion sont appliquées à chaque extrémité de ce tube. La vitesse du mélange est initialement nulle, et chaque phase est à pression atmosphérique $p = 10^5$ Pa. Les masses volumiques de l'air et de l'eau sont $\rho_{air} = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. À l'instant $t = 0$ s, un champ de gravité avec $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ est appliqué, ce qui causera une séparation des deux phases.

Ce cas-test est réalisé sur un maillage de 201 nœuds et un temps de relaxation des vitesses $\varepsilon_u = 10$ s. Cette valeur a été prise afin de réduire le plus possible les effets des forces de traînée. Pour ce calcul, nous avons pris $\text{CFL} = 0.8$, puis $\text{CFL} = 0.4$ pour $t > 0.74$ s. Cette diminution s'impose car la fraction volumique est alors très proche de 0 ou 1 aux extrémités du tube, et le pas de temps doit être réduit afin d'éviter les problèmes numériques. L'évolution de la fraction volumique de l'eau est présentée sur la Figure 4.9 ; on y remarque que deux zones de fluide purs s'étendent progressivement, ce qui nous permet de dire que le modèle dissipatif à cinq équations est capable de reproduire les phénomènes de contre-courants, où les vitesses des phases sont de signes opposés.

Nous avons voulu comparer nos résultats avec ceux obtenus avec les modèles à deux vitesses et deux pressions. Notre logiciel, qui utilise le schéma numérique proposé par Andrianov, Saurel et Warnecke [3] et présenté dans le paragraphe 3.3, n'a pas réussi à produire des résultats. Le logiciel d'A. Murrone utilisé dans [66], qui est basé un solveur de type VFRoe-ncv proposé dans [10], conduit également à des instabilités. N. Seguin nous a aimablement fait parvenir son logiciel, qui peut utiliser des schémas numériques de type Rusanov et VFRoe-ncv, présentés dans [27], ainsi qu'une méthode de correction

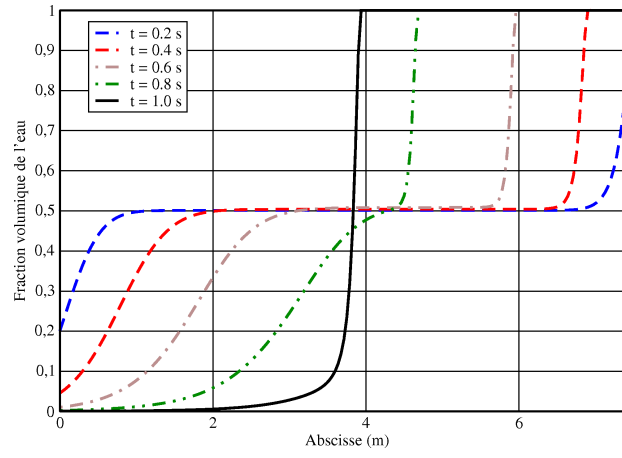


FIG. 4.9 – Sédimentation : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations, avec une loi d'état de type gaz raide pour l'eau.

entropique [81] ; ce logiciel a été utilisé dans [27] pour réaliser le cas-test de la sédimentation en supposant que l'eau est un gaz parfait. Cependant, ce logiciel propose des résultats manifestement non physiques dans le cas où l'eau est modélisée par une loi d'état de type gaz raide.

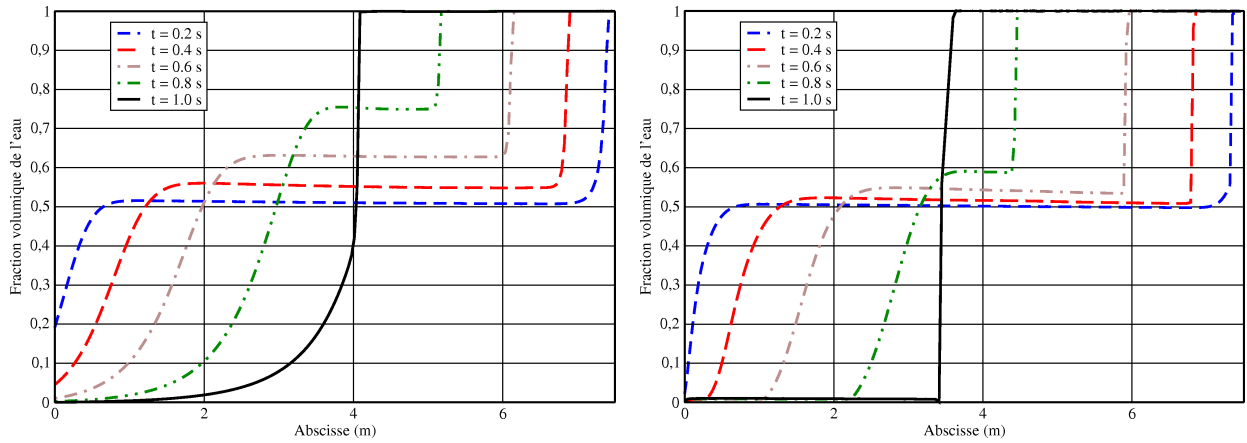


FIG. 4.10 – Sédimentation : évolution de la fraction volumique pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et pour le modèle à sept équations (droite), avec une loi d'état de type gaz parfait pour l'eau.

Ce cas-test a donc été réalisé en modifiant la loi d'état de l'eau, afin de pouvoir comparer les deux modèles. Les paramètres thermodynamiques utilisés pour l'eau sont $\gamma_{eau} = 1.0005$ et $p_{eau,\infty} = 0$ Pa. Les temps de relaxations utilisés pour cette simulation sont $\varepsilon_p = 5 \cdot 10^{-4}$ s et $\varepsilon_u = 10$ s. Des problèmes de stabilité numériques sont apparus en utilisant le modèle dissipatif à cinq équations, et nous avons dû prendre $CFL = 0.04$ pour réaliser le calcul. Pour le modèle à deux vitesses et deux pressions, un nombre de CFL égal à 0.4 a été utilisé ; des instabilités numériques apparaissent lorsque l'on modifie des paramètres secondaires tels que la taille du maillage ou la condition CFL . Les résultats issus de ces deux modèles sont présentés sur la Figure 4.10. Les effets de la compressibilité de l'eau sont bien plus visibles dans les résultats du modèle dissipatif à cinq équations, avec la variation en fonction du temps 1 de la fraction volumique dans la zone de mélange. Cette variation se retrouve également dans le modèle à sept équations, mais est moins prononcée (notons que l'utilisation d'une loi d'état de type gaz raide pour l'eau (Figure 4.9) permet de ne plus avoir de variation de la fraction volumique dans la

zone de mélange). Les vitesses de sédimentations sont elles reproduites de manière satisfaisante par le modèle dissipatif à cinq équations.

Montée d'un mélange eau-vapeur dans un tube vertical

Ce cas-test a pour but de comparer le modèle dissipatif à cinq équations avec celui du logiciel GENEPI [37], qui est un logiciel basé sur une méthode élément fini, développé dans le but de simuler les écoulements dans les générateurs de vapeur des centrales nucléaires. Un modèle à l'équilibre homogène est utilisé, auquel on a ajouté un modèle de vitesse de dérive. On souhaite donc plus particulièrement valider le modèle de déséquilibre cinématique de ce logiciel utilisant une loi de type Lellouche-Zolotar [59], qui suppose que le déséquilibre des vitesses est un effet uniquement vertical et dépend essentiellement du rapport entre les masses volumiques des deux phases. On considère un tube vertical de hauteur 4 m sous une pression de $7.0 \cdot 10^6$ Pa. À sa base, un mélange eau-vapeur est injecté, et nous voulons mesurer la différence de vitesse entre l'eau et l'air. Les données initiales du problème sont données dans le tableau suivant

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 36.6 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_2 &= 739.8 \text{ kg.m}^{-3} \\ u &= 1.0 \text{ m.s}^{-1} \\ p &= 7.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ \alpha_1 &= 0.5\end{aligned}\tag{4.82}$$

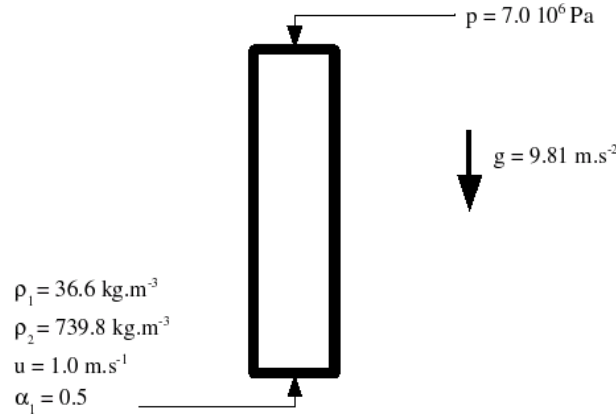


FIG. 4.11 – Montée d'un mélange eau-vapeur dans un tube vertical : Conditions aux bords

et les conditions aux bords sont présentées sur la Figure 4.11. De plus, les coefficients thermodynamiques utilisés dans ce cas-test sont obtenus à partir des tables du programme GENEPI

$$\begin{array}{llll} \text{Phase 1 (air)} & \gamma_1 = 1.3 & p_{1,\infty} = 0 \text{ Pa} & i_{1,0} = 1.943 \cdot 10^6 \text{ J} \\ \text{Phase 2 (eau)} & \gamma_2 = 1.54 & p_{2,\infty} = 5.041 \cdot 10^8 \text{ Pa} & i_{2,0} = -7.022 \cdot 10^5 \text{ J} \end{array}\tag{4.83}$$

Les vitesses des deux phases obtenues avec GENEPI dans le régime permanent sont les suivantes

$$u_{air} = 1.796 \text{ m.s}^{-1} \quad u_{eau} = 0.9597 \text{ m.s}^{-1}\tag{4.84}$$

Le même type de calcul est effectué avec le modèle dissipatif (4.1). Le but de cet exercice est de trouver la valeur du temps de relaxation des vitesses permettant de retrouver les résultats obtenus par GENEPI. Un maillage de 401 nœuds est utilisé pour la simulation. Après quelques essais, on trouve un temps de relaxation des vitesses $\varepsilon_u = 0.188 \text{ s}$ permettant d'obtenir avec le modèle dissipatif à cinq équations les mêmes résultats que ceux de GENEPI, comme le montre la Figure 4.12. Notons que dans

les deux cas, les vitesses des phases sont reconstruites à partir des variables d'état et du gradient de pression, et ne sont pas elles-mêmes des variables d'état.

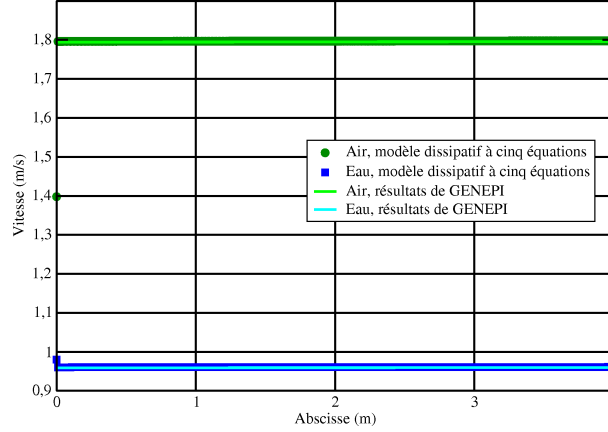


FIG. 4.12 – Montée d'un mélange eau-vapeur dans un tube vertical : comparaison entre les résultats du modèle à cinq équations dissipatif et ceux de GENEPI [37].

On retrouve alors une estimation de la taille des bulles à partir de l'expression du paragraphe 1.3.2, en utilisant pour la viscosité de l'air $\mu_{air} = 1.74 \cdot 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ [61] et $\mu_{eau} = 1.002 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$ [37]. Si nous considérons que le fluide est composé de bulles d'air entourées d'eau, nous obtenons alors comme rayon moyen

$$R_{bulle} = 1.035 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (4.85)$$

Ce qui semble cohérent avec la physique. En effet, selon les résultats expérimentaux de [69], la distribution des tailles de bulles de vapeur d'eau présente un pic à 10^{-2} m pour une pression de $4.64 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle à une vitesse et une pression a été étudié, avec des termes additionnels provenant d'un développement de Chapman-Enskog à l'ordre un, à partir du modèle bifluide à une pression et deux vitesses. Ce modèle est hyperbolique, et les termes du second ordre assurent la croissance de l'entropie pour chaque phase du mélange.

Une méthode de type volumes finis a été construite pour résoudre numériquement ce modèle. Elle est basée sur une méthode à pas fractionnaires, avec tout d'abord la résolution explicite du système hyperbolique sans les termes dissipatifs, puis dans un second temps la résolution semi-implicite de ces termes dissipatifs, à nouveau en utilisant une méthode à pas fractionnaires.

Nous remarquons dans les résultats numériques obtenus avec ce modèle des phénomènes que l'on retrouve avec les modèles à deux vitesses, mais pas avec le modèle non dissipatif. Citons notamment une certaine épaisseur des zones de choc, et les sauts de fraction massique dans celles-ci. Ce modèle peut aussi être utilisé dans des cas d'écoulements complexes, comme par exemple la sédimentation. De plus, pour tous les cas-tests unidimensionnels présentés dans ce chapitre, les temps obtenus avec le modèle (4.1) sont très inférieurs aux temps nécessaires pour obtenir les mêmes résultats avec le modèle à deux vitesses et deux pressions (3.1). Ce modèle propose donc une très bonne alternative pour la simulation d'écoulements diphasiques avec déséquilibres des vitesses.

Chapitre 5

Étude de la propagation d'ondes de choc

Sommaire

5.1	Introduction	137
5.2	Relations de sauts pour le modèle à cinq équations non dissipatif	138
5.2.1	Relations de Rankine-Hugoniot	138
5.2.2	Fermeture des relations de saut	138
5.3	Ondes progressives pour le modèle (4.1)	139
5.3.1	Relations de saut pour le modèle dissipatif à cinq équations	139
5.3.2	Structure du choc	141
5.4	Validation des modèles	144
5.4.1	Mélange époxy-spinel	144
5.4.2	Mélange uranium-molybdène	146
5.4.3	Mélange époxy-enstatite	147
5.4.4	Mélange époxy-périclase	149
5.5	Conclusion	150

5.1 Introduction

La modélisation de la propagation des chocs dans les mélanges diphasiques est un problème courant, qui apparaît par exemple dans l'étude des explosifs ou les turbo-injecteurs. Ce problème a été le moteur de nombreuses études sur la modélisation des écoulements diphasiques (Baer et Nunziato [4], Kapila *et al.* [48, 49], Saurel et Le Métayer [79] entre autres). Kapila *et al.* [49] ont montré que pour l'étude des explosifs notamment, le temps de retour à l'équilibre des pressions et des vitesses est beaucoup plus rapide que le temps nécessaire pour l'équilibre thermique entre les phases, contrairement aux écoulements à bulles. Les modèles diphasiques à une vitesse et une pression ont donc souvent été utilisés pour la simulation de chocs dans les mélanges diphasiques [49, 67, 80].

Dans le modèle à une vitesse et une pression [49], les relations de Rankine-Hugoniot ne sont pas fermées, car l'équation sur la fraction volumique s'écrit sous forme non-conservative. Plusieurs propositions de fermeture de ces relations ont été proposées [23, 75, 80]. On souhaite comparer dans ce chapitre les résultats de différentes fermetures des relations de Rankine-Hugoniot présentées par Saurel *et al.* [80] avec les résultats obtenus par le modèle dissipatif à cinq équations développé au chapitre 4.

On étudiera dans ce chapitre le comportement du modèle dissipatif à cinq équations pour les ondes progressives. Différentes propositions de fermetures des relations de Rankine-Hugoniot seront présentées pour le modèle non dissipatif, puis les relations de saut pour le modèle dissipatif seront

recherchées. Le problème d'Hugoniot, où un piston frappe sur un mélange solide, sera ensuite utilisé pour comparer les résultats numériques obtenus avec les fermetures trouvées dans la littérature avec ceux fournis modèle dissipatif. On confrontera ces résultats à des données expérimentales [11, 63].

5.2 Relations de sauts pour le modèle à cinq équations non dissipatif

5.2.1 Relations de Rankine-Hugoniot

On étudie dans ce paragraphe le modèle à une pression et une vitesse (2.93), sans terme dissipatif, pour lequel on souhaite déterminer les relations de Rankine-Hugoniot. Si le vecteur des variables d'état est noté $\underline{W}$ et le vecteur de flux $\underline{F}(\underline{W})$, un système de lois conservatives peut être écrit

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \operatorname{div} (\underline{F}(\underline{W})) = 0 \quad (5.1)$$

Dans la suite les indices L et R seront utilisés pour décrire les variables d'état à gauche et à droite du choc. Les relations de Rankine-Hugoniot associé au système (5.1) sont données par

$$\underline{F}(\underline{W}_L) - u_s \underline{W}_L = \underline{F}(\underline{W}_R) - u_s \underline{W}_R \quad (5.2)$$

où u_s représente la vitesse du choc. Quatre relations de Rankine-Hugoniot peuvent donc être déduites des quatre premières équations du système (2.93)

$$\alpha_{1,L} \rho_{1,L} (u_L - u_s) = \alpha_{1,R} \rho_{1,R} (u_R - u_s) \quad (5.3.1)$$

$$\alpha_{2,L} \rho_{2,L} (u_L - u_s) = \alpha_{2,R} \rho_{2,R} (u_R - u_s) \quad (5.3.2)$$

$$\rho_L u_L (u_L - u_s) + p_L = \rho_R u_R (u_R - u_s) + p_R \quad (5.3.3)$$

$$\rho_L e_L (u_L - u_s) + p_L u_L = \rho_R e_R (u_R - u_s) + p_R u_R \quad (5.3.4)$$

que nous pouvons réécrire de la manière suivante

$$Y_{1,L} = Y_{1,R} \quad (5.4.1)$$

$$\rho_L (u_L - u_s) = \rho_R (u_R - u_s) = m \quad (5.4.2)$$

$$p_L - p_R + m^2 \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_R} \right) = 0 \quad (5.4.3)$$

$$i_L - i_R + \frac{p_L + p_R}{2} \left(\frac{1}{\rho_L} - \frac{1}{\rho_R} \right) = 0 \quad (5.4.4)$$

où m représente le flux de masse à travers le choc. Ce système n'est pas fermé ; différentes propositions de fermeture sont présentées dans le paragraphe suivant.

5.2.2 Fermeture des relations de saut

Différentes fermetures du système (5.4) ont été évaluées par Saurel *et al.* [80]. La première provient de la modélisation des détonations dans les mélanges gazeux, et consiste à supposer l'égalité des températures phasiques après le choc. Cette fermeture peut donc s'écrire, en supposant que le choc se déplace de gauche à droite

$$T_{1,L} = T_{2,L} \quad (5.5)$$

Une deuxième proposition est de supposer que l'une des entropies phasiques reste constante à travers le choc. En effet, pour les chocs faibles, une phase solide peut être considérée comme isentropique [49]. On peut donc utiliser l'une des deux relations

$$s_{1,L} = s_{1,R} \quad \text{ou} \quad s_{2,L} = s_{2,R} \quad (5.6)$$

On doit cependant noter que cette hypothèse n'est plus valide pour les chocs forts. De plus, une telle fermeture ne permet plus au modèle d'être symétrique par rapport aux phases, et ne respecte pas la limite monophasique, alors qu'une fermeture devrait être acceptée pour n'importe quelle concentration.

Resnyansky et Bourne [75] ont proposé une variante de cette proposition, qui consiste à supposer que le rapport entre les entropies phasiques est constant à travers le choc.

$$\frac{s_{1,L}}{s_{2,L}} = \frac{s_{1,R}}{s_{2,R}} \quad (5.7)$$

On peut définir l'entropie spécifique de mélange s par $s = Y_1 s_1 + Y_2 s_2$. L'équation (5.7) permet alors d'écrire $\frac{Y_k s_k}{s} = \text{constante}$, et montre que dans ce cas la fraction d'entropie $\phi_k = \frac{Y_k s_k}{s}$ est constante à travers un choc.

La dernière fermeture que nous allons comparer a été originellement proposée dans [23]. Un travail récent de Saurel *et al.* [80] reprend cette proposition. Elle se traduit par une relation sur l'une des énergies internes phasiques

$$i_{k,L} - i_{k,R} + \frac{p_L + p_R}{2} \left(\frac{1}{\rho_{k,L}} - \frac{1}{\rho_{k,R}} \right) = 0 \quad (5.8)$$

Cette relation de fermeture est symétrique : on peut utiliser indifféremment la relation (5.8) avec la phase $k = 1$ ou 2 .

5.3 Ondes progressives pour le modèle (4.1)

5.3.1 Relations de saut pour le modèle dissipatif à cinq équations

Cherchons maintenant les solutions du système (4.1) sous forme d'ondes progressives, ce qui signifie que nous supposons que les solutions de (4.1) s'écrivent sous la forme $\underline{Q}(x, t) = \underline{Q}(\xi) = \underline{Q}(x - u_s t)$, où u_s est la vitesse de l'onde progressive. On peut écrire

$$\frac{d}{d\xi} (\rho (u - u_s)) = 0 \quad (5.9.1)$$

$$\frac{d}{d\xi} (\rho u (u - u_s) + p) = 0 \quad (5.9.2)$$

$$\frac{d}{d\xi} (\rho Y_1 (u - u_s)) = -\frac{d}{d\xi} (\rho Y_1 Y_2 u_r) \quad (5.9.3)$$

$$\frac{d}{d\xi} (\rho e (u - u_s) + pu) = \frac{d}{d\xi} ((h_2 - h_1) \rho Y_1 Y_2 u_r) \quad (5.9.4)$$

$$\begin{aligned} & \rho (u - u_s) (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{d\alpha_1}{d\xi} + \rho \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \frac{du}{d\xi} = \\ & \varepsilon_u (Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) (Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} \frac{d\alpha_1}{d\xi} \\ & - \varepsilon_u \rho \alpha_1 \alpha_2 \left(C_1 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_2 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) + C_2 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_1 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) \right) \\ & - \varepsilon_u (Y_1 - \alpha_1) \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Considérons maintenant une onde progressive se déplaçant de gauche à droite, et notons $\underline{Q}_R$ l'état avant le passage de l'onde progressive. L'intégration des quatre premières équations du système (5.9) entre ξ et $\xi = +\infty$ donne

$$\rho (u - u_s) = \rho_R (u_R - u_s) = m \quad (5.10.1)$$

$$mu + p = mu_R + p_R \quad (5.10.2)$$

$$\varepsilon_u Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} = -m (Y_1 - Y_{1,R}) \quad (5.10.3)$$

$$\varepsilon_u (h_2 - h_1) Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} = m (e - e_R) + pu - p_R u_R \quad (5.10.4)$$

$$\begin{aligned} & \rho (u - u_s) (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{d\alpha_1}{d\xi} + \rho \alpha_1 \alpha_2 (C_1 - C_2) \frac{du}{d\xi} = \\ & \varepsilon_u (Y_1 \alpha_1 C_2 - Y_2 \alpha_2 C_1) (Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} \frac{d\alpha_1}{d\xi} \\ & - \varepsilon_u \rho \alpha_1 \alpha_2 \left(C_1 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_2 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) + C_2 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_1 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) \right) \\ & - \varepsilon_u (Y_1 - \alpha_1) \left(\alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.10.5)$$

On peut réécrire l'équation d'énergie (5.10.4) sous la forme

$$m (h_1 - h_2) (Y_1 - Y_{1,R}) = m (e - e_R) + pu - p_R u_R \quad (5.11)$$

La recherche de solutions de type ondes progressives revient donc à résoudre le système algébrique différentiel suivant

$$\rho(u - u_s) = \rho_R(u_R - u_s) = m \quad (5.12.1)$$

$$mu + p = mu_R + p_R \quad (5.12.2)$$

$$m(h_1 - h_2)(Y_1 - Y_{1,R}) = m(e - e_R) + pu - p_R u_R \quad (5.12.3)$$

$$\varepsilon_u Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} = -m(Y_1 - Y_{1,R}) \quad (5.12.4)$$

$$\begin{aligned} \rho(u - u_s)(\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1) \frac{d\alpha_1}{d\xi} + \rho\alpha_1\alpha_2(C_1 - C_2) \frac{du}{d\xi} = \\ \varepsilon_u (Y_1\alpha_1 C_2 - Y_2\alpha_2 C_1)(Y_1 - \alpha_1) \frac{dp}{d\xi} \frac{d\alpha_1}{d\xi} \\ - \varepsilon_u \rho\alpha_1\alpha_2 \left(C_1 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_2 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) + C_2 \frac{d}{d\xi} \left(\left(Y_1 \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} \right) \right) \right) \\ - \varepsilon_u (Y_1 - \alpha_1) \left(\alpha_1\alpha_2 + \left(\frac{\alpha_1 Y_1}{\rho_2 \kappa_2} - \frac{\alpha_2 Y_2}{\rho_1 \kappa_1} \right) (Y_1 - \alpha_1) \right) \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.12.5)$$

5.3.2 Structure du choc

Le système (5.12) est résolu numériquement en utilisant le solveur d'équations différentielles ordinaires de Maple [86], afin d'étudier la structure du choc pour un mélange de gaz. On utilise pour cela la méthode de Rosenbrock au troisième ordre. Les données initiales du problème sont l'état à droite du choc ainsi que la vitesse du choc. Les deux phases sont considérées comme des gaz parfaits. Nous effectuons un cas-test avec deux gaz parfaits, où $\gamma_1 = 1.5$ et $\gamma_2 = 2.0$. L'état de droite est donné par

$$\begin{aligned} \rho_R &= 5 \text{ kg.m}^{-1} \\ u_R &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\ p_R &= 10^5 \text{ Pa} \\ \alpha_{1,R} &= 0.5 \\ Y_{1,R} &= 0.1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

La vitesse du choc est de $u_s = 714.1987 \text{ m.s}^{-1}$ et le temps de relaxation des vitesses $\varepsilon_u = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Ce dernier est arbitraire et n'a un effet que sur l'épaisseur de la zone de choc. Afin d'obtenir la structure du choc, la solution initiale doit être perturbée. Ceci est fait en modifiant le gradient de pression à droite, qui est fixée initialement à $\frac{dp}{d\xi} = 5 \cdot 10^{-7}$ au lieu de 0. Les résultats sur la fraction volumique, la fraction massique et la pression sont présentées sur la Figure 5.1, et montrent que non seulement la fraction volumique α_1 , mais aussi la fraction massique Y_1 varient dans la zone de choc. Cette variation de la fraction massique ne peut être obtenue sans les termes dissipatifs. Les résultats de la résolution numérique des équations différentielles ordinaires sont comparés avec le schéma numérique de type volumes finis développé au chapitre 4 ; pour réaliser ce calcul, nous n'avons pas tenu compte du fait que nous avons des ondes progressives, et nous avons utilisé le schéma de calcul présenté dans le paragraphe 4.3. Pour cette simulation, nous ne prenons pas la vitesse du choc comme donnée initiale, mais la vitesse du mélange à gauche de ce choc, fixée à 500 m.s^{-1} pour obtenir le même cas-test. Ces résultats sont aussi présentés sur la Figure 5.1. Les deux méthodes donnent des résultats en très bon

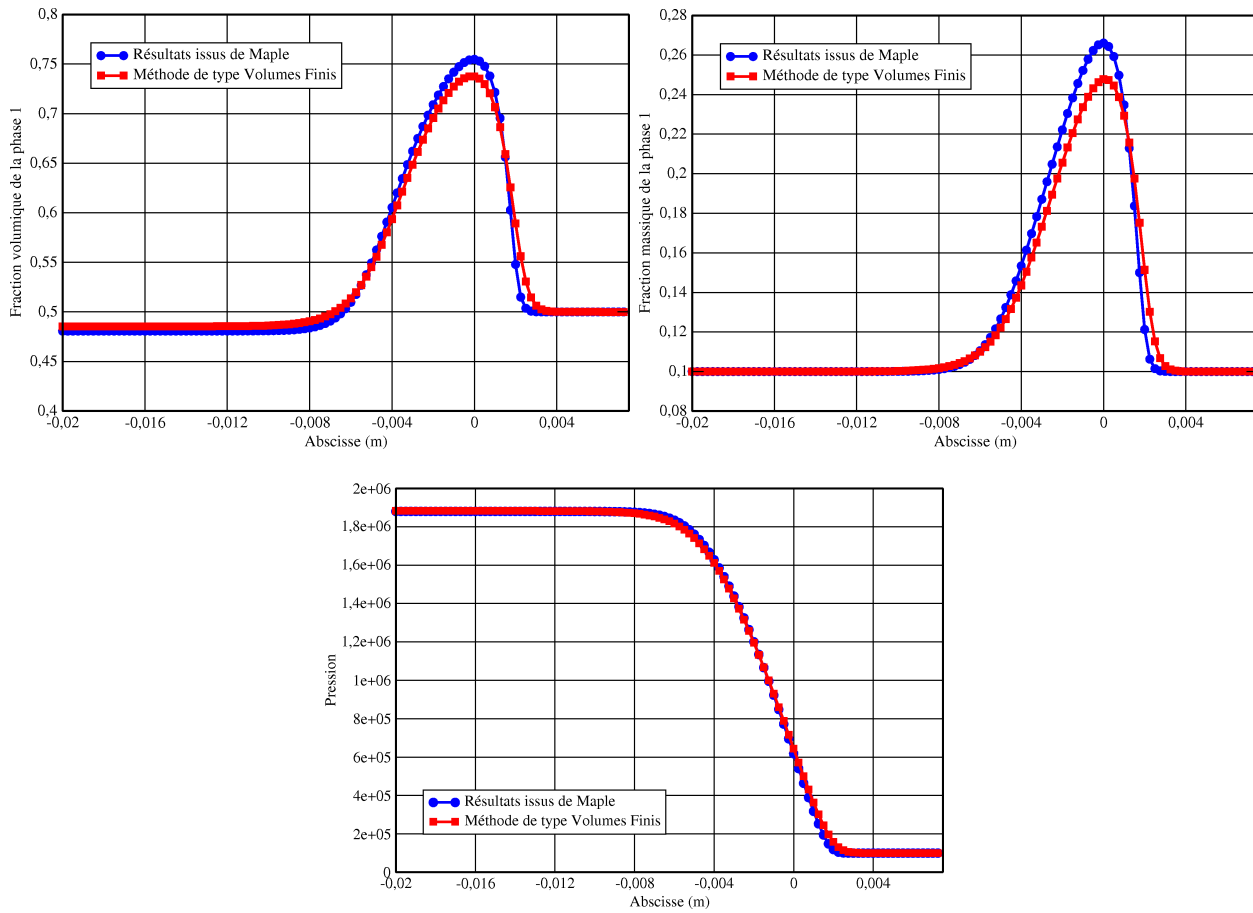


FIG. 5.1 – Résolution numérique des équations (5.12) avec Maple [86] et avec un schéma numérique de type volumes finis.

accord lorsque l'on regarde l'évolution des variables dans la zone de choc. La taille de la zone de choc de longueur est très proche pour les deux résultats. Remarquons néanmoins que les variations de la fraction volumique et de la fraction massique sont un peu plus faibles lorsque l'on regarde les résultats de la méthode de type volumes finis. Les variables après le passage du choc sont aussi très proches, comme le montre la Table 5.1. Ceci valide donc notre méthode numérique. On remarque également sur cette table que le modèle à deux vitesses et deux pressions, avec les temps de relaxation $\varepsilon_u = 2.0 \cdot 10^{-5}$ s et $\varepsilon_p = 1.0 \cdot 10^{-8}$ s, donne aussi des résultats très proches.

Comparons maintenant les résultats de notre modèle avec ceux fournis par les différentes méthodes de fermeture des relations de Rankine-Hugoniot. Ces résultats sont présentés dans la Table 5.2. La fermeture proposée par Saurel [80] donne des résultats en bon accord avec nos résultats numériques, avec toutefois un écart en ce qui concerne la fraction volumique. L'hypothèse $T_{1,L} = T_{2,L}$ fournit également des résultats en bon accord avec nos résultats ; rappelons que cette fermeture est issue de la modélisation de chocs pour des mélanges gazeux. Les résultats obtenus avec des hypothèses d'une entropie phasique constante sont quant à eux assez éloignés des autres résultats, et également entre eux. Enfin l'hypothèse de la fraction entropique constante fournit également d'assez bons résultats, sauf en ce qui concerne la fraction volumique, où une grande disparité est observée entre les différents modèles.

Cependant, puisque à notre connaissance il n'y a pas de données expérimentales disponibles pour

	Modèle dissipatif à cinq équations, solveur d'EDO	Modèle dissipatif à cinq équations, volumes finis	Modèle à sept équations, volumes finis
ρ	16.55	16.64	16.79
u	498.4	499.4	499.4
u_s	714.2	714.2	711.8
p	$1.880 \cdot 10^6$	$1.885 \cdot 10^6$	$1.883 \cdot 10^6$
α_1	0.4807	0.4851	0.4943
Y_1	0.1000	0.1000	0.1000

TAB. 5.1 – Variables d'état après un choc : résultats numériques obtenus avec le modèle dissipatif à cinq équations et le modèle à sept équations.

	Relation sur les énergies internes	$T_1 = T_2$	s_1 constante	s_2 constante	$\frac{s_1}{s_2}$ constante
ρ	15.82	16.72	14.15	17.60	17.71
u	488.0	500.6	461.8	511.3	512.5
p	$1.844 \cdot 10^6$	$1.888 \cdot 10^6$	$1.749 \cdot 10^6$	$1.926 \cdot 10^6$	$1.930 \cdot 10^6$
α_1	0.3987	0.5000	0.2100	0.5990	0.6118
Y_1	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

TAB. 5.2 – Comparaison entre la résolution numérique des équations (5.12), et les modèles de fermeture des relations de Rankine-Hugoniot : variables d'état après le passage d'un choc dans un mélange de gaz parfaits.

valider nos résultats avec des mélanges gazeux, nous ne concluons pas sur ce cas-test et utiliserons la propagation de chocs dans des alliages solides pour la validation.

5.4 Validation des modèles

Pour valider les résultats de notre modèle à cinq équations dissipatif ainsi que les différentes fermetures pour les relations de Rankine-Hugoniot, plusieurs cas-tests de Hugoniot ont été réalisés, où un piston frappe sur un mélange diphasique. De nombreuses données expérimentales sont disponibles [63, 11] et ont déjà été utilisées pour valider la fermeture (5.8) dans [80].

Pour tous ces tests, le temps de relaxation des vitesses est fixé arbitrairement à $\varepsilon_u = 10^{-7}$ s. En effet, le modèle (1.63) n'est valable que pour les écoulements à bulles, et nous n'avons pas trouvé d'expression permettant de modéliser le coefficient de traînée présent dans le modèle (1.64). Les simulations numériques sont effectuées sur un maillage de 2000 nœuds sur l'intervalle $x \in [0, 0.1]$. Le nombre de CFL est égal à 0.8 sauf aux premières itérations où il vaut $0.005n$, avec n le nombre d'itérations, pour éviter les instabilités numériques à cause de la discontinuité initiale des vitesses. En effet, la vitesse initiale du mélange est $u = 0$ m.s⁻¹ alors que la vitesse au bord du domaine est très grande, afin de simuler l'impact du piston.

Pour les simulations numériques, toutes les phases sont gouvernées par des lois d'état de type gaz raide ; les coefficients thermodynamiques sont issus de [80]. Cependant l'entropie de référence $s_{k,0}$ et la chaleur massique à volume constant C_{v_k} ne sont pas connues. Pour les différents cas-tests, on suppose que $s_{k,0} = 0$ J.K⁻¹ et que les données initiales sont données pour des températures $T = 293.15$ K, ce qui permet de retrouver les C_{v_k} .

5.4.1 Mélange époxy-spinel

Notre premier cas-test est un mélange époxy-spinel, avec les conditions initiales données par [63]

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1185 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_2 &= 3622 \text{ kg.m}^{-3} \\ u &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\ p &= 10^5 \text{ Pa} \\ \alpha_1 &= 0.595 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Les chaleurs adiabatiques à volume constant peuvent être calculées en supposant que ces valeurs sont données pour $T = 293.15$ K. Les coefficients thermodynamiques de chaque phase sont alors les suivants

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2.43 & p_{1,\infty} &= 5.3 \cdot 10^9 \text{ Pa} & C_{v_1} &= 1.07 \cdot 10^4 \text{ J.K}^{-1} \\ \gamma_2 &= 1.62 & p_{2,\infty} &= 1.41 \cdot 10^{11} \text{ Pa} & C_{v_2} &= 2.14 \cdot 10^5 \text{ J.K}^{-1} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Nous comparons les données expérimentales avec les résultats fournis par les différentes fermetures des équations de Rankine-Hugoniot et les résultats numériques du modèle dissipatif à cinq équations. Les résultats sont présentés dans la Figure 5.2.

Pour ce cas-test, les résultats obtenus par le modèle dissipatif (4.1) fournissent le meilleur accord avec l'expérience. Les résultats des fermetures sur les énergies phasiques et sur entropie phasique constante pour le spinel donnent aussi de bons résultats, même si une divergence par rapport aux données expérimentales peut être remarquée pour les plus grandes vitesses du piston. L'hypothèse d'une entropie constante de l'époxy, ainsi que celle d'un rapport des entropies phasiques constantes,

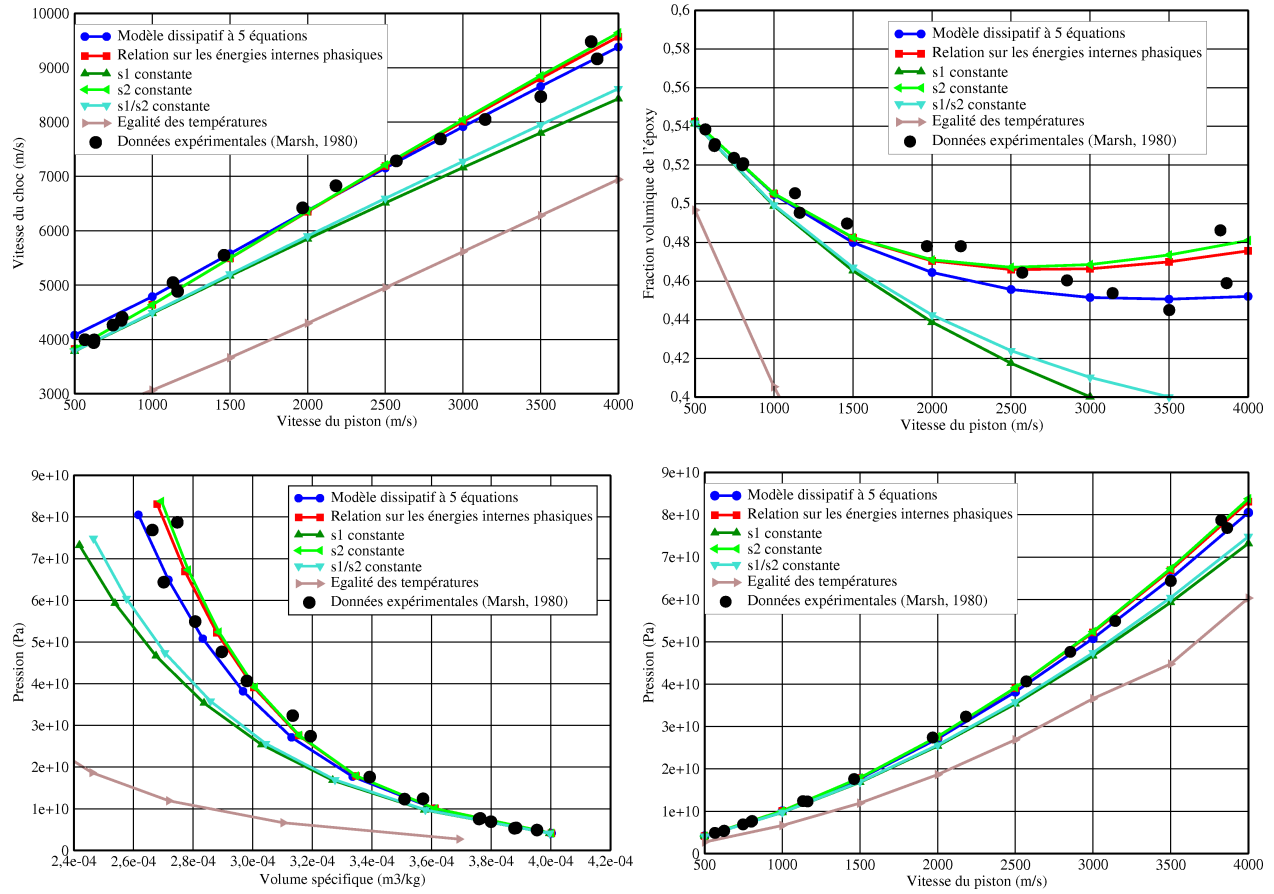


FIG. 5.2 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-spinel : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et les fermetures des relations de Rankine-Hugoniot.

fournissent quant à elles des résultats assez éloignés des données expérimentales, notamment pour les chocs forts. Enfin, l'hypothèse d'une égalité des températures phasiques après le choc donne des résultats très éloignés des expériences. Ceci est tout à fait en accord avec l'estimation des temps de relaxation donnés au chapitre 1 : contrairement au cas des écoulements à bulles, les écoulements dans les alliages solides sous chocs forts sont en déséquilibre thermique. Cette hypothèse est donc abandonnée pour les cas suivants.

5.4.2 Mélange uranium-molybdène

Le problème de Hugoniot est maintenant reproduit pour un mélange uranium-molybdène, pour lequel les données initiales sont les suivantes [63]

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 18930 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \rho_2 &= 10208 \text{ kg.m}^{-3} \\
 u &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\
 p &= 10^5 \text{ Pa} \\
 \alpha_1 &= 0.814
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Les deux phases sont gouvernées par les équations d'état de type gaz raide, avec les coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 3.17 & p_{1,\infty} &= 4.042 \cdot 10^{10} \text{ Pa} & C_{v1} &= 3.36 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \\
 \gamma_2 &= 2.98 & p_{2,\infty} &= 9.332 \cdot 10^{10} \text{ Pa} & C_{v2} &= 1.58 \cdot 10^4 \text{ J.K}^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

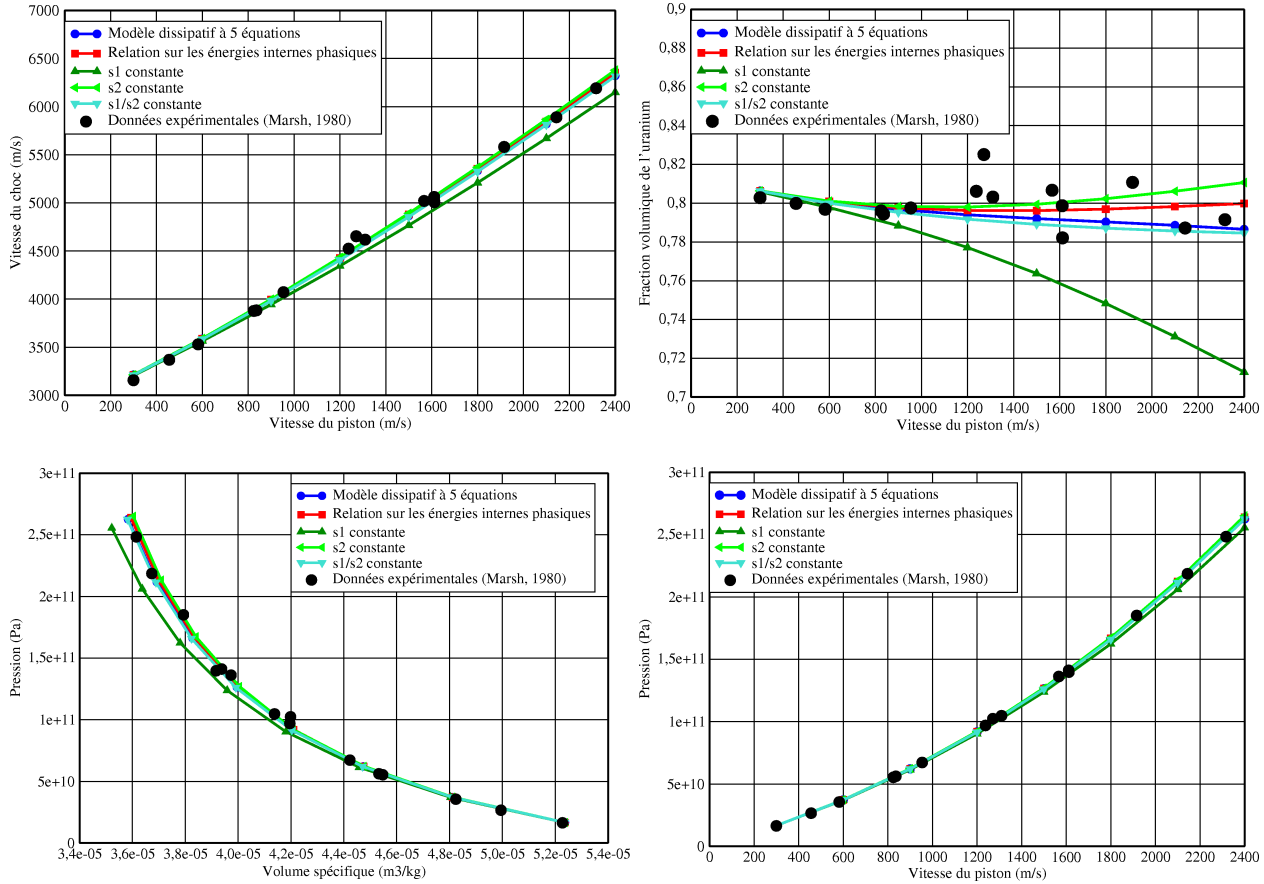


FIG. 5.3 – Problème d'Hugoniot pour un mélange uranium-molybdène : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et les fermetures des relations de Rankine-Hugoniot.

La Figure 5.3 montre que l'hypothèse $s_{1,L} = s_{1,R}$ propose à nouveau des résultats numériques bien différents des données expérimentales. Ce cas-test permet d'éliminer cette fermeture, qui ne sera plus utilisée dans la suite. Les autres modèles donnent des résultats proches les uns des autres et en accord avec les données expérimentales, sans qu'il soit possible de déterminer le meilleur modèle parmi ceux que nous avons étudiés.

5.4.3 Mélange époxy-enstatite

Comme nous avons pu le voir avec les résultats précédents, la fermeture proposée par Dremine et Karpukhin [23] et Saurel *et al.* [80] donne les résultats les plus proches des données expérimentales, avec des résultats comparables à ceux du modèle dissipatif à cinq équations. Dans les deux cas précédents l'hypothèse $s_{2,L} = s_{2,R}$ donne des résultats en bon accord avec les données expérimentales, l'indice 2 se référant au matériau qui a la pression de cohésion p_∞ la plus élevée. Cependant, cette expression n'est pas symétrique par rapport aux deux phases. Dans la suite de ce chapitre, cette hypothèse sera donc abandonnée et nous confronterons les résultats obtenus par les solutions du modèle (4.1) avec ceux proposés par la solution (5.8). Pour ce nouveau cas-test, on considère un mélange époxy-enstatite, avec les conditions initiales suivantes [63]

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 1185 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_2 &= 3007 \text{ kg.m}^{-3} \\ u &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\ p &= 10^5 \text{ Pa} \\ \alpha_1 &= 0.54\end{aligned}\tag{5.18}$$

Les deux phases sont gouvernées par des équations de type gaz raide, avec les propriétés thermodynamiques suivantes

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 2.43 \quad p_{1,\infty} = 5.3 \cdot 10^9 \text{ Pa} \\ \gamma_2 &= 2.14 \quad p_{2,\infty} = 4.06 \cdot 10^{10} \text{ Pa}\end{aligned}\tag{5.19}$$

La Figure 5.4 montre que les deux modèles sont à nouveau en très bon accord avec les données expérimentales. La seule véritable différence est visible lorsque l'on regarde la fraction volumique de l'époxy, où le modèle proposé par Saurel *et al.* [80] donne des résultats plus proches des résultats expérimentaux que le modèle dissipatif.

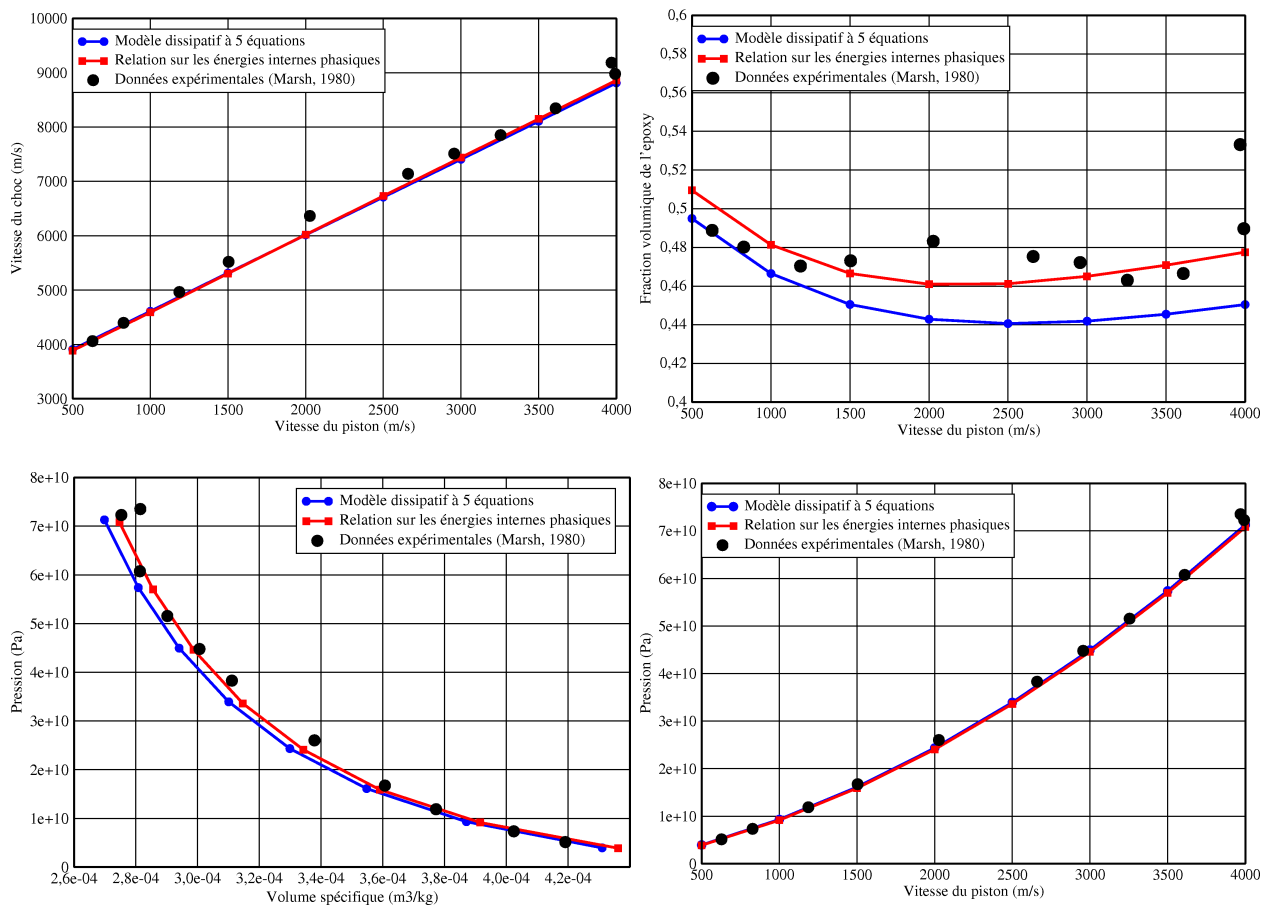


FIG. 5.4 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-enstatite : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et la fermeture des relations de Rankine-Hugoniot [80].

5.4.4 Mélange époxy-périclase

Finalement, une simulation sur un mélange époxy-périclase est réalisée, avec pour conditions initiales [63]

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= 1185 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \rho_2 &= 3584 \text{ kg.m}^{-3} \\
 u &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\
 p &= 10^5 \text{ Pa} \\
 \alpha_1 &= 0.569
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Les deux phases sont gouvernées par les équations de type gaz raide, avec les paramètres

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 2.43 & p_{1,\infty} &= 5.3 \cdot 10^9 \text{ Pa} \\
 \gamma_2 &= 3.49 & p_{2,\infty} &= 4.57 \cdot 10^{10} \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Les résultats fournis par les deux méthodes donnent des résultats très proches des données expérimentales lorsque l'on regarde la pression et la vitesse de propagation du choc, comme le montre la Figure 5.5. En ce qui concerne la fraction volumique, les résultats des simulations sont en assez bon accord avec les expériences, et ceux-ci ne permettent pas de conclure sur le modèle donnant les meilleurs résultats.

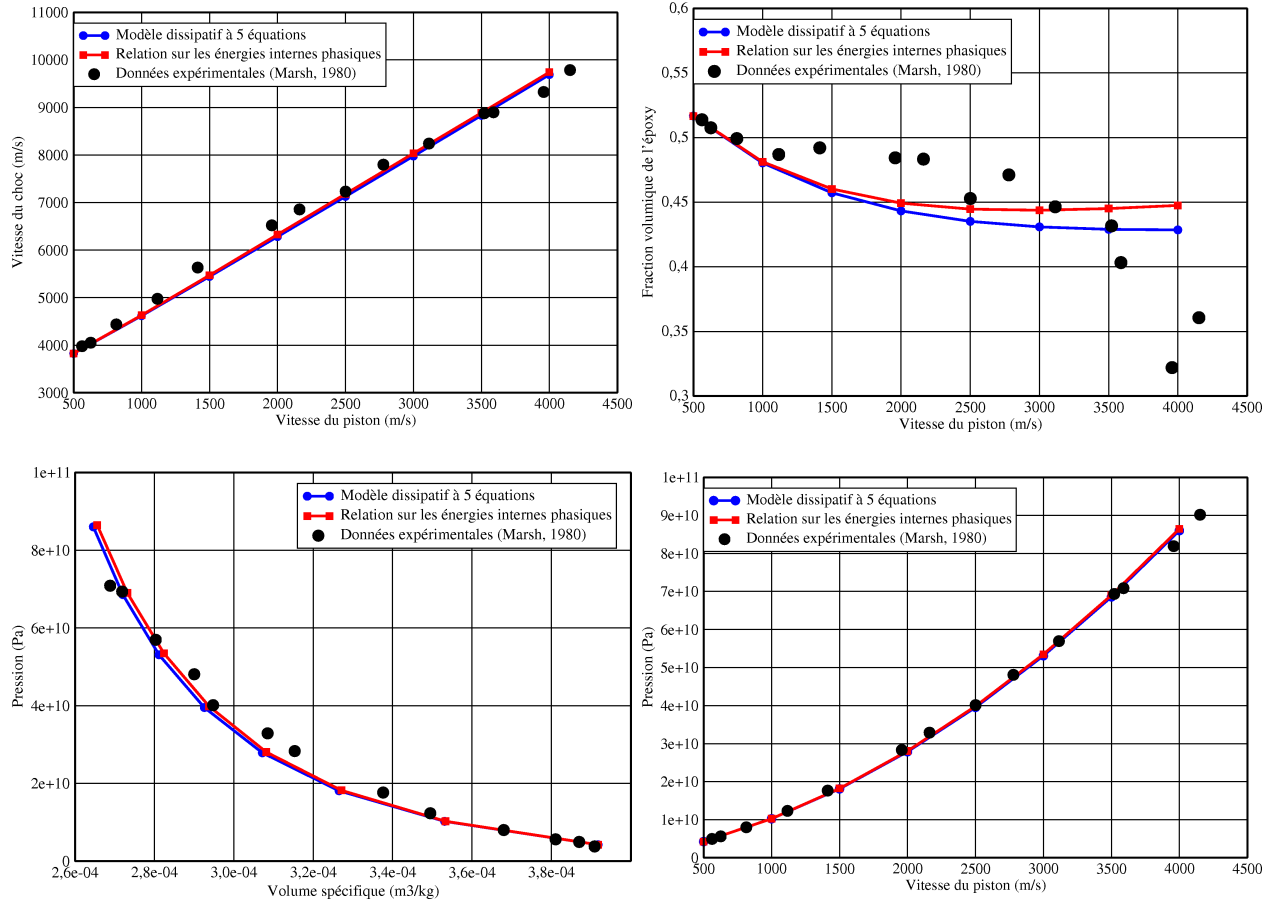


FIG. 5.5 – Problème d'Hugoniot pour un mélange époxy-périclase : Comparaison entre le modèle dissipatif à cinq équations et la fermeture des relations de Rankine-Hugoniot [80].

5.5 Conclusion

La comparaison des résultats obtenus avec les relations de saut de Rankine-Hugoniot, associées à différents modèles de fermeture, avec des résultats expérimentaux et des simulations utilisant le modèle dissipatif à cinq équations nous permet de conclure sur la très bonne qualité de la fermeture proposée par Dremine et Karpukhin [23] et reprise par Saurel *et al.* [80], qui donne les résultats les plus proches des données expérimentales pour une grande variété de matériaux.

En revanche, il n'est pas possible de déterminer la meilleure modélisation entre ce modèle et le modèle dissipatif à cinq équations à partir de ces expériences numériques. Chaque modèle donne des résultats très proches des expériences en ce qui concerne la pression, le volume spécifique et la vitesse de propagation du choc dans les alliages, et un assez bon accord en ce qui concerne les fractions volumiques. Ceci permet néanmoins de valider ces deux modèles pour l'étude de la propagation des chocs dans des alliages solides.

Chapitre 6

Écoulements diphasiques multidimensionnels

Sommaire

6.1	Schémas numériques	151
6.1.1	Modèle à deux vitesses et deux pressions	151
6.1.2	Modèle dissipatif à une vitesse et une pression	153
6.1.3	Relaxation des températures	157
6.2	Résultats numériques	158
6.2.1	Interaction choc-bulle	158
6.2.2	Chute d'une goutte	162
6.2.3	Écoulement dans un tuyau avec une contraction et une expansion	165
6.3	Conclusion	170

Les calculs numériques des chapitres précédents ont été effectués pour des cas-tests à une dimension. On souhaite désormais utiliser les différents modèles développés pour des simulations multidimensionnelles, afin de pouvoir comparer les différentes approches sur des cas-tests plus élaborés. Contrairement au chapitre précédent où les matériaux étaient en fort déséquilibre thermique, les calculs présentés dans ce chapitre seront réalisés avec des matériaux et des conditions initiales tels que les temps de relaxation des vitesses et des températures ont le même ordre de grandeur.

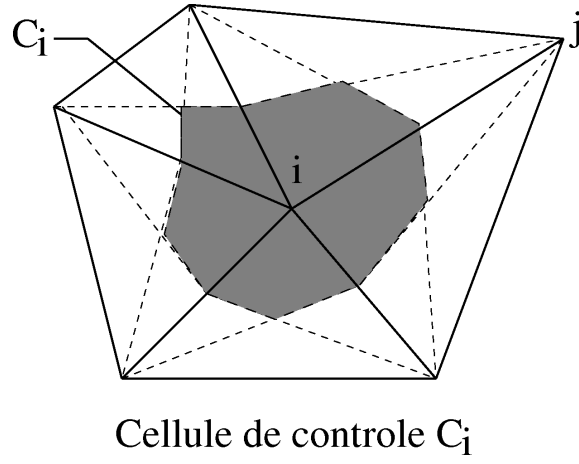
Nous utiliserons dans ce chapitre le programme massivement parallèle NUM3SIS [50] développé au sein du projet SMASH de l'INRIA pour la simulation d'écoulements en trois dimensions. Des schémas numériques adaptés aux écoulements tridimensionnels seront donc présentés pour le modèle à deux vitesses et deux pressions et le modèle dissipatif à une vitesse et une pression, puis différents cas-tests seront proposés, où les différents modèles diphasiques pourront être comparés.

6.1 Schémas numériques

Les méthodes numériques sont implémentées pour une utilisation sur un maillage de type "cell-vertex" : les cellules C_i sont construites autour de chaque nœud i du maillage, comme nous le voyons sur la Figure 6.1, et les variables d'état sont stockées pour ces nœuds.

6.1.1 Modèle à deux vitesses et deux pressions

Le schéma numérique présenté dans le paragraphe 3.3 est réutilisé, avec notamment une méthode à pas fractionnaires pour la résolution des relaxations des pressions et des vitesses.

FIG. 6.1 – Cellule du maillage C_i construite autour du nœud i .

Pas hyperbolique

Le système hyperbolique du modèle à deux vitesses et deux pressions s'écrit

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{F}(\underline{U}) + \underline{H}(\underline{U}) \nabla \alpha_1 = 0 \quad (6.1)$$

où $\underline{U}$, $\underline{F}(\underline{U})$ et $\underline{H}(\underline{U})$ s'expriment de la manière suivante

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \\ \alpha_1 \rho_1 e_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \\ \alpha_2 \rho_2 e_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \underline{F}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \\ \alpha_1 \rho_1 \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1 + \alpha_1 p_1 \\ \alpha_1 (\rho_1 e_1 + p_1) \underline{u}_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \\ \alpha_2 \rho_2 \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2 + \alpha_2 p_2 \\ \alpha_2 (\rho_2 e_2 + p_2) \underline{u}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{H}(\underline{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_I \\ -p_I \underline{u}_I \\ 0 \\ p_I \\ p_I \underline{u}_I \\ \underline{u}_I \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Pour chaque cellule du maillage C_i , ce système d'équations est intégré, ce qui donne

$$V_i \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \iint_{\partial C_i} \underline{F}(\underline{U}) \cdot \underline{n} \, dl + \iiint_{C_i} \underline{H}(\underline{U}) \nabla \alpha_1 \, d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

où V_i est le volume de la cellule C_i et ∂C_i sa surface. Cette équation peut alors être discrétisée de la manière suivante, en considérant que les variables d'état sont constantes à l'intérieur de la cellule

$$V_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} (\underline{F}(\underline{U}_{ij}^*(U_i^n, U_j^n)) \cdot \underline{n}_{ij} + \underline{H}(U_i^n) \alpha_{ij}^*(U_i^n, U_j^n) \underline{n}_{ij}) \quad (6.4)$$

où $v(i)$ représente l'ensemble des cellules ayant une face commune avec C_i , et $\underline{n}_{ij} = \iint_{\partial C_i \cap \partial C_j} \underline{n} \, dl$ est le vecteur moyen normal à l'interface $\partial C_i \cap \partial C_j$, orienté de i vers j et dont la norme est égale à l'aire de cette interface. Le vecteur d'état $\underline{U}_{ij}^*$ représente le vecteur à l'interface entre les cellules i et j , et se calcule en utilisant le solveur de Riemann présenté dans le paragraphe 3.3. On utilise en effet le solveur unidimensionnel, en calculant ce vecteur à partir des vecteurs $\bar{U}_i$ et $\bar{U}_j$, donnés par

$$\bar{U}_i = \begin{pmatrix} (\alpha_1 \rho_1)_i \\ (\underline{u}_1)_i \cdot \underline{\eta}_{i,j} \\ (p_1)_i \\ (\alpha_2 \rho_2)_i \\ (\underline{u}_2)_i \cdot \underline{\eta}_{i,j} \\ (p_2)_i \\ (\alpha_1)_i \end{pmatrix} \quad \bar{U}_j = \begin{pmatrix} (\alpha_1 \rho_1)_j \\ (\underline{u}_1)_j \cdot \underline{\eta}_{i,j} \\ (p_1)_j \\ (\alpha_2 \rho_2)_j \\ (\underline{u}_2)_j \cdot \underline{\eta}_{i,j} \\ (p_2)_j \\ (\alpha_1)_j \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

avec $\underline{\eta}_{i,j} = \frac{\underline{n}_{ij}}{||\underline{n}_{ij}||}$. Le vecteur d'état de la cellule C_i peut alors être calculé au nouveau pas de temps en utilisant l'équation

$$\underline{U}_i^{n+1} = \underline{U}_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in v(i)} ||\underline{n}_{ij}|| \underline{F}_{i,j} (\underline{U}_{i,j}^* (\bar{U}_i^n, \bar{U}_j^n)) + \frac{\Delta t}{V_i} ||\underline{n}_{ij}|| \underline{H}_i (\underline{U}_i^n) (\alpha_1)_{i,j}^* \quad (6.6)$$

avec les vecteurs $\underline{F}_{i,j}$ et $\underline{H}_i$ qui s'écrivent

$$\underline{F}_{i,j} (\underline{U}_{i,j}^* (\bar{U}_i^n, \bar{U}_j^n)) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 \rho_1)^* \underline{u}_1^* \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\alpha_1 \rho_1)^* (\underline{u}_1^* \otimes \underline{u}_1^*) \underline{n}_{ij} + p_1^* \underline{n}_{ij} \\ \alpha_1^* (e_1^* + p_1^*) \underline{u}_1^* \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\alpha_2 \rho_2)^* \underline{u}_2^* \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\alpha_2 \rho_2)^* (\underline{u}_2^* \otimes \underline{u}_2^*) \underline{n}_{ij} + p_2^* \underline{n}_{ij} \\ \alpha_2^* (e_2^* + p_2^*) \underline{u}_2^* \cdot \underline{n}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$\underline{H}_i (\underline{U}_i^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(p_I)_i \\ -(p_I)_i (\underline{u}_I)_i \\ 0 \\ (p_I)_i \\ (p_I)_i (\underline{u}_I)_i \\ (\underline{u}_I)_i \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Relaxation des pressions et des vitesses

Comme nous avons pu le voir dans les paragraphes 3.4.3 et 3.4.2, les relaxations des pressions et des vitesses s'effectuent au moyen de méthodes locales. Les différentes méthodes présentées au chapitre 3 sont donc réutilisées dans le cas multidimensionnel.

6.1.2 Modèle dissipatif à une vitesse et une pression

La méthode développée au chapitre 4 pour la résolution numérique du modèle dissipatif à cinq équations est reprise et adaptée au cas tridimensionnel.

Pas hyperbolique

La méthode numérique de type Godunov proposée dans le paragraphe 4.3.2, est adaptée au cas tridimensionnel. Rappelons que, pour éviter les instabilités numériques, l'équation sur la fraction volumique a été réécrite sous la forme

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{u}) - \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (6.9)$$

Le vecteur d'état s'écrit sous la forme conservative $\underline{W} = {}^t(\alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \rho\underline{u}, \rho e, \alpha_1)$. Nous réutilisons le solveur de Riemann unidimensionnel du paragraphe 4.3.2 pour calculer l'état à l'interface entre les cellules C_i et C_j . Le vecteur d'état à l'interface est noté $\underline{W}^*$ ($\bar{W}_i, \bar{W}_j$), avec

$$\bar{W}_i = \begin{pmatrix} (\alpha_1\rho_1)_i \\ (\alpha_2\rho_2)_i \\ (\underline{u})_i \cdot \underline{n}_{i,j} \\ (p)_i \\ (\alpha_1)_i \end{pmatrix} \quad \bar{W}_j = \begin{pmatrix} (\alpha_1\rho_1)_j \\ (\alpha_2\rho_2)_j \\ (\underline{u})_j \cdot \underline{n}_{i,j} \\ (p)_j \\ (\alpha_1)_j \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Le système à une vitesse et une pression peut être écrit

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{F}(\underline{W}) + \underline{B}(\underline{W}) \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (6.11)$$

avec $\underline{B}(\underline{W}) = {}^t\left(0, 0, 0, 0, -\frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1}\right)$. La partie conservative est intégrée sur chaque cellule C_i du maillage

$$V_i \frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + \iint_{\partial C_i} \underline{F}(\underline{W}) \cdot \underline{n} dl = 0 \quad (6.12)$$

où V_i est le volume de la cellule C_i . Le vecteur d'état $\underline{W}_i^{n+1,c}$, qui représente l'état au temps $n+1$ après le pas convectif et avant le pas dissipatif, est calculé de la manière suivante

$$V_i \frac{\underline{W}_i^{n+1,c} - \underline{W}_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in v(i)} \|\underline{n}_{ij}\| \psi(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) = 0 \quad (6.13)$$

où $v(i)$ représente l'ensemble des cellules ayant une face commune avec C_i , et $\underline{n}_{ij} = \iint_{\partial C_i \cap \partial C_j} \underline{n} dl$ est le vecteur moyen normal à l'interface $\partial C_i \cap \partial C_j$. En introduisant $\underline{\eta}_{ij} = \underline{n}_{ij} / \|\underline{n}_{ij}\|$, on propose l'expression suivante pour la fonction $\psi(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n)$ par

$$\psi(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n) = \underline{F}(\underline{W}_{ij}^*) \cdot \underline{\eta}_{ij} \quad (6.14)$$

où $\underline{W}_{ij}^*$ est la solution du problème de Riemann linéarisé entre les états $\underline{W}_i$ et $\underline{W}_j$. La partie conservative $\underline{F}(\underline{W}_{ij}^*) \cdot \underline{\eta}_{ij}$ peut être exprimé comme suit, en notant u_n la composante de la vitesse normale à l'interface entre les cellules i et j

$$\underline{F}(\underline{W}_{ij}^*) \cdot \underline{\eta}_{ij} = \begin{pmatrix} (\alpha_1\rho_1 u_n)_{ij}^* \\ (\alpha_2\rho_2 u_n)_{ij}^* \\ (\rho\underline{u}u_n)_{ij}^* + p\underline{\eta}_{ij} \\ ((\rho e + p)u_n)_{ij}^* \\ (\alpha_1)_{ij}^* \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

La partie non conservative $\underline{B}(\underline{W}) \operatorname{div} \underline{u}$ est prise en compte en utilisant un schéma semi-implicite. Ceci permet d'assurer la positivité de la fraction volumique. Si l'on note $\underline{W}_i^{n+1,c}$ le résultat de la résolution numérique de la partie conservative, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \operatorname{div} \underline{u} \quad (6.16)$$

est approchée par l'équation suivante

$$\frac{(\alpha_1)_i^{n+1} - (\alpha_1)_i^{n+1,c}}{\Delta t} = \frac{(\alpha_1)_i^{n+1} C_2(\underline{W}_i^{n+1})}{(\alpha_1)_i^{n+1} C_2(\underline{W}_i^{n+1}) + \left(1 - (\alpha_1)_i^{n+1}\right) C_1(\underline{W}_i^{n+1})} \sum_{j \in v(i)} \underline{u}_{ij}^* \cdot \underline{n}_{ij} \quad (6.17)$$

et nous trouvons les fractions volumiques $(\alpha_1)_i^{n+1}$ en utilisant un algorithme de Newton.

Pas d'advection dissipative

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \varepsilon_u \frac{Y_2 \alpha_2 C_1 - Y_1 \alpha_1 C_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p \cdot \nabla \alpha_1 = 0 \quad (6.18)$$

Un schéma explicite est utilisé pour résoudre cette équation. Pour chaque cellule C_i , nous discrétisons cette équation de la manière suivante, en utilisant les exposants h pour noter les variables issues du pas hyperbolique et a les variables issues de ce pas d'advection

$$V_i \frac{(\alpha_1)_i^a - (\alpha_1)_i^h}{\Delta t} + \varepsilon_u \frac{(Y_2)_i^h (\alpha_2)_i^h (C_1)_i^h - (Y_1)_i^h (\alpha_1)_i^h (C_2)_i^h}{(\alpha_2)_i^h (C_1)_i^h + (\alpha_2)_i^h (C_2)_i^h} \frac{(Y_1)_i^h - (\alpha_1)_i^h}{(\rho)_i^h} (\nabla p)_i^h \cdot (\nabla \alpha_1)_i^h = 0 \quad (6.19)$$

Pour calculer les gradients $(\nabla \phi)_i^h$, on évalue les gradients de ϕ sur chaque élément de maillage en contact avec le nœud i , en utilisant les gradients de fonctions de bases des éléments finis. Une moyenne pondérée de ces gradients permet alors d'obtenir le gradient sur la cellule C_i .

Pas de traitement du terme source dissipatif

L'équation suivante doit être résolue

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)} (\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 Y_1 (\gamma_2 - 1) - \alpha_2 Y_2 (\gamma_1 - 1)) (Y_1 - \alpha_1)) \|\nabla p\|^2 \quad (6.20)$$

On utilise le même schéma numérique que dans le chapitre 4 : cette équation est discrétisée sous la forme suivante, en notant les variables issues du pas d'advection dissipatif avec l'exposant a et celles issues du pas de traitement du terme source dissipatif avec l'exposant s

$$V_i \frac{\alpha_i^s - \alpha_i^a}{\Delta t} = -\varepsilon_u \frac{(Y_i^a - \alpha_i^s) (\alpha_i^s (1 - \alpha_i^s) + (\alpha_i^s Y_i^a (\gamma_2 - 1) - (1 - \alpha_i^s) (1 - Y_i^a) (\gamma_1 - 1)) (Y_i^a - \alpha_i^s))}{\rho_i^a (\alpha_i^a C_{2i}^a + (1 - \alpha_i^a) C_{1i}^a)} \|\nabla p\|_i^a \quad (6.21)$$

Nous utilisons une méthode de Newton pour résoudre cette équation. Cette méthode, utilisée en choisissant le point de départ des itérations comme décrit dans l'annexe C, permet d'assurer la stabilité de ce pas.

Pas de convection dissipative

Finalement, le système d'équations suivant doit être résolu

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} (Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \nabla p) = 0 \quad (6.22.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho} \operatorname{div} ((h_1 - h_2) Y_1 Y_2 (Y_1 - \alpha_1) \nabla p) = 0 \quad (6.22.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \varepsilon_u \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \left(C_1 \operatorname{div} \left(Y_2 \frac{(Y_1 - \alpha_1)}{\rho} \nabla p \right) + C_2 \operatorname{div} \left(Y_1 \frac{(Y_1 - \alpha_1)}{\rho} \nabla p \right) \right) = 0 \quad (6.22.3)$$

Ce système est discrétisé de la même manière que celle proposée dans le chapitre 4. On écrit cette discrétisation en notant les variables issues de ce pas de convection dissipative avec l'exposant c .

$$V_i \frac{(Y_1)_i^c - (Y_1)_i^s}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho_i^s} \sum_{j \in v(i)} \rho_{ij}^s g(\underline{W}_i^c, \underline{W}_j^c) = 0 \quad (6.23.1)$$

$$V_i \frac{i_i^c - i_i^s}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_u}{\rho_i^s} \sum_{j \in v(i)} (h_{1ij}^c - h_{2ij}^c) \rho_{ij}^s g(\underline{W}_i^c, \underline{W}_j^c) = 0 \quad (6.23.2)$$

$$V_i \frac{(\alpha_1)_i^c - (\alpha_1)_i^s}{\Delta t} + \varepsilon_u \frac{(\alpha_1)_i^c (1 - (\alpha_1)_i^c)}{(\alpha_1)_i^c C_{2i}^c + (\alpha_2)_i^c C_{1i}^c} \left(C_{1i}^c \sum_{j \in v(i)} (Y_2)_{ij}^c a_{r_{ij}}^c - C_{2i}^c \sum_{j \in v(i)} (Y_1)_{ij}^c a_{r_{ij}}^c \right) = 0 \quad (6.23.3)$$

où les variables d'état à l'interface ϕ_{ij} sont égales à $\frac{\phi_i + \phi_j}{2}$, et où nous introduisons les mêmes fonctions que dans le chapitre 4

$$\begin{aligned} a_{r_{ij}}^c &= \frac{(Y_1)_{ij}^c - (\alpha_1)_{ij}^c p_j^c - p_i^c}{\rho_{ij}^s \|l_{ij}\|} \\ g(\underline{W}_i, \underline{W}_j) &= f((Y_1)_i, (Y_1)_j) (a_r)_{ij}^+ + f((Y_1)_j, (Y_1)_i) (a_r)_{ij}^- \\ f(a, b) &= \frac{a(1-a) + b(1-b)}{2} + \frac{1}{2}(a-b) \end{aligned} \quad (6.24)$$

où $\|l_{ij}\|$ représente la norme de l'arête entre les nœuds i et j , et $(a_r)^\pm = \frac{1}{2}(a_r \pm |a_r|)$. Pour résoudre ces équations, une méthode de Newton est utilisée. La résolution du système linéaire que nous obtenons avec cette méthode est effectuée avec une méthode de Jacobi, ce qui permet d'éviter le stockage en mémoire la totalité de la matrice Jacobienne.

6.1.3 Relaxation des températures

Comme précisé en introduction, les temps de relaxation des vitesses et des températures sont du même ordre de grandeur dans les expériences numériques présentées dans ce chapitre. Une méthode de relaxation des températures est donc appliquée pour le modèle (4.1). On s'inspire des méthodes de relaxations du modèle à sept équations pour développer une méthode de relaxation des températures pour le modèle à cinq équations. Une méthode à pas fractionnaires est à nouveau utilisée, et cette relaxation est effectuée après les pas convectif et dissipatif. Selon le modèle (2.93), nous devons résoudre le système d'équations suivant

$$\frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} = 0 \quad (6.25.1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} = 0 \quad (6.25.2)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} = 0 \quad (6.25.3)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = 0 \quad (6.25.4)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1} \left(\frac{\alpha_2}{\rho_1 \kappa_1} + \frac{\alpha_1}{\rho_2 \kappa_2} \right) Q_I \quad (6.25.5)$$

avec $Q_I = \frac{\alpha_1 \rho_1 C_{v1} \alpha_2 \rho_2 C_{v2}}{\alpha_1 \rho_1 C_{v1} + \alpha_2 \rho_2 C_{v2}} \frac{1}{\varepsilon_T} (T_2 - T_1)$. La fraction volumique α_1 est donc la seule variable lors de cette relaxation. L'équation (6.25.5) est discrétisée de la manière suivante, avec l'exposant 0 qui représente les variables issues du pas précédent, et l'exposant * qui représente les variables obtenues par cette relaxation des températures.

$$\frac{\alpha_1^* - \alpha_1^0}{\Delta t} = \frac{(\alpha_1 \rho_1)^0 C_{v1} (\alpha_2 \rho_2)^0 C_{v2}}{(\alpha_1 \rho_1)^0 C_{v1} + (\alpha_2 \rho_2)^0 C_{v2}} \frac{1}{\varepsilon_T} (T_2^* (\alpha_1^*) - T_1^* (\alpha_1^*)) \quad (6.26)$$

Cette équation est résolue avec une méthode de Newton. Remarquons que cette relaxation des pressions a un effet stabilisateur sur la fraction volumique. En effet, si on exprime $T_2 - T_1$ en fonction du vecteur d'état ${}^t(\rho Y_1, \rho Y_2, \rho \underline{u}, \rho e, \alpha_1)$, les équations d'état (2.106) permettent de trouver l'expression

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 = & \frac{\alpha_2}{C_{v2} (\gamma_2 - 1) \rho Y_2} \left(\frac{(\gamma_1 - 1) (\gamma_2 - 1) \rho (i - i_0) - \alpha_1 (\gamma_2 - 1) \gamma_1 p_{1,\infty} - \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \gamma_2 p_{2,\infty}}{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1)} + p_{2,\infty} \right) \\ & - \frac{\alpha_1}{C_{v1} (\gamma_1 - 1) \rho Y_1} \left(\frac{(\gamma_1 - 1) (\gamma_2 - 1) \rho (i - i_0) - \alpha_1 (\gamma_2 - 1) \gamma_1 p_{1,\infty} - \alpha_2 (\gamma_1 - 1) \gamma_2 p_{2,\infty}}{\alpha_1 (\gamma_2 - 1) + \alpha_2 (\gamma_1 - 1)} + p_{1,\infty} \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

On peut alors voir qu'une fraction volumique α_1 proche de 0 entraîne l'inégalité $T_2 - T_1 > 0$, et donc $\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} > 0$. Au contraire, si α_1 est proche de 1, nous aurons $T_2 - T_1 < 0$ et donc la fraction volumique de la phase 1 diminuera.

6.2 Résultats numériques

6.2.1 Interaction choc-bulle

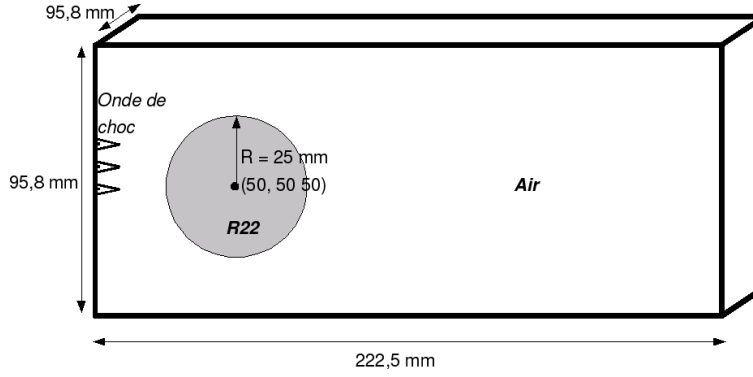


FIG. 6.2 – Interaction choc-bulle : schéma de la géométrie initiale.

Ce premier cas-test a pour objectif de valider les méthodes numériques de résolution des modèles (3.1) et (4.1). Ce type de problème a été présenté dans [94], où un modèle à cinq équations non dissipatif est utilisé. Dans ce cas-test tridimensionnel, nous considérons une bulle de gaz réfrigérant R22 entourée d'air, et nous regardons son comportement sous l'effet du passage d'un choc. Ce cas-test est un problème d'interface, et l'utilisation de modèles ayant des pressions et des vitesses différentes n'est pas justifiée a priori. La géométrie du cas-test est présentée sur la Figure 6.2. Les conditions initiales et les propriétés thermodynamiques des gaz proviennent de [2] ; elles sont données par

$$\begin{aligned}
 \rho_{R22} &= 2.985 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \rho_{air} &= 1.000 \text{ kg.m}^{-3} \\
 u_{R22} &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\
 u_{air} &= 0 \text{ m.s}^{-1} \\
 p_{R22} &= 10^5 \text{ Pa} \\
 p_{air} &= 10^5 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{R22} &= 1.178 & p_{R22,\infty} &= 0 \text{ Pa} \\
 \gamma_{eau} &= 1.4 & p_{air,\infty} &= 0 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

À l'intérieur de la bulle, la fraction volumique du gaz R22 est initialement de $1 - 10^{-6}$, et de 10^{-6} à l'extérieur. La condition au bord à gauche est une condition d'entrée supersonique, et les variables à l'entrée sont les suivantes

$$\begin{aligned}
 \rho_{R22} &= 4.362 \text{ kg.m}^{-3} \\
 \rho_{air} &= 1.376 \text{ kg.m}^{-3} \\
 M &= 0.312 \\
 p &= 1.575 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\
 \alpha_{R22} &= 10^{-6}
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

La condition à droite est une sortie supersonique, et des conditions de symétrie sont appliquées sur les autres bords du domaine. Le calcul est effectué sur un maillage de $128 \times 50 \times 50$ nœuds, soit 320000 nœuds au total. Le nombre de CFL est égal à 0.8. Sous l'effet du choc, la bulle se déforme et est entraînée vers la droite, comme le montre la Figure 6.3, qui présente l'évolution du cas-test pour le modèle à cinq équations non dissipatif.

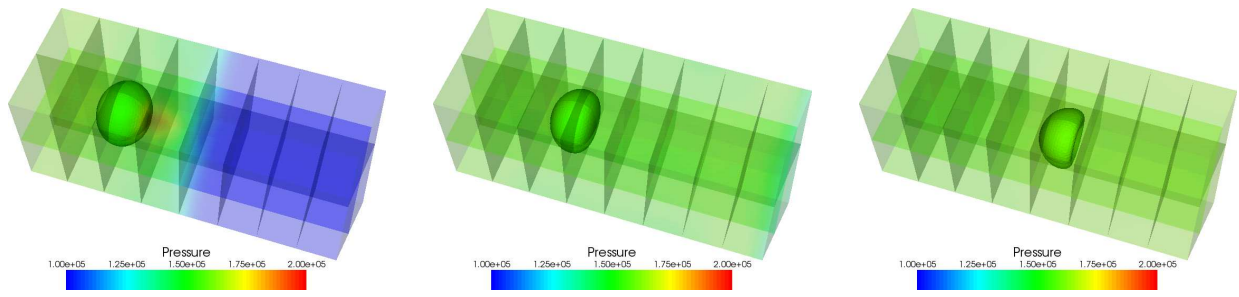


FIG. 6.3 – Interaction choc-bulle : Isovaleurs de la fraction volumique $\alpha_{R22} = 0.5$ et pressions aux temps $2.5 \cdot 10^{-4}$ s, $5.0 \cdot 10^{-4}$ s et $1.0 \cdot 10^{-3}$ s. Résultats du modèle à cinq équations non dissipatif.

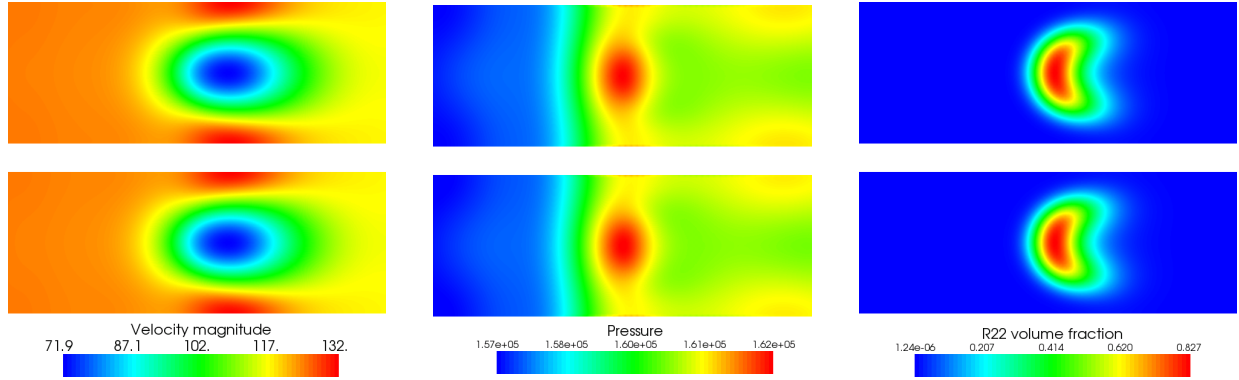


FIG. 6.4 – Interaction choc-bulle : Comparaison entre le modèle non dissipatif à cinq équations sans relaxation des températures (haut) et avec relaxation (bas). Vitesse de mélange, pression et fraction volumique du gaz R22.

Nous souhaitons d'abord évaluer l'effet de la relaxation des températures sur les résultats du modèle à cinq équations non dissipatif. Un écoulement avec un temps de relaxation $\varepsilon_T = 10^{-8}$ s a donc été calculé, ce qui revient pratiquement à une relaxation instantanée. Les résultats des calculs avec et sans relaxation des températures sont présentés sur la Figure 6.4, qui montre que la relaxation des températures a uniquement un effet diffusif. Comme attendu, l'écoulement semble être isotherme.

Comparons maintenant les modèles à sept équations avec relaxation instantanées avec le modèle à cinq équations non dissipatif. Les Figures 6.5 et 6.6 présentent la pression et la fraction volumique du gaz R22 après 10^{-3} s. Sous l'effet de l'onde de choc, la bulle de gaz se déforme et se retrouve emmenée vers la droite. Comme nous pouvons le voir, le modèle à cinq équations est moins diffusif que le modèle à sept équations. Ceci peut s'expliquer par l'utilisation du solveur acoustique pour ce modèle, moins diffusif que les solveurs de type VFRoe-ncv. Cette diffusion plus faible se remarque lorsque l'on regarde la fraction volumique maximale après 10^{-3} s : elle est de 0.827 pour le modèle à cinq équations et de 0.801 pour le modèle à sept équations. On note également que la pression reste plus élevée au centre de la bulle pour le modèle à cinq équations que pour le modèle à sept équations.

Bien que cela ne se justifie pas à priori pour ce cas-test, puisque c'est un problème d'interface, on utilise maintenant le modèle dissipatif à cinq équations et le modèle à sept équations avec relaxations à temps finis. Un temps de relaxation de 10^{-3} s est utilisé. On s'attend que ces termes n'aient un effet que dans la zone de mélange entre les phases. Cependant, comme nous l'avons vu avec les résultats précédents, une zone de mélange se crée non seulement au niveau de l'interface gaz - R22, mais aussi au niveau de la bulle, où la fraction volumique n'est plus égale à 1 à la fin de la simulation. Les termes

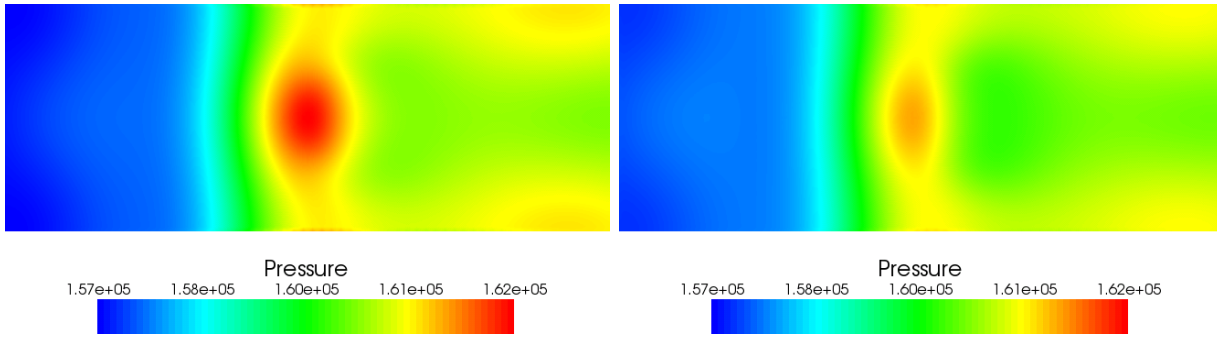


FIG. 6.5 – Interaction choc-bulle : Comparaison des pressions pour le modèle à cinq équations non dissipatif (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations instantanées (droite).

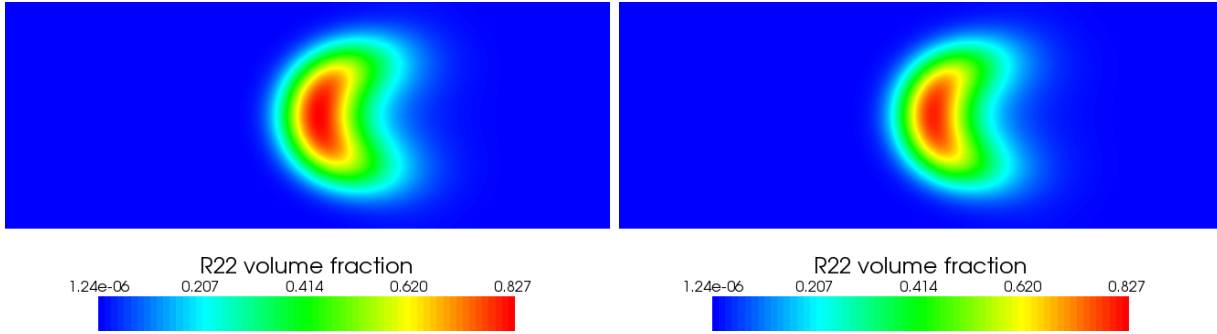


FIG. 6.6 – Interaction choc-bulle : Comparaison des fractions volumiques du gaz R22 pour le modèle à cinq équations non dissipatif (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations instantanées (droite).

prenant en compte les déséquilibres de vitesses auront donc un effet dans toute la zone de la bulle. Les résultats du modèle dissipatif à cinq équations et du modèle à sept équations avec relaxations instantanées sont présentés sur les Figures 6.7 et 6.8. À cause des fractions volumiques très proches de 0 ou de 1, ce cas-test est difficile à réaliser. Une relaxation des températures a donc été appliquée pour le modèle dissipatif à cinq équations avec un temps de relaxation $\varepsilon_T = 10^{-8}$ s. Cette relaxation a un effet stabilisateur. Par ailleurs, la fraction du gaz R22 a été initialisée à l'intérieur de la bulle à seulement 0.93 pour le modèle à sept équations avec relaxations à temps fini, car des échecs numériques apparaissent lorsque l'onde de choc entre en contact avec la bulle pour ce cas.

Nous obtenons comme précédemment une déformation de la bulle, ainsi que son déplacement vers la droite. À nouveau, le modèle à cinq équations semble moins diffusif que celui à sept équations, tant au niveau des pressions qu'au niveau des fractions volumiques. La valeur maximale de α_{R22} est en effet de 0.799 pour le modèle dissipatif à cinq équations contre 0.680 pour le modèle à sept équations (rappelons que la fraction volumique a été initialisée à 0.93 pour ce cas). Les variations de pressions sont aussi plus grandes, notamment au cœur de la bulle et dans son sillage.

Si l'on compare les résultats des modèles sans vitesses relatives avec ceux des modèles qui prennent en compte un déséquilibre des vitesses, on remarque que l'utilisation d'un temps de relaxation des vitesses non nul modifie la forme de la bulle de gaz après le choc, et change les variations de pression après le passage de l'onde de choc, avec un pic de pression plus petit dans la bulle et une pression plus importante dans le sillage de celle-ci. La déformation de la bulle peut être expliquée par le fait qu'aux

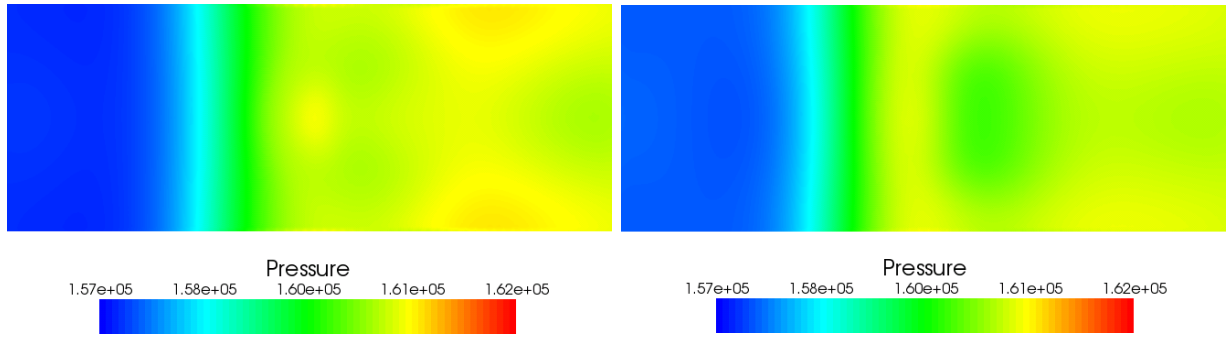


FIG. 6.7 – Interaction choc-bulle : Comparaison des pressions pour le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations à temps finis (droite).

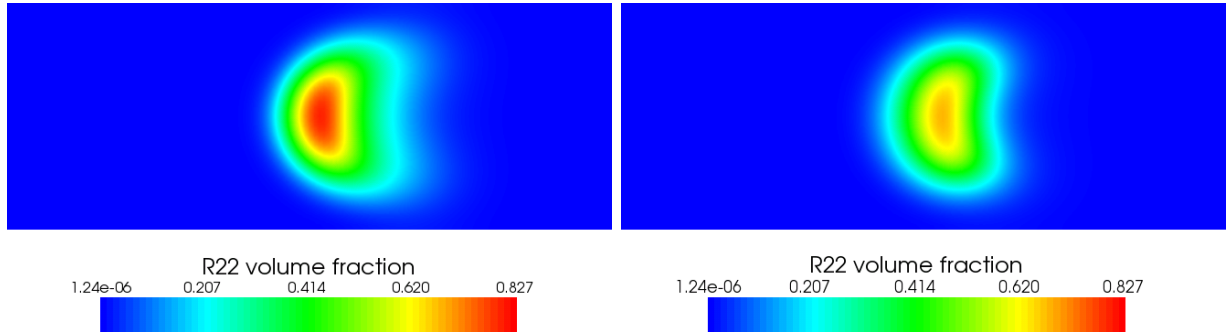


FIG. 6.8 – Interaction choc-bulle : Comparaison des fractions volumiques du gaz R22 le modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et le modèle à sept équations avec relaxations à temps finis (droite).

extrémités de celle-ci, la pression est plus faible qu'en son centre. L'utilisation d'une vitesse relative a donc pour conséquence une tendance à déplacer l'air plus léger les côtés et à concentrer le gaz R22 dans l'axe de la bulle.

On s'intéresse maintenant au temps de calcul nécessaire pour ces différentes simulations. Les calculs ont été effectués sur 32 processeurs. Le nombre d'itérations et le temps de calcul pour chaque modèle est présenté dans la Table 6.1. Le nombre d'itérations est comparable ; le plus grand nombre d'itérations pour le modèle à sept équations est dû au fait que le CFL a été augmenté progressivement pendant les 200 premières itérations. Les temps de calcul pour le modèle à cinq équations non dissipatif et pour le modèle à sept équations sont également comparables, avec un modèle à cinq équations moins coûteux ; le modèle dissipatif est le plus coûteux, à cause du traitement implicite des termes du second ordre.

Modèle	Nombre d'itérations	Temps de calcul
Modèle à 7 équations, relaxations instantanées	1496	10 min
Modèle à 7 équations, relaxation à temps fini	1496	11 min
Modèle à 5 équations non dissipatif	1330	8 min
Modèle à 5 équations dissipatif	866	2 h 08 min

TAB. 6.1 – Interaction choc-bulle : temps de calcul pour les différents modèles.

6.2.2 Chute d'une goutte

Le deuxième cas-test est un problème d'interface, avec la chute d'une goutte sous l'effet de la gravité. Celui-ci est habituellement effectué avec une seule vitesse puisqu'on considère que les phases sont séparées. Le modèle à cinq équations non dissipatif et le modèle à sept équations avec relaxations instantanées seront d'abord comparés, puis nous regarderons l'effet des déséquilibres de vitesses sur ce cas-test.

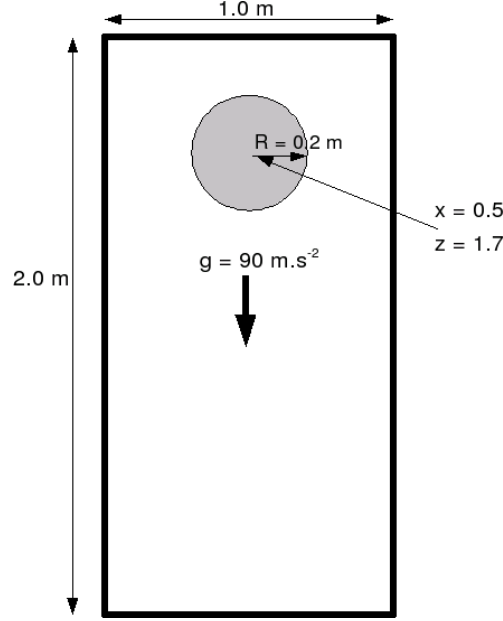


FIG. 6.9 – Chute d'une goutte : schéma de la géométrie initiale.

Comme présenté sur le schéma 6.9, on considère une goutte de masse volumique $\rho_1 = 4 \text{ kg.m}^{-3}$ entouré d'air de masse volumique $\rho_2 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, sous pression $p = 10^5 \text{ Pa}$. Les vitesses initiales sont nulles. Dans la zone de la goutte, la fraction volumique est égale à $\alpha_1 = 0.999$, et $\alpha_1 = 0.001$ à l'extérieur. Les deux fluides sont considérés comme des gaz parfaits, avec comme propriétés thermodynamiques $\gamma_1 = 1.67$ et $C_{v1} = 107.1 \text{ J.}^{-1}$ d'une part, et $\gamma_2 = 1.4$ et $C_{v2} = 717.5 \text{ J.}^{-1}$ d'autre part. À l'instant $t = 0 \text{ s}$, une gravité est appliquée avec $g = 90 \text{ m.s}^{-2}$, ce qui causera la chute de la goutte. Nous effectuons le calcul sur un maillage régulier de $51 \times 3 \times 101$ nœuds, avec un nombre de CFL égal à 0.4 pour les 10000 premières itérations, 0.8 ensuite. Les résultats pour la fraction volumique sont présentés sur la Figure 6.10. Les deux modèles donnent des résultats en excellent accord, ce que l'on peut mieux voir lorsque l'on fait une coupe 1D le long de l'axe z , qui est présentée sur la Figure 6.11. Les variations de la fraction volumique du gaz de la bulle sont en effet tout à fait similaires.

Ce cas-test est maintenant réalisé avec un temps de relaxation des vitesses égal à 10^{-2} s , pour les deux modèles. À cause des zones de fluides quasi-purs, les schémas numériques que nous avons développés peuvent rencontrer des problèmes. Une relaxation des températures est donc appliquée pour le modèle à une vitesse et une pression, qui a un effet stabilisateur sur la fraction volumique, comme on a pu le voir dans le paragraphe 6.1.3. Le temps de relaxation est fixé à $\varepsilon_T = 10^{-2} \text{ s}$: lorsque les ordres de grandeur des différents temps de relaxation ont été établis dans le paragraphe 1.3.5, on a pu remarquer que pour un écoulement à bulles, les temps de retour à l'équilibre de la vitesse et de la température sont du même ordre.

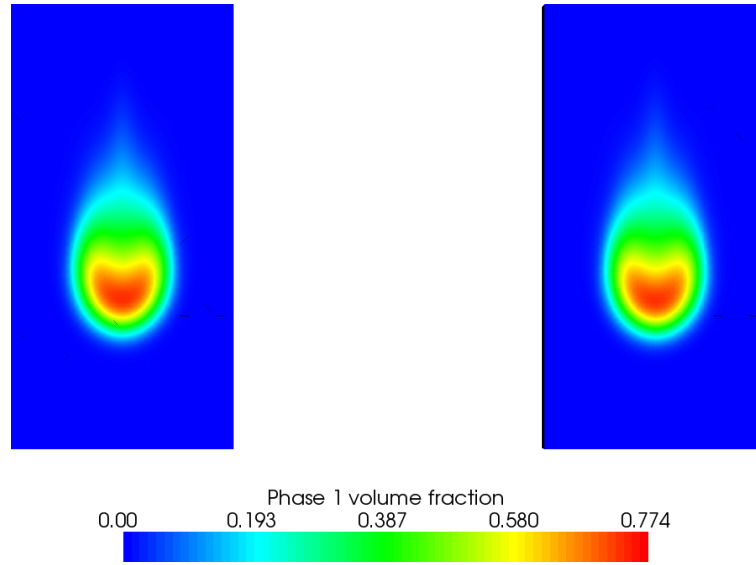


FIG. 6.10 – Chute d’une goutte : résultats après 0.8 s. Résultats sur la fraction volumique du gaz de la goutte. Modèle à cinq équations (gauche) et à sept équations (droite). $\varepsilon_u = 0$.

La Figure 6.12 présente les résultats sur la fraction volumique après 0.8 s pour les modèles avec déséquilibres mécaniques. Les résultats des deux modèles sont à nouveau en très bon accord, avec toutefois un modèle dissipatif à cinq équations plus diffusif : la fraction volumique du gaz est plus faible au centre de la bulle. Nous pouvons néanmoins voir que le déséquilibre des vitesses réduit la diffusion du modèle, avec une réduction de la traînée derrière la goutte. Ceci peut être expliqué par le fait que, lorsque l’on utilise une méthode de prise en compte des déséquilibres mécaniques, on obtient un effet analogue à la sédimentation qui s’applique, avec le gaz plus lourd de la goutte qui se sépare de l’air. Cet effet est plus faible lorsque l’on utilise le modèle à cinq équations. Ce phénomène est mieux mis en évidence par une coupe 1D le long de l’axe z , qui est présentée sur la Figure 6.11.

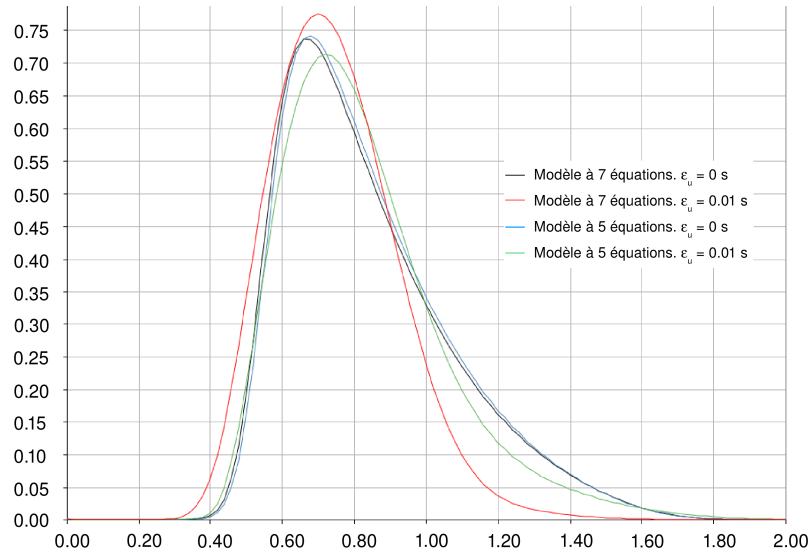


FIG. 6.11 – Chute d’une goutte : résultats après 0.8 s. Fraction volumique du gaz de la goutte. Coupe dans l’axe vertical.

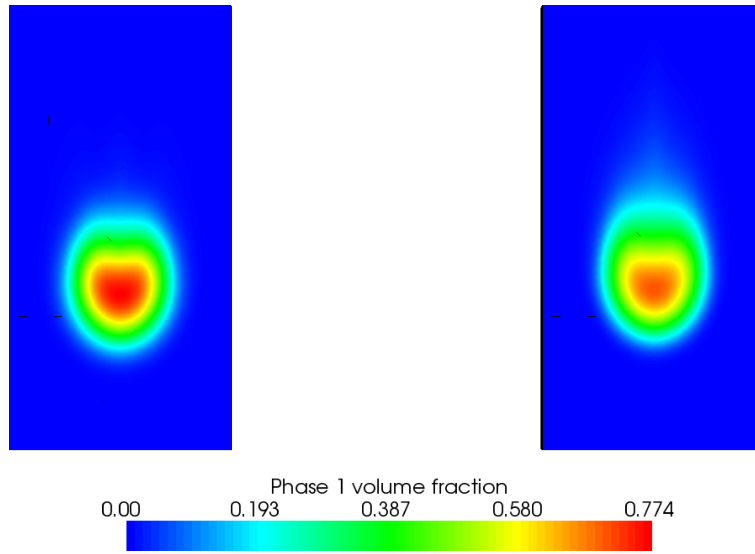


FIG. 6.12 – Chute d’une goutte : résultats après 0.8 s. Résultats sur la fraction volumique du gaz de la goutte. Modèle dissipatif à cinq équations (gauche) et à sept équations avec relaxations à temps finis (droite). $\varepsilon_u = 10^{-2}$ s.

Modèle	Nombre d’itérations	Temps de calcul
Modèle à 7 équations, relaxations instantanées	133929	2 h 05 min
Modèle à 7 équations, relaxations à temps fini	133937	2 h 05 min
Modèle à 5 équations non dissipatif	129889	1 h 36 min
Modèle à 5 équations dissipatif	129872	28 h 27 min

TAB. 6.2 – Temps de calcul pour le cas-test de la chute d’une goutte, pour les différents modèles.

Regardons maintenant aux performances en termes de temps de calculs des différents modèles. Les simulations ont été effectuées avec le logiciel NUM3SIS [50] pour les différents modèles, et chaque calcul a été lancé sur huit processeurs. Le nombre d’itérations et le temps de calcul nécessaires pour arriver à l’instant 0.8 s sont précisés dans la Table 6.2.

Le nombre d’itérations effectuées pour atteindre le résultat est comparable pour tous les modèles. Ceci s’explique par le fait que les vitesses du son sont proches (204 m.s^{-1} pour le gaz de la bulle et 374 m.s^{-1} pour l’air), et la vitesse du son de Wallis, utilisée dans le modèle à cinq équations, reste comprise entre ces bornes. Comme attendu, le modèle non dissipatif à cinq équations est le plus rapide, car c’est le moins complexe. Les solutions obtenues avec différentes méthodes de relaxations pour le modèle à sept équations nécessitent le même temps de calcul, puisque ces méthodes de relaxation sont peu coûteuses lorsqu’on les compare au solveur hyperbolique. Le modèle à cinq équations dissipatif est lui beaucoup plus coûteux que le modèle non dissipatif, ce qui est dû au traitement implicite des termes du second ordre.

6.2.3 Écoulement dans un tuyau avec une contraction et une expansion

Le dernier cas-test représente un écoulement eau-air dans un tuyau comprenant deux changements brusques de section, dont la géométrie est présentée sur la Figure 6.13. Par ce cas-test, on cherche à évaluer l'aptitude du modèle dissipatif à cinq équations à calculer des écoulements complexes, en le comparant au modèle à sept équations et au logiciel GENEPI [37], qui utilise un modèle à l'équilibre homogène avec un modèle de dérive des vitesses. Pour ce dernier, nous réutilisons l'équation (2.98) obtenue lors de la relaxation des vitesses pour estimer la vitesse de dérive.

À l'entrée, les vitesses de l'eau et de l'air sont fixées à 0.4 m.s^{-1} , les masses volumiques sont données par $\rho_{air} = 1.0 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{eau} = 1000.0 \text{ kg.m}^{-3}$ et la fraction volumique est fixée à $\alpha_{air} = 0.5$. Les pressions sont fixées à la sorties à 10^5 Pa . La géométrie de ce cas-test est présentée sur la Figure 6.13. Une condition de réflexion est appliquée pour tous les murs. Nous nous attendons à des variations de pression au niveau de l'expansion et de la contraction, qui devraient entraîner des séparations entre les phases.

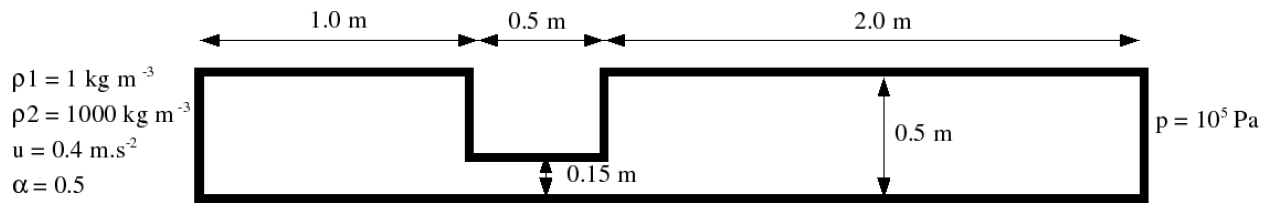


FIG. 6.13 – Écoulement dans un tuyau avec changements soudains de la section : géométrie et conditions aux bords.

Pour déterminer le temps de relaxation des vitesses, on suppose que le diamètre des bulles est de 1 mm. De plus, la réalisation de ce cas-test en utilisant le modèle à six équations nous apprend que la vitesse relative maximale entre les deux phases est de 2.49 m.s^{-1} . La formule (1.63) donne alors le temps de relaxation des vitesses, proche de $\varepsilon_u = 10^{-3} \text{ s}$. Les modèles développés dans cette thèse ont été implémentés dans le logiciel NUM3SIS [50]. Les simulations ont été effectuées sur des maillages non structurés comprenant 6382 nœuds, soit une distance entre les points d'environ $3.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; le maillage utilisé pour GENEPI, qui est basé sur des méthodes numériques de type éléments finis mixtes Q1/P0, compte 2520 cellules, soit une distance de $2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ entre les points.

Comparons tout d'abord les résultats des modèles à cinq équations avec et sans termes dissipatifs. Comme les Figures 6.14 et 6.15 le montrent, les résultats pour les pressions sont très proches. Les vitesses sont également très semblables pour les deux modèles, tant au niveau du module des vitesses que de la taille de la zone de recirculation en aval de l'expansion. En revanche, nous obtenons une séparation des phases en aval de l'expansion brusque du tuyau lorsque le modèle dissipatif est utilisé, alors que ce phénomène n'apparaît pas avec le modèle non dissipatif, puisque celui-ci ne possède pas de vitesse relative entre les phases.

On calcule maintenant l'écoulement en utilisant le modèle à sept équations, avec des temps de relaxation $\varepsilon_u = 10^{-3} \text{ s}$ et $\varepsilon_p = 10^{-6} \text{ s}$. Les résultats sont présentés sur la Figure 6.16. Nous pouvons remarquer que les vitesses obtenues sont très proches des résultats précédents, avec toutefois une zone de recirculation plus petite, due à la plus grande diffusivité du modèle. Les résultats sur la pression sont également très proches, avec notamment les mêmes zones de sur-pression et de sous-pression; la pression est plus importante en amont du changement de section. Enfin, le comportement de la fraction volumique est proche de celui obtenu avec le modèle dissipatif à cinq équations, avec une séparation

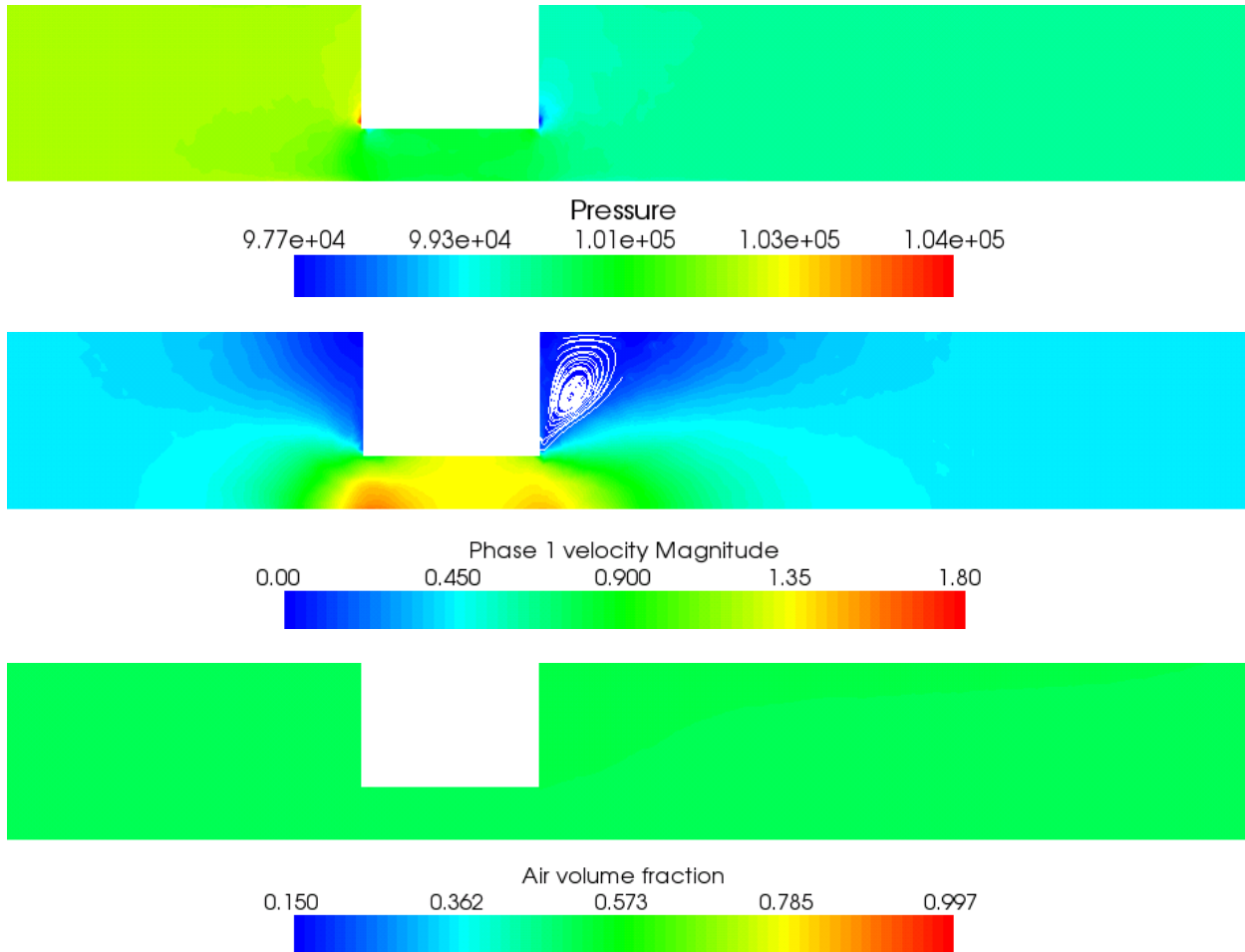


FIG. 6.14 – Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à cinq équations non dissipatif.

des phases lors de l'expansion brutale. On peut également noter une séparation des phases avant la contraction, qui n'apparaît pas dans le modèle (4.1).

Nos résultats sont maintenant comparés avec ceux du logiciel GENEPI [37], qui utilise le modèle à l'équilibre homogène (2.200), associé avec un modèle de vitesse de dérive. Le système d'équation résolu peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{u} = 0 \quad (6.31.1)$$

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{u} \otimes \underline{u} + \nabla p = -\operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 \underline{v}_d \otimes \underline{v}_d) \quad (6.31.2)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h \underline{u} = -\operatorname{div} (\rho Y_1 Y_2 h_{fg} \underline{v}_d \otimes \underline{v}_d) \quad (6.31.2)$$

où $\rho h = \rho e + p$ est l'enthalpie du mélange. La densité de mélange ρ , les fractions massiques Y_k et la chaleur latente h_{fg} sont des fonctions de l'enthalpie h et de la pression p , données par des tables thermodynamiques. La vitesse de dérive $\underline{v}_d$ est modélisée par la même expression que pour le modèle dissipatif, à savoir $\underline{v}_d = \varepsilon \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho} \nabla p$. Afin d'obtenir de plus grandes variations de la fraction volu-

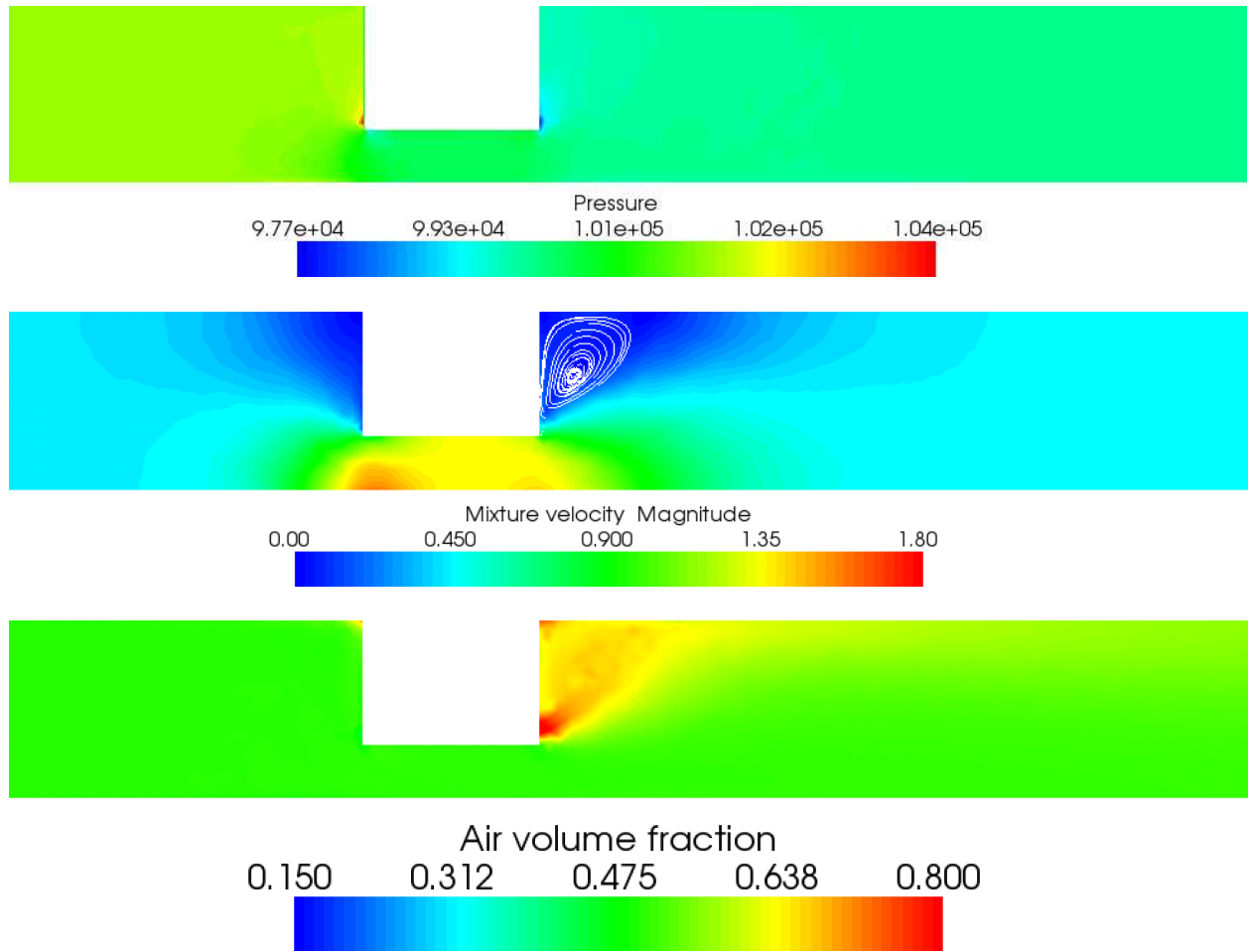


FIG. 6.15 – Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à cinq équations dissipatif.

mique, le temps de relaxation des vitesses a dû être fixé à $\varepsilon_u = 0.08$ s ; nous expliquons cette différence par les différentes méthodes de calcul des gradients de pression entre les logiciels. Une autre différence est l'hypothèse de l'incompressibilité de l'eau. Les résultats de cette simulation sont présentés sur la Figure 6.17. On remarque que les résultats de GENEPI sont relativement proches de ceux du modèle dissipatif à cinq équations. Un champ de pression proche de ceux issus des modèles à cinq équations est obtenu, avec toutefois une surpression plus importante en amont de la restriction. Le champ de vitesses est également semblable ; on note une zone de recirculation plus importante. Enfin, une analogie pour les variations de la fraction volumique avec le modèle dissipatif à cinq équations est notée, même si ces variations sont plus faibles. Des zones de séparation entre l'air et l'eau apparaissent au niveau des changements de section, et notamment en aval de l'expansion. Une différence entre les résultats précédents et ceux de GENEPI peut cependant être notée : alors que la séparation des phases n'a lieu que dans la zone de recirculation pour ce dernier, une légère stratification de l'écoulement a lieu en aval pour les autres modèles.

Finalement, un bon accord est obtenu pour ce cas test entre les résultats du modèle à sept équations et ceux du modèle dissipatif à cinq équations. Les résultats sont aussi relativement proche de ceux de GENEPI, bien que la séparation des phases soit moins importante pour ce dernier.

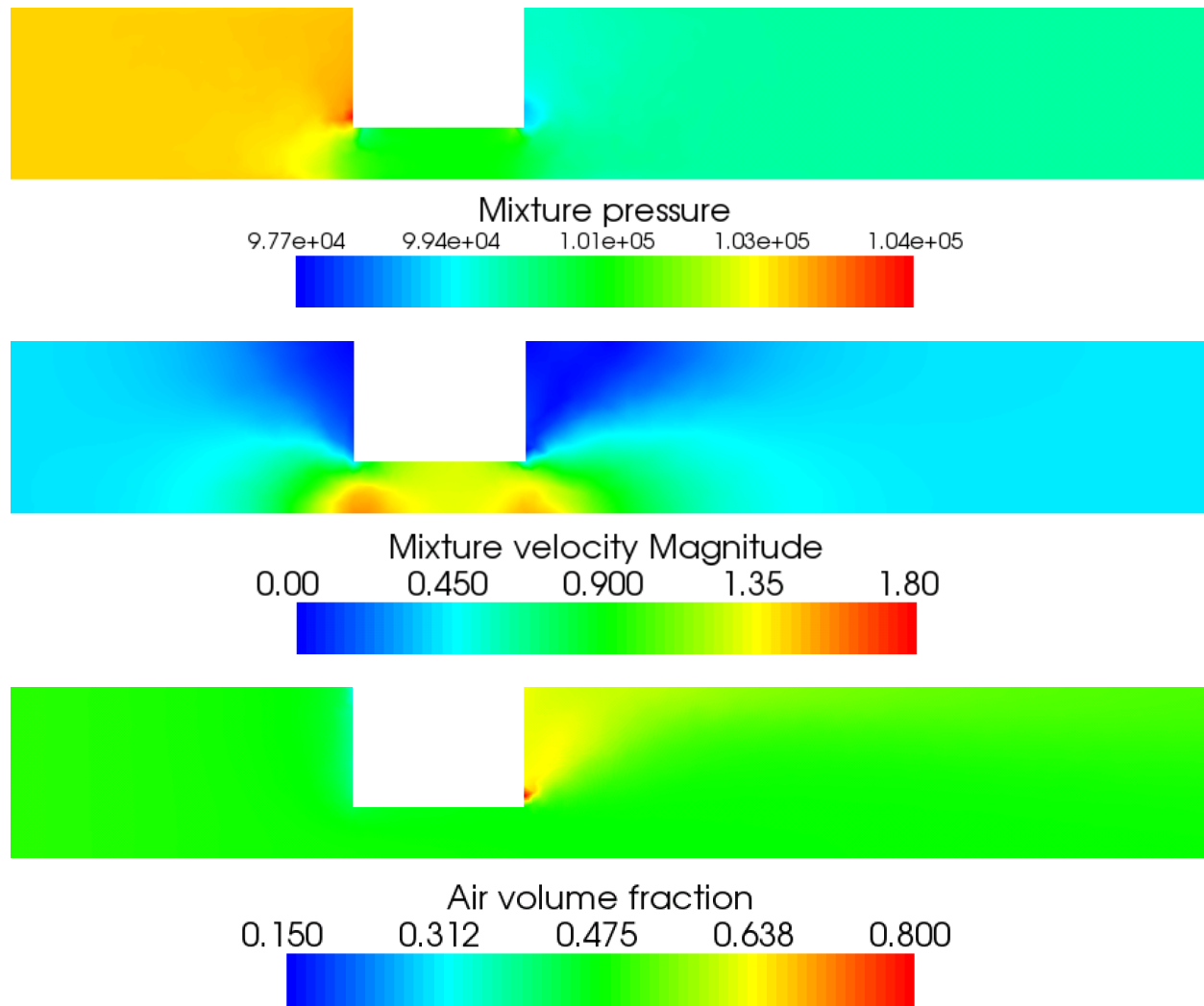


FIG. 6.16 – Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le modèle à sept équations.

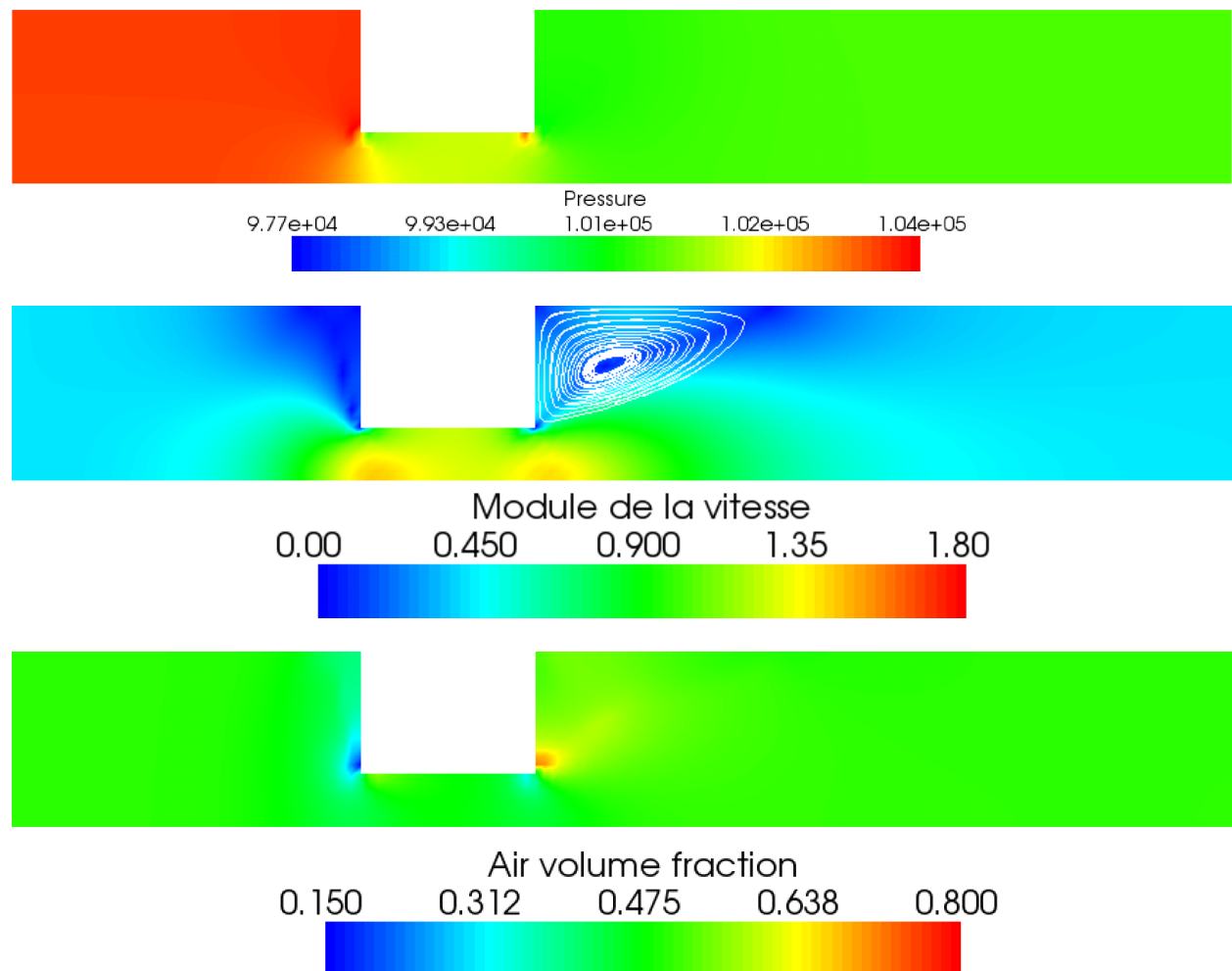


FIG. 6.17 – Écoulement dans un tuyau avec des expansions et contractions : résultats obtenus avec le logiciel GENEPI [37].

6.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé des méthodes de résolution numérique en trois dimensions pour les modèles à cinq et sept équations, avec le traitement des termes de relaxation pour le modèle à sept équations et des termes dissipatif pour le modèle à cinq équations.

Ces modèles ont été comparés entre eux et avec le logiciel GENEPI [37] pour des problèmes d'interface, et pour des écoulements où des séparations de phase apparaissent. On remarque que le modèle à cinq équations est moins diffusif que le modèle à sept équations, et que l'apparition d'une vitesse relative entre les phases ajoute de la diffusion. La comparaison avec les modèles industriels est encourageante, même si des divergences sont présentes.

Conclusion et perspectives

Ce travail porte sur la simulation des écoulements diphasiques par des modèles hyperboliques, pour remplacer le modèle classique à une pression et deux vitesses. Les développements de Chapman-Enskog ont d'abord été utilisés pour relier entre eux les différents modèles utilisés dans la littérature pour la simulation des écoulements diphasiques compressibles. De plus, nous avons obtenu par des développements à l'ordre un des termes du second ordre qui permettent de prendre en compte les déséquilibres de certaines grandeurs en utilisant un modèle réduit.

Une contribution a également été apportée à l'utilisation de modèles hyperboliques pour la simulation des écoulements diphasiques. Deux approches différentes ont en effet été proposées. La première consiste à utiliser le modèle hyperbolique à deux vitesses et deux pressions, que l'on complète par des méthodes de retour à l'équilibre des pressions et des vitesses. Ces retours sont effectués à temps finis, ce qui permet d'avoir des résultats plus proches des données expérimentales que les méthodes de relaxation instantanées. La deuxième approche provient d'un cheminement inverse : un modèle à une vitesse et une pression est utilisé, et des termes dissipatifs obtenus par un développement de Chapman-Enskog permettent de prendre en compte le déséquilibre des vitesses. Ces deux méthodes ont été validées par comparaison avec des données expérimentales, et ces deux approches donnent des résultats numériques similaires, alors que l'approche par modèle réduit est plus efficace en terme de temps de calculs pour les cas unidimensionnels. Enfin, nous avons développé nos schémas numériques en trois dimensions, afin de pouvoir simuler des écoulements complexes.

Plusieurs perspectives peuvent être ouvertes par ce travail. Tout d'abord, d'un point de vue modélisation, les échanges de chaleur et de masse entre les phases pourraient être modélisés, en utilisant à nouveau des méthodes de relaxations pour les températures et les potentiels chimiques pour les modèles à cinq et sept équations. Ces méthodes semblent assez aisées à développer ; on peut également envisager l'utilisation du modèle homogène relaxé et d'utiliser à nouveau le développement de Chapman-Enskog à l'ordre un pour prendre en compte un déséquilibre des potentiels chimiques. Une autre amélioration qui semble envisageable est d'utiliser des temps de relaxations qui varient dans le temps et l'espace, au lieu d'être considérés comme des constantes fixées a priori comme dans ce travail. Nous avons en effet développé des expressions qui permettent d'évaluer les temps de retour à l'équilibre des pressions, des vitesses et des températures, qui peuvent être utilisées dans ce but. Enfin, l'implémentation d'un modèle de turbulence pour les différents modèles d'écoulements diphasiques améliorerait également notre modèle. Ces modèles de turbulences ont déjà été étudiés dans plusieurs travaux [6, 95, 41], et permettraient de simuler l'ensemble des phénomènes physiques des écoulements diphasiques.

D'un point de vue numérique, le passage des différents schémas à l'ordre deux en espace et en temps permettrait d'améliorer grandement les résultats numériques obtenus. On peut en effet remarquer que l'utilisation de schémas plus précis peut largement modifier les résultats, comme on peut le voir pour la chute d'une bulle dans [66]. La robustesse et l'efficacité des schémas numériques pourraient être aussi être améliorées par l'utilisation de méthodes de résolution implicite ; une telle méthode a notamment été développée pour le modèle à sept équations [66]. Un schéma implicite permettrait aussi de réduire

le temps de calcul nécessaire, qui est très important lorsque l'on utilise un schéma explicite pour le modèle dissipatif à cinq équations dans le cas multidimensionnel. Une amélioration des méthodes de résolution des pas dissipatifs peut également être envisagée. Enfin, l'utilisation de méthodes de préconditionnement pour les écoulements à faible nombre de Mach semble très intéressante, au vu de la diffusion notée dans nos résultats numériques. Plusieurs travaux ont montré l'utilité de ces méthodes pour tous les types d'écoulement, monophasiques comme multiphasiques [66, 91, 43]. Cependant, il n'existe pas à notre connaissance de méthode de préconditionnement pour le modèle à deux vitesses et deux pressions, et cette étude peut être difficile à cause des comportements du modèle qui changent selon la fermeture interfaciale utilisée.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi-conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125 :150–160, 1996.
- [2] S. Andreae, J. Ballmann, and S. Müller. Wave processes at gas-gas interfaces. *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications*, 1 :255–262, 2005.
- [3] N. Andrianov, R. Saurel, and G. Warnecke. A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41 :109–131, 2003.
- [4] M.R. Baer and J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials. *Journal of Multiphase Flows*, 12 :861–889, 1986.
- [5] J.B. Bdzil, R. Menikoff, S.F. Son, A.K. Kapila, and D.S. Stewart. Two-phase modeling of DDT in granular materials : a critical examination of modeling issues. *Physics of Fluids*, 11 :378–402, 1999.
- [6] C. Berthon and B. Nkonga. Numerical model of a compressible multi-fluid fluctuating flow. *International Journal on Finite Volumes*, 2(2), 2005.
- [7] D. Bestion. The physical closure laws in the CATHARE code. *Nuclear Engineering and Design*, 124 :229–245, 1990.
- [8] E. Boucker, E. Quémerais, and J. Laviéville. NEPTUNE CFD version 1.0 - verification against numerical and physical test cases. Neptune project report Nept-2004-1.2/4, CEA-EDF, June 2005.
- [9] C. Buet and B. Després. Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 215 :717–740, 2006.
- [10] T. Buffard, T. Gallouët, and J.-M. Hérard. A sequel to a rough Godunov scheme : Application to real gases. *Computers and fluids*, 29 :673–709, 2000.
- [11] A.V. Bushman, I.V. Lomonosov, and K.V. Khishchenko. Shock wave data base. website, 2003. <http://teos.ficp.ac.ru/rusbank/>.
- [12] G. Chen, C. Levermore, and T. Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 47 :787–830, 1994.
- [13] M.-S. Chung, K.-S. Chang, and S.-J. Lee. Numerical solution of hyperbolic two-fluid two-phase flow model with non-reflecting boundary conditions. *International Journal of Engineering Science*, 40 :789–803, 2002.
- [14] S. Clerc. Numerical simulation of the homogeneous equilibrium model for two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 161 :354–375, 2000.
- [15] R. Clift, J. Grace, and M.E. Weber. *Bubble drops and particles*. Academic Press, New York, 1978.
- [16] F. Coquel, K. El Amine, E. Godlewski, B. Perthame, and P. Rascle. A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 136 :272–288, 1997.
- [17] F. Coquel, T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 334 :1–6, 2002.

- [18] J. Cortes. *Étude des régimes transitoires d'écoulements diphasiques à faible rapport de densité*. PhD thesis, University of Paris XI, 1999.
- [19] S.R. De Groot and P. Mazur. *Nonequilibrium thermodynamics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- [20] F. De Vuyst, J.-M. Ghidaglia, and G. Le Coq. On the numerical simulation of multiphase water flow with changes of phase and strong gradients using the homogeneous equilibrium model. *International Journal on Finite Volumes*, 2(1), 2005.
- [21] J.M. Delhaye, M. Giot, and M.L. Riethmuller. *Thermohydraulics of two-phase systems for industrial design and nuclear engineering*, volume 5 of *A Von Karmann Institute Book*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1981.
- [22] P. Downar-Zapolski, Z. Bilicki, L. Bolle, and J. Franco. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(3) :473–483, 1996.
- [23] A.N. Dremin and I.A. Karpukhin. Method of determination of shock adiabat of the dispersed substances. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 1(3) :184–188, 1960. (en Russe).
- [24] D.A. Drew and S.L. Passman. *Theory of multicomponents fluids*. Springer, New York, 1998.
- [25] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *The finite volume method*, pages 715–1022. P. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland, 2000.
- [26] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids*, 32 :479–513, 2003.
- [27] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14 :663–700, 2004.
- [28] J.R. García-Cascales and H. Paillère. Application of AUSM schemes to multi-dimensional compressible two-phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 175 :326–360, 2002.
- [29] S. Gavriluk and R. Saurel. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia. *Nuclear Engineering and Design*, 236 :1225–1239, 2006.
- [30] S. Gavriluk and R. Saurel. Rankine-hugoniot relations for shocks in heterogeneous mixtures. *Journal of Fluid Mechanics*, 575 :495–507, 2007.
- [31] J.M. Ghidaglia, G. Le Coq, and I. Toumi. Two flux schemes for computing two phases flows through multidimensional finite volume methods. In *Ninth International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*, San Francisco, October 1999.
- [32] J. Glimm, H. Jin, M. Laforest, F. Tangerman, and Y. Zhang. A two pressure numerical model of two fluid mixing. *Multiscale Modeling and Simulation*, 1(3) :458–484, 2003.
- [33] J. Glimm, D. Saltz, and D.H. Sharp. Renormalization group solution of two-phase flow equations. *Physics Letters A*, 222 :171–176, 1996.
- [34] J. Glimm, D. Saltz, and D.H. Sharp. Two-phase modelling of a fluid mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 378 :119–143, 1999.
- [35] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 1995.
- [36] L. Gosse and G. Toscani. An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 334 :337–342, 2002.
- [37] M. Grandotto and P. Obry. Calcul des écoulements diphasiques dans les échangeurs par une méthode aux éléments finis. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 5(1) :53–74, 1996.

-
- [38] J.A. Greenough and J.W. Jacobs. A numerical study of shock-acceleration of a diffuse helium cylinder. In *Proceedings of the Fifth International Workshop on Compressible Turbulent Mixing*, New York, 18-21 July 1995.
 - [39] A. Guelfi, D. Bestion, M. Boucker, P. Boudier, P. Fillion, M. Grandotto, J.-M. Hérard, E. Hervieu, and P. Péturaud. NEPTUNE - a new software platform for advanced nuclear thermal-hydraulics. *Nuclear Science and Engineering*, 156(3) :281–324, 2007.
 - [40] H. Guillard and F. Duval. A darcy law for the drift velocity in a two-phase flow model. *Journal of Computational Physics*, 224(1) :288–313, 2007.
 - [41] V. Guillemaud. *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2007.
 - [42] G.F. Hewitt, J.M. Delhay, and M. Zuber. *Numerical Benchmark Tests*, volume 3 of *Multiphase Science and Technology*. Hemisphere, Washington DC / New York, 1987.
 - [43] J. Housman, C. Kiris, and Hafezn M. Preconditioned methods for simulations of low speed compressible flows. *Computers and Fluids*, 2008. (article in press).
 - [44] O. Hurisse. *Couplage interfacial instationnaire de modèles diphasiques*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2006.
 - [45] H. Hérard and O. Hurisse. A simple method to compute standard two-fluid models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 19(7) :475–482, 2005.
 - [46] M. Ishii. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow.*, volume 22 of *Direction des études et recherches d'électricité de France*. Eyrolles, Paris, 1975.
 - [47] M. Ishii and K. Mishima. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Engineering and Design*, 82 :107–126, 1984.
 - [48] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.N. Stewart. Two-phase modeling of DDT in granular materials : structure of the velocity-relaxation zone. *Physics of Fluids*, 9 :3885–3897, 1997.
 - [49] A.K. Kapila, R. Menikoff, J.B. Bdzil, S.F. Son, and D.N. Stewart. Two-phase modeling of DDT in granular materials : reduced equations. *Physics of Fluids*, 13 :3002–3024, 2001.
 - [50] T. Kloczko. Concept, architecture and performance study for a parallel code in CFD. In *20th International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics*, Lyon, 2008.
 - [51] S. Kondo, H. Yamano, T. Suzuki, Y. Tobita, S. Fujita, X. Cao, K. Kamiyama, K. Morita, E.A. Fischer, D.J. Brear, N. Shirakawa, M. Mizuno, S. Hosono, T. Kondo, W. Maschek, E. Kiefhaber, G. Buckel, A. Rineiski, M. Flad, P. Coste, S. Pigny, J. Louvet, and T. Cadiou. SIMMER-III : A computer program for LMFR core disruptive accident analysis, version 2.H. model summary and program description. Technical Report JNC TN9400 2001-002, Japan Nuclear Cycle Development Institute, 2001.
 - [52] R. Krishna and J.M. van Baten. Mass transfer in bubble columns. *Catalysis Today*, 79-80 :67–75, 2003.
 - [53] F. Lagoutière. *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants*. PhD thesis, University of Paris VI, 2000.
 - [54] M.-H. Lallemand, M. Chinnayya, and O. Le Metayer. Pressure relaxation procedures for multi-phase compressible flowsmass transfer in bubble columns. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 49 :1–56, 2005.
 - [55] B. Larrouturou. How to preserve the mass fraction positivity when computing compressible multi-component flows. Research report 1080, INRIA, August 1989.
 - [56] O. Le Métayer. *Modélisation et résolution de la propagation de fronts perméables. Application aux fronts d'évaporation et de détonation*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2003.

-
- [57] O. Le Métayer, J. Massoni, and R. Saurel. Elaborating equations of state of a liquid and its vapor for two-phase flow models. *International Journal of Thermal Sciences*, 43 :265–276, 2004.
- [58] O. Le Métayer, J. Massoni, and R. Saurel. Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers. *Journal of Computational Physics*, 205 :567–610, 2005.
- [59] G.S. Lellouche and B.A. Zolotar. Mechanistic model for predicting two-phase void fraction for water in vertical tubes, channels and rod bundles. Technical Report NP 2246-SR Special Report, EPRI, 1982.
- [60] D. Lhuillier. A mean-field description of two-phase flows with phase changes. *International Journal of Multiphase Flow*, 29 :511–525, 2003.
- [61] D.R. Lide. *CRC Handbook of chemistry and physics : a ready-reference book of chemical and physical data, 73rd edition*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [62] P. Loilier, C. Omgba-Essama, and C. Thompson. Numerical experiments of two-phase flow in pipelines with a two-fluid compressibles model. In *12th International Conference on Multiphase Production Technology*, Barcelona, May 2005.
- [63] S.P. Marsh. *LASL shock Hugoniot Data*. University of California Press, Berkeley, 1980.
- [64] R. Menikoff and B.J. Plohr. The Riemann problem for fluid flow real materials. *Reviews of Modern Physics*, 61(13) :75–130, 1989.
- [65] C. Morel. Proposition d’un modèle 3D local pour les écoulements à bulles pour implantation dans neptune. Neptune project report Nept-2002-L2.2/4, CEA-EDF, January 2003.
- [66] A. Murrone. *Modèles bi-fluides à six et sept équations pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2003.
- [67] A. Murrone and H. Guillard. A five equation reduced model for compressible two-phase flow computations. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :664–698, 2005.
- [68] R. Natalini. Recent mathematical results on hyperbolic relaxation problems. In *Analysis of systems of conservation laws*, pages 128–198, Aachen, 1997. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [69] N.K. Omebere-Iyari, B.J. Azzopardi, D. Lucas, M. Beyer, and H.-M. Prasser. The characteristics of gas/liquid flow in large risers at high pressures. *International of Multiphase Flow*, 34 :461–476, 2008.
- [70] S. Pascal-Ribot and Y. Blanchet. Buffeting lift forces and local air-water flow aspects around a rigid cylinder. *International Journal of Multiphase Flow*, 33 :1237–1254, 2007.
- [71] F. Petitpas, E. Franquet, R. Saurel, and O. Le Métayer. A relaxation-projection method for compressible flows. part II : Artificial heat exchanges for multiphase shocks. *Journal of Computational Physics*, 225 :2214–2248, 2007.
- [72] J.-Ph. Pérez and A.-M. Romulus. *Thermodynamique : Fondements et Applications*. Dunod, Paris, 2001.
- [73] V.H. Ransom and D.L. Hicks. Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 53(1) :124–151, 1984.
- [74] N.M. Rao, C. Chandra Sekhar, B. Maiti, and P.K. Das. Steady-state performance of a two-phase natural circulation loop. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33 :1042–1052, 2006.
- [75] A.D. Resnyansky and N.K. Bourne. Shock wave compression of a porous material. *Journal of Applied Physics*, 95(4) :1760–1769, 2004.
- [76] J.-M. Rovarch. A multidimensional finite volume method with physical variables implicitation - application to two-phase flows. In *Finite Volume for Complex Applications III*, pages 647–654, Porquerolles, June 2002.

-
- [77] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150 :425–467, 1999.
 - [78] R. Saurel, S. Gavrilyuk, and F. Renaud. A multiphase model with internal degrees of freedom : application to shock-bubble interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 495 :283–321, 2003.
 - [79] R. Saurel and O. Le Métayer. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 431 :239–271, 2001.
 - [80] R. Saurel, O. Le Metayer, J. Massoni, and S. Gavrilyuk. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation. *Shock Waves*, 16(3) :209–232, 2007.
 - [81] N. Seguin. *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*. PhD thesis, University of Aix-Marseille I, 2002.
 - [82] G. Serre and D. Bestion. Benchmarks calculated with the ice numerical method using CATHARE and TRIO-U codes. Ecume project, CEA, July 2001.
 - [83] K.-M. Shyue. A wave-propagation based volume tracking method for compressible multicomponent flow in two space dimensions. *Journal of Computational Physics*, 215 :219–244, 2006.
 - [84] B. Stewart, H.B. Wendroff. Two-phase flows : models and methods. *Journal of Computational Physics*, 53 :363–409, 1984.
 - [85] M.E. Taylor. *Partial differential equations I - Basic theory*. Springer-Verlag, New York, 1996.
 - [86] Maple Development Team. website. <http://www.maplesoft.com>.
 - [87] The RELAP5-3D Development Team. RELAP5-3D code manual volume 1 : Code structure, system models and solution methods. Technical Report INEEL-EXT-98-00834, Idaho National Engineering Laboratory, June 2005.
 - [88] I. Tiselj, J. Gale, A. Horvat, and I. Parzer. Characteristic and propagation velocities of the two-fluid models. In *10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*, Seoul, October 5-9 2003.
 - [89] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
 - [90] I. Toumi. An upwind numerical method for a six equation two-phase flow model. *Nuclear Engineering Design*, 123 :123–146, 1996.
 - [91] S. Venkateswaran, J.W. Lindau, R.F. Kunz, and C.L. Merkle. Computation of multiphase mixture flows with compressibility effects. *Journal of Computational Physics*, 180 :54–77, 2002.
 - [92] J. Wackers and B. Koren. Five-equation model for compressible two-fluid flow. Report MAS-E0414, CWI, August 2004.
 - [93] A.B. Wood. *A textbook of Sound*. The Macmillian Company, New York, 1920.
 - [94] S. Wornom, B. Koobus, H. Guillard, A. Murrone, and A. Drvieux. Seven-equation, two-phase flow three-dimensional calculations using a mixed-element-volume method. Research report 5560, INRIA, April 2005.
 - [95] L.X. Zhou, M. Yang, C.Y. Lian, L.S. Fan, and D.J. Lee. On the second-order moment turbulence model for simulating a bubble column. *Chemical Engineering Science*, 57 :3269–3281, 2002.

Annexe A

Pression interfaciale pour un modèle à une pression développé à l'ordre 1

Dans cette annexe, nous présentons les calculs nécessaires à l'obtention de l'expression de la fluctuation de la pression interfaciale p_I^1 en fonction celle de la fraction volumique α_1^1 , qui apparaissent lorsque les développements de Chapman-Enskog à l'ordre 1 sont utilisés pour passer du modèle à deux vitesses et deux pressions au modèle à deux vitesses et une pression. Rappelons que la pression interfaciale est modélisée en utilisant l'équation (1.49.2), soit

$$p_I = \frac{Y_2 T_2}{Y_1 T_1 + Y_2 T_2} p_1 + \frac{Y_1 T_1}{Y_1 T_1 + Y_2 T_2} p_2 \quad (\text{A.1})$$

Chaque phase est supposée être gouvernée par une équation d'état de type gaz raide (1.27). $Y_k T_k$ s'écrit alors

$$Y_k T_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho} \frac{p_k + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho_k} = \frac{\alpha_k}{\rho} \frac{p_k + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1)} \quad (\text{A.2})$$

Introduisons maintenant la notation ϕ^0 pour représenter la composante de ϕ à l'équilibre, et ϕ^1 sa fluctuation. Selon les expressions (2.60), on peut écrire les pressions $p_k^1 = (-1)^k \frac{C_k^{00}}{\alpha_k} \alpha_1^1$, et la fluctuation de la masse volumique du mélange, ρ^1 , est nulle. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} Y_k T_k &= \frac{\alpha_k^0}{\rho^0} \frac{p_k^0 + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1)} + \varepsilon \left(\frac{1}{\rho^0} \frac{p_k^0 + p_{k,\infty}}{C_{v_k} (\gamma_k - 1)} \alpha_k^1 + \frac{\alpha_k^0}{\rho^0} \frac{1}{C_{v_k} (\gamma_k - 1)} p_k^1 \right) \\ &= Y_k^0 T_k^0 + \varepsilon \frac{1}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho^0} \alpha_k^1 (p_k^0 + p_{k,\infty} - C_k^0) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En rappelant que $C_k^0 = \gamma_k (p_k^0 + p_{k,\infty})$, on obtient

$$Y_k T_k = Y_k^0 T_k^0 - \varepsilon \frac{1}{C_{v_k} (\gamma_k - 1) \rho^0} \alpha_k^1 (\gamma_k - 1) (p_k^0 + p_{k,\infty}) = Y_k^0 T_k^0 \left(1 + \varepsilon (-1)^k \frac{(\gamma_k - 1)}{\alpha_k^0} \alpha_1^1 \right) \quad (\text{A.4})$$

L'expression de p_k^1 est réutilisée, et on note que $p_1^0 = p_2^0 = p^0$ pour écrire

$$\begin{aligned}
Y_k T_k p_{k'} &= Y_k^0 T_k^0 p^0 + \varepsilon \left((-1)^k \frac{\gamma_k - 1}{\alpha_k^0} Y_k^0 T_k^0 p^0 + Y_k^0 T_k^0 (-1)^{k'} \frac{C_{k'}^0}{\alpha_{k'}^0} \right) \alpha_1^1 \\
&= Y_k^0 T_k^0 p^0 + \varepsilon (-1)^k Y_k^0 T_k^0 \left((-1)^k \frac{\gamma_k - 1}{\alpha_k^0} p^0 - \frac{C_{k'}^0}{\alpha_{k'}^0} \right) \alpha_1^1
\end{aligned} \tag{A.5}$$

L'expression de la pression interfaciale (A.1) peut être utilisée, ce qui donne

$$p_I = \frac{(Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0) p^0 + \varepsilon \alpha_1^1 \left(Y_2^0 T_2^0 \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2^0} p^0 - \frac{C_1^0}{\alpha_1^0} \right) - Y_1^0 T_1^0 \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1^0} p^0 - \frac{C_2^0}{\alpha_2^0} \right) \right)}{Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0 + \varepsilon \alpha_1^1 \left(Y_2^0 T_2^0 \frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2^0} p^0 - Y_1^0 T_1^0 \frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1^0} p^0 \right)} \tag{A.6}$$

Les deux composantes de p_I peuvent être obtenues en rappelant le développement limité $\frac{a + \varepsilon b}{c + \varepsilon d} = \frac{a}{c} + \varepsilon \frac{bc - ad}{c^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et en négligeant les termes d'ordre ε^2

$$\begin{aligned}
p_I &= p^0 + \frac{\varepsilon \alpha_1^1}{(Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0)^2} \\
&\quad \left((Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0) \left(Y_2^0 T_2^0 \left(\frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2^0} p^0 - \frac{C_1^0}{\alpha_1^0} \right) - Y_1^0 T_1^0 \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1^0} p^0 - \frac{C_2^0}{\alpha_2^0} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - (Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0) p^0 \left(Y_2^0 T_2^0 \frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2^0} p^0 - Y_1^0 T_1^0 \frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1^0} p^0 \right) \right) \\
&= p^0 + \varepsilon \alpha_1^1 \frac{Y_1^0 T_1^0 \frac{C_2^0}{\alpha_2^0} - Y_2^0 T_2^0 \frac{C_1^0}{\alpha_1^0}}{(Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0)} \\
&= p^0 + \varepsilon \alpha_1^1 \frac{\alpha_1^0 Y_1^0 T_1^0 C_2^0 - \alpha_2^0 Y_2^0 T_2^0 C_1^0}{(Y_1^0 T_1^0 + Y_2^0 T_2^0)}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Et nous pouvons alors utiliser cette expression dans le développement de Chapman-Enskog à l'ordre un du système à deux vitesses et deux pressions.

Annexe B

Expressions de la pression selon la discrétisation

Dans cette annexe, nous décrivons comment, lorsque la partie hyperbolique du modèle à cinq équations est discrétisée, l'expression de la pression au temps $n + 1$ est obtenue. Cette expression varie selon la forme de l'équation utilisée pour l'évolution de la fraction volumique. On considère que chaque phase est gouvernée par une loi d'état de type gaz raide, et les termes dissipatifs ne sont pas pris en compte dans cette annexe. On se limite également au cas unidimensionnel. L'équation sur l'énergie totale du mélange s'écrit

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} ((\rho e + p) u) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Puisque les phases sont gouvernées par des lois d'état de type gaz raide, on peut écrire $\rho e = \frac{p + \gamma p_\infty}{\gamma - 1} + \rho i_0 + \rho \frac{u^2}{2}$ avec $\gamma = \gamma(\alpha)$, $i_0 = i_0(Y)$ et $p_\infty = p_\infty(\alpha)$. En particulier, nous avons l'égalité suivante sur les propriétés thermodynamiques du mélange

$$\frac{\gamma p_\infty}{\gamma - 1} = \alpha \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \quad (\text{B.2})$$

Réécrivons l'équation sur l'énergie (B.1) de la manière suivante

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} (p + p_\infty) u + \rho \left(i_0 + \frac{u^2}{2} \right) u \right) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Cette équation est discrétisée

$$\begin{aligned} (\rho e)_i^{n+1} = (\rho e)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} (p_R^n + p_{\infty,R}^n) u_R^n - \frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} (p_L^n + p_{\infty,L}^n) u_L^n \right. \\ & \left. + \rho_R^n \left(i_{0,R}^n + \frac{(u_R^n)^2}{2} \right) u_R^n - \rho_L^n \left(i_{0,L}^n + \frac{(u_L^n)^2}{2} \right) u_L^n \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La pression obtenue au temps $n + 1$ peut alors être écrite en fonction des variables aux temps n et $n + 1$

$$\begin{aligned}
\frac{p_i^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} &= (\rho e)_i^{n+1} - \rho_i^{n+1} \left(\frac{(u_i^{n+1})^2}{2} + (i_0)_i^{n+1} \right) - \frac{\gamma_i^{n+1} (p_\infty)^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} \\
&= \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} + \frac{\gamma_i^n (p_\infty)^n}{\gamma_i^n - 1} \\
&\quad + \rho_i^n \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} + (i_0)_i^n \right) - \rho_i^{n+1} \left(\frac{(u_i^{n+1})^2}{2} + (i_0)_i^{n+1} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} (p_R^n + p_{\infty,R}^n) u_R^n - \frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} (p_L + p_{\infty,L}^n) u_L \right. \\
&\quad \left. + \rho_R^n \left(i_{0,R}^n + \frac{(u_R^n)^2}{2} \right) u_R^n - \rho_L^n \left(i_{0,L}^n + \frac{(u_L^n)^2}{2} \right) u_L^n \right) \\
&\quad - \alpha_i^{n+1} \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} - (1 - \alpha_i^{n+1}) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Nous simplifions cette équation en regroupant l'ensemble des termes qui n'interviendront pas dans la suite sous l'expression K . Posons donc

$$K = \rho_i^n \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} + (i_0)_i^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\rho_R^n \left(i_{0,R}^n + \frac{(u_R^n)^2}{2} \right) u_R^n - \rho_L^n \left(i_{0,L}^n + \frac{(u_L^n)^2}{2} \right) u_L^n \right) \tag{B.6}$$

B.1 Forme originale de l'équation sur la fraction volumique

Utilisons d'abord l'expression originale de l'équation sur la fraction volumique. Celle-ci s'écrit donc

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\alpha (1 - \alpha) (C_1 - C_2)}{\alpha C_2 + (1 - \alpha) C_1} \operatorname{div} u \tag{B.7}$$

Cette équation peut être discrétisée de la manière suivante

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R - \alpha_L) u_i^n + \frac{\alpha_i^n (1 - \alpha_i^n) ((C_1)_i^n - (C_2)_i^n)}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \tag{B.8}$$

On remplace dans l'équation (B.5) le terme α_i^{n+1} par son expression. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{p_i^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} &= \\
&\frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} + \alpha_i^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_i^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} + K \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} p_R^n u_R^n + \alpha_R^n u_R^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_R^n u_R^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} p_L^n u_L^n + \alpha_L^n u_L^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_L^n u_L^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) \\
&- \left(\alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R - \alpha_L) u_i^n + \frac{\alpha_i^n (1 - \alpha_i^n) ((C_1)_i^n - (C_2)_i^n)}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \right) \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \\
&- \left((1 - \alpha_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R - \alpha_L) u_i^n + \frac{\alpha_i^n (1 - \alpha_i^n) ((C_1)_i^n - (C_2)_i^n)}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \right) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{p_i^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} = \\
& \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} + K - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} p_R^n u_R^n - \frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} p_L^n u_L^n \right) \\
& - \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\alpha_R u_R - \alpha_L u_L - (\alpha_R - \alpha_L) u_i^n - \frac{\alpha_i^n (1 - \alpha_i^n) ((C_1)_i^n - (C_2)_i^n)}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \\
& - \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((1 - \alpha_R) u_R - (1 - \alpha_L) u_L + (\alpha_R - \alpha_L) u_i^n + \frac{\alpha_i^n (1 - \alpha_i^n) ((C_1)_i^n - (C_2)_i^n)}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

B.2 Forme modifiée de l'équation sur la fraction volumique

L'équation sur la fraction volumique est maintenant réécrite sous la forme suivante

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha u}{\partial x} - \frac{\alpha C_2}{\alpha C_2 + (1 - \alpha) C_1} \operatorname{div} u \tag{B.11}$$

Cette équation est discrétisée sous la forme

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R u_R - \alpha_L u_L) - \frac{\alpha_i^n (C_2)_i^n}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \tag{B.12}$$

En introduisant cette expression dans l'expression de la pression au temps $n+1$ (B.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{p_i^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} = \\
& \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} + \alpha_i^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_i^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} + K \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} p_R^n u_R^n + \alpha_R^n u_R^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_R^n u_R^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) \\
& + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} p_L^n u_L^n + \alpha_L^n u_L^n \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} + (1 - \alpha_L^n u_L^n) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \right) \\
& - \left(\alpha_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R u_R - \alpha_L u_L) - \frac{\alpha_i^n (C_2)_i^n}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \right) \frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \\
& - \left((1 - \alpha_i^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\alpha_R u_R - \alpha_L u_L) - \frac{\alpha_i^n (C_2)_i^n}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} (u_R - u_L) \right) \right) \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

L'écriture de cette expression peut être simplifiée

$$\begin{aligned}
& \frac{p_i^{n+1}}{\gamma_i^{n+1} - 1} = \\
& \frac{p_i^n}{\gamma_i^n - 1} + K \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_R^n}{\gamma_R^n - 1} p_R^n u_R^n - \frac{\gamma_L^n}{\gamma_L^n - 1} p_L^n u_L^n \right) \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\gamma_1 p_{1,\infty}}{\gamma_1 - 1} \frac{\alpha_i^n (C_2)_i^n}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} - \frac{\gamma_2 p_{2,\infty}}{\gamma_2 - 1} \frac{(1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n}{\alpha_i^n (C_2)_i^n + (1 - \alpha_i^n) (C_1)_i^n} \right) (u_R - u_L)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Annexe C

Étude de la convergence du pas de résolution du terme source dissipatif

Nous nous intéressons ici au traitement numérique du terme source dissipatif, dont la résolution présentée dans le paragraphe 4.3.3 comprend une méthode de Newton. Le choix de la valeur initiale de la fraction volumique pour cette méthode est discuté dans cette annexe, afin que la convergence soit assurée. De plus, on montre que la fraction volumique est assurée de rester dans l'intervalle $[0, 1]$ au cours de cette étape. Si l'on suppose que chaque phase est gouvernée par une loi d'état de type gaz raide, l'équation à résoudre pour cette étape est donnée par l'expression (4.70)

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -\varepsilon_u \frac{Y_1 - \alpha_1}{\rho (\alpha_1 C_2 + \alpha_2 C_1)} (\alpha_1 \alpha_2 + (\alpha_1 Y_1 (\gamma_2 - 1) - \alpha_2 Y_2 (\gamma_1 - 1)) (Y_1 - \alpha_1)) \|\nabla p\|^2 \quad (\text{C.1})$$

On notera dans la suite $\alpha = \alpha_1$ et $Y = Y_1$. De plus, l'exposant 0 indique les variables issues du pas d'advection dissipative, qui sont connues. Dans cette étape, on cherche à déterminer α_i^* , la fraction volumique de la phase 1 pour la cellule i . L'équation est discrétisée de la manière suivante, en une dimension,

$$\frac{\alpha_i^* - \alpha_i^0}{\Delta t} + \varepsilon_u \frac{(p_{i+1}^0 - p_{i-1}^0)^2}{4 (\Delta x)^2 \rho_i^0 (\alpha_i^0 C_{2i}^0 + (1 - \alpha_i^0) C_{1i}^0)} \quad (\text{C.2})$$

$$(Y_i^0 - \alpha_i^*) (\alpha_i^* (1 - \alpha_i^*) + (\alpha_i^* Y_i^0 (\gamma_2 - 1) - (1 - \alpha_i^*) (1 - Y_i^0) (\gamma_1 - 1)) (Y_i^0 - \alpha_i^*)) = 0$$

et peut être réécrite sous la forme

$$\alpha_i^* - \alpha_i^0 + \Delta t K (Y_i^0 - \alpha_i^*) P(\alpha_i^*) = 0 \quad (\text{C.3})$$

où nous avons introduit les notations suivantes

$$K = \frac{\varepsilon_u (p_{i+1}^0 - p_{i-1}^0)^2}{\rho_i^0 (\alpha_i^0 C_{2i}^0 + (1 - \alpha_i^0) C_{1i}^0)} \quad (\text{C.4})$$

$$P(\alpha_i^*) = \alpha_i^* (1 - \alpha_i^*) + (\alpha_i^* Y_i^0 (\gamma_2 - 1) - (1 - \alpha_i^*) (1 - Y_i^0) (\gamma_1 - 1)) (Y_i^0 - \alpha_i^*) \quad (\text{C.5})$$

Remarquons que K est une constante positive. Notons aussi que la seule inconnue est la variable α_i^* . Le traitement du terme source dissipatif se fait donc de manière locale, et nous ne noterons plus les indices i . Finalement, nous utilisons une méthode de Newton pour résoudre l'équation

$$f(\alpha^*) = 0 \quad (\text{C.6})$$

avec

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha^0 + \Delta t (Y^0 - \alpha) P(\alpha) \quad (\text{C.7})$$

Étudions maintenant les variations de f en fonction de α . Tout d'abord, on remarque les égalités

$$\begin{cases} f(0) &= -\alpha^0 - \Delta t K (Y^0)^2 (1 - Y^0) (\gamma_1 - 1) < 0 \\ f(1) &= 1 - \alpha^0 + \Delta t K Y^0 (1 - Y^0)^2 (\gamma_2 - 1) > 0 \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Cela assure l'existence de solutions comprises entre 0 et 1 à l'équation $f(\alpha) = 0$. Vérifions maintenant que ces solutions seront trouvées lorsqu'on utilise la méthode de Newton. Pour montrer ce résultat, l'expression de $f'(\alpha)$ doit être déterminée sur l'intervalle $[0, 1]$. Celle-ci s'écrit

$$f'(\alpha) = 1 + \Delta t K ((Y^0 - \alpha) P'(\alpha) - P(\alpha)) \quad (\text{C.9})$$

avec

$$P'(\alpha) = -2\alpha (Y^0 \gamma_2 + (1 - Y^0) \gamma_1) + (Y^0)^2 \gamma_2 + (1 - Y^0)^2 \gamma_1 \quad (\text{C.10})$$

La dérivée $f'(\alpha)$ est un polynôme du second degré ; on remarque que $f'(0) > 0$. Pour déterminer son signe sur l'ensemble de l'intervalle $[0, 1]$, nous la réécrivons

$$f'(\alpha) = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 \quad (\text{C.11})$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \Delta t K Y^0 ((Y^0)^2 \gamma_2 + (1 - Y^0) ((2 + Y^0) \gamma_1 - 1)) \\ A_1 &= -\Delta t K (4 (Y^0)^2 \gamma_2 + 2\gamma_1 (1 - Y^0) (2Y^0 + 1)) \\ A_2 &= 3\Delta t K (Y^0 \gamma_2 + (1 - Y^0) \gamma_1) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Si le discriminant $\Delta = A_1^2 - 4A_0A_2$ est négatif, alors la dérivée $f'(\alpha)$ est positive sur $[0, 1]$, et la méthode de Newton convergera vers l'unique racine de $f(\alpha)$, indépendamment de la valeur initiale de la fraction volumique. Nous prendrons alors comme point de départ α^0 . Si Δ est positif, différents cas de figures apparaissent, dépendant des deux racines de $f'(\alpha)$ notées x_1 et x_2 avec $0 < x_1 < x_2$.

- Si $1 < x_1 < x_2$, alors $f'(\alpha) > 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et la méthode de Newton converge vers l'unique racine de $f(\alpha)$ sur cet intervalle.

- Si $0 < x_1 < 1 < x_2$, alors la méthode de Newton doit commencer avec $\alpha = 0$. En effet, nous avons $f'(\alpha) < 0$ et $f(\alpha) > 0$ sur l'intervalle $[x_2, 1]$, ce qui empêchera la méthode de converger si les itérations sont effectuées à partir d'un point de cet intervalle.

- Si $0 < x_1 < x_2 < 1$, trois cas différents apparaissent selon les valeurs de $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Si elles sont toutes deux positives, nous devons commencer à $x = 0$, pour éviter le minimum local $f(x_2) > 0$. Au contraire, si elles sont toutes deux négatives, il faut débiter à $x = 1$ pour éviter le maximum local $f(x_1) < 0$. Enfin, si $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$, le point de départ sera $x = \alpha^0$ la valeur de la fraction volumique issue de l'étape précédente, de manière à ce que la méthode converge vers la racine de $f(x)$ la plus proche de ce point.

Ainsi, ces choix de points de départ pour les itérations de Newton assurent que la méthode converge vers une racine de $f(\alpha)$ comprise entre 0 et 1, et permettent donc d'assurer la stabilité du traitement du terme source dissipatif.

Résumé

Cette thèse porte sur l'utilisation de modèles hyperboliques pour la simulation des écoulements diphasiques compressibles, pour trouver des alternatives au modèle bifluide classique. Nous établissons tout d'abord une hiérarchie des modèles diphasiques, obtenue selon des hypothèses d'équilibres des variables physiques entre chaque phase. L'utilisation de développements de Chapman-Enskog permet de relier entre eux les différents modèles existants. De plus, des modèles prenant en compte de petits déséquilibres physiques sont obtenus par des développements à l'ordre un. La deuxième partie de cette thèse porte sur la simulation des écoulements caractérisés par des déséquilibres de vitesses et des équilibres de pression, que nous modélisons de deux manières différentes. Tout d'abord, un modèle à deux vitesses et deux pressions est utilisé, avec l'application de relaxations des vitesses et pressions à temps finis afin d'obtenir un retour à l'équilibre de ces grandeurs. On propose ensuite un nouveau modèle dissipatif à une vitesse et une pression, où l'apparition de termes du second ordre permet de prendre en compte les déséquilibres de vitesse entre les phases. Une méthode numérique basée sur une approche par pas fractionnaires est développée pour ce modèle.

Mots-clés : Modèles diphasiques, écoulements compressibles, systèmes hyperboliques, développements de Chapman-Enskog, méthodes volumes finis, déséquilibre des vitesses

Abstract

This thesis deals with hyperbolic models for the simulation of compressible two-phase flows, to find alternatives to the classical bifluid model. We first establish a hierarchy of two-phase flow models, obtained according to equilibrium hypothesis between the physical variables of each phase. The use of Chapman-Enskog expansions enables us to link the different existing models to each other. Moreover, models that take into account small physical unbalances are obtained by means of expansion to the order one. The second part of this thesis focuses on the simulation of flows featuring velocity unbalances and pressure balances, in two different ways. First, a two-velocity two-pressure model is used, where non-instantaneous velocity and pressure relaxations are applied so that a balancing of these variables is obtained. A new one-velocity one-pressure dissipative model is then proposed, where the arising of second-order terms enables us to take into account unbalances between the phase velocities. We develop a numerical method based on a fractional step approach for this model.

Keywords : Two-phase flow models, compressible flows, hyperbolic systems, Chapman-Enskog expansions, finite-volume methods, velocity unbalance

Thèse préparée à l'INRIA Sophia-Antipolis et au CEA Cadarache

