Décompositions géométriques des variétés de dimension 3

Sylvain Maillot

Décompositions géométriques des variétés de dimension 3

Sylvain Maillot

17 octobre 2008

Avant-propos

Le but de ce texte est de présenter les travaux de l'auteur en vue d'obtenir l'Habilitation à Diriger des Recherches.

La première partie traite de questions relatives à la rigidité des quasi-isométries de groupes. Le résultat principal est le théorème 3.2, tiré de l'article [Mai07a], qui permet de classifier dans certains cas les groupes de type fini quasi-isométriques à une variété riemannienne dont on connait la structure conforme.

La deuxième partie est consacrée à la géométrisation des variétés compactes de dimension 3. On rappelle l'énoncé de la Conjecture de Géométrisation de W. Thurston, qui est maintenant un théorème de G. Perelman. Le but est d'expliquer les résultats de l'article [B^{3}MP07], écrit en collaboration avec L. Bessières, G. Besson, M. Boileau et J. Porti, qui fournit une approche alternative à une partie de la preuve de Perelman.

La troisième partie traite de la possibilité de généraliser le programme de géométrisation aux variétés *non-compactes*. On présente des résultats "négatifs" issus de l'article [Mai08c], c'est-à-dire des contre-exemples à des tentatives trop naïves de généralisation. Les résultats principaux sont cependant positifs : le théorème 6.3, tiré de l'article [Mai07b], donne un critère riemannien pour qu'une variété ouverte orientable de dimension 3 admette une décomposition sphérique généralisant celle de H. Kneser.

Ce théorème possède également une version combinatoire (théorème 6.5.) La question, plus difficile, de trouver une condition suffisante pour l'existence d'une décomposition généralisant la décomposition torique de Jaco-Shalen-Johannson, fait l'objet d'une tentative de réponse avec le théorème 7.2. On essaiera de convaincre le lecteur de l'utilité du point de vue et des méthodes géométriques, par opposition à un point de vue purement topologique. Notons aussi que les résultats de [Mai07b] ont été reformulés en tenant compte du fait que la conjecture de Poincaré est démontrée.

Remerciements Je souhaite remercier vivement Gérard Besson, Michel Boileau et Olivier Biquard pour avoir accepté de faire partie du jury, et plus particulièrement Francis Bonahon, David Gabai et Athanase Papadopoulos de m'avoir fait l'amitié et l'honneur d'être rapporteurs, ainsi que Thomas Delzant d'être garant de cette habilitation.

Les travaux présentés ici ont bénéficié de nombreuses conversations, notamment avec Ian Agol, Luisa Paoluzzi, Christophe Pittet, Peter Shalen, et ont été partiellement subventionnés par les projets ACI Jeunes chercheurs "Structures géométriques en théorie des groupes" (2003–2007) puis les projets ANR FOG et Groupes à partir de 2007.

Ma gratitude va également aux départements de mathématiques et équipes qui m'ont accueilli lors de cette période, c'est-à-dire le CIRGET à l'Université du Québec A Montréal, ainsi que l'IRMA à l'Université Strasbourg I.

Je ne saurais faire la liste de tous ceux à qui je suis redevable de leurs conseils, encouragements et qui m'ont appris des mathématiques. Je voudrais cependant citer Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Thomas Delzant, Pierre Pansu et Joan Porti.

Je remercie enfin Alain, Annie, Bertrand, Martine et Timothée.

Première partie

Rigidité des quasi-isométries

1 Introduction

A la suite de travaux de Mostow et Margulis, M. Gromov a introduit la relation d'équivalence suivante entre espaces métriques :

Définition 1.1. Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On dit qu'ils sont *quasi-isométriques* s'il existe des constantes $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$ et une application $f : X_1 \to X_2$ telles qu'on ait :

$$\lambda^{-1} d_1(x, x') - C \leq d_2(f(x), f(x')) \leq \lambda d_1(x, x') + C \qquad \forall x, x' \in X_1$$
$$\forall y \in X_2, \qquad \exists x \in X_1, \qquad d(f(x), y) \leq C.$$

Si Γ est un groupe de type fini, on peut associer à toute partie génératrice finie S de Γ une distance d_S sur Γ, appelée *métrique des mots*, en définissant

$d_S(\gamma_1, \gamma_2)$ comme le plus petit entier n tel que $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ s'écrit comme un produit de n éléments de $S \cup S^{-1}$. Si S' est une autre partie génératrice finie de Γ, alors (Γ, d_S) et $(\Gamma, d_{S'})$ sont quasi-isométriques, de sorte que la propriété pour Γ d'être quasi-isométrique a un espace métrique donné ne dépend pas du choix de S.

Dans ce contexte, on a coutume d'appeler *géométrique* une propriété des groupes de type fini qui est invariante par quasi-isométrie. De nombreuses propriétés algébriques s'avèrent géométriques. Par exemple, la propriété d'être virtuellement nilpotent est, d'après un théorème célébre de Gromov [Gro81], équivalent au fait d'être à croissance polynomiale, qui est clairement une propriété géométrique. Le théorème de Stallings caractérisant les groupes qui admettent un scindement au-dessus d'un sous-groupe fini par le nombre de bouts admet une interprétation similaire, puisque le nombre de bouts d'un groupe est invariant par quasi-isométrie.

Il est donc naturel, étant donné un groupe de type fini, ou plus généralement un espace métrique X, de chercher à caractériser algébriquement les groupes quasi-isométriques à X. Cette question fait l'objet d'une littérature abondante (voir par exemple le survol [Far97]). On peut également poser des questions plus générales, où on remplace l'espace métrique X par une famille d'espaces métriques. De telles généralisations sont étudiées dans les sections suivantes.

2 Rigidité topologique

Nous nous intéressons dans cette section au problème de la *rigidité topologique des quasi-isométries* : que peut-on dire d'un groupe de type fini Γ si l'on suppose qu'il est quasi-isométrique à un espace métrique X dont on ne connait que la topologie ? En pratique, pour que la question soit intéressante, il est nécessaire d'imposer des conditions sur cet espace. Par exemple, si X est une variété lisse, on peut choisir de ne s'intéresser qu'aux métriques riemanniennes, et de supposer celles-ci complètes. Cette dernière hypothèse est naturelle, car elle permet de faire le lien entre la géométrie asymptotique du groupe et la topologie à l'infini de X : par exemple, elle implique que Γ et X ont même nombre de bouts.

On est donc conduit à poser le problème suivant :

Problème. Soit X une variété lisse. Déterminer la classe $\mathcal{G}_X$ des groupes Γ de type fini pour lesquels il existe une métrique riemannienne complète g sur X telle que Γ soit quasi-isométrique à (X, g).

Si X est compacte, $\mathcal{G}_X$ est la classe des groupes finis. Si $X = \mathbf{R}$, ou plus généralement si X a deux bouts, $\mathcal{G}_X$ est la classe des groupes à deux bouts, c'est-à-dire des groupes infinis virtuellement cycliques. La question n'est donc intéressante que si X est non-compacte, de dimension au moins deux, et que son nombre de bouts est 1 ou ∞.

Un des résultats de ma thèse ([Mai00, Théorème 3.1.1], [Mai01]) donne une réponse dans certains cas quand X est de dimension deux. En particulier, la classe $\mathcal{G}_{\mathbf{R}^2}$ est celle des *groupes de surfaces virtuels,* c'est-à-dire des groupes admettant un sous-groupe d'indice fini isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre au moins 1. De façon équivalente, ce sont les groupes qui *agissent géométriquement* (c'est-à-dire de façon proprement discontinue, cocompacte, par isométries) sur le plan euclidien $\mathbf{E}^2$ ou le plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Ce résultat avait été démontré par G. Mess [Mes] sous une hypothèse supplémentaire de géométrie bornée, modulo une conjecture sur les groupes de convergence, qui n'était alors connue que dans certains cas [Tuk88], et qui a été résolue peu de temps après par D. Gabai [Gab92] et A. Casson et D. Jungreis [CJ94] indépendamment. D'autres preuves, reposant également sur le théorème des groupes de convergence, ont été données par B. Bowditch [Bow04] ainsi que M. Kapovich et B. Kleiner (non-publiée).[1]

La question de déterminer $\mathcal{G}_{\mathbf{R}^3}$ est toujours ouverte. Un théorème de rigidité dans ce contexte pourrait être considéré comme une version de la conjecture de géométrisation en théorie géométrique des groupes. Les résultats décrits dans la section suivante sont motivés par cette question.

3 Rigidité conforme

La première étape de l'approche introduite par Mess dans [Mes] et utilisée dans [Mai00, Mai01] pour déterminer la classe $\mathcal{G}_{\mathbf{R}^2}$ consiste à appliquer le théorème d'uniformisation de Riemann : si g est une métrique complète sur $\mathbf{R}^2$, alors g est conformément équivalente à une métrique homogène, qui est la métrique euclidienne ou la métrique hyperbolique. Dans le premier cas, on utilise le théorème des groupes à croissance polynomiale de Gromov et l'invariance du nombre de bouts par quasi-isométrie pour conclure que Γ est virtuellement $\mathbf{Z}^2$. Dans le deuxième, un argument de type 'principe de Bloch' permet de prouver que Γ est quasi-isométrique à $\mathbf{H}^2$. On conclut que Γ agit géométriquement sur $\mathbf{H}^2$ grâce au théorème de Tukia [Tuk88], Gabai [Gab92] et Casson-Jungreis [CJ94].

Cela conduit à la question suivante : si (X, g_0) est une variété riemanienne

[1] A l'origine, ces travaux étaient motivés par la *conjecture des fibrés de Seifert*, qui est un cas particulier de la conjecture de géométrisation (voir la deuxième partie de ce mémoire.)

homogène, dans quelle mesure le fait qu'un groupe Γ soit quasi-isométrique à une métrique conformément équivalente à g_0 implique-t-il que Γ est quasi-isométrique à (X, g_0) ? Cette question a été étudiée dans l'article [Mai07a], dont nous décrivons maintenant les résultats.

Suivant G. Mess, on dit qu'une variété riemannienne (X, g) est *quasi-homogène* s'il existe $\varepsilon > 0$ et une variété riemannienne compacte (Y, g_Y) telle que toute boule métrique de rayon ε dans X peut être plongée isométriquement dans Y. Cette propriété implique notamment que g est complète, à courbure sectionnelle bornée et rayon d'injectivité minoré.

Définition 3.1. Soit (X, g_0) une variété riemannienne. On dit que (X, g_0) est *conformément rigide à grande échelle* si elle a la propriété suivante : pour toute métrique quasi-homogène g sur X, si g est conformément équivalente à g_0 et si (X, g) est quasi-isométrique à un groupe de type fini, alors (X, g) est quasi-isométrique à (X, g_0).

Théorème 3.2 ([Mai07a])**.** *Soit (X, g_0) une variété riemannienne de dimension 3 admettant une action géométrique. Supposons que g_0 est conformément plate. Alors (X, g_0) est conformément rigide à grande échelle.*

Ce théorème s'applique en particulier quand (X, g_0) est l'une des géométries $\mathbf{E}^3$, $\mathbf{H}^3$ et $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$. Grâce aux résultats de rigidité de quasi-isométries correspondants [Gro81, CC92, Rie01], on en déduit une caractérisation des groupes quasi-isométriques à $\mathbf{R}^3$ muni d'une métrique quasi-homogène conformément équivalente à l'une de ces géométries. En particulier, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Soit Γ un groupe de type fini quasi-isométrique à une variété riemannienne quasi-homogène conformément équivalente à $\mathbf{E}^3$ (resp. $\mathbf{H}^3$.) Alors Γ agit géométriquement sur $\mathbf{E}^3$ (resp. $\mathbf{H}^3$.)*

Deuxième partie

Géométrisation des variétés de dimension 3 compactes

La conjecture de géométrisation a été formulée par W. Thurston au milieu des années 1970. En 2002, G. Perelman a annoncé une preuve, qu'il a décrite dans une série de trois prépublications [Per02, Per03b, Per03a]. Cette preuve est aujourd'hui considérée par les experts comme essentiellement correcte.

Le résultat obtenu est un puissant théorème de structure pour les variétés compactes de dimension 3, permettant notamment de montrer la décidabilité du problème d'homéomorphisme pour ces variétés [Jac05].

Dans toute cette partie, M désigne une variété lisse de dimension 3, fermée (c'est-à-dire compacte et sans bord) et orientable. Pour un traitement plus complet, incluant les variétés à bord, éventuellement non-orientables, et les orbifolds, voir [Bon02].

On peut décomposer le programme de géométrisation en deux étapes : la première, qui était connue avant les travaux de Thurston, consiste à construire une décomposition canonique de la variété étudiée ; la deuxième à munir les morceaux de structures géométriques.

La première étape se fait elle-même en deux temps : d'abord la *décomposition sphérique* de Kneser-Milnor, puis la *décomposition torique*, aussi appelée *décomposition JSJ* en l'honneur de W. Jaco, P. Shalen et K. Johannson. Nous allons décrire ces travaux de façon relativement détaillée, car cela est nécessaire pour la discussion des résultats sur les variétés ouvertes dans la troisième partie de ce mémoire.

4 Décompositions canoniques

4.1 Décomposition sphérique

Commençons par une définition générale :

Définition 4.1. Soit $\mathcal{F}$ une collection localement finie de surfaces plongées dans M deux à deux disjointes. On note $M \setminus \mathcal{F}$ le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $\bigcup \mathcal{F}$. On dit que cette variété est *obtenue en découpant M le long de $\mathcal{F}$.*

Si l'on découpe M le long d'une collection finie $\mathcal{S}$ de 2-sphères plongées deux à deux disjointes, on obtient une collection finie $N_1, \ldots, N_p$ de variétés compactes, orientables, dont le bord est constitué de sphères. Il est commode de recoller à chaque composante de bord une 3-boule, de façon a obtenir une collection de variétés fermées. Ces variétés seront notées $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_p$, et leur réunion disjointe $\widehat{M \setminus \mathcal{S}}$. On dit que $\widehat{M \setminus \mathcal{S}}$ est obtenue à partir de M par *décomposition sphérique partielle.*

Soit $S \subset M$ une sphère plongée. S'il existe une sous-variété $B \subset M$ homéomorphe à B^3 telle que $S = \partial B$, alors $\widehat{M \setminus \{S\}}$ a deux composantes : l'une est homéomorphe à M, l'autre à S^3. Comme une telle décomposition n'est pas très intéressante, on dit qu'une telle sphère est *compressible*. On dit que M est *irréductible* si toute sphère plongée dans M est compressible.

Définition 4.2. Soit M une variété fermée, orientable, de dimension 3. Une *décomposition sphérique* de M est une collection finie $\mathcal{S}$ de 2-sphères disjointes plongées dans M telle que chaque composante connexe de $\widehat{M \setminus \mathcal{S}}$ est irréductible.

Théorème 4.3 (H. Kneser [Kne29])**.** *Toute variété fermée, orientable de dimension* 3 *admet une décomposition sphérique.*

Remarque. Dans l'énoncé habituel de ce théorème (apparemment dû à J. Milnor [Mil62]), on exige que les sphères de $\mathcal{S}$ soient séparantes, mais en contrepartie on autorise certains facteurs à être homéomorphes à $S^2 \times S^1$. L'énoncé ci-dessus, plus proche de l'énoncé original de Kneser, ne distingue pas les sphères séparantes des sphères non-séparantes, et nous parait plus naturel au vu des travaux de Perelman, et de la généralisation dont il sera question dans la troisième partie.

4.2 Décomposition JSJ

Soit X une variété de dimension 3 compacte, orientable, irréductible. Soit $F \subset X$ une surface orientable de genre au moins 1 plongée dans X. On dit que F est *incompressible* si le morphisme $\pi_1 F \to \pi_1 X$ induit par l'inclusion est injectif. On dit que X est *atoroïdale* si tout tore plongé dans X est compressible ou isotope à une composante de ∂X.

Dans toute cette sous-section, M est une variété de dimension 3 fermée, orientable, irréductible. Suivant W. Haken [Hak61], on peut adapter la preuve du théorème 4.3 pour montrer qu'il existe une collection finie $\mathcal{C}$ de tores incompressibles plongés dans M, deux à deux disjoints, telle que chaque composante de $M \setminus \mathcal{C}$ est atoroïdale.

Une telle décomposition a toutefois le défaut de ne pas être canonique : considérons par exemple la variété $M_F := F \times S^1$, où F est la surface fermée, orientable de genre 2008. Alors pour toute courbe fermée simple non-contractile $\gamma \subset F$ on obtient un tore incompressible $\gamma \times S^1 \subset M_F$. Réciproquement, on peut montrer que tout tore incompressible dans M_F est isotope à un tore obtenu de cette façon. Les décompositions de M_F en morceaux atoroïdaux correspondent donc aux décompositions en pantalons de F, parmi lesquelles il n'y a aucune décomposition privilégiée.

La discussion précédente s'étend au cas où M est un fibré en cercles au-dessus d'une surface, ou plus généralement une *variété de Seifert*, c'est-à-dire un fibré en cercles au-dessus d'un orbifold de dimension 2.

W. Jaco et P. Shalen [JS79] et K. Johannson [Joh79] ont indépendamment montré que toute variété compacte, orientable, irréductible de dimension 3 admet une décomposition canonique le long de tores incompressibles en morceaux qui sont atoroïdaux ou de Seifert. Une construction élégante a été donnée par W. Neumann et G. A. Swarup [NS97] en utilisant la notion suivante :

Définition 4.4. Un tore T plongé dans M est dit *canonique* s'il est incompressible, et si tout tore incompressible $T' \subset M$ est homotopiquement disjoint de T (rappelons que T' est dit *homotopiquement disjoint de* T s'il existe un tore T'' homotope à T' et disjoint de T).

Par exemple, la variété M_F décrite plus haut ne contient aucun tore canonique. En effet, si T est un tore incompressible, il existe une courbe fermée simple non-contractile $\gamma \subset F$ telle que T est isotope à $\gamma \times S^1$. On peut toujours trouver une courbe fermée simple $\gamma' \subset F$ intersectant γ transversalement en exactement un point. Il n'est pas difficile de voir que le tore incompressible $\gamma' \times S^1$ n'est pas homotopiquement disjoint de T.

Plus généralement, si Σ est une variété de Seifert, alors Σ ne contient pas de tore canonique, sauf dans dans quelques cas particuliers (par exemple $\Sigma = T^2 \times I$).

Définition 4.5. Soit M une variété orientable, fermée, irréductible de dimension 3. Une *décomposition JSJ* de M est une collection finie $\mathcal{C}$ de tores plongés dans M, deux à deux disjoints, canoniques, telle que tout tore canonique de M soit isotope à un et un seul membre de $\mathcal{C}$.

Théorème 4.6 ([NS97])**.** *Soit M une variété orientable, fermée, irréductible de dimension 3. Alors M admet une décomposition JSJ, unique à isotopie près. De plus, cette décomposition $\mathcal{C}$ a la propriété suivante : chaque composante de $M \setminus \mathcal{C}$ est fibrée de Seifert ou atoroïdale.*

Notons que les propriétés d'être de Seifert et d'être atoroïdale ne sont pas exclusives : par exemple il existe des variétés de Seifert dont le groupe fondamental est fini. Cette classe coïncide avec celle des *variétés sphériques*, c'est-à-dire des variétés obtenues en quotientant S^3 par un groupe fini d'isométries agissant librement.

Remarque. L'énoncé ci-dessus contient ce que l'on appelle la "théorie élémentaire" de la décomposition JSJ. Il permet une description complète des tores incompressibles plongés dans M : un tel tore est toujours homotope à un tore plongé dans une des composantes de Seifert de $M \setminus \mathcal{C}$. La même propriété est en fait vérifiée pour tous les tores *singuliers* incompressibles, mais cela est plus difficile à prouver.

5 Le théorème de géométrisation

5.1 Introduction

Soit X une variété de dimension 3 orientable, compacte, dont le bord est une réunion (peut-être vide) de tores. On dit que X est *hyperbolique* si son intérieur admet une métrique complète de courbure sectionnelle constante strictement négative et de volume fini.

Au milieu des années 1970, W. Thurston a conjecturé que les variétés atoroïdales apparaissant dans la décomposition JSJ d'une variété fermée irréductible sont soit de Seifert, soit hyperboliques. A l'appui de cette conjecture il a énoncé le théorème suivant :

Théorème 5.1 (Thurston [Thu82])**.** *Soit M une variété orientable, fermée, irréductible de dimension 3 et $\mathcal{C}$ sa décomposition JSJ. Supposons que M contient une surface incompressible. Alors chaque composante de $M \setminus \mathcal{C}$ est fibrée de Seifert ou hyperbolique.*

Pour une preuve de ce résultat, voir [Ota01, Ota98, Kap01].

Le théorème 5.1 s'applique en particulier dès que M contient un tore incompressible. La conjecture de géométrisation était donc réduite à montrer que si M est une variété ferméee, orientable, irréductible et atoroïdale, alors M est de Seifert ou hyperbolique.

Cela résulte du théorème des fibrés de Seifert, dû à P. Scott [Sco83], G. Mess [Mes], P. Tukia [Tuk88], D. Gabai [Gab92], A. Casson et D. Jungreis [CJ94] dans le cas où $\pi_1 M$ a un centre non-trivial, ou encore contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Voir [BMP03, chap. 5] pour une introduction à ce théorème.

La conjecture était également connue quand M possède un groupe fini de symétries dont l'ensemble des points fixes a une dimension au moins égale à 1. Ce résultat est un cas particulier du théorème des orbifolds de Thurston. Voir [BLP05] pour une preuve, ou [CHK00, BMP03] pour une introduction.

La solution complète de la conjecture est venue des travaux de G. Perelman [Per02, Per03b, Per03a], eux-même basés sur un programme de R. Hamilton [Ham95] utilisant le flot de Ricci. De nombreux auteurs ont contribué à la compréhension de ces idées en exposant de manière plus détaillée certaines parties de la preuve de Perelman ou en donnant des arguments alternatifs. On peut citer en particulier [KL06, MT07, Ye08b, Ye08a, CZ06, CM05, B^{3}MP07].

Il existe à présent plusieurs façons de présenter la preuve. Nous n'essaierons pas ici de les décrire toutes, et nous concentrerons sur la version qui fait l'objet de la monographie en préparation [B^{3}MP]. Pour une présentation plus détaillée, on pourra consulter le survol [Mai08b], dans lequel certaines généralisations des résultats sont également annoncées.

Soit X une variété de dimension 3 compacte, orientable. On dit que X est une *variété graphée* si X est obtenue en recollant des variétés de Seifert le long de leur bord. La classification de ces variétés, due à F. Waldhausen [Wal67] entraîne que si M est une variété graphée irréductible fermée, alors chaque morceau de la décomposition JSJ de M est une variété de Seifert. Ce résultat, joint au théorème 5.1, réduit la conjecture de géométrisation à l'énoncé suivant :

Théorème 5.2 (Perelman)**.** *Soit M une variété orientable, fermée, irréductible de dimension* 3*. Alors l'une des conclusions suivantes est vérifiée :*

i. M est hyperbolique, ou

ii. M est graphée, ou

iii. M contient un tore incompressible.

5.2 Survol de la preuve

Soit M une variété satisfaisant les hypothèses du théorème 5.2. On appelle *flot de Ricci* une famille $\{g(t)\}$ à un paramètre de métriques riemanniennes sur M satisfaisant l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dg}{dt} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)} \tag{1}$$

où $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ désigne le tenseur de Ricci de la métrique $g(t)$.

R. Hamilton [Ham82] a montré que pour toute condition initiale g_0, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un unique flot de Ricci $\{g(t)\}$ défini sur $[0, \varepsilon[$ et satisfaisant $g(0) = g_0$. Le principe du maximum permet de contrôler l'évolution de diverses quantités géométriques le long de ce flot. En particulier, le minimum de la courbure scalaire de $g(t)$, que nous noterons $R_{\min}(g(t))$, est une fonction croissante de t.

Toutes les versions de la preuve ont un noyau commun, qui est la construction d'un *flot de Ricci avec chirurgie*. Nous présentons ici une notion de ce type, que nous appelons provisoirement *solution faible*, et dont la définition est plus simple que celle de Perelman. Il s'agit d'une famille $\{g(t)\}$ à un paramètre de métriques riemanniennes sur M satisfaisant l'équation (1) pour presque tout t, et pouvant admettre un ensemble discret de discontinuités, où la variation de la métrique est contrôlée.

Plus précisément, on a la définition suivante :

Définition 5.3. Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle. Soit $\{g(t)\}_{t \in I}$ une famille à un paramètre de métriques riemanniennes sur M dont la dépendance par rapport à t est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Supposons que pour tout temps $t_0 \in I$ singulier (c'est-à-dire où l'évolution est discontinue), $g(t)$ admet une limite à droite, notée $g_+(t_0)$, et est continue à gauche. Alors on dit que $\{g(t)\}_{t \in I}$ est une *solution faible* de l'équation du flot de Ricci (1) si

i. L'équation (1) est satisfaite pour tout temps régulier.

ii. Pour tout temps singulier $t \in I$ on a

   (a) $R_{\min}(g_+(t)) \geq R_{\min}(g(t))$, et

   (b) $g_+(t) \leq g(t)$.

Sous les hypothèses faites au début de cette section, on a le théorème suivant :

Théorème 5.4 ([B³MP])**.** *Si M n'est pas sphérique, alors pour toute métrique g_0 sur M il existe une solution faible $\{g(t)\}$ définie sur $[0, +\infty[$ telle que $g(0) = g_0$.*

Bien que l'énoncé de ce théorème puisse paraître très simple, sa preuve est difficile et utilise la plus grande partie des travaux de Perelman. Elle repose sur le fait suivant (conséquence de résultats de W.-X. Shi, R. Hamilton et T. Ivey) : si la solution maximale du flot de Ricci avec condition initiale g_0 est définie seulement sur un intervalle borné $[0, T[$, alors le maximum de la courbure scalaire de $g(t)$ tend vers l'infini quand t tend vers T. Il existe donc des points de l'espace-temps où la courbure scalaire devient très grande.

Or un des principaux théorèmes de Perelman, le "théorème des voisinages canoniques" [Per02, Theorem 12.1], donne une bonne description locale de la géométrie en ces points. Plus précisément, étant donné un nombre $\varepsilon_0 > 0$, il existe un nombre $r > 0$ ne dépendant que de T et de g_0, tel que si la courbure scalaire de $g(t)$ en un point $x \in M$ dépasse r^{-2}, alors x admet un voisinage métriquement proche (avec précision ε_0) d'une boule dans une κ-solution, les κ-solutions étant des solutions modèles dont l'évolution est bien comprise [Per02, § 11].

On reformule la conclusion ci-dessus en disant que le flot de Ricci $\{g(t)\}$ a la *propriété des voisinages canoniques avec paramètre r*. Grâce à cette propriété, il est possible d'arrêter le flot en un temps $t_0 < T$ où le maximum de la courbure scalaire est grand et d'effectuer une *chirurgie métrique*, opération qui permet de construire à partir de la métrique $g(t_0)$ une métrique $g_+(t_0)$ satisfaisant les conditions (ii)(a) et (ii)(b) de la définition 5.3, et qui de plus a la propriété suivante : le maximum de la courbure scalaire de $g_+(t_0)$ est inférieur à la moitié de celui de $g(t_0)$. C'est cette dernière propriété, jointe à un contrôle de la vitesse d'explosion de la courbure scalaire provenant également de la propriété des voisinages canoniques, qui garantit que si on relance le flot de Ricci à partir de $g_+(t_0)$ et que l'on itère cette construction, l'ensemble des temps singuliers est discret.

La difficulté est de montrer que l'on peut effectivement itérer la construction. Pour cela, le théorème 12.1 de [Per02] ne suffit pas, car le paramètre r dépend de la condition initiale, et il est important de le garder fixe afin d'éviter l'accumulation de chirurgies. Il est donc nécessaire de traiter la propriété des voisinages canoniques comme une hypothèse *a priori*. Cela signifie que pour T fixé, on considère la classe des solutions faibles satisfaisant la propriété des voisinages canoniques avec paramètre r, et telle que chaque chirurgie est effectuée d'une manière prescrite, dépendant d'un autre paramètre δ.[2] Nous appelerons ces solutions faibles particulières des (r, δ)-solutions faibles.

Le théorème technique principal peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème 5.5. *Si M n'est pas sphérique, alors pour tout $T > 0$ et pour toute métrique g_0 il existe des nombres strictement positifs r, δ et une (r, δ)-solution faible $\{g(t)\}$ définie sur $[0, T]$ telle que $g(0) = g_0$.*[3]

En appliquant ce théorème successivement sur les intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$, etc. on en déduit le théorème 5.4.

Le reste de la preuve du théorème 5.2 se divise en deux cas.

$\pi_1 M$ est fini. Ce cas est le plus simple, car on peut utiliser le théorème 5.4 comme une boite noire. D'après le théorème de la sphère et le théorème de Hurewicz, on sait que $\pi_3 M \neq 0$. Les arguments de [Per03a] (voir aussi [MT07]) ou de [CM05] permettent de trouver un *temps d'extinction* $T(g_0)$, dépendant de la métrique initiale g_0. Cela signifie que si $\{g(t)\}_{t \in [0,T]}$ est une solution faible de condition initiale g_0, alors $T < T(g_0)$. En confrontant ce résultat au théorème 5.4, on conclut que M est sphérique.

$\pi_1 M$ est infini. Dans ce cas, le théorème 5.4 est insuffisant : il est nécessaire de d'étudier les solutions faibles particulières produites par itération du théorème 5.5 (c'est-à-dire de paramètres (r_k, δ_k) sur l'intervalle $[k, k + 1]$). Suivant [Per03b, § 6,7], on détermine leur comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$.

[2]... et satisfaisant d'autres propriétés que l'on passe ici sous silence par souci de simplicité.

[3]En réalité les paramètres r et δ ne dépendent que de T si la métrique g_0 est convenablement normalisée.

L'invariance d'échelle de l'équation (1) invite à étudier la famille de métriques $\tilde{g}(t) := (4t)^{-1}g(t)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout t on peut décomposer M en une partie mince et une partie épaisse, en déclarant que la *partie ε-mince* de la variété riemannienne $(M, \tilde{g}(t))$ est l'ensemble des points $x \in M$ tels qu'il existe $\rho \in]0, 1]$ pour lequel la boule de centre x et de rayon ρ pour $\tilde{g}(t)$ a un volume inférieur à $\varepsilon\rho^3$ et la courbure sectionnelle est minorée par $-\rho^{-2}$ sur cette boule. La *partie ε-épaisse* est le complémentaire de la partie ε-mince.

On a alors le plan d'attaque suivant, où l'on distingue à nouveau trois cas :

(1) Il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $t_n \to \infty$ telle que pour tout n, la partie ε-épaisse de $(M, \tilde{g}(t_n))$ est égale à M tout entière. Dans ce cas on montre que $\tilde{g}(t_n)$ converge (à difféomorphisme près) vers une métrique hyperbolique sur M.

(2) Il existe des suites $\varepsilon_n \to 0$ et $t_n \to \infty$ telles que la partie ε_n-mince de $(M, \tilde{g}(t_n))$ est égale à M tout entière. Dans ce cas on montre que M est une variété graphée (cf. théorème 5.6.)

(3) Ni (1) ni (2) ne sont vérifiées. C'est le cas le plus difficile. Il faut montrer que M contient un tore incompressible. Intuitivement, la partie épaisse est métriquement proche d'une réunion de cœurs compacts de variétés hyperboliques de volume fini, et le tore incompressible recherché s'obtient comme composante du bord de la partie épaisse.

5.3 Effondrement

Dans toute cette section, M est une variété fermée, orientable, irréductible de dimension 3 dont le groupe fondamental est non-trivial.

Soit g une métrique riemannienne sur M et ε un nombre strictement positif. un point $x \in M$ est dit *ε-mince* s'il existe $\rho \in]0, 1]$ tel que la boule de centre x et de rayon ρ a un volume inférieur à $\varepsilon\rho^3$ et la courbure sectionnelle est minorée par $-\rho^{-2}$ sur cette boule. Dans le cas contraire, on dit que x est *ε-épais*.

Soit g_n une suite de métriques riemanniennes sur M. On dit que g_n *s'effondre* s'il existe une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que pour tout n, tout point de (M, g_n) est ε_n-mince.

Nous aurons besoin de la définition technique suivante : une suite de métriques g_n a une *courbure localement contrôlée au sens de Perelman* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\bar{r}, K_0, K_1 > 0$ tels que pour n assez grand, pour tous $r \in]0, \bar{r}]$ et $x \in (M, g_n)$, si $\mathrm{vol}(B(x, r) \geq \varepsilon r^3$ et la courbure sectionnelle est minorée par $-r^{-2}$ sur $B(x, r)$, alors l'opérateur de courbure et sa première dérivée covariante ont des normes majorées par $K_0 r^{-2}$ et $K_1 r^{-2}$ respectivement. On peut interpréter cette condition comme une borne supérieure sur les courbures sectionnelles et leurs dérivées covariantes 'à l'échelle du volume', c'est-à-dire aux échelles suffisamment petites pour que le volume des boules soit minoré. L'important pour nous est que cette condition est satisfaite pour les suites de métriques extraites du flot de Ricci décrites à la sous-section précédente.

Dans [B^{3}MP07], nous prouvons le théorème suivant, qui est un cas particulier d'un résultat anoncé par Perelman dans [Per03b].

Théorème 5.6. *Supposons que M admet une suite de métriques riemanniennes g_n qui s'effondre et a une courbure localement contrôlée au sens de Perelman. Alors M est une variété graphée.*

A l'aide de ce théorème, on peut terminer la preuve de la conjecture de géométrisation suivant le plan établi à la fin de la sous-section précédente. Cependant dans [B^{3}MP07] nous adoptons une approche un peu différente, dans laquelle les cas (2) et (3) sont traités ensemble, grâce au théorème 5.7 ci-dessous.

Notons $V_0(M)$ le minimum des volumes des sous-variétés hyperboliques $H \subset M$ telles que $M \setminus H$ est un entrelacs (avec la convention que l'ensemble vide est un entrelacs.)

Théorème 5.7. *Supposons que M admet une suite de métriques riemanniennes g_n ayant les proprétés suivantes :*

(1) la suite $\mathrm{vol}(g_n)$ *est bornée ;*

(2) si ε est un nombre strictement positif et x_n une suite de points tel que pour tout n, x_n est ε-épais par rapport à g_n, alors la suite de variétés pointées (M, g_n, x_n) admet une sous-suite qui converge au sens $\mathcal{C}^2$ vers une variété hyperbolique complète de volume strictement inférieur à $V_0(M)$;

(3) la suite g_n a une courbure localement contrôlée au sens de Perelman.

Alors M est une variété graphée ou contient un tore incompressible.

Pour déduire le théorème 5.2 dans le cas où $\pi_1 M$ est infini du théorème 5.7 et de l'analyse en temps long des (r_k, δ_k)-solutions faibles, on compare $V_0(M)$ à un invariant $\overline{R}(M)$, défini comme le supremum de $\hat{R}(g)$ pris sur toutes les métriques riemanniennes g sur M, où $\hat{R}(g)$ est le produit du minimum de la courbure scalaire par le volume à la puissance $2/3$.

Quand $\overline{R}(M) \leq -6V_0(M)^{2/3}$, il est facile de démontrer que M est hyperbolique : si ce n'est pas le cas, on considère un entrelacs hyperbolique $L_0 \subset M$ de volume minimal, et on construit une métrique sur M de volume strictement inférieur à $V_0(M)$ et dont la courbure scalaire a un minimum égal à -6 (celui de l'espace hyperbolique.) Ceci contredit l'hypothèse.

Le cas difficile est donc celui où $\overline{R}(M) > -6V_0(M)^{2/3}$. Dans ce cas on part d'une métrique g_0 telle que $\hat{R}(g_0) > -6V_0(M)^{2/3}$ et on utilise le travail sur les solutions faibles du flot de Ricci pour trouver une suite de métriques $g_n := (4n)^{-1}g(n)$ satisfaisant les hypothèses (1) et (3) du théorème 5.7 et telle que pour tout choix de suite de points bases x_n uniformément épais, la suite de variétés pointées (M, g_n, x_n) converge vers une variété hyperbolique. La monotonie de $\hat{R}$ le long des solutions faibles prouve que $\hat{R}(g_n)$ est croissante, donc admet une limite plus grande que $-6V_0(M)^{2/3}$. Ceci garantit que les limites hyperboliques dont il est question plus haut ont un volume strictement plus petit que $V_0(M)$. Le théorème 5.7 permet donc de conclure que M est graphée ou contient un tore incompressible.

Remarque. Kleiner-Lott et Morgan-Tian ont indépendamment annoncé une preuve du théorème 5.6 suivant l'approche suggérée par Perelman. L'article de Morgan-Tian vient tout récemment de paraître sur arXiv [MT08].

Troisième partie

Variétés ouvertes de dimension 3

Le problème de la classification topologique des variétés non-compactes de dimension 3 semble ne jamais avoir été abordé en toute généralité. En 1958, C. Papakyriakopoulos [Pap58] lui consacre un court paragraphe, dans lequel il explique pourquoi il considère ce problème comme très difficile. En particulier, il remarque que l'analogue de la conjecture de Poincaré est faux ; en effet, J. H. C. Whitehead [Whi35] a montré qu'il existe des variétés ouvertes de dimension 3 qui sont contractiles sans être homéomorphes à $\mathbf{R}^3$.

En 1982, W. Thurston [Thu82] ne mentionne même pas cette question, et se concentre sur les variétés compactes. Or une grande partie de ses travaux en géométrie hyperbolique concerne les variétés ouvertes. Il est donc naturel de chercher à déterminer la place des variétés hyperboliques parmi les variétés ouvertes de dimension 3.

Il y a cependant une abondante littérature sur les variétés non-compactes de dimension 3. Certains travaux (par exemple [BT87]) consistent à définir et étudier des classes particulières de variétés. D'autres visent à démontrer que les exemples considérés comme pathologiques, comme les variétés de

Whitehead, ne peuvent apparaître comme revêtements universels de variétés compactes (voir par exemple [Mye88, Mye99, Wri92].) L'application la plus marquante de ces idées est sans doute la preuve de la conjecture de Marden [CG06, Ago], qui montre que toute variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte.

Les travaux présentés dans cette partie constituent la base d'un programme dont le but est d'étendre la géométrisation aux variétés ouvertes. Dans la suite, toutes les surfaces et les variétés de dimension 3 sont lisses, connexes et orientables.

6 Décomposition sphérique

6.1 Définition et exemples

Soit M une variété (orientable) de dimension 3 sans bord. Si M n'est pas compacte, on ne peut évidemment espérer qu'elle ait une décomposition sphérique finie en morceaux irréductibles. Par exemple, si $\mathbf{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ est le tore de dimension 3 (ou n'importe quelle variété irréductible non homéomorphe à S^3,) on peut prendre une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de copies de $\mathbf{T}^3$ et construire la somme connexe infinie $M_0 := X_0 \# X_1 \# X_2 \# \cdots$.

La variété M_0 n'admet pas de décomposition sphérique finie, mais elle admet une collection *localement finie* de 2-sphères plongées disjointes telle qu'en découpant M le long de ces sphères et en collant des boules aux composantes de bord, on retrouve la collection infinie de 3-tores dont on est parti. Cette constatation mène à la définition suivante.

Définition 6.1. Soit M une variété orientable de dimension 3 sans bord. Une *décomposition sphérique* de M est une collection localement finie $\mathcal{S}$ de 2-sphères disjointes plongées dans M telle que pour chaque composante connexe N de $M \setminus \mathcal{S}$, la variété $\hat{N}$ est irréductible.

Cependant, il existe des variétés ouvertes de dimension 3 n'admettant aucune décomposition sphérique. A ma connaissance, le premier exemple a été donné par P. Scott [Sco77]. Nous donnons ici un exemple plus simple tiré de [Mai08c] : soit F la surface orientable à un bout, de genre infini et ayant exactement une composante de bord, laquelle est homéomorphe à S^1. Posons $N := S^1 \times F$. Soit M_1 la variété obtenue en collant un tore solide $V \cong D^2 \times S^1$ à N de sorte que le bord du facteur D^2 de V soit collé au facteur S^1 de N, et le facteur S^1 de V soit collé à ∂F.

Proposition 6.2 ([Mai08c]). *La variété M_1 n'admet pas de décomposition sphérique.*

Esquisse de preuve. On montre d'abord que la variété N est irréductible (cela résulte du théorème d'Alexander appliqué au revêtement universel.) Par conséquent, toute sphère *essentielle* plongée dans M (c'est-à-dire qui ne borde pas de boule) rencontre la sous-variété compacte V. On en déduit que M n'admet pas de décomposition sphérique infinie.

Pour voir que M n'admet pas de décomposition sphérique finie, on raisonne par l'absurde : soit $S_1, \ldots, S_n$ une telle décomposition. A tout arc α proprement plongé dans F on associe une sphère $S_\alpha \subset M_1$ en recollant deux disques méridiens de V à l'anneau $\alpha \times S^1 \subset N$. En exploitant le fait que F est de genre infini, on trouve un arc α tel que S_α ne peut être obtenue à partir de $S_1, \ldots, S_n$ par chirurgie le long de disques. Ceci mène à une contradiction. $\square$

6.2 Caractérisation riemannienne des variétés admettant une décomposition

Le résultat principal de l'article [Mai07b] est une caractérisation riemannienne des variétés qui admettent une décomposition sphérique. L'énoncé suivant combine le Théorème 1.1 de [Mai07b], une des remarques suivant son énoncé, et la solution affirmative de la conjecture de Poincaré :

Théorème 6.3. *Soit M une variété orientable sans bord de dimension 3. Alors M admet une décomposition sphérique si et seulement si elle admet une métrique riemannienne complète, de courbure sectionnelle bornée et de rayon d'injectivité minoré, pour laquelle il existe une constante $C \geq 0$ telle que la collection des applications lisses de S^2 dans M d'aire au plus C engendre $\pi_2 M$ comme $\pi_1 M$-module.*

La preuve du théorème 6.3 repose sur la proposition suivante (cf. [Mai07b, proposition 2.1].)

Proposition 6.4. *Soit $\mathcal{S}$ une collection localement finie de 2-sphères disjointes plongées dans M. Alors $\mathcal{S}$ est une décomposition sphérique si et seulement si $\mathcal{S}$ engendre $\pi_2 M$ comme $\pi_1 M$-module.*

Une fois démontrée la proposition 6.4, il est facile de voir que dans le théorème 6.3 la condition riemannienne est nécessaire : en effet, si M admet une décomposition sphérique $\mathcal{S}$, il est toujours possible de munir M d'une métrique complète à géométrie bornée où chaque sphère de $\mathcal{S}$ est d'aire 1, par exemple.

La partie difficile consiste donc à démontrer que la condition est suffisante. Pour cela, on commence par réduire l'énoncé cherché à une version combinatoire. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de M, F une surface compacte et $f : F \to M$ une application en position générale. On appelle *poids* de f (mesuré par rapport à $\mathcal{T}$) le nombre de points d'intersection de $f(F)$ avec le 1-squelette de $\mathcal{T}$. La version combinatoire évoquée plus haut s'énonce ainsi :

Théorème 6.5. *Soit M une variété orientable sans bord de dimension 3. Supposons que M admet une triangulation $\mathcal{T}$ pour laquelle il existe une constante $C \geq 0$ telle que la collection des applications de S^2 dans M de poids au plus C engendre $\pi_2 M$ comme $\pi_1 M$-module. Alors M admet une décomposition sphérique.*

Pour déduire la partie difficile du théorème 6.3 du théorème 6.5, on commence par construire une triangulation $\mathcal{T}$ adaptée à la métrique g, au sens où chaque 3-simplexe est C_0-biLipschitz équivalent au simplexe standard. On utilise pour cela une technique remontant à la thèse de J. Cheeger. C'est cette étape qui utilise l'hypothèse de géométrie bornée.

Il s'agit ensuite, pour toute application $f : S^2 \to M$ de relier l'aire riemannienne de f (mesuré par rapport à g) à son poids. En général ces deux quantités peuvent être très différentes : par exemple, une application qui évite le 1-squelette a un poids nul, mais peut avoir une aire arbitrairement grande. A l'inverse, une sphère qui borde le ε-voisinage d'un long chemin dans le 1-squelette a une aire petite, mais un grand poids. On montre néanmoins que si une sphère a une petite aire mais un grand poids, on peut l'exprimer comme somme de sphères de poids contrôlé, ce qui suffit pour nos besoins.

Il reste enfin à démontrer le théorème 6.5. La technique principale est la théorie des surfaces PL minimales, dûe à W. Jaco et H. Rubinstein [JR88], ou plus exactement une version développée dans [Mai00, Mai03], qui est mieux adaptée aux variétés non-compactes. On construit par induction transfinie une collection de sphères $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_\omega, S_{\omega+1}, \ldots, S_{2\omega}, \ldots$ engendrant $\pi_2 M$, telle que chaque S_α est d'aire PL minimale parmi toutes les sphères qui ne sont pas engendrées par la collection des S_β, $\beta < \alpha$. La théorie des surfaces PL minimales garantit que les S_α sont plongées et deux à deux disjointes.[4] L'hypothèse sur $\mathcal{T}$ entraîne qu'elles ont un poids uniformément majoré, ce qui permet de démontrer que la collection obtenue est localement finie.

[4]On ignore dans cette discussion simplifiée les problèmes techniques liés aux situations non-génériques, comme par exemple les revêtements doubles de RP^2.

7 Décomposition JSJ

7.1 Définition et exemples

Lorsque l'on cherche à étendre la théorie de la décomposition JSJ aux variétés ouvertes, on rencontre une série d'exemples de “bonnes” et “mauvaises” variétés. La distinction entre les deux est sans doute en partie subjective ; nous serons ici guidés par le même principe qu'à la section précédente, à savoir que nous cherchons à nous restreindre aux décompositions *localement finies*.

Il est bien sûr facile de construire, de façon analogue à la variété M_0 de la section précédente, une variété M_0' possédant une famille infinie $\mathcal{C}$ de tores incompressibles la découpant en morceaux atoroïdaux. Dans ce cas, les tores de $\mathcal{C}$ sont canoniques, et il est légitime de considérer $\mathcal{C}$ comme la décomposition JSJ de M_0'. Comme précédemment, il existe des exemples pathologiques : dans [Mai08c] on construit une variété M_2 dans laquelle il existe une infinité de classes d'isotopie de tores canoniques qui rencontrent tous une certaine sous-variété compacte. Il est donc impossible de choisir des représentants de ces classes de façon à former une collection localement finie.

En étendant les méthodes de l'article [Mai07b], on peut montrer que la pathologie ci-dessus est évitée si M admet une métrique riemannienne à géométrie bornée pour laquelle il existe une constante C telle que tout tore canonique est isotope à un tore d'aire au plus C. Cependant, cela n'est pas suffisant à cause de l'exemple ci-dessous.

Soit X une variété irréductible, atoroïdale, dont le bord est un anneau ouvert incompressible. Supposons que X n'est pas homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R} \times [0, \infty)$. Soit Y le produit de S^1 avec une surface de genre infini dont le bord est une droite. En recollant X et Y le long de leur bord, on obtient une variété M_0''. On établit facilement les faits suivants :

- M_0'' ne contient aucun tore canonique.
- Y contient une infinité de classes d'isotopie de tores incompressibles, qui sont également incompressibles dans M_0''.
- Y est une variété de Seifert.

Dans cet exemple, il est impossible de trouver une bonne décomposition de M_0'' le long de *tores*, mais tout s'arrange si l'on s'autorise à décomposer le long d'*anneaux*. En effet, l'anneau $A = \partial X = \partial Y$ décompose M_0'' en un morceau atoroïdal et un morceau de Seifert. Il semble donc naturel de considérer $\{A\}$ comme la décomposition JSJ de M_0''. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 7.1. Soit M une variété orientable, sans bord, de dimension 3. Une *décomposition JSJ* de M est une collection localement finie $\mathcal{C}$ de tores et anneaux ouverts proprement plongés dans M, disjoints et incompressibles, vérifiant les conditions suivantes :

i. Chaque composante de $M \setminus \mathcal{C}$ est fibrée de Seifert ou atoroïdale ;

ii. Chaque tore de $\mathcal{C}$ est canonique ;

iii. Tout tore canonique dans M est homotope à un tore de $\mathcal{C}$.

iv. Tout tore incompressible plongé dans M est homotope à un tore contenu dans $M \setminus \mathcal{C}$.

7.2 Une condition suffisante pour l'existence d'une décomposition JSJ

Le résultat principal de [Mai08a] est une condition suffisante pour qu'une telle décomposition existe. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'un peu de terminologie.

Une triangulation $\mathcal{T}$ est dite *à géométrie bornée* s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout sommet v de $\mathcal{T}$, le nombre de simplexes de $\mathcal{T}$ contenant v est inférieur à C. La *longueur* d'une courbe $\gamma \subset M$ en position générale est le nombre de points d'intersection de γ avec le 2-squelette de $\mathcal{T}$. La *distance* entre deux points $x, y \in M$ est le nombre minimal de 3-simplexes suffisant à connecter x à y, moins un. De plus, on rappelle (cf. section 6) que si F est une surface compacte plongée en position générale dans M, on appelle *poids* de F le nombre de points d'intersection de F avec le 1-squelette de $\mathcal{T}$.

Pour la notion de *surface normale* (due à W. Haken [Hak61]) on renvoie, par exemple, à [JR89]. Une surface compacte est dite *de poids minimal* si elle a un poids minimal parmi toutes les surfaces qui lui sont isotopes.

Si M est une variété ouverte de dimension 3 et T un tore incompressible non-canonique, il existe [Mai08a, Proposition 3.1] une unique classe d'isotopie libre $\xi(T)$ de courbes fermées simples telle que si $T' \subset M$ est un tore incompressible en position générale qui n'est pas homotopiquement disjoint de T, alors $T \cap T'$ contient au moins une courbe appartenant à $\xi(T)$. Nous appelerons *courbes spéciales* les éléments de $\xi(T)$.

Pour motiver la définition précédente, indiquons que dans le cas où M admet une décomposition JSJ, le tore T est, à homotopie près, contenu dans un morceau de Seifert Σ de cette décomposition ; les courbes spéciales sont alors librement homotopes aux fibres génériques de la fibration de Seifert de Σ.

Théorème 7.2 ([Mai08a])**.** *Soit M une variété ouverte, orientable, irréductible de dimension* 3*. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation de M à géométrie bornée. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

A Il existe une constante C_1 telle que chaque classe d'isotopie de tores canoniques a un représentant de poids au plus C_1 ;

B Il existe une constante C_2 telle que pour tout tore incompressible non-canonique T de poids minimal et tout point $x \in T$, il existe une courbe spéciale $\gamma \subset T$ passant par x et de longueur au plus C_2 ;

C Il existe des constantes C_3, C_4 telles que si T est un tore incompressible non-canonique de poids minimal et σ un 3-simplexe de $\mathcal{T}$ tel que $T \cap \sigma$ n'est pas connexe, alors il existe un tore normal T' de poids au plus C_3, qui n'est pas homotopiquement disjoint de T, et tel que $T \cap T'$ contient un point dont la distance à σ est au plus C_4 ;

D Si T, T' sont deux tores incompressibles, non-canoniques, de poids minimal, disjoints, et σ est un 3-simplexe de $\mathcal{T}$ tel que $T \cap \sigma$ (resp. $T' \cap \sigma$) est un disque D (resp. D'), alors il existe un anneau A reliant une courbe spéciale de T à une courbe spéciale de T', telle que l'intérieur de A ne rencontre pas $T \cup T'$, et telle qu'il existe un arc essentiel $\alpha \subset A \cap \sigma$ reliant D à D'.

Alors M admet une décomposition JSJ.

La preuve du théorème 7.2 est similaire à celle du théorème 6.5, mais nettement plus délicate. Il s'agit essentiellement de construire une suite de familles de tores qui bordent des sous-variétés de Seifert de plus en plus grandes. Les tores construits ne forment en général pas une famille localement finie. La difficulté principale est de montrer qu'on peut obtenir les anneaux de la décomposition à partir de suites de tores qui s'accumulent, grâce à un équivalent combinatoire de la notion de limite de Gromov-Hausdorff pointée.

Références

[Ago] Ian Agol. Tameness of hyperbolic 3-manifolds. arXiv :math.GT/0405568.

[B^{3}MP] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti. Géométrisation des variétés de dimension 3. Monographie en préparation.

[B^{3}MP07] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti. Weak collapsing and geometrisation of aspherical 3-manifolds. ArXiv : 0706.2065, Juin 2007. Soumis.

[BLP05] Michel Boileau, Bernhard Leeb et Joan Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math. (2)*, 162(1) :195–290, 2005.

[BMP03] Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Bon02] Francis Bonahon. Geometric structures on 3-manifolds. In *Handbook of geometric topology*, pages 93–164. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Bow04] Brian H. Bowditch. Planar groups and the Seifert conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 576 :11–62, 2004.

[BT87] Matthew G. Brin et T. L. Thickstun. Open, irreducible 3-manifolds which are end 1-movable. *Topology*, 26(2) :211–233, 1987.

[CC92] J. W. Cannon et Daryl Cooper. A characterization of cocompact hyperbolic and finite-volume hyperbolic groups in dimension three. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1) :419–431, 1992.

[CG06] Danny Calegari et David Gabai. Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(2) :385–446 (electronic), 2006.

[CHK00] Daryl Cooper, Craig D. Hodgson et Steven P. Kerckhoff. *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, volume 5 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. With a postface by Sadayoshi Kojima.

[CJ94] Andrew Casson et Douglas Jungreis. Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.*, 118 :441–456, 1994.

[CM05] Tobias H. Colding et William P. Minicozzi, II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :561–569 (electronic), 2005.

[CZ06] Huai-Dong Cao et Xi-Ping Zhu. A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian Journal of Mathematics*, 10(2) :165–492, 2006. Revised version available on the arXiv.

[Far97] Benson Farb. The quasi-isometry classification of lattices in semisimple Lie groups. *Math. Res. Lett.*, 4(5) :705–717, 1997.

[Gab92] David Gabai. Convergence groups are Fuchsian groups. *Annals of Math.*, 136 :447–510, 1992.

[Gro81] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math.* IHES, 53 :53–73, 1981.

[Hak61] Wolfgang Haken. Theorie der Normalflächen. *Acta Math.*, 105 :245–375, 1961.

[Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.

[Ham95] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the Ricci flow. In *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, pages 7–136. Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Jac05] William Jaco. Peking summer school lecture notes. http ://www.math.okstate.edu/ jaco/pekinglectures.htm, Juillet 2005.

[Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, volume 761 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[JR88] William Jaco et J. Hyam Rubinstein. PL minimal surfaces in 3-manifolds. *J. Differential Geom.*, 27(3) :493–524, 1988.

[JR89] William Jaco et J. Hyam Rubinstein. PL equivariant surgery and invariant decompositions of 3-manifolds. *Adv. in Math.*, 73(2) :149–191, 1989.

[JS79] William H. Jaco et Peter B. Shalen. *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*. Number 220 in Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, September 1979.

[Kap01] Michael Kapovich. *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[KL06] Bruce Kleiner et John Lott. Notes on Perelman's papers. ArXiv : math.DG/0605667, May 2006.

[Kne29] H. Kneser. Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 38 :248–260, 1929.

[Mai00] Sylvain Maillot. Quasi-isométries, groupes de surfaces et orbifolds firbrés de Seifert. Thèse, Université Paul Sabatier, 2000.

[Mai01] Sylvain Maillot. Quasi-isometries of groups, graphs and surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 76(1) :29–60, 2001.

[Mai03] Sylvain Maillot. Open 3-manifolds whose fundamental groups have infinite center, and a torus theorem for 3-orbifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(11) :4595–4638 (electronic), 2003.

[Mai07a] Sylvain Maillot. Large-scale conformal rigidity in dimension three. *Math. Ann.*, 337(3) :613–630, 2007.

[Mai07b] Sylvain Maillot. A spherical decomposition for Riemannian open 3-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 17(3) :839–851, 2007.

[Mai08a] Sylvain Maillot. A JSJ splitting for triangulated open 3-manifolds. ArXiv : 0802.1447, Février 2008. Soumis.

[Mai08b] Sylvain Maillot. Some applications of Ricci flow to 3-manifolds. ArXiv : 0801.4881, Janvier 2008. A paraître aux Actes de Fourier.

[Mai08c] Sylvain Maillot. Some open 3-manifolds and 3-orbifolds without locally finite canonical decompositions. ArXiv : 0802.1438, Février 2008. Soumis.

[Mes] Geoffrey Mess. The Seifert conjecture and groups which are coarse quasiisometric to planes. Preprint.

[Mil62] J. Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, 84 :1–7, 1962.

[MT07] John Morgan et Gang Tian. *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, volume 3 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[MT08] John Morgan et Gang Tian. Completion of the Proof of the Geometrization Conjecture. ArXiv : 0809.4040, Sep 2008.

[Mye88] Robert Myers. Contractible open 3-manifolds which are not covering spaces. *Topology*, 27(1) :27–35, 1988.

[Mye99] Robert Myers. Contractible open 3-manifolds which non-trivially cover only non-compact 3-manifolds. *Topology*, 38(1) :85–94, 1999.

[NS97] Walter D. Neumann et Gadde A. Swarup. Canonical decompositions of 3-manifolds. *Geom. Topol.*, 1 :21–40 (electronic), 1997.

[Ota98] Jean-Pierre Otal. Thurston's hyperbolization of Haken manifolds. In *Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996)*, pages 77–194. Int. Press, Boston, MA, 1998.

[Ota01] Jean-Pierre Otal. *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, volume 7 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1996 French original by Leslie D. Kay.

[Pap58] C. D. Papakyriakopoulos. Some problems on 3-dimensional manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 :317–335, 1958.

[Per02] Grisha Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. ArXiv : math.DG/0211159, Nov 2002.

[Per03a] Grisha Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. ArXiv : math.DG/0307245, Jul 2003.

[Per03b] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. ArXiv : math.DG/0303109, Mar 2003.

[Rie01] Eleanor G. Rieffel. Groups quasi-isometric to $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$. *J. London Math. Soc. (2)*, 64(1) :44–60, 2001.

[Sco77] Peter Scott. Fundamental groups of non-compact 3-manifolds. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 34(2) :303–326, 1977.

[Sco83] Peter Scott. There are no fake Seifert fibered spaces with infinite π_1. *Annals of Math.*, 117 :35–70, 1983.

[Thu82] William P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3) :357–381, 1982.

[Tuk88] Pekka Tukia. Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.*, 391 :1–54, 1988.

[Wal67] Friedhelm Waldhausen. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Invent. Math.*, 3–4 :308–333, 87–117, 1967.

[Whi35] J. H. C. Whitehead. A certain open manifold whose group is unity. *Quart. J. Math. Oxford*, 6 :268–279, 1935.

[Wri92] David G. Wright. Contractible open manifolds which are not covering spaces. *Topology*, 31(2) :281–291, 1992.

[Ye08a] Rugang Ye. On the l-function and the reduced volume of Perelman. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(1) :507–531 (electronic), 2008.

[Ye08b] Rugang Ye. On the l-function and the reduced volume of Perelman. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(1) :533–544 (electronic), 2008.