Approximations höldériennes de fonctions entre espaces d'Orlicz. Modules asymptotiques uniformes.

Sylvain Delpech

$N°$ d'ordre : 2991

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Sylvain DELPECH**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

****

APPROXIMATIONS HÖLDÉRIENNES DE FONCTIONS ENTRE ESPACES D'ORLICZ
MODULES ASYMPTOTIQUES UNIFORMES

****

Soutenue le Lundi 27 Juin 2005

Après avis de :

F. BARTHE	Professeur, Université Paul Sabatier	**Rapporteurs**
G. LANCIEN	Maître de Conférences-HDR, Université de Franche-Comté	

Devant la commission d'examen formée de :

J. A. JARAMILLO	Professeur, Université Complutense de Madrid	**Président**
E. M. OUHABAZ	Professeur, Université Bordeaux 1	**Rapporteur**
F. BARTHE	Professeur, Université Paul Sabatier	**Examinateurs**
A. BORICHEV	Chargé de Recherche-HDR, Université Bordeaux 1	
R. DEVILLE	Professeur, Université Bordeaux 1	
G. LANCIEN	Maître de Conférences-HDR, Université de Franche-Comté	

- 2005 -

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma sympathie à mon directeur de thèse, Robert Deville. Sa disponibilité totale, son enthousiasme et sa modestie face au travail et au quotidien furent pour moi une aide constante durant mes trois années de thèse et mon année de DEA.

J'adresse mes sincères remerciements aux rapporteurs de ma thèse. Tout d'abord à Franck Barthe pour sa lecture très minutieuse de mon manuscrit et sa présence dans mon jury de thèse. Puis à Gilles Lancien pour les mêmes raisons mais aussi pour son invitation au séminaire d'analyse de Besançon en juin 2004 et le coup de main mathématique qu'il m'a donné ce jour là.

Merci à Alexander Borichev, Jesus Jaramillo et El Maati Ouhabaz de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie de plus ce dernier et Jean Esterle pour l'organisation des journées GDR où j'ai pu exposer mes travaux.

J'ai aussi communiqué mes travaux à la conférence de décembre 2003 à Madrid. J'en remercie les organisateurs doublement (car ils sont aussi les auteurs de l'article central de mon mémoire de DEA) : Daniel Azagra et Manuel Cepedello Boiso. Cette conférence m'a permis de rencontrer Yoav Benyamini. Je le remercie du temps qu'il m'a consacré là-bas et d'une idée qu'il m'a transmise.

Je pense aux membres du Labag et plus particulièrement à Frédéric et Étienne. Ce dernier, certes piètre footballeur (...à la réflexion Frédéric aussi), est l'organisateur hors pair de notre groupe de travail et mon interlocuteur privilégié sur de nombreux points, mathématiques ou non, je l'en remercie ici. Merci aussi à Geneviève Bretenoux : collègue et interlocutrice avisée. Merci à d'autres collègues : les doctorants et ceux du bureau 159 : Nabil et James, pour la bonne ambiance qui règne en ce lieu.

Je parlais de piètres footballeurs, j'y associe bien sûr toute l'équipe du mercredi après-midi. Ces parties furent l'occasion de tous mieux se connaître. Merci à Guillaume, Matthieu, Raulent, Julien et les autres pour leur esprit sportif et ces moments de décompression totale (sur le terrain et en dehors).

Merci à toutes les personnes qui sont venues assister à ma soutenance sous une chaleur de plomb. Je pense à Albertine, Jean-Pierre, Christelle et Pascal (Antoine et Julien y ont échappé).

Thierry et Soraya, vous êtes loin de mes yeux mais c'est tout... Cyril et Sébastien, les beaux-frères, embrassez de ma part Clothilde et Charlotte. Roland, Paris et Versailles ne sont pas si loin. Chers Maman et Papa tout ceci c'est grâce à vous. Cher Julien, mon frère, je suis fier de toi. Ma chère Sophie... cela ne les regarde pas, je te le dirai au creux de l'oreille car nous avons tous les deux, plus encore qu'avant, le droit de jouer aux docteurs...

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le cadre général de ce cette thèse est l'analyse non linéaire dans les espaces de Banach réels associée à la géométrie de ces espaces. Ce travail est composé de deux parties. Dans la première partie on s'intéresse principalement aux applications uniformément continues entre espaces de Banach de dimension infinie et à des résultats d'approximation et d'extension de telles applications. La seconde partie aborde la structure asymptotique des espaces de Banach de dimension infinie puis certaines propriétés de régularité des polynômes entre ces espaces en liaison avec cette structure. Nous détaillons le contenu de chacune de ces parties et nous donnons ensuite le plan de la thèse.

Introduction à la première partie : homéomorphismes uniformes, approximations et extensions.

Cette première partie traite trois sujets étroitement liés les uns aux autres :

1. la classification uniforme des sphères unités des espaces de Banach de dimension infinie,
2. l'approximation des applications uniformément continues entre les boules des espaces de Banach par des applications höldériennes,
3. l'extension isomorphique des applications höldériennes entre espaces de Banach.

C'est le but de cette introduction de présenter en détails ces trois notions. Une application höldérienne entre deux espaces de Banach X et Y est telle qu'il existe une constante $K > 0$ et un exposant $0 < \alpha \leq 1$ tels que pour tous x et y dans X : $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha$. On parle alors d'application α-Hölder et, quand $\alpha = 1$, d'applications lipschitziennes. Ces applications sont une classe particulière d'applications uniformément continues.

La classification uniforme dont il est question en 1. étudie l'existence et les propriétés d'applications f bijectives entre les sphères unités de différents espaces de Banach telles que f et sa réciproque f^{-1} sont uniformément continues. Une référence très complète sur le sujet est le livre de Benyamini et Lindenstrauss [BL]. Historiquement, le premier résultat dans ce domaine est issu des travaux de Mazur en 1929 dans [Maz]. L'application qu'il construit ici constitue un homéomorphisme uniforme explicite entre les sphères unités des espaces L_p. Plus précisement, pour $1 \leq p < \infty$ et (G, μ) un espace mesuré on désigne par $L_p(G, \mu)$ l'espace de Banach des classes d'équivalence des applications $x : G \to \mathbb{R}$ qui sont μ-mesurables et telles que $\int_G |x(t)|^p d\mu(t) < \infty$, muni de la norme $\|x\|_p = \left(\int_G |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p}$. On note $S_p(G, \mu) = \{x \in L_p(G, \mu),\ \|x\|_p = 1\}$ la sphère unité de l'espace $L_p(\mu, G)$ et on considère $1 \leq q < \infty$. L'application de Mazur ϕ_{pq} de $S_p(G, \mu)$ dans $S_q(G, \mu)$ définie par :

$$\phi_{pq}(x) = |x|^{p/q} sign(x),$$

est un homéomorphisme uniforme entre les sphères unités qui est $1 \wedge p/q$-Hölder sur $S_p(G, \mu)$ et tel que $\phi_{pq}^{-1} = \phi_{qp}$ est $1 \wedge q/p$-Hölder sur $S_q(G, \mu)$. Ici on connaît donc explicitement l'homéomorphisme et son module de continuité. Des résultats très généraux ont été obtenus par Odell et Schlumprecht en 1994 dans [OdSc] et par Chaatit en 1995 dans [Cha] pour les sphères unités de certains treillis de Banach. Rappelons qu'un treillis de Banach est un espace de Banach partiellement ordonné où la relation d'ordre est compatible avec la norme. Une version de leur résultat dit que si X est un treillis de Banach séparable de dimension infinie alors sa sphère unité S_X est uniformément homéomorphe à la sphère unité d'un espace de Hilbert si et seulement si X ne contient pas les espaces l_∞^n uniformément. Chaatit montre alors que le module de continuité de l'homéomorphisme dépend de la concavité des treillis de Banach mis en jeu. Dans ce cadre très général, l'homéomorphisme et son module de continuité, obtenus après de multiples factorisations à travers d'autres espaces intermédiaires, sont moins explicites. Nous nous plaçons dans le cadre des espaces d'Orlicz, dans lequel on peut bien généraliser l'application de Mazur et garder explicitement son module de continuité. Cette classe d'espaces est une généralisation naturelle des espace $L_p(G, \mu)$ vus plus haut. On remplace l'application t^p à partir de laquelle les espaces $L_p(G, \mu)$ sont construits par des applications convexes plus générales appelées *fonctions d'Orlicz*. Les livres de Lindenstrauss et Tzafriri [LT1] et [LT2] ainsi que le livre de Krasnosel'skii et Rutickii [KR] présentent de façon détaillée la théorie des fonctions et des espaces d'Orlicz. Rappelons brièvement dans cette introduction qu'une fonction d'Orlicz $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, convexe, continue, vérifie $M(1) = 1$ et le fait que $M(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$. De plus $M(u)/u \to 0$ quand $u \to 0$ et $M(u)/u \to \infty$ quand $u \to \infty$. L'espace d'Orlicz associé $L_M(G, \mu)$ sur l'espace mesuré (G, μ) est l'ensemble des classes d'équivalences des fonctions $x : G \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un certain $\lambda > 0$ tel que $\int_G M(x(t)/\lambda)d\mu(t) < \infty$. La norme de Luxemburg qui fait de $L_M(G, \mu)$ un treillis de Banach est donnée par la jauge $\|x\|_M = \inf\{\lambda > 0,\ \int_G M(x(t)/\lambda)d\mu(t) \leq 1\}$. On se place toujours désormais dans les cas suivants sur l'espace mesuré (G, μ) : quand $G = [0, 1]$ ou $G = (0, \infty)$ muni de la mesure de Lebesgue, ou bien quand $G = \mathbb{N}$ muni de la mesure de décompte. Les propriétés de l'espace d'Orlicz associé sont alors liées au comportement de la fonction M au voisinage de l'infini (pour $G = [0, 1]$), de zéro (pour $G = \mathbb{N}$) et dans une union de tels voisinages pour $G = (0, \infty)$. On généralise alors naturellement l'application de Mazur aux espaces d'Orlicz en définissant, pour M et N deux fonctions d'Orlicz, l'application $\phi_{MN} : L_M(G) \to L_N(G)$ par :

$$\phi_{MN}(x) = N^{-1} \circ M(|x|)sign(x).$$

La continuité uniforme de cette application sur la sphère unité de $L_M(G)$ (que l'on note $S_M(G)$) est alors liée au comportement de la composée $N^{-1} \circ M$. On obtient :

Théorème A : *Supposons qu'il existe $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ tels que $N^{-1} \circ M(u)/u^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $N^{-1} \circ M(u)/u^\beta$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors ϕ_{MN} est $\alpha \wedge 1$-Hölder sur $S_M(G)$ et son inverse $\phi_{MN}^{-1} = \phi_{NM}$ est $(1/\beta) \wedge 1$-Hölder sur $S_N(G)$.*

La difficulté technique de la preuve réside en partie dans l'utilisation de la norme de Luxemburg dans les espaces d'Orlicz. Les hypothèses faites sur la composée $N^{-1} \circ M$ sont globales, mais on peut déduire du théorème A des résultats analogues pour des fonctions d'Orlicz M et N ayant des propriétés locales aux voisinages de zéro et/ou de l'infini. On donne des exemples d'espaces d'Orlicz pour lesquels, à l'aide de fonctions indicatrices d'intervalles, on montre que les exposants de Hölder obtenus ci-dessus sont optimaux. Bien sûr si $M(u) = |u|^p$ et $N(u) = |u|^q$ on retrouve l'énoncé connu. Le théorème A permet de classer entre-elles les sphères unités des espaces d'Orlicz exponentiels associés aux fonctions d'Orlicz $M(u) = \exp(|u|^p) - 1$ et $N(u) = \exp(|u|^q) - 1$. Comme ces espaces contiennent les espaces l_∞^n uniformément, on savait juste que leurs sphères unités n'étaient pas uniformément homéomorphes à celle d'un espace de Hilbert.

Muni de ces homéomorphismes uniformes avec modules de continuité explicites, on s'intéresse ensuite, comme précisé plus haut en 2., à l'approximation uniforme, par des applications höldériennes, des applications uniformément continues entre les boules d'espaces de Banach. On cherche plus particulièrement le plus grand exposant de Hölder de ces approximations. Soient X (le départ) et Y (l'arrivée) deux espaces de Banach. On désigne par $B_X = \{x \in X, \|x\| = 1\}$ la boule unité fermée de X. Notons $UC(B_X, Y)$ l'espace de Banach des applications uniformément continues f de B_X dans Y muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|, x \in B_X\}$. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, notons $\mathcal{H}^\alpha(B_X, Y)$ l'espace des applications α-Hölder de B_X dans Y avec la convention $\mathcal{H}^0(B_X, Y) = UC(B_X, Y)$. Pour $1 \geq \beta \geq \alpha \geq 0$ on a les inclusions $\mathcal{H}^\beta(B_X, Y) \subseteq \mathcal{H}^\alpha(B_X, Y) \subseteq UC(B_X, Y)$. On pose alors

$$\alpha(B_X, Y) = \sup\{\alpha \in [0,1], \overline{\mathcal{H}^\alpha(B_X, Y)}^{\|\cdot\|_\infty} = UC(B_X, Y)\}.$$

Si $0 < \alpha < \alpha(B_X, Y)$, toute application uniformément continue de B_X à valeurs dans Y peut être approchée uniformément sur B_X par des applications α-Hölder. Si $\alpha > \alpha(B_X, Y)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une application $f \in UC(B_X, Y)$ telle que pour toute application $g \in \mathcal{H}^\alpha(B_X, Y)$ on a $\|f - g\|_\infty > \varepsilon$. L'étude de cet exposant et des majorations de celui ci, quand X et Y sont des espaces d'Orlicz ou des treillis de Banach plus généraux, constitue le reste de la première partie de la thèse. Comme nous allons mieux le préciser en abordant le thème 3. sur les extensions, il existe un principe général : un résultat d'extension des applications dans une certaine classe entraîne un résultat d'approximation par des fonctions de cette classe. L'extension des applications uniformément continues et en particulier lipschitziennes entre espaces généraux a été intensivement étudiée. Tous ces résultats fournissent une minoration de l'exposant critique. Ce sujet est présenté en détail dans le livre de Benyamini et Lindenstrauss [BL]. Citons rapidement dans cette introduction le fait que si X ou Y est de dimension finie alors les applications lipschitziennes sont denses dans $UC(B_X, Y)$ et

$\alpha(B_X, Y) = 1$. D'après le théorème de Kirszbraun [Kir] c'est aussi le cas si X et Y sont des espaces de Hilbert. Tsar̆kov dans [Tsa1] étudie le cas où X et Y sont des espaces $L_p(G)$. Il obtient la valeur exacte de l'exposant critique suivante, en notant $B_p(G)$ la boule unité fermée de l'espace $L_p(G)$:

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2},$$

et ici les applications $\alpha(B_p(G), L_q(G'))$-Hölder sont effectivement denses. On remarque que parfois les applications lipschitziennes ne sont pas denses, même quand l'espace de départ est un espace de Hilbert $L_2(G)$. Nous revenons plus tard sur ce phénomène en abordant le point 3. au sujet des extensions. La preuve du résultat de Tsar̆kov utilise l'application de Mazur aussi bien pour la minoration de l'exposant (résultat de densité) que pour sa majoration (résultat de "non densité"). En utilisant l'application de Mazur généralisée entre espaces d'Orlicz on peut estimer la valeur de l'exposant critique en fonction des indices de Boyd de ces espaces. Si pour un espace d'Orlicz $L_M(G)$ on désigne par $\alpha_M(G)$ l'indice de Boyd inférieur, par $\beta_M(G)$ l'indice de Boyd supérieur et par $B_M(G)$ la boule unité fermée :

Théorème B : *Soient M et N deux fonctions d'Orlicz telles que $1 < \alpha_M(G), \alpha_N(G')$ et $\beta_M(G), \beta_N(G') < \infty$. Alors, dans certains cas sur G, G' et sur les indices de Boyd :*

$$\frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G') \vee 2} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{\beta_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G') \vee 2}.$$

Pour plus de clarté on ne donne pas ici les différents cas sur G, G' et sur les indices de Boyd. Les minorations s'obtiennent de la façon suivante : on factorise avec des compositions de l'application de Mazur pour se ramener à des applications entre espaces de Hilbert. On utilise alors le théorème de Kirszbraun pour approcher cette composée par une application lipschitzienne. La composition avec les inverses des applications de Mazur généralisées et la connaissance de leurs modules de continuité, grâce au théorème A, donnent l'approximation höldérienne voulue. Cette technique rapide d'approximation n'utilise donc que le résultat classique de Kirszbraun entre espaces de Hilbert. La majoration de l'exposant critique est plus technique. On calcule la distance de l'application de Mazur ϕ_{MN} elle même aux ensembles $\mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G))$. Quand l'exposant α dépasse la valeur voulue cette distance est strictement positive et l'application de Mazur généralisée ne peut pas être approchée uniformément. La connaissance explicite de cette distance en fonction des applications d'Orlicz M et N permet d'obtenir des exemples d'espaces d'Orlicz où les applications $\alpha(B_M(G), L_N(G))$-Hölder ne sont pas denses. Parmi tous les exemples d'espaces d'Orlicz, le théorème B n'est parfois qu'un encadrement strict de l'exposant critique. C'est l'objet des résultats qui suivent d'obtenir des majorations plus précises. La boule unité fermée B_Y d'un espace de Banach Y est appelée *rétracté uniforme absolu* si pour tout espace métrique qui la contient isométriquement, il existe une projection uniformément continue de cet espace dans B_Y. C'est le cas par exemple si Y est uniformément convexe.

Théorème C : *Soit $1 \leq p < \infty$. On suppose que X contient les espaces l_p^n uniformément. Soit Y un espace de Banach réflexif, de type non trivial et tel que B_Y est un rétracté uniforme absolu. Alors*

$$\alpha(B_X, Y) \leq \alpha(B_p(\mathbb{N}), Y) \leq \alpha(B_p(\mathbb{N}), l_2) = \frac{p \wedge 2}{2}.$$

La preuve de ces majorations consiste à construire une application uniformément continue de B_X dans Y qu'on ne pourra pas approcher uniformément sur B_X par des applications α-Hölder avec α dépassant la majoration voulue. On travaille en partant des espaces de dimension finie l_p^n qui se trouvent uniformément au départ et à l'arrivée. La majoration de droite faisant intervenir l'espace de Hilbert l_2 s'obtient avec le théorème de Dvoretsky qui dit que Y contient les espaces l_2^n uniformément et qu'ici leurs images peuvent être prises bien complémentées. La première majoration, plus précise, est obtenue en travaillant sur les constantes de Hölder des applications mises en jeu. Avec ce résultat de majoration associé aux théorèmes existant de densité effective (et donc de minoration de l'exposant critique) on peut obtenir la valeur exacte de $\alpha(B_X, Y)$ dans certains cas :

Théorème D : *Soit X est un treillis de Banach qui admet une r-estimation par dessous pour un certain r fini. Notons $p_X = \sup\{p\,, X$ est de type $p\}$. Alors, pour tout $1 \leq q < \infty$:*

$$\alpha(B_X, L_q(G)) = \alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), L_q(G)) = \frac{p_X}{q \vee 2}.$$

Avec les mêmes hypothèses pour X, si Y est un espace de Banach avec un module de convexité uniforme en puissance 2, alors :

$$\alpha(B_X, Y) = \frac{p_X}{2}.$$

Ces résultats appliqués aux espaces d'Orlicz permettent d'affiner l'encadrement obtenu précédemment. Pour plus de clarté on ne donne pas les différents cas d'application, précisons qu'ils sont plus généraux que ceux du théorème B.

Théorème E : *Soient M et N deux fonctions d'Orlicz telles que $1 \leq \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty$ et $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$. Alors dans certains cas sur G' et sur les indices de Boyd de N :*

$$\frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G') \vee 2} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G') \vee 2}.$$

Intéressons nous au point 3. et aux liens qui existent entre les approximations par des applications α-Hölder et les extensions de ces applications qui gardent le même exposant.

On distingue principalement deux façons d'étendre ces applications : la façon isométrique (l'extension garde la même constante de Hölder) et la façon isomorphique (la constante de Hölder s'obtient en multipliant celle de la fonction de départ par une constante uniforme). On s'intéresse ici au cas des extensions isomorphiques. En suivant les notations de Naor dans [N], pour X et Y deux espaces de Banach, on désigne par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des exposants $0<\alpha\leq 1$ pour lesquels il existe $C>0$ tels que pour toute partie $D\subset X$, toute application $f:D\to Y$ α-Hölder de constante K peut être étendue en une application $\tilde{f}:X\to Y$ α-Hölder de constante CK. Les travaux de Naor dans [N] et ceux de Brudnyi et Shvartsman dans [BrSh] montrent que $\mathcal{B}(X,Y)$ est un intervalle. Il y a un lien simple entre ses ensembles $\mathcal{B}(X,Y)$ et l'exposant critique $\alpha(B_X,Y)$ donné par le principe qu'on a cité avant : si $\alpha\in\mathcal{B}(X,Y)$ alors $\alpha<\alpha(B_X,Y)$ (un résultat d'extension donne un résultat d'approximation). On voit ceci en restreignant les applications uniformément continues sur B_X à un réseau adéquat qui les rend α-Hölder. L'extension de cette restriction donne l'approximation voulue. Dès lors toutes les majorations précédentes de l'exposant critique sont des majorations de $\mathcal{B}(X,Y)$. Nous avons vu que même si l'espace de départ est un espace de Hilbert l_2, on peut avoir $\alpha(l_2,Y)<1$ pour de nombreux exemples d'espaces Y. Alors $1\notin\mathcal{B}(l_2,Y)$ et on ne peut pas étendre les applications lipschitziennes : ceci est une autre façon de répondre à une question posée par Ball dans [Ball] en 1992 et résolue par Naor dans [N] en 2001. Nous avons donc obtenu des majorations des exposants d'approximations (c'est à dire des résultats de "non extension"), mais qu'en est-il des résultats effectifs d'extension ? C'est un sujet d'actualité qui a évolué au cours de cette thèse, en particulier via l'article de Naor [N] de 2001 et la prépublication de Naor, Peres, Schramm et Sheffield [NPSS]. La clé est de connaître le *Markov type* et le *Markov cotype* des espaces dans lesquels on travaille. Cette notion de type non linéaire a été introduite par Ball en 1992 dans [Ball] où le cas des espaces de Hilbert et des espaces L_p avec $1<p\leq 2$ était résolu. Les avancées dans ce domaine donnent les liens entre ces notions et les estimations en puissance des modules de convexité et de lissité des espaces. Naor montre alors l'égalité, pour G un espace mesuré et $1<p,q<\infty$: $\mathcal{B}(L_p(G),L_q(G))=\big(0,\frac{p\wedge 2}{q\vee 2}\big]=(0,\alpha(B_p(G),L_q(G))]$. On associe nos résultats de majorations aux résultats d'extensions effectives pour obtenir l'encadrement suivant :

Théorème F : *Soit X un treillis de Banach tel que $1<p_X\leq 2$ et qui admet une r-estimation par dessous pour un certain r fini. Soit $1<q<\infty$. Alors :*

$$\Big(0,\frac{p_X}{q\vee 2}\Big[\subseteq\mathcal{B}(X,L_q(G))\subseteq\Big(0,\frac{p_X}{q\vee 2}\Big].$$

On illustre ce théorème avec les exemples précédents d'espaces d'Orlicz tels que l'exposant critique n'est pas atteint. Cela permet d'obtenir des exemples d'espaces de Banach X et Y pour lesquels $\mathcal{B}(X,Y)$ est de la forme $(0,\alpha(B_X,Y)[$ donc ouvert à droite.

Introduction à la seconde partie : modules asymptotiques uniformes.

Dans cette seconde partie on s'intéresse à la structure asymptotique des espaces de Banach de dimension infinie. Par "structure asymptotique" on entend, de façon intuitive, structure fournie à l'espace tout entier par ses sous espaces de codimension finie arbitrairement grande. Avec plus de rigueur, il existe des modules pour les espaces de Banach de dimension infinie introduits par Milman en 1971 dans [Mil] qui formalisent l'intuition. Nous utilisons les notations et le vocabulaire donnés à ces modules par Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman en 2002 dans [JLPS] et parlons de *modules asymptotiques uniformes* de convexité et de lissité. Soient X un espace de Banach de dimension infinie et $t \geq 0$. Le module asymptotique uniforme de lissité de X est donné par

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{\dim X/Z<\infty} \sup_{z\in Z,\,\|z\|\leq t} \|x+z\| - 1,$$

et le module asymptotique uniforme de convexité de X est donné par

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{\|x\|=1} \sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\,\|z\|\geq t} \|x+z\| - 1.$$

On obtient des résultats en termes de modules asymptotiques uniformes dans les divers thèmes suivants :

1. l'existence de suites séparées dans la sphère unité,
2. la compacité des polynômes entre certains espaces de Banach,
3. l'existence de fonctions bosses différentiables.

Nous présentons ici nos théorèmes principaux dans chacun de ces domaines.

Une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé X est dite ε-séparée pour un certain $\varepsilon > 0$ si $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$ quand $n \neq p$. Un célèbre théorème de Elton et Odell affirme que si X est de dimension infinie alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la sphère unité S_X de X contient une suite $(1+\varepsilon)$-séparée. Van Neerven dans son article récent [VanN] de 2005, quantifie ce ε, dans les espaces uniformément convexes, avec une preuve qui utilise le théorème de Ramsey. Notons δ_X le module de convexité de l'espace X. La séparation qu'il obtient vaut $1 + \frac{1}{2}\delta_X(\frac{2}{3})$. Elle n'est pas optimale dans les espaces l_p, où la base canonique est une suite $2^{1/p}$-séparée dans la sphère unité. Remarquons que pour $X = l_p$ avec $1 \leq p < \infty$, on a l'égalité $2^{1/p} = 1 + \overline{\delta}_X(1)$. Nous obtenons le théorème de séparation :

Théorème G : *La sphère unité d'un espace de Banach X de dimension infinie contient une suite α-séparée, pour tout $\alpha < 1 + \overline{\delta}_X(1)$.*

Si l'espace X vérifie $\overline{\delta}_X(1) > 0$ (en particulier si X est asymptotiquement uniformément convexe) on obtient une estimation qui améliore le résultat de Van Neerven dans deux directions. Comme $\overline{\delta}_X(t) \geq \delta_X(t)$ pour $0 < t \leq 1$, la séparation est meilleure et même atteinte pour $X = l_p$ avec $1 \leq p < \infty$. De plus, la classe des espaces asymptotiquement uniformément convexes (qui contient l_1) est plus large que celle des espaces uniformément convexes. La suite bien séparée est construite par simple utilisation de la définition du module asymptotique uniforme de convexité sans utiliser le théorème de Ramsey.

C'est le point 2. qui a motivé notre étude des modules asymptotiques uniformes de Milman pour obtenir des résultats sur la compacité des opérateurs et des polynômes entre espaces de Banach. Rappelons qu'une application f entre deux espaces de Banach X et Y est dite *compacte* si l'image par f de la boule unité fermée de X est une partie relativement compacte de Y. Un théorème classique de Pitt affirme que si l'on note X_p l'espace l_p pour $1 \leq p < \infty$ ou l'espace c_0 pour $p = \infty$, alors si $1 \leq q < p \leq \infty$, tout opérateur linéaire continu de X_p dans l_q est compact. Deux articles retiennent alors notre attention : celui de Fabian et Zizler [FaZi] en 2003 où une preuve simple du théorème de Pitt entre l_p et l_q est donnée en utilisant le principe variationnel de Stegall et l'article cité plus haut [JLPS] de 2002 où une généralisation significative du théorème de Pitt est obtenue en termes de modules asymptotiques uniformes. Dans la preuve de ce résultat apparaît, de façon plus implicite, la minimisation d'une fonction à valeurs réelles. Le théorème de Pitt peut être généralisé en s'intéressant à d'autres types d'applications comme par exemple les polynômes, c'est à dire les sommes finies d'applications multilinéaires. Gonzalo et Jaramillo dans [GoJa] en 1995 introduisent des indices en liens avec l'existence d'estimations l_p par dessus et par dessous pour les suites. Ils obtiennent des conditions sur le degré des polynômes en fonction de ces indices pour assurer leur compacité. Voici un résultat similaire avec des estimations en puissance des modules asymptotiques uniformes :

Théorème H : *Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie avec $\overline{\rho}_X(.)$ en puissance p et $\overline{\delta}_Y(.)$ en puissance q tels que $1 \leq q < p < \infty$. Alors tout polynôme continu $P : X \to Y$ de degré n tel que $1 \leq nq < p$ est compact.*

Les techniques de preuve par minimisations de fonctions à valeurs réelles sont utilisées, ainsi que les liens entre les modules asymptotiques uniformes et la convergence faible vers 0 des suites. Le cadre dans lequel se place l'article [GoJa] semble plus large que le notre. Mais l'utilisation de minimisations, inspirée principalement par [FaZi], fournit des preuves différentes et basées sur un schéma très simple. Ici les minimisations sont obtenues directement avec la définition de la norme d'un opérateur ou d'un polynôme homogène sans utilisation de principes variationnels plus poussés. Par contre dans le cadre du point 3. suivant, des techniques plus fines sont nécessaires.

Une *fonction bosse* est une fonction définie sur un espace de Banach à valeurs réelles dont le support est non vide et borné. L'existence de bosses différentiables sur un espace de Banach a une forte implication sur la structure de l'espace. On appelle polynôme séparateur sur un espace de Banach X tout polynôme $P : X \to \mathbb{R}$ tel que $P(0) = 0$ et $\inf_{\|x\|=1} P(x) > 0$. Deville dans [Dev] caractérise les espaces sur lesquels il existe un polynôme séparateur comme ceux qui admettent une fonction bosse de classe C^∞ et qui ne contiennent pas c_0. Deville, Gonzalo et Jaramillo dans [DGJ] introduisent la notion de lissité T^p, en lien avec le développement de Taylor à l'ordre p et obtiennent l'existence d'un polynôme séparateur dans les espaces de Banach qui admettent une bosse T^p-lisse, qui ont la propriété de Radon-Nikodym et qui satisfont une condition géométrique implicitement liée aux estimations en puissance du module asymptotique uniforme de convexité. Nous obtenons :

Théorème I : *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie avec $\overline{\delta}_X(.)$ en puissance $1 \leq p < \infty$. Si X admet une bosse T^p-lisse alors X admet un polynôme séparateur de degré inférieur à $[p]$.*

L'hypothèse sur la propriété de Radon-Nikodym est supprimée : il s'avère que d'après [JLPS] les espaces asymptotiquement uniformément convexes ont la propriété des points de continuité qui est plus faible que la propriété de Radon-Nikodym mais suffisante pour travailler avec le principe variationnel de Ghoussoub et Maurey. Notre résultat est une extension stricte du théorème de [DGJ] puisque d'après Girardi [Gi] il existe des espaces de Banach avec un module asymptotique uniforme de convexité en puissance et qui n'ont pas la propriété de Radon-Nikodym.

Plan de la thèse.

La première partie est consacrée aux applications höldériennes dans les problèmes de classification uniforme des sphères unités, d'approximation et d'extension. Dans le chapitre 2 on rappelle les notions classiques de type, cotype, modules de lissité et de convexité des espaces de Banach ainsi que la concavité et la convexité des treillis de Banach.
Le chapitre 3 présente toutes les caractéristiques des espaces d'Orlicz qui sont nécessaires pour la suite.
Dans le chapitre 4 on s'intéresse aux homéomorphismes uniformes entre les sphères unités. On y démontre le théorème A et on termine par des exemples dans des espaces d'Orlicz concrets.
Le chapitre 5 traite de l'approximation par des applications höldériennes. On y définit l'exposant $\alpha(B_X, Y)$ et on présente de nombreux résultats connus. Le théorème B est ensuite démontré et suivi lui aussi d'exemples.
On démontre les majorations de l'exposant critique du théorème C dans le chapitre 6 puis on les applique pour obtenir les valeurs exactes du théorème D et le théorème E qui affine l'encadrement dans les espaces d'Orlicz.
Le chapitre 7 est le dernier de cette partie et relie plus précisément les problèmes d'approximation et d'extension. On y rappelle les notions de Markov type et cotype ainsi que les résultats récents autour de ces notions. On présente alors le théorème F suivi d'exemples avec des espaces d'Orlicz.

La seconde partie traite des modules asymptotiques uniformes. On commence par rappeler dans le chapitre 8 leurs définitions et on les calcule dans les espaces l_p pour $1 \leq p < \infty$ et dans c_0.
Le problème des suites bien séparées dans la sphère unité d'un espace de Banach est abordé dans le chapitre 9 où le théorème G est démontré.
On passe ensuite au chapitre 10 et aux résultats sur la compacité des opérateurs et des polynômes avec les modules asymptotiques uniformes comme le théorème H.
Finalement, le chapitre 11 présente le théorème I.

Les théorèmes A et B ainsi qu'une première utilisation du lien entre approximations et extensions sont donnés dans l'article [Delp], accepté pour publication dans *Illinois Journal of Mathematics*.

Première partie

Approximations höldériennes de fonctions entre espaces d'Orlicz

Chapitre 2

Rappels généraux

2.1 Espaces de Banach, treillis de Banach et notations

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet que l'on désigne par $(X, \| . \|_X)$ ou bien par $(X, \| . \|)$ quand il n'y a pas de risque de confusion. Tous les espaces vectoriels considérés sont ici réels. On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels et par $\mathbb{N}$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots\}$. On note B_X la boule unité fermée de l'espace de Banach X, à savoir $B_X = \{x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$, et S_X la sphère unité $S_X = \{x \in X,\ \|x\| = 1\}$.

Un espace de Banach $(X, \| . \|)$ est appelé un treillis de Banach quand il est muni d'une relation d'ordre partielle "$\leq$" compatible avec la norme de la façon suivante :
(i) $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$ pour tous $x, y, z \in X$,
(ii) $ax \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ dans X et pour tout $a \geq 0$ dans $\mathbb{R}$,
(iii) pour tous $x, y \in X$ il existe un minimum $x \wedge y$ et un maximum $x \vee y$ dans X,
(iv) pour tous $x, y \in X$, $|x| \leq |y|$ implique $\|x\| \leq \|y\|$ où l'on a noté $|x| = x \vee (-x)$.
Deux éléments x et y d'un treillis de Banach X sont dits disjoints si $|x| \wedge |y| = 0$.

2.2 Modules, type et cotype

Pour tous les rappels qui suivent notre référence est le livre [LT2]. Les annexes A et G du livre [BL] peuvent aussi être consultées. Soit $(X, \| . \|)$ un espace de Banach de dimension supérieure ou égale à 2. Pour $0 < \varepsilon \leq 2$, la fonction :

$$\rho_X(\varepsilon) = \sup \big\{ \big\| \frac{x+y}{2} \big\| + \big\| \frac{x-y}{2} \big\| - 1 \,, \|x\| = 1 \,, \|y\| = \varepsilon \big\},$$

est appelée module de lissité de X. On dit que l'espace de Banach $(X, \| . \|)$ est uniformément lisse si $\lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. Soit $1 < p < \infty$, on dit que X a un module de lissité en puissance p s'il existe une constante $0 < K < \infty$ telle que pour tout $0 < \varepsilon \leq 2$, $\rho_X(\varepsilon) \leq K\varepsilon^p$.
Pour $\varepsilon > 0$, la fonction :

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \big\{ 1 - \big\| \frac{x+y}{2} \big\| \,, \|x\| = \|y\| = 1 \,, \|x - y\| \geq \varepsilon \big\}.$$

est appelée module de convexité de X. Si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\delta_X(\varepsilon) > 0$ alors on dit que $(X, \|\,.\,\|)$ est uniformément convexe. Soit $1 < p < \infty$, on dit que X a un module de convexité en puissance p s'il existe une constante $0 < K < \infty$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta_X(\varepsilon) \geq K\varepsilon^p$.
Grâce au théorème de Dvoretsky, on montre que les puissances p des modules de convexité sont prises pour $2 \leq p < \infty$ et celles des modules de lissité pour $1 \leq p \leq 2$. On a le théorème de renormage suivant dû à Pisier [Pi] :

Théorème 2.1. *Soit X un espace de Banach.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) X admet une norme équivalente uniformément convexe.
(ii) X admet une norme équivalente avec un module de convexité δ_X en puissance q pour un certain $q \geq 2$.
(iii) X admet une norme équivalente uniformément lisse.
(iv) X admet une norme équivalente avec un module de lissité ρ_X en puissance p pour un certain $1 < p \leq 2$.

Passons au type et au cotype d'un espace de Banach. Ces notions sont une généralisation de l'identité du parallélogramme des espaces de Hilbert. On dit qu'un espace de Banach X est de type $0 < p < \infty$ s'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\|^p \leq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p.$$

Avec l'inégalité triangulaire, tout espace de Banach X est de type $p = 1$ et avec les inégalités de Khintchine on montre que X ne peut être de type $p > 2$. Ainsi comme pour la puissance du module de lissité, le type d'un espace de Banach vérifie $1 \leq p \leq 2$.
De façon similaire, un espace de Banach X est dit de cotype $0 < q < \infty$ s'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\|^q \geq C \sum_{i=1}^n \|x_i\|^q.$$

A nouveau avec les inégalités de Khintchine on montre que le cotype d'un espace de Banach vérifie $2 \leq q < \infty$. Les notions de type, cotype et les puissances des modules de lissité et de convexité sont reliées par le théorème suivant de Figiel et Pisier [FiPi] :

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Banach. On a :*
(i) Si ρ_X est en puissance $1 < p \leq 2$ alors X est de type p.
(ii) Si δ_X est en puissance $2 \leq q < \infty$ alors X est de cotype q.

En général, les réciproques sont fausses dans les espaces de Banach. Par contre dans les treillis de Banach on peut assurer une réciproque dans certains cas. Avant tout on doit rappeler les notions de p-convexité et de q-concavité des treillis de Banach.

Soit $(X, \| \,.\, \|)$ un treillis de Banach et soit $1 \leq p < \infty$. On dit que X est p-convexe s'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, \ldots x_n \in X$:

$$\Big\| (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \Big\| \leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \Big)^{1/p}.$$

On dit que X satisfait une p-estimation par dessus si la condition précédente est vérifiée pour des vecteurs disjoints deux à deux ce qui donne :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| \leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \Big)^{1/p}.$$

Soit $1 \leq q < \infty$. On dit que X est q-concave s'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x_1, \ldots x_n \in X$:

$$\Big\| (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q)^{1/q} \Big\| \geq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \Big)^{1/q}.$$

On dit que X satisfait une q-estimation par dessous si la condition précédente est vérifiée pour des vecteurs disjoints deux à deux ce qui donne :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| \geq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \Big)^{1/q}.$$

Pour ces notions dans les treillis il n'y a pas de restrictions à faire sur les valeurs de p et q par rapport à 2 comme c'était le cas précédemment.
Dans les treillis de Banach les notions de type p, de p-convexité, de p-estimation par dessus et de module de lissité en puissance p pour une norme équivalente sont liées. Tout est résumé dans le diagramme p. 101 du livre [LT2]. De même, dans un treillis de Banach les notions de cotype q, de q-concavité, de q-estimation par dessous et de module de convexité en puissance q pour une norme équivalente sont liées et le diagramme p. 100 dans [LT2] donne ces liens.
Nous donnons ici la réciproque dans les treillis de Banach du théorème de Figiel et Pisier précédent (voir [LT2]) :

Théorème 2.3. *Soit X un treillis de Banach. On a :*
(i) Si X est de type $1 < p \leq 2$ et satisfait une q-estimation par dessous pour $q < \infty$ alors X admet une norme équivalente avec un module de lissité en puissance p.
(ii) Si X est de cotype $q \geq 2$ et satisfait une p-estimation par dessus pour $1 < p$ alors X admet une norme équivalente avec un module de convexité en puissance q.

Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par l_p^n l'espace de Banach des n-uplets de réels $\mathbb{R}^n$ équipé de la norme $\| \,.\, \|_p$ définie pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x_i|, \, 1 \leq i \leq n\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Soit $(X, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach de dimension infinie. On dit que X contient les espaces l_p^n uniformément s'il existe une constante $1 \leq C < \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme linéaire continu $T_n : l_p^n \to T_n(l_p^n) \subset X$, de l_p^n dans un sous-espace de X tels que, pour tout $x \in l_p^n$:

$$\frac{1}{C}\|x\|_p \leq \|T_n(x)\| \leq C\|x\|_p.$$

Si l'on considère les indices :

$$\begin{aligned} p_X &= \sup\{p \in [1,2],\ X \text{ est de type } p\} \text{ et} \\ q_X &= \inf\{q \geq 2,\ X \text{ est de cotype } q\} \in [2,\infty], \end{aligned}$$

alors on a le théorème suivant de Maurey et Pisier, donné par exemple dans [BL] p. 444 :

Théorème 2.4. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Alors X contient les $l_{p_X}^n$ et les $l_{q_X}^n$ uniformément. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la constante $C = 1 + \varepsilon$ convient.*

2.3 Applications uniformément continues

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Soit une application $f : X \to Y$. Le *module de continuité* de f est la fonction définie pour $t \geq 0$ par :

$$\omega_f(t) = \sup\{d_Y(f(x), f(y)),\ x, y \in X \text{ et } d_X(x,y) \leq t\}.$$

L'application f est appelée *uniformément continue* s'il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq t < t_0$, $\omega_f(t) < \infty$ et si $\lim_{t \to 0^+} \omega_f(t) = 0$.
Si $\omega_f(t) \leq ct$ pour une certaine constante $c > 0$ indépendante de t, on dit que l'application f est *Lipschitz* ou *lipschitzienne*. La plus petite constante c dans l'inégalité précédente, à savoir $\sup\{d_Y(f(x), f(y))/d_X(x,y),\ x \neq y\}$ est appelée la *constante de Lipschitz* de f.
Si $\omega(t) \leq ct^\alpha$ pour deux constantes $c, \alpha > 0$ indépendantes de t, on dit que l'application f est *α-Hölder* ou *höldérienne* d'exposant α. La *constante de Hölder* de f est donnée par $\sup\{d_Y(f(x), f(y))/d_X(x,y)^\alpha,\ x \neq y\}$.

Définition 2.1. *Un espace métrique (X, d_X) est dit métriquement convexe si pour tous $x, y \in X$ et pour tout $0 < t < 1$, il existe un point $x_t \in X$ tel que $d_X(x, x_t) = td_X(x,y)$ et $d_X(y, x_t) = (1-t)d_X(x,y)$. De façon équivalente, deux boules fermées $B(x,s)$ et $B(y,t)$ ont une intersection non vide si et seulement si $d_X(x,y) \leq s + t$.*

Tout ensemble convexe d'un espace de Banach est métriquement convexe. En particulier la boule unité fermée B_X d'un espace de Banach X est métriquement convexe.

Si l'espace métrique de départ (X, d_X) est métriquement convexe, alors pour tout espace métrique (Y, d_Y) et pour toute application uniformément continue $f : X \to Y$, le module de continuité ω_f est une fonction sous-additive, c'est à dire $\omega_f(s+t) \leq \omega_f(s) + \omega_f(t)$. De même les applications α-Hölder avec $\alpha > 1$ sont constantes. En effet, fixons $\alpha > 1$ et $f : X \to Y$

une application α-Hölder, avec constante de Hölder c. Fixons $x_0 \in X$. On veut montrer que pour tout $x \in X$, $f(x) = f(x_0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On construit une chaîne $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x\}$ d'éléments de X de la façon suivante : il existe $x_1 \in X$ tel que $d_X(x_0, x_1) = \frac{1}{n} d_X(x_0, x)$ et $d_X(x, x_1) = (1 - \frac{1}{n}) d_X(x_0, x)$. L'étape $k \in \{1, \ldots, n\}$ est : il existe $x_k \in X$ tel que $d_X(x_{k-1}, x_k) = \frac{1}{n-(k-1)} d_X(x_{k-1}, x)$ et $d_X(x, x_k) = (1 - \frac{1}{n-(k-1)}) d_X(x_{k-1}, x)$. Ces point vérifient la relation $d_X(x_{k-1}, x_k) = \frac{1}{n} d_X(x_0, x)$. Maintenant on écrit :

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \sum_{i=1}^{n} d_Y(f(x_{i-1}), f(x_i)) &\leq c \sum_{i=1}^{n} d_X(x_{i-1}, x_i)^\alpha \\ &\leq c \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{d_X(x_0, x)}{n}\big)^\alpha \\ &\leq c n^{1-\alpha} d_X(x_0, x)^\alpha \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

L'intervalle $[0, 1]$ est convexe, mais muni de la distance $d(x, y) = |x - y|^{\frac{1}{2}}$ il n'est pas métriquement convexe car par exemple l'application identité de $([0, 1], d)$ dans $([0, 1], |\,.\,|)$ est 2-Hölder mais n'est pas constante. Nous reparlons de tels phénomènes en abordant les espaces de fonctions $L_p[0, 1]$ avec $0 < p < 1$ dans le chapitre "Approximation des applications uniformément continues".

Nous donnons un fait très utile dans la pratique, qui dit que toute application uniformément continue sur un espace métriquement convexe est lipschitzienne pour les grandes distances. Précisement :

Fait 1. *Soit (X, d_X) un espace métriquement convexe et soit (Y, d_Y) un espace métrique. Soit $f : X \to Y$ uniformément continue. Alors, pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $0 < K < \infty$ telle que $d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)$ quand $d_X(x, y) \geq \lambda$.*

En effet, posons $C = \sup\{d_Y(f(x), f(y)),\ d_X(x, y) \leq \lambda\}$. Si $d(x, y) \geq \lambda$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 2d_X(x, y)/\lambda$ et une chaîne de points $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ tels que $d_X(x_i, x_{i-1}) \leq \lambda$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a alors :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \sum_{i=1}^{n} d_Y(f(x_i), f(x_{i-1})) \leq nC \leq \frac{2C}{\lambda} d_X(x, y).$$

Dans les chapitres suivants, on utilise de plus des applications uniformément continues particulières appelées *rétractions uniformes.* Soit Y un espace métrique et X un sous-ensemble de Y. Une rétraction uniforme est une application uniformément continue $r : Y \to X$ qui vaut l'identité sur X. Ce sont en fait des projections mais pas nécessairement linéaires ou lipschitziennes.

Chapitre 3

Espaces d'Orlicz

Soit (G, μ) un espace mesuré. Les espaces $L_p(G, \mu)$ sont définis par :

$$L_p(G, \mu) = \{f : G \to \mathbb{R}\,, \int_G |f(t)|^p d\mu(t) < \infty\}.$$

Munis de la norme

$$\|f\|_p = \big(\int_G |f(t)|^p d\mu(t)\big)^{\frac{1}{p}},$$

les espaces $(L_p(G, \mu), \|\,.\,\|_p)$ sont des espaces de Banach. Dans leur définition même, il apparaît la fonction homogène $M(u) = |u|^p$. Les espaces d'Orlicz constituent une classe d'espaces plus large que les espaces L_p. Leur construction est basée sur la généralisation de cette fonction M. C'est l'objet de ce chapitre de présenter les bases de la théorie des espaces d'Orlicz utiles dans la suite de la thèse.
Le livre [KR] est une référence très complète en ce qui concerne les fonctions d'Orlicz et les espaces d'Orlicz de fonctions. Les espaces d'Orlicz de suites sont présentés dans le chapitre 4 du livre [LT1].

3.1 Fonctions d'Orlicz

Une généralisation de la fonction définie par $M(u) = |u|^p$, est donnée par la classe de fonctions suivante. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
(i) M est paire, convexe et continue,
(ii) $M(1) = 1$, et $M(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$,
(iii) $M(u)/u \to 0$ quand $u \to 0$ et $M(u)/u \to \infty$ quand $u \to \infty$.
Une telle fonction M est appelée une *fonction d'Orlicz*.

Au même titre qu'il existe une théorie des espaces L_p pour $0 < p < 1$ (et nous en reparlerons un peu plus tard) on peut affaiblir les propriétés (i), (ii) et (iii) précédentes. On appelle *fonction quasi-Orlicz* toute fonction $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :
(i') φ est croissante et continue,
(ii') $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.
Dans la suite, nous avons besoin de certaines propriétés des fonctions quasi-Orlicz mais nous

ne nous intéressons pas aux espaces associés. Les espaces d'Orlicz que nous considérons sont construits à partir de "vraies" fonctions d'Orlicz ce qui permet de les munir d'une norme. Dorénavant M désigne toujours une fonction d'Orlicz.

Une fonction d'Orlicz M admet une dérivée à droite croissante que nous notons M'_d. Ces deux fonctions sont liées par la relation : $M(u) = \int_0^u M'_d(t)dt$ pour tout $u \geq 0$.

Définissons maintenant les espaces d'Orlicz. Soit (G, μ) un espace mesuré. Pour une fonction x prise μ-mesurable sur G on définit :

$$\rho_M(x) = \int_G M(x(t))d\mu(t).$$

On définit alors *l'espace d'Orlicz* :

$$L_M(G, \mu) = \{x\,, \rho_M(\lambda x) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\}.$$

Cette définition fournit bien un espace vectoriel. La convexité de la fonction d'Orlicz M permet de construire une norme sur $L_M(G, \mu)$ donnée par une jauge. Cette norme s'appelle la *norme de Luxemburg* :

$$\|x\|_M = \inf\{\lambda > 0\,, \rho_M(x/\lambda) \leq 1\}.$$

Alors $(L_M(G, \mu), \|\,.\,\|_M)$ est un espace de Banach.

Nous nous intéressons principalement à trois cas sur l'espace mesuré (G, μ).
Quand $G = [0, 1]$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On note alors :

$$L_M(G, \mu) = L_M[0, 1] = \{x : [0, 1] \to \mathbb{R}\,, \int_{[0,1]} M(\lambda x(t))dt < \infty \text{ pour un } \lambda > 0\}.$$

L'étude de $L_M[0, 1]$ est associée au comportement de M au voisinage de l'infini. En effet les problèmes d'intégrabilité de $M(x(t))$ apparaissent pour les grandes valeurs de $x(t)$.

Quand $G = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de décompte sur $\mathbb{N}$. On note alors :

$$L_M(G, \mu) = l_M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \sum_{n=1}^{\infty} M(\lambda x_n) < \infty \text{ pour un } \lambda > 0\}.$$

L'étude de l_M est associée au comportement de M au voisinage de zéro. En effet la convergence de la série de terme général $(M(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est liée aux propriétés de la fonction M au voisinage de 0.

Quand $G = (0, +\infty)$ et μ est la mesure de Lebesgue sur $(0, +\infty)$. On note alors $L_M(G, \mu) = L_M(0, \infty)$. L'étude de $L_M(0, \infty)$ est associée au comportement de M au voisinage de zéro et de l'infini. Dans la théorie des espaces d'Orlicz ce dernier cas est bien distinct du cas $G = [0, 1]$ car le comportement de M au voisinage de 0 entre en jeu en plus du comportement de M au voisinage de l'infini. Pour de nombreux résultats dans cette thèse, la distinction $G = [0, 1]$ ou $G = (0, \infty)$ n'a pas lieu d'être pour les espace $L_p(G)$ car $L_p[0, 1]$ et $L_p(0, \infty)$ sont isomorphes.

Nous introduisons la terminologie suivante : un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est appelé *correspondant à l'étude des espaces d'Orlicz construits sur* G si, lorsque $G = [0, 1]$ (resp. $G = \mathbb{N}$), il existe $u_0 > 0$ tel que $I = (u_0, \infty)$ (resp. $I = (0, u_0)$, et si, quand $G = (0, \infty)$, il existe $u_0, u_1 > 0$ tels que $I = (0, u_0) \cup (u_1, \infty)$.

Deux fonctions quasi-Orlicz φ_1 et φ_2 sont dites équivalentes sur $I \subset \mathbb{R}$ correspondant à l'étude des espaces d'Orlicz construits sur G s'il existe deux constantes $C, k > 0$ telles que, pour tout $u \in I$:

$$C^{-1}\varphi_2(k^{-1}u) \leq \varphi_1(u) \leq C\varphi_2(ku).$$

On note alors $\varphi_1 \sim_G \varphi_2$. Deux fonctions d'Orlicz équivalentes définissent des espaces d'Orlicz isomorphes. Plus précisement on a :

Proposition 3.1. *Soient M_1 et M_2 deux fonctions d'Orlicz. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $L_{M_1}(G) = L_{M_2}(G)$ (en tant qu'ensembles) et l'application identité est un isomorphisme entre $L_{M_1}(G)$ et $L_{M_2}(G)$
(ii) $M_1 \sim_G M_2$

3.2 Condition Δ_2 et fonction complémentaire M^*

On dit que M vérifie la condition Δ_2^G et on note $M \in \Delta_2^G$ s'il existe $I \subset \mathbb{R}$ correspondant à l'étude des espaces d'Orlicz construits sur G et $K > 1$ tels que pour tout $u \in I$:

$$M(2u) \leq KM(u).$$

Cette condition sur la fonction d'Orlicz M a de fortes conséquences sur l'espace d'Orlicz associé. Avant tout, si $M \in \Delta_2^{[0,1]}$ (resp. $M \in \Delta_2^{\mathbb{N}}$), alors M est majorée (resp. minorée) par une fonction polynômiale au voisinage de l'infini (resp. de 0). En effet, pour $G = [0, 1]$ il existe un intervalle $I = [u_0, \infty)$ et $K > 1$ tels que pour tout $u \in I$, $M(2u) \leq KM(u)$. Pour $u \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n-1} \leq u \leq 2^n$. On a alors $M(u) \leq K^n$ (car $M(1) = 1$) avec $n \leq \ln(2u)/\ln(2)$. Ceci donne $M(u) \leq Cu^{\ln(K)/\ln(2)}$ avec $C = 2^{\ln(K)/\ln(2)}$. Le même raisonnement pour $G = \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^n \leq u \leq 1/2^{n-1}$ donne la minoration $M(u) \geq Cu^{\ln(K)/\ln(2)}$.
Pour les conséquences de la condition Δ_2 sur les espaces d'Orlicz associés, nous donnons par exemple le résultat suivant (voir [LT1] p. 138) :

Proposition 3.2. *Soit M une fonction d'Orlicz.*
Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $M \in \Delta_2^G$
(ii) $L_M(G) = \{x\,, \rho_M(\lambda x) < \infty$ pour tout $\lambda > 0\}$
(iii) $L_M(G)$ est séparable

Il existe une façon explicite de généraliser l'indice p' conjugué de $p > 1$, c'est à dire vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, des espaces L_p. On considère, pour $v \geq 0$,

$$M^*(v) = \sup\{u|v| - M(u)\,, u \geq 0\},$$

la fonction complémentaire de M. M^* est aussi une fonction d'Orlicz et on a $M^{**} = M$. La fonction M^* peut être utilisée pour décrire l'espace dual de $L_M(G)$: quand $M \in \Delta_2^G$

alors $L_{M^*}(G)$ est isomorphe au dual de $L_M(G)$. Le fait d'avoir $M^* \in \Delta_2^G$ a aussi des conséquences sur l'espace $L_M(G)$. Nous notons $M \in \Delta_2^G \cap \nabla_2^G$ la condition $M \in \Delta_2^G$ et $M^* \in \Delta_2^G$. On donne le résultat suivant (voir [LT1] p. 148) :

Proposition 3.3. *Soit M une fonction d'Orlicz.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $M \in \Delta_2^G \cap \nabla_2^G$
(ii) $L_M(G)$ est réflexif
(iii) $L_M(G)$ admet une norme équivalente uniformément convexe.

Nous revenons un peu plus loin sur la condition $M \in \Delta_2^G \cap \nabla_2^G$ pour l'énoncer avec les indices de Boyd des espaces d'Orlicz.

Pour terminer cette section sur la fonction complémentaire M^*, notons que dans les espaces d'Orlicz munis de la norme de Luxemburg, on a une inégalité de Hölder généralisée donnée, pour tous $x \in L_M(G)$ et $y \in L_{M^*}(G)$, par :

$$\int_G x(t)y(t)d\mu(t) \leq 2\|x\|_M \|y\|_{M^*}.$$

La constante 2 apparaît ici car l'inégalité de Hölder usuelle est donnée par une autre norme équivalente sur $L_M(G)$ (voir [KR] p. 80).

3.3 Indices de Boyd

Les indices de Boyd sont définis de façon générale dans les treillis de Banach. Nous ne donnons pas cette définition ici et proposons [LT2] p. 129 comme référence ces indices généraux. Dans le cadre des espaces d'Orlicz, ces indices coïncident avec les indices de Matuszewska-Orlicz, liés à la fonction d'Orlicz sous-jacente. Les voici :

Définition 3.1 (voir [Mal] p. 21)**.** *Soit M une fonction d'Orlicz. On définit les indices suivant les différents cas sur $G \in \{[0,1], (0,\infty), \mathbb{N}\}$.*
Si $G = \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \alpha_M(\mathbb{N}) &= \sup\{p > 0\,, \sup_{0<\lambda,u\leq 1} M(\lambda u)/M(\lambda)u^p < \infty\}, \\ \beta_M(\mathbb{N}) &= \inf\{q > 0\,, \inf_{0<\lambda,u\leq 1} M(\lambda u)/M(\lambda)u^q > 0\}. \end{aligned}$$

Si $G = [0,1]$:

$$\begin{aligned} \alpha_M[0,1] &= \sup\{p > 0\,, \sup_{\lambda,u\geq 1} M(\lambda)u^p/M(\lambda u) < \infty\}, \\ \beta_M[0,1] &= \inf\{q > 0\,, \inf_{\lambda,u\geq 1} M(\lambda)u^q/M(\lambda u) > 0\}. \end{aligned}$$

Si $G = (0,\infty)$:

$$\begin{aligned} \alpha_M(0,\infty) &= \min\{\alpha_M(\mathbb{N}), \alpha_M[0,1]\}, \\ \beta_M(0,\infty) &= \max\{\beta_M(\mathbb{N}), \beta_M[0,1]\}. \end{aligned}$$

Ces indice sont appelés indices de Matuszewska-Orlicz *de la fonction d'Orlicz M.*

Dans la suite nous identifions les indices de Boyd et les indices de Matuszewska-Orlicz. On a la relation suivante :

$$1 \leq \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) \leq \infty.$$

Ces indices sont liés à la condition Δ_2^G par les relations :

$$\begin{array}{rcl} M \in \Delta_2^G & \text{si et seulement si} & \beta_M(G) < \infty, \\ M \in \Delta_2^G \cap \nabla_2^G & \text{si et seulement si} & 1 < \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty. \end{array}$$

De plus on a :

$$\frac{1}{\alpha_M(G)} + \frac{1}{\beta_{M^*}(G)} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta_M(G)} + \frac{1}{\alpha_{M^*}(G)} = 1.$$

Dans le cadre des espaces d'Orlicz on a une caractérisation des indices de Boyd :

$$\begin{aligned} \alpha_M(G) &= \sup\{p,\ L_M(G) \text{ a une } p\text{-estimation par dessus}\}, \\ \beta_M(G) &= \inf\{q,\ L_M(G) \text{ a une } q\text{-estimation par dessous}\}. \end{aligned}$$

Grâce aux diagrammes des correspondances dans [LT2] p. 100 et p. 101 on peut alors relier les indices de Boyd aux indices p_X et q_X définis précédemment avec ici $X = L_M(G)$. Rappelons leurs définitions :

$$p_X = \sup\{p,\ X \text{ est de type } p\} \text{ et } q_X = \inf\{q,\ X \text{ est de cotype } q\}.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \text{si } \beta_M(G) < \infty & \text{alors} & p_X = \alpha_M(G) \wedge 2, \\ \text{si } 1 < \alpha_M(G) & \text{alors} & q_X = \beta_M(G) \vee 2. \end{array}$$

Dans la section suivante on définit une classe pour les fonction d'Orlicz qui va permettre de calculer la p-convexité et la q-concavité des espaces d'Orlicz associés. Pour $u > 0$ et M une fonction d'Orlicz dérivable, on va utiliser des quantités de la forme $\frac{uM'(u)}{M(u)}$ qui valent précisément la puissance p quand $M(u) = |u|^p$.

3.4 La classe $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$

Étant donnés $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, une fonction quasi-Orlicz φ est dite α-convexe (resp. β-concave) si $\varphi(u^{1/\alpha})$ est une fonction convexe (resp. si $\varphi(u^{1/\beta})$ est une fonction concave) en la variable $u \geq 0$.

Définition 3.2. *Soient $0 < \alpha < \beta < \infty$. Une fonction quasi-Orlicz φ appartient à la classe $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ si $\varphi(u)/u^\alpha$ est une fonction croissante en $u > 0$ et si $\varphi(u)/u^\beta$ est une fonction décroissante en $u > 0$. Pour $G \in \{[0,1],(0,\infty),\mathbb{N}\}$, φ appartient à la classe $\mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$ si les conditions précédentes sont vérifiées dans un voisinage correspondant à l'étude des espaces d'Orlicz construits sur G.*

Remarque 1. *(i) Si M est une fonction d'Orlicz telle que $M \in \Delta_2^G \cap \nabla_2^G$, alors il existe α et β tels que $M \in \mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$.*

(ii) Une fonction quasi-Orlicz qui est α-convexe et β-concave appartient à la classe $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ et donc aux classes $\mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$ pour chaque $G \in \{[0,1],(0,\infty),\mathbb{N}\}$.

(iii) Une fonction quasi-Orlicz φ avec une dérivée continue appartient à la classe $\mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$ si et seulement si il existe un voisinage V qui correspond à l'étude des espaces d'Orlicz construits sur G tel que :

$$\alpha \leq u\varphi'(u)/\varphi(u) \leq \beta, \text{ pour tout } u \in V. \tag{3.1}$$

L'appartenance à $\mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$ est une propriété **locale** de la fonction d'Orlicz M. Comme nous l'avons vu, cela suffit pour décrire l'espace d'Orlicz associé. Les notions de p-convexité et de p-concavité d'une fonction d'Orlicz sont définies de façon **globale** ainsi que l'appartenance à $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$. Dans la pratique il est souvent nécessaire de travailler avec une fonction d'Orlicz ayant des propriétés globales. Le passage du local au global est par exemple assuré, à équivalence près, par la proposition suivante :

Proposition 3.4 ([Her] p. 89)**.** *Soient $0 < \alpha < \beta < \infty$ et φ une fonction quasi-Orlicz dans la classe $\mathcal{K}_G(\alpha,\beta)$. Alors il existe une fonction quasi-Orlicz $\tilde{\varphi}$ qui est α-convexe et β-concave (et donc $\tilde{\varphi} \in \mathcal{K}(\alpha,\beta)$), avec une dérivée seconde continue, telle que $\varphi \sim_G \tilde{\varphi}$. De plus, $\tilde{\varphi}$ vérifie (3.1) pour tout $u > 0$.*

L'espace d'Orlicz $L_M(G)$ est p-convexe (resp. q-concave) si et seulement si il existe une fonction d'Orlicz p-convexe (resp. q-concave) $\tilde{M}$ telle que $M \sim_G \tilde{M}$. D'après les correspondances dans [LT2] p. 100, un espace d'Orlicz $L_M(G)$ a une concavité non triviale, c'est à dire une q-concavité pour un certain $q < \infty$, si et seulement si il satisfait une q'-estimation par dessous non triviale, si et seulement si $\beta_M(G) < \infty$, si et seulement si $M \in \Delta_2^G$.
On préfère donner de nombreux exemples de fonctions d'Orlicz tout au long de la thèse, en particulier dans les sections "Exemples et commentaires" plutôt que maintenant. C'est à ce moment là qu'on utilise, sur ces exemples concrets, les rappels ci-dessus.

Chapitre 4

Homéomorphie des sphères unités

On s'intéresse dans ce chapitre à la classification uniforme des boules et des sphères unités des espaces de Banach. Une référence très complète est le chapitre 9 du livre [BL]. Les sphères unités S_X et S_Y de deux espaces de Banach X et Y sont dites uniformément homéomorphes s'il existe une application bijective $\varphi : S_X \to S_Y$ uniformément continue sur S_X telle que $\varphi^{-1} : S_Y \to S_X$ est uniformément continue sur S_Y. On a le fait suivant, donné dans [BL] p. 197, qui dit en particulier que si Y est obtenu par renormage à partir de X alors S_X et S_Y sont Lipschitz-équivalentes, c'est à dire que l'homéomorphisme entre S_X et S_Y est lipschitzien dans les deux sens.

Fait 2. *S_X et S_Y sont uniformément homéomorphes si et seulement si il existe une application $\psi : X \to Y$ homogène et bijective uniformément continue sur B_X telle que $\psi^{-1} : Y \to X$ est uniformément continue sur B_Y.*

En effet, si $\varphi : S_X \to S_Y$ est un homéomorphisme uniforme entre les sphères unités alors l'application définie pour $x \in X$ par $\psi(x) = \|x\|\varphi(x/\|x\|)$ convient. Réciproquement supposons que l'application ψ existe. Alors par continuité uniforme, d'après le fait 1, ψ et ψ^{-1} sont lipschitziennes pour les grandes distances. De plus, par homogénéité, $\psi(0) = 0$, ainsi il existe deux constantes $0 < K_1 < K_2 < \infty$ telles que pour tout $x \in S_X$, $K_1 \leq \|\psi(x)\| \leq K_2$. Dès lors, $\varphi(x) = \psi(x)/\|\psi(x)\|$ définie sur S_X est l'homéomorphisme uniforme des sphères unités voulu. De plus, l'application ψ peut être prise telle que $\|\psi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Ainsi si S_X et S_Y sont uniformément homéomorphes alors B_X et B_Y le sont aussi. La réciproque est vraie sous certaine hypothèses que nous ne détaillons pas ici (voir [BL] p. 206). Nous présentons dans la section suivante le premier exemple de classification uniforme des sphères unités obtenu avec l'application de Mazur dans l'article [Maz] datant de 1929.

4.1 L'application de Mazur entre espaces L_p

Soit (G, μ) un espace mesuré pour lequel l'espace $L_p(G, \mu)$ (noté ici $L_p(G)$) associé est de dimension infinie pour tout $1 \leq p < \infty$. Dans la suite on désigne par $S_p(G)$ la sphère unité de cet espace. Pour $1 \leq p, q < \infty$, on considère l'application suivante, introduite par

Mazur dans [Maz] :

$$\begin{array}{rcl}\phi_{pq} : L_p(G) & \longrightarrow & L_q(G) \\ x & \longmapsto & \phi_{pq}(x) = |x|^{p/q} sign(x),\end{array}$$

définie pour tout $t \in G$, par $\phi_{pq}(x)(t) = |x(t)|^{p/q} sign(x(t))$. Cette application est un homéomorphisme uniforme explicite entre les sphères unités $S_p(G)$ et $S_q(G)$ avec un module de continuité explicite lui aussi. Précisement :

Théorème 4.1. *ϕ_{pq} est bijective de $S_p(G)$ dans $S_q(G)$. On a $\phi_{pq}^{-1} = \phi_{qp}$ et ϕ_{pq} est $(p/q) \wedge 1$-Hölder sur $S_p(G)$ (et ainsi la réciproque ϕ_{qp} est $(q/p) \wedge 1$-Hölder sur $S_q(G)$).*

On ne donne pas ici la preuve de ce résultat car le théorème 4.5, qui lui est démontré, en est une extension aux espaces d'Orlicz. On peut sinon consulter [BL] p. 198 pour la preuve dans les espaces L_p. Weston dans [We] a montré que les estimations du module de continuité précédentes restent vraies lorsqu'on travaille avec des espaces quasi-Banach $L_p(G)$ où $0 < p < 1$.
On considère un autre espace mesuré (G', ν) tel que $L_p(G')$ est de dimension infinie. Si $L_p(G)$ et $L_q(G')$ ont le même caractère de densité alors $S_p(G)$ et $S_q(G')$ sont uniformément homéomorphes. En effet, on utilise les applications de Mazur entre les sphères avec la même mesure $S_p(G)$ et $S_2(G)$ et entre $S_q(G')$ et $S_2(G')$ ainsi que l'isométrie des espaces de Hilbert $L_2(G)$ et $L_2(G')$ pour obtenir le résultat.

4.2 Résultat général dans les treillis de Banach

Nous présentons maintenant le résultat le plus général dans les treillis de Banach obtenu par Chaatit dans [Cha]. Une première version est due à Odell et Schlumprecht dans [OdSc] pour des treillis admettant une base inconditionnelle.
Rappelons qu'un élément positif e d'un treillis de Banach X est appelé une *unité faible* si $x \wedge e = 0$ pour $x \in X$ entraîne $x = 0$. Tout treillis de Banach séparable admet une unité faible. Le résultat général sur l'homéomorphie uniforme des sphères unités des treillis de Banach est le suivant (voir [BL] p. 202) :

Théorème 4.2 (Chaatit)**.** *Soit X un treillis de Banach de dimension infinie admettant une unité faible. Alors S_X est uniformément homéomorphe à la sphère unité d'un espace de Hilbert si et seulement si X ne contient pas les espaces l_∞^n uniformément.*

Comme précisé dans [BL] p. 202, l'hypothèse que X admet une unité faible sert juste à représenter X comme un espace de fonctions. La preuve du théorème précédent fournit deux résultats quantitatifs sur le module de continuité de l'homéomorphisme :

Théorème 4.3 (Chaatit)**.** *Soient X et Y deux treillis de Banach de dimension infinie. On suppose que X est q-concave et que Y est q'-concave pour $q, q' < \infty$. Alors S_X et S_Y sont uniformément homéomorphes avec des modules de continuité qui dépendent de q, q' et des constantes de concavité.*

En terme de modules de convexité et de lissité des treillis de Banach on a :

Théorème 4.4 (Chaatit). *Soient X et Y deux treillis de Banach de dimension infinie tous deux uniformément convexes et uniformément lisses. Alors il existe un homéomorphisme uniforme $\varphi : S_X \to S_Y$ tel que le module de continuité de φ dépend de ρ_X et de δ_Y et le module de continuité de $\varphi^{-1} : S_Y \to S_X$ dépend de ρ_Y et de δ_X.*

Raynaud dans [Ray] a construit un exemple d'espace de Banach qui ne contient pas les espaces l_∞^n uniformément et dont la sphère unité n'est pas uniformément homéomorphe à la sphère unité d'un espace de Hilbert. Donc la structure de treillis ne peut pas être enlevée dans le théorème 4.2.
Dans la section suivante nous allons généraliser l'application de Mazur aux espaces d'Orlicz. Une telle généralisation entre un espace d'Orlicz et $L_1[0,1]$ a été construite par Kaczmarz dans [Kac] quelques années après l'article de Mazur [Maz]. Nous obtenons un homéomorphisme uniforme explicite avec un module de continuité explicite. Dans le cas où les fonctions d'Orlicz mises en jeu vérifient la condition Δ_2 adéquate, c'est à dire quand les espaces d'Orlicz associés ont une certaine concavité, notre résultat sur le module de continuité est en accord avec le théorème 4.3 précédent de Chaatit. Dans le cas où les fonctions d'Orlicz ne vérifient pas la condition Δ_2 requise, comme par exemple pour les espaces d'Orlicz exponentiels $L_{\exp(t^p)}$, on arrive encore à obtenir un homéomorphisme uniforme explicite avec un module de continuité explicite. Par exemple on classe entre-elles les sphères unités des espaces $L_{\exp(t^p)}$ suivant les valeurs de p. Dans ce cas les théorème de Chaatit nous disait simplement que les sphères unités n'étaient pas uniformément homéomorphes à celle d'un espace de Hilbert. Ici, par la structure même des espaces d'Orlicz, nous obtenons que ces sphères sont de plus homéomorphes entre-elles.

4.3 L'application de Mazur entre espaces d'Orlicz L_M

G désigne l'un des ensembles $[0,1]$ ou $\mathbb{N}$ ou $(0,\infty)$ avec la mesure adéquate μ.
Soient M et N deux fonctions d'Orlicz. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi_{MN} : L_M(G) & \longrightarrow & L_N(G) \\ x & \longmapsto & \phi_{MN}(x) = N^{-1} \circ M(|x|) sign(x). \end{array}$$

Notons φ la fonction quasi-Orlicz $N^{-1} \circ M$ associée à ϕ_{MN}. L'application inverse $\phi_{MN}^{-1} = \phi_{NM} : L_N(G) \to L_M(G)$ est associée à la fonction quasi-Orlicz $\varphi^{-1} = M^{-1} \circ N$. Notons $B_M(G)$ et $B_N(G)$ les boules unités fermées et $S_M(G), S_N(G)$ les sphères unités des espaces d'Orlicz $L_M(G)$ et $L_N(G)$.

Théorème 4.5. *Supposons que la fonction quasi-Orlicz $\varphi = N^{-1} \circ M$ est dans la classe $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$. Alors ϕ_{MN} est $\alpha \wedge 1$-Hölder sur $B_M(G)$ et $\phi_{MN}^{-1} = \phi_{NM}$ est $(1/\beta) \wedge 1$-Hölder sur $B_N(G)$.*

Avant de donner la preuve du théorème 4.5 nous faisons quelques commentaires et nous donnons le corollaire 4.6.

Tout d'abord ϕ_{MN} envoie bien $B_M(G)$ dans $B_N(G)$. En effet, si $\|x\|_M \leq 1$ alors le lemme de Fatou entraîne que $\|\phi_{MN}(x)\|_N \leq 1$.
En fait ϕ_{MN} envoie $S_M(G)$ sur $S_N(G)$ et consiste en un homéomorphisme uniforme entre les sphères unités. Un calcul direct montre que $\|\phi_{MN}(x)\|_N = 1$ quand $\|x\|_M = 1$.
Ensuite, comme montré dans [Cha] et [OdSc], l'homéomorphie des sphères unités de $L_M(G)$ et de $L_N(G)$ est connue lorsque $M, N \in \Delta_2^G$, c'est à dire quand les espaces d'Orlicz $L_M(G)$ et $L_N(G)$ ont chacun une concavité non triviale. Le corollaire 4.6 donne la valeur explicite du module de continuité de l'homéomorphisme sous quelques hypothèses de régularité sur la fonction quasi-Orlicz $N^{-1} \circ M$.

Corollaire 4.6. *Soit $G \in \{[0,1], (0,\infty), \mathbb{N}\}$. Soient M et N deux fonctions d'Orlicz qui vérifient : il existe $1 \leq p_M \leq q_M < \infty$ et $1 \leq p_N \leq q_N < \infty$ tels que $M \in \mathcal{K}_G(p_M, q_M)$ et $N \in \mathcal{K}_G(p_N, q_N)$. Alors, à un renormage équivalent près, $\phi_{MN} : S_M(G) \to S_N(G)$ est un homéomorphisme uniforme avec module de continuité explicite : ϕ_{MN} est $(p_M/q_N) \wedge 1$-Hölder sur $S_M(G)$ et $\phi_{MN}^{-1} = \phi_{NM}$ est $(p_N/q_M) \wedge 1$-Hölder sur $S_N(G)$.*

Preuve du corollaire 4.6. On utilise la proposition 3.4 pour passer des hypothèses locales sur M et N à des propriétés globales. On obtient deux fonctions d'Orlicz $\tilde{M} \in \mathcal{K}(p_M, q_M)$ et $\tilde{N} \in \mathcal{K}(p_N, q_N)$ telles que $M \sim_G \tilde{M}$ et $\tilde{N} \sim_G N$. De plus, la fonction quasi-Orlicz $\tilde{N}^{-1} \circ \tilde{M}$ satisfait les hypothèses du theoreme 4.5. En effet, $\tilde{N}^{-1} \in \mathcal{K}(1/q_N, 1/p_N)$ et $\tilde{N}^{-1} \circ \tilde{M} \in \mathcal{K}(p_M/q_N, q_M/p_N)$.
On sait, par équivalence, que l'application identité entre $L_M(G)$ (resp. $L_N(G)$) et $L_{\tilde{M}}(G)$ (resp. $L_{\tilde{N}}(G)$) est un isomorphisme. Avec ce renormage, le corollaire 4.6 est démontré. Rappelons, d'après le fait 2, qu'un renormage équivalent donne des sphères unités Lipschitz-équivalentes. ☐

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4.5. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.7. *Soit φ une fonction quasi-Orlicz dans la classe $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$. Alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$ on a les inégalités suivantes.*
Si $\beta \leq 1$ ou $sign(a) \neq sign(b)$, alors $\big|\varphi(|a|)sign(a) - \varphi(|b|)sign(b)\big| \leq 2\varphi\big(|a-b|\big)$.

Si $1 \leq \beta$, alors $\big|\varphi(|a|) - \varphi(|b|)\big| \leq 2^{(1-\alpha)\vee 0}\beta \dfrac{\varphi\big(|a|+|b|\big)}{|a|+|b|}|a-b|$.

Démonstration. Si $sign(a) \neq sign(b)$ on a $\varphi(|a|) + \varphi(|b|) \leq 2\varphi(|a|+|b|)$ car φ est croissante. Mais dans ce cas $|a|+|b| = |a-b|$.

Si $\beta \leq 1$ et $sign(a) = sign(b)$. On peut supposer $|b| \geq |a|$. Il faut choisir un $\lambda > 0$ judicieux tel que $\varphi(|b|) = \lambda\varphi(|b|) + (1-\lambda)\varphi(|b|)$. Comme $\varphi(u)/u$ est une fonction décroissante en u, on a :

$$\frac{\varphi(|b|)}{|b|} \leq \frac{\varphi(|a|)}{|a|} \text{ et } \frac{\varphi(|b|)}{|b|} \leq \frac{\varphi(|b|-|a|)}{|b|-|a|}.$$

On prend $\lambda = \frac{|a|}{|b|}$ et on utilise l'inégalité triangulaire $|b| - |a| \leq |b-a|$ pour conclure.

Si $1 \leq \beta$ et $sign(a) = sign(b)$. On peut à nouveau supposer $|b| \geq |a| > 0$. Comme $\varphi(|a|)/|a|^\beta \geq \varphi(|b|)/|b|^\beta$ et $\varphi(|b|)/|b|^\alpha \leq \varphi(|a|+|b|)/(|a|+|b|)^\alpha$, on obtient :

$$\varphi(|b|) - \varphi(|a|) \leq (1 - \Big(\frac{|a|}{|b|}\Big)^\beta)\Big(\frac{|b|}{|a|+|b|}\Big)^\alpha \varphi(|a|+|b|).$$

On utilise l'inégalité des accroissements finis $1 - u^\beta \leq \beta(1-u)$, quand $u \in [0,1]$, pour conclure. $\square$

Démonstration du théorème 4.5. Si la fonction quasi-Orlicz φ est dans la classe $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ alors son inverse φ^{-1} est dans la classe $\mathcal{K}(1/\beta, 1/\alpha)$. Ainsi pour démontrer le théorème 4.5 on se contente de travailler avec $\phi_{MN} : B_M(G) \to B_N(G)$ dans les trois cas suivants : $\alpha \leq \beta \leq 1$ ou $1 \leq \alpha \leq \beta$ ou $\alpha \leq 1 \leq \beta$.

Rappelons que $B_M(G)$ désigne la boule unité fermée de $L_M(G)$ et que φ est la fonction quasi-Orlicz $N^{-1} \circ M$. Fixons $x, y \in B_M(G)$, tels que $\|x-y\|_M > 0$. Le fait qui suit va être très utile dans la preuve. Il ressemble au fait 1, mais ici on sait juste pour l'instant que ϕ_{MN} est bornée sur $B_M(G)$:

Fait 3. *Durant la preuve, étant donnée une constante $K > 0$, dès qu'on en a besoin, on peut supposer que $\|x-y\|_M < K$. En effet, comme $x, y \in B_M(G)$ et comme ϕ_{MN} arrive dans $B_N(G)$ (et ainsi est bornée) elle est lipschitzienne (et aussi α-Hölder) pour les grandes distances : si $\|x-y\|_M \geq K$ alors*

$$\|\phi_{MN}(x) - \phi_{MN}(y)\|_N \leq 2 \leq 2/K\|x-y\|_M \leq 2/K 2^{1-\alpha}\|x-y\|_M^\alpha.$$

Pour $t \in G$ on pose :

$$\begin{aligned}\Delta_{MN}(t) &= \big|\phi_{MN}(x)(t) - \phi_{MN}(y)(t)\big| \\ &= \big|\varphi(|x(t)|)sign(x(t)) - \varphi(|y(t)|)sign(y(t))\big|.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse que la fonction quasi-Orlicz φ est dans classe $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$, notre but est d'estimer

$$\|\Delta_{MN}\|_N = \inf\{\lambda > 0\,, \int_G N(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda})d\mu(t) \leq 1\}.$$

Premier cas : $\alpha \leq \beta \leq 1$.

En utilisant le fait 3 on peut supposer $0 < \|x-y\|_M < 1$. Posons $\lambda = 2\|x-y\|_M^\alpha$. Le lemme 4.7 donne, pour tout $t \in G$:

$$\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda}\varphi\big(|x(t)-y(t)|\big).$$

Mais $\varphi(u)/u^\alpha$ est une fonction croissante en u et $\frac{2}{\lambda} \geq 1$, donc on a pour tout $t \in G$:

$$\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda} \leq \varphi\big((\frac{2}{\lambda})^{1/\alpha}|x(t)-y(t)|\big).$$

Cela donne :

$$\int_G N(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda})d\mu(t) \leq \int_G M\big(\frac{|x(t)-y(t)|}{\|x-y\|_M}\big)d\mu(t).$$

Il est alors clair par définition de la norme de Luxemburg que l'on a :

$$\|\phi_{MN}(x) - \phi_{MN}(y)\|_N \leq 2\|x-y\|_M^\alpha.$$

Cela conclut le premier cas : ϕ_{MN} est α-Hölder sur $B_M(G)$.

Deuxième cas : $1 \leq \alpha \leq \beta$.

Considérons :

$$\begin{array}{rcl} G^+ & = & \{t \in G\,, sign(x(t)) = sign(y(t))\}, \\ G^- & = & \{t \in G\,, sign(x(t)) \neq sign(y(t))\}. \end{array}$$

Posons $\lambda = 3 \times 2 \times \beta \times 4^\beta \|x-y\|_M$. D'après le fait 3, on peut supposer que $0 < \lambda < 2$ (ce qui implique $0 < \|x-y\|_M < 1$).

Considérons le cas $t \in G^-$. Grâce au lemme 4.7 on a :

$$\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda}\varphi(|x(t)-y(t)|).$$

Mais $\varphi(u)/u$ est une fonction croissante en u et $2/\lambda \geq 1$ donc :

$$\int_{G^-} N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big)d\mu(t) \leq \int_G M\big(\frac{2}{\lambda}|x(t)-y(t)|\big)d\mu(t) \leq \frac{1}{3}, \tag{4.1}$$

ceci par convexité de M (ici $\frac{2}{\lambda} \leq \frac{1}{3\|x-y\|_M}$) et parce que $0 < \|x-y\|_M < 1$.

Considérons le cas $t \in G^+$. A nouveau avec le lemme 4.7 on obtient :

$$\Delta_{MN}(t) \leq \beta\frac{\varphi(s(t))}{s(t)}|x(t)-y(t)|,$$

où l'on a posé $s(t) = |x(t)| + |y(t)|$. Notons qu'il n'y a pas de restriction à travailler avec $t \in G^+$ tel que $s(t) \neq 0$ car si $s(t) = 0$ alors $\Delta_{MN}(t) = 0$.

Ainsi, pour tout $t \in G^+$ tel que $s(t) \neq 0$, comme $\varphi(u)/u^\beta$ est décroissante :

$$N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big) \leq N\big[\varphi(s(t))\frac{\beta}{\lambda}\frac{|x(t)-y(t)|}{s(t)}\big] \leq N\big[\varphi\big(s(t)/4\big)f(t)\big],$$

avec $f(t) = 4^\beta\dfrac{\beta}{\lambda}\dfrac{|x(t)-y(t)|}{s(t)}$.

Considérons :

$$\begin{array}{rcl} G_1^+ & = & \{t \in G^+\,, s(t) \neq 0 \text{ et } f(t) \geq 1\}, \\ G_2^+ & = & \{t \in G^+\,, s(t) \neq 0 \text{ et } f(t) < 1\}. \end{array}$$

Pour tout $t \in G_1^+$, comme $\varphi(u)/u$ est croissante :

$$N\big[\varphi\big(s(t)/4\big)f(t)\big] \leq N\big[\varphi\big(\frac{s(t)}{4}f(t)\big)\big].$$

Donc on a :

$$\int_{G_1^+} N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big)d\mu(t) \leq \int_G M\big(4^\beta\frac{\beta}{\lambda}|x(t)-y(t)|\big)d\mu(t) \leq \frac{1}{3}, \tag{4.2}$$

ceci encore par convexité de M et par la valeur particulière de λ.

Pour tout $t \in G_2^+$, par convexité de N et le fait que $\varphi(u)/u^\beta$ est décroissante :

$$N\big(\varphi\big(s(t)/4\big)f(t)\big) \le f(t)N\big[\varphi(s(t)/4)\big] = 4^{\beta-1}\frac{\beta}{\lambda}\frac{M(s(t)/4)}{s(t)/4}|x(t)-y(t)|.$$

Nous allons appliquer l'inégalité de Hölder généralisée.
Avant tout, pour $u > 0$, on a $M^*(\frac{M(u)}{u}) \le M(u)$. En effet, rappelons que $M^*(\frac{M(u)}{u}) = \sup\{v\frac{M(u)}{u} - M(v)\,, v \ge 0\}$. Alors si $0 \le v \le u$ alors $v\frac{M(u)}{u} - M(v) \le v\frac{M(u)}{u} \le M(u)$. Si $v \ge u$ alors $v\frac{M(u)}{u} - M(v) \le M(\frac{v}{u}.u) - M(v) \le 0 \le M(u)$ et l'inégalité est démontrée.
Comme $\|s(.)/4\|_M < 1$, on a comme au-dessus : $\displaystyle\int_G M^*\big(\frac{M(s(t)/4)}{s(t)/4}\big)d\mu(t) \le 1$. Ceci entraîne : $\Big\|\dfrac{M(s(.)/4)}{s(.)/4}\Big\|_{M^*} \le 1$. On applique l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{G_2^+} N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big)d\mu(t) &\le 2\times 4^{\beta-1}\Big\|\frac{M(s(.)/4)}{s(.)/4}\Big\|_{M^*}\Big\|\frac{\beta}{\lambda}(x-y)\Big\|_M \\ &\le 2\times 4^{\beta-1}\frac{\beta}{\lambda}\|x-y\|_M \le \frac{1}{3}. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

On utilise les inégalités (4.1), (4.2) and (4.3) pour avoir :

$$\int_G N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big)d\mu(t) = \int_{G^-\cup G_1^+\cup G_2^+} N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big)d\mu(t) \le 1.$$

Cela signifie, par définition de la norme :

$$\|\phi_{MN}(x) - \phi_{MN}(y)\|_N \le \lambda = 6\beta 4^\beta\|x-y\|_M,$$

et ϕ_{MN} est lipschitzienne sur $B_M(G)$.

Troisième cas : $\alpha \le 1 \le \beta$.
Si $t \in G^-$, les arguments sont les mêmes qu'avant avec le fait que la fonction $\varphi(u)/u^\alpha$ est croissante en u.
Si $t \in G_2^+$ l'estimation est la même qu'au-dessus, en remarquant que $\|x-y\|_M \le 2^{1-\alpha}\|x-y\|_M^\alpha$.

Si $t \in G_1^+$, les changements sont plus significatifs. Comme $\varphi(u)/u^\alpha$ est croissante :

$$\begin{aligned}N\big[\varphi\big(s(t)/4\big)f(t)\big] &\le N\big[\varphi\big(\frac{s(t)}{4}f(t)^{1/\alpha}\big)\big], \\ &= N\big[\varphi\big(\big(\frac{\beta}{\lambda}\big)^{1/\alpha}4^{(\beta/\alpha)-1}s(t)^{1-(1/\alpha)}|x(t)-y(t)|^{1/\alpha}\big)\big].\end{aligned}$$

Mais ici on a :

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|^{1/\alpha} &= |x(t)-y(t)|^{(1/\alpha)-1}|x(t)-y(t)| \\ &\le s(t)^{(1/\alpha)-1}|x(t)-y(t)|,\end{aligned}$$

car $1/\alpha - 1 \geq 0$. Ainsi, pour tout $t \in G_1^+$ la majoration est :

$$N\big(\frac{\Delta_{MN}(t)}{\lambda}\big) \leq M\big[\big(\frac{\beta}{\lambda}\big)^{1/\alpha} 4^{(\beta/\alpha)-1}|x(t) - y(t)|\big].$$

En ajoutant les différentes estimations sur G^-, G_2^+ et G_1^+, on obtient que dans ce cas, ϕ_{MN} est α-Hölder sur $B_M(G)$.

En guise de conclusion :

– si $\alpha \leq \beta \leq 1$, ϕ_{MN} est α-Hölder sur $B_M(G)$,

– si $1 \leq \alpha \leq \beta$, ϕ_{MN} est lipschitzienne sur $B_M(G)$,

– si $\alpha \leq 1 \leq \beta$, ϕ_{MN} est α-Hölder sur $B_M(G)$,

et le théorème 4.5 est démontré. □

4.4 Exemples et commentaires

Fixons $p, q \geq 1$ et considérons $M(u) = u^p$ et $N(u) = u^q$ pour tout $u \geq 0$. Alors $\phi_{MN} = \phi_{pq}$ est l'application de Mazur usuelle entre $L_p(G)$ et $L_q(G)$. On a $p_M = q_M = p$ et $p_N = q_N = q$, et alors le théorème 4.5 fournit l'estimation usuelle du module de continuité de ϕ_{pq} sur la boule unité de $L_p(G)$.

On donne un exemple de fonctions d'Orlicz pour lesquelles l'estimation du module de continuité obtenue dans le théorème 4.5 est optimale.
Prenons $G = (0, \infty)$ et considérons les fonctions d'Orlicz $M(u) = u^2 \vee u^4$ et $N(u) = u^2$ définies pour $u \in \mathbb{R}^+$. La fonction quasi-Orlicz $\varphi(u) = N^{-1} \circ M(u) = u \vee u^2$ est dans la classe $\mathcal{K}(1, 2)$. Le théorème 4.5 nous dit que $\phi_{MN} : B_M(0, \infty) \to B_N(0, \infty)$ est lipschitzienne et dans ce sens c'est le meilleur module de continuité possible. Toujours grâce au théorème 4.5 l'application inverse $\phi_{MN}^{-1} = \phi_{NM} : B_N(0, \infty) \to B_M(0, \infty)$ est 1/2-Hölder sur la boule unité $B_N(0, \infty)$. En utilisant les fonctions indicatrices $\chi_{[0,1/n]}$ avec $n \in \mathbb{N}$, vues dans $L_M(0, \infty)$ et dans $L_N(0, \infty)$ montrons que l'exposant 1/2 ne peut pas être amélioré. Par l'absurde, supposons que $\phi_{NM} : B_N(0, \infty) \to B_M(0, \infty)$ est α-Hölder sur la boule unité $B_N(0, \infty)$ pour un certain $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Comme $\phi_{NM}(0) = 0$, il existe une constante $K > 0$ indépendante de n telle que :

$$\|\phi_{NM}(\chi_{[0,1/n]})\|_M \leq K \|\chi_{[0,1/n]}\|_N^\alpha.$$

Ici $L_N(0, \infty)$ n'est autre que l'espace $L_2(0, \infty)$ et $\|\chi_{[0,1/n]})\|_N = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $M^{-1} \circ N(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$, on a $\phi_{NM}(\chi_{[0,1/n]}) = \chi_{[0,1/n]}$ (les fonctions indicatrices sont des points fixes). On a alors :

$$\|\phi_{NM}(\chi_{[0,1/n]})\|_M = \|\chi_{[0,1/n]}\|_M = \frac{1}{M^{-1}(n)} = \frac{1}{n^{1/4}}.$$

Avec l'inégalité du dessus on obtient $1 \leq K n^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}}$. Cette dernière quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ d'où l'absurdité et l'optimalité de l'exposant 1/2.

Passons à l'exemple des espaces d'Orlicz exponentiels $L_{\exp(u^p)}$. Supposons que $G = [0,1]$. Fixons $1 \leq p, q < \infty$ et considérons les fonctions d'Orlicz suivantes définies $u \geq 0$ par :

$$M(u) = \exp(u^p) - 1 \text{ et } N(u) = \exp(u^q) - 1.$$

Ces deux fonctions ne vérifient pas la condition $\Delta_2^{[0,1]}$, car sinon leur croissance serait polynômiale. Ainsi les espaces d'Orlicz associés $L_M[0,1] = L_{\exp u^p}$ et $L_N[0,1] = L_{\exp u^q}$ ne sont pas séparables et n'ont pas de concavité. On a $\beta_M[0,1] = \beta_N[0,1] = \infty$ et chaque espace d'Orlicz exponentiel contient les espaces l_∞^n uniformément. Le théorème de Chaatit 4.2, qui est valable pour les espaces de fonctions, dit que la sphère unité de ces espaces n'est pas uniformément homéomorphe à celle d'un espace de Hilbert. Notre théorème 4.5 permet de classer entre-elles ces sphères unités. L'énoncé est identique à celui obtenu entre les espaces L_p, via l'application de Mazur usuelle. Nous énonçons ce résultat sous forme d'un corollaire :

Corollaire 4.8. *Les sphères unités S_p et S_q des espaces exponentiels $L_{\exp u^p}$ et $L_{\exp u^q}$ sont uniformément homéomorphes. De plus l'homéomorphisme $\varphi : S_p \to S_q$ peut être choisi tel que φ est $(p/q) \wedge 1$-Hölder sur S_p et $\varphi^{-1} : S_q \to S_p$ est $(q/p) \wedge 1$-Hölder sur S_q.*

Démonstration. Pour appliquer le théorème 4.5 il faut s'intéresser à la classe $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$ à laquelle peut appartenir l'application $N^{-1} \circ M$. Les applications d'Orlicz M et N sont de la forme $M(u) = F(u^p)$ et $N(u) = F(u^q)$ avec $F(x) = \exp(x) - 1$ bijective. Ainsi pour $u \geq 0$:

$$N^{-1} \circ M(u) = \left(F^{-1} \circ F(u^p)\right)^{1/q} = u^{p/q}.$$

Ainsi l'application $N^{-1} \circ M$ est dans la classe $\mathcal{K}(p/q, p/q)$ et le théorème 4.5 nous donne l'homéomorphie uniforme avec le module de continuité voulu pour les sphères unités de $L_M[0,1]$ et de $L_N[0,1]$. $\square$

Chapitre 5

Approximation des applications uniformément continues

5.1 Problème et notations

Soit f une application uniformément continue entre un espace métrique (X, d_X) et un espace vectoriel normé $(Y, \|\,.\,\|_Y)$. On s'intéresse à l'approximation uniforme de f sur X par des applications α-Hölder. En particulier on regarde l'exposant $\alpha > 0$ qui apparaît dans le problème précédent.
Quand (X, d_X) est **borné** et **métriquement convexe**, on peut formaliser le problème de la façon suivante. On désigne par $UC(X, Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ uniformément continues, et par $\mathcal{H}^\alpha(X, Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ α-Hölder, pour $\alpha > 0$, avec la convention $\mathcal{H}^0(X, Y) = UC(X, Y)$ quand $\alpha = 0$. Ici comme (X, d) est métriquement convexe, l'ensemble $\mathcal{H}^\alpha(X, Y)$ est réduit aux applications constantes quand $\alpha > 1$. De plus, comme X est borné, on a les inclusions, pour $\beta \geq \alpha \geq 0$:

$$\mathcal{H}^\beta(X, Y) \subseteq \mathcal{H}^\alpha(X, Y) \subseteq UC(X, Y). \tag{5.1}$$

L'espace $UC(X, Y)$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_Y,\ x \in X\}$ est un espace de Banach. Ainsi, nous nous intéressons à l'adhérence de $\mathcal{H}^\alpha(X, Y)$ pour $\|\,.\,\|_\infty$ dans $UC(X, Y)$.
On définit alors le coefficient de meilleure approximation höldérienne :

$$\alpha(X, Y) = \sup\{\alpha \in [0, 1],\ \overline{\mathcal{H}^\alpha(X, Y)}^{\|\,.\,\|_\infty} = UC(X, Y)\}. \tag{5.2}$$

La valeur de $\alpha(X, Y)$ est optimale au sens où, si $\beta > \alpha(X, Y)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $f : X \to Y$ uniformément continue tels que, pour toute application β-Hölder $\psi : X \to Y$, on a $\|f - \psi\|_\infty > \varepsilon$.

5.2 Lipschitz-équivalences et rétractés uniformes absolus

Deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont dits *Lipschitz-équivalents* s'il existe une application bijective $\phi : X_1 \to X_2$ telle que ϕ et ϕ^{-1} sont lipschitziennes. L'exposant de meilleure approximation höldérienne est stable par Lipschitz-équivalence, on a :

Lemme 5.1. *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques bornés, métriquement convexes et Lipschitz-équivalents. Alors, pour tout espace vectoriel normé $(Y, \|\,.\,\|_Y)$, on a :*

$$\alpha(X_1, Y) = \alpha(X_2, Y).$$

De façon similaire, si on suppose que $(Y_1, \|\,.\,\|_1)$ et $(Y_2, \|\,.\,\|_2)$ sont deux espaces vectoriels normés Lipschitz-équivalents, alors pour tout espace métrique borné et métriquement convexe (X, d_X), on a :

$$\alpha(X, Y_1) = \alpha(X, Y_2).$$

Démonstration. Soit $f : X_1 \to Y$ une application uniformément continue. Fixons $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \alpha(X_2, Y)$. $f \circ \phi^{-1} : X_2 \to Y$ est uniformément continue et ainsi peut être approchée par $g_\varepsilon : X_2 \to Y$ qui est α-Hölder. La fonction $g_\varepsilon \circ \phi : X_1 \to Y$ est toujours α-Hölder (car ϕ est lipschitzienne) et elle approche f uniformément sur X_1. On a donc montré l'inégalité $\alpha \leq \alpha(X_1, Y)$ pour tout $\alpha < \alpha(X_2, Y)$. Par passage à la limite cela donne : $\alpha(X_2, Y) \leq \alpha(X_1, Y)$. La même preuve fournit l'inégalité inverse.
La deuxième partie du lemme, avec la Lipschitz-équivalence à l'arrivée, se démontre avec des arguments similaires. □

Un ensemble métrique (X, d_X) est appelé un *rétracté uniforme absolu* si pour tout espace métrique (E, d_E) tel qu'il existe une isométrie $\varphi : X \to \varphi(X) \subset E$, (i.e. E contient X isométriquement) alors il existe une rétraction $r : E \to \varphi(X)$ (i.e. une application qui vaut l'identité sur $\varphi(X)$) uniformément continue.
Cette notion est étudiée dans le premier chapitre du livre [BL]. Les boules unités fermées des espaces de Banach uniformément convexes sont des rétractés uniformes absolus et on connaît le module de continuité des rétractions. Plus précisément, en recoupant les résultats dans [BL], à savoir les résultats 1.26, 1.27 et A.9, on a le théorème :

Théorème 5.2. *Soit X un espace de Banach uniformément convexe. Soit $A \subset X$ un convexe non vide, fermé et borné de X. On note $A \subset RB_X$ pour une certaine constante $0 < R < \infty$. Alors A est un rétracté uniforme absolu. De plus les rétractions obtenues ont un module de continuité ω qui vérifie : il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que pour tout $0 < \varepsilon \leq R$, $\omega(\varepsilon) \leq K_1 \delta_X^{-1}(K_2\varepsilon)$.*

En particulier, si le module de convexité de X est en puissance $2 \leq q < \infty$ (i.e. $\delta_X(\varepsilon) \geq K\varepsilon^q$ pour $0 \leq \varepsilon \leq 2$), ce qui est le cas pour une norme équivalente sur X d'après le théorème de renormage pour les espaces uniformément convexes, alors les rétractions sur B_X sont $1/q$-Hölder.

Voici un lemme montrant comment les rétractés peuvent intervenir dans notre problème d'approximation. Ici le rétracté apparaît comme espace de départ. Nous voyons plus loin des cas où le rétracté est à l'arrivée. Pour l'instant nous donnons le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soient X un rétracté uniforme absolu et E un espace métrique borné et métriquement convexe qui contient X isométriquement. Alors, pour tout espace vectoriel normé $(Y, \|\,.\,\|_Y)$, on a :*

$$\alpha(E, Y) \leq \alpha(X, Y).$$

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ une application uniformément continue. On note $\varphi(X)$ la copie isométrique de X dans E. Il existe une rétraction $r : E \to \varphi(X)$ uniformément continue, telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in \varphi(X)$. On considère $\tilde{f} = f \circ r : E \to Y$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \alpha(E, Y)$. Par définition de $\alpha(E, Y)$, il existe $g_\varepsilon : E \to Y$ α-Hölder telle que $\|\tilde{f}(x) - g_\varepsilon(x)\|_Y \leq \varepsilon$, pour tout $x \in E$. Ainsi, pour tout $x \in \varphi(X)$, $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_Y \leq \varepsilon$. De plus, la restriction de g_ε à $\varphi(X)$ est toujours α-Hölder. Donc, pour tout $\alpha \leq \alpha(E, Y)$, on a l'inégalité : $\alpha \leq \alpha(\varphi(X), Y)$. On passe à la limite quand $\alpha \to \alpha(E, Y)$ pour obtenir $\alpha(E, Y) \leq \alpha(\varphi(X), Y)$. La conclusion vient du lemme précédent car les ensembles X et $\varphi(X)$ sont Lipschitz-équivalents. □

5.3 Les résultats connus et d'autres faciles

Il existe un principe très général : un théorème d'extension pour des fonctions dans une certaine classe implique un théorème d'approximation par des fonctions dans cette classe. Nous précisons tous les détails dans le chapitre "Liens avec les extensions". Ici on se contente donner des résultats très classiques d'extension d'applications uniformément continues et on montre comment obtenir des résultats d'approximation.

Si Γ est un ensemble, on désigne par $l_\infty(\Gamma)$ l'ensemble des applications $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ bornées. Muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)|, \gamma \in \Gamma\}$, $(l_\infty(\Gamma), \|\,.\,\|_\infty)$ est un espace de Banach. Dans les résultats qui suivent, ω désigne une fonction sous-additive de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$. La proposition suivante va être très utile dans la suite :

Proposition 5.4. *Soient (X, d) est un espace métrique, $A \subset X$ un sous-ensemble de X et $f : A \to l_\infty(\Gamma)$ une application uniformément continue dont le module de continuité est majoré par ω. Alors f peut être étendue en une application uniformément continue $F : X \to l_\infty(\Gamma)$ dont le module de continuité est encore majoré par ω.*

On donne la preuve de cette proposition :

Démonstration. Une fonction $f = (f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de X dans $l_\infty(\Gamma)$ a un module de continuité majoré par ω si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, f_γ a un module de continuité majoré par ω. On est ramené à étendre des applications partant de A à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont le module de continuité est majoré par ω. Soit donc $f : A \to \mathbb{R}$ une telle application. L'extension de f à X est donnée explicitement par la formule d'inf-convolution, pour $x \in X$:

$$F(x) = \inf\{f(y) + \omega(d(y, x)),\, y \in A\}.$$

Tout d'abord, F est bien définie. En effet, fixons $y_0 \in A$. Alors pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in A$:

$$f(y_0) - f(y) \leq \omega(d(y_0, y)) \leq \omega(d(y, x)) + \omega(d(x, y_0)) \text{ par sous-additivité,}$$

d'où $f(y) + \omega(d(y, x)) \geq f(y_0) - \omega(d(x, y_0))$ et la borne inférieure existe bien. Ensuite pour tout $y \in A$ on a $F(y) = f(y)$ et F est bien une extension de f à X. Il reste à montrer que le module de continuité de F est majoré par ω. Soient $x_1, x_2 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $y_\varepsilon \in A$ tel que $F(x_2) \geq f(y_\varepsilon) + \omega(d(y_\varepsilon, x_2)) - \varepsilon$. Ainsi :

$$F(x_1) - F(x_2) \leq f(y_\varepsilon) + \omega(d(y_\varepsilon, x_1)) - f(y_\varepsilon) - \omega(d(y_\varepsilon, x_2)) + \varepsilon.$$

Avec l'inégalité triangulaire et la sous-additivité de ω on obtient : $F(x_1) - F(x_2) \leq \omega(d(x_1, x_2)) + \varepsilon$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0. Le même raisonnement avec $F(x_2) - F(x_1)$ donne le résultat. □

Comme remarqué dans [BL] p. 12, la sous-additivité de ω est essentielle car sinon on ne pourrait pas étendre f, en une application uniformément continue, à un espace X métriquement convexe contenant A. En effet, comme nous l'avons vu, sur un espace métrique métriquement convexe les modules de continuité des applications uniformément continues sont sous-additifs.

Le théorème qui suit est dû à Kirszbraun [Kir] (voir aussi [BL] p. 18) :

Théorème 5.5 (Kirszbraun)**.** *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $A \subset H_1$ un sous-ensemble de H_1 et $f : A \to H_2$ une application uniformément continue de module de continuité majoré par ω. Alors f peut être étendue en une application uniformément continue $F : H_1 \to H_2$ dont le module de continuité est encore majoré par ω.*

Le théorème suivant dû à Minty [Min] est encore un résultat d'extension quand l'arrivée est un espace de Hilbert. La preuve est aussi présentée dans [BL] p. 21.

Théorème 5.6 (Minty)**.** *Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ un sous-ensemble de X. Soient H un espace de Hilbert et $f : A \to H$ une application α-Hölder avec $0 < \alpha \leq 1/2$. Alors f peut être étendue en une application $F : X \to H$, qui est α-Hölder avec la même constante de Hölder.*

La proposition suivante nous donne des résultats d'approximation qui découlent des trois résultats d'extension précédents. Dans les cas (i) et (ii) on obtient la densité des applications lipschitziennes avec en plus la valeur de la constante de Lipschitz de l'approximation. On ne donne pas la preuve ici mais dans le chapitre "Liens avec les extensions" où la relation entre extensions et approximations est approfondie.

Proposition 5.7. *Soient (X, d) un espace métrique et $(Y, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach. Soit $f : X \to Y$ une application uniformément continue dont le module de continuité est majoré par ω. Fixons $\varepsilon > 0$.*
(i) Si $Y = l_\infty(\Gamma)$ alors il existe une application lipschitzienne $g_\varepsilon : X \to Y$, de constante de Lipschitz $2\omega(\varepsilon)/\varepsilon$ telle que pour tout $x \in X$, $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq 3\omega(\varepsilon)$.
(ii) Si X est un sous ensemble d'un espace de Hilbert et si Y est lui aussi un espace de Hilbert, alors on a la même conclusion.
(iii) Si Y est un espace de Hilbert, alors pour tout $0 < \alpha \leq 1/2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application α-Hölder $g_\varepsilon : X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$.
En particulier, si X est borné et métriquement convexe alors, dans les cas (i) et (ii) on a $\alpha(X, Y) = 1$ et dans le cas (iii) on a $\alpha(X, Y) \geq 1/2$.

La partie (i) de la proposition 5.7 précédente, permet d'obtenir que toute application uniformément continue partant d'un espace métrique à valeurs dans un espace de dimension finie peut être approchée uniformément par des applications lipschitziennes. On a un résultat similaire si l'espace de dimension finie est au départ :

Proposition 5.8. *Soit X une partie métriquement convexe et compacte d'un espace de Banach. Soit Y un espace vectoriel normé. Alors toute application uniformément continue de X dans Y peut être approchée uniformément sur X par des applications lipschitziennes. En particulier, $\alpha(X, Y) = 1$.*

Démonstration. Soient $f : X \to Y$ uniformément continue et $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ si $\|x - y\| \leq \delta$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. Soit A un sous-ensemble δ-séparé maximal dans X. C'est à dire, pour tous $x, y \in A$, $\|x - y\| \geq \delta$ et pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ tel que $\|x - a\| \leq \delta$. Comme la partie X est compacte, A est fini. On note $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Fixons $1 \leq i \leq n$ et considérons :

$$\begin{array}{rcl} a_i : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_i(x) = \dfrac{(\delta - \|x - x_i\|)^+}{\sum_{j=1}^n (\delta - \|x - x_j\|)^+}, \end{array}$$

où, pour $a \in \mathbb{R}$, $a^+ = a \vee 0$. Considérons maintenant :

$$\begin{array}{rcl} g : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i(x) f(x_i). \end{array}$$

Alors g est lipschitzienne et vérifie $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, comme X est métriquement convexe, $\alpha(X, Y) = 1$. □

La question de l'estimation de $\alpha(X, Y)$ est donc réglée quand l'arrivée Y est de dimension finie ou quand le départ X est une partie fermée et bornée d'un espace de dimension finie. On s'intéresse aux espaces de Banach de dimension infinie, avec comme premier exemple l'espace c_0 des suites réelles qui tendent vers 0. Grâce à la partie (i) de la proposition 5.7, on a facilement le résultat suivant :

Proposition 5.9. *Soient X un espace métrique et $f : X \to c_0$ une application uniformément continue. Alors f peut être approchée uniformément par des applications lipschitziennes. En particulier, si X est borné et métriquement convexe, $\alpha(X, c_0) = 1$*

Démonstration. Comme montré dans [BL] dans l'exemple 1.5, il existe une rétraction lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 2 de $l_\infty(\mathbb{N})$ (l'espace de Banach des suites réelles bornées que l'on note désormais l_∞) dans c_0. En effet, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ notons $d(x) = \limsup_{n\to\infty} |x_n|$ et considérons l'application $r : l_\infty \to c_0$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\big(r(x)\big)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_n| < d(x) \\ (|x_n| - d(x))sign(x_n) & \text{si } |x_n| \geq d(x) \end{cases}$$

Alors r est bien la rétraction lipschitzienne voulue. Soit maintenant $f : X \to c_0$ uniformément continue. On regarde f comme étant uniformément continue à valeurs dans l_∞. Le (i) de la proposition 5.7 nous permet d'approcher f uniformément sur X par une application lipschitzienne $g : X \to l_\infty$. L'application $r \circ g$ est alors une approximation lipschitzienne de f vue comme arrivant dans c_0. $\square$

Revenons aux rétractés uniformes absolus dans ces questions d'approximation. On note B_Y la boule unité fermée de l'espace de Banach Y. Pour $0 < \beta \leq 1$, on dit ici que B_Y est un rétracté uniforme β-absolu si pour tout espace métrique contenant B_Y isométriquement, les rétractions sur l'image de B_Y sont toutes β-Hölder. Le résultat qui suit est démontré par Tsařkov dans [Tsa1].

Proposition 5.10. *Soit X un espace métrique. Supposons que B_Y est un rétracté uniforme β-absolu. Soit $f : X \to Y$ uniformément continue et bornée, dont le module de continuité est majoré par ω. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g_\varepsilon : X \to Y$, β-Hölder telle que pour tout $x \in X$, $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$.*
En particulier si X est métriquement convexe et borné, $\alpha(X,Y) \geq \beta > 0$. Ainsi, pour un tel X et pour Y uniformément convexe on a $\alpha(X,Y) > 0$.

On donne la preuve de cette proposition car la technique utilisée ici va servir plus tard :

Démonstration. Montrons que $(Y, \|\,.\,\|)$ est isométrique à un sous-ensemble de $l_\infty(\Gamma)$ pour un certain ensemble Γ. En fait Γ est l'espace Y lui-même. En effet, fixons $y_0 \in Y$ et considérons :

$$\begin{aligned} \phi : Y &\longrightarrow l_\infty(Y) \\ x &\longmapsto \phi(x) : \begin{array}{rcl} Y & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \phi(x)(y) = \|x - y\| - \|y_0 - y\|. \end{array} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'écrire pour voir que pour tous $x_1, x_2 \in Y$, $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\|_\infty = \|x_1 - x_2\|$ et ϕ est bien une isométrie. La même isométrie existe si Y est un espace métrique plutôt qu'un espace vectoriel normé.
Pour approcher l'application uniformément continue $f : X \to Y$, on regarde $\phi \circ f : X \to Y \to l_\infty(\Gamma)$. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 5.7, il existe une application lipschitzienne $g_\varepsilon : X \to l_\infty(\Gamma)$ telle que pour tout $x \in X$, $\|\phi \circ f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$. L'application f étant bornée, elle est à valeur dans RB_Y où R est une constante réelle qui ne dépend que de f. Par hypothèse, B_Y est un rétracté uniforme β-absolu pour un certain $0 < \beta \leq 1$. Ainsi il existe une retraction $r : l_\infty(\Gamma) \to \phi(RB_Y)$, β-Hölder de constante de Hölder $K > 0$ qui dépend de f, telle que pour tout $y \in RB_Y$, $r \circ \phi(y) = \phi(y)$. L'application $\phi^{-1} \circ r \circ g_\varepsilon$ est alors β-Hölder (car ϕ^{-1} et g_ε sont lipschitziennes) et c'est bien une approximation uniforme de f sur X. En effet, pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - \phi^{-1} \circ r \circ g_\varepsilon(x)\| &= \|\phi \circ f(x) - r \circ g_\varepsilon(x)\| \\ &= \|r \circ \phi \circ f(x) - r \circ g_\varepsilon(x)\| \\ &\leq K\|\phi \circ f(x) - g_\varepsilon(x)\|^\beta \leq K\varepsilon^\beta. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où Y est uniformément convexe, il existe une norme équivalente sur Y avec un module de convexité en puissance $1/\beta$ pour un certain $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. D'après les rappels précédents, B_Y est alors un rétracté uniforme β-absolu. Par définition du coefficient d'approximation (stable par renormage équivalent d'après le lemme 5.1) on a alors $\alpha(X, Y) \geq \beta > 0$. □

Tsaŕkov dans [Tsa2] en 1995 a obtenu un résultat d'approximation très général que nous énonçons ici dans une forme adaptée à notre problème, avec la boule unité fermée B_X d'un espace de Banach X au départ :

Théorème 5.11 (Tsaŕkov, 1995). *Soit Y un espace de Banach uniformément convexe. Soient $f : B_X \to Y$ une application uniformément continue et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une application uniformément continue $\phi_\varepsilon : B_X \to Y$ et une constante $C > 0$, telles que $\|f - \phi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ et pour tous $x, y \in B_X$:*

$$\|\phi_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(y)\| \leq C\delta_Y^{-1} \circ \rho_X(C\|x - y\|) + C\|x - y\|.$$

En particulier si ρ_X est en puissance $1 < p \leq 2$ et si δ_Y est en puissance $2 \leq q < \infty$ alors l'application ϕ_ε est p/q-Hölder et $\alpha(B_X, Y) \geq p/q$.

Les résultats précédents donnent des minorations de l'exposant de meilleure approximation höldérienne. C'est à dire qu'on a effectivement construit des approximations α-Hölder avec $0 < \alpha \leq 1$ et ainsi ce α est plus petit que notre meilleur exposant. Bien sûr, quand $\alpha = 1$ alors l'approximation est optimale si l'espace de départ est métriquement convexe, comme par exemple B_X la boule unité fermée d'un espace de Banach. Mais dans certains des résultats rappelés ci-dessus les approximations ne sont pas lipschitziennes et on ne sait pas a priori si elles sont optimales. On aimerait obtenir des majorations de notre exposant et, si possible, sa valeur exacte.

Tsaŕkov dans [Tsa1] en 1993 s'intéresse au cas des applications entre espaces L_p. Mieux qu'une estimation par dessous de l'exposant $\alpha(L_p, L_q)$ (estimation qui maintenant peut-être obtenue, pour $q \neq 1$ et $p \neq 1$, avec le théorème précédent), l'auteur obtient la valeur **exacte** de l'exposant critique. Notons $B_p(G)$ la boule unité fermée de $(L_p(G), \|\,.\,\|_p)$. Le théorème de Tsaŕkov est le suivant :

Théorème 5.12 ([Tsa1], (1993) et [BL] p. 36). *Soient $G, G' \in \{[0,1], \mathbb{N}\}$ avec la mesure adaptée.*

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) = \begin{cases} 1 & si\ p \geq 2 \geq q\ ou\ q = \infty \\ 1/(q \vee 2) & si\ p = \infty\ et\ q < \infty \end{cases}$$

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) \geq \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}\ si\ 1 \leq p, q < \infty.$$

Et on a égalité dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} si\ G = [0,1],\ alors\ \alpha(B_p(G), L_q(G')) &= 2/q \quad si \quad p, q \geq 2, \\ si\ G' = [0,1],\ alors\ \alpha(B_p(G), L_q(G')) &= p/2 \quad si \quad 1 \leq p, q \leq 2, \\ si\ (G = G'),\ alors\ \alpha(B_p(G), L_q(G')) &= p/q \quad si \quad 1 \leq p \leq 2 \leq q. \end{aligned}$$

Pour y voir plus clair, quand G, G', p et q sont dans les cas appropriés :

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

Les minorations de l'exposant critique (c'est à dire les résultats de densité) sont obtenus pour tous G et G' et pour toutes les valeurs de p et q. Les cas où on obtient les majorations (résultats de non-densité) sont résumés dans le tableau suivant.

cas A : $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$ **cas B :** $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$
cas C : $2 \leq p, q < \infty$ **cas D :** $1 \leq p, q \leq 2$

G \ G'	$\mathbb{N}$	$[0,1]$
$\mathbb{N}$	A,B	A,C
$[0,1]$	A,D	A,B,C,D

La preuve du théorème de Tsaŕkov telle qu'elle est donnée dans [BL] p. 37 ne permet pas, à priori, de mieux compléter le tableau des majorations ci-dessus. Pour le cas A, on obtient la densité des applications lipschitziennes d'où l'optimalité de l'exposant qui ici vaut 1. Pour le cas B on s'intéresse aux restrictions de l'application de Mazur ϕ_{pq} (définie quand $G = G'$) aux sous espaces de dimensions finies l_p^n à valeurs dans l_q^n. Pour le cas C on utilise le fait que $L_p[0,1]$ (vu au départ) contient un sous espace isomorphe à $L_2[0,1]$ ce qui permet de se ramener au cas B en utilisant si nécessaire l'isométrie des espaces de Hilbert l_2 et $L_2[0,1]$. Pour le cas D, avec $q \neq 1$, on sait que $L_q[0,1]$ (vu à l'arrivée) contient un sous espace *complémenté* isomorphe à $L_2[0,1]$ ce qui permet encore de se ramener au cas B. En ce qui concerne l_p on ne trouve pas de sous espace isomorphe à l_2. On sait juste que pour $p \neq 1$ il y a des images bien complémentées des l_2^n. On montre dans le chapitre "Borne supérieure d'approximation" qu'on peut encore conclure dans ce cas. On complète alors le tableau ci-dessus mais avec d'autres arguments que ceux donnés dans la preuve de [BL]. Ces arguments sont basés sur la remarque (ii) p. 38 dans [BL] que nous démontrons au chapitre "Borne supérieure d'approximation".
Avant de regarder l'analogue du théorème précédent dans les espaces d'Orlicz, restons dans les espaces L_p en considérant les espaces $L_p[0,1]$ avec $0 < p < 1$. La question naturelle est la suivante : peut-on étendre le théorème précédent quand $G = G' = [0,1]$ pour des valeurs de p et de q plus petites que 1 ?
Avant, donnons quelques rappels sur les espaces $L_p[0,1]$ quand $0 < p < 1$. Notre référence est [BL] p. 445 pour quelques résultats au sujet des espaces quasi-Banach.
Étant donné $0 < p < 1$, l'espace $L_p[0,1]$ est l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions mesurables x, sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, telles que $\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. $\|\,.\,\|_p$ n'est plus une norme mais une quasi-norme pour laquelle l'inégalité triangulaire devient $\|x+y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)$. L'espace $(L_p[0,1], \|\,.\,\|_p)$

est un espace quasi-Banach. $L_p[0,1]$ est un espace métrique complet pour la distance d_p associée à $\| \, . \, \|_p^p$ par : $d_p(x,y) = \|x-y\|_p^p$.

Proposition 5.13. *$(L_p[0,1], d_p)$ est métriquement convexe.*

Démonstration. Soient $x, y \in L_p = L_p[0,1]$ et $0 < t < 1$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \psi(u) = \displaystyle\int_0^u |x(s)-y(s)|^p ds \end{array}$$

est continue. Donc il existe $u_t \in [0,1]$ tel que : $\psi(u_t) = t \int_0^1 |x(s)-y(s)|^p ds$. On désigne par $\chi_{[0,u_t]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,u_t]$. Posons $x_t = x - (x-y)\chi_{[0,u_t]}$. Alors on a : $\|x-x_t\|_p^p = t\|x-y\|_p^p$ et $\|y-x_t\|_p^p = (1-t)\|x-y\|_p^p$. D'où le résultat. □

On considère $B_p[0,1] = \{x \in L_p[0,1], \|x\|_p \leq 1\}$, alors pour tout espace vectoriel normé $(Y, \| \, . \, \|_Y)$, le coefficient de meilleure approximation höldérienne est encore défini. En effet, si l'on munit $B_p[0,1]$ de la distance d_p, on note alors $B_p[0,1] = B_p^{met}$, on a grâce à la proposition précédente $\alpha(B_p^{met}, Y) \leq 1$. Il est alors facile de voir que si la boule $B_p[0,1]$ est munie de la quasi-norme $\| \, . \, \|_p$ on a $\alpha(B_p[0,1], Y) \leq p$. Ceci car on a l'égalité $\alpha(B_p[0,1], Y) = p\,\alpha(B_p^{met}, Y)$.
Si X est un espace métrique borné et métriquement convexe alors nous avons vu, dans la proposition 5.7 que $\alpha(X, l_\infty(\Gamma)) = 1$. On obtient donc $\alpha(B_p^{met}, l_\infty(\Gamma)) = 1$ et par conséquent

$$\alpha(B_p[0,1], l_\infty(\Gamma)) = p.$$

En ce qui concerne les applications arrivant dans un autre espace $L_q[0,1]$, on montre seulement le résultat suivant :

Proposition 5.14. *Pour $0 < p, q < \infty$:*

$$\alpha(B_p[0,1], L_q[0,1]) \geq \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

Démonstration. Soit $f : B_p[0,1] \to L_q[0,1]$ uniformément continue. On compose f par l'application de Mazur pour se ramener à une application $\phi_{q2} \circ f \circ \phi_{2p} : B_2[0,1] \to L_2[0,1]$ uniformément continue entre espaces de Hilbert. On sait alors, d'après la proposition 5.7 qu'on peut approcher cette application uniformément sur $B_2[0,1]$ par une application lipschitzienne $g : B_2[0,1] \to L_2[0,1]$. L'application $\phi_{2q} \circ g \circ \phi_{p2}$ approche f uniformément sur $B_p[0,1]$ et elle est bien $\frac{p\wedge 2}{q \vee 2}$-Hölder car les estimations du module de continuité des applications de Mazur ϕ_{2q} et ϕ_{p2} sur les boules sont vraies pour $0 < p, q < \infty$ d'après Weston [We]. □

On ne sait pas s'il y a égalité quand $0 < p < 1$ ou quand $0 < q < 1$. En utilisant le lemme 5.3, on pourrait conclure quand $0 < p < 1$ et $1 \leq q < \infty$ s'il existait une application $\Phi : B_1[0,1] \to L_p[0,1]$ telle que, pour tous $x, y \in B_1[0,1]$, $d_p(\Phi(x), \Phi(y)) = \|x-y\|_1$. C'est à dire s'il existait une isométrie de $B_1[0,1]$ (qui est un rétracté uniforme absolu) dans l'espace métrique $(L_p[0,1], d_p)$.

5.4 Pour des applications entre espaces d'Orlicz

Notre but est d'obtenir une généralisation aux espaces d'Orlicz du théorème de Tsaŕkov qui donne la valeur exacte du coefficient d'approximation entre les espaces $L_p(G)$ et $L_q(G')$ suivant les différents cas sur G et G' pour les différentes valeurs de p et q. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 5.15. *Soient $G, G' \in \{[0,1], (0,\infty), \mathbb{N}\}$ avec les mesures adaptées. Soient M et N deux fonctions d'Orlicz telles que $M \in \mathcal{K}_G(p_M, q_M)$ et $N \in \mathcal{K}_G(p_N, q_N)$, avec $1 < p_M \leq q_M < \infty$ et $1 < p_N \leq q_N < \infty$. Alors :*

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) = 1 \quad \text{si} \quad p_M \geq 2 \geq q_N,$$

et en général,

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) \geq \frac{p_M \wedge 2}{q_N \vee 2}.$$

De plus, dans les cas suivants, les estimations peuvent être majorées :

$$\begin{aligned} &\text{si } G \neq \mathbb{N}, \text{ alors } \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{2}{p_N} && \text{si} \quad q_M, p_N \geq 2 \\ &\text{si } G' \neq \mathbb{N}, \text{ alors } \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{q_M}{2} && \text{si} \quad q_M, p_N \leq 2 \\ &\text{si } (G = G' = \mathbb{N}) \text{ ou } (G \neq \mathbb{N} \text{ et } G' \neq \mathbb{N}), \\ &\qquad \text{alors } \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{q_M}{p_N} && \text{si} \quad q_M \leq 2 \leq p_N. \end{aligned}$$

Remarque 2. *On limite l'énoncé du théorème précédent aux espaces d'Orlicz réflexifs en supposant $1 < p_M, p_N$ et $q_M, q_N < \infty$. La preuve montre que les minorations sont en fait vraies pour $p_M = 1$ et $p_N = 1$. Ce choix apparaît surtout pour les majorations. Nous y revenons dans le chapitre "Borne supérieure d'approximation".*

Quand G, G' et les indices q_M et p_N sont dans les cas appropriés, le théorème 5.15 donne l'encadrement suivant :

$$\frac{p_M \wedge 2}{q_N \vee 2} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{q_M \wedge 2}{p_N \vee 2}.$$

Remarquons que la minoration est obtenue pour tous les cas sur G, G', q_M et p_N. Par contre la majoration s'obtient pour les cas du tableau suivant.

cas A : $p_N \leq 2 \leq q_M$ **cas B :** $q_M \leq 2 \leq p_N$
cas C : $2 \leq q_M, p_N$ **cas D :** $q_M, p_N \leq 2$

G' \ G	$\mathbb{N}$	$[0,1]$	$(0,\infty)$
$\mathbb{N}$	A,B	A,C	A,C
$[0,1]$	A,D	A,B,C,D	A,B,C,D
$(0,\infty)$	A,D	A,B,C,D	A,B,C,D

A la fin de la démonstration du théorème 5.15, on a besoin du lemme suivant. Il traduit le fait d'avoir des lignes et des colonnes identiques pour $[0,1]$ et $(0,\infty)$ dans le tableau ci-dessus. Ici on utilise l'hypothèse $p_M > 1$ pour avoir la convexité uniforme des espaces d'Orlicz $L_M(G)$ (pour une norme équivalente) et alors le fait que la boule unité fermée $B_M(G)$ est un rétracté uniforme absolu, d'après le théorème 5.2.

Lemme 5.16. *Soient M et N deux fonctions d'Orlicz. Supposons que $L_M(0,\infty)$ est réflexif. Soient X un espace vectoriel normé et B_X sa boule unité fermée. Alors :*

$$\begin{aligned} \alpha(B_X, L_N(0,\infty)) &\leq \alpha(B_X, L_N[0,1]), \\ \alpha(B_M(0,\infty), X) &\leq \alpha(B_M[0,1], X). \end{aligned}$$

Preuve du lemme 5.16. Considérons :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : L_N[0,1] & \longrightarrow & L_N(0,\infty) \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x(t) \text{ si } t \in [0,1], \\ 0 \text{ sinon,} \end{array} \right. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P : L_N(0,\infty) & \longrightarrow & L_N[0,1] \\ x & \longmapsto & x_{|[0,1]} \end{array}$$

Alors φ et P sont des applications linéaires qui vérifient : $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ et $\|P(x)\| \leq \|x\|$ quand x est dans l'espace d'Orlicz de définition de chaque fonction et quand $\|\,.\,\|$ désigne la norme associée. De plus, $P \circ \varphi$ est l'identité sur $L_N[0,1]$.

Soit $f : B_X \to L_N[0,1]$ uniformément continue. Fixons $\alpha < \alpha(B_X, L_N(0,\infty))$. On veut approcher f par une application α-Hölder. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\varphi \circ f : B_X \to L_N(0,\infty)$ est uniformément continue, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{H}^\alpha(B_X, L_N(0,\infty))$ telle que pour tout $x \in B_X$, $\|\varphi \circ f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$. Donc on a, pour tout $x \in B_X$, $\|P \circ \varphi \circ f(x) - P \circ g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$. Mais $P \circ \varphi \circ f(x) = f(x)$, et ainsi $P \circ g_\varepsilon$ approche f et est α-Hölder. Par définition, on a : $\alpha \leq \alpha(B_X, L_N[0,1])$ et comme ceci est vrai pour tout $\alpha < \alpha(B_X, L_N(0,\infty))$ la première inégalité est démontrée.

Maintenant, considérons φ avec M à la place de N. $B_M[0,1]$ et $\varphi(B_M[0,1])$ sont Lipschitz-équivalents (avec φ et φ^{-1} définie sur $\varphi(L_M[0,1])$), donc d'après le lemme 5.1 on a l'égalité $\alpha(B_M[0,1], X) = \alpha(\varphi(B_M[0,1]), X)$.
De plus, comme $L_M(0,\infty)$ est réflexif, on a vu que cet espace admet une norme équivalente qui le rend uniformément convexe. Ainsi, d'après le théorème 5.2, tout ensemble convexe fermé bornée $A \subset L_M(0,\infty)$ est un rétracté uniforme absolu. C'est donc le cas pour $\varphi(B_M[0,1]) \subset B_M(0,\infty)$ qui est bien convexe fermé et borné car φ est linéaire continue. On utilise le lemme 5.3 pour obtenir l'inégalité $\alpha(B_M(0,\infty), X) \leq \alpha(\varphi(B_M[0,1]), X) = \alpha(B_M[0,1], X)$. □

Démonstration du théorème 5.15. Avec l'application de Mazur généralisée ϕ_{MN}, la preuve utilise les mêmes techniques que celle de Tsaŕkov dans [Tsa1] et dans [BL] p. 36.
Encore une fois on commence par utiliser la proposition 3.4 pour se ramener à des fonctions d'Orlicz avec des propriétés globales. Considérons $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ telles que $\tilde{M} \sim_G M$ et $\tilde{N} \sim_{G'} N$ et telles que $\tilde{M}$ est p_M-convexe et q_M-concave et $\tilde{N}$ est p_N-convexe et q_N-concave.
La fonction quasi-Orlicz $\tilde{\varphi} = \tilde{N}^{-1} \circ \tilde{M}$ satisfait les hypothèses du théorème 4.5. De plus, comme les espaces d'Orlicz associés sont isomorphes, le lemme 5.1 permet d'obtenir l'égalité $\alpha(B_M(G), L_N(G')) = \alpha(B_{\tilde{M}}(G), L_{\tilde{N}}(G'))$.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on suppose que M et N sont telles que $N^{-1} \circ M$ satisfait les hypothèses du théorème 4.5.

Estimations par dessous : la densité effective.
On pourrait utiliser ici le théorème 5.11 de Tsaŕkov, qui donne des approximations dont le module de continuité dépend des modules de lissité et de convexité des espaces. Mais ici on préfère utiliser notre application de Mazur généralisée pour se ramener à des applications entre espaces de Hilbert et appliquer le théorème d'extension 5.5 de Kirszbraun, et la proposition 5.7 qui en découle.
Considérons $f : B_M(G) \to L_N(G')$ uniformément continue et fixons $\varepsilon > 0$. On regarde la composée : $\Phi = \phi_{N2} \circ f \circ \phi_{2M}$, où $\phi_{2M} : L_2(G) \to L_M(G)$ et $\phi_{N2} : L_N(G') \to L_2(G')$ sont uniformément continues sur les boules. Alors $\Phi : B_2(G) \to L_2(G')$ est une application uniformément continue entre des espaces de Hilbert. Ainsi, d'après le (ii) de la proposition 5.7, il existe une application lipschitzienne $g : B_2(G) \to L_2(G')$ telle que $\|\Phi - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Il est clair que l'application $(\phi_{N2})^{-1} \circ g \circ (\phi_{2M})^{-1} = \phi_{2N} \circ g \circ \phi_{M2}$ est une approximation uniforme de f sur $B_M(G)$. De plus, d'après le théorème 4.5, cette approximation est dans l'ensemble $\mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G'))$ voulu pour les différentes positions de p_M et de q_N autour du chiffre 2. Par définition du coefficient $\alpha(B_M(G), L_N(G'))$, on a donc obtenu les estimations par dessous du théorème 5.15.

Estimations par dessus : non densité.
Comme $\alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq 1$, le cas A où $p_N \leq 2 \leq q_M$ est terminé. Ici la majoration voulue vaut 1 d'où la présence du cas A dans toutes les cases du tableau. Regardons les autres estimations par dessus. Tout d'abord, on suppose que $G = G'$ et on regarde les trois cas :
Cas B : quand $q_M \leq 2 \leq p_N$, **Cas C :** quand $2 \leq q_M, p_N$, **Cas D :** quand $q_M, p_N \leq 2$.

Cas B : quand $q_M \leq 2 \leq p_N$.
On doit montrer que $\alpha(B_M(G), L_N(G)) \leq \frac{q_M}{p_N}$. Fixons $\delta > 0$. La preuve consiste à trouver une application $\phi : B_M(G) \to L_N(G)$, uniformément continue, telle que :

$$\inf\{\|\phi - g\|_\infty , g \in \mathcal{H}^{q_M/p_N + \delta}(B_M(G), L_N(G))\} > 0.$$

En fait, c'est ϕ_{MN} elle-même qui va être cette application ϕ. En effet, nous montrons le lemme suivant qui donne explicitement une borne inférieure à la distance de ϕ_{MN} aux ensembles $\mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G))$.

Lemme 5.17. *Soient M et N deux fonctions d'Orlicz qui vérifient les hypothèses du corollaire 4.6 avec les mêmes notations. Supposons que $q_M \leq p_N$. Fixons $\alpha \in (0, 1]$. Alors, pour toute application $g \in \mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G))$, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$2\|\phi_{MN} - g\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}} \{1 - Cn^{1/p_N} M^{-1}(1/n)^\alpha\}, \text{ si } G \in \{(0, \infty), \mathbb{N}\},$$
$$2\|\phi_{MN} - g\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}} \{1 - Cn^{1/p_N} 1/M^{-1}(n)^\alpha\}, \text{ si } G = [0, 1].$$

En particulier, si $f_n(\alpha) = n^{1/p_N} M^{-1}(1/n)^\alpha$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ (resp. $f_n(\alpha) = n^{1/p_N} 1/M^{-1}(n)^\alpha$ tend vers 0) alors l'ensemble $\mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G))$ n'est pas dense dans $UC(B_M(G), L_N(G)$ quand $G \in \{(0, \infty), \mathbb{N}\}$ (resp. quand $G = [0, 1]$).

Preuve du lemme 5.17. **Premier cas :** quand $G \in \{(0,\infty), \mathbb{N}\}$.
Considérons $g \in \mathcal{H}^\alpha(B_M(G), L_N(G))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On note $l_M^{2n} = (\mathbb{R}^{2n}, \|\,.\,\|_M)$, où $\|x\|_M = \inf\{\lambda > 0, \sum_{i=1}^{2n} M(|x_i|/\lambda) \leq 1\}$ et $l_N^{2n} = (\mathbb{R}^{2n}, \|\,.\,\|_N)$. On désigne par $B(l_M^{2n})$ et $B(l_N^{2n})$ leur boules unités fermées. l_M^{2n} (resp. l_N^{2n}) peut être vu comme un sous-espace de $L_M(G)$ (resp. $L_N(G)$) qui consiste en des fonctions qui sont constantes sur $2n$ ensembles fixés et disjoints chacun de mesure 1.
Il existe une projection de norme 1, $P : L_N(G) \to l_N^{2n}$ telle que $P(x) = x$ pour tout $x \in l_N^{2n}$. Donc, pour tout $x \in B(l_M^{2n})$:

$$\begin{aligned} \|\phi_{MN}(x) - P \circ g(x)\|_N &= \|P \circ \phi_{MN}(x) - P \circ g(x)\|_N \\ &\leq \|\phi_{MN}(x) - g(x)\|_N \\ &\leq \|\phi_{MN} - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, 2n\}$ et si $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{2n})$ est un choix de signes, on considère l'opérateur :

$$\begin{aligned} U_{\sigma,\theta} : \mathbb{R}^{2n} &\to \mathbb{R}^{2n} \\ x &\mapsto (\theta_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \theta_i x_{\sigma^{-1}(i)}, \ldots, \theta_{2n} x_{\sigma^{-1}(2n)}). \end{aligned}$$

C'est une isométrie sur l_M^{2n} et sur l_N^{2n} qui fournit l'opérateur de norme 1 suivant :

$$\begin{aligned} V_{\sigma,\theta} : \big(UC(B(l_M^{2n}), l_N^{2n}), \|\,.\,\|_\infty\big) &\to \big(UC(B(l_M^{2n}), l_N^{2n}), \|\,.\,\|_\infty\big) \\ f &\mapsto U_{\sigma,\theta} \circ f \circ U_{\sigma,\theta}^{-1}, \end{aligned}$$

et la moyenne : $V = \dfrac{1}{(2n)!2^{2n}} \displaystyle\sum_{\sigma,\theta} V_{\sigma,\theta}$.
Il est facile de voir que $V_{\sigma,\theta}(\phi_{MN}) = \phi_{MN}$. Donc on a :

$$\begin{aligned} &\|\phi_{MN} - V(P \circ g)\|_\infty = \|V(\phi_{MN}) - V(P \circ g)\|_\infty \\ \leq\ &\|\phi_{MN} - P \circ g\|_\infty \text{ car } V \text{ est un opérateur de norme 1,} \\ \leq\ &\|\phi_{MN} - g\|_\infty \text{ comme vu avant.} \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on écrit $h = V(P \circ g) \in \mathcal{H}^\alpha(B(l_M^{2n}), l_N^{2n})$, avec une constante de Hölder C_h qui est indépendante de n.
On a $V_{\sigma,\theta}(h) = h$, pour tous σ, θ, ce qui signifie que $U_{\sigma,\theta} \circ h = h \circ U_{\sigma,\theta}$. Ainsi h conserve le support et, si $c > 0$ et si χ_A est la fonction indicatrice d'une partie A de $\{1, \ldots, 2n\}$, $h(c\chi_A) = c'\chi_A$, où la constante c' ne dépend que de c et de la cardinalité de A.
Maintenant, pour tous $x, y \in B(l_M^{2n})$, on a :

$$2\|\phi_{MN} - g\|_\infty \geq \|\phi_{MN}(x) - \phi_{MN}(y)\|_N - \|h(x) - h(y)\|_N.$$

Il faut trouver deux éléments judicieux x et y. Prenons $x_k = M^{-1}(1/2n)\chi(k, \ldots, k+n-1)$, pour $1 \leq k \leq n+1$. On a $x_k \in B(l_M^{2n})$ et $\|x_k - x_{k+1}\|_M = \frac{M^{-1}(1/2n)}{M^{-1}(1/2)}$. Un calcul direct donne $\|\phi_{MN}(x_1)-\phi_{MN}(x_{n+1})\|_N = 1$. De plus, les vecteurs $(h(x_k)-h(x_{k+1}))_{1\le k\le n+1}$ ont des supports disjoints et

$$\begin{aligned}
&\|h(x_1)-h(x_{n+1})\|_N = \|\sum_{k=1}^{n}(h(x_k)-h(x_{k+1}))\|_N \\
= \; & \|\big(\sum_{k=1}^{n}|h(x_k)-h(x_{k+1})|^{p_N}\big)^{\frac{1}{p_N}}\|_N, \text{ car les supports sont disjoints,} \\
\le \; & C(\sum_{k=1}^{n}\|h(x_k)-h(x_{k+1})\|_N^{p_N})^{\frac{1}{p_N}}, \text{ par } p_N\text{-convexité de } L_N(G), \\
\le \; & C_1(\sum_{k=1}^{n}(\|x_k-x_{k+1}\|_M^{\alpha})^{p_N})^{\frac{1}{p_N}}, \text{ avec } C_1 \text{ une constante indépendante de } n, \\
= \; & C_2 n^{1/p_N} M^{-1}(1/2n)^{\alpha}, \text{ avec une autre constante } C_2.
\end{aligned}$$

Second cas : Quand $G=[0,1]$.
En général, contrairement au cas des espaces L_p quand $M(u)=u^p$, les espaces l_M^{2n} ne sont pas des sous-espaces de l'espace d'Orlicz $L_M[0,1]$. La preuve faite au-dessus doit être adaptée. De nouveau, on fixe $n\in\mathbb{N}$, σ une permutation de $\{1,\dots,2n\}$ et $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_{2n})$ un choix de signes.
Découpons l'intervalle $[0,1]$ en $2n$ intervalles $I_k=[\frac{k-1}{2n},\frac{k}{2n}]$, avec $1\le k\le 2n$. Considérons :

$$\begin{array}{rcl}
T_{\sigma,k}: I_k & \longrightarrow & I_{\sigma^{-1}(k)} \\
t=\lambda\dfrac{k-1}{2n}+(1-\lambda)\dfrac{k}{2n} & \longmapsto & T_{\sigma,k}(t)=\lambda\dfrac{\sigma^{-1}(k)-1}{2n}+(1-\lambda)\dfrac{\sigma^{-1}(k)}{2n}.
\end{array}$$

Comme avant, on considère l'opérateur (avec $\varphi=M$ ou $\varphi=N$) :

$$U_{\sigma,\theta}: L_\varphi[0,1] \;\to\; L_\varphi[0,1]\,,\; x\mapsto U_{\sigma,\theta}(x),$$

tel que, pour tout $t\in I_k$: $U_{\sigma,\theta}(x)(t)=\theta_k x(T_{\sigma,k}(t))$.
C'est toujours une isométrie car

$$\int_{I_k} x(T_{\sigma,k}(t))dt = \int_{I_{\sigma^{-1}(k)}} x(t)dt,$$

avec de plus $U_{\sigma,\theta}^{-1}=U_{\sigma^{-1},\theta_\sigma}$ où $\theta_\sigma=(\theta_{\sigma(1)},\dots,\theta_{\sigma(2n)})$. L'opérateur de norme 1 associé est :

$$\begin{array}{rcl}
V_{\sigma,\theta}: UC(B_M[0,1],L_N[0,1]) & \to & UC(B_M[0,1],B_N[0,1]) \\
f & \mapsto & U_{\sigma,\theta}\circ f\circ U_{\sigma,\theta}^{-1},
\end{array}$$

avec la même moyenne V qu'avant.

Muni de tous ces outils adaptés au cas $G=[0,1]$, la preuve est la même que la précédente avec maintenant $x_k=\chi_{[\frac{k-1}{2n},\frac{k+n-1}{2n}]}$, pour $1\le k\le n+1$ et ici $\|x_k-x_{k+1}\|_M = 1/M^{-1}(n)^{\alpha}$. Alors dans ce cas on obtient $f_n(\alpha)=n^{1/p_N}1/M^{-1}(n)^{\alpha}$. Le lemme est donc démontré. □

On considère les quantités $f_n(\alpha)$ adaptées à chaque cas pour démontrer les estimations par dessus du théorème 5.15. Fixons $\delta > 0$. D'après le lemme 5.17, il suffit de montrer que $f_n(q_M/p_N + \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On sait, par la proposition 3.4 utilisée au début, que $M(u^{1/q_M})$ est une fonction concave en u. Son inverse $M^{-1}(u)^{q_M}$ est donc une fonction convexe en u. Alors on a : $M^{-1}(1/n)^{q_M/p_N} \leq (1/n)^{1/p_N}$, (rappelons que $M^{-1}(1) = 1$) et $M^{-1}(n)^{q_M/p_N} \geq n^{1/p_N}$. Donc on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n(q_M/p_N + \delta) &\leq M^{-1}(1/n)^{\delta} \text{ , si } G \in \{(0,\infty), \mathbb{N}\}, \\ f_n(q_M/p_N + \delta) &\leq 1/M^{-1}(n)^{\delta} \text{ , si } G = [0,1]. \end{aligned}$$

Comme $M^{-1}(1/n)$ et $1/M^{-1}(n)$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, on trouve que $\|\phi_{MN} - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}$, pour toute application $g \in \mathcal{H}^{q_M/p_N+\delta}(B_M(G), L_N(G))$. Donc par définition du coefficient $\alpha(B_M(G), L_N(G))$, on a : $\alpha(B_M(G), L_N(G)) \leq q_M/p_N + \delta$. Mais ceci est vrai pour tout $\delta > 0$, et la majoration en découle.
A ce stade, on a résolu le cas B (quand $1 < p_M \leq 2 \leq q_N < \infty$) pour les couples de la diagonale du tableau, quand $G = G'$.

Cas C : quand $2 \leq q_M, p_N$.
Rappelons qu'on suppose aussi $1 < p_M$. Alors d'après [LT2] p. 134, $L_2[0,1]$ et donc $L_2(G')$ est isomorphe à un sous-espaces de $L_M[0,1]$. De plus, l'espace $L_M[0,1]$ admet une norme équivalente uniformément convexe. Les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du lemme 5.16 donnent : pour tout espace vectoriel normé Y, on a $\alpha(B_M[0,1], Y) \leq \alpha(B_2(G'), Y)$. Maintenant, prenons $Y = L_N(G')$. L'estimation par dessus que nous avons obtenue dans le cas B donne $\alpha(B_2(G'), L_N(G')) \leq 2/p_N$, et alors $\alpha(B_M[0,1], L_N(G') \leq 2/p_N$. On peut ensuite remplacer $[0,1]$ par $(0,\infty)$ grâce au lemme 5.16. On a donc résolu le cas C dans les cases voulues du tableau.

Cas D : quand $q_M, p_N \leq 2$.
En fait, toujours d'après [LT2] et avec l'hypothèse $1 < p_N$, $L_2(G)$ est isomorphique à un sous-espace *complémenté* de $L_N[0,1]$. Donc des arguments comme dans la preuve du lemme 5.16, montrent que pour tout espace vectoriel normé X, avec B_X sa boule unité fermée, on a : $\alpha(B_X, L_N[0,1]) \leq \alpha(B_X, L_2(G))$. Prenons $X = L_M(G)$ et utilisons l'estimation par dessus du cas B pour obtenir $\alpha(B_M(G), L_2(G)) \leq q_M/2$ et alors $\alpha(B_M(G), L_N[0,1]) \leq q_M/2$. Le lemme 5.16 permet encore de remplacer $[0,1]$ par $(0,\infty)$ et ce dernier cas D est résolu pour les cases souhaitées du tableau. □

5.5 Lien avec les indices de Boyd

Nous relions cet indice d'approximation aux indices usuels utilisés dans la théorie des espaces d'Orlicz.

Théorème 5.18. *Soient $L_M(G)$ et $L_N(G')$ deux espaces d'Orlicz tels que leurs indices de Boyd vérifient $1 < \alpha_M(G), \alpha_N(G')$ et $\beta_M(G), \beta_N(G') < \infty$. Alors le théorème 5.15 est vrai avec $p_M = \alpha_M(G)$, $q_M = \beta_M(G)$, $p_N = \alpha_N(G')$ et $q_N = \beta_N(G')$. quand les indices sont strictement comparés au chiffre 2.*

Ici les différents cas sont $q_M > 2 > p_N > 1$, et $q_M, p_N > 2$, et $1 < q_M, p_N < 2$ et $1 < q_M < 2 < p_N$.

Démonstration. D'après [LT2] p. 139 et 141 on a :

$$\begin{aligned}\alpha_M(G) &= \sup\{p \geq 1\,, L_M(G) \text{ satisfait une } p\text{-estimation par dessus}\},\\ \beta_M(G) &= \inf\{q \geq 1\,, L_M(G) \text{ satisfait une } q\text{-estimation par dessous}\}.\end{aligned}$$

Rappelons (voir [LT2] p. 82) qu'un treillis de Banach $(X, \|\,.\,\|)$ satisfait une p-estimation par dessus (resp. une q-estimation par dessous) si la propriété de p-convexité (resp. q-concavité) est vraie pour tout choix de vecteurs $\{x_i\}_{i=1}^n$ à supports disjoints deux à deux.
Notons $p_M(G) = \alpha_M(G)$ et $q_M(G) = \beta_M(G)$. Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir $1 < p_M(G) - \varepsilon < q_M(G) + \varepsilon$. D'après [LT2] p. 100 et 101, $L_M(G)$ est $(p_M(G) - \varepsilon)$-convexe et $(q_M(G) + \varepsilon)$-concave. Ainsi, la proposition 3.4 donne une fonction d'Orlicz M_ε qui est $(p_M(G) - \varepsilon)$-convexe et $(q_M(G) + \varepsilon)$-concave telle que $M \sim_G M_\varepsilon$. Posons $p_{M_\varepsilon} = p_M(G) - \varepsilon$ et $q_{M_\varepsilon} = q_M(G) + \varepsilon$.
Les mêmes outils et notations avec la fonction d'Orlicz N donnent $N_\varepsilon \sim_{G'} N$. De façon habituelle on a $\alpha(B_M(G), L_N(G')) = \alpha(B_{M_\varepsilon}(G), L_{N_\varepsilon}(G'))$ car les espaces d'Orlicz présents sont isomorphes.
Supposons par exemple que $1 < q_M(G) < 2 < p_N(G')$. Alors pour ε assez petit on obtient $1 < q_{M_\varepsilon} \leq 2 \leq p_{N_\varepsilon}$ et le théorème 5.15 donne

$$\frac{p_{M_\varepsilon}}{q_{N_\varepsilon}} \leq \alpha(B_{M_\varepsilon}(G), L_{N_\varepsilon}(G')) \leq \frac{q_{M_\varepsilon}}{p_{N_\varepsilon}}.$$

Ainsi, pour ε assez petit :

$$\frac{p_M(G) - \varepsilon}{q_N(G) + \varepsilon} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{q_M(G) + \varepsilon}{p_N(G) - \varepsilon},$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre ε vers 0. Les autres estimations sont obtenues de façon exactement similaire. □

En particulier, si les espaces d'Orlicz sont effectivement p-convexes et q-concaves avec p et q leurs indices de Boyd, alors le théorème 5.15 peut être appliqué directement.

5.6 Exemples et commentaires

Dans le cas où $M(u) = |u|^p$ et $N(u) = |u|^q$ avec $1 < p, q < \infty$, le théorème 5.15 redonne le théorème de Tsarkov entre les espaces $L_p(G)$ et $L_q(G')$. Avec les notations du théorème 5.15 on a $p_M = q_M = p$ et $p_N = q_N = q$ et on retrouve, quand G, G', p et q sont dans les cas appropriés du tableau :

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

Il est possible d'obtenir le même coefficient d'approximation pour des espaces d'Orlicz qui ont une concavité et une convexité quasiment identiques. Par exemple supposons que

$G = G' = \mathbb{N}$ et considérons $M(u) = u^p(1+|\ln(u)|)$ définie pour u proche de 0 et $N(u) = u^q$ avec $p, q \geq 1$. Notons $l_N = l_q$. Alors, quand p et q sont dans le cas B du tableau (cas où l'on sait travailler quand $G = G' = \mathbb{N}$) :

$$\alpha(B_M(\mathbb{N}), l_q) = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

Dans ce cas l'encadrement obtenu dans le théorème 5.15 est en fait une égalité similaire à celle du théorème de Tsaŕkov. Pour pouvoir appliquer le théorème 5.15 on s'intéresse à la classe $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}(\alpha, \beta)$ à laquelle M appartient. On a, pour des valeurs de u proches de 0 :

$$\frac{uM'(u)}{M(u)} = p - \frac{1}{1 - \ln(u)}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_0 > 0$ tel que pour tout $u \leq u_0$:

$$p - \varepsilon \leq \frac{uM'(u)}{M(u)} \leq p.$$

D'où pour tout $\varepsilon > 0$, on a $M \in \mathcal{K}_{\mathbb{N}}(p - \varepsilon, p)$. Le théorème 5.15 donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{(p-\varepsilon) \wedge 2}{q \vee 2} \leq \alpha(B_M(\mathbb{N}), l_q) \leq \frac{p \wedge 2}{q \vee 2},$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre ε vers 0.
Il existe pourtant une différence entre le cas des espaces L_p et le cas de ces espaces d'Orlicz. Gardons toujours $G = G' = \mathbb{N}$. Dans le théorème de Tsaŕkov les applications $\alpha(B_p(\mathbb{N}), l_q)$-Hölder sont effectivement denses dans l'ensemble des applications uniformément continues entre $B_p(\mathbb{N})$ et l_q. Ce n'est pas forcément le cas des applications $\alpha(B_M(\mathbb{N}), l_q)$-Hölder entre les espaces d'Orlicz de suites, comme nous allons le montrer.
On est toujours dans le cas B où $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. Alors :

$$\frac{p \wedge 2}{q \vee 2} = \frac{p}{q}.$$

Il faut calculer la distance qui apparaît dans le lemme 5.17. Pour cela il faut des applications d'Orlicz avec des propriétés globales. Fixons $\varepsilon > 0$. On vient de voir que $M \in \mathcal{K}_{\mathbb{N}}(p-\varepsilon, p)$. Comme d'habitude, la proposition 3.4 donne une fonction d'Orlicz M_ε telle que $M_\varepsilon \sim_{\mathbb{N}} M$ avec M_ε qui est $(p-\varepsilon)$-convexe et p-concave. Avec cette fonction d'Orlicz M_ε et N on peut appliquer le lemme 5.17 qui introduit la quantité :

$$f_n\Big(\frac{p}{q}\Big) = n^{\frac{1}{q}} M_\varepsilon^{-1}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{p}{q}} = n^{\frac{1}{q}} c_n,$$

où l'on a noté $c_n = M_\varepsilon^{-1}\big(\frac{1}{n}\big)^{\frac{p}{q}}$. Ainsi $M_\varepsilon(c_n^{\frac{q}{p}}) = \frac{1}{n}$. Mais les applications d'Orlicz M et M_ε sont équivalentes au voisinage de 0. Donc il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\frac{1}{n} = M_\varepsilon(c_n^{\frac{q}{p}}) \geq CM(c_n^{\frac{q}{p}}) = Cc_n^{p\frac{q}{p}}(1 - \frac{q}{p}ln(c_n)) = Cc_n^q(1 - \frac{q}{p}ln(c_n)),$$

lorsque n est assez grand (et qu'alors c_n est proche de 0). Ainsi on obtient :

$$f_n(\frac{p}{q}) \leq \frac{1}{C^{1/q}} \frac{1}{(1 - \frac{q}{p} ln(c_n))^{1/q}}.$$

Comme c_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on conclut que $f_n(\frac{p}{q})$ tend aussi vers 0. D'après le lemme 5.17 les applications p/q-Hölder ne sont pas denses dans l'espace des fonctions uniformément continues entre $B_M(\mathbb{N})$ et l_q. Ici $\alpha(B_M(\mathbb{N}), l_q) = p/q$ est donc un supremum qui n'est pas atteint.

Suivant son comportement au voisinage de 0 et au voisinage de l'infini, une même fonction d'Orlicz peut donner deux espaces d'Orlicz l_M et $L_M[0,1]$ avec des convexités et des concavités différentes. Toujours avec la fonction d'Orlicz $M(u) = u^p(1 + |ln(u)|)$ définies pour $u > 0$, avec $M(0) = 0$ et $p > 1$. Reprenons $N(u) = |u|^q$ et supposons être dans le cas B où $1 < p \leq 2 \leq q$. Pour les grandes valeurs de u on a :

$$\frac{uM'(u)}{M(u)} = p + \frac{1}{1 + ln(u)}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_0 > 0$ tel que pour tout $u \geq u_0$,

$$p \leq \frac{uM'(u)}{M(u)} \leq p + \varepsilon.$$

On en déduit que l'application M est dans la classe $\mathcal{K}_{[0,1]}(p, p+\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme avant, le théorème 5.15 nous donne :

$$\frac{p}{q} \leq \alpha(B_M[0,1], L_q[0,1]) \leq \frac{p+\varepsilon}{q},$$

ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc à nouveau $\alpha(B_M[0,1], L_q[0,1]) = p/q$ mais ici la preuve du théorème 5.15 montre que les applications p/q-Hölder sont denses dans l'ensemble des applications uniformément continues entre $B_M[0,1]$ et $L_q[0,1]$ et qu'ici $\alpha(B_M[0,1], L_q[0,1])$ est atteint. On a pourtant travaillé avec les mêmes fonctions d'Orlicz que précédemment mais avec des propriétés différentes aux voisinages de 0 ou de l'infini.

Il existe des applications d'Orlicz pour lesquelles le théorème 5.15 donne seulement un encadrement du coefficient d'approximation et rien de mieux. Supposons par exemple que $G = G' = \mathbb{N}$ et fixons $p > 1 + \sqrt{2}$. On considère la fonction $M(u) = u^{p+\sin(ln|ln(u)|)}$. C'est une application d'Orlicz au voisinage de 0 et on a :

$$\frac{uM'(u)}{M(u)} = p + \sin(\ln|\ln(u)|) + \cos(\ln|\ln(u)|),$$

ceci pour u proche de 0. Ainsi l'application d'Orlicz M appartient à la classe $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}(p-1, p+1)$. Alors, si par exemple l'espace d'arrivée est l'espace de Hilbert l_2, le théorème 5.15 (dans le cas A avec $G = G' = \mathbb{N}$) donne l'encadrement :

$$\frac{(p-1) \wedge 2}{2} \leq \alpha(B_M(\mathbb{N}), l_2) \leq 1.$$

On peut alors conclure si le terme de gauche est supérieur ou égal à 1, à savoir quand $p \geq 3$, car alors les applications lipschitziennes sont denses ce qui est optimal. Par contre, pour $1+\sqrt{2} < p < 3$, le théorème 5.15 ne permet pas d'obtenir la valeur exacte de $\alpha(B_M(\mathbb{N}), l_2)$. C'est l'objet du chapitre suivant de généraliser autrement le théorème de Tsaŕkov afin de pouvoir répondre à ce type de problème.

Chapitre 6

Borne supérieure d'approximation

6.1 Introduction

Nous allons travailler de façon plus précise que précédemment sur les constantes de Hölder des applications mises en jeu dans notre problème d'approximation. L'application de Mazur joue un rôle principal, en particulier via le lemme 5.17 du chapitre précédent. Sous certaines conditions, c'est elle qui n'est pas approchable par des applications α-Hölder avec des exposants $\alpha \in (0,1]$ trop grands.
Dans ce chapitre nous travaillons avec l'application de Mazur usuelle entre les boules des espaces de suites l_p, à savoir : $\phi_{pq} : B_p(\mathbb{N}) \to B_q(\mathbb{N})$, telle que pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\phi_{pq}(x) = |x|^{p/q} sign(x)$, c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\phi_{pq}(x))_n = |x_n|^{p/q} sign(x_n)$.
Quand $1 \leq p < q < \infty$ et $\alpha > p/q$, on a :

$$inf\{\|\phi_{pq} - g\|_\infty \, , g \in \mathcal{H}^\alpha(B_p(\mathbb{N}), l_q)\} = d(\phi_{pq}, \mathcal{H}^\alpha(B_p(\mathbb{N}), l_q)) > 0.$$

Plus précisément, pour $\alpha \in (0,1]$ et $K, \varepsilon > 0$, notons :

$$\mathcal{H}^\alpha_K(B_X, Y) = \{g : B_X \to Y \, , \|g(x) - g(y)\|_Y \leq K\|x - y\|^\alpha_X \, , x, y \in B_X\},$$

l'ensemble des applications (K, α)-Hölder entre B_X et Y. Pour $\varepsilon > 0$, notons :

$$E_{\alpha,K,\varepsilon}(B_X, Y) = \{f \in UC(B_X, Y), \exists g \in \mathcal{H}^\alpha_K(B_X, Y) \, , \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Avec ces notations, la preuve du lemme 5.17 nous donne précisément le fait suivant :

Fait 4. *Soient $1 \leq p < q < \infty$, et $1 \geq \alpha > p/q$. Alors :*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, , \forall K > 0, \exists N_K \in \mathbb{N} \, , \forall n \geq N_K \, , \phi_{pq} \notin E_{\alpha,K,\varepsilon_0}(B(l^{2n}_p), l^{2n}_q),$$

où l'on désigne par $B(l^{2n}_p)$ la boule unité fermée de l^{2n}_p.

En effet, dans le cas d'espaces de suites l_p et l_q, le lemme 5.17 nous donne que pour toute application α-Hölder $g : B_p(\mathbb{N}) \to l_q$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$2\|\phi_{pq} - g\|_\infty \geq \sup_{n\in\mathbb{N}\, , n \text{ pair}} \{1 - Cn^{\frac{1}{q} - \frac{\alpha}{p}}\}.$$

Dans la preuve du lemme 5.17, on passe par une inégalité plus précise mettant en jeu la restriction de ϕ_{pq} aux sous-espaces de dimensions finies l_p^{2n}. On remarque que pour $x \in B(l_p^{2n})$ on a bien $\phi_{pq}(x) \in B(l_q^{2n})$. Ces restrictions faites, la preuve du lemme 5.17 consiste à montrer que pour toute application α-Hölder $h : B(l_p^{2n}) \to l_q^{2n}$ avec une une constante de Hölder **indépendante** de n, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\|\phi_{pq} - h\|_\infty \geq 1 - Cn^{\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{p}},$$

où la norme infinie est celle des applications entre $B(l_p^{2n})$ et l_q^{2n} et où $C > 0$ est une constante indépendante de n. Ici on suppose que $1 \geq \alpha > p/q$ et ainsi le terme de droite tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Donc le fait 4 est démontré avec par exemple $\varepsilon_0 = 1/4$.

6.2 Une première borne

Nous utilisons le fait 4 afin d'obtenir une borne supérieure, pour l'exposant d'approximation $\alpha(B_X, Y)$ quand B_Y est un rétracté uniforme absolu, par exemple si Y est un espace de Banach uniformément convexe. On obtient une majoration en fonction de l'exposant critique entre les espaces de suites l_r et l_s. D'après le théorème 5.12 de Tsaŕkov et le tableau qui le suit, on connaît cette majoration quand $1 \leq r \leq 2 \leq s < \infty$. Après la preuve, nous montrons comment cette proposition permet de compléter entièrement ce tableau. Dans tout le chapitre, les lettres X et Y désignent des espaces de Banach de dimension infinie.

Proposition 6.1. *Soient $1 \leq r \leq 2 \leq s < \infty$. Supposons que X contient les espaces l_r^n uniformément. Supposons que Y contient les espaces l_s^n uniformément et que ces copies sont uniformément complémentées. Supposons de plus que B_Y est un rétracté uniforme absolu. Alors :*

$$\alpha(B_X, Y) \leq \alpha(B_r(\mathbb{N}), l_s) = \frac{r}{s}.$$

La preuve consiste à construire des applications non approchables en partant de l'application de Mazur entre les espaces l_p^n contenus uniformément au départ et à l'arrivée.

Démonstration. Tout d'abord, si $r = s$ il n'y a rien à montrer car on a toujours $\alpha(B_X, Y) \leq 1$. Supposons que $r < s$. Alors d'après le théorème 5.12, $\alpha(B_r(\mathbb{N}), l_s) = \frac{r}{s} < 1$. Fixons $1 \geq \alpha > \frac{r}{s}$. Comme X contient les espaces l_r^n uniformément, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme $T_n : l_r^n \to T_n(l_r^n) \subset X$, tel que, pour tout $x \in l_r^n$: $\|x\|_r \leq \|T_n(x)\|_X \leq C\|x\|_r$.
On note $C' > 0$ et R_n l'isomorphisme $R_n : l_s^n \to R_n(l_s^n) \subset Y$ qui correspondent pour Y. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des projections $P_n : Y \to R_n(l_s^n)$ telles que $sup_n\|P_n\| < \infty$.

En utilisant le fait 4 ainsi que les isomorphismes T_n et R_n donnés ci-dessus, notre but est de construire une application uniformément continue $\phi : B_X \to Y$ telle que $d(\phi, \mathcal{H}^\alpha(B_X, Y)) > 0$.

Les ensembles $4CB_X = \{x \in X \,, \|x\|_X \leq 4C\}$ et B_X sont clairement Lipschitz-équivalents via $x \mapsto \frac{x}{4C}$, donc on a d'après le lemme 5.1, $\alpha(4CB_X, Y) = \alpha(B_X, Y)$. Mettons dans la boule $4CB_X$ une famille dénombrable de boules disjointes avec des rayons assez petits. Pour cela, considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 4CB_X$ telle que $\|x_n - x_m\| \geq 3C$ pour $n \neq m$. Notons $X_n = x_n + T_n(B(l_r^n))$, où $B(l_r^n)$ est la boule unité fermée de l_r^n. On a, pour tout $x \in X_n$: $\|x - x_n\| \leq C$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est une union disjointe telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset 4CB_X$. Maintenant, considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n & \longrightarrow & Y \\ x \in X_n & \longmapsto & \varphi(x) = R_n \circ \phi_{rs} \circ T_n^{-1}(x - x_n). \end{array}$$

Montrons que cette application φ est uniformément continue sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. C'est clair sur chaque X_n. Soient $m \neq n$, $x \in X_n$ et $y \in X_m$. Comme on a $\|x - y\|_X \geq C$ et comme φ est bornée par une constante R indépendante de n, on a :

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_Y \leq 2R \leq \frac{2R}{C}\|x - y\|_X,$$

ce qui assure bien la continuité uniforme de φ sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Par hypothèse, RB_Y est un rétracté uniforme absolu. Ceci va nous permettre d'étendre φ à tout l'ensemble $4CB_X$ en une application qui reste uniformément continue. On procède comme dans la preuve de la proposition 5.10. L'ensemble RB_Y s'envoie de façon isométrique dans $l_\infty(\Gamma)$ pour un certain ensemble Γ. On voit alors φ comme étant à valeur dans $l_\infty(\Gamma)$ ce qui permet de l'étendre à tout $4CB_X$ par des méthodes d'inf-convolution. On revient en arrière dans RB_Y en utilisant la rétraction uniformément continue. Notons toujours φ cette extension. On dispose donc de $\varphi : 4CB_X \to Y$, uniformément continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in X_n$, $\varphi(x) = R_n \circ \phi_{rs} \circ T_n^{-1}(x - x_n)$.
Montrons que φ ne peut être approchée uniformément par aucune application höldérienne d'exposant α. Par l'absurde, supposons que le contraire est vrai et approchons φ à ε_0 près avec ε_0 donné dans le fait 4. Il existe alors $K > 0$ et une application $g \in \mathcal{H}_K^\alpha(4CB_X, Y)$ tels que pour tout $x \in 4CB_X$, $\|\varphi(x) - g(x)\|_Y \leq \varepsilon_0/C''$, où $C'' = sup_n\|P_n\|$ est la constante qui majore uniformément les projections dans Y. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons :

$$\begin{array}{rcl} G_n : B(l_r^n) & \longrightarrow & l_s^n \\ y & \longmapsto & G_n(y) = R_n^{-1} \circ P_n \circ g(x_n + T_n(y)). \end{array}$$

Alors il existe une constante $\tilde{K} > 0$ indépendante de n telle que $G_n \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}^\alpha(B(l_r^n), l_s^n)$. De plus, pour tout $x \in B(l_r^n)$:

$$\begin{array}{cl} & \|\phi_{rs}(x) - G_n(x)\|_s \\ = & \|R_n^{-1} \circ R_n \circ \phi_{rs}(x) - R_n^{-1} \circ P_n \circ g(x_n + T_n(x))\|_s \\ \leq & \|R_n \circ \phi_{rs}(x) - P_n \circ g(x_n + T_n(x))\|_Y \text{ mais } R_n = P_n \circ R_n, \\ \leq & C''\|R_n \circ \phi_{rs} \circ T_n^{-1}(y - x_n) - g(y)\|_Y \text{ avec } y = x_n + T_n(x) \in X_n. \end{array}$$

Mais, pour tout $y \in X_n \subset 4CB_X$, $R_n \circ \phi_{rs} \circ T_n^{-1}(y - x_n) = \varphi(y)$, donc :

$$\|\phi_{rs}(x) - G_n(x)\|_s \leq C''\|\varphi(y) - g(y)\|_Y \leq \varepsilon_0.$$

Ce qui est en contradiction avec le fait 4. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{H}^\alpha(4CB_X, Y)$ n'est pas dense dans $UC(4CB_X, Y)$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$. Ainsi, par définition, $\alpha(B_X, Y) = \alpha(4CB_X, Y) \leq \alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > \alpha(B_r(\mathbb{N}), l_s)$, la proposition est démontrée. $\square$

Complétons les cas où les majorations sont vraies dans le théorème 5.12.

Théorème 6.2. *Soient* $G, G' \in \big\{[0,1], \mathbb{N}\big\}$ *avec la mesure adaptée. Soient* $1 \leq p, q < \infty$. *Alors :*

$$\alpha(B_p(G), L_q(G')) = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

Démonstration. On a vu que la minoration est toujours vraie et que la majoration était obtenue pour les cas du tableau :

cas A : $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$ **cas B :** $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$
cas C : $2 \leq p, q < \infty$ **cas D :** $1 \leq p, q \leq 2$

G' \ G	$\mathbb{N}$	$[0,1]$
$\mathbb{N}$	A,B	A,C
$[0,1]$	A,D	A,B,C,D

Cas C : il reste le cas $G = \mathbb{N}$ au départ. Avec les notations de la proposition 6.1 on a $X = l_p$ qui contient les espaces l_2^n uniformément d'après le théorème de Dvoretsky (dont on parle juste après). $Y = L_q(G')$ avec $G' = \mathbb{N}$ ou $G' = [0,1]$ contient les espaces l_q^n de façon isométrique et complémentés par des projections de norme 1. La proposition 6.1 donne

$$\alpha(B_p(\mathbb{N}), L_q(G')) \leq \frac{2}{q} = \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}.$$

On a donc ajouté le cas C dans la première colonne du tableau.
Cas B : si $G = [0,1]$ et $G' = \mathbb{N}$.
$X = L_p[0,1]$ et on a $p_X = \sup\{r \in [1,2], X \text{ est de type } r\} = p$. Alors X contient les espaces l_p^n uniformément (voir le théorème 2.4 des rappels). De plus $Y = l_q$ contient les espaces l_q^n isométriquement avec des projections de norme 1. La proposition 6.1 donne bien la majoration voulue. On procède de même quand $G = \mathbb{N}$ et $G' = [0,1]$.
Cas D : il reste le cas $G' = \mathbb{N}$ à l'arrivée. On a $X = L_p(G)$ pour $G \in \{\mathbb{N}, [0,1]\}$ et X contient les espaces l_p^n uniformément. Pour $q \neq 1$, à nouveau avec le théorème de Dvoretzky ci-dessous, $Y = l_q$ contient les espaces l_2^n uniformément et ces images sont uniformément complémentées. La proposition 6.1 permet de conclure. Quand $q = 1$ on procède comme à la fin du théorème 6.5 ci-dessous.
Dans tous les cas on a $\alpha(B_p(G), L_q(G')) \leq \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}$ et le théorème est démontré. $\square$

Le théorème de Tsaŕkov tel qu'il est présenté dans [BL] p. 36 est donc vrai mais en complétant la preuve donnée avec la proposition précédente. Ici au lieu d'avoir des espaces isomorphes à un espace de Hilbert on se contente d'espaces l_2^n bien complémentés. La proposition 6.1 démontre et généralise la remarque (ii) dans [BL] p. 38.

Nous avons utilisé le théorème de Dvoretzky. Une version précise de ce théorème, donnée par Kalton dans [Kal], permet d'obtenir des sous-espaces isomorphes aux espaces l_2^n bien complémentés. Ce résultat est le suivant :

Théorème 6.3. *Supposons que Y a un type non trivial. Alors il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme $R_n : l_2^n \to R_n(l_2^n) \subset Y$, tel que pour tout $x \in l_2^n$: $\|x\|_2 \leq \|R_n(x)\|_Y \leq C'\|x\|_2$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des projections $P_n : Y \to R_n(l_2^n)$ telles que $sup_n \|P_n\| < \infty$.*

Muni de ce théorème et de la proposition 6.1, on a directement la proposition ci-dessous. Elle donne une majoration uniforme en Y. Cette estimation montre que parmi tous les espaces de Banach Y qui ont un type non trivial et tels que leur boule unité fermée B_Y est un rétracté uniforme absolu, l'espace de Hilbert l_2 est celui qui est susceptible de fournir le meilleur exposant d'approximation.

Proposition 6.4. *Soit $1 \leq p < \infty$. Supposons que X contient les espaces l_p^n uniformément. Supposons que Y a un type non trivial et que B_Y est un rétracté uniforme absolu. Alors :*

$$\alpha(B_X, Y) \leq \alpha(B_p(\mathbb{N}), l_2) = \frac{p \wedge 2}{2}.$$

Les propositions précédentes et le théorème général de Tsaŕkov qui donne des approximations en termes de modules de convexité et de lissité, permettent d'obtenir la valeur exacte de l'exposant d'approximation sous les hypothèses du théorème suivant :

Théorème 6.5. *Supposons que X est un treillis de Banach qui admet une r-estimation par dessous pour un certain r fini. Notons $p_X = \sup\{p\,, X$ est de type $p\}$. Soit $G \in \{\mathbb{N}, [0,1]\}$ avec la mesure adaptée. Alors, pour tout $1 \leq q < \infty$:*

$$\alpha(B_X, L_q(G)) = \alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), L_q(G)) = \frac{p_X}{q \vee 2}.$$

Si Y est un espace de Banach avec un type non trivial tel que δ_Y est en puissance 2, alors :

$$\alpha(B_X, Y) = \frac{p_X}{2}.$$

Démonstration. Tout d'abord on s'intéresse à l'inégalité $\alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), l_q) \leq \alpha(B_X, L_q(G))$.
Pour $1 < q < \infty$: Quand $p_X > 1$, on utilise le théorème 5.11 de Tsaŕkov avec les modules de convexité et de lissité. Le module de convexité de $L_q(G)$ est en puissance $q \vee 2$. Pour connaître l'estimation en puissance du module de lissité de X on le théorème 2.3 des rappels : soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir $1 < p_X - \varepsilon < p_X \leq 2$. Par définition de p_X, le treillis de Banach X a alors un type $p_X - \varepsilon$. Comme X admet de plus une r-estimation par dessous pour un certain r fini, le théorème 2.3 nous dit que le module de lissité de X est en puissance $p_X - \varepsilon$ pour une norme équivalente. Le théorème 5.11 de Tsaŕkov nous donne alors :

$$\frac{p_X - \varepsilon}{q \vee 2} \leq \alpha(B_X, L_q(G)),$$

ce qui donne le résultat en faisant tendre ε vers 0.
Quand $p_X = 1$ on ne peut plus appliquer le raisonnement précédent. Par contre, comme $L_q(G)$ est uniformément convexe avec un module de convexité en puissance $q \vee 2$, on sait que sa boule unité fermée est un rétracté uniforme absolu et que les rétractions peuvent être prises $(q \vee 2)^{-1}$-höldériennes. Ceci implique d'après la proposition 5.10 que les applications $(q \vee 2)^{-1}$-Hölder sont denses dans l'ensemble $UC(B_X, L_q(G))$, ce qui donne bien :

$$\frac{1}{q \vee 2} \leq \alpha(B_X, L_q(G)).$$

Pour $q = 1$ **:** On fixe $1 < s < 2$. Soient $f : B_X \to L_1(G)$ uniformément continue et $\varepsilon > 0$. Comme f est bornée on peut supposer qu'elle arrive dans $B_1(G)$. L'application $\phi_{1s} \circ f$ est uniformément continue de B_X dans $L_s(G)$, donc d'après le cas précédent, il existe $g : B_X \to L_s(G)$ qui est $\frac{p_X}{s \vee 2} = \frac{p_X}{2}$-Hölder telle que $\|\phi_{1s} \circ f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Dès lors l'application $\phi_{s1} \circ g$ approche bien f uniformément sur B_X et reste $\frac{p_X}{2}$-Hölder car ϕ_{s1} est lipschitzienne. On a donc bien encore $\frac{p_X}{2} \leq \alpha(B_X, L_1(G))$. Dans tous les cas, l'inégalité est démontrée.
Passons à l'inégalité inverse à savoir $\alpha(B_X, l_q) \leq \alpha(B_{p_X}, l_q)$. On a rappelé dans le théorème 2.4 que X contient les espaces $l^n_{p_X}$ uniformément. Pour $1 \leq q < \infty$, $L_q(G)$ contient les espaces l^n_q uniformément et complémentés par des projections de norme 1. De plus pour $q \neq 1$, l'espace $L_q(G)$ est uniformément convexe et $B_q(G)$ est un rétracté uniforme absolu. Donc, si $1 < q < \infty$ on peut appliquer la proposition 6.4 et alors :

$$\alpha(B_X, L_q(G)) \leq \alpha(B_{p_X}, L_q(G)) = \frac{p_X}{q \vee 2}.$$

Si maintenant, $q = 1$ on factorise comme avant. Fixons $\alpha < \alpha(B_X, L_1(G))$. Soient $1 < s < 2$ et $f : B_X \to L_s(G)$ uniformément continue. On compose f par l'application de Mazur ϕ_{s1}, pour obtenir $\phi_{s1} \circ f : B_X \to L_1(G)$ uniformément continue. On peut donc approcher cette application uniformément par une application $g : B_X \to L_1(G)$ qui est α-Hölder. La composée $\phi_{1s} \circ g$ est alors une approximation uniforme de f qui est $\frac{\alpha}{s}$-Hölder car l'application de Mazur ϕ_{1s} est $\frac{1}{s}$-Hölder. On a alors, par définition :

$$\frac{\alpha}{s} \leq \alpha(B_X, L_s(G)) = \frac{p_X}{2} \text{ d'après le cas } q > 1 \text{ appliqué à } s.$$

On fait alors tendre s vers 1 pour avoir que $\alpha \leq p_X/2$. Comme ceci est vrai pour tout $\alpha < \alpha(B_X, L_1(G))$, l'inégalité voulue est aussi démontrée quand $q = 1$.

Pour l'autre égalité, la minoration $\frac{p_X}{2} \leq \alpha(B_X, Y)$ est obtenue comme précédemment avec le théorème 5.11 de Tsařkov. La majoration $\alpha(B_X, Y) \leq \frac{p_X}{2}$ est donnée par la proposition 6.4. □

6.3 Une borne plus précise

Nous poussons ici les techniques utilisées dans la preuve de le proposition 6.1 pour obtenir une borne supérieure qui va dépendre de Y. Cette borne plus précise va permettre d'affiner l'encadrement du chapitre précédent dans les espaces d'Orlicz. Nous reviendrons sur ces conséquences dans la section "Exemples et commentaires".

Théorème 6.6. *Soit $1 \leq p < \infty$. Supposons que X contient les espaces l_p^n uniformément, que Y est réflexif et que B_Y est un rétracté uniforme absolu. Alors :*

$$\alpha(B_X, Y) \leq \alpha(B_p(\mathbb{N}), Y).$$

La preuve de ce théorème consiste à imiter celle de la proposition précédente. La difficulté est que l'on ne connaît plus explicitement l'application qui va jouer le rôle de l'application de Mazur ϕ_{pq}. Le fait 5 ci-dessous va servir à remplacer le fait 4 précédent.

Démonstration. Fixons $\alpha > \alpha(B_p(\mathbb{N}), Y)$. Par définition, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une application $f \in UC(B_p(\mathbb{N}), Y)$ tels que pour tout $K > 0$, $f \notin E_{\alpha,K,2\varepsilon_0}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $f_{|B(l_p^n)}$ la restriction de f à $B(l_p^n) \subset B_p(\mathbb{N})$ (la boule unité fermée de l_p^n). Nous allons démontrer le fait suivant :

Fait 5.

$$\forall K > 0, \exists N_K \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_K, f_{|B(l_p^n)} \notin E_{\alpha,K,\varepsilon_0}(B(l_p^n), Y).$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $K > 0$ et une suite d'applications $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_K^\alpha(B(l_p^n), Y)$ telles que, pour tout $x \in B(l_p^n)$, $\|f(x) - g_n(x)\|_Y \leq \varepsilon_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n arrive dans la boule fermée $(\varepsilon_0 + \|f\|_\infty)B_Y$ qui est faiblement compacte car Y est réflexif. Nous allons montrer qu'il existe une application $g \in \mathcal{H}_K^\alpha(B_p(\mathbb{N}), Y)$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq 2\varepsilon_0$. Ceci sera en contradiction avec le fait que $f \notin E_{\alpha,K,2\varepsilon_0}$.

Étape 1 : construction de l'application g.
On considère une suite dense $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_p(\mathbb{N})$ de vecteurs à supports finis. Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$, tel que $x_k \in B(l_p^{n_k})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour $k \in \mathbb{N}$ et pour $n \geq n_k$, la quantité $g_n(x_k)$ existe bien. Nous allons utiliser un procédé diagonal pour extraire des sous-suites faiblement convergentes.
Il existe A_1 une partie infinie de $[n_1; \infty) \cap \mathbb{N}$ telle que $(g_n(x_1))_{n\in A_1}$ est faiblement convergente vers $g(x_1) \in (\varepsilon_0 + \|f\|_\infty)B_Y$. Par récurrence on construit des parties $A_k \subset [n_k; \infty) \cap A_{k-1}$ telles que $(g_n(x_k))_{n\in A_k}$ est faiblement convergente vers $g(x_k) \in (\varepsilon_0 + \|f\|_\infty)B_Y$. Écrivons les parties A_k sous la forme $A_k = \{n_{k1} < n_{k2} < \cdots < n_{kk} < \cdots < n_{kp} < \ldots\}_{p\geq 1}$, avec $n_{k1} \geq n_k$, et considérons $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\phi(k) = n_{kk} \in A_k$. Il est clair que pour $n \geq k$, on a $\phi(n) > n_k$. Donc, pour $k \geq 1$, la suite $(g_{\phi(n)}(x_k))_{n\geq k}$ est bien définie et, en tant que sous-suite, elle converge faiblement vers $g(x_k)$ quand n tend vers l'infini.

Étape 2 : montrons que $g \in \mathcal{H}_K^\alpha(B_p(\mathbb{N}), Y)$.
Fixons $k \neq l$ et supposons que $g(x_k) \neq g(x_l)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $y^* \in Y^*$, de norme 1, telle que $\|g(x_k) - g(x_l)\|_Y = |y^*(g(x_k) - g(x_l))|$. Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un entier $N_{k,l,\varepsilon,y^*} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_{k,l,\varepsilon,y^*}$: $|y^*(g_{\phi(n)}(x_k) - g(x_k))| \leq \varepsilon$ et $|y^*(g_{\phi(n)}(x_l) - g(x_l))| \leq \varepsilon$. On obtient :

$$\begin{aligned} \|g(x_k) - g(x_l)\|_Y &\leq |y^*(g(x_k) - g_{\phi(n)}(x_k))| + |y^*(g_{\phi(n)}(x_k) - g_{\phi(n)}(x_l))| \\ &\quad + |y^*(g_{\phi(n)}(x_l) - g(x_l))| \\ &\leq 2\varepsilon + \|y^*\|_{Y^*}\|g_{\phi(n)}(x_k) - g_{\phi(n)}(x_l)\|_Y. \end{aligned}$$

Mais $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ et $g_{\phi(n)} \in \mathcal{H}^\alpha_K(B(l_p^{\phi(n)}), Y)$ (rappelons que $x_k, x_l \in B(l_p^{\phi(n)})$). Donc on a :

$$\|g(x_k) - g(x_l)\|_Y \leq 2\varepsilon + K\|x_k - x_l\|_p^\alpha.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient que l'application g est höldérienne avec une constante de Hölder K et un exposant α sur la suite dense $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_p(\mathbb{N})$. Par densité, tout en gardant la même notation pour g, on peut l'étendre en $g \in \mathcal{H}^\alpha_K(B_p(\mathbb{N}), Y)$.

Étape 3 : montrons que $\|f - g\|_\infty \leq 2\varepsilon_0$.
Fixons $\delta > 0$ tel que $\omega_f(\delta)+K\delta^\alpha+\delta \leq \varepsilon_0$, où ω_f est le module de continuité de l'application f. Soit $x \in B_p(\mathbb{N})$. Par densité, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x_k\|_p \leq \delta$. Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}\|f(x) - g(x)\|_Y &\leq \|f(x) - f(x_k)\|_Y + \|f(x_k) - g(x_k)\|_Y + \|g(x_k) - g(x)\|_Y \\ &\leq \omega_f(\delta) + K\delta^\alpha + \|f(x_k) - g(x_k)\|_Y.\end{aligned}$$

Les quantités k et δ étant fixées, le théorème de Hahn-Banach nous donne une forme linéaire continue $y^* \in Y^*$, de norme 1, telle que $\|f(x_k) - g(x_k)\|_Y = |y^*(f(x_k) - g(x_k))|$. Prenons $n \geq N_{k,\delta,y^*}$ pour avoir :

$$\begin{aligned}\|f(x_k) - g(x_k)\|_Y &\leq |y^*(f(x_k) - g_{\phi(n)}(x_k))| + |y^*(g_{\phi(n)}(x_k) - g(x_k))| \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*}\|f(x_k) - g_{\phi(n)}(x_k)\|_Y + \delta \\ &\leq \varepsilon_0 + \delta,\end{aligned}$$

ceci par construction de la suite d'applications $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour conclure, $\|f - g\|_\infty \leq \omega_f(\delta) + K\delta^\alpha + \delta + \varepsilon_0 \leq 2\varepsilon_0$, ce qui est faut car $f \notin E_{\alpha,K,2\varepsilon_0}$. Le fait 5 est démontré.

Maintenant, pour démontrer le théorème 6.6 on se sert du fait 5 et d'une construction comme dans la preuve de la proposition 6.4. On garde les mêmes notations que précédemment T_n et X_n. Considérons l'application :

$$\begin{aligned}\varphi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n &\longrightarrow Y \\ x \in X_n &\longmapsto \varphi(x) = f_{|B(l_p^n)} \circ T_n^{-1}(x - x_n).\end{aligned}$$

Comme avant, φ est uniformément continue et arrive dans la boule fermée $\|f\|_\infty B_Y$ qui est un rétracté uniforme absolu. On étend φ à toute la boule $4CB_X$ en une application qu'on note toujours $\varphi \in UC(4CB_X, Y)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in X_n$, $\varphi(x) = f_{|B(l_p^n)} \circ T_n^{-1}(x - x_n)$. Maintenant, supposons que $\mathcal{H}^\alpha(4CB_X, Y)$ est dense dans $UC(4CB_X, Y)$. Alors il existe une constante $K > 0$ et une application $g \in \mathcal{H}^\alpha_K(4CB_X, Y)$ telles que pour tout $x \in 4CB_X$, $\|\varphi(x) - g(x)\|_Y \leq \varepsilon_0$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons :

$$\begin{aligned}G_n : B(l_p^n) &\longrightarrow Y \\ y &\longmapsto G_n(y) = g(x_n + T_n(y)).\end{aligned}$$

A nouveau, il existe une constante $\tilde{K} > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \in \mathcal{H}^\alpha_{\tilde{K}}(B(l_p^n), Y)$ et on a, pour tout $y \in B(l_p^n)$: $\|f_{|B(l_p^n)}(y) - G_n(y)\|_Y = \|\varphi(x) - g(x)\|_Y$ avec $x = x_n + T_n(y) \in 4CB_X$. Donc, $\|f_{|B(l_p^n)} - G_n\|_\infty \leq \varepsilon_0$ ce qui est faux d'après le fait 5. On conclut comme dans la preuve de la proposition 6.4. □

6.4 Exemples et commentaires

Nous avons déjà vu que si Y est un espace de Banach uniformément convexe, alors sa boule unité fermée est un rétracté uniforme absolu. De plus les rétractions sont α-Hölder avec $\alpha = 1/q$ où q est la puissance du module de convexité d'un renormage équivalent de Y. On sait d'après la proposition 5.10 que pour tout espace métrique X, $1/q \leq \alpha(X, Y)$. Le théorème 6.6 nous donne alors la valeur précise de $\alpha(B_X, Y)$ quand X contient les espaces l_1^n uniformément, à savoir :

$$\alpha(B_X, Y) = \frac{1}{q}.$$

En particulier, pour $X = l_1$, $\alpha(B_1, Y) = 1/q$. On applique ceci aux espaces d'Orlicz.

Proposition 6.7. *Soient $G, G' \in \{\mathbb{N}, [0,1], (0,\infty)\}$ avec la mesure adaptée. Soient M et N deux fonctions d'Orlicz, $1 \leq \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty$ et $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ désignant leurs indices de Boyd respectifs. Supposons que $\alpha_M(G) = 1$. Alors :*

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) = \frac{1}{\beta_N(G') \vee 2}.$$

Démonstration. Pour $X = L_M(G)$ avec $\alpha_M(G) = 1$ alors on a $p_X = \alpha_M(G) \wedge 2 = 1$ et on sait que X contient les espaces l_1^n uniformément. Comme $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$, l'espace $L_N(G')$ admet une norme équivalente avec un module de convexité en puissance $\beta_N(G') \vee 2$ (voir [LT2] p. 100 et le théorème 2.3 des rappels). Comme on ne change pas le coefficient d'approximation par renormage équivalent, on applique ce qu'on vient de dire pour conclure. □

Remarquons que maintenant on sait conclure quand $\alpha_M(G) = 1$. Dans la preuve du théorème 5.15 (et donc du théorème 5.18) on avait choisi de travailler avec $L_M(G)$ réflexif. Le cas $\alpha_M(G) = 1$ étant réglé on suppose désormais $\alpha_M(G) > 1$.

Les nouvelles estimations de ce chapitre permettent de mieux encadrer le coefficient $\alpha(B_M(G), L_N(G'))$ du chapitre précédent dans certains cas. Tout d'abord, quand $N(u) = |u|^q$, c'est à dire quand l'espace d'arrivée est $L_q(G')$ on a :

Proposition 6.8. *Soient $G, G' \in \{\mathbb{N}, [0,1], (0,\infty)\}$ avec la mesure adaptée. Soit M une fonction d'Orlicz telle que $1 < \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty$ où $\alpha_M(G)$ et $\beta_M(G)$ sont les indices de Boyd de M. Soit $1 \leq q < \infty$. Alors :*

$$\alpha(B_M(G), L_q(G')) = \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{q \vee 2},$$

Démonstration. On utilise l'égalité $p_X = \alpha_M(G) \wedge 2$ (vraie car $\beta_M(G) < \infty$) et on applique le théorème 6.5. □

Dans le cas où l'espace d'arrivée est $L_q(G')$ on a donc amélioré l'encadrement du théorème 5.18 où la borne supérieure faisait intervenir l'indice de Boyd supérieur $\beta_M(G)$. Quand la fonction d'Orlicz M a une concavité et une convexité différentes, on sait conclure.

Reprenons l'exemple du chapitre précédent. Soit $p > 1+\sqrt{2}$. Pour $u > 0$ au voisinage de 0 on définit :

$$M(u) = u^{p+\sin(\ln|ln(u)|)}.$$

Si on sait calculer l'indice de Boyd $\alpha_M(\mathbb{N})$, alors on sait calculer le coefficient d'approximation $\alpha(B_M(\mathbb{N}), L_q(G))$ pour tout $1 \leq q < \infty$ et $G \in \{\mathbb{N}, [0,1]\}$ avec la mesure adaptée.

Passons maintenant au cas général. Grâce à la proposition 6.4 et aux théorèmes 6.5 et 6.6, on peut améliorer l'encadrement dans les espaces d'Orlicz du théorème 5.15.

Théorème 6.9. *Soient $G, G' \in \{\mathbb{N}, [0,1], (0,\infty)\}$ avec la mesure adaptée. Soient M et N deux fonctions d'Orlicz, $1 < \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty$ et $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ désignant leurs indices de Boyd respectifs.*
Si $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') \leq 2$ alors :

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) = \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{2}.$$

Si $1 < \alpha_N(G') \leq 2 \leq \beta_N(G') < \infty$ alors :

$$\frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G')} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{2}.$$

Si $2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ et si $G' = \mathbb{N}$ alors :

$$\frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G')} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G')}.$$

Le seul cas pour lequel on ne sait pas avoir une majoration pour tout G' est $2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$. Sinon dans tous les cas favorables, le théorème 6.9 donne l'encadrement :

$$\frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G') \vee 2} \leq \alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G') \vee 2}.$$

On améliore dans ces cas la majoration du théorème 5.15 car $\alpha_M(G) \leq \beta_M(G)$. On passe à la preuve de ce théorème et ensuite on regarde ses différences avec les encadrements du chapitre précédent.

Démonstration. La minoration est celle donnée par le théorème 5.15. Elle est valable pour tous les cas sur G et G'. On a donné ici la version avec les indices de Boyd comme le permet le corollaire 5.18. Regardons les majorations.

Premier cas : $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') \leq 2$.
Alors, l'espace d'Orlicz $Y = L_N(G')$ a un module de convexité en puissance 2 (du moins pour une norme équivalente). L'espace d'Orlicz $X = L_M(G)$ vérifie $p_X = \alpha_M(G) \wedge 2$. On applique le théorème 6.5 pour avoir l'égalité.

Deuxième cas : $1 < \alpha_N(G') \leq 2 \leq \beta_N(G') < \infty$.
On sait que $X = L_M(G)$ contient les espaces $l^n_{p_X}$ uniformément avec $p_X = \alpha_M(G) \wedge 2$. De plus, par hypothèse, $Y = L_N(G')$ a un type non trivial et admet une norme équivalente pour laquelle Y est uniformément convexe (et la boule unité correspondante B_Y est un rétracté

uniforme absolu). Rappelons qu'on ne change pas la valeur de $\alpha(B_X, Y)$ par renormage équivalent. D'après la proposition 6.4 qui utilise le théorème de Dvoretsky on a :

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \frac{p_X}{2} = \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{2}.$$

Troisième cas : $2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$.
Pour les mêmes raisons que dans les cas précédents, on peut appliquer le théorème 6.6. Ainsi :

$$\alpha(B_M(G), L_N(G')) \leq \alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), L_N(G')).$$

On est donc ramené à la première colonne du tableau qui suit le théorème 5.15 avec, en suivant ses notations, $p_N = \alpha_N(G') \geq 2$ et $q_M = p_X \leq 2$ (c'est le cas B). On sait majorer avec le théorème 5.15 si $G' = \mathbb{N}$ et alors :

$$\begin{aligned} \alpha(B_M(G), L_N(G')) &\leq \alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), L_N(G')) \\ &\leq \frac{p_X}{\alpha_N(G') \vee 2} \\ &= \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G')}. \end{aligned}$$

□

Les différences et les améliorations par rapport au théorème 5.15 sont les suivantes :
- on ne discute que sur les indices de Boyd et sur G' de l'espace d'arrivée $L_N(G')$,
- pour tout G', quand $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') \leq 2$ on a une égalité à la place d'un encadrement,
- pour tout G', quand $1 < \alpha_N(G') \leq 2 \leq \beta_N(G') < \infty$, la majoration obtenue est meilleure que celle du théorème 5.15,
- quand $2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ on ne sait améliorer que pour $G' = \mathbb{N}$, mais pour tout G au départ. Cela signifie que pour les cas B et C de la première ligne du tableau qui suit le théorème 5.15, l'ancienne majoration est remplacée par la nouvelle avec $\alpha_M(G) \wedge 2$ en numérateur.

En conclusion, le théorème 6.9 s'applique dans beaucoup plus de cas que le théorème 5.15 et il est alors plus précis. Le théorème 5.15 reste néanmoins utile dans le cas $2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ (qui correspond aux cas B et C) pour garder au moins l'ancien encadrement quand $G' \neq \mathbb{N}$.

En guise de transition vers le prochain chapitre, on met en avant la remarque suivante. Soit H est une espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On note B_H la boule unité fermée de H. Comme H et l_2 sont isométriques, alors pour espace vectoriel normé Y on a : $\alpha(B_H, Y) = \alpha(B_2(\mathbb{N}), Y)$. Si par exemple Y est un espace d'Orlicz réflexif de suites l_N tel que $2 < \alpha_N(\mathbb{N}) \leq \beta_N(\mathbb{N}) < \infty$, alors le théorème 6.9 donne :

$$\frac{2}{\beta_N(\mathbb{N})} \leq \alpha(B_H, l_N) \leq \frac{2}{\alpha_N(\mathbb{N})}.$$

En particulier $\alpha(B_H, l_N) < 1$ et les applications lipschitziennes ne sont pas denses dans l'ensemble des applications uniformément continues de B_H à valeurs dans l_N. Nous revenons sur ce point dans le chapitre suivant au sujet des extensions des applications uniformément continues.

Chapitre 7

Lien avec les extensions

7.1 Exposants de non-extension

Dans ce dernier chapitre autour des applications höldériennes, nous allons établir le lien entre notre exposant de meilleure approximation $\alpha(B_X, Y)$ et les questions d'extensions des applications höldériennes. Comme annoncé précédemment nous allons démontrer ici la proposition 5.7. Le principe est le suivant : un résultat d'extension pour des fonctions dans une certaine classe entraîne un résultat d'approximation par des fonctions de cette classe. Nous allons formaliser ce principe.
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Les notations suivantes sont une précision due à Lancien et Randrianantoanina dans [LaRa] de celles introduites par Naor dans [N]. Pour $C \geq 1$ on désigne par $\mathcal{B}_C(X, Y)$ l'ensemble des exposants $\alpha > 0$ tels que pour toute sous partie $D \subset X$, toute application $f : D \to Y$ (K, α)-Hölder peut être étendue en une application $\tilde{f} : X \to Y$ (CK, α)-Hölder. Si $C = 1$ l'application $\tilde{f}$ est appelée une extension *isométrique* de f. Pour les $\alpha \in \mathcal{B}_1(X, Y)$ on peut étendre f en gardant le même module de continuité. De façon usuelle on note $\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{B}_1(X, Y)$. Si $C > 1$ alors $\tilde{f}$ est appelée une extension *isomorphique* de f. Si pour tout $C > 1$ une extension isomorphique $\tilde{f}$ existe on dit alors que f peut être étendue *presque isométriquement.* On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{B}(X, Y) = \bigcup_{C \geq 1} \mathcal{B}_C(X, Y) \text{ et } \tilde{\mathcal{A}}(X, Y) = \bigcap_{C > 1} \mathcal{B}_C(X, Y).$$

On a les inclusions

$$\mathcal{A}(X, Y) \subset \tilde{\mathcal{A}}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y).$$

Les résultats d'extension que nous avons rappelés avant peuvent s'écrire maintenant sous les formes suivantes : si X est un espace métriquement convexe alors pour tout ensemble Γ, $\mathcal{A}(X, l_\infty(\Gamma)) = (0, 1]$, si H est un espace de Hilbert alors $\mathcal{A}(H, H) = (0, 1]$.
Nous nous intéressons principalement aux ensembles $\mathcal{B}(X, Y)$. Les travaux de Naor dans [N] et ceux de Brudnyi et Shvartsman dans [BrSh] montrent que si X et Y sont des espaces de Banach alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est un intervalle. Nous énonçons et démontrons maintenant le résultat qui suit en rapport avec la proposition 5.7. On travaille ici avec des espaces de Banach au départ et à l'arrivée. B_X désigne la boule unité fermée de X.

Proposition 7.1. *Soient* $(X, \| \, . \, \|_X)$ *et* $(Y, \| \, . \, \|_Y)$ *deux espaces de Banach. Si* $\alpha \in \mathcal{B}(X,Y)$, *alors* $\mathcal{H}^\alpha(B_X, Y)$ *est dense dans* $UC(B_X,Y)$ *muni de la norme* $\| \, . \, \|_\infty$. *Donc :*

$$\mathcal{B}(X,Y) \subseteq (0, \alpha(B_X,Y)].$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{B}(X,Y)$ et la constante $C > 0$ qui lui correspond. Soient $\varepsilon > 0$ et $f : B_X \to Y$ uniformément continue avec un module de continuité ω. Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble de B_X, ε-séparé maximal. Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ on a :

$$\|x-y\|_X \leq \Big(\Big[\frac{\|x-y\|_X}{\varepsilon^\alpha} \Big] + 1 \Big) \varepsilon^\alpha,$$

où $[\, . \,]$ est la partie entière. Comme B_X est métriquement convexe, ω est croissante et sous-additive. On obtient :

$$\begin{aligned} \|f(x)-f(y)\|_Y \leq \omega(\|x-y\|_X) &\leq \omega\Big(\Big(\Big[\frac{\|x-y\|_X}{\varepsilon^\alpha} \Big] + 1 \Big) \varepsilon^\alpha\Big) \\ &\leq \frac{\omega(\varepsilon^\alpha)}{\varepsilon^\alpha}(2^{1-\alpha}+1)\|x-y\|_X^\alpha, \end{aligned}$$

car $x, y \in \mathcal{A} \subset B_X$. Ainsi la restriction de f à $\mathcal{A}$ est α-Hölder avec une constante de Hölder valant $K = \frac{\omega(\varepsilon^\alpha)}{\varepsilon^\alpha}(2^{1-\alpha}+1)$. Notons $\tilde{f}$ son extension isomorphique avec constante de Hölder CK. Pour $x \in B_X$, il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $\|x-y\|_X \leq \varepsilon$ et donc : $\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_Y \leq \|f(x)-f(y)\|_Y + \|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)\|_Y \leq \omega(\varepsilon) + C(2^{1-\alpha}+1)\omega(\varepsilon^\alpha)$. Ainsi $f \in \overline{\mathcal{H}^\alpha(B_X,Y)}^{\| \, . \, \|_\infty}$, et par définition du meilleur exposant d'approximation : $\alpha \leq \alpha(B_X, Y)$. □

Dès lors, toutes les bornes supérieures obtenues avant pour l'exposant $\alpha(B_X,Y)$ sont des bornes supérieures pour les ensembles d'extension $\mathcal{B}(X,Y)$. Nous résumons ces inclusions dans la proposition qui vient. Elle généralise les inclusions obtenues par Naor dans [N]. Les cas d'égalité sont discutés dans la section suivante.

Proposition 7.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach de dimension infinie. Soit* $G \in \{\mathbb{N}, [0,1], (0,\infty)\}$ *avec la mesure adaptée.*
On note de façon usuelle $p_X = \sup\{p \, , X \text{ est de type } p\} \in [1,2]$.
(i) Si Y *est de type non trivial et si* B_Y *est un rétracté uniforme absolu, alors*

$$\mathcal{B}(X,Y) \subseteq (0, \frac{p_X}{2}].$$

(ii) Si $Y = L_q(G)$ *avec* $1 \leq q < \infty$ *alors*

$$\mathcal{B}(X,Y) \subseteq (0, \frac{p_X}{q \vee 2}].$$

(iii) Si $Y = l_N$ *avec* $2 \leq \alpha_N(\mathbb{N}) \leq \beta_N(G') < \infty$ *alors*

$$\mathcal{B}(X,Y) \subseteq (0, \frac{p_X}{\alpha_N(\mathbb{N})}].$$

Démonstration. On combine à chaque fois la proposition 7.1 avec les majorations du chapitre précédent. On sait que dans tous les cas, X contient les espaces $l_{p_X}^n$ uniformément. On a (i) avec la proposition 6.4. Le point (ii) découle du théorème 6.5 (où l'hypothèse de treillis ne sert pas pour la majoration). Pour (iii), on utilise d'abord le théorème 6.6 pour avoir :

$$\alpha(B_X, l_N) \leq \alpha(B_{p_X}(\mathbb{N}), l_N).$$

On travaille avec des espaces de suites et $2 \leq \alpha_N(\mathbb{N})$, donc le théorème 6.9 donne la majoration voulue. □

Intéressons-nous au cas où $X = H$ est une espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On note B_H la boule unité fermée de H. K. Ball dans [Ball] demande si toute application lipschitzienne définie sur un sous ensemble de H à valeurs dans un espace normé peut être étendue isomorphiquement à tout H.
Si $Y = l_N$ est un espace d'Orlicz de suites tel que $2 < \alpha_N(\mathbb{N}) \leq \beta_N(\mathbb{N}) < \infty$, le (iii) de la proposition précédente donne l'inclusion :

$$\mathcal{B}(H, l_N) \subseteq (0, \frac{2}{\alpha_N(\mathbb{N})}].$$

En particulier $1 \notin \mathcal{B}(H, l_N)$ et il existe au moins une application lipschitzienne définie sur une partie $D \subset H$ à valeurs dans l_N qui ne peut être étendue isomorphiquement en une application lipschitzienne sur H. Cela apporte une autre réponse à la question posée par Ball dans [Ball]. Naor dans [N] y a répondu dans la cas où $Y = L_q(G)$ avec $2 < q < \infty$ sans utiliser le théorème de Tsar̆kov dans [Tsa1] qui donne ici $\alpha(B_H, L_q(G)) = \frac{2}{q} < 1$.

Toujours dans le cadre des espaces d'Orlicz, considérons la fonction d'Orlicz $M(u) = u^2(1 + |ln(u)|)$ définie au voisinage de 0. Alors on a :

$$\mathcal{B}(l_M, l_2) \subset (0, 1[.$$

En effet, nous avons vu dans la section "Exemples et commentaires" du chapitre "Approximations höldériennes" que les applications lipschitziennes n'étaient pas denses dans $UC(B_M(\mathbb{N}), l_2)$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$. Dans ce cas précis il est peut-être possible d'étendre isomorphiquement toute application α-Hölder pour $0 < \alpha < 1$, mais sûrement pas pour $\alpha = 1$. C'est l'objet de la section suivante de s'intéresser aux valeurs exactes des ensembles $\mathcal{B}(X, Y)$ en s'appuyant sur les travaux de Ball dans [Ball], de Naor dans [N] et à ceux très récents de Naor, Peres, Schramm et Sheffield dans [NPSS].

7.2 Markov-type et extensions effectives

Les problèmes d'extension des applications linéaires sont liés aux propriétés de type et de cotype des espaces. Maurey, en 1974 a montré dans [Mau] le théorème suivant :

Théorème 7.3. *Soient X et Y des espaces de Banach tels que X est de type 2 et Y est de cotype 2. Alors il existe une constante $C(X, Y) > 0$ telle que pour tout sous espace $Z \subset X$ et pour toute application linéaire continue $T : Z \to Y$, il existe une extension $\tilde{T} : X \to Y$ de T à X, linéaire et continue telle que $\|\tilde{T}\| \leq C(X, Y)\|T\|$.*

Nous avons vu aussi une première généralisation de ce résultat, le théorème de Kirszbraun, entre espace de Hilbert, pour étendre des applications lipschitziennes en gardant la même constante de Lipschitz. K. Ball dans [Ball] a utilisé des méthodes inspirées par la théorie du type et du cotype pour obtenir un résultat général d'extension isomorphique des applications lipschitziennes. Il a introduit les notions de *Markov-type* et de *Markov-cotype* que nous rappelons maintenant.
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est de Markov-type $p > 0$ s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute matrice stochastique symétrique réelle $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et pour tout choix de vecteurs $\{x_1, \dots, x_n\} \in X$:

$$(1-\alpha) \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij} d(x_i, x_j)^p \leq K\alpha \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} d(x_i, x_j)^p,$$

où les c_{ij} sont les coefficients de la matrice $C = (1-\alpha)(I - \alpha A)^{-1}$, (avec I la matrice identité à n lignes et n colonnes). Cette notion de Markov-type est définie pour des espaces métriques. On introduit maintenant la notion de Markov-cotype seulement dans les espaces normés.
On dit qu'un espace normé X est de Markov-cotype $q > 0$ s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute matrice stochastique symétrique réelle $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et pour tout choix de vecteurs $\{x_1, \dots, x_n\} \in X$:

$$\alpha \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \Big\| \sum_{r=1}^{n} c_{ir} x_r - \sum_{s=1}^{n} c_{js} x_s \Big\|^q \leq K(1-\alpha) \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_{ij} \|x_i - x_j\|^q,$$

avec les c_{ij} définis comme avant.
Le théorème d'extension général est le suivant :

Théorème 7.4 (Ball, 1992)**.** *Soient (X, d) un espace métrique avec Markov type q et Y un espace de Banach réflexif avec Markov cotype q. Alors $1 \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

La difficulté est alors de savoir calculer le Markov-type et le Markov-cotype des espaces mis en jeu. On a :

Théorème 7.5 (Ball, 1992)**.** *Soit X un espace de Banach avec δ_X en puissance $2 \leq q < \infty$. Alors X est de Markov-cotype q.*

K. Ball a aussi montré qu'un espace de Hilbert est de Markov-type 2. Comme L_p avec $1 \leq p \leq 2$ muni de la métrique $d(x, y) = \|x - y\|^{p/2}$ est isométrique à un sous espace d'un espace de Hilbert (voir [WW] p. 12), on en déduit que pour $1 \leq p \leq 2$, L_p est de Markov-type p. Le cas $2 < p < \infty$ a été résolu récemment :

Théorème 7.6 (NPSS, 2004)**.** *Soit X un espace de Banach avec ρ_X en puissance $1 < p \leq 2$. Alors X est de Markov type p.*

La connaissance des Markov types et cotypes des espaces L_p permet à Naor de donner la valeur exacte de $\mathcal{B}(L_p(G), L_q(G))$, où $G \in \{\mathbb{N}, [0, 1]\}$ avec la mesure adaptée. Sa conjecture de 2001 dans [N] étant vérifiée, on a :

Théorème 7.7 (Naor)**.** *Soient* $1 \leq p, q < \infty$*, avec* $q \neq 1$*. Alors :*

$$\mathcal{B}(L_p(G), L_q(G)) = \Big(0, \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}\Big]$$

On se propose de donner la preuve de ce résultat car c'est une application simple des théorème précédents. On ne note plus la lettre G pour plus de clarté.

Démonstration. On sait d'après la proposition 7.2 et le théorème de Tsaŕkov donnant la valeur de l'exposant $\alpha(B_p, L_q)$ que

$$\mathcal{B}(L_p, L_q) \subseteq \Big(0, \frac{p \wedge 2}{q \vee 2}\Big],$$

et ceci même pour $q = 1$. Pour montrer l'inclusion réciproque, on discute suivant les valeurs de p et q autour de 2. A chaque étape l'idée est la même : munir l'espace de départ L_p d'une métrique $d_\alpha(x, y) = \|x - y\|^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$ à définir dans chaque cas, pour obtenir un Markov-type (d'un espace métrique) égal au Markov-cotype de l'espace normé d'arrivée L_q, et appliquer ensuite le théorème d'extension 7.4 de Ball.
Quand $1 < q \leq 2$. Alors L_q est de Markov-cotype 2. Si $p \geq 2$ alors L_p est de Markov-type 2. Le théorème 7.4 donne alors $1 \in \mathcal{B}(L_p, L_q)$. Si $1 \leq p \leq 2$ alors L_p avec la métrique d_α où $\alpha = p/2$ est de Markov-type 2 (car L_p avec la norme usuelle a un module de lissité en puissance p et est donc de Markov-type p d'après le théorème 7.6). On a encore $1 \in \mathcal{B}\big((L_p, d_\alpha), L_q\big)$. Ceci donne $\alpha = p/2 \in \mathcal{B}(L_p, L_q)$. Quand $q \geq 2$. Alors L_q a un module de convexité en puissance q donc est de Markov-cotype q. Si $1 \leq p \leq 2$ alors on applique le même raisonnement que précédemment avec $\alpha = p/q$. Si $p \geq 2$ on fait de même avec $\alpha = 2/q$. □

De façon similaire, les théorèmes 7.5 et 7.6 associés à nos bornes supérieures de la proposition 7.2 donnent :

Théorème 7.8. *Soit* X *un treillis de Banach tel que* $1 < p_X \leq 2$ *qui admet une* r*-estimation par dessous pour un certain* r *fini. Soit* $1 < q < \infty$*. Alors :*

$$\Big(0, \frac{p_X}{q \vee 2}\Big[\subseteq \mathcal{B}(X, L_q(G)) \subseteq \Big(0, \frac{p_X}{q \vee 2}\Big].$$

Démonstration. Comme pour la démonstration précédente, l'inclusion de droite est donnée par la proposition 7.2 et reste vraie pour $q = 1$. Pour l'inclusion de gauche, on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $1 < p_X - \varepsilon < p_X \leq 2$. Le treillis X est alors de type $p_X - \varepsilon$ avec par hypothèse une r-estimation par dessous pour un certain r fini. D'après le théorème 2.3 X admet une norme équivalente avec un module de lissité en puissance $p_X - \varepsilon$. X est donc de Markov-type $p_X - \varepsilon$. On équipe alors X de la métrique d_α avec $\alpha = \frac{p_X - \varepsilon}{q \vee 2}$ pour que son Markov-type soit $q \vee 2$ comme le Markov-cotype de l'espace normé $L_q(G)$. On obtient comme avant que

$$\Big(0, \frac{p_X - \varepsilon}{q \vee 2}\Big] \subseteq \mathcal{B}(X, L_q(G)),$$

d'où l'inclusion voulue avec l'intervalle ouvert quand ε tend vers 0. □

7.3 Exemples et commentaires

La preuve que nous venons de faire montre que si p_X est atteint (et qu'ainsi X est de type p_X), alors on a en fait égalité :

$$\mathcal{B}(X, L_q(G)) = \Big(0, \frac{p_X}{q \vee 2}\Big].$$

Nous allons voir un exemple d'espace d'Orlicz pour lequel p_X n'est pas atteint et tel que l'égalité précédente est vraie avec l'intervalle ouvert. On commence par l'évaluation de l'intervalle d'extension $\mathcal{B}(X, Y)$ dans le cadre des espaces d'Orlicz.

Théorème 7.9. *Soient $G, G' \in \{\mathbb{N}, [0,1], (0,\infty)\}$ avec la mesure adaptée. Soient M et N deux fonctions d'Orlicz telles que $1 < \alpha_M(G) \leq \beta_M(G) < \infty$ et $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$. Quand $\alpha_N(G')$, $\beta_N(G')$ et G' sont dans les cas du théorème 6.9, on a :*

$$\Big(0, \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\beta_N(G') \vee 2}\Big[\subseteq \mathcal{B}(L_M(G), L_N(G')) \subseteq \Big(0, \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{\alpha_N(G') \vee 2}\Big].$$

En particulier, quand $1 < \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') \leq 2$, alors

$$\Big(0, \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{2}\Big[\subseteq \mathcal{B}(L_M(G), L_N(G')) \subseteq \Big(0, \frac{\alpha_M(G) \wedge 2}{2}\Big].$$

Pour les autres cas, à savoir $(1 < \alpha_N(G') \leq 2 \leq \beta_N(G') < \infty)$ et $(2 \leq \alpha_N(G') \leq \beta_N(G') < \infty$ avec $G' = \mathbb{N}$) on a une estimation moins précise.

Démonstration. C'est toujours la proposition 7.2 qui donne l'inclusion de droite. Celle de gauche s'obtient comme la précédente avec la caractérisation des indices de Boyd en liaison avec les types et cotypes des espaces d'Orlicz. □

On donne des exemples d'espaces d'Orlicz pour lesquels l'intervalle $\mathcal{B}(L_M(G), L_N(G))$ est ouvert ou fermé. Prenons $M(u) = u^2(1 + |\ln(u)|)$ et $N(u) = |u|^2$.
Si $G = G' = [0,1]$, alors

$$\mathcal{B}(L_M[0,1], L_2[0,1]) = (0,1].$$

Si $G = G' = \mathbb{N}$ alors

$$\mathcal{B}(l_M, l_2) = (0,1[.$$

En effet, quand $G = [0,1]$ on s'intéresse au comportement de la fonction d'Orlicz M au voisinage de l'infini. Nous avons alors vu que l'espace $L_M[0,1]$ est 2-convexe. On a donc $\alpha_M[0,1] = p_M = 2$ qui est atteint et la première égalité avec l'intervalle $(0,1]$ vient de ce qu'on a vu plus haut. Quand $G = \mathbb{N}$, nous avons vu dans la section précédente que

$$\mathcal{B}(l_M, l_2) \subseteq (0,1[.$$

L'égalité vient du théorème précédent. Ici l'espace de suites l_M est $2-\varepsilon$-convexe pour $\varepsilon > 0$ assez petit mais n'est pas 2-convexe.

Naor dans [N] a remarqué qu'il y avait parfois un "trou" (qu'il nomme transition de phase) entre les ensembles d'extension isométriques et isomorphiques. Pour $1 < p, q \leq 2$ on a :

$$\mathcal{A}(L_p(G), L_q(G)) \subset \mathcal{B}(L_p(G), L_q(G)).$$

Lancien et Randrianantoanina dans [LaRa] montrent que cette transition de phase est extrême quand l'arrivée est c_0. Pour tout espace métrique X on a $\mathcal{B}(X, c_0) = (0, 1]$ et si X est un espace normé de dimension infinie alors $\mathcal{A}(X, c_0) = \emptyset$. On a même $\tilde{\mathcal{A}}(X, c_0) = \emptyset$ où $\tilde{\mathcal{A}}(X, Y) = \cap_{C>1} \mathcal{B}_C(X, Y)$ est l'ensemble lié aux extensions presque isométriques.
Dans la lignée de ces observations et comme $\mathcal{B}(X, Y) \subset (0, \alpha(B_X, Y)]$ on demande s'il existe des exemples où cette inclusion est stricte. Une réponse négative à cette question signifierait qu'un résultat d'approximation par des fonctions dans une certaine classe pourrait entraîner un résultat d'extension des fonctions de cette classe (un principe réciproque au précédent).

Deuxième partie

Modules asymptotiques uniformes

Chapitre 8

Présentation

Les modules asymptotiques uniformes de lissité et de convexité sont deux paramètres des espaces de Banach de dimension infinie. Ils ont été introduits par Milman en 1971 dans [Mil] sous différents noms et avec d'autres notations. Nous suivons ici la terminologie plus récente de Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman définie dans [JLPS] en 2002. C'est ce dernier article qui constitue notre référence principale sur ces modules asymptotiques uniformes.

8.1 Définitions et premières propriétés

Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Le *module asymptotique uniforme de lissité* de X est donné pour $t > 0$ par

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{\dim X/Z<\infty} \sup_{z\in Z,\, \|z\|\leq t} \|x+z\| - 1,$$

et le *module asymptotique uniforme de convexité* de X est donné pour $t > 0$ par

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{\|x\|=1} \sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| - 1.$$

L'espace X est dit *asymptotiquement uniformément convexe* si $\overline{\delta}_X(t) > 0$ pour tout $t > 0$, et *asymptotiquement uniformément lisse* si $\overline{\rho}_X(t)/t \to 0$ quand $t \to 0$.

On est parfois intéressé par des estimations en puissance de ces modules. Fixons $1 \leq p < \infty$. On dit que $\overline{\delta}_X$ est en puissance p s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $0 < t \leq 1$:

$$\overline{\delta}_X(t) \geq Kt^p$$

On dit que $\overline{\rho}_X$ est en puissance p s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $0 < t \leq 1$:

$$\overline{\rho}_X(t) \leq Kt^p$$

Avant le calcul explicite de ces modules dans les espaces l_p pour $1 \leq p < \infty$ et dans c_0, on donne la proposition suivante de [JLPS]. Elle présente les premières propriétés des fonctions $\overline{\delta}_X(.)$ et $\overline{\rho}_X(.)$ et les relie aux modules usuels de lissité et de convexité. Redonnons la définition de ces modules. Soit $(X, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach de dimension supérieure ou égale à 2. Pour $0 < t \leq 2$, la fonction :

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \left\|\frac{x-y}{2}\right\| - 1\,, \|x\| = 1\,, \|y\| = t\right\},$$

est appelée module de lissité de X. On dit que l'espace de Banach $(X, \|\,.\,\|)$ est uniformément lisse si $\lim_{t\to 0} \rho_X(t)/t = 0$.
Pour $t > 0$, la fonction :

$$\delta_X(t) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|, \|x\| = \|y\| = 1\,, \|x-y\| \geq t\right\}.$$

est appelée module de convexité de X. Si pour tout $t > 0$ on a $\delta_X(t) > 0$ alors on dit que $(X, \|\,.\,\|)$ est uniformément convexe. Au même titre que les modules asymptotiques uniformes, on a défini précédemment les estimations en puissance de ces modules usuels. Passons à la proposition qui lie ces différents modules. Nous ne présentons pas sa preuve ici. Elle peut-être lue dans [JLPS] p. 717.

Proposition 8.1. *(i) Les fonctions $\overline{\rho}_X(t)$ et $\overline{\delta}_X(t)$ sont des fonctions croissantes et lipschitziennes en t avec une constante de Lipschitz au plus égale à 1. Pour tout t, $\overline{\delta}_X(t) \leq \overline{\rho}_X(t)$ et la fonction $\overline{\rho}_X(t)$ est convexe.*
(ii) Si $X_0 \subset X$ alors $\overline{\rho}_{X_0}(t) \leq \overline{\rho}_X(t)$ et $\overline{\delta}_{X_0}(t) \geq \overline{\delta}_X(t)$.
(iii) Pour tout $0 < t < 1$, $2\rho_X(t) \geq \overline{\rho}_X(t)$ et $\delta_X(t) \leq \overline{\delta}_X(t)$.

En particulier, d'après (*iii*), si l'espace X est uniformément convexe alors X est asymptotiquement uniformément convexe. De même, si X est uniformément lisse alors X est asymptotiquement uniformément lisse. De plus des estimations en puissance des modules usuels impliquent les mêmes estimations pour les modules asymptotiques uniformes qui correspondent.

8.2 Calcul des modules des espaces l_p, $1 \leq p < \infty$ et c_0

On donne ici quelques valeurs explicites des modules asymptotiques uniformes. Ces calculs ne sont détaillés ni dans [Mil] ni dans [JLPS]. Ils nous fournissent ici l'occasion de nous familiariser avec la définition des modules asymptotiques uniformes. Nous calculons la valeur du module asymptotique uniforme de convexité des espaces l_p pour $1 \leq p < \infty$. Le même type de raisonnement permet d'obtenir le module asymptotique uniforme de lissité de ces espaces et un changement mineur ceux de l'espace c_0.

Si X est un sous-espace d'un espace l_p avec $1 \leq p < \infty$ alors pour tout $t \geq 0$:

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = (1 + t^p)^{1/p} - 1.$$

En particulier ces modules sont en puissance p et l'espace l_1 est asymptotiquement uniformément convexe.

Si X est un sous-espace de c_0 alors, pour tout $0 < t \leq 1$:

$$\overline{\rho}_X(t) = \overline{\delta}_X(t) = 0.$$

Ainsi c_0 est asymptotiquement uniformément lisse et son module asymptotique uniforme de lissité est en puissance p pour tout $1 \leq p < \infty$.

Soient $1 \leq p < \infty$ et $X = l_p$. Fixons $t > 0$ et montrons que $\overline{\delta}_X(t) = (1+t^p)^{1/p} - 1$ où l'on rappelle la définition :

$$\overline{\delta}_X(t) = \inf_{\|x\|=1} \sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| - 1.$$

On commence par le cas particulier où $x \in S_X$ est de la forme $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Plus précisement, en notant $P_i : X \to \mathbb{R}$ les projections $P_i(x) = x_i$, le point x est tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq n+1$, $P_i(x) = 0$. Montrons que pour ce point x particulier on a :

$$\sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| = (1+t^p)^{1/p}. \tag{8.1}$$

Considérons le sous espace de codimension finie $Z_n = \cap_{i=1}^{n} Ker(P_i)$. Alors pour tout $z \in Z_n$, comme x et z sont à supports disjoints on a $\|x+z\|^p = \|x\|^p + \|z\|^p = 1 + \|z\|^p$ d'où

$$\inf_{z\in Z_n,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| = (1+t^p)^{1/p},$$

et ainsi $(1+t^p)^{1/p} \leq \sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\|$.

Pour un sous espace de codimension finie Z de X on a l'inclusion entre les ensembles non vides suivants :

$$\{z \in Z \cap Z_n,\, \|z\| = t\} \subset \{z \in Z,\, \|z\| \geq t\}.$$

Ainsi en prenant les bornes inférieures sur ces ensembles on obtient :

$$\inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| \leq (1+t^p)^{1/p}$$

mais ceci pour tout sous espace de codimension finie Z. On peut donc conclure que pour les $x \in S_X$ de la forme précédente $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, l'égalité (8.1) est vérifiée. Pour t fixé, l'application $\sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\|$ est continue en $x \in S_X$ et elle est constante sur la partie dense de S_X des éléments de la forme précédente. Ainsi pour tout $x \in S_X$ l'égalité 8.1 est vérifiée. On obtient donc la valeur voulue de $\overline{\delta}_X$.

Dans le cas où $X = c_0$ c'est exactement la même preuve avec ici la fonction $\max(0, t-1)$ qui remplace la fonction $(1+t^p)^{1/p}$ dès l'égalité (8.1).

Une différence notable pour les espaces l_p, par rapport aux modules usuels, est que l'on garde l'exposant $1 \leq p < \infty$ dans les valeurs des modules asymptotiques uniformes. En effet cette information est perdue pour, par exemple, le module usuel de convexité qui est en puissance $p \vee 2$.

De plus, contrairement aux modules usuels, pour lesquels les espaces l_p et L_p ont les mêmes estimations en puissance, les estimations de leurs modules asymptotiques uniformes sont différentes. Milman a calculé ces estimations pour les espaces de fonctions $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ (voir [Mil] p. 116).
Si $X = L_1[0,1]$ alors $\overline{\rho}_X(t) = t$ et $\overline{\delta}_X(t) = \max(0, t-1)$.
Si $X = L_p[0,1]$ pour $1 < p < \infty$ alors on a les estimations suivantes.
Pour $1 < p < 2$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que :

$$C_p t^2 \leq \overline{\delta}_X(t) \leq (p-1)t^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p}t^p \leq \overline{\rho}_X(t) \leq \frac{2}{p}t^p \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Pour $2 < p < \infty$, il existe une constante $C'_p > 0$ telle que :

$$C_p t^p \leq \overline{\delta}_X(t) \leq \frac{1}{p}t^p \quad \text{et} \quad (p-1)t^2 \leq \overline{\rho}_X(t) \leq C'_p t^2 \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Pour $p = 2$ les espaces l_2 et $L_2[0,1]$ sont isométriques et ont donc les mêmes modules.

Dans le chapitre suivant on présente un résultat d'existence de suites bien séparées dans la sphère unité des espaces de Banach asymptotiquement uniformément convexe.

Chapitre 9

Suites séparées dans la sphère unité

L'objet de ce chapitre est de construire des suites séparées dans la sphère unité d'un espace de Banach. Rappelons qu'une suite (x_n) d'un espace vectoriel normé X est dite ε-séparée, pour un certain $\varepsilon > 0$ si $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$ pour tous $n \neq p$. Le théorème de Riesz implique que l'existence d'une suite ε-séparée dans S_X, pour un certain $\varepsilon > 0$ (on peut même prendre $\varepsilon = 1$), est équivalente au fait que X est de dimension infinie.

9.1 Les résultats connus

Soit X un espace vectoriel normé de dimension infinie. On veut construire une suite mieux que 1-séparée dans la sphère unité. Une réponse générale à ce problème est donnée par un théorème d'Elton et Odell présenté dans le dernier chapitre du livre de Diestel [Die]. L'énoncé est le suivant :

Théorème 9.1 (Elton et Odell, 1981)**.** *Si X est un espace vectoriel normé de dimension infinie alors il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel S_X contient une suite $(1+\varepsilon)$-séparée.*

On peut alors dans certains cas quantifier le ε qui apparaît dans l'énoncé précédent. Comme rappelé dans [VanN], Kryczka et Prus ont montré dans [KP] que la sphère unité d'un espace de Banach de dimension infinie non réflexif contient une suite $4^{1/5}$-séparée. Van Neerven dans [VanN] quantifie le ε du théorème d'Elton et Odell dans les espaces uniformément convexes à l'aide du module de convexité usuel δ_X. En utilisant le théorème de Ramsey, il obtient le théorème de séparation suivant :

Théorème 9.2 (Van Neerven, 2005)**.** *La sphère unité d'un espace de Banach de dimension infinie uniformément convexe contient une suite $\left(1 + \frac{1}{2}\delta_X(\frac{2}{3})\right)$-séparée.*

Le but de la section suivante est d'obtenir un résultat analogue avec une séparation qui s'exprime en fonction du module asymptotique uniforme de convexité de l'espace.

9.2 Espace asymptotiquement uniformément convexe

Dans cette section on démontre le théorème de séparation 9.3 en lien direct avec le théorème de Van Neerven précédent. Le théorème 9.3 donne une réponse affirmative, pour la classe des espaces asymptotiquement uniformément convexes, à une question posée dans [Die] p. 254.

Théorème 9.3. *La sphère unité d'un espace de Banach X de dimension infinie contient une suite α-séparée, pour tout $\alpha < \big(1+\overline{\delta}_X(1)\big)$.*

Quand $\overline{\delta}_X(1) > 0$, ce qui est le cas si X est asymptotiquement uniformément convexe, on a quantifié le ε du théorème de Elton et Odell. On améliore alors le théorème de Van Neerven dans deux directions. La classe des espaces de Banach asymptotiquement uniformément convexes (qui contient l_1) est plus large que celle des espaces de Banach uniformément convexes. De plus comme vu dans la proposition 8.1, $\overline{\delta}_X(.)$ est une fonction croissante et on a pour tout $0 < t < 1$, $\delta_X(t) \leq \overline{\delta}_X(t)$. Ainsi :

$$1+\overline{\delta}_X(1) \geq 1+\frac{1}{2}\delta_X(\frac{2}{3}),$$

et le théorème 9.3 donne une séparation plus large que celle en terme du module de convexité usuel. Si $X = l_p$ avec $1 \leq p < \infty$ on a $1+\overline{\delta}_X(1) = 2^{1/p}$ et cette séparation est atteinte par les éléments de la base canonique.
Notre preuve est basée sur la définition du module asymptotique uniforme de convexité. On n'utilise pas le théorème de Ramsey. On montre en fait que pour toute suite strictement croissante (α_n) qui tend vers $1+\overline{\delta}_X(1)$ il existe une suite (x_n) dans S_X telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf\{\|x_p - x_q\|,\ p \neq q \text{ et } p,q \geq n\} \geq \alpha_n.$$

Démonstration. Soit (α_n) une suite strictement croissante qui tend vers $1+\overline{\delta}_X(1)$. On a $\alpha_1 < 1+\overline{\delta}_X(1)$. Soit $x_1 \in S_X$. On a par définition :

$$1+\overline{\delta}_X(1) \leq \sup_{\dim X/Z<\infty} \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq 1} \|x_1+z\|.$$

On peut remplacer $\|x_1+z\|$ ci dessus par $\|x_1-z\|$. A nouveau par définition, comme α_1 est strictement inférieur à $1+\overline{\delta}_X(1)$, il existe $Z_1 = Z_1(x_1,\alpha_1)$ un sous espace de codimension finie de X, qui dépend de x_1 et de α_1 tel que :

$$\alpha_1 \leq \inf_{z\in Z_1,\, \|z\|\geq 1} \|x_1 - z\|.$$

Dès lors, pour tout $z \in Z_1$ tel que $\|z\| = 1$ on a $\alpha_1 \leq \|x_1 - z\|$. Prenons donc $x_2 \in Z_1$ tel que $\|x_2\| = 1$. On construit x_3 à partir de x_2 et de α_2 avec le même procédé dans Z_1 car d'après la proposition 8.1 on a :

$$1+\overline{\delta}_{Z_1}(1) \geq 1+\overline{\delta}_X(1) > \alpha_2.$$

Comme avant, il existe un sous espace $Z_2 = Z_2(x_2, \alpha_2)$ de codimension finie dans Z_1 tel que pour tout $z \in Z_2$ vérifiant $\|z\| = 1$ on a $\|x_2 - z\| \geq \alpha_2$. Prenons donc $x_3 \in Z_2$ tel que $\|x_3\| = 1$. On a bien $\|x_2 - x_3\| \geq \alpha_2$ et aussi $\|x_1 - x_3\| \geq \alpha_1$ car $x_3 \in Z_2 \subset Z_1$. En itérant on construit une suite (x_n), dans la sphère unité de X, via une suite décroissante $\big(Z_n = Z_n(x_n, \alpha_n)\big)$ de sous espaces de codimension finie, telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\inf\{\|x_p - x_q\|,\, p \neq q \text{ et } p, q \geq n\} \geq \alpha_n.$$

$\square$

Chapitre 10

Continuité faible séquentielle des polynômes

10.1 Polynômes dans les espaces de Banach

Soient X et Y deux espaces de Banach. Un *polynôme* k-homogène $P : X \to Y$ est une application de la forme $P(x) = A(x, \dots, x)$ où $A : X \times \cdots \times X \to Y$ est une application k-linéaire et continue. En particulier, un polynôme 1-homogène n'est autre qu'un opérateur linéaire continu entre X et Y. Les polynômes k-homogènes ont une norme finie donnée par $\|P\| = \sup\{\|P(x)\|, x \in S_X\}$ où comme d'habitude S_X désigne la sphère unité de l'espace X. Un polynôme de degré p est une somme finie de polynômes k-homogènes avec $k \leq p$. Remarquons qu'avec cette définition on ne considère que des polynômes continus. On dit qu'un polynôme P est *faiblement séquentiellement continu* si P transforme les suites faiblement convergentes dans X en suites convergentes en norme dans Y. P est dit *compact* s'il envoie la boule unité fermée de X sur une partie relativement compacte de Y.

Dans ce chapitre on trouve des liens entre les modules asymptotiques uniformes des espaces X et Y et la continuité faible séquentielle des polynômes $P : X \to Y$ suivant leur degré.

10.2 Les résultats connus

Un résultat classique dans le domaine de la compacité des opérateurs linéaires continus entre les espaces de Banach est le théorème de Pitt (voir par exemple [FHHMPZ] p. 175). L'énoncé est le suivant :

Théorème 10.1 (Pitt). *Soient $1 \leq q < p < \infty$. Tout opérateur linéaire continu de l_p dans l_q ou de c_0 dans l_q est compact.*

Une preuve simple de ce théorème pour les opérateurs entre l_p et l_q a été donnée par Fabian et Zizler dans [FaZi] en utilisant le principe variationnel de Stegall.
Parmi toutes les généralisations de ce théorème à d'autres espaces de Banach, l'une très significative a été obtenue par Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman dans [JLPS]

en terme de modules asymptotiques. Milman dans [Mil] avait aussi prouvé une version de ce résultat.

Théorème 10.2 ([Mil], 1971, [JLPS], 2002)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach tels qu'il existe $0 < t < 1$ tel que*

$$\overline{\rho}_X(t)/\overline{\delta}_Y(t) < 1.$$

Alors tout opérateur linéaire continu de X dans Y est compact.

Parmi d'autres arguments, la preuve de ce résultat dans [JLPS] utilise aussi la minimisation d'une fonction de X dans $\mathbb{R}$. Nous faisons la preuve de ce théorème un peu plus loin dans le cas où les estimations des modules asymptotiques uniformes des espaces sont en puissance. La preuve du cas général peut être lue dans [JLPS] p. 717.

Une autre façon de généraliser le théorème de Pitt est de considérer d'autres types d'applications que les opérateurs linéaires. Nous nous intéressons à l'extension de ce résultat aux polynômes entre les espaces de Banach. Gonzalo et Jaramillo ont obtenu des résultats dans ce domaine en utilisant l'existence d'estimations l_p par dessus et par dessous pour les suites dans les espaces mis en jeu (voir [GoJa]).
Les preuves que nous présentons utilisent toutes des minimisations de fonctions à valeurs réelles, comme c'est le cas pour le théorème de Pitt dans [FaZi] et [JLPS]. Cette approche est différente de celle de [GoJa] et est rendue possible grâce à l'utilisation des modules asymptotiques uniformes.

Comme rappelé dans [GoJa], si X ne contient pas de copie de l_1, alors tout polynôme faiblement séquentiellement continu de X dans un autre espace de Banach Y est compact. Sous les hypothèses dans lesquelles nous allons travailler, l'espace de départ X ne contient pas de copie de l_1 (voir le lemme 10.4 ci-dessous). Ainsi il suffit de montrer la continuité séquentielle faible des polynômes pour obtenir leur compacité.

10.3 Le théorème de Pitt

On donne avant tout deux lemmes importants pour la suite. Le lemme 10.3 relie la convergence faible des suites vers 0 avec les modules asymptotiques uniformes de l'espace.

Lemme 10.3. *Soient $x \in S_X$ et (h_n) une suite dans X faiblement convergente vers 0. Alors :*

$$\overline{\delta}_X(\limsup_{n\to\infty} \|h_n\|) \leq \limsup_{n\to\infty} \|x + h_n\| - 1 \leq \overline{\rho}_X(\limsup_{n\to\infty} \|h_n\|).$$

Démonstration. L'important est d'obtenir des limites supérieures dans tous les termes des inégalités. On commence par celle de gauche.
Fixons $0 < \tau < 1$ et notons $l_\tau = \frac{1}{1+\tau} \limsup_{n\to\infty} \|h_n\|$. Fixons $x \in S_X$. Par définition de $\overline{\delta}_X$ il existe un sous espace de codimension finie $Z = Z(x, \tau) \subset X$ tel que pour tout $h \in Z$:

$$\|h\| \geq l_\tau \implies \|x + h\| - 1 \geq (1 - \tau)\overline{\delta}_X(l_\tau). \tag{10.1}$$

En écrivant (h_n^Z) la composante suivant Z de la suite (h_n) dans l'écriture $X = Z \oplus X_0$ pour un certain sous espace de dimension finie X_0, on a par convergence faible :

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h_n^Z\| = 0.$$

Dès lors, par définition de la limite supérieure :

$$\limsup_{n\to\infty} \|h_n\| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \|h_k\|,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un indice $k_n \geq n$ tel que : $\|h_{k_n}^Z\| \geq l_\tau$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{k_n}^Z \in Z$ et vérifie 10.1, d'où :

$$\begin{aligned} \|x + h_{k_n}\| - 1 &\geq \|x + h_{k_n}^Z\| - 1 - \|h_{k_n} - h_{k_n}^Z\| \\ &\geq (1-\tau)\overline{\delta}_X(l_\tau) - \|h_{k_n} - h_{k_n}^Z\|, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + h_{k_n}\| - 1 \geq (1-\tau)\overline{\delta}_X(l_\tau),$$

car $k_n \geq n$ tend vers l'infini avec n. La suite $(\|x + h_{k_n}\|)$ est une sous suite de la suite $(\|x + h_n\|)$ et la limite supérieure majore les limites de toutes les sous suites donc on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + h_n\| - 1 \geq (1-\tau)\overline{\delta}_X(l_\tau),$$

et on conclut en faisant tendre τ vers 0.
Pour l'inégalité de droite, on procède de la même façon. Soient $\tau > 0$ et $x \in S_X$. Notons $l_\tau = (1+\tau)\limsup_{n\to\infty\|h_n\|}$. Par définition de $\overline{\rho}_X$, il existe un sous espace de codimension finie $Z \subset X$ tel que pour tout $h \in Z$, si $\|h\| \leq l_\tau$ alors :

$$\|x + h\| - 1 \leq (1+\tau)\overline{\rho}_X(l_\tau).$$

Comme avant on a :

$$\limsup_{n\to\infty} \|h_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|h_n^Z\| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \|h_k^Z\|.$$

Ainsi il existe un indice $N_\tau \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\tau$, $h_n^Z \in Z$ et vérifie $\|h_n^Z\| \leq \sup_{k\geq N_\tau} \|h_k^Z\| \leq l_\tau$. D'où, pour $n \geq N_\tau$:

$$\begin{aligned} \|x + h_n\| - 1 &\leq \|x + h_n^Z\| - 1 + \|h_n - h_n^Z\| \\ &\leq (1+\tau)\overline{\rho}_X(l_\tau) + \|h_n - h_n^Z\|. \end{aligned}$$

On passe à la limite supérieure quand $n \to \infty$ et on fait tendre ensuite τ vers 0 pour conclure. $\square$

Comme précisé avant, le lemme 10.4 va permettre de travailler avec des suites faiblement convergentes pour obtenir des résultats de compacité pour les opérateurs et les polynômes.

Lemme 10.4. *Si X est un espace asymptotiquement uniformément lisse alors X ne contient pas de copie isomorphe de l_1. En particulier si $\overline{\rho}_X$ est en puissance p pour un certain $p > 1$ alors X ne contient pas de copie isomorphe de l_1.*

Démonstration. Supposons que X contient une copie isomorphe de l_1. Nous allons montrer qu'alors $\overline{\rho}_X(t) = t$. D'après un théorème de James (voir par exemple [LT1] p. 97) X contient des copies presque isométriques de l_1. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un isomorphisme linéaire $T_\varepsilon : l_1 \to T_\varepsilon(l_1) \subset X$ tel que, pour tous $x, y \in l_1$:

$$\|x - y\| \leq \|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)\| \leq (1 + \varepsilon)\|x - y\|.$$

D'après la proposition 8.1, on a $\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)} \leq \overline{\rho}_X$. Comparons maintenant $\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)}$ et $\overline{\rho}_{l_1}$. Fixons $x \in l_1$ tel que $\|x\| = 1$ et fixons $t > 0$. Par définition de $\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)}$, il existe un sous espace de codimension finie $Z(x, \varepsilon, t) \subset l_1$ (et alors $T_\varepsilon(Z(x, \varepsilon, t))$ est de codimension finie dans $T_\varepsilon(l_1)$) tel que, pour tout $y \in Y(x, \varepsilon, t)$ vérifiant $\|y\| \leq t$ (et alors $\|T_\varepsilon(y)\| \leq (1+\varepsilon)\|y\| \leq (1+\varepsilon)t$), on a (en utilisant le fait que $1 \leq \|T_\varepsilon(x)\| \leq (1 + \varepsilon)$) :

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &\leq \|T_\varepsilon(x) + T_\varepsilon(y)\| = \|T_\varepsilon(x)\| \left\| \frac{T_\varepsilon(x)}{\|T_\varepsilon(x)\|} + \frac{T_\varepsilon(y)}{\|T_\varepsilon(x)\|} \right\| \\
&\leq \|T_\varepsilon(x)\|(1 + \varepsilon) \inf_{\dim T_\varepsilon(l_1)/Z < \infty} \quad \sup_{z \in Z, \|z\| \leq (1+\varepsilon)t} \left\| \frac{T_\varepsilon(x)}{\|T_\varepsilon(x)\|} + z \right\| \\
&\leq \|T_\varepsilon(x)\|(1 + \varepsilon)\big(\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)}((1 + \varepsilon)t) + 1\big) \\
&\leq (1 + \varepsilon)^2\big(\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)}((1 + \varepsilon)t) + 1\big).
\end{aligned}$$

Ceci donne précisement :

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}_{l_1}(t) &\leq (1 + \varepsilon)^2\big(\overline{\rho}_{T_\varepsilon(l_1)}((1 + \varepsilon)t) + 1\big) - 1 \\
&\leq (1 + \varepsilon)^2\big(\overline{\rho}_X((1 + \varepsilon)t) + 1\big) - 1.
\end{aligned}$$

On fait tendre ε vers 0 pour conclure que, pour tout $t > 0$, $\overline{\rho}_{l_1}(t) = t \leq \overline{\rho}_X(t)$. Ainsi $\lim_{t\to 0} \overline{\rho}_X(t)/t \geq 1$ est n'est pas nulle, donc X n'est pas asymptotiquement uniformément lisse. □

Muni de ces lemmes, on commence par la version généralisée du théorème de Pitt en terme de modules asymptotiques uniformes. On adapte le résultat de [JLPS] en terme d'estimations en puissance pour les modules. Cette version est certes moins générale mais elle constitue le premier pas de la démonstration par récurrence du théorème 10.8 de ce chapitre.

Proposition 10.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie avec $\overline{\rho}_X$ en puissance p et $\overline{\delta}_Y$ en puissance q avec p et q tels que $1 \leq q < p < \infty$. Alors tout opérateur linéaire continu $T : X \to Y$ est faiblement séquentiellement continu.*

On a vu que les modules des espaces l_p sont en puissance p pour $1 \leq p < \infty$. Comme pour $X = c_0$ et pour tout $0 < t \leq 1$, $\overline{\rho}_X(t) = 0$, ce module est en puissance p pour tout

$1 \leq p < \infty$, on retrouve le théorème de Pitt usuel entre espace l_p et avec c_0.
On peut conclure aussi que l'opérateur T est compact en utilisant le lemme 10.4 et la remarque précédente qui lie la continuité faible séquentielle et la compacité quand l'espace de départ ne contient pas l_1. Passons à la preuve de la proposition 10.5. Elle est basée sur une minimisation simple de la fonction de X dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \|x\| - \|T(x)\|$ en utilisant la définition de la norme de l'opérateur T.

Démonstration. Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu de norme 1. Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Par définition de la norme de T, il existe $x_\varepsilon \in X$, tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$ et $1-\varepsilon^p \leq \|T(x_\varepsilon)\| \leq 1$. Considérons une suite (h_n) dans X qui converge faiblement vers 0. On peut supposer $\|h_n\| \leq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \|T(x_\varepsilon)\|\Big(\Big\|\frac{T(x_\varepsilon)}{\|T(x_\varepsilon)\|} + \frac{T(\varepsilon h_n)}{\|T(x_\varepsilon)\|}\Big\| - 1\Big) &= \|T(x_\varepsilon) + T(\varepsilon h_n)\| - \|T(x_\varepsilon)\| \\ &\leq \|T(x_\varepsilon) + T(\varepsilon h_n)\| - 1 + \varepsilon^p \\ &\leq \|x_\varepsilon + \varepsilon h_n\| - 1 + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Comme la suite $(T(h_n))$ est aussi faiblement convergente vers 0 dans Y, on peut appliquer le lemme 10.3 pour obtenir :

$$\|T(x_\varepsilon)\|\overline{\delta}_Y\big(\frac{\varepsilon}{\|T(x_\varepsilon)\|}\limsup_{n\to\infty}\|T(h_n)\|\big) \leq \overline{\rho}\big(\varepsilon \limsup_{n\to\infty}\|h_n\|\big) + \varepsilon^p.$$

Rappelons que $1 - \varepsilon^p \leq \|T(x_\varepsilon)\| \leq 1$. Ainsi en utilisant les estimations en puissance des modules (qui sont valables par définition sur l'intervalle $]0,1]$), il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ qui ne dépendent pas de ε telles que :

$$(1-\varepsilon^p)K_1\varepsilon^q \limsup_{n\to\infty}\|T(h_n)\|^q \leq K_2\varepsilon^p \limsup_{n\to\infty}\|h_n\|^p + \varepsilon^p.$$

Cela donne :

$$\limsup_{n\to\infty}\|T(h_n)\|^q \leq \frac{(\varepsilon^{p-q})K_2}{(1-\varepsilon^p)K_1}\limsup_{n\to\infty}\|h_n\|^p + \frac{\varepsilon^{p-q}}{(1-\varepsilon^p)K_1},$$

et on fait tendre ε vers 0 pour conclure que T est faiblement séquentiellement continu. □

10.4 Extension aux polynômes

Passons maintenant à la continuité faible séquentielle des polynômes suivant leur degré en liaison avec les estimations en puissance des modules asymptotiques uniformes. On commence par des polynômes partant d'un espace de Banach X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 10.6. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie avec $\overline{\rho}_X$ en puissance $p > 1$. Soit $P : X \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré n tel que $1 \leq n < p$. Alors P est faiblement séquentiellement continu.*

Pour la preuve de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 10.7. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie avec $\overline{\rho}_X$ en puissance $p \geq 1$. Soit (x_n) une suite dans X faiblement convergente vers 0. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in X$:*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\|^p - \|x\|^p \leq K \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^p.$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$ dans X. Pour clarifier on note $a = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$. On a :

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\|^p - \|x\|^p \\
= \quad & \limsup_{n\to\infty} \|x\|^p \Big(\Big\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{x_n}{\|x\|} \Big\|^p - 1 \Big) \\
\leq \quad & \|x\|^p \Big[\Big(\overline{\rho}_X \big(\frac{a}{\|x\|} \big) + 1 \Big)^p - 1 \Big] \text{ d'après le lemme 10.3,} \\
\leq \quad & \|x\|^p p \Big(\overline{\rho}_X \big(\frac{a}{\|x\|} \big) + 2 \Big)^{p-1} \overline{\rho}_X \big(\frac{a}{\|x\|} \big),
\end{aligned}$$

ceci en utilisant l'inégalité des accroissements finis $|u^p - 1| \leq p(u+1)^{p-1}|u-1|$ pour tout $u \geq 0$. Rappelons que, par définition, l'estimation en puissance de $\overline{\rho}_X(t)$ est valable pour $0 < t \leq 1$. On distingue alors deux cas.

Si $\frac{a}{\|x\|} < 1$, alors on utilise l'estimation en puissance p : $\overline{\rho}_X(t) \leq K t^p$ pour tout $0 < t < 1$ et le fait que $\overline{\rho}_X$ est croissante (d'après la proposition 8.1), et on obtient :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\|^p - \|x\|^p \quad & \leq \quad \|x\|^p p \big(\overline{\rho}_X(1) + 2 \big)^{p-1} K \frac{a^p}{\|x\|^p} \\
& = \quad \tilde{K} a^p,
\end{aligned}$$

avec $\tilde{K} = p\big(\overline{\rho}_X(1) + 2\big)^{p-1} K > 0$.

Si $\frac{a}{\|x\|} \geq 1$, on utilise le fait que $\overline{\rho}_X$ est une fonction lipschitzienne avec constante de Lipschitz au plus 1 (ceci toujours d'après la proposition 8.1), et on obtient :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\|^p - \|x\|^p \quad & \leq \quad \|x\|^p p \big(\frac{a}{\|x\|} + 2 \big)^{p-1} \frac{a}{\|x\|} \\
& = \quad p(a + 2\|x\|)^{p-1} a \\
& \leq \quad p 3^{p-1} a^p \text{ car ici } \|x\| \leq a.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas la preuve du lemme est terminée. □

Démonstration de la proposition 10.6 : On peut supposer que $P(0) = 0$. On procède par récurrence sur le degré du polynôme P. Fixons $1 \leq n < p$ dans $\mathbb{N}$. Si P est de degré 1, ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire continue sur X et donc P est bien faiblement séquentiellement continu. Supposons que tout polynôme de degré inférieur à $n-1$ est faiblement séquentiellement continu. Supposons que P est de degré n. On écrit $P(x) = \tilde{P}(x) + R(x)$ avec $\tilde{P}$ la partie n-homogène de P et R un polynôme de degré inférieur à

$n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, R est faiblement séquentiellement continu. On peut donc se limiter à la partie n-homogène $\tilde{P}$ de P. La fonction :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \|x\|^p - \tilde{P}(x), \end{array}$$

est continue et minorée car $\tilde{P}$ est de degré strictement inférieur à p. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que

$$\varphi(x_\varepsilon) \leq \inf_{x \in X} \varphi(x) + \varepsilon^p.$$

Considérons (h_k) une suite de X faiblement convergente vers 0. Par définition de x_ε, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{P}(x_\varepsilon + \varepsilon h_k) - \tilde{P}(x_\varepsilon) \leq \|x_\varepsilon + \varepsilon h_k\|^p - \|x_\varepsilon\|^p + \varepsilon^p.$$

On peut décomposer $\tilde{P}(x+h) = \tilde{P}(x) + Q(x,h) + \tilde{P}(h)$ avec $Q(x,.)$ de degré inférieur à $n-1$. Par hypothèse de récurrence, $Q(x,.)$ est faiblement séquentiellement continu. Le lemme 10.7 donne une constante $K > 0$ indépendante de ε telle que :

$$\limsup_{k \to \infty} \tilde{P}(\varepsilon h_k) \leq K\varepsilon^p.$$

Comme $\tilde{P}$ est n-homogène, on obtient :

$$\limsup_{k \to \infty} \tilde{P}(h_k) \leq K\varepsilon^{p-n},$$

qui tend vers 0 quand on fait tendre ε vers 0. Les mêmes arguments avec le polynôme $-P$ donnent l'égalité :

$$\limsup_{k \to \infty} |\tilde{P}(h_k)| = 0.$$

Donc $\tilde{P}$ (et par conséquent P) transforme les suites faiblement convergentes vers 0 en suites qui convergent vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Pour conclure que le polynôme P est faiblement séquentiellement continu, on reprend la décomposition écrite plus haut $P(x+y) = P(x) + Q(x,y) + P(y)$. Si $h_k \to h$ faiblement alors on écrit $P(h_k) - P(h) = P(h_k - h) + Q(h, h_k - h)$ ce qui nous ramène au cas précédent avec la suite $(h - h_k)$ qui tend faiblement vers 0. □

Passons maintenant au cas plus général des polynômes entre deux espaces de Banach de dimension infinie.

Théorème 10.8. *Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie avec $\overline{\rho}_X$ en puissance p et $\overline{\delta}_Y$ en puissance q vérifiant $1 \leq q < p < \infty$. Soit $P : X \to Y$ un polynôme de degré n tel que $1 \leq nq < p$. Alors P est faiblement séquentiellement continu.*

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq nq < p < \infty$. Soit $P : X \to Y$ un polynôme (continu). Comme avant on peut supposer que $P(0) = 0$ et on travaille par récurrence sur le degré de P. Si ce degré est 1 alors P est un opérateur linéaire continu entre X et Y et la conclusion vient de la proposition 10.5. Supposons que tout polynôme de degré k, avec $1 \leq k \leq n-1$, est faiblement séquentiellement continu. Supposons que P est de degré égal à n. Comme dans la preuve précédente, on peut se ramener aux suites (h_k) qui convergent faiblement vers 0 dans X et à un polynôme P n-homogène. De plus, on peut supposer $\|P\| = 1$. Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Par définition de la norme de P, il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$ et $1-\varepsilon^p \leq \|P(x_\varepsilon)\| \leq 1$. De plus, $P(x_\varepsilon+h) = P(x_\varepsilon)+Q(x_\varepsilon,h)+P(h)$ où $Q(x_\varepsilon, .)$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$, et donc faiblement séquentiellement continu d'après l'hypothèse de récurrence. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
& \|P(x_\varepsilon)\|\Big(\Big\|\frac{P(x_\varepsilon)}{\|P(x_\varepsilon)\|}+\frac{P(\varepsilon h_k)}{\|P(x_\varepsilon)\|}\Big\|\Big) - \|Q(x_\varepsilon, \varepsilon h_k)\| \\
= \ & \|P(x_\varepsilon)+P(\varepsilon h_k)\| - \|Q(x_\varepsilon, \varepsilon h_k)\| \\
\leq \ & \|P(x_\varepsilon)+Q(x_\varepsilon, \varepsilon h_k)+P(\varepsilon h_k)\| \\
= \ & \|P(x_\varepsilon+\varepsilon h_k)\| \\
\leq \ & \|x_\varepsilon+\varepsilon h_k\|^n.
\end{aligned}$$

On peut appliquer le lemme 10.3. En effet, $(P(\varepsilon h_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bien faiblement convergente vers 0 dans Y. Pour le voir, prenons y^* une forme linéaire continue sur Y. Le polynôme $y^* \circ P : X \to \mathbb{R}$ défini par $y^* \circ P(x) = y^*(P(x))$ satisfait les hypothèses de la proposition 10.6. Donc le lemme 10.3 donne :

$$\|P(x_\varepsilon)\|\Big[\overline{\delta}_Y\big(\frac{1}{\|P(x_\varepsilon)\|}\limsup_{k\to\infty}\|P(\varepsilon h_k)\|\big)+1\Big] \leq \Big[\overline{\rho}_X\big(\limsup_{k\to\infty}\|\varepsilon h_k\|\big)+1\Big]^n.$$

En utilisant les estimations en puissance des modules et le fait que $1-\varepsilon^p \leq \|P(x_\varepsilon)\| \leq 1$, on obtient deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ indépendantes de ε telles que :

$$(1-\varepsilon^p)\big[K_1\limsup_{k\to\infty}\|P(\varepsilon h_k)\|^q+1\big] \leq \big[K_2\varepsilon^p\limsup_{k\to\infty}\|h_k\|^p+1\big]^n.$$

Pour clarifier écrivons $K = K_2\limsup_{k\to\infty}\|h_k\|^p$. On a :

$$(1-\varepsilon^p)K_1\limsup_{k\to\infty}\|P(\varepsilon h_k)\|^q+1-\varepsilon^p \leq \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}K^{n-i}\varepsilon^{ip}+1.$$

$$\limsup_{k\to\infty}\|P(\varepsilon h_k)\|^q \leq \frac{1}{(1-\varepsilon^p)K_1}\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}K^{n-i}\varepsilon^{ip}+\frac{\varepsilon^p}{(1-\varepsilon^p)K_1}.$$

Rappelons que P est n-homogène, donc l'inégalité ci-dessus devient :

$$\limsup_{k\to\infty}\|\tilde{P}(h_k)\|^q \leq \frac{1}{(1-\varepsilon^p)K_1}\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}K^{n-i}\varepsilon^{ip-nq}+\frac{\varepsilon^{p-nq}}{(1-\varepsilon^p)K_1},$$

avec $ip-nq > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On fait alors tendre ε vers 0 pour obtenir que P transforme les suites faiblement convergentes vers 0 de X en suites qui convergent en norme vers 0 dans Y. On conclut comme avant qu'alors P est faiblement séquentiellement continu. $\square$

Chapitre 11

Différentiabilité d'ordre supérieur

Dans ce chapitre on continue l'étude des liens entre les polynômes dans les espaces de Banach et les modules asymptotiques uniformes.

11.1 Définitions

On rappelle la notion de lissité T^p introduite par Deville, Gonzalo et Jaramillo dans [DGJ]. Soient X un espace de Banach réel et $p \geq 1$ un nombre réel. On dit qu'une application à valeurs réelles $f : X \to \mathbb{R}$ a un *développement de Taylor à l'ordre* p au point $x \in X$, s'il existe un polynôme P de degré au plus $n = [p]$ (la partie entière de p) tel que :

$$|f(x+h) - f(x) - P(h)| = o(\|h\|^p) \qquad (\|h\| \to 0).$$

L'application f est dite *T^p-lisse* si elle admet un développement de Taylor à l'ordre p en tout point. Notre référence pour plus de détail sur ce sujet est [DGJ].

Une fonction à valeurs réelles définie sur X est appelée une *fonction bosse* si elle a un support non vide borné.

Un polynôme P sur X à valeurs réelles est appelé *polynôme séparateur* si $P(0) = 0$ et $P(x) \geq 1$ pour tout x dans la sphère unité de X. Comme montré par Deville dans [Dev], si X admet un polynôme séparateur alors X admet une fonction bosse de classe C^∞. Sous les hypothèses du théorème suivant (nous revenons sur la propriété de Radon-Nikodym dans la section qui suit), l'existence d'une fonction bosse T^p-lisse implique celle d'un polynôme séparateur (et donc d'une fonction bosse de classe C^∞).

Théorème 11.1 ([DGJ], 1999)**.** *Soient $1 < p < \infty$ et X un espace de Banach avec la propriété de Radon-Nikodym. On suppose de plus que X vérifie la propriété :*
"Pour tout $x \in X$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$ il existe un sous espace de codimension finie H_δ de X tel que pour tout $h \in H_\delta$ vérifiant $\|h\| = \delta$, on a : $\|x + h\| - \|x\| \geq C\|h\|^p$."
Si X admet une fonction bosse T^p-lisse alors X admet un polynôme séparateur.

Les modules asymptotiques uniformes apparaissent implicitement dans la propriété entre guillemets du résultat précédent. De plus la preuve de ce théorème dans [DGJ] utilise le principe variationnel de Stegall. Nous allons voir dans les sections qui suivent comment obtenir un résultat similaire dans les espaces de Banach qui ont un module asymptotique de convexité en puissance.

11.2 La Propriété des Points de Continuité

Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si pour tout ouvert non vide borné B de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert faible O de X, déterminé par une seule forme linéaire, tel que l'ensemble $B \cap O$ est non vide et de diamètre inférieur à ε.

Il existe une autre propriété des espaces de Banach un peu plus faible que la propriété de Radon-Nikodym : la propriété des points de continuité. Un espace de Banach X satisfait la propriété des points de continuité si et seulement si pour tout ouvert non vide borné B de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert faible O de X (non nécessairement déterminé par une seule forme linéaire) tel que l'ensemble $B \cap O$ est non vide et de diamètre inférieur à ε. Un lien avec le module asymptotique uniforme de convexité est donné dans la proposition suivante obtenue par Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman dans [JLPS] p. 719 :

Proposition 11.2 ([JLPS], 2002)**.** *Si $\overline{\delta}_X(t) > 0$ pour tout $0 < t \leq 1$ alors l'espace X satisfait la propriété des points de continuité.*

Girardi dans [Gi] a même montré que X vérifie la propriété des points de continuité si $\overline{\delta}_X(\frac{1}{2}) > 0$. L'auteur donne aussi un exemple d'espace de Banach séparable qui ne vérifie pas la propriété de Radon-Nikodym mais dont le module asymptotique uniforme de convexité est en puissance 3. Cet espace est donc asymptotiquement uniformément convexe et vérifie la propriété des points de continuité d'après la proposition précédente.

La propriété de Radon-Nikodym est utilisée dans la preuve du théorème 11.1 de [DGJ] pour appliquer le principe variationnel de Stegall. Ici nous utilisons un principe variationnel dû à Ghoussoub et Maurey qui s'applique dans les espaces de Banach séparables ayant la propriété des points de continuité. L'énoncé est le suivant tel qu'il apparaît dans le livre de Phelps [Phe] p. 89 :

Théorème 11.3 (Ghoussoub et Maurey, 1985)**.** *Soit X un espace de Banach séparable ayant la propriété des points de continuité. Soient C une partie non vide fermée et bornée de X, $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction minorée semicontinue inférieurement sur C et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une application g lipschitzienne de constante de Lipschitz au plus ε, qui est de plus faiblement continue, telle que $f + g$ atteint son minimum sur C.*

Muni de ce principe variationnel, qui est valable dans les espaces asymptotiquement uniformément convexes, on obtient dans la section suivante une autre version du théorème 11.1 ci-dessus.

11.3 Polynôme séparateur

Le théorème qui suit précise l'énoncé du théorème 11.1 en évitant l'écriture de la propriété entre guillemets et l'hypothèse avec la propriété de Radon-Nikodym. Il constitue encore un lien entre les modules asymptotiques uniformes et les polynômes dans les espaces de Banach.

Théorème 11.4. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie avec $\overline{\delta}_X$ en puissance $1 \leq p < \infty$. Si X admet une bosse T^p-lisse alors X admet un polynôme séparateur de degré inférieur à $[p]$.*

Démonstration. Soit $b : X \to \mathbb{R}$ une bosse T^p-lisse telle que $b(0) = 0$. Considérons $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $\varphi(x) = 1/b(x)^2$ si $b(x) \neq 0$ et $\varphi(x) = +\infty$ sinon. La fonction $\varphi - \|\,.\,\|$ est semicontinue inférieurement et minorée sur X. Comme X est asymptotiquement uniformément convexe, il vérifie la propriété des points de continuité et on peut appliquer le théorème 11.3. Il existe g une fonction faiblement continue telle que $\varphi - \|\,.\,\| + g$ atteint son minimum en un certain point $x \in X$. Ainsi, pour tout $h \in X$:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) \geq \|x+h\| - \|x\| + g(x) - g(x+h).$$

Comme $\varphi(0) = +\infty$, on a $\|x\| > 0$. Par définition de $\overline{\delta}_X$, il existe un sous espace de codimension finie $Z = Z(x)$ de X, tel que pour tout $h \in Z$:

$$\begin{aligned} \|x+h\| - \|x\| &= \|x\|\Big(\Big\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{h}{\|x\|}\Big\| - 1\Big) \\ &\geq \|x\|\frac{1}{1+\|x\|}\overline{\delta}_X\big(\frac{\|h\|}{\|x\|}\big) \\ &\geq \frac{K\|x\|^{p-1}}{1+\|x\|}\|h\|^p \text{ quand } \|h\| \leq \|x\|. \end{aligned}$$

De plus, comme φ est T^p-lisse, il existe un polynôme P de degré inférieur à $[p]$ tel que $P(0) = 0$ et il existe une fonction R satisfaisant $\lim_{h\to 0} R(h)/\|h\|^p = 0$, tels que :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = P(h) + R(h).$$

Donc on obtient, pour tout $h \in Z$ tel que $\|h\| \leq \|x\|$:

$$P(h) \geq C(x)\|h\|^p - R(h) + g(x) - g(x+h),$$

où $C(x) = \frac{K\|x\|^{p-1}}{1+\|x\|} > 0$. Comme $\lim_{h\to 0} R(h)/\|h\|^p = 0$, il existe $0 < M_x \leq \|x\|$ tel que si $\|h\| = M_x$, alors $-R(h) \geq -\frac{C(x)}{3}\|h\|^p$. Par continuité faible de g, il existe un nombre fini de formes linéaires continues sur X $f_1^*, \ldots, f_n^*$ telles que si $h \in Ker(f_1^*) \cap \cdots \cap Ker(f_n^*)$, alors $g(x) - g(x+h) \geq -\frac{C(x)}{3}M_x^p$.

On déduit de tout ceci que si $h \in Z \cap Ker(f_1^*) \cap \cdots \cap Ker(f_n^*)$ et si $\|h\| = M_x$, alors

$$P(h) \geq \frac{2C(x)}{3}\|h\|^p.$$

On conclut alors comme dans [DGJ] que le polynôme Q défini par

$$Q(h) = \frac{3}{2C(x)M_x^p}P(M_x h)$$

est un polynôme séparateur de degré inférieur à $[p]$ sur le sous espace de codimension finie $Z \cap Ker(f_1^*) \cap \cdots \cap Ker(f_n^*)$. Alors il est facile d'obtenir (voir [DGJ]), que cela implique l'existence d'un polynôme séparateur de degré inférieur à $[p]$ sur X tout entier. $\square$

Si pour $x \in S_X$ on considère :

$$\overline{\delta}_X(t,x) = \sup_{\dim X/Z<\infty} \quad \inf_{z\in Z,\, \|z\|\geq t} \|x+z\| - 1.$$

Alors la preuve du théorème 11.4 montre en fait qu'il est suffisant de supposer qu'il existe $p > 0$ tel que pour tout $x \in S_X$ il existe une constante $C(x) > 0$ qui dépend de x telle que $\overline{\delta}_X(t,x) \geq C(x)t^p$ pour tout $0 < t < 1$ avec un plus l'hypothèse que X vérifie la propriété des points de continuité.

Bibliographie

[Ball] K. Ball, *Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps*, Geometric and Functional Analysis, **2** (1992), 137–172.

[BL] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Volume I*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 48, 2000.

[BrSh] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, *Stability of the Lipschitz extension property under metric transform*, Geometric and Functional Analysis, **12** (2002), 73–79.

[Cha] F. Chaatit, *On uniform homeomorphisms of the unit spheres of certain Banach lattices*, Pacific J. Math. **168** (1995), 11–31.

[Delp] S. Delpech, *Modulus of continuity of the Mazur map between unit balls of Orlicz spaces and approximation by Hölder mappings*, à paraître dans Illinois Journal of Mathematics.

[Dev] R. Deville, *Geometrical implications of the existence of very smooth bump functions in Banach spaces*, Israel J. of Math. (1) **67** (1989), 1–22.

[DGJ] R. Deville, R. Gonzalo, J. A. Jaramillo, *Renormings of $L_p(L_q)$*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. (1) **126** (1999), 155–169.

[Die] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Grad. Texts in Math. vol. 92, Springer, New York, 1984.

[FHHMPZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant and V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* CMS Books in Mathematics, vol. 8, 2001.

[FaZi] M. Fabian and V. Zizler, *A "nonlinear" proof of Pitt's compactness theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. (12) **131** (2003), 3693–3694.

[FiPi] T. Figiel et G. Pisier, *Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses,* C. R. Acad. Sci. Paris Série A 279 (1974), 611–614.

[Gi] M. Girardi, *The dual of the James tree space is asymptotically uniformly convex*, Stud. Math. (2) **147** (2001) 119–130.

[GoJa] R. Gonzalo and J. A. Jaramillo, *Compact polynomials between Banach spaces*, Proc. R. Ir. Acad., Sect. A (2) **95** (1995), 213–226.

[Her] F. L. Hernandez and C. Ruiz, *Universal classes of Orlicz function spaces*, Pacific J. Math. **155** (1992), 87–98.

[JLPS] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss and G. Schechtman, *Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **84** (2002), 711–746.

[Kal] N. J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math. **55** (2004), no. 2, 171–217.

[Kac] M. S. Kaczmarz, *The homeomorphy of certain spaces*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A **4/8** (1933), 145–148.

[Kir] M. D. Kirszbraun, *Über die zusammenziehenden und Lipschitzchen Transformationen*, Fund. Math **22** (1934), 77–108.

[KR] M. A. Krasnosel'skii and Y. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff LTD.-Groningen-the Nedtherlands, 1961.

[KP] A. Kryczka et S. Prus, *Separated sequences in nonreflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 155–163.

[LaRa] G. Lancien and B. Randrianantoanina, *On the extension of Hölder maps with values in spaces of continuous functions*, preprint.

[LT1] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, Vol. 1, Sequence Spaces*, Ergebnisse **92** Springer-Verlag (1977).

[LT2] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, Vol. 2, Function spaces*, Ergebnisse **97** Springer-Verlag (1979).

[Mal] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. **234** (1985).

[Mau] B. Maurey, *Un théorème de prolongement*, C.R. Acad. Sci. Paris **279** (1974), 329–332.

[Maz] S. Mazur, *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels*, Studia Math. **1** (1929), 83–85.

[Mil] V. D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces. II. Geometry of the unit ball*, Uspekhi mat. Nauk **26** (1971), no. 6 (162), 73–149 (Russian), Russian Math. Surveys **26** (1971) no. 6, 79–163 (English).

[Min] G. J. Minty, *On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder continuous, and monotone functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 334–339.

[N] A. Naor, *A phase transition phenomenon between the isometric and isomorphic extension problems for Hölder functions between L_p spaces*, Mathematika **48** (2001), 253–271.

[NPSS] A. Naor, Y. Peres, O. Schramm and S. Sheffield, *Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov hyperbolic metric spaces*, preprint.

[OdSc] E. Odell and T. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math. **173** (1994), 259–281.

[Phe] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. no. 1364, 1989.

[Pi] G. Pisier, *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. **20** (1975), 326–350.

[Ray] Y. Raynaud, *Espaces de Banach superstables, distances stables et homéomorphismes uniformes*, Israel J. Math. **44** (1983), 33–52.

[Tsa1] I. G. Tsaŕkov, *Smoothing of uniformly continuous mappings in L_p spaces*, Mat. Zametki **54** (1993), 123–140 (in Russian), English translation : Math. Notes **54** (1993), 957–967.

[Tsa2] I. G. Tsaŕkov, *Smoothing of abstract functions*, Russian Acad. Sci. Sb. Math. **83** (1995), 405–430.

[VanN] J. M. A. M. van Neerven *Separated sequences in uniformly convex Banach spaces*, Colloq. Math. **102** (2005), 147–153.

[WW] J. H. Wells and L. R. Williams, *Embeddings and Extensions in Analysis*, Ergebnisse **84** Springer-Verlag (1975).

[We] A. Weston, *On the uniform classification of $L_p(\mu)$ spaces*, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ. **29**, 231–237, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1992.