Quelques résultats autour des D-modules p-adiques

Christine Huyghe

Quelques résultats autour des D-modules p-adiques

C. Noot-Huyghe

21 octobre 2008

Table des matières

Introduction

Soit p un nombre premier.

Pour étudier la géométrie des schémas sur un corps fini k de caractéristique $p > 0$, on dispose de différentes théories cohomologiques, qui se rangent essentiellement en deux catégories : la cohomologie étale l-adique pour $l \neq p$, qui doit être vue comme un analogue de la cohomologie singulière, la cohomologie étale p-adique, et différentes théories p-adiques : historiquement, la cohomologie cristalline construite par Berthelot, la cohomologie de Monsky-Washnitzer, la cohomologie rigide de Berthelot. Ces trois dernières théories doivent être vues comme un analogue de la cohomologie de de Rham des variétés complexes.

La cohomologie rigide présente l'avantage de permettre des coefficients, c'est-à-dire, certains modules à connexion, possédant des conditions de convergence à l'infini de type "exponentiel" que l'on appelle surconvergentes. D'autre part, de même que dans le cas complexe, ces modules à connexion ne forment pas une catégorie stable par les opérations cohomologiques habituelles. Pour répondre à cette question de la stabilité par les 6 opérations de Grothendieck, Berthelot construit des faisceaux d'opérateurs différentiels arithmétiques attachés à un schéma sur un corps fini. La question de la stabilité par les 6 opérations a récemment été résolue par Caro qui a construit une catégorie stable de coefficients, munis d'un Frobenius, appelés surholonomes dans toute une série d'articles ([Car06b], [Car04], [Car06a] ...). Le point d'orgue, qui achève la démonstration de la stabilité, est son article avec Tsuzuki ([CT08]).

Sans retracer ici l'historique des résultats de finitude en cohomologie p-adique, dus à différents auteurs : Berthelot ([Ber97]), Mebkhout ([Meb97]) et Christol-Mebkhout, et, pour le cas singulier, Grosse-Klöne ([GK02]), Tsuzuki ([Tsu03]), Tsuzuki-Chiarellotto ([CT03]), mentionnons la démonstration de la conjecture de Crew, encore appelée théorème de monodromie p-adique, obtenu simultanément par André ([And02]), Kedlaya ([Ked04]) et Mebkhout ([Meb02]) qui affirme que tout module à connexion sur l'anneau de Robba, qui est muni d'un Frobenius, est quasi-unipotent, c'est-à-dire, est extension successive de l'isocristal trivial, après extension finie séparable de $k((T))$. Un autre résultat essentiel qui intervient par exemple dans l'article de Caro-Tsuzuki, est le théorème de réduction semi-stable de Kedlaya, qui montre qu'un F-isocristal surconvergent provient d'un log-F-isocristal convergent, après une altération éventuelle du schéma de départ ([Ked07], [Ked08a], [Ked08c], [Ked08b]).

Décrivons maintenant plus précisément notre travail dans ce cadre.

Dans la suite de ce texte, on désigne par V un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0,p)$, $\mathcal{X}$ un schéma lisse sur $\operatorname{spf} V$. Les faisceaux d'opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot sur $\mathcal{X}$ sont notés $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ à pôles surconvergents le long de Z. On sera parfois amené à considérer un faisceau non tensorisé par $\mathbf{Q}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}}$, ou encore $\mathcal{D}^\dagger({}^\dagger Z)$. Les faisceaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$) sont cohérents ([Ber96]) et s'obtiennnent comme limite inductive de faisceaux d'algèbres p-adiquement complètes. Les théorèmes de cohérence s'appuient sur des énoncés de platitude qui ne sont pas établis dans le cas non tensorisé par $\mathbf{Q}$.

Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$ intervient dans la construction de la transformation de Fourier dans le contexte des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques ([NH04]). Il est naturellement attaché au complémentaire U, de Z dans X. D'autre part, c'est un outil essentiel dans la définition des catégories de coefficients stables construites par Caro. Dans la première partie de ce résumé, on détaille trois articles qui permettent de mieux comprendre la structure de ce faisceau. Ces résultats sont des résultats de base de la théorie.

Les théories de Berthelot ont leur pendant dans le cadre des log-schémas, particulièrement lorsque la log-structure est associée à un diviseur à croisements normaux. Les liens entre la cohomologie log-cristalline et la cohomologie rigide ont été étudiés par Le Stum-Trihan. La construction de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques dans le cadre logarithmique est effectuée dans la thèse de C. Montagnon. En particulier, Le Stum et Trihan construisent un F-isocristal surconvergent associé à un log-F-isocristal. Dans un article en commun avec F. Trihan, nous donnons une démonstration, dans le cas des courbes, de la finitude du $\mathcal{D}$-modules arithmétique associée à un log-F-

isocristal. Grâce à ce résultat et à un énoncé de réduction semi-stable pour les courbes, on retrouve un résultat de Caro sur l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur les courbes ([Car06b]).

Dans le cas complexe, la théorie des $\mathcal{D}$-modules a fourni de manière spectaculaire, une démonstration aux conjectures de Kazhdan-Lusztig. En tous cas, les $\mathcal{D}$-modules interviennent naturellement dans ce contexte pour fournir des représentations des algèbres de Lie des groupes de Lie complexes réductifs. Si l'on s'intéresse aux applications possibles de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, il est donc naturel de se demander dans quelle mesure ils interviennent dans la théorie des représentations des algèbres de Lie des groupes réductifs, à coefficients p-adiques. De ce point de vue, le théorème de base qui intervient dans le cas complexe, qui est un théorème d'acyclicité dû à Beilinson-Bernstein et Brylinski-Kashiwara est encore vrai dans le cadre arithmétique. C'est l'objet de la troisième et dernière partie de ce travail de synthèse.

1 Résultats de base pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques à coefficients surconvergents le long d'un diviseur

1.1 Un théorème d'acyclicité

Si $\mathcal{X}$ est un schéma projectif lisse, muni d'un diviseur ample Z, $\mathcal{U}$ l'ouvert affine complémentaire d'un diviseur relatif Z, le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients surconvergents le long de Z, est moralement attaché à $\mathcal{U}$ (ou plutôt à la fibre spéciale $U = \operatorname{spec} k \times \mathcal{U}$). En particulier, comme l'ouvert $\mathcal{U}$ est affine, on s'attend qu'il vérifie des conditions d'acyclicité classiques. Plus précisément, on montre dans [Huy98] l'énoncé suivant :

Théorème 1.1.1. *(i) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ module cohérent, alors $\forall k \geq 1$, $H^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$.*

(ii) *L'algèbre des sections globles* $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z))$ *est cohérente et le foncteur sections globales établit une équivalence de catégories entre la catégorie des* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$*-modules cohérents et des modules cohérents sur l'algèbre des sections globales.*

Même si l'énoncé est simple, le problème principal est que la construction du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ ne fait pas apparaître de propriétés d'affinité vis-à-vis de l'ouvert $\mathcal{U}$.

Il y a cependant plusieurs remarques à faire :

1- On peut contôler la cohomologie des coefficients des puissances des dérivations qui interviennent dans la définition du faisceau, grâce à l'appendice de [Huy95] et qui sont donnés localement par $\mathcal{B}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(f^{p^{m+1}}T - p)$ si f est une équation locale de Z. Sur l'espace projectif, le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}$ est engendré par ses sections globales à p-torsion près.

2- D'après la théorie des faisceaux cohérents sur les espaces projectifs, et grâce à des hypothèses de noetherianité de X, il suffit de contrôler la torsion des groupes $H^k(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)(-r))$ où r désigne le twist de Serre.

3- Le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est limite inductive de faisceaux complets $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(\infty)_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. Ces faisceaux complets sont obtenus comme complétés des faisceaux d'opérateurs différentiels de niveau m, qui sont munis comme usuellement d'une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels.

L'idée est alors la suivante : on ramifie la base et on introduit des coefficients $\mathcal{B}^{(m)}_{\pi_k}$ où $\pi_k^k = p$. On exploite alors la remarque [1] précédente pour construire une filtration $\mathcal{E}^{(m)}$ ad hoc du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$, qui aura les propriétés suivantes :

1- Les faisceaux $\mathcal{E}^{(m)}$ sont p-adiquement complets,

2- les faisceaux $\mathcal{E}^{(m)}$ sont obtenus comme complétés de faisceaux d'opérateurs différentiels, admettant une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels, dont le gradué associé est un quotient d'un puissance symétrique de niveau m du faisceau tangent, à coefficients dans une algèbre $\mathcal{B}_{\pi_k}^{(m)}$.

Ces propriétés, jointes aux propriétés cohomologiques des faisceaux $\mathcal{B}_{\pi_k}^{(m)}$, permettent de montrer le théorème, sur une base A infiniment ramifiée sur V, ce qui suffit car la cohomologie limite avec la limite inductive sur une base noetherienne et que A est fidèlement plat sur V.

1.2 Un théorème de comparaison

On reprend ici la situation précédente. Le problème est que le théorème précédent ne précise pas quelle est l'algèbre de sections globales du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$. On s'attend que la situation soit la suivante : supposons que $\mathcal{U}$ soit le spectre formel d'une V-algèbre complète topologiquement de type fini et qu'il existe une algèbre faiblement complète de type fini (limite inductive d'algèbres complètes) $A^{\dagger}$ telle que A est la complétée de $A^{\dagger}$. Mebkhout et Narvaez-Macarro construisent sur le schéma faiblement formel $U^{\dagger}$ associé à $A^{\dagger}$ un faisceau d'opérateurs différentiels faiblement complet $\mathcal{D}^{\dagger}_{U^{\dagger}}$. L'énoncé suivant est l'énoncé principal de [Huy03] et donne un théorème de comparaison entre les faisceaux considérés par Mebkhout-Narvaez-Macarro et Berthelot.

Théorème 1.2.1. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Gamma(U^{\dagger}, \mathcal{D}^{\dagger}_{U^{\dagger}}) \simeq \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)).$$

L'idée de la démonstration consiste à raffiner la construction précédente en contruisant une filtration du faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ par des faisceaux, dont on contrôle non seulement la cohomologie, mais aussi les sections globales.

L'un des points remarquables de la construction est l'utilisation d'un faisceau intermédiaire

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)(*Z),$$

à pôles surconvergents le long et Z et en même temps à pôles algébriques le long de Z. Ce faisceau est isomorphe à $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ après tensorisation par $\mathbf{Q}$ et, en réduction modulo l'uniformisante, au faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur l'ouvert complémentaire du diviseur (modulo l'uniformisante). C'est une des clés pour comparer la théorie de Berthelot et celle de Mebkhout-Narvaez-Macarro. Dans son article ([Car06a]) sur le dévissage des F-isocristaux surholonomes en F-isocristaux surconvergents, Caro reprend cette idée, car il a besoin de la fonctorialité du théorème de comparaison précédent. Plus récemment, cet énoncé intervient dans la démonstration du fait que la catégorie de coefficients construite par Caro coïncide avec la catégorie des modules holonomes munis d'un Frobenius construite par Berthelot. Cette égalité achèverait de montrer les conjectures de Berthelot. Caro montre cette égalité dans le cas des schémas formels projectifs lisses, en utilisant le théorème de comparaison ci-dessus.

1.3 Un théorème de finitude de dimension cohomologique

En théorie des $\mathcal{D}$-modules, il est nécessaire de travailler avec les catégories dérivées. En particulier, on travaille souvent (cf [Vir04]) avec la sous-catégorie des complexes parfaits et bornés, de la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}$-modules à cohomologie cohérente. Cette sous-catégorie est formée des complexes dont la cohomologie est localement libre de rang fini et bornée. Cette sous-catégorie coïncide avec sous catégorie des complexes bornés à cohomologie cohérente dans le cas où $\mathcal{D}$ est de dimension cohomologique finie. C'est donc un résultat important à savoir. Dans [NH07], on montre que $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}Z)$ est de dimension cohomologique finie, inférieure à $2N+1$ où N est la dimension de $\mathcal{X}$. On montre que la méthode s'applique à d'autres algèbres obtenues géométriquement à partir de ce faisceau, comme la complétée faible de l'algèbre de Weyl.

L'idée essentielle est d'utiliser le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)(*Z)$ précédent pour se ramener à la finitude de la dimension cohomologique du faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur l'ouvert complémentaire du diviseur (modulo l'uniformisante de V), qui résulte de la descente par Frobenius ([Ber00]).

2 Un résultat de finitude sur les courbes

Dans [Car06b], Caro montre que le $\mathcal{D}$-module arithmétique associé à un F-isocristal surconvergent sur une courbe lisse est holonome. Dans un travail en collaboration avec F. Trihan, nous donnons dans [NHT07] une autre démonstration de ce résultat. Ce résultat est un élément de la stabilité de la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger$-modules holonomes dans le cas des courbes.

Notre preuve repose sur des résultats précédents de F. Trihan concernant les F-isocristaux surconvergents unipotents. En particulier, il est démontré dans [MT04] que tout F-isocristal unipotent sur une courbe lisse provient d'un F-log cristal sur la compactification. Nous sommes alors en mesure de décrire le foncteur qui associe à tout F-log cristal un F-isocristal surconvergent sur le lieu où la log structure devient triviale (cf [ST01]) de manière explicite en terme de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Le fait que le prolongement logarithmique de l'isocristal soit muni d'un Frobenius implique automatiquement l'égalité entre la cohomologie de ces deux coefficients.

Pour généraliser ce résultat aux F-isocristaux surconvergents, nous utilisons le théorème de réduction semi-stable des F-isocristaux surconvergents dans le cas des courbes dû à Matsuda-Trihan ([MT04]). Notons que ce résultat repose essentiellement sur le théorème de monodromie p-adique démontré indépendamment par Kedlaya ([Ked04]), Mebkhout ([Meb02]), André ([And02]). Techniquement, nous généralisons au cas des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques cohérents à pôles surconvergents, un résultat antérieur de Tsuzuki pour les images directes et inverses d'isocristaux surconvergents par un morphisme génériquement étale. En particulier, on construit un morphisme trace dans ce contexte.

3 Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

On considère dans [NH09] les deux situations suivantes :

1- $S = \operatorname{spec} V$, le spectre de V, X est un S-schéma noetherien,

2- $\mathcal{S} = \operatorname{spf} V$, le spectre formel de V, $\mathcal{X}$ un schéma formel noetherien sur $\mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules (resp. un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules). Un $\mathcal{A}$-module sur le schéma X sera dit quasi-cohérent s'il est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que X (resp. $\mathcal{X}$) est $\mathcal{A}$-affine si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathcal{A}$-module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur X (resp. tout $\mathcal{A}$-module cohérent sur $\mathcal{X}$) et tout $n \geq 1$ on a les égalités $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ (resp. $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$).

(ii) Le foncteur Γ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{A}$-modules quasi-cohérents (resp. des $\mathcal{A}$-modules cohérents) et la catégorie des $\Gamma(X, \mathcal{A})$-modules (resp. des $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{A})$-modules de type fini).

Un énoncé important de la théorie des groupes est le théorème de Beilinson-Bernstein : soit G un groupe semi-simple sur $\mathbf{C}$, X la variété de drapeaux de G, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$, alors X est $\mathcal{D}_X$-affine. On se propose de donner ici un analogue arithmétique de cet énoncé, dans la situation qui suit. Soit G un groupe semi-simple sur S, ρ la demi-somme des racines positives de G, P un sous-groupe parabolique de G, $X = G/P$, qu'on suppose défini sur S, $\mathcal{X}$ le schéma formel obtenu en complétant X le long de la fibre spéciale de S. Ce schéma est lisse et on peut s'intéresser au faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur $\mathcal{X}$ construit par Berthelot, que nous noterons $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. On montre alors que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-affine. Plus généralement, $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\lambda)$-affine pour tout poids

λ tel que $\lambda + \rho$ est dominant et régulier, le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\lambda)$ désignant le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\lambda)$.

En caractéristique 0, pour le faisceau $\mathcal{D}(\lambda)$ tel que $\lambda + \rho$ est régulier, le résultat est démontré indépendamment par Beilinson-Bernstein ([BB81]) et par Brylinski-Kashiwara ([BK80]) et joue un rôle essentiel dans la démonstration de la conjecture de multiplicité de Kazhdan-Lusztig ([KL79]).

En caractéristique $p > 0$, Haastert a montré que cet énoncé d'affinité était vérifié pour les espaces projectifs, ainsi que pour la variété de drapeaux de SL_3 ([Haa87]). En revanche, Kashiwara-Lauritzen ont donné un contre-exemple à cet énoncé, pour le faisceau usuel $\mathcal{D}$ ([KL02]) et pour la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 d'un espace de dimension 5. Enfin, Bezrukavnikov, Mirkovic, Rumynin ont montré (3.2 de [BMR04]) un analogue de ce résultat d'affinité en passant à la catégorie dérivée bornée des $\mathcal{D}^{(0)}$-modules cohérents sur X (i.e. les opérateurs différentiels sans puissances divisées) et sous la condition que p soit strictement plus grand que le nombre de Coxeter de G. Ce résultat a été précisé par différents auteurs dont M. Kaneda (par exemple dans [Kan04]), où il explique aussi que le théorème de Kashiwara pour les immersions fermées n'est pas vrai en car. $p > 0$ pour l'anneau $\mathcal{D}^{(0)}$.

En caractéristique mixte, le résultat a été montré pour les espaces projectifs ([Huy97]). Dans ce cas, on utilise de façon cruciale le fait que le faisceau tangent est très ample, ce qui caractérise l'espace projectif. Le point clé pour les variétés de drapeaux est que la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents est engendrée par les modules induits (i.e. du type $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module cohérent). On utilise cette propriété pour montrer que si le résultat de $\mathcal{D}$-affinité est vrai algébriquement, pour le faisceau $\mathcal{D}_{X_K}$, alors il est vrai pour le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ sur le schéma formel $\mathcal{X}$.

Nous n'abordons pas ici l'aspect localisation de $Lie(G)$-modules (ou plutôt des modules sur la complétion faible de $Lie(G)$), qui est bien entendu sous-jacent et fera l'objet d'un article ultérieur.

4 Projet de recherche

Les résultats récents rappelés dans l'introduction permettent d'envisager différentes applications de la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Par exemple, certaines conjectures de M. Gros seront peut-être prochainement abordables.

4.1 Localisation de G-modules à coefficients p-adiques

Ce travail est en cours de rédaction et constitue la suite du paragraphe précédent. On y précise les sections globales du faisceau des opérateurs différentiels sur les variétés de drapeaux. Comme attendu, ces sections globales sont obtenues en complétant faiblement l'algèbre enveloppante de l'algèbre $Lie(G)$.

Du coup, on peut introduire des modules de Verma p-adiques. Dans le cas complexe, Brylinski et Kashiwara ont montré que ces modules de Verma correspondent aux duaux, au sens des $\mathcal{D}$-modules, des faisceaux de cohomologie à support dans les variétés de Schubert de la variété drapeaux (i.e. les compactifiées des cellules de Schubert) (cf [BK80]). La situation géométrique conduisant à ce résultat a été étudiée par Kempf ([Kem78]) et est identique dans notre cas. Il est donc naturel de penser que l'analogue p-adique de cette propriété est vraie. Techniquement, il nous faut introduire (suivant les idées de Kempf) un complexe de Cousin surconvergent pour les faisceaux abéliens sur un tube de la fibre générique de $\mathcal{X}$.

A plus long terme, nous espérons que ces techniques permettent d'aborder des questions autour de la correspondance de Springer p-adique, formulée par M. Gros dans [Gro04]. La correspondance de Springer ([Spr76]) permet de décrire les représentations du groupe de Weyl d'un groupe algébrique semi-simple sur un corps algébriquement clos de car. $p > 0$, à partir de l'action du groupe de Weyl sur la cohomologie étale de plus haut degré de la variété de drapeaux de G à coefficients dans $\mathbf{Q}_l$ pour $l \neq p$. On peut procéder de la même façon avec la cohomologie rigide. Suivant Kashiwara-

Hotta ([HK84]) qui traitent le cas complexe, la correspondance de Springer pourrait être montrée en utilisant les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques et en particulier la transformation de Fourier ([NH04]).

4.2 Théories cohomologiques p-adiques équivariantes

Disposer de telles théories est utile pour étudier la cohomologie des variétés homogènes, comme les variétés de drapeaux. Dans [GK07], Grosse-Klöne étudie la cohomologie cristalline équivariante sous l'action d'un groupe fini. Dans nos exemples, il faudrait considérer le cas de l'action d'un groupe algébrique semi-simple G sur la cohomologie rigide d'un espace homogène sous l'action G, d'abord en supposant que l'action du groupe se relève sur V, ou en utilisant une nouvelle construction fonctorielle (et sans relèvements) de la cohomologie rigide due à B. Le Stum.

Parallèlement, il faudrait étudier des catégories de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques équivariants, en supposant d'abord que l'action du groupe se relève sur V.

Références

[And02] Yves André. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :285–317, 2002.

[BB81] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathcal{G}$-modules. *Comptes-rendus Acad. Sc.*, 292, p. 15–18, 1981.

[Ber96] P. Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^{e} série, t. 29, p.185–272, 1996.

[Ber97] P. Berthelot. Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide. *Invent. Math*, 128, p. 329–377, 1997.

[Ber00] P. Berthelot. D-modules arithmétiques II descente par Frobenius. *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 81, p. 1–135, 2000.

[BK80] Jean-Luc Brylinski and Masaki Kashiwara. Démonstration de la conjecture de Kazhdan-Lusztig sur les modules de Verma. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 291(6) :373–376, 1980.

[BMR04] Roman Bezrukavnikov, Ivan Mirkovic, and Dmitriy Rumynin. Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. *arXiv :math/0205144v8*, 2004.

[Car04] Daniel Caro. Cohérence différentielle des F-isocristaux unités. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(2) :145–150, 2004.

[Car06a] D. Caro. Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents. *Invent. Math.*, 166(2) :397–456, 2006.

[Car06b] Daniel Caro. Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes. *Compos. Math.*, 142(1) :169–206, 2006.

[CT03] Bruno Chiarellotto and Nobuo Tsuzuki. Cohomological descent of rigid cohomology for étale coverings. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :63–215, 2003.

[CT08] Daniel Caro and Nobuo Tsuzuki. Surholonomie des f-isocristaux surconvergents. *preprint*, pages 1–42, 2008.

[GK02] Elmar Grosse-Klönne. Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis. *Duke Math. J.*, 113(1) :57–91, 2002.

[GK07] Elmar Grosse-Klönne. Equivariant crystalline cohomology and base change. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(5) :1249–1253 (electronic), 2007.

[Gro04] Michel Gros. Sur le $\mathcal{D}$-module associé au complexe des cycles proches et ses variantes p-adiques. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 112 :77–95, 2004.

[Haa87] B. Haastert. *Über Differentialoperatoren und D-Moduln in positiver Charakteristik*. *Manuscripta Mathematica*, 58, p. 385–415, 1987.

[HK84] R. Hotta and M. Kashiwara. The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra. *Invent. Math.*, 75(2) :327–358, 1984.

[Huy95] C. Huyghe. *Théorèmes d'acyclicité pour les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-modules sur l'espace projectif.* *Comptes-rendus Acad. Sc.*, **t. 321**, Série I, p. 453–455, 1995.

[Huy97] C. Huyghe. $\mathcal{D}^{\dagger}$-affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot. *Compositio Mathematica*, 108, No. 3, p. 277–318, 1997.

[Huy98] C. Huyghe. *$D^{\dagger}$-affinité des schémas projectifs. Ann. Inst. Fourier*, **t. 48**, fascicule 4, p. 913–956, 1998.

[Huy03] C. Huyghe. *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narvaez-Macarro. Journal of Algebraic Geometry*, 12, No. 1, p. 147–199, 2003.

[Kan04] Masaharu Kaneda. On Kashiwara's equivalence in positive characteristic. *Manuscripta Math.*, 114(4) :457–468, 2004.

[Ked04] Kiran S. Kedlaya. A p-adic local monodromy theorem. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :93–184, 2004.

[Ked07] Kiran S. Kedlaya. Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. I. Unipotence and logarithmic extensions. *Compos. Math.*, 143(5) :1164–1212, 2007.

[Ked08a] Kiran S. Kedlaya. Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. II. A valuation-theoretic approach. *Compos. Math.*, 144(3) :657–672, 2008.

[Ked08b] Kiran S. Kedlaya. Semistable reduction for overconvergent f-isocrystals, iv : Local semistable reduction at nonmonomial valuations. *preprint*, 2008.

[Ked08c] Kiran S. Kedlaya. Semistable reduction iii : Local semistable reduction at monomial valuations. *preprint*, 2008.

[Kem78] George Kempf. The Grothendieck-Cousin complex of an induced representation. *Adv. in Math.*, 29(3) :310–396, 1978.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2) :165–184, 1979.

[KL02] Masaki Kashiwara and Niels Lauritzen. Local cohomology and D-affinity in positive characteristic. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(12) :993–996, 2002.

[Meb97] Z. Mebkhout. Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière. *Amer. J. Math.*, 119(5) :1027–1081, 1997.

[Meb02] Z. Mebkhout. Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :319–351, 2002.

[MT04] Shigeki Matsuda and Fabien Trihan. Image directe supérieure et unipotence. *J. Reine Angew. Math.*, 569 :47–54, 2004.

[NH04] Christine Noot-Huyghe. Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 857–907. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[NH07] C. Noot-Huyghe. Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents. *J. Algebra*, 307(2), 2007.

[NH09] Christine Noot-Huyghe. Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. *A paraître au Bulletin de la SMF*, 26 pages, 2009.

[NHT07] Christine Noot-Huyghe and Fabien Trihan. Sur l'holonomie de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés à des F-isocristaux surconvergents sur des courbes lisses. *Ann. de la fac. des sciences de Toulouse*, XIV(3) :24p., 2007.

[Spr76] T. A. Springer. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. *Invent. Math.*, 36 :173–207, 1976.

[ST01] B. Le Stum and F. Trihan. Log-cristaux et surconvergence. *Ann. Inst. Fourier*, 51, p. 1189–1207, 2001.

[Tsu03] Nobuo Tsuzuki. Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings. *Invent. Math.*, 151(1) :101–133, 2003.

[Vir04] Anne Virrion. Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 1039–1112. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

5 Travaux d'encadrements d'étudiants

J'ai encadré 4 mémoires de maîtrise à Rennes en 2002 et 2003 sur les sujets :

(i) Représentations linéaires des groupes finis

(ii) Nombres p-adiques et application à la rationalité de la fonction ζ d'une variété algébrique

(iii) Algèbre locale et régularité

J'ai donné un cours de M2 en 2008, intitulé "Calcul de la fonction Zêta d'une courbe hyperelliptique en car. $p > 0$ d'après Kedlaya".

Christine Noot-Huyghe
IRMA
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex FRANCE
mél huyghe@math.u-strasbg.fr, http ://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe