



Schémas de subdivision, analyses multirésolutions non-linéaires. Applications

Karine Dadourian

► To cite this version:

Karine Dadourian. Schémas de subdivision, analyses multirésolutions non-linéaires. Applications. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2008. Français. NNT: . tel-00326894

HAL Id: tel-00326894

<https://theses.hal.science/tel-00326894>

Submitted on 6 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
U.F.R. M.I.M.
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Mathématiques

par

Karine DADOURIAN

sous la direction du Pr. Jacques LIANDRAT

Titre :

**SCHEMAS DE SUBDIVISION, ANALYSES
MULTIRESOLUTIONS NON-LINEAIRES.
APPLICATIONS.**

JURY

M. Sergio AMAT	Université Polytechnique de Cartagène (Espagne)	<i>Examineur</i>
Mme Rosa DONAT	Université de Valence (Espagne)	<i>Rapporteur</i>
M. Christian GOUT	Université de Valenciennes	<i>Rapporteur</i>
M. Jacques LIANDRAT	Ecole Centrale Marseille	<i>Directeur</i>
M. Peter OSWALD	Université de Bremen (Allemagne)	<i>Examineur</i>
M. Bruno TORRESANI	Université de Provence	<i>Examineur</i>

UNIVERSITÉ DE PROVENCE
U.F.R. M.I.M.
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Mathématiques

par

Karine DADOURIAN

sous la direction du Pr. Jacques LIANDRAT

Titre :

**SCHEMAS DE SUBDIVISION, ANALYSES
MULTIRESOLUTIONS NON-LINEAIRES.
APPLICATIONS.**

JURY

M. Sergio AMAT	Université Polytechnique de Cartagène (Espagne)	<i>Examineur</i>
Mme Rosa DONAT	Université de Valence (Espagne)	<i>Rapporteur</i>
M. Christian GOUT	Université de Valenciennes	<i>Rapporteur</i>
M. Jacques LIANDRAT	Ecole Centrale Marseille	<i>Directeur</i>
M. Peter OSWALD	Université de Bremen (Allemagne)	<i>Examineur</i>
M. Bruno TORRESANI	Université de Provence	<i>Examineur</i>

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I

Schémas de Subdivision Linéaires

I.1	Introduction	9
I.2	Définitions et résultats généraux	9
I.2.1	Définitions	10
I.2.2	Convergence d'un schéma de subdivision	11
I.2.3	Une propriété de la fonction limite: Etude de la régularité	15
I.2.4	Autres propriétés classiques: Monotonie, Convexité, Ordre et Stabilité . .	18
I.2.5	Une propriété du schéma: La reproduction des polynômes	19
I.3	Premiers exemples classiques	20
I.3.1	Un exemple de construction de schémas sur $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ convergeants	20
I.3.2	Un premier exemple: les schémas B-splines	21
I.3.3	Un deuxième exemple: les schémas d'interpolation de Lagrange	23
I.3.4	Un troisième exemple: des schémas approximants inspirés de schémas in- terpolants	28
I.4	Techniques classiques d'étude de la convergence	30
I.4.1	Utilisation des séries de Fourier et du symbole du schéma	30
I.4.2	Utilisation des matrices de subdivision	34
I.5	Complément à une technique d'étude de la convergence et application	37
I.5.1	Comparaison avec un schéma de subdivision convergeant	37
I.5.2	Application à l'étude des schémas de Lagrange complètement décentrés ($l=1$)	42
I.5.3	Généralisation des méthodes à des schémas de Lagrange quelconques ($l \neq r$)	49
I.6	Conclusion	58

Chapitre II

Schémas de Subdivisions Non-linéaires

II.1	Introduction	63
II.2	Définitions et historique	63

II.2.1	Définitions	63
II.2.2	Quelques schémas présents dans la littérature	65
II.2.3	Quelques schémas dépendant de la position	66
II.3	Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$	67
II.3.1	Premiers résultats concernant les schémas non-linéaires inspirés des schémas linéaires	68
II.3.2	Etude d'un schéma s'écrivant comme une perturbation d'un schéma linéaire	69
II.4	Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$	76
II.4.1	Premier Exemple: le schéma WENO à 6 points (valeurs ponctuelles) . . .	76
II.4.2	Deuxième Exemple: la classe de schéma Power P	86
II.4.3	Troisième Exemple: un schéma approximant non-linéaire C^1	93
II.4.4	Quatrième Exemple: un schéma pour préserver la courbure	101
II.5	Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	111
II.5.1	Résultats de convergence dans le cas général	111
II.5.2	Construction d'un schéma $2d$ comme produit tensoriel de schémas $1d$: cas linéaire	112
II.5.3	Construction d'un schéma non-linéaire $2d$ comme produit tensoriel de schémas $1d$: cas non-linéaire	112
II.5.4	Une construction symétrique de S_{NL2d} : étude de la convergence	121
II.5.5	Stabilité des deux constructions	122
II.5.6	Exemples de schémas non-linéaires définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	123
II.6	Conclusion	124

Chapitre III

Analyses multirésolutions non-linéaires

III.1	Introduction	129
III.2	Analyse Multirésolution Généralisée	129
III.2.1	Définitions	130
III.2.2	Construction	132
III.2.3	Stabilité	134
III.3	Résultats de stabilité pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.	135
III.3.1	Résultat général	135
III.3.2	Cas d'une hypothèse de contraction (III.14) pour S_{NL}^L	137
III.4	Exemples d'analyses multirésolutions stables sur $l^\infty(\mathbb{Z})$	139
III.4.1	Un premier exemple: une analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire de M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05]	139

III.4.2 Un deuxième exemple: une analyse multirésolution associée à une classe de schéma non-linéaire définie en base 3	144
III.5 Expériences Numériques $1d$	147
III.5.1 Cadre des expériences $1d$	147
III.5.2 Expériences sur des grilles dyadiques	148
III.5.3 Expériences pour des courbes	152
III.5.4 Expériences pour des grilles triadiques	152
III.6 Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	154
III.6.1 Résultats théoriques	154
III.6.2 Applications	155
III.6.3 Exemples numériques $2d$	156
III.7 Conclusion	162

Chapitre IV

Couplage différences finies et schémas de subdivisions: premiers résultats

IV.1 Introduction	165
IV.2 Historique	165
IV.3 Construction de schémas différences finies couplés avec un schéma de subdivision linéaire	166
IV.3.1 Construction sur une grille uniforme	166
IV.3.2 Application à une grille non-uniforme adaptée	176
IV.4 Vers l'utilisation de schémas de subdivision non-linéaires	181
IV.5 Conclusion	183

Annexe A

Rappel sur les analyses multirésolutions de types ondelettes

A.0.1 Définition	190
A.0.2 Un premier exemple: l'analyse multirésolution orthogonale	193
A.0.3 Un deuxième exemple: l'analyse multirésolution biorthogonale	194
A.0.4 Un troisième exemple: l'analyse multirésolution interpolante	195
A.0.5 Extension à $L^2(\mathbb{R}^2)$	197

Annexe B

Résultats valables pour les schémas linéaires généralisables aux schémas non-linéaires

B.1 Définition de la convergence du schéma comme la convergence d'une suite de fonctions (proposition II.1)	200
---	-----

B.2	Condition suffisante de régularité C^k (proposition II.2)	201
-----	---	-----

Annexe C

Preuve de résultats du chapitre II

C.1	Preuve des propriétés de la moyenne POWERP (propriété II.2)	204
C.2	Preuve du lemme II.1	205
C.3	Preuve de la stabilité du schéma $S_{PPHAPPROX}$ (théorème II.11)	207

Annexe D

Preuve de résultats du chapitre III

D.1	Une propriété de la moyenne PPH	216
D.2	Preuve de la convergence du schéma $S_{PPHTRIA}$ (théorème III.3)	217
D.3	Preuve de la stabilité de l'analyse multirésolution du schéma $S_{PPHTRIA}$ (théorème III.4)	219

Annexe E

Un exemple de reconstruction

E.1	Expression de $\mathcal{R}_n^j$ sur (x_n^j, x_{n+1}^j)	226
E.2	Expression de $\mathcal{R}_n^j$ sur des points dyadiques de (x_n^j, x_{n+1}^j)	227

Bibliographie

Notations

Notations Générales

j	Echelle ou niveau
n	Indice de position
X^j	Grille de pas 2^{-j} : $X^j = \{x_n^j = 2^{-j}n, n \in \mathbb{Z}\}$
C_n^j	Intervalle $[x_n^j, x_{n+1}^j]$ de la grille X^j
ϕ	Fonction d'échelle
$d^k f$	Opérateur aux différences d'ordre l (équation I.13)
Π_k	Espace des polynômes de degré k
C^α	Espace de Hölder (définition I.4)
$B_{p,q}^\alpha$	Espace de Besov [Mey90]
δ	Opérateur linéaire sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ ($\delta f = a \star f$)

Notations Schémas de Subdivision

S	Schéma de subdivision (définition I.1)
S_{NL}	Schéma de subdivision non-linéaire
f^0 ou f	Points de contrôle ou points initiaux
$S^j(f)$ ou f^j	Schéma itéré j fois appliqué à une suite $f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$
$S^\infty(f)$ ou f^∞	Fonction limite de $S^j(f)$ quand $j \rightarrow +\infty$ pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ (définition I.3)
$a(\theta)$	Symbole du schéma de subdivision S (équation I.32)
$a^j(\theta)$	Symbole du schéma itéré S^j (proposition I.13)
$\delta_{n,0}$	Symbôle de Kronecker ($\delta_{n,0} = 0$ pour $n \neq 0$, $\delta_{0,0} = 1$)
ϕ	Fonction d'échelle d'un schéma de subdivision
	Fonction limite d'un schéma de subdivision associée aux données initiales $f^0 = (\delta_{n,0})_n$
$\rho(S)$	Rayon spectral d'un schéma de subdivision (équation I.15)
$\rho(S_{NL})$	Rayon spectral d'un schéma de subdivision non-linéaire [CDM03] (section II.3.1)
S_k	Schéma aux différences d'ordre k associé au schéma S (équation I.14)
ϕ_m	Fonction b-spline uniforme de degré m (équation I.21)
$p_{n,l,r}$	Polynôme de Lagrange interpolant $(x_{n+k}, f_{n+k})_{k=-l+1 \dots r}$
$S_{l,r}$	Schéma de Lagrange interpolant utilisant l points à gauche et r points à droite pour la prédiction du point milieu (définition I.13)
$P_{r,l}$	Produit des valeurs propres inconnues des matrices associées au schéma de Lagrange $S_{l,r}$

Notations Ondelettes

ϕ	Fonction d'échelle (équation A.1)
ψ	Ondelette (équation A.2)
$\tilde{\phi}$	Fonction d'échelle biorthogonale (équation A.10)
$\tilde{\psi}$	Ondelette biorthogonale (équation A.10)
$c_{j,n}$	Coefficients d'échelles (équation A.4)
$d_{j,n}$	Coefficients d'ondelettes (équation A.4)

Notations Analyse Multirésolution

$\mathcal{F}$	Espace fonctionnel
V^J	Espace discret
V_j	Espace continu
D_j^{j-1}	Opérateur de décimation (définition III.1)
P_{j-1}^j	Opérateur de prédiction (définition III.1)
d^j	Détails entre une approximation d'échelle j et une approximation d'échelle $j-1$ (définition ??)
$\mathcal{D}^j$	Opérateur de discrétisation (définition III.2)
$\mathcal{R}^j$	Opérateur de reconstruction (définition III.2)
$\mathcal{M}$	Transformée analyse multirésolution ($\mathcal{M}f^j = (f^j, d^{j+1}, \dots, d^j)$) (équation ??)
nnz	Nombre de détails non-nuls

Notations Différences finies

FD	Opérateur aux différences finies
NFD_p	Nouvel opérateur aux différences finies (proposition IV.1)
$\tilde{X}^j$	Grille adaptée à la grille X^j (section IV.3.2.a)
o_{fd}	Ordre de l'opérateur aux différences finies
o_{ss}	Ordre du schéma de subdivision
r	Degré de la dérivée qu'approche le schéma aux différences finies

Divers

$supp(a) = \{n \in \mathbb{Z}^s \text{ tel que } a_n \neq 0\}$	Support de $a \in l^1(\mathbb{Z}^s)$
$card(a)$	Nombre d'éléments de $supp(a)$ pour $a \in l^1(\mathbb{Z})$
$\bar{f}_n$	Valeurs moyennes locales $\bar{f}_n = \frac{1}{x_{n+1}-x_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$
$\rho(A)$	Rayon spectral de la matrice A
$sp(A)$	Spectre de la matrice A
$\binom{k}{i}$	Combinaison $\frac{k!}{(k-i)!i!}$
$[x]$	Partie entière de x
$f^{(k)}$	Dérivée k -ième de f
$sgn(x)$	Signe de x : $sgn(x) = 1$ si $x > 0$, -1 sinon
Ker	Noyau d'un opérateur linéaire
δ_0	Distribution de dirac
$\hat{f}$	Transformé de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$: $\hat{f}(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int f(t)e^{-itx}dt$
$\hat{a}$	Filtre associé à $a \in l^1(\mathbb{Z})$, $\hat{a}(w) = \sum_n a_n e^{-inw}$
$a \star b$	Produit de convolution
$tanh(x)$	Fonction tangente hyperbolique

Introduction générale

Ces travaux ont pour objet l'étude théorique et le développement de méthodes d'approximation multiéchelles non-linéaires. Les applications concernent la compression d'images, et d'une manière plus marginale, la construction d'opérateurs aux différences finies pour l'approximation d'opérateurs différentiels sur une grille adaptée.

Les schémas de subdivisions ($f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s) \mapsto S(f) \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$) ont été introduits pour la construction de courbes ou de surfaces. Quand on les itère ($f^j = S^j f$), on construit un algorithme multiéchelle, qui permet de définir une courbe ou une surface à partir de points initiaux, appelés aussi points de contrôle. Initialement, la notion a été introduite pour accélérer la construction de courbes splines [Cha74]. La courbe obtenue est alors définie aux points dyadiques.

Diverses propriétés sont intéressantes à étudier. D'abord, la convergence définie comme l'existence d'une fonction continue vers laquelle "converge" les itérés du schéma $S^j f$ et la régularité de cette fonction limite. On souhaite aussi contrôler des erreurs: la stabilité du schéma, pour contrôler des petites perturbations aux points initiaux, et l'ordre d'approximation, pour contrôler l'erreur pour des points initiaux provenant de l'échantillonnage d'une fonction.

La convergence implique l'existence d'une fonction d'échelle ϕ , définie comme la fonction limite du schéma appliqué aux points initiaux $(\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$ ($\delta_{n,0} = 0$ pour $n \neq 0$, $\delta_{0,0} = 1$). Pour les schémas linéaires, l'étude des propriétés se ramène à l'étude de la fonction d'échelle ϕ . Ainsi, diverses techniques ont été développées pour analyser la convergence et la régularité, certaines inspirées de la théorie des ondelettes où la fonction ϕ définit une analyse multirésolution [CDM91, Dyn92]. Tout comme le nombre de moments nuls d'une ondelette est un critère essentiel pour les propriétés de l'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, la reproduction de polynômes de degré donné est une condition importante liée à la régularité et à l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision. Parmi les schémas linéaires, deux grandes familles de schémas ont été développées: les schémas interpolants et les schémas approximants.

Pour les schémas interpolants, les valeurs f_{2n+1}^{j+1} vérifient $f_{2n+1}^{j+1} = f_n^j$. On est alors ramené pour construire f_{2n+1}^{j+1} à un problème d'interpolation. La reproduction de polynômes conduit à favoriser une interpolation polynômiale, en général de Lagrange. Les seuls résultats généraux connus, concernent les schémas de Lagrange centrés, c'est-à-dire ceux où l'interpolation de Lagrange utilise le même nombre de points à droite et à gauche du point à construire [DD89, Dau92].

Pour les schémas approximants, les premiers ont été définis à partir des coefficients de la relation d'échelle vérifiée par les fonctions B-splines. La fonction limite ϕ est alors la fonction B-spline correspondante. Connaissant ses propriétés, on peut en déduire les propriétés des schémas splines.

Chaque catégorie de schémas a ses avantages et ses inconvénients: les schémas approximaants splines ont une régularité optimale pour le nombre de coefficients qui interviennent mais un mauvais ordre d'approximation, tandis que les schémas de Lagrange présentent un ordre d'approximation optimal mais une mauvaise régularité.

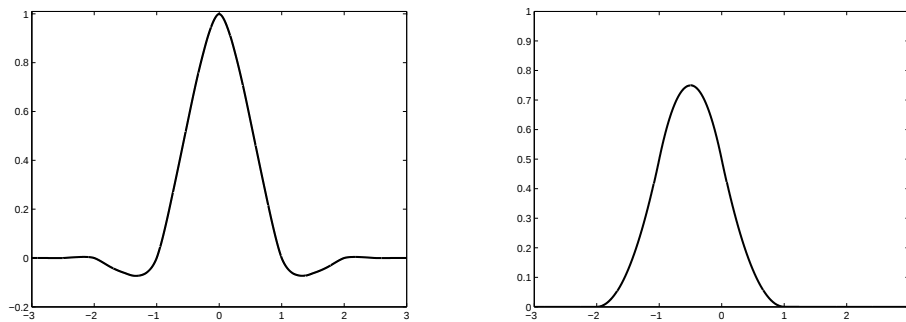
Plus récemment, des schémas "hybrides" ont été construits, utilisant une interpolation polynômiale et visant à améliorer la régularité des schémas interpolants [DFH05, CLY06].

Malgré les nombreux avantages que présentent les schémas linéaires, ils font apparaître d'importants défauts dont la présence d'oscillations dans les fonctions limites (phénomène de Gibbs) ou un ordre d'approximation trop faible (figure 1).

Un remède est d'utiliser des schémas non-linéaires.

On trouve différents schémas non-linéaires, qui répondent à différents problèmes. Ainsi, on trouve dans la littérature des schémas permettant de préserver des propriétés géométriques [KD98, FM98, MDL05], de reproduire des fonctions particulières [MeHW01, JSD03, BCR07b], de travailler sur des grilles non-uniformes [War95, DGS99, MM04] ou finalement, d'éliminer le phénomène de Gibbs [CDM03, ADLT06] (figure 2).

C'est dans cette dernière problématique que se placeront nos travaux: résoudre les problèmes d'oscillations avec pour objectif l'utilisation des schémas non-linéaires en traitement d'images.



(a) schéma interpolant de Lagrange centrés utilisant 4 points [DGL87] (b) schéma approximaant spline degré 2 [Cha74]

FIG. 1 – Fonction limite de différents schémas linéaires pour les points initiaux $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

Parallèlement à la construction de courbes ou de surfaces, l'émergence d'algorithmes pyramidaux ou multiéchelles a été le moteur de nouvelles techniques de compression d'images [Dau92, Mal89]. Notamment, la classique compression JPEG, utilisant une transformée de Fourier rapide, a laissé sa place à la compression JPEG2000, utilisant une transformée en ondelettes.

Ce type d'algorithme est lié à la notion de base hilbertienne d'ondelettes, construites à partir des translatés et des dilatés d'une unique fonction. La notion d'analyse multirésolution qui lui est associée, introduit une autre fonction, dite fonction d'échelle. Pour une fonction donnée et une résolution donnée, l'algorithme pyramidal n'est rien d'autre qu'un algorithme de changement de base. Les résultats de caractérisation d'espaces de fonctions à partir de la décroissance des coefficients d'ondelettes [Mey90, Jaf91], conduisent à utiliser une transformée multiéchelle pour compresser un signal, en négligeant les coefficients inférieurs à un certain seuil.

D'autre part quand c'est le cas, le support compact des fonctions d'échelles ou des ondelettes,

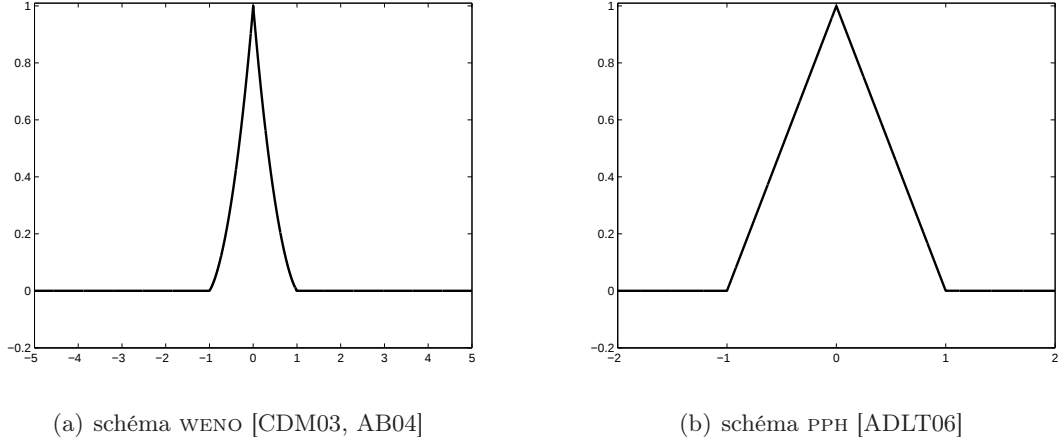


FIG. 2 – Fonction limite de différents schémas non-linéaires pour les points initiaux $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

implique que les algorithmes de changement de base prennent la forme de schémas de subdivision. A. Hatren [Har94, Har96] généralise la notion d’analyses multirésolutions en adaptant la définition à des schémas de subdivisions linéaires, puis non-linéaires.

La transformée multiéchelle est alors composée de deux étapes:

- une étape de décomposition: partant d’une approximation haute résolution f^J , on décompose l’image au moyen d’une approximation basse résolution f^{J_0} et de détails aux échelles intermédiaires, ou coefficients d’ondelettes $(d^{J_0+1}, \dots, d^J)$,
- une étape de reconstruction: à partir de la donnée des détails et d’une approximation basse résolution J_0 , on reconstruit l’approximation résolution J ,

un schéma de subdivision intervenant dans chacune des étapes.

La compression d’une image consiste alors à effectuer une décomposition et à seuiller les détails, et la décompression, à reconstruire à partir des détails seuillés. Par la troncature des détails, on aura ainsi, isolé les singularités de l’image qui correspondent aux contours ou aux zones de textures.

Il semble naturel de vouloir contrôler, par le seuil de troncature, la différence entre les deux images: l’image reconstruite et l’image initiale. On parle alors de stabilité d’analyse multirésolution.

Dans le cas d’analyses multirésolutions linéaires, la question de la stabilité est immédiatement résolue; elle résulte de l’existence d’une fonction d’échelle donc de la convergence.

Dans le cas d’analyses multirésolutions non-linéaires, c’est-à-dire utilisant un schéma de subdivision non-linéaire, la question est ouverte.

L’avantage d’utiliser des schémas non-linéaires est de pouvoir s’adapter, par exemple, à la nature de l’image. Ainsi, l’utilisation de schémas non-linéaires permet d’éviter les zones de flous dans la compression d’images (figure 3).

Pour répondre aux problèmes d’oscillations, des schémas non-linéaires, inspiré de l’approximation de flux numériques, ont été développés: le schéma ENO [ADH99b, AACD02], une forme améliorée, le schéma WENO [AB04, CDM03] et un schéma utilisant 4 points, le schéma PPH [Ama01, ADLT06].

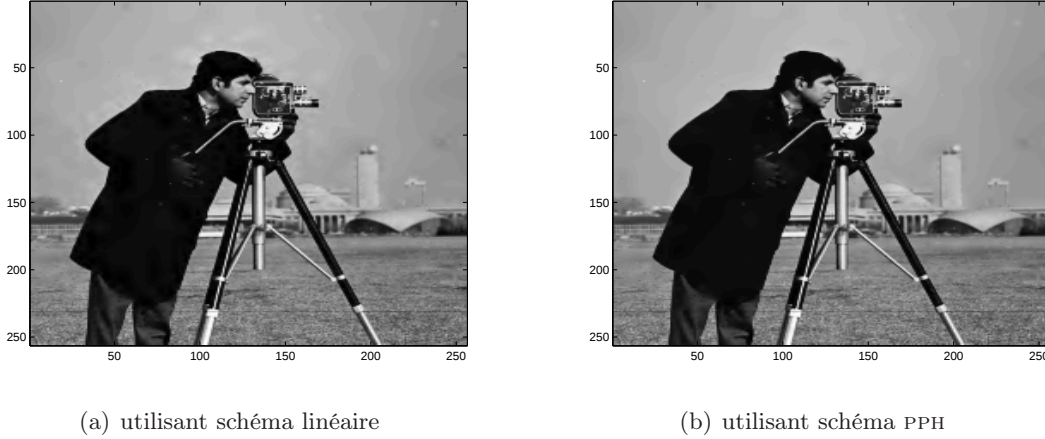


FIG. 3 – *Compression et Décompression d'une image de taille 256×256 pour 4 niveaux de résolutions, utilisant un seuil $\varepsilon = 10$.*

Pour ces différents schémas non-linéaires, la convergence a été établie [CDM03, ADLT06]. A notre connaissance, le schéma PPH est le seul schéma non-linéaire pour lequel la stabilité de l'analyse multirésolution, au sens classique, a été établie [AL05]. On peut noter que la régularité numérique de ces schémas est moins que C^1 .

La classe de schémas que nous allons étudier dans cette thèse provient d'une généralisation de ces 2 exemples.

S'inscrivant dans la lignée de construction de schémas non-linéaires [DL95, KD98, Osw03, MM04, GW08, HO], on construit la classe de schémas non-linéaires par comparaison à un schéma linéaire:

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \quad (S_{NL}f)_n = (Sf)_n + F(\delta f)_n. \quad (1)$$

Ici, S est un schéma linéaire convergeant, δ est un opérateur linéaire et continue sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ et F est un opérateur non-linéaire défini sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Dans cette thèse, on se propose de bâtir une étude théorique des propriétés de cette classe de schémas (convergence, régularité, stabilité et ordre d'approximation) et d'étudier la stabilité de l'analyse multirésolution associée.

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres.

- Le premier chapitre est consacré à l'étude de schémas linéaires. Après un bref rappel des définitions et des techniques d'étude, on s'intéresse à un résultat de convergence de [CDM91]. On complète ce résultat par un résultat de régularité, dans le but de l'étendre aux schémas non-linéaires.

Les seuls résultats concernant les schémas interpolants de Lagrange sont ceux utilisant des schémas centrés [DD89]. On répondra à la question suivante :

l'écriture d'un schéma de Lagrange quelconque sous la forme (1) peut-elle apporter des informations supplémentaires sur la convergence et la régularité?

-
- Le deuxième chapitre est le coeur de ce travail. Plusieurs questions sont à l'origine des résultats établis:

- *Quelles sont des hypothèses suffisantes, pour que le schéma non-linéaire S_{NL} (1) vérifie les mêmes propriétés que le schéma linéaire S ?*
- *Les hypothèses établies sont-elles applicables?*
- *En utilisant la forme (1), peut-on construire un schéma non-linéaire convergent, stable et de régularité au moins C^1 ?*
- *Pour l'application au traitement d'images, une étude bidimensionnelle peut-elle être menée, c'est-à-dire le schéma défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ par produit tensoriel de schémas non-linéaires convergent sur $l^\infty(\mathbb{Z})$, vérifie-t-il la propriété de convergence?*

En répondant à la première question, on s'intéresse aux propriétés de convergence, de régularité, de stabilité et d'ordre d'approximation.

Pour répondre à la deuxième question, on appliquera les résultats établis à des schémas non-linéaires existants, ou que l'on définira pour résoudre le problème du phénomène de Gibbs.

On définit, pour la troisième question, des schémas approximants à 4 points et qui améliorent la régularité des schémas S_{WENO} et S_{PPH} .

Nous donnons enfin des conditions suffisantes de convergence pour un schéma non-linéaire défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$, construit par "produit tensoriel" de schéma sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

- Le troisième chapitre pose la question *de la stabilité de l'analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire (1) et de l'existence d'analyse multirésolution non-linéaire stable*. On s'intéressera encore à des schémas existants et à la construction d'un schéma dont l'analyse multirésolution est stable.
- Le quatrième chapitre s'inscrit dans la thématique de l'utilisation des analyses multirésolutions pour la résolution d'équations aux dérivées partielles, dans le but d'améliorer la performance de schémas numériques sur une grille non-uniforme. Etant donné un opérateur aux différences finies, on montre comment homogénéiser l'erreur de consistance sur une grille non-uniforme, grâce l'utilisation d'un schéma de subdivision.

CHAPITRE I

Schémas de Subdivision Linéaires

————— oOo —————

Nous allons rappeler les principaux résultats concernant les schémas de subdivision linéaires. Nous appliquerons certaines de ces techniques aux schémas interpolants de Lagrange ayant un décentrage quelconque et nous obtiendrons ainsi un résultat presque complet sur la convergence de ces schémas.

————— oOo —————

Plan du chapitre

I.1	Introduction	9
I.2	Définitions et résultats généraux	9
I.2.1	Définitions	10
I.2.2	Convergence d'un schéma de subdivision	11
I.2.2.a	Condition nécessaire	11
I.2.2.b	Fonction d'échelle d'un schéma convergeant	13
I.2.2.c	Convergence du schéma interprétée comme la convergence d'une suite de fonctions	14
I.2.3	Une propriété de la fonction limite: Etude de la régularité	15
I.2.3.a	Définition des espaces de Hölder	15
I.2.3.b	Définition des opérateurs aux différences	16
I.2.3.c	Définition des schémas aux différences et lien avec la régularité	16
I.2.3.d	Régularité Numérique	17
I.2.4	Autres propriétés classiques: Monotonie, Convexité, Ordre et Stabilité	18
I.2.4.a	Convexité-Monotonie	18
I.2.4.b	Stabilité	18
I.2.4.c	Ordre	19
I.2.5	Une propriété du schéma: La reproduction des polynômes	19
I.2.5.a	Reproduction des Polynômes et Ordre d'approximation	20
I.2.5.b	Reproduction de Polynômes et Régularité	20
I.3	Premiers exemples classiques	20
I.3.1	Un exemple de construction de schémas sur $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ convergeants	20
I.3.2	Un premier exemple: les schémas B-splines	21
I.3.2.a	Définition	21
I.3.2.b	Propriété du schéma B-spline	22
I.3.3	Un deuxième exemple: les schémas d'interpolation de Lagrange	23
I.3.3.a	Définition et propriétés d'un schéma interpolant	23
I.3.3.b	Les schémas interpolants de Lagrange	24
I.3.4	Un troisième exemple: des schémas approximants inspirés de schémas interpolants	28
I.4	Techniques classiques d'étude de la convergence	30
I.4.1	Utilisation des séries de Fourier et du symbole du schéma	30
I.4.1.a	Symbole du schéma itéré et reproduction des polynômes	31
I.4.1.b	Symbole du schéma aux différences	31
I.4.2	Utilisation des matrices de subdivision	34
I.4.2.a	Traduction matricielle	34
I.4.2.b	Matrice associée au schéma aux différences	35
I.4.2.c	Condition nécessaire de convergence et de régularité	35
I.4.2.d	Exemples	36
I.5	Complément à une technique d'étude de la convergence et application	37
I.5.1	Comparaison avec un schéma de subdivision convergeant	37
I.5.1.a	Convergence	37
I.5.1.b	Régularité	37
I.5.1.c	Utilisations possibles	41
I.5.2	Application à l'étude des schémas de Lagrange complètement décentrés ($l=1$)	42
I.5.2.a	Convergence de $S_{1,r}$ pour $r \leq 7$	43
I.5.2.b	Etude de la divergence	45
I.5.3	Généralisation des méthodes à des schémas de Lagrange quelconques ($l \neq r$)	49
I.5.3.a	Convergence	49
I.5.3.b	Etude de la divergence	51
I.6	Conclusion	58

I.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de schémas de subdivision linéaires qui sont des outils fondamentaux pour la construction de courbes, de surfaces ou la compression d'images.

La notion de schéma de subdivision a été introduite en 1974 par G. Chaikin [Cha74] dans le cadre de la conception assistée par ordinateur (CAO). Le schéma de G. Chaikin [Cha74], appelé le schéma *corner cutting*, a été présenté comme une alternative aux méthodes classiques utilisant la définition analytique de courbes splines. Contrairement aux méthodes classiques, il est basé sur une relation qui permet de construire et d'augmenter le nombre points de contrôle à partir de points initiaux. En réitérant ce procédé, on double à chaque itération le nombre de points de contrôle ce qui permet d'approcher la courbe B-spline à une résolution de plus en plus fine; ceci explique l'appellation schéma de subdivision pour la relation entre deux niveaux de résolution.

Aujourd'hui, de nombreux schémas de subdivision ont été proposés. Tout d'abord, les premiers schémas construits permettaient d'approcher les courbes B-splines (C. Catmull, C. Clark [CC78] et D. Doo, M. Sabin [DS78] pour les surfaces). Ce n'est qu'à partir de 1987 que des schémas interpolants, c'est-à-dire conservant les points initiaux, ont été développés par N. Dyn, J.A. Gregory et D. Levin [DGL87] ou G. Deslauriers et S. Dubuc [DD89]. Enfin, en 1991, A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] et N. Dyn [Dyn92] proposent une théorie générale et des techniques d'études de la convergence, fortement inspirées de la construction de la fonction d'échelle dans les analyses multirésolutions ondelettes ([Mal89, Dau92]).

Des questions fondamentales se posent qui sont liées à des aspects pratiques de leurs utilisations. La convergence et la régularité des schémas concernent l'existence d'une fonction régulière "vers laquelle converge" le schéma dans un sens que l'on précisera; il s'agit de s'assurer que les applications successives du schéma de subdivision produisent une courbe lisse. Des qualités de stabilité aux perturbations et d'ordre d'approximation sont aussi demandées, de même que la reproduction de certaines fonctions, en particulier les polynômes.

Dans ce chapitre, les schémas de subdivision sont linéaires. Nous verrons que les notions de convergence et de stabilité sont liées, ainsi que les notions de reproduction des polynômes et d'ordre d'approximation.

Dans les deux premières parties, nous rappellerons les principaux résultats et trois exemples classiques de schémas de subdivision. Dans une troisième partie, nous donnerons deux techniques d'étude de convergence et de régularité basées sur l'étude de polynômes trigonométriques ou de valeurs propres de matrices.

Enfin, dans la section I.5.1, nous compléterons avec un résultat de régularité, un résultat de convergence de A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] qui consiste à étudier la différence entre deux schémas linéaires dont l'un est convergeant. Nous utiliserons ces techniques pour établir des résultats complets de convergence pour les schémas interpolants de Lagrange non-centrés ce qui complète les résultats de [DD89].

I.2 Définitions et résultats généraux

Les schémas de subdivision définissent un procédé itératif pour construire de manière récursive une courbe ou une surface à partir de points initiaux.

On double le nombre de points à chaque étape en construisant en plus des points précédemment construits, des points "milieux" ("mieux" au sens de l'indexage du point); ceci donne des points définis sur une grille de plus en plus fine.

Dans la suite, les points de contrôle seront indexés sur $\mathbb{Z}^s$ et définis dans $\mathbb{R}^p$. Pour une courbe

(resp. une surface), ils seront indexés sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}^2$) et seront à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). On travaillera avec des suites de $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$.

I.2.1 Définitions

Un schéma de subdivision est dit linéaire si les nouveaux points sont définis comme une combinaison linéaire des points précédents. Les premiers schémas étant basés sur la construction de courbe B-spline et l'utilisation d'une relation d'échelle vérifiée par les fonctions de bases (section I.3.2), on a la définition suivante

DÉFINITION I.1

Soit $a \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$, on définit le schéma de subdivision S par

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s), \forall n \in \mathbb{Z}^s \quad (Sf)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} a_{n-2m} f_m \quad (\text{I.1})$$

La suite $(a_n)_n$ est appelée le masque du schéma de subdivision.

Dans la suite, on supposera que $\text{supp}(a) = [n_1, n_2]$ avec $|n_1|, |n_2| < +\infty$ c'est-à-dire que la construction de $(Sf)_n$ fait intervenir un nombre fini de points. On dira que l'opérateur S est local.

On notera f^0 ou f les points initiaux et $S^j f$ ou f^j le schéma de subdivision itéré j fois appliqué à f .

Dans le cas où on travaille avec des points de $\mathbb{R}^p$, on peut voir l'équation (I.1) comme un système d'équations sur chaque coordonnée des points de contrôle.

REMARQUE I.1

La relation (I.1) peut être vue comme deux relations faisant intervenir les termes pairs et impairs de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^s}$. Par exemple

– pour $s = 1$

$$(Sf)_{2n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m} f_{n-m} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2m+1} f_{n-m}. \quad (\text{I.2})$$

On peut définir

$$\|S\|_\infty = \max \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} |a_{2n}|, \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} |a_{2n+1}| \right\}.$$

– pour $s = 2$

$$(Sf)_{2n+\mu} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} a_{2m+\mu} f_{n-m} \quad \text{avec } \mu \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\} \quad (\text{I.3})$$

On peut interpréter la relation (I.1) comme l'application de deux filtres: un filtre permettant d'insérer des zéros et un filtre construit à partir du masque $(a_n)_n$. Cela fait partie d'une des étapes de la reconstruction dans la transformée en ondelette (Annexe A) et permet d'utiliser les techniques d'étude des analyses multirésolutions ondelettes pour l'étude de schémas de subdivision (section I.4.1).

Il est possible de généraliser cette écriture en remplaçant le facteur 2 par un nombre b quelconque. L'avantage est de pouvoir définir d'autres types de maillage en générant b points. Dans ce cas,

l'indexage sur les grilles dyadiques est alors remplacé par un indexage sur des grilles b -adic. On définit

DÉFINITION I.2

On appelle schémas de subdivision en base b , les schémas de subdivision définis par

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s), \forall n \in \mathbb{Z}^s \quad (Sf)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} a_{n-bm} f_m \quad (\text{I.4})$$

Dans la suite $b = 2$, mais tous les résultats énoncés (convergence, régularité, stabilité) seront vrais pour b quelconque, après adaptation.

I.2.2 Convergence d'un schéma de subdivision

On se place dans le cadre $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ mais les résultats suivants restent vraies dans le cadre $l^p(\mathbb{Z}^s)$.

Par abus de langage, on dira que "le schéma converge" pour un schéma convergeant uniformément.

DÉFINITION I.3

On dit qu'un schéma de subdivision S converge uniformément si

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s), \exists f^\infty \in C^0(\mathbb{R}^s) \quad \text{telle que} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}^s} |(S^j f)_n - f^\infty(\frac{n}{2^j})| = 0. \quad (\text{I.5})$$

La fonction f^∞ est dite fonction limite du schéma S associée aux points initiaux f , notée aussi $S^\infty f$.

L'important est la condition de continuité de la fonction limite.

REMARQUE I.2

La suite $(\|S^j\|_\infty)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée pour un schéma convergeant.

En effet, pour un schéma convergeant, on a pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\exists J > 0, \forall j > J, \quad \|S^j f\|_\infty \leq \varepsilon + \|f^\infty\|_\infty.$$

Comme S^j est une application linéaire continue, on a $\|S^j\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|S^j f\|_\infty$. Donc

$$\forall j > J, \quad \|S^j\|_\infty \leq \varepsilon + 1.$$

I.2.2.a Condition nécessaire

PROPOSITION I.1

Soit S un schéma de subdivision convergeant vers une fonction **non nulle** alors son masque vérifie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^s} a_{2n+\mu} = 1 \quad \text{avec } \mu \in [0,1]^s \quad (\text{I.6})$$

Cette condition est appelée condition de masque ou condition de reproduction des constantes.

Pour une preuve, voir [CDM91] proposition 2.1 et [Dyn92] proposition 2.2.

On remarque que cette condition nécessaire est équivalente à la reproduction exacte des constantes par le schéma c'est-à-dire

$$S \text{ reproduit exactement les constantes si pour tout } n \in \mathbb{Z}, f_n = c \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{Z}, (Sf)_n = c.$$

La condition de masque (I.6) est une condition nécessaire à la convergence mais n'est pas une condition suffisante comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE I.1

Soit le schéma de subdivision où la valeur $(Sf)_{2n+1}$ est construite en extrapolant les valeurs de 2 points à gauche. On obtient le masque

$$a_{-1} = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_0 = 1, \quad \text{et } a_n = 0 \text{ ailleurs,}$$

et le schéma

$$(Sf)_{2n} = f_n \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}$$

On choisit $f^0 = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

On construit les suites $f^j = S^j(f^0)$ et les points (x_n^j, f_n^j) avec $x_n^j = 2^{-j}n$ (fig I.1).

On raisonne par l'absurde:

si le schéma est convergent, il existe une fonction continue f telle que

$$\exists J > 0, \forall j > J, \forall n \in \mathbb{Z} \quad \left| f\left(\frac{n}{2^j}\right) - f_n^j \right| \leq \frac{1}{4} \quad (\text{I.7})$$

En remarquant que $f_{2^j n + 2^j - 1}^j = \frac{3}{2}f_{2^{j-1}n + 2^{j-1} - 1}^{j-1} - \frac{1}{2}f_{2^{j-2}n + 2^{j-2} - 1}^{j-2}$, on peut prouver par récurrence que

- les points $f_{2^j n + 2^j - 1}^j$, f_n^0 et f_{n-1}^0 sont alignés, $\forall n \in \mathbb{Z}$
- $f_{2^j n + 2^j - 1}^j \geq f_n^0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que pour $n = 0$, $f_{2^j - 1}^j > 1$ pour tout j .

D'après (I.7), pour tout $j > J$

$$\left| f\left(\frac{2^j - 1}{2^j}\right) - f_{2^j - 1}^j \right| \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |f(1) - f_{2^j}^j| \leq \frac{1}{4}.$$

Or $f_{2^j}^j = f_1^0 = 0$ d'où

$$-\frac{1}{2} + f_{2^j - 1}^j \leq f\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) - f(1) \leq \frac{1}{2} + f_{2^j - 1}^j.$$

De plus, pour tout j , $f_{2^j - 1}^j > 1$

$$\forall j > J, \quad \frac{1}{2} \leq \left| f\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) - f(1) \right|,$$

ce qui contredit la continuité de f , donc la convergence du schéma. Pourtant, S vérifie la condition de masque (I.6).

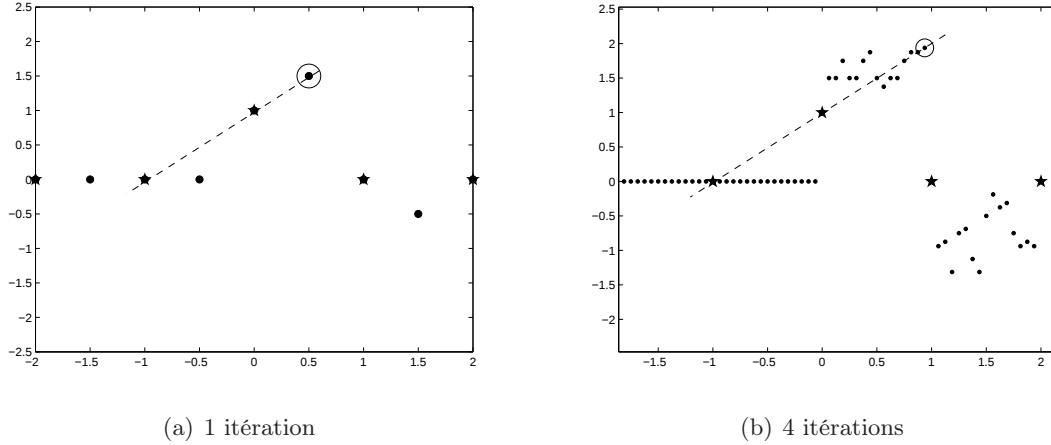


FIG. I.1 – *Itérations avec un schéma extrapolant appliqué à $f^0 = (\delta_{n,0})_n$ ($\star$: f^0 , $\bullet$: f^j , $\odot$: $f_{2^j-1}^j$).*

I.2.2.b Fonction d'échelle d'un schéma convergeant

Par linéarité de l'opérateur S , il est possible d'étudier la convergence uniquement pour la donnée initiale $(\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}^s}$.

Dans la suite, si elle existe, on notera ϕ la fonction limite du schéma associée à la suite initiale $(\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}^s}$.

On a les propriétés suivantes

PROPOSITION I.2

Si le schéma converge alors ϕ vérifie

- (i) ϕ a un support compact et $\text{supp}(\phi) \subseteq \overline{\text{supp}(a)}$
- (ii) ϕ vérifie **la relation d'échelle**: $\forall x \in \mathbb{R}^s, \quad \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} a_n \phi(2x - n)$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^s, \forall f \in \mathbb{Z}^s, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} f_n \phi(x - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} (Sf)_n \phi(2x - n)$
- (iv) $\forall x \in \mathbb{R}^s, \forall f \in \mathbb{Z}^s, \forall j \in \mathbb{N} \quad f^\infty(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} f_n \phi(x - n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} (S^j f)_n \phi(2^j x - n)$
- (v) $\forall x \in \mathbb{R}^s, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} \phi(x - n) = 1.$

De plus, ϕ est l'unique fonction vérifiant ces propriétés.

Pour une preuve, voir [CDM91] théorème 2.1. ou [Dyn92] théorème 2.5 et 2.7.

La preuve utilise la fonctionnelle définie par $T(\phi_0)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_0(2x - n)$ avec ϕ_0 une fonction continue, à support compact vérifiant la propriété (v) de la proposition I.2.

Trouver ϕ revient à résoudre un problème fonctionnel.

Réciproquement, le simple fait d'obtenir une solution à l'équation fonctionnelle $T\phi = \phi$ ne suffit pas à avoir la convergence du schéma.

On a besoin d'avoir une condition supplémentaire sur ϕ appelée stabilité L^∞ [CDM91]

THÉORÈME I.1

On suppose qu'il existe une fonction ϕ continue, à support compact vérifiant la relation d'échelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^s, \quad \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} a_n \phi(2x - n) \quad (\text{I.8})$$

avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^s}$ vérifiant la relation d'échelle (I.6).

Si, de plus, ϕ vérifie une condition de stabilité L^∞

$$\exists A, B > 0, \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s), \text{ tel que } A\|f\|_\infty \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}^s} f_n \phi(\cdot - n) \right\|_{L^\infty} \leq B\|f\|_\infty \quad (\text{I.9})$$

Alors le schéma de subdivision de masque $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^s}$ converge.

REMARQUE I.3

Si on se place dans le cadre L^2 , la condition de stabilité L^2 , dite condition de Riesz, est équivalente à une condition sur les translatés de la transformée de Fourier de ϕ (Annexe A).

De manière plus générale, R.Q Jia et C.A Michelli [JM91] montrent que

si $\phi \in L^p(\mathbb{R}^s)$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}^s} |\phi(\cdot - n)| \in L^p(\mathbb{R}^s)$ alors la condition

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^s} |\hat{\phi}(x + 2\pi n)| > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^s$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ vérifie la condition de stabilité L^p .

De plus, sous les hypothèses ϕ fonction d'échelle, L^p -stable vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{Z}^s} |\phi(\cdot - n)| \in L^p(\mathbb{R}^s)$, les auteurs montrent que les espaces $V_j = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_{j,n} \text{ avec } a \in l^p(\mathbb{Z}^s)\}$ définissent une analyse multirésolution de $L^p(\mathbb{R}^s)$ pour $1 \leq p < +\infty$ (Annexe A).

Dans le cas d'une fonction ϕ continue à support compact, on a alors équivalence entre la stabilité L^p et L^∞ , pour tout p .

I.2.2.c Convergence du schéma interprétée comme la convergence d'une suite de fonctions

Un moyen intuitif de construire la fonction limite est de définir à chaque niveau la fonction affine par morceaux passant par les points $(S^j f)_n$ et de regarder si cette suite de fonctions converge.

Plus généralement,

THÉORÈME I.2

Soit S un schéma de subdivision vérifiant la condition de masque (I.6),

Soit ϕ_0 une fonction continue, à support compact vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{Z}^s} \phi_0(x - n) = 1$,

On définit la suite de fonctions f^j par

$$f^j(x) = \sum_n (S^j f)_n \phi_0(2^j x - n) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{Z}^s,$$

Alors la convergence du schéma implique la convergence de la suite de fonctions $(f^j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, si de plus, ϕ_0 vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9),

alors la convergence de la suite de fonctions $(f^j)_{j \in \mathbb{N}}$ entraîne la convergence du schéma de subdivision.

Souvent, on choisit f^j avec la fonction $\phi_0(x) = \prod_{i=1}^s \max(1 - |x_i|, 0)$, ce qui correspond, en dimension 1, aux fonctions affines par morceaux passant par les points $(S^j f)_n$.

Sous la condition de masque (I.6), on a ainsi trois définitions équivalentes pour montrer la convergence

- (i) existence d'une fonction continue approximant les itérations du schémas (définition I.3),
- (ii) convergence d'une suite de fonctions (théorème I.2),
- (iii) existence d'une fonction d'échelle (théorème I.1).

On verra que, dans le cas de schémas de subdivision non-linéaires, les deux premières définitions resteront valables mais on perdra la troisième puisque l'introduction de fonction d'échelle fait intervenir de façon cruciale la linéarité (section II.3.1).

I.2.3 Une propriété de la fonction limite: Etude de la régularité

On parle de régularité d'un schéma de subdivision convergeant pour parler de la régularité des fonctions limites associées.

Dans le cadre linéaire, d'après la section I.2.2, toutes les fonctions limites $S^\infty f$ ont au moins la même régularité. On se concentre alors sur la régularité de ϕ .

I.2.3.a Définition des espaces de Hölder

Dans la suite, on s'intéressera aux classes de fonctions α -Holdérienne, pour $0 < \alpha < 1$, notée C^α et définie par

DÉFINITION I.4

Pour $0 < \alpha < 1$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^s)$ si f est bornée et vérifie

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^s \quad \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq C \|x - y\|_\infty^\alpha \quad (\text{I.10})$$

Pour $\alpha > 1$, on considère $r = \alpha - [\alpha]$ et on définit C^α par

$$C^\alpha = \{f^{([\alpha])} \text{ bornée tel que } f^{([\alpha])} \in C^r\} \quad (\text{I.11})$$

On définit la classe de fonction $C^{\alpha-}$ par

$$C^{\alpha-} = \{f \in C^\beta, \forall \beta < \alpha\} \quad (\text{I.12})$$

REMARQUE I.4

Dans la définition I.4, il suffit de montrer l'inégalité pour $(x, y) \in \mathbb{R}^s$ tel que $\|x - y\|_\infty < 1$. En effet le fait que f soit bornée par une constante M implique que pour $\|x - y\|_\infty > 1$

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq 2M \leq 2M \|x - y\|_\infty^\alpha.$$

Dans la suite, pour simplifier les écritures, nous nous placerons dans le cas $s = 1$. Mais, les résultats énoncés restent vrais pour s quelconque.

Pour étudier la régularité d'une fonction limite, il est naturel de se poser la question suivante:

Si l'on "dérive de manière discrète" le schéma et que le schéma obtenu converge, que peut-on dire de la régularité de la fonction limite?

I.2.3.b Définition des opérateurs aux différences

On appelle opérateur aux différences d'ordre k , noté d^k , défini par

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (d^k f)_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n - [\frac{k}{2}] + i}. \quad (\text{I.13})$$

On a $df_n = f_{n+1} - f_n$ et $d^k f = d(d^{k-1} f)$.

On appelle dérivées discrètes k -ième de f ou opérateur aux différences divisées, l'opérateur $2^k d^k f$.

I.2.3.c Définition des schémas aux différences et lien avec la régularité

On appelle schéma aux différences d'ordre k , le schéma S_k (s'il existe) vérifiant

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}, \quad S_k(d^k f)_n = d^k(Sf)_n. \quad (\text{I.14})$$

Régularité C^α pour $\alpha < 1$

On a la propriété suivante pour S_1 , donnant la régularité de ϕ .

PROPOSITION I.3

Si S vérifie la condition de masque (I.6) alors S_1 existe et les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) S converge,
- (ii) S_1 converge vers 0,
- (iii) il existe $L \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}), \|S_1^L f\|_\infty \leq \rho^L \|f\|_\infty$.

De plus, $\phi \in C^\alpha$ avec $\alpha = -\log_2(\rho)$ si $2^{-1} < \rho < 1$, $\phi \in C^{1-}$ sinon.

Pour une preuve, voir N. Dyn [Dyn92] théorème 6.9 ou A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] théorème 2.3 dans le cas s quelconque.

Ainsi, plus la constante de contraction est petite, plus la régularité est grande.

On appellera rayon spectral de S_1 la quantité $\rho(S_1) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|S_1^j\|_\infty^{\frac{1}{j}}$ qui vérifie

$$\rho(S_1) = \inf \left\{ \rho / \exists J, \forall j \geq J, \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|S_1^j f\|_\infty \leq \rho^j \|f\|_\infty \right\}. \quad (\text{I.15})$$

D'après la proposition I.3, il est nécessaire et suffisant que $\rho(S_1) < 1$, pour la convergence du schéma S .

Régularité C^α pour $\alpha > 1$

Pour conclure à la régularité C^1 du schéma, on a besoin que $2S_1$ converge. En effet, si on dérive par morceaux, la suite de fonctions f^j avec $\phi_0(x) = \max(1 - |x|, 0)$, on a

$$(f^j)'(x) = \sum_n 2^j (S^j f)_n \phi_0'(2^j x - n) = 2^j (f_n^j - f_{n-1}^j) = 2^j df_{n-1}^j \quad \text{pour } x \in [2^{-j}n; 2^{-j}(n+1)].$$

On obtient la proposition suivante (N. Dyn [Dyn92] théorème 7.3 ou A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] théorème 8.1)

PROPOSITION I.4

S'il existe S_k un schéma aux différences d'ordre k tel que $2^k S_k$ converge alors $\phi \in C^k$ et $\phi^{(k)} = (2^k S_k)^\infty(d^k(\delta_{n,0}))$.

Ou de façon équivalente

PROPOSITION I.5

S'il existe S_{k+1} un schéma aux différences d'ordre $k+1$ tel que $2^k S_{k+1}$ converge vers 0 alors $\phi \in C^k$.

De plus, s'il existe $L \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 2^{-k}$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $\|S_{k+1}^L f\|_\infty \leq \rho^L \|f\|_\infty$ alors $\phi \in C^{(k+\alpha)}$ avec $\alpha = -k - \log_2(\rho)$ si $2^{-(k+1)} < \rho < 2^{-k}$, $\phi \in C^{(k+1)-}$ sinon.

Réciproquement, on a le résultat suivant, dû à A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] (théorème 8.2)

THÉORÈME I.3

Si ϕ la fonction d'échelle de S vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9), on a équivalence entre

- (i) ϕ est C^k ,
 - (ii) S_k existe et $2^k S_k^j(d^k(\delta_{n,0}))$ converge vers $\phi^{(k)}$.
 - (iii) S_{k+1} existe et $2^k S_{k+1}$ converge vers 0.
 - (iv) il existe $L \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 2^{-k}$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $\|S_{k+1}^L f\|_\infty \leq \rho^L \|f\|_\infty$.
- De plus, on a ϕ est $C^{k+\alpha}$ avec $\alpha = -k - \log_2(\rho)$ si $2^{-(k+1)} < \rho < 2^{-k}$, ϕ est $C^{(k+1)-}$ sinon.

REMARQUE I.5

En notant ϕ_k la fonction limite de $2^k S_k$, on a $\phi_k \neq \phi^{(k)}$.

A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91], montrent (corollaire 8.1) que

$$\phi^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \phi_k \left(x - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + i \right),$$

et que si ϕ vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9) alors ϕ_k vérifie la même propriété.

I.2.3.d Régularité Numérique

Il est possible d'estimer numériquement la constante de Hölder de la fonction limite $S^\infty f$ (F. Kuijt [Kui98] (section 6.4)).

- Si $S^\infty f \in C^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, la définition I.4 des espaces de Hölder permet d'écrire, aux points $x = 2^{-j}n$ et $y = 2^{-j}(n+1)$,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |S^\infty f(2^{-j}n) - S^\infty f(2^{-j}(n+1))| = \lim_{j \rightarrow +\infty} |(S^j f)_n - (S^j f)_{n+1}| = \lim_{j \rightarrow +\infty} C 2^{-j\alpha}$$

On a alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} -\log_2 \left(\frac{\|f_{n+1}^{j+1} - f_n^{j+1}\|_\infty}{\|f_{n+1}^j - f_n^j\|_\infty} \right) = \alpha. \quad (\text{I.16})$$

- Si $S^\infty f \in C^\alpha$ avec $k < \alpha < k+1$, c'est-à-dire $S^\infty f \in C^k$ avec $k > 1$, on utilise les dérivées discrètes k -ième, $2^{kj} d^k f^j$ (I.13), de la façon suivante

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} -\log_2 \left(2^k \frac{\|d^k f_{n+1}^{j+1} - d^k f_n^{j+1}\|_\infty}{\|d^k f_{n+1}^j - d^k f_n^j\|_\infty} \right) = \alpha. \quad (\text{I.17})$$

On dispose donc de deux résultats fondamentaux pour étudier la convergence et la régularité qui sont la proposition I.5 et le théorème I.3. Deux questions se posent alors:

- comment montrer l’existence d’un schéma aux différences?
- comment montrer la divergence?

La première question a un lien direct avec la reproduction de polynômes par le schéma (section I.2.5). Pour la deuxième question, nous présentons des techniques classiques disponibles (section I.4.2).

I.2.4 Autres propriétés classiques: Monotonie, Convexité, Ordre et Stabilité

I.2.4.a Convexité-Monotonie

Il est particulièrement intéressant pour un schéma de préserver certaines propriétés géométriques au sens où une propriété vraie pour la suite $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, reste vraie pour la fonction $S^\infty f$. On se place dans le cas $s = 1$ et on définit pour les suites

DÉFINITION I.5

On dit que la suite $(f_n)_n$ est monotone si $(df_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est de signe constant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On dit que la suite $(f_n)_n$ est convexe si $d^2 f_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

DÉFINITION I.6

On dit qu’un schéma de subdivision préserve la monotonie si pour toute suite f monotone, la fonction $S^\infty f$ est monotone.

On dit qu’un schéma de subdivision préserve la convexité si pour toute suite f convexe, la fonction $S^\infty f$ est convexe.

On peut voir les travaux de N. Dyn, F. Kuijt, D. Levin et R. Van Damme [DKLD99] pour des constructions de schémas préservant ces propriétés. La plupart du temps, la construction de tels schémas conduit à des schémas non-linéaires [Kui98].

I.2.4.b Stabilité

DÉFINITION I.7

On dit qu’un schéma de subdivision convergeant est stable si

$$\forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}^s) \quad \text{on a} \quad \|S^\infty f - S^\infty g\|_{L^\infty} \leq C \|f - g\|_{l^\infty}$$

Pour un schéma linéaire, on a la propriété suivante qui se démontre grâce au théorème I.2 (ou encore grâce à la linéarité de l’opérateur S et la remarque I.2)

PROPOSITION I.6

Tout schéma de subdivision linéaire convergeant est stable.

I.2.4.c Ordre

Une autre propriété concerne l'application du schéma à l'échantillonnage d'une fonction C^k . On parle d'ordre d'approximation du schéma.

DÉFINITION I.8

Pour S un schéma convergeant, on dit que S^∞ est approximant d'ordre k si pour toute fonction $g \in C^k([0,1])$ et pour les données initiales $f = g(nh)_n$, on a

$$\|S^\infty(f) - g\|_{L^\infty} \leq Ch^k,$$

avec C une constante indépendante de h et dépendante de g .

On définit aussi l'approximation d'une itération du schéma par

DÉFINITION I.9

On dit que S est un schéma approximant d'ordre k si pour toute fonction $g \in C^k([0,1])$ et pour les données initiales $f = g(nh)_n$, on a

$$\|Sf - g(2^{-1} \cdot h)\|_{l^\infty} \leq Ch^k.$$

Il est facile de voir qu'il n'est pas suffisant que S soit approximant pour que S^∞ le soit. Dans le cas linéaire, on a cependant le résultat suivant [Kui98]

PROPOSITION I.7

Pour un schéma linéaire convergeant, si S est approximant d'ordre k alors S^∞ est approximant d'ordre k .

I.2.5 Une propriété du schéma: La reproduction des polynômes

Dans cette partie, $s = 1$ (A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] pour s quelconque).

La notion de reproduction des polynômes se décline de 2 façons

DÉFINITION I.10

On dit qu'un schéma de subdivision reproduit **exactement** les polynômes de degré k si pour tout polynôme P de degré au plus k

$$\text{si } \forall n \in \mathbb{Z}, p_n = P(n), \quad \text{alors} \quad (Sp)_n = P(2^{-1}n) \quad (\text{I.18})$$

On dit qu'un schéma de subdivision reproduit les polynômes de degré k si pour tout polynôme P de degré au plus k

$$\text{si } \forall n \in \mathbb{Z}, p_n = P(n), \quad \text{il existe un polynôme } R \text{ de degré } k \text{ tel que} \quad (Sp)_n = R(2^{-1}n) \quad (\text{I.19})$$

On a la propriété suivante ([CDM91] théorème 6.2)

PROPRIÉTÉ I.1

Si S un schéma linéaire convergeant reproduit les polynômes de degré k alors S^∞ reproduit les polynômes de degré k .

De plus, pour $P \in \Pi_k$ et $p = (P(n))_n$, $S^\infty p$ est un polynôme ayant le même coefficient de plus haut degré que P .

I.2.5.a Reproduction des Polynômes et Ordre d'approximation

Pour des schémas linéaires, on obtient en utilisant la stabilité et la formule de Taylor [Kui98]

PROPOSITION I.8

Si un schéma convergeant reproduit **exactement** les polynômes de degré k alors il est approximant d'ordre $k + 1$.

Dans le cas de la reproduction simple de polynômes, on ne peut pas déduire une telle propriété mais on peut construire des données initiales Qp à partir de p pour que S^∞ vérifie $S^\infty Qp = P$ (A. Levin [Lev00]). Ainsi, à partir de données initiales convenablement choisies, on aura un ordre d'approximation optimal. Ceci sera particulièrement intéressant pour les schémas B-splines (section I.3.2).

I.2.5.b Reproduction de Polynômes et Régularité

On a déjà vu que, si S vérifie la condition de masque (I.6) c'est-à-dire la reproduction des constantes, il existe un schéma pour les premières différences noté S_1 (proposition I.3). On peut généraliser de la façon suivante

PROPOSITION I.9

Si S reproduit les polynômes de degré k alors il existe un schéma aux différences d'ordre $k + 1$.

Pour une preuve, voir A. Cohen, N. Dyn et B. Matei [CDM03] proposition 1.

A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli montrent que la reproduction des polynômes est aussi une condition nécessaire pour que ϕ soit C^k ([CDM91] corollaire 8.2)

PROPOSITION I.10

Si ϕ la fonction d'échelle de S vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9) et si $\phi \in C^k$, alors S reproduit les polynômes de degré k .

De plus, pour $P \in \Pi_k$ et $p = (P(n))_n$ on a $(Sp)_n = P(2^{-1}n) + Q(2^{-1}n)$ avec $\deg Q < \deg P$.

Pour des schémas interpolants, on obtient même la reproduction exacte (A. Levin [Lev00]).

La reproduction des polynômes donnent donc une

- (i) condition suffisante pour l'ordre de S avec la reproduction exacte (proposition I.8),
- (ii) condition suffisante pour l'existence de schémas aux différences (proposition I.9),
- (iii) condition nécessaire à la régularité C^k (proposition I.10).

Dans le cas non-linéaire, on verra que seule la première condition est conservée.

I.3 Premiers exemples classiques

I.3.1 Un exemple de construction de schémas sur $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ convergeants

Un moyen d'obtenir des schémas à plusieurs variables convergeants est de les définir comme un produit tensoriel d'un schéma de subdivision à une variable que l'on sait convergeant.

I.3. Premiers exemples classiques

On entend par produit tensoriel que le masque s'écrit comme un produit tensoriel c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{Z}^s \quad A_n = \prod_{i=1}^s a_{n_i} \quad \text{avec } n = (n_1, \dots, n_s). \quad (\text{I.20})$$

Appliquer le masque $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}^s}$, revient à appliquer le schéma à une variable de masque $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans chacune des directions. On remarque que le fait de commencer par une direction ou une autre n'a aucune importance puisqu'on obtient le même schéma.

On a le résultat suivant

THÉORÈME I.4

Soit S un schéma linéaire défini sur $\mathbb{Z}$, convergeant et soit ϕ sa fonction limite, le schéma défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^s)$ par un produit tensoriel de S converge. De plus, sa fonction d'échelle s'écrit $\Phi(x) = \prod_{i=1}^s \phi(x_i)$.

Pour la convergence, voir N. Dyn [Dyn92].

Pour la régularité, il suffit de voir que, pour $(x, x') \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$

$$\Phi(x) - \Phi(x') = \sum_{i=1}^s \prod_{1 \leq j < i} \phi(x_j) \prod_{i < j \leq s} \phi(x'_j) (\phi(x_i) - \phi(x'_i))$$

Comme ϕ est à support compact, la régularité de Φ est la même que celle de ϕ .

La construction par produit tensoriel, qui est très utilisé, justifie que l'on s'intéresse principalement aux schémas de subdivision définis sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

I.3.2 Un premier exemple: les schémas B-splines

Ce sont les premiers schémas développés pour construire une approximation de la courbe B-spline $X(t) = \sum_i \phi_m(t-i)P_i$ avec $(P_i)_i$ des points de contrôle. Grâce à une relation d'échelle vérifiée par les fonctions ϕ_m , il est possible de définir $X(t) = \sum_i \phi_m(2t-i)(SP)_i$.

I.3.2.a Définition

DÉFINITION I.11

On dit que ϕ_m est la fonction B-spline uniforme de degré m si

$$\phi_m(x) = \phi_{m-1} * \phi_0(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \phi_{m-1}(t) dt \quad \text{avec } \phi_0 = \chi_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}. \quad (\text{I.21})$$

En particulier, ϕ_m est polynômiale par morceaux (de degré m), $C^{m-1}(\mathbb{R})$ avec

$$\text{supp}(\phi_m) = [-[2^{-1}m] - 1, m - [2^{-1}m]].$$

Par récurrence, on montre que les fonctions B-splines vérifient la relation d'échelle suivante

$$\phi_m(x) = 2^{-m} \sum_{n=-[2^{-1}m]-1}^{m-[2^{-1}m]} \binom{m+1}{n+1+[2^{-1}m]} \phi_m(2x-n). \quad (\text{I.22})$$

On construit alors le schéma de subdivision spline de degré m avec le masque

$$\forall n \in [-[2^{-1}m] - 1, m - [2^{-1}m]] \quad a_n^m = 2^{-m} \binom{m+1}{n+1+[2^{-1}m]} \quad \text{et} \quad a_n^m = 0 \text{ ailleurs.} \quad (\text{I.23})$$

I.3.2.b Propriété du schéma B-spline

On a les propriétés suivantes

PROPOSITION I.11

- (i) Le masque a^m ne prend que des valeurs positives c'est-à-dire $\forall n \in \text{supp}(a^m), \quad a_n^m > 0$.
- (ii) Le masque a^m vérifie la condition de masque (I.6) donc la reproduction exacte des constantes.
- (iii) Pour m impair, le schéma de masque a^m reproduit exactement les polynômes de degré 1.
- (iv) Le schéma de masque a^m reproduit les polynômes de degré m .
- (v) Il existe un schéma aux différences d'ordre $m+1$.

Les (i) et (ii) sont des propriétés importantes puisqu'elles suffisent à elles seules à montrer la convergence du schéma (voir N. Dyn [Dyn92] ou A. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91]).

Pour la régularité, on a

THÉORÈME I.5

Le schéma de subdivision de masque a^m converge et la fonction limite ϕ est la fonction B-spline de degré m , ϕ_m .

Le schéma B-spline de degré m a une fonction limite $C^{m-1}(\mathbb{R})$ qui vérifie la stabilité L^∞ .

Pour obtenir la condition de stabilité L^∞ (I.9) de ϕ , on utilise la condition sur les translatés de $\hat{\phi}$ (remarque I.3), sachant que $\hat{\phi}$ est connu explicitement.

EXEMPLE I.2

pour $m=1$ Le masque vaut $a_{-1} = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$ et $a_1 = \frac{1}{2}$. Le schéma s'écrit

$$(Sf)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n} = f_n \quad (\text{I.24})$$

La fonction limite est continue et affine par morceaux et vaut $\max(1, 1 - |x|)$ (figure I.2).

pour $m=2$ Le masque vaut $a_{-2} = \frac{1}{4}$, $a_{-1} = \frac{3}{4}$, $a_0 = \frac{3}{4}$ et $a_1 = \frac{1}{4}$. Le schéma s'écrit

$$(Sf)_{2n} = \frac{3f_n + f_{n+1}}{4} \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = \frac{f_n + 3f_{n+1}}{4} \quad (\text{I.25})$$

Historiquement, c'est aussi le premier schéma construit dû à G. Chaikin [Cha74], appelé "corner cutting" en raison de sa construction géométrique.

La fonction limite est C^1 et polynomiale de degré 2 par morceaux (figure I.2).

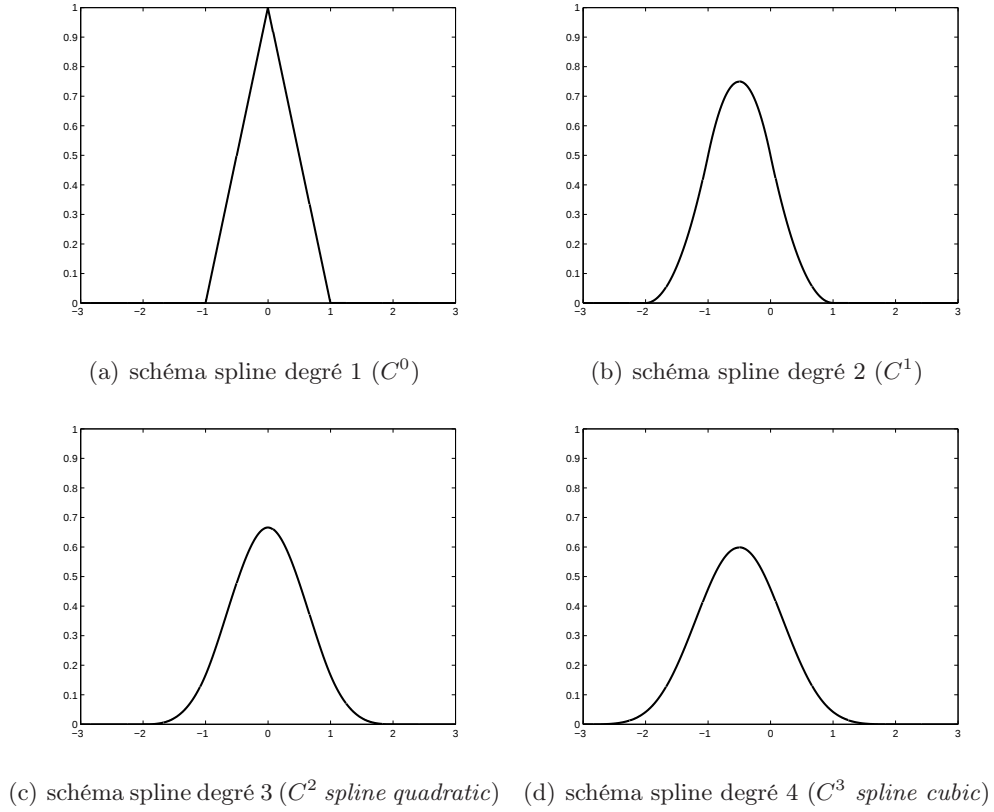


FIG. I.2 – Fonction limite d'un schéma spline de degré m pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

L'avantage de ces fonctions est qu'elles permettent de construire une classe de schémas dont on connaît explicitement la fonction limite et la régularité. De plus, la régularité est optimale pour la taille du support et vaut C^{m-} (section I.4.1).

Le désavantage est que les schémas B-splines de degré m reproduisent les polynômes de degré m mais pas de façon exacte. Par conséquent, il est difficile de connaître leur ordre d'approximation.

Pour palier à ce problème, on va considérer des schémas de subdivision utilisant une interpolation polynomiale. Ces schémas seront optimaux pour la reproduction de polynômes de degré donné donc pour l'ordre d'approximation (section I.2.5).

I.3.3 Un deuxième exemple: les schémas d'interpolation de Lagrange

I.3.3.a Définition et propriétés d'un schéma interpolant

DÉFINITION I.12

Un schéma de subdivision est dit interpolant si $(Sf)_{2n} = f_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^s$.

Contrairement aux schémas splines, ce sont des schémas définis à priori par leur masque. On "conserve les points à l'échelle j " donc le masque vérifie

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_{2n} = 0, \quad \forall n \neq 0.$$

Si S converge, sa fonction limite vérifie les propriétés suivantes

PROPOSITION I.12

Soit un schéma de subdivision interpolant de masque a avec $\text{supp}(a) = [-n_1, n_2]$.

Si le schéma converge alors

- (i) ϕ interpole les points construits à chaque niveau en particulier $\phi(0) = 1$ et $\phi(n) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.
- (ii) ϕ vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9).
- (iii) $\text{supp}(\phi) =]-n_1, n_2[$ et ϕ vérifie $\phi(-n_1 + \frac{n_1}{2^j}) = (a_{-n_1})^j$ et $\phi(n_2 - \frac{n_2}{2^j}) = (a_{n_2})^j$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Si S reproduit les polynômes de degré k alors S reproduit exactement les polynômes de degré k . De plus, pour tout P de degré k , $P(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(n)\phi(x - n)$.

Preuve

(i) Vient du caractère interpolant du schéma et de la suite de fonctions $(f^j)_{j \in \mathbb{N}}$ (théorème I.2).

(ii) D'après (i), pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f_k = f_k \phi(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi(k - n)$. Donc

$$|f_k| \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi(\cdot - n) \right\|_{L^\infty},$$

ce qui donne la première inégalité en prenant la borne supérieure.

(iii) Pour le $\text{supp}(\phi)$, voir G. Deslaurier et S. Dubuc [DD89] lemme 3.1.

Pour la valeur de $\phi(n_2 - \frac{n_2}{2^j})$, si on note $f^j = S^j(\delta_{n,0})$, le fait que ϕ soit interpolante implique que $\phi(n_2 - \frac{n_2}{2^j}) = f_{2^j n_2 - n_2}^j$.

La définition du schéma (I.1) devient $f_{2^{j+1}n_2 - n_2}^{j+1} = \sum_n a_{2^{j+1}n_2 - n_2 - 2m} f_m^j$ pour $2^{j+1}n_2 - n_2 - 2m \in \text{supp}(a)$ c'est-à-dire $m \geq 2^j n_2 - n_2$.

Or d'après [DD89], on a $\text{supp}(f^j) = [-2^j n_1 + n_1, 2^j n_2 - n_2]$.

Donc $f_{2^{j+1}n_2 - n_2}^{j+1} = a_{n_2} f_{2^j n_2 - n_2}^j$ et par récurrence, on a donc $\phi(n_2 - \frac{n_2}{2^j}) = (a_{n_2})^j$.

De même, pour $\phi(-n_1 + \frac{n_1}{2^j}) = (a_{-n_1})^j$.

(iv) Vient de la reproduction des polynômes et du caractère interpolant. □

I.3.3.b Les schémas interpolants de Lagrange

Construction et propriétés

Le moyen le plus naturel de construire un schéma interpolant, compte tenu de l'importance de la reproduction des polynômes, est d'utiliser une interpolation de Lagrange pour contruire les points "milieux". C'est la construction la plus appropriée pour avoir une reproduction des polynômes optimale par rapport au nombre de points utilisés.

Soit $p_{n,l,r}$ le polynôme de Lagrange de degré $(r + l - 1)$ construits avec les points $\{(n + j, f_{n+j})_{j=-l+1 \dots r}\}$. On prend l points à gauche et r points à droite du point à reconstruire $n + \frac{1}{2}$. On définit

$$(Sf)_{2n+1} = p_{n,l,r}(n + \frac{1}{2}) = \sum_{m=-l+1}^r L_{m,n}(n + \frac{1}{2}) f_{n+m} \quad \text{avec} \quad L_{m,n}(x) = \prod_{\substack{k=n-l+1 \\ k \neq n+m}}^{n+r} \frac{x - k}{n + m - k}$$

I.3. Premiers exemples classiques

On remarque que le coefficient $L_{m,n}(n + \frac{1}{2}) = L_m(\frac{1}{2})$ ne dépend pas de n .
On définit alors le masque correspondant par :

DÉFINITION I.13

Le masque du schéma de subdivision de Lagrange utilisant l points à gauche et r points à droite, s'écrit

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad a_{2m} = \delta_{0,m} \quad \text{et} \quad a_{2m+1} = L_{-m} \left(\frac{1}{2} \right) \quad \text{avec} \quad L_m \left(\frac{1}{2} \right) = \prod_{\substack{k=-l+1 \\ k \neq m}}^r \frac{\frac{1}{2} - k}{m - k} \quad (\text{I.26})$$

On note $S_{l,r}$ le schéma de Lagrange utilisant l points à gauche et r points à droite du point à construire.

Le support du masque est alors $\text{supp}(a) = [-2r + 1, 2l - 1]$ et contient $2(l + r) + 1$ termes.

Citons quelques cas particuliers:

pour $l = r$, on interpole le point milieu en ayant autant de points à gauche et à droite.

On dit que le schéma est centré.

Dans ce cas là, on remarque que le masque est symétrique c'est-à-dire que $L_m(\frac{1}{2}) = L_{-m+1}(\frac{1}{2})$.

C'est le cas traité par G. Deslaurier et S. Dubuc [DD89].

pour $l = 1$ (*resp* $r = 1$), on a un point à gauche (*resp* à droite).

On dit que le schéma est décentré droite (*resp* gauche).

pour $l = 0$, (*resp* $r = 0$) on dit que le schéma est extrapolant. C'est le cas du schéma construit dans l'exemple I.1.

On peut faire les remarques suivantes

PROPRIÉTÉ I.2

Les schémas de subdivision de Lagrange vérifient

- (i) la condition de masque (I.6) est satisfaite c'est-à-dire $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{2n+1} = 1$.
- (ii) la reproduction des polynômes de degré $l + r - 1$ est assurée.
- (iii) Si le schéma est centré et convergent alors la fonction limite de $f^0 = (\delta_{0,n})_n$ est symétrique.

Résultat de convergence dans le cas centré

Pour la convergence des schémas **centrés** ($r = l$), on dispose du résultat de convergence dû à G. Deslaurier et S. Dubuc [DD89]. Ce résultat est complété du résultat de régularité dû à I. Daubechies [Dau92], dans le cadre de construction d'ondelettes à support compact optimal pour le nombre de moments nuls. Ces résultats utilisent la symétrie des coefficients et sont donc valables uniquement dans le cas centré.

THÉORÈME I.6

Tous les schémas de subdivision de Lagrange centrés $S_{l,l}$ sont convergents.

De plus, la fonction limite est $C^{\alpha-}$ avec $\alpha \approx 0.4l$.

On peut signaler que le résultat de convergence du théorème I.6 est démontrée, de façon plus générale, pour des schémas définis en base b par la valeur du polynôme $p_{n,l,r}$ aux points $n + lb^{-1}$ avec $0 < l < b$. La meilleure régularité est obtenue pour des schémas en base 2 [DD89].

EXEMPLE I.3

pour un schéma centré à 2 points (r=l=1) Le masque vaut $a_{-1} = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_0 = 1$ et le schéma s'écrit

$$(S_{1,1}f)_{2n} = f_n \quad \text{et} \quad (S_{1,1}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \quad (\text{I.27})$$

On retrouve le schéma spline de degré 1. La fonction limite est C^{1-} (section I.4.1).

pour un schéma centré à 4 points (r=l=2) Le masque vaut $a_{-3} = -\frac{1}{16}$, $a_{-1} = \frac{9}{16}$, $a_1 = \frac{9}{16}$, $a_3 = -\frac{1}{16}$ et $a_0 = 1$ et le schéma s'écrit

$$(S_{2,2}f)_{2n} = f_n \quad \text{et} \quad (S_{2,2}f)_{2n+1} = -\frac{1}{16}f_{n-1} + \frac{9}{16}f_n + \frac{9}{16}f_{n+1} - \frac{1}{16}f_{n+2} \quad (\text{I.28})$$

La fonction limite est C^{2-} (uniquement pour une base $b = 2$) [DGL87]. Remarquons que la spline qui utilise le même nombre de points est C^2 .

C'est un schéma très utilisé dans la littérature. Différentes variantes en sont proposés

introduction d'un paramètre: (N. Dyn, J.A. Gregory et D. Levin [DGL87])

$$a_{-3} = -w, a_{-1} = \frac{1}{2} + w, a_1 = \frac{1}{2} + w, a_3 = -w \quad \text{et} \quad a_0 = 1. \quad (\text{I.29})$$

avec $0 < w < \frac{1}{8}$ et régularité C^1 pour $w \neq \frac{1}{16}$.

définition en base 3 avec paramètre: (M.F Hassan, I.P. Ivriissmitzis, N.A. Dodgson et M.A. Sabin [HIDS02])

$$\begin{aligned} (Sf)_{3n} &= f_n, \\ (Sf)_{3n+1} &= a_0 f_{n-1} + a_1 f_n + a_2 f_{n+1} + a_3 f_{n+2} \\ (Sf)_{3n+2} &= a_3 f_{n-1} + a_2 f_n + a_1 f_{n+1} + a_0 f_{n+2}, \end{aligned}$$

avec

$$a_0 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{6}w, a_1 = \frac{13}{18} + \frac{1}{2}w, a_2 = -\frac{7}{18} - \frac{1}{2}w \quad \text{et} \quad a_3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}w.$$

Pour $w = \frac{1}{27}$, on retrouve le schéma classique à 4 points en base 3.

Pour $\frac{1}{15} < w < \frac{1}{9}$, on obtient une régularité C^2 , même $C^{2+\alpha}$ avec

$$\alpha = 2 - \log_3 \left(\max(9w, \frac{-15w+3}{2}) \right).$$

En travaillant en base 3 et en utilisant un paramètre, on améliore la régularité.

pour un schéma centré à 6 points (r=l=3) Le masque vaut $a_{-5} = \frac{3}{256}$, $a_{-3} = -\frac{25}{256}$, $a_{-1} = \frac{75}{256}$, $a_1 = \frac{75}{256}$, $a_3 = -\frac{25}{256}$ et $a_5 = \frac{3}{256}$ et le schéma s'écrit

$$(S_{3,3}f)_{2n} = f_n \quad \text{et} \quad (S_{3,3}f)_{2n+1} = \frac{3}{256}f_{n-2} - \frac{25}{256}f_{n-1} + \frac{75}{256}f_n + \frac{75}{256}f_{n+1} - \frac{25}{256}f_{n+2} + \frac{3}{256}f_{n+3} \quad (\text{I.30})$$

La fonction limite est $C^{2.8}$ [DD89].

I.3. Premiers exemples classiques

pour des schémas décentrés Ces schémas semblent perdre en régularité (figure I.4). Le schéma centré semble être celui ayant le plus de régularité parmi les schémas de Lagrange.

On résume les régularités des schémas cités ci-dessus dans le tableau I.1.

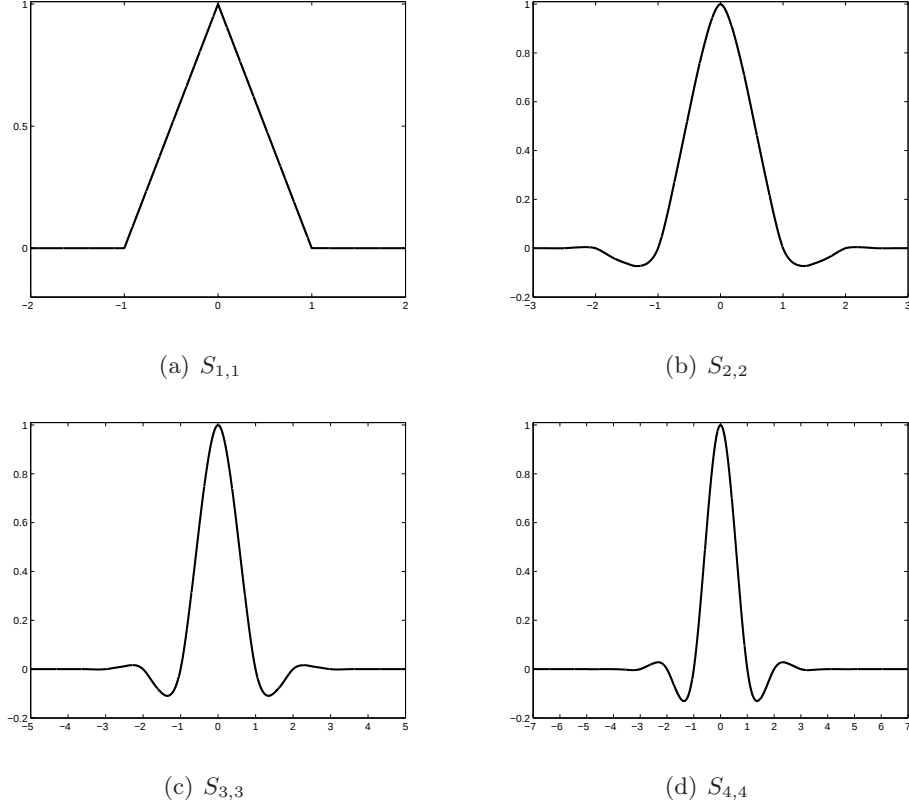


FIG. I.3 – Fonction limite de schémas de Lagrange centrés pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

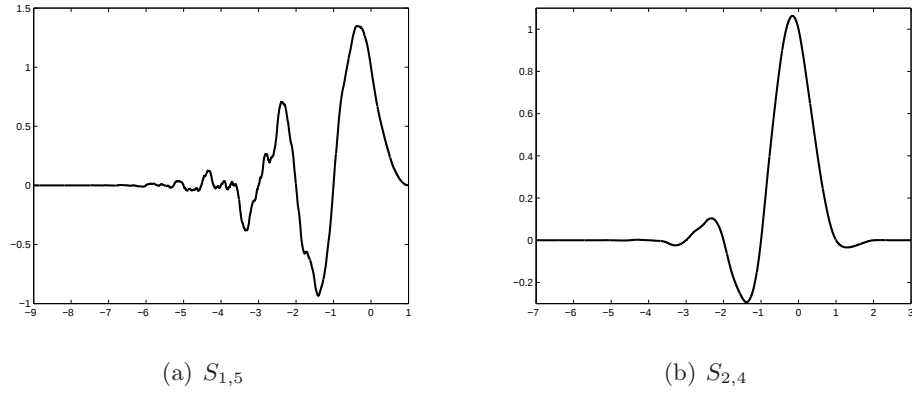


FIG. I.4 – Fonction limite d'un schéma de Lagrange 6 points pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

schéma	$S_{1,1}$	$S_{2,2}$	$S_{3,3}$	S de [HIDS02] avec $\frac{1}{15} < w < \frac{1}{9}$
régularité	C^{1-}	C^{2-}	$C^{2.8}$	$C^{2+\alpha}$ avec $\alpha = 2 - \log_3(\max(9w, \frac{-15w+3}{2}))$
base optimale	2	2	2	3

TAB. I.1 – Régularité de schémas interpolants centrés.

Pour les schémas de Lagrange, il existe encore de nombreux problèmes ouverts notamment pour des décentrages quelconques.

En section I.5.2 et I.5.3, nous donnerons des éléments de réponse pour le comportement de ces schémas.

On a vu que les schémas splines ont une régularité maximale mais un ordre d'approximation faible. Symétriquement, les schémas de Lagrange présentent l'avantage d'avoir un ordre maximal mais une régularité faible.

L'idée récente [DFH05, CLY06] est de chercher un compromis entre les deux types de schémas en mixant les propriétés d'approximation et d'interpolation.

I.3.4 Un troisième exemple: des schémas approximants inspirés de schémas interpolants

Une première idée due à N. Dyn, M.S. Floater et K. Hormann [DFH05] est de mixer le schéma linéaire Lagrange centré $S_{2,2}$ avec un schéma B-spline de degré 2 pour améliorer la régularité en translatant de $\frac{1}{4}$ les valeurs de $p_{n,2,2}$

$$(Sf)_{2n} = p_{n,2,2} \left(\frac{1}{4} \right) \quad \text{et} \quad (Sf)_{2n+1} = p_{n,2,2} \left(\frac{3}{4} \right). \quad (\text{I.31})$$

On obtient un schéma de régularité C^2 et une régularité numérique $C^{2.67}$ [DFH05].

L'ordre d'approximation est égal à 3, à condition de prendre les données initiales

$$f = (g((n - \frac{1}{2})h))_n.$$

Si on remplace $p_{n,2,2}$ par $p_{n,1,1}$, on retrouve le schéma B-spline de degré 2 qui est C^1 . On peut étendre cette méthode en utilisant des polynômes de Lagrange centrés $p_{n,l,l}$. Numériquement, on gagne en régularité par rapport au schéma linéaire de Lagrange correspondant (tableau I.2).

Théoriquement, on ne peut rien dire sur la convergence et la régularité dans le cas général.

Une deuxième idée due à S.W. Choi, B-G. Lee, Y.J. Lee et J. Yoon [CLY06] est de construire des schémas approximants reproduisant exactement ou de façon translatés de $\frac{1}{4}$ les polynômes d'un degré donné, en introduisant un paramètre w .

Si l'on souhaite reproduire exactement les polynômes de degré $2l - 1$, on construit un schéma approximant, de support $\text{supp}(a) = [-2l, 2l]$, avec $a_{-2l} = a_{2l} = w$ et utilisant $2l + 1$ points.

Si l'on souhaite reproduire de façon translatés les polynômes de degré $2l$, on construit un schéma de support $\text{supp}(a) = [-2l - 2, 2l + 1]$, avec $a_{-2l-2} = a_{2l+1} = w$ et utilisant $2l + 2$ points.

L'avantage de ces schémas est que l'on peut avoir reproduction exacte de polynômes et avoir une meilleure régularité que les schémas de Lagrange.

Par exemple pour un schéma reproduisant exactement les polynômes de degré 3, on peut construire un schéma utilisant 5 points et une régularité numérique C^3 (figure I.6 et tableau I.2).

Le désavantage est de devoir utiliser $N + 2$ points pour reproduire des polynômes de degré N .

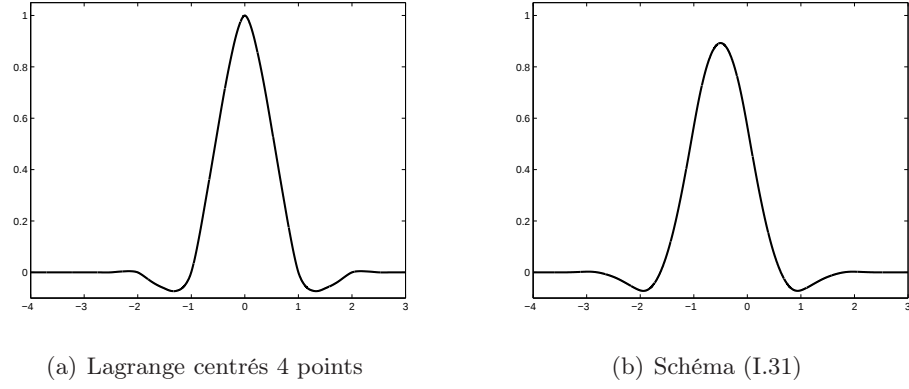


FIG. I.5 – Comparaison fonction limite pour le schéma de Lagrange et le schéma (I.31) 4 points pour $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

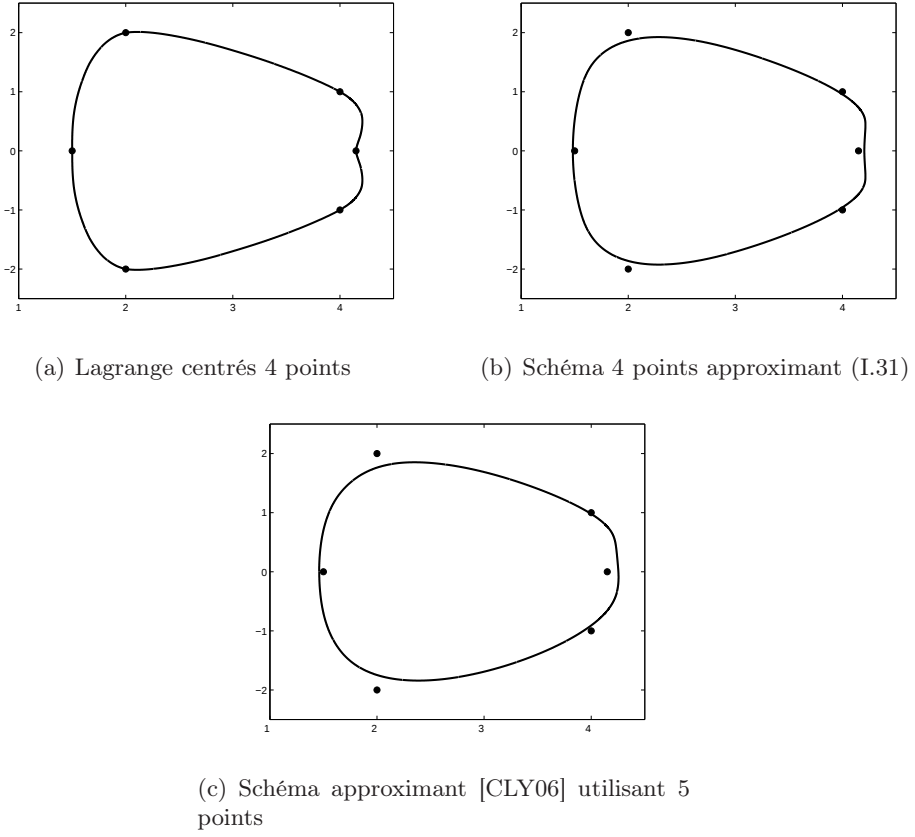


FIG. I.6 – Comparaison entre le schéma de Lagrange (C^{2-}), le schéma (I.31) 4 points (C^2) et le schéma 5 points de [CLY06] (C^3) pour une courbe (S est appliqué de façon indépendante aux coordonnées des points).

schéma	S de [DFH05]	S de [DFH05]	S de [DFH05]	S de [CLY06]	S de [CLY06]
régularité	$C^{2.67}$	$C^{3.51}$	$C^{5.27}$	C^3	C^6
nombre de points utilisés	4	6	12	5	11
ordre d'approximation	4	6	12	4	10

TAB. I.2 – Comparaison de schémas approximants inspirés de schémas interpolants.

Dans la suite, nous allons donner des techniques pour étudier la convergence et la régularité de schémas de subdivision, construits à partir de la donnée du masque. Ces techniques utilisent des polynômes trigonométriques ou des valeurs propres de matrices. Elles sont la généralisation par N. Dyn [Dyn92] ou A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91] des outils utilisés par G. Deslaurier et S. Dubuc [DD89].

Nous donnerons ensuite une approche différente, plus naturelle, qui consiste à approcher le schéma que l'on souhaite étudier par un schéma convergeant.

I.4 Techniques classiques d'étude de la convergence

Dans cette partie, nous travaillerons avec $s = 1$. Ces techniques restent cependant utilisables pour $s > 1$, même si leur mise en oeuvre est plus difficile.

I.4.1 Utilisation des séries de Fourier et du symbole du schéma

On déjà vu que la définition du schéma (I.1) pouvait se voir comme l'utilisation de deux filtres. En utilisant les séries trigonométriques, cela se traduit, pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, par

$$SF(\theta) = a(\theta)F(2\theta) \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \sum_n f_n e^{in\theta}, \quad SF(\theta) = \sum_n (Sf)_n e^{in\theta} \quad \text{et} \quad a(\theta) = \sum_n a_n e^{in\theta}. \quad (\text{I.32})$$

$a(\theta)$ est un polynôme trigonométrique et s'appelle le symbole associé au schéma de subdivision de masque a (en relation avec le symbole d'une analyse multirésolution [Mal89]).

L'étude du symbole peut fournir des techniques d'études de convergence.

Une première méthode consiste à remarquer que la relation d'échelle s'écrit (Annexe A)

$$\hat{\phi}(\theta) = \prod_{j=1}^{+\infty} a(2^{-j}\theta)\hat{\phi}(0),$$

avec $\hat{\phi}(0) = 1$ car $\sum_n \phi(x - n) = 1$.

L'étude du produit infini fournit un moyen de montrer la convergence; ceci a été utilisée par G. Deslauriers et S. Dubuc [DD89].

Une deuxième méthode consiste à traduire en terme de symbole le théorème I.3. C'est cette technique que nous allons décrire ci-dessous.

I.4.1.a Symbole du schéma itéré et reproduction des polynômes

On peut déduire de l'équation (I.32) les propriétés suivantes (O. Rioul [Rio92], [CDM91] corolaire 6.3)

PROPOSITION I.13

(i) Si S^L est le schéma itéré L fois, alors on a

$$S^L F(\theta) = \prod_{j=0}^{L-1} a(2^j \theta) F(2^L \theta) \quad \text{et} \quad a_L(\theta) = \prod_{j=0}^{L-1} a(2^j \theta). \quad (\text{I.33})$$

On a aussi

$$f_{2^L n+k}^L = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2^L m+k}^L f_{n-m} \quad \text{pour } k = 0 \dots 2^L - 1$$

- (ii) Le schéma associé au masque a vérifie la condition de masque (I.6) si et seulement si $a(0) = 2$ et $a(\pi) = 0$.
- (iii) Le schéma associé au masque a reproduit les polynômes de degré k ssi $a^{(l)}(\pi) = 0$ pour tout $l \leq k$.

Il est possible d'avoir la reproduction exacte des polynômes en imposant la condition supplémentaire $a^{(l)}(0) = 0$ pour tout $2 \leq l \leq k$.

I.4.1.b Symbole du schéma aux différences

En termes de symboles, on remarque que l'opérateur aux différences d'ordre k , d^k (I.13), s'écrit

$$d^k F(\theta) = \frac{(1 - e^{i\theta})^k}{e^{ik\theta}} F(\theta) \quad \text{avec} \quad d^k F(\theta) = \sum_n (d^k f)_n e^{in\theta}. \quad (\text{I.34})$$

On peut en déduire le symbole du schéma aux différences S_k avec la relation $S_k(d^k f) = d^k(Sf)$ ce qui donne

PROPOSITION I.14

Soit a^k le symbole associé au schéma aux différences d'ordre k vérifiant $a^{(k)}(\pi) = 0$, alors il existe un schéma aux différences d'ordre $k+1$ et son symbole s'écrit

$$a^k(\theta) = \frac{e^{ik\theta}}{(1 + e^{i\theta})^k} a(\theta). \quad (\text{I.35})$$

Ceci donne un moyen d'étudier la convergence et la régularité avec le théorème I.3

Pour montrer la convergence, on doit chercher un niveau L à partir duquel on a $\|S_k^L\|_\infty < 1$ en

1. calculant a^{k+1} avec la relation (I.35),
2. calculant a_L^{k+1} avec la relation (I.33),
3. calculant $\|S_k^L\|_\infty$ avec la remarque I.1,
4. vérifiant que $\|S_k^L\|_\infty < 2^{-k}$.

On obtient alors la constante de Hölder $\alpha = -k - \frac{\log_2(\|S_k^L\|_\infty)}{L}$.

REMARQUE I.6

Il est possible d'exprimer a_L^k en fonction de a_L de façon plus directe.

On a $S^L F(\theta) = a_L(\theta) F(2^L \theta)$. Par exemple, pour $k=1$, on cherche le symbole de S_1^L en écrivant

$$\begin{aligned} S_1^L dF(\theta) &= \sum_{n,k} (f_{2^L n+1+k} - f_{2^L n+k}) e^{i(2^L n+k)\theta} \\ &= \sum_{n,k} (e^{-i\theta} - 1) \sum_m (a_{2^L n+k} e^{i(2^L m+k)\theta}) (f_{n-m} e^{i2^L(n-m)\theta}) \\ &= e^{-i\theta} (1 - e^{i\theta}) a_L(\theta) F(2^L \theta) \end{aligned}$$

D'après la relation (I.34), $F(2^L \theta) = \frac{e^{i2^L \theta}}{1 - e^{i2^L \theta}} dF(2^L \theta)$.

On obtient

$$S_1^L dF(\theta) = \frac{e^{i(2^L-1)\theta}}{1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(2^L-1)\theta}} a_L(\theta) dF(2^L \theta).$$

Donc le symbole de S_1^L s'écrit

$$a_L^{(1)}(\theta) = \frac{e^{i(2^L-1)\theta}}{1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(2^L-1)\theta}} a_L(\theta).$$

EXEMPLE I.4

Pour les schémas B-splines (section I.3.2), le symbole associé à un schéma de degré m s'écrit

$$a(\theta) = 2^{-m} \sum_n \binom{m+1}{n} e^{in\theta} = 2^{-m} (1 + e^{i\theta})^{m+1} \quad (\text{I.36})$$

On peut alors montrer que

la régularité de la fonction limite d'un schéma B-spline de degré m est C^{m-} .

En effet, d'après la proposition I.13, les schémas aux différences d'ordre $m+1$ et d'ordre m s'écrivent

$$a^{m+1} = 2^{-m} e^{i(m+1)\theta} \quad \text{et} \quad a^m = 2^{-m} e^{im\theta} (1 + e^{i\theta}).$$

On peut appliquer le théorème I.3, la fonction limite d'un schéma B-spline vérifiant la condition de stabilité L^∞ .

Pour $2^m S_{m+1}$, $2^{mL} a_L^{(m+1)} = \prod_{j=0}^{L-1} e^{i2^j(m+1)\theta}$ donc $\|2^{mL} S_{m+1}^L\|_\infty = 1$, pour tout L . Donc la fonction limite n'est pas C^m .

Pour $2^{m-1} S_m$, $\|2^{m-1} S_m\|_\infty = 2^{-1}$ donc $\rho(2^{m-1} S_m) = 2^{-1}$. La fonction limite est C^{m-} .

Les schémas B-splines de degré m sont optimaux pour la régularité au sens où ce sont les seuls schémas à avoir une régularité C^{m-} et un support de longueur $m+2$ (proposition 8.4 [CDM91]).

EXEMPLE I.5

Un exemple récent est celui de K. Hormann et M.A. Sabin [HS07] qui définissent des schémas à partir de leurs symboles

$$a_k(\theta) = 2^{-(k-1)} (1 + e^{i\theta})^k \frac{(-k + (8 + 2k)e^{i\theta} - ke^{i2\theta})}{8} \quad (\text{I.37})$$

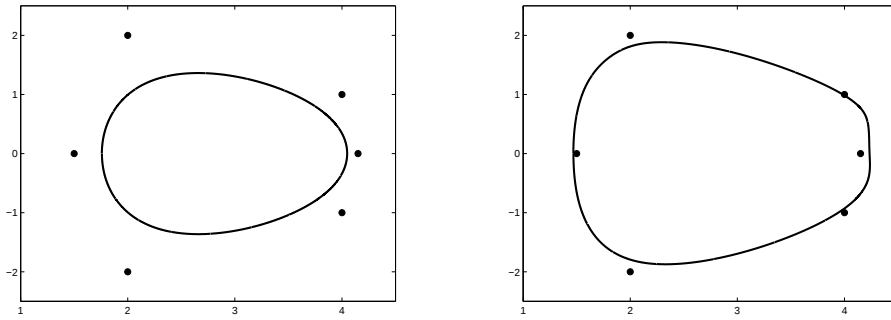
Dans la première partie du second membre, on retrouve le symbole d'un schéma B-spline de degré $k - 1$.

Pour $k = 4$, on retrouve le schéma de Lagrange centré utilisant 4 points.

Pour $k = 5$, on retrouve le schéma mixte [DFH05] (section I.3.4).

En utilisant le symbole, les auteurs montrent la reproduction des polynômes de degré 2 pour $k = 3$ et de degré 3 pour $k \leq 4$; de la même façon, ils calculent la régularité en fonction de k qui s'écrit $k - \log_2(2 + \frac{k}{2})$.

On a une régularité plus faible que les schémas splines, mais une meilleure approximation (figure I.7).



(a) Schéma spline de degré 5 utilisant 4 points (b) Schéma (I.37) avec $k = 6$ utilisant 5 points

FIG. I.7 – Comparaison entre le schéma de [HS07] et le schéma spline de degré 5.

EXEMPLE I.6

Pour les schémas de Lagrange à l points à gauche et r points à droite (section I.3.3), le symbole s'écrit

$$a(\theta) = 1 + \sum_{n=-l+1}^r L_{-n} \left(\frac{1}{2} \right) e^{i(2n+1)\theta} \quad \text{avec} \quad L_n \left(\frac{1}{2} \right) = \prod_{\substack{k=-l+1 \\ k \neq n}}^r \frac{\frac{1}{2} - k}{n - k}. \quad (\text{I.38})$$

Si le schéma converge, la proposition I.13 fournit les valeurs de la fonction limite ϕ aux points dyadiques. En effet, le caractère interpolant de ϕ implique

$$\forall j > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \phi(2^{-j}n) = a_n^j.$$

La méthode décrite est pratique pour montrer la convergence et estimer la régularité. Mais, elle possède des limites: numériquement, on ne peut pas étudier a^L pour $L > 10$. C'est donc une méthode qui sert uniquement à montrer la convergence si $L \leq 10$.

Pour la divergence, d'après la proposition I.3, il faudrait montrer qu'il n'existe pas de niveau L pour lequel S_1^L contracte, ce qui est impossible en général.

Une autre technique consiste à travailler avec des matrices associées aux schémas et à utiliser des liens qui existent entre ses valeurs propres et la convergence.

I.4.2 Utilisation des matrices de subdivision

I.4.2.a Traduction matricielle

On constate que les relations (I.2) peuvent s'écrire sous forme matricielle en faisant intervenir un nombre fini de point.

En effet, pour un schéma convergeant, l'expression $S^\infty f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi(x - n)$ permet de voir que tous les points dyadiques de $[n, n+1[$ peuvent être construits avec les points $\{f_{n-m}$ avec $m = n_1, \dots, n_2 - 1\}$ où $\text{supp}(a) = [n_1, n_2]$.

On peut faire de même à l'échelle 1, avec les intervalles $[n, n + 2^{-1}[$ et $[n + 2^{-1}, n + 1[$ et en utilisant les points $(Sf_{2n-m})_{m=n_1, \dots, n_2-1}$.

On peut alors en déduire l'existence de deux matrices, de taille $n_2 - n_1$, de passages entre deux échelles.

La définition du schéma donne

$$SF_{2n} = A_0 F_n \quad \text{et} \quad SF_{2n+1} = A_1 F_n \quad (\text{I.39})$$

avec $F_n = (f_{n-m})_{m=n_1 \dots n_2-1}$, $SF_{2n} = ((Sf)_{2n-m})_{m=n_1 \dots n_2-1}$, $A_e = (a_{2m-n-e})_{n_1 \leq n, m \leq n_2-1}$ et $e \in \{0, 1\}$.

EXEMPLE I.7

Par exemple, pour un masque défini par $a = (a_{-2}, a_{-1}, \dots, a_2)$, on a

$$\begin{pmatrix} (Sf)_{2n+2} \\ (Sf)_{2n+1} \\ (Sf)_{2n} \\ (Sf)_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-2} & a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} & a_1 & 0 \\ 0 & a_{-2} & a_0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_{-1} & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \\ f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (Sf)_{2n+3} \\ (Sf)_{2n+2} \\ (Sf)_{2n+1} \\ (Sf)_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_1 & 0 & 0 \\ a_{-2} & a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} & a_1 & 0 \\ 0 & a_{-2} & a_0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+3} \\ f_{n+2} \\ f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

On peut alors remarquer que des valeurs propres particulières apparaissent (ici a_{-2} pour A_0 et a_2 pour A_1).

On voit aussi que les matrices A_0 et A_1 ne commutent pas.

Concernant les valeurs propres, on a la propriété suivante [Dyn92]

PROPOSITION I.15

Soit S un schéma convergeant. On note A_0 et A_1 les matrices associées au schéma (I.39) alors

- (i) 1 est valeur propre des matrices A_0 et A_1 avec pour vecteur propre, le vecteur unité $u = (1, \dots, 1)^t$.
- (ii) 1 est valeur propre des matrices A_0^t (resp. A_1^t) avec pour vecteur propre $(\phi(n))_{n=n_1 \dots n_2-1}$ (resp. $(\phi(n))_{n=n_1+1 \dots n_2}$).
- (iii) Si S reproduit exactement les polynômes de degré d alors $1, \dots, 2^{-d}$ sont valeurs propres des matrices A_0 et A_1 .

Les propriétés que vérifient la fonction d'échelle d'un schéma convergeant (proposition I.2), c'est-à-dire la condition de masque, la relation d'échelle et l'écriture de toute fonction limite comme combinaison linéaire de fonction d'échelle, se traduisent aussi en terme de produit matriciel de A_0 et A_1 .

I.4.2.b Matrice associée au schéma aux différences

Pour un schéma vérifiant la condition de masque, la définition du schéma aux différences d'ordre 1, $d(Sf) = S_1(df)$ permet d'écrire

$$A_e^{(1)} = (EA_e E^{-1})_{n_1 \leq k, l \leq n_2 - 2} \quad \text{avec } E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } e \in \{0,1\} \quad (\text{I.40})$$

On en déduit un analogue matriciel de la proposition I.3

PROPOSITION I.16

Si S vérifie la condition de masque (I.6) alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) S converge,
- (ii) il existe $L \in \mathbb{N}$ tel que $\|A_{e_L}^{(1)} \dots A_{e_2}^{(1)} A_{e_1}^{(1)}\|_\infty < 1$ pour tout $e_i \in \{0,1\}$.

Le choix de la norme $\|\cdot\|$ n'a pas d'importance. Comme les normes sont équivalentes en dimension finie, il suffit de trouver une norme matricielle qui réalisera le (ii) de la proposition I.16. De plus, cette propriété sera vraie pour toutes les normes, quitte à augmenter le nombre d'itérations L .

I.4.2.c Condition nécessaire de convergence et de régularité

La proposition I.16 donne une écriture matricielle du rayon spectral de S_1

$$\rho(S_1) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\max \left\{ \|A_{e_j}^{(1)} \dots A_{e_2}^{(1)} A_{e_1}^{(1)}\|_\infty^{1/j}, e_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, j \right\} \right).$$

Sachant que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|A^j\|^{1/j} = \rho(A)$, on peut écrire que

$$\max\{\rho(A_0^{(1)}), \rho(A_1^{(1)})\} \leq \rho(S_1) \leq \max\{\|A_0^{(1)}\|_\infty, \|A_1^{(1)}\|_\infty\}.$$

De plus, la relation (I.40) implique que le spectre de $A^{(1)}$ s'écrit par $sp(A^{(1)}) = sp(A) - \{1\}$. On peut en déduire une condition nécessaire pour la convergence du schéma à partir des valeurs propres des matrices A_0 et A_1 .

PROPOSITION I.17

Si S est un schéma de subdivision convergeant alors 1 est valeur propre de A_0 et A_1 .

De plus, toutes les valeurs propres de A_0 et A_1 , différentes de 1, sont de modules strictement **plus petites que** 1.

On en déduit aussi une condition nécessaire de régularité

PROPOSITION I.18

Si S est un schéma de subdivision convergeant dont la fonction limite est C^k et vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9) alors $1, \dots, 2^{-k}$ sont valeurs propres de A_0 et A_1 .

De plus, toutes les valeurs propres de A_0 et A_1 , différentes de $\{2^{-l}, l = 0 \dots k\}$, sont de modules strictement **plus petites que** 2^{-k} .

I.4.2.d Exemples

EXEMPLE I.8

Pour un **schéma B-spline de degré m** (section I.3.2), la taille de A_0 et A_1 est égale à $m + 1$. De plus, la régularité C^{m-1} implique que $\{1, \dots, 2^{-m}\}$ sont valeurs propres de A_0 et de A_1 . D'après l'exemple I.7, on a que $a_{-[2^{-1}m]-1} = a_{m-[2^{-1}m]} = 2^{-m}$ sont valeurs propres. Donc, le spectre des matrices A_0 et A_1 d'un schéma B-spline de degré m est $\{1, \dots, 2^{-m}\}$.

EXEMPLE I.9

Pour des **schémas interpolants de Lagrange $S_{l,r}$** (section I.3.3), la taille de A_0 et A_1 est égale à $2r + 2l - 2$.

On remarque que $(A_0)_{n,-2r+1} = a_{-2r+1}\delta_{n,-2r+1}$ et que $(A_1)_{n,2l-2} = a_{2l-1}\delta_{n,2l-2}$. Donc, $a_{-2r+1} = L_r(\frac{1}{2})$ est valeur propre de A_0 et $a_{2l-1} = L_{-l+1}(\frac{1}{2})$ est valeur propre de A_1 .

De plus, grâce à la propriété de reproduction exacte des polynômes, $\{1, \dots, 2^{-d+1}\}$ sont valeurs propres de A_0 et A_1 .

On obtient

les matrices du schéma de Lagrange $S_{l,r}$ admettent comme valeurs propres
 $\{L_r(\frac{1}{2}), 1, \dots, 2^{-d+1}\}$ *pour A_0 et $\{L_{-l+1}(\frac{1}{2}), 1, \dots, 2^{-d+1}\}$ pour A_1 .*
Il reste $r + l - 3$ valeurs propres indéterminées.

Par exemple, pour une schéma de Lagrange 4 points centrés ($r = l = 2$), on a les matrices suivantes

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A_0 et A_1 sont alors $\{-\frac{1}{16}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$ avec $\frac{1}{4}$ valeur propre double. Ceci empêche le schéma d'avoir une fonction limite C^2 , d'après la proposition I.18.

Numériquement, on voit que A_0 et A_1 n'ont pas les mêmes valeurs propres.

Les propositions I.17 et I.18 fournissent donc des conditions nécessaires de convergence et de régularité faciles à implémenter.

Par contre, pour montrer la convergence, les matrices associées au schéma de subdivision ne donnent pas de résultats pratiques. La non comutativité des deux matrices associées posent problème.

On a donc deux méthodes, une, utilisant les polynômes trigonométriques, pratique pour montrer la convergence et une autre, utilisant les matrices associées au schéma, pratique pour montrer la divergence.

Malheureusement, la première méthode, basée sur les polynômes trigonométriques, est très calculatoire et pose donc des problèmes lorsqu'il s'agit de calculer le polynôme trigonométrique associé à un grand nombre d'itérations du schéma.

Dans la suite, nous allons donner une troisième méthode pour montrer la convergence, assez facile à mettre en oeuvre, qui aura le grand avantage de pouvoir être généralisé aux schémas non-linéaires.

I.5 Complément à une technique d'étude de la convergence et application

Dans cette partie, nous donnons une troisième technique pour montrer la convergence dû à A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91]. Contrairement aux deux techniques précédentes basées sur des propriétés de linéarité, elle se généralise aux schémas non-linéaires. Ici, nous complétons ce résultat de convergence par un résultat de régularité et nous verrons comment l'appliquer aux schémas de Lagrange non-centrés.

I.5.1 Comparaison avec un schéma de subdivision convergeant

L'idée est de comparer un schéma linéaire avec un autre schéma que l'on sait convergeant. On introduit D un opérateur de $l^\infty(\mathbb{Z})$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

DÉFINITION I.14

On dit qu'un schéma de subdivision S est contractant par rapport à D si

$$\text{il existe } L > 0 \text{ et } c < 1, \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \text{ tel que } D(S^L f) \leq cD(f). \quad (\text{I.41})$$

I.5.1.a Convergence

On a le résultat suivant

THÉORÈME I.7

Soit S un schéma de subdivision **contractant** par rapport à D .

Soit S_0 un schéma **convergeant** dont la fonction limite vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9). Si

$$\exists C > 0, \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|Sf - S_0f\|_\infty \leq CD(f) \quad (\text{I.42})$$

alors le schéma S est convergeant.

Pour une preuve voir A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli [CDM91], théorème 3.1 ou N. Dyn [Dyn92], théorème 6.4.

La preuve utilise le théorème I.2 en choisissant ϕ_0 la fonction limite de S_0 et la suite de fonction

$$f^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^j \phi_0(2^j x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall f \in l^\infty(\mathbb{R}). \quad (\text{I.43})$$

La convergence uniforme de la suite de fonction $(f^j)_{j \in \mathbb{N}}$ vers $S^\infty f$ est obtenue en utilisant les propriétés de ϕ_0 (proposition I.2).

I.5.1.b Régularité

On peut améliorer le théorème I.7 en précisant la régularité de la fonction limite dans le cas où S est $C^{\alpha-}$ avec $\alpha \leq 1$.

THÉORÈME I.8

Sous les hypothèses du théorème I.7 et en notant $-\log_2(\rho)$ la régularité de S_0 , la fonction limite de S est $C^{\beta-}$ avec $\beta = \min\{-\frac{\log_2(c)}{L}, -\log_2(\rho)\}$.

Preuve

Pour simplifier la preuve, on regarde d'abord le cas $\beta \leq 1$ et $L = 1$, le cas L quelconque se déduisant facilement.

- Pour $\beta \leq 1$ et $L = 1$,

On considère f^j définie par (I.43).

En montrant la convergence, [CDM91] obtiennent la relation suivante pour f^j

$$\|f^{j+1} - f^j\|_{L^\infty} \leq M c^{j-1} D(f) \text{ avec } M = CB, \quad (\text{I.44})$$

en notant A et B les constantes de la condition de stabilité L^∞ de ϕ_0 (I.9).

Dans un premier temps, on choisit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x - y| < 1$. On a alors

$$\exists J > 0, \text{ tel que } 2^{-(J+1)} < |x - y| \leq 2^{-J}. \quad (\text{I.45})$$

On écrit

$$|S^\infty f(x) - S^\infty f(y)| \leq |S^\infty f(x) - f^J(x)| + |f^J(x) - f^J(y)| + |S^\infty f(y) - f^J(y)|.$$

Pour $|S^\infty f(x) - f^J(x)|$ et $|S^\infty f(y) - f^J(y)|$, on utilise l'équation (I.44) de la façon suivante

$$\begin{aligned} |S^\infty f(x) - f^J(x)| &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} |f^j(x) - f^J(x)| \\ &\leq \sum_{j \geq J} |f^{j+1}(x) - f^j(x)| \\ &\leq M D(f) \sum_{j \geq J} c^j \\ &\leq M \frac{D(f)}{1-c} c^J. \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Pour $|f^J(x) - f^J(y)|$, on a

$$|f^J(x) - f^J(y)| = \left| \sum_n f_n^J (\phi_0(2^J x - n) - \phi_0(2^J y - n)) \right|.$$

★ Tout d'abord, on suppose que x et y appartiennent à une grille X^J de pas 2^{-J} c'est-à-dire qu'il existe $(n_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = 2^{-J} n_x$ et $y = 2^{-J} n_y$.

Avec l'hypothèse (I.45), on a $\frac{1}{2} < |n_x - n_y| \leq 1$ donc $|n_x - n_y| = 1$. On choisit $n_y = n_x + 1$.

Avec un changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} |f^J(x) - f^J(y)| &\leq \left| \sum_n f_n^J (\phi_0(n_x - n) - \phi_0(n_x + 1 - n)) \right| \\ &\leq \left| \sum_n (f_n^J - f_{n+1}^J) \phi_0(n_x - n) \right| \\ &\leq B \|df^J\|_\infty. \end{aligned}$$

Avec les hypothèses de contraction (I.41) et de majoration (I.42), on a

$$\begin{aligned} |f^J(x) - f^J(y)| &\leq B \|d(S_0 f^{J-1})\|_\infty + 2B \|(S - S_0) f^{J-1}\|_\infty \\ &\leq B \|S_1(df^{J-1})\|_\infty + 2BM c^{J-1} D(f), \end{aligned}$$

en notant S_1 le schéma aux différences d'ordre 1 associé à S_0 .

Comme S_0 est convergent, d'après la proposition I.3, il existe $L_1 \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$ tel que $\|S_1^{L_1}\|_\infty \leq \rho^{L_1}$, en notant S_1 le schéma aux différences d'ordre 1 associé à S_0 . Ce qui donne

$$\begin{aligned} |f^J(x) - f^J(y)| &\leq B \|S_1^{L_1}(df^{J-L_1})\|_\infty + 2BMD(f) \sum_{i=1}^{L_1} \|S_1^{i-1}\|_\infty c^{J-i} \\ &\leq B\rho_1^L \|df^{J-L_1}\|_\infty + 2BMD(f) \max\{\|S_1^i\|_\infty, i = 0 \dots L_1 - 1\} \sum_{i=1}^{L_1} c^{J-i} \\ &\leq B\rho_1^L \|df^{J-L_1}\|_\infty + M_1 c^{J-L_1}, \end{aligned}$$

avec $M_1 = 2BMD(f) \max\{\|S_1^i\|_\infty, i = 0 \dots L_1 - 1\} \frac{1-c^{L_1}}{1-c}$.

En posant $J \equiv j_0[L_1]$ et $M_2 = B \max\{\|df^i\|_\infty, i = 0 \dots L_1 - 1\}$, on obtient par itération

$$\begin{aligned} |f^J(x) - f^J(y)| &\leq M_2 \rho^{J-j_0} + M_1 \sum_{i=1}^{\frac{J-j_0}{L_1}} c^{J-iL_1} \rho^{L_1(i-1)} \\ &\leq M_2 \rho^{J-L_1} + M_1 c^{J-L_1} \sum_{i=1}^{\frac{J-j_0}{L_1}} (c^{-1} \rho)^{L_1(i-1)} \\ &\leq M_2 \rho^{-(L_1+1)} \rho^{J+1} + M_1 c^{J-L_1} \frac{1 - c^{-(J-j_0)} \rho^{J-j_0}}{1 - c^{-1} \rho} \\ &\leq M_2 \rho^{-(L_1+1)} \rho^{J+1} + M_1 \frac{1}{1 - c^{-1} \rho} c^{J-L_1} + M_1 c^{J-L_1} c^{-J} \frac{\rho^{J-j_0}}{1 - c^{-1} \rho} \\ &\leq M_3 \rho^{J+1} + M_4 c^{J+1} + M_5 \rho^{J+1}, \end{aligned}$$

avec $M_3 = M_2 \rho^{-(L_1+1)}$, $M_4 = M_1 c^{-(L_1+1)} \frac{1}{1-c^{-1}\rho}$ et $M_5 = M_1 c^{-L_1} \frac{\rho^{-(L_1+1)}}{1-c^{-1}\rho}$.

En notant $c_1 = \max\{c, \rho\}$, on a

$$\begin{aligned} |f^J(x) - f^J(y)| &\leq (M_3 + M_4 + M_5) c_1^{J+1} \\ &\leq (M_3 + M_4 + M_5) 2^{-(\log_2(c_1))(J+1)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne avec l'hypothèse (I.45)

$$|f^J(x) - f^J(y)| \leq M_6 |x - y|^{-\log_2(c_1)} \quad (\text{I.47})$$

Avec les inégalités (I.46) et (I.47), on a quand x et y sont deux points consécutifs de X^J

$$|S^\infty f(x) - S^\infty f(y)| \leq M_7 |x - y|^{-\log_2(c_1)}. \quad (\text{I.48})$$

avec $M_7 = \max\{M_6, MD(f) \frac{2c^{-1}}{1-c}\}$.

★ Dans le cas où x et y ne sont pas dyadiques, on utilise la continuité uniforme de $S^\infty f$:
il existe j_1 tel que

$$\forall(x, x'), |x - x'| \leq 2^{-j_1} \implies |S^\infty f(x) - S^\infty f(x')| \leq 1$$

Avec l'hypothèse (I.45), on peut choisir n_x tel que $2^{-J+1} \leq |x - 2^{-J}n_x| < 2^{-J}$ et n_y tel que $|n_x - n_y| = 1$.

On décompose alors les intervalles $(x, 2^{-J}n_x)$ et $(y, 2^{-J}n_y)$ en 2^{j_1-J+1} sous intervalles de longueur 2^{-j_1} , on obtient

$$\begin{aligned} |S^\infty f(x) - S^\infty f(y)| &\leq 2^{j_1-J+1} + |S^\infty f(2^{-J}n_x) - S^\infty f(2^{-J}n_y)| + 2^{j_1-J+1} \\ &\leq 2^{j_1+3} 2^{-(J+1)} + M_7 |2^{-J}(n_x - n_y)|^{-\log_2(c_1)} \\ &\leq (2^{j_1+3} + 2M_7) |x - y|^{-\log_2(c_1)} \end{aligned}$$

On retrouve alors l'inégalité (I.48) pour des nombres non dyadiques avec $|x - y| < 1$.

Dans le cas $|x - y| \geq 1$, on utilise la remarque I.4 sur le fait que l'inégalité (I.48) est immédiatement vérifiée (on rappelle que l'on travaille avec des suites à support fini).

Dans tous les cas, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|S^\infty f(x) - S^\infty f(y)| \leq M_8 |x - y|^\beta,$$

avec $\beta = \min\{-\log_2(c), -\log_2(\rho)\}$ ce qui donne le résultat de régularité.

• Pour $1 < \beta \leq 2$ et $L = 1$,

On a $\frac{1}{4} \leq c < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4} \leq \rho < \frac{1}{2}$. On note S_1 le schéma aux différences d'ordre 1 associé à S_0 .

S_0 étant C^1 , S_1 existe et $2S_1$ converge (théorème I.3).

On définit $(g^j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de fonction

$$g^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{R}} 2^j df_n^j \phi_1(2^j x - n) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec ϕ_1 la fonction d'échelle de $2S_1$.

De même que pour le théorème de convergence I.7, on montre que

$$\begin{aligned} g^{j+1}(x) - g^j(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{j+1} (df_n^{j+1} - S_1(df_n^j)_n) \phi_1(2^{j+1}x - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{j+1} (df_n^{j+1} - d(S_0 f^j)_n) \phi_1(2^{j+1}x - n). \end{aligned}$$

Par hypothèses et ϕ_1 étant à support compact, on peut conclure

$$\begin{aligned} \|g^{j+1} - g^j\|_\infty &\leq CB \|d\|_\infty 2^{j+1} c^{j-1} D(f), \\ &\leq M(2c)^{j-1}, \end{aligned} \tag{I.49}$$

avec $M = 4CB$.

La suite de fonction $(g^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^∞ . On note g sa limite.

De plus, ϕ_1 vérifie la stabilité L^∞ , la propriété de fonction d'échelle et $\sum_n \phi_1(\cdot - n) = 1$ (remarque I.5). On a

$$\begin{aligned} A_1 \|2^j df_n^j - g(2^{-j}n)\|_\infty &\leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (2^j df_n^j - g(2^{-j}n)) \phi_1(2^j \cdot - n) \right\|_\infty \\ &\leq \|g^j(x) - g(x)\|_\infty + \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g(x) - g(2^{-j}n)) \phi_1(2^j x - n) \right\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité uniforme de g et le fait que ϕ_1 est à support compact, on obtient

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|2^j df_n^j - g(2^{-j}n)\|_\infty = 0.$$

La suite $2^j df_n^j$ converge vers g .

D'après la proposition I.4, $S^\infty f$ est donc C^1 et $(S^\infty f)' = g$.

Le reste de la preuve est identique au cas $\beta \leq 1$ en utilisant S_2 le schéma aux différences d'ordre 2 associé à S_0 en utilisant $c_1 = \max(2c, 2\rho) < 1$ dans l'inégalité I.47.

On peut alors conclure à une inégalité du type (I.48) avec une constante de Hölder $-\log(c_1) = -1 + \min(-\log_2(c), -\log_2(\rho))$ pour f' .

- Pour le cas $\beta > 2$ ou $L > 1$, la preuve reste identique.

□

REMARQUE I.7

La régularité du schéma est limitée par la régularité du schéma de référence S_0 , le nombre d'itération et la constante de contraction. Le choix de S_0 apparaît crucial pour obtenir une "bonne" constante de régularité.

REMARQUE I.8

Si les deux schémas S et S_0 vérifient la condition de masque (I.6) alors on pourra écrire pour tout n et $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ (N. Dyn [Dyn92] proposition 6.7),

$$((S - S_0)f)_n = \sum_m b_{n-2m} df_n,$$

donc on aura l'hypothèse de majoration (I.42) vérifiée pour $D(f) = \|df\|_\infty$.

Il est donc naturel de prendre pour D la norme d'un opérateur aux différences et plus particulièrement, $D(f) = \|df\|_\infty$ pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Pour des schémas non-linéaires, on utilisera $D(f) = \|d^k f\|_\infty$ (chapitre II).

I.5.1.c Utilisations possibles

On peut utiliser ces deux théorèmes pour redémontrer la proposition I.3 de régularité, sous l'hypothèse de contraction du schéma aux différences S_1^L et $D(f) = \|df\|_\infty$.

En effet, les hypothèses du théorème I.7 sont vérifiées avec $S_{1,1}$ le schéma de Lagrange 2 points. Le théorème I.8 donne la constante de régularité qui est égale à $\beta = -\log_2(c)$, puisque $S_{1,1}$ a une régularité C^{1-} .

Pour A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli, le théorème I.7 sert surtout à montrer la convergence de schémas dont le support vérifie certaines propriétés topologiques. Les auteurs démontrent la convergence de tous les schémas dont le masque est positif avec un support $[n_1, n_2]$, $n_1 + 1 < n_2$ et $a_n \neq 0$ pour tout $n \in [n_1, n_2]$. Ils choisissent $D(f) = \sup\{|f_n - f_m| \text{ avec } (n, m) \text{ tel que } n_1 - n_2 < n - m < n_2 - n_1\}$ et le schéma de Lagrange $S_{1,1}$ (théorème 3.3 [CDM91]).

Une autre utilisation possible de ces théorèmes est l'étude de la convergence d'un schéma s'écrivant comme la somme d'un schéma convergeant et d'une combinaison linéaire d'opérateurs aux différences.

Dans la suite, on prendra $D(f) = \|d^k f\|_\infty$, S_0 un schéma convergeant vérifiant donc la condition de masque (I.6).

Cela donnera une méthode pour montrer la convergence et permettra d'avoir un résultat de régularité dans le cas où $2^{-k+1} < \|S_k\|_\infty < 1$ c'est-à-dire lorsque la proposition I.5 ne s'applique pas.

Dans la section suivante, nous allons utiliser cette méthode pour établir la convergence de schémas de Lagrange non centrés pour lesquels il n'existe pas de résultats généraux de convergence.

I.5.2 Application à l'étude des schémas de Lagrange complètement décentrés (l=1)

Comme nous l'avons précisé (section I.3.3), la convergence des schémas interpolants de Lagrange centrés est bien connue (théorème I.6). Mais pour des schémas de Lagrange quelconques, il n'existe pas de résultats généraux.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux schémas de Lagrange utilisant 1 points à gauche et r points à droite. Nous appellerons ces schémas, des schémas de Lagrange complètement décentrés droite et les noterons $S_{1,r}$. Par symétrie, les résultats établis seront valables pour les schémas de Lagrange complètement décentrés gauche.

L'écriture d'un schéma de Lagrange complètement décentré droite utilisant r points à droite est donnée par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad a_{2m} = \delta_{0,m} \quad \text{et} \quad a_{2m+1} = L_{-m} \left(\frac{1}{2} \right) \quad \text{avec} \quad L_m \left(\frac{1}{2} \right) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^r \frac{\frac{1}{2} - k}{m - k}. \quad (\text{I.50})$$

Dans ce cas, $\text{supp}(a) = [-2r + 1, 1]$. Il n'y a pas symétrie des coefficients.

Par exemple,

pour $r = 2$ Le masque du schéma est $a_{-3} = -\frac{1}{8}$, $a_{-1} = \frac{3}{4}$, $a_1 = \frac{3}{8}$ et $a_0 = 1$.

pour $r = 3$ Le masque du schéma est $a_{-5} = -\frac{1}{16}$, $a_{-3} = -\frac{5}{16}$, $a_{-1} = \frac{15}{16}$, $a_1 = \frac{5}{16}$ et $a_0 = 1$.

Pour ces deux valeurs de r , on peut appliquer directement les résultats de la section I.4.1. On obtient la convergence et la régularité (I.8).

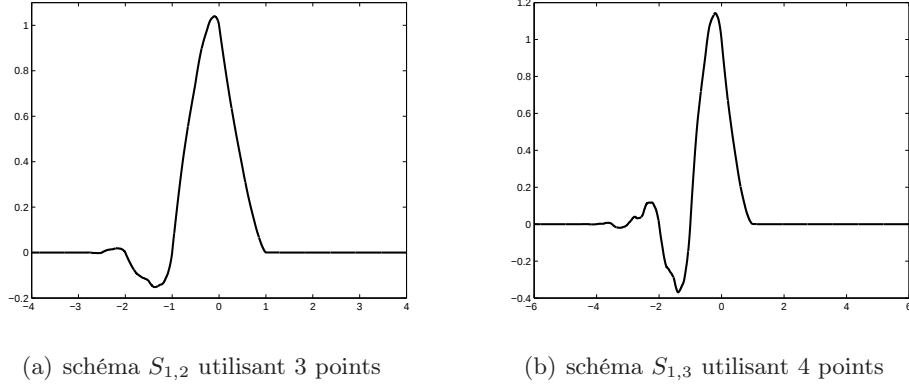


FIG. I.8 – Fonction d'échelle de schémas de Lagrange complètement décentrés $S_{1,r}$.

I.5.2.a Convergence de $S_{1,r}$ pour $r \leq 7$

Pour montrer la convergence des schémas, nous allons utiliser le théorème I.7 en comparant $S_{1,r}$ à un schéma de Lagrange convenablement choisi (remarque I.7).

Une première écriture

Tout d'abord, on obtient par récurrence sur r

$$S_{1,r}(f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F_r(d^2 f)_{2n+1},$$

avec $F_r(d^2 f)_{2n+1}$ défini par

– si r est impair,

$$\begin{aligned} F_r(d^2 f)_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{r-1} d^k f_{n+\frac{k}{2}+1} \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r-2} d^{k+1} f_{n+\frac{k+1}{2}} \frac{(4k+5)(2k-1)!}{2^{2k+1}(k-1)!(k+2)!}, \end{aligned}$$

– si r est pair,

$$\begin{aligned} F_r(d^2 f)_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{r-2} d^k f_{n+\frac{k}{2}+1} \frac{(2k-1)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r-3} d^{k+1} f_{n+\frac{k+1}{2}} \frac{(4k+5)(2k-1)!}{2^{2k+1}(k-1)!(k+2)!} \\ &\quad - \frac{(2N-3)!}{2^{2(N-2)}(N-3)!(N-1)!} d^r f_{n+\frac{N-1}{2}}. \end{aligned}$$

Une deuxième écriture

On peut réécrire $S_{1,r}$ sous la forme

– si r est impair,

$$S_{1,r}(f)_{2n+1} = S_{1,r-2}(f)_{2n+1} + \frac{(2r-1)!}{2^{2(r-1)}(r-2)!r!} d^{r-1} f_{n+\frac{r+1}{2}} - \frac{(4r-4)(2r-5)!}{2^{2r-3}(r-3)!r!} d^{r-1} f_{n+\frac{r+1}{2}-1},$$

r	$F_r(d^2 f)_{2n+1}$
3	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2}$
4	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2} - \frac{5}{128}d^4 f_{n+2}$
5	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2} - \frac{17}{256}d^4 f_{n+2} + \frac{7}{256}d^4 f_{n+3}$
6	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2} - \frac{17}{256}d^4 f_{n+2} + \frac{7}{256}d^4 f_{n+3} - \frac{21}{1024}d^6 f_{n+3}$
7	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2} - \frac{17}{256}d^4 f_{n+2} + \frac{7}{256}d^4 f_{n+3} - \frac{75}{2048}d^6 f_{n+3} + \frac{33}{2048}d^6 f_{n+4}$
8	$\frac{-3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2} - \frac{17}{256}d^4 f_{n+2} + \frac{7}{256}d^4 f_{n+3} - \frac{75}{2048}d^6 f_{n+3} + \frac{33}{2048}d^6 f_{n+4} - \frac{429}{32768}d^8 f_{n+4}$

TAB. I.3 – Expression du terme $F_r(d^2 f)_{2n+1}$ pour différentes valeurs de r .

– si r est pair,

$$S_{1,r}(f)_{2n+1} = S_{1,r-1}(f)_{2n+1} - \frac{(2r-1)!}{2^{2(r-1)}(r-1)!r!} d^r f_{n+\frac{r}{2}}.$$

Dans les tableaux I.3 et I.4, on donne quelques exemples d'écriture de $S_{1,r}$.

r	Perturbation	Constante de contraction	Constante de Régularité $C^{\beta-}$
3	$-\frac{3}{16}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{16}d^2 f_{n+2}$	$\ d^2(S_{1,3}f)\ _\infty \leq \frac{1}{2}\ d^2 f\ _\infty$	1
4	$-\frac{5}{128}d^4 f_{n+2}$	$\ d^4(S_{1,4}f)\ _\infty \leq \frac{31}{64}\ d^4 f\ _\infty$	1
5	$-\frac{17}{256}d^4 f_{n+2} + \frac{7}{256}d^4 f_{n+3}$	$\ d^4(S_{1,5}f)\ _\infty \leq \frac{87}{128}\ d^4 f\ _\infty$	0.55
6	$-\frac{21}{1024}d^6 f_{n+3}$	$\ d^6(S_{1,6}f)\ _\infty \leq \frac{369}{512}\ d^6 f\ _\infty$	0.47
7	$-\frac{75}{2048}d^6 f_{n+3} + \frac{33}{2048}d^6 f_{n+4}$	$\ d^6(S_{1,7}f)\ _\infty \leq \frac{475}{512}\ d^6 f\ _\infty$	0.1
8	$-\frac{429}{32768}d^8 f_{n+4}$	$\ d^8(S_{1,8}f)\ _\infty \leq \frac{54734}{32768}\ d^8 f\ _\infty$	×

TAB. I.4 – Terme de perturbation, inégalité de contraction et constante de régularité pour différentes valeurs de r .

Etude de la convergence

La convergence et la régularité peuvent alors être obtenues en application des théorèmes I.7 et I.8 de la façon suivante.

En posant $D(f) = \|d^r f\|_\infty$ pour r pair et $D(f) = \|d^{r-1} f\|_\infty$ pour r impair, la condition de contraction (I.41) est bien vérifiée pour $3 \leq r \leq 7$ (tableau I.4).

On choisit pour S_0 , le schéma $S_0 = S_{1,r-1}$ si r est pair ou le schéma $S_0 = S_{1,r-2}$ si r est impair. La fonction limite de S_0 vérifiant la condition de stabilité L^∞ (proposition I.12) et la majoration du terme de perturbation permettent d'appliquer le théorème I.7 pour $3 \leq r \leq 7$.

Avec le théorème I.8, on en déduit les constantes de régularité (tableau I.4).

THÉORÈME I.9

Les schémas complètement décentrés utilisant r points à droite $S_{1,r}$ convergent pour $r \leq 7$.

On peut faire plusieurs remarques à partir des constantes du tableau I.4.

- L'utilisation du théorème I.7 est pertinente.

En effet, on remarque sur les tableaux I.4 et I.5 que les schémas aux différences S_1 et S_{2k} vérifient $\|S_{2k}\|_\infty > 2^{-(2k+1)}$ et $\|S_1\|_\infty > 1$ pour $3 \leq r \leq 7$. Ceci empêche d'utiliser le théorème I.3 pour montrer la convergence avec $L = 1$ et impose des calculs laborieux.

r	3	4	5	6	7
$\ S_1\ _\infty$	1	$\frac{21}{16}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{77}{32}$	$\frac{55}{16}$

TAB. I.5 – $\|S_1\|_\infty$ pour S_1 , le schéma aux différences d'ordre 1 associée au schéma $S_{1,r}$ avec $3 \leq r \leq 7$.

- Pour $r \geq 8$, il n'y a plus contraction.

La figure I.9 représente la norme de $\|d^r S_{1,r}\|_\infty$ (r est pair) ou $\|d^{r-1} S_{1,r}\|_\infty$ (r est impair) en fonction de r .

On remarque que les normes augmentent très rapidement avec la longueur du support.

On ne peut donc pas conclure à la convergence sauf en calculant des itérés du schémas $\|d^8(S_{1,r}^L)\|_\infty$.

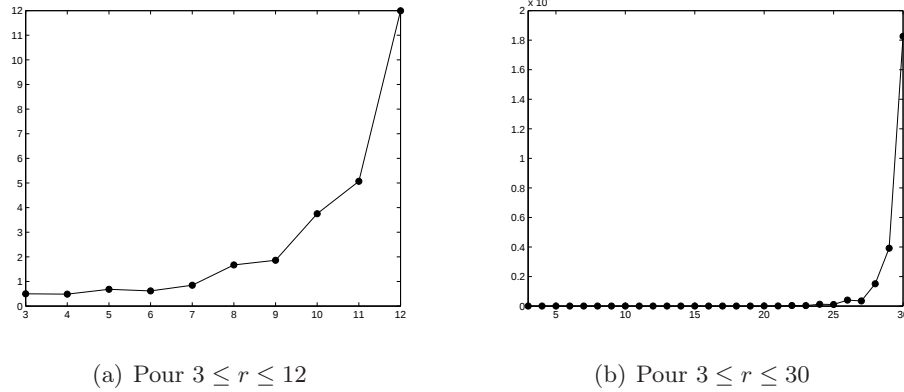


FIG. I.9 – Constante $\|d^r S_{1,r}\|_\infty$ (r est pair) ou $\|d^{r-1} S_{1,r}\|_\infty$ (r est impair).

- Sur le tableau I.4, on remarque que la régularité diminue en fonction du nombre de points. D'autre part, la constante trouvée ne traduit pas la régularité maximale. Les figures I.10 et I.11 illustrent la perte de régularité, plus on augmente la longueur du support.

I.5.2.b Etude de la divergence

La reproduction des itérés de $S_{1,r}^j(\delta_{n,0})$ pour $j = 12$, semble montrer que le schéma ne converge pas pour $r \leq 9$ (figures I.10 et I.11).

Pour confirmer la divergence des schémas $S_{1,r}$, nous allons évaluer les valeurs propres des matrices de subdivision associées aux schémas (section I.4.2).

On notera dans cette partie L_i pour $L_i(\frac{1}{2})$.

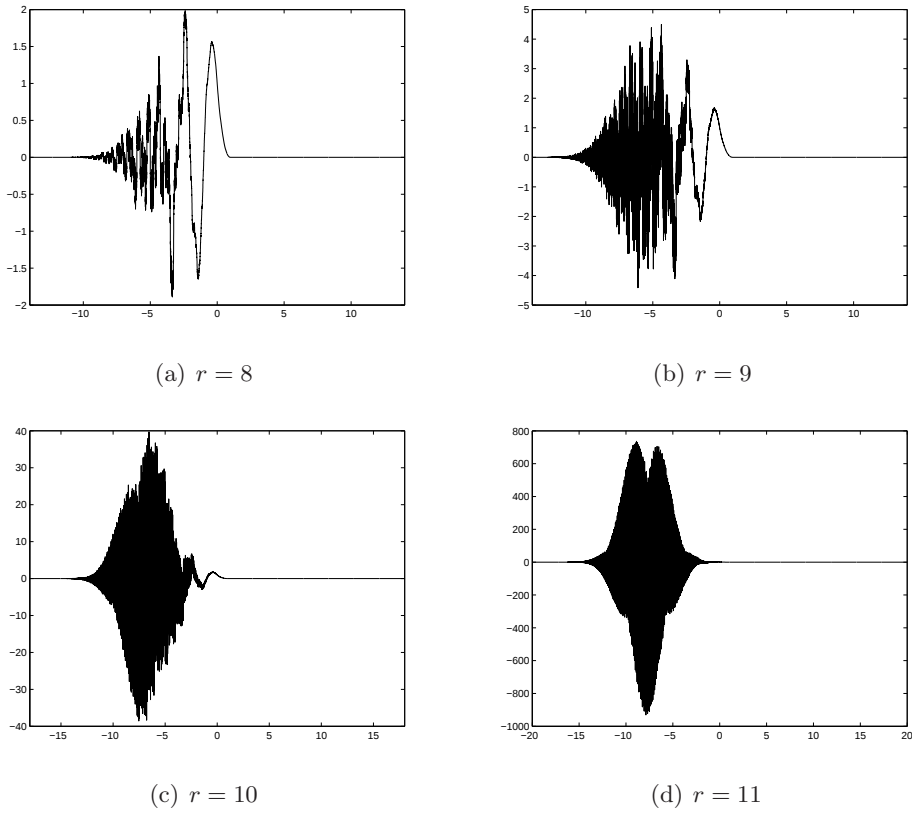


FIG. I.10 – Comparaison des suites itérées ($j=12$) associées à $f^0 = \delta_{n,0}$ pour différents schémas de Lagrange décentrés $S_{1,r}$.

Pour des grandes valeurs de r
D'après l'exemple I.9, on a

$$\begin{pmatrix} (Sf)_{2n+2r-1} \\ \vdots \\ (Sf)_{2n} \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} f_{n+2r-1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (Sf)_{2n+2r} \\ \vdots \\ (Sf)_{2n+1} \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} f_{n+2r-1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

et

$$A_0 = \begin{pmatrix} L_r & \cdots & L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_r & \cdots & L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & L_r & L_{r-1} & \cdots & \cdots & L_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ L_r & \cdots & L_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_r & \cdots & L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & L_r & L_{r-1} & \cdots & \cdots & L_0 \end{pmatrix}$$

Par un développement suivant les lignes ou les colonnes, on obtient

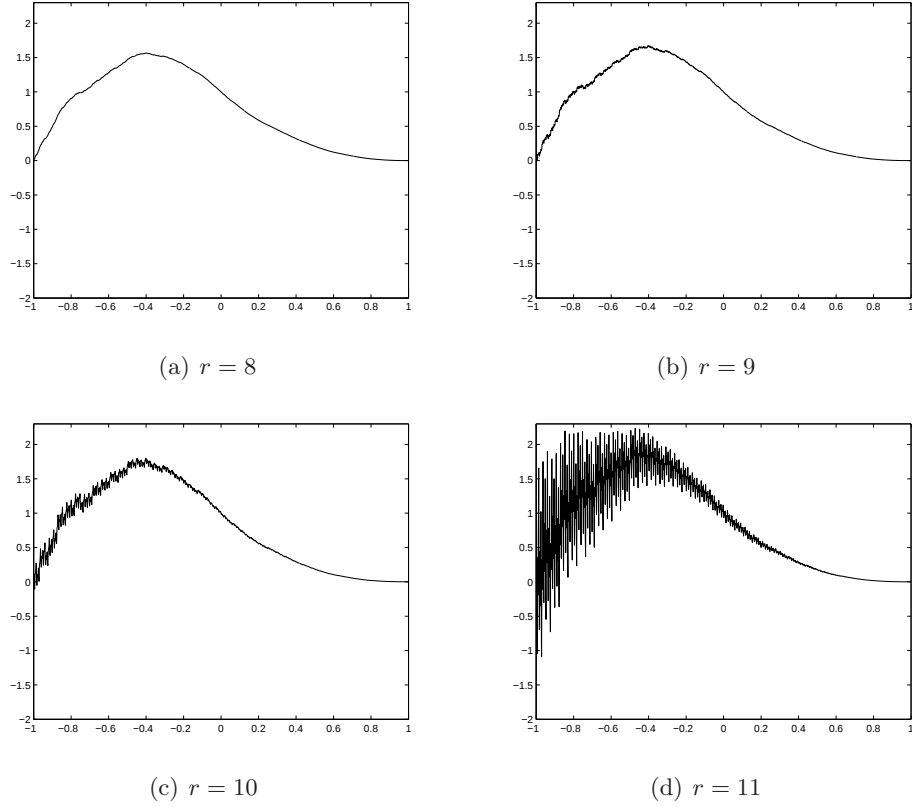


FIG. I.11 – Comparaison des suites itérées ($j=12$) associées à $f^0 = \delta_{n,0}$ pour différents schémas de Lagrange décentrés $S_{1,r}$. Zoom sur $[-1,1]$.

LEMME I.1

Les matrices A_0 et A_1 associées aux schémas de Lagrange $S_{1,r}$ complètement décentrés $S_{1,r}$ vérifient

$$|\det(A_0)| = |L_r|^r \quad \text{et} \quad |\det(A_1)| = L_0 |L_r|^{r-1}.$$

On a alors

PROPOSITION I.19

Soit A_0 et A_1 les matrices associées aux schémas de Lagrange complètement décentrés $S_{1,r}$.

Si $2^{\frac{r(r+1)}{2}} |L_r|^{r-1} \geq 1$ alors $S_{1,r}$ diverge.

Preuve

Si on note λ_{e_i} , les valeurs propres des matrices associées A_e avec $e \in \{0,1\}$, alors $\prod |\lambda_{e_i}| = |\det(A_e)|$.

D'après l'exemple I.9, on a que $\{1, \dots, 2^{-r}\}$ sont valeurs propres de A_0 et A_1 avec L_r valeur propre de A_0 et L_0 valeur propre de A_1 .

D'après le lemme I.1, on a

pour A_0 $\prod_{\lambda_{e_i} \neq \{1, \dots, 2^{-r}, L_r\}} |\lambda_{e_i}| = |L_r|^{r-1} \times 1 \times \dots \times 2^r,$

pour A_1 $\prod_{\lambda_{e_i} \neq \{1, \dots, 2^{-r}, L_0\}} |\lambda_{e_i}| = |L_r|^{r-1} \times 1 \times \dots \times 2^r.$

Or, d'après la proposition I.17, si le schéma converge, on a $\lambda_{e_i} < 1$, pour tout e_i et donc $\prod |\lambda_{e_i}| > 1$.

Une condition nécessaire de convergence pour les schémas complètement décentrés utilisant r points à droite est donc

$$|L_r|^{r-1} 2^{\frac{r(r+1)}{2}} < 1$$

Ce qui prouve le résultat. □

Si r est tel que $2^{\frac{r(r+1)}{2}} |L_r|^{r-1} \geq 1$, le schéma diverge. De plus, on peut montrer

PROPOSITION I.20

Pour $r \geq 20$, le schéma de Lagrange complètement décentré $S_{1,r}$ diverge.

Preuve

En supposant que $r \geq 8$, on écrit $L_r = \prod_{k=0}^{r-1} \frac{\frac{1}{2}-k}{r-k}$ sous la forme

$$|L_r| = 2^{-(r+1)} \prod_{k=2}^{r-1} \frac{2k-1}{k+1} = 2^{-(r+1)} \frac{5}{2^2} \frac{7}{5} \frac{3}{2} \frac{11}{7} \prod_{k=7}^{r-1} \left(2 - \frac{3}{k+1}\right)$$

Ce qui donne l'inégalité

$$\begin{aligned} |L_r| &\geq 2^{-(r+4)} \times 33 \times \left(\frac{13}{2^3}\right)^{(r-7)} \\ |L_r| &\geq 2^{-(4r-17)} \times 33 \times 13^{(r-7)} \end{aligned}$$

De plus, $|L_r|^{r-1} 2^{\frac{r(r+1)}{2}} > |L_r|^{r-1} 2^{\frac{r(r-1)}{2}}$. On va chercher r vérifiant

$$|L_r|^{r-1} 2^{\frac{r(r-1)}{2}} \geq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2^{-(r-1)(\frac{7}{2}r-17)} 33^{(r-1)} 13^{(r-7)(r-1)} \geq 1$$

En prenant les logarithmes et factorisant par $(r-1)$, on obtient avec la proposition I.19

$$\text{si} \quad r \geq \frac{-17\ln(2) - \ln(33) + 7\ln(13)}{-\frac{7}{2}\ln(2) + \ln(13)} \approx 19,3$$

alors le schéma de Lagrange complètement décentré $S_{1,r}$ utilisant r points à droite avec $r \geq 20$ diverge. □

Une estimation numérique de $|L_r|^{r-1} 2^{\frac{r(r+1)}{2}} \geq 1$ donne la divergence pour $r \geq 13$.

En conclusion,

Pour $r \geq 13$, le schéma $S_{1,r}$ diverge.

Cas $8 \leq r \leq 12$

On calcule directement les valeurs propres des matrices.

On obtient alors pour $r = 8$, des valeurs propres en modules plus petites que 1, ce qui ne prouve ni la convergence, ni la divergence.

Par contre, pour $9 \leq r \leq 12$, deux valeurs propres sont de module strictement plus grand que 1 (1,4003 et 1,3895, pour $r = 9$), ce qui établit la divergence de $S_{1,r}$ pour $9 \leq r \leq 12$.

I.5. Complément à une technique d'étude de la convergence et application

$r \leq 7$	convergence (théorème I.9).
$r = 8$	pas de résultat
$9 \leq r \leq 12$	divergence avec le calcul numérique des valeurs propres.
$13 \leq r$	divergence (proposition I.19).

TAB. I.6 – Récapitulatif de l'étude de la convergence des schémas de Lagrange complètement décentrés $S_{1,r}$.

On résume dans le tableau I.6, les résultats de convergence et de divergence obtenus dans cette partie pour les schémas de Lagrange complètement décentrés $S_{1,r}$. Dans la suite, on applique les mêmes techniques pour étudier des schémas de Lagrange non-centrés.

I.5.3 Généralisation des méthodes à des schémas de Lagrange quelconques ($l \neq r$)

On considère maintenant des schémas de Lagrange avec l points à gauche fixé et r points à droite. Par symétrie, on regarde seulement les cas $r > l$.

I.5.3.a Convergence

Une écriture possible

Commençons par le lemme suivant

LEMME I.2

Soit S un schéma vérifiant $Sp = 0$ pour $p = (P(n))_n$ pour tout P un polynôme de degré k . Alors il existe un schéma S' tel que $Sf = S'(d^{k+1}f)$, pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Preuve

Par récurrence sur k ,

Pour $k = 0$: S s'annule sur les constantes, on obtient $\sum_m a_{2m} = \sum_m a_{2m+1} = 0$.

Or $\text{supp}(a) < +\infty$, on écrit par récurrence

$$\begin{aligned} (Sf)_{2n} &= \sum_{n_1 \leq m \leq n_2} a_{2m} f_{n-m} \\ &= \sum_{n_1 \leq m \leq n_2-1} \left(\sum_{n_1 \leq j \leq m} a_{2j} \right) (f_{n-m} - f_{n-m+1}) + \left(\sum_{n_1 \leq j \leq n_2} a_{2j} \right) f_{n-n_2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on obtient

$$(Sf)_{2n} = \sum_{n_1 \leq m \leq n_2-1} \left(- \sum_{n_1 \leq j \leq m} a_{2j} \right) (df)_{n-m}.$$

De même pour $(Sf)_{2n+1}$, on obtient le résultat pour $k = 0$.

Pour k quelconque: on suppose le résultat vrai pour $k-1$. Par hypothèse, il existe un schéma S' tel que $Sf = S'(d^k f)$, $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Pour c une suite constante, il existe un polynôme $P \in \Pi_k$ tel que $c = d^k p$ en notant $p = (P(n))_n$.

Or par hypothèse, on a $Sp = 0$ donc $S'(d^k p) = S'(c) = 0$ c'est-à-dire S' s'annule sur les constantes. D'après le cas $k=0$, il existe donc un schéma S'' tel que $S'g = S''(dg)$, pour tout $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$ ce qui donne $Sf = S''(d^{k+1} f)$, pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$. □

La première observation est que l'on peut écrire $S_{l,r}$ en fonction de $S_{l,r-1}$ de la manière suivante

PROPOSITION I.21

Soit $S_{l,r}$ le schéma de Lagrange utilisant l points à gauche et r points à droite. On a

$$(S_{l,r}f)_{2n+1} = (S_{l,r-1}f)_{2n+1} + L_r \left(\frac{1}{2} \right) d^{l+r-1} f_{n+\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor - 1} \quad (\text{I.51})$$

avec L_r le polynôme de Lagrange de degré $r+l-1$ défini par $L_r \left(\frac{1}{2} \right) = \prod_{k=-l+1}^{r-1} \frac{\frac{1}{2}-k}{r-k}$.

Preuve

Le cas $k=0$ est montré en utilisant les polynômes trigonométriques (proposition 6.7 [Dyn92]).

Ici, nous l'étendons au cas k quelconque.

$S_{l,r}$ et $S_{l,r-1}$ reproduisant les polynômes de degré $r+l-2$, le schéma $(S_{l,r} - S_{l,r-1})$ vérifie l'hypothèse du lemme I.2 c'est-à-dire que le schéma s'annule sur les polynômes de degré $r+l-2$.

On peut donc écrire

$$(S_{l,r}f)_{2n+1} = (S_{l,r-1}f)_{2n+1} + \sum_m \alpha_{2m+1} (d^{l+r-1} f)_{n-m} \quad (\text{I.52})$$

avec $(d^{l+r-1} f)_{n-m} = \sum_{i=0}^{l+r-1} (-1)^{l+r-1-i} \binom{l+r-1}{i} f_{n-m-\lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor + i}$.

Or le schéma $S_{l,r}$ et l'opérateur $d^{l+r-1} f$ font intervenir $l+r$ points.

On ne peut qu'avoir une seule différence dans (I.52), pour $m = l-1 - \lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor$.

On a alors

$$(S_{l,r}f)_{2n+1} = (S_{l,r-1}f)_{2n+1} + \alpha (d^{l+r-1} f)_{n-l+1+\lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor}. \quad (\text{I.53})$$

De plus, le coefficient de f_{n+r} dans $d^{l+r-1}(f)_{n-l+1+\lfloor \frac{l+r-1}{2} \rfloor}$ est égal à 1.

D'après l'équation (I.53), $\alpha = a_{2r} = L_r \left(\frac{1}{2} \right)$. □

Principe de la méthode

Un moyen pour montrer la convergence est, comme dans le cas complètement décentré, de procéder **par récurrence** en (proposition I.21 et théorème I.7)

1. montrant la convergence de $S_{l,r-1}$,
2. montrant $\exists c < 1$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|d^{l+r-1}(S_{l,r}f)\|_\infty \leq c \|d^{l+r-1}f\|_\infty$.

I.5. Complément à une technique d'étude de la convergence et application

Pour des petites valeurs c'est-à-dire pour $l + r < 10$, on peut évaluer $\|d^{l+r-1}(S_{l,r}f)\|_\infty$ de façon *théorique*.

Pour des grandes valeurs, on évalue *numériquement* $\|S_{l+r-1}\|_\infty$ au moyen de son symbole $a_{l,r}(\theta)$, la norme du schéma aux différences d'ordre $l+r-1$ associé au schéma $S_{l,r}$, (section I.4.1).

Pour l donné, on obtient des résultats permettant de conclure à **la convergence de quelques schémas** (tableau I.7).

$l = 2$	r	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
	$ S_{l+r-1} _\infty$	0.14	0.24	0.18	0.22	0.35	0.5	0.64	0.95	1.6		
$l = 3$	r	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
	$ S_{l+r-1} _\infty$	0.15	0.09	0.14	0.18	0.21	0.25	0.39	0.57	0.78	1.13	
$l = 4$	r	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	$ S_{l+r-1} _\infty$	0.075	0.1	0.11	0.11	0.15	0.2	0.25	0.31	0.49	0.73	1.02

TAB. I.7 – Constante de contraction de $S_{l,r}$ par rapport à $D(f) = \|d^{l+r-1}f\|_\infty$.

REMARQUE I.9

Pour montrer la convergence et estimer la régularité, la technique classique consiste à calculer $\|S_1^L\|_\infty$, en utilisant les symboles (section I.4.1).

Le désavantage est que l'on est obligé de calculer des itérations du schéma.

Tandis qu'avec la technique proposé, on a juste à montrer la contraction d'un schéma aux différences.

Par exemple, pour le schéma $S_{1,7}$, on a besoin de calculer 6 itérations pour avoir une contraction du schéma aux différences S_1 associée (tableau I.8).

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 7$
avec $d^r S_{1,r}$ (section I.5.3)	1	1	1	1	0.47	0.1
avec $dS_{1,r}^L$ (section I.4.1)	1.44	1.44	1.34	1.05	0.48	0.18

TAB. I.8 – Constante de Régularité $C^{\alpha-}$ de $S_{1,r}$ calculée avec différentes méthodes.

I.5.3.b Etude de la divergence

Pour la divergence, on va utiliser les mêmes techniques que dans le cas complètement décentré (section I.5.2), à savoir l'utilisation des matrices associées au schéma $S_{l,r}$ de taille égale à $2r+2l-1$ et définies par

$$A_0 = \begin{pmatrix} L_r \cdots L_0 & L_{-1} \cdots L_{-l+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & L_r \cdots & L_0 & \cdots & \cdots & L_{-l+1} \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & L_r L_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & L_0 & \cdots & L_{-l+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & L_r & L_{r-1} \cdots & \cdots & \cdots & L_0 & \cdots & L_{-l+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ L_r \cdots L_0 & L_{-1} \cdots L_{-l+1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & L_r \cdots & L_0 & \cdots & \cdots & \cdots & L_{-l+1} \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & L_r L_{r-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & L_0 & \cdots & L_{-l+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & L_r & L_{r-1} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & L_0 & \cdots & L_{-l+1} \end{pmatrix}$$

Dans cette partie, on souhaite montrer l'existence d'une constante r_l tel que le schéma de Lagrange $S_{l,r}$ diverge, pour $r > r_l$.

Pour $r + l$ grand: existence et calcul théorique de la constante r_l

On a le résultat suivant

THÉORÈME I.10

Pour tout l , on peut trouver un nombre $r_l > l$ tel que pour tout $r > r_l$, le schéma de Lagrange $S_{l,r}$ à l points à gauche et r points à droite diverge.

Preuve

On note $P_{r,l}$ le produit des valeurs propres inconnues.

On va montrer qu'il existe r_l tel que $P_{r,l} \geq 1$ en minorant le produit.

On suppose $r > 5l + 6$.

★ *Calcul de $P_{r,l}$* : on remarque que

$$|\det(A_0)| = |L_r|^r |L_{-l+1}|^{l-1} \quad \text{et} \quad |\det(A_1)| = |L_r|^{r-1} |L_{-l+1}|^l.$$

D'après l'exemple I.9 et les valeurs propres particulières, L_r pour A_0 et L_{-l+1} pour A_1 , on obtient l'expression de $P_{r,l}$, la valeur absolue du produit des valeurs propres inconnues,

$$P_{r,l} = 2^{\frac{(r+l-1)(r+l)}{2}} |L_r|^{r-1} |L_{-l+1}|^{l-1}$$

avec

$$|L_r| = 2^{-(r+l-1)} \frac{\prod_{i=1}^l 2i-1 \prod_{i=1}^{r-1} 2i-1}{(r+l-1)!} \quad \text{et} \quad |L_{-l+1}| = 2^{-(r+l-1)} \frac{\prod_{i=1}^{l-1} 2i-1 \prod_{i=1}^r 2i-1}{(r+l-1)!}$$

En simplifiant, on obtient

– si $r + l$ est pair

$$P_{r,l} = 2^{-\frac{(r+l-1)(r+l-4)}{2}} \left(\frac{2r-1}{2l-1} \right)^{l-1} \left(\prod_{i=1}^l \frac{2i-1}{2i} \prod_{i=l}^{(r+l)/2-2} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} \right)^{r+l-2}$$

– si $r + l$ est impair

$$P_{r,l} = 2^{-\frac{(r+l-1)(r+l-4)}{2}} \left(\frac{2r-1}{2l-1} \right)^{l-1} \left(\prod_{i=1}^l \frac{2i-1}{2i} \prod_{i=l}^{(r+l-3)/2} \frac{2i+r-l}{2i+2} \right)^{r+l-2}$$

★ *Estimation de chaque terme pour $r + l$ pair*: en considérant chaque terme séparément.

• On a

$$2^{-\frac{(r+l-1)(r+l-4)}{2}} = 2^{-\frac{r^2}{2} - \frac{2l-5}{2}r - \frac{(l-1)(l-4)}{2}}$$

• Avec l'hypothèse $r > 5l + 6$, on obtient $2r - 1 > 8l - 4$. Donc

$$\left(\frac{2r-1}{2l-1} \right)^{l-1} > 2^{2l-2} \tag{I.54}$$

- Avec $\frac{2i-1}{2i} = 1 - \frac{1}{2i}$ et pour $i \in \{1 \dots l\}$, on a $\frac{1}{2i} \leq 2^{-1}$. D'où

$$\left(\prod_{i=1}^l \frac{2i-1}{2i} \right)^{r+l-2} > 2^{-rl-l^2+2l} \quad (I.55)$$

- On a aussi

$$\frac{2i+r-l+1}{2i+2} > 3 \quad \text{si} \quad \frac{r-l-5}{4} > i.$$

De plus pour $\left[\frac{r-l-5}{4} \right] \leq i \leq \frac{r+l-4}{2}$, $\frac{2i+r-l+1}{2i+2} > \frac{2r-3}{r+l-2} = 2 - \frac{2l-1}{r+l-2}$ avec

$$\frac{2l-1}{r+l-2} < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad r > 3l-1, \quad \text{dans ce cas} \quad \frac{2r-3}{r+l-2} > \frac{3}{2}.$$

Or on a bien $r > 3l-1$ car on a supposé $r > 5l+6$.

$r+l$ étant pair, on décompose le produit, à condition que $\frac{r-l-5}{4} > l$ c'est-à-dire que $r > 5l+5$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=l}^{(r+l-4)/2} \frac{2i+r-l}{2i+2} &= \prod_{i=l}^{\left[\frac{r-l-5}{4} \right]} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} \prod_{i=\left[\frac{r-l-5}{4} \right]+1}^{(r+l-4)/2} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} \\ &\prod_{i=l}^{(r+l-4)/2} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} > 3^{\left[\frac{r-l-5}{4} \right]-l+1} \frac{3^{\frac{r+l-4}{2}-\left[\frac{r-l-5}{4} \right]}}{2} \\ &> 3^{\frac{r-l-5}{4}-l} \frac{3^{\frac{r+l-4}{2}-\frac{r-l-5}{4}}}{2} \\ &> 3^{\frac{r-5l-6}{4}} \frac{3^{\frac{r+3l+2}{2}}}{2} \end{aligned} \quad (I.56)$$

★ *Estimation de chaque terme pour $r+l$ impair*: on a de même

$$\frac{2i+r-l}{2i+2} > 3 \quad \text{si} \quad \frac{r-l-6}{4} > i.$$

De plus pour $\left[\frac{r-l-6}{4} \right] \leq i \leq \frac{r+l-3}{2}$, $\frac{2i+r-l}{2i+2} > \frac{2r-3}{r+l-1} = 2 - \frac{2l+1}{r+l-1}$ avec

$$\frac{2l+1}{r+l-1} < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad r > 3l+3, \quad \text{dans ce cas} \quad \frac{2r-3}{r+l-1} > \frac{3}{2}.$$

Or on a bien $r > 3l+3$ car on a supposé $r > 5l+6$.

$r+l$ étant impair, on décompose le produit, à condition que $\frac{r-l-6}{4} > l$ c'est-à-dire que $r > 5l+6$,

$$\begin{aligned} \prod_{i=l}^{(r+l-3)/2} \frac{2i+r-l}{2i+2} &= \prod_{i=l}^{\left[\frac{r-l-6}{4} \right]} \frac{2i+r-l}{2i+2} \prod_{i=\left[\frac{r-l-6}{4} \right]+1}^{(r+l-3)/2} \frac{2i+r-l}{2i+2} \\ &\prod_{i=l}^{(r+l-3)/2} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} > 3^{\left[\frac{r-l-6}{4} \right]-l+1} \frac{3^{\frac{r+l-3}{2}-\left[\frac{r-l-6}{4} \right]}}{2} \\ &> 3^{\frac{r-l-6}{4}-l} \frac{3^{\frac{r+l-3}{2}-\frac{r-l-6}{4}}}{2} \\ &> 3^{\frac{r-3l-6}{4}} \frac{3^{\frac{r+3l+2}{2}}}{2} \end{aligned} \quad (I.57)$$

En résumé, on a quelle que soit la parité

$$\prod_{i=l}^{[r+l-3/2]} \frac{2i+r-l}{2i+2} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{r+3l+2}{4}} 3^{\frac{r-5l}{4}-\frac{3}{2}}$$

★ *Estimation de r_l* : d'après les majorations (I.54), (I.55) et (I.57), on a

$$\begin{aligned} P_{r,l} &> 2^{-\frac{r^2}{2}-\frac{2l-5}{2}r-\frac{(l-1)(l-4)}{2}} 2^{2l-2} 2^{-rl-l^2+2l} 2^{-(\frac{r+3l+2}{4})(r+l-2)} 3^{(\frac{r+3l+2}{4}+\frac{r-5l}{4}-\frac{3}{2})(r+l-2)} \\ &> 2^{-\frac{r^2}{2}-\frac{4l-5}{2}r-\frac{3l^2-13l}{2}-4} 2^{-\frac{r^2}{4}-lr-\frac{(3l+2)(l-2)}{4}} 3^{\frac{r^2}{2}-2r-\frac{l^2-4}{2}} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \ln(P_{r,l}) &> \frac{r^2}{4} (2\ln(3) - 3\ln(2)) - r \left((3l - \frac{5}{2})\ln(2) + 2\ln(3) \right) \\ &\quad - \left(\frac{9}{4}l^2 - \frac{15}{2}l + 3 \right) \ln(2) - \left(\frac{l^2}{2} - 2 \right) \ln(3) \end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned} A(l) &= 2\ln(3) - 3\ln(2), \quad B(l) = - \left((3l - \frac{5}{2})\ln(2) + 2\ln(3) \right) \\ \text{et} \quad C(l) &= - \left(\frac{9}{4}l^2 - \frac{15}{2}l + 3 \right) \ln(2) - \left(\frac{l^2}{2} - 2 \right) \ln(3) \end{aligned}$$

on obtient que si

$$\frac{A(l)}{4}r^2 + B(l)r + C(l) \geq 0 \quad \text{alors} \quad P_{r,l} \geq 1$$

Comme $A(l) > 0$, pour $r \geq r_l$ avec r_l la plus grande racine de $P_l(r) = \frac{A(l)}{4}r^2 + B(l)r + C(l)$, on a $P_{r,l} \geq 1$ donc la divergence du schéma de Lagrange $S_{l,r}$ utilisant r points à droite et l points à gauche.

On a

$$r_l = \left\lceil 2 \frac{-B(l) + \sqrt{\Delta(l)}}{A(l)} \right\rceil + 1$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta(l) &= \left(\frac{9}{4}\ln(2)^2 + \ln(3)^2 + 3\ln(2)\ln(3) \right) l^2 + \left(\frac{15}{2}\ln(2)^2 - 3\ln(2)\ln(3) \right) \\ &\quad - \frac{11}{4}\ln(2)^2 + 2\ln(2)\ln(3) > 0. \end{aligned}$$

□

Rappelons que par symétrie, on a le même résultat pour r fixé c'est-à-dire que l'on peut trouver l_r tel que le schéma de Lagrange $S_{l,r}$ diverge pour tout $l \geq l_r$.

Dans la suite, on va essayer d'avoir des estimations numériques plus précises de cette constante, que l'on notera $r2_l$.

Pour $r + l$ grand: calcul numérique du produit des valeurs propres

A l fixé, on se propose de trouver numériquement le nombre de points minimal, $r2_l$, pour lequel on aura la divergence des schémas $S_{l,r}$ avec $r \geq r2_l$.

On rappelle que

– si $r + l$ est pair

$$P_{r,l} = 2^{-\frac{(r+l-1)(r+l-4)}{2}} \left(\frac{2r-1}{2l-1} \right)^{l-1} \left(\prod_{i=1}^l \frac{2i-1}{2i} \prod_{i=l}^{(r+l)/2-2} \frac{2i+r-l+1}{2i+2} \right)^{r+l-2},$$

– si $r + l$ est impair

$$P_{r,l} = 2^{-\frac{(r+l-1)(r+l-4)}{2}} \left(\frac{2r-1}{2l-1} \right)^{l-1} \left(\prod_{i=1}^l \frac{2i-1}{2i} \prod_{i=l}^{(r+l-3)/2} \frac{2i+r-l}{2i+2} \right)^{r+l-2}.$$

Pour valider nos expériences numériques, on commence par le lemme

LEMME I.3

Si $P_{r+1,l} > P_{r,l}$ et $r > 3l + 2$ alors

$$\forall k, \quad P_{r+k+1,l} > P_{r+k,l} \quad \text{c'est-à-dire pour } k > 1, \quad P_{r+k,l} > P_{r,l}.$$

Preuve

Par récurrence, il suffit de montrer que $P_{r+2,l} > P_{r+1,l}$, en supposant que $P_{r+1,l} > P_{r,l}$.

On remarque

$$P_{r+1,l} = 2^{-(r+l-1)} \left(\frac{2r+1}{2r-1} \right)^{l-1} \left(\frac{2r-1}{r+l} \right)^{r+l-1} \frac{\prod_{i=1}^l 2i-1 \prod_{i=1}^{r-1} 2i-1}{(r+l-1)!} P_{r,l},$$

et

$$P_{r+2,l} = 2^{-(r+l)} \left(\frac{2r+3}{2r+1} \right)^{l-1} \left(\frac{2r+1}{r+l+1} \right)^{r+l} \frac{\prod_{i=1}^l 2i-1 \prod_{i=1}^r 2i-1}{(r+l)!} P_{r+1,l}.$$

D'où

$$P_{r+2,l} = \frac{P_{r+1,l}}{P_{r,l}} 2^{-1} \left(\frac{(2r+3)(2r-1)}{(2r+1)(2r+1)} \right)^{l-1} \left(\frac{(2r+1)(r+l)}{(2r-1)(r+l+1)} \right)^{r+l} \left(\frac{2r-1}{r+l} \right)^2 P_{r,l}.$$

Par hypothèse, on a $\frac{P_{r+1,l}}{P_{r,l}} > 1$. On veut montrer que $A > 1$.

Déjà, avec l'hypothèse $r > 3l + 2$, on a que $2^{-1} \left(\frac{2r-1}{r+l} \right)^2 > 1$.

Ensuite, on réécrit

$$\left(\frac{(2r+3)(2r-1)}{(2r+1)(2r+1)} \right)^{l-1} = \left(\frac{(2r+3)(r+l)}{(2r+1)(r+l-1)} \right)^{l-1},$$

avec

$$\frac{(2r+3)(r+l)}{(2r+1)(r+l-1)} = \frac{2r^2+3r+2rl+3l}{2r^2+3r+2rl+l+1} > 1.$$

De plus,

$$\frac{(2r+1)(r+l)}{(2r-1)(r+l+1)} = \frac{2r^2+r+2rl+l}{2r^2+r+2rl-l-1} > 1.$$

Donc, on a bien la quantité $A > 1$, ce qui prouve que $P_{r+2,l} > P_{r+1,l}$. □

On note r_{2l} la valeur **numérique** telle que

$$P_{r_{2l},l} > 1 \quad \text{et} \quad P_{r_{2l}+1,l} > P_{r_{2l},l}.$$

Alors le schéma $S_{l,r}$ diverge pour $r \geq r_{2l}$, à l fixé (lemme I.3).

Dans le tableau I.9, on donne des valeurs de r_{2l} tel que $S_{r,l}$ diverge pour $r \geq r_{2l}$.

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
r_{2l}	13	22	30	39	47	56	64	73	81	89	98	106	114	122
l	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
r_{2l}	131	139	147	155	163	172	180	188	196	204	213	221	229	237
l	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
r_{2l}	245	253	262	270	278	286	294	302	310	319	327	335	343	351
l	43	44	45	46	47	48	49	50						
r_{2l}	359	367	376	384	392	400	408	416						

TAB. I.9 – Nombre de points r_{2l} calculé à partir du produit des valeurs propres pour que le schéma de Lagrange $S_{l,r}$ diverge.

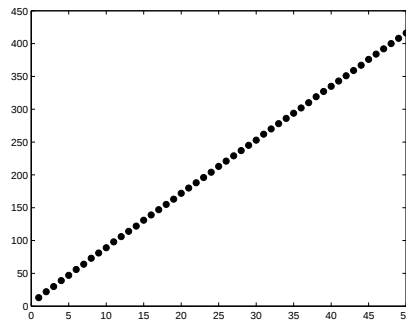


FIG. I.12 – Nombre de points r_{2l} (en ordonnée) calculé à partir du produit des valeurs propres pour l fixé (en abscisse) tel que le schéma de Lagrange $S_{l,r}$ diverge pour $r \geq r_{2l}$.

I.5. Complément à une technique d'étude de la convergence et application

Pour $r + l$ petits: calcul numérique des valeurs propres

Avec une méthode numérique, on calcule les valeurs propres des matrices associées, en fixant le nombre de points à gauche l et en faisant varier le nombre de points à droite r .

Dans le tableau I.10 et la figure I.13, on cherche le nombre de points minimal, r_{1l} , pour que le schéma diverge c'est-à-dire pour que les matrices associées au schéma aient une valeur propre strictement plus grande que 1 en module (proposition I.17).

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
r_{1l}	9	13	16	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	54
l	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
r_{1l}	58	61	64	67	71	74	77	81	84	87	89	91	93	94
l	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
r_{1l}	97	99	102	105	105	108	109	109	112	113	115	117	119	120
l	43	44	45	46	47	48	49	50						
r_{1l}	123	123	127	128	128	130	134	135						

TAB. I.10 – Nombre de points r_{1l} calculé à partir des valeurs propres du schéma pour que le schéma de Lagrange $S_{l,r_{1l}}$ diverge.

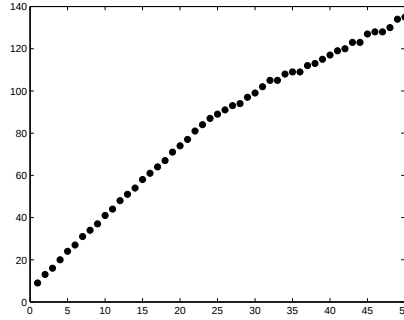


FIG. I.13 – Nombre de points r calculé à partir des valeurs propres du schéma pour que le schéma de Lagrange à l points à gauche et r points à droite diverge.

Pour compléter la différence que l'on obtient entre r_{1l} et r_{2l} , on peut vérifier avec un calcul numérique des valeurs propres que, pour $r_{1l} < r < r_{2l}$, on a encore la divergence de $S_{r,l}$.

Sur le tableau I.11, on remarque que le rayon spectral des matrices augmente avec r .

Sur les tableaux I.11 et I.7, il existe encore des schémas pour lesquels on n'a aucun résultat ($l = 2$ et $r = 12$ ou $l = 3$ et $14 \leq r \leq 15$).

$l = 1$	r	10	11	12					
	$\max(\rho(A_0), \rho(A_1))$	2.06	3.073	4.65					
$l = 2$	r	14	15	16	17	18	19	20	21
	$\max(\rho(A_0), \rho(A_1))$	1.94	2.83	4.17	6.21	9.32	14.1	21.47	32.9
$l = 3$	r	17	18	19	20	21	22	23	24
	$\max(\rho(A_0), \rho(A_1))$	1.44	2.05	2.95	4.3	6.3	9.3	13.82	20.67
	r	25	26	27	28	29			
	$\max \rho(A_0), \rho(A_1)$	31.1	47.1	71.55	109.3	167.67			

TAB. I.11 – Rayon spectral des matrices associées au schéma de Lagrange à l points à gauche et r points à droite avec $r1_l < r < r2_l$.

Pour montrer la divergence, on a vu 3 techniques qui consistent à calculer le nombre de points à droite minimal pour que $S_{r,l}$ diverge

- $r1_l$: calcul numérique des valeurs propres (limité pour des grandes valeurs de r),
- $r2_l$: calcul numérique du produit des valeurs propres (rapide et pour $r \geq r2_l$, $S_{l,r}$ diverge),
- r_l : calcul théorique et existence de r_l tel que pour $r \geq r_l$, $S_{l,r}$ diverge.

I.6 Conclusion

Dans cette partie, on a complété un résultat de convergence de [CDM91] par un résultat de régularité (section I.5.1). Nous avons utilisé ce résultat pour prouver la convergence et la régularité de certains schémas de Lagrange non-centrés, de façon plus rapide que les techniques usuelles (théorème I.9 et proposition I.21).

Cependant en utilisant d'autres techniques, nous avons montré que l'idée naïve consistant à croire que tous les schémas de Lagrange convergent, est fausse (théorème I.10). On a aussi donné des estimations théoriques et numériques sur le nombre de points suffisant à droite pour qu'un schéma de Lagrange construit avec un nombre de point à gauche donné, diverge.

Sur la figure I.14, on résume une partie des résultats de convergence et de divergence que l'on a obtenus, à partir des méthodes proposées dans la section I.4. On remarque qu'il reste malgré tout, des schémas pour lesquels on ne peut pas conclure et cela avec aucune des méthodes décrites.

On a, de plus, mis en évidence certaines limites des schémas linéaires (phénomènes d'oscillations pour les schémas interpolants ou un ordre d'approximation trop faible pour les schémas splines).

C'est pour cela, que l'on va dorénavant s'intéresser à des schémas non-linéaires.

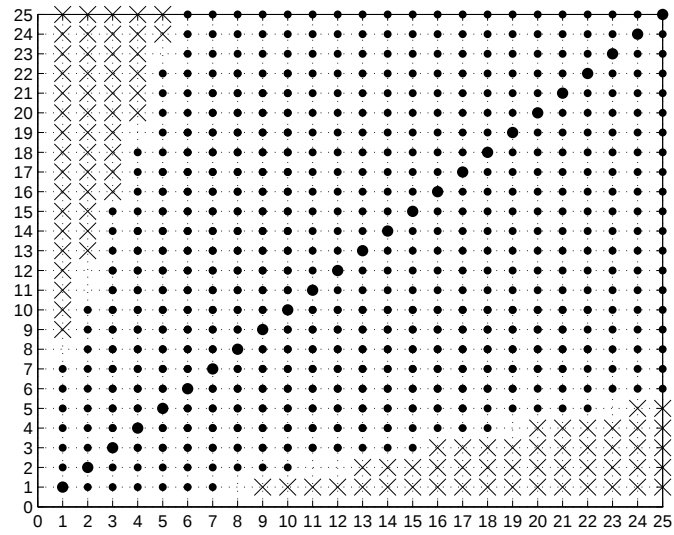


FIG. I.14 – Résumé des résultats numériques et théoriques obtenus: convergence (.) et divergence (X) des schémas de Lagrange à l points (en abscisse) et r points à droite (en ordonnée).

CHAPITRE II

Schémas de Subdivisions Non-linéaires

————— oOo —————

Les schémas non-linéaires sont particulièrement intéressants pour éliminer les phénomènes d'oscillations autour d'une discontinuité, qui sont dus à l'utilisation de schémas linéaires. On propose d'étudier et d'appliquer les propriétés d'une classe de schémas non-linéaires.

————— oOo —————

Plan du chapitre

II.1	Introduction	63
II.2	Définitions et historique	63
II.2.1	Définitions	63
II.2.2	Quelques schémas présents dans la littérature	65
II.2.3	Quelques schémas dépendant de la position	66
II.3	Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$	67
II.3.1	Premiers résultats concernant les schémas non-linéaires inspirés des schémas linéaires	68
II.3.2	Etude d'un schéma s'écrivant comme une perturbation d'un schéma linéaire	69
II.3.2.a	Résultat de convergence	70
II.3.2.b	Résultat de régularité	71
II.3.2.c	Réciproque du théorème de régularité pour des schémas interpolants	73
II.3.2.d	Résultat de stabilité	74
II.3.2.e	Ordre d'approximation	75
II.4	Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$	76
II.4.1	Premier Exemple: le schéma WENO à 6 points (valeurs ponctuelles)	76
II.4.1.a	Construction des schémas S_{ENO}	77
II.4.1.b	Construction des schémas S_{WENO}	77
II.4.1.c	Construction du schéma S_{WENO_4} utilisant des stencils de 4 points	79
II.4.1.d	Convergence et régularité du schéma S_{WENO_4}	80
II.4.1.e	Ordre du schéma S_{WENO_4}	85
II.4.2	Deuxième Exemple: la classe de schéma Power P	86
II.4.2.a	Un cas particulier: le schéma PPH	87
II.4.2.b	Construction des schémas S_{POWERP} et propriétés de la moyenne POWERP	89
II.4.2.c	Convergence et régularité des schémas S_{POWERP}	90
II.4.2.d	Ordre des schémas S_{POWERP}	92
II.4.3	Troisième Exemple: un schéma approximant non-linéaire C^1	93
II.4.3.a	Construction du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$	93
II.4.3.b	Convergence et régularité	94
II.4.3.c	Stabilité	99
II.4.3.d	Ordre d'approximation	99
II.4.4	Quatrième Exemple: un schéma pour préserver la courbure	101
II.4.4.a	Présentation du schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$	102
II.4.4.b	Convergence	105
II.4.4.c	Construction de h vérifiant la condition de convergence (II.64)	107
II.4.4.d	Expériences Numériques	108
II.5	Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	111
II.5.1	Résultats de convergence dans le cas général	111
II.5.2	Construction d'un schéma $2d$ comme produit tensoriel de schémas $1d$: cas linéaire	112
II.5.3	Construction d'un schéma non-linéaire $2d$ comme produit tensoriel de schémas $1d$: cas non-linéaire	112
II.5.3.a	Hypothèses et notations	113
II.5.3.b	Convergence: cas particuliers	113
II.5.3.c	Convergence: résultat général	119
II.5.4	Une construction symétrique de $S_{\text{NL}2d}$: étude de la convergence	121
II.5.4.a	Définition du schéma	121
II.5.4.b	Convergence	121
II.5.5	Stabilité des deux constructions	122
II.5.6	Exemples de schémas non-linéaires définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	123
II.5.6.a	Convergence du schéma S_{POWERP} étendu à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	123
II.5.6.b	Convergence du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ étendu à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	123
II.6	Conclusion	124

II.1 Introduction

L'étude menée au chapitre I, a montré que les schémas linéaires, malgré de nombreux avantages (écriture simple, multiples techniques d'études), présentent aussi d'importants défauts, comme la présence d'oscillations dans les fonctions limites (figure I.3), des artefacts indésirables (figure I.6) ou encore un ordre d'approximation trop faible (figure I.2).

C'est pour palier à ces différents défauts que l'on se tourne vers l'utilisation de schémas non-linéaires; la non-linéarité permet d'imposer une propriété particulière du schéma à travers des conditions sur les coefficients du schéma.

Parmi les propriétés demandées, on peut citer

- *obtenir une fonction limite plus régulière [Kob96],*
- *éviter les oscillations créées par des différences d'ordre 1 trop importantes des données initiales [CDM03, ADLT06, BCR07b],*
- *préserver des propriétés géométriques telles que la convexité, la convexité par morceaux ou la monotonie des données initiales [DKLD99, Kui98, MDL05],*
- *reproduire des fonctions particulières [MeHW01, JSD03, BCR07b].*

Dans cette partie, on s'intéressera surtout à la construction et à l'étude de schémas non-linéaires permettant de contrôler les oscillations près des discontinuités, appelées phénomène de Gibbs. Ces oscillations sont particulièrement importantes en compression d'image (chapitre III). En effet, en traitement d'images, le phénomène de Gibbs se traduit par des zones de flous au niveau des forts gradients de couleur (figure II.1 où des schémas de subdivision linéaires sont utilisés pour un grossissement d'image).

Dans un premier temps, nous allons rappeler les notions de schémas stationnaires, uniformes ou locaux et nous donnerons aussi un bref aperçu historique des différentes techniques non-linéaires développées pour résoudre les problèmes cités.

Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à donner un cadre général pour les schémas que nous allons développer dans ce chapitre. Pour cette classe de schémas, nous établirons des théorèmes de convergence, régularité, stabilité et d'ordre d'approximation. Nous les appliquerons ensuite pour étudier différents schémas non-linéaires existants, ou que nous avons proposés pour résoudre le phénomène de Gibbs (section II.4.1). Nous proposerons notamment, la construction et l'étude d'un schéma non-linéaire de régularité $C^{1+\varepsilon}$ (section II.4.3). Pour finir, nous étendrons la classe de schémas définis sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ à des schémas de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ pour lesquels nous donnerons aussi des conditions de convergence (section II.5.3).

II.2 Définitions et historique

II.2.1 Définitions

On peut définir un schéma de subdivision non-linéaire comme la généralisation de la définition I.1, en faisant dépendre le masque de la position n , de l'échelle j et de f .

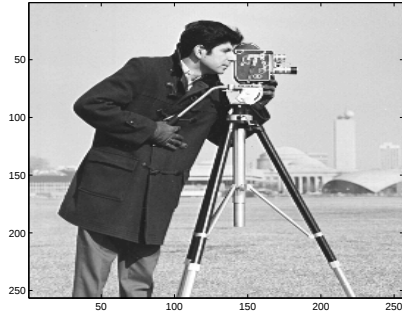
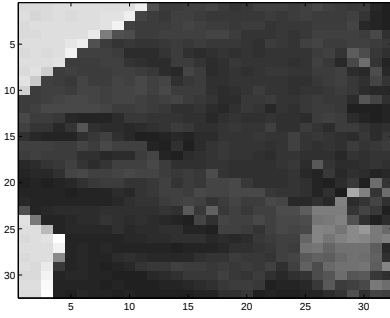
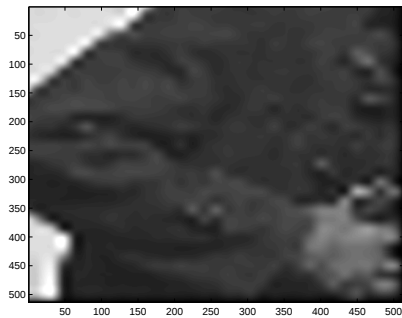
On écrit, en notant $f^j = S^j f$,

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s), \forall j \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}^s \quad (S^{j+1}f)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} a_{j,n,n-2m}(f^j) f_m^j \quad (\text{II.1})$$

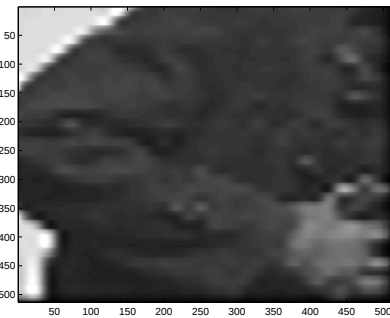
On dit qu'un schéma de subdivision est

indépendant des données si pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$, $a_{j,n,n-2m}(f^j) = a_{j,n,n-2m}$.

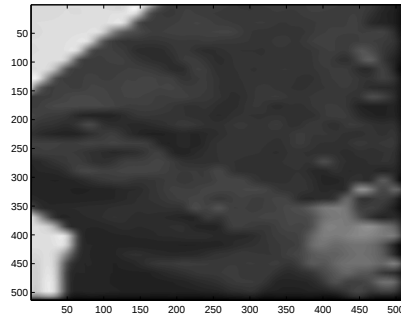
stationnaire si $a_{j,n,n-2m}(f^j) = a_{n,n-2m}(f)$.

(a) image initiale ($2^8 \times 2^8$ points)(b) points initiaux ($2^5 \times 2^5$ points)

(c) schéma 4 points Lagrange



(d) schéma interpolant-approximant (I.31)



(e) schéma spline quadratic

FIG. II.1 – 4 itérations de différents schémas linéaires pour construire un grossissement d'une partie d'une image.

uniforme si $a_{j,n,n-2m}(f^j) = a_{j,n-2m}(f^j)$.

local si $\text{supp}(a_{j,n,n-2m}(f^j)) < +\infty$.

Par opposition au chapitre I, on parlera de non-linéaire lorsque le schéma défini ne rentre pas dans une de ces catégories.

Dans ce chapitre, notre étude se fera pour des schémas locaux.

II.2.2 Quelques schémas présents dans la littérature

Nous allons présenter quelques schémas non-linéaires, les motivations pour leur construction et les résultats d'analyse les concernant.

Un schéma global

Pour définir des schémas interpolants ayant une régularité maximale, L. Kobbelt [Kob96] construit les valeurs $(f_{2n+1}^1)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui minimise une fonctionnelle utilisant les différences d'ordre k , $d^k f$.

Il obtient des schémas globaux car pour obtenir les valeurs $(f_{2n+1}^1)_{n \in \mathbb{Z}}$, on doit résoudre un système linéaire utilisant des matrices de Toeplitz symétriques.

Dans [Kob98], pour montrer la convergence de ces schémas, on trouve un résultat général de convergence pour des schémas non-linéaires interpolants et dépendant de la position qui est

Si il existe $l > 0$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^s)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{kj} d^{k+l} f^j\|_\infty < +\infty$, alors la suite $(f^j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction C^k .

Une subdivision non-régulière

Le principe est, en partant de points non-uniformément répartis X^0 , de définir des conditions sur la grille construite à l'échelle j , X^j , pour que la fonction limite construite avec les grilles $(X^j)_j$ garde la même régularité que celle définie sur une grille uniforme.

La technique de J. Warren [War95] consiste à subdiviser la grille X^0 en utilisant le schéma interpolant de Lagrange $S_{1,1}$. I. Daubechies, I. Gustov et W. Sweldens [DGS99] ou encore V. Maxim et M-L. Mazure [MM04] imposent seulement une condition de croissance $X^j \subset X^{j+1}$ et des conditions supplémentaires que choisissent chaque auteurs pour établir la convergence et la régularité.

V. Maxim et M-L. Mazure [MM04] utilisent notamment la notion de schéma équivalent pour comparer deux schémas

S et $\tilde{S}$ sont équivalents si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\|S_j - \tilde{S}_j\|_\infty \leq \alpha 2^{-\beta j}$ avec S_j le schéma défini par $f^{j+1} = S_j f^j$.

Schémas non-uniformes

D. Levin [Lev99] définit des polynômes de Laurent pour des schémas non-uniformes qu'il utilise pour étendre les schémas interpolants 4 points (I.29) au cas non-uniforme.

Schémas non-stationnaires

Pour étudier des schémas non-stationnaires mais uniformes, N. Dyn et D. Levin [DL95, DL02] comparent leurs schémas à un schéma stationnaire. Ils définissent la notion de schémas asymptotiquement équivalents

S et $\tilde{S}$ sont asymptotiquement équivalents si $\sum_j \|S_j - \tilde{S}_j\|_\infty < +\infty$.

Si le schéma stationnaire S a des propriétés de convergence et de régularité alors $\tilde{S}$ aura les mêmes propriétés. Ces résultats restent vrais pour des schémas non-uniformes ou dépendant de la position.

Ces résultats ont été utilisé par G. Morin, J. Warren et H. Weimer [MeHW01] et M.K. Jena, P. Shunmugaraj et P.C. Das [JSD03] pour étudier les propriétés de schémas construits à partir du schéma spline cubique ou du schéma interpolant 4 points de Lagrange $S_{2,2}$ et reproduisant des fonctions trigonométriques.

Plus généralement, C. Beccari, G. Casciola et L. Romani [BCR07b] construisent une classe de

schémas interpolants non-stationnaires C^1 , s'inspirant du schéma 4 points interpolant (I.29) qui selon une valeur initiale w_0 reproduit les différents types de coniques. Dans [BCR07a], ils améliorent la régularité en utilisant une grille triadique. Pour montrer la convergence et la régularité, ils utilisent encore les résultats de N. Dyn et D. Levin [DL95, DL02]. On peut aussi noter que lorsque le paramètre w_0 est petit, la fonction limite a tendance à rester très proche des données initiales. On obtient ainsi un schéma uniforme mais non-stationnaire permettant d'éviter des oscillations.

Dans la suite, nous allons voir que l'approche de N. Dyn et D. Levin [DL95, DL02] va permettre de construire et de montrer la convergence des schémas dépendant de la position. C'est dans cette lignée que s'inscrivent nos travaux.

II.2.3 Quelques schémas dépendant de la position

Ici, la technique de construction est inspirée des travaux de N. Dyn et D. Levin [DL95, DL02] pour des schémas uniformes, non-stationnaires. Elle consiste à perturber un schéma linéaire afin de satisfaire certaines propriétés. La plupart du temps cette perturbation est construite par une "moyenne".

Préservation de propriétés géométriques (convexité, monotonie, ...)

On peut noter que préserver des propriétés géométriques telles que la convexité ou la monotonie par morceaux peut éviter des artéfacts sur la fonction limite d'un schéma linéaire interpolant (figure I.6).

Une des premières idées de N. Dyn, F. Kuijt, D. Levin et R. Van Damme [DKLD99] est de perturber le schéma 4 points interpolant (I.29) en faisant dépendre le paramètre w des données initiales. Ils obtiennent ainsi un schéma stationnaire, uniforme, de régularité C^1 et préservant la strict-convexité, contrairement au schéma de Lagrange $S_{2,2}$ ($w = \frac{1}{16}$).

M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05] utilisent aussi le schéma (I.29) mais font dépendre w des données à chaque échelle j . Ils construisent ainsi des schémas ayant la même régularité que le schéma de [DKLD99], mais préservant la convexité par morceaux ce qui permet de résoudre le problème d'artéfact (figure I.6). Ils appellent ces schémas, des schémas géométriquement contrôlés, à cause de la construction géométrique de la perturbation.

On peut remarquer que ces deux schémas [DKLD99, MDL05] peuvent être écrits comme une perturbation du schéma linéaire interpolant de Lagrange $S_{1,1}$.

F. Kuijt et R. Van Damme [KD98, KD99] généralisent cette idée pour développer des schémas de régularité encore C^1 , préservant la strict-convexité ou la strict-monotonie et ayant un ordre d'approximation égal à 4 pour des données initiales strictement convexe ou strictement monotone.

*schéma [KD98] pour la préservation de la convexité: $f_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \frac{1}{8}F(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$
avec F la moyenne harmonique*

Les auteurs étendent aussi leurs travaux à des schémas définis sur des grilles non-uniformes, construites par un schéma monotone [KD02].

De même, M.S. Floater et C.A. Michelli [FM98] généralisent cette méthode en définissant des schémas non-linéaires par

schéma [FM98] pour la préservation de la convexité: $f_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} - \lambda F(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$.

Avec des conditions sur λ en fonction du minimum de F , ils obtiennent la préservation de la convexité mais seulement une régularité C^0 . Avec des conditions sur λ en fonction du maximum

II.3. Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

de F , ils définissent une classe de schémas non-linéaires convergents.

Analyse multirésolution optimale dans le cas de bruit non-gaussien

L'idée de D.L. Donoho et T.PY. Yu [DY00] est de remplacer la définition des coefficients de la théorie des ondelettes par un schéma de subdivision non-linéaire dans le but de définir une analyse multirésolution éliminant les bruits non-gaussiens. Ils construisent un schéma en base 3 utilisant une moyenne non-linéaire, convergeant mais ayant une régularité assez faible ($\alpha = 0.9$).

Dans [XY05], G. Xie et T.PY. Yu proposent une généralisation de cette moyenne.

P. Oswald [Osw04] améliore ce résultat de régularité et développe un schéma similaire sur une grille dyadique. Il écrit ces schémas non-linéaires comme une perturbation d'un schéma linéaire.

Dans [Osw03], il propose une généralisation de ces schémas sous la forme

$$\text{schéma [Osw03]} f_{2n+1} = (S_{lin}f)_{2n+1} + \phi(f)_{2n+1} d^k f_n \text{ avec } \phi \text{ une fonction non-linéaire.}$$

Schémas de subdivision dans $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$

Pour montrer la convergence de schémas de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ dans le but de construire des schémas convergents définis sur des variétés, P. Grohs et J. Wallner [Gro08, Gro07, GW08] utilisent aussi la comparaison avec un schéma linéaire en définissant la notion de 0-proximité de deux schémas

$$S \text{ et } T \text{ vérifient une condition de 0-proximité si } \|(S - T)f\|_\infty \leq C \|df\|_\infty^\alpha \text{ avec } \alpha > 1 \text{ et } f \text{ vérifiant } \|df\|_\infty < \varepsilon.$$

Si S est un schéma linéaire convergeant et C^1 , ils en déduisent des résultats de convergence et de régularité pour le schéma T .

Dans [DGW08], en se plaçant dans le cas interpolant, N. Dyn, P. Grohs et J. Wallner montrent des résultats sur l'ordre d'approximation du schéma T en fonction de la régularité du schéma linéaire S .

A noter que c'est les seuls travaux théoriques effectués à notre connaissance concernant des schémas non-linéaires définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$.

Schémas de subdivision adapté aux discontinuités

Initialement, ces schémas ont été développés pour obtenir une analyse multirésolution non-linéaire adaptée aux contours d'une image.

Citons parmi ces schémas, les schémas de subdivision ENO et WENO, étudiés par N. Dyn, A. Cohen et B. Matei [CDM03, Mat02] ou encore le schéma PPH développé et étudié par S. Amat, R. Donat, J. Liandrat et J-C. Trillo [ADLT06, AL05] (voir section II.4.1 et II.4.2).

De plus, dans [CDM03, Mat02], les auteurs donnent des résultats généraux sur les schémas non-linéaires en définissant la notion de rayon spectral, de reproduction des polynômes ou encore de schémas aux différences dans le cas non-linéaire.

II.3 Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

Nous avons vu que les résultats de convergence pour des schémas non linéaires sont rares et la plupart du temps difficiles à mettre en oeuvre.

Ici, nous allons établir des résultats pour une classe de schémas non-linéaires que nous allons définir comme une perturbation d'un schéma linéaire ou approximant. Malheureusement, on verra que les hypothèses faites, ne permettent pas d'utiliser des résultats existants (section II.2.3).

Mais, avant tout, rappelons les résultats des schémas linéaires qui restent valables dans le cas non-linéaires.

II.3.1 Premiers résultats concernant les schémas non-linéaires inspirés des schémas linéaires

Convergence équivalente à la convergence d'une suite de fonction

On peut généraliser le théorème I.2 pour des schémas non-linéaires (annexe B). On a donc

PROPOSITION II.1

On a équivalence entre

- (i) Le schéma converge au sens de la définition I.3.
- (ii) La suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (S_{NL}^j f)_n \phi_0(2^j x - n),$$

converge uniformément,

avec ϕ_0 une fonction à support compact vérifiant la condition de stabilité L^∞ (I.8) et $\sum_n \phi_0(\cdot - n) = 1$.

Convergence de $(2^{kj} d^k(S^j f))_{j \in \mathbb{N}}$ vers $(f^\infty)^{(k)}$

Sans avoir l'existence du schéma aux différences, la proposition I.4 reste valable pour des schémas non-linéaires, ce qui nous permet d'obtenir des résultats de régularité plus que C^1 (annexe B). On a

PROPOSITION II.2

Si la suite définie par $(2^{kj} d^k(S^j f))_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction g , alors $S^\infty f$ est C^k et $(S^\infty f)^{(k)} = g$.

Résultats non valables

Les autres propriétés ne s'étendent pas, en général, aux schémas non-linéaires comme

- le lien entre reproduction des polynômes et existences de schémas aux différences (proposition I.9 et contre exemple dans [Kui98]),
- la condition nécessaire de convergence c'est-à-dire la reproduction des constantes (proposition I.1).

Résultats généraux de [CDM03]

Sous certaines hypothèses, A. Cohen, N. Dyn et B. Matei [CDM03] montrent que les propriétés de convergence et de régularité des schémas linéaires restent valables (propositions I.5 et I.4). Le schéma non-linéaire est définie par

$$(Sf)_n = (S(f)f)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n,m}(f) f_m, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

et la reproduction des polynômes est remplacée par une condition plus forte que la définition classique I.10 qui s'écrit

$$\forall P \in \Pi_k, \exists Q \in \Pi_k \text{ tel que } \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad (S(f)p)_n = Q(2^{-1}n),$$

II.3. Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

avec $p = (P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

On parlera de reproduction des polynômes au sens [CDM03].

De même, ils définissent une notion plus générale de rayon spectral

$$\rho(S_{NL}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{(f_0, f_1, \dots, f_{j-1}) \in (l^\infty(\mathbb{Z}))^j} \|S_{NL}(f_{j-1}) \dots S_{NL}(f_1) S_{NL}(f_0)\|_\infty^{\frac{1}{j}}.$$

Avec les notions définies ci-dessus, ils montrent l'existence d'un schéma aux différences $S_k(f)(d^k f) = d^k(S(f)f)$ et le lien entre régularité et rayon spectral (proposition I.5). On remarque que la mise en pratique du calcul du rayon spectral est très lourde.

On peut montrer que, dans le cas de l'existence d'un schéma aux différences au sens classique, la définition du rayon spectral au sens classique suffit pour obtenir ces résultats.

Dans [CDM03], les auteurs définissent aussi la convergence et les extensions des résultats précédents dans les espaces L^p , en utilisant les espaces de Besov $B_{p,q}^s$ pour généraliser les espaces de Hölder C^s .

Dans la suite, on parlera de reproduction des polynômes et de schémas aux différences au sens classique (définition I.10 et équation (I.14)).

II.3.2 Etude d'un schéma s'écrivant comme une perturbation d'un schéma linéaire

La classe de schémas que l'on considère, concerne les schémas qui peuvent s'écrire sous la forme de la perturbation d'un schéma linéaire. On impose que la perturbation utilise un opérateur linéaire, qui sera en général un opérateur aux différences.

Cela donne la classe de schémas définie, pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$,

$$(S_{NL}f)_n = (Sf)_n + F(\delta f)_n, \tag{II.2}$$

avec S un schéma linéaire convergeant, δ est un opérateur linéaire et continue sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ et F est un opérateur non-linéaire défini sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

On remarque que ces schémas rentrent dans le cadre étudié en section I.5.1. L'idée est donc de généraliser les théorèmes de convergence et de régularité I.7 et I.8 obtenus.

On obtient un résultat de convergence, de régularité, de stabilité et d'ordre d'approximation pour des schémas non-linéaires interpolant ou approximant s'écrivant comme une perturbation de schémas linéaires.

Les schémas sont définis sur des grilles dyadiques mais les résultats resteront vrais dans le cas général.

Comme dans le cas linéaire, pour montrer la convergence et la régularité du schéma S_{NL} , on a besoin d'un certain contrôle de la perturbation. En particulier, la décroissance vers 0 de la suite $(F(\delta(S_{NL}f^j)))_{j \in \mathbb{N}}$ permet de s'approcher du schéma linéaire. Une contraction du schéma par rapport à l'opérateur linéaire δ est alors suffisante.

En comparant avec les hypothèses du théorème I.7, on en déduit des hypothèses suffisantes pour la convergence du schéma non-linéaire S_{NL} défini par l'équation (II.2).

II.3.2.a Résultat de convergence

THÉORÈME II.1

Soit S un schéma linéaire convergeant dont la fonction limite ϕ vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9).

Si S_{NL} , F et δ vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F(d)\|_\infty \leq M \|d\|_\infty, \quad (\text{II.3})$$

$$\exists L > 0, \exists c < 1 \text{ tel que} \quad \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta S_{NL}^L(f)\|_\infty \leq c \|\delta f\|_\infty, \quad (\text{II.4})$$

alors le schéma de subdivision S_{NL} défini par (II.2) converge.

On peut démontrer ce résultat de deux façons différentes.

De même que [Osw04], une première méthode consiste à utiliser un résultat d'I. Daubechies, O. Runborg et W. Sweldens [DRS04], développé pour étudier les propriétés d'une analyse multirésolution définis pour des courbes. Malheureusement, cette méthode ne permet pas d'étudier des schémas de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$. Pour cela, nous expliciterons une deuxième technique qui utilise la convergence d'une suite de fonctions (proposition II.1).

On peut remarquer que les notions développées dans la littérature, ne s'appliquent pas ici c'est-à-dire la définition de schémas asymptotiquement équivalents, d'équivalents, les schémas de [KD98, FM98, Osw04] ou la condition de 0-proximité [GW08] (section II.2.3).

Preuve

• Nous commençons par la preuve qui généralise celle du théorème I.7.

Soit ϕ la fonction limite associée à S .

Pour tout j et pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, on note f^j la séquence $S_{NL}^j f$ et $f^j(\cdot)$ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f^j(x) = \sum_n f_n^j \phi(2^j x - n) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On considère

$$f^{j+1}(x) - f^j(x) = \sum_n f_n^{j+1} \phi(2^{j+1} x - n) - \sum_n f_n^j \phi(2^j x - n),$$

D'après la relation d'échelle vérifiée par ϕ (propriété (iii) de la proposition I.2), on peut écrire

$$\sum_n f_n^j \phi(2^j x - n) = \sum_n (S f^j)_n \phi(2^{j+1} x - n),$$

d'où

$$f^{j+1}(x) - f^j(x) = \sum_n (f_n^{j+1} - (S f^j)_n) \phi(2^{j+1} x - n).$$

ϕ étant à support compact, on obtient avec les hypothèses (II.3) et (II.4)

$$\begin{aligned} \|f^{j+1} - f^j\|_{L^\infty} &\leq M \|\Delta(S_{NL}^L f^{j-L})\|_\infty, \\ &\leq M c \|\delta f^{j-L}\|_\infty. \end{aligned}$$

En notant $j \equiv j_0[L]$,

$$\begin{aligned} \|f^{j+1} - f^j\|_{L^\infty} &\leq M c^{\frac{j-j_0}{L}} \|\delta f^{j_0}\|_\infty \\ &\leq M c^{\frac{j-j_0}{L}} \|\delta\|_{L^\infty} \max\{\|S_{NL}^l\|_{l^\infty}, l = 0 \dots j_0\} \|f\|_\infty \\ &\leq M c^{\frac{j}{L}-1} \|\delta\|_{L^\infty} \max\{\|S_{NL}^l\|_{l^\infty}, l = 0 \dots L-1\} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

II.3. Résultats pour des schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

En posant $M' = c^{-1}M\|\delta\|_{L^\infty} \max\{\|S_{NL}^l\|_{L^\infty}, l = 0 \dots L-1\}$,

$$\|f^{j+1} - f^j\|_{L^\infty} \leq M' c^{\frac{j}{L}} \|f\|_\infty. \quad (\text{II.5})$$

Comme $c < 1$, la suite $(f^j(\cdot))$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$ donc elle converge uniformément vers une fonction continue. On note $f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f^j(x)$.

D'après la proposition II.1), on déduit la convergence du schéma S_{NL} .

On obtient une expression de la fonction S_{NL}^∞ qui est à rapprocher du cas linéaire

$$S_{NL}^\infty f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_n (S_{NL}^j f)_n \phi(2^j x - n).$$

• Une deuxième preuve consiste à utiliser un théorème de I. Daubechies, O. Runborg et W. Sweldens [DRS04], développé pour étudier le comportement de schémas étant vus comme une perturbation d'un schéma linéaire avec une perturbation que l'on peut contrôler. On cherche à retrouver les hypothèses du théorème 3.3 de [DRS04].

Par exemple, pour $L = 1$, en utilisant les hypothèses (II.3), (II.4) et la définition de S_{NL} (II.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \|S_{NL}(f^j) - S(f^j)\|_\infty &\leq M \|\delta f^j\|_\infty, \\ \|S_{NL}(f^j) - S(f^j)\|_\infty &\leq M \|\delta(S_{NL} f^{j-1})\|_\infty, \\ \|S_{NL}(f^j) - S(f^j)\|_\infty &\leq M c \|\delta f^{j-1}\|_\infty. \end{aligned}$$

En itérant, on obtient

$$\begin{aligned} \|S_{NL}(f^j) - S(f^j)\|_\infty &\leq M c^j \|\delta f^0\|_\infty \\ \|S_{NL}(f^j) - S(f^j)\|_\infty &\leq M \|\delta f^0\|_\infty 2^{j \log_2(c)} \end{aligned}$$

ce qui implique que S_{NL} vérifie les hypothèses du théorème 3.3 de [DRS04], compte tenu de la convergence du schéma linéaire S . □

II.3.2.b Résultat de régularité

De même que pour le cadre linéaire, on a le résultat de régularité suivant

THÉORÈME II.2

Sous les hypothèses du théorème II.1 et en notant α la régularité de S , la fonction limite de S_{NL} est $C^{\beta-}$ avec $\beta = \min \left\{ -\frac{\log_2(c)}{L}, \alpha \right\}$.

Preuve

- on utilise le théorème 3.3 de [DRS04],
 - la démonstration du théorème de régularité I.8 reste valable avec la proposition II.2.
-

De même que dans le cas linéaire, on peut voir que

dans le cas où S est un schéma linéaire interpolant, le théorème peut s'appliquer; la condition de stabilité L^∞ est vérifiée (proposition I.12),
l'estimation de la régularité est limitée par la régularité du schéma linéaire S ; il faudra donc éventuellement adapter le schéma linéaire pour optimiser la constante β .

REMARQUE II.1

Le théorème II.1 peut être utilisé dans le cadre de schéma servant à construire des courbes à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ mais utilisant à chaque itérations, les deux coordonnées. Le schéma s'écrit

$$S_{NL}(x,y) = \begin{pmatrix} S_{NL_1}(x,y)_{2n+1} \\ S_{NL_2}(x,y)_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(x,y)_{2n+1} + F_1(\delta x, \delta y) \\ S(x,y)_{2n+1} + F_2(\delta x, \delta y) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.6})$$

Si F_1, F_2 et δ vérifient, $\forall i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \exists M > 0 \text{ tel que } \quad \forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F_i(d_1, d_2)\|_\infty &\leq M \max(\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty), \\ \exists c > 1 \text{ tel que } \quad \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta(S_{NL_i}(f, g))\|_\infty &\leq c \max(\|\delta f\|_\infty, \|\delta g\|_\infty), \end{aligned}$$

le schéma S_{NL} défini par (II.6) converge.

REMARQUE II.2

Si un schéma S_{NL} s'écrit

$$S_{NL}f = \lambda S_{NL_1}f + (1 - \lambda)S_{NL_2}f \quad (\text{II.7})$$

avec S_{NL_1} et S_{NL_2} vérifiant les hypothèses (II.3) et (II.4), et s'écrivant

$$S_{NL_1}f = Sf + F_1(\delta f) \quad \text{et} \quad S_{NL_2}f = Sf + F_2(\delta f),$$

alors on peut montrer que le schéma S_{NL} converge et sa constante de régularité est $\beta = \min\{\beta_{S_{NL_1}}, \beta_{S_{NL_2}}\}$.

En particulier, si S_{NL_1} ou S_{NL_2} diverge, on ne peut rien dire.

Un contre exemple est donné par les schémas de Lagrange $S_{l,r}$. En effet, le schéma $S_{l,r}$ s'écrit

$$S_{l,r}f = \frac{1}{r+l-1} \left(\left(\frac{3}{2} - l\right) S_{l,r-1}f + \left(r - \frac{1}{2}\right) S_{l-1,r} \right),$$

avec les schémas $S_{l-1,r}$ et $S_{l,r-1}$ vérifiant (proposition I.21)

$$S_{l-1,r}f = S_{l-1,r-1} + F_1(d^{l+r-2}f) \quad \text{et} \quad S_{l,r-1}f = S_{l-1,r-1} + F_2(d^{l+r-2}f).$$

Or, les résultats du chapitre I montrent que $S_{l-1,r}$ peut diverger et $S_{l,r-1}$ converger mais on n'aura pourtant pas la divergence de $S_{l,r}$ (figure I.14).

II.3.2.c Réciproque du théorème de régularité pour des schémas interpolants

Pour établir cette réciproque, on va utiliser un résultat de D.L. Donoho [Don92] concernant les analyses multirésolutions interpolantes de $C^0(\mathbb{R})$ (annexe A).

THÉORÈME II.3

Soit S_{NL} un schéma de subdivision non-linéaire interpolant de la forme (II.2) avec S interpolant, Soit ϕ la fonction limite du schéma linéaire S que l'on suppose $\phi \in C^\beta(\mathbb{R})$, Alors si S_{NL} est convergeant et si pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $f^\infty = S_{NL}^\infty f \in C^\alpha(\mathbb{R})$, on a

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall j > 0, \quad \|F(\delta(S_{NL}^j f))\|_\infty \leq M 2^{-js},$$

avec $s = \min(\alpha, \beta)$.

Preuve

Pour $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $f^\infty = S^\infty f \in C^0(\mathbb{R})$ et $f^\infty(2^{-j}n) = (S_{NL}^j f)_n$, car S_{NL} est interpolant et convergeant.

De plus, la fonction d'échelle du schéma linéaire ϕ vérifie toutes les propriétés pour définir une analyse multirésolution interpolante de $C^0(\mathbb{R})$ (proposition I.2 et annexe A).

D'après la définition des espaces V_j (section A.0.4),

$$P_{V_j} f^\infty(x) = f^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S_{NL} f^j)_n \phi(2^j x - n).$$

On a bien $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_{V_j} f^\infty = f^\infty$ (proposition II.1).

Enfin, les quantités $(F(\delta S_{NL}^j f))_{j \in \mathbb{N}}$ peuvent être considérés comme les détails de l'analyse multirésolution linéaire de la fonction f^∞ .

On peut calculer les détails (A.13)

$$\begin{aligned} d_{j,n} &= f^\infty(2^{-(j+1)}(2n+1)) - S(f^\infty(2^{-j} \cdot))_{2n+1} \\ &= (S_{NL}^{j+1} f)_{2n+1} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_{NL}^j f)_k \phi(n + \frac{1}{2} - k), \end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant les propriétés de ϕ (proposition I.2)

$$\begin{aligned} d_{j,n} &= (S_{NL}^{j+1} f)_{2n+1} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S(S_{NL}^j f))_k \phi(2n+1-k) \\ &= (S_{NL}^{j+1} f)_{2n+1} - (S(S_{NL}^j f))_{2n+1} \\ &= F(\delta S_{NL}^j f)_{2n+1}. \end{aligned}$$

Alors, si $f^\infty \in C^\alpha(\mathbb{R})$ alors $|d_{j,n}| \leq M 2^{-js}$ avec $s = \min(\alpha, \beta)$ (proposition A.1) ce qui conclut la preuve. □

II.3.2.d Résultat de stabilité

On a aussi un résultat de stabilité pour les schémas non-linéaires qui est

THÉORÈME II.4

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire **convergeant** s'écrivant sous la forme (II.2) avec S un schéma linéaire convergeant.

Si S_{NL} , F et δ vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F(d_1) - F(d_2)\|_\infty \leq M \|d_1 - d_2\|_\infty, \quad (\text{II.8})$$

$$\exists L > 0, \exists c < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta(S_{NL}^L(f) - S_{NL}^L(g))\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty, \quad (\text{II.9})$$

alors le schéma S_{NL} est stable au sens de la définition I.7.

Preuve

• On considère le cas $L = 1$.

Pour f et $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, on forme pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|S_{NL}^j f - S_{NL}^j g\|_\infty \leq \|S(S_{NL}^{j-1} f - S_{NL}^{j-1} g)\|_\infty + \|F(\delta S_{NL}^{j-1} f) - F(\delta S_{NL}^{j-1} g)\|_\infty.$$

En utilisant les hypothèses (II.8) et (II.9), on obtient

$$\|S_{NL}^j f - S_{NL}^j g\|_\infty \leq \|S(S_{NL}^{j-1} f - S_{NL}^{j-1} g)\|_\infty + M c \|\delta S_{NL}^{j-1} f - \delta S_{NL}^{j-1} g\|_\infty.$$

En redécomposant $\|S(S_{NL}^{j-1} f - S_{NL}^{j-1} g)\|_\infty$, on a

$$\begin{aligned} \|S_{NL}^j f - S_{NL}^j g\|_\infty &\leq \|S^2(S_{NL}^{j-2} f - S_{NL}^{j-2} g)\|_\infty + \|S\|_\infty \|F(\delta S_{NL}^{j-2} f) - F(\delta S_{NL}^{j-2} g)\|_\infty \\ &\quad + M c^j \|\delta(f - g)\|_\infty. \end{aligned}$$

On itère pour avoir

$$\|S_{NL}^j f - S_{NL}^j g\|_\infty \leq \|S^j(f - g)\|_\infty + M \|\delta\|_\infty \|f - g\|_\infty \sum_{i=1}^j c^i \|S^i\|_\infty.$$

S est un schéma linéaire convergeant donc, d'après la remarque I.2, $(\|S^j\|_\infty)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée par $M_S < +\infty$.

La convergence d'un schéma linéaire implique aussi la stabilité (proposition I.6). Donc,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|S^j(f - g)\|_\infty = \|S^\infty(f - g)\|_\infty \leq M_\phi \|f - g\|_\infty,$$

Finalement, en faisant tendre j vers $+\infty$ avec $c < 1$, on obtient

$$\|S_{NL}^\infty f - S_{NL}^\infty g\|_\infty \leq \left(M_\phi + \frac{M M_S}{1 - c} \|\delta\|_\infty \right) \|f - g\|_\infty,$$

d'où la stabilité du schéma non-linéaire S_{NL} .

• Pour $L > 1$, on procède comme dans la preuve du théorème II.1. □

REMARQUE II.3

Si le schéma S_{NL} reproduit exactement les constantes, et si δ est un opérateur aux différences, les hypothèses (II.8) et (II.9) entraînent la convergence du schéma non-linéaires (théorème II.1). En effet, la reproduction exacte des constantes par le schéma linéaire S (proposition I.1) donne l'équivalence entre

$$S_{NL} \text{ reproduit les constantes de façon exacte ssi } F(0) = 0.$$

On peut alors remplacer l'hypothèse de convergence du schéma S_{NL} par une hypothèse de reproduction exacte des constantes.

II.3.2.e Ordre d'approximation

Dans le cas non-linéaire, on ne peut pas directement généraliser le lien entre l'ordre d'approximation de S^∞ et celui de S (proposition I.7 dans le cas linéaire).

On a besoin de la stabilité du schéma non-linéaire pour établir cette proposition. Il est montré dans F. Kuijt [Kui98]

PROPOSITION II.3

Si un schéma non-linéaire convergeant et stable est approximant d'ordre k alors S^∞ est approximant d'ordre k .

Par contre, on a la proposition suivante qui reste vraie pour la reproduction des polynômes

PROPOSITION II.4

Si un schéma non-linéaire S est stable et reproduit **exactement** les polynômes de degré k alors S est approximant d'ordre $k + 1$.

Pour établir qu'un schéma non-linéaire convergeant et stable, est approximant d'ordre k , on cherchera donc à prouver que le schéma reproduit exactement les polynômes de degré k .

Par contre, il est aussi possible de comparer un schéma non-linéaire avec un schéma linéaire dont on connaît l'ordre d'approximation pour obtenir l'ordre d'approximation du schéma non-linéaire.

THÉORÈME II.5

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire convergeant et S un schéma linéaire convergeant, approximant d'ordre k vérifiant pour tout $f^0 = g(nh)_n$ avec $g \in C^\infty([0,1])$

$$\|S_{NL}f^0 - Sf^0\|_\infty = O(h^p), \quad (\text{II.10})$$

alors S_{NL}^∞ est approximant d'ordre $\min(p, k)$.

Preuve

Soit $g \in C^\infty([0,1])$ et $f^0 = g(nh)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Le schéma S_{NL} étant convergeant, il existe $j > 0$ tel que $\|S_{NL}^\infty f^0(2^{-j} \cdot) - S_{NL}^j f^0\|_\infty \leq \varepsilon < h^p$.

On obtient par hypothèse

$$\begin{aligned} |S_{NL}^\infty f^0(2^{-j}n) - g(2^{-j}nh)| &\leq |S_{NL}^\infty f^0(2^{-j}n) - (S_{NL}^j f^0)_n| + |(S_{NL}^j f^0)_n - (S^j f^0)_n| \\ &\quad + |(S^j f^0)_n - g(2^{-j}nh)| \\ &\leq \varepsilon + \|S_{NL}^j f^0 - S^j f^0\|_\infty + C_1 h^k, \end{aligned}$$

en utilisant la proposition I.7 pour le schéma linéaire S . Il suffit donc d'étudier $\|S_{NL}^j f^0 - S^j f^0\|_\infty$.

On utilise l'hypothèse (II.10) pour écrire

$$\begin{aligned} |(S_{NL}^j f^0)_n - (S^j f^0)_n| &\leq \|S_{NL}(S_{NL}^{j-1} f^0) - S(S_{NL}^{j-1} f^0)\|_\infty + \|S(S_{NL}^{j-1} f^0) - S(S^{j-1} f^0)\|_\infty \\ &\leq C_2 (2^{-(j-1)}h)^p + \|S(S_{NL}(S_{NL}^{j-2} f^0) - S^2(S_{NL}^{j-2} f^0))\|_\infty \\ &\quad + \|S^2(S_{NL}^{j-2} f^0) - S^2(S^{j-2} f^0)\|_\infty \\ &\leq C_2 h^p (2^{-p(j-1)} + \|S\|_\infty 2^{-p(j-2)}) + \|S^2(S_{NL}^{j-2} f^0) - S^2(S^{j-2} f^0)\|_\infty. \end{aligned}$$

Par itération, on obtient

$$\begin{aligned} \|S_{NL}^j f^0 - S^j f^0\|_\infty &\leq C_2 h^p \sum_{r=1}^j \|S^{r-1}\|_\infty 2^{-p(j-r)}, \\ &\leq C_2 h^p \max(\|S^{r-1}\|_\infty, r = 1 \dots j) \frac{1 - 2^{-pj}}{2^p - 1}. \end{aligned}$$

S étant un schéma linéaire convergeant, on utilise la remarque I.2 pour majorer $(\|S^j\|_\infty)_{j \in \mathbb{N}}$ par C .

On a donc

$$|S_{NL}^\infty f^0(2^{-j}n) - g(2^{-j}nh)| \leq \varepsilon + C_2 C h^p + C_1 h^k.$$

Par continuité de $S_{NL}^\infty f^0$ et de g , on a le résultat pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

II.4 Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

On va s'intéresser à divers exemples de schémas de subdivision non-linéaires. Parmi ces schémas, on trouvera des schémas existants, comme le schéma S_{WENO_4} (section II.4.1) ou le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ (section II.4.4), pour lesquels on complète les résultats de la littérature. On définira, aussi, des schémas comme les schéma S_{POWERP} (section II.4.2) ou $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (section II.4.3), construits pour éliminer les phénomènes de Gibbs et répondre à certains critères.

Pour étudier les propriétés de ces schémas, nous allons utiliser les théorèmes précédents (section II.3). Il s'agira d'écrire ces schémas comme la perturbation d'un schéma linéaire (II.2) et de montrer que la perturbation est contrôlée.

On appellera stencil s_n l'ensemble des points utilisé pour construire les points $(Sf)_{2n}$ et $(Sf)_{2n+1}$.

II.4.1 Premier Exemple: le schéma WENO à 6 points (valeurs ponctuelles)

Dans cette partie, on propose d'étudier les propriétés d'un schéma WENO particulier avec les résultats développés dans la section II.4.1.

Dans une première partie, on rappellera la construction des schémas WENO et les différents types d'indicateur de régularité utilisés.

Dans une deuxième partie, on donnera une preuve de la convergence, différente de celle de [CDM03] qui aura l'avantage d'améliorer la constante théorique de régularité (théorème II.6).

Enfin, on étudiera l'ordre d'approximation de ce schéma (proposition II.5). On verra qu'il peut-être optimal par rapport au nombre de points utilisés, pour un choix particulier d'indicateur de régularité (remarque II.4).

Historique des schémas ENO et WENO

Les schémas ENO et WENO ont été construits pour contrôler les problèmes numériques liées aux ondes de chocs dans les équations hyperboliques scalaires.

Ils interviennent dans la reconstruction de flux, permettent de conserver un ordre de précision élevé au voisinage des discontinuités et évitent l'apparition d'oscillations de la solution.

Le principe de ces schémas repose sur le choix local d'un stencil de reconstruction par interpolation polynomiale, pour lequel la solution numérique est la plus régulière.

Les schémas ENO ont été introduits par S.R. Chakravarthy, B. Engquist, A. Harten et S. Osher [CEHO89] et S. Osher et C-W Shu [OS88, OS89] dans le cadre des équations hyperboliques et

par F. Aràndiga, R. Donat et A. Harten [ADH99b] dans le cadre d'analyses multirésolutions et de la compression de données. Ils présentent deux défauts: un problème d'instabilité et d'ordre non-optimal.

Pour résoudre ces deux problèmes, les schémas WENO ont été introduits par T. Chan, X-D. Liu et S. Osher [CLO94] et G. Jiang et C-W Shu [JS96], toujours dans le cadre des équations hyperboliques.

Ce sont les premiers schémas non-linéaires utilisés dans la compression d'images, pour éviter les phénomènes de Gibbs aux voisinages des contours [AACD02]. La convergence des schémas de subdivision associés a été démontrée par A. Cohen, N. Dyn et B. Matei [CDM03].

Ces schémas sont définis pour des valeurs moyennes $(\bar{f}_n)_n$ sur l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$. On adaptera sa définition aux valeurs ponctuelles $(f_n)_n$.

II.4.1.a Construction des schémas S_{ENO}

Etant donné un entier $r \geq 2$, on construit la valeur $(S_{\text{ENO}}f)_{2n+1}$ **en choisissant un schéma linéaire de Lagrange parmi tous les schémas de Lagrange possibles utilisant r points**. Les schémas possibles sont caractérisés par des stencils qui contiennent x_n et x_{n+1} . Il y a donc **$r-1$ choix possibles** (figure II.2).

Ce choix donne un schéma non-linéaire utilisant $2r - 2$ points.

On notera s_{n+i} le stencil

$$s_{n+i} = \{f_{n+i-r+1}, \dots, f_{n+i}\} \quad \text{pour } i=1 \dots r-1.$$

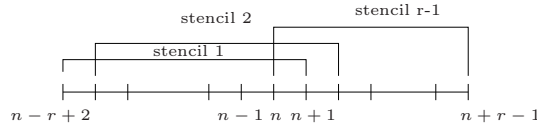


FIG. II.2 – *Choix possibles parmi ces stencils pour le schéma ENO pour des valeurs ponctuelles.*

Le choix est soit basé sur la comparaison des différences d'ordre p , pour $1 \leq p \leq r$ (*choix hiérarchique*), soit basé sur les différences d'ordre r (*choix non-hiérarchique*) [ADH99b].

Le schéma ainsi obtenu présente plusieurs inconvénients.

Le premier est lié au fait que le choix du stencil est sensible à des petites perturbations: des erreurs numériques peuvent faire choisir un stencil complètement différent, ce qui risque d'entraîner des instabilités.

Le deuxième inconvénient est que même dans les régions de régularité, on est obligé de faire un choix sans pour autant améliorer l'ordre de S_{ENO} . Le schéma S_{ENO} a seulement un ordre égal à r alors qu'il utilise $2r - 2$ points.

II.4.1.b Construction des schémas S_{WENO}

Définition du schéma

Afin de palier au problème d'instabilité du schéma S_{ENO} , on prend une combinaison convexe de tous les stencils possibles et on attribue un poids $(\alpha_{i,n})_n$ pour $i = 1 \dots r - 1$ qui dépendra de la position et sera fonction de la régularité de la fonction sur le stencil.

On définit

$$\begin{aligned} (S_{\text{WENO}}f)_{2n} &= f_{2n} \\ (S_{\text{WENO}}f)_{2n+1} &= \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{i,n} f_{i,2n+1}^1 \quad \text{avec} \quad f_{i,2n+1}^1 = (S_{i,r-i}f)_{2n+1} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

où $S_{i,r-i}$ est le schéma de Lagrange utilisant i points à gauche et $r-i$ points à droite (définition I.13).

Les poids $(\alpha_{i,n})_n$ sont alors calculés pour que:

dans les zones de régularité, l'ordre d'une itération de S_{WENO} soit égal à $2r-2$ (que l'on obtiendra pour certaines valeurs de r)

dans les zones de discontinuité, le stencil contenant la discontinuité soit affecté d'un poids très faible.

Définition des poids $\alpha_{i,n}$

On définit pour tout n ,

$$\forall i = 1 \dots r-1, \quad \alpha_{i,n} = \frac{\beta_{i,n}}{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{j,n}} \quad \text{avec} \quad \beta_{i,n} = \frac{c_i}{(\varepsilon + IS_{i,n})^2} \quad (\text{II.12})$$

avec

- c_i constante indépendante de la position
- ε constante fixée à priori afin que le dénominateur ne s'annule pas (en général $\varepsilon = 10^{-6}$)
- $IS_{i,n}$ un indicateur de régularité positif.

On observe les propriétés suivantes pour les coefficients $(\alpha_{i,n})$

PROPRIÉTÉ II.1

1. Les coefficients $(\alpha_{i,n})_{i,n}$ sont strictement positifs.
2. Pour tout n , $\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_{i,n} = 1$.

Construction des constantes c_i

Les constantes $(c_i)_{i=1\dots r-1}$ sont calculées pour obtenir un ordre d'approximation optimal c'est-à-dire $2r-2$.

En fait, cela revient à construire les $(c_i)_{i=1\dots r-1}$ vérifiant l'équation [JS96]

$$S_{r-1,r-1}f = \sum_{i=0}^{r-1} c_i S_{r-i,i}f.$$

Il est facile de montrer qu'il existe des constantes $(c_i)_{i=1\dots r-1}$ vérifiant cette équation et $\sum_{i=1}^{r-1} c_i = 1$.

Par exemple, pour $r=4$ (valeurs ponctuelles), on obtient

$$c_1 = \frac{3}{16}, \quad c_2 = \frac{10}{16} \quad \text{et} \quad c_3 = \frac{3}{16}. \quad (\text{II.13})$$

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

Construction des constantes $IS_{i,n}^j$

Pour construire l'indicateur de régularité $IS_{i,n}^j$, plusieurs méthodes ont été élaborées dans le cadre des valeurs moyennes.

Celle proposée par T. Chan, X-D. Liu et S. Osher [CLO94] repose sur une somme de toutes les différences d'ordre $k \leq r-1$, et s'adapte de la façon suivante dans le cadre des valeurs ponctuelles [Bel04]

$$IS_{i,n}^j = 2^{2j} \sum_{l=1}^{r-1} \left(\sum_{k=1+\lfloor \frac{r-l}{2} \rfloor}^{r-\lfloor \frac{r-l+1}{2} \rfloor} (d^{r-l} \bar{f}_{n+i-r+k})^2 \right) / l. \quad (\text{II.14})$$

M. Belda [Bel04] montrent que pour tout $f = g(nh)_n$ avec $g \in C^0([0,1])$,

$$\text{pour } r = 3, \quad \|S_{2,2}f - S_{\text{WENO}_3}f\|_\infty = O(h^4), \quad \text{et pour } r = 4, \quad \|S_{3,3}f - S_{\text{WENO}_4}f\|_\infty = O(h^5).$$

G. Jiang et C-W Shu [JS96] proposent une autre construction utilisant l'intégrale des dérivées k -ième des polynômes d'interpolation de chaque stencil, pour $k \leq r-1$.

Pour les valeurs ponctuelles, on obtient [Bel04]

$$IS_{i,n}^j = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{n+1/2}}^{x_{n+3/2}} 2^{-j(2l-1)} \left(p_{n,r-i,i}^{(l)}(x) \right)^2 dx, \quad (\text{II.15})$$

On a les estimations suivantes, pour tout $f = g(nh)_n$ avec $g \in C^0([0,1])$,

$$\text{pour } r = 3, \quad \|S_{2,2}f - S_{\text{WENO}_3}f\|_\infty = O(h^4), \quad \text{et pour } r = 4, \quad \|S_{3,3}f - S_{\text{WENO}_4}f\|_\infty = O(h^6).$$

Pour $r = 3$ ou $r = 4$, l'utilisation de ces indicateurs permettent alors d'avoir un ordre optimal pour le nombre de points utilisés.

II.4.1.c Construction du schéma S_{WENO_4} utilisant des stencils de 4 points

On va considérer des stencils de 4 points ($r = 4$). Le schéma S_{WENO_4} s'écrit comme une combinaison convexe de 3 schémas de Lagrange qui sont

$$\begin{aligned} (S_{3,1}f)_{2n+1} &= \frac{1}{16}f_{n-2} - \frac{5}{16}f_{n-1} + \frac{15}{16}f_n + \frac{5}{16}f_{n+1} \\ (S_{2,2}f)_{2n+1} &= -\frac{1}{16}f_{n-1} + \frac{9}{16}f_n + \frac{9}{16}f_{n+1} - \frac{1}{16}f_{n+2} \\ (S_{1,3}f)_{2n+1} &= \frac{5}{16}f_n + \frac{15}{16}f_{n+1} - \frac{5}{16}f_{n+2} + \frac{1}{16}f_{n+3}. \end{aligned}$$

Les indicateurs de régularité sont donnée, pour tout $j \in \mathbb{N}$, par [Bel04]

$$\begin{aligned} IS_{1,n}^j &= 2^{2j-1} \left((d^2 f_{n-1}^j)^2 + (d^2 f_n^j)^2 + 2(d^2 f_{n-1}^j - d^2 f_n^j)^2 \right) \\ IS_{2,n}^j &= 2^{2j-1} \left((d^2 f_n^j)^2 + (d^2 f_{n+1}^j)^2 + 2(d^2 f_n^j - d^2 f_{n+1}^j)^2 \right) \\ IS_{3,n}^j &= 2^{2j-1} \left((d^2 f_{n+1}^j)^2 + (d^2 f_{n+2}^j)^2 + 2(d^2 f_{n+1}^j - d^2 f_{n+2}^j)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Les équations (II.11), (II.13) (coefficients c_i), (II.12) (poids $\alpha_{i,n}$), permettent de calculer le schéma S_{WENO_4} .

On observe alors la disparition du phénomène de Gibbs près de la discontinuité (figure II.3).

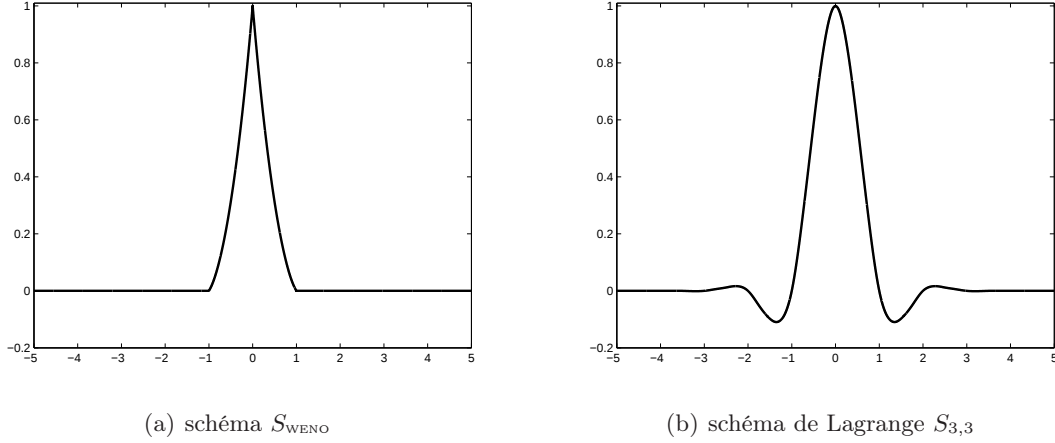


FIG. II.3 – Comparaison des fonctions limites du schéma S_{WENO_4} et du schéma linéaire à 6 points pour les données initiales $f = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

II.4.1.d Convergence et régularité du schéma S_{WENO_4}

Tout d'abord, on écrit

$$\begin{aligned}
 (S_{3,1}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{1}{16}d^2f_{n-1} - \frac{3}{16}d^2f_n \\
 (S_{2,2}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{16}(d^2f_n + d^2f_{n+1}) \\
 (S_{1,3}f)_{2n+1} &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{1}{16}d^2f_{n+2} - \frac{3}{16}d^2f_{n+1}.
 \end{aligned}$$

ce qui donne pour S_{WENO_4}

$$\begin{aligned}
 (S_{\text{WENO}_4}f)_{2n+1} &= \alpha_{1,n}(S_{3,1}f)_{2n+1} + \alpha_{2,n}(S_{2,2}f)_{2n+1} + \alpha_{3,n}(S_{1,3}f)_{2n+1} \\
 &= (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \alpha_{3,n})\frac{f_n + f_{n+1}}{2} \\
 &\quad + \frac{\alpha_{1,n}}{16}d^2f_{n+2} - \frac{3\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}}{16}d^2f_{n+1} - \frac{\alpha_{2,n} + 3\alpha_{3,n}}{16}d^2f_n + \frac{\alpha_{2,n}}{16}d^2f_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Comme $\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \alpha_{3,n} = 1$ (propriété II.1) et sachant que les coefficients ne dépendent que de d^2f (II.16), on a finalement

$$(S_{\text{WENO}_4}f)_{2n+1} = (S_{1,1}f)_{2n+1} + F(d^2f)_{2n+1}$$

avec

$$\begin{aligned}
 F(d^2f)_{2n+1} &= \frac{\alpha_{1,n}(d^2f)}{16}d^2f_{n+2} - \frac{3\alpha_{1,n}(d^2f) + \alpha_{2,n}(d^2f)}{16}d^2f_{n+1} \\
 &\quad - \frac{\alpha_{2,n}(d^2f) + 3\alpha_{3,n}(d^2f)}{16}d^2f_n + \frac{\alpha_{3,n}(d^2f)}{16}d^2f_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

On se trouve alors dans le cadre d'utilisation du théorème de convergence II.1, avec $S = S_{1,1}$ le

schéma de Lagrange utilisant 2 points.

On obtient le résultat suivant

THÉORÈME II.6

Le schéma S_{WENO_4} est convergent vers une fonction limite $C^{-\beta}$ avec $\beta \geq 0.215$.

Preuve

On vérifie d'abord l'hypothèse (II.3) pour F .

D'après la définition (II.17) et les propriétés II.1 de $(\alpha_{i,n})_{i=1\dots 3}$, pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |F(d^2 f)_{2n+1}| &\leq \frac{4\alpha_{1,n} + 4\alpha_{2,n} + 4\alpha_{3,n}}{16} \|d^2 f\|_\infty \\ \|F(d^2 f)\|_\infty &\leq \frac{1}{2} \|d^2 f\|_\infty. \end{aligned}$$

Deuxièmement, on s'intéresse à prouver la contraction (II.4) pour S_{WENO} ou S_{WENO}^p , relativement à l'opérateur aux différences d^2 .

On considère deux cas.

- Indice impair,

$$\begin{aligned} (d^2(S_{\text{WENO}} f))_{2n+1} &= f_{n+1} - 2(S_{\text{WENO}} f)_{2n+1} + f_n, \\ &= -\frac{\alpha_{1,n}}{8} d^2 f_{n+2} + \frac{3\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}}{8} d^2 f_{n+1} + \frac{\alpha_{2,n} + 3\alpha_{3,n}}{8} d^2 f_n - \frac{\alpha_{3,n}}{8} d^2 f_n \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

En utilisant les propriétés II.1, on obtient

$$\begin{aligned} |(d^2(S_{\text{WENO}} f))_{2n+1}| &\leq \frac{4\alpha_{1,n} + 2\alpha_{2,n} + 4\alpha_{3,n}}{8} \|d^2 f\|_\infty, \\ &\leq \frac{4 - 2\alpha_{2,n}}{8} \|d^2 f\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$|(d^2(S_{\text{WENO}} f))_{2n+1}| \leq \frac{1}{2} \|d^2 f\|_\infty. \quad (\text{II.19})$$

- Indice pair,

$$\begin{aligned} (d^2(S_{\text{WENO}} f))_{2n} &= (S_{\text{WENO}} f)_{2n+1} - 2f_n + (S_{\text{WENO}} f)_{2n-1}, \\ &= \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{2} + \frac{\alpha_{3,n}}{16} d^2 f_{n+2} \\ &\quad - \frac{3\alpha_{3,n} + \alpha_{1,n} - \alpha_{3,n-1}}{16} d^2 f_{n+1} - \frac{\alpha_{2,n} + 3\alpha_{1,n} + 3\alpha_{2,n-1} + \alpha_{3,n-1}}{16} d^2 f_n \\ &\quad - \frac{3\alpha_{1,n-1} + \alpha_{2,n-1} - \alpha_{1,n}}{16} d^2 f_{n-1} + \frac{\alpha_{1,n-1}}{16} d^2 f_{n-2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (d^2(S_{\text{WENO}}f))_{2n} = & \frac{\alpha_{3,n}}{16}d^2f_{n+2} \\ & - \frac{3\alpha_{3,n} + \alpha_{1,n} - \alpha_{3,n-1}}{16}d^2f_{n+1} + \frac{8 - \alpha_{2,n} - 3\alpha_{1,n} - 3\alpha_{2,n-1} - \alpha_{3,n-1}}{16}d^2f_n \\ & - \frac{3\alpha_{1,n-1} + \alpha_{2,n-1} - \alpha_{1,n}}{16}d^2f_{n-1} + \frac{\alpha_{1,n-1}}{16}d^2f_{n-2}. \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

En utilisant les propriétés II.1, on a $0 < 8 - \alpha_{2,n} - 3\alpha_{1,n} - 3\alpha_{2,n-1} - \alpha_{3,n-1}$.
Ce qui donne

$$|(d^2(S_{\text{WENO}}f))_{2n}| \leq \frac{4\alpha_{3,n} - 2\alpha_{1,n} + 4\alpha_{1,n-1} - 2\alpha_{2,n-1} + 8}{16} \|d^2f\|_\infty,$$

De même, on a $0 < 8 - 2\alpha_{1,n} - 2\alpha_{2,n-1}$.

Donc

$$|(d^2(S_{\text{WENO}}f))_{2n}|_\infty < \|d^2f\|_\infty. \quad (\text{II.21})$$

On ne peut pas conclure directement. Il faut considérer les itérés S_{WENO}^p

On s'intéresse à S_{WENO}^2 et $\|d^2(S_{\text{WENO}}^2)\|_\infty$.

Les équations (II.18) et (II.20) montrent l'existence d'un schéma pour les différences d'ordre 2 pour S_{WENO} . En le notant $S_{d^2\text{WENO}}$, on obtient

$$d^2(S_{\text{WENO}}^2f) = S_{d^2\text{WENO}}^2(d^2f)$$

avec

$$(S_{d^2\text{WENO}}g)_{2n+1} = -\frac{\alpha_{1,n}}{8}g_{n+2} + \frac{3\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n}}{8}g_{n+1} + \frac{\alpha_{2,n} + 3\alpha_{3,n}}{8}g_n - \frac{\alpha_{3,n}}{8}g_{n-1} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} (S_{d^2\text{WENO}}g)_{2n} = & \frac{\alpha_{3,n}}{16}g_{n+2} - \frac{3\alpha_{3,n} + \alpha_{2,n} - \alpha_{3,n-1}}{16}g_{n+1} + \frac{8 - \alpha_{2,n} - 3\alpha_{1,n} - 3\alpha_{2,n-1} - \alpha_{3,n-1}}{16}g_n \\ & - \frac{3\alpha_{1,n-1} + \alpha_{2,n-1} - \alpha_{1,n}}{16}g_{n-1} + \frac{\alpha_{1,n-1}}{16}g_{n-2}. \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

et $\alpha_{i,n} = \alpha_{i,n}(g)$.

On notera

$$(S_{d^2\text{WENO}}g)_n = \sum_{i=-2}^2 b_{i,n}(g)g_{[\frac{n}{2}] + i}.$$

On a alors pour tout $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, pour tout n ,

$$|(S_{d^2\text{WENO}}g)_{2n+1}| \leq \frac{1}{2} \|g\|_\infty \quad (\text{II.24})$$

$$|(S_{d^2\text{WENO}}g)_{2n}| < \|g\|_\infty. \quad (\text{II.25})$$

Evaluons $\|S_{d^2\text{WENO}}^2\|_\infty$. Comme précédemment, on a cette fois 4 cas à considérer.

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

- Pour $(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}$,

$$\begin{aligned} (S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n} &= \sum_{i=-2}^2 b_{i,4n}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+i} \\ &= \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ pair}} b_{i,4n}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+i} + \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ impair}} b_{i,4n}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+i}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (II.24) et (II.25), on a

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}| \leq \left(\sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ pair}} |b_{i,4n}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)| + \frac{1}{2} \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ impair}} |b_{i,4n}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)| \right) \|g\|_\infty.$$

Avec la définition (II.23) du schéma $S_{d^2_{\text{WENO}}}$ aux indices pairs et les propriétés II.1 des coefficients $\alpha_{i,n}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}| &\leq \left(\frac{8 + \alpha_{3,n} + \alpha_{1,n-1}}{16} + \frac{1}{2} \frac{3\alpha_{3,n} + \alpha_{2,n} + \alpha_{1,n} + 3\alpha_{1,n-1} + \alpha_{2,n-1} + \alpha_{3,n-1}}{16} \right) \|g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{10}{16} + \frac{6}{32} \right) \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}| \leq \frac{13}{16} \|g\|_\infty.$$

- Pour $(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+1}$, en utilisant la propriété (II.24), on a

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+1}| \leq \frac{1}{2} \|S_{d^2_{\text{WENO}}} g\|_\infty.$$

Donc

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+1}| \leq \frac{1}{2} \|g\|_\infty$$

- Pour $(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+2}$,

$$\begin{aligned} (S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+2} &= \sum_{i=-2}^2 b_{i,4n+2}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+1+i} \\ &= \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ pair}} b_{i,4n+2}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+1+i} \\ &\quad + \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ impair}} b_{i,4n+2}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)_{2n+1+i}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (II.24) et (II.25), on a

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+2}| \leq \left(\frac{1}{2} \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ pair}} |b_{i,4n+2}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)| + \sum_{i=-2}^2 \sum_{i \text{ impair}} |b_{i,4n+2}(S_{d^2_{\text{WENO}}} g)| \right) \|g\|_\infty.$$

De même que pour le cas $4n$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{8 + \alpha_{3,n} + \alpha_{1,n-1}}{16} + \frac{3\alpha_{3,n} + \alpha_{2,n} + \alpha_{1,n} + 3\alpha_{1,n-1} + \alpha_{2,n-1} + \alpha_{3,n-1}}{16} \right) \|g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{10}{32} + \frac{6}{16} \right) \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n}| \leq \frac{11}{16} \|g\|_\infty$$

• Pour $(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+3}$, le principe est le même que pour $(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+1}$.
On peut majorer directement avec l'inégalité (II.24).

$$|(S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g)_{4n+3}| \leq \frac{1}{2} \|g\|_\infty.$$

Pour résumer

$$\|S_{d^2_{\text{WENO}}}^2 g\|_\infty \leq \frac{13}{16} \|g\|_\infty,$$

donc

$$\|d^2(S_{\text{WENO}}^2 f)\|_\infty \leq \frac{13}{16} \|d^2 f\|_\infty.$$

S_{WENO} contracte relativement à d^2 pour deux itérations de S_{WENO} .

On se trouve dans les conditions du théorème II.1. Donc le schéma S_{WENO} converge uniformément.

On calcule la constante de régularité en utilisant le théorème de régularité II.2.

On sait que, le schéma linéaire de Lagrange $S_{1,1}$ a une fonction limite C^{1-} (section I.3.3).

De plus, la contraction de S_{WENO} est obtenu pour deux itérations donc la constante de régularité est $\beta = -2^{-1} \log_2(\frac{13}{16}) = 0.15$.

En utilisant l'opérateur aux différences d'ordre 2, on a obtenu 2 majorations différentes: une pour les indices pairs avec une constante égale à 1, et une pour les indices impairs avec une constante plus petite que 1. Ceci nous a permis d'estimer $\|S_{d^2_{\text{WENO}}}^2\|_\infty$, en séparant les indices pairs et impairs, et d'avoir une constante de majoration plus petite que 1 après 2 itérations.

On peut alors améliorer la constante de régularité obtenue ($\beta = 0.15$) en calculant un majorant pour $\|S_{d^2_{\text{WENO}}}^L\|_\infty$ et en itérant la méthode ci-dessus. Les calculs sont faisables jusqu'à 5 itérations. On obtient alors

$$\|S_{d^2_{\text{WENO}}}^5\|_\infty = \frac{3891}{8192} \quad \text{et} \quad \beta = 0.215.$$

□

Amélioration d'un résultat théorique de convergence existant

A. Cohen, N. Dyn et B. Matei [CDM03, Mat02] ont obtenu un résultat de convergence pour les schémas S_{WENO} , en utilisant les différences d'ordre 1 et le rayon spectral associé au schéma non-linéaire. Ils obtiennent une majoration du rayon spectral en étudiant 2 itérations du schéma $S_{d_{\text{WENO}}}$ [Mat02].

Cependant, le fait d'utiliser les différences d'ordre 1 donne une constante théorique de régularité

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

assez faible (théorique $\beta \approx 0.006$ et numérique $\beta \approx 0.33$).

En se limitant à des stencils de 4 points et en prenant en compte les différences d'ordre 2, on a donc pu améliorer la régularité théorique.

Régularité numérique

Il faut noter que $\beta = 0.215$ ne semble pas être une évaluation correcte de la régularité observée (figure II.3).

Si on calcule $-\log_2 \left(\frac{\|f_{n+1}^{j+1} - f_n^{j+1}\|_\infty}{\|f_{n+1}^j - f_n^j\|_\infty} \right)$ pour un échantillon de 10 suites initiales, on observe dans le tableau II.1, une régularité numérique égale à C^{-1} (section I.2.3).

nombre d'itérations j	6	7	8	9	10	11	12
β	0.995	0.998	0.999	0.999	0.9997	0.9999	0.9999

TAB. II.1 – Estimation numérique de la constante de Hölder avec $-\log_2 \left(\frac{\|f_{n+1}^{j+1} - f_n^{j+1}\|_\infty}{\|f_{n+1}^j - f_n^j\|_\infty} \right)$.

Stabilité du schéma S_{WENO_4}

Nous n'avons pas réussi à établir l'hypothèse de contraction (II.9) afin de montrer la stabilité du schéma.

Notons que dans [CDM03], une stabilité spécifique est établie.

II.4.1.e Ordre du schéma S_{WENO_4}

Pour conclure, on peut s'intéresser à l'ordre d'approximation du schéma, on a

PROPOSITION II.5

- (i) S_{WENO_4} reproduit exactement les polynômes de degré 3.
- (ii) Le schéma S_{WENO_4} a un ordre d'approximation après une itération égal à 5.
- (iii) $S_{\text{WENO}_4}^\infty$ a un ordre d'approximation égal à 5.

Preuve

- (i) Le schéma S_{WENO_4} étant construit comme une combinaison convexe de schéma de Lagrange utilisant 4 points, on conserve la reproduction des polynômes de degré 3.
- (ii) Soit $g \in C^\infty([0,1])$ et $f = (g(nh))_n$, on a [Bel04]

$$\|S_{\text{WENO}_4}f - S_{3,3}f\|_\infty = O(h^5),$$

ce qui donne le résultat.

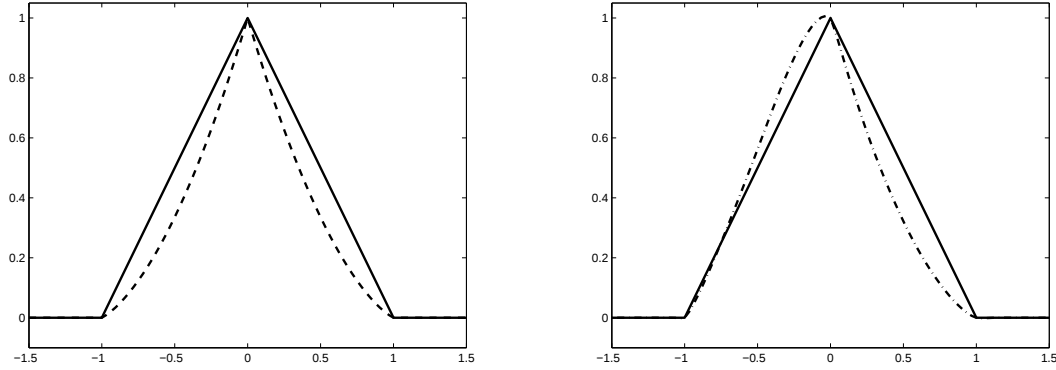
- (iii) L'égalité $\|S_{\text{WENO}_4}f - S_{3,3}f\|_\infty = O(h^5)$ permet d'utiliser le théorème II.5 pour le schéma non-linéaire S_{WENO} et le schéma linéaire de Lagrange $S_{3,3}$ approximant d'ordre 6. $\square$

REMARQUE II.4

Il est possible d'avoir un ordre optimal, pour le nombre de points utilisés, si on choisit comme indicateurs de régularité ceux de G. Jiang et C-W Shu [JS96] ([Bel04] pour les valeurs ponctuelles).

Avec ces indicateurs, on a $\|(S_{\text{WENO}_4}f)_{2n+1} - (S_{3,3}f)_{2n+1}\|_\infty = O(h^6)$ ce qui donne un ordre d'approximation optimal par rapport aux nombres de points utilisés.

Sur la figure II.4, on a représenté les fonctions limites des deux schémas S_{WENO_4} , calculées avec les deux indicateurs de régularité. On observe que les deux schémas ne diffèrent que par un changement de concavité et semblent avoir la même régularité, ce que l'on vérifie avec des tests numériques.



(a) schéma WENO avec l'indicateur de régularité [CLO94] (b) schéma WENO avec l'indicateur de régularité [JS96]

FIG. II.4 – Comparaison des fonctions limites de différents schémas S_{WENO_4} avec deux indicateurs de régularité différents (- -) pour les données initiales $f = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Malgré leurs ordres d'approximations élevés, un inconvénient importants des schémas WENO est l'utilisation d'un nombre de points importants.

Dans le chapitre suivant, on construit des schémas non-linéaires utilisant 4 points, ayant les mêmes propriétés de contrôle de la singularité.

II.4.2 Deuxième Exemple: la classe de schéma Power P

Dans la même lignée que les schémas ENO et WENO, S. Serna et A. Marquina [SM04] développent les schémas Power ENO pour reconstruire les flux dans les équations hyperboliques scalaires. Ils utilisent une moyenne appelée POWERP dans les schémas ENO et WENO, pour contrôler les différences d'ordre 2. L'idée est de réduire, encore une fois, les oscillations de la solution près des discontinuités.

Dans cette partie, on propose d'utiliser la moyenne développée dans [SM04] pour construire les schémas S_{POWERP} , de même que la moyenne PPH introduit par A. Marquina [Mar94] a été utilisée pour définir le schéma S_{PPH} ([Ama01], [ADLT06]).

II.4.2.a Un cas particulier: le schéma PPH

Moyenne PPH

Pour tout (x, y) , on introduit la moyenne

$$\text{PPH}(x, y) = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \frac{2xy}{x + y}.$$

Cette moyenne vérifie $|\text{PPH}(x, y)| \leq 2\min(|x|, |y|)$, ce qui implique en particulier que si x tend vers $+\infty$ et y reste borné, $\text{PPH}(x, y)$ reste borné, contrairement à $(x + y)/2$.

Construction du schéma S_{PPH}

Le schéma S_{PPH} utilise 4 points et est basé l'utilisation de cette moyenne.

On peut le définir de deux façons équivalentes [ADLT06].

Une première méthode consiste à remplacer les points $(x_{n+i}, f_{n+i})_{i=-1\dots 2}$ par les points $(x_{n+i}, \tilde{f}_{n+i})_{i=-1\dots 2}$. On modifie f_{n-1} ou f_{n+2} selon que la discontinuité se trouve dans l'intervalle $[x_{n-1}, x_n]$ ou $[x_{n+1}, x_{n+2}]$. On utilise les différences d'ordre 2 pour mesurer la régularité de la fonction.

On écrit

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n - f_{n-1} + 2 \left(\frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2} \right).$$

On modifie la moyenne arithmétique par la moyenne PPH

$$\tilde{f}_{n+2} = f_{n+1} + f_n - f_{n-1} + 2\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \quad \text{quand } |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|. \quad (\text{II.26})$$

De même, on modifie f_{n-1} par

$$\tilde{f}_{n-1} = f_{n+1} + f_n - f_{n+2} + 2\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \quad \text{quand } |d^2 f_{n+1}| < |d^2 f_n|. \quad (\text{II.27})$$

On construit alors le polynôme d'interpolation modifié $\tilde{p}_{n,2,2}$ et le schéma modifié

$$(S_{\text{PPH}}f)_{2n+1} = -\frac{1}{16}\tilde{f}_{n-1} + \frac{9}{16}f_n + \frac{9}{16}f_{n+1} - \frac{1}{16}\tilde{f}_{n+2}.$$

Une deuxième méthode consiste à remplacer la moyenne arithmétique par la moyenne PPH, qui apparaît dans l'écriture du schéma de Lagrange $S_{2,2}$ comme une perturbation du schéma linéaire $S_{1,1}$,

$$(S_{2,2}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \frac{d^2 f_{n+1} + d^2 f_n}{2},$$

donne

$$(S_{\text{PPH}}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{II.28})$$

C'est exactement le schéma proposé par F. Kuijt et R. Van Damme [KD98] ou encore par M.S. Floater et C.A. Michelli [FM98] pour préserver la convexité (section II.2.3).

On remarque que, par la symétrie des coefficients, ces deux méthodes sont équivalentes.

Expérience numérique

Sur la figure II.5, on compare les fonctions limites du schéma S_{PPH} et un schéma linéaire utilisant le même nombre de points $S_{2,2}$, en partant des données initiales $f^0 = (\delta_{n,0})_n$. On retrouve la fonction limite du schéma de Lagrange $S_{1,1}$ puisque $\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) = 0$. En particulier, cet exemple montre que

Le schéma S_{PPH} ne peut avoir une régularité supérieure à C^{1-} .

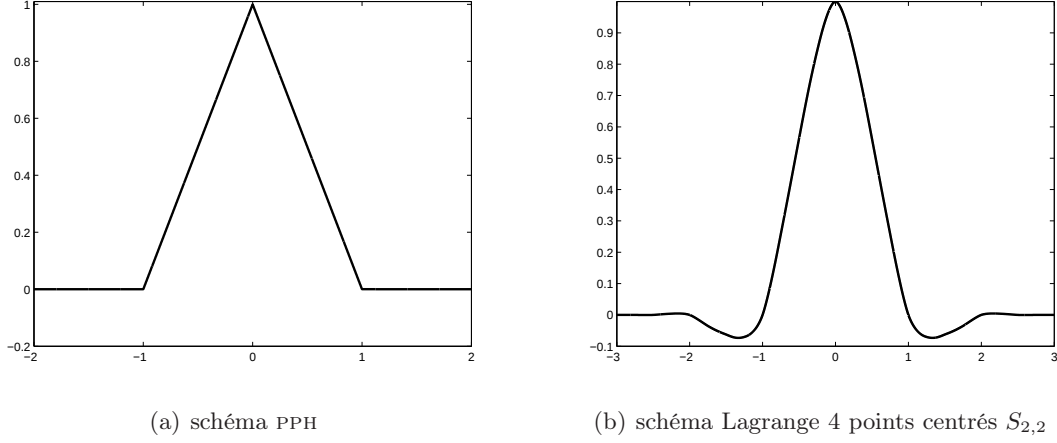


FIG. II.5 – Comparaison des fonctions limites des schémas PPH et Lagrange $S_{2,2}$ pour les points initiaux $f^0 = (\delta_{n,0})_n$.

Sur la figure II.6, on utilise comme valeurs initiales f^0 , l'échantillonnage régulier sur $[0,1]$ de la fonction discontinue

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{pour } x \in [0, 0.5] \\ -\sin(\pi x) & \text{pour } x \in [0.5, 1] \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Comme attendu, on constate que l'utilisation du schéma S_{PPH} élimine le phénomène de Gibbs autour de $x = 0.5$ où f est discontinue.

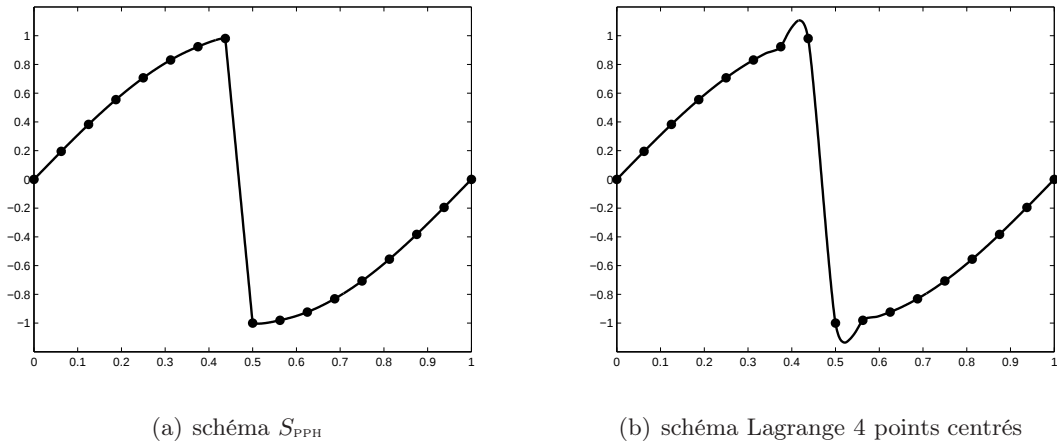


FIG. II.6 – Comparaison des fonctions limites des schémas S_{PPH} et Lagrange $S_{2,2}$ pour $2^4 + 1$ points initiaux $\bullet$.

Résultats existants

Dans [ADLT06], S. Amat, R. Donat, J. Liandrat et J.C. Trillo établissent la convergence du schéma S_{PPH} et sa régularité (C^{1-}). Ils utilisent la fonction polynômiale par morceaux $\mathcal{R}_j$, interpolant les points $(x_n^j, f_n^j)_n$ à chaque échelle j . Les auteurs montrent alors la convergence de la suite de fonctions $(\mathcal{R}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, qui est la reconstruction associée au schéma S_{PPH} au sens d'une l'analyse multirésolution à l'échelle j (section III.2).

Dans [AL05], S. Amat et J. Liandrat montrent la stabilité en établissant les hypothèses du théorème de stabilité (théorème II.4) c'est-à-dire la contraction de S_{PPH} relativement aux différences d'ordre 2 pour 2 itérations du schéma.

II.4.2.b Construction des schémas S_{POWERP} et propriétés de la moyenne POWERP

Comme dans la construction du schéma S_{PPH} , on remplace la moyenne arithmétique du schéma $S_{2,2}$, par la moyenne POWERP de S. Serna et A. Marquina [SM04] définie par

$$\text{pour } p \geq 1, \quad \text{POWERP}(x, y) = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \left| \frac{x+y}{2} \right| \left(1 - \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p \right). \quad (\text{II.30})$$

Par exemple,

pour $p=1$, $\text{POWER1}(x, y) = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|) = \min(|x|, |y|),$

pour $p=2$, $\text{POWER2}(x, y) = \frac{1}{2|x+y|}((x+y)^2 - (x-y)^2) = \text{PPH}(x, y).$

On obtient le schéma interpolant, noté S_{POWERP} ,

$$(S_{\text{POWERP}}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8} \text{POWERP}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}).$$

Propriétés de la moyenne POWERP

On a les propriétés suivantes pour la moyenne POWERP (II.30), qui sont à rapprocher de celle de la moyenne PPH [ADLT06].

PROPRIÉTÉ II.2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la moyenne POWERP satisfait les propriétés suivantes

- (i) $\text{POWERP}(x, y) = \text{POWERP}(y, x).$
- (ii) $\text{POWERP}(x, y) = 0$ si $xy \leq 0.$
- (iii) $\text{POWERP}(-x, -y) = -\text{POWERP}(x, y).$
- (iv) $\text{POWERP}(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \min(|x|, |y|) \left[1 + \left| \frac{x-y}{x+y} \right| + \dots + \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^{p-1} \right].$
- (v) $|\text{POWERP}(x, y)| \leq \max(|x|, |y|).$
- (vi) $|\text{POWERP}(x, y)| \leq p \min(|x|, |y|).$
- (vii) Pour $x, y > 0$, $\min(x, y) \leq \text{POWERP}(x, y) \leq \text{POWERP}(x, y) + 1(x, y) < \frac{x+y}{2}.$
- (viii) Si $x = O(1)$, $y = O(1)$, $|y - x| = O(h)$ et $xy > 0$ alors $\left| \frac{x+y}{2} - \text{POWERP}(x, y) \right| = O(h^p).$
- (ix) $|\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| \leq p \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$

Pour une preuve, voir l'annexe C.

II.4.2.c Convergence et régularité des schémas S_{POWERP}

Par construction du schéma, on peut appliquer les théorèmes de convergence II.1 en notant $S = S_{1,1}$ et $(F(d))_{2n+1} = -\frac{1}{8}\text{POWERP}(d_n, d_{n+1})$.

THÉORÈME II.7

Le schéma S_{POWERP} est convergent et de régularité C^{1-} , pour tout $p \leq 1$.

Preuve

Tout d'abord, on vérifie l'hypothèse II.3 pour F .

En utilisant la propriété (v) de II.2, on a pour tout $d \in l^\infty(\mathbb{Z})$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |(F(d))_{2n+1}| &\leq \frac{1}{8} \max(|d_n|, |d_{n+1}|) \\ \|F(d)\|_\infty &\leq \frac{1}{8} \|d\|_\infty. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Deuxièmement, on veut prouver la contraction (II.4) de S_{powerp} relativement aux différences d'ordre 2.

On considère deux cas

- Pour $k = 2n + 1$,

$$\begin{aligned} (d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n+1} &= f_n - 2(S_{\text{powerp}}f)_{2n+1} + f_{n+1} \\ &= f_{n+1} + f_n - 2\frac{f_n + f_{n+1}}{2} + 2\frac{1}{8}\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4}\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

En utilisant la propriété (v) de II.2, on obtient

$$|(d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n+1}| \leq \frac{1}{4} \|d^2f\|_\infty. \quad (\text{II.33})$$

- Pour $k = 2n$,

$$\begin{aligned} (d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n} &= (S_{\text{POWERP}}f)_{2n-1} - 2f_n + (S_{\text{powerp}}f)_{2n+1} \\ &= \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{8}\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - 2f_n \\ &\quad + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} - \frac{1}{8}\text{POWERP}(d^2f_{n-1}, d^2f_n) \\ &= \frac{d^2f_n}{2} - \frac{1}{8} (\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) + \text{POWERP}(d^2f_{n-1}, d^2f_n)). \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

On remarque que $(d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n} = Z(d^2f_n, d^2f_{n+1}, d^2f_{n-1})$ avec

$$Z(x, y, z) = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\text{POWERP}(x, y) + \text{POWERP}(x, z)).$$

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

De la définition de la moyenne POWERP (II.30) et de la propriété (v) de II.2, on obtient pour $x > 0$ par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\max(x,y) + \max(x,z)) &\leq Z(x,y,z) \leq \frac{x}{2} \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{8}(x - \max(x,y)) + \frac{1}{8}(x - \max(x,z))\frac{x}{4} &\leq Z(x,y,z) \leq \frac{x}{2} \\ 0 \leq |Z(x,y,z)| &\leq \frac{1}{2} \max|x|, |y|, |z|. \end{aligned}$$

De même pour $x < 0$, on obtient

$$|(d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n}| \leq \frac{1}{2} \|d^2f\|_\infty. \quad (\text{II.35})$$

En conclusion, avec les inégalités (II.33) et (II.35), on a

$$\|d^2(S_{\text{POWERP}}f)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|d^2f\|_\infty, \quad (\text{II.36})$$

ce qui implique la convergence avec le théorème II.1 et la régularité C^{1-} avec le théorème II.2. $\square$

On remarque que, contrairement à l'étude du schéma S_{WENO_4} , on obtient de façon théorique, une constante de régularité optimale (figure II.5).

Stabilité des schémas S_{POWERP}

On remarque que l'hypothèse (II.8) pour F du théorème de stabilité II.4 est vérifiée (propriété (x) de II.2).

Pour l'hypothèse de contraction (II.9), les équations (II.32) et (II.34) permettent d'obtenir les majorations dans le cas pair et impair.

On remarque que (propriété II.2)

$$\begin{aligned} |(d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n+1} - (d^2(S_{\text{POWERP}}f))_{2n+1}| &= \frac{1}{4} |\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) - \text{POWERP}(d^2g_n, d^2g_{n+1})| \\ &\leq \frac{p}{4} \|d^2f - d^2g\|_\infty, \end{aligned}$$

qui est la constante de majoration la plus petite, que l'on peut obtenir entre $k = 2n$ et $k = 2n+1$. On peut seulement dire que

pour $p = 1$, l'hypothèse de contraction (II.9) est bien vérifiée ce qui donne la stabilité du schéma S_{POWER1} .

pour $p = 2$, S. Amat et J. Liandrat [AL05] obtiennent la stabilité pour S_{PPH} grâce à la contraction de $d^2(S_{\text{PPH}}^2f)$.

pour $p \geq 4$, aucune des deux majorations ne peut servir à obtenir la contraction de d^2f , même au bout de deux itérations.

II.4.2.d Ordre des schémas S_{POWERP}

De même que pour le schéma S_{WENO_4} , on a les propriétés suivantes concernant l'ordre des schémas S_{POWERP} .

PROPOSITION II.6

Pour toute fonction $g \in C^\infty([0,1])$ et pour tout $f = (g(nh))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

- (i) S_{POWERP} reproduit exactement les polynômes de degré 2.
- (ii) $\|S_{\text{POWERP}}f - S_{1,1}f\|_\infty = O(h^2)$, pour $f = g(nh)_n$ et $g \in C^0([0,1])$.
- (iii) Si $d^2f_n d^2f_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, S_{POWERP} a un ordre d'approximation égal à $r = \min(4, 2 + p)$, à 3 sinon.
- (iv) S_{POWERP}^∞ a un ordre d'approximation égal à 3 pour $p \leq 2$, 2 sinon.

Preuve

- (i) De même, que pour le schéma S_{WENO_4} , si on prend P un polynôme de degré 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $(d^2p)_n = 2a$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

D'après la définition de la moyenne POWERP (II.30), $\text{POWERP}(d^2p_n, d^2p_{n+1}) = 2a$.

On obtient, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(S_{\text{POWERP}})_{2n+1} = \frac{p_n + p_{n+1}}{2} - \frac{2a}{8} = (S_{2,2}p)_{2n+1}.$$

D'où le résultat.

- (ii) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(S_{\text{POWERP}})_{2n+1} - (S_{1,1}f)_{2n+1} = -\frac{1}{8}\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1})$.
De plus, avec un développement de Taylor, on peut vérifier que, pour tout n , $d^2f_n = O(h^2)$.
Donc, on a $|\text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1})| = O(h^2)$ (propriété (v) de II.2), ce qui montre le résultat.
- (iii) Avec un développement de Taylor, on peut vérifier que $d^2f_n = O(h^2)$ et $|d^2f_{n+1} - d^2f_n| = O(h^3)$.

Si, pour tout n , f vérifie $d^2f_n d^2f_{n+1} > 0$, on a (propriété (viii) de II.2)

$$\frac{d^2f_n + d^2f_{n+1}}{2} - \text{POWERP}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) = O(h^{2+p}).$$

Par définition du schéma S_{POWERP} (II.28), on a le résultat.

S'il existe n tel que $d^2f_n d^2f_{n+1} < 0$, alors l'ordre d'approximation après un itération du schéma S_{POWERP} est égal à 3, d'après la reproduction des polynômes (proposition II.3).

- (iv) Pour $p \leq 2$, on utilise la proposition II.3 avec la stabilité du schéma S_{POWERP} pour $p \leq 2$.
Pour p quelconque, on utilise le théorème II.5 concernant l'ordre avec le schéma linéaire interpolant $S_{1,1}$ et (ii).

□

Pour utiliser le théorème II.5 pour S_{POWERP} de façon optimale, il faudrait que si $d^2f_n d^2f_{n+1} > 0$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $d^2f_n^j d^2f_{n+1}^j > 0$, ce qui semble être le cas que pour $p \leq 2$ [Kui98].

REMARQUE II.5

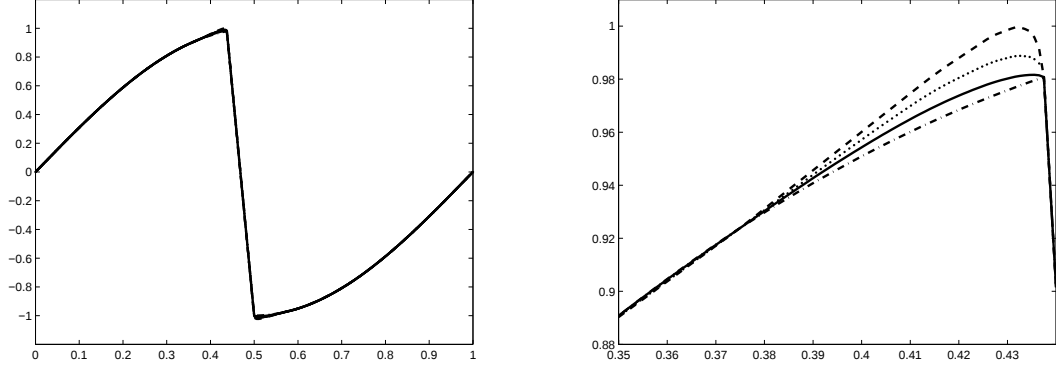
En reprenant l'exemple des points initiaux de la figure II.6, on obtient une fois de plus un contrôle des oscillations autour de la discontinuité en utilisant les schémas S_{POWERP} (figure II.7.a).

Par contre, en zoomant autour de la discontinuité (figure II.7.b), on peut voir que lorsque p augmente, on a tendance à se rapprocher du schéma $S_{2,2}$.

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

On peut expliquer ce phénomène par la propriété d'ordre II.2 (vii).

En voyant la figure II.7.b, le schéma POWER 1 semble meilleur mais il ne faut pas oublier que son ordre d'approximation est plus faible (proposition II.6). Le schéma POWER 2 semble réaliser un bon compromis entre l'ordre et le contrôle de la discontinuité.



(a) schéma POWERP pour $p=1,2,3$ et 4

(b) zoom au voisinage de la discontinuité

FIG. II.7 – Comparaison des fonctions limites des schémas POWERP pour différentes valeurs de p : $p=1$ (— · —), $p=2$ (—), $p=3$ (· ·) et $p=4$ (— · —).

Dans cette partie, on a construit une classe de schémas non-linéaires utilisant 4 points, convergents, de régularité C^{-1} et ayant un ordre d'approximation égal à 3. Cependant, on a vu que le schéma S_{PPH} reste le meilleur compromis pour les résultats théoriques et numériques.

II.4.3 Troisième Exemple: un schéma approximant non-linéaire C^1

Dans cette partie, on propose de construire un schéma non-linéaire éliminant le phénomène de Gibbs et ayant une régularité au moins C^1 . On impose que le schéma doit aussi utiliser 4 points.

Cette question est naturelle puisque, jusqu'ici les schémas existant pour éviter le phénomène de Gibbs (S_{ENO} , S_{WENO} et S_{POWERP}) avaient une régularité au plus C^{1-} .

Les schémas linéaires interpolants-approximants étant un bon compromis entre ordre d'approximation et régularité (section I.3.4), on propose de les perturber pour construire un schéma vérifiant les propriétés demandées.

II.4.3.a Construction du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$

Construction

On part du schéma approximant de N. Dyn, M.S. Floater et K. Hormann [DFH05] construit avec l'évaluation de polynôme de Lagrange $p_{2,2,n}$ en $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ qui est défini, pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, par

$$\begin{aligned} (Sf)_{2n=p_{2,2,n}(n+\frac{1}{4})} &= -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2} \\ (Sf)_{2n+1=p_{2,2,n}(n+\frac{3}{4})} &= -\frac{5}{128}f_{n-1} + \frac{35}{128}f_n + \frac{105}{128}f_{n+1} - \frac{7}{128}f_{n+2}. \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

On propose de modifier le polynôme $p_{2,2,n}$ avec une méthode similaire au schéma S_{PPH} (équations (II.26)-(II.27)), en considérant le signe de $|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|$.

On note le schéma non-linéaire ainsi obtenu $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

Il est défini par

si $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$, on perturbe f_{n-1}

$$\begin{aligned} (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n} &= \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} + \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n+1} &= \frac{15}{64}f_n + \frac{50}{64}f_{n+1} - \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$, on perturbe f_{n+2}

$$\begin{aligned} (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n} &= -\frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{15}{64}f_n + \frac{50}{64}f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n+1} &= \frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned}$$

avec $\text{PPH} = \text{POWER2}$ la moyenne harmonique définie par (II.30).

Expériences numériques

On remarque que le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ évite l'apparition du phénomène de Gibbs (figure II.8.d).

On voit aussi qu'il est essentiel de prendre en compte les modifications des points f_{n-1} et f_{n+2} selon le signe de $|d^2 f_n| - |d^2 f_{n+1}|$ (figure II.8.c). Ceci n'était pas le cas pour le schéma S_{PPH} grâce à la symétrie des coefficients.

En observant les figures II.8, on espère avoir une régularité supérieure à C^{1-} et un ordre d'approximation meilleur que l'utilisation de schémas approximants splines (section I.3.2).

II.4.3.b Convergence et régularité

Pour démontrer la convergence, on écrit le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (II.38) sous la forme d'une perturbation d'un schéma linéaire.

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ étant approximant, le choix du schéma linéaire se porte sur le schéma approximant utilisant 2 points, S_{CHAIKIN} (I.25). On obtient

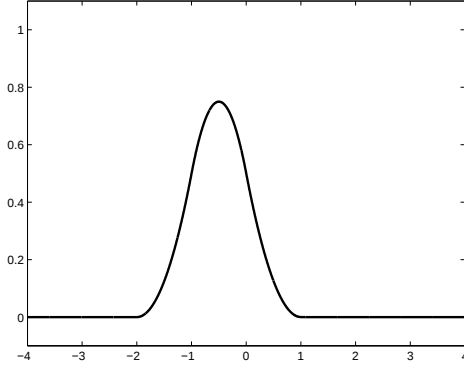
si $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$,

$$\begin{aligned} (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n} &= \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n+1} &= \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}), \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

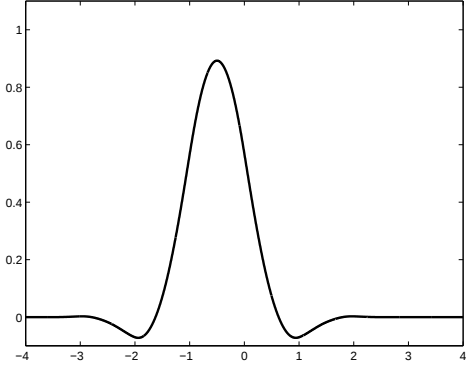
si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$,

$$\begin{aligned} (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n} &= \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_n - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ (S_{\text{PPHAPPROX}}f)_{2n+1} &= \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_n - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned}$$

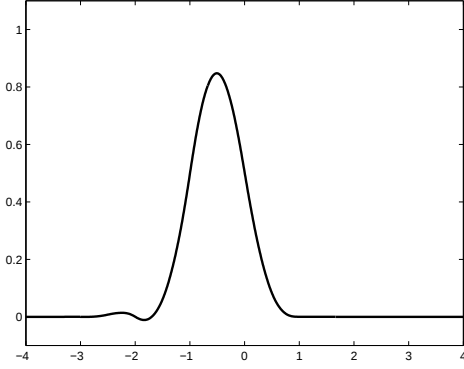
II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$



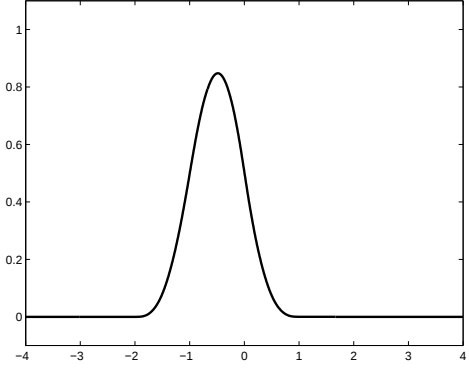
(a) Schéma linéaire Chaikin S_{CHAIKIN} (I.25)



(b) Schéma linéaire (II.37)



(c) Schéma non-linéaire $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (II.38) si on ne modifie que f_{n-1}



(d) Schéma non-linéaire (II.38)

FIG. II.8 – Comparaison des fonctions limites du schéma linéaire Chaikin, du schéma linéaire (II.37) et du schéma non-linéaire (II.38) pour les données initiales $f^0 = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dans tous les cas, on peut écrire $S_{\text{PPHAPPROX}}$ sous la forme

$$S_{\text{PPHAPPROX}}f = S_{\text{CHAIKIN}}f + F(d^2f),$$

avec

$$F(d^2f)_{2n} = \begin{cases} \frac{1}{64}d^2f_{n+1} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}| \\ -\frac{1}{64}d^2f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}| \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

et

$$F(d^2f)_{2n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{64}d^2f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}| \\ \frac{1}{64}d^2f_{n+1} - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}| \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Le schéma S_{CHAIKIN} est un schéma spline de degré 2. Donc sa fonction limite vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9) et a une régularité C^{2-} (section I.3.2).

Etant dans le cadre du théorème de convergence II.1, on obtient

THÉORÈME II.8

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta = -\log_2(\frac{7}{16}) \approx 1.19$.

Preuve

D'après les propriétés de la moyenne PPH (propriété II.2), on a

$$|c_1 d^2 f_{n+1} - c_2 \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})| \leq \max(c_1, c_2) \|d^2 f\|_\infty. \quad (\text{II.42})$$

On en déduit alors de la définition de F (II.40) et (II.41)

$$\|F(d)\|_\infty \leq \frac{7}{64} \|d\|_\infty, \quad (\text{II.43})$$

ce qui donne l'hypothèse (II.3) du théorème de convergence II.1 avec $M = \frac{7}{64}$.

On s'attache donc à prouver l'hypothèse de contraction (II.4) relativement aux différences d'ordre 2.

On définit plusieurs cas:

Cas 1: $k=2n+1$, étude de $f_{2n+2}^1 - 2f_{2n+1}^1 + f_{2n}^1 = (d^2 f^1)_{2n+1}$

$$\text{cas 1A}_1: |d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n+1}| > |d^2 f_{n+2}|,$$

$$\text{cas 1A}_2: |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n+1}| < |d^2 f_{n+2}|,$$

$$\text{cas 1B}_1: |d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n+1}| < |d^2 f_{n+2}|,$$

$$\text{cas 1B}_2: |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n+1}| > |d^2 f_{n+2}|.$$

Cas 2: $k=2n$, étude de $f_{2n+1}^1 - 2f_{2n}^1 + f_{2n-1}^1 = (d^2 f^1)_{2n}$

$$\text{cas 2A}_1: |d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n-1}| > |d^2 f_n|,$$

$$\text{cas 2A}_2: |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n-1}| < |d^2 f_n|,$$

$$\text{cas 2B}_1: |d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n-1}| < |d^2 f_n|,$$

$$\text{cas 2B}_2: |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}| \text{ et } |d^2 f_{n-1}| > |d^2 f_n|.$$

Les autres cas se déduisent par symétrie.

• Cas 1A, on obtient pour le cas 1A₁

$$\begin{aligned} (d^2 f^1)_{2n+1} &= \frac{1}{4} f_{n+2} - \frac{2}{4} f_{n+1} + \frac{1}{4} f_n + \frac{1}{64} d^2 f_{n+2} + \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} \\ &\quad - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4} d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 f_{n+2} + \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ &= \frac{19}{64} d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 f_{n+2} - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

En utilisant l'équation (II.42) pour $d^2 f_{n+1}$ et $\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2})$ et la propriété II.2, on a

$$\begin{aligned} |(d^2 f^1)_{2n+1}| &\leq \frac{19 + 1 + 3}{64} \|d^2 f\|_\infty \\ &\leq \frac{23}{64} \|d^2 f\|_\infty. \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

De même pour le cas 1A₂, on a

$$(d^2 f^1)_{2n+1} = \frac{15}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{3}{64} d^2 f_n - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{II.46})$$

- Cas 1B, on obtient pour le cas 1B₁

$$\begin{aligned}
 (d^2 f^1)_{2n+1} &= \frac{1}{4}f_{n+2} - \frac{2}{4}f_{n+1} + \frac{1}{4}f_n - \frac{1}{64}d^2 f_{n+1} + \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} \\
 &\quad - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{3}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\
 &= \frac{18}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{3}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{II.47})
 \end{aligned}$$

Avec l'équation (II.42) pour $d^2 f_{n+1}$ et $\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2})$, et la propriété II.2, on a

$$\begin{aligned}
 |(d^2 f^1)_{2n+1}| &\leq \frac{18+3}{64} \|d^2 f\|_\infty \\
 &\leq \frac{21}{64} \|d^2 f\|_\infty. \quad (\text{II.48})
 \end{aligned}$$

De même pour le cas 1B₂, on a

$$(d^2 f^1)_{2n+1} = \frac{16}{64}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_{n+2} - \frac{3}{64}d^2 f_n - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{II.49})$$

- Cas 2A, on obtient pour le cas 2A₁

$$\begin{aligned}
 (d^2 f^1)_{2n} &= \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{2}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n-1} - \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_n \\
 &\quad + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\
 &= \frac{1}{4}d^2 f_n - \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} - \frac{1}{64}d^2 f_n + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\
 &= \frac{15}{64}d^2 f_n - \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{5}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n). \quad (\text{II.50})
 \end{aligned}$$

Avec l'équation (II.42) pour $d^2 f_{n+1}$ et $\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$, ensuite pour $d^2 f_{n-1}$ et $\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n)$, on a

$$\begin{aligned}
 |(d^2 f^1)_{2n}| &\leq \frac{15+9}{64} \|d^2 f\|_\infty \\
 &\leq \frac{28}{64} \|d^2 f\|_\infty. \quad (\text{II.51})
 \end{aligned}$$

De même pour le cas 2A₂, on a

$$(d^2 f^1)_{2n} = \frac{19}{64}d^2 f_n + \frac{1}{64}d^2 f_{n-1} + \frac{3}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n). \quad (\text{II.52})$$

- Cas 2B, on obtient pour le cas 2B₁

$$\begin{aligned}
 (d^2 f^1)_{2n} &= \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{2}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n-1} - \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_{n-1} \\
 &\quad + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\
 &= \frac{1}{4}d^2 f_n - \frac{3}{64}d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64}d^2 f_{n-1} \\
 &\quad + \frac{9}{64}\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{7}{64}\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n). \quad (\text{II.53})
 \end{aligned}$$

Avec l'équation (II.42) pour $d^2 f_{n+1}$ et $\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$, ensuite pour $d^2 f_n$ et $\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n)$, on a

$$\begin{aligned} |(d^2 f^1)_{2n}| &\leq \frac{16 + 9 + 1}{64} \|d^2 f\|_\infty \\ &\leq \frac{28}{64} \|d^2 f\|_\infty. \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

De même pour le cas $2B_2$, on a

$$(d^2 f^1)_{2n} = \frac{18}{64} d^2 f_n + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n). \quad (\text{II.55})$$

Les cas $1A_2$, $1B_2$, $2A_2$ et $2B_2$ donnent les mêmes constantes de majoration que les cas $1A_1$, $1B_1$, $2A_1$ et $2B_1$.

A partir des équations (II.45), (II.48), (D.13) et (II.54), on peut donc conclure que pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\|d^2 S_{\text{PPHAPPROX}} f\|_\infty \leq \frac{7}{16} \|d^2 f\|_\infty, \quad (\text{II.56})$$

ce qui prouve que $S_{\text{PPHAPPROX}}$ vérifie l'hypothèse II.4 du théorème de convergence II.1.

Donc le théorème II.1 s'applique ce qui montre la convergence de $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

Pour la régularité, on utilise le théorème de régularité II.2. On obtient la constante de régularité $\beta = \min(2, -\log_2(\frac{7}{16})) \approx 1.192$. □

Régularité numérique

Comme pour les schémas S_{WENO} , on peut évaluer la régularité numérique des dérivées $(S^\infty f)^{(1)}$ et $(S^\infty f)^{(2)}$ (section I.2.3).

On utilise les dérivées discrètes k -ième, $2^{kj} d^k f^j$ associés à $S_{\text{PPHAPPROX}}$ pour estimer

$$-\log_2 \left(2^k \frac{\|d^k f_{n+1}^{j+1} - d^k f_n^{j+1}\|_\infty}{\|d^k f_{n+1}^j - d^k f_n^j\|_\infty} \right)$$

On remarque que le schéma semble avoir une meilleure régularité que celle trouvée théoriquement (tableau II.2); il semble être au mieux $C^{2.438-}$.

On rappelle que la régularité numérique pour le schéma linéaire initial [DFH05] est $C^{2.67-}$ (tableau I.2).

$k = 1$	j	5	6	7	8	9	10
	β_1	0.9999	0.9999	1	1	1	1
$k = 2$	j	5	6	7	8	9	10
	β_2	0.4395	0.7738	1.2615	0.6541	0.4387	0.4388

TAB. II.2 – Estimation numérique de la constante de Hölder $C^{1+\beta_1-}$ et $C^{2+\beta_2-}$ avec $-\log_2 \left(2^k \frac{\|d^k f_{n+1}^{j+1} - d^k f_n^{j+1}\|_\infty}{\|d^k f_{n+1}^j - d^k f_n^j\|_\infty} \right)$ pour $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

II.4.3.c Stabilité

Pour montrer la stabilité, on utilise le lemme suivant concernant une propriété de la moyenne PPH

LEMME II.1

Soit $f, g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, si $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$ et $|d^2 g_{n+1}| > |d^2 g_n|$ alors

$$|d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})| \leq 3\|d^2 f - d^2 g\|_\infty.$$

Pour une preuve, voir l'annexe C.

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ s'écrivant comme une perturbation d'un schéma linéaire, on applique le théorème de stabilité II.4. On obtient le résultat suivant

THÉORÈME II.9

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ est stable au sens de la définition I.7.

Pour une preuve, voir l'annexe C.

REMARQUE II.6

On peut construire le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ en utilisant la moyenne POWERP, pour n'importe quelle valeur de p .

Pour cette construction, la convergence du schéma est vérifiée car la propriété (II.42) reste vraie. Par contre, le résultat de stabilité n'est plus vérifié. En effet, la constante de majoration du lemme II.1 augmente avec p (propriété II.2).

II.4.3.d Ordre d'approximation

On peut déjà faire la remarque suivante concernant la reproduction des polynômes

PROPOSITION II.7

$S_{\text{PPHAPPROX}}$ reproduit les polynômes de degré 2 avec translation de $\frac{1}{4}$. De même, $S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty$ reproduit les polynômes de degré 2 avec translation de $\frac{1}{2}$.

Preuve

De même que pour les schémas S_{POWERP} , on remarque que pour tout polynôme P de degré 2 et $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, on a

$$\text{PPH}(d^2 p_n, d^2 p_{n+1}) = \frac{p_n + p_{n+1}}{2}.$$

Donc, pour les points initiaux $(p_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $S_{\text{PPHAPPROX}}(p) = S(p)$ où S est le schéma linéaire de [DFH05].

Les résultats de [DFH05] s'appliquent et donnent le résultat.

□

PROPOSITION II.8

Pour toute fonction $g \in C^\infty([0,1])$ et pour tout $f = (g((n - \frac{1}{2})h))_n$, on a

- (i) Si $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\|S_{\text{PPHAPPROX}} f - S_{[\text{DFH05}]} f\|_\infty = O(h^4)$.
- (ii) Si $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\|(S_{\text{PPHAPPROX}} f)_n - g(2^{-1}h(n - 2^{-1}))\|_\infty = O(h^4)$, sinon $\|(S_{\text{PPHAPPROX}} f)_n - g(2^{-1}h(n - 2^{-1}))\|_\infty = O(h^3)$.
- (iii) $\|S_{\text{PPHAPPROX}}^\infty f - g\|_\infty = O(h^3)$.

Preuve

- (i) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, (propriété II.2)

$$|\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{d^2 f_n + d^2 f_{n+1}}{2}| = O(h^4),$$

d'où le résultat par construction du schéma (II.38).

- (ii) Si $d^2 f_n d^2 f_{n+1} > 0$, c'est une conséquence directe de (i) avec les résultats de N. Dyn, M.S. Floater et K. Hormann [DFH05].

Sinon, on utilise la reproduction des polynômes translatés et la proposition II.3 qui s'applique encore.

- (iii) Avec la reproduction des polynômes (proposition II.7) et la stabilité du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$, on peut utiliser la proposition II.3 dont la preuve de F. Kuijt[Kui98] reste valide dans le cas reproduction des polynômes translatés.

□

REMARQUE II.7

Si on choisit la deuxième méthode de construction du schéma S_{PPH} c'est-à-dire remplacer la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique, on obtient un nouveau schéma non-linéaire approximant.

Cette deuxième méthode s'applique de la façon suivante pour $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

On remarque que le schéma linéaire (II.37) s'écrit (Annexe E)

$$(Sf)_{2n} = \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{3}{32} \left(\frac{7d^2 f_n + 5d^2 f_{n+1}}{12} \right)$$

$$(Sf)_{2n+1} = \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} - \frac{3}{32} \left(\frac{5d^2 f_n + 7d^2 f_{n+1}}{12} \right).$$

Pour tout $a, b > 0$, on associe à la moyenne arithmétique $M_{a,b}(x, y) = \frac{ax+by}{a+b}$, la moyenne géométrique [Kui98]

$$\text{PPH}_{a,b}(x, y) = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \frac{a+b}{a\frac{1}{x} + b\frac{1}{y}} = \frac{\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)}{2} \frac{(a+b)xy}{bx + ay}.$$

On obtient le schéma non-linéaire $S_{\text{PPHAPPROX2}}$

$$(S_{\text{PPHAPPROX2}} f)_{2n} = \frac{3}{4}f_n + \frac{1}{4}f_{n+1} - \frac{3}{32} \text{PPH}_{5,7}(d^2 f_n, d_{n+1}^f) \quad (\text{II.57})$$

$$(S_{\text{PPHAPPROX2}} f)_{2n+1} = \frac{1}{4}f_n + \frac{3}{4}f_{n+1} - \frac{3}{32} \text{PPH}_{7,5}(d^2 f_n, d_{n+1}^f).$$

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

La moyenne $\text{PPH}_{a,b}$ vérifiant des propriétés similaires à la moyenne PPH, on peut montrer un résultat de convergence avec une constante de régularité similaire au schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

Par contre, numériquement, le schéma $S_{\text{PPHAPPROX2}}$ (II.57), construit en remplaçant la moyenne arithmétique, est moins approximant que le schéma construit précédemment $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (II.38) (figure II.9).

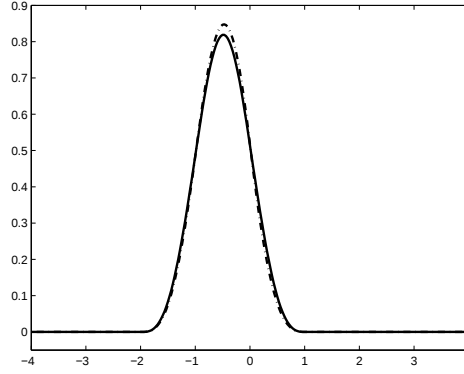


FIG. II.9 – Comparaison des fonctions limites des schéma non-linéaires $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (—) et $S_{\text{PPHAPPROX2}}$ (---) pour les données initiales $f^0 = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dans cette partie, on a construit un schéma non-linéaire et éliminant le phénomène de Gibbs. On a établi la convergence et la régularité théorique qui est $C^{1.192}$, mais aussi la régularité numérique qui est $C^{2.438}$. De plus, le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ fait partie des rares schémas non-linéaires dont on sait prouver la stabilité.

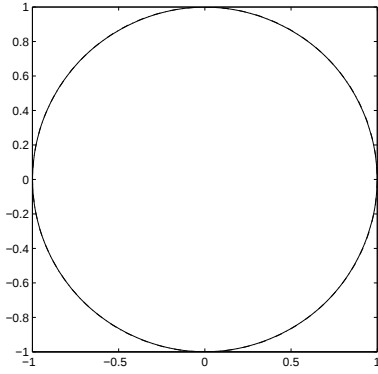
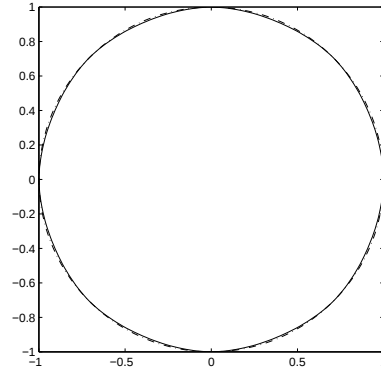
II.4.4 Quatrième Exemple: un schéma pour préserver la courbure

Ce schéma, noté $S_{\text{SPHERICAL}}$, a été développé par N. Aspert, T. Ebrahimi et P. Vandergheynst [AEV03, Asp03] pour la construction de courbes à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Il est particulièrement bien adapté pour construire des courbes à courbure localement constante (figure II.10).

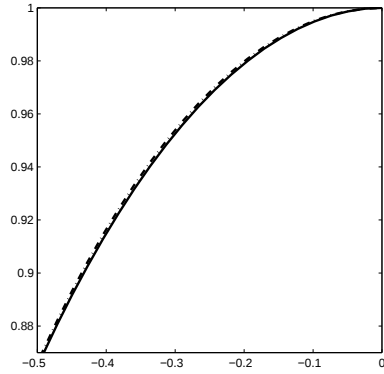
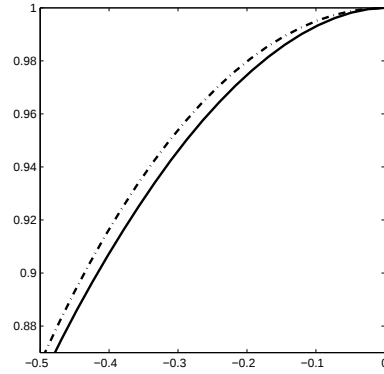
Pour $(P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de points initiaux, on notera $P_n^1 = (S_{\text{SPHERICAL}} P)_n$ et $P_n^j = (S_{\text{SPHERICAL}}^j P)_n$. Le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ est un schéma interpolant utilisant 4 points, construit dans un repère orthonormé lié à P_n . Il est basé sur la construction en coordonnées polaires de P_{2n+1}^1 . Il utilise aussi à chaque itération les deux coordonnées (x_n, y_n) .

Dans [AEV03], seule la convergence numérique a été établie. On se propose d'établir la convergence théorique du schéma.

Dans une première partie, on rappelle la construction du schéma et les différentes notations utilisées. Dans une seconde partie, on montrera la convergence de schémas vérifiant des propriétés similaires au schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$. Enfin, on proposera une construction de schémas convergents que l'on comparera au schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$.

(a) schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ 

(b) schéma Lagrange 4 points centrés

(c) schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$; zoom

(d) schéma Lagrange 4 points centrés; zoom

FIG. II.10 – Comparaison de 5 itérations de $S_{\text{SPHERICAL}}$ (-) et de $S_{2,2}$ (-) en partant de $2^3 + 1$ points initiaux uniformément répartis sur le cercle (- . -).

II.4.4.a Présentation du schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$

On considère une grille croissante c'est-à-dire vérifiant $x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

On note $r_n = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}$ la distance entre P_n et P_{n+1} , deux points de $\mathbb{R}^2$.

Définition des différents angles intervenant dans $S_{\text{SPHERICAL}}$

Pour définir le schéma, les auteurs [AEV03] utilisent les différentes bases:

$\mathcal{R}$: la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$\mathcal{B}_n$: le repère orthonormé lié à P_n défini par $(P_n, \vec{n}_n, \vec{n}_n^\perp)$,

où la direction de $\vec{n}_n$ est donnée par $\overrightarrow{P_{n-1}P_{n+1}}$.

Dans ces deux repères, on définit les angles suivants

dans $\mathcal{R}$: l'angle γ_n du vecteur $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ et θ_n celui de $\overrightarrow{P_{n-1}P_{n+1}}$,

dans $\mathcal{B}_n$: (r_n, α_n) les coordonnées polaires de P_{n+1} et $(r_{n-1}, \pi + \beta_n)$ celles de P_{n-1} .

II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

On a alors les relations suivantes pour tout $n \in \mathbb{R}$, en ayant supposé que $x_n < x_{n+1}$ (figure II.11),

$$\theta_n = \arctan \left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} \right), \quad (II.58)$$

$$\gamma_n = \arctan \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} \right), \quad (II.59)$$

$$\alpha_n = \gamma_n - \theta_n, \quad (II.60)$$

$$\beta_{n+1} = \gamma_n - \theta_{n+1}, \quad (II.61)$$

$$\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \gamma_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \alpha_n \in]-\pi; \pi[\quad \text{et} \quad \beta_n \in]-\pi; \pi[.$$

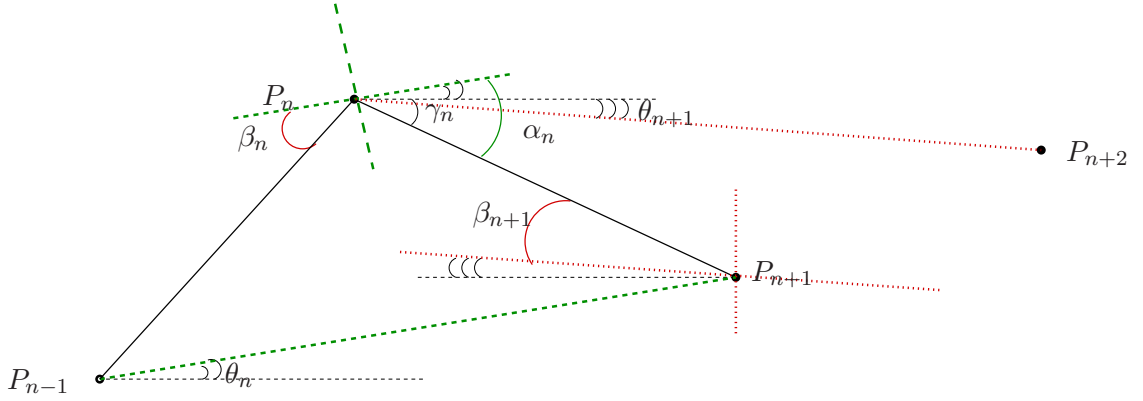


FIG. II.11 – Différents angles et repères du schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$.

On définit le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ en construisant les coordonnées polaires du point P_{2n+1}^1 , dans le repère $\mathcal{B}_n$ lié à P_n . On impose

1. la décroissance des angles $(\alpha_n^j)_j$ vers 0 qui est une condition nécessaire pour assurer la régularité de la fonction limite,
2. la croissance de la grille $(x_n^j)_{n \in \mathbb{Z}}$, pour tout j .

Construction de l'angle α_n

Sachant que $P_{2n+1}^1 = (S_{1,1}P)_{2n+1}$ a pour coordonnées polaires $(\frac{r_n}{2}, \alpha_n)$, on peut définir P_{2n+1}^1 à partir de ses coordonnées $(\frac{r_n}{2}, \frac{\alpha_n}{2})$.

• Pour la régularité de la fonction limite

On voit sur la figure II.11 que si $(\alpha_n^j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n^j)_{j \in \mathbb{N}}$ tendent vers 0, alors le point P_n^j tend à être sur le segment $[P_{n-1}^j P_{n+1}^j]$ ce qui permet de construire une courbe C^0 .

On peut montrer la propriété suivante (figure II.12)

PROPRIÉTÉ II.3

Si P_{2n+1}^1 est défini par les coordonnées polaires $(\frac{r_n}{2}, \frac{\alpha_n}{2})$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_{2n+1}^1 \leq \frac{\alpha_n}{2}$ c'est-à-dire la suite $(\alpha_{2^j n+1}^j)_{j \in \mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0.

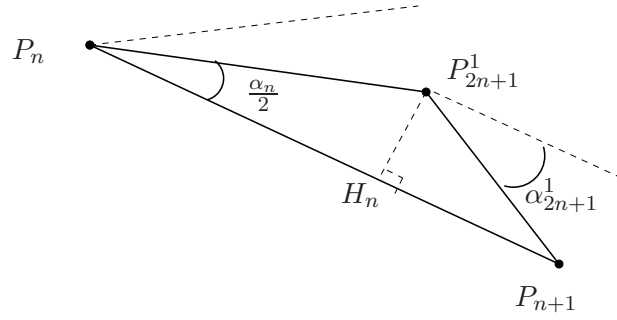


FIG. II.12 – Contraction des angles $(\alpha_n^j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans le cas où P_{2n+1}^{j+1} est défini par $(\frac{r_n^j}{2}, \frac{\alpha_n^j}{2})$.

REMARQUE II.8

On remarque que si on définit P_{2n+1}^1 par le choix $(\frac{r_n}{2}, \frac{\alpha_n(1+\varepsilon)}{2})$, on aura $\alpha_{2n+1}^j < \alpha_n (\frac{1+\varepsilon}{2})^j$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Quand j tend vers $+\infty$, P_n^j tend encore à être sur le segment $[P_{n-1}^j P_{n+1}^j]$.

Un paramètre ε ne modifie donc pas les propriétés du schéma.

• Pour conserver une grille croissante

Dans le cas où les coordonnées polaires de P_{2n+1}^1 sont $(\frac{r_n}{2}, \frac{\alpha_n}{2})$, on a

$$x_{2n+1}^1 - x_{2n}^1 = \frac{r_n}{2} \cos(\frac{\alpha_n}{2}).$$

Pour préserver la croissance de la grille $(x_n^1)_{n \in \mathbb{Z}}$, on a besoin que $\cos(2^{-1}\alpha_n) > 0$, ce qui n'est pas le cas pour $|\alpha_n| > \frac{\pi}{4}$.

• Dans $\mathcal{B}_n$, on définit alors P_{2n+1}^{11} par $(\frac{r_n}{2}, h(\alpha_n))$ avec h une fonction qui

- pour des angles α_n petits, est égale à $h(\alpha_n) = \frac{(1+\varepsilon)\alpha_n}{2}$ pour obtenir une courbe assez régulière,
- pour des angles α_n grands, est égale à $h(\alpha_n) = \alpha_n$ pour préserver la monotonie de $(x_n^j)_{n \in \mathbb{Z}}$, pour tout j .

Les raccords sont calculés pour que h soit C^1 et polynomiale par morceaux.

• De façon similaire, on peut définir P_{2n+1}^{12} par $(\frac{r_n}{2}, \pi + h(\beta_n))$ dans la base $\mathcal{B}_{n+1}$ lié à P_{n+1} .

Définition du schéma

En coordonnées cartésiennes, on obtient

dans la base $\mathcal{B}_n$,

$$P_{2n+1}^{11} = \begin{pmatrix} x_{2n+1}^{11} - x_n \\ y_{2n+1}^{11} - y_n \end{pmatrix} = \frac{r_n}{2} \begin{pmatrix} \cos(h(\alpha_n)) \\ \sin(h(\alpha_n)) \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}_{n+1}$,

$$P_{2n+1}^{12} = \begin{pmatrix} x_{2n+1}^{12} - x_{n+1} \\ y_{2n+1}^{12} - y_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{r_n}{2} \begin{pmatrix} \cos(h(\beta_{n+1})) \\ \sin(h(\beta_{n+1})) \end{pmatrix}.$$

En faisant la moyenne des deux schémas possibles, on obtient [AEV03, Asp03]

$$(S_{\text{SPHERICAL}}(x,y))_{2n+1} = \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) + \frac{r_n}{4} \left(\cos(\theta_n + h(\alpha_n)) - \cos(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1})) \right) \left(\sin(\theta_n + h(\alpha_n)) - \sin(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1})) \right) \quad (\text{II.62})$$

REMARQUE II.9

Lorsqu'on part d'une grille décroissante, la même construction permet de définir

$$(S_{\text{SPHERICAL}}(x,y))_{2n+1} = \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) - \frac{r_n}{4} \left(\cos(\theta_n + h(\alpha_n)) - \cos(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1})) \right) \left(\sin(\theta_n + h(\alpha_n)) - \sin(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1})) \right).$$

II.4.4.b Convergence

Par construction, on remarque que $S_{\text{SPHERICAL}}$ s'écrit, en notant S_1 et S_2 les schémas associés à chaque coordonnées,

$$\begin{aligned} (S_1(x,y))_{2n+1} &= \frac{x_n + x_{n+1}}{2} + (F_1(dx,dy))_{2n+1}, \\ (S_2(x,y))_{2n+1} &= \frac{y_n + y_{n+1}}{2} + (F_2(dx,dy))_{2n+1}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (F_1(dx,dy))_{2n+1} &= \frac{r_n}{4} (\cos(\theta_n + h(\alpha_n)) - \cos(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1}))), \\ (F_2(dx,dy))_{2n+1} &= \frac{r_n}{4} (\sin(\theta_n + h(\alpha_n)) - \sin(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1}))). \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

De plus, les définitions (II.58), (II.59) de r_n , θ_n et γ_n peuvent être réécrites en utilisant les différences d'ordre 1 $(dx_n, dy_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{(dx_n)^2 + (dy_n)^2}, \\ \theta_n &= \arctan \left(\frac{dy_n + dy_{n-1}}{dx_n + dx_{n-1}} \right), \\ \gamma_n &= \arctan \left(\frac{dy_n}{dx_n} \right), \end{aligned}$$

ainsi que α_n et β_n avec les équations (II.60) et (II.61).

En utilisant la remarque II.1, le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ s'écrit alors sous la forme d'une perturbation du schéma de Lagrange $S_{1,1}$ appliqué à deux coordonnées.

On a le résultat suivant en utilisant le théorème de convergence II.1

THÉORÈME II.10

Si $h \in C^1(]-\pi, \pi[)$ et vérifie

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \max_{\theta \in]-\pi, \pi[} |1 - h'(\theta)| < 1, \quad (\text{II.64})$$

alors le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ définie par (II.62) converge.

Preuve

On commence par vérifier l'hypothèse II.3 du théorème II.1, en se plaçant dans le cadre de la remarque II.1. On a

$$r_n \leq \sqrt{2} \max(|dx_n|, |dy_n|), \quad (\text{II.65})$$

ce qui donne avec la définition des F_i (II.63) pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} |(F_i(dx, dy))_{2n+1}| &\leq 2 \frac{\sqrt{2} \max(|dx_n|, |dy_n|)}{4}, \\ \|F_i(dx, dy)\|_\infty &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \max(\|dx\|_\infty, \|dy\|_\infty). \end{aligned}$$

On souhaite établir la propriété de contraction de $S_{\text{SPHERICAL}}$ relativement aux différences d'ordre 1 (II.4).

Pour tout $(x, y) \in l^\infty(\mathbb{Z}^2)$, on a

$$\begin{aligned} d(S_1(x, y))_{2n} &= (S_1(x, y))_{2n+1} - (S_1(x, y))_{2n}, \\ &= \frac{x_n + x_{n+1}}{2} + \frac{r_n}{4} (\cos(\theta_n + h(\alpha_n)) - \cos(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1}))) - x_n, \\ &= \frac{x_{n+1} - x_n}{2} + \frac{r_n}{4} (\cos(\theta_n + h(\alpha_n)) - \cos(\theta_{n+1} + h(\beta_{n+1}))), \end{aligned}$$

ce qui donne d'après (II.65)

$$\begin{aligned} |d(S_1(x, y))_{2n}| &\leq \frac{\|dx\|_\infty}{2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2} \max(\|dx\|_\infty, \|dy\|_\infty)}{4} |\theta_n + h(\alpha_n) - \theta_{n+1} - h(\beta_{n+1})|. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de α_n (II.60) et β_n (II.61), on obtient

$$\begin{aligned} |d(S_1(x, y))_{2n}| &\leq \frac{\|dx\|_\infty}{2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2} \max(\|dx\|_\infty, \|dy\|_\infty)}{4} |\theta_n + h(\gamma_n - \theta_n) - (\theta_{n+1} + h(\gamma_n - \theta_{n+1}))|. \end{aligned}$$

On pose alors $g(\theta) = \theta + h(\gamma_n - \theta)$ qui est C^1 . Avec l'inégalité de la moyenne, on a

$$\begin{aligned} |d(S_1(x, y))_{2n}| &\leq \frac{\|dx\|_\infty}{2} + \frac{\sqrt{2} \max(\|dx\|_\infty, \|dy\|_\infty)}{4} \max_{x \in]-\pi, \pi[} (1 - h'(\theta)) |\theta_n - \theta_{n+1}|, \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \max_{x \in]-\pi, \pi[} |1 - h'(\theta)| \right) \max(\|dx\|_\infty, \|dy\|_\infty). \end{aligned}$$

Finalement, $d(S_1(x, y))$ et $d(S_2(x, y))$ vérifient l'hypothèse de contraction (II.4) avec $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi \max_{x \in]-\pi, \pi[} (1 - h'(\theta))}{4}$ et $c < 1$ si

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \max_{\theta \in]-\pi, \pi[} |1 - h'(\theta)| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} < h'(x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \forall x \in]-\pi, \pi[.$$

□

II.4.4.c Construction de h vérifiant la condition de convergence (II.64)

Dans [Asp03], on peut trouver deux constructions mais qui ne vérifient pas la condition de convergence (II.64).

Dans cette partie, nous proposons d'introduire un paramètre ε pour construire une fonction h , vérifiant l'inégalité (II.64) et ainsi avoir un schéma convergeant.

- De même que [Asp03], on choisit h *polynômiale de degré 3 par morceaux* et $h \in C^1(\cdot - \pi, \pi[)$. On notera $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^3$ cette fonction, définie sur $[0, \pi[$ par

$$h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^3(x) = \begin{cases} \frac{x(1+\varepsilon)}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 \\ P(x) & \text{si } \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

avec

$$P(x) = a(x - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1) + b(x - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1)^2 + c(x - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1)^2(x - \frac{\pi}{2}) + d,$$

et a, b, c et d calculés pour que $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^3$ soit C^1 , ce qui donne

$$a = \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad b = \frac{\pi}{4} \frac{1-\varepsilon}{(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_1)^2}, \quad c = \frac{1-\varepsilon}{2} \frac{\varepsilon_1 - \frac{3\pi}{4}}{(\frac{\pi}{4} + \varepsilon_1)^3} \quad \text{et} \quad d = \frac{1+\varepsilon}{2}(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_1).$$

Le prolongement de $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^3$ sur $] - \pi, 0]$ s'obtient par parité en considérant h comme une fonction impaire.

Le cas $h_{0,0}^3$ correspond à la première fonction définie par N. Aspert [Asp03].

Pour que $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^3$ vérifie la condition de convergence (II.64), les constantes ε et ε_1 doivent vérifier

$$\min_{x \in]-\pi, \pi[} |h'(x)| = \frac{1+\varepsilon}{2} \quad \text{donc} \quad \varepsilon \geq 0.1 > 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

et

$$\max_{x \in]-\pi, \pi[} |h'(x)| = P'(x_0) < 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{c} + \pi - 2\varepsilon_1 \right).$$

Par exemple, pour $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon_1 = \frac{8\pi}{89}$, on obtient $p'(x_0) - (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}) \approx -3.75 \times 10^{-4}$.

- De même que [Asp03], on peut aussi choisir h *polynômiale de degré 2 par morceaux* et $h \in C^1(\cdot - \pi, \pi[)$.

Soit $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^2$ la fonction définie sur $[0, \pi[$ par

$$h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^2(x) = \begin{cases} \frac{x(1+\varepsilon)}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 \\ P_1(x) & \text{si } \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 < x < \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1 \\ \frac{3-\varepsilon}{2}x - \frac{\pi}{4}(1-\varepsilon) & \text{si } \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \\ P_2(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 < x < \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \\ x & \text{si } \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 \leq x < \pi \end{cases}$$

avec

$$P_1(x) = a_1(x - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1) + b_1(x - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_1)(x - \frac{\pi}{4} - \varepsilon_1) + c_1$$

et

$$P_2(x) = a_2(x - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1) + b_2(x - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1)(x - \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1) + c_2.$$

Il est facile de calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 pour que $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^2$ soit C^1 ,

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \frac{1 - \varepsilon}{4\varepsilon_1}, \quad c_1 = \frac{1 + \varepsilon}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon_1 \right), \quad a_2 = \frac{5 - \varepsilon_1}{4}, \quad b_2 = -\frac{1 - \varepsilon}{8 * \varepsilon_1} \text{ et } c_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1.$$

De même que précédemment, $h_{0, \frac{\pi}{8}}^2$ correspond à la fonction h_{alt} de N. Aspert [Asp03].

Pour que $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^2$ vérifie la condition de convergence (II.64), la constante ε doit vérifier

$$\min_{x \in]-\pi, \pi[} |h'(x)| = \frac{1 + \varepsilon}{2} > 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad \text{et} \quad \max_{x \in]-\pi, \pi[} |h'(x)| = \frac{3 - \varepsilon}{2} < 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Donc $h_{\varepsilon, \varepsilon_1}^2$ vérifie l'inégalité II.64 si $\varepsilon \geq 0.1 > 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ sans condition sur ε_1 .

On prendra par exemple $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{8}$.

II.4.4.d Expériences Numériques

Afin de tester l'influence du choix de la fonction h , on calcule les itérations de la subdivision $S_{\text{SPHERICAL}}$ avec différentes fonctions h .

On choisit comme données initiales, l'échantillonnage régulier de pas 2^{-j} de la fonction $f(x) =$

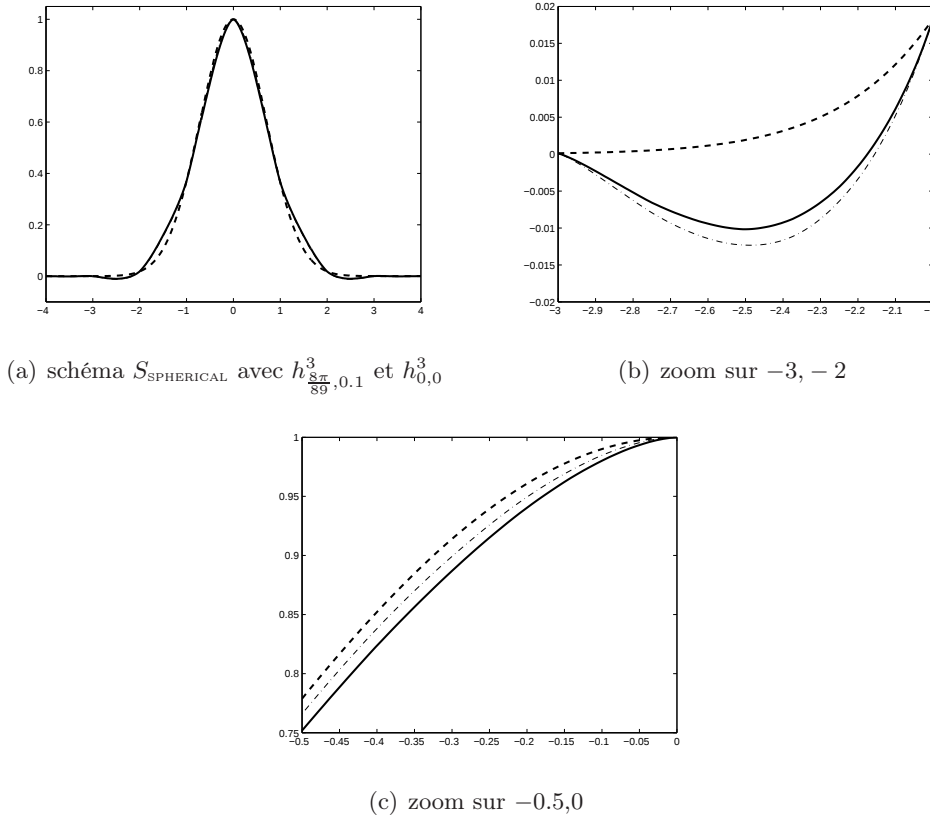


FIG. II.13 – Comparaison de 2 schémas $S_{\text{SPHERICAL}}$ utilisant $h_{\frac{8\pi}{89}, 0.1}^3$ (–) ou $h_{0,0}^3$ (- . -) avec f (-) en partant de $2^3 + 1$ points initiaux sur $[-4, 4]$.

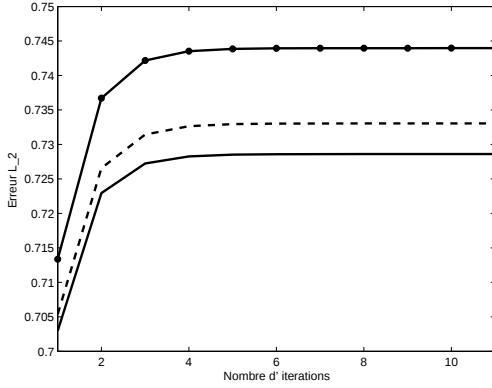
II.4. Exemples d'études de schémas non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{R})$

$\exp(-\frac{x^2}{2})$.

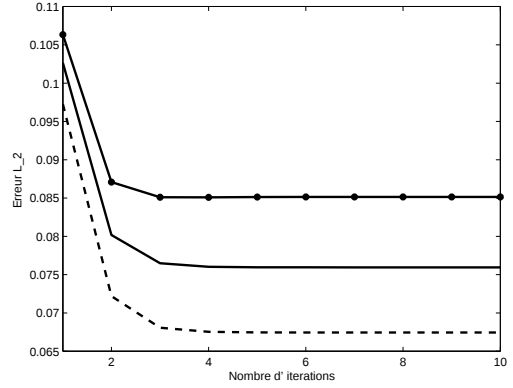
Sur la figure II.13, on représente les résultats obtenus après 7 itérations pour $h = h_{0,0}^3$ et $h_{\frac{8\pi}{89},0.1}^3$. On remarque qu'aucun des deux schémas semblent avoir un meilleur comportement (figures II.13.b et II.13.c).

Sur la figure II.14, on trace l'évolution de l'erreur L^2 en fonction du nombre d'itérations du schéma. On observe alors un comportement différent selon le nombre de points initiaux choisis. Par exemple, on remarque que si on ne prend pas beaucoup de points initiaux, le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ modifié sera plus précis (figures II.14.a et II.14.b). Enfin, sur les figures II.15, on peut comparer les schémas $S_{\text{SPHERICAL}}$ construits avec h^2 et h^3 . Ici aussi, on peut voir que le comportement dépend également du nombre de points initiaux. Pour un nombre important de points initiaux, les comportements des schémas utilisant h^2 ou h^3 sont sensiblement identiques.

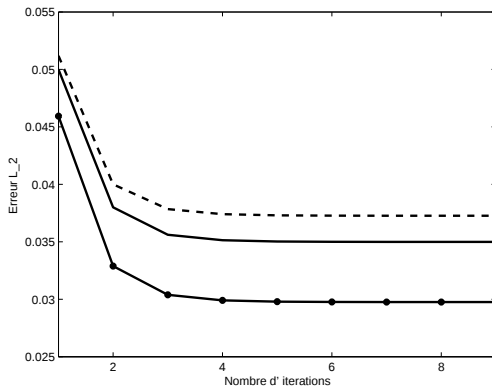
On peut conclure que l'utilisation du théorème de convergence II.1 a permis de construire, par une légère modification du schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ [AEV03], un schéma convergent et ayant un comportement numérique semblable.



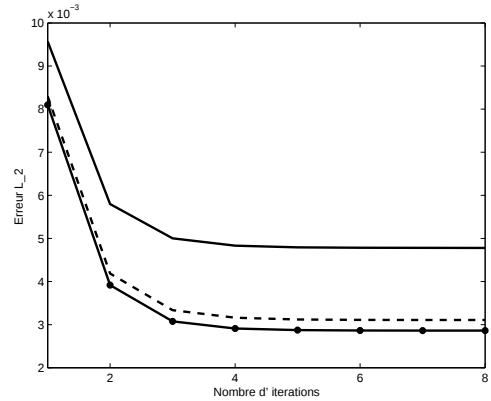
(a) Echantillonnage initial $j = 2$



(b) Echantillonnage initial $j = 3$

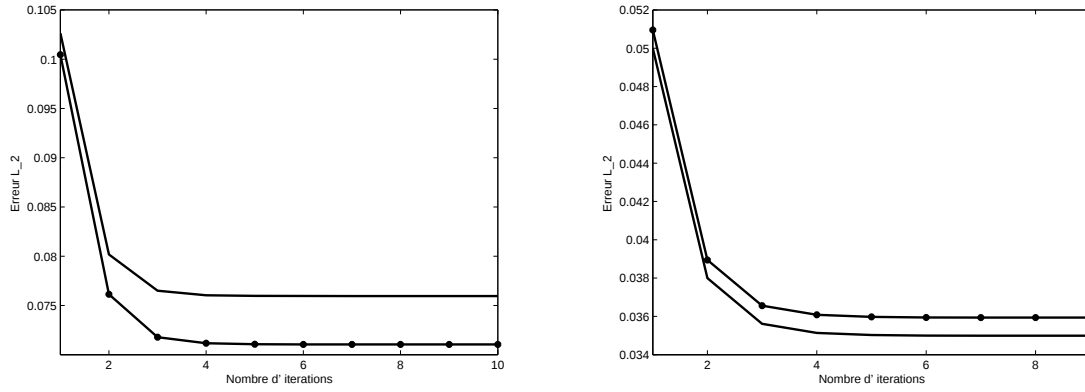


(c) Echantillonnage initial $j = 4$

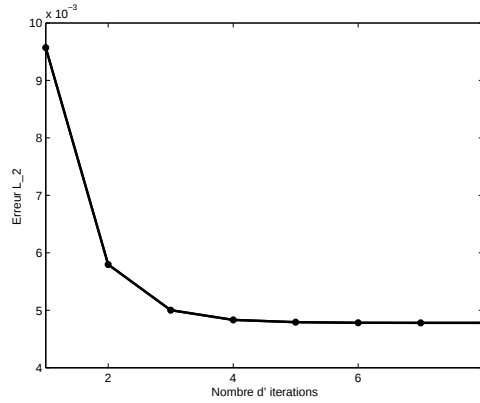


(d) Echantillonnage initial $j = 5$

FIG. II.14 – Erreur l^2 en fonction du nombre d'itérations pour 2 valeurs de h : $h_{\frac{8\pi}{89},0.1}^3$ (- -), $h_{0,0}^3$ (—○—) et le schéma de Lagrange $S_{2,2}$ (- · -) avec des points initiaux sur $[-6,6]$.



(a) Avec $h_{\frac{\pi}{8},0.1}^2$ et $h_{\frac{8\pi}{89},0.1}^3$. Echantillonnage initial $j = 3$. (b) Avec $h_{\frac{\pi}{8},0.1}^2$ et $h_{\frac{8\pi}{89},0.1}^3$. Echantillonnage initial $j = 4$.



(c) Avec $h_{\frac{\pi}{8},0.1}^2$ et $h_{\frac{8\pi}{89},0.1}^3$. Echantillonnage initial $j = 5$.

FIG. II.15 – Erreur l^2 en fonction du nombre d'itérations pour 2 valeurs de h : h^2 (—) ou h^3 (—○) avec des points initiaux sur $[-6,6]$.

II.5 Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

Dans le cadre du traitement des images ou des surfaces, on travaille avec des schémas définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$. Ici, les questions de convergence et de stabilité sont cruciales.

Dans une première partie, on va donner des résultats pour des schémas quelconques, qui sont l'extension, au cas multidimensionnel, des résultats établis dans la section II.4.1.

Dans une seconde partie, on construira des schémas de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ (dits schémas $2d$) à partir de “produits tensoriels” de schémas $l^\infty(\mathbb{Z})$ (dits schémas $1d$) convergeant. On s'intéressera à prouver la convergence du schéma $2d$ construit.

Contrairement au cas linéaire, la question de la convergence des schémas ainsi construits n'est pas triviale. Cette question fera l'objet de la deuxième partie.

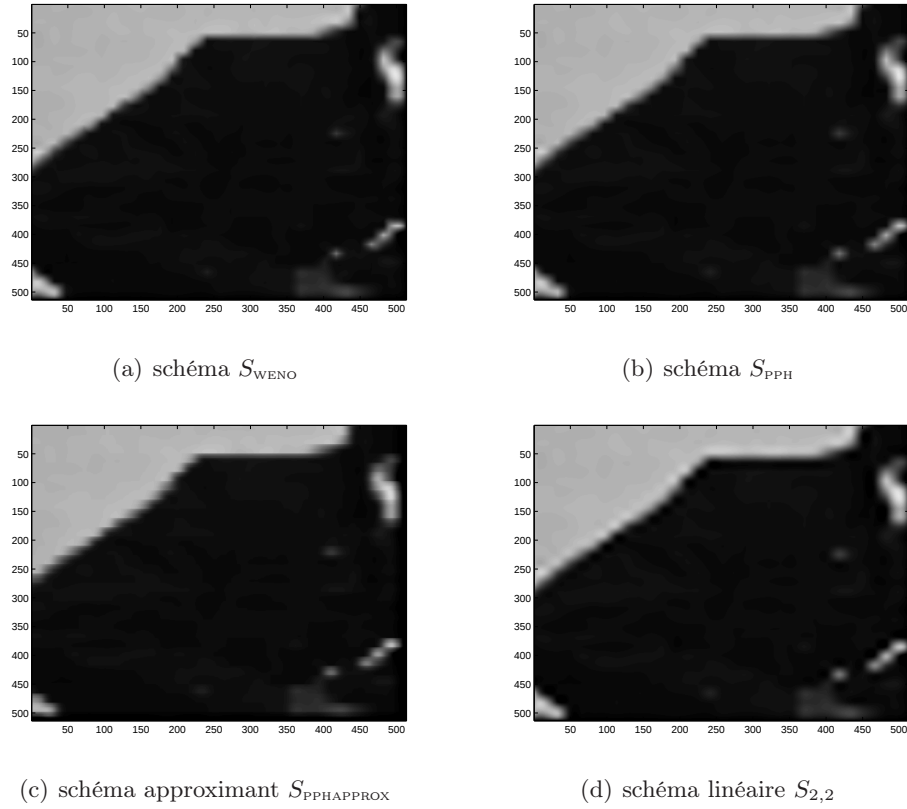


FIG. II.16 – Comparaison de 4 itérations de schémas linéaires et non-linéaires pour construire un grossissement d'une partie de l'image II.1.

II.5.1 Résultats de convergence dans le cas général

En correspondance avec le cas $1d$, on considère des schémas non-linéaires définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ par

$$S_{NL2d}(f) = S_{2d}(f) + F_{2d}(\delta_{2d}f), \quad (\text{II.66})$$

avec S_{2d} un schéma linéaire défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$, δ_{2d} un opérateur linéaire et continu sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ et F_{2d} un opérateur non-linéaire sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$.

On a les résultats suivants dont les preuves sont identiques aux théorèmes 1d de convergence (théorème II.1), de régularité (théorème II.2) et de stabilité (théorème II.4).

THÉORÈME II.11

Soit S_{2d} un schéma linéaire convergeant défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ dont la fonction limite vérifie la condition de stabilité L^∞ (I.9) et a une régularité $C^{\alpha-}$.

Si S_{NL2d} , F_{2d} et δ_{2d} vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|F_{2d}(d)\|_\infty \leq M \|d\|_\infty, \quad (\text{II.67})$$

$$\exists c < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta_{2d} S_{NL2d}(f)\|_\infty \leq c \|\delta_{2d} f\|_\infty, \quad (\text{II.68})$$

alors le schéma de subdivision S_{NL} défini par (II.66) converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta = \min\{-\log_2(c), \alpha\}$.

THÉORÈME II.12

Soit S_{NL2d} un schéma non-linéaire convergeant définie sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ et s'écrivant sous la forme (II.2) avec S_{2d} un schéma linéaire convergeant.

Si S_{NL2d} , F_{2d} et δ_{2d} vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|F_{2d}(d_1) - F_{2d}(d_2)\|_\infty \leq M \|d_1 - d_2\|_\infty, \quad (\text{II.69})$$

$$\exists c < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta(S_{NL2d}(f) - S_{NL2d}(g))\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty, \quad (\text{II.70})$$

alors le schéma S_{NL2d} défini par (II.66) est stable au sens de la définition I.7.

II.5.2 Construction d'un schéma 2d comme produit tensoriel de schémas 1d: cas linéaire

On a vu, dans la section I.3.1, les propriétés d'un schéma de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ défini comme un produit tensoriel d'un schéma linéaire interpolant de $l^\infty(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire défini par

$$\begin{cases} (S_{2d}f)_{2n,m} = (Sf_{n,\cdot})_m \\ (S_{2d}f)_{n,m} = (Sg_{\cdot,m})_n, \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

avec $g_{n,m} = (S_{2d}f)_{2n,m}$.

Dans ce cas, la définition est indépendante de l'ordre d'application du schéma 1d (lignes puis colonnes ou colonnes puis lignes).

La convergence du schéma 2d découle directement du schéma 1d utilisé (théorème I.4).

II.5.3 Construction d'un schéma non-linéaire 2d comme produit tensoriel de schémas 1d: cas non-linéaire

L'idée est d'étendre cette construction aux schémas non-linéaires et plus particulièrement, aux schémas écrits sous la forme (II.2)

$$S_{NL}(f) = S(f) + F(\delta f),$$

vérifiant les hypothèses du théorème de convergence II.1.

II.5. Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

On se propose d'étudier le schéma non-linéaire sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ construit en substituant S par S_{NL} dans (II.71) ce qui donne

$$\begin{cases} (S_{NL2d}f)_{2n,m} = (Sf_{n,\cdot})_m + F(\delta_h f_{n,\cdot})_m \\ (S_{NL2d}f)_{n,m} = (Sg_{\cdot,m})_n + F(\delta_v g_{\cdot,m})_n, \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

avec $g_{n,m} = (S_{NL2d}f)_{2n,m}$.

Le schéma obtenu en subivisant d'abord les colonnes puis les lignes n'est pas identique au schéma (II.72).

En section II.5.4, on proposera une construction symétrique obtenue, en faisant la moyenne des valeurs données par les deux schémas.

II.5.3.a Hypothèses et notations

Hypothèse

On suppose que l'hypothèse de contraction 1d (II.4) est vérifiée avec une itération $L=1$.

Les calculs qui suivent seront d'abord détaillés pour $\delta = d$ et $S = S_{1,1}$.

Ils sont ensuite généralisés pour δ quelconque puis S vérifiant $\|S\|_\infty = 1$, qui est une condition vérifiée par les schémas linéaires convergents à coefficients positifs (schémas B-splines).

Notations

- On associe à δ , la suite $a \in l^1(\mathbb{Z})$ tel que $\delta f = a \star f$.
- On note $f^1 = S_{NL2d}f$.
- On note, pour $\delta f = a \star f$,

$$(\delta_v f_{\cdot,m})_n = \sum_r a_r f_{n-r,m} \quad \text{et} \quad (\delta_h f_{n,\cdot})_m = \sum_r a_r f_{n,m-r}.$$

II.5.3.b Convergence: cas particuliers

Sur l'équation (II.72), on voit que S_{NL2d} s'écrit sous la forme (II.66) avec S_{2d} , produit tensoriel du schéma linéaire S , F_{2d} l'opérateur défini, pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2)$, par

$$\begin{cases} (F_{2d}(f))_{2n,2m} &= f_{n,m} \\ (F_{2d}(f))_{2n,2m+1} &= F(\delta_h f_{n,\cdot})_{2m+1} \\ (F_{2d}(f))_{2n+1,2m} &= F(\delta_v f_{\cdot,m})_{2n+1} \\ (F_{2d}(f))_{2n+1,2m+1} &= (S(F(\delta_h f_{n,\cdot})))_{2n+1} + F(\delta_v(S(f_{\cdot,m}) + F(\delta_h f_{n,\cdot}))_{\cdot,2m+1})_{2n+1}. \end{cases} \quad (\text{II.73})$$

et δ_{2d} l'opérateur linéaire défini par $(\delta_{2d}f)_{n,m} = ((\delta_v f_{\cdot,m})_n, (\delta_h f_{n,\cdot})_m)$.

On va vérifier les hypothèses du théorème de convergence II.11.

On remarque que

- D'après (II.73), l'hypothèse (II.67) de F_{2d} est vérifiée si l'hypothèse pour F (II.3) l'est.
- L'hypothèse de contraction (II.68) est le contrôle des quantités au niveau $j = 1$ par celle au niveau $j = 0$ via une constante plus petite que 1.

On considère 4 types de quantités définies sur les lignes et les colonnes dépendant de la parité de n et de m (figure II.17).

Par exemple, à une échelle j , on pose (figure II.17) :

$$\begin{aligned} 1_j &= \sup_{n \text{ pair}, m} |(\delta_h f_{n, \cdot}^j)_m|, & 2_j &= \sup_{n, m \text{ pair}} |(\delta_v f_{\cdot, m+1}^j)_n|, \\ 3_j &= \sup_{n \text{ pair}, m} |(\delta_h f_{n+1, \cdot}^j)_m| \quad \text{et} \quad 4_j &= \sup_{n, m \text{ pair}} |(\delta_v f_{\cdot, m}^j)_n|. \end{aligned}$$

Par définition de δ_{2d} , on souhaite contrôler ces quantités au niveau $j = 1$ par celle au niveau $j = 0$ ce qui montrera l'hypothèse de contraction (II.68).

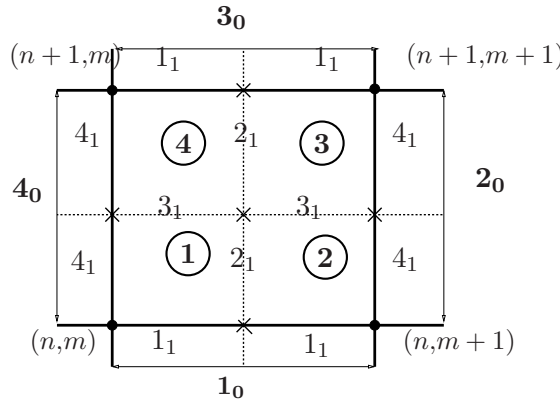


FIG. II.17 – Quantités à estimer pour majorer $\|\delta_{2d} f^1\|_\infty$ avec $f^1 = S_{NL2d} f$ et $\bullet f, \{\bullet, \times\} f^1$.

D'abord, on considère le cas $\delta = d$ l'opérateur aux différences d'ordre 1.

Cas $S = S_{1,1}$ et $\delta = d$

Pour commencer, on suppose que n et m sont pairs. Le cas impair sera similaire.

Sur la figure II.17, on remarque que pour estimer 1_1 , 2_1 , 3_1 and 4_1 , on a besoin de se placer dans quatres carrés différents.

En se plaçant dans le carré **1**, on notera

$$\begin{aligned} 1_1^1 &= \sup_{n, m} |f_{2n, 2m+1}^1 - f_{2n, 2m}^1|, & 2_1^1 &= \sup_{n, m} |f_{2n+1, 2m+1}^1 - f_{2n, 2m+1}^1|, \\ 3_1^1 &= \sup_{n, m} |f_{2n+1, 2m+1}^1 - f_{2n+1, 2m}^1| \quad \text{et} \quad 4_1^1 &= \sup_{n, m} |f_{2n+1, 2m}^1 - f_{2n, 2m}^1|. \end{aligned}$$

D'abord, les majorations de 1_1^1 et de 4_1^1 viennent directement de la définition (II.72) du schéma comme étant un produit tensoriel et de l'hypothèse de contraction (II.4) sur S_{NL} . On obtient

$$1_1^1 \leq c \|d_h f\|_\infty, \tag{II.74}$$

$$4_1^1 \leq c \|d_v f\|_\infty. \tag{II.75}$$

De façon similaire, on obtient pour 2_1^1

$$|f_{2n+1, 2m+1}^1 - f_{2n, 2m+1}^1| \leq c \|d_v(f_{\cdot, 2n+1}^1)\|_\infty,$$

II.5. Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

avec

$$\begin{aligned} d_v(f_{2.,2m+1}^1)_n &= f_{2n+2,2m+1}^1 - f_{2n,2m+1}^1 \\ &= \frac{f_{n+1,m} + f_{n+1,m+1}}{2} - \frac{f_{n,m} + f_{n,m+1}}{2} + F(d_h(f_{n+1,.}))_{2m+1} - F(d_h(f_{n,.}))_{2m+1} \\ &= \frac{f_{n+1,m+1} - f_{n,m+1}}{2} + \frac{f_{n+1,m} - f_{n,m}}{2} + F(d_h(f_{n+1,.}))_{2m+1} - F(d_h(f_{n,.}))_{2m+1} \end{aligned}$$

et

$$d_v(f_{2.,2m+1}^1)_{n+1} = \frac{f_{n+2,m+1} - f_{n+1,m+1}}{2} + \frac{f_{n+2,m} - f_{n+1,m}}{2} + F(d_h(f_{n+2,.}))_{2m+1} - F(d_h(f_{n+1,.}))_{2m+1}.$$

En utilisant les hypothèses 1d (II.3) et (II.4), on a

$$\|d_v(f_{2.,2m+1}^1)\|_\infty \leq \frac{1}{2}2_0 + \frac{1}{2}4_0 + M1_0 + M3_0. \quad (\text{II.76})$$

Ce qui donne

$$2_1^1 \leq M c 1_0 + \frac{c}{2}2_0 + M c 3_0 + \frac{c}{2}4_0. \quad (\text{II.77})$$

Pour 3_1^1 , on écrit

$$\begin{aligned} f_{2n+1,2m+1}^1 - f_{2n+1,2m}^1 &= \frac{f_{2n+2,2m+1}^1 + f_{2n,2m+1}^1}{2} - \frac{f_{n+1,m} + f_{n,m}}{2} \\ &\quad + F(d_v(f_{2.,2m+1}^1))_{2n+1} - F(d_v(f_{.,m}))_{2n+1} \\ &= \frac{f_{2n+2,2m+1}^1 - f_{2n+2,2m}^1}{2} + \frac{f_{2n,2m+1}^1 - f_{2n,2m}^1}{2} \\ &\quad + F(d_v(f_{2.,2m+1}^1))_{2n+1} - F(d_v(f_{.,m}))_{2n+1}. \end{aligned}$$

Avec (II.74) et l'hypothèse 1d (II.3)-(II.4), on a

$$|f_{2n+1,2m+1}^1 - f_{2n+1,2m}^1| \leq \frac{c}{2}\|d_h f_{n+1,.}\|_\infty + \frac{c}{2}\|d_h f_{n,.}\|_\infty + M\|d_v f_{2.,2m+1}^1\|_\infty + M\|d_v f_{.,m}\|_\infty.$$

En utilisant (II.76),

$$3_1^1 \leq \left(\frac{c}{2} + M^2\right)1_0 + \frac{M}{2}2_0 + \left(\frac{c}{2} + M^2\right)3_0 + \frac{3M}{2}4_0. \quad (\text{II.78})$$

Les estimations (II.74), (II.75), (II.77) et (II.78) peuvent être reformulées sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1_1^1 \\ 2_1^1 \\ 3_1^1 \\ 4_1^1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1_0 \\ 2_0 \\ 3_0 \\ 4_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_1 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ cM & \frac{c}{2} & cM & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2 \frac{M}{2} \frac{c}{2} + M^2 \frac{3M}{2} & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

On obtient de même pour les autres carrés de la figure II.17, une majoration faisant intervenir les matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ cM & \frac{c}{2} & cM & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2 \frac{3M}{2} \frac{c}{2} + M^2 \frac{M}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ cM & \frac{c}{2} & cM & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2 \frac{3M}{2} \frac{c}{2} + M^2 \frac{M}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ cM & \frac{c}{2} & cM & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2 \frac{M}{2} & \frac{c}{2} + M^2 \frac{3M}{2} & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Il est alors facile de voir que l'on obtient les mêmes matrices, quelle que soit la parité de n et de m .

Si on regroupe les quantités 1_j et 3_j ainsi que les quantités 2_j et 4_j , en notant $L_j = \sup\{1_j, 3_j\}$ et $V_j = \sup\{2_j, 4_j\}$, alors on obtient

$$\begin{pmatrix} L_j \\ V_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} L_{j-1} \\ V_{j-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} c + 2M^2 2M & \\ 2cM & c \end{pmatrix}. \quad (\text{II.79})$$

En utilisant $\|A\|_\infty$, on obtient le résultat suivant

PROPOSITION II.9

Sous les hypothèses du théorème de convergence II.1 avec $S = S_{1,1}$, $L = 1$ et $\delta f = df$, le schéma S_{NL2d} défini par (II.72) vérifie

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta_{2d}(S_{NL2d}f)\|_\infty \leq p(c, M, d) \|\delta_{2d}f\|_\infty,$$

avec $p(c, M) = \sup\{c + 2M + 2M^2, c + 2cM\}$ et $(\delta_{2d}f)_{n,m} = ((\delta_v f_{n,\cdot})_m, (\delta_h f_{\cdot,m})_n)$.

Cas $S = S_{1,1}$, δf quelconque

On applique les mêmes techniques que précédemment en détaillant les estimations pour le carré **(1)** de la figure II.17 (n et m sont pairs).

Les majorations de 1_1^1 (II.74) et de 4_1^1 (II.75) restent inchangées.

On a seulement besoin d'étudier 2_1^1 et 3_1^1 .

Pour 2_1^1 , le principe est le même sauf que l'on a besoin d'étudier $\delta_v(f_{2,2m+1}^1)_n$ et $\delta_v(f_{2,2m+1}^1)_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned} \delta_v(f_{2,2m+1}^1)_n &= \frac{\delta_v(f_{\cdot,m+1})_n}{2} + \frac{\delta_v(f_{\cdot,m})_n}{2} + \sum_r a_{n-r} F(\delta_h(f_{r,\cdot}))_{2m+1} \\ &= \frac{\delta_v(f_{\cdot,m+1})_n}{2} + \frac{\delta_v(f_{\cdot,m})_n}{2} + \sum_{r \text{ pair}} a_r F(\delta_h(f_{n-r,\cdot}))_{2m+1} \\ &\quad + \sum_{r \text{ impair}} a_r F(\delta_h(f_{n-r,\cdot}))_{2m+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta_v(f_{2,2m+1}^1)_{n+1} &= \frac{\delta_v(f_{\cdot,m+1})_{n+1}}{2} + \frac{\delta_v(f_{\cdot,m})_{n+1}}{2} + \sum_{r \text{ pair}} a_r F(\delta_h(f_{n+1-r,\cdot}))_{2m+1} \\ &\quad + \sum_{r \text{ impair}} a_r F(\delta_h(f_{n+1-r,\cdot}))_{2m+1}. \end{aligned}$$

II.5. Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

En notant $\delta_m = \sup\{\sum_{r \text{ pair}} |a_r|, \sum_{r \text{ impair}} |a_r|\}$, on obtient en considérant la parité de n

$$\|\delta_v(f_{2,2m+1}^1)\|_\infty \leq \frac{1}{2}1_0 + \frac{1}{2}3_0 + M\delta_m 2_0 + M\delta_m 4_0. \quad (\text{II.80})$$

On a alors

$$2_1^1 \leq M c \delta_m 1_0 + \frac{c}{2} 2_0 + M c \delta_m 3_0 + \frac{c}{2} 4_0. \quad (\text{II.81})$$

Pour 3_1^1 , on écrit

$$\begin{aligned} (\delta_h f_{2n+1, \cdot}^1)_{2m} &= \frac{(\delta_h f_{2n+2, \cdot}^1)_{2m}}{2} + \frac{(\delta_h f_{2n, \cdot}^1)_{2m}}{2} + \sum_r a_r F(\delta_v(f_{2, 2m-r}^1))_{2n+1} \\ &= \frac{(\delta_h f_{2n+2, \cdot}^1)_{2m}}{2} + \frac{(\delta_h f_{2n, \cdot}^1)_{2m}}{2} + \sum_{r \text{ pair}} a_r F(\delta_v(f_{\cdot, m-\frac{r}{2}}))_{2n+1} \\ &\quad + \sum_{r \text{ impair}} a_r F(\delta_v f_{2, 2m-r}^1)_{2n+1}. \end{aligned}$$

Pour majorer, en tenant compte du fait que m est pair, on a besoin de considérer la parité de $\frac{r}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned} |(\delta_h f_{2n+1, \cdot}^1)_{2m}| &\leq \frac{c}{2} \|\delta_h f_{n+1, \cdot}\|_\infty + \frac{c}{2} \|\delta_h f_{n, \cdot}\|_\infty + M \left(\sum_{r \equiv 0[4]} |a_r| \right) \|\delta_v f_{\cdot, 2}\|_\infty \\ &\quad + M \left(\sum_{r \equiv 2[4]} |a_r| \right) \|\delta_v f_{\cdot, 2+1}\|_\infty + M \left(\sum_{r \text{ impair}} |a_r| \right) \|\delta_v f_{2, 2+1}^1\|_\infty. \end{aligned}$$

Avec l'inégalité (II.80), on peut conclure

$$\begin{aligned} 3_1^1 &\leq \left(\frac{c}{2} + M^2 \delta_m \sum_{r \text{ impair}} |a_r| \right) 1_0 + M \left(\frac{\sum_{r \text{ impair}} |a_r|}{2} + \sum_{r \equiv 2[4]} |a_r| \right) 2_0 \\ &\quad + \left(\frac{c}{2} + M^2 \delta_m \sum_{r \text{ impair}} |a_r| \right) 3_0 + M \left(\frac{\sum_{r \text{ impair}} |a_r|}{2} + \sum_{r \equiv 0[4]} |a_r| \right) 4_0. \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

De la même façon que le cas $\delta = d$, on peut résumer les majorations de chaque carré de la figure II.17 en utilisant des matrices.

En notant

$$\begin{aligned} P &= \sum_{r \text{ pair}} |a_r|, & P_0 &= \sum_{r \equiv 0[4]} |a_r|, & P_2 &= \sum_{r \equiv 2[4]} |a_r| \\ I &= \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, & I_1 &= \sum_{r \equiv 1[4]} |a_r| & \text{et } I_3 &= \sum_{r \equiv 3[4]} |a_r|, \end{aligned}$$

on obtient les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ cM\delta_m & \frac{c}{2} & cM\delta_m & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2\delta_m IM(\frac{I}{2} + P_2) & \frac{c}{2} + M^2\delta_m IM(\frac{I}{2} + P_0) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ cM\delta_m & \frac{c}{2} & cM\delta_m & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2\delta_m PM(\frac{P}{2} + I_3) & \frac{c}{2} + M^2\delta_m PM(\frac{P}{2} + I_1) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ cM\delta_m & \frac{c}{2} & cM\delta_m & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2\delta_m PM(\frac{P}{2} + I_3) & \frac{c}{2} + M^2\delta_m PM(\frac{P}{2} + I_1) & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{II.83}
\end{aligned}$$

et

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ cM\delta_m & \frac{c}{2} & cM\delta_m & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} + M^2\delta_m IM(\frac{I}{2} + P_2) & \frac{c}{2} + M^2\delta_m IM(\frac{I}{2} + P_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

En utilisant une seule matrice, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} c + 2(M\delta_m)^2 & 2M\delta_m \\ 2cM\delta_m & c \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\}. \tag{II.84}$$

On obtient la proposition suivante, en considérant $\|A\|_\infty$,

PROPOSITION II.10

Sous les hypothèses du théorème de convergence II.1 avec $S = S_{1,1}$ et δ un opérateur linéaire défini par $\delta f = a \star f$, le schéma S_{NL2d} défini par (II.72) vérifie

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta_{2d}(S_{NL2d}f)\|_\infty \leq p(c, M, \delta) \|\delta_{2d}f\|_\infty,$$

avec $p(c, M, \delta) = \sup\{c + 2cM\delta_m, c + 2M\delta_m + 2(M\delta_m)^2\}$, $\delta_m = \sup\{\sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r|\}$.

REMARQUE II.10

Si on considère la norme $\|\cdot\|_\infty$ des matrices A_1 , A_2 , A_3 et A_4 et dans le cas où $\|\delta\|_1 \neq 2\delta_m$ c'est-à-dire $\sum_{r \text{ impair}} |a_r| \neq \sum_{r \text{ pair}} |a_r|$, on peut avoir un résultat plus précis en remplaçant $p(c, M, \delta)$ par

$$p^1(c, M, \delta) = \sup\{c + 2cM\delta_m, c + M\|\delta\|_1 + 2(M\delta_m)^2\} \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\}.$$

On peut noter que les opérateurs aux différences $\delta = d^k$ vérifient $\sum_{r \text{ impair}} |a_r| = \sum_{r \text{ pair}} |a_r|$.

II.5. Extension à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

Cas S quelconque vérifiant $\|S\|_\infty = 1$
 Pour un schéma S quelconque, les calculs (II.81) et (II.82) restent valables.
 On écrit alors

$$2_1^1 \leq M c \delta_m 1_0 + M c \delta_m 3_0 + c \|S\|_\infty \max(2_0, 4_0),$$

et

$$\begin{aligned} 3_1^1 \leq & (c \|S\|_\infty + 2M^2 \delta_m^2) \max(1_0, 3_0) + \|S\|_\infty M \sum_{r \text{ impair}} |a_r| \max(2_0, 4_0) \\ & + M \sum_{r \equiv 2[4]} |a_r| 2_0 + M \sum_{r \equiv 0[4]} |a_r| 4_0. \end{aligned}$$

Les majorations de 1_1^1 et 4_1^1 restent identiques.

Dans le cas où $\|S\|_\infty = 1$, la matrice A (II.84) est alors identique et la proposition II.10 valable. Cette condition est par exemple vérifiée par des schémas à coefficients positifs.

II.5.3.c Convergence: résultat général

Le calcul du rayon spectral de la matrice A (II.84) donne

$$\rho(A) = c + M \delta_m (1 + \sqrt{4c + (M \delta_m)^2}),$$

et la propriété

$$\text{si } \rho(A) < 1 \quad \text{alors il existe } k \text{ tel que } \|A^k\|_\infty < 1.$$

D'après le théorème de convergence II.11 et les calculs de la section II.5.3.b, on a alors le résultat suivant

THÉORÈME II.13

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire vérifiant les hypothèses du théorème de convergence II.1 avec $L = 1$ et S un schéma linéaire vérifiant $\|S\|_\infty = 1$,

Si les constantes c et M du théorème de convergence II.1 vérifie

$$c + M \delta_m (1 + \sqrt{4c + (M \delta_m)^2}) < 1 \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup \left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\},$$

alors il existe $k > 0$ et $p_k(c, M, \|\delta\|_1) < 1$ tel que

$$\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta_{2d} S_{NL2d}^k f\|_\infty \leq p_k(c, M, \delta) \|\delta_{2d} f\|_\infty,$$

c'est-à-dire que le schéma S_{NL2d} défini par (II.72) **converge**.

Pour estimer la **régularité** du schéma S_{NL2d} (théorème II.11), on a besoin d'évaluer la constante $p_k(c, M, \delta) < 1$ qui peut se faire numériquement via plusieurs moyens (section II.5.3.b)

1. avec un produit matriciel, en utilisant les matrices A_1, A_2, A_3 et A_4 qui donnent les relations de majoration pour chaque carré $\textcircled{\mathbf{i}}$ (figure II.18), dans le cas où $S = S_{1,1}$.
2. avec $\|A^k\|_\infty$, en montrant que $\|A^k\|_\infty < 1$,

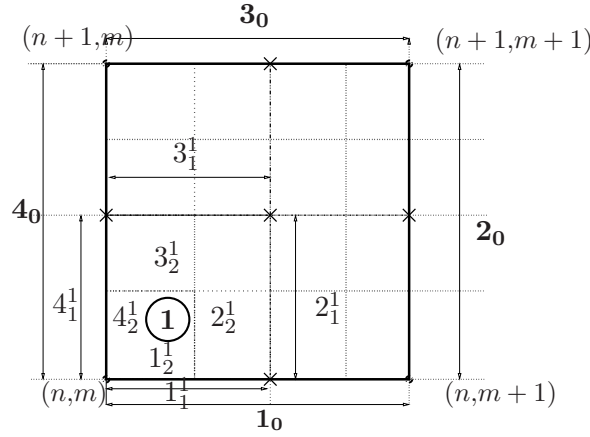


FIG. II.18 – Quantités à estimer pour majorer $\|\delta_{2d}f^2\|_\infty$ avec $f^2 = S_{NL2d}^2 f$ et $\bullet f, \{\bullet, \times\}f^1$.

Expériences numériques Sur la figure II.19, on peut voir en région grisée, les couples (c, M) pour lesquels $p_k(c, M, \|\delta\|_1) < 1$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ et $\delta = d$. On peut remarquer que plus M est proche de 1, plus c doit être proche de 0.

Sur la figure II.20, on peut observer le même phénomène pour $d = d^2$. On remarque, aussi, que l'utilisation de l'opérateur aux différences d'ordre 1 fournit plus de couples (c, M) satisfaisant les conditions du théorème II.13.

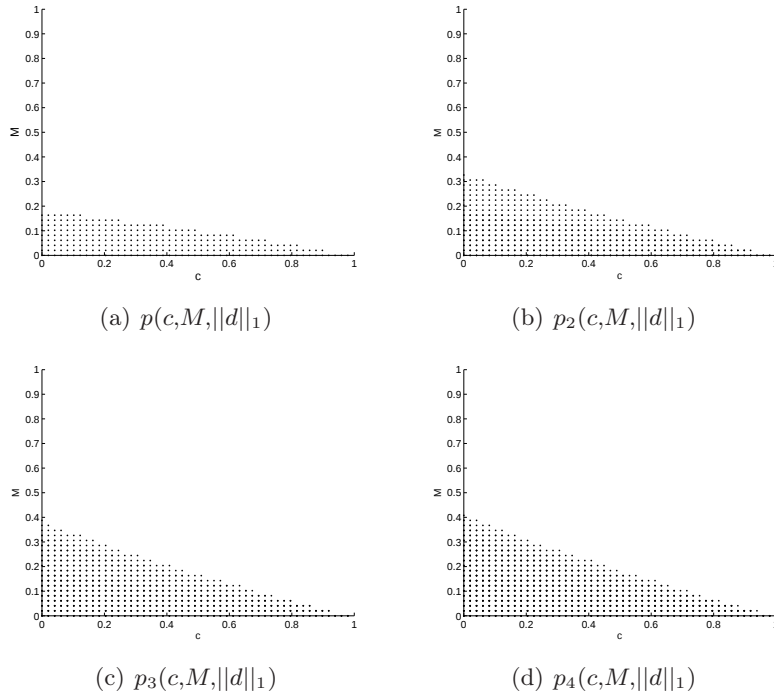


FIG. II.19 – Valeurs de c et de M pour lesquels $p_k(c, M, d) < 1$ (région grisée) calculés avec le produit des matrices $(A_i)_{i=1\dots 4}$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.

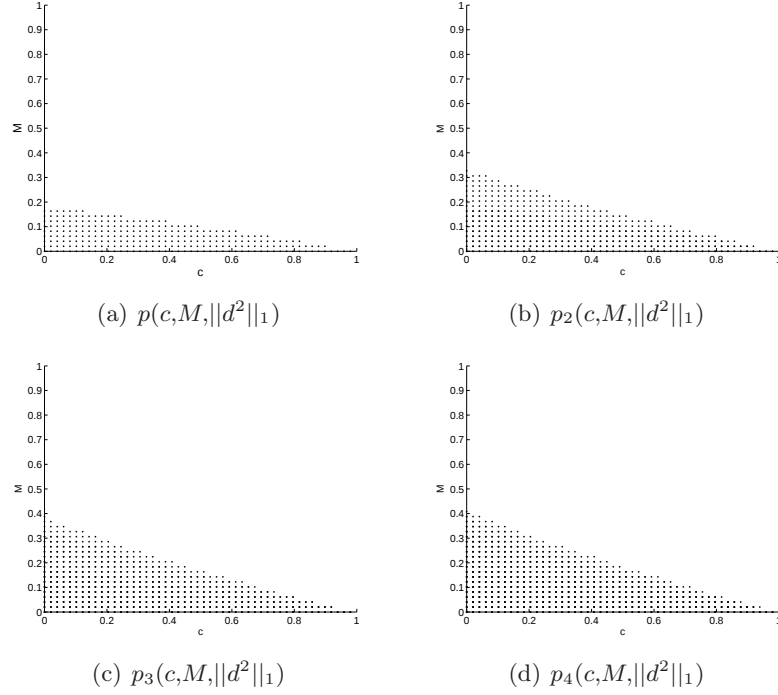


FIG. II.20 – Valeurs de c et de M pour lesquels $p_k(c, M, d^2) < 1$ (région grisée) calculés avec le produit des matrices $(A_i)_{i=1\dots 4}$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.

II.5.4 Une construction symétrique de S_{NL2d} : étude de la convergence

II.5.4.a Définition du schéma

Si on note S_{NL2d}^l le schéma approximant $2d$ défini par (II.72), on peut définir de façon similaire le schéma approximant $2d$ obtenu en inversant l'ordre d'application du schéma S_{NL} c'est-à-dire en commençant par les colonnes. On notera S_{NL2d}^c le schéma obtenu.

Nous allons étudier la convergence du schéma symétrique obtenu, en posant

$$(S_{NL2d}f)_{n,m} = \frac{1}{2} \left((S_{NL2d}^l f)_{n,m} + (S_{NL2d}^c f)_{n,m} \right), \quad \forall f \in l^\infty(\mathbb{Z}^2). \quad (\text{II.85})$$

II.5.4.b Convergence

En utilisant la même méthode que pour le produit tensoriel classique (section II.5.3), on peut obtenir les majorations suivantes pour S_{NL2d}^c , dans le cas $\delta = d$ et le schéma linéaire $S = S_{1,1}$

$$\|d_h(f_{2n+1,2}^1)\|_\infty \leq \frac{1}{2}1_0 + \frac{1}{2}3_0 + M2_0 + M4_0,$$

d'où

$$2_1^1 \leq \frac{3M}{2}1_0 + \left(\frac{c}{2} + M^2\right)2_0 + \frac{M}{2}3_0 + \left(\frac{c}{2} + M^2\right)4_0,$$

et

$$3_1^1 \leq \frac{c}{2}1_0 + Mc2_0 + \frac{c}{2}3_0 + Mc4_0.$$

Pour 1_1^1 et 4_1^1 , on obtient les mêmes inégalités que (II.74) et (II.75).

Avec la définition du schéma (II.85) et en faisant la moyenne entre les équations obtenues ci-dessus et celles obtenues pour S_{NL2d}^l , on obtient une écriture matricielle similaire à l'équation (II.79).

Dans le cas $\delta f = a \star f$ et S un schéma linéaire vérifiant $\|S\|_\infty = 1$, on généralise facilement avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} c + (M\delta_m)^2 M\delta_m(1+c) \\ M\delta_m(1+c)c + (M\delta_m)^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\}.$$

On en déduit son rayon spectral

$$\rho(A) = c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1).$$

On a alors le résultat suivant

THÉORÈME II.14

Si le schéma S_{NL} vérifie les hypothèses du théorème de convergence II.1 avec $L = 1$ et S un schéma linéaire vérifiant $\|S\|_\infty = 1$,

$$\text{si} \quad c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1) < 1 \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\}, \quad (\text{II.86})$$

alors le schéma symétrique S_{NL2d} défini par (II.85) converge.

II.5.5 Stabilité des deux constructions

Grâce à la linéarité de l'opérateur δ_{2d} , on obtient par des calculs identiques à ceux de la section II.5.3, les deux corollaires suivants

COROLLAIRE II.1

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire vérifiant les hypothèses du théorème de stabilité II.4 avec $L = 1$ et S un schéma linéaire vérifiant $\|S\|_\infty = 1$.

Si les constantes de stabilité, c et M vérifient

$$c + M\delta_m(1 + \sqrt{4c + (M\delta_m)^2}) < 1 \quad \text{avec} \quad \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\},$$

alors il existe $k > 0$ et $p_k(c, M, \|\delta\|_1) < 1$ tel que

$$\forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}^2) \quad \|\delta_{2d}(S_{NL2d}^k f - S_{NL2d}^k g)\|_\infty \leq p_k(c, M, \delta) \|\delta_{2d}(f - g)\|_\infty,$$

c'est-à-dire que le schéma S_{NL2d} **défini par (II.72)** est stable.

De même, on a le résultat suivant pour le schéma symétrique S_{NL2d} défini par (II.85) (section II.5.3).

COROLLAIRE II.2

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire vérifiant les hypothèses du théorème de stabilité II.4 avec $L = 1$ et S un schéma linéaire vérifiant $\|S\|_\infty = 1$.

Si les constantes de stabilité $1d$, c et M vérifient

$$c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1) < 1 \quad \text{avec } \delta_m = \sup\left\{ \sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r| \right\},$$

alors le schéma symétrique S_{NL2d} **défini par (II.85)** est stable.

II.5.6 Exemples de schémas non-linéaires définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

On reprend les schémas non-linéaires $1d$ étudiés dans la section II.3.1, et on regarde la convergence des schémas $2d$ correspondant.

On ne peut considérer que les schémas $1d$ pour lesquels l'hypothèse $1d$ de contraction (II.4) est vérifiée au bout d'une itération ($L = 1$). Il s'agit des schémas S_{POWERP} et $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (section II.4.2 et section II.4.3).

II.5.6.a Convergence du schéma S_{POWERP} étendu à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

- Schéma $2d$ obtenu par le produit tensoriel classique (II.72)

On a, d'après les équations (II.31) et (II.36),

$$c = \frac{1}{2}, \quad M = \frac{1}{8}, \quad \delta = d^2 \quad \text{donc} \quad \delta_m = \sum_{r \text{ impair}} |a_r| = \sum_{r \text{ pair}} |a_r| = 2.$$

On calcule la constante $p_k(c, M, \delta)$ en utilisant les produits des matrices $(A_i)_{i=1\dots 4}$ définis par (II.83).

On obtient

$$p_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, d^2\right) = 1.125 \quad \text{et} \quad p_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, d^2\right) = 0.82.$$

Le théorème II.13 donne la convergence du schéma $S_{\text{POWERP}2d}$.

Grâce au théorème de régularité II.11, on peut déduire la régularité $C^{\beta-}$ avec $\beta = \frac{-\log_2(0.82)}{2} \approx \mathbf{0.14}$.

- Schéma $2d$ symétrique défini par (II.85)

On obtient $c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1) \approx 0.937$ et donc la convergence.

De même, on a la constante de régularité $\beta = -\log_2(0.937) \approx \mathbf{0.093}$.

II.5.6.b Convergence du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ étendu à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

- Schéma $2d$ obtenu par le produit tensoriel classique (II.72).

On a, d'après les équations (II.43) et (II.56),

$$c = \frac{7}{16}, \quad M = \frac{7}{64}, \quad \delta = d^2 \quad \text{donc} \quad \delta_m = \sum_{r \text{ impair}} |a_r| = \sum_{r \text{ pair}} |a_r| = 2.$$

En utilisant la matrice A (II.84) (cas $\|S\|_\infty = 1$), on obtient

$$p_1\left(\frac{7}{16}, \frac{7}{64}, d^2\right) = 0.97$$

ce qui donne la convergence du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}2d}$ défini sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ (théorème II.13).

On peut en déduire la constante de régularité qui est $C^{\beta-}$ avec $\beta = \frac{-\log_2(0.97)}{2} \approx 0.044$ (théorème II.11).

On remarque que si on augmente les itérations, la constante de régularité peut être améliorée (tableau II.3).

k	5	10	100	500	1000
$-\frac{\log_2(c)}{k}$	0.28	0.32	0.3568	0.36	0.3605

TAB. II.3 – Calcul de la constante $-\frac{\log_2(c)}{k}$ avec $c = p_k(\frac{7}{16}, \frac{7}{64}, d^2)$.

• *Schéma 2d symétrique défini par (II.85)*

On obtient $c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1) \approx 0.8$.

On a la convergence du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}2d}$ (théorème II.14) et la constante de régularité β vaut $-\log_2(0.8) \approx \mathbf{0.32}$.

REMARQUE II.11

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ étant stable, on peut envisager d'établir la stabilité du schéma $S_{\text{pphapprox}2d}$ grâce aux corollaire II.1 et II.2.

Malheureusement, les conditions de ces deux corollaires ne sont pas vérifiées avec les constantes c et M de stabilité $1d$ du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (annexe C).

II.6 Conclusion

Dans la section II.3, on a établi des résultats de convergence, régularité, stabilité et ordre d'approximation pour une classe de schémas. En effet, les hypothèses intervenant dans ces théorèmes, ne permettaient pas d'appliquer des résultats existants [DL95, Osw04, GW08].

Nous avons ensuite appliqué ces résultats à l'étude de schémas non-linéaires visant à éliminer les phénomènes de Gibbs autour d'une discontinuité.

Pour le schéma S_{WENO} (section II.4.1), on a amélioré la régularité théorique obtenue par [CDM03] et nous avons établi l'ordre d'approximation de la fonction limite du schéma.

On s'est aussi intéressé à la convergence d'un autre schéma existant, le schéma $S_{\text{SPHERICAL}}$ [AEV03] visant à améliorer le schéma linéaire $S_{2,2}$ pour la construction de courbe à courbure constante (section II.4.4).

Nous avons ensuite construit deux autres schémas: le schéma S_{POWERP} , généralisant l'idée du schéma S_{PPH} [ADLT06] (section II.4.2) et le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$, un schéma approximant stable ayant une régularité plus que C^1 (section II.4.3).

Enfin, on a établi un résultat de convergence et de stabilité pour des schémas non-linéaires de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ définis comme produit tensoriel de schémas de $l^\infty(\mathbb{Z})$.

On a montré que sous les conditions du théorème de convergence, le schéma convergeait dans $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ si une relation liant les constantes du schéma défini sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ était vérifiée.

Éliminer les phénomènes de Gibbs étant particulièrement intéressant pour la compression d'images, on propose d'étudier dans le chapitre suivant les analyses multirésolutions associées aux schémas étudiés.

CHAPITRE III

Analyses multirésolutions non-linéaires

————— oOo —————

On s'intéresse à des analyses multirésolutions non-linéaires construites à partir de schémas de subdivision non-linéaires de $l^\infty(\mathbb{Z})$ (chapitre II), dans le but d'éviter les zones de flous dans la reconstruction d'images compressées. On étudie des propriétés de stabilité et on effectue des comparaisons numériques sur des images tests.

————— oOo —————

Plan du chapitre

III.1 Introduction	129
III.2 Analyse Multirésolution Généralisée	129
III.2.1 Définitions	130
III.2.1.a Définitions	130
III.2.1.b Construction de la décimation à partir d'un schéma de subdivision dans le cas linéaire	131
III.2.1.c Définition d'opérateurs permettant de passer du discret au continu	131
III.2.2 Construction	132
III.2.2.a Construction d'une discrétisation	132
III.2.2.b Lien avec une analyse multirésolution biorthogonale	133
III.2.2.c Un premier exemple: discrétisation par valeurs ponctuelles	133
III.2.2.d Un deuxième exemple: discrétisation par valeurs moyennes	133
III.2.2.e Un troisième exemple: généralisation de la discrétisation par valeurs moyennes	134
III.2.3 Stabilité	134
III.3 Résultats de stabilité pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$	135
III.3.1 Résultat général	135
III.3.2 Cas d'une hypothèse de contraction (III.14) pour S_{NL}^L	137
III.4 Exemples d'analyses multirésolutions stables sur $l^\infty(\mathbb{Z})$	139
III.4.1 Un premier exemple: une analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire de M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05]	139
III.4.1.a Construction du schéma	139
III.4.1.b Convergence	140
III.4.1.c Stabilité de l'analyse multirésolution	141
III.4.2 Un deuxième exemple: une analyse multirésolution associée à une classe de schéma non-linéaire définie en base 3	144
III.4.2.a Construction du schéma	144
III.4.2.b Propriétés numériques du schémas	145
III.4.2.c Convergence	146
III.4.2.d Stabilité de l'analyse multirésolution	147
III.5 Expériences Numériques 1d	147
III.5.1 Cadre des expériences 1d	147
III.5.2 Expériences sur des grilles dyadiques	148
III.5.3 Expériences pour des courbes	152
III.5.4 Expériences pour des grilles triadiques	152
III.6 Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	154
III.6.1 Résultats théoriques	154
III.6.2 Applications	155
III.6.2.a Stabilité des schémas S_{gc} étendus à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	155
III.6.2.b Stabilité des schémas $S_{PPHTRIA}$ étendus à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$	155
III.6.3 Exemples numériques 2d	156
III.7 Conclusion	162

III.1 Introduction

Les analyses multirésolutions ont été définies par S. Mallat [Mal89], dans le but de construire des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ à partir des translatées et des dilatées d'une fonction, appelée ondelette, localisée en temps et en fréquence. Elles sont basées sur la définition d'une fonction d'échelle qui permet de construire un schéma de subdivision linéaire.

Les analyses multirésolutions ont une application directe en traitement de signaux et d'images puisqu'elles permettent de caractériser, de compresser et de reconstruire un signal. En effet, on peut décomposer un signal à une résolution donnée, par des coefficients basse résolution et des coefficients, appelés détails, traduisant la différence entre deux résolutions (annexe A). En seuillant ces détails, on peut ainsi obtenir une compression du signal.

La théorie L^2 et le caractère linéaire des décompositions et des reconstructions fournissent un contrôle de la reconstruction par le coefficient de seuillage. Malgré la puissance des théorèmes de la théorie ondelette, le cadre linéaire reste trop rigide pour pouvoir s'adapter à des discontinuités, des grilles non-uniformes ou encore à des géométries particulières.

La généralisation d'A. Harten [Har96] fait des analyses multirésolutions un outil puissant pour travailler avec des schémas de subdivision non-linéaires et ainsi construire des analyses multirésolutions adaptées aux différents problèmes cités. Mais, comme dans le cas des schémas de subdivision non-linéaires, la stabilité et l'extension au cas multidimensionnel sont beaucoup plus difficiles à établir. Pourtant ces résultats sont cruciaux pour l'application à la compression d'images.

Dans la section III.2, on explicitera les différentes composantes de l'analyse multirésolution généralisée. On verra que, pour un schéma non-linéaire donné, on ne sait pas toujours définir une analyse multirésolution associée.

Dans la section III.3, on développe un résultat de stabilité pour des analyses multirésolutions associées, à des schémas non-linéaires définis comme la perturbation d'un schéma linéaire. On verra, notamment, que les hypothèses de ce théorème de stabilité III.1 sont les mêmes que celles du théorème de stabilité II.4 des schémas non-linéaires, sous certaines conditions.

On donnera deux exemples pour lesquels on est capable de construire et de prouver la stabilité de l'analyse multirésolution.

Enfin, la section III.6 donne une extension du résultat au cas bidimensionnel et on verra notamment que, cette étude est plus complexe que pour les schémas de subdivisions.

III.2 Analyse Multirésolution Généralisée

Dans le cadre des équations hyperboliques, A. Harten [Har94, BH95] définit une théorie généralisée des analyses multirésolutions qui ne considère pratiquement que des données discrètes. Parallèlement, pour traiter des géométries complexes, W. Sweldens [Swe97] définit des ondelettes dépendant de l'échelle et de la position, appelées ondelettes de seconde génération.

Contrairement au cadre de W. Sweldens, A. Harten n'a besoin que d'opérateurs discrets permettant de passer d'une échelle fine à une échelle grossière (opérateur de décimation) et réciproquement (opérateur de prédiction); la définition de l'opérateur de prédiction repose sur le choix d'un schéma de subdivision linéaire ou non-linéaire.

On parlera d'analyse multirésolution linéaire (*resp* non-linéaire), lorsque l'opérateur de prédiction est linéaire (*resp* non-linéaire). L'opérateur de décimation est toujours linéaire.

Mais, cette définition pour des espaces discrets, reste difficilement manipulable: difficulté de mesurer la qualité de l'approximation ou de définir un opérateur de décimation pour un schéma

de subdivision donné. A. Harten [Har94] définit alors des opérateurs permettant de passer du discret au continu, appelés discrétisation et reconstruction.

Dans une première partie, on définira ces différents opérateurs et on donnera un lien entre une analyse multirésolution généralisée linéaire et ondelettes biorthogonales.

Dans une seconde partie, on donnera des exemples d'analyses multirésolutions, définies par l'opérateur de discrétisation. Notamment, lorsque l'opérateur de discrétisation est un échantillonnage, on parlera d'analyse multirésolution interpolante. Enfin, on définira la stabilité d'une analyse multirésolution.

III.2.1 Définitions

On note V^j des espaces discrets et V_j des espaces fonctionnels.

III.2.1.a Définitions

DÉFINITION III.1

On appelle analyse multirésolution discrète sur les espaces $(V^j)_{j \in \mathbb{N}}$, la donnée de deux opérateurs vérifiant

$$\begin{aligned} (i) & D_j^{j-1} : V^j \longrightarrow V^{j-1} \quad \text{et} \quad V^{j-1} = D_j^{j-1}(V^j), \\ (ii) & P_{j-1}^j : V^{j-1} \longrightarrow V^j, \\ (iii) & D_j^{j-1} P_{j-1}^j = Id_{V^{j-1}}. \end{aligned}$$

L'opérateur D_j^{j-1} s'appelle l'opérateur de projection ou de décimation et P_{j-1}^j l'opérateur de prédiction.

Pour définir une prédiction c'est-à-dire un opérateur permettant de passer à une échelle plus fine (passage de V^{j-1} à V^j), on utilise les schémas de subdivisions qui peuvent être linéaires ou non-linéaires. L'opérateur de décimation est toujours linéaire, pour pouvoir définir une base de $Ker(D_j^{j-1})$ et les détails de l'analyse multirésolution.

Pour $v^j \in V^j$, $P_{j-1}^j D_j^{j-1} v^j$ étant une approximation de v^j , on définit l'erreur e^j par

$$e^j = v^j - P_{j-1}^j D_j^{j-1} v^j.$$

On obtient par linéarité grâce au (iii) de la définition III.1, que $e^j \in Ker(D_j^{j-1})$.

Dans le cas où $N_j = \dim(V^j) < +\infty$, on remarque que $\dim Ker(D_j^{j-1}) = N_j - N_{j-1}$. On définit donc

les détails de l'analyse multirésolution généralisée à l'échelle j à partir des coordonnées de e^j dans une base de $Ker(D_j^{j-1})$.

Dans la suite, on note E^j et G_j les opérateurs vérifiant $E^j d^j = e^j$ et $G_j e^j = d^j$.

On peut définir la transformée (annexe A)

$$v^j \longleftrightarrow \mathcal{M}v^j = \{v^0, d^1, \dots, d^j\} \quad (\text{III.1})$$

grâce aux opérations élémentaires que sont

$$\begin{array}{ll} \text{la décomposition} & v^{j-1} = D_j^{j-1} v^j \quad \text{et} \quad d^j = G_j (Id - P_{j-1}^j D_j^{j-1}) v^j, \\ \text{et la reconstruction} & v^j = P_{j-1}^j v^{j-1} + E^j d^j. \end{array}$$

Pour définir une analyse multirésolution, on doit donc [Har94]

*choisir la décimation D_j^{j-1} ,
construire la prédiction P_{j-1}^j vérifiant (iii),
et définir une base de $Ker(D_j^{j-1})$.*

On peut, alors, se poser la question suivante

étant donné un schéma convergent, existe-t-il au moins une décimation vérifiant (iii)?

III.2.1.b Construction de la décimation à partir d'un schéma de subdivision dans le cas linéaire

Pour

$$P_j^{j-1} v^j = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_{n-2m} v_m^j,$$

on cherche un opérateur de décimation D_j^{j-1} tel que

$$D_j^{j-1} v^{j+1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-2n} v_m^{j+1}.$$

Alors la condition (iii) et la reproduction des polynômes par P_j^{j-1} s'écrivent

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \beta_{m+2n} = \delta_{n,0} \tag{III.2}$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m = 1, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_{2m-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_{2m} = 1, \tag{III.3}$$

La condition (III.2) se traduit sous la forme matricielle

$$A\alpha = e_0 \quad \text{avec} \quad A = (\beta_{m+2n})_{n,m} \quad \text{et} \quad e_0 = (\delta_{n,0}),$$

ce qui permet de construire l'opérateur de décimation associé à P_{j-1}^j , c'est-à-dire de calculer $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

La condition (III.2) traduit aussi une condition de biorthogonalité entre les filtres α et β .

Un moyen similaire de construire l'opérateur de décimation est d'utiliser la construction de filtres birthogonaux de A. Cohen, I. Daubechies et J. C. Feauveau [CDF92] (annexe A).

III.2.1.c Définition d'opérateurs permettant de passer du discret au continu

DÉFINITION III.2

Soit $\mathcal{F}$ un espace de Banach, on définit deux opérateurs

- (i) $\mathcal{D}_j : \mathcal{F} \longrightarrow V_j$ avec $V_j = \mathcal{D}_j(\mathcal{F})$ espace discret,
- (ii) $\mathcal{R}_j : V_j \longrightarrow \mathcal{F}$,
- (iii) $\mathcal{D}_j \mathcal{R}_j = Id_{V_j}$,
- (iv) $\mathcal{D}_j$ vérifiant $\mathcal{D}_j f = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{j-1} f = 0$.

$\mathcal{D}_j$ s'appelle l'opérateur de discrétisation et $\mathcal{R}_j$ l'opérateur de reconstruction.

Il est possible de définir un opérateur de décimation et de prédiction vérifiant les propriétés de la définition III.1, en posant

$$D_j^{j-1} = \mathcal{D}_{j-1} \mathcal{R}_j \quad \text{et} \quad P_{j-1}^j = \mathcal{D}_j \mathcal{R}_{j-1}.$$

D_j^{j-1} vérifie aussi $D_j^{j-1} \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j-1}$.

On parle d'approximation lorsque $\|\mathcal{R}_j \mathcal{D}_j f - f\| \rightarrow_{j \rightarrow +\infty} 0$.

On a alors [Har96]

Pour $f \in \mathcal{F}$, l'ordre d'approximation d'une analyse multirésolution dépend de l'ordre du schéma S utilisé pour définir l'opérateur de prédiction.

Dans la suite, on va s'intéresser à définir une discrétisation linéaire et une reconstruction associée qui peut être non-linéaire.

III.2.2 Construction

III.2.2.a Construction d'une discrétisation

Un moyen pour définir une discrétisation est de poser

- pour une fonction $\tilde{\phi}$ à support compact, vérifiant $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x) dx = 1$ et une relation d'échelle [ADH99a]

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad (\mathcal{D}_j f)_n = 2^j \langle f, \tilde{\phi}(2^j(\cdot - n)) \rangle, \quad (\text{III.4})$$

avec ϕ vérifiant

$$\tilde{\phi}(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \tilde{\phi}(2x - n) \quad \text{et } \alpha \text{ à support compact.} \quad (\text{III.5})$$

- pour un dirac

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad (\mathcal{D}_j f)_n = f(2^{-j}n). \quad (\text{III.6})$$

Dans le premier cas, on obtient avec la relation d'échelle,

$$(\mathcal{D}_{j-1} f)_n = \sum_m \alpha_{m-2n} (\mathcal{D}_j f)_m.$$

Pour cette discrétisation, on peut définir ou calculer les opérateurs discrets [ADH99a]

- D_j^{j-1} par

$$D_j^{j-1} v^j = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-2n} v^j,$$

- G_j par $d_n^j = e_{2n+1}^j$ en prenant une valeur sur deux c'est-à-dire

$$(G_j e^j)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{m-2n} e_m^j \quad \text{avec } g = (\delta_{n,-1})_{n \in \mathbb{Z}},$$

- E_j en résolvant $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-2n} e^j = 0$ pour exprimer e_{2n}^j en fonction de d^j .

III.2.2.b Lien avec une analyse multirésolution biorthogonale

Dans le cas linéaire, la relation (III.2) liant les coefficients de la prédiction et de la décimation, permet de construire une prédiction correspondante. On peut alors définir la reconstruction $\mathcal{R}_j$ par

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{R}_j f(x) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (P_{j-1}^j v^{j-1})_n \phi(2^j x - n),$$

avec ϕ vérifiant $\langle \phi(x - n), \tilde{\phi}(x - m) \rangle = \delta_{n,m}$.

On obtient exactement une analyse multirésolution biorthogonale (annexe A) dont la correspondance avec les opérateurs discrets est définie par le tableau III.1. Ceci donne la "bonne" définition des opérateurs E^j et G_j .

cas discret	D_j^{j-1}	P_j^{j-1}	E^j	G_j
cas continu	$\tilde{\phi}$	ϕ	$\tilde{\psi}$	ψ

TAB. III.1 – Lien entre les opérateurs continus d'une analyse multirésolution biorthogonale et les opérateurs discrets d'une analyse multirésolution généralisée

III.2.2.c Un premier exemple: discrétisation par valeurs ponctuelles

On construit V^j par l'échantillonnage d'une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ sur la grille dyadique X^j

$$\mathcal{D}_j : f \in C^0(\mathbb{R}) \longrightarrow f^j \in V^j \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f^j = (f(2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

On peut définir facilement une infinité de reconstruction $\mathcal{R}_{j-1}$ en utilisant des fonctions interpolants les points $(P_{j-1}^j (f^{j-1})_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dans le cadre des valeurs ponctuelles, la transformée $\mathcal{M}$ s'écrit

$$\begin{array}{lll} \text{décomposition} & f_n^{j-1} = f_{2n}^j & \text{et} \quad d_n^j = f_{2n+1}^j - (P_{j-1}^j f^{j-1})_{2n+1}, \\ \text{reconstruction} & f_{2n}^j = f_n^{j-1} & \text{et} \quad f_{2n+1}^j = (P_{j-1}^j f^{j-1})_{2n+1} + d_n^j. \end{array}$$

Pour un schéma de subdivision interpolant, il est alors possible de définir une décimation.

III.2.2.d Un deuxième exemple: discrétisation par valeurs moyennes

On construit V^j par les valeurs moyennes d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, sur les intervalles dyadiques $C^j = ([2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)])_{n \in \mathbb{Z}}$, ce qui correspond au choix $\tilde{\phi} = \chi_{[0,1]}$ et

$$\mathcal{D}_j : f \in L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \bar{f}^j \in V^j \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \bar{f}^j = \left(2^j \int_{c_n^j} f(x) dx \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

On a la relation suivante, entre valeurs ponctuelles et valeurs moyennes permettant de définir des reconstructions valeurs moyennes à partir de reconstructions valeurs ponctuelles [ADH99a, AD00].

Si F est une primitive de f et si on pose $F_n^j = F(2^{-j}n)$, on peut écrire

$$F_n^j = 2^{-j} \sum_{0 \leq k \leq n} \bar{f}_k^j + \text{const} \quad \text{et} \quad \bar{f}_n^j = 2^j (F_{n+1}^j - F_n^j). \quad (\text{III.7})$$

La dernière relation permet de définir une prédiction P_{j-1}^j pour $\bar{f}^{j-1}$ à partir d'une prédiction pour F^j .

La reconstruction des valeurs moyennes peut se définir par

$$\mathcal{R}_j(x, \bar{f}) = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}_j(x, F), \quad \text{la dérivée étant prise au sens faible.} \quad (\text{III.8})$$

Dans le cadre des valeurs moyennes, la transformée $\mathcal{M}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \text{décomposition} \quad \bar{f}_n^{j-1} &= \frac{1}{2}(\bar{f}_{2n}^j + \bar{f}_{2n+1}^j) \quad \text{et} \quad d_n^j = \bar{f}_{2n+1}^j - (P_{j-1}^j \bar{f}^{j-1})_{2n+1}, \\ \text{reconstruction} \quad \bar{f}_{2n+1}^j &= -\bar{f}_{2n}^j = P_{j-1}^j \bar{f}_{2n+1}^{j-1} + d_n^j. \end{aligned}$$

III.2.2.e Un troisième exemple: généralisation de la discrétisation par valeurs moyennes

En utilisant la méthode de l'exemple précédent, on peut généraliser la relation (III.8) à des discrétisations construites à partir de fonctions B-splines.

On obtient alors des relations liant $\bar{f}^j$ à F^j utilisant les opérateurs aux différences divisées. Une reconstruction corespondante est donc définie à partir des dérivées successives d'une reconstruction valeurs ponctuelles.

De plus pour des prédictions linéaires, les propriétés d'une analyse multirésolution valeurs ponctuelles sont valables pour l'analyse multirésolution valeurs moyennes ou B-splines associées [ADH99a].

III.2.3 Stabilité

Lorsqu'on seuille les détails pour compresser les données f^J , on veut contrôler la différence entre f^J et la reconstruction des données seuillés $\tilde{f}^J$, par le taux de seuillage. Ainsi, une qualité fondamentale demandée à l'analyse multirésolution est d'être stable au sens suivant

DÉFINITION III.3

On dit qu'une analyse multirésolution est stable si il existe C , C' et C'' tel que pour deux décompositions $\{f^0, d^1, \dots, d^l\}$ et $\{\tilde{f}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^l\}$ de f^l et $\tilde{f}^l$, on a

$$\|f^l - \tilde{f}^l\|_\infty \leq C(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{j=1}^l \|d^j - \tilde{d}^j\|_\infty) \quad (\text{III.9})$$

$$\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty \leq C' \|f^l - \tilde{f}^l\|_\infty \quad (\text{III.10})$$

$$\|d^j - \tilde{d}^j\|_\infty \leq C'' \|f^l - \tilde{f}^l\|_\infty \quad 1 \leq j \leq l-1 \quad (\text{III.11})$$

On remarque que dans le cas interpolant (on décompose la fonction $(S_{NL}^\infty f)$ où $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$) pour un schéma interpolant et convergeant, la stabilité de l'analyse multirésolution implique la stabilité du schéma de subdivision.

REMARQUE III.1

• Les équations (III.10) et (III.11) appellent les remarques suivantes.

L'équation (III.10) est vérifiée si l'opérateur de discrétisation s'écrit à partir de produits scalaires

III.3. Résultats de stabilité pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

avec une fonction B-spline $\tilde{\phi}$ (III.4) ou comme un opérateur d'échantillonnage (III.6).

En effet pour un opérateur d'échantillonnage (III.6), on a l'inclusion des espaces $V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^j$.

Pour $\tilde{\phi}$ une fonction B-spline, la relation d'échelle (III.5) donne,

$$\|f^{j-1} - \tilde{f}^{j-1}\|_\infty \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\alpha_m| \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty.$$

Or pour une fonction B-spline, les coefficients d'échelles sont positifs et vérifient $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m = 1$ (section I.3.2), ce qui donne

$$\|f^{j-1} - \tilde{f}^{j-1}\|_\infty \leq \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty.$$

• De plus, l'équation (III.11) découle directement de la définition des détails $d^j = f^j - S f^{j-1}$, si on utilise un schéma de subdivision borné pour définir la prédiction.

- Pour ces opérateurs de discrétisation, on obtient aussi pour des schémas linéaires la convergence du schéma linéaire implique la stabilité de l'analyse multirésolution associée.

III.3 Résultats de stabilité pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

Dans le cas non-linéaire, peu de travaux ont été faits pour démontrer la stabilité. On peut citer le travail de S. Amat et J. Liandrat [AL05] dans le cas des schémas S_{PPH} , et de B. Matei [Mat05] donnant des résultats généraux pour des schémas s'écrivant sous une forme quasi-linéaire. Dans la suite, on se placera dans le cadre d'une discrétisation par valeurs ponctuelles.

III.3.1 Résultat général

Dans cette partie, on travaille avec des analyses multirésolutions associées à la classe de schémas non-linéaire interpolants, définis par une perturbation d'un schéma linéaire (section II.3)

$$\begin{cases} (S_{NL}f)_{2n+1} = (Sf)_{2n+1} + F(\delta f)_{2n+1}, \\ (S_{NL}f)_{2n} = f_n, \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

avec S un schéma linéaire convergeant, F un opérateur non-linéaire défini sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ et δ un opérateur linéaire continue défini sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

On considère une analyse multirésolution associée à cette classe de schéma. On a alors le résultat suivant, concernant la stabilité de l'analyse multirésolution

THÉORÈME III.1

Soit S_{NL} un schéma non-linéaire s'écrivant sous la forme (III.12) avec S un schéma linéaire interpolant et convergeant.

Si S_{NL} , F et δ vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F(d_1) - F(d_2)\|_\infty \leq M \|d_1 - d_2\|_\infty, \quad (\text{III.13})$$

$$\exists c < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta(S_{NL}(f) - S_{NL}(g))\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty, \quad (\text{III.14})$$

alors l'analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire S_{NL} est stable.

On a déjà vu que, la stabilité de l'analyse multirésolution implique celle du schéma, si le schéma est convergeant.

Réciproquement, on remarque que

si un schéma S_{NL} vérifie les hypothèses de stabilité du théorème II.4 avec $L = 1$, alors l'analyse multirésolution associée est stable.

Preuve

D'après la remarque III.1, on s'intéresse à montrer l'inégalité (III.9) (définition III.3).

S étant un schéma interpolant, linéaire et convergeant, l'analyse multirésolution associée au schéma linéaire S est stable (remarque III.1). Donc l'équation (III.9) est vérifiée pour le schéma linéaire S .

Soit $C' > 0$ tel que

$$\|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \leq C' \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^j \|f^k - S(f^{k-1}) - \tilde{f}^k + S(\tilde{f}^{k-1})\|_\infty \right)$$

En écrivant $f^k - S(f^{k-1}) = f^k - S_{NL}(f^{k-1}) + F(\delta f^{k-1})$, on obtient

$$\|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \leq C' \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^j \|d^k + F(\delta f^{k-1}) - \tilde{d}^k - F(\delta \tilde{f}^{k-1})\|_\infty \right),$$

et avec l'hypothèse (III.13) pour F ,

$$\|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty \leq C' \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^j \|d^k - \tilde{d}^k\|_\infty + M \sum_{k=1}^j \|\delta(f^{k-1}) - \delta(\tilde{f}^{k-1})\|_\infty \right).$$

Pour le terme de droite, on redécompose en utilisant la linéarité de l'opérateur δ

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \|\delta(f^{k-1}) - \delta(\tilde{f}^{k-1})\|_\infty &\leq \|\delta(f^0) - \delta(\tilde{f}^0)\|_\infty \\ &\quad + \sum_{k=2}^j \left(\|\delta(S_{NL}f^{k-2}) - \delta(S_{NL}\tilde{f}^{k-2})\|_\infty + \|\delta d^{k-1} - \delta \tilde{d}^{k-1}\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse de contraction (III.14), on obtient par itération

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j \|\delta(f^{k-1}) - \delta(\tilde{f}^{k-1})\|_\infty &\leq \|\delta(f^0) - \delta(\tilde{f}^0)\|_\infty + \sum_{k=0}^{j-2} \left(c \|\delta(f^k) - \delta(\tilde{f}^k)\|_\infty + \|\delta d^{k+1} - \delta \tilde{d}^{k+1}\|_\infty \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-2} \left(c^k \|\delta f^0 - \delta \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{l=0}^k c^{k-l} \|\delta d^l - \delta \tilde{d}^l\|_\infty \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{j-2} \left(c^k \|\delta f^0 - \delta \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{l=0}^{j-2-k} c^l \|\delta d^{k+1} - \delta \tilde{d}^{k+1}\|_\infty \right). \end{aligned}$$

III.3. Résultats de stabilité pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

Par hypothèse $0 < c < 1$,

$$\begin{aligned} \|f^j - \tilde{f}^j\|_\infty &\leq C' \|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + C' \sum_{k=1}^j \|d^k - \tilde{d}^k\|_\infty \\ &\quad + MC' \frac{1}{1-c} \left(\|\delta(f^0) - \delta(\tilde{f}^0)\|_\infty + \sum_{k=1}^{j-1} \|\delta d^k - \delta \tilde{d}^k\|_\infty \right). \end{aligned}$$

L'équation (III.9) est vérifié pour la multirésolution associée à S_{NL} avec la constante

$$C = C' + \frac{MC' \|\delta\|_\infty}{1-c}.$$

□

Généralisation

Le point de départ du théorème III.1 étant la stabilité du schéma linéaire, il peut se généraliser aux cadres suivants

- (i) des analyses multirésolutions utilisant des schémas de subdivisions interpolant définis en base b quelconque (définition I.2),
- (ii) des schémas approximant pour lesquels on sait définir une décimation,
- (iii) à la notion de stabilité en norme l^p .

III.3.2 Cas d'une hypothèse de contraction (III.14) pour S_{NL}^L

Comme dans le cas des schémas de subdivision, on veut considérer une hypothèse plus faible que l'hypothèse de contraction (III.14) en considérant les itérations du schémas S_{NL}^j .

Mais contrairement aux schémas de subdivisions, l'analyse multirésolution n'autorise pas les itérations du schéma. On est alors obligé d'imposer une condition supplémentaire.

PROPOSITION III.1

On considère les hypothèses suivantes, en plus de l'hypothèse (III.13) sur F ,

$$\exists L \in \mathbb{N}, c < 1 \text{ tel que } \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta(S_{NL}^L(f) - S_{NL}^L(g))\|_\infty \leq c \|\delta(f - g)\|_\infty, \quad (\text{III.15})$$

$$\exists M_1 > 0 \text{ tel que } \forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad (\text{III.16})$$

$$\|\delta(S_{NL}(f_1 + f_2) - S_{NL}(g_1 + g_2))\|_\infty \leq \|\delta(S_{NL}(f_1) - S_{NL}(g_1))\|_\infty + M_1 \|\delta(S_{NL}(f_2) - S_{NL}(g_2))\|_\infty.$$

Sous ces trois hypothèses, l'analyse multirésolution associée à S_{NL} est stable.

Preuve

A partir de l'équation (III.22) de la preuve du théorème III.1, on écrit pour tout $0 \leq k \leq J-1$, en utilisant les hypothèses (III.15) et (III.16)

$$\begin{aligned} \|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty &\leq \|\delta(S_{NL}(S_{NL}f^{k-2} + d^{k-1}) - S_{NL}(S_{NL}\tilde{f}^{k-2} + \tilde{d}^{k-1}))\|_\infty + \|\delta(d^k - \tilde{d}^k)\|_\infty \\ &\leq \|\delta(S_{NL}^2 f^{k-2} - S_{NL}^2 \tilde{f}^{k-2})\|_\infty + M_1 \|d^{k-1} - \tilde{d}^{k-1}\|_\infty + \|d^k - \tilde{d}^k\|_\infty \\ &\leq c \|\delta(f^{k-L} - \tilde{f}^{k-L})\|_\infty + M_2 \sum_{r=0}^{L-1} \|d^{k-r} - \tilde{d}^{k-r}\|_\infty, \end{aligned}$$

avec $M_1 = \|S_{NL}\|_\infty \|\delta\|_\infty M_1$ et $M_2 = \max(1, M_1)$.

On note $k \equiv k_0[L]$. Par itération, on a

$$\|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty \leq c^{\frac{k-k_0}{L}} \|\delta(f^{k_0} - \tilde{f}^{k_0})\|_\infty + M_2 \sum_{q=0}^{\frac{k-k_0}{L}} \sum_{r=0}^{L-1} c^q \|d^{k-r-qL} - \tilde{d}^{k-r-qL}\|_\infty.$$

Par définition de la discrétisation, on a $\|f^l - \tilde{f}^l\|_\infty \leq \|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty$, pour $l \leq L$ (remarque III.1). Ce qui donne

$$\|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty \leq c^{-1} c^{\frac{k}{L}} \|\delta\|_\infty \|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty + M_2 \sum_{q=0}^{\frac{k-k_0}{L}} \sum_{r=0}^{L-1} c^q \|d^{k-r-qL} - \tilde{d}^{k-r-qL}\|_\infty.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{J-1} \|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty &\leq \frac{c^{-1}}{1 - c^{\frac{1}{L}}} \|\delta\|_\infty \|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty + \sum_{k=0}^L \|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty \\ &\quad + M_2 \sum_{k=L+1}^{J-1} \sum_{q=0}^{\frac{k-k_0}{L}} \sum_{r=0}^{L-1} c^q \|d^{k-r-qL} - \tilde{d}^{k-r-qL}\|_\infty \\ &\leq \left(L + \frac{c^{-1}}{1 - c^{\frac{1}{L}}} \right) \|\delta\|_\infty \|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty \\ &\quad + M_2 \sum_{k=L+1}^{J-1} \sum_{q=0}^{\frac{k-k_0}{L}} \sum_{r=0}^{L-1} c^q \|d^{k-r-qL} - \tilde{d}^{k-r-qL}\|_\infty. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Pour $\|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty$, on utilise l'hypothèse (III.13) sur F et la linéarité de S .

En notant $M_3 = \max\{(\|S\|_\infty + M\|\delta\|_\infty)^l, l = 0 \dots L-1\}$, on a

$$\|f^L - \tilde{f}^L\|_\infty \leq M_3 \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^L \|d^k - \tilde{d}^k\|_\infty \right).$$

Pour le second membre de (III.17), on échange les sommes ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{J-1} \|\delta(f^k - \tilde{f}^k)\|_\infty \leq \max \left(M_3 \|\delta\|_\infty \left(L + \frac{c^{-1}}{1 - c^{\frac{1}{L}}} \right), \frac{LM_2}{1 - c} \right) \left(\|f^0 - \tilde{f}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{J-1} \|d^k - \tilde{d}^k\|_\infty \right).$$

La suite est similaire à la preuve du théorème de stabilité III.1. □

REMARQUE III.2

Une autre condition suffisante, remplaçant les hypothèses (III.15) et (III.15), peut-être [ADL, HO]

$$\exists L \in \mathbb{N}, M > 0, c < 1 \text{ tel que } \forall f, \tilde{f} \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

$$\|\delta(S_{NL}^L(f) - S_{NL}^L(\tilde{f}))\|_\infty \leq c \|\delta(f - \tilde{f})\|_\infty + M \sum_{j=1}^L \|d^j - \tilde{d}^j\|,$$

où $(f^0, d^1, \dots, d^L)$ et $(\tilde{f}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^L)$ sont les analyses multirésolutions de f^L et $\tilde{f}^L$.

Cette hypothèse utilise l'analyse multirésolution par opposition aux hypothèses de la proposition III.1, qui font intervenir uniquement le schéma de subdivision.

A propos de S_{WENO_4} , S_{POWERP} et $S_{\text{PPHAPPROX}}$

Pour les schémas non-linéaires S_{WENO_4} et S_{POWERP} avec $p \geq 2$ étudiés dans le chapitre II, on a vu que la stabilité de ces schémas reste difficile à montrer (section II.5). La stabilité de l'analyse multirésolution impliquant celle du schéma de subdivision, il apparaît difficile de montrer la stabilité de l'analyse multirésolution associée à chacun de ces schémas.

Pour le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ dont on a prouvé la stabilité, on ne sait pas définir de décimation compatible, c'est-à-dire vérifiant la condition (iii) de la définition III.1 correspondante. La discrétisation paraît être non-linéaire donc difficile à déterminer.

III.4 Exemples d'analyses multirésolutions stables sur $l^\infty(\mathbb{Z})$

Dans la suite, on va étudier la stabilité de deux analyses multirésolutions interpolantes, dont l'une est adaptée à certaines courbes et l'autre est construite sur une grille triadique. Pour ces deux exemples, cette étude montrera aussi la stabilité des schémas de subdivisions considéré, sous la condition de convergence du schéma.

III.4.1 Un premier exemple: une analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire de M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05]

Les schémas développés par M. Marinov, N. Dyn et D. Levin [MDL05] consistent à éliminer les artéfacts de la fonction limite créés par le schéma interpolant 4 points (figure III.1), tout en gardant le caractère interpolant. Pour ce problème d'artéfacts, les schémas de [MDL05] sont plus performants que les schémas S_{POWERP} (section II.3).

III.4.1.a Construction du schéma

L'idée de [MDL05] est d'utiliser le schéma interpolant, 4 points (I.29), en faisant dépendre le paramètre w des données.

Parmi la classe de schémas définie, ils construisent de façon géométrique des schémas de subdivision qui préserve la convexité ou le comportement géométrique (concavité, convexité, zone d'inflexion) des données initiales.

La classe de schémas interpolants proposée s'écrit

$$(S_{gf})_{2n+1} = (f_n + f_{n+1})(w(f)_n + \frac{1}{2}) - w(f)_n(f_{n-1} + f_{n+2}) \quad \text{et} \quad w(f)_n = h(g(df)), \quad (\text{III.18})$$

avec

$$g(df) = \begin{cases} \frac{c}{w} \frac{|df_n|}{|df_{n+1} - df_{n-1}|} & \text{si } |df_{n+1} - df_{n-1}| \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(x) = \min(wx, w)$$

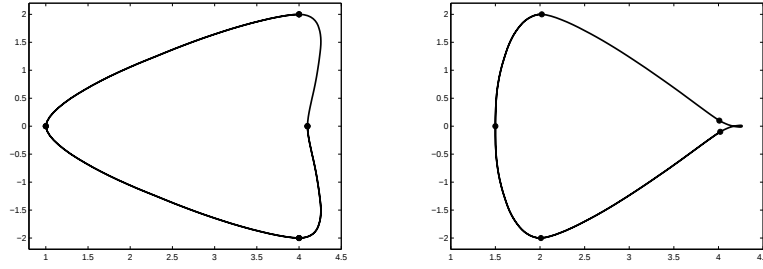
où

$$0 < c < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 < w < \frac{1}{8}. \quad (\text{III.19})$$

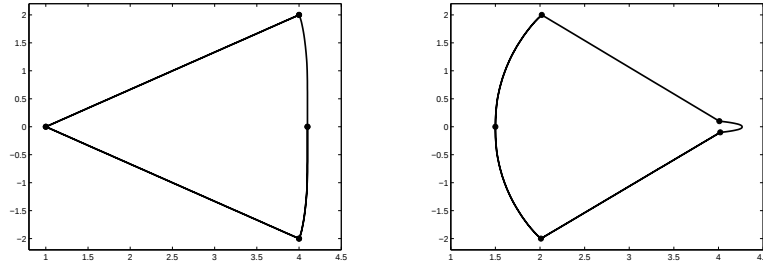
Ces schémas sont appelés des schémas géométriquement contrôlés. On les notera S_{GC} .

Pour être adapté aux changements de convexité, les fonctions h et g doivent vérifier les propriétés suivantes

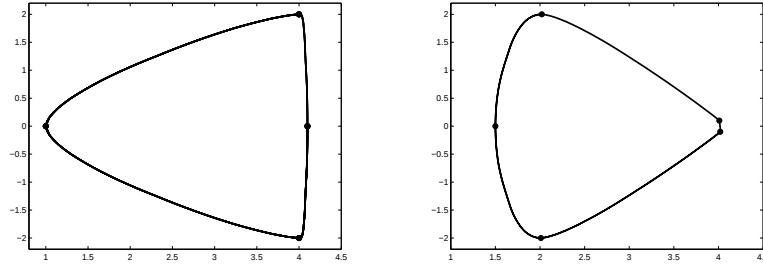
- (i) si $df_n = 0$ alors $w(f)_n = 0$,



(a) Schéma linéaire de Lagrange 4 points $S_{2,2}$ (b) Schéma linéaire de Lagrange 4 points $S_{2,2}$



(c) Schéma non-linéaire S_{PPH} (d) Schéma non-linéaire S_{PPH}



(e) Schéma non-linéaire géométrique-ment contrôlés de [MDL05] avec $w = \frac{1}{16}$ et $c = 0.25$ (f) Schéma non-linéaire géométrique-ment contrôlés de [MDL05] $w = \frac{1}{16}$ et $c = 0.25$

FIG. III.1 – Comparaison de 5 itérations de schémas utilisant 4 points pour construire une courbe à partir des points initiaux ($\bullet$).

- (ii) le schéma S_{gc} doit être sûr au sens où
il existe $0 < C < \frac{1}{2}$ tel que $\forall f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, si $|df_n| \neq 0$, on a $|w(f_n)(df_{n-1} - df_{n+1})| \leq C|df_n|$.

La dernière propriété implique notamment, que le point $(Sf)_{2n+1}$ reste proche des points f_n et f_{n+1} même si les points f_{n-1} et f_{n+2} sont très éloignés.

III.4.1.b Convergence

Pour montrer la convergence, M. Marinov, N. Dyn et D. Levin utilisent l'étude de D. Levin [Lev99] concernant les polynômes de Laurent pour des schémas non-uniformes (section II.2.2).

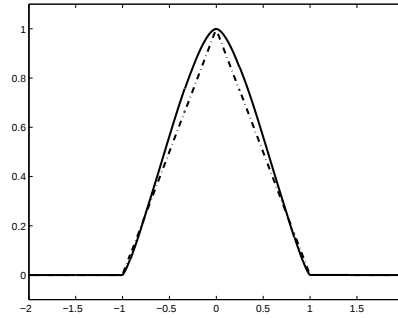
On a la propriété suivante

PROPOSITION III.2

Les schémas géométriquement contrôlés définis par (III.18) convergent vers une fonction limite C^1 .

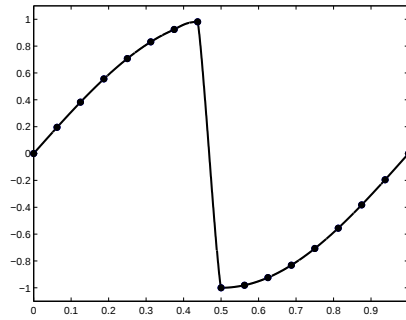
Expérience numérique

Sur les figures III.2 et III.3, on remarque que le schéma non-linéaire S_{GC} fait partie des schémas éliminant le phénomène de Gibbs. Il sera alors intéressant de l'utiliser dans la compression d'images (section III.6.3).

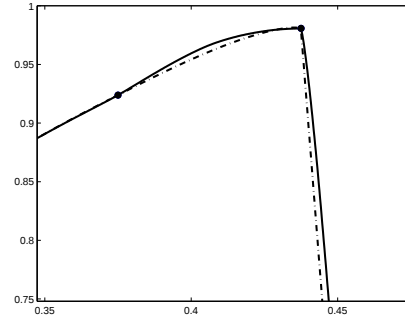


(a) Schéma S_{GC}

FIG. III.2 – Comparaison des fonctions limites des schémas S_{GC} (-) et S_{PPH} (- . -) pour les données initiales $f^0 = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$.



(a) Schéma S_{GC}



(b) zoom au voisinage de la discontinuité.

FIG. III.3 – Comparaison des fonctions limites des schémas S_{GC} (-) et S_{PPH} (- . -) pour les points initiaux ($\bullet$).

III.4.1.c Stabilité de l'analyse multirésolution

Ici, on se propose d'étudier la stabilité de l'analyse multirésolution associée au schéma S_{gc} ce qui impliquera la stabilité du schéma à cause de sa convergence.

Tout d'abord, on remarque que l'on peut réécrire les schémas S_{GC} (III.18) comme la perturbation d'un schéma linéaire (III.12)

$$(S_{gc}f)_{2n+1} = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + F(df)_{2n+1}, \quad (III.20)$$

avec le schéma linéaire $S_{1,1}$, l'opérateur linéaire $\delta = d$, les différences d'ordre 1, et l'opérateur non-linéaire F suivant

$$\begin{aligned} F(df)_{2n+1} &= w(df_{n-1} - df_{n+1}) \\ &= \min(c \frac{|df_n|}{|df_{n-1} - df_{n+1}|}, w)(df_{n-1} - df_{n+1}) \\ &= \text{sgn}(df_{n-1} - df_{n+1}) \min(c|df_n|, w|df_{n-1} - df_{n+1}|). \end{aligned}$$

On a $F(df)_{2n} = 0$ et

$$F(df)_{2n+1} = \begin{cases} -c|df_n| & \text{si } df_{n-1} < df_{n+1} \text{ et } c|df_n| < w|df_{n-1} - df_{n+1}| \\ c|df_n| & \text{si } df_{n-1} > df_{n+1} \text{ et } c|df_n| < w|df_{n-1} - df_{n+1}| \\ w(df_{n-1} - df_{n+1}) & \text{si } df_{n-1} \neq df_{n+1} \text{ et } c|df_n| > w|df_{n-1} - df_{n+1}| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (III.21)$$

Etant dans la cadre d'utilisation du théorème de stabilité III.1, on peut montrer que

THÉORÈME III.2

L'analyse multirésolution non-linéaire associée au schéma géométriquement contrôlé (III.20) est stable.

Preuve

Pour l'hypothèse (III.13) pour F , on doit considérer plusieurs cas, résumés dans le tableau suivant,

$$\begin{aligned} \text{cas 1: } & df_{n-1} < df_{n+1} \quad \text{et} \quad c|df_n| < w|df_{n-1} - df_{n+1}|, \\ \text{cas 2: } & df_{n-1} > df_{n+1} \quad \text{et} \quad c|df_n| < w|df_{n-1} - df_{n+1}|, \\ \text{cas 3: } & df_{n-1} \neq df_{n+1} \quad \text{et} \quad c|df_n| > w|df_{n-1} - df_{n+1}|, \\ \text{cas 4: } & df_{n-1} = df_{n+1}. \end{aligned}$$

f vérifie	g vérifie	notation	f vérifie	g vérifie	notation	f vérifie	g vérifie	notation
Cas 1	Cas 1	$1f - 1g$	Cas 2	Cas 2	$2f - 2g$	Cas 3	Cas 3	$3f - 3g$
	Cas 2	$1f - 2g$		Cas 3	$2f - 3g$		Cas 4	$3f - 4g$
	Cas 3	$1f - 3g$		Cas 4	$2f - 4g$			
	Cas 4	$1f - 4g$						

- Cas $1f - 1g$, la définition de F et la deuxième inégalité triangulaire donnent

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| &\leq |-c|df_n| + c|dg_n| \\ &\leq c\|df - dg\|_\infty. \end{aligned}$$

- Cas $1f - 2g$, on utilise la définition des cas 1-2

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| &\leq |-c|df_n| - c|dg_n| \\ &\leq w(|df_{n-1} - df_{n+1}| + |dg_{n-1} - dg_{n+1}|) \\ &\leq w(df_{n+1} - df_{n-1} - dg_{n+1} + dg_{n-1}) \\ &\leq 2w\|df - dg\|_\infty. \end{aligned}$$

- Cas $1f - 3g$, on a

$$|F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| \leq |-c|df_n| - w(dg_{n-1} - dg_{n+1})|.$$

On distingue 2 cas

si $dg_{n+1} - dg_{n-1} > 0$: avec la définition du cas 1, on obtient

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| &\leq c|df_n| + w(dg_{n-1} - dg_{n+1}) \\ &\leq w(df_{n+1} - df_{n-1}) + w(dg_{n-1} - dg_{n+1}) \\ &\leq 2w\|df - dg\|_\infty. \end{aligned}$$

si $dg_{n+1} - dg_{n-1} < 0$:

$$|F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| \leq |-c|df_n| + w|dg_{n-1} - dg_{n+1}|,$$

ce qui donne si $-c|df_n| + w|dg_{n-1} - dg_{n+1}| > 0$, avec la définition du cas 3,

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| &\leq -c|df_n| + c|dg_n|, \\ &\leq c|df_n - dg_n|, \end{aligned}$$

et si $-c|df_n| + w|dg_{n-1} - dg_{n+1}| < 0$, avec la définition du cas 1

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| &\leq c|df_n| - w(dg_{n-1} - dg_{n+1}) \\ &\leq w(df_{n+1} - df_{n-1}) - w(dg_{n-1} - dg_{n+1}), \end{aligned}$$

On obtient

$$|F(df)_{2n+1} - F(dg)_{2n+1}| \leq \max(c, 2w)\|df - dg\|_\infty.$$

- Cas $1f - 4g$

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(g)_{2n+1}| &\leq c|df_n| \\ &\leq w|df_{n-1} - df_{n+1}| \\ &\leq w|df_{n-1} - dg_{n-1} + dg_{n+1} - df_{n+1}| \\ &\leq 2w\|df - dg\|_\infty. \end{aligned}$$

- Cas $3f - 3g$

$$\begin{aligned} |F(df)_{2n+1} - F(g)_{2n+1}| &\leq w(|df_{n-1} - dg_{n-1}| + |df_{n+1} - dg_{n+1}|) \\ &\leq 2w\|df - dg\|_\infty. \end{aligned}$$

Par définition de F , les cas $2f - 2g$ et $2f - 3g$ sont identiques aux cas $1f - 1g$ et $1f - 3g$. Les cas $2f - 4g$ et $3f - 4g$ se traitent de façon similaire au cas $1f - 4g$. On a alors

$$\|F(df) - F(g)\|_\infty \leq \max(c, 2w)\|df - dg\|_\infty, \quad (\text{III.22})$$

l'hypothèse (III.13) pour F est ainsi vérifiée.

Pour l'hypothèse de contraction (III.14), on regarde

$$d(Sf - Sg)_{2n} = \frac{df_n}{2} + F(df)_{2n+1} - \frac{dg_n}{2} + F(dg)_{2n+1}. \quad (\text{III.23})$$

D'après l'équation (III.22), on obtient

$$|d(Sf - Sg)_{2n}| \leq \left(\frac{1}{2} + \max(c, 2w) \right) \|df - dg\|_\infty. \quad (\text{III.24})$$

Par définition de c et de w (III.20), on a bien $\frac{1}{2} + \max(c, 2w) < 1$ donc l'hypothèse de contraction (III.14) est vérifiée. $\square$

III.4.2 Un deuxième exemple: une analyse multirésolution associée à une classe de schéma non-linéaire définie en base 3

Dans cette partie, on se propose de définir un schéma non-linéaire défini en base 3, en utilisant une des constructions du schéma S_{PPH} .

On va voir qu'il est possible de montrer la stabilité du schéma et de l'analyse multirésolution associée, en ayant l'hypothèse de contraction (III.14) pour une itération du schéma, contrairement au cas dyadique [AL05].

L'avantage de ce type de schéma est d'une part, de pouvoir travailler avec d'autres types d'échantillonnages, et d'autre part, de faciliter les preuves théoriques [DY00, Osw04].

III.4.2.a Construction du schéma

Schéma linéaire de [HIDS02]

Pour définir ce schéma non-linéaire, on utilise le schéma linéaire, interpolant 4 points, de M.F Hassan, I.P Ivriissimitzis, N.A Dodgson et M.A Sabin [HIDS02] défini en base 3 par (section I.3.3)

$$\begin{aligned} (Sf)_{3n} &= f_n, \\ (Sf)_{3n+1} &= a_0 f_{n-1} + a_1 f_n + a_2 f_{n+1} + a_3 f_{n+2} \\ (Sf)_{3n+2} &= a_3 f_{n-1} + a_2 f_n + a_1 f_{n+1} + a_0 f_{n+2}, \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

avec

$$a_0 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{6}w, a_1 = \frac{13}{18} + \frac{1}{2}w, a_2 = -\frac{7}{18} - \frac{1}{2}w \text{ et } a_3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{6}w. \quad (\text{III.26})$$

La valeur $w = \frac{1}{27}$ correspond au schéma de Lagrange $S_{2,2}$ défini en base 3.

Dans [HIDS02], les auteurs montrent que

le schéma linéaire de [HIDS02] converge vers une fonction limite au moins C^2 sous la condition

$$\frac{1}{15} < w < \frac{1}{9}. \quad (\text{III.27})$$

Construction

Pour perturber le schéma linéaire de [HIDS02], on utilise une des méthodes, inspirée de la construction du schéma S_{PPH} qui consiste à modifier le point f_{n-1} ou f_{n+2} , selon où se trouve la discontinuité (section II.4.3).

On obtient le schéma non-linéaire, que l'on note S_{PPHTRIA} , défini par

si $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$, c'est-à-dire on perturbe f_{n-1}

$$(S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+1} = \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} + \frac{w}{3}f_{n+2} - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \quad (\text{III.28})$$

$$(S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_{n+1} - \frac{w}{3}f_{n+2} - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

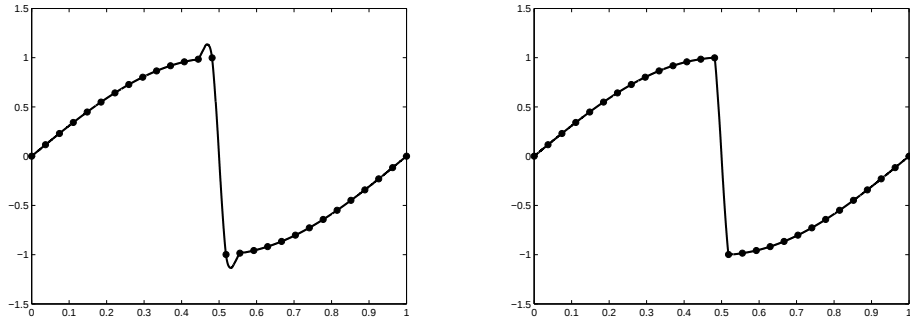
si $|d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}|$, on perturbe alors f_{n+2}

$$(S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+1} = -\frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2w}{3}\right)f_n + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_{n+1} - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})$$

$$(S_{\text{PPHTRIA}}f)_{3n+2} = \frac{w}{3}f_{n-1} + \left(\frac{1}{3} - \frac{w}{3}\right)f_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{w}{3}\right)f_{n+1} - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right)\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}),$$

avec $\text{PPH} = \text{POWER2}$ la moyenne harmonique définie par (II.30).

III.4.2.b Propriétés numériques du schémas



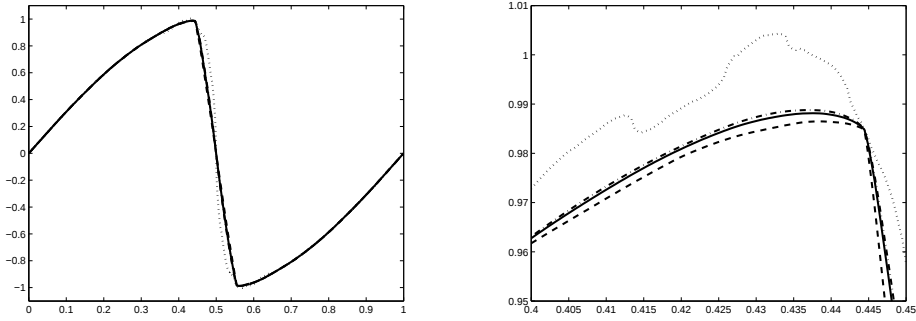
(a) Schéma linéaire triadique de [HIDS02] avec $w = \frac{1}{11}$ (b) Schéma non-linéaire S_{PPHTRIA} avec $w = \frac{1}{11}$

FIG. III.4 – Comparaison de 5 itérations d'un schéma linéaire et non-linéaire définis sur une grille triadique à partir des points initiaux (●).

On remarque que, comme dans le cas dyadique, le schéma S_{PPHTRIA} évite l'apparition d'un phénomène de Gibbs (figure III.4).

Sur la figure III.5, on voit que la valeur de w joue un rôle important pour le schéma de subdivision. Pour $w > \frac{1}{9}$, la fonction limite semble même discontinue.

Le cas $w = \frac{1}{27}$ correspond au cas S_{PPH} en base 3.



(a) Schéma non-linéaire triadique S_{PPHTRIA} (b) Schéma non-linéaire triadique S_{PPHTRIA} .
Zoom sur $(0.45, 0.5)$

FIG. III.5 – Comparaison des schémas non-linéaires S_{PPHTRIA} définie sur une grille triadique pour différentes valeurs de w . $w = \frac{1}{27}$ —, $w = \frac{1}{11}$ —, $w = \frac{1}{9}$ - . -, $w = \frac{1}{2}$...

III.4.2.c Convergence

Tout d'abord, le schéma S_{PPHTRIA} (III.28) s'écrit sous la forme d'un schéma linéaire et d'une perturbation. Pour tout $f \in l^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$S_{\text{PPHTRIA}}f = Sf + F(d^2f) \quad (\text{III.29})$$

avec

- S le schéma linéaire défini en base 3 par le masque $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
De façon analogue au schéma $S_{1,1}$, on peut montrer que ce schéma linéaire a une fonction limite C^{1-} (section I.3.2).
- F la fonction définie par $F(d^2f)_{3n} = f_n$,

$$F(d^2f)_{3n+1} = \begin{cases} \frac{w}{3}d^2f_{n+1} - (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|, \\ -\frac{w}{3}d^2f_n - (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|, \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

et

$$F(d^2f)_{3n+1} = \begin{cases} -\frac{w}{3}d^2f_{n+1} - (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|, \\ \frac{w}{3}d^2f_n - (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|. \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

On a alors le résultat suivant, en utilisant le théorème de convergence II.1

THÉORÈME III.3

Pour $0 \leq w < \frac{1}{9}$, le schéma S_{PPHTRIA} (III.28) converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta = -\log_3(\alpha)$ et $\alpha = \frac{1+2w}{3}$. En particulier, $0.738 < \beta \leq 1$.

Pour une preuve, voir annexe D.

III.4.2.d Stabilité de l'analyse multirésolution

On utilise la propriété suivante de la moyenne PPH

LEMME III.1

Si $|x_1| > |y_1|$ et $|x_2| < |y_2|$, alors $|x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))| \leq 2\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$.

Pour une preuve, voir annexe D.

On obtient la propriété de stabilité en utilisant le théorème III.1 qui donne aussi la stabilité du schéma S_{POWER} grâce à la convergence du schéma.

THÉORÈME III.4

L'analyse multirésolution associée au schéma S_{PPHTRIA} est stable.

Pour une preuve, voir annexe D.

III.5 Expériences Numériques 1d

III.5.1 Cadre des expériences 1d

Pour des tests numériques, on choisira des points f^J , définis sur une grille fine de pas 2^J , que l'on décomposera selon une analyse multirésolution en $(f^{J_0}, d^{J_0+1}, \dots, d^J)$.

On se placera dans le cadre suivant

- (i) l'opérateur de discrétisation est l'opérateur d'échantillonnage sur $[0,1]$ (*échantillonnage*),
- (ii) le seuil ne dépendant pas de l'échelle $\varepsilon = 10^{-3}$,
- (iii) les conditions aux bords de $[0,1]$ sont périodiques,
- (iv) sans technique d'"erreur control" [AD00, AACD02].

On notera $\tilde{d}^j$ les détails seuillés et nnz le nombre de détails non-nuls.

Pour comparer les différentes multirésolutions, on utilisera 3 types d'erreurs E_∞ , E_1 , E_2 définies par

$$E_\infty = \|f^J - \tilde{f}^J\|_\infty, \quad E_1 = 2^{-J} \sum_n |f_n^J - \tilde{f}_n^J| \quad \text{et} \quad E_2 = 2^{-J} \sum_n |f_n^J - \tilde{f}_n^J|^2,$$

où $\tilde{f}^J$ est la reconstruction à partir de la multirésolution $(f^{J_0}, \tilde{d}^{J_0+1}, \dots, \tilde{d}^J)$ avec $\tilde{d}^j$ les détails correspondant aux valeurs seuillés.

On utilisera trois fonctions (figure III.6) pour construire f^J , obtenu par échantillonnage

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ \sin(\frac{\pi}{4}x) & \text{si } x \neq a \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \leq a \\ \sin(\pi x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

et $f_3(x) = |\sin(2\pi(x - \frac{1}{2} + a))|.$

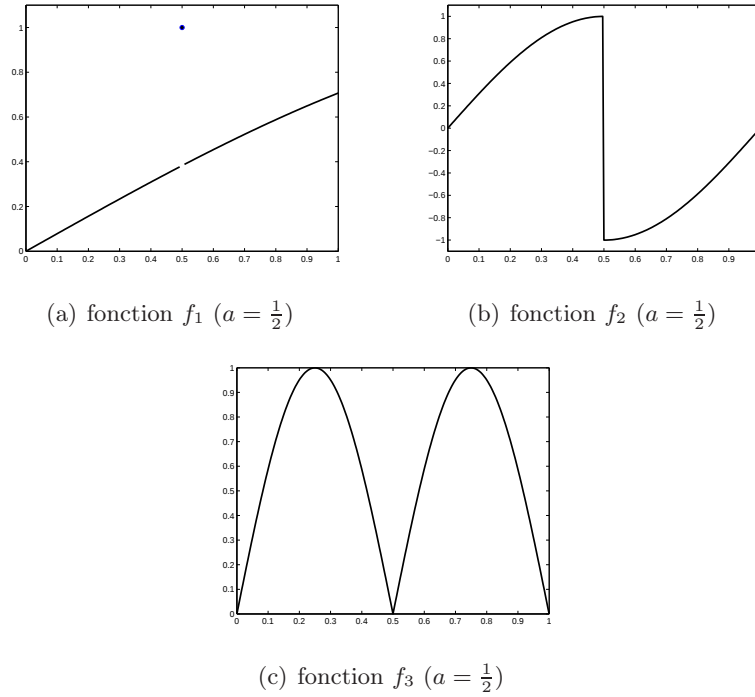


FIG. III.6 – Différentes fonctions utilisées pour comparer des analyses multirésolution sur $l^\infty(\mathbb{Z})$.

III.5.2 Expériences sur des grilles dyadiques

On utilise les schémas non-linéaires S_{PPH} et S_{GC} , dont on sait l'analyse multirésolution stable, que l'on compare au schéma linéaire de Lagrange $S_{2,2}$.

On utilise aussi les schémas non-linéaires S_{WENO} et S_{POWERP} qui présentent de bonnes qualités numériques (figures III.7, III.8 et III.9).

Sur les tableaux III.2-III.3-III.4, on remarque que l'analyse multirésolution associée au schéma S_{WENO_4} semble la plus performante aux niveaux des erreurs et du nombre de détails non-nuls, et cela pour tous les types de singularité. Mais, l'utilisation de 6 points pour la construction est désastreuse pour le temps de calcul et la propagation de l'erreur.

On remarque, aussi, que l'on peut améliorer sensiblement les erreurs du schéma S_{PPH} en utilisant le schéma S_{POWERP} , pour $p > 2$.

Enfin, le schéma S_{GC} semble avoir le même comportement que le schéma linéaire $S_{2,2}$, sauf dans le cas de la fonction de référence f_2 . L'analyse multirésolution associée à S_{GC} donne un bon compromis entre nombre de détails non-nuls et l'erreur d'approximation (tableau III.3).

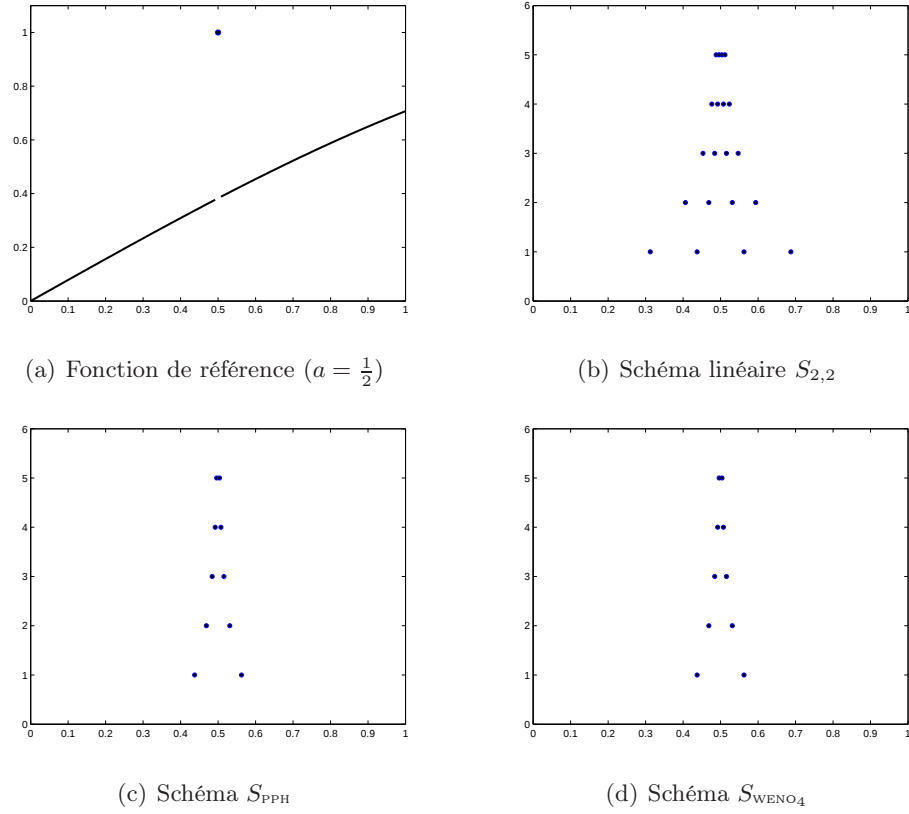
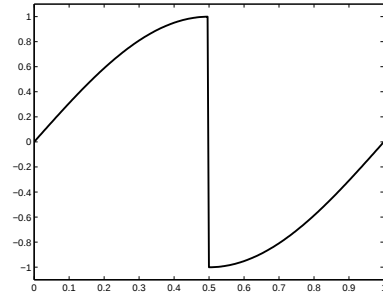
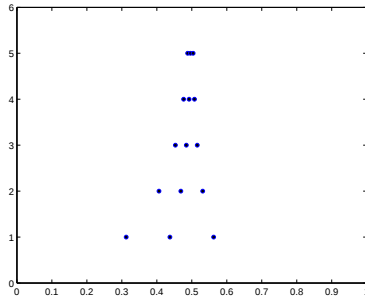
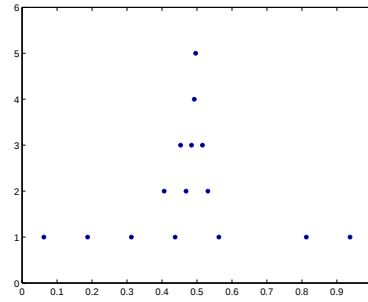
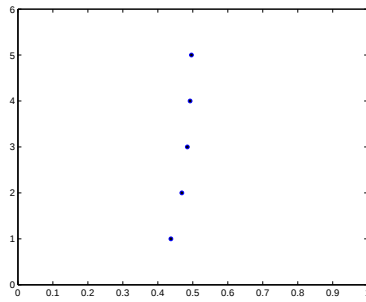
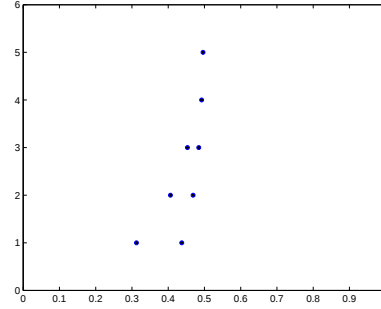


FIG. III.7 – Comparaison des détails des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} et S_{WENO_4} pour $J = 8$ et $J_0 = 3$.

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$	1.29×10^{-6}	1.29×10^{-7}	2.04×10^{-8}	20
non-linéaire S_{PPH}	6.19×10^{-4}	8.97×10^{-5}	1.12×10^{-5}	10
non-linéaire S_{POWER6}	6.19×10^{-4}	8.97×10^{-5}	1.12×10^{-5}	10
non-linéaire S_{WENO_4}	2.1×10^{-6}	3.62×10^{-7}	3.92×10^{-8}	10
non-linéaire S_{GC}	1.29×10^{-6}	1.29×10^{-7}	2.04×10^{-8}	20

TAB. III.2 – Comparaison des analyses multirésolutions pour $J = 8$ et $J_0 = 3$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour la fonction f_1 .

(a) Fonction de référence ($a = \frac{1}{2}$)(b) Schéma linéaire $S_{2,2}$ (c) Schéma S_{PPH} (d) Schéma S_{WENO4} (e) Schéma S_{GC} FIG. III.8 – Comparaison des détails des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 8$ et $J_0 = 3$.

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$	4.57×10^{-4}	7.94×10^{-5}	9.21×10^{-6}	15
non-linéaire S_{PPH}	7.31×10^{-4}	7.54×10^{-5}	1.12×10^{-5}	13
non-linéaire S_{POWER6}	4.57×10^{-4}	8.33×10^{-5}	9.54×10^{-6}	13
non-linéaire S_{WENO4}	8.83×10^{-4}	1.87×10^{-4}	1.83×10^{-5}	5
non-linéaire S_{GC}	6.13×10^{-4}	9.67×10^{-5}	1×10^{-5}	8

TAB. III.3 – Comparaison des analyses multirésolutions pour $J = 8$ et $J_0 = 3$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour la fonction f_2 .

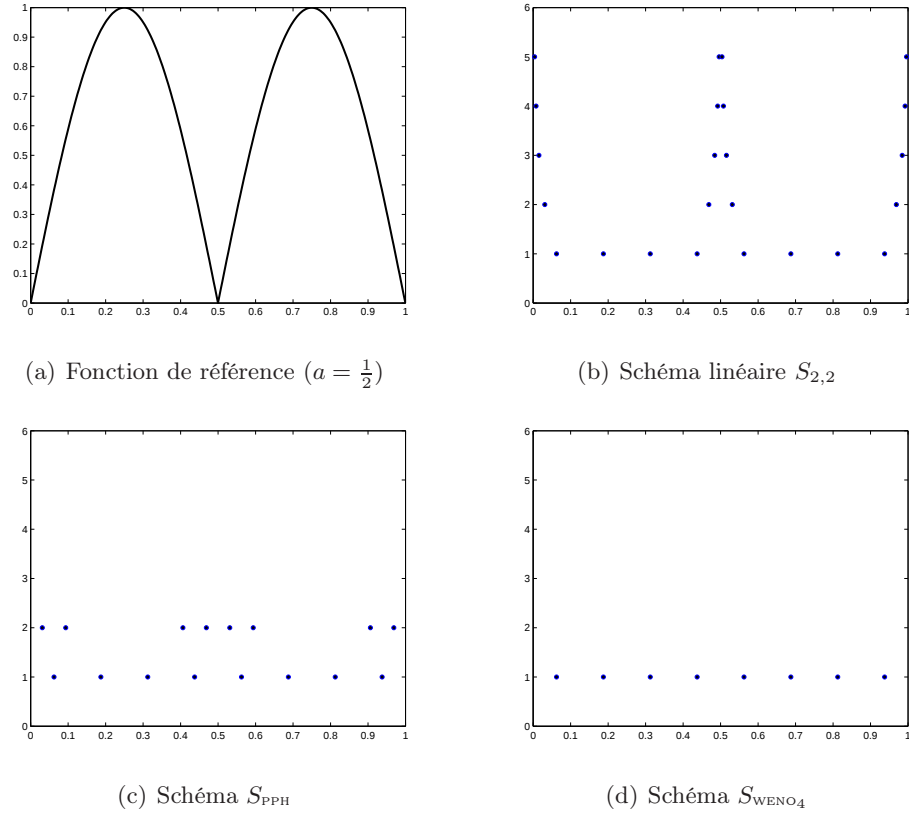


FIG. III.9 – Comparaison des détails des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} et S_{WENO4} pour $J = 8$ et $J_0 = 3$.

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$	5.4×10^{-4}	1.55×10^{-4}	1.46×10^{-5}	16
non-linéaire S_{PPH}	7.31×10^{-4}	2×10^{-4}	1.94×10^{-5}	14
non-linéaire S_{POWER6}	5.4×10^{-4}	1.75×10^{-4}	1.56×10^{-5}	10
non-linéaire S_{WENO4}	4.37×10^{-4}	7.54×10^{-5}	7.99×10^{-6}	10
non-linéaire S_{GC}	5.4×10^{-4}	1.55×10^{-4}	1.46×10^{-5}	16

TAB. III.4 – Comparaison des analyses multirésolutions pour $J = 8$ et $J_0 = 3$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour la fonction f_3 .

III.5.3 Expériences pour des courbes

On compare les analyses multirésolutions utilisant le schéma linéaire de Lagrange $S_{2,2}$, le schéma non-linéaire S_{PPH} et S_{GC} , appliqués à $2^8 + 1$ points des courbes de la figure III.10 (tableau III.6).

Dans le cas de points de la figure III.10.a, le schéma non-linéaire S_{GC} est bien adapté pour le nombre de détails non-nuls et l'erreur d'approximation. Par contre, dans le cas de points de la figure III.10.b, le schéma linéaire $S_{2,2}$ semble plus performante que les schémas non-linéaires utilisés. On peut noter que le schéma S_{PPH} donne un nombre de détails non-nuls très importants. Le schéma S_{GC} semble donc bien adapté pour l'analyse multirésolution.

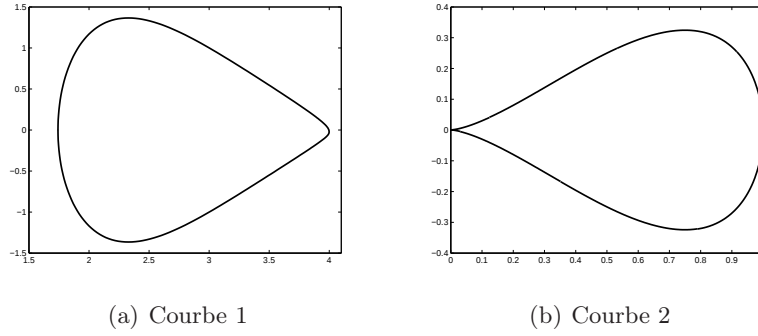


FIG. III.10 – Points utilisés pour comparer l'analyse multirésolution.

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$	0.001	0.152×10^{-3}	0.18×10^{-4}	35
non-linéaire S_{PPH}	0.9×10^{-3}	0.125×10^{-3}	0.127×10^{-4}	51
non-linéaire S_{GC}	0.001	0.145×10^{-3}	0.176×10^{-4}	35

TAB. III.5 – Comparaison d'analyses multirésolutions pour $J = 8$ et $J_0 = 3$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour les points de la courbe III.10.a.

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$	0.9×10^{-3}	0.19×10^{-3}	0.2×10^{-4}	22
non-linéaire S_{PPH}	0.96×10^{-3}	0.12×10^{-3}	0.15×10^{-4}	34
non-linéaire S_{GC}	0.9×10^{-3}	0.22×10^{-3}	0.23×10^{-4}	24

TAB. III.6 – Comparaison d'analyses multirésolutions pour $J = 8$ et $J_0 = 3$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour les points de la courbe III.10.b.

III.5.4 Expériences pour des grilles triadiques

L'analyse multirésolution associée au schéma S_{PPHTRIA} donne des résultats comparables au cas dyadique, à savoir une diminution du nombre du détail avec l'utilisation d'un schéma non-linéaire (figure III.11).

De plus, on voit que le choix de $w > \frac{1}{9}$ ne semble pas très bon pour l'analyse multirésolution. Par contre, $w = \frac{1}{27}$ est optimal pour l'ordre d'approximation mais pas pour le nombre de détails non-nuls (tableau III.7).

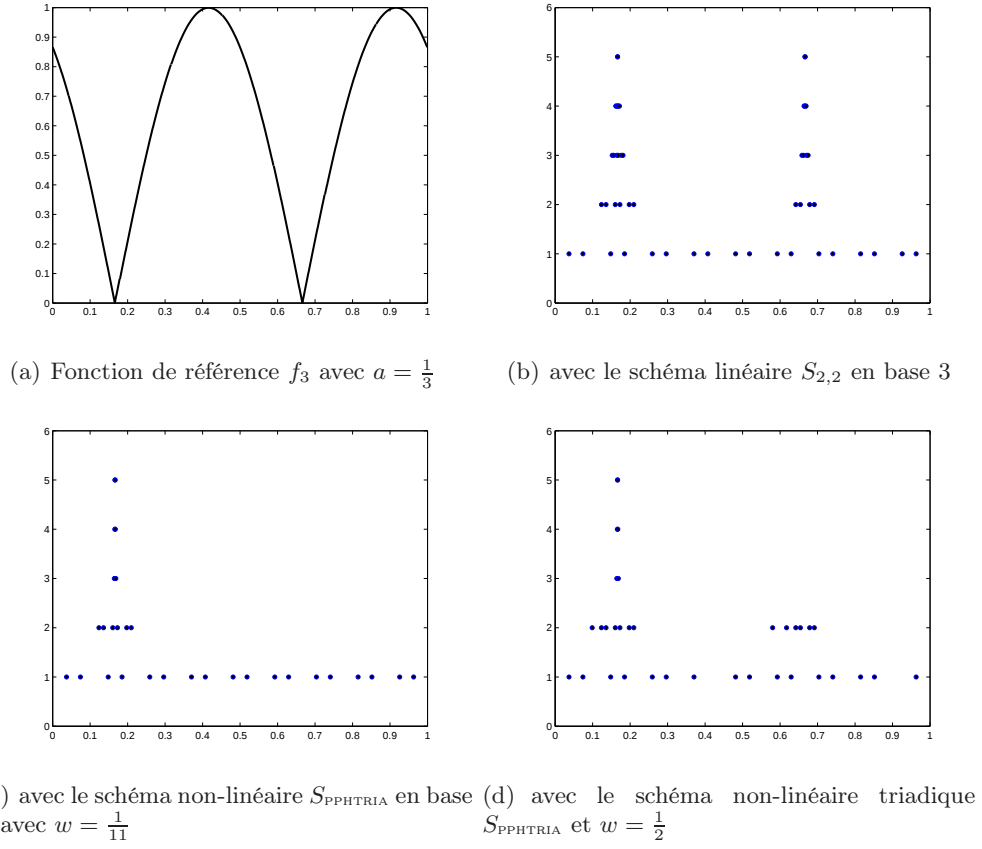


FIG. III.11 – Comparaison et représentation des détails pour des analyses multirésolutions utilisant différents schémas en base 3 et pour différentes valeurs de w .

	E_∞	E_1	E_2	nnz
linéaire $S_{2,2}$ en base $b = 3$	8.51×10^{-4}	1.92×10^{-5}	9.18×10^{-7}	67
non-linéaire S_{pphtria} avec $w = \frac{1}{27}$	8×10^{-4}	8.44×10^{-5}	3.37×10^{-6}	45
non-linéaire S_{pphtria} avec $w = \frac{1}{11}$	9.37×10^{-4}	1.16×10^{-4}	5.17×10^{-6}	43
non-linéaire S_{pphtria} avec $w = \frac{1}{2}$	1.2×10^{-3}	3.35×10^{-4}	8.06×10^{-6}	51

TAB. III.7 – Comparaison des analyses multirésolutions en base 3 pour $J = 7$ et $J_0 = 2$ avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ pour la fonction f_3 avec $a = \frac{1}{3}$.

III.6 Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

III.6.1 Résultats théoriques

Dans le cas linéaire et une analyse multirésolution ondelettes, l'extension en deux dimensions se fait au moyen de produit tensoriel. On définit la fonction d'échelle comme le produit tensoriel d'une fonction d'échelle définissant l'analyse multirésolution 1d. On peut voir qu'avec ce choix, on doit définir 3 types de détails (annexe A).

De même, dans le cas non-linéaire, on choisit l'opérateur de prédiction provenant d'un produit tensoriel d'un schéma de subdivision non-linéaire 1d (section II.5). L'étude des analyses multirésolutions non-linéaires multidimensionnelles est très pauvre. Citons les résultats généraux de B. Matei [Mat02] (proposition ??) qui sont extensibles au cas multidimension.

Dans cette partie, nous donnerons des conditions pour obtenir la stabilité d'une analyse multirésolution définie sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ par un produit tensoriel d'une analyse multirésolution 1d.

On suppose que l'analyse multirésolution 1d est stable et vérifie les hypothèses du théorème III.1. Comme dans le cas de la convergence (section II.5.1), on suppose aussi que l'hypothèse 1d de contraction (III.14) est vérifiée pour une seule itération du schéma ($L = 1$).

On considère une classe de schémas non-linéaires, interpolant définis sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ par

$$S_{NL2d}(f) = S_{2d}(f) + F_{2d}(\delta_{2d}f). \quad (\text{III.32})$$

On montre de façon similaire au théorème de stabilité 1d, le résultat de stabilité suivant

THÉORÈME III.5

Soit S_{2d} un schéma linéaire interpolant et convergeant.

Si S_{NL2d} , F_{2d} et δ_{2d} vérifient

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|F_{2d}(d_1) - F_{2d}(d_2)\|_\infty \leq M \|d_1 - d_2\|_\infty, \quad (\text{III.33})$$

$$\exists c < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall f, g \in l^\infty(\mathbb{Z}) \quad \|\delta_{2d}(S_{NL2d}(f) - S_{NL2d}(g))\|_\infty \leq c \|\delta_{2d}(f - g)\|_\infty \quad (\text{III.34})$$

alors l'analyse multirésolution associée au schéma non-linéaire S_{NL2d} définie par (III.32) est stable.

On a vu que l'on pouvait construire le schéma S_{NL2d} à partir du schéma S_{NL} de deux façons (section II.5)

de façon non-symétrique en appliquant le schéma sur chacune des directions (section II.5.3),
de façon symétrique en prenant la moyenne des deux constructions possibles aux points où elles donnent des valeurs différentes (section II.5.4).

Les hypothèses de stabilité du schéma et de l'analyse multirésolution étant identiques si l'on se restreint à une itération pour S_{NL2d} ($k = 1$), on utilise le corollaire II.1 pour établir les conditions de stabilité.

III.6. Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

PROPOSITION III.3

On note c et M les constantes du théorème 1d de stabilité III.1 et $\delta_m = \sup\{\sum_{r \text{ impair}} |a_r|, \sum_{r \text{ pair}} |a_r|\}$ où $\delta f = a \star f$,

alors l'analyse multirésolution utilisant le schéma S_{NL2d} est stable si

dans le cas où S_{NL2d} est défini par la construction par produit tensoriel (II.72),

$$\sup \{c + 2cM\delta_m, c + M\|\delta\|_1 + 2(M\delta_m)^2\} < 1, \quad (\text{III.35})$$

dans le cas où S_{NL2d} est défini de façon symétrique (II.85),

$$c + M\delta_m(M\delta_m + c + 1) < 1. \quad (\text{III.36})$$

III.6.2 Applications

On reprend les analyses multirésolution 1d étudiées dans la section III.4, et on étudie la stabilité des analyses multirésolution 2d correspondantes.

Dans les exemples étudiés, on a vu que la constante de contraction c obtenue est très proche de 1. Dans ce cas, la constante M de F doit alors être proche de 0 (figure II.19.a et II.20.a).

III.6.2.a Stabilité des schémas S_{gc} étendus à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

Dans le cas d'analyse multirésolution utilisant des schémas géométriquement contrôlés, on rappelle que (section III.4.1)

$$c_{contract} = \frac{1}{2} + \max(c, 2w), \quad M = \max(c, 2w) \quad \text{et} \quad \delta = d.$$

On obtient avec les équations de la proposition de stabilité III.3

PROPOSITION III.4

L'analyse multirésolution 2d utilisant

1. la construction par produit tensoriel (II.72), est stable si les constantes vérifient

$$\max(c, 2w) < 0.0414,$$

2. la construction symétrique (II.85), est stable si les constantes 1d vérifient

$$\max(c, 2w) < \frac{-5 + \sqrt{41}}{8} \approx 0.1754$$

III.6.2.b Stabilité des schémas $S_{PPHTRIA}$ étendus à $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

Dans le cas d'analyse multirésolution utilisant les schémas $S_{pphtria}$, on rappelle que

$$c = \frac{7}{9} + \frac{5w}{3}, \quad M = \frac{2}{9} + w \quad \text{et} \quad \delta = d^2.$$

Pour ces constantes, il est impossible de trouver des valeurs w vérifiant les équations de la proposition de la stabilité III.3.

III.6.3 Exemples numériques 2d

On utilise les analyses multirésolutions 2d associées aux schémas non-linéaires $S_{\text{WENO}2d}$, $S_{\text{PPH}2d}$ et $S_{\text{GC}2d}$. On veut les comparer au schéma linéaire $S_{2,2}$, dans le cadre de la compression des images.

Comme dans le cas 1d (section III.5), on effectue la décomposition $\mathcal{M}$, le seuillage T_ε et la reconstruction $\mathcal{M}^{-1}$.

Pour analyser la qualité d'approximation, on compare les erreurs E_∞ , E_1 , E_2 , le nombre de détails non-nuls nnz et le $psnr$, qui traduit la qualité de l'image et est défini par

$$psnr = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{E_2} \right).$$

On rappelle qu'un $psnr$ compris entre 35 et 45 correspond à une bonne qualité, 45 étant la meilleure.

Il s'agit d'observer (figure III.12)

- les contours de l'image pour les deux premières images,
- la qualité au niveau de la texture pour la troisième image,
- la variation importante de niveaux de gris pour la dernière image.

Premièrement, on remarque que tous les schémas non-linéaires améliorent nettement la qualité de l'analyse multirésolution.

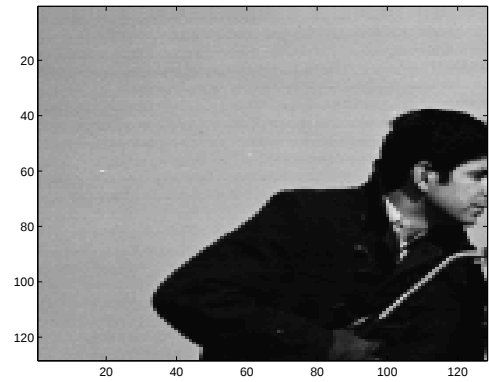
Pour les 4 images, le schéma S_{PPH} semble le meilleur compromis et le plus performant pour la qualité de l'image. On remarque que l'on peut améliorer le nombre de détails non-nuls en utilisant le schéma S_{POWER6} (tableau III.9-III.10).

Le schéma $S_{\text{WENO}4}$ semble performant pour l'erreur E_∞ , mais il présente des désavantages: des halos au niveau des contours (figure III.13), des zones de flous (figure III.16), un $psnr$ très bas (tableau III.10), un nombre de détails non-nuls importants (tableau III.10-III.11). On rappelle que dans le cas 1d, les résultats obtenus avec le schéma $S_{\text{WENO}4}$ étaient les meilleurs. On rappelle aussi, que la stabilité théorique n'étant pas prouvée, il est possible que le mauvais comportement 2d soit dû à des problèmes d'instabilité.

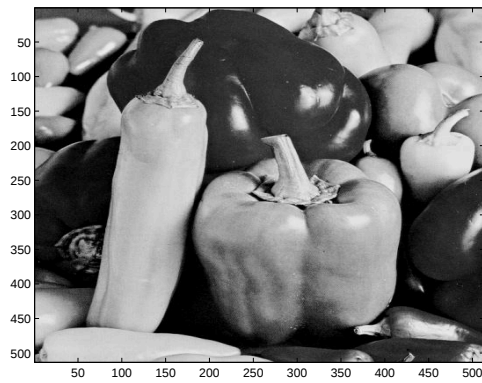
Enfin, le schéma S_{GC} donne les mêmes résultats que le schéma S_{PPH} , sauf pour la dernière image, pour laquelle le $psnr$ est trop faible ce qu'on observe aussi visuellement (tableau III.11 et figure III.16).



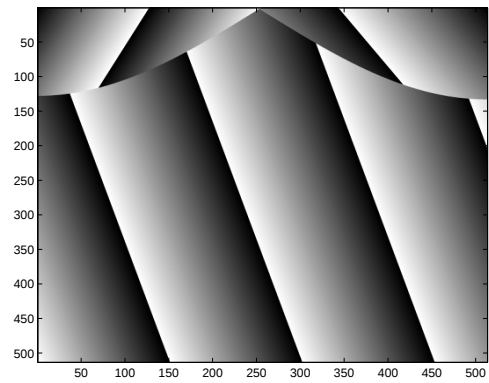
(a) Image de référence 1 (256×256)



(b) Image de référence 2 (128×128)



(c) Image de référence 3 (512×512)



(d) Image de référence 4

FIG. III.12 – *Images de références.*

(a) Schéma linéaire $S_{2,2}$ (b) Schéma S_{PPH} (c) Schéma S_{WENO4} (d) Schéma S_{GC}

FIG. III.13 – Comparaison des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 8$, $J_0 = 4$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 1.

	E_∞	E_1	E_2	nnz	$psnr$
linéaire $S_{2,2}$	24.95	3.14	18.7	5710	35.41
non-linéaire S_{PPH}	22.81	2.281	15.5	5401	36.22
non-linéaire S_{POWER6}	27.1	2.9	16.5	5413	35.95
non-linéaire S_{WENO4}	25.1	3.1	18.33	5401	35.48
non-linéaire S_{GC}	22.47	2.8	15.2	5400	36.316

TAB. III.8 – Comparaison des analyses multirésolutions 2d associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 8$, $J_0 = 4$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 1.

III.6. Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

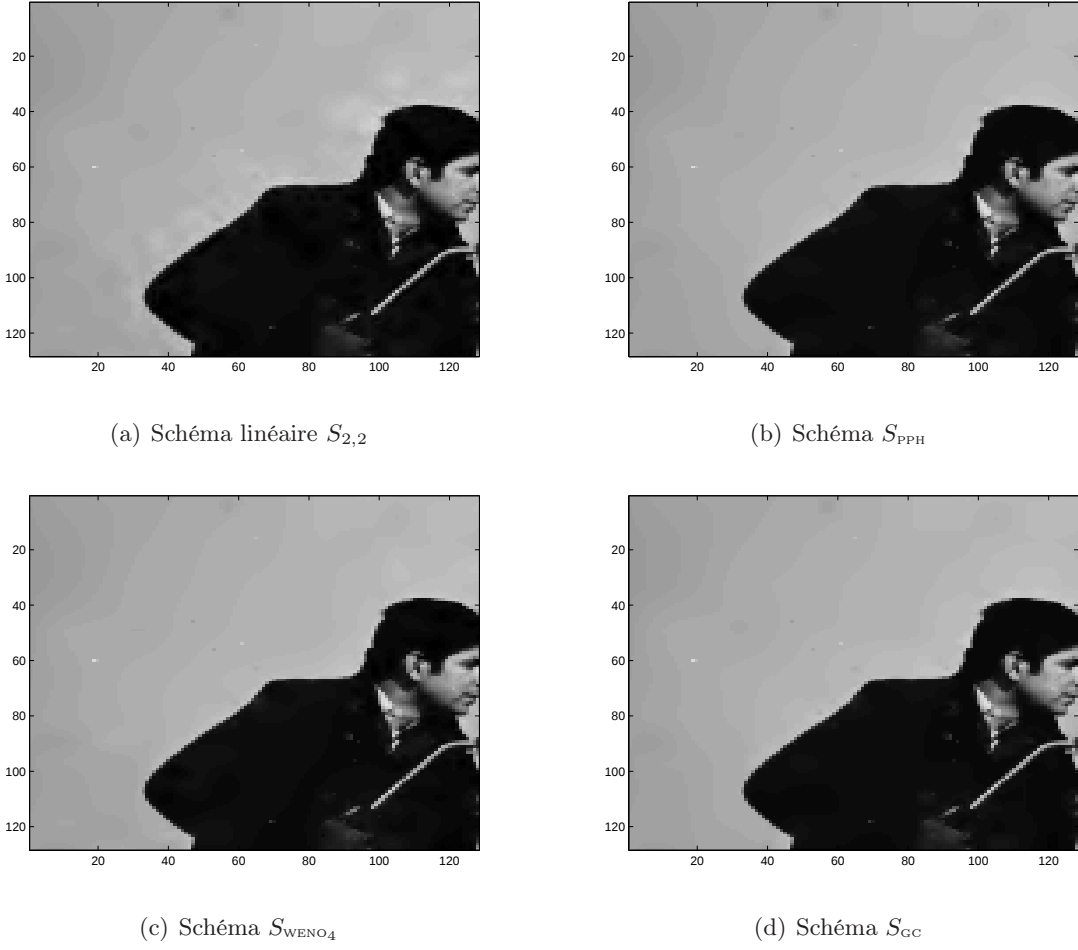


FIG. III.14 – Comparaison des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 8$, $J_0 = 4$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 2.

	E_∞	E_1	E_2	nnz	$psnr$
linéaire $S_{2,2}$	24.95	2.81	14.75	636	36.44
non-linéaire S_{PPH}	22.8	2.28	9.56	506	38.33
non-linéaire S_{POWER6}	27.1	2.75	10.15	503	38.06
non-linéaire S_{WENO4}	23.68	2.43	10.7	504	37.82
non-linéaire S_{GC}	22.47	2.32	9.75	506	38.24

TAB. III.9 – Comparaison des analyses multirésolutions 2d associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 8$, $J_0 = 4$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 2.

(a) Schéma linéaire $S_{2,2}$ (b) Schéma S_{PPH} (c) Schéma S_{WENO4} (d) Schéma S_{GC}

FIG. III.15 – Comparaison des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 9$, $J_0 = 5$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 3.

	E_∞	E_1	E_2	nnz	$psnr$
linéaire $S_{2,2}$	29.72	4.35	31.42	12117	33.16
non-linéaire S_{PPH}	29.16	4.1	28.26	11647	33.62
non-linéaire S_{POWER6}	29.85	4.2	29.45	11608	33.49
non-linéaire S_{WENO4}	27.25	4.37	31.9	11726	33.09
non-linéaire S_{GC}	29.67	4.1	28.51	11473	33.58

TAB. III.10 – Comparaison des analyses multirésolutions 2d associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 9$, $J_0 = 5$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 3.

III.6. Résultats pour des analyses multirésolutions non-linéaires sur $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$

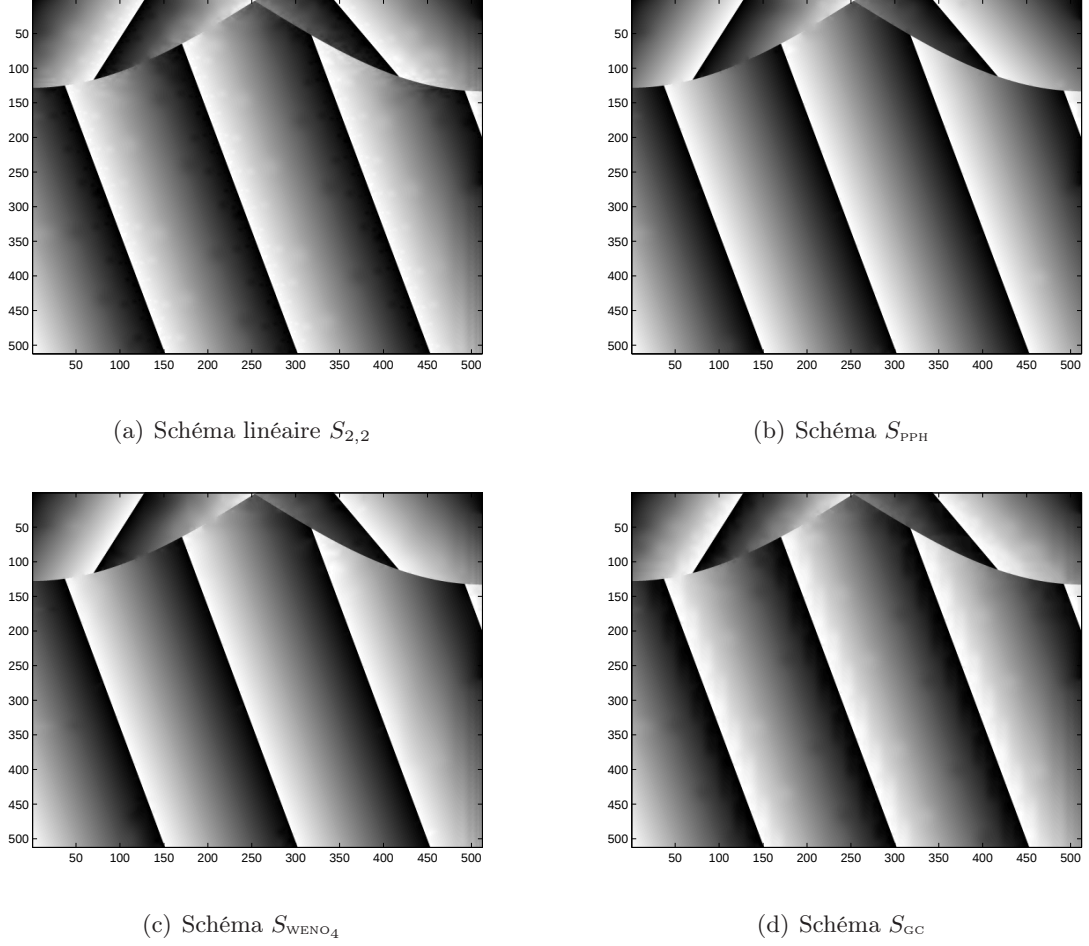


FIG. III.16 – Comparaison des analyses multirésolutions associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 9$, $J_0 = 5$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 4.

	E_∞	E_1	E_2	nnz	$psnr$
linéaire $S_{2,2}$	28.28	1.5	7.27	5165	39.51
non-linéaire S_{PPH}	28.03	0.5	2.12	3195	44.86
non-linéaire S_{POWER6}	28.17	0.62	2.18	3195	44.78
non-linéaire S_{WENO4}	27.92	0.96	3.76	3235	42.38
non-linéaire S_{GC}	28.3	1.9	8.9	3216	38.63

TAB. III.11 – Comparaison des analyses multirésolutions 2d associées aux schémas $S_{2,2}$, S_{PPH} , S_{WENO4} et S_{GC} pour $J = 9$, $J_0 = 5$, $\varepsilon = 10$ et l'image de référence 4.

III.7 Conclusion

Dans cette partie, on a développé un résultat de stabilité pour une analyse multirésolution utilisant la classe des schémas de subdivision définie dans le chapitre II. On a établi ce résultat pour des schémas $1d$ (théorème III.1) et des schémas $2d$ (proposition III.3). On a aussi appliqué le résultat $1d$ à deux exemples, dont un construit en base 3.

On a finalement vu que les schémas non-linéaires étudiés, améliorent considérablement les analyses multirésolutions, notamment pour la compression d'images où le nombre de détails non-nuls peut être divisé par 2 pour une même qualité (section III.6.3).

CHAPITRE IV

Couplage différences finies et schémas de subdivisions: premiers résultats

— oOo —

Ce chapitre est consacré à la construction de nouveaux opérateurs aux différences finies qui possèdent la propriété que sur une grille adaptée, l'erreur de consistance qui leur est associée est uniforme. Ces opérateurs sont construits en combinant le schéma de subdivision qui sert à construire la grille adaptée avec un opérateur classique aux différences finies.

— oOo —

Plan du chapitre

IV.1 Introduction	165
IV.2 Historique	165
IV.3 Construction de schémas différences finies couplés avec un schéma de subdivision linéaire	166
IV.3.1 Construction sur une grille uniforme	166
IV.3.1.a Construction	167
IV.3.1.b Longueur de NFD_p	168
IV.3.1.c Ordre de NFD_p	169
IV.3.1.d Observation numérique de l'erreur	172
IV.3.2 Application à une grille non-uniforme adaptée	176
IV.3.2.a Construction d'une grille adaptée	176
IV.3.2.b Construction de l'opérateur aux différences	176
IV.3.2.c Expériences numériques	177
IV.4 Vers l'utilisation de schémas de subdivision non-linéaires	181
IV.5 Conclusion	183

IV.1 Introduction

Les analyses multirésolutions ont été utilisées dans le cadre de l'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles suivant deux directions principales.

Dans la première direction, les espaces d'approximations, où l'on recherche la solution approchée et où l'on approche les opérateurs différentiels, sont générés par des bases multiéchelles (*ondelettes*). Les méthodes utilisées sont alors de type Galerkin, Petrov-Galerkin ou de collocations.

Dans la deuxième approche, les espaces d'approximation sont utilisés pour déclencher, à l'intérieur d'un schéma d'approximation classique, des améliorations locales ou des simplifications compte tenu de la décomposition multiéchelle obtenue.

Notre travail s'inscrit dans cette deuxième direction; il s'agit d'améliorer la performance de schémas aux différences finies quand on les applique à une grille non-régulière, réputée être adaptée à la solution du problème. On cherche en particulier à homogénéiser l'erreur sur toute la grille irrégulière.

Après un bref rappel sur les principaux travaux développés autour des couplages schémas aux différences finies/schémas de subdivision, nous donnerons une expression de nouveaux schémas issus d'un schéma aux différences finies et d'un schéma de subdivision. Nous expliciterons le support de ces nouveaux schémas, l'erreur d'approximation sur une grille régulière puis nous généraliserons à une grille non-régulière. Les cas de schémas de subdivisions linéaires et non-linéaires sont traités successivement.

IV.2 Historique

Dès les années 1990, A. Harten [Har93, Har94, BH95] propose d'utiliser l'analyse multirésolution d'une solution numérique pour accélérer la résolution d'équations hyperboliques, utilisant des schémas d'ordre élevé. Plus précisément, il propose d'utiliser les détails de la multirésolution de la solution numérique à chaque temps t pour détecter les zones de fort gradient, où il est important d'utiliser des schémas d'approximations des flux d'ordre élevé. Une fois ces calculs effectués, une interpolation est réalisée dans les autres zones, ce qui réalise une économie de calculs. L'analyse et l'implémentation en plusieurs dimensions des schémas correspondants ont été faits par B. Sjogreen [Sjo95], W. Dahmen, B. Gottschlich-Muller et S. Muller [DGMM98] ou par G. Chiavassa et R. Donat [CD01].

L'intérêt de cette approche est essentiellement d'accélérer le temps de calcul, sans introduire d'erreur spatiale supplémentaire car la grille la plus fine est utilisée. La seule erreur présente est une erreur d'interpolation. Cependant, on ne tire pas profit de la décomposition multirésolution effectuée; en effet, à chaque temps, on construit les flux numériques en tous les points de la grille fine.

Dans [CKMP02], A. Cohen, S. M. Kaber, S. Muller et M. Postel proposent une autre stratégie avec pour objectif de définir un schéma d'approximation des flux sur une grille adaptée. Pour chaque point de cette grille, le schéma d'approximation des flux est appliqué à l'échelle locale, en reconstruisant localement les points nécessaires. La seule erreur supplémentaire dépend du seuil de troncature des détails de la multirésolution.

Parallèlement à ces deux approches, Sonia. M. Gomez et B. Gustafasson [GG02] définissent un schéma aux différences finies à partir du schéma de subdivision, utilisé pour la construction de la grille. Ce schéma utilisant les fonctions limites du schéma de subdivision, coïncide sous certaines hypothèses sur la grille avec une méthode de collocation. Il est donc d'ordre constant mais, à cause du pas variable, ne reproduit pas une erreur locale d'ordre de grandeur constante.

Des contraintes sur la grille adaptée apparaissent et sont liées au support de la fonction limite.

Notre travail constitue encore une autre approche. Comme dans [Har93, CKMP02], le point de départ est un opérateur donné de type différences finies et une grille adaptée obtenue par un schéma de subdivision donné. L'objectif est ici, d'obtenir un ordre et une erreur homogène en tout point de la grille. Contrairement à [GG02], le schéma aux différences finies initial est quelconque et n'est pas lié au schéma de subdivision utilisé pour construire la grille adaptée.

IV.3 Construction de schémas différences finies couplés avec un schéma de subdivision linéaire

Le principe est de se servir du schéma de subdivision pour construire les points de la grille la plus fine, d'appliquer l'opérateur aux différences sur cette grille puis de redescendre sur la grille non-uniforme.

On va construire un opérateur aux différences permettant de réaliser cette opération directement sur la grille non-uniforme. Il s'agit d'un nouvel opérateur aux différences finies (NFD) qui dépend de l'opérateur initial (FD), du schéma de subdivision (S) et du nombre d'itérations (p) du schéma de subdivision séparant l'échelle locale grossière de l'échelle la plus fine.

Pour des schémas linéaires, on donne l'expression de l'opérateur NFD_p , la taille de son support, qui est indépendante de p et son ordre d'approximation, qui dépend du schéma de subdivision choisi.

IV.3.1 Construction sur une grille uniforme

On note X^j une grille régulière de pas 2^{-j} et f^j un échantillonnage d'une fonction $f \in C^r$ avec $r > 0$.

On note FD l'opérateur aux différences finies approchant les dérivées d'ordre r (de degré r), défini par la suite à support compact $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et s'écrivant

$$\forall j, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tilde{f}^j = FD(f^j) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_n^j = 2^{jr} \sum_m c_{n-m} f_m^j. \quad (\text{IV.1})$$

EXEMPLE IV.1

Si FD l'opérateur aux différences finies centré d'ordre 2 approximant $f^{(1)}$, la suite est défini par $c = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

On note S un schéma de subdivision linéaire, **interpolant** de masque a , et a^p le masque du schéma itéré S^p défini par le symbole (section I.4.1)

$$\hat{a}_p(\theta) = \prod_{j=0}^{p-1} \hat{a}(2^j \theta). \quad (\text{IV.2})$$

Dans le cas d'une grille régulière, le principe est décomposé en 3 étapes

1. on itère p fois le schéma S pour obtenir $S^p(f^j)$ une approximation de f sur la grille X^{j+p} , qui est appelé la grille "fine";
2. on applique l'opérateur aux différences FD sur la grille X^{j+p} ;
3. on extrait les valeurs obtenues sur la grille $X^j \subset X^{j+p}$.

On espère ainsi obtenir une erreur contrôlée par $2^{-(j+p)}$ en tout point de la grille X^j .

On note alors NFD_p , l'opérateur aux différences finies défini sur la grille $\mathbf{X}^j$ par

$$\forall j, p \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (NFD_p(f^j))_k = (FD(S^p(f^j)))_{2^p k}. \quad (\text{IV.3})$$

IV.3.1.a Construction

Le but est de construire une expression de l'opérateur NFD_p sur la grille X^j , permettant de réaliser l'opération décrite précédemment.

On obtient l'expression suivante

PROPOSITION IV.1

Le schéma aux différences NFD_p s'écrit $NFD_p(f^j)_n = 2^{jr} \sum_m c_{n-m}^p f_m^j$ où la suite $(c_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$$c_k^p = 2^{pr} \sum_{l=0}^{2^p-1} \left(c_{[2^p \cdot -l]} \star a_{[2^p \cdot +l]}^p \right)_k, \quad (\text{IV.4})$$

où $\star$ désigne la convolution de suites.

Preuve

On note $\bar{f}^j = NFD_p(f^j)$.

On va raisonner avec les polynômes trigonométriques associés à f^j , c et $\bar{f}^j$ (section I.4.1) que l'on définit par

$$\hat{c}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \quad \text{et} \quad \hat{f}^j(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^j e^{in\theta}.$$

Pour $p \leq 1$, on écrit avec la définition (IV.3)

$$\begin{aligned} \hat{\bar{f}}^j(\theta) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{f}_n^j e^{in\theta} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} FD(S^p f^j)_{2^p n} e^{in\theta} \\ &= 2^{(j+p)r} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^2} c_{2^p n - m} (S^p f^j)_m e^{in\theta}. \end{aligned}$$

On décompose $m = 2^p k + l$ avec $0 \leq l \leq 2^p - 1$, on a

$$\hat{\bar{f}}^j(\theta) = 2^{(j+p)r} \sum_{n, k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{l=0}^{2^p-1} c_{2^p(n-k)-l} (S^p f^j)_{2^p k + l} e^{in\theta},$$

avec

$$(S^p f)_{2^p n + l} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2^p(n-m)+l}^p f_m.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \hat{\bar{f}}^j(\theta) &= 2^{(j+p)r} \sum_{l=0}^{2^p-1} \sum_{n, k, m \in \mathbb{Z}^2} c_{2(n-k)-l} a_{2^p(n-m)+l}^p f_m^j e^{in\theta} \\ &= 2^{(j+p)r} \sum_{l=0}^{2^p-1} \widehat{c_{[2^p \cdot -l]}}(\theta) \widehat{a_{[2^p \cdot +l]}^p}(\theta) \hat{f}^j(\theta), \end{aligned}$$

p	$\text{card}(a^p)$	c^p
2	19	$(-\frac{5}{32}, \frac{21}{16}, 0, -\frac{21}{16}, \frac{5}{32})$
3	43	$(-\frac{21}{128}, \frac{85}{64}, 0, -\frac{85}{64}, \frac{21}{128})$
5	187	$(-\frac{341}{2048}, \frac{1365}{1024}, 0, -\frac{1365}{1024}, \frac{341}{2048})$

TAB. IV.1 – Exemple de différents schémas NFD_p construits à partir de $S_{2,2}$.

d'où

$$\widehat{c^p}(\theta) = 2^{pr} \sum_{l=0}^{2^p-1} \widehat{c_{[2^p.-l]}}(\theta) \widehat{a_{[2^p.+l]}^p}(\theta).$$

On peut remarquer que le schéma de subdivision S étant interpolant, on a $\widehat{c_{[2^p.]}}(\theta) \widehat{a_{[2^p.]}^p}(\theta) = \widehat{c_{[2^p.]}}(\theta)$. $\square$

EXEMPLE IV.2

On choisit le schéma de Lagrange centré $S_{2,2}$ défini par le masque $a = (-\frac{1}{16}, 0, \frac{9}{16}, 1, \frac{9}{16}, 0, -\frac{1}{16})$ et FD l'opérateur aux différences finies centré d'ordre 2 défini par $c = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

On calcule a^p et c^p à partir de l'expression (IV.4) (tableau IV.1).

On remarque que la longueur du support de NFD_p ne dépend pas de la taille de a^p , ni du nombre d'itérations p .

Un autre point intéressant est que pour un nombre d'itérations p important, l'opérateur NFD_p ne semble plus dépendre de l'opérateur initial. Les coefficients de l'opérateur tendent vers une suite constante.

IV.3.1.b Longueur de NFD_p

On notera $\text{card}(\text{supp}(a)) = \text{card}(a)$ pour $a \in l^1(\mathbb{Z})$ à support compact.

On a le résultat suivant

PROPOSITION IV.2

Pour $p \geq \log_2(\text{card}(c))$, le schéma aux différences finies NFD_p a un support de longueur

$$\text{card}(NFD_p) \leq \text{card}(a) - 2 \quad \text{avec} \quad \text{card}(a) \geq 2.$$

Preuve

On note $l_a = \text{card}(a)$ où a est le masque du schéma de subdivision et $l_c = \text{card}(c)$ où c est la suite définissant l'opérateur aux différences FD .

- On rappelle que pour a et b deux suites à support compact

$$\text{card}(a \star b) = \text{card}(a) + \text{card}(b) - 1.$$

- Pour la longueur de $\text{supp}(a^p)$, on note b^k la suite définie par le symbole $b^k(\theta) = a(2^k\theta)$ qui correspond à l'insertion de $2^k - 1$ zéros entre les coefficients de a . On obtient donc $\text{card}(b^k) =$

$$2^k(l_a - 1) + 1.$$

Par convolution et la définition de a^p (IV.2), on a

$$\text{card}(a^p) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k(l_a - 1) - (p - 1) = (2^p - 1)l_a - (2^p - 2).$$

Si $\text{supp}(a) = [-n_1, n_2]$, on a aussi $\text{supp}(a^p) = [-(2^p - 1)n_1, (2^p - 1)n_2]$.

• Pour la longueur de $\text{supp}(a_{[2^p, -1]}^p)$, on remarque que $\text{supp}(a_{[2^p, -1]}^p) \subset [\frac{-(2^p-1)n_1+1}{2^p}, \frac{(2^p-1)n_2+1}{2^p}]$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{card}(a_{[2^p, -1]}^p) &\leq \frac{(2^p - 1)l_a - (2^p - 2)}{2^p} \\ &\leq l_a - 1 - \frac{l_a - 2}{2^p} \\ &\leq l_a - 2. \end{aligned}$$

Par translation, on obtient le même résultat pour $\text{card}(a_{[2^p, -l]}^p)$ avec $1 \leq l \leq 2^p - 1$.

• Pour la longueur de $\text{supp}(c_{[2^p, .]})$, de même, on obtient en prenant en compte le coefficient d'indice nul,

$$\text{card}(c_{[2^p, .]}) \leq \max(1, \frac{l_c}{2^p}).$$

• Pour $p \geq \log_2(l_c)$, en utilisant le produit de convolution et l'expression de c^p (IV.4), on a

$$\text{card}(c^p) \leq l_a - 2.$$

□

Dans la suite, on notera les opérateurs aux différences de degré r , d^r , définis par

$$\forall f^j \in l^\infty(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (d^r f)_n = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{n - [\frac{r}{2}] + i}, \quad (\text{IV.5})$$

et qui sont tels que $2^{jr} d^r f$ approche la dérivée r -ième.

IV.3.1.c Ordre de NFD_p

On s'intéresse à l'ordre du schéma sur une grille régulière X^j .

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on suppose que l'opérateur FD approche $f^{(\mathbf{r})}$ et on note $\mathbf{o}_{fd}$ l'ordre de FD .

On note $\mathbf{o}_{ss}$, l'ordre d'approximation du schéma de subdivision (définition I.8).

On suppose que $\mathbf{o}_{ss} > r$.

Commençons par le lemme suivant

LEMME IV.1

Soit FD un opérateur linéaire aux différences finies approchant les dérivées de degré r , alors il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$ tel que FD s'écrit

$$\forall f^j, \quad FD(f^j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{n-k} 2^{jr} d^r f^j,$$

avec d^r l'opérateur aux différences de degré r défini par (IV.5).

Preuve

Soit P un polynôme de degré $k \leq r - 1$ défini par $P(x) = x^k$. L'opérateur FD approchant la dérivée de degré r , on a

$$\|FD(P^j)_n - P^{(r)}(2^{-j}n)\|_\infty = O(1),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \|FD(P^j)\|_\infty &\leq C \\ \|2^{jr} \sum_m c_{n-m} (2^j m)^k\|_\infty &\leq C \\ \|2^{j(r-k)} \sum_m c_{n-m} m^k\|_\infty &\leq C. \end{aligned}$$

Or $k \leq r - 1$,

$$\|\sum_m c_{n-m} m^k\|_\infty \leq 2^{-j} C.$$

En faisant tendre $j \rightarrow +\infty$, on obtient que, pour tout $k \leq r - 1$,

$$\sum_m c_{n-m} m^k = 0,$$

c'est-à-dire que l'opérateur $2^{-jr} FD$ s'annule sur les polynômes de degré au plus $r - 1$.

Par récurrence sur r , on peut voir que $2^{jr} FD$ s'écrit comme une somme d'opérateurs aux différences d'ordre r . □

On a alors le résultat suivant

PROPOSITION IV.3

Soit FD un opérateur aux différences finies d'ordre o_{fd} approchant les dérivées d'ordre r ,

Soit S un schéma linéaire avec un ordre d'approximation $o_{ss} > r$,

Si le schéma S est convergeant vers une fonction limite C^r , alors l'opérateur aux différences finies NFD_p vérifie, pour tout $f \in C^\infty([0,1])$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C \left(2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}} \right), \quad (\text{IV.6})$$

sinon,

$$\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C \left(2^{pr} 2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}} \right). \quad (\text{IV.7})$$

Preuve

• Dans tous les cas, en considérant l'ordre de l'opérateur FD , on a

$$\begin{aligned} \|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_{\infty, X^j} &\leq \|FD(S^p(f^j)) - (f^{(r)})^{j+p}\|_{\infty, X^{j+p}} \\ &\leq \|FD(S^p(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_{\infty, X^{j+p}} + \|FD(f^{j+p}) - (f^{(r)})^{j+p}\|_{\infty, X^{j+p}} \\ &\leq \|FD(S^p(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_{\infty, X^{j+p}} + C_1 2^{-(j+p)o_{fd}}, \end{aligned}$$

ce qui donne, avec l'ordre du schéma S et la linéarité de FD (IV.1),

$$\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_{\infty, X^j} \leq C_2 2^{(j+p)r} 2^{-j o_{ss}} + C_1 2^{-(j+p) o_{fd}}.$$

• On suppose le schéma S convergeant vers une fonction limite C^r et d'ordre $o_{ss} > r$.

A partir de l'équation (IV.8), on va calculer $\|FD(S^p(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_{\infty, X^{j+p}}$ en utilisant les propriétés du schéma et l'écriture de l'opérateur FD .

On note ϕ la fonction limite du schéma associée aux points initiaux $(\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$ (section I.2.2).

On applique le lemme IV.1 à l'opérateur FD . Il suffit d'estimer $\|2^{(j+p)r} d^r (S^p f^j - f^{j+p})\|_{\infty}$.

On suppose que $r = 1$.

Par hypothèse, le schéma S_1 aux différences d'ordre 1 existe et est défini par

$$2^{j+p} d S^p f^j = 2^p S_1^j (2^j d f^j).$$

De plus, la fonction d'échelle $\phi \in C^r$ donc le schéma S_1 vérifie les propriétés suivantes (théorème I.3)

- (i) $2S_1$ converge,
- (ii) $2S_1$ est stable (par linéarité),
- (iii) Pour tout polynôme $P \in \Pi_{o_{ss}-1}$, en notant $P_n^j = P(2^{-j}n)$, on a $2S_1(2^j d P^j) = 2^{j+1} d(S P^j) = 2^{j+1} d P^{j+1}$.

Pour $f \in C^\infty([0,1])$, on se place sur l'intervalle $C_n^j = [2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]$ et on note P le polynôme de Taylor de degré $o_{ss}-1$ au point $2^{-j}(n + \frac{1}{2})$.

On a sur les grilles X^j et X^{j+p} ,

$$\|2^j d(f^j - P^j)\|_{C_n^j} \leq C_1 2^{-j(o_{ss}-1)} \quad \text{et} \quad \|2^{j+p} d(f^{j+p} - P^{j+p})\|_{C_n^j} \leq C_2 2^{-(j+p)(o_{ss}-1)}. \quad (\text{IV.8})$$

On décompose sur l'intervalle C_n^j

$$\begin{aligned} \|2^{(j+p)} d(S^p f^j - f^{j+p})\|_{C_n^j} &\leq \|2^{(j+p)} d(S^p f^j - S^p P^j)\|_{C_n^j} + \|2^{(j+p)} d(P^{j+p} - S^p P^j)\|_{C_n^j} \\ &\quad + \|2^{(j+p)} d(P^{j+p} - f^{j+p})\|_{C_n^j} \\ &\leq \|2^j (2^p S_1^p(df^j) - 2^p S_1^p(dP^j))\|_{C_n^j} + \|2^j (2^p dP^{j+p} - 2^p S_1^p(dP^j))\|_{C_n^j} \\ &\quad + \|2^{(j+p)} d(P^{j+p} - f^{j+p})\|_{C_n^j}. \end{aligned}$$

Le premier membre se traite par stabilité de S_1 (ii), le deuxième par la propriété des polynômes (iii) et le troisième par les formules de Taylor (IV.8).

On obtient, pour tout n ,

$$\begin{aligned} \|2^{(j+p)} d(S^p f^j - f^{j+p})\|_{C_n^j} &\leq C_3 \|2^j d(P^j - f^j)\|_{C_n^j} + C_2 2^{-(j+p)(o_{ss}-1)} \\ &\leq C_4 2^{-j(o_{ss}-1)}, \end{aligned}$$

avec C_4 qui ne dépend pas de l'intervalle C_n^j ($f \in C^\infty([0,1])$); on obtient la majoration de $\|2^{(j+p)} d^1 (S^p f^j - f^{j+p})\|_{\infty}$.

De façon similaire, on obtient pour r quelconque,

$$\|2^{(j+p)r} d^r (S^p f^j - f^{j+p})\|_{\infty} \leq C 2^{-j(o_{ss}-r)},$$

ce qui donne le résultat. □

REMARQUE IV.1

La formule d'erreur (IV.6) s'interprète comme la somme d'une erreur liée à l'application de l'opérateur FD sur la grille X^{j+p} (terme $2^{-(j+p)o_{fd}}$), et d'une erreur due au schéma de subdivision (terme $2^{-j(o_{ss}-r)}$).

Ce dernier terme correspond à l'erreur $\|FD(S^p(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_\infty$ et peut se réécrire en utilisant le caractère interpolant du schéma S ,

$$\|FD(S^p(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_\infty = \|FD(S^\infty(f^j)) - FD(f^{j+p})\|_\infty.$$

La régularité de la fonction limite du schéma de subdivision intervient alors naturellement dans l'erreur de l'opérateur NFD_p . On verra notamment que le choix d'un schéma n'ayant pas une régularité suffisante, conduit à des résultats numériques pas très satisfaisants (section IV.3.1.d) On remarque aussi que le choix d'un schéma S tel que $o_{ss} = o_{fd} + r + \frac{p o_{fd}}{j}$, conduit à une erreur de l'ordre de $2^{-(j+p)o_{fd}}$, qui dans ce cas améliore l'erreur de l'opérateur FD .

Ainsi, pour j suffisamment grand,

- l'utilisation d'un schéma S dont
- ★ l'ordre vérifie $o_{ss} = o_{fd} + r$,
- ★ la fonction limite est C^r ,

permet de construire un opérateur NFD_p ayant la même erreur sur la grille X^j , que celle commise en utilisant l'opérateur FD sur la grille X^{j+p} .

Cette propriété est particulièrement intéressante pour l'utilisation à des grilles non-uniformes.

	Ordre	Schéma
FD	$o_{fd} = 1, r = 1$	$(1, -1)$
	$o_{fd} = 2, r = 1$	$(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$
	$o_{fd} = 4, r = 1$	$(-\frac{1}{12}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{12})$
	$o_{fd} = 2, r = 2$	$(1, -2, 1)$
	$o_{fd} = 4, r = 2$	$(-\frac{1}{12}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{12})$
S	$o_{ss} = 4$ (régularité C^{2-})	$(-\frac{1}{16}, 0, \frac{9}{16}, 1, \frac{9}{16}, 0, -\frac{1}{16})$
	$o_{ss} = 6$ (régularité $C^{2.8}$)	$(\frac{3}{256}, 0, -\frac{25}{256}, 0, \frac{150}{256}, 1, \frac{150}{256}, 0, -\frac{25}{256}, 0, \frac{3}{256})$

TAB. IV.2 – Opérateurs FD et schémas S utilisés dans les expériences numériques.

IV.3.1.d Observation numérique de l'erreur

Pour observer chaque terme de l'erreur $\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_{\infty, X^j}$ (IV.6), on choisit la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = (0.2\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(0.2)^2}\right).$$

On utilise les schémas numériques S et FD du tableau IV.2, définis selon le degré de la dérivée à approcher r , l'ordre du schéma de subdivision o_{ss} et l'ordre de l'opérateur aux différences finies o_{fd} .

IV.3. Construction de schémas différences finies couplés avec un schéma de subdivision linéaire

Pour observer $2^{-j(o_{ss}-r)} + 2^{-(j+p)o_{fd}}$

On fixe le nombre de niveau p , pour remonter de la grille X^j à la grille fine X^{j+p} .

On choisit $p = 8$ et on fait varier $5 \leq j \leq 12$.

- Sur la figure IV.1, on observe

$$\begin{aligned} & o_{ss} - r, \quad \text{si } j(o_{ss} - r) < (j + p)o_{fd}, \\ & o_{fd}, \quad \text{sinon,} \end{aligned}$$

ce qui explique que pour $o_{fd} = 1$, l'erreur obtenue avec NFD_p reste proche de l'erreur de l'opérateur FD (figures IV.1.a et IV.1.c).

- On observe aussi que

- l'opérateur NFD_p est nettement plus performant, si $\mathbf{j}(\mathbf{o}_{ss} - \mathbf{r}) < (\mathbf{j} + \mathbf{p})\mathbf{o}_{fd}$ et $\mathbf{o}_{fd} \leq \mathbf{o}_{ss} - \mathbf{r}$, (figures IV.1.b et IV.1.d).
- la régularité de la fonction limite du schéma de subdivision S intervient (proposition IV.3 et pour $r = 2$, figures IV.2.a et IV.2.b).

Par exemple, l'utilisation du schéma $S_{2,2}$, qui est seulement C^{2-} , donne de très mauvais résultats (figure IV.2.a et IV.2.b). Par contre, l'utilisation du schéma $S_{3,3}$, qui est $C^{2.8}$, améliore légèrement les erreurs et paraît plus judicieux (figure IV.2.c et IV.2.d). Tandis qu'en augmentant le nombre de points utilisés par le schéma de subdivision, donc la régularité du schéma, on améliore l'erreur de l'opérateur NFD_p (figure IV.2.e et IV.2.f).

La contrepartie est que l'opérateur aux différences NFD_p fait intervenir plus de points que l'opérateur FD .

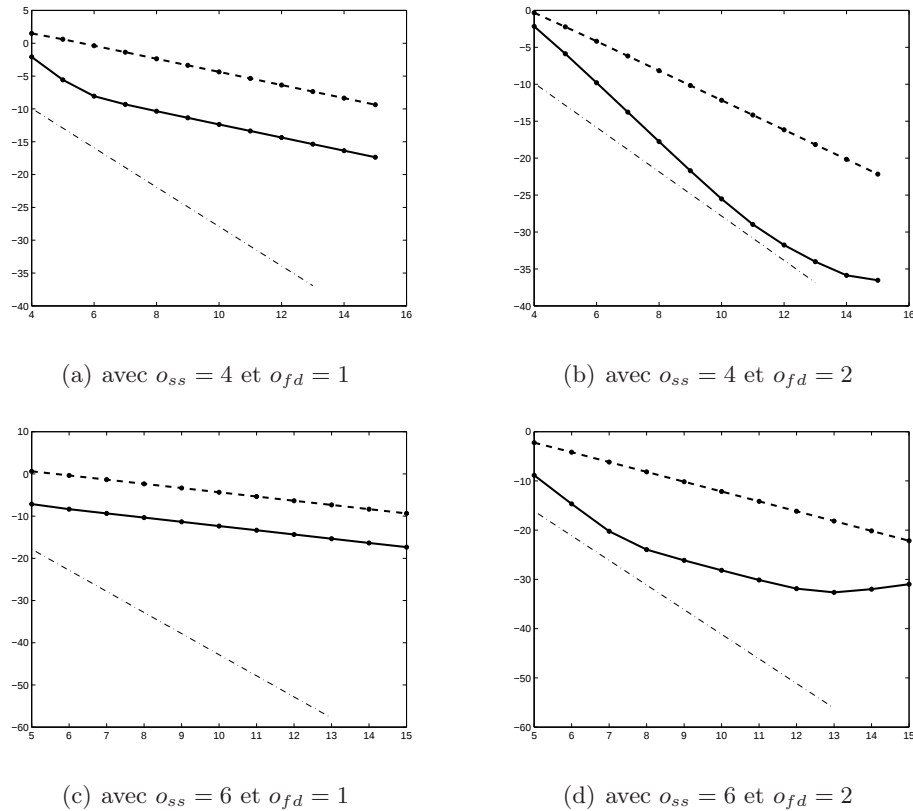


FIG. IV.1 – Erreurs $\|OP(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty$ pour $OP = NFD_p$ (-) et $OP = FD$ (- -), pour $f^{(1)}$, $p = 8$ et $4 \leq j \leq 12$. Comparaison avec la pente $o_{ss} - r$ (-.-).

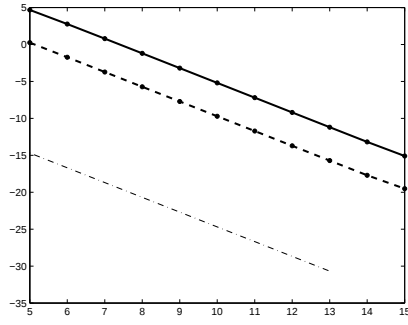
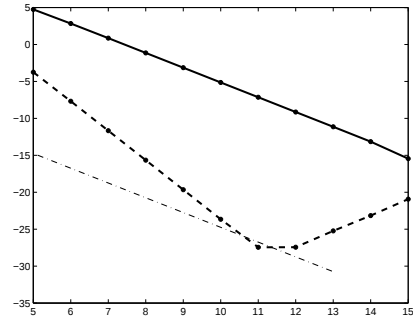
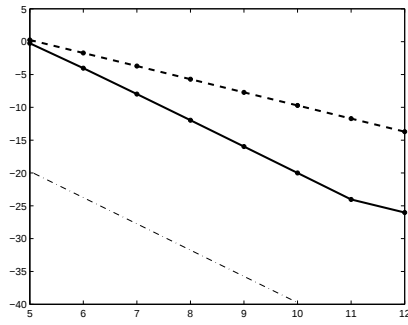
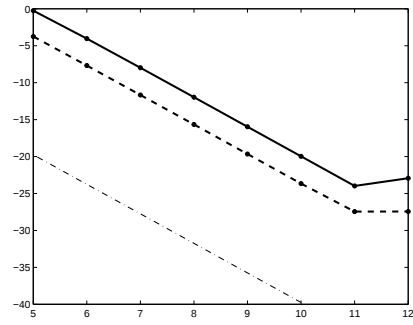
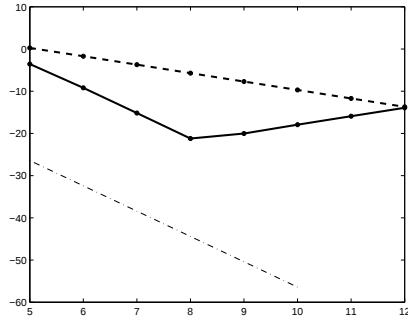
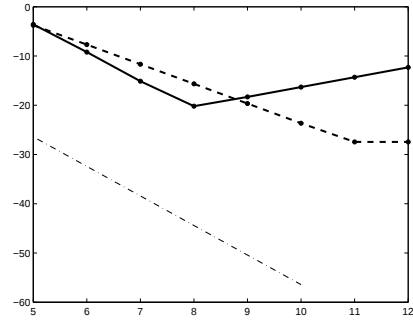
(a) avec $o_{ss} = 4$ et $o_{fd} = 2$ (b) avec $o_{ss} = 4$ et $o_{fd} = 4$ (c) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 2$ (d) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 4$ (e) avec $o_{ss} = 8$ et $o_{fd} = 2$ (f) avec $o_{ss} = 8$ et $o_{fd} = 4$

FIG. IV.2 – Erreurs $\|OP(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty$ pour $OP = NFD_p$ (-) et $OP = FD$ (- -), pour $f^{(2)}$, $p = 8$ et $4 \leq j \leq 12$. Comparaison avec la pente $o_{ss} - r$ (-.-).

IV.3. Construction de schémas différences finies couplés avec un schéma de subdivision linéaire

Pour observer $2^{-(j+p)o_{fd}}$

On fixe $j = 8$ et on fait varier $1 \leq p \leq 9$.

Pour $r = 1$, on retrouve l'ordre de l'opérateur FD (figures IV.3).

Pour $r = 2$, on observe qu'à partir de $p \geq \frac{o_{ss}-r-o_{fd}}{o_{fd}}j$, l'erreur ne dépend plus du niveau p (figure IV.4.a). En augmentant l'ordre du schéma de subdivision, on diminue le terme $2^{-j(o_{ss}-r)}$ et cela permet d'observer o_{fd} (figure IV.4.b).

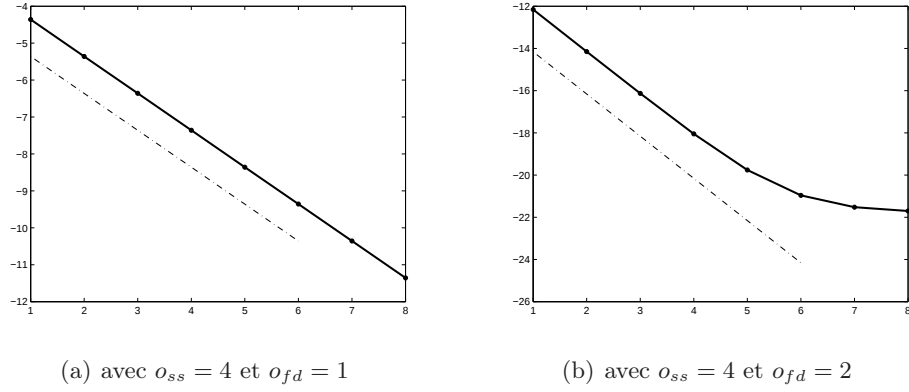


FIG. IV.3 – Erreur $\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty$ (-), pour $f^{(1)}$, $j = 9$ et $1 \leq p \leq 8$. Comparaison avec la pente o_{fd} (-.-).

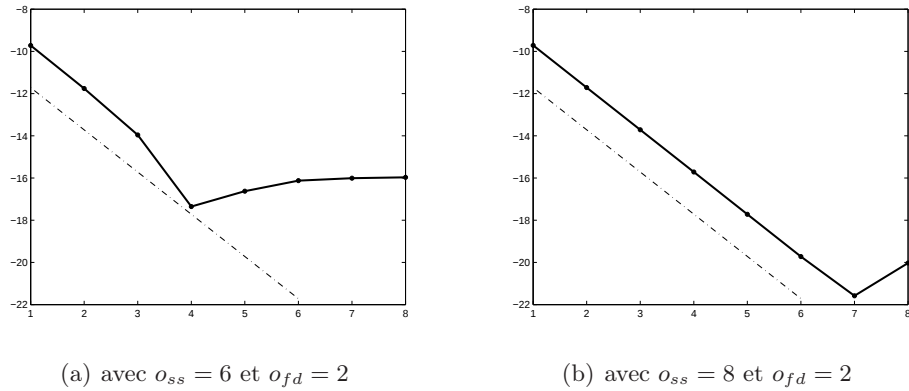


FIG. IV.4 – Erreur $\|NFD_p(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty$ (-), pour $f^{(2)}$, $j = 9$ et $1 \leq p \leq 8$. Comparaison avec la pente o_{fd} (-.-).

Pour construire l'opérateur aux différences NFD_p à partir d'un opérateur aux différences FD donné, on doit choisir en fonction de l'ordre du schéma FD , un schéma de subdivision S ayant

1. une fonction limite suffisamment régulière,
2. un ordre d'approximation assez important.

Sous ces deux conditions, on a vu que l'on améliore l'erreur du schéma aux différences.

IV.3.2 Application à une grille non-uniforme adaptée

IV.3.2.a Construction d'une grille adaptée

A partir d'une donnée $(f_n^J)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur une grille uniforme X^J , on construit une grille adaptée $\tilde{X}^J$ pour f^J en considérant la multirésolution $\mathcal{M}f^J = (f^{J_0}, d^{J_0+1}, \dots, d^J)$ (section III.2).

On procède de la façon suivante, ayant choisi un seuil ε ,

1. On garde les indices et les coefficients vérifiant $|d_n^j| > 2^{J_0-j}\varepsilon$ pour $J_0 \leq j \leq J$ c'est-à-dire

$$\text{si } |d_n^j| > 2^{J_0-j}\varepsilon \text{ alors } 2^{-j}n \in \tilde{X}^J.$$

2. On impose une structure en arbre [CKMP02] (chaque fils de l'arbre a ses deux parents) c'est-à-dire

$$\text{si } |d_n^j| > 2^{J_0-j}\varepsilon \text{ alors } (2^{-j}(n-1), 2^{-j}(n+1)) \subset \tilde{X}^J.$$

IV.3.2.b Construction de l'opérateur aux différences

Pour $x \in \tilde{X}^J$, on définit l'échelle locale de x comme la distance au point le plus proche c'est-à-dire

DÉFINITION IV.1

j l'échelle locale de $x \in \tilde{X}^J$ est définie par

$$j = \max(l \text{ tel que } \exists x_1 \in \tilde{X}^J \text{ et } |x - x_1| = 2^{-l}).$$

A cette échelle, on applique l'opérateur aux différences, quitte à construire les points n'appartenant pas à la grille adaptée $\tilde{X}^J$ au moyen d'un schéma de subdivision.

On va comparer l'utilisation de l'opérateur aux différences finies FD et l'opérateur NFD_{J-j} .

Pour un schéma de subdivision convenablement choisi (proposition IV.3), l'équation d'erreur (IV.6) reste valable pour l'opérateur NFD_{J-j} où j est l'échelle locale du point, et donné sur la grille adaptée $\tilde{X}^J$

$$\forall J_0 \leq j \leq J, \quad \|NFD(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C \left(2^{-J_0(o_{ss}-r)} + 2^{-J_0 o_{fd}} \right), \quad (\text{IV.9})$$

et pour l'opérateur FD

$$\forall J_0 \leq j \leq J, \quad \|FD(f^j) - (f^{(r)})^j\|_\infty \leq C 2^{-J_0 o_{fd}}. \quad (\text{IV.10})$$

Pour un schéma de subdivision vérifiant $o_{ss} = \frac{J}{J_0} o_{fd} + r$, on obtient une erreur uniforme pour l'opérateur aux différences NFD_{J-j} .

IV.3.2.c Expériences numériques

On considère la fonction

$$f(x) = \tanh(-15 + 30x),$$

présentant une zone de fort gradient pour $x = 0.5$.

On construit une grille adaptée de niveau le plus fin $J = 9$ et le plus grossier $J_0 = 5$ en utilisant le schéma de subdivision $S_{2,2}$, $S_{3,3}$ ou $S_{4,4}$ et un seuil ε , dépendant du schéma utilisé (figures IV.5).

Dans la lignée de [CKMP02], le schéma de subdivision utilisé pour construire la grille adaptée, sera utilisée pour construire l'opérateur NFD_{J-j} .

On fait les test numériques suivants.

- Sur les figures IV.6-IV.7, on compare *l'erreur locale des opérateurs NFD_{9-j} et FD sur la grille adaptée* des figures IV.5.

Pour le choix d'un schéma de subdivision vérifiant $o_{ss} \geq \frac{J}{J_0} o_{fd} + r$ et les propriétés citées dans la section IV.3.1.d, on gagne en erreur par rapport à l'utilisation de l'opérateur classique FD . On peut remarquer que cette condition est essentielle pour obtenir une erreur uniforme. Par exemple, pour $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 4$, cette condition n'est plus vérifiée pour approcher $f^{(2)}$ (figure IV.7.c).

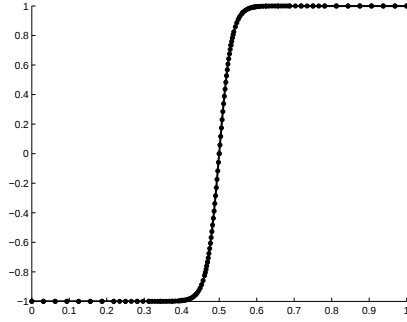
Comme dans le cas uniforme, l'augmentation de l'ordre d'approximation du schéma S fait gagner en précision, aussi bien pour $f^{(1)}$ (figure IV.6.e) que pour $f^{(2)}$ (figure IV.7.e).

- Un autre test numérique est de regarder *l'erreur entre l'opérateur NFD sur la grille adaptée $\tilde{X}^J$ et FD sur la grille fine X^J* (tableau IV.3-IV.4). On obtient une erreur que l'on peut comparer au seuil ε , qui dépend du schéma de subdivision utilisé. Un fois de plus, l'ordre du schéma de subdivision joue un rôle important. Par exemple, pour approcher $f^{(1)}$ en utilisant un opérateur FD vérifiant $o_{fd} = 2$, l'utilisation du schéma de subdivision $S_{4,4}$ donnera une erreur $\|NFD - FD_J\|_{\infty, \tilde{X}^J}$ de l'ordre de $\varepsilon = 10^{(-7)}$ (tableau IV.3)

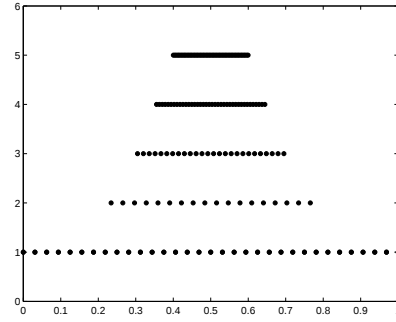
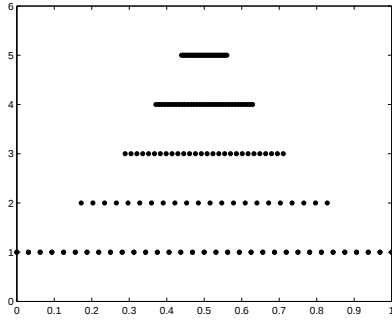
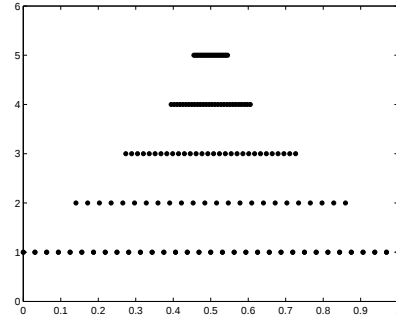
Pour que l'opérateur soit performant, la construction de NFD sur une grille adaptée requiert un schéma de subdivision vérifiant:

- la fonction limite de ϕ est C^r ,
- la condition $o_{ss} \geq \frac{J}{J_0} o_{fd} + r$ où J est l'échelle la plus fine et J_0 l'échelle la moins fine.

Sous ces conditions, on améliore l'opérateur aux différences existant en le rendant optimal sur une grille non-uniforme.

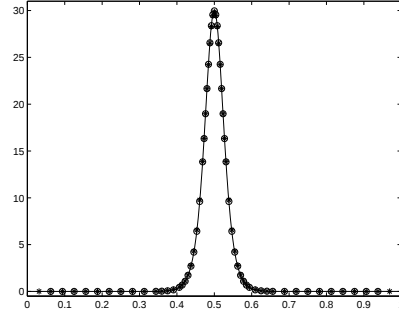


(a) échantillonnage

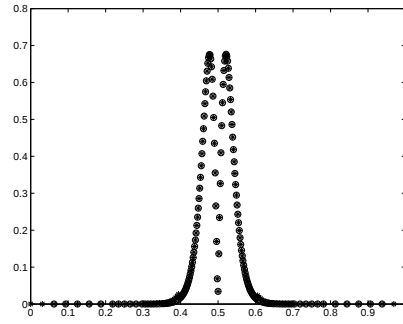
(b) grille adaptée pour $\varepsilon = 10^{-5}$ et pour le schéma $S_{2,2}$ (c) grille adaptée pour $\varepsilon = 10^{-6}$ et pour le schéma $S_{3,3}$ (d) grille adaptée pour $\varepsilon = 10^{-7}$ et pour le schéma $S_{4,4}$ FIG. IV.5 – Grille adaptée et détails $|d_n^{j-1+J_0}| > \varepsilon$ pour la fonction f pour $J = 9$, $J = 5$.

ofd	1		
oss	4	6	8
$\ NFD - FD_J\ _{\infty, \tilde{X}^J}$	4.7×10^{-4}	8.9×10^{-6}	1.2×10^{-6}
ofd	2		
oss	4	6	8
$\ NFD - FD_J\ _{\infty, \tilde{X}^J}$	1.87×10^{-4}	2.52×10^{-6}	6.03×10^{-8}
ofd	4		
oss	4	6	8
$\ NFD - FD_J\ _{\infty, \tilde{X}^J}$	1.82×10^{-4}	2.5×10^{-6}	6.04×10^{-8}

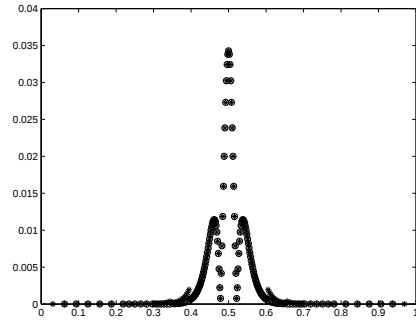
TAB. IV.3 – Comparaison des opérateurs FD_{X^J} et NFD sur la grille adaptée $\tilde{X}^J$ pour $f^{(1)}$ (figures IV.5) avec $J = 9$ et $J_0 = 5$.



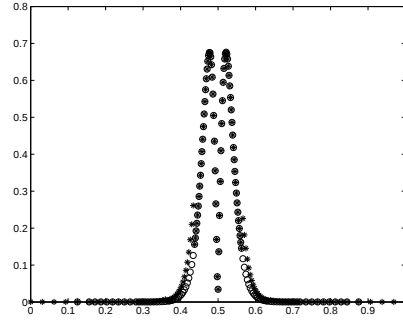
(a) représentation de $f^{(1)}$ sur $(0,1)$



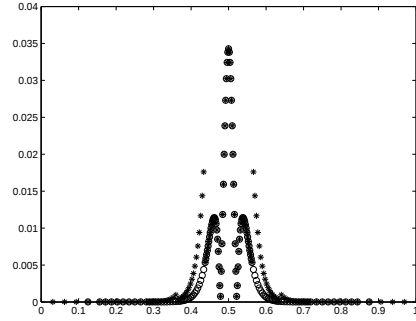
(b) avec $o_{ss} = 4$ et $o_{fd} = 1$



(c) avec $o_{ss} = 4$ et $o_{fd} = 2$



(d) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 1$



(e) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 2$

FIG. IV.6 – Comparaison des erreurs locales des opérateurs adaptés $NFD_{(J-j)}$ ($\circ$) et FD ($*$) pour $f^{(1)}$, $J = 9$, $J_0 = 5$.

o_{fd}	2		
o_{ss}	6	8	10
$\ NFD - FD_J\ _{\infty, \tilde{X}^J}$	0.072	0.01	2.57×10^{-5}
o_{fd}	4		
o_{ss}	6	8	10
$\ NFD - FD_J\ _{\infty, \tilde{X}^J}$	0.073	0.01	2.57×10^{-5}

TAB. IV.4 – Comparaison des opérateurs $FD_{\tilde{X}^J}$ et NFD sur la grille adaptée $\tilde{X}^J$ pour $f^{(2)}$ (figures IV.5) avec $J = 9$ et $J_0 = 5$.

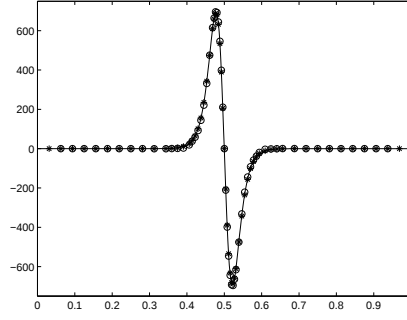
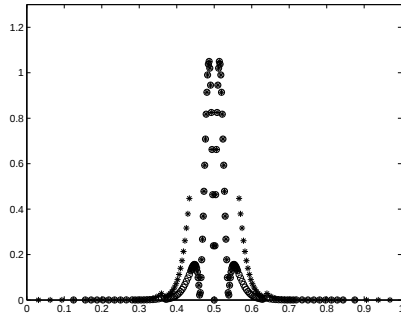
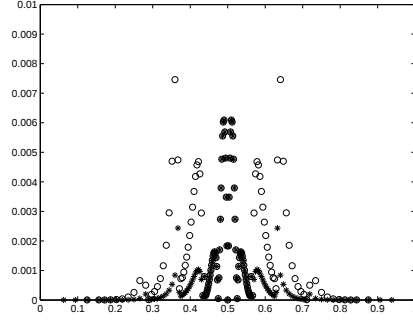
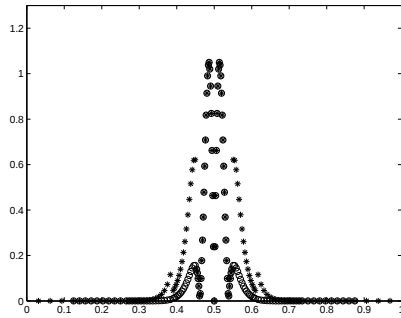
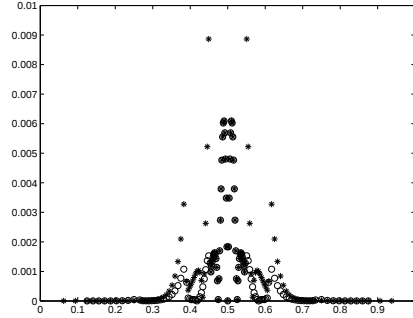
(a) représentation de $f^{(2)}$ sur $(0,1)$ (b) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 2$ (c) avec $o_{ss} = 6$ et $o_{fd} = 4$ (d) avec $o_{ss} = 8$ et $o_{fd} = 2$ (e) avec $o_{ss} = 8$ et $o_{fd} = 4$

FIG. IV.7 – Comparaison des erreurs locales des opérateurs adaptés $NFD_{(J-j)}$ ($\circ$) et FD ($*$) pour $f^{(2)}$, $J = 9$, $J_0 = 5$.

IV.4 Vers l'utilisation de schémas de subdivision non-linéaires

La construction précédente utilise fortement la linéarité du schéma de subdivision et n'est plus possible dans le cas d'un schéma non-linéaire.

On peut substituer à cette construction une autre, adaptée au cas non-linéaire et qui utilise la reconstruction $\mathcal{R}^j$ à chaque niveau j .

On propose de combiner l'opérateur FD et la reconstruction $\mathcal{R}^j$ pour obtenir un opérateur défini sur la grille X^j .

Pour un opérateur FD donné et un niveau p donné, la méthode de construction de $NFDNL_p$ est la suivante

1. à partir des données f^j sur une grille X^j , on construit la reconstruction $\mathcal{R}^j$ du schéma non-linéaire (annexe E),
2. à un point $x_n \in X^j$, on applique l'opérateur FD sur la grille X^{j+p} aux données $(\mathcal{R}^j(x_n + 2^{-(j+p)}k))_{k \in \mathbb{Z}}$.

Une expression des points $(\mathcal{R}^j(x_n + 2^{-(j+p)}k))_{k \in \mathbb{Z}}$ étant donné dans l'annexe E, il est alors possible de définir une expression de l'opérateur $NFDNL_p$, applicable sur la grille X^j .

Sur les figures IV.8, on donne un aperçu du comportement de l'opérateur non-linéaire construit. On a comparé l'opérateur linéaire NFD_p utilisant le schéma linéaire 4 points $S_{2,2}$, et l'opérateur non-linéaire $NFDNL_p$ utilisant la reconstruction PPH (section II.4.2 et annexe E).

On a choisi la fonction $f(x) = (0.2\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(0.2)^2}\right)$, une grille régulière X^j et $p = 2$, pour tester la performance de l'opérateur.

On remarque un comportement très variable. Dans l'intervalle $[0.3, 1]$, $NFDNL_p$ est assez performant. Par contre dans l'intervalle $[0.2, 0.3]$, il produit une erreur non-uniforme pour une grille assez fine ($j = 7$).

On peut conjecturer que ces phénomènes sont dus à un manque de régularité de la fonction limite et son ordre d'approximation assez faible, le schéma S_{PPH} étant C^{1-} et son ordre égal à 2 (section II.4.2).

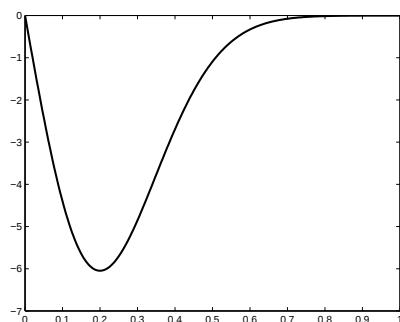
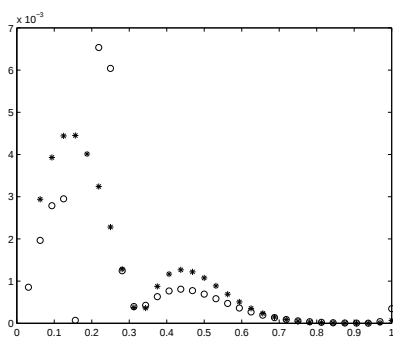
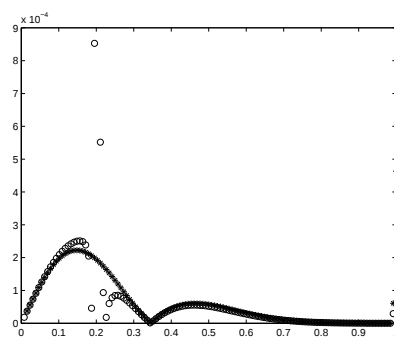
(a) représentation de $f^{(1)}$ sur $(0,1)$ (b) pour $j = 5$ et $p = 2$ (c) pour $j = 7$ et $p = 2$

FIG. IV.8 – Comparaison des erreurs locales de l'opérateur non-linéaire $NFDNL_p$ ($\circ$) et linéaire NFD_p ($*$) pour $f^{(1)}$ et pour le schéma linéaire $o_{ss} = 4$.

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a explicité la définition d'un nouvel opérateur aux différences finies NFD_p , qui est construit à partir d'un opérateur initial (FD), d'un schéma de subdivision (S) et d'un nombre d'itérations (p). Partant d'une grille X^j , l'opérateur NFD_p consiste à d'appliquer FD sur une grille fine X^{j+p} , construite avec le schéma de subdivision, et à récupérer les valeurs aux points de la grille X^j .

Si le schéma S est linéaire, on peut expliciter l'opérateur NFD_p . C'est un nouvel opérateur dont les caractéristiques (taille du support, ordre) sont explicités. En particulier, on a vu que les performances optimales de l'opérateur NFD_p dépendaient d'une relation précise entre la régularité et l'ordre d'approximation du schéma de subdivision: si on approxime $f^{(r)}$, S doit avoir une régularité C^r et un ordre d'approximation o_{ss} doit vérifier $jo_{fd} < j(o_{ss} - r) < (j + p)o_{fd}$.

Sur une grille adaptée dont l'échelle la plus fine est J et la moins fine est J_0 , les conclusions sont similaires. La condition à satisfaire s'écrit $o_{ss} \geq \frac{J}{J_0}o_{fd} + r$ où J est le pas le plus fin et J_0 le pas le plus grossier.

On obtient de plus, que l'erreur commise entre l'opérateur NFD sur la grille adaptée et l'opérateur FD sur la grille la plus fine dépend uniquement, du seuil utilisé pour construire la grille adaptée.

Enfin, une généralisation à des schémas de subdivision non-linéaires a été proposé.

Conclusion générale et Perspectives

Les travaux présentés décrivent la construction de schémas de subdivision non-linéaires, et leurs applications au traitement d'images et à la résolution d'équations aux dérivées partielles. On s'est surtout intéressé à une classe de schémas généralisant les schémas de subdivision non-linéaires S_{WENO} et S_{PPH} .

Dans un contexte linéaire, on a, tout d'abord, complété le résultat de convergence de [CDM91] par un résultat de régularité (théorème I.8) ce qui nous a permis de nous pencher sur l'étude de schémas de Lagrange quelconques et de donner une technique d'étude plus performante que celle utilisant les polynômes trigonométriques. Les travaux de [DD89] étudiant uniquement les schémas de Lagrange centrés, nous nous sommes intéressés à des schémas complètement décentrés, puis à des schémas ayant un décentrage quelconque. On a ainsi pu établir des résultats de convergence pour quelques uns de ces schémas (théorème I.9 et proposition I.21).

En traçant les fonctions limites, on s'est aperçu que la régularité se dégradait avec le nombre de points utilisés. La question de la divergence s'est alors posée. Avec une technique d'étude des valeurs propres, on a prouvé que pour un nombre de points l donné, il existe r_l tel que tous les schémas de Lagrange $S_{l,r}$ divergent pour tout $r \geq r_l$ (théorème I.10 et proposition I.21).

Dans un second chapitre, après avoir précisé comment généraliser certains théorèmes pour les schémas linéaires au cas non-linéaire, on s'est intéressé à l'étude d'une classe de schémas non-linéaires définie comme une perturbation d'un schéma linéaire. On a alors établi des théorèmes de convergence, de régularité, de stabilité et d'ordre d'approximation (section II.4.1). Dans le cas interpolant, on a utilisé les résultats de [Don92] pour établir une réciproque au théorème de régularité.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'application des théorèmes établis pour l'étude de certains schémas non-linéaires. On a essentiellement considéré des schémas visant à éliminer les phénomènes d'oscillations près des discontinuités (phénomène de Gibbs) qui se traduisent par des zones de flous près des contours dans la compression d'images.

On a d'abord considéré l'un des premiers schémas construits pour éviter le phénomène de Gibbs: le schéma S_{WENO} . On a pu améliorer et compléter l'étude théorique de [CDM03]. Cependant, la régularité théorique trouvée ne correspond pas à la régularité numérique que l'on peut estimer (section II.4.1). Notre résultat n'est donc pas toujours optimal.

L'utilisation de 6 points par le schéma S_{WENO} n'étant pas satisfaisante, on a construit le schéma non-linéaire S_{POWERP} utilisant 4 points et généralisant le schéma S_{PPH} en utilisant une moyenne développée pour reconstruire les flux dans les équations hyperboliques. On a montré la conver-

gence et la régularité du schéma S_{POWERP} . Mais, de même que pour le schéma S_{WENO} , nous n'avons pas pu obtenir la stabilité du schéma, pour tous les schémas S_{POWERP} (section II.4.2).

Les schémas S_{WENO} et S_{POWERP} ayant une régularité limitée (C^{1-}), on s'est alors proposé de construire un schéma utilisant 4 points, évitant le phénomène de Gibbs et ayant une meilleure régularité. Pour définir ce schéma, noté $S_{\text{PPHAPPROX}}$, on a opté pour un schéma approximant. On obtient un schéma stable et de régularité au moins $C^{1.19}$ (même $C^{2.43}$ numériquement) (section II.4.3).

Enfin, on a prouvé la convergence d'un schéma existant, noté $S_{\text{SPHERICAL}}$, adapté à la construction de courbes à courbure localement constante (section II.4.4).

Pour compléter cette étude théorique, on a étendu les résultats obtenus à des schémas non-linéaires de $l^\infty(\mathbb{Z}^2)$ définis comme produit tensoriel de schémas de $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Sous les conditions du théorème de convergence $1d$, on a montré que, dès qu'une relation était vérifiée par les constantes $1d$, le schéma $2d$ construit par "produit tensoriel" convergeait (théorème II.13 et II.14). On pu ainsi obtenir la convergence de schémas $2d$ construits à partir des schémas S_{POWERP} et $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

Dans les deux derniers chapitres, on applique les schémas de subdivision non-linéaires à deux domaines. Le premier concerne la compression d'images. Une des techniques est d'utiliser des analyses multirésolutions généralisées [Har96], associées à des schémas de subdivisions non-linéaires. La stabilité d'une telle multirésolution est alors requise pour contrôler les effets liés à la troncature des détails.

Pour la classe de schémas non-linéaires définie au chapitre II, on a établi un théorème de stabilité pour les analyses multirésolutions associées (théorème III.1).

Malheureusement, les hypothèses étant trop restrictives pour être appliquées aux schémas S_{WENO} et S_{POWERP} , on les a appliquées à deux autres schémas. Le premier schéma, noté S_{GC} , avait été construit dans le but de supprimer des artéfacts dans la construction de courbes [MDL05] et on a pu montrer qu'il existait une multirésolution stable associée (section III.4.1). Le schéma S_{GC} éliminant aussi le phénomène de Gibbs, on s'est aperçu qu'il était performant pour des analyses multirésolutions faisant intervenir certains types de discontinuités (section III.6.3). Pour certaines constantes intervenant dans la construction de ce schéma, on a aussi pu établir un résultat de stabilité pour l'analyse multirésolution associée au schéma $2d$ défini par "produit tensoriel".

Enfin, on a aussi construit une famille de schémas en base 3, généralisant le schéma S_{PPH} . L'avantage de travailler en base 3 est d'une part d'utiliser d'autres types d'échantillonnage et surtout de faciliter les preuves théoriques. On a en particulier, pu montrer la stabilité de l'analyse multirésolution associée à cette famille de schémas (section III.4.2).

Le deuxième domaine concerne la construction d'opérateurs aux différences finies ayant une erreur de consistance uniforme, sur une grille adaptée. Cette construction couple un opérateur aux différences finies initial avec un schéma de subdivision.

Pour un opérateur différence finie donnée FD , on construit un opérateur NFD_p dépendant de l'opérateur initial (FD), du schéma de subdivision (S) et du nombre d'itérations (p) du schéma de subdivision séparant l'échelle locale grossière de l'échelle la plus fine.

Dans le cadre de schémas linéaires, on peut donner l'expression de l'opérateur NFD_p (proposition IV.1). L'originalité de ce travail réside dans le fait de pouvoir expliciter l'opérateur NFD_p sur la grille locale. On a montré que la taille de son support dépendait uniquement de la taille du support du schéma de subdivision, et que son ordre dépendait du schéma de subdivision choisi et de l'ordre de l'opérateur aux différences finies FD (section IV.3.1).

En utilisant la formule d'erreur, on a montré que la performance de l'opérateur construit dépend de l'ordre d'approximation et de la régularité de la fonction limite du schéma de subdivision. Sous certaines conditions, on obtient alors une erreur plus petite que celle commise par l'opérateur

aux différences finies FD . De plus, numériquement, on peut constater que sur une grille adaptée, l'erreur commise entre l'opérateur NFD sur la grille adaptée et l'opérateur FD sur la grille la plus fine dépend uniquement de l'erreur de troncature utilisée pour construire la grille adaptée (section IV.3.2).

Enfin, on a proposé une méthode de construction dans le cas de schémas non-linéaires. Malheureusement, les schémas non-linéaires interpolants ne présentant pas de bonnes propriétés de régularité, on n'obtient pas de résultats numériques performants.

Chacun de ces chapitres ouvrent de nombreuses perspectives.

Tout d'abord, concernant les schémas de subdivision de Lagrange décentrés, le problème reste encore ouvert pour quelques configurations, pour lesquels la convergence ou la divergence théorique ne peut être établie (figure I.14).

On a vu que les schémas S_{POWERP} présentaient des propriétés numériques similaires au schéma S_{PPH} . Malheureusement la stabilité du schéma et de l'analyse multirésolution n'ont pas été prouvées. De même, la question de la stabilité du schéma S_{WENO} au sens classique, reste ouverte.

Concernant les analyses multirésolutions non-linéaires, trois questions naturelles se posent (les réponses à ces questions sont connues dans le cas linéaire).

Une première question naturelle est la possibilité d'étendre nos résultats théoriques à d'autres normes. En effet, nos travaux se sont situés dans le cadre L^∞ et la discrétisation par valeurs ponctuelles. Or on sait que le cadre des espaces BV des fonctions à variation bornée est un espace plus appropriée pour les images, excepté dans les zones de texture.

La deuxième concerne la correspondance dans une norme appropriée, de résultats de stabilité entre une analyse multirésolution non-linéaire interpolante et une analyse multirésolution où l'opérateur de discrétisation est du type $f_n^j = \int f \phi_{j,n}$ avec $\phi_{j,n}$ les translatés et les dilatés d'une fonction B-spline. On sait que l'opérateur de reconstruction pour ce type d'analyse multirésolution est construit comme une dérivée discrète d'une analyse multirésolution interpolante. Connaissant les propriétés de l'analyse multirésolution interpolante, est-il possible d'établir des propriétés équivalentes pour l'analyse multirésolution ainsi construite?

La troisième question concerne, pour un schéma de subdivision donné, la construction d'une analyse multirésolution correspondante c'est-à-dire d'un opérateur de discrétisation compatible. Par exemple, le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ étant stable, on aimerait pouvoir définir une analyse multirésolution associée.

Enfin, l'utilisation de schémas non-linéaires pour construire des opérateurs aux différences finies, paraît particulièrement intéressante dans le cas de solution présentant des singularités. Mais, connaissant les propriétés requises pour le schéma de subdivision, la question de l'existence de schémas non-linéaires, interpolants, ayant une régularité supérieure à C^1 , est posée.

ANNEXE A

Rappel sur les analyses multirésolutions de types ondelettes

On rappelle les principales définitions associées à la notion d'analyse multirésolution introduite par S. Mallat [Mal89].

Dans cette partie, on note V_j des sous espaces de $L^2(\mathbb{R})$ sauf dans la section A.0.4 concernant les résultats de D. L. Donoho [Don92] pour une analyse multirésolution interpolante.

A.0.1 Définition

A.0.1.a Définition

DÉFINITION A.1

On appelle analyse multirésolution de L^2 , la donnée d'une suite croissante de sous espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- 1) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$
- 2) $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$
- 3) $\forall f \in V_0, \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(\cdot - n) \in V_0$
- 4) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- 5) $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- 6) $\exists \phi \in V_0$ tel que $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de V_0 .

On rappelle la définition d'une base de Riesz, équivalente à la condition de stabilité L^2 (remarque I.3)

il existe $A, B > 0$ tel que $\forall f \in l^2(\mathbb{Z}), A\|f\|_2 \leq \|\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi(\cdot - n)\|_{L^2} \leq B\|f\|_2$.

ou

il existe $A, B > 0$ tel que $0 < A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2n\pi)|^2 \leq B$,

où $\hat{\phi}$ désigne la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

On peut faire les remarques suivantes.

D'après 2), les fonctions $\phi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \phi(2^j x - n)$ forment une base de Riesz de V_j .

D'après 1), ϕ vérifie une relation d'échelle c'est-à-dire qu'il existe $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n). \quad (\text{A.1})$$

Dans 6), on peut imposer que $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée. En effet, si on pose

$$\hat{\phi}^0(w) = (S_\phi(w))^{-\frac{1}{2}} \hat{\phi}(w) \quad \text{avec} \quad S_\phi(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(w + 2n\pi)|^2,$$

alors $\{\phi^0(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 .

EXEMPLE A.1

Donnons quelques exemples naturels de suites d'espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{Z} \quad f_{[2^{-j}k; 2^{-j}(k+1)[} = \text{const}\}$$

avec la fonction d'échelle $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ vérifiant $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$. Cette multirésolution est appelée l'analyse multirésolution de Haar.

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{Z} \quad f_{[2^{-j}k; 2^{-j}(k+1)[} \in \mathbb{R}_1[X]\}$$

avec la fonction d'échelle $\phi(x) = \max(1-|x|, 0)$ vérifiant $\phi(x) = \phi(2x) + \frac{1}{2}(\phi(2x-1) + \phi(2x+1))$.

De même en prenant ϕ_m la fonction B-spline de degré m , on peut définir les espaces V_j comme étant les fonctions $C^{m-1}(\mathbb{R})$ et polynomiales par morceaux avec raccords sur des points dyadiques.

On retrouve les relations d'échelles définies dans la section I.3.2 dans le cadre des schémas de subdivision.

On remarque que dans le cas de la base de Haar, les fonctions $(\phi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de V_0 avec ϕ à support compact.

Dans le cas des B-splines avec $m \geq 1$, on peut construire une base orthonormale de V_0 en définissant ϕ_m^0 . Le support de ϕ_m^0 n'est plus à support compact mais ϕ_m^0 est à décroissance rapide.

REMARQUE A.1

Si l'on choisit une fonction ϕ vérifiant la relation d'échelle (A.1) avec $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ et telle que les translatés de $(\phi_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz, alors la famille des $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$

$$V_j = \text{Vect} \{(\phi_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}\},$$

ne constitue pas obligatoirement une analyse multirésolution.

On a besoin de conditions supplémentaires sur ϕ (principalement sur le masque h) [Dau92]. En particulier les hypothèses ϕ continue, à support compact et $\sum_n \phi(\cdot - n) = \text{const} \neq 0$, suffisent pour que les espaces V_j constituent une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. On remarque que l'on se trouve dans les conditions de convergence du schéma de subdivision associé au masque h (théorème I.1 et remarque I.3).

A.0.1.b Espaces de détails et Ondelettes

On définit l'espace de détails W_j , comme le complément (orthogonal) de V_j dans V_{j+1}

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{et on a alors} \quad L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j.$$

A partir de ϕ , on construit une fonction ψ tel que $(\sqrt{2^j} \psi(2^j \cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de W_j . Comme $W_0 \subset V_1$, il existe $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2x - n). \quad (\text{A.2})$$

Les fonctions $(\psi_{j,n})_{j,n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de $L^2(\mathbb{R})$. La fonction ψ s'appelle une ondelette de $L^2(\mathbb{R})$.

Si on note P_{V_j} et P_{W_j} des opérateurs de projection sur V_j et W_j , on écrit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = P_{V_0}(f) + \sum_{j=0}^{+\infty} P_{W_j}(f). \quad (\text{A.3})$$

On notera

$$P_{V_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \phi_{j,n} \quad \text{et} \quad P_{W_j}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j,n} \psi_{j,n}, \quad (\text{A.4})$$

avec $(c_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ appelés les coefficients d'échelle et $(d_{j,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de détails du niveau j .

A partir de l'équation (A.3), on en déduit que

la donnée de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est équivalente à la donnée de ses coefficients d'échelle à une basse résolution 2^{-j_0} et à ses coefficients de détails aux échelles successives $2^{-j_0}, 2^{-(j_0+1)}, \dots$.

A.0.1.c Construction de la fonction d'échelle

En appliquant une transformée de Fourier à la relation d'échelle (A.1), on obtient

$$\hat{\phi}(w) = \hat{h}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \hat{h}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-iwn}.$$

On dira que $\hat{h}$ est un filtre.

En itérant, on a

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{j=1}^{+\infty} \hat{h}(2^{-j}w) \hat{\phi}(0).$$

On a aussi les relations suivantes pour ψ permettant de construire l'ondelette ψ à partir de la donnée du filtre $\hat{h}$

$$\hat{\psi}(w) = \hat{g}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right).$$

Pour construire une fonction d'échelle ϕ ou une ondelette ψ , il suffit donc de construire un filtre h , vérifiant certaines conditions permettant de définir une analyse multirésolution [Dau92, Mal00]. Une de ces conditions peut s'écrire $\sup_{w \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\hat{h}| > 0$. $\hat{h}$ s'appelle alors un filtre passe-haut et $\hat{g}$ un filtre passe-bas.

Il est alors possible d'imposer certaines conditions sur h pour que ϕ et ψ vérifient des propriétés particulières: orthogonalité, support compact, symétrie, moments nuls ($\langle p, \psi \rangle = 0$ pour p un polynôme).

Pour représenter ϕ dans le cas où ϕ n'a pas d'expression analytique et ϕ est continue, à support compact, on utilise un schéma de subdivision de masque $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et la relation d'échelle (A.1). On aura la convergence du schéma ainsi défini et $\phi = S^\infty f$ avec $f = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$ (remarque A.1).

A.0.1.d Moments nuls d'une ondelette et reproduction des polynômes

On dit qu'une ondelette ψ a p moments nuls si $\langle x^k, \psi \rangle = 0$ pour tout $0 \leq k \leq p-1$.

On a les équivalences suivantes entre moments nuls, nombre de zéro de $\hat{h}$ et reproduction des polynômes par le schéma de subdivision associé au masque h [Mal00]

- (i) ψ a p moments nuls,
- (ii) $\hat{h}$ a un zéro d'ordre p en π ,
- (iii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k \phi(x-k) \in \Pi_k$, pour tout $0 \leq k \leq p-1$.

Le nombre de moments nuls d'une ondelette donne la régularité maximale [Coh03]: si une ondelette a p moments nuls, les fonctions ϕ et ψ ne peuvent pas être plus que C^{p-1} (proposition I.10

pour les schémas de subdivisions).

On retrouve aussi une propriété similaire pour les zéros du symbole d'un schéma de subdivision (proposition I.13).

A.0.2 Un premier exemple: l'analyse multirésolution orthogonale

A.0.2.a Définition

On est dans le cas où on a orthormalisé les fonctions $(\phi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$. D'après la définition de l'ondelette ψ (A.2-A.3), les fonctions $(\psi(\cdot - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de W_0 et $((\phi_{j0,n})_{n \in \mathbb{Z}}, (\psi_{j,n})_{j \geq j_0, n \in \mathbb{Z}})$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Le filtre h doit vérifier les deux conditions suivantes

$$|\hat{h}(w)|^2 + |\hat{h}(w + \pi)|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \hat{h}(0) = 1. \quad (\text{A.5})$$

On caractérise P_{V_j} et P_{W_j} par les coefficients

$$c_{j,n}(f) = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad \text{et} \quad d_{j,n}(f) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle. \quad (\text{A.6})$$

D'autre part, d'après la relation (A.2) entre ψ et ϕ , on obtient la relation pour les filtres h et g

$$\hat{g}(w) = e^{-iw} \overline{\hat{h}(w + \pi)}. \quad (\text{A.7})$$

A.0.2.b Transformée en ondelette

On peut remarquer que $f \in V_j$ s'écrit

$$f = \sum_n c_{j-1,n} \phi_{j-1,n} + \sum_n d_{j-1,n} \psi_{j-1,n}.$$

ce qui donne la relation

$$c_{j,n} = \sum_n c_{j-1,n} \int \phi_{j-1,n} \phi_{j,k} + \sum_n d_{j-1,n} \int \psi_{j-1,n} \phi_{j,k}$$

En remplaçant, $\int \phi_{j-1,n} \phi_{j,k}$ par h_{k-2n} , et de même $\int \psi_{j-1,n} \phi_{j,k}$ par g_{k-2n} , on obtient une expression des c_j en fonction des c_{j-1} et d_{j-1} .

On a la **reconstruction**

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j-1,n} h_{k-2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} d_{j-1,n}. \quad (\text{A.8})$$

De même, on a la **décomposition**

$$\begin{aligned} c_{j-1,k} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} h_{n-2k} \\ d_{j-1,k} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} g_{n-2k}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les équations (A.9) et (A.8) s'appellent la transformée en ondelette.

En itérant, on a

les coefficients d'échelles à une résolution fine c_j sont totalement caractérisés par $(c_{J_0}, d_{J_0}, \dots, d_{j-1})$.

On note $\mathcal{M}c^j = (c_{J_0}, d_{J_0}, \dots, d_{j-1})$ la transformée en ondelette rapide.

Ceci donne un moyen pour stocker et reconstruire c_j à partir de $(c_{J_0}, d_{J_0}, \dots, d_{j-1})$.

On se donne un seuil ε pour conserver les détails $|d_{j,n}| > \varepsilon$. On reconstruit une approximation de c_j .

On demande alors à l'analyse multirésolution de vérifier certaines propriétés:

h est à support compact,
les détails décroissent rapidement: $\|d_{j,n}\|_\infty \leq 2^{-j\alpha}$,
la transformée $\mathcal{M}$ est stable.

Pour la stabilité, cela est traité par la linéarité et l'existence de fonction d'échelle.

Pour le support compact, on a vu que parmi les fonctions d'échelles B-splines, seule la fonction de Haar génère une base orthonormée de V_0 (exemple A.1). Ainsi, le choix d'une projection biorthogonale associée à une fonction d'échelle à support compact est plus adapté.

Pour traiter les problèmes de bord différentes techniques sont possibles: périodisation de fonction, repliement de fonctions, définition d'ondelettes sur les bords [Mal00]. Des techniques similaires seront appliqués pour représenter la fonction limite d'un schéma de subdivision.

Pour la décroissance des détails, cela a lien direct avec la régularité de la fonction, de la fonction d'échelle et du nombre de moments nuls de l'ondelette.

A.0.2.c Caractérisation d'espace fonctionnels

Dans le cas d'ondelette ψ formant une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant en imposant $\psi \in C^\beta$, à décroissance rapide ainsi que ses dérivées [Coh03].

On suppose $\phi \in C^\beta$ à support compact, pour $\alpha < \beta$ non entier, on a [Mey90]

$$f \in C^\alpha \quad \text{si et seulement si} \quad \|c_{0,n}\|_\infty + \sup_{j \geq 0} \left| 2^{j(\alpha + \frac{1}{2})} \|d_{j,n}\|_\infty \right| < +\infty.$$

En particulier,

$$\text{Si } f \in C^\alpha \text{ alors il existe } M > 0 \text{ tel que } \|d_{j,n}\|_\infty \leq M 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})},$$

c'est-à-dire que la vitesse de décroissance de détails dépend de la régularité de la fonction f mais aussi de la régularité de la fonction d'échelle ϕ et des moments nuls de l'ondelette ψ .

Il existe aussi des estimations ponctuelles caractérisant les zones de régularité (S. Jaffard [Jaf91]).

A.0.3 Un deuxième exemple: l'analyse multirésolution biorthogonale

A.0.3.a Définition

On fait intervenir deux autres fonctions $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$ n'appartenant pas obligatoirement à V_0 et à W_0 , et biorthogonales à ϕ et ψ

$$\langle \phi_{0,n}, \tilde{\phi}_{0,l} \rangle = \delta_{n,l}, \quad \langle \phi_{0,n}, \tilde{\phi}_{0,l} \rangle = \delta_{n,l}, \quad \langle \phi_{0,n}, \tilde{\psi}_{0,l} \rangle = 0 \text{ et } \langle \tilde{\phi}_{0,n}, \psi_{0,l} \rangle = 0. \quad (\text{A.10})$$

Les coefficients d'échelles et de détails au niveau j correspondent à

$$c_{j,n}(f) = \langle f, \tilde{\phi}_{j,n} \rangle \quad \text{et} \quad d_{j,n}(f) = \langle f, \tilde{\psi}_{j,n} \rangle.$$

A.0.3.b Construction

Un moyen de construire les deux fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ est de définir les filtres $(h, \tilde{h}, g, \tilde{g})$ avec h et $\tilde{h}$ vérifiant

$$\overline{\hat{h}(w)\tilde{h}(w)} + \overline{\hat{h}(w+\pi)\tilde{h}(w+\pi)} = 1 \quad \text{et} \quad \hat{h}(0) = \hat{\tilde{h}}(0) = 1. \quad (\text{A.11})$$

On définit $\hat{g}(w) = e^{-iw} \overline{\hat{h}(w+\pi)}$ c'est-à-dire $g = ((-1)^{n+1} \tilde{h}_{-n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\hat{\tilde{g}}(w) = e^{-iw} \overline{\hat{h}(w+\pi)}$ $\tilde{g} = ((-1)^{n+1} h_{-n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

De même, on a la transformée en ondelette rapide

$$\begin{array}{ll} \text{décomposition} & c_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \tilde{h}_{n-2k} \quad \text{et} \quad d_{j-1,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \tilde{g}_{n-2k} \\ \text{reconstruction} & c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j-1,n} h_{k-2n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} d_{j-1,n}. \end{array}$$

On demande alors à ϕ d'avoir une bonne régularité, ce qui implique que

1. $\tilde{\psi}$ a des moments nuls ($\tilde{g} = ((-1)^{n+1} h_{-n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$),
2. une décroissance des détails,
3. une qualité d'approximation ($\psi \in V_1$).

On demande à $\tilde{\phi}$ d'avoir un support compact donc peu de coefficients d'échelles.

EXEMPLE A.2

Si l'on choisit, de façon naturelle, les filtres h et $\tilde{h}$

$$\tilde{h}_n = \delta_{0,n} \quad \text{et} \quad h_{2n+1} = a_{2n+1}, \quad h_{2n} = \delta_{n,0},$$

la reconstruction utilise un schéma de subdivision interpolant de masque a et la projection P_{V_j} correspond à un échantillonnage sur une grille de pas 2^{-j} .

On a $\tilde{\phi} = \delta_0$ et ϕ vérifie $\phi(n) = \delta_{n,0}$.

Le problème est que δ_0 n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour définir une analyse multirésolution biorthogonale associée au filtre h , une méthode de construction de $\tilde{h}$ et une étude de la régularité de la fonction d'échelle ϕ est donné par A. Cohen, I. Daubechies et J-C Feauveau [Dau92].

Cela permet, par ailleurs, d'obtenir la régularité des schémas de Lagrange centrés [Coh03]

La fonction limite du schéma de subdivision de Lagrange centré utilisant $2N$ points est $C^{0.4N}$.

A.0.4 Un troisième exemple: l'analyse multirésolution interpolante

A.0.4.a Définition

Une analyse multirésolution interpolante consiste à définir V_j comme

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } f \text{ est défini par l'échantillon } (f(2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}\}.$$

Cela revient à construire une fonction d'échelle ϕ interpolante vérifiant $\phi(n) = \delta_{n,0}$ et définissant la projection, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$P_{V_j} f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}n) \phi(2^j t - n). \quad (\text{A.12})$$

Des moyens de construire des fonctions d'échelles interpolantes sont soit de les définir par la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle, soit par autocorrélation d'une fonction d'échelle orthogonale [Mal00].

Mais, ces deux constructions conduisent à des analyses multirésolutions biorthogonales dont les espaces V_j ne sont pas définis par (A.12).

A.0.4.b Une construction dans $C^0(\mathbb{R})$

Dans [Don92], D. L. Donoho se place dans le cadre $L^\infty(\mathbb{R})$ et définit

$$V_j = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}n) \phi_{j,n}\}$$

avec $\phi_{j,n}(x) = \phi(2^j x - n)$ en vérifiant les propriétés suivantes

- (i) ϕ une fonction interpolante,
- (ii) ϕ vérifie une relation d'échelle,
- (iii) $\phi \in C^\beta$, ϕ est à décroissance rapide ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq [\beta]$,
- (iv) V_0 contient les polynômes de degré $r \geq 0$ c'est-à-dire $\forall p \in \Pi_r, p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p(n) \phi(t - n)$.

REMARQUE A.2

On remarque que la fonction d'échelle d'un schéma de subdivision linéaire interpolant vérifie ces conditions d'après la proposition I.2. De plus, la proposition I.10 nous dit que si $\phi \in C^\beta$ alors le schéma de subdivision associé à ϕ reproduit les polynômes de degré au moins $[\beta]$, d'où (iv).

De même que dans le cas L^2 , en posant

$$\psi(x) = \phi(2x - 1) \quad \text{et} \quad W_j = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ tel que } f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \psi_{j,n}\},$$

on a $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et

$$\forall f \in V_{j+1}, \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j,n} \phi_{j,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j,n} \psi_{j,n},$$

avec

$$c_{n,j} = f(2^{-j}n) \quad \text{et} \quad d_{j,n} = f(2^{-j}(n + \frac{1}{2})) - P_{V_j} f(2^{-j}(n + \frac{1}{2})). \quad (\text{A.13})$$

La propriété suivante montre que $(\phi_{j0,n}, (\phi_{j,n})_{j \geq j_0})$ forment une base de $C^0(\mathbb{R})$ [Don92]

PROPOSITION A.1

Pour $f \in C^0(\mathbb{R})$,

$$\forall J_0 \quad \lim_{n, J \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} c_{j_0,n} \phi_{j_0,n} - \sum_{j=j_0}^J \sum_{|k| \leq n} d_{j,n} \psi_{j,n} \right\|_\infty = 0.$$

De plus, si $\phi \in C^\beta$ et reproduit les polynômes de degré r , en notant $s < \min(\alpha, \beta, r)$

$$f \in C^\alpha \quad \text{ssi} \quad \|f\|_{C^\alpha} = \|c_{j_0,n}\|_\infty + \sup_{j \geq j_0} |2^{js}| \|d_{j,n}\|_\infty. \quad (\text{A.14})$$

On retrouve la caractérisation des espaces de Hölder due à Y. Meyer [Mey90] des analyses multirésolutions $L^2(\mathbb{R})$

A.0.5 Extension à $L^2(\mathbb{R}^2)$

On définit une analyse multirésolution linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ comme le produit tensoriel d'une analyse multirésolution linéaire dans $L^2(\mathbb{R})$ en prenant

$$V_0^{2d} = V_0 \otimes V_0 \quad \text{et} \quad \phi_{2d}(x,y) = \phi(x)\phi(y).$$

L'espace de détails W_j^{2d} s'écrit $(V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)$, ce qui donne 3 types de détails, horizontaux, verticaux et diagonaux, associés aux ondelettes

$$\psi_{2d}^h(x,y) = \phi(x)\psi(y), \quad \psi_{2d}^v(x,y) = \psi(x)\phi(y) \quad \text{et} \quad \psi_{2d}^d(x,y) = \psi(x)\psi(y).$$

ANNEXE B

Résultats valables pour les schémas linéaires généralisables aux schémas non-linéaires

Soit S_{NL} un schéma de subdivision non-linéaire convergeant.

B.1 Définition de la convergence du schéma comme la convergence d'une suite de fonctions (proposition II.1)

On généralise la proposition I.2 au cas non-linéaire.

PROPOSITION B.1

On a équivalence entre

- (i) Le schéma converge au sens de la définition I.3.
- (ii) La suite de fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (S_{NL}^j f)_n \phi_0(2^j x - n)$$

converge uniformément,

avec ϕ_0 une fonction à support compact vérifiant la condition de stabilité L^∞ (I.8) et $\sum_n \phi_0(\cdot - n) = 1$.

Preuve

- Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), avec la propriété $\sum_n \phi_0(\cdot - n) = 1$, on écrit

$$\begin{aligned} |f^j(x) - S^\infty f(x)| &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((S_{NL}^j f)_n - S^\infty f(x) \right) \phi_0(2^j x - n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((S_{NL}^j f)_n - S^\infty f(2^{-j} n) \right) \phi_0(2^j x - n) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(S^\infty f(2^{-j} n) - S^\infty f(x) \right) \phi_0(2^j x - n) \right|. \end{aligned}$$

Le premier membre se traite avec la convergence du schéma (définition I.3). Pour $\varepsilon > 0$, il existe $J > 0$ tel que $\forall j \geq J$,

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left((S_{NL}^j f)_n - S^\infty f(2^{-j} n) \right) \phi_0(2^j x - n) \right| \leq B\varepsilon,$$

avec A et B les constantes de stabilité de ϕ_0 .

Le second membre se traite avec la continuité de $S^\infty f$ (définition I.3).

En effet, ϕ_0 étant à support compact, on a $|2^{-j} x - n| \leq 2^{-j} C$ avec $C = \text{length}(\text{supp}(\phi_0))$.

Pour $j \geq J_1$ avec $J_1 \geq J$ et J_1 dépendant de la continuité de $S^\infty f$, on a

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(S^\infty f(2^{-j} n) - S^\infty f(x) \right) \phi_0(2^j x - n) \right| \leq B\varepsilon,$$

ce qui donne la convergence uniforme de la suite $(f^j)_j$ vers $S^\infty f$.

B.2. Condition suffisante de régularité C^k (proposition II.2)

• Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on note $f^\infty(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f^j(x)$.

La condition de stabilité L^∞ (I.9) de ϕ_0 donne

$$\begin{aligned} A \|f^\infty(2^{-j}n) - f_n^j\|_\infty &\leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f^\infty(2^{-j}n) - f_n^j) \phi_0(2^j x - n) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \left\| f^\infty(x) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^j \phi_0(2^j x - n) \right\|_{L^\infty} \\ &\quad + \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f^\infty(x) - f^\infty(2^{-j}n)) \phi_0(2^j x - n) \right\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

avec la propriété $\sum_n \phi_0(\cdot - n) = 1$.

Le premier membre provient de la convergence uniforme de f^j vers f^∞ .

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $J > 0$ tel que $\forall j \geq J$,

$$\|f^\infty - f^j\|_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

Le second membre se traite avec la continuité uniforme de f^∞ et du support compact de ϕ_0 (de même que dans la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$). Il existe $J_1 > 0$ tel que $\forall j \geq J_1$,

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f^\infty(x) - f^\infty(2^{-j}n)) \phi_0(2^j x - n) \right\|_{L^\infty} \leq B\varepsilon.$$

On a donc

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f^\infty(2^{-j}n) - f_n^j\|_\infty = 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la suite de points $(f^j)_n$ vers f^∞ .

□

B.2 Condition suffisante de régularité C^k (proposition II.2)

On considère l'opérateur aux différences défini par l'équation (I.13).

On généralise la proposition I.4 au cas non-linéaire.

PROPOSITION B.2

Si la suite définie par $(2^{kj} d^k(S^j f))_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction g , alors $S^\infty f$ est C^k et $(S^\infty f)^{(k)} = g$.

Preuve

On se place dans le cas $k = 1$.

Montrons que $S^\infty f$ est dérivable et que $(S^\infty f)' = g$.

On considère ϕ_0 la fonction limite d'un schéma linéaire S_0 convergeant de régularité C^1 (par exemple, un schéma B-spline).

On sait que ϕ_0 vérifie les propriétés de la proposition B.1 (proposition I.2).

D'après le théorème I.3, le schéma aux différences S_{0_1} existe et converge.

On note ϕ_1 sa dérivée qui vérifie aussi les propriétés de la proposition B.1 (remarque I.5).
On utilise les suites de fonctions définies par

$$f^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (S_{NL}^j f)_n \phi_0(2^j x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$g^j(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{kj} (d^k S^j f)_n \phi_1(2^j x - n), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

qui convergent respectivement vers $S^\infty f$ et vers g (proposition B.1).

D'après la relation entre ϕ'_0 et ϕ_1 la fonction limite du schéma aux différences $\phi'_0(y) = \phi_1(y + 1) - \phi_1(y)$ (remarque I.5), on obtient

$$\begin{aligned} (f^j(x))' &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^j f_n^j \phi'_0(2^j x - n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^j f_n^j (\phi_1(2^j x + 1 - n) - \phi_1(2^j x - n)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^j df_n^j \phi_1(2^j x - n) \\ &= g^j(x). \end{aligned}$$

D'après la convergence uniforme de la suite de fonction g^j vers la fonction continue g , on peut conclure que $f' = g$.

□

ANNEXE C

Preuve de résultats du chapitre II

C.1 Preuve des propriétés de la moyenne POWERP (propriété II.2)

PROPRIÉTÉ C.1

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la moyenne POWERP satisfait les propriétés suivantes

- (i) $\text{POWERP}(x, y) = \text{POWERP}(y, x)$.
- (ii) $\text{POWERP}(x, y) = 0$ si $xy \leq 0$.
- (iii) $\text{POWERP}(-x, -y) = -\text{POWERP}(x, y)$.
- (iv) $\text{POWERP}(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \min(|x|, |y|) \left[1 + \left| \frac{x-y}{x+y} \right| + \cdots + \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^{p-1} \right]$.
- (v) $|\text{POWERP}(x, y)| \leq \max(|x|, |y|)$.
- (vi) $|\text{POWERP}(x, y)| \leq p \min(|x|, |y|)$.
- (vii) Pour $x, y > 0$, $\min(x, y) \leq \text{POWERP}(x, y) \leq \text{POWERP} + 1)(x, y) < \frac{x+y}{2}$.
- (viii) Si $x = O(1)$, $y = O(1)$, $|y - x| = O(h)$ et $xy > 0$ alors $|\frac{x+y}{2} - \text{POWERP}(x, y)| = O(h^p)$.
- (ix) $|\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| \leq p \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

Preuve

Les points (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) et (vii) sont évidents avec la définition (II.30).

(viii) on écrit

$$\frac{x+y}{2} - \text{POWERP}(x, y) = \frac{x+y}{2} \left(1 - 1 + \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p \right) = \frac{x+y}{2} \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p.$$

(ix) On a besoin de distinguer plusieurs cas.

- Si $x_1 x_2 > 0$ et $y_1 y_2 < 0$,

On suppose, par exemple, que $x_2 y_2 < 0$ ce qui donne $\text{POWERP}(x_2, y_2) = 0$.

D'après la propriété (vi)

$$\begin{aligned} |\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| &= |\text{POWERP}(x_1, y_1)| \\ &\leq p \min(|x_1|, |y_1|) \\ &\leq p |y_1 - y_2| \\ &\leq p \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

- Si $x_1 x_2 < 0$ et $y_1 y_2 < 0$,

On suppose, par exemple, que $\text{POWERP}(x_1, y_1) \geq 0$ et $\text{POWERP}(x_2, y_2) \leq 0$.

D'après la propriété (v)

$$\begin{aligned} |\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| &= |\text{POWERP}(x_1, y_1)| + |\text{POWERP}(x_2, y_2)| \\ &\leq \max(|x_1|, |y_1|) + \max(|x_2|, |y_2|) \\ &\leq 2 \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

- Si $x_1 x_2 > 0$, $y_1 y_2 > 0$ et $x_1 y_1 > 0$,

On suppose, par exemple, que $x_1 > 0$.

pour p pair La moyenne POWERP s'écrit

$$\text{POWERP}(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{(x-y)^p}{(x+y)^{p-1}}.$$

La moyenne POWERP est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, ouvert convexe, avec

$$\frac{\partial \text{POWERP}}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(p \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^{p-1} + (p-1) \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^p \right).$$

On a donc

$$\left| \frac{\partial \text{POWERP}}{\partial x}(x,y) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1) \leq p.$$

De même pour $\left| \frac{\partial \text{POWERP}}{\partial y}(x,y) \right|$.

L'inégalité de la moyenne permet de conclure.

pour p impair On distingue encore plusieurs cas

- si $x_1 < y_1$ et $x_2 < y_2$,

l'inégalité de la moyenne s'applique encore sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}_+^* - \{(x,y) \text{ tel que } x = y\}$.

- si $x_1 > y_1$ et $x_2 < y_2$,

En supposant que $\text{POWERP}(x_1, y_1) > \text{POWERP}(x_2, y_2)$ et d'après la propriété (vii), on a

$$\begin{aligned} |\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| &\leq \left| \frac{x_1 + y_1}{2} - \min(x_2, y_2) \right|, \\ &\leq \left| \frac{x_1 + y_1}{2} - x_2 \right|, \\ &\leq \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| + \left| \frac{y_1 - x_2}{2} \right|, \end{aligned}$$

ce qui donne avec l'hypothèse $x_1 > y_1$,

$$|\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Si $\text{POWERP}(x_1, y_1) < \text{POWERP}(x_2, y_2)$, on obtient de même

$$|\text{POWERP}(x_1, y_1) - \text{POWERP}(x_2, y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

d'où le résultat dans le cas p impair.

□

C.2 Preuve du lemme II.1

LEMME C.1

Soit $f, g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, si $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$ et $|d^2 g_{n+1}| > |d^2 g_n|$ alors

$$|d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})| \leq 3\|d^2 f - d^2 g\|_\infty.$$

Preuve

On considère plusieurs cas.

- Si $d^2 g_{n+1} d^2 g_n < 0$, on a

$$d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) = d^2 f_{n+1} + d_n^g.$$

- * si $d^2 f_{n+1} d^2 g_n < 0$, en utilisant que $|d^2 f_n| > |d^2 f_{n+1}|$

$$|d^2 f_{n+1} + d^2 g_n| \leq |d^2 f_{n+1} - d^2 g_n| \leq |d^2 f_n - d^2 g_n|.$$

- * si $d^2 f_{n+1} d^2 g_n > 0$, on a $d^2 f_{n+1} d^2 g_{n+1} < 0$ et avec $|d^2 g_{n+1}| > |d^2 g_n|$, on obtient

$$|d^2 f_{n+1} + d^2 g_n| \leq |d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}|.$$

- Si $d^2 g_{n+1} d^2 g_n > 0$, on rappelle (propriété II.2) que si $x, y > 0$, $\min(x, y) \leq \text{PPH}(x, y) \leq \max(x, y)$.

Par exemple, on suppose que $d^2 g_n > 0$ et on note $H = d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})$.

- * si $H > 0$, en utilisant les hypothèses

$$\begin{aligned} H &\leq d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \min(|d^2 g_n|, |d^2 g_{n+1}|), \\ &\leq d^2 f_{n+1} - d^2 g_n, \\ &\leq |d^2 f_n - d^2 g_n|. \end{aligned}$$

- * si $H < 0$,

$$\begin{aligned} H &\geq d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \max(|d^2 g_n|, |d^2 g_{n+1}|), \\ &\geq d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2d^2 g_{n+1}, \\ &\geq d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1} + d^2 g_n - d^2 g_{n+1}. \end{aligned}$$

On est encore obligé de distinguer plusieurs cas selon le signe de $d^2 f_n$.

- $d^2 f_n > 0$, on a $d^2 f_n - d^2 f_{n+1} > 0$

$$\begin{aligned} H &\geq (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + (d^2 g_n - d^2 g_{n+1}) - (d^2 f_n - d^2 f_{n+1}), \\ &\geq 2(d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + (d^2 g_n - d^2 f_n), \\ &\geq -3\|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

- $d^2 f_n < 0$ et $d^2 f_{n+1} d^2 f_n > 0$, alors $d^2 f_{n+1} < 0$

$$\begin{aligned} H &\geq (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}), \\ &\geq 2(d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}), \\ &\geq -2\|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

- $d^2 f_n < 0$ et $d^2 f_{n+1} d^2 f_n < 0$, on a par hypothèse $d^2 f_{n+1} + d^2 f_n < 0$,

$$\begin{aligned} H &\geq (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + (d_n^g - d^2 g_{n+1}) + d^2 f_{n+1} + d^2 f_n, \\ &\geq 2(d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + d^2 f_n + d^2 g_n, \\ &\geq 2(d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + d^2 f_n - d^2 g_n, \\ &\geq -3\|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

□

C.3 Preuve de la stabilité du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (théorème II.11)

THÉORÈME C.1

Le schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ est stable au sens de la définition I.7.

Preuve

On vérifie les hypothèses du théorème II.4.

Premièrement, on vérifie l'hypothèse (II.8) pour F .

Il est facile de voir sur l'expression de la perturbation F (II.40) et (II.41), et en utilisant la propriété (x) de II.2 que l'on a pour tout $d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\|F(d_1) - F(d_2)\|_\infty \leq \frac{1 + 7 * 2}{64} \|d_1 - d_2\|_\infty.$$

Deuxièmement, on a besoin de prouver l'hypothèse de contraction (II.9).

Soit $f, g \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Regardons $(d^2 f^1 - d^2 g^1)_k$ selon que $k = 2n + 1$ (cas 1) ou $k = 2n$ (cas 2).

On va considérer plusieurs cas, selon que f ou g vérifient les cas définis dans la preuve du théorème II.8.

Pour $k=2n+1$, on a 7 cas à étudier explicités dans le tableau D.1, les autres se déduisant par symétrie.

On va utiliser le lemme II.1 en vérifiant pour chaque cas les hypothèses du lemme.

	f vérifie	g vérifie	notation		f vérifie	g vérifie	notation
Cas 1A	1A ₁	1A ₁	1A ₁ - 1A ₁	Cas 1B	1B ₁	1A ₂	1B ₁ - 1A ₂
	1A ₁	1A ₂	1A ₁ - 1A ₂		1B ₁	1B ₁	1B ₁ - 1B ₁
	1A ₁	1B ₁	1A ₁ - 1B ₁		1B ₁	1B ₂	1B ₁ - 1B ₂
	1A ₁	1B ₂	1A ₁ - 1B ₂		1B ₂	1A ₂	1B ₂ - 1A ₂

TAB. C.1 – Cas à considérer pour $k = 2n + 1$ dans la preuve la stabilité de $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

- Cas $1A_1 - 1A_1$, avec l'équation (II.44) on peut directement conclure que

$$\begin{aligned} |d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{19 + 1 + 7 * 2 + 3 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \frac{5}{8} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

- Cas $1A_1 - 1A_2$, avec les équations (II.44) et (II.46), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{19}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{15}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 f_{n+2} + \frac{3}{64} d^2 g_n - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) \\
&\quad + \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2}) + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) \\
&= \frac{16}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
&\quad + \frac{1}{64} (d^2 f_{n+2} + d^2 g_{n+1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
&\quad + \frac{3}{64} (d^2 g_n + d^2 f_{n+1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{16 + 7 * 2 + 2 + 1 + 3 * 2 + 3 * 3}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{45}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Cas $1A_1 - 1B_1$, avec les équations (II.44) et (II.47), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{19}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{18}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 f_{n+2} \\
&\quad + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2}) \\
&= \frac{19}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad + \frac{1}{64} (d^2 f_{n+2} + d^2 g_{n+1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
&\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{19 + 3 * 2 + 3 + 7 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{21}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Cas $1A_1 - 1B_2$, avec les équations (II.44) et (II.49), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{19}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{16}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{1}{64} (d^2 f_{n+2} - d^2 g_{n+2}) + \frac{3}{64} d^2 g_n \\
 &\quad + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
 &= \frac{16}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + \frac{1}{64} (d^2 f_{n+2} - d^2 g_{n+2}) \\
 &\quad + \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
 &\quad + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})).
 \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{16 + 1 + 7 * 2 + 3 * 3 + 3 + 3 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{23}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $1B_1 - 1A_2$, avec les équations (II.47) et (II.46), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{18}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{15}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{3}{64} d^2 g_n \\
 &\quad - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
 &\quad + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) \\
 &= \frac{15}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
 &\quad + \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})).
 \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{15 + 5 * 2 + 3 * 3 + 3 + 3 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{5}{8} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $1B_1 - 1B_1$, avec l'équation (II.47) on peut directement conclure

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{18 + 5 * 2 + 3 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{17}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $1B_1 - 1B_2$, avec les équations (II.47) et (II.49), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{18}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{16}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{3}{64} d^2 g_n - \frac{1}{64} d^2 g_{n+2} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) \\
&\quad + \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) + \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2}) - \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) \\
&= \frac{16}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) + \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2})) \\
&\quad - \frac{1}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_{n+2} - 2 \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2})) \\
&\quad + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad + \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{16 + 7 * 2 + 3 + 3 * 2 + 3 * 3}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{3}{8} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Cas $1B_2 - 1A_2$, avec les équations (II.49) et (II.46), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1 &= \frac{16}{64} d^2 f_{n+1} - \frac{15}{64} d^2 g_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 g_{n+2} - \frac{3}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) \\
&\quad + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) + \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2}) \\
&= \frac{16}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) - \frac{3}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) \\
&\quad + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{1}{64} (d^2 f_{n+2} + d^2 g_{n+1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})) \\
&\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n+1}, d^2 f_{n+2}) - \text{PPH}(d^2 g_{n+1}, d^2 g_{n+2})).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n+1}^1 - d^2 g_{2n+1}^1| &\leq \frac{16 + 3 + 9 * 2 + 3 + 7 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{11}{16} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Pour $k=2n$, on a encore 7 cas à étudier explicités dans le tableau C.2, les autres se déduisant encore par symétrie.

On peut remarquer par exemple que les équations (II.46) et (II.50) font intervenir les mêmes

C.3. Preuve de la stabilité du schéma $S_{\text{PPHAPPROX}}$ (théorème II.11)

	f vérifie	g vérifie	notation		f vérifie	g vérifie	notation
Cas 2A	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1 - 2A_1$	Cas 2B	$2B_1$	$2A_2$	$2B_1 - 2A_2$
	$2A_1$	$2A_2$	$2A_1 - 2A_2$		$2B_1$	$2B_1$	$2B_1 - 2B_1$
	$2A_1$	$2B_1$	$2A_1 - 2B_1$		$2B_1$	$2B_2$	$2B_1 - 2B_2$
	$2A_1$	$2B_2$	$2A_1 - 1B_2$		$2B_2$	$2A_2$	$2B_2 - 2A_2$

TAB. C.2 – Cas à considérer pour $k = 2n$ dans la preuve la stabilité de $S_{\text{PPHAPPROX}}$.

coefficients mais le fait que les cas ne soit pas identiques, implique que les hypothèses du lemme II.1 ne sont pas vérifiées. On a encore besoin d'écrire tous les cas.

- Cas $2A_1 - 2A_1$, avec l'équation (II.50) on peut directement conclure

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{15 + 3 + 9 * 2 + 5 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty} \\
 &\leq \frac{23}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

- Cas $2A_1 - 2A_2$, avec les équations (II.50) et (II.52), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{15}{64} d^2 f_n - \frac{19}{64} d^2 g_n - \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) + \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n) \\
 &= \frac{16}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
 &\quad - \frac{1}{64} (d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2\text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n))
 \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{16 + 9 * 2 + 3 * 3 + 5 * 2 + 3}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty} \\
 &\leq \frac{28}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

- Cas $2A_1 - 2B_1$, avec les équations (II.50) et (II.53), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{15}{64} d^2 f_n - \frac{16}{64} d^2 g_n - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) - \frac{1}{64} d^2 g_{n-1} - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\
&\quad + \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n) + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&= \frac{16}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) \\
&\quad + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{1}{64} (d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
&\quad - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{16 + 3 + 9 * 2 + 3 + 5 * 3}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{25}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Cas $2A_1 - 2B_2$, avec les équations (II.50) et (II.55), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{15}{64} d^2 f_n - \frac{18}{64} d^2 g_n - \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\
&\quad - \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
&= \frac{15}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) - \frac{5}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
&\quad - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{15 + 5 * 2 + 3 * 3 + 9 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{13}{16} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

- Cas $2B_1 - 2A_2$, avec les équations (II.53) et (II.52), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{16}{64} d^2 f_n - \frac{1}{64} d^2 g_n - \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64} (d^2 f_{n-1} - d^2 g_{n-1}) + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
 &= \frac{16}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{1}{64} (d^2 f_{n-1} - d^2 g_{n-1}) \\
 &\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
 &\quad - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})).
 \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{16 + 1 + 7 * 2 + 3 * 3 + 9 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{57}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $2B_1 - 2B_1$, avec l'équation (II.53) on peut directement conclure

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{16 + 3 + 1 + 9 * 2 + 7 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{21}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $2B_1 - 2B_2$, avec les équations (II.53) et (II.55), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{16}{64} d^2 f_n - \frac{18}{64} d^2 g_n - \frac{3}{64} d^2 f_{n+1} + \frac{1}{64} d^2 f_{n-1} + \frac{9}{64} \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{3}{64} \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}) - \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) + \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n) \\
 &= \frac{16}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{9}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \frac{3}{64} (d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2 \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad + \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
 &\quad + \frac{1}{64} (d^2 f_{n-1} + d^2 g_n - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)).
 \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{16 + 9 * 2 + 3 * 3 + 7 * 2 + 3}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
 &\leq \frac{15}{16} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
 \end{aligned}$$

- Cas $2B_2 - 2A_2$, avec les équations (II.55) et (II.52), on obtient

$$\begin{aligned}
d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1 &= \frac{18}{64} d^2 f_n - \frac{1}{64} d^2 g_{n-1} + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{5}{64} \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) + \frac{7}{64} \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n) \\
&= \frac{19}{64} (d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{3}{64} (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
&\quad - \frac{1}{64} (d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2 \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
&\quad - \frac{7}{64} (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)).
\end{aligned}$$

Avec le lemme II.1 et la propriété II.2, on obtient

$$\begin{aligned}
|d^2 f_{2n}^1 - d^2 g_{2n}^1| &\leq \frac{19 + 3 * 2 + 3 + 7 * 2}{64} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\
&\leq \frac{21}{32} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.
\end{aligned}$$

L'hypothèse (II.9) est ainsi vérifiée. Le théorème II.4 s'applique. □

ANNEXE D

Preuve de résultats du chapitre III

D.1 Une propriété de la moyenne PPH

LEMME D.1

Si $|x_1| > |y_1|$ et $|x_2| < |y_2|$, alors $|x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))| \leq 2\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty$.

Preuve

- Si $x_1 y_1 > 0$, $x_2 y_2 < 0$ et $x_1 x_2 < 0$,

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))| &\leq |x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1)| \\ &\leq \max(|x - x_1|, \text{PPH}(x_1, y_2)). \end{aligned}$$

Or, $|\text{PPH}(x_1, y_1)| \leq 2 \min(|x_1|, |y_1|)$, ce qui permet de conclure.

- Si $x_1 y_1 > 0$, $x_2 y_2 < 0$ et $x_1 x_2 > 0$,

$$|x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))| \leq |x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1)|.$$

Si $x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1) > 0$,

$$|x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Si $x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1) < 0$, par hypothèse on a $|x_1| > |y_1|$, donc

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2 - \text{PPH}(x_1, y_1)| &\leq |x_1 - x_2 - x_1| \\ &\leq |y_2| \\ &\leq |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

- Si $x_1 y_1 > 0$, $x_2 y_2 > 0$ et $x_1 x_2 < 0$, d'après l'équation (II.42), on a

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))| &\leq \max(|x_1|, |y_1|) + \max(|x_2|, |y_2|) \\ &\leq 2 \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

- Si $x_1 y_1 > 0$, $x_2 y_2 > 0$ et $x_1 x_2 > 0$, on suppose par exemple $x_1 > 0$. En notant $A = x_1 - x_2 - (\text{PPH}(x_1, y_1) - \text{PPH}(x_2, y_2))$, on a

$$\begin{aligned} A &= x_1 - x_2 - \frac{2x_1 y_1}{x_1 + y_1} + \frac{2x_2 y_2}{x_2 + y_2} \\ &= \frac{x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - y_1 x_2^2 + x_1^2 y_2 - x_1 y_1 x_2 - x_1 y_1 y_2 + y_1 x_2 y_2 + y_1 x_2 y_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 x_1 y_2 + y_1 x_2 - y_1 y_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} (x_1 - x_2) + \frac{2x_1 x_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} (y_1 - y_2) \\ &= \left(1 - \frac{2y_1 y_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)}\right) (x_1 - x_2) + \frac{2x_1 x_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} (y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Par hypothèse, $|x_2| < |y_2|$ et $x_1 x_2 > 0$, donc $2x_1 x_2 \leq |x_1 x_2 + x_1 y_2|$, ce qui nous permet de conclure. $\square$

D.2 Preuve de la convergence du schéma S_{PPHTRIA} (théorème III.3)

On rappelle l'écriture du schéma S_{PPHTRIA}

$$S_{\text{PPHTRIA}}f = Sf + F(d^2f) \quad (\text{D.1})$$

avec

S le schéma linéaire défini en base 3 par le masque $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

De façon analogue au schéma $S_{1,1}$, on peut montrer que ce schéma linéaire a une fonction limite C^{1-} (section I.3.2).

F la fonction définie par $F(d^2f)_{3n} = f_n$,

$$F(d^2f)_{3n+1} = \begin{cases} \frac{w}{3}d^2f_{n+1} - (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|, \\ -\frac{w}{3}d^2f_n - (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

et

$$F(d^2f)_{3n+1} = \begin{cases} -\frac{w}{3}d^2f_{n+1} - (\frac{1}{9} - \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_{n+1}) & \text{si } |d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|, \\ \frac{w}{3}d^2f_n - (\frac{1}{9} + \frac{w}{3})\text{PPH}(d^2f_n, d^2f_n) & \text{si } |d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

THÉORÈME D.1

Pour $0 \leq w < \frac{1}{9}$, le schéma S_{PPHTRIA} (III.28) converge vers une fonction limite $C^{\beta-}$ avec $\beta = -\log_3(\alpha)$ et $\alpha = \frac{1+2w}{3}$. En particulier, $0.738 < \beta \leq 1$.

Preuve

Avec l'expression de F (D.2)-(D.3), on remarque que l'hypothèse (II.3) est vérifiée avec, pour tout $d \in l^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\|F(d)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) \|df\|_\infty.$$

Pour montrer l'hypothèse de contraction(II.4), on doit définir plusieurs cas

Cas 1: $k=3n+1$, étude de $f_{3n+2}^1 - 2f_{3n+1}^1 + f_{3n}^1 = d^2f_{3n+1}^1$

cas 1A: $|d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|$,

cas 1B: $|d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|$,

Cas 2: $k=3n+2$, étude de $f_{3n+3}^1 - 2f_{3n+2}^1 + f_{3n+1}^1 = d^2f_{3n+2}^1$

cas 2A: $|d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|$,

cas 2B: $|d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|$,

Cas 3: $k=3n$, étude de $f_{3n+1}^1 - 2f_{3n}^1 + f_{3n-1}^1 = d^2f_{3n}^1$

cas 3A: $|d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|$ et $|d^2f_{n-1}| > |d^2f_n|$,

cas 3B: $|d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|$ et $|d^2f_{n-1}| < |d^2f_n|$,

cas 3C: $|d^2f_n| > |d^2f_{n+1}|$ et $|d^2f_{n-1}| < |d^2f_n|$,

cas 3D: $|d^2f_n| < |d^2f_{n+1}|$ et $|d^2f_{n-1}| > |d^2f_n|$.

De plus, on remarque que pour le schéma linéaire S de masque $a = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, on a

$$(d^2(Sf))_{3n+1} = (d^2(Sf))_{3n+2} = 0 \quad \text{et} \quad (d^2(Sf))_{3n} = \frac{1}{3}d^2f_n.$$

Etudions les différents cas.

- Cas 1, pour le cas 1A, on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n+1}^1 &= -\left(\frac{w}{3} + \frac{w}{3}\right) d^2 f_{n+1} + \left(\left(\frac{2}{9} + \frac{2w}{3} - \frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})\right) \\ &= -w d^2 f_{n+1} + \left(\frac{1}{9} + w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Pour avoir une majoration assez fine, on utilise la définition de la moyenne S_{PPH} (II.42). On a

$$|d^2 f_{3n+1}^1| \leq \left(\frac{1}{9} + w\right) \|d^2 f\|_{\infty}. \quad (\text{D.5})$$

De même, le cas 1B donne

$$d^2 f_{3n+1}^1 = w d^2 f_n + \left(\frac{1}{9} - w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{D.6})$$

- Cas 2, pour le cas 2A, on obtient

$$d^2 f_{3n+2}^1 = w d^2 f_{n+1} + \left(\frac{1}{9} - w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{D.7})$$

Sachant que $0 \leq w < \frac{1}{9}$, la propriété (v) de II.2 concernant la moyenne POWERP donne

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n+2}^1| &\leq \left(\frac{1}{9} + w - w\right) \|d^2 f\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{9} \|d^2 f\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

De même, le cas 2B donne

$$d^2 f_{3n+2}^1 = -w d^2 f_n + \left(\frac{1}{9} + w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \quad (\text{D.9})$$

- Cas 3, pour le cas 3A, on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 &= \frac{1-w}{3} d^2 f_n + \frac{w}{3} d^2 f_{n+1} - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right) \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Avec l'équation (II.42) et le fait que $0 \leq w < \frac{1}{9}$, on a

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1| &\leq \left(\frac{2}{9} - \frac{w}{9} + \frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) \|d^2 f\|_{\infty}, \\ &\leq \frac{1}{3} \|d^2 f\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

D.3. Preuve de la stabilité de l'analyse multirésolution du schéma S_{PPHTRIA} (théorème III.4)

Le cas 3B donne

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 = & \frac{1}{3} d^2 f_n + \frac{w}{3} d^2 f_{n+1} + \frac{w}{3} d^2 f_{n-1} \\ & - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) + \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

De même, on obtient

$$|d^2 f_{3n}^1| \leq \left(\frac{3}{9} + \frac{2w}{3} \right) \|d^2 f\|_{\infty}. \quad (\text{D.13})$$

Pour le cas 3C, on trouve

$$d^2 f_{3n}^1 = \frac{1-2w}{3} d^2 f_n - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) + \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1})). \quad (\text{D.14})$$

On obtient

$$|d^2 f_{3n}^1| \leq \frac{1-2w}{3} \|d^2 f\|_{\infty}. \quad (\text{D.15})$$

Enfin, pour le cas 3D

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 = & \frac{1-w}{3} d^2 f_n + \frac{w}{3} d^2 f_{n-1} - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3} \right) \text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) \\ & - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

On obtient la même inégalité que le cas 3A.

Avec les équations (D.5), (D.8), (D.11) et (D.15), l'hypothèse de contraction (II.4) est vérifiée. On peut alors conclure à la convergence et à la régularité avec les théorèmes II.1 et II.2, sachant que le schéma linéaire S est C^{1-} . $\square$

D.3 Preuve de la stabilité de l'analyse multirésolution du schéma S_{PPHTRIA} (théorème III.4)

THÉORÈME D.2

L'analyse multirésolution associée au schéma S_{PPHTRIA} est stable.

Preuve

Il est facile de voir sur l'expression de la perturbation F (D.2) et (D.3), et en utilisant la propriété (ix) de II.2 de la moyenne POWERP, que l'on a pour tout $d_1, d_2 \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$\|F(d_1) - F(d_2)\|_{\infty} \leq \left(\frac{2}{9} + w \right) \|d_1 - d_2\|_{\infty}.$$

Donc, l'hypothèse (III.13) pour F est vérifiée.

Pour l'hypothèse de contraction (III.14), regardons $(d^2 f^1 - d^2 g^1)_k$ selon que $k = 3n + 1$ (cas 1), $k = 3n + 2$ (cas 2) ou $k = 3n$ (cas 3).

On va considérer plusieurs cas selon que f ou g vérifie les cas définis dans la preuve du théorème de convergence III.3 du schéma S_{PPHTRIA} (annexe D).

Pour $k=3n+1$, on a 2 cas à étudier.

- Si f et g vérifient le cas 1A, d'après l'équation (D.4), on a

$$|d^2 f_{3n+1}^1 - d^2 g_{3n+1}^1| \leq \left(\frac{2}{9} + 3w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \quad (\text{D.17})$$

D'après (III.27), on a $\frac{2}{9} + 3w < \frac{1}{3}$.

De même, si f et g vérifient le cas 1B.

- Si f vérifie le cas 1A et g le cas 1B, d'après l'équation (D.4) et (D.6), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n+1}^1 - d^2 g_{3n+1}^1 &= -w(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n) + \left(\frac{1}{9} + w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - w\right) \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}), \\ &= -w(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2\text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + w\right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})). \end{aligned}$$

Or $|d_n^f| > |d^2 f_{n+1}|$ et $|d_n^g| < |d^2 g_{n+1}|$, le lemme II.1 s'applique, on a

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n+1}^1 - d^2 g_{3n+1}^1| &\leq \left(\frac{2}{9} + 5w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty, \\ &\leq \frac{11}{9} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour $k=3n+2$, on a encore 2 cas à étudier.

- Si f et g vérifient le cas 2A, d'après l'équation (D.7), on a

$$|d^2 f_{3n+2}^1 - d^2 g_{3n+2}^1| \leq \left(\frac{2}{9} - w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty.$$

De même, si f et g vérifient le cas 2B, on obtient une équation similaire à (D.17).

- Si f vérifie le cas 2A et g le cas 2B, d'après l'équation (D.7) et (D.9), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n+2}^1 - d^2 g_{3n+2}^1 &= w(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n) + \left(\frac{1}{9} - w\right) \text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + w\right) \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1}). \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode que dans le cas $k = 3n + 1$, on a

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n+2}^1 - d^2 g_{3n+2}^1| &\leq \left(\frac{2}{9} + 5w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \frac{11}{9} \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour $k=3n$, on a 7 cas à étudier explicités dans le tableau D.1, les autres se déduisant par symétrie.

f vérifie	g vérifie	notation	f vérifie	g vérifie	notation	f vérifie	g vérifie	notation
Cas A	Cas A	$af - ag$	Cas B	Cas B	$bf - bg$	Cas C	Cas C	$cf - cg$
	Cas B	$af - bg$		Cas C	$bf - cg$		Cas D	$cf - dg$
	Cas C	$af - cg$		Cas D	$bf - dg$			
	Cas D	$af - dg$						

TAB. D.1 – Cas à considérer pour $k = 2n$ dans la preuve la stabilité de S_{PPHTRIA} .

- Cas $af - ag$, avec l'équation (D.10) on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1-w}{3} + \frac{w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty} \\
 &\leq \frac{7}{9} \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

- Cas $bf - bg$, avec l'équation (D.12) on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1+2w}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty} \\
 &< \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty}.
 \end{aligned}$$

Les cas $cf - cg$ et $df - dg$ se traitent de façon identique.

- Cas $af - bg$, avec les équations (D.10) et (D.12), on obtient

$$\begin{aligned}
 d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1}{3} (d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{w}{3} (d^2 f_{n+1} - d^2 g_{n+1}) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\
 &\quad - \frac{w}{3} (d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2\text{pph}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)).
 \end{aligned}$$

Etant dans les conditions d'utilisation du lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{w}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + w \right) \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty} \\
 &\leq \left(\frac{7}{9} + \frac{4w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_{\infty},
 \end{aligned}$$

avec $\frac{7}{9} + \frac{4w}{3} < \frac{25}{27}$.

- Cas $af - cg$, avec les équations (D.10) et (D.14), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1-w}{3}(d^2 f_n - d^2 g_n) - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad + \frac{w}{3}(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2pph(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})). \end{aligned}$$

Etant encore dans les conditions d'utilisation du lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1-w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} + w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{7}{9} + \frac{4w}{3}\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

On retrouve la constante du cas $af - bg$.

- Cas $af - dg$, avec les équations (D.10) et (D.16), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1-w}{3}(d^2 f_n - d^2 g_n) - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \frac{w}{3}(d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2pph(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad + \frac{w}{3}(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2pph(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})). \end{aligned}$$

D'après le lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1-w}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + 2w\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{7}{9} + \frac{5w}{3}\right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty, \end{aligned}$$

avec $\frac{7}{9} + \frac{5w}{3} < \frac{26}{27}$.

- Cas $bf - cg$, avec les équations (D.12) et (D.14), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1}{3}(d^2 f_n - d^2 g_n) - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \frac{w}{3}(d^2 f_{n-1} + d^2 g_n - 2pph(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3}\right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad - \frac{w}{3}(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2pph(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})). \end{aligned}$$

Or $|d^2 f_n| > \max(|d^2 f_{n+1}|, |d^2 f_{n-1}|)$ et $|d^2 g_n| < \min(|d^2 g_{n+1}|, |d^2 g_{n-1}|)$, on est dans les conditions

d'utilisation du lemme II.1 et du lemme D.1, on obtient

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} + \frac{2w}{3} + 2w \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{5}{9} + \frac{10w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty, \end{aligned}$$

avec $\frac{5}{9} + \frac{10w}{3} < \frac{25}{27}$.

- Cas $bf - dg$, avec les équations (D.12) et (D.16), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1}{3}(d^2 f_n - d^2 g_n) + \frac{w}{3}(d^2 f_{n-1} - d^2 g_{n-1}) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} + \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad + \frac{w}{3}(d^2 f_{n+1} + d^2 g_n - 2pph(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})). \end{aligned}$$

Etant dans les conditions d'utilisation du lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2w}{3} + w \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{7}{9} + \frac{4w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

On retrouve la constante des cas $af - bg$ et $af - bd$.

- Cas $cf - dg$, avec les équations (D.14) et (D.16), on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1 &= \frac{1-w}{3}(d^2 f_n - d^2 g_n) - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) - \text{PPH}(d^2 g_n, d^2 g_{n+1})) \\ &\quad - \left(\frac{1}{9} - \frac{w}{3} \right) (\text{PPH}(d^2 f_{n-1}, d^2 f_n) - \text{PPH}(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)) \\ &\quad - \frac{w}{3}(d^2 f_n + d^2 g_{n-1} - 2pph(d^2 g_{n-1}, d^2 g_n)). \end{aligned}$$

Avec le lemme II.1, on obtient

$$\begin{aligned} |d^2 f_{3n}^1 - d^2 g_{3n}^1| &\leq \left(\frac{1-w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2w}{3} + w \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{7}{9} - \frac{4w}{3} \right) \|d^2 f - d^2 g\|_\infty. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, l'hypothèse de contraction (III.14) est vérifiée. Les théorèmes III.1 et II.4 s'appliquent pour $0 \leq w < \frac{1}{9}$. □

ANNEXE E

Un exemple de reconstruction

Dans cette partie, on se propose d'expliciter la reconstruction $\mathcal{R}^j$ d'une analyse multirésolution interpolante (section III.2). On considère une reconstruction $\mathcal{R}^j$, polynômiale par morceaux de degré 3, utilisant 4 points.

On rappelle que $\mathcal{R}^j$ dépend des données $f^j = (f(x_n^j))_{n \in \mathbb{Z}}$ où les points $x_n^j \in X^j$, une grille de pas 2^{-j} .

On notera $\mathcal{R}^j$ pour $\mathcal{R}^j(f)$, définie par

$$\mathcal{R}^j(x) = \mathcal{R}_n^j(x) \quad \text{pour} \quad x \in [x_n^j, x_{n+1}^j],$$

avec $\mathcal{R}_n^j$ un polynôme de degré 3 et interpolants les points $g_{n-1}^j, g_n^j, g_{n+1}^j$ et g_{n+2}^j , dépendant des points $(f_n^j)_{n \in \mathbb{Z}}$.

On s'intéresse à établir une expression du polynôme $\mathcal{R}_n^j$ pour les points dyadiques de l'intervalle $[x_n^j, x_{n+1}^j]$.

E.1 Expression de $\mathcal{R}_n^j$ sur (x_n^j, x_{n+1}^j)

Le polynômes $\mathcal{R}_n^j$ s'écrit

$$\mathcal{R}_n^j(x) = a_0 + a_1(x - x_n^j) + a_2(x - x_n^j)^2 + a_3(x - x_n^j)^3,$$

avec les constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 vérifiant

$$\begin{aligned} a_0 &= g_n^j & \text{et} & & a_1 + a_2 2^{-j} + a_3 2^{-2j} &= 2^j (g_{n+1}^j - g_n^j) \\ a_1 + 2a_2 2^{-j} + 4a_3 2^{-2j} &= 2^j \frac{g_{n+2}^j - g_n^j}{2} & \text{et} & & a_1 - a_2 2^{-j} + a_3 2^{-2j} &= 2^j (g_n^j - g_{n-1}^j), \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression des coefficients $(a_i)_{i=0 \dots 3}$

$$\begin{aligned} a_0 &= g_n^j, & a_1 &= \frac{1}{6h} (-g_{n+2}^j + 6g_{n+1}^j - 3g_n^j - 2g_{n-1}^j) \\ a_2 &= \frac{1}{2h^2} (g_{n+1}^j - 2g_n^j + g_{n-1}^j) & \text{et} & & a_3 &= \frac{1}{6h^3} (g_{n+2}^j - 3g_{n+1}^j + 3g_n^j - g_{n-1}^j). \end{aligned}$$

EXEMPLE E.1

Dans le cas du schéma S_{PPH} , la reconstruction $\mathcal{R}^j$ utilise des données locales $(g_n^j + i)_{i=-1 \dots 2}$ définies par

$$\begin{aligned} g_n^j &= f_n^j, & g_{n+1}^j &= f_{n+1}^j, \\ g_{n-1}^j &= f_{n+1}^j + f_n^j - f_{n+2}^j + 2\text{PPH}(d^2 f_n^j, d^2 f_{n+1}^j) & \text{quand} & & |d^2 f_{n+1}^j| < |d^2 f_n^j|, \\ g_{n+2}^j &= f_{n+1}^j + f_n^j - f_{n-1}^j + 2\text{PPH}(d^2 f_n^j, d^2 f_{n+1}^j) & \text{quand} & & |d^2 f_{n+1}^j| > |d^2 f_n^j|. \end{aligned}$$

L'expression du schéma S_{PPH} est alors donnée par $(S_{\text{PPH}} f^j)_{2n+1} = \mathcal{R}_n^j(n2^{-j} + 2^{-(j+1)})$.

Il semble alors intéressant de connaître l'expression de $\mathcal{R}_n^j$ sur les points dyadiques de l'intervalle $[x_n^j, x_{n+1}^j]$.

E.2 Expression de $\mathcal{R}_n^j$ sur des points dyadiques de (x_n^j, x_{n+1}^j)

On considère $x \in [x_n^j, x_{n+1}^j]$ s'écrivant $x = x_n^j + 2^{-(j+p)}k$ avec $0 \leq k \leq 2^p - 1$.
On a l'expression suivante

PROPOSITION E.1

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [0, 2^p - 1]$, la reconstruction $\mathcal{R}_n^j$ s'écrit au point $x = x_n^j + 2^{-(j+p)}k$

$$\mathcal{R}_n^j(x) = b_{-1}g_{n-1}^j + b_0g_n^j + b_1g_{n+1}^j + b_2g_{n+2}^j, \quad (\text{E.1})$$

avec les constantes $(b_i)_{i=-1\dots 2}$ vérifiant

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \frac{2^{-(p+1)}}{3}k(2^{-p}3k - 2^{-2p}k^2 - 2) \\ b_0 &= 1 - 2^{-(p+1)}k - 2^{-2p}k^2 + 2^{-(3p+1)}k^3 \\ b_1 &= 2^{-p}k + 2^{-(2p+1)}k^2 - 2^{-(3p+1)}k^3 \\ b_2 &= \frac{2^{-(p+1)}}{3}k(2^{-2p}k^2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

EXEMPLE E.2

Par exemple, aux points $x_n^j + 2^{-j}\frac{1}{4}$ et $x_n^j + 2^{-j}\frac{3}{4}$, le calcul des coefficients $(b_i)_{i=-1\dots 2}$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n^j(x_n^j + 2^{-j}\frac{1}{4}) &= -\frac{7}{128}f_{n-1}^j + \frac{105}{128}f_n^j + \frac{35}{128}f_{n+1}^j - \frac{5}{128}f_{n+2}^j \\ \mathcal{R}_n^j(x_n^j + 2^{-j}\frac{3}{4}) &= -\frac{5}{128}f_{n-1}^j + \frac{35}{128}f_n^j + \frac{105}{128}f_{n+1}^j - \frac{7}{128}f_{n+2}^j. \end{aligned}$$

On obtient alors le schéma de subdivision linéaire de N. Dyn and M. S. Floater et K. Hormann [DFH05].

La propriété suivante permet d'écrire l'équation (E.1) sous forme d'une perturbation d'une moyenne des points g_n^j et g_{n+1}^j .

PROPOSITION E.2

La reconstruction $\mathcal{R}_n^j$ s'écrit au point $x = x_n^j + 2^{-(j+p)}k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour $0 \leq k \leq 2^p - 1$,

$$\mathcal{R}_n^j(x) = c_0^1g_n^j + c_1^1g_{n+1}^j + c_0^2(d^2g^j)_n + c_1^2(d^2g^j)_{n+1}, \quad (\text{E.3})$$

avec les constantes $(c_i)_{i=-1\dots 2}$ vérifiant

$$\begin{aligned} c_0^1 + c_1^1 &= 1, & c_1^1 &= 2^{-p}k, \\ c_0^2 &= b_{-1} & \text{et} & & c_1^2 &= b_2. \end{aligned}$$

Preuve

On remarque que $\sum_{i=-1}^2 b_i = 1$ (reproduction des constantes par le polynôme $\mathcal{R}_n^j$).

On écrit

$$b_0 + 2b_{-1} - b_2 + b_1 - b_{-1} + 2b_2 = 1.$$

En posant

$$\begin{aligned} c_0^1 &= b_0 + 2b_{-1} - b_2 = 1 - 2^{-p}k \\ c_1^1 &= b_1 - b_{-1} + 2b_2 = 2^{-p}k, \end{aligned}$$

on a bien $c_0^1 + c_1^1 = 1$.

D'après l'équation (E.1), $\mathcal{R}_n^j(x)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n^j(x_n^j + 2^{-(j+p)}k) &= c_0^1 g_n^j + c_1^1 g_n^j + b_{-1} g_{n-1}^j - (2b_{-1} - b_2) g_n^j + (b_{-1} - 2b_2) g_{n+1}^j + b_2 g_{n+2}^j \\ &= c_0^1 g_n^j + c_1^1 g_n^j - b_{-1} (dg^j)_{n-1} + (b_{-1} - b_2) (dg^j)_n + b_2 (dg^j)_{n+1} \\ &= c_0^1 g_n^j + c_1^1 g_n^j - b_{-1} (d^2 g^j)_n + b_2 (d^2 g^j)_{n+1}. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE E.3

On peut ainsi montrer que la reconstruction $\mathcal{R}_n^j$ aux points $x_n^j + 2^{-j}\frac{1}{4}$ et $x_n^j + 2^{-j}\frac{3}{4}$ peut se réécrire

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n^j(x_n^j + 2^{-j}\frac{1}{4}) &= \frac{3}{4} f_n^j + \frac{1}{4} f_{n+1}^j - \frac{3}{32} \left(\frac{7d^2 f_n^j + 5d^2 f_{n+1}^j}{12} \right) \\ \mathcal{R}_n^j(x_n^j + 2^{-j}\frac{3}{4}) &= \frac{1}{4} f_n^j + \frac{3}{4} f_{n+1}^j - \frac{3}{32} \left(\frac{5d^2 f_n^j + 7d^2 f_{n+1}^j}{12} \right). \end{aligned}$$

Le schéma [DFH05] peut donc s'écrire comme une perturbation du schéma *Chaikin* en faisant intervenir l'opérateur aux différences d'ordre 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [AACD02] S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, and R. Donat. Tensor product multiresolution analysis with error control for compact image representation. *Signal Processing*, 82:587–608, 2002.
- [AB04] F. Aràndiga and A. M. Belda. Weighted eno interpolation and applications. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2:187–195, 2004.
- [AD00] F. Aràndiga and R. Donat. Nonlinear multi-scale decompositions: The approach of a. harten. *Numerical Algorithms*, 23:175–216, 2000.
- [ADH99a] F. Aràndiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the hat function i: Linear reconstruction techniques. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:160–203, 1999.
- [ADH99b] F. Aràndiga, R. Donat, and A. Harten. Multiresolution based on weighted averages of the hat function ii: Non-linear reconstruction techniques. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20:1053–1093, 1999.
- [ADL] S. Amat, K. Dadourian, and J. Liandrat. On a general analysis tool for nonlinear interpolatory subdivision schemes and associated multiresolution transform. *Advances of Computational Mathematics*. submitted.
- [ADLT06] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, and J. C. Trillo. Analysis of a new non-linear subdivision scheme. applications in image processing. *Foundadtions of Computational Mathematics*, 6(2):193–226, 2006.
- [AEV03] N. Aspert, T. Ebrahimi, and P. Vanderghenst. Non-linear subdivision using local coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 20:165–187, 2003.
- [AL05] S. Amat and J. Liandrat. On the stability of pph nonlinear multi-resolution. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 18(2):198–206, 2005.
- [Ama01] S. Amat. *Avances en la multiresolution de Harten y aplicaciones*. PhD thesis, Universidad de Valencia, 2001.
- [Asp03] N. Aspert. *Non-linear Subdivision of univariate signals and discrete surfaces*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2003.
- [BCR07a] C. Beccari, G. Casciola, and L. Romani. An interpolatory 4-point c^2 ternary non-stationary subdivision scheme with tension control. *Computer Aided Geometric Design*, 24:210–219, 2007.
- [BCR07b] C. Beccari, G. Casciola, and L. Romani. A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics. *Computer Aided Geometric Design*, 1:1–9, 2007.
- [Bel04] A. M. Belda. Weighted eno y aplicaciones. Technical report, group of numerical analysis, 2004.

-
- [BH95] B. L. Bihari and A. Harten. Application of generalized wavelets: an adaptive multiresolution scheme. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 61:275–321, 1995.
 - [CC78] E. E. Catmull and J. H. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on topological meshes. *Computer Aided Design*, 19(453):350–355, 1978.
 - [CD01] G. Chiavassa and R. Donat. Point value multiscale algorithms for 2d compressible flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(3):805–823, 2001.
 - [CDF92] A. Cohen, I. Daubechies, and J. C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:485–560, 1992.
 - [CDM91] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, and C. A. Micchelli. Stationary subdivision. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 93(453):346–349, 1991.
 - [CDM03] A. Cohen, N. Dyn, and B. Matei. Quasi-linear subdivision schemes with applications to eno interpolation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15:89–116, 2003.
 - [CEHO89] S. R. Chakravarthy, B. Engquist, A. Harten, and S. Osher. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. *Journal of Computational Physics*, 89(1):231–303, 1989.
 - [Cha74] G. Chaikin. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:346–349, 1974.
 - [CKMP02] A. Cohen, S. M. Kaber, S. Muller, and M. Postel. Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws. *Mathematics of Computations*, 73:183–225, 2002.
 - [CLO94] T. Chan, X-D. Liu, and S. Osher. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1):200–212, 1994.
 - [CLY06] S. W. Choi, B-G. Lee, and J. Yoon. Stationary subdivision schemes reproducing polynomials. *Computer Aided Geometric Design*, 23:351–360, 2006.
 - [Coh03] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods*. Elsevier, 2003.
 - [Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
 - [DD89] G. Delauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5:49–68, 1989.
 - [DFH05] N. Dyn, M. S. Floater, and K. Hormann. A C^2 four-point subdivision scheme with fourth order accuracy and its extensions. In M. Dæhlen, K. Mørken, and L. L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Tromsø 2004*, Modern Methods in Mathematics, pages 145–156. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2005.
 - [DGL87] N. Dyn, J. A. Gregory, and D. Levin. A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*, 4:257–268, 1987.
 - [DGMM98] W. Dahmen, B. Gottschlich-Muller, and S. Muller. Multiresolution schemes for conservation laws. Technical report, IGPM-Report 159, 1998.
 - [DGS99] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens. Regularity of irregular subdivision. *Constructive Approximation*, 15:381–426, 1999.
 - [DGW08] N. Dyn, P. Grohs, and J. Wallner. Approximation order of interpolatory nonlinear subdivision schemes. *JCAM*, 2008.
 - [DKLD99] N. Dyn, F. Kuijt, D. Levin, and R. Van Damme. Convexity preservation of the four-point interpolatory subdivision scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 16(8):789–792, 1999.

-
- [DL95] N. Dyn and D. Levin. Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision scheme. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 193:594–621, 1995.
- [DL02] N. Dyn and D. Levin. Subdivision schemes in geometric modelling. *Acta Numerica*, pages 73–144, 2002.
- [Don92] D. L. Donoho. Intrepolating wavelet transforms. Technical report, Department of Statistics, 1992.
- [DRS04] I. Daubechies, O. Runborg, and W. Sweldens. Normal multi-resolution approximation of curves. *Constructive Approximation*, 20:399–463, 2004.
- [DS78] D. Doo and M. Sabin. Behaviour of recursive division surface near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 10:356–360, 1978.
- [DY00] D. L. Donoho and T. PY. Yu. Nonlinear pyramid transforms based on median interpolation. *SIAM Journal of mathematical analysis*, 31(5):1030–1061, 2000.
- [Dyn92] N. Dyn. Subdivision schemes in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*, 20(4):36–104, 1992.
- [FM98] M. S. Floater and C. A. Micchelli. Nonlinear stationary subdivision. *Approximation Theory*, 212:214–224, 1998.
- [GG02] S. Gomez and B. Gustafasson. Combinig wavelets with finite differences: a consistence analysis. Technical report, 2002.
- [Gro07] P. Grohs. *Smoothness Analysis of nonlinear Subdivison Schemes on regular grids*. PhD thesis, TU-Wien, 2007.
- [Gro08] P. Grohs. Smoothness analysis of subdivision schemes on regular grids by proximity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46:2169–2182, 2008.
- [GW08] P. Grohs and J. Wellner. Log-exponential analogues of univariate subdivision schemes in lie groups and their smoothness properties. In M. Neamtu and L. L. Schumaker, editors, *Approximation Theory XII: San Antonio 2007*, pages 181–190. Nashboro Press, 2008.
- [Har93] A. Harten. ENO schemes with subcell resoolution. *Journal of Applied Numerical Analysis*, 12:153–193, 1993.
- [Har94] A. Harten. Adaptive multiresolution schemes for shock computations. *Journal of Computational Physics*, 115:319–338, 1994.
- [Har96] A. Harten. Multiresolution representation of data: a general framework. *SIAM Journal Numerical Analysis*, 33:1205–1256, 1996.
- [HIDS02] M. F. Hassan, I. P. Ivriissimitzis, N. A. Dodgson, and M. A. Sabin. An interpolating 4-point c^2 ternary stationary subdivison scheme. *Computer Aided Geometric Design*, 19:1–18, 2002.
- [HO] S. Harizanov and P. Oswald. Stability of nonlinear subdivision and multiscale transforms. *Constructive Approximation*. submitted.
- [HS07] K. Hormann and M. A. Sabin. A family of subdivision schemes with cubic precision. *Computer Aided Geometric Design*, 25(1), 2007.
- [Jaf91] S. Jaffard. Pointwise smoothness,two-microlocalization and wavelets coefficients. *Publicaciones Matematicas*, 35(0):155–168, 1991.
- [JM91] R. Q. Jia and C. A. Micchelli. Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets ii: Powers of two. In A. Le Mehaute P.J. Laurent and L.L. Schumaker eds., editors, *Curves and Surfaces*, pages 209–246. Academic Press, 1991.
- [JS96] G. Jiang and C-W Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.

-
- [JSD03] M. K. Jena, P. Schunmugaraj, and P. C. Das. A non-stationary subdivision scheme for curve interpolation. *Anziam Journal*, 44:216–235, 2003.
 - [KD98] F. Kuijt and R. Van Damme. Convexity preserving interpolatory subdivision scheme. *Constructive Approximation*, 14:609–630, 1998.
 - [KD99] F. Kuijt and R. Van Damme. Monocity preserving interpolatory subdivision scheme. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 101:203–229, 1999.
 - [KD02] F. Kuijt and R. Van Damme. Shape preserving interpolatory subdivision scheme for nonuniform data. *Journal of Approximation theory*, 114:1–32, 2002.
 - [Kob96] L. Kobbelt. A variational approach to subdivision. *Computer Aided Geometric Design*, 13:743–761, 1996.
 - [Kob98] L. Kobbelt. Using the discrete fourier-transform to analyze the convergence of subdivision schemes. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5:68–91, 1998.
 - [Kui98] F. Kuijt. *Convexity Preserving Interpolation. Stationary Nonlinear Subdivision and Splines*. PhD thesis, University of Twente (The Netherlands), 1998.
 - [Lev99] D. Levin. Using laurent polynomial representation for the analysis of non-uniform binary subdivision scheme. *Advances in Computational Mathematics*, 11:41–54, 1999.
 - [Lev00] A. Levin. *Combined Subdivision schemes*. PhD thesis, Tel-Aviv University, 2000.
 - [Mal89] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989.
 - [Mal00] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Pres, 2000.
 - [Mar94] A. Marquina. Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(4):892–915, 1994.
 - [Mat02] B. Matei. *Méthodes Multirésolutions non-linéaires. Applications aux traitements d'images*. PhD thesis, Université Paris VI, 2002.
 - [Mat05] B. Matei. Smoothness characterization and stability in nonlinear multiscale framework: theoretical results. *Asymptotic Analysis*, 41(3-4):277–309, 2005.
 - [MDL05] M. Marinov, N. Dyn, and D. Levin. Geometrically controlled 4-point interpolatory schemes. In A. Le Mehaute P.J. Laurent and L.L. Schumaker eds., editors, *Advances in multiresolution for geometric modelling*, pages 301–315. Springer, 2005.
 - [MeHW01] G. Morin and J. Warren et H. Weimer. A subdivision scheme for surfaces of revolution. *Computer Aided Geometric Design*, 18:483–502, 2001.
 - [Mey90] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs I*. Hermann, Paris, 1990.
 - [MM04] V. Maxim and M-L. Mazure. Subdivision scheme and irregular grids. *Numerical Algorithms*, 35:1–28, 2004.
 - [OS88] S. Osher and C-W Shu. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes i. *Journal of Computational Physics*, 77(2):439–471, 1988.
 - [OS89] S. Osher and C-W Shu. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes ii. *Journal of Computational Physics*, 83(1):32–78, 1989.
 - [Osw03] P. Oswald. Smoothness of nonlinear subdivision schemes. In *Curves and Surfaces Fitting (Saint-Malo, 2002)*, Modern Methods in Mathematics, pages 323–332, Brentwood, TN, 2003. Nashboro Press.
 - [Osw04] P. Oswald. Smoothness of nonlinear median-interpolation subdivision. *Adv. Comput. Math.*, 20(4):401–423, 2004.

-
- [Rio92] O. Rioul. Simple regularity criteria for subdivision schemes. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6):1544–1576, 1992.
- [Sjo95] B. Sjogreen. Numerical experiments with the multiresolution scheme for the compressible euler equations. *Journal of Computational Physics*, 117:251–261, 1995.
- [SM04] S. Serna and A. Marquina. Power eno methods: a fifth order accurate weighted power eno method. *Journal of Computational Physics*, 194:632–658, 2004.
- [Swe97] W. Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal.*, 29(2):511–546, 1997.
- [War95] J. Warren. Binary subdivision schemes for functions over irregular knot sequences. In T. Lyche M. Daehlen and L.L. Schumaker eds., editors, *Mathematical Method in CAGD III*. 1995.
- [XY05] G. Xie and T.PY. Yu. Smothnness analysis of nonlinear subdivision schemes of homogenous and affine invariant type. *Constructive Approximation*, 22:219–254, 2005.