



HAL
open science

Séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs de sources corrélées

Hicham Ghennioui

► **To cite this version:**

Hicham Ghennioui. Séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs de sources corrélées. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université du Sud Toulon Var, 2008. Français. NNT: . tel-00325910

HAL Id: tel-00325910

<https://theses.hal.science/tel-00325910>

Submitted on 30 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Med V-Agdal & Université du Sud-Toulon
Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var & Faculté des Sciences de Rabat
LSEET, UMR CNRS 6017 & GSCM-LRIT

UFR Informatique & Télécommunications
École doctorale « Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication » de Toulon-Var

THÈSE EN CO-TUTELLE

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences

Discipline : Sciences de l'ingénieur
Spécialité : Informatique & Télécommunications

présentée par

Hicham GHENNIQUI

SÉPARATION AVEUGLE DE MÉLANGES LINÉAIRES CONVOLUTIFS DE SOURCES CORRÉLÉES

dirigée par :

Driss ABOUTAJDINE
Abdellah ADIB

Eric MOREAU
Nadège THIRION-MOREAU

soutenue le 19 juillet 2008 devant le jury composé de :

M. DRISS ABOUTAJDINE
M. CHRISTIAN JUTTEN
M. M'HAMED BAKRIM
M. ABDELLAH ADIB
M. ERIC MOREAU
MME. NADÈGE THIRION-MOREAU
M. FRANCOIS BOURZEIX

Professeur à l'Université Med V-Agdal de Rabat
Professeur à l'Université Joseph Fourier de Grenoble
Professeur à l'Université Cadi Ayyad de Marrakech
Professeur à l'Université Med V-Agdal de Rabat
Professeur à l'Université du Sud-Toulon
Professeur habilité à l'Université du Sud-Toulon
Directeur technique, AMESYS (I2E) Maroc

Président
Rapporteur
Rapporteur
Co-Directeur de Thèse
Directeur de Thèse
Directrice de Thèse
Invité

Dedicaces

A mes chers parents :

Amina SENHALLI et El Houcine GHENNOUJ,

a qui je dois ce que je suis.

Que Dieu leur preserve longue vie et bonne sante.

A ma chere soeur Fatima Zahra, a son mari Abd El Adime.

A mes chers freres :

Said et sa femme Hanan et a leur fils mon cher Ahmane.

Rachid et sa femme Amal et a leur fils mon cher Dussama et leur fille ma chere Douaa.

Fouad et Sami avec eux j'ai passe de bons moments a Rabat.

Mohammed et Abedlatif.

Et a toute la famille.

Hicham GHENNOUJ

Remerciements

Ce travail a été effectué au LRIT (Laboratoire de Recherche en Informatique et Télécommunications) à la Faculté des Sciences de Rabat et au LSEET (Laboratoire de Sondages Electromagnetiques de l'Environnement Terrestre) au sein de l'Université du Sud-Toulon. Il rentre dans le cadre de la coopération franco-marocaine dans le domaine des STIC (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication)¹.

En premier, je tiens à remercier le Professeur Driss ABOUTAJDINE, Coordonnateur du pôle de compétence STIC et Directeur du LRIT.

Je tiens particulièrement à remercier mes deux Directeurs de thèse, Professeur Eric MOREAU et Professeur Abdellah ADIB, pour avoir accepté de diriger mes recherches. Leurs compétences, leurs conseils et leurs idées ont été dans l'aboutissement de ce travail. Je leur témoigne de ma reconnaissance. J'exprime ma gratitude au Professeur Eric Moreau, pour m'avoir accueilli à l'ISITV (Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var). Il m'a fait découvrir les fondements de la séparation aveugle de sources. C'est un bon ami qui m'a encouragé à faire la recherche scientifique et de l'enseignement.

Je remercie chaleureusement ma co-Directrice de thèse Madame Nadège THIRION-MOREAU, pour la gentillesse et la patience qu'elle a manifesté à mon égard durant cette thèse, pour l'encadrement, pour l'hospitalité dont elle a fait preuve envers moi lors de mes séjours que j'ai effectué en France. Ses qualités scientifiques et humaines m'ont permises de le mener à bien, dans les meilleures conditions. Profonds remerciements pour sa contribution significative à la correction et l'amélioration de mon manuscrit.

Je tiens à remercier les membres du jury :

- Monsieur Driss ABOUTAJDINE, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Merci pour l'effort qu'il fait pour promouvoir la recherche scientifique au Maroc.
- Monsieur Christian JUTTEN, Professeur à l'Université Joseph Fourier à Grenoble, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse. Je suis très sensible à sa présence dans ce jury.
- Monsieur M'Hamed BAKRIM, Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Marrakech, d'avoir accepté d'évaluer ce travail.
- Monsieur Abdellah ADIB, Professeur à l'Institut Scientifique de Rabat.
- Monsieur Eric MOREAU, Professeur et Responsable du département Télécom, à l'Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var.
- Madame Nadège THIRION-MOREAU, Professeur habilité à l'Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var.

1. Pôle de compétence STIC et l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique)

- Monsieur Francois BOURZEIX, Directeur technique d'AMESYS (I2E) Maroc, filiale du Groupe Crescendo Industrie, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également aux personnels du :

- CNRST (Centre Nationale de Recherche Scientifique et Technique), pour la gestion de la bourse d'excellence marocaine.
- SCAC (Service de Coopération et d'Action Culturelle) de l'Ambassade de France au Maroc, pour le deuxième financement de cette thèse.
- EGIDE, centre français pour l'accueil et les échanges internationaux, pour l'organisation et la gestion de mes séjours en France.

Je tiens à remercier également, Christophe DELUIGI, Maître de conférence à l'ISITV, et tous les professeurs du département Télécom au sein de l'ISITV.

Merci aussi à tous mes collègues et amis de longue date du LRIT qui se reconnaîtront ici. Je leur exprime ma profonde sympathie et leur souhaite beaucoup de bien.

Toute mon amitié aux doctorants avec eux j'ai partagé le bureau pendant ces années, et avec qui j'ai eu tant de discussions fructueuses. Je remercie en particulier El Mostafa FADAILI et Saloua RHIOUI avec eux j'ai développé deux nouvelles méthodes de séparation de sources.

Je veux adresser tous mes remerciements à mes collègues d'AMESYS.

Je souhaite enfin remercier tous mes amis au Maroc et en France, pour leurs encouragements. Je remercie également les membres de l'Association des Jeunes Chercheurs en Informatique et Télécommunications (AJCIT).

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions le problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés réels ou complexes de sources. Les sources considérées sont réelles ou complexes, déterministes ou aléatoires et dans ce dernier cas statistiquement indépendantes ou corrélées, stationnaires, cyclostationnaires ou non-stationnaires. Nous développons des approches combinant de nouveaux algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe (non unitaires) à de nouveaux détecteurs de points (temps-fréquence ou autres...) particuliers permettant d'élaborer le ou les ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. Les principaux avantages de ces approches sont d'être plus directes en ce sens qu'elles ne requièrent plus de blanchiment préalable des observations. Elles permettent en outre d'aborder le cas réputé difficile des signaux corrélés.

En ce qui concerne les algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe, nous proposons quatre nouveaux algorithmes sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée. Le premier algorithme est de type algébrique itératif. Il est basé sur l'optimisation d'un critère de type moindres carrés. Les trois autres approches utilisent un schéma d'optimisation de type gradient. Dans un premier temps le calcul du gradient matriciel de la fonction de coût étudiée est approché. Puis dans un second temps le calcul exact est mené et deux nouveaux algorithmes sont proposés : l'un à base de gradient, l'autre à base de gradient relatif. Nous étudions les versions à pas fixe de ces trois algorithmes, puis les versions à pas optimal afin d'accélérer la convergence des algorithmes (le pas est alors recalculé algébriquement à chaque itération en cherchant les racines d'un polynôme d'ordre trois). Un lien avec la diagonalisation conjointe non unitaire est également établi. Ces algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe possèdent l'avantage d'être généraux : les matrices de l'ensemble considéré ne sont ni nécessairement réelles, ni à symétrie hermitienne, ni définies positives et le bloc-diagonaliseur conjoint peut être une matrice unitaire ou non-unitaire.

Mots clés

Algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe, décompositions matricielles conjointes, séparation aveugle de sources, mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources corrélées, fonction de corrélation cyclique, spectres et distributions temps-fréquence spatiaux bilinéaires et quadratiques, détecteurs automatiques de points.

Abstract

In this thesis, we study the problem of the blind separation of over-determined linear convolutive real or complex mixtures of deterministic or random, statistically independent or correlated, stationary, cyclo-stationary or non-stationary and real or complex sources. We have developed approaches that combine the new (non-unitary) joint (block) diagonalization to two novel detectors of particular points to build the matrices set to be joint (block) diagonalized. The main advantages of the proposed approaches are that they are more direct since they do not require a pre-whitening stage any more and that they can be used with correlated signals.

Concerning the joint block-diagonalization algorithms, we have proposed four joint block-diagonalization algorithms. The first algorithm is iterative and based on an algebraic optimization scheme. The three other ones are based on gradient approaches. The first one relies upon a gradient approach, but the matrix gradient is approximated, whereas the two other ones are based on an exact calculus (one is based on the gradient approach, the other is based on the relative gradient approach). The optimal step size versions of these three algorithms is provided to accelerate their convergence. It means that the step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of a 3rd-degree polynomial. The main advantage of the proposed algorithms is that they are more general (the real, positive definite or hermitian assumptions about the matrices belonging to the considered set are no more necessary and the found joint block diagonalizer can be either a unitary or a non-unitary matrix). They can also be applied to solve the joint diagonalization problem.

Key words

Joint block-diagonalization algorithms, matrix decompositions, blind sources separation, over-determined convolutive linear mixtures of correlated sources, cyclic correlation function, bilinear and quadratic time-frequency spectra and distributions, points automatic detection procedures.

Table des matières

Dédicaces	iii
Remerciements	v
Résumé	vii
Abstract	ix
Liste des acronymes	xxi
Glossaire	xxiii
I Séparation aveugle de sources	1
Introduction générale	3
1 Séparation de sources : problématique & applications	7
1.1 Problématique & éléments classiques de séparation de sources	7
1.1.1 Modélisation mathématique du problème de séparation de sources	8
1.1.2 Modélisation des sources et du système de mélange	8
1.1.3 Réalisation du système de mélange	9
1.1.4 Lien avec le système de mélange instantané	10
1.1.5 Comment reformuler le modèle convolutif en un modèle de type instantané? .	10
1.1.6 Hypothèses classiques de séparation de sources	12
1.1.7 Indéterminations liées au problème de séparation de sources	14
1.1.8 Indice de performance	16
1.1.9 Blanchiment spatial d'ordre deux	16
1.2 Applications de la séparation de sources	20
1.2.1 Application à l'audio et au traitement de la parole	20
1.2.2 Application aux systèmes de radio-communication	21
1.2.3 Applications biomédicales	22
1.3 Conclusion	23
2 Séparation de sources : approches en contextes instantanés & convolutifs	25
2.1 Méthodes de la séparation de mélanges instantanés de sources	26
2.1.1 Méthodes utilisant les fonctions de contraste	26
2.1.2 Méthodes exploitant la cohérence temporelle ou la non-stationnarité	27

2.1.3	Méthodes basées sur les transformées temps-fréquence spatiales	31
2.2	Méthodes de la séparation de mélanges convolutifs de sources	32
2.2.1	Approches temporelles	32
2.2.2	Approches fréquentielles	34
2.3	Discussion & Conclusion	36
3	Nouveaux algorithmes de bloc-diagonalisation conjointes	39
3.1	Bloc-diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices	40
3.1.1	Formulation du problème de la bloc-diagonalisation conjointe	40
3.1.2	Principe de la bloc-diagonalisation conjointe	40
3.1.3	Lien entre la BDC et la DC	42
3.2	Algorithme de BDC basé sur une optimisation algébrique de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$	43
3.2.1	Principe de l'algorithme JBD_{Alg}	43
3.3	Trois nouveaux algorithmes de BDC basés sur des approches de type Gradient	45
3.3.1	Principe de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ fondé sur un calcul approximé du gradient matriciel	45
3.3.2	Principe des deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ fondés sur un calcul exact du gradient matriciel	47
3.4	Simulations informatiques et résultats numériques	52
3.4.1	Cas général de la BDC d'un ensemble de matrices complexes	52
3.4.2	Etude d'un cas particulier : la DC d'un ensemble de matrices complexes	59
3.5	Conclusion	65
4	Nouvelles approches de la séparation de sources	67
4.1	Nouveaux détecteurs de matrices possédant une structure algébrique particulière . .	68
4.1.1	Formulation du problème de la détection	68
4.1.2	Détecteur en instantané dans un contexte non-blanchi	69
4.1.3	Détecteur en convolutif dans un contexte non-blanchi	71
4.2	Nouvelles approches de séparation de mélanges linéaires instantanés de sources . . .	71
4.2.1	Approche consistant à se ramener à un problème aux valeurs propres généralisées : $\text{P}_{\text{NU,TFM}}$	71
4.2.2	Approche basée sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ et d'un algorithme de diagonalisation conjointe non unitaire : $\text{JD}_{\text{inst,TFM}}$	74
4.3	Nouvelles approches pour la séparation de mélanges linéaires convolutifs de sources .	75
4.3.1	Approche exploitant la cohérence temporelle des sources : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$	76
4.3.2	Approche exploitant la cyclo-stationnarité des signaux : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$	77
4.3.3	Approches basées sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,TFM}}$	80
4.4	Résultats des simulations informatiques	82
4.4.1	Mélanges linéaires instantanés de sources	82
4.4.2	Approche exploitant la cohérence temporelle des signaux : application à des signaux de paroles	85
4.4.3	Approche exploitant la cyclo-stationnarité des signaux : applications à des signaux de télécommunications numériques	88
4.4.4	Approche exploitant la diversité temps-fréquence : application à des signaux de télécommunications numériques	91
4.5	Discussion & conclusion	93
	Conclusions & perspectives de recherche	95

<i>Table des matières</i>	xiii
Liste de publications	97
Bibliographie	108
Annexe 1 : Décompositions matricielles conjointes	109
Annexe 2 : Matrices gradients & coefficients du polynôme d'ordre 4	113
Annexe 3 : Éléments de l'analyse temps-fréquence	119
Annexe 4 : Détecteurs de points temps-fréquence utiles	131
Annexe 5 : Corrélation et corrélation croisée cycliques d'un modèle cyclo-stationnaire particulier	135
II Documents annexes	141

Table des figures

1.1	Schéma de réalisation d'un seul mélange linéaire convolutif de sources.	9
1.2	Schéma général de la séparation de mélanges linéaires de sources.	9
1.3	Schéma général de la séparation de sources incluant l'étape de blanchiment.	19
3.1	Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient (absolu) à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ dans un contexte quasiment non-bruité ($\text{RSB} = 100$ dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.	54
3.2	Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient (absolu) à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$, dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.	54
3.3	Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient relatif à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasiment non bruité ($\text{RSB} = 100$ dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.	55
3.4	Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient relatif à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.	55
3.5	Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasi non-bruité ($\text{RSB} = 100$ dB) pour le cas d'une matrice \mathbf{A} carrée. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	56
3.6	Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB) pour le cas d'une matrice \mathbf{A} carrée. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	56
3.7	Comparaison des algorithmes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasi non-bruité dans le cas d'une matrice \mathbf{A} rectangulaire. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	58
3.8	Comparaison des algorithmes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB) et pour une matrice \mathbf{A} rectangulaire. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	58

3.9	Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ dans un contexte quasi non-bruité. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction de la taille d'un bloc n_j pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	60
3.10	Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB). Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction de la taille d'un bloc n_j pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).	60
3.11	Comparaison des algorithmes (JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$) dans un contexte quasi-bruité. A gauche : $\text{RSB} = 5$ et 10 dB. A droite : $\text{RSB} = 70$ et 100 dB.	61
3.12	Taille d'un bloc $n_j = 3$: performance en fonction du rapport signal à bruit des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. Gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. Droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.	61
3.13	Pour une taille de bloc fixée à $n_j = 4$, performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les différents algorithmes (JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$). A gauche : $\text{RSB} = 5$ et 10 dB. A droite : $\text{RSB} = 70$ et 100 dB.	62
3.14	Pour un taille de bloc fixée à $n_j = 4$, performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.	62
3.15	Pour un taille de bloc fixée à $n_j = 6$, performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. A gauche : $\text{RSB} = 5$ et 10 dB. A droite : $\text{RSB} = 70$ et 100 dB.	63
3.16	Pour une taille de bloc fixée à $n_j = 6$, performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.	63
3.17	Diagonalisation conjointe ($n_j = 1$) : performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les algorithmes JD_A , DOMUNG , $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. A gauche : $\text{RSB} = 5$ et 10 dB. A droite : $\text{RSB} = 70$ et 100 dB.	64
3.18	Diagonalisation conjointe ($n_j = 1$) : performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JD_A , DOMUNG , $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.	64
4.1	Trois modulations linéaires en fréquence. A gauche : partie réelle des sources. A droite : spectre des sources.	83
4.2	A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des sources. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des sources.	83
4.3	A gauche : partie réelle des sources mélangées. A droite : spectre des sources mélangées	84
4.4	A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des observations. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des observations.	84
4.5	Points temps-fréquence sélectionnés à l'aide du détecteur \mathbf{C}_{Inst} .	85
4.6	Signaux obtenus après diagonalisation conjointe de l'ensemble de matrices temps-fréquence construit à l'aide du détecteur \mathbf{C}_{Inst} . A gauche : partie réelle des sources estimées. A droite : spectre des sources estimées	86
4.7	A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des sources estimées. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des sources estimées.	86
4.8	Comparaison des algorithmes $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$ sur des ensembles de matrices de corrélation estimées : l_{Conv} en dB en fonction du degré de corrélation (RC en %) des sources.	87
4.9	Fonctions de corrélation et de corrélation croisée des signaux de paroles considérés.	88

4.10	Evaluation de la robustesse de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ par rapport au degré de corrélation (RC en %) des sources ($N_m = 50$ matrices, $\text{RSB} = 100$ dB).	89
4.11	I_{Conv} en dB en fonction du nombre de matrices (à gauche), en fonction du RSB (à droite). Comparaison entre les deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$	90
4.12	Erreur de bloc-diagonalité en dB en fonction du nombre de matrices (à gauche), en fonction du RSB (à droite). Comparaison entre les deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$	90
4.13	I_{Conv} en fonction de la taille des signaux dans les deux cas suivants : fréquences cycliques connues et inconnues.	91
4.14	I_{Conv} en fonction du nombre de réalisations (méthode de Monte-Carlo sur 30 réalisations). Gauche : les fréquences cycliques sont connues. Droite : les fréquences cycliques sont inconnues. Les réalisations sont rangées dans l'ordre décroissant des performances obtenues.	92
4.15	Le nombre de matrices sélectionnées lorsque les fréquences cycliques sont inconnues en fonction de la taille des signaux (à gauche) et en fonction du nombre de réalisations rangées dans l'ordre décroissant des performances obtenues (à droite).	92
4.16	Points temps-fréquence sélectionnées à l'aide du détecteur C_{Conv} . A gauche : $\text{RSB} = 5$ dB ; à droite : $\text{RSB} = 100$ dB.	94
4.17	A gauche : Nombre de matrices temps-fréquence sélectionnées à l'aide du détecteur C_{Conv} en fonction du RSB . A droite : indice de performance I_{Conv} obtenu au moyen des différentes méthodes $\text{JBD}_{\text{Alg,TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{App-grad,TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{GradO,A,TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{GradO,R,TFM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U,TFM}}$ en fonction du RSB	94

Liste des tableaux

2.1	Principe de l'algorithme AMUSE.	28
2.2	Principe de l'algorithme SOBI.	29
2.3	Principe de l'algorithme BGML.	29
2.4	Principe des méthodes utilisant le problème aux VPG.	31
2.5	Principe des méthodes utilisant les RTFSQ ou les STFSQ.	31
3.1	Principe de l'algorithme de BDC basé sur une optimisation algébrique d'un critère de type moindres carrés : JBD_{Alg}	44
3.2	Principe de l'algorithme de BDC basé sur une approche de type gradient, le calcul du gradient matriciel étant approximé : $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$	47
3.3	Principe de l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient (absolu), le calcul du gradient matriciel étant exact, $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$	48
3.4	Principe de l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient relatif, le calcul du gradient matriciel étant exact, $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$	49
3.5	Principe de l'algorithme de BDC à base de gradient à pas optimal : $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$	51
3.6	Principe de l'algorithme de BDC à base de gradient relatif à pas optimal : $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$	51
4.1	Implémentation pratique du détecteur automatique \mathbf{C}_{Inst} de matrices diagonales avec un seul terme non-nul sur la diagonale en utilisant une décomposition en valeurs singulières.	70
4.2	Implémentation pratique du détecteur automatique \mathbf{C}_{Conv} de matrices bloc-diagonales avec un seul bloc non nul sur la diagonale et utilisant une décomposition en valeurs singulières.	71
4.3	Principe de la méthode de séparation de mélanges instantanés de sources (non-stationnaires et corrélées) utilisant le problème aux valeurs propres généralisées : $\text{P}_{\text{NU,TFM}}$	74
4.4	Principe de la méthode $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$ pour la séparation de mélanges instantanés de sources (non-stationnaires et éventuellement corrélées) combinant le détecteur \mathbf{C}_{Inst} de points utiles et un algorithme diagonalisation conjointe non-unitaire.	75
4.5	Principe de la méthode de séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources décorréelées non-stationnaires exploitant la cohérence temporelle : $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$	77
4.6	Principe de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$ pour la séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources cyclo-stationnaires.	80
4.7	Principe de l'approche de séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources (cas de sources non-stationnaires et corrélées) exploitant la diversité temps-fréquence : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,TFM}}$	82
4.8	TF des fenêtres glissantes les plus usuelles.	128
4.9	Principales propriétés des transformées temps-fréquence quadratiques.	129

Liste des acronymes

ACI	Analyse en Composantes Indépendantes
ACP	Analyse en Composantes Principales
ACS	Alternating Columns Step
ALS	Alternating Least Squares
AMUSE	Algorithm for Multiple Unknown Signals Extraction
BGML	Block Gaussian Maximum Likelihood
BDC	Bloc Diagonalisation Conjointe
<i>c.à.d.</i>	<i>c'est à dire</i>
CDMA	Code Division Multiple Access
COM2	COntラスト Maximization 2
DC	Diagonalisation Conjointe
DCS	Diagonal Centers Step
DVP	Décomposition en Valeurs Propres
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
ECG	ElectroCardioGramme
EEG	ElectroEncéphaloGramme
EMG	ElectroMyoGramme
FDICA	Frequency Domain ICA
FMRI	Functional Magnetic Resonance Imaging
FOBIUM	Fourth Order Blind Identification of Under-determined Mixtures
ICA	Independent Component Analysis
<i>i.i.d.</i>	<i>indépendante identiquement distribuée</i>
INFOMAX	INFOrmation MAXimization
IRMF	Imagerie par Résonance Magnétique Fonctionnelle
JADE	Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices
JBD _U	Unitary Joint block Diagonalization algorithm
JD _A	Algebraic Joint Diagonalization algorithm
K – L	Kullback-Leibler
MEG	MagnétoEncéphaloGramme
MEMS	Multi-Entrées Multi-Sorties
MIMO	Multiple Input Multiple Output

MISO	Multiple Input Single Output
MSICA	MultiStage ICA
MUSIC	MUltiple SIgnal Classification
PAJOD	Partial Approximate Joint Of Diagonalization
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RSOBI	Robust Second Order Blind Identification
RTFSQ	Représentation Temps-Fréquence Spatiale Quadratique
RSB	Rapport Signal à Bruit
SAS	Séparation Aveugle de Sources
SDIF	Simultaneous Diagonalization In the Frequency domain
SEONS	SEcond Order Non-stationary Source Separation
SPW	Spectre de Pseudo Wigner
SPWV	Spectre de Pseudo Wigner-Ville
SOBI	Second Order Blind Identification
SOS	Statistiques d'Ordre Supérieur
SSO	Statistiques du Second Ordre
STFB	Spectre Temps-Fréquence Bilinéaire
STFQ	Spectre Temps-Fréquence Quadratique
STFSB	Spectre Temps-Fréquence Spatial Bilinéaire
STFSQ	Spectre Temps-Fréquence Spatial Quadratique
STOTD	Simultaneous Third Order Tensor Diagonalization
SW	Spectre de Wigner
SWV	Spectre de Wigner-Ville
TDICA	Time Domain ICA
TDSEP	Temporal Decorrelation source SEParation
TF	Transformée de Fourier
<i>t-f</i>	temps-fréquence
TFBSS	Time-Frequency Blind Source Separation
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
TIFCORR	TIme-Frequency CORRelation
TPW	Transformée de Pseudo Wigner
TPWV	Transformée de Pseudo Wigner-Ville
TTFB	Transformée temps-Fréquence Bilinéaire
TTFQ	Transformée temps-Fréquence Quadratique
TTFSB	Transformée temps-Fréquence Spatiale Bilinéaire
TTFSQ	Transformée temps-Fréquence Spatiale quadratique
TTFL	Transformée temps-Fréquence Linéaire
TTFQ	Transformée temps-Fréquence Quadratique
TW	Transformée de Wigner
TWV	Transformée de Wigner-Ville
UPGMA	Unweighed Pair-Group Method of aggregation using Arithmetic averages
VPG	Vecteurs Propres Généralisés
ZDC	Zéro Diagonalisation Conjointe.

Glossaire

\mathbb{R}	corps des réels
\mathbb{C}	corps des complexes
$\Re\{\cdot\}$	partie réelle d'un nombre complexe
$\Im\{\cdot\}$	partie imaginaire d'un nombre complexe
$\arg\{\cdot\}$	argument d'un nombre complexe
$ \cdot $	module d'un nombre complexe
i	imaginaire pur (de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$)
t, ν, τ	temps, fréquence et retard
$s_j(t)$	j -ème source complexe pour tout j entier
$x_i(t)$	i -ème observation complexe pour tout i entier
$n_i(t)$	i -ème bruit complexe pour tout i entier
n	nombre de sources
m	nombre de capteurs
L	ordre d'un filtre RIF
L'	nombre d'observations retardées
$\mathbf{s}(t)$	vecteur des sources de dimension $n \times 1$
$\widehat{\mathbf{s}}(t)$	vecteur des sources estimées de dimension $n \times 1$
$\mathbf{x}(t)$	vecteur des observations de dimension $m \times 1$
$\mathbf{x}_b(t)$	vecteur des observations blanchies de dimension $m \times 1$
$\mathbf{n}(t)$	vecteur des bruits de dimension $m \times 1$
$\mathbf{y}(t)$	vecteur des signaux à la sortie du séparateur
$\mathbf{S}_j(t)$	vecteur contenant la j -ème source et ses versions retardées de dimension $Q \times 1$ ($Q = L + L'$)
$\mathbf{X}_i(t)$	vecteur contenant la i -ème observation et ses versions retardées de dimension $L' \times 1$
$\mathbf{N}_i(t)$	vecteur contenant le i -ème bruit et ses versions retardées de dimension $L' \times 1$
$\mathbf{S}(t)$	vecteur contenant les sources et ses versions retardées de dimension $N \times 1$ ($N = nQ$)
$\widehat{\mathbf{S}}(t)$	vecteur contenant les sources estimées et ses versions retardées de dimension $N \times 1$
$\mathbf{X}(t)$	vecteur contenant les observations et ses versions retardées de dimension $M \times 1$ ($M = mL'$)
$\mathbf{X}_b(t)$	vecteur contenant les observations blanchies et ses versions retardées de dimension $M \times 1$
$\mathbf{N}(t)$	vecteur contenant les bruits et ses versions retardées de dimension $M \times 1$
$\mathbf{Y}(t)$	vecteur des signaux et ses versions retardées à la sortie du séparateur
$\mathcal{A}\{\cdot\}$	application définie de \mathbb{C}^n vers \mathbb{C}^m
$\mathbf{A}(t)$	système de mélange à MEMS RIF
$a_{ij}(t)$	réponse impulsionnelle entre la j -ème source et le i -ème capteur
\mathbf{A}	matrice d'un système de mélange instantané de scalaires a_{ij}

$\hat{\mathbf{A}}$	matrice estimée de la matrice de mélange \mathbf{A}
\mathbf{H}_{ij}	matrice de structure Toeplitz de dimension $L' \times (L + L')$ contenant les coefficients $a_{ij}(l)$, $l = 1, \dots, L$
\mathbf{H}	matrice bloc-Toeplitz de dimension $M \times N$
\mathbf{B}	matrice de séparation de dimension $N \times M$
$\hat{\mathbf{B}}$	matrice estimée de la matrice de séparation \mathbf{B}
\mathbf{W}	matrice de blanchiment de dimension $N \times M$
\mathbf{U}	matrice unitaire de dimension $N \times N$
$\hat{\mathbf{U}}$	matrice estimée de la matrice unitaire \mathbf{U} de dimension $N \times N$
$\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{H}$	matrice globale de dimension $N \times N$
\mathbf{P}	matrice de permutation
\mathbf{D}	matrice bloc-diagonale ou diagonale
\mathbf{I}_m	matrice identité de dimension $m \times m$
$\mathbf{1}_m$	matrice ne contenant que des 1 de dimension $m \times m$
$\mathbf{0}_m$	matrice ne contenant que des 0 de dimension $m \times m$
$\hat{\mathbf{I}}_{L'}(\tau)$	matrice de dimension $L' \times L'$ contenant des éléments de valeur un sur la $\tau^{\text{ème}}$ diagonale supérieure si $0 \leq \tau < L'$ ou sur la $ \tau ^{\text{ème}}$ sous-diagonale si $-L' \leq \tau \leq 0$ et des zéros ailleurs
\mathbf{Z}	matrice zéro diagonale
$(\cdot)^T$	opérateur de transposition
$(\cdot)^H$	opérateur de transposition conjugaison
$(\cdot)^*$	opérateur de conjugaison complexe
\otimes	produit de Kronecker
\odot	produit de Hadamard
$*$	produit de convolution
$(\cdot)^{-1}$	opérateur d'inversion
$\mathbf{M}^\#$	pseudo-inverse de la matrice \mathbf{M} sachant que $\mathbf{M}^\# = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$
$\text{diag}\{\mathbf{a}\}$	matrice diagonale carrée contenant les éléments du vecteur \mathbf{a}
$\text{tr}\{\mathbf{M}\}$	trace de la matrice \mathbf{M}
$\text{det}\{\mathbf{M}\}$	déterminant de la matrice \mathbf{M}
$\text{rg}\{\mathbf{M}\}$	rang de la matrice \mathbf{M}
$\ \mathbf{M}\ _F$	norme de Frobenius de la matrice \mathbf{M}
$\text{Diag}\{\cdot\}$	opérateur permettant d'extraire la matrice diagonale de son argument
$\text{OffDiag}\{\cdot\}$	opérateur permettant d'extraire la matrice zéro diagonale de son argument
$\text{Bdiag}_{(n_j)}\{\cdot\}$	opérateur permettant d'extraire la matrice bloc-diagonale de son argument. Les r matrices bloc sont de dimension $n_j \times n_j$
$\text{OffBdiag}_{(n_j)}\{\cdot\}$	opérateur permettant d'extraire la matrice zéro bloc-diagonale de son argument. Les r matrices bloc sont de dimension $n_j \times n_j$
$\mathcal{D}\{\cdot\}$	ensemble des matrices bloc-diagonales (diagonales) de taille N_m
$\mathcal{Z}\{\cdot\}$	ensemble des matrices zéro-diagonales de taille M_m
$\mathbf{E}\{\cdot\}$	opérateur d'espérance mathématique
$\langle \cdot \rangle$	opérateur de moyennage temporel
$\mathbf{C}_R\{\cdot\}$	cumulant d'ordre R
$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau)$	matrice de corrélation d'un vecteur $\mathbf{X}(t)$ de signaux aléatoires

$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\tau)$	matrice de corrélation d'un vecteur $\mathbf{X}(t)$ de signaux aléatoires supposé stationnaire
$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau)$	matrice de corrélation moyenne d'un vecteur $\mathbf{X}(t)$ de signaux aléatoires supposé non-stationnaire
$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(\tau)$	matrice de corrélation moyenne d'un vecteur $\mathbf{X}(t)$ de signaux déterministes
$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$	matrice de corrélation cyclique d'un vecteur $\mathbf{X}(t)$ de signaux aléatoires supposé cyclo-stationnaire
$\mathbf{X}^{(f)}(\nu)$	Transformée de Fourier spatiale d'un vecteur de signaux $\mathbf{X}(t)$
$\mathbf{X}^{(fct)}(t, \nu)$	Transformée de Fourier à court-terme spatiale d'un vecteur de signaux $\mathbf{X}(t)$
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac
$D_{KL}\{\cdot\}$	divergence de Kullback-Leibler
$\mathbf{vec}(\cdot)$	opérateur de vectorisation permet de concaténer les colonnes d'une matrice en un vecteur colonne
\mathbf{T}_{Diag}	matrice de transformation définie par $\mathbf{T}_{\text{Diag}} = \text{diag}\{\mathbf{vec}(\mathbf{B}\text{Diag}_{(n_j)}\{\mathbf{1}_N\})\}$
\mathbf{T}_{Boff}	matrice de transformation définie par $\mathbf{T}_{\text{Boff}} = \mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T}_{\text{Diag}}$
$\text{sign}(\cdot)$	fonction signe ($\text{sign}(t) = 1$ si $t \geq 0$ sinon -1)
$\mathcal{H}\{\cdot\}$	transformée de Hilbert.

Première partie

Séparation aveugle de sources

Introduction générale

Contexte scientifique & principaux objectifs

La séparation aveugle de sources (SAS)² a été formalisée pour la première fois par des chercheurs français en traitement de signal au milieu des années 80 [67][68], puis beaucoup de chercheurs dans le monde entier se sont intéressés à ce problème vu la diversité de ses domaines d'application. Parmi ses applications, la téléphonie mobile, les télécommunications numériques, le traitement de la parole, le génie biomédical, la géophysique interne ou externe, le radar, le sonar, etc..

Le principe de la SAS est très simple à énoncer. Il s'agit de retrouver les n signaux sources émis à partir de la seule connaissance de m signaux d'observations reçus correspondant à des mélanges de ces sources. Le traitement est alors aveugle (non-supervisé ou bien autodidacte), en d'autres-termes, on ne possède aucune information sur le système de mélange et les sources sont inobservables. Sans hypothèse supplémentaire, la SAS apparaît comme un problème insoluble. C'est pourquoi la plupart des techniques de SAS reposent sur l'hypothèse de l'indépendance des sources.

Initialement, la SAS a été modélisée à base d'un simple produit. Ceci correspond à un système de mélange linéaire instantané (statique ou sans mémoire), autrement dit les capteurs reçoivent à chaque instant une combinaison linéaire des signaux sources. Plus tard, des modélisations proches de la réalité ont été introduites. L'une de ces modélisations considère le canal de transmission comme un système reposant sur une opération de filtrage. En d'autres-termes, les signaux captés dépendent linéairement à la fois des sources et de leurs versions retardées. Le système de mélange est dit linéaire convolutif (dynamique ou avec mémoire). D'autres modélisations plus complexes et plus réalistes considèrent que les capteurs ont des caractéristiques non-linéaires. Ainsi, la SAS possède plusieurs degrés de difficulté selon le type du système mélangeant envisagé (système linéaire ou non-linéaire, mélange instantané ou convolutif, modèle de mélange sur-déterminé ou sous-déterminé³, ...) et également selon les caractéristiques des sources considérées (signaux à valeurs réelles ou complexes, aléatoires stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires, statistiquement mutuellement indépendants ou corrélés, i.i.d. ou non et déterministes, à puissance moyenne finie ou à énergie finie, ...).

Différentes approches ont été développées dans la littérature pour résoudre le problème de la SAS. Une première approche consiste à utiliser la technique d'analyse en composantes indépendantes (ACI) formalisée par P. Comon dans [28]. Les méthodes basées sur la technique d'ACI utilisent les outils d'analyse d'ordre supérieur pour optimiser des fonctions de coût appelées "contrastes", tout en exploitant les propriétés de cumulants des sources supposées indépendantes [18][34][29][87][72][88][31][109][80][20][4]. Une autre façon possible d'aborder le problème de la SAS est d'exploiter la structure particulière des matrices ou des tranches de tenseurs issues d'un opérateur linéaire, bilinéaire ou quadratique appliqués aux signaux (tels que les fonctions de corrélation, de corrélation cyclique, les cumulants, les

2. En anglais BSS pour Blind Sources Separation.

3. Lorsque le nombre de sources est inférieur à celui de capteurs le système est qualifié de sur-déterminé et dans le cas inverse, il est qualifié sous-déterminé.

transformées temps-fréquence, ...) : elles peuvent être diagonales, zéro-diagonales, bloc-diagonales, (bloc) Toeplitz, ...

Les approches basées sur l'utilisation de représentations temps-fréquence spatiales quadratiques (RTFSQ) ou de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques (STFSQ) nécessitent souvent une étape préalable de sélection (automatique) de points utiles permettant la construction d'ensembles de matrices devant ensuite être (bloc) diagonalisées conjointement et/ou (bloc) zéro-diagonalisées conjointement. Pour que la séparation soit effectivement possible, il faut donc que les RTFSQ ou les STFSQ des sources diffèrent en un nombre suffisant de points temps-fréquence (t - f), en d'autres termes que les signatures des sources soient suffisamment différentes dans le plan t - f pour permettre la construction des ensembles de matrices auxquels on s'intéresse (cette hypothèse jouant le rôle de l'hypothèse d'indépendance sur laquelle sont fondées la plupart des approches de SAS classiques). En contexte instantané, de nombreux travaux sont dédiés au problème de la sélection automatique des points t - f permettant la construction soit d'un seul ensemble [62] (celui des matrices qui devront être diagonalisées conjointement) soit de deux ensembles (ceux des matrices qui devront être diagonalisées conjointement et zéro-diagonalisées conjointement) [1][44]. Certains de ces détecteurs opèrent sur les données blanchies, d'autres directement sur les données non-blanchies. En contexte convolutif, un premier détecteur opérant sur les données blanchies a été proposé dans [50].

En ce qui concerne la mise au point d'algorithmes de décompositions matricielles ou tensorielles conjointes, cette problématique a suscité un certain nombre de travaux. Le premier problème considéré est celui de la diagonalisation conjointe (DC) de matrices sous la contrainte d'unitarité, conduisant aux algorithmes JADE (Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices) [18] et SOBI (Second Order Blind Identification) [6]. Les travaux suivants se sont intéressés à la DC de tenseurs [28][34][86] ou bien à la DC de matrices sans contrainte d'unitarité [38][75][96][112][117][118][121][42]. Dans certains cas, il est possible d'établir un lien entre les approches reposant sur la DC et les approches optimisant les contrastes [18][34][31].

Un second type de décompositions matricielles s'est révélé utile pour des applications telles que la séparation aveugle de sources, les télécommunications ou la cryptographie. Il s'agit de la zéro-diagonalisation conjointe (ZDC). Là encore, le cas unitaire a d'abord été traité dans [7] avant que ne soient proposées deux solutions non-unitaires dans [43][44]. La plupart des approches basées sur les algorithmes de DC et/ou de ZDC (unitaires) ont été appliquées pour résoudre le problème de la séparation de mélanges linéaires instantanés sur-déterminés de sources.

Finalement, il est également possible de faire apparaître un autre type particulier de décompositions matricielles appelé bloc-diagonalisation conjointe (BDC), notamment lorsque l'on s'intéresse au problème de la séparation aveugle de mélanges convolutifs sur-déterminés de sources et à celui de l'estimation des directions d'arrivées des signaux en traitement d'antenne. Les premiers travaux à s'être intéressés à ce type de problème sont dans [12][13][50]. Les matrices considérées sont à symétrie hermitiennes et définies positives et le bloc-diagonaliseur est une matrice unitaire. Nous nous intéressons dans cette thèse à ce dernier type de décompositions de matrices mais en nous affranchissant de la contrainte d'unitarité. De plus nous considérons des matrices non nécessairement réelles, à symétrie hermitienne et/ou définies positives.

Ainsi, le problème auquel nous nous intéressons est celui de la séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés, réels ou complexes de sources à valeurs réelles ou complexes, aléatoires stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires et déterministes, à puissance moyenne finie ou à énergie finie. Le modèle instantané n'étant qu'un cas particulier du modèle convolutif sur lequel nous travaillons, les approches que nous développons sont donc également valables pour ce type de modèle.

L'un des objectifs de cette thèse est l'élaboration de nouveaux détecteurs automatiques des points

utiles permettant la construction d'ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. Un autre objectif est l'élaboration d'algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée, le bruit devant systématiquement être pris en compte dans les algorithmes développés. Ces algorithmes ouvrent également des perspectives d'applications dans des domaines autres que la SAS notamment en traitement d'antenne (méthode MUSIC⁴ temps-fréquence). Les principaux avantages de nos approches de SAS combinant des critères de sélection automatique de bons points (temps-fréquence ou autres . . .) à des algorithmes de (bloc-) diagonalisation conjointe (non-unitaires) sont d'être plus directe en ce sens qu'elles ne requièrent plus de blanchiment préalable des observations. Elles permettent en outre d'aborder le cas de signaux sources corrélés.

Organisation du document

Le document est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre constitue une introduction à la problématique de la séparation de mélanges linéaires convolutifs de sources. Les techniques de reformulation du modèle convolutif en un modèle de type instantané sont présentées. Nous spécifions les hypothèses classiques et les indéterminations inhérentes au problème de la SAS. Nous proposons ensuite un nouvel indice de performance généralisant celui introduit dans [86], afin de mesurer la qualité de l'identification en contexte convolutif. Nous explicitons l'étape préalable de blanchiment en contexte convolutif. Nous montrons également l'influence du pré-blanchiment sur les performances de la séparation tout en généralisant la limite minimale de la séparation introduite dans [61]. Nous concluons ce chapitre sur quelques exemples concrets d'applications de la SAS.

Le second chapitre est consacré aux différentes approches de SAS possédant un lien direct ou indirect avec les approches que nous développons dans cette thèse. Ainsi, nous présentons dans un premier temps les techniques de séparation de mélanges linéaires instantanés de sources. Notamment les techniques optimisant les contrastes, reposant sur la (zéro) diagonalisation conjointe, exploitant la non-stationnarité des sources et/ou les propriétés des RTFSQ. Dans un second temps, nous décrivons certaines approches temporelles et fréquentielles permettant de résoudre le problème de la séparation de mélanges linéaires convolutifs de sources.

Dans le troisième chapitre, nous attaquons le problème des décompositions matricielles conjointes. Nous présentons le problème de la bloc-diagonalisation conjointe et son lien avec la diagonalisation conjointe. Nous proposons ensuite quatre nouveaux algorithmes de BDC sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée. Le premier algorithme de type algébrique itératif, basé sur l'optimisation d'un critère de type moindres carrés. Les trois autres algorithmes utilisent un schéma d'optimisation de type gradient. Dans un premier temps, le calcul de la matrice gradient de la fonction de coût est approché. Puis dans un second temps, le calcul exact est mené et deux nouveaux algorithmes sont proposés : l'un à base de gradient, l'autre à base de gradient relatif. Nous étudions les versions à pas fixe de ces algorithmes, puis les versions à pas optimal afin d'accélérer la convergence des algorithmes (le pas est alors recalculé algébriquement à chaque itération en cherchant les racines d'un polynôme d'ordre trois). Un lien avec la diagonalisation conjointe non unitaire est également établi. Nous présentons également à la fin de ce troisième chapitre les résultats numériques obtenus. Dans le quatrième chapitre, nous introduisons dans un premier lieu deux détecteurs de points utiles permettant respectivement de construire l'ensemble des matrices à diagonaliser conjointement et à bloc-diagonaliser conjointement. Puis dans un second lieu nous proposons deux d'approches de SAS en contexte instantané : l'une est basée sur l'utilisation du problème aux valeurs propres généralisées, l'autre consiste à diagonaliser conjointement un ensemble de matrices t - f par un algorithme de DC

4. Le single MUSIC désigne en anglais MULTIPLE SIGNAL CLASSIFICATION.

sans contrainte d'unitarité. Enfin, Dans un troisième lieu, nous proposons trois types d'approches dédiées au problème de la séparation de mélanges linéaires convolutifs de sources. Elles exploitent respectivement la cohérence temporelle des sources, les propriétés des signaux cyclo-stationnaires et la diversité temps-fréquence. Nous concluons ce chapitre sur des simulations informatiques illustrant le comportement des approches proposées ainsi que leurs efficacités et les comparons à d'autres approches basées quant à elles sur des algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe unitaires.

Séparation de sources : problématique & applications

Dans ce chapitre, nous introduisons la problématique de la SAS dans le cadre des systèmes de mélanges linéaires instantanés et convolutifs. Nous présenterons trois variantes classiques permettant de convertir le modèle convolutif en un modèle de type instantané. Les deux premiers types de reformulation consistent à construire de plus grands vecteurs par concaténation des signaux et de leurs versions retardées dans un ordre bien déterminé [66][82][12][13][50][49]. La concaténation ne s'effectue pas de la même façon, pourtant le modèle instantané obtenu dans les deux cas reste toujours décrit dans le domaine temporel. Le troisième type de reformulation exploite une propriété classique de la transformée de Fourier (TF) : le produit de convolution se transforme en un produit simple par TF. Le modèle convolutif peut être ainsi transformé en un modèle instantané exprimé dans le domaine fréquentiel [90][104][115][116][94][89][85][93][113]. Nous précisons ensuite les hypothèses classiques faites souvent sur les données, bruits et le système de mélange considéré. Les indéterminations inhérentes au problème et l'opération de blanchiment spatial¹ seront également spécifiés. Le pré-blanchiment des données est souvent nécessaire à de nombreuses méthodes de SAS. Cependant, nous allons voir que dans certaines situations, il peut influencer sur les performances de la séparation. En parallèle, nous montrerons que le système de mélange linéaire instantané (mélange sans mémoire ou statique) peut être considéré comme un cas particulier du système de mélange convolutif (mélange avec mémoire ou dynamique). Enfin, nous concluons ce chapitre sur quelques exemples concrets d'application de la SAS, en particulier, les domaines d'application suivants : l'audio (parole & musique) [92][114][94][90][115][89][85], les radio-communications [23][24][32][103][41] et le génie biomédical [35][81][84][36][76][119][5][77][39][54][78][106][120]. Nous trouvons un panorama relativement exhaustif des principales applications de la SAS dans le dernier chapitre du livre [30]. Nous ne présenterons dans ce chapitre que le minimum d'outils nécessaires pour la suite de ce document.

1.1 Problématique & éléments classiques de séparation de sources

Le problème de la SAS consiste à concevoir des méthodes capables de caractériser les données inobservables appelées “sources”, à partir de la seule connaissance de mélanges de ces données appelés “observations”. Nous présentons dans ce paragraphe une formulation de ce problème, les techniques permettant de reformuler le modèle convolutif en un modèle de type instantané, les hypothèses classiques liées au problème, les indéterminations inhérentes au problème, un nouvel indice de performance permettant d'évaluer la qualité de séparation, le pré-blanchiment des données au second

1. On dit également normalisation du second ordre.

ordre et une nouvelle relation indiquant la limite minimale de séparation.

1.1.1 Modélisation mathématique du problème de séparation de sources

Le problème de la SAS peut être modélisé d'une façon simple sous la forme générale suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{A}\{\mathbf{s}(t)\} + \mathbf{n}(t), \quad (1.1)$$

où :

- $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]^T \in \mathbb{C}^n$ représente le vecteur des sources émises.
 - $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_m(t)]^T \in \mathbb{C}^m$ est le vecteur des observations reçues.
 - $\mathcal{A}\{\cdot\}$ est une application définie de \mathbb{C}^n vers \mathbb{C}^m .
 - $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), \dots, n_m(t)]^T \in \mathbb{C}^m$ est le vecteur des bruits perturbateurs additifs.
 - n désigne le nombre de sources émises et m est celui de capteurs (électrodes, antennes, microphones, ...).
- $(\cdot)^T$ désigne l'opérateur de transposition.

1.1.2 Modélisation des sources et du système de mélange

Les n sources $s_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, peuvent être déterministes ou stochastiques à des valeurs réelles ou complexes. Elles peuvent également être stationnaires, cyclo-stationnaires ou d'une façon plus générale non-stationnaires.

En ce qui concerne l'application $\mathcal{A}\{\cdot\}$, elle peut appartenir à deux classes : celle des transformations linéaires instantanées (statiques ou bien sans mémoire), c'est à dire que les capteurs ne reçoivent à chaque instant que des combinaisons linéaires des sources, et celle des convolutions linéaires (globales, dynamiques ou avec mémoire). Dans cette dernière classe, les signaux captés dépendent à la fois des sources et de leurs versions retardées. Elle peut également être plus complexe. Par exemple, la linéarité instantanée ou convolutive de l'application $\mathcal{A}\{\cdot\}$ peut être suivie d'une non-linéarité instantanée opérant composante par composante. On dit dans ce cas que le système mélangeant les sources est post non-linéaire. Ce problème de séparation de mélanges non-linéaires de sources reste encore peu abordé et donc largement ouvert à l'heure actuelle.

Si on suppose que l'application $\mathcal{A}\{\cdot\}$ représente un filtre linéaire et invariant dans le temps, alors une manière de traiter ce problème est de considérer un système multi-entrées multi-sorties (MEMS²) à réponse impulsionnelle finie (RIF) à temps discret décrit par l'équation suivante :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L a_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_i(t), \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

où :

- $a_{ij}(t)$ est la réponse impulsionnelle entre la j -ème source et le i -ème capteur. Les $a_{ij}(t)$ caractérisent le système de mélange MEMS à RIF, que l'on note $\mathbf{A}(t)$.
- L désigne l'ordre du filtre RIF.
- $s_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, sont les n signaux sources.
- $n_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, sont les n signaux bruits.
- $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, sont les m signaux d'observation.

2. En anglais MIMO pour Multiple Input Multiple Output

Nous pouvons ré-écrire le modèle décrit par l'Eq. 1.2 sous une forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\ell=0}^L \mathbf{A}(\ell)\mathbf{s}(t-\ell) + \mathbf{n}(t) = \{\mathbf{A} * \mathbf{s}\}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1.3)$$

où $*$ désigne le produit de convolution, $\mathbf{s}(t)$ est un vecteur de dimension $n \times 1$ contenant les sources, $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{n}(t)$ sont deux vecteurs de dimension $m \times 1$ contenant respectivement les observations et les bruits et les $\mathbf{A}(\ell)$, $\ell = 1, \dots, L$ sont des matrices de dimension $m \times n$ contenant les coefficients du filtre.

Lorsque le modèle considère plus de sources que de capteurs ($n > m$), on dit que le système de mélange est sous-déterminé sinon il est qualifié de sur-déterminé ($m \geq n$).

1.1.3 Réalisation du système de mélange

En examinant l'Eq. 1.2, on remarque que le mélange des sources est effectué au moyen de trois opérations élémentaires simples qui sont le retard, la multiplication et l'addition. Ainsi, la structure de réalisation de ce modèle de mélange pour toute observation $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, reçue au niveau du i -ème capteur, est schématisée au niveau de la Fig. 1.1, où le retard, la multiplication, l'addition de deux signaux et l'addition de n signaux sont représentés respectivement dans des schémas-blocs par z^{-1} , \times , $+$ et Σ .

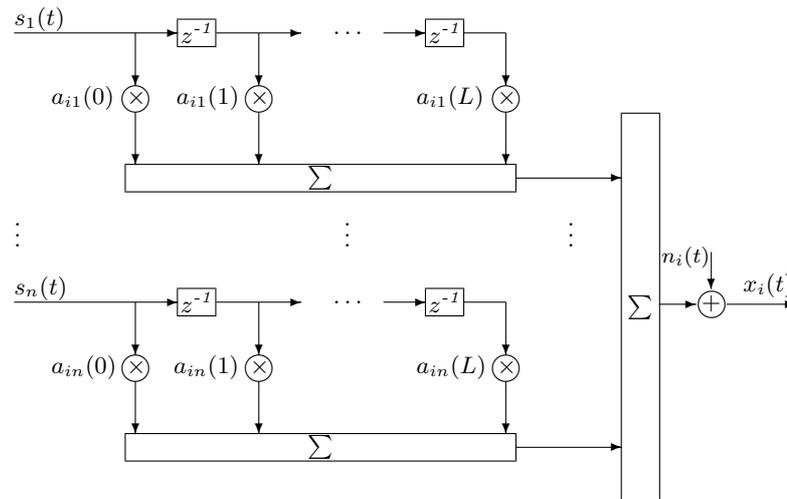


FIGURE 1.1 – Schéma de réalisation d'un seul mélange linéaire convolutif de sources.

Un schéma général de la séparation de mélanges linéaires de sources est présentée au niveau de la Fig. 1.2.

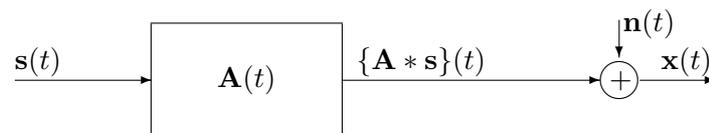


FIGURE 1.2 – Schéma général de la séparation de mélanges linéaires de sources.

1.1.4 Lien avec le système de mélange instantané

Le système de mélange instantané peut être considéré comme un cas particulier du système convolutif. En fait, il est obtenu lorsque le système $\mathbf{A}(t)$ est une matrice de scalaires a_{ij} ne dépendant pas de t , c'est à dire :

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A} \end{cases}, \quad (1.4)$$

et par conséquent $x_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j(t) + n_i(t)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Ce modèle instantané peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1.5)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Dans cette thèse, notre objectif est de proposer des approches capables de résoudre le problème de la séparation de mélanges linéaires convolutifs, réels ou complexes et sur-déterminés ($m \geq n$) de sources à valeurs réelles ou complexes, aléatoires stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires et déterministes, à puissance moyenne finie ou à énergie finie. Le modèle instantané n'étant qu'un cas particulier du modèle convolutif sur lequel nous travaillons et les approches que nous développons sont donc également valables pour ce type de modèle.

1.1.5 Comment reformuler le modèle convolutif en un modèle de type instantané ?

Il existe trois types de techniques permettant de reformuler le modèle convolutif en un modèle de type instantané. Les deux premiers types de reformulations se font au niveau du domaine temporel [66][82][12][13][50][49] et le dernier type transforme le modèle convolutif décrit à l'origine au niveau du domaine temporel en un modèle de type instantané exprimé au niveau du domaine fréquentiel [90][104][115][116][94][89][85][93][113].

Reformulations au niveau du domaine temporel

Il est classique de reformuler le modèle convolutif RIF décrit par l'Eq. 1.2 sous la forme d'un modèle instantané [66][50][49][13][12] du type suivant :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), \quad (1.7)$$

où le vecteur $\mathbf{S}(t)$ de taille $(n(L + L') \times 1)$ et les vecteurs $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ tous deux de taille $(mL' \times 1)$ sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [\mathbf{S}_1(t), \mathbf{S}_2(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)]^T, \\ \mathbf{X}(t) &= [\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_m(t)]^T, \\ \mathbf{N}(t) &= [\mathbf{N}_1(t), \mathbf{N}_2(t), \dots, \mathbf{N}_m(t)]^T, \end{aligned} \quad (1.8)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j(t) &= [s_j(t), s_j(t-1), \dots, s_j(t-(L+L')+1)]^T, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \mathbf{X}_i(t) &= [x_i(t), x_i(t-1), \dots, x_i(t-L'+1)]^T, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \mathbf{N}_i(t) &= [n_i(t), n_i(t-1), \dots, n_i(t-L'+1)]^T, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.9)$$

L' le nombre de retards considéré supposé suffisamment grand, *c.à.d.* :

$$mL' \geq n(L + L'), \quad (1.10)$$

Cette condition assure le fait que le modèle considéré soit bien sur-déterminé. La matrice \mathbf{H} de dimension $M \times N$ ($M = mL'$ et $N = n(L + L')$) s'écrit :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \dots & \mathbf{H}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{m1} & \dots & \mathbf{H}_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Elle est constituée de blocs \mathbf{H}_{ij} , de dimension $L' \times (L + L')$, possédant la structure d'une matrice Toeplitz :

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}(0) & \dots & \dots & a_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij}(0) & \dots & \dots & a_{ij}(L) \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Notons que lorsque $L = 0$, $L' = 1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, nous retombons alors sur un problème de SAS en contexte linéaire instantané, c'est à dire celui décrit au niveau de l'Eq. 1.5.

Il est également possible de reformuler le modèle convolutif décrit par l'Eq. 1.3 en un modèle instantané sous une deuxième forme [82] :

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{H}'\mathbf{S}'(t) + \mathbf{N}'(t), \quad (1.13)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(t) &= [s_1(t), s_2(t) \dots, s_n(t), s_1(t-1), \dots, s_n(t-1), \dots, \\ &\quad s_1(t-(L+L'+1)), \dots, s_n(t-(L+L'+1))]^T, \\ \mathbf{X}'(t) &= [x_1(t), x_2(t) \dots, x_m(t), x_1(t-1), \dots, x_m(t-1), \dots, \\ &\quad x_1(t-L'+1), \dots, x_m(t-L'+1)]^T, \\ \mathbf{N}'(t) &= [b_1(t), b_2(t) \dots, b_m(t), b_1(t-1), \dots, b_m(t-1), \dots, \\ &\quad b_1(t-L'+1), \dots, b_m(t-L'+1)]^T, \end{aligned} \quad (1.14)$$

et \mathbf{H}' est la matrice de Sylvestre de taille $M \times N$ associée au filtre $\mathbf{A}(z) = \sum_{i=1}^L \mathbf{A}(i)z^{-i}$ ($\mathbf{A}(i)$, $i = 1, \dots, L$, est la matrice contenant les coefficients du filtre $a_{ij}(i)$). Cette matrice possède la forme particulière suivante :

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(0) & \mathbf{A}(1) & \dots & \mathbf{A}(L) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(0) & \mathbf{A}(1) & \dots & \mathbf{A}(L) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}(0) & \mathbf{A}(1) & \dots & \mathbf{A}(L) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Pour que la matrice \mathbf{H}' admette une inverse à gauche, il faut que la condition donnée au niveau de l'Eq. 1.10 soit vérifiée.

Reformulation au niveau du domaine fréquentiel

Une autre manière de repasser à un modèle de type instantané est d'exploiter la propriété de la TF qui permet de transformer le produit de convolution en un simple produit. On obtient alors la relation suivante [93][94][104][113][115][116] :

$$\mathbf{X}^{(f)}(\nu) = \mathbf{H}^{(f)}(\nu)\mathbf{S}^{(f)}(\nu) + \mathbf{N}^{(f)}(\nu), \quad (1.16)$$

où $\mathbf{S}^{(f)}(\nu)$, $\mathbf{X}^{(f)}(\nu)$, $\mathbf{N}^{(f)}(\nu)$ et $\mathbf{H}^{(f)}(\nu)$ représentent respectivement la TF du vecteur des sources, des observations, des bruits et du système mélangeant les sources. Notons que dans [85][89][90], les auteurs proposent d'utiliser la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT³) :

$$\mathbf{X}^{(fct)}(t, \nu) = \mathbf{H}^{(f)}(\nu)\mathbf{S}^{(fct)}(t, \nu) + \mathbf{N}^{(f)}(\nu), \quad (1.17)$$

où $\mathbf{S}^{(fct)}(t, \nu)$ est la TFCT du vecteur des sources et $\mathbf{X}^{(fct)}(t, \nu)$ est celle des observations. Le système de mélange est supposé invariant dans le temps, c'est à dire que $\mathbf{H}^{(f)}(\nu)$ ne dépend pas du temps, ainsi pour la TFCT des bruits, puisque ils sont supposés stationnaires.

Nous pouvons montrer que la relation précédente n'est qu'une approximation et qu'elle n'est vraiment correcte que lorsque les signaux sources sont stationnaires. En fait,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(fct)}(t, \nu) &= \int_{\theta} \mathbf{X}(\theta)\mathbf{w}^*(\theta - t) \exp(-2i\pi\nu\theta) d\theta, \\ &= \int_{\theta} \{\mathbf{H} * \mathbf{S}\}(t)\mathbf{w}^*(\theta - t) \exp(-2i\pi\nu\theta) d\theta, \\ &= \int_{\theta} \int_l \mathbf{H}(l)\mathbf{S}(\theta - l)\mathbf{w}^*(\theta - t) \exp(-2i\pi\nu\theta) d\theta dl, \\ &= \int_l \mathbf{H}(l) \left[\int_{\theta} \mathbf{S}(\theta - l)\mathbf{w}^*(\theta - t) \exp(-2i\pi\nu\theta) \right] d\theta dl, \end{aligned}$$

où $(.)^*$ est l'opérateur de conjugaison complexe et $\mathbf{w}(t)$ est une fenêtre glissante. Avec le changement de variable suivant $\theta' = \theta - l$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(fct)}(t, \nu) &= \int_l \mathbf{H}(l) \left[\int_{\theta'} \mathbf{S}(\theta')\mathbf{w}^*(\theta' + l - t) \exp(-2i\pi\nu(\theta' + l)) \right] d\theta' dl, \\ &= \int_l \left[\int_{\theta'} \mathbf{S}(\theta')\mathbf{w}^*(\theta' - (t - l)) \exp(-2i\pi\nu(\theta')) d\theta' \right] \mathbf{H}(l) \exp(-2i\pi\nu l) dl, \\ &= \int_l \mathbf{H}(l)\mathbf{S}^{(fct)}(t - l, \nu) \exp(-2i\pi\nu l) dl \neq \mathbf{H}^{(f)}(\nu)\mathbf{S}^{(fct)}(t, \nu). \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.1.6 Hypothèses classiques de séparation de sources

La séparation est dite aveugle (non-supervisée ou bien autodidacte) si on est capable de séparer les signaux sans aucune information sur le système mélange et que les sources sont inobservables. Sans hypothèses supplémentaires la SAS apparaît comme un problème insoluble. C'est pourquoi la plupart des techniques de SAS reposent sur l'hypothèse d'indépendance des sources, laquelle implique leur décorrélation, c'est à dire que la fonction d'intercorrélacion entre deux sources $s_i(t)$ et $s_j(t)$ avec $i \neq j$ est nulle pour tout retard τ ($R_{ij}(t, \tau) = \mathbf{E}\{s_i(t)s_j^*(t + \tau)\} = 0$, $\mathbf{E}\{.\}$ est l'opérateur d'espérance mathématique). En fonction des méthodes, un certain nombre d'hypothèses autres que l'indépendance s'avèrent parfois nécessaires au bon fonctionnement des méthodes de SAS :

3. La définition de la TFCT d'un signal est donnée au niveau de l'Eq. 4.65 dans l'annexe 3.

- H₀**. Les composantes du vecteur des sources $\mathbf{s}(t)$ sont colorées, ce qui signifie que la fonction d'intercorrélation entre une source et sa version retardée ou bien entre deux versions retardées de cette source est non-nulle. Cette hypothèse est importante pour les méthodes de SAS utilisant les décompositions matricielles.
- H₁**. Le vecteur des sources $\mathbf{s}(t)$ est stationnaire au sens strict et ergodique, cette hypothèse trouve son intérêt lorsque certaines quantités statistiques (telles que les cumulants, les covariances, ...) doivent être estimées à partir d'une seule réalisation d'un processus aléatoire. Généralement, l'estimateur statistique non-biaisé est consistant dans le contexte stationnaire ergodique. Cependant, du point de vue pratique ou plus précisément pour des signaux de parole, des signaux issus de télécommunications, de machines tournantes ou d'engrenages, les signaux biologiques et physiologiques (ElectroEncéphaloGramme (EEG), ElectroCardioGramme (ECG), ElectroMyoGramme (EMG), MagnétoEncéphaloGramme (MEG), température, ...), ..., cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. C'est pourquoi, nous nous intéressons dans cette thèse à différents types de sources, lesquelles peuvent être stationnaires, cyclostationnaires ou non-stationnaires.
- H₂**. Dans le cas d'un système de mélange sur-déterminé, le nombre de capteurs m est supérieur au nombre de sources n .
- H₃**. Dans le cadre des mélanges convolutifs (resp. instantanés), la matrice \mathbf{H} obtenue après reformulation du modèle convolutif (resp. \mathbf{A}) est de rang plein, c'est à dire $\text{rg}\{\mathbf{H}\} = N$ (resp. $\text{rg}\{\mathbf{A}\} = n$), ceci garantit l'existence d'une inverse à gauche de la matrice \mathbf{H} (resp. \mathbf{A}), et donc l'existence du séparateur.
- H₄**. Le vecteur $\mathbf{n}(t)$ contenant les bruits est stationnaire au sens strict. Cette hypothèse ne trouve un intérêt que d'un point de vue pratique (comme pour l'hypothèse **H₁**), en d'autres termes elle n'est pas nécessaire en théorie.
- H₅**. Les composantes de $\mathbf{s}(t)$ sont statistiquement indépendantes des composantes de $\mathbf{n}(t)$.
- H₆**. Les composantes de $\mathbf{n}(t)$ sont blanches gaussiennes mutuellement indépendantes, de moyenne 0 et de variance σ_n^2 . La gaussianité permet aux méthodes utilisant des cumulants d'ordre strictement supérieur à deux d'être insensibles aux bruits gaussiens.

On rappelle que la matrice de corrélation $\mathbf{R}_n(\tau)$ des bruits $n_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ en instantané, et celle $\mathbf{R}_N(\tau)$ du vecteur $\mathbf{N}(t)$ en convolutif, contenant les bruits et leurs versions retardées peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\mathbf{R}_n(\tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t + \tau)\} = \sigma_n^2\delta(\tau)\mathbf{I}_m. \quad (1.19)$$

et,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_N(\tau) &= \mathbb{E}\{\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t + \tau)\} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_n^2\tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) & \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} & \sigma_n^2\tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

où $\mathbf{0}_{L'}$ est la matrice de dimension $L' \times L'$ contenant que des zéros, $\delta(\tau)$ désigne l'impulsion de Dirac, \mathbf{I}_m est la matrice identité de dimension $m \times m$, $(\cdot)^H$ est l'opérateur de transposition conjugaison et $\tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau)$ est la matrice de dimension $L' \times L'$ contenant des éléments de valeur un sur la $\tau^{\text{ème}}$ diagonale supérieure si $0 \leq \tau < L'$ ou sur la $|\tau|^{\text{ème}}$ sous-diagonale si $-L' \leq \tau \leq 0$ et des zéros ailleurs.

Les hypothèses présentées auparavant (surtout la stationnarité et l'indépendance des sources) sont utilisées par la plupart des méthodes de SAS. Toutefois, notre objectif dans cette thèse est de proposer des approches permettant d'atteindre la séparation de mélanges linéaires instantanés ou convolutifs sur-déterminés (le système de mélange peut être complexe) de sources lorsque elles ne sont plus ni nécessairement réelles, ni nécessairement stationnaires et ni nécessairement indépendantes.

1.1.7 Indéterminations liées au problème de séparation de sources

Le problème de la SAS consiste à chercher une matrice \mathbf{B} dite de "séparation" telle que les signaux restaurés $\hat{\mathbf{S}}(t)$ soient de la forme :

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{S}(t) = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{S}(t), \quad (1.21)$$

où \mathbf{P} est une matrice de permutation et \mathbf{D} est une matrice bloc-diagonale⁴ inversible. La matrice de permutation \mathbf{P} peut être modélisée comme une matrice carrée contenant un seul terme de valeur un par ligne et par colonne et zéros ailleurs, par exemple :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la condition de séparation peut être mise sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}\mathbf{H} = \mathbf{P}\mathbf{D}. \quad (1.22)$$

Indétermination de permutation

La première indétermination liée au problème de la SAS est celle de permutation. En fait, l'ordre de restitution des signaux est arbitraire car toute permutation appliquée sur le vecteur $\mathbf{S}(t)$ et sur les lignes de la matrice \mathbf{H} correspondante donne naissance au même vecteur $\mathbf{X}(t)$. Effectivement, en utilisant la propriété de commutativité de l'opération d'addition, on peut écrire pour tout i allant de 1 à m :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(t) - \mathbf{N}_i(t) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} \mathbf{S}_j(t) \\ &= \mathbf{H}_{i2} \mathbf{S}_2(t) + \mathbf{H}_{i1} \mathbf{S}_1(t) + \dots + \mathbf{H}_{in} \mathbf{S}_n(t). \end{aligned} \quad (1.23)$$

C'est à dire,

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t) = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{S}}(t), \quad (1.24)$$

où

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{11} & \dots & \mathbf{H}_{1n} \\ \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{21} & \dots & \mathbf{H}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{m2} & \mathbf{H}_{m1} & \dots & \mathbf{H}_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

4. Une matrice bloc-diagonale est une matrice dont les bloc-diagonaux sont des matrices carrées de taille quelconque et les blocs hors diagonaux sont des matrices nulles.

et

$$\tilde{\mathbf{S}}(t) = [\mathbf{S}_2(t), \mathbf{S}_1(t), \mathbf{S}_3(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)]^T. \quad (1.26)$$

Alors,

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t) = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t). \quad (1.27)$$

Indétermination d'échelle

Il existe aussi une indétermination d'échelle. En d'autres termes, on a :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, m, \forall \tau = 0, \dots, (L + L') + 1, \forall \alpha_j^{(\tau)} \in \mathbb{C}^* (j = 1, \dots, n), \\ x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L \alpha_j^{(\ell)} a_{ij}(\ell) \frac{s_j(t - \ell)}{\alpha_j^{(\ell)}} + n_i(t). \end{aligned} \quad (1.28)$$

C'est à dire

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t) = \overline{\mathbf{H}}\overline{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{D}\overline{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t), \quad (1.29)$$

où \mathbf{D} est une matrice bloc-diagonale inversible,

$$\overline{\mathbf{S}}(t) = \left[\frac{s_1(t)}{\alpha_1^{(0)}}, \dots, \frac{s_1(t - (L + L') + 1)}{\alpha_1^{((L+L')+1)}}, \dots, \frac{s_n(t - (L + L') + 1)}{\alpha_n^{((L+L')+1)}} \right]^T. \quad (1.30)$$

et

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{H}}_{11} & \dots & \overline{\mathbf{H}}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mathbf{H}}_{m1} & \dots & \overline{\mathbf{H}}_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

avec

$$\overline{\mathbf{H}}_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_j^{(0)} a_{ij}(0) & \dots & \dots & \alpha_j^{(L)} a_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_j^{(0)} a_{ij}(0) & \dots & \dots & \alpha_j^{(L)} a_{ij}(L) \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Ainsi, les sources ne peuvent être restituées qu'à une permutation \mathbf{P} près et à un filtre près en modèle convolutif (resp. une amplitude près en instantané, la matrice \mathbf{D} étant dans ce cas là une matrice diagonale inversible).

Nous déduisons alors que la solution du problème de la SAS n'est pas unique, et plus précisément les matrices permettant d'identifier le système de mélange \mathbf{H} prennent la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{H}^\#. \quad (1.33)$$

où $(.)^\#$ désigne l'opérateur de pseudo-inverse (ou inverse de Moore-Penrose généralisée). Notons que dans le cas des signaux complexes, une autre indétermination s'ajoute, celle de déphasage. En fait,

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t) = \widehat{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{H}\mathbf{S}(t), \quad (1.34)$$

où

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\text{diag}\{\exp(\imath\Phi)\} \text{ et } \widehat{\mathbf{S}}(t) = \text{diag}\{\exp(-\imath\Phi)\}\mathbf{S}(t), \quad (1.35)$$

avec $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^T$, $\forall \phi_i \in \mathbb{R}$ et $\text{diag}\{\mathbf{a}\}$ est la matrice diagonale carrée contenant les éléments du vecteur \mathbf{a} .

Ainsi, l'argument de $\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\arg\{\mathbf{X}(t) - \mathbf{N}(t)\}^5 = \arg\{\mathbf{H}\} + \left[\Phi + \arg\{\widehat{\mathbf{S}}(t)\} \right] = \arg\{\mathbf{H}\} + \arg\{\mathbf{S}(t)\}, \quad (1.36)$$

ce qui implique à :

$$\Phi + \arg\{\widehat{\mathbf{S}}(t)\} = \arg\{\mathbf{S}(t)\}. \quad (1.37)$$

1.1.8 Indice de performance

Pour mesurer la qualité de la séparation (plus précisément de l'identification) dans les simulations informatiques, nous proposons l'indice de performance suivant [56] :

$$I_{\text{Conv}}(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right], \quad (1.38)$$

où r est le nombre de blocs, $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius, $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, Q\}$ est la (i, j) -ème matrice bloc (carrée) de $\mathbf{G} = \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{H}$ ⁶ avec $Q = L + L'$. Une séparation parfaite correspond à un indice de performance tendant vers $-\infty$ en échelle logarithmique (0 en échelle linéaire). Cet indice mesure la proximité de $\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{H}$ par rapport au produit $\mathbf{P}\mathbf{D}$ d'une matrice de permutation par une matrice bloc-diagonale. Une bonne séparation est obtenue lorsque la matrice \mathbf{G} est égale à une matrice contenant un seul bloc non-nul par bloc-ligne et par bloc-colonne⁷ (un seul terme non-nul par ligne et par colonne en instantané). Notons que lorsque $L = 0$, $L' = 1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, nous retrouvons alors l'indice de performance introduit dans [86], utilisé pour quantifier la qualité de séparation dans le cadre des systèmes de mélanges instantanés.

1.1.9 Blanchiment spatial d'ordre deux

Un vecteur est dit "blanc" si ses composantes sont décorrélatées et de puissance égale à un. Ainsi, pour décorréler les composantes du vecteur $\mathbf{X}(t)$ tout en imposant en plus que leur puissance soit unitaire, on doit chercher une matrice \mathbf{W} dite de "blanchiment" permettant de rendre le vecteur $\mathbf{X}_{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{X}(t)$ blanc, en d'autres termes la matrice de covariance du vecteur $\mathbf{X}_{\mathbf{b}}(t)$ doit être égale à l'identité. On dit que les composantes de $\mathbf{X}_{\mathbf{b}}(t)$ sont blanchies. Cette étape de blanchiment ou de normalisation⁸ est nécessaire à de nombreuses méthodes de SAS.

Avant de présenter la procédure de la recherche de la matrice de blanchiment \mathbf{W} , on rappelle la définition de la matrice de corrélation d'un vecteur de signaux selon la nature de ces signaux.

5. l'opérateur $\arg\{\}$ désigne l'argument d'un complexe.

6. $\widehat{\mathbf{B}}$ représente la matrices estimée de la matrice de séparation \mathbf{B} .

7. Par exemple : $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{11} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{mn} \end{pmatrix}$, où $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle de dimension $Q \times Q$ et $\mathbf{G}_{ij}, i \in$

$\{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}$ sont les matrices carrées non-nulles de dimension $Q \times Q$.

8. En statistique, on dit standardisation.

Matrice de corrélation de mélanges de sources aléatoires

1. Sources aléatoires stationnaires :

Dans le cas de la séparation des sources aléatoires stationnaires centrés, la matrice de corrélation des signaux observés est définie par (version symétrique) :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) &= \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\tau) = \mathbb{E}\left\{\mathbf{X}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\mathbf{X}^H\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(\tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau).\end{aligned}\quad (1.39)$$

Comme les bruits sont supposés stationnaires, gaussiens et centrés de variance σ_n^2 , on obtient en $\tau = 0$ la relation suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(0)\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M. \quad (1.40)$$

2. Sources aléatoires non-stationnaires :

Lorsque les sources sont aléatoires non-stationnaires (dans ce cas là, la matrice de corrélation dépend à la fois du temps et du retard), on introduit alors la matrice de corrélation moyenne $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(\tau)$:

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(\tau) = \langle \mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau) \rangle, \quad (1.41)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur de moyennage temporel défini pour un vecteur $\mathbf{z}(t)$ comme :

$$\langle \mathbf{z}(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{z}(t) dt. \quad (1.42)$$

ainsi,

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{H}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M. \quad (1.43)$$

3. Sources aléatoires cyclo-stationnaires :

Lorsque l'on s'intéresse au cas particulier des signaux cyclostationnaires, on définit un opérateur linéaire $(\cdot)^{fs}$ représentant la corrélation cyclique, permettant d'exprimer la matrice de corrélation cyclique comme suit [102] :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{fs}(\nu, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau) \exp(-2i\pi\nu t) dt. \quad (1.44)$$

Puisque cet opérateur est linéaire, la matrice de corrélation des signaux observés est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{fs}(\nu, \tau) &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{fs}(\nu, \tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{fs}(\nu, \tau) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{fs}(\nu, \tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)\alpha(\nu),\end{aligned}\quad (1.45)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{fs}(\nu, \tau)$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{fs}(\nu, \tau)$ sont exprimées de façon similaire à $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{fs}(\nu, \tau)$ au niveau de l'Eq. 1.44 et

$$\begin{aligned}\alpha(\nu) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-2i\pi\nu t) dt \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.\end{aligned}$$

A l'origine, on a finalement :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{fs}(0, 0) &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{fs}(0, 0)\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M \\ &= \mathbf{H}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M\end{aligned}\quad (1.46)$$

$$= \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0). \quad (1.47)$$

Matrice de corrélation de mélanges de sources déterministes

1. Sources déterministes à puissance moyenne finie :

Dans le cas où les sources sont déterministes centrés à puissance moyenne finie, on fait appel à l'opérateur de moyennage temporel décrit au niveau de l'Eq. 1.42. Ainsi, la matrice de corrélation du vecteur $\mathbf{S}(t)$ est définie par :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{S}}(\tau) = \left\langle \mathbf{S}(t + \frac{\tau}{2}) \mathbf{S}^H(t - \frac{\tau}{2}) \right\rangle. \quad (1.48)$$

et par conséquent :

$$\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{H} \mathbf{C}_{\mathbf{S}}(0) \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M. \quad (1.49)$$

2. Sources déterministes à énergie finie :

La définition précédente de la matrice de corrélation reste valable pour les sources déterministes à énergie finie, en changeant juste la définition de l'opérateur de moyennage par :

$$\langle \mathbf{z}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{z}(t) dt. \quad (1.50)$$

Détermination de la matrice de blanchiment

Nous présentons maintenant la procédure de la recherche de la matrice de blanchiment \mathbf{W} . Dans le cas où les sources sont aléatoires (resp. déterministes), soit $\mathbf{F} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)$ (resp. $\mathbf{F} = \mathbf{H} \mathbf{C}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)$). \mathbf{F} est une matrice de taille $M \times N$ et $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$ (resp. $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$) est la racine de la matrice de corrélation du vecteur $\mathbf{S}(t)$ en $\tau = 0$.

D'après l'hypothèse \mathbf{H}_3 (§1.1.6), la matrice \mathbf{H} est régulière, alors la matrice \mathbf{F} l'est aussi si $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$ (resp. $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$) est définie positive, ce qui est le cas lorsque les sources possèdent une diversité temporelle (les valeurs propres de la matrice de corrélation sont différentes), elle peut donc se décomposer en valeurs singulières de la manière suivante : $\mathbf{F} = \mathbf{V} \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}$, avec \mathbf{V} et \mathbf{U} deux matrices unitaires de taille respectivement $M \times M$ et $N \times N$ et $\Delta^{\frac{1}{2}}$ est une matrice de dimension $M \times N$, dont le bloc supérieur de dimension $N \times N$ est une matrice diagonale et le bloc inférieur de dimension $(M - N) \times N$ est une matrice nulle. Et par conséquent :

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^H = \mathbf{V} \Delta' \mathbf{V}^H, \quad (1.51)$$

où $\Delta' = \Delta^{\frac{1}{2}} (\Delta^{\frac{1}{2}})^H$ est une matrice carrée diagonale de dimension $M \times M$ tel que :

$$\Delta' = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_N, 0, \dots, 0\}.$$

Cela conduit à avoir :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) &= \mathbf{F} \mathbf{F}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \\ &= \mathbf{V} \Delta' \mathbf{V}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \\ &= \mathbf{V} \Delta'' \mathbf{V}^H, \end{aligned} \quad (1.52)$$

où $\Delta'' = \Delta' + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M = \text{diag}\{\delta_1 + \sigma_n^2, \dots, \delta_N + \sigma_n^2, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^2\}$ est une matrice diagonale. La relation donnée par l'Eq. 1.52 représente la décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$. Ainsi, si $M > N$ alors il est possible d'estimer la variance du bruit σ_n^2 par un moyennage des $M - N$

plus petites valeurs propres de $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$ et la matrice $\mathbf{\Delta}'$ peut être estimée par les N plus grandes valeurs propres. Lorsque $M = N$, on doit forcément supposer que σ_n^2 est connue, et dans ce cas là, la matrice $\mathbf{\Delta}'$ est estimée par la DVP de la matrice $(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) - \sigma_n^2 \mathbf{I}_M)$.

La matrice de blanchiment spatiale \mathbf{W} de taille $N \times M$ est définie par :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H. \quad (1.53)$$

Tandis que la matrice unitaire \mathbf{U} s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{H} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.54)$$

où $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$ est une matrice bloc-diagonale (lorsque les sources sont déterministes, on remplace $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$ par $\mathbf{C}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$). En fait,

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{H} = \mathbf{U} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{W} = (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \text{ et } \mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{H} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut vérifier que la matrice de covariance des observations blanchies $\mathbf{X}_{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{W} \mathbf{X}(t)$ est égale à la matrice identité :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}_{\mathbf{b}}}(0) &= \mathbf{W} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) \mathbf{W}^H \\ &= (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{H} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0) \mathbf{H}^H \mathbf{V} ((\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#})^H \\ &= (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{V} ((\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#})^H \\ &= (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{V} \mathbf{\Delta}' \mathbf{V}^H \mathbf{V} ((\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#})^H \\ &= (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^H ((\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^{\#})^H \\ &= \mathbf{I}_N. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Cet étape de blanchiment permet alors de se ramener au cas d'un mélange unitaire de sources.

En modèle instantané ($L = 0$, $L' = 1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{H}$), la matrice $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{\frac{1}{2}}$ n'est rien d'autre que la matrice identité multipliée par la puissance des sources. Si les sources sont supposées de puissance un (*c.à.d.* standardisées), alors la matrice unitaire en instantané est la suivante :

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{A}. \quad (1.56)$$

Le schéma de la séparation de sources incluant l'étape de blanchiment est donnée au niveau de la Fig. 1.3.

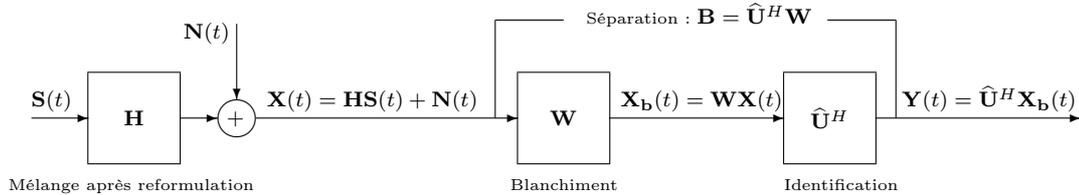


FIGURE 1.3 – Schéma général de la séparation de sources incluant l'étape de blanchiment.

En ce qui concerne les indéterminations liées au problème de SAS incluant l'étape de blanchiment, elles sont les mêmes que celles présentées niveau de la section 1.1.7. En d'autres termes la séparation est atteinte lorsque la matrice $\hat{\mathbf{U}}^H$ estimée de \mathbf{U}^H est de la forme $\mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{U}^H$.

Influence du blanchiment sur les performances de la séparation

Pour montrer l'influence du blanchiment spatial d'ordre deux, J.-F. Cardoso, L. De Lathauwer et L. Guiliéri établissent respectivement dans [16], [34] et [61] sous différentes formes une borne minimale sur les performances de la séparation de mélanges linéaires instantanés de sources. Effectivement, le blanchiment n'a de sens que si la matrice de corrélation des signaux sources à l'origine est à symétrie hermitienne et définie positive d'une part et que les sources sont décorréélées d'autre part. Ainsi, pour obtenir une bonne séparation, la matrice produit $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{H}^9$ doit être égale au produit d'une matrice de permutation \mathbf{P} par une matrice bloc-diagonale \mathbf{D} , toutefois la matrice \mathbf{G} dépend de la matrice de corrélation des sources à l'origine,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{H} &= \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{W}\mathbf{H} \\ &= \hat{\mathbf{U}}^H (\Delta^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{F} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \hat{\mathbf{U}}^H (\Delta^{\frac{1}{2}})^{\#} \mathbf{V}^H \mathbf{V} \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{U} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{P} \overline{\mathbf{D}} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{1.57}$$

En utilisant la définition de l'indice de performance décrit au niveau de l'Eq. 1.38 et l'inégalité de Schwartz, nous déduisons la relation de la borne minimale de la séparation (en échelle linéaire) :

$$0 \leq l_{\text{Conv}}(\mathbf{G}) = l_{\text{Conv}}\left(\mathbf{P} \overline{\mathbf{D}} \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}}\right) \leq l_{\text{Conv}}(\mathbf{P} \mathbf{D}) l_{\text{Conv}}\left(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}}\right) \leq l_{\text{Conv}}\left(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)^{-\frac{1}{2}}\right).\tag{1.58}$$

Notons que lorsque $L = 0$, $L' = 1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ ($l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ n'est rien d'autre que l'indice de performance introduit dans [86]), nous retrouvons alors la relation de la borne minimale de la séparation de mélanges linéaires instantanés de sources présentée dans [61].

En pratique, il se peut dans le cadre des systèmes de mélanges convolutifs (resp. instantanés) que la matrice de corrélation des sources à l'origine ne soit pas bloc-diagonale (resp. diagonale), et ce même lorsque les sources sont effectivement décorréélées du fait d'une mauvaise estimation de la matrice de corrélation des signaux observés. C'est la raison pour laquelle nous avons cherché à supprimer l'étape de pré-blanchiment dans toutes les approches que nous proposons pour résoudre le problème de la SAS.

1.2 Applications de la séparation de sources

La SAS possède de nombreuses applications parmi lesquelles la téléphonie mobile, les télécommunications numériques, le traitement de la parole, le génie biomédical, la géophysique interne ou externe, le radar, le sonar, etc... Le nombre de contributions des applications de SAS est élevé. Dans ce paragraphe, nous ne nous focalisons que sur certains travaux concernant les applications suivantes : l'audio (parole & musique), les radio-communications et le génie biomédical, du fait que les algorithmes que nous développons au dernier chapitre prennent en considération les caractéristiques des signaux et la nature du système de mélange de ces applications.

1.2.1 Application à l'audio et au traitement de la parole

En audio, l'application \mathcal{A} donnée au niveau de l'Eq. 1.1 est en général de type convolutif (problème d'échos ou lorsque les personnes parlent en se déplaçant), les capteurs sont des microphones et

9. $\hat{\mathbf{B}}$ est la matrice estimée de la matrice de séparation $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{\#}$.

$s_i(t)$, $\forall i = 1, \dots, n$, représente le signal de parole ou de musique (la parole ou les signaux de musique étant de nature non-stationnaire). Le système de propagation peut être à multi-entrées multi-sorties (MEMS). Les bruits $\mathbf{n}(t)$ représentent toute perturbation additive reçue au niveau des microphones. La plupart des travaux visant le domaine de l'audio et du traitement de la parole ne s'appliquent pas au signal monophonique, autrement dit dans le cas où l'on dispose d'un seul microphone. Généralement, ces travaux peuvent être appliqués pour résoudre le problème de "Cocktail Party". Il s'agit de séparer les voix des différentes personnes qui parlent en même temps dans une salle, tout en utilisant des enregistrements effectués au niveau de plusieurs microphones. Parmi les travaux qui visent le domaine d'application audio, on peut énumérer :

- ⤵ Dans [114], on trouve un algorithme simple s'intéressant aux situations physiques réelles comme le cas d'un environnement acoustique. Le modèle convolutif considéré est restrictif ($n = m = 2$).
- ⤵ L. Parra et ses collaborateurs ont appliqué concrètement la SAS pour identifier les signaux acoustiques (non-stationnaires) simultanément enregistrés dans un environnement multi-trajets (système de mélange convolutif) [94]. De même que la majorité des algorithmes convolutifs de SAS, les auteurs transforment dans un premier temps le modèle convolutif en un modèle de type instantané via la TF. Ils appliquent ensuite la diagonalisation conjointe (DC) sur un ensemble de matrices de même fréquence.
- ⤵ Le travail proposé dans [85] concerne le problème de la séparation de mélanges convolutifs des sources audio dans une situation réelle. Les auteurs adaptent le principe de l'analyse en composantes indépendantes (ACI) [28] dans le domaine fréquentiel.
- ⤵ Dans une application réelle concernant des expériences réelles dans des studios d'enregistrement acoustique, A. Westner et V.-M. Bove montrent dans [115] que le contraste INFOMAX (INFORMATION MAXimization) est le mieux adapté à la séparation des sons acoustiques.
- ⤵ En traitement de la parole, un algorithme en ligne appartenant à la classe des approches fréquentielles proposé dans [90] permet de séparer des sources enregistrées dans un environnement réel. Il s'agit de la situation où des personnes parlent simultanément et en se déplaçant dans une salle (système de mélange convolutif).
- ⤵ Un autre travail qui étudie le problème de séparation et de déréverbération d'un mélange dynamique des sources a été présenté dans [89]. Ce travail prend en considération les caractéristiques acoustiques des sources.
- ⤵ La séparation de sources peut être appliquée au rehaussement de la parole [92].

1.2.2 Application aux systèmes de radio-communication

En radio-communication, l'application \mathcal{A} donnée au niveau de l'Eq. 1.1 est en général de type convolutif. Les capteurs sont des antennes. \mathcal{A} est modélisée par un filtre linéaire. Pourtant, elle doit être suivie par une non-linéarité instantanée sur chaque antenne du fait de problèmes particuliers, tels que l'effet Doppler ou la mauvaise synchronisation émetteur-récepteur. Le processus spatial $\mathbf{s}(t)$ représente le vecteur des signaux transmis par des émetteurs après codage source et codage canal (les sources sont de nature cyclo-stationnaire pour des signaux de télécommunications ou non-stationnaires en cas de transmission de la parole ou bien du son). Le système de propagation peut être modélisé comme un système multi-entrées mono-sortie¹⁰ ou bien à MEMS. Les bruits $\mathbf{n}(t)$ symbolisent toute perturbation additive reçue au niveau des antennes. Ces perturbations peuvent être des bruits standards (composantes électroniques, perturbations électromagnétiques) mais également des signaux électromagnétiques non destinés au récepteur. Les méthodes de SAS ont été testées dans des applications de transmission de données, par exemple :

10. En anglais MISO pour Multiple Input Single Output.

- En téléphonie main-libre en voiture, le signal de parole à transmettre est fortement perturbé par le bruit de la voiture. La séparation de sources peut être alors utilisée comme une technique de débruitage [23].
- En communications numériques multi-utilisateurs, S. Choi et *al.* ont proposé dans [24] deux algorithmes basés sur la décorrélation spatio-temporelle utilisant le gradient standard et naturel. Ces deux algorithmes ont été appliqués en déconvolution aveugle multi-canaux.
- En système de communication sans fils, en particulier le système CDMA (Code Division Multiple Access), on peut faire appel à la technique de SAS pour éliminer les interférences entre symboles reçus au niveau de chaque antenne. Dans ce cas, on a une unique source qui se propage via des trajets multiples jusqu'aux antennes de réception. Dans le cas général, on a plusieurs sources provenant de multi-trajets. Ce qui conduit alors à une séparation multi-émetteurs et multi-trajets [32][103][41].

1.2.3 Applications biomédicales

En biomédical, de nombreux travaux existent sur la séparation de signaux ElectroEncéphaloGramme (EEG), ElectroCardioGramme (ECG), ElectroMyoGramme (EMG) et MagnétoEncéphaloGramme (MEG). Dans ce cas, l'application \mathcal{A} donnée au niveau de l'Eq. 1.1 est de type linéaire instantané, du fait que les capteurs (électrodes qui peuvent varier de 10 pour les signaux ECG et plus de 100 pour les signaux EEG et MEG) sont proches de la source (la propagation dans les tissus biologiques est très rapide) et les signaux biomédicaux sont en général indépendants, temporellement cohérents et de nature cyclo-stationnaires ou non-stationnaires. On peut citer par exemple les travaux suivants :

- Y. Deville a présenté dans [39] un panorama exhaustif des principales applications biomédicales de la séparation de sources EEG, ECG et MEG.
- Durant la période de la grossesse, il est intéressant de pouvoir accéder à l'ECG du fœtus. Ce problème a été considéré pour la première fois par De Lathauwer et *al.* dans [35]. On trouve également dans [54] une étude consistant à extraire le signal ECG du fœtus à partir d'un seul mélange de trois sources : ECG fœtus, celui de la mère et le bruit. Les auteurs ont proposé une nouvelle méthode de SAS basée sur la décomposition en valeurs singulières (DVS) du spectrogramme des observations, suivie de l'application de la technique d'analyse en composante indépendantes d'une manière itérative.

Il existe d'autres travaux qui s'intéressent à cette application. Pour plus de détails, on peut se référer à [36][119][78][120]. Notons que dans [120], A. Ziehe a proposé d'appliquer des méthodes de SAS basées sur la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices issues des signaux EEG et MEG. En particulier, les algorithmes présentés dans [121][118].

- Pour la détection des anomalies cardiaques, un cardiologue utilise l'ECG pour extraire l'information nécessaire. Les signaux ECG sont souvent altérés par différents types d'artefacts¹¹ et de bruits. Pour réduire le bruit et les artefacts (le mouvement des yeux, le tonus musculaire, l'effet de la respiration et les interférences dues à l'alimentation électrique) en ECG, on fait là encore appel à la technique de SAS [76].
- En traitement de signaux neurobiologiques, une étude a été détaillée dans [106] pour montrer l'intérêt des approches de SAS pour la restauration du signal ECG. Les applications de SAS sur des données ECG sont présentées dans [81].
- En électromyographie, les EMG sont des signaux résultant de l'activité musculaire et sont importants dans le diagnostic des troubles neurologiques [5].
- Pour étudier l'activité du cerveau humain, on peut utiliser également l'Imagerie par Résonance

11. Ils sont induits par les déplacements des électrodes ou par les mouvements du patient.

Magnétique Fonctionnelle (IRMF) (en anglais Functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI)). Le scanner permet de fournir des images montrant le niveau de l'oxygénation du sang dans le cerveau. Le processus peut être modélisé par un mélange linéaire de sources de l'oxygénation. Il s'agit là encore d'un problème de séparation aveugle de sources représentant l'activité cérébrale [84][77].

1.3 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre le problème de la séparation aveugle de sources et les éléments qui s'y rattachent : les modèles instantanés et convolutifs, les trois techniques de reformulation du modèle convolutif en un modèle de type instantané, les hypothèses classiques en SAS, les indéterminations liées au problème, l'indice de performance que nous avons introduit afin de quantifier la qualité de l'identification du système de mélange convolutif, le pré-blanchiment de mélanges convolutifs de sources, la limite minimale de la séparation et quelques exemples d'application.

Nous retenons qu'il existe deux manières similaires permettant de ré-écrire le modèle convolutif en un modèle de type instantané au niveau du domaine temporel et une troisième utilisant des transformations (temps-) fréquentielles (nous avons montré que la reformulation à l'aide de la TFCT n'est correcte que lorsque les sources sont stationnaires), la solution fournie par les algorithmes de SAS n'est pas unique mais les sources séparées sont estimées à une permutation et à un facteur d'échelle (instantané) ou à un filtrage près (convolutif), l'étape de blanchiment souvent préalable à de nombreuses méthodes de séparation peut influencer sur les performances et la qualité de séparation. La SAS possède un bon nombre d'applications.

Nous avons choisi d'utiliser la première manière de reformuler le modèle convolutif en un modèle de type instantané (décrite au niveau de l'Eq. 1.7) pour trois raisons : éviter le problème des indéterminations locales sur chaque canal de fréquence produit par la transformation fréquentielle (Eq. 1.16 et Eq. 1.17), tirer avantage de la structure algébrique des matrices de corrélation des sources (elles sont bloc-diagonales en convolutif et diagonales en instantané pour des sources supposées mutuellement décorréélées et individuellement colorées) et pour pouvoir développer des méthodes de SAS qui puissent être appliquées aussi bien en contexte convolutif qu'en contexte instantané. Ainsi, nous avons montré en parallèle que le modèle instantané est un cas particulier du modèle convolutif. L'indice de performance et la borne minimale de séparation proposées en convolutif sont respectivement des généralisations de ceux introduits dans [86] et [61] pour le modèle instantané.

Séparation de sources : approches en contextes instantanés & convolutifs

Dans ce deuxième chapitre nous présenterons un panorama des méthodes de SAS utilisant d'une manière directe ou indirecte des décompositions matricielles qui font l'objet du troisième chapitre, et qui ont un lien plus ou moins fort avec les approches que nous développerons au niveau du dernier chapitre. Nous commencerons par les approches proposées dans le cadre du modèle instantané. La première catégorie d'approches optimise des fonctions de coût appelées "contrastes", parmi elles citons COM2 (COntラスト Maximisation 2) [28], JADE (Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices) [18] et STOTD (Simultaneous Third Order Tensor Diagonalization) [34]. Il a été montré que ce type d'approches était équivalente à la diagonalisation conjointe unitaire d'un ensemble de matrices ou tenseurs. Une seconde catégorie d'approches consiste à diagonaliser conjointement un ensemble bien choisi de matrices en exploitant soit la cohérence temporelle des sources, - à titre d'exemple les algorithmes suivants : AMUSE (Algorithm for Multiple Unknown Signals Extraction) [111], SEONS (Second Order Non-stationary Source Separation) [27], SOBI (Second Order Blind Identification) [6], TDSEP (Temporal Decorrelation SEparation) [122], RSOBI (Robust SOBI) [11] et FOBIUM (Fourth Order Blind Identification of Underdetermined Mixtures of sources) [48] -, soit la non-stationnarité des sources comme c'est le cas de la méthode baptisée BGML (Block Gaussian Maximum Likelihood) [98]. Une troisième catégorie d'approches plus récentes, consiste à traiter le cas des sources non-stationnaires en utilisant les propriétés algébriques des RTFSQ (Représentations Temps-Fréquence Spatiales Quadratiques). Ces approches reposent toutes sur une étape préalable de sélection (automatique) de points t - f particuliers [1][8][7][43][42][44][50][49][51][61][62][71]. Lorsque l'on s'intéresse au problème de la séparation de sources cyclo-stationnaires qu'elles soient issues des télécommunications, de machines tournantes ou d'engrenages, de signaux biologiques et physiologiques (EEG, ECG, température, ...), ..., il est possible d'utiliser des approches exploitant la propriété de cyclostationnarité [3][46][47][73][102][101]. Enfin, nous décrirons brièvement certaines approches dédiées au cas des mélanges convolutifs de signaux, lesquelles peuvent être décomposées en trois classes principales. Une première manière de traiter ce problème est de considérer des approches temporelles exploitant les statistiques d'ordre supérieur [29][87][72][88][31][109][80][20]. Une seconde manière consiste à généraliser les approches proposées en instantané, et en particulier celles basées sur des décompositions matricielles, tout en transformant le modèle convolutif en un modèle de type instantané tel que celui décrit au niveau de l'Eq. 1.7 [12][13][37] ou bien celui obtenu dans le domaine fréquentiel et décrit par l'Eq. 1.16. Il s'agit des approches fréquentielles [90][104][115][89][85][93]. Nous trouvons un panorama relativement exhaustif des principales méthodes de SAS dans [30].

2.1 Méthodes de la séparation de mélanges instantanés de sources

Le problème de SAS dans le cadre des mélanges instantanés sur-déterminés a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Dans le cas des sources indépendantes, la résolution de ce problème est équivalente à l'ACI (Analyse en Composantes Indépendantes) ou ICA (Independent Component Analysis), formalisée par P. Comon dans [28]. Elle consiste à trouver une transformation de l'espace des observations en un espace de représentation dans lequel les composantes sont aussi indépendantes que possible, cette technique peut être vue comme une généralisation de celle de l'ACP (Analyse en Composantes Principales) qui transforme le processus vectoriel de sorte à assurer la décorrélation de ces composantes. Généralement, la plupart des méthodes proposées dans la littérature exploite l'une ou plusieurs propriétés suivantes des sources : indépendance, cohérence temporelle, parcimonie et/ou non-stationnarité. Nous pouvons alors classer les méthodes de la SAS en contexte instantané en cinq classes principales : méthodes optimisant des fonctions de coût appelées "contrastes", fondées sur les SOS (Statistiques d'Ordre Supérieur). D'autres méthodes exploitant les propriétés algébriques particulières des matrices issues des SSO (Statistiques du Second Ordre) ou bien méthodes exploitant la non-stationnarité des sources. Les deux dernières méthodes utilisent respectivement la diversité temps-fréquence et la parcimonie des sources.

Nous allons maintenant détailler les quatres premières classes d'approches. La dernière classe ne sera pas présentée dans ce manuscrit, mais l'on pourra se référer au chapitre 10 du livre [30].

2.1.1 Méthodes utilisant les fonctions de contraste

La première classe de méthodes est basée sur la technique de l'ACI, utilisant des outils d'ordre supérieur pour construire des fonctions de contraste, lesquelles exploitent les propriétés des cumulants des sources supposées indépendantes. C'est P. Comon qui a étendu la notion de contraste utilisée auparavant dans les systèmes de déconvolution aveugle au cas des vecteurs aléatoires. Il a proposé dans [28] une méthode baptisée COM2 consistant à maximiser une fonction de contraste notée $\mathcal{I}_R^2(\mathbf{y})$ (Il s'agit de l'une des premières fonctions de contraste), et définie comme la somme des modules au carré des cumulants d'ordre $R \geq 3$ des sources estimées $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathcal{I}_R^2(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |C_R\{y_i\}|^2, \quad R \geq 3. \quad (2.1)$$

où n est le nombre de sources et $C_R\{\cdot\}$ représente le cumulants d'ordre R d'un signal stationnaire. La maximisation de la fonction contraste $\mathcal{I}_R^2(\mathbf{y})$ a conduit à l'algorithme ICA [28]. Nous remarquons que ce contraste n'utilise plus les cumulants croisés d'une part et que sa maximisation est équivalente à la DC d'un tenseur d'ordre R d'autre part. Une autre fonction de contraste que nous notons $\mathcal{J}(\mathbf{y})$, a été proposée par J.-F. Cardoso et A. Souloumiac dans [18]. Elle est basée sur l'utilisation de cumulants d'ordre quatre impliquant à la fois des auto-cumulants et des cumulants croisés :

$$\mathcal{J}(\mathbf{y}) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n |\text{cum}\{y_{i_1}, y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}\}|^2, \quad (2.2)$$

où l'opérateur $\text{cum}\{\cdot\}$ désigne un cumulants d'ordre quatre. La fonction de contraste précédente est appelée "contraste JADE". Maximiser cette fonction revient à diagonaliser conjointement un ensemble de n^2 matrices. En fait, les deux auteurs proposent également une version non itérative de leur méthode reposant sur la diagonalisation conjointe unitaire des matrices propres de la quadricovariance des observations blanchies [19]. Un autre algorithme baptisé STOTD et proposé par L. De Lathauwer

dans [34] suit la même logique que l'algorithme JADE. Il consiste à diagonaliser conjointement un ensemble de tenseurs d'ordre trois au carré. Ce qui revient à maximiser la fonction contraste suivante :

$$\mathcal{S}(\mathbf{y}) = \sum_{i_1, i_2}^n |\text{cum}\{y_{i_1}, y_{i_1}, y_{i_1}, y_{i_2}\}|^2. \quad (2.3)$$

Une famille de contrastes permettant de généraliser les trois contrastes précédents a été proposée par E. Moreau dans [86]. Il s'agit de la fonction suivante :

$$\mathcal{G}(\mathbf{y})_R^{R_1, R_2} = \sum_{i_1, i_2, j_1, \dots, j_{R_3}}^n |\mathbf{C}_R^{R_1, R_2}\{\mathbf{y}\}|^2, \quad R \geq 3. \quad (2.4)$$

où R, R_1, R_2, R_3 représentent quatre entiers tels que $R \geq 3$, $2 \leq R_1 \leq R$, $0 \leq R_2 \leq R - R_1$, $R_3 = R - R_1 - R_2$ et

$$\mathbf{C}_R^{R_1, R_2}\{\mathbf{y}\} = \text{cum}\{\underbrace{y_{i_1}, \dots, y_{i_1}}_{R_1 \times}, \underbrace{y_{i_2}, \dots, y_{i_2}}_{R_2 \times}, \underbrace{y_{i_3}, \dots, y_{i_{R_3+2}}}_{R_3 \text{ termes}}\}.$$

Il suffit donc de prendre $R_2 = R_3 = 0$, (resp. $R_2 = 0$ et $R_3 = 2$ et resp. $R_1 = 3$) pour retrouver le contraste $\mathcal{I}_R^2(\mathbf{y})$ Eq. 2.1 (resp. $\mathcal{J}(\mathbf{y})$ Eq. 2.2 et $\mathcal{S}(\mathbf{y})$ Eq. 2.3). Nous notons enfin que ces contrastes nécessitent tous une étape préalable de blanchiment (§1.1.9) des signaux observés.

2.1.2 Méthodes exploitant la cohérence temporelle ou la non-stationnarité

La deuxième et la troisième classe de méthodes exploitent respectivement la cohérence temporelle et la non-stationnarité des sources pour élaborer un ensemble de matrices possédant toutes des propriétés algébriques particulières. Généralement les travaux liés à ces deux classes reposent sur des décompositions matricielles (décomposition en valeurs propres généralisées, diagonalisation conjointe, ...).

Algorithme AMUSE

Une des premières solutions du problème de la SAS est l'algorithme AMUSE introduit par Tong et *al.* dans [111]. Il implique la diagonalisation de $N_m = 2$ matrices symétriques, \mathbf{M}_0 et \mathbf{M}_1 , dont l'une, par exemple \mathbf{M}_0 , doit être définie positive. Cette méthode n'exploite que les statistiques du second ordre des sources et suppose que :

A₀. Les sources sont mutuellement décorrélées ($\mathbf{E}\{s_i(t)s_j^*(t+\tau)\} = 0$) et le retard τ est strictement supérieur à zéro.

A₁. Les statistiques des sources sont distinctes : $\mathbf{E}\{s_i(t)s_i^*(t+\tau)\} \neq \mathbf{E}\{s_j(t)s_j^*(t+\tau)\}$ pour $i \neq j$.

L'hypothèse **A₀** permet aux matrices de covariances des sources $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}}(\tau)$, ($\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}}(\tau) = \langle \mathbf{R}_{\mathbf{s}}(t, \tau) \rangle$) d'être diagonales, et l'hypothèse **A₁** assure le fait que ces matrices possèdent des valeurs propres différentes. La diagonalisation conjointe est réalisée de façon exacte et la matrice unitaire \mathbf{U} peut être choisie de sorte à vérifier :

$$\mathbf{U}\mathbf{M}_0\mathbf{U}^H = \mathbf{I}, \quad \mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{U}^H = \mathbf{D}_1,$$

où \mathbf{D}_1 est une matrice diagonale. La méthode AMUSE est très simple à mettre en œuvre, elle consiste dans un premier temps à blanchir les observations, tout en transformant la matrice de mélange \mathbf{A} en une matrice \mathbf{U} unitaire,

$$\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}\mathbf{s}(t) + \mathbf{W}\mathbf{n}(t),$$

où la matrice \mathbf{W} a été définie au niveau de l'Eq. 1.53. Cette matrice de blanchiment peut être identifiée par la décomposition en valeurs propres de la matrice \mathbf{M}_0 représentant la matrice de corrélation à l'origine (§1.1.9). La matrice \mathbf{U} est ensuite obtenue sous la forme $\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{W}$ à partir de la décomposition spectrale $\mathbf{W}\mathbf{M}_1\mathbf{W}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{D}_1\mathbf{V}$, avec \mathbf{V} est une matrice estimée par la décomposition en valeurs propres de la matrice \mathbf{M}_1 représentant la matrice de corrélation des observations blanchies à un retard $\tau \neq 0$. Le principe de cette méthode est résumé au niveau du Tab. 2.1 :

1. Calculer la matrice de covariance $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(\tau)$ des observations.
2. Effectuer une décomposition en valeurs propres de la matrice $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0)$ et estimer le nombre de sources, la variance du bruit et la matrice de blanchiment \mathbf{W} .
3. Blanchir les observations : $\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$.
4. Estimer la matrice \mathbf{V} par la décomposition en valeurs propres de la matrice de corrélation des observations blanchies à un retard $\tau \neq 0$.
5. Estimer la matrice de mélange par $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\#\mathbf{V}$.
6. Estimer les sources par $\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{V}^H\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{V}^H\mathbf{W}\mathbf{x}(t)$.

TABLE 2.1 – Principe de l'algorithme AMUSE.

En pratique, l'estimation de la matrice de corrélation peut s'avérer difficile si bien que cette matrice peut ne plus être à symétrie hermitienne, d'où la possibilité d'avoir des valeurs propres complexes. Pour pallier ce problème, les matrices de corrélation peuvent être symétrisées de la manière suivante :

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}(\tau) = \frac{\left(\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}(\tau) + \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}^H(\tau)\right)}{2}. \quad (2.5)$$

Un second problème peut surgir : les matrices considérées peuvent ne plus être définies positives. Ce second type de problème peut être résolu à l'aide d'une procédure dite de pré-conditionnement suivante :

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}(\tau) = \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}(\tau) + \delta\mathbf{I}_m, \quad (2.6)$$

où δ est une constante réelle de petite valeur et \mathbf{I}_m est la matrice identité de dimension $m \times m$.

Algorithme SOBI et ses variantes

Afin d'améliorer l'algorithme AMUSE, on peut diagonaliser conjointement un ensemble de matrices au lieu de n'en diagonaliser exactement que deux. Cet ensemble peut être construit à partir des matrices de corrélation des observations blanchies à différents retards. Comme c'est le cas de l'algorithme SOBI [6] qui étend l'algorithme AMUSE au cas $N_m > 2$. Les matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$ sont à symétrie hermitienne et \mathbf{M}_1 est définie positive. L'étape préalable de blanchiment permet de remplacer la diagonalisation conjointe de l'ensemble \mathcal{M} par celle de l'ensemble $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{\mathbf{M}}_i = \mathbf{W}\mathbf{M}_i\mathbf{W}^H\}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, dans lequel $\overline{\mathbf{M}}_0 = \mathbf{I}_n$. Cet algorithme suit alors la même logique que l'algorithme AMUSE. La principale différence entre ces deux méthodes se situe au niveau de l'étape qui suit le blanchiment : la DVP de la matrice $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}(\tau)$, étant remplacée par la DC d'un ensemble de matrices $\{\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{s}}(\tau_i), i = 1, \dots, N_\tau\}$, où N_τ est le nombre de retards considérés. L'algorithme de DC utilisé est alors unitaire de type Jacobi [19], car il opère après blanchiment. Le principe de l'algorithme SOBI est résumé au niveau du Tab. 2.2 :

1. Calculer la matrice de covariance $\overline{\mathbf{R}}_x(\tau)$ des observations.
2. Effectuer une décomposition en valeurs propres de la matrice $\overline{\mathbf{R}}_x(0)$ et estimer le nombre de sources, la variance du bruit et la matrice de blanchiment \mathbf{W} .
3. Blanchir les observations : $\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$.
4. Estimer la matrice \mathbf{V} par la DC d'un ensemble de matrices issues de la fonction de corrélation des observations blanchies à différents retard $\tau \neq 0$.
5. Estimer la matrice de mélange par $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\#\mathbf{V}$.
6. Estimer les sources par $\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}^H \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_b}^{-1}(0)\mathbf{x}(t)$.

TABLE 2.2 – Principe de l'algorithme SOBI.

Il existe d'autres méthodes appartenant à la même famille de méthodes que SOBI et JADE. Citons par exemple un algorithme très similaire à SOBI, nommé TDSEP [122]. On trouve également dans [11], une méthode baptisée RSOBI améliorant l'algorithme SOBI, et plus particulièrement l'étape de blanchiment. Cette méthode a pour avantage d'être insensible asymptotiquement à un bruit temporellement décorréolé et de cohérence spatiale inconnue. Une extension de la méthode SOBI à l'ordre quatre portant le nom FOBIUM a été proposée récemment dans [48]. Cette méthode permet également de traiter des mélanges sous-déterminés de sources. En exploitant les propriétés cyclostationnaires des observations, une version modifiée de la méthode JADE, portant le nom JADE cyclique a été proposée dans [45]. Cette méthode a pour avantage d'être moins sensible à la présence d'un bruit de cohérence spatiale inconnue. Une autre méthode inspirée de SOBI a été proposée dans [98]. Cette méthode consiste à construire un ensemble de matrices de corrélation des observations blanchies au retard $\tau = 0$ et pour différents instants t_1, \dots, t_{N_m} . En fait, la matrice de corrélation $\mathbf{R}_s(t, 0)$ des sources est diagonale pour différents instants t_1, \dots, t_{N_m} . Ensuite les N_m matrices de l'ensemble construit devront être diagonalisées conjointement. En supposant que les sources sont stationnaires d'ordre deux, D.-T. Pham et J.-F. Cardoso montrent dans [98] que cette approche est équivalente à l'approche dite du Maximum de Vraisemblance en modélisant les sources par des gaussiennes stationnaires par morceaux. Dans le cas d'un environnement non-bruité, réel et lorsque le nombre de capteurs est égal au nombre de sources ($n = m$), les auteurs montrent également que la diagonalisation conjointe sans contrainte d'unitarité d'un ensemble de matrices définies positives et à symétrie hermitienne permet d'estimer la matrice de séparation. Cette méthode est baptisée BGML. Elle est récapitulée au niveau du Tab. 2.3 :

1. Chercher la stationnarité locale en coupant les observations en N_m tranches.
2. Calculer les N_m covariances $\mathbf{R}_x(t, 0)$ ($t = t_1, \dots, t_{N_m}$).
3. Diagonaliser conjointement l'ensemble de N_m matrices de covariance.
4. La diagonalisation conjointe non unitaire permet d'identifier directement la matrice de séparation et par conséquent d'estimer les sources.

TABLE 2.3 – Principe de l'algorithme BGML.

Il existe également un autre type de méthodes exploitant les statistiques du second ordre. Il s'agit des méthodes utilisant le problème aux vecteurs propres généralisés (VPG) [22][26][25][27][110]. . .

Décomposition en valeurs propres généralisées

Le problème aux VPG peut s'énoncer de la manière suivante. Considérons deux matrices \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 carrées, tous les deux de taille $m \times m$, un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m / \{0\}$ tel que :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{M}_2 \mathbf{v}. \quad (2.7)$$

Le vecteur \mathbf{v} satisfaisant cette relation est appelé vecteur propre généralisé correspondant à la valeur propre généralisée λ .

Le problème aux VPG est alors de chercher un couple (λ, \mathbf{v}) à partir de la relation décrite au niveau de l'Eq. 2.7.

Si l'on suppose que les deux matrices \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 sont à symétrie hermitienne, et que l'une, par exemple \mathbf{M}_2 , est définie positive, le problème décrit au niveau de l'Eq. 2.7 admet m valeurs propres généralisées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ associées à m vecteurs propres généralisés $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Autrement dit, il existe une base orthonormée $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ de \mathbb{C}^m tel que :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{M}_2 \mathbf{v}_j. \quad (2.8)$$

La relation précédente peut alors être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{V} = \mathbf{M}_2 \mathbf{V} \mathbf{D}, \quad (2.9)$$

où $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ représente la matrice des vecteurs propres généralisés et $\mathbf{D} = \text{Diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres généralisées. En particulier si $(\mathbf{M}_2 \mathbf{V})^{-1} = \mathbf{V}^H$ (\mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 sont à symétrie hermitienne et \mathbf{M}_2 est définie positive), on retombe alors sur le problème de la DVP, et donc :

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^H \mathbf{M}_1 \mathbf{V}. \quad (2.10)$$

Lien entre la décomposition en valeurs propres généralisées et la SAS

Il est possible de résoudre le problème de la SAS en utilisant le problème aux VPG, et ce via le théorème suivant [25] :

Théorème 1. Soient $\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{D}_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux matrices diagonales avec des termes positifs et $\mathbf{\Lambda}_2, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ deux autres matrices diagonales ne contenant aucun terme nul sur la diagonale. Si $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice satisfaisant les deux décompositions suivantes :

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{G}^H \text{ et } \mathbf{D}_2 = \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{G}^H. \quad (2.11)$$

Alors elle représente la matrice de permutation généralisée, i.e. $\mathbf{G} = \mathbf{P} \mathbf{D}$ si $\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2$ et $\mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{\Lambda}_2$ ont des termes distincts sur la diagonale où \mathbf{P} est une matrice de permutation et \mathbf{D} est une matrice diagonale.

Preuve Voir [25]. \square

La transformation linéaire \mathbf{G} satisfaisant la relation décrite au niveau de l'Eq. 2.11 est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{\Lambda}_1^{-1} \mathbf{\Lambda}_2$.

Ainsi, les méthodes utilisant le problème aux VPG consistent à construire une matrice particulière au moyen de deux matrices de corrélation. Le principe de ces méthodes est résumé au niveau du Tab (2.4) :

De même que l'algorithme AMUSE, pour assurer la stabilité numérique, les deux matrices \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 doivent être à symétrie hermitienne et de plus \mathbf{M}_2 doit forcément être définie positive. On peut

1. Calculer deux matrices différentes \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 issues des fonctions de corrélation des observations.
2. Chercher la matrice des vecteurs propres généralisés \mathbf{V} de la matrice particulière $\mathbf{P} = \mathbf{M}_1 - \lambda\mathbf{M}_2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, satisfaisant la décomposition suivante :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{V} = \mathbf{M}_2 \mathbf{V} \mathbf{D},$$

où \mathbf{D} est une matrice diagonale avec des termes diagonaux différents.

3. La matrice de séparation est $\mathbf{B} = \mathbf{V}^H$.

TABLE 2.4 – Principe des méthodes utilisant le problème aux VPG.

symétriser les deux matrices au moyen de l'Eq. 2.5 et pour rendre la matrice \mathbf{M}_2 définie positive, on trouve dans [27] (Algorithme SEONS) une procédure consistant à choisir \mathbf{M}_2 comme une combinaison linéaire des matrices de corrélation à différents instants pour un retard τ_2 :

$$\mathbf{M}_2(\tau_2) = \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{R}_x(t_j, \tau_2), \quad (2.12)$$

où N_t est le nombre d'instantanés temporels considérés et τ_2 est un retard différent de zéro et du retard τ_1 associé à la matrice \mathbf{M}_1 .

2.1.3 Méthodes basées sur les transformées temps-fréquence spatiales

De nouvelles techniques tirant avantage de la non-stationnarité des sources ont vu le jour depuis une dizaine d'année. Elles sont fondées sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ (Spectres temps-Fréquence Spatiaux Quadratiques). Ces techniques reposent toutes sur une étape préalable de sélection (automatique) de points temps-fréquence particuliers permettant la construction d'ensembles de matrices devant ensuite être diagonalisées conjointement et/ou zéros-diagonalisées conjointement (un certain nombre de détecteurs de points utiles en contexte instantané est présenté au niveau de l'annexe 4). Ces méthodes suivent généralement le même principe que les méthodes présentées dans (2.1.2), à la différence du choix de l'opérateur linéaire appliqué aux observations. Elles diffèrent entre elles au niveau de la détection des points t - f et des algorithmes de décompositions matricielles conjointes utilisés. Le principe de la plupart des méthodes t - f est résumé au niveau du Tab. 2.5 :

1. Estimer les RTFSQ ou les STFSQ des signaux observés.
2. Déterminer les points t - f utiles.
3. Faire une décomposition matricielle conjointe (DC ou ZDC) de l'ensemble de matrices t - f construit.
4. Estimer la matrice de mélange ou la matrice de séparation.
5. Estimer le vecteur des sources en utilisant la matrice de mélange estimée.

TABLE 2.5 – Principe des méthodes utilisant les RTFSQ ou les STFSQ.

Notons que les méthodes nécessitant une étape préalable de blanchiment consistent à appliquer les

RTFSQ ou les STFSQ sur les signaux observés blanchis. La matrice de blanchiment est estimée de la même manière que les méthodes précédentes au moyen de la DVP de la matrice de corrélation des observations à l'origine (§1.1.9).

Dans cette classe de méthodes, il existe également des travaux consistant à ré-estimer les colonnes de la matrice de mélange au moyen des méthodes purement algébriques suivies éventuellement d'une étape de classification. Parmi ces travaux, citons deux méthodes proposées dans [61] basées respectivement sur l'estimation directe des colonnes de la matrice recherchée et sur la DVS de la matrice t - f sélectionnée. Les deux méthodes sont complétées par une étape de classification consistant à calculer le centre d'inertie de chaque nuage de points t - f en unissant tous les points afin d'obtenir un seul point. Pour cela, l'auteur utilise la méthode de classification hiérarchique ascendante (UPGMA pour Unweighed Pair-Group Method of aggregation using Arithmetic averages) [105]. N. Linh-Trung et *al.* ont proposé dans [79] une méthode similaire mais en ajoutant une hypothèse un peu plus forte : ils supposent que les sources sont quasi-disjointes, c'est à dire que les RTFSQ ou les STFSQ croisées des sources sont quasiment tous nuls. Les auteurs proposent une classification basée sur un calcul des angles entre les vecteurs. Un avantage de ce type de méthodes est qu'il permet d'estimer le nombre de sources.

Une autre méthode suivant la même logique que les méthodes précédentes se trouve dans [40]. Cette méthode utilise une transformée temps-fréquence linéaire, et plus précisément la TFCT (Transformée de Fourier à Court Terme) et consiste également à identifier les colonnes de la matrice de mélange à une amplitude près et à une permutation près, tout en passant par une étape de détection des points t - f où une seule source est présente. L'auteur suppose que les sources sont disjointes dans le plan t - f . En d'autre terme, les transformées temps-fréquence croisées des sources sont nulles dans toute zone t - f d'analyse. Cette méthode est baptisée TIFCORR (Time-Frequency Correlation).

2.2 Méthodes de la séparation de mélanges convolutifs de sources

Les premiers travaux de SAS dans le cadre des systèmes de mélanges convolutifs ont été initiés au début des années 90 [15][91] et on peut considérer ce problème comme encore actuel dans les préoccupations des chercheurs. Généralement, les méthodes de SAS en contexte convolutif se décomposent en trois classes principales :

- approches temporelles,
- approches fréquentielles,
- approches temps-fréquence.

Les méthodes en contexte convolutif comme celles en contexte instantané exploitent au moins l'une des hypothèses suivantes : l'indépendance, la non-stationnarité, la non-gaussianité et/ou la cohérence temporelle (*c.à.d.* sources non-blanches) des sources.

Nous allons maintenant détailler certaines méthodes des trois classes d'approches.

2.2.1 Approches temporelles

Le premier type de méthodes peut être divisé en deux catégories, celui des approches temporelles utilisant uniquement les SSO et exploitant l'indépendance, la non-stationnarité et/ou la cohérence temporelle. On peut alors citer par exemple les méthodes basées sur des décompositions de type sous-espace [2][66][83], et celles fondées sur la bloc-diagonalisation conjointe unitaire [12][13][37]. On peut également subdiviser les approches temporelles - selon le type de modèle et les statistiques utilisées - en deux sous-classes : celle des méthodes opérant directement sur le modèle décrit au niveau de l'Eq. 1.2, tout en utilisant soit les statistiques d'ordre supérieur, soit les statistiques du second ordre et celle des méthodes opérant sur le modèle de type instantané décrit par l'Eq. 1.7 ou par

l'Eq. 1.13. La seconde classe d'approches temporelles exploite l'indépendance et la non-gaussianité. Ces approches sont essentiellement fondées sur les SOS et consistent à construire des contrastes à optimiser [29][87][72][88][31][109][80][20].

Approches temporelles basées sur les SOS

Parmi les travaux qui traitent le problème de la séparation de mélanges convolutifs de sources utilisant uniquement les SSO, on peut citer les approches basées sur des décompositions de type sous-espace [2][66][83], les approches généralisant les méthodes de SAS de l'instantané au convolutif, en particulier celles basées sur la DC [12]. Les algorithmes de BDC sous contrainte d'unitarité sur lesquels reposent certaines de ces méthodes ont été étudiés dans [13][37]. Un des objectifs de cette thèse est de proposer une alternative aux algorithmes de BDC sous la forme d'une solution non-unitaire. Nous détaillerons les algorithmes proposés au niveau du troisième chapitre de ce manuscrit.

Approches temporelles basées sur les SOS

Les méthodes temporelles utilisant les statistiques d'ordre supérieur, exploitent essentiellement l'indépendance des sources afin d'optimiser une fonction de coût de type contraste. Elles se décomposent souvent en deux étapes¹ : un pré-blanchiment spatio-temporel à l'ordre deux des signaux observés suivi par la recherche du filtre $\hat{\mathbf{H}}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{H}(z)$ ($\mathbf{W}(z)$ est le filtre blanchisseur) para-unitaire² manquant. Les données blanchies sont alors obtenues par :

$$\mathbf{x}_b(n) = [\mathbf{W}(z)]\mathbf{x}(n) = \sum_l \mathbf{W}(n-l)\mathbf{x}(l), \quad (2.13)$$

de sorte que $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_b(n)\mathbf{x}_b(n-k)^H\} = \delta(k)\mathbf{I}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. La détermination du filtre manquant encore à l'issue du blanchiment peut être réalisée par l'adaptation des méthodes en contexte instantané optimisant les fonctions de contraste au cas convolutif. Dans le cas où les sources sont i.i.d., les deux contrastes suivant ont été proposés par P. Comon dans [29] :

$$\Upsilon^{(1)}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |\text{cum}\{y_i(n), y_i(n)^*, y_i(n), y_i(n)^*\}|, \quad (2.14)$$

$$\Upsilon^{(2)}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |\text{cum}\{y_i(n), y_i(n)^*, y_i(n), y_i(n)^*\}|^2. \quad (2.15)$$

La preuve de la généralisation de ces deux contrastes pour des cumulants d'ordre supérieur ou égal à trois se trouve dans [72]. Une famille de fonctions plus générale a été proposée par E. Moreau et J.-C. Pesquet dans [87]. Elle est définie par :

$$\Upsilon_f^{(g)}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n f \left(\left| \text{cum}\left\{ \underbrace{y_i(n), \dots, y_i(n)}_{p \text{ termes}}, \underbrace{y_i(n)^*, \dots, y_i(n)^*}_{q \text{ termes}} \right\} \right| \right), \text{ avec } p + q \geq 3 \quad (2.16)$$

où f est une fonction convexe, croissante, définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} et admettant un unique minimum en zéro. Les contrastes précédents n'utilisent que des auto-cumulants. Des contrastes à base de cumulants

1. Les méthodes en contexte convolutif utilisant les SOS suivent souvent la même logique que celles utilisées en contexte instantané.

2. Un filtre $\mathbf{F}(z)$ est dit para-unitaire si $\mathbf{F}(z)\mathbf{F}(\frac{1}{z^*}) = \mathbf{I}$ (ou tout simplement $\mathbf{F}[e^{i2\pi\nu}]\mathbf{F}[e^{i2\pi\nu}]^H = \mathbf{I}$, $\forall \nu \in [0, 1]$), ce qui est équivalent dans le domaine temporel à $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}(l)\mathbf{F}(l-k)^H = \delta(k)\mathbf{I}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

croisés, s'affranchissant alors de la propriété de symétrie ont été proposés par E. Moreau et *al.* dans [88] et N. Thirion et *al.* dans [109]. Il est possible de montrer que si les sources ne sont pas des processus linéaires alors les fonctions précédentes ne sont plus des contrastes. Il est également possible de montrer que des fonctions de coût basées sur la notion d'information mutuelle représentent des contrastes pour des sources linéaires et aussi markoviennes (§ chapitre 2 dans [30]). Pour traiter le cas des sources non i.i.d., R. Liu a proposé dans [80] un contraste à base des versions retardées des cumulants. Il s'agit de la fonction suivante :

$$\Upsilon_{2,2}^{(2)}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{Z}} |\text{cum}\{y_1(n), y_2(n + \tau_1)^*, y_3(n + \tau_2), y_4(n + \tau_3)^*\}|^2. \quad (2.17)$$

Nous signalons que dans [20], M. Castella et *al.* ont démontré que la fonction $\Upsilon_{2,2}^{(2)}(\mathbf{y})$ n'est un contraste que pour les sources linéaires.

Comme dans le cas des mélanges instantanés (§2.1.1), l'optimisation d'une telle fonction de contraste peut être équivalente à la DC d'un ensemble de matrices ou de coupes de tenseurs. Ainsi l'algorithme PAJOD (Partial Approximate Joint Diagonalization) [31] qui consiste en la diagonalisation partielle approximative conjointe sous contrainte de para-unitarité d'un ensemble de matrices issues de certaines valeurs des cumulants des observations blanchies.

2.2.2 Approches fréquentielles

Les deux derniers types de méthodes concernent les approches transformant le modèle temporel en un modèle fréquentiel. Certaines d'entre elles opèrent directement sur la Transformée de Fourier (TF) ou bien sur la Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT) des signaux observés [90][104][115][89][85][93], d'autres sur des statistiques d'ordre deux (covariances) appliquées sur la TF (resp. la TF des statistiques d'ordre deux (densité spectrale)) des signaux observés [116][94][113] (resp. [99][100]).

Première méthode fréquentielle : inversion du filtre de mélange

Une première solution a été proposée par E. Weinstein et *al.* dans [114], Ils modélisent l'environnement par un système MIMO, linéaire et invariant dans le temps. Plus précisément le problème est considéré comme celui d'un système à deux entrées $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et à deux sorties $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ($n = m = 2$). Le système est assimilé à un système RIF à temps discret dont la réponse fréquentielle est la suivante :

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{pmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

où $H_{11}(\omega)$ et $H_{22}(\omega)$ représentent la fonction de transfert de chaque canal séparément et $H_{12}(\omega)$ et $H_{21}(\omega)$ sont les fonctions de couplage croisées entre les deux canaux. Les auteurs supposent que les sources sont non-stationnaires et décorréelées et imposent que $H_{11}(\omega) = H_{22}(\omega)$. Ils supposent également que $\mathbf{H}(\omega)$ soit inversible pour toute fréquence ($1 - H_{12}(\omega)H_{21}(\omega) \neq 0, \forall \omega$). Leur approche consiste à chercher les fonctions $\hat{H}_{12}(\omega)$ et $\hat{H}_{21}(\omega)$ estimées de $H_{12}(\omega)$ et $H_{21}(\omega)$ par l'inversion du filtre :

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1}(\omega) = \frac{1}{1 - \hat{H}_{12}(\omega)\hat{H}_{21}(\omega)} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{H}_{12}^{-1}(\omega) \\ -\hat{H}_{21}^{-1}(\omega) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Pour reconstruire les sources, ils exploitent l'hypothèse de décorrélation en proposant le critère de décorrélation suivant :

$$P_{x_1 x_2}(\omega) - G_{12}(\omega)P_{x_2 x_2}(\omega) - G_{21}^*(\omega)P_{x_1 x_1}(\omega) + G_{12}(\omega)G_{21}^*(\omega)P_{x_2 x_1}(\omega) = 0, \quad (2.20)$$

où $P_{x_1x_1}(\omega)$, $P_{x_2x_2}(\omega)$ représentent les densités spectrales de puissance de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, $P_{x_1x_1}(\omega)$ et $P_{x_2x_2}(\omega)$ sont les densités spectrales de puissance croisées entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et :

$$G_{12}(\omega) = \frac{H_{12}(\omega)}{H_{22}(\omega)} \quad G_{21}(\omega) = \frac{H_{21}(\omega)}{H_{11}(\omega)}.$$

Pour se faire, ils utilisent le principe des moindres carrées qui conduit à la solution suivante :

$$G_{12}(\omega) = \frac{P_{x_1x_2}(\omega) - G_{21}^*(\omega)P_{x_1x_1}(\omega)}{P_{x_2x_2} - G_{21}^*(\omega)P_{x_2x_1}(\omega)}. \quad (2.21)$$

$$G_{21}(\omega) = \frac{P_{x_2x_1}(\omega) - G_{12}^*(\omega)P_{x_2x_2}(\omega)}{P_{x_1x_1} - G_{12}^*(\omega)P_{x_1x_2}(\omega)}. \quad (2.22)$$

En pratique, les auteurs estiment la densité spectrale de puissance par le périodogramme et $G_{12}(\omega)$ et $G_{21}(\omega)$ sont estimées itérativement.

Approches fréquentielles opérant directement sur la TFCT des observations

En transformant le modèle convolutif en un modèle instantané de type (1.17) par une TFCT, P. Smaragdis a proposé dans [104] une méthode exploitant l'indépendance des sources. Il s'agit de minimiser la fonction de coût suivante (déjà utilisée en instantané) :

$$\Delta \mathbf{B}^f(\nu) \propto [\mathbf{I} - f(\mathbf{Y}^{fct}(t, \nu) \mathbf{Y}^{fct}(t, \nu)^H)] \mathbf{B}^f(\nu), \quad (2.23)$$

où $\mathbf{B}^f(\nu)$ est le filtre de séparation recherché dans le plan fréquentiel, $\mathbf{Y}^{fct}(t, \nu)$ est l'estimée de la TFCT des sources et $f(\cdot)$ est une fonction non-linéaire (P. Smaragdis propose d'utiliser la fonction non-linéaire suivante : $f(z) = \tanh(\Re\{z\}) + \tanh(\Im\{z\})$, avec $\tanh(\cdot)$ désigne la fonction tangente hyperbolique, $\Re\{\cdot\}$ et $\Im\{\cdot\}$ représentent respectivement les parties réelle et imaginaire d'une quantité complexe). Pour résoudre le problème de permutation locale, il normalise en premier lieu les matrices de séparation de la façon suivante :

$$\mathbf{B}_{norm}^f(\nu) = \mathbf{B}_{orig}^f(\nu) |\mathbf{B}_{orig}^f(\nu)|^{-\frac{1}{n}}, \quad (2.24)$$

où $\mathbf{B}_{norm}^f(\nu)$ et $\mathbf{B}_{orig}^f(\nu)$ sont respectivement les matrices de filtre de séparation normalisées et originales à la fréquence ν . Elles sont toutes les deux de taille $n \times n$ si n est le nombre de sources. Ensuite, il utilise la règle d'adaptation suivante :

$$\Delta_a \mathbf{B}^f(\nu + 1) = \Delta_e \mathbf{B}^f(\nu + 1) + k \Delta \mathbf{B}^f(\nu), \quad (2.25)$$

où $\Delta_a \mathbf{B}^f(\nu + 1)$ et $\Delta_e \mathbf{B}^f(\nu + 1)$ sont respectivement les matrices de séparation appliquée et estimée à la fréquence ν et $k \in [0, 1]$ est une constante réelle.

R. Mukai a aussi proposé dans [89] de travailler dans le domaine fréquentiel tout en tenant compte des propriétés acoustiques des signaux. Il calcule la matrice de séparation à chaque itération i au moyen de la règle d'adaptation suivante :

$$\mathbf{B}_{(i+1)}^f(\nu) = \mathbf{B}_{(i)}^f(\nu) - \eta \left[\text{OffDiag} \left\{ \mathbf{E} \left\{ \Phi(\mathbf{Y}^{fct}(t, \nu)) \mathbf{Y}^{fct}(t, \nu)^H \right\} \right\} \right], \quad (2.26)$$

où η est le pas d'adaptation, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ est l'opérateur d'espérance mathématique (moyennage), $\text{OffDiag}\{\cdot\}$ est l'opérateur qui permet d'extraire la matrice zéro-diagonale (§4.37) et $\Phi(\cdot)$ est une fonction non-linéaire définie par :

$$\Phi(\mathbf{z}) = \frac{1}{1 + e^{-\Re\{\mathbf{z}\}}} + i \frac{1}{1 + e^{-\Im\{\mathbf{z}\}}}. \quad (2.27)$$

Une autre approche baptisée MSICA (MultiStage ICA) combinant entre deux approches temporelle et fréquentielle nommées respectivement TDICA (Time Domain ICA) et FDICA (Frequency Domain ICA) a été proposé dans [93], afin d'améliorer les performances de séparation. Cette approche se décompose en deux étapes. Dans un première temps, les auteurs appliquent l'algorithme FDICA qui consiste à chercher la matrice de séparation à chaque itération par la règle décrite au niveau de l'Eq. 2.26 et dans un second temps, ils cherchent à nouveau le filtre de séparation dans le domaine temporel par la minimisation d'une des trois fonctions de coût définies dans l'article [93].

D'autres travaux exploitant également l'indépendance des sources dans le domaine fréquentiel en s'intéressant plus particulièrement au domaine acoustique se trouvent dans [90][115][85].

Approches fréquentielles opérant sur les statistiques des TF des observations

En exploitant l'indépendance (la décorrélation) et la non-stationnarité des sources, L. Parra et *al.* ont proposé dans [94], d'utiliser les statistiques d'ordre deux, et en particulier les matrices de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{fct}}(\tau, \nu)$ des signaux observés $\mathbf{X}^{fct}(t, \nu)$ dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}^{fct}}(\tau, \nu) = \mathbf{H}^f(\nu)\mathbf{R}_{\mathbf{S}^{fct}}(\tau, \nu)\mathbf{H}^f(\nu)^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}^f}(\nu), \quad (2.28)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{S}^{fct}}(\tau, \nu)$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{N}^f}(\nu)$ sont respectivement les matrices de covariance des TFCT des sources et des bruits. En pratique, ils estiment la covariance au moyen du périodogramme. L'indépendance des sources et des bruits implique que les matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{S}^{fct}}(\tau, \nu)$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{N}^f}(\nu)$ sont diagonales. Ils estiment alors la matrice de séparation fréquentielle par la DC des matrices de même fréquence. Enfin, pour résoudre le problème des permutations, les auteurs imposent la contrainte de continuité dans le domaine fréquentiel. Nous signalons que la fonction de coût utilisée dans la DC est adaptative et sa minimisation se fait par la méthode des moindres carrés.

On peut citer également d'autres approches basées sur la DC et exploitant la décorrélation et/ou la non-stationnarité des sources [113][116][100]. L'algorithme de DC utilisé dans [113] est basé sur un algorithme de type gradient stochastique. Tandis que la méthode SDIF (Simultaneous Diagonalization In the Frequency domain) présenté dans [116] utilise un algorithme de DC reposant sur l'inégalité d'Hadarnard. Enfin, en appliquant les statistiques directement sur les signaux observés, K. Rahbar et *al.* ont proposé dans [100] de diagonaliser conjointement un ensemble de matrices issues des densités spectrales de puissance.

2.3 Discussion & Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit brièvement certains algorithmes de SAS dans le cadre des systèmes de mélanges linéaires instantanés et convolutifs. Nous avons rappelé dans un premier temps le principe des principaux algorithmes trouvés dans la littérature en contexte instantané. Notamment, ceux optimisant des fonctions de contraste, exploitant la cohérence temporelle ou la non-stationnarité des sources et certaines approches temps-fréquence. Ces algorithmes utilisent d'une manière ou d'une autre la (Z)DC d'un ensemble de matrices ou de coupes de tenseurs. Dans un second temps, les algorithmes proposés en contexte convolutif ont été passés en revue. En particulier, les approches temporelles utilisant soit les SOS, soit les SSO et les approches (temps)-fréquentielles consistant à transformer le modèle convolutif en un modèle de type instantané. Là encore, les auteurs utilisent la DC d'un ensemble de matrices issues de la TF ou de la TFCT (approches fréquentielles). Classiquement, la plupart des algorithmes en contexte instantané ou convolutif présentés dans la littérature supposent que les sources sont indépendantes, cette hypothèse d'indépendance n'étant pas toujours vérifiée dans la pratique. De plus, ils nécessitent souvent une étape préalable de blanchiment des données d'une autre part. Cette étape écarte la possibilité de séparer des sources corrélées.

L'objectif de cette thèse est de s'affranchir de l'hypothèse d'indépendance, voire même de simple décorrélation afin de pouvoir nous affranchir de l'étape de blanchiment des observations et de pouvoir traiter le cas de sources corrélées. Le but est donc de développer de nouvelles méthodes de SAS, basées sur de nouveaux algorithmes de décompositions matricielles conjointes ne reposant sur aucune contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée.

Nouveaux algorithmes de bloc-diagonalisation conjointes

Au cours des dix dernières années, la communauté traitement du signal s'est beaucoup intéressée à un nouveau problème : celui des décompositions conjointes de matrices ou de tenseurs, du fait de ces nombreuses applications en SAS et en traitement d'antenne. Le premier problème à avoir focalisé l'attention est celui de la diagonalisation conjointe d'un ensemble donné de matrices sous contrainte d'unitarité de la matrice recherchée. Cela a conduit à de nombreux algorithmes en séparation aveugle de mélanges instantanés de sources, les plus connus étant JADE [18] et SOBI [6] (§2.1). Par la suite, d'autres travaux ont été conduits afin de généraliser à des ensembles de tenseurs et non plus de matrices [28][34][86] ou pour pouvoir lever la contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée [38][75][96][112][117] [118][121][42]. Plus récemment, un second type de décomposition matricielle s'est révélé utile pour des applications en traitement du signal (notamment en séparation aveugle de sources basée sur l'utilisation de représentations temps-fréquence), cryptographie ou télécommunications numériques. Il s'agit de la zéro-diagonalisation conjointe. Là encore, le cas unitaire a d'abord été traité [7] avant que ne soient proposées plusieurs solutions non-unitaires dans [43][44][21]. Il est également possible de voir apparaître un autre type particulier de décomposition matricielle appelé bloc-diagonalisation conjointe. Dans ce type de décomposition, les matrices recherchées sont maintenant bloc-diagonales. Rappelons qu'une matrice bloc-diagonale est une matrice bloc dans laquelle les blocs diagonaux sont des matrices carrées de n'importe quelle taille (éventuellement cette taille est la même pour tous les blocs diagonaux comme c'est le cas en SAS) alors que les termes hors diagonale sont des matrices nulles. Ce type de décomposition s'avère particulièrement intéressant dans la résolution du problème de la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources [12][13][50] mais également au niveau d'autres applications telles que le traitement d'antenne pour pouvoir estimer les directions d'arrivées des signaux [10][9]. Dans ce chapitre, c'est à ce dernier type de décomposition que nous allons nous intéresser. Notre objectif étant de nous affranchir de la contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée. L'état de l'art en ce qui concerne les deux premiers types de décompositions matricielles (DC et/ou ZDC) a été déporté au niveau de la première annexe de ce document.

Dans ce chapitre, nous proposons quatre nouveaux algorithmes de bloc diagonalisation conjointe (BDC) non unitaire d'un ensemble donné de matrices (réelles ou complexes). Tous sont fondés sur l'optimisation d'une même fonction de coût quadratique de type moindres carrés. Nous verrons que pour simplifier les développements mathématiques, cette fonction de coût est écrite en fonction de la matrice de séparation et non plus de la matrice de mélange.

Le premier algorithme [57][55][56], baptisé JBD_{Alg} , repose sur l'optimisation algébrique de cette fonction de coût. Il peut être appliqué à des ensembles de matrices définies positives mais non nécessairement à symétrie hermitienne. Les trois autres algorithmes proposés ($\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$), reposent sur un schéma d'optimisation de type gradient. Ils sont plus généraux car ils

peuvent être appliqués à un ensemble quelconque de matrices (celles-ci, réelles ou complexes, peuvent n'être ni définies positives ni à symétrie hermitienne). Par ailleurs, le bloc-diagonaliseur conjoint n'est pas nécessairement une matrice unitaire. Au niveau du premier algorithme, le calcul du gradient matriciel de la fonction de coût étudiée est approché [60]. Le calcul exact du gradient matriciel est ensuite mené et deux nouveaux algorithmes sont proposés : l'un est fondé sur un algorithme de type gradient, l'autre sur un algorithme de type gradient relatif. Nous étudions les versions à pas fixe de ces trois algorithmes, puis les versions à pas optimal ($\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\mathcal{O},\mathcal{A}}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\mathcal{O},\mathcal{R}}}$) afin d'en accélérer la convergence (le pas est alors recalculé algébriquement à chaque itération comme l'une des racines d'un polynôme d'ordre trois). Un lien avec la diagonalisation conjointe non unitaire est également établi.

Enfin, des simulations informatiques sont également présentées afin d'illustrer le comportement et l'efficacité des différents algorithmes proposés dans différents cas de figure : lorsque les matrices considérées sont exactement bloc-diagonales puis lorsqu'elles sont progressivement perturbées par un bruit additif de type Gaussien.

3.1 Bloc-diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices

Nous présentons dans ce paragraphe une formulation générale du problème de la bloc-diagonalisation conjointe. Nous en décrivons d'abord brièvement le principe avant d'introduire les fonctions de coût à optimiser qui sont utilisées par les différents algorithmes connus de BDC. Enfin, nous montrons le lien qui existe entre la BDC et la DC.

3.1.1 Formulation du problème de la bloc-diagonalisation conjointe

Le problème de la BDC s'énonce de la manière suivante. Considérons un ensemble \mathcal{M} de N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$) matrices carrées $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_m\}$, admettant toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A} \mathbf{D}_i \mathbf{A}^H, \quad (3.1)$$

$$\text{avec : } \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{D}_{i,22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{r-1r} \\ \mathbf{0}_{r1} & \dots & \mathbf{0}_{rr-1} & \mathbf{D}_{i,rr} \end{pmatrix}, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N_m\} \text{ sont des matrices bloc-}$$

diagonales de dimensions $N \times N$ et les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ sont des matrices carrées de dimensions $n_j \times n_j$ avec $n_1 + \dots + n_r = N$ (dans l'optique d'une application en SAS, nous nous restreindrons au cas où les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$ sont toutes de la même taille, impliquant en l'occurrence $N = r \times n_j$, $j \in \{1, \dots, r\}$), où $\mathbf{0}_{ij}$ désigne la matrice nulle de dimension $n_i \times n_j$. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ est une matrice de rang plein de dimension $M \times N$ ($M \geq N$) (elle désigne la matrice de mélange lorsque l'on s'intéresse au problème de la SAS). L'ensemble des N_m matrices $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ est noté \mathcal{D} .

Le problème de la BDC (non unitaire) est alors d'estimer la matrice \mathbf{A} et l'ensemble \mathcal{D} des matrices bloc-diagonales et ce uniquement à partir des matrices de l'ensemble \mathcal{M} .

3.1.2 Principe de la bloc-diagonalisation conjointe

Connaissant la manière dont se factorisent les matrices auxquelles on s'intéresse, une manière assez classique de résoudre le problème de la BDC consiste à se ramener au problème de la minimisation

de la fonction de coût quadratique suivante :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(1)}(\mathbf{A}, \{\mathbf{D}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{M}_i - \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^H\|_F^2, \quad (3.2)$$

Toutefois, une autre manière de procéder peut être considérée en multipliant à gauche (resp. à droite) la matrice \mathbf{M}_i décrite au niveau de l'Eq. 3.1 par la pseudo-inverse $\mathbf{A}^\#$ de la matrice \mathbf{A} (resp. par $(\mathbf{A}^\#)^H$). Ce qui conduit alors à :

$$\mathbf{B}\mathbf{D}_i\mathbf{B}^H = \mathbf{D}_i, \forall i \in \{1, \dots, N_m\}, \quad (3.3)$$

où $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\#$ (\mathbf{B} n'est alors rien d'autre que la matrice de séparation dans le problème de la SAS). Ainsi pour estimer directement la matrice \mathbf{B} , on peut considérer la fonction de coût quadratique suivante :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(2)}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i\|_F^2. \quad (3.4)$$

Pour des raisons de simplicité, dans la suite, c'est cette fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(2)}$ que nous utiliserons. Cela vient du fait que dans ce cas là, la minimisation de $\mathcal{C}_{bdc}^{(2)}$ par rapport aux matrices \mathbf{D}_i , $i \in \{1, \dots, N_m\}$ possède une solution directe quand la matrice \mathbf{B} est fixée. Mais tout d'abord commençons par introduire quelques notations utiles. Considérant une matrice carrée ($N \times N$) \mathbf{M} telle que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où \mathbf{M}_{ij} pour tout $i, j = 1, \dots, r$ sont des matrices ($n_i \times n_j$) (et $n_1 + \dots + n_r = N$). En introduisant le vecteur suivant $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$, les opérateurs matriciels $\text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\cdot\}$ et $\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\cdot\}$ sont respectivement définis de la manière suivante pour une matrice carrée $\mathbf{M} = (M_{ij})$:

$$\text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{r1} & \mathbf{0}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} - \text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En définissant

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \arg \min_{\mathbf{D}_i} \mathcal{C}_{bdc}^{(2)}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}), \quad (3.8)$$

on trouve assez facilement, en utilisant les propriétés rappelées au niveau de l'annexe 2, que :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{bdc}^{(2)}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i)^H(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i^H\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i^H\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H\mathbf{B}^H\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^H\mathbf{D}_i\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}_i} \mathcal{C}_{bdc}^{(2)}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) = -2(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i) = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{D}}_i = \text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \quad \forall i = 1, \dots, N_m, \quad (3.10)$$

puisque les matrices \mathbf{D}_i pour tout $i = 1, \dots, N_m$ sont des matrices bloc-diagonales. Et finalement en utilisant l'Eq. (3.7), cela conduit à :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(2)}(\mathbf{B}, \{\widehat{\mathbf{D}}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}). \quad (3.11)$$

Enfin, de la même manière que pour la DC, il est possible d'utiliser une troisième fonction de coût définie comme [97] :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(3)}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \log \det \left(\text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) - \log \det (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H), \quad (3.12)$$

Le cas d'une matrice \mathbf{B} unitaire a été traité dans [13] et [37]. La solution proposée est obtenue en minimisant la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ par rapport à l'ensemble des matrices unitaires alors paramétrées comme un produit de matrices de rotation (ou matrices de Givens). L'algorithme résultant est de type Jacobi [65]. L'idée clé est la même dans [13] que dans [37], toutefois, les approximations faites au niveau de la fonction de coût diffèrent. Il en résulte donc deux algorithmes différents. Les auteurs montrent que la minimisation de la fonction $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ revient à la maximisation sous contrainte ($\mathbf{B}^H\mathbf{B} = \mathbf{I}$) d'une forme quadratique. Elle peut être parachevée en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, ce qui se ramène, après calcul, à la résolution d'un polynôme de degré six dans le cas des matrices complexes ou d'un polynôme de degré quatre dans le cas de matrices réelles. Dans [52], C. Févotte et F.-J. Theis ont proposé des stratégies quant à la manière d'initialiser cet algorithme afin d'en assurer la convergence vers une bonne solution. Notons qu'il existe une autre solution au problème de la BDC sous contrainte unitaire présentée dans [37]. Elle repose sur des approximations tensorielles de rang un. Remarquons enfin que la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(3)}(\mathbf{B})$ a été introduite dans [97] afin de bloc-diagonaliser conjointement un ensemble de matrices définies positives et à symétrie hermitienne, sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée.

Notre objectif est de proposer des alternatives aux algorithmes précédents en nous affranchissant de la contrainte d'unitarité et en considérant des ensembles plus généraux de matrices. Les matrices que nous considérons ne sont en effet pas nécessairement réelles, ni nécessairement à symétrie hermitienne, ni non plus forcément définies positives.

3.1.3 Lien entre la BDC et la DC

Notons que lorsque les matrices $n_j \times n_j$ $\mathbf{D}_{i,jj}$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N_m\}$ se réduisent à des scalaires, *i.e* $n_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ impliquant par conséquent que $r = N$, nous retombons alors sur un problème de diagonalisation conjointe. En fait, l'opérateur de zéro bloc-diagonalisation se simplifie alors en :

$$\text{OffBdiag}_{(1)}\{\mathbf{M}\} = ((1 - \delta_{ij})M_{ij})\mathbf{1}_N = \text{OffDiag}\{\mathbf{M}\},$$

où $\mathbf{M} = (M_{ij})$, $\mathbf{1}_N$ est la matrice de dimension $(N \times N)$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. L'opérateur $\text{BDiag}_{(\mathbf{1})}\{\cdot\}$ est alors généralement noté, tout simplement, $\text{Diag}\{\cdot\}$:

$$\text{BDiag}_{(\mathbf{1})}\{\mathbf{M}\} = ((\delta_{ij})M_{ij})\mathbf{1}_N = \text{Diag}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} - \text{OffDiag}\{\mathbf{M}\}.$$

Ainsi, la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ (resp. $\mathcal{C}_{bdc}^{(3)}(\mathbf{B})$) se simplifie alors en $\mathcal{C}_{dc}^{(1)}(\mathbf{B})$ (resp. $\mathcal{C}_{dc}^{(2)}(\mathbf{B})$) laquelle était donnée au niveau de l'Eq. 4.37 (resp. Eq. 4.38).

Dans le cadre de la séparation aveugle de sources, les algorithmes de diagonalisation (resp. bloc-diagonalisation) conjointe sont utilisés afin d'estimer la matrice de mélange (ou la matrice de séparation) dans le cadre des mélanges instantanés (resp. dans le cadre des mélanges convolutifs) de sources (§2.1.2).

3.2 Algorithme de BDC basé sur une optimisation algébrique de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$

Pour estimer le bloc diagonaliseur conjoint \mathbf{B} , la première des quatre solutions que nous avons proposée [57][55][56], et que nous noterons JBD_{Alg} dans la suite, consiste en un algorithme de type algébrique. Il passe par une ré-écriture de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ donnée au niveau de l'Eq. 3.11 sous une forme quadratique dépendant à la fois des matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$ et des vecteurs ligne ou colonne de la matrice \mathbf{B} . Sous l'hypothèse d'inversibilité des matrices \mathbf{M}_i de l'ensemble \mathcal{M} à bloc-diagonaliser conjointement, cette forme matricielle quadratique possède par construction la propriété d'être de rang un. Minimiser la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ revient alors à chercher les vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres de la forme matricielle quadratique. Cet algorithme de bloc-diagonalisation conjointe (non-unitaire) possède l'avantage de ne plus requérir l'hypothèse de symétrie hermitienne sur laquelle reposent la plupart des algorithmes de décompositions matricielles conjointes. La solution que nous proposons est générale en ce sens qu'elle permet de considérer le cas d'un ensemble de matrices complexes. Notons encore que cet algorithme est une extension de l'algorithme de DC proposé par E.-M. Fadaili et *al.* dans [44], algorithme noté JD_A . En d'autres termes, cela signifie que lorsque les matrices $n_j \times n_j$ $\mathbf{D}_{i,j,j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N_m\}$ se réduisent à des scalaires, *i.e.* $n_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ impliquant $r = N$, alors l'algorithme JBD_{Alg} n'est rien d'autre que l'algorithme JD_A .

3.2.1 Principe de l'algorithme JBD_{Alg}

En posant $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r]^T$, où les $\mathbf{B}_j, j \in \{1, \dots, r\}$ désignent les r matrices bloc de taille $n_j \times M$, la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ décrite au niveau de l'Eq. 3.11 peut être ré-écrite de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \|\mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \mathbf{B}_j^H\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r |\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H|^2, \quad (3.13)$$

où \mathbf{b}_j^n pour tout $n \in \{1, \dots, n_j\}$ désigne le n -ème des n_j vecteurs ligne de la matrice \mathbf{B}_j , pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r (\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H) (\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H)^H \\
&= \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_i^H (\mathbf{b}_i^m)^H \\
&= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \left[\sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_i^H \right] (\mathbf{b}_i^m)^H \\
&= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) (\mathbf{b}_i^m)^H, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) = \sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{M}_i (\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_i^H$ est une matrice à symétrie hermitienne. Comme $(\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n$ est de rang un, pour tout $j = 1, \dots, r$ et pour tout $n = 1, \dots, n_j$, la matrice $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$ possède $N - (r - 1)n_j = n_j$ vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles¹. Si bien que la minimisation de cette forme quadratique sous la contrainte de la norme unité peut être effectuée par la recherche des n_j vecteurs propres associés aux n_j plus petites valeurs propres de $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$. Cependant comme la matrice \mathbf{Q}_i pour un i donné dépend elle-même des vecteurs ligne de la matrice \mathbf{B} , nous proposons donc d'utiliser une procédure itérative.

En résumé, le principe de l'algorithme de BDC (non-unitaire) JBD_{Alg} que nous proposons afin d'estimer le bloc-diagonaliseur conjoint $\hat{\mathbf{B}}$ est fourni au niveau du Tab. 3.1 :

Données & initialisations :

Considérer les N_m matrices de l'ensemble $\mathcal{M} : \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.

Initialiser $\mathbf{B}^{(0)}$ (dans le cas carré ($M = N$), on peut par exemple initialiser par $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).

Pour $l = 1, 2, \dots$

Pour $n = 1, \dots, n_j$

Calculer la matrice $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$.

FinPour

Chercher les n_i plus petites valeurs propres $\lambda_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ et les vecteurs propres associés $\mathbf{b}_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ de la matrice $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$.

Arrêter après un certain nombre d'itérations ou quand $|\lambda_i^{m(l)} - \lambda_i^{m(l-1)}| \leq \varepsilon$ avec ε seuil positif de faible valeur.

FinPour

TABLE 3.1 – Principe de l'algorithme de BDC basé sur une optimisation algébrique d'un critère de type moindres carrés : JBD_{Alg} .

1. Là, nous supposons que les matrices \mathbf{M}_i , $\forall i = 1, \dots, N_m$ à bloc-diagonaliser conjointement sont définies positives.

3.3 Trois nouveaux algorithmes de BDC basés sur des approches de type Gradient

Dans le but de bloc-diagonaliser conjointement un ensemble de matrices complexes pouvant ne pas être définies positives, nous présentons trois nouveaux algorithmes de BDC. Ces algorithmes sont tous trois basés sur une approche de type gradient. Le premier algorithme que nous allons décrire repose sur un calcul approché du gradient matriciel du même type que celui suggéré par A. Yeredor et *al.* dans [118] dans le cadre de la diagonalisation conjointe. L'algorithme qui en résulte peut d'ailleurs être vu comme une généralisation de l'algorithme de DC DOMUNG (nom que lui ont donné ses auteurs). Dans un second temps, le calcul exact du gradient matriciel est conduit, permettant l'écriture de deux nouveaux algorithmes de BDC, l'un basé sur un schéma d'optimisation de type gradient, le second basé sur un schéma d'optimisation de type gradient relatif. Ces deux algorithmes améliorent l'algorithme basé sur un calcul approché (soit en terme de vitesse de convergence soit en terme de performances). Pour chacun de ces trois algorithmes, nous étudions les versions à pas² optimal afin d'en accélérer la convergence. Cela signifie que le pas d'adaptation est calculé algébriquement à chaque itération ce qui équivaut finalement à la recherche des racines d'un polynôme (de degré trois dans notre cas).

L'avantage principal de ces trois algorithmes est d'être plus généraux (les matrices considérées peuvent être complexes, elles ne sont pas nécessairement définies positives ni forcément à symétrie hermitienne et le bloc-diagonaliseur recherché peut être une matrice unitaire ou non-unitaire).

3.3.1 Principe de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ fondé sur un calcul approximé du gradient matriciel

3.3.1.1 Version à pas fixe

Tout d'abord, afin d'assurer le fait que la matrice recherchée \mathbf{B} soit inversible, elle est mise à jour à chaque itération m selon la règle suivante (voir [121]) :

$$\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)} \quad \forall m = 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

où $\mathbf{B}^{(0)}$ est une matrice initiale, $\mathbf{B}^{(m)}$ est l'estimée de \mathbf{B} à la m -ème itération, $\mathbf{W}^{(m-1)}$ est une matrice zéro bloc-diagonale suffisamment petite (en terme de la norme de Frobenius) et \mathbf{I}_N est la matrice identité.

Notons $\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^{(m-1)H}$ pour tout $i = 1, \dots, N_m$ et pour tout $m = 1, 2, \dots$, ainsi à chaque itération la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ donnée au niveau de l'Eq. 3.11 peut alors être exprimée en fonction de $\mathbf{W}^{(m-1)}$ plutôt que de $\mathbf{B}^{(m)}$.

Nous avons donc :

$$\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)}) = \sum_{i=1}^{N_m} \left\| \text{OffBdiag}_{(n)} \{ (\mathbf{I}_N + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{M}_i^{(m)} (\mathbf{I}_N + \mathbf{W}^{(m-1)})^H \} \right\|_F^2, \quad (3.16)$$

ou tout simplement :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N_m} \left\| \text{OffBdiag}_{(n)} \{ (\mathbf{I} + \mathbf{W})\mathbf{M}_i^{(m)} (\mathbf{I} + \mathbf{W})^H \} \right\|_F^2.$$

La matrice \mathbf{W} est alors mise à jour à chaque itération selon la règle d'adaptation suivante :

$$\mathbf{W}^{(m)} = -\mu \nabla \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)}) \quad \forall m = 1, 2, \dots, \quad (3.17)$$

2. On dit également coefficient d'adaptation.

où μ est le pas d'adaptation et $\nabla\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)})$ représente le gradient matriciel complexe défini comme [95] :

$$\nabla\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)}) = 2 \frac{\partial\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)})}{\partial\mathbf{W}^{(m-1)*}} \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

On montre alors que le gradient matriciel complexe $\nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}) = 2 \frac{\partial\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})}{\partial\mathbf{W}^*}$ de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$ est donné par (la démonstration de ce résultat est fournie au niveau de l'Annexe 2) :

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}) = & 4 \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} \right. \\ & \left. + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}^H + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W} \mathbf{E}^H \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\mathbf{D}_i^{(m)}$ et $\mathbf{E}_i^{(m)}$ désignent respectivement la matrice bloc-diagonale et la matrice zéro bloc-diagonale construites à partir de $\mathbf{M}_i^{(m)}$, *c.à.d.* $\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}$. L'expression donnée au niveau de l'Eq. 3.19 est alors introduite au niveau de l'algorithme de gradient donné par l'Eq. 3.17. Afin d'accélérer la convergence de l'algorithme, le pas optimal peut être calculé algébriquement à chaque itération. Pour cela, nous devrions normalement calculer $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}))$, toutefois, nous nous contenterons ici de ne calculer que $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \mathbf{F}^{(m)})$ avec la matrice $\mathbf{F}^{(m)} = \text{OffBdiag}_{(n)}\{\nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})\}$. Nous utilisons la matrice $\text{OffBdiag}_{(n)}\{\nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})\}$ plutôt que la matrice $\nabla\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$ du fait que \mathbf{W} est une matrice suffisamment petite (en terme de norme) et zéro bloc-diagonale. Par conséquent, seuls les blocs hors diagonale participent à la descente de l'algorithme.

3.3.1.2 Version à pas optimal

Nous cherchons maintenant le pas optimal μ qui assure la minimisation de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \mathbf{F}^{(m)})$. Ce pas d'adaptation est déterminé par la recherche des racines d'un polynôme d'ordre trois obtenu par la dérivation du polynôme d'ordre quatre $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \mathbf{F}^{(m)})$.

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \mathbf{F}^{(m)}) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} \mu + a_2^{(m)} \mu^2 + a_3^{(m)} \mu^3 + a_4^{(m)} \mu^4, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(-\mu \mathbf{F}^{(m)})}{\partial\mu} = 4a_4^{(m)} \mu^3 + 3a_3^{(m)} \mu^2 + 2a_2^{(m)} \mu + a_1^{(m)}, \quad (3.21)$$

où les coefficients $a_4^{(m)}$, $a_3^{(m)}$, $a_2^{(m)}$, $a_1^{(m)}$ et $a_0^{(m)}$ sont donnés par (le calcul détaillé des coefficients est présenté au niveau de l'Annexe 2) :

$$a_0^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{E}_i^{(m)} \right\} \quad (3.22)$$

$$a_1^{(m)} = - \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) + (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H \mathbf{E}_i^{(m)} \right\} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} a_2^{(m)} = & \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^H \mathbf{E}_i^{(m)} \right. \\ & \left. + (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$a_3^{(m)} = - \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^H (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} \quad (3.25)$$

$$a_4^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^H \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^H \right\}. \quad (3.26)$$

Le pas optimal μ correspond à la racine du polynôme donné par l'Eq. 3.21 qui donne le minimum au niveau du polynôme donné par l'Eq. 3.20.

En résumé, le principe de l'algorithme de BDC (non-unitaire) $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ reposant sur une approche de type gradient, mais dans laquelle le gradient matriciel est approximé, est fourni au niveau du Tab. 3.2 :

<p>Données & initialisations :</p> <p>Considérer les N_m matrices de l'ensemble $\mathbf{M}_1^{(0)}, \mathbf{M}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{M}_{N_m}^{(0)}$.</p> <p>Initialiser $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}^{(0)}$ (dans le cas carré ($N = M$), on peut par exemple initialiser par $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_N$).</p> <p>Pour $m = 1, 2, \dots$</p> <p> Pour $i = 1, \dots, N_m$</p> <p> Calculer $\mathbf{M}_i^{(m)}$ par :</p> $\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} \mathbf{M}_i^{(m-1)} \mathbf{B}^{(m-1)H}.$ <p> Calculer $\nabla \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.19.</p> <p> FinPour</p> <p>Affecter $\mathbf{F}^{(m)} = -\text{OffBdiag}_{(n)}\{\nabla \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})\}$.</p> <p>Calculer les coefficients du polynôme $a_0^{(m)}, \dots, a_4^{(m)}$ grâce à (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26).</p> <p>Calculer le pas optimal μ par la recherche de la racine de la dérivée donnée par l'Eq. 3.21 du polynôme d'ordre 4 exprimé au niveau de l'Eq. 3.20 qui donne le minimum dans ce polynôme.</p> <p>Affecter $\mathbf{W}^{(m)} = \mu \mathbf{F}^{(m)}$ et $\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I}_N + \mathbf{W}^{(m-1)}) \mathbf{B}^{(m-1)}$.</p> <p>Arrêter après un certain nombre d'itérations ou quand $\ \mathbf{B}^{(m)} - \mathbf{B}^{(m-1)}\ _F \leq \varepsilon$ avec ε seuil positif de faible valeur.</p> <p>FinPour</p>
--

TABLE 3.2 – Principe de l'algorithme de BDC basé sur une approche de type gradient, le calcul du gradient matriciel étant approximé : $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$.

3.3.2 Principe des deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ fondés sur un calcul exact du gradient matriciel

3.3.2.1 Versions à pas fixe

Nous présentons dans ce paragraphe deux autres algorithmes de BDC basés sur des approches de type gradient (absolu) et de type gradient relatif. Le calcul du gradient matriciel est cette fois-ci exact.

Nous commençons par étudier les versions à pas d'adaptation fixe (notées respectivement $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$). La matrice \mathbf{B} est ré-estimée à chaque itération m (on la note $\mathbf{B}^{(m)}$). Ainsi, la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B})$ s'exprime à chaque itération de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m)}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}^{(m)}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^{(m)H}\}\|_F^2,$$

ou plus simplement : $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2$.

La matrice \mathbf{B} recherchée est mise à jour à chaque itération au moyen de la règle d'adaptation suivante :

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)}), \quad (3.27)$$

où μ_a est un réel positif de faible valeur (pas d'adaptation) et $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)})$ représente le gradient matriciel (absolu) complexe obtenu par la même relation que celle donnée au niveau de l'Eq. 3.18. Dans le but d'assurer l'inversibilité de la matrice \mathbf{B} recherchée et ainsi la stabilité de l'algorithme (à faible pas d'adaptation), on peut utiliser un autre schéma d'optimisation légèrement différent et portant le nom de gradient relatif [17] :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(m)} &= \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)}) \mathbf{B}^{(m-1)} \\ &= \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m-1)}(\mathbf{B}) \mathbf{B}^{(m-1)} = (\mathbf{I}_N - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m-1)}(\mathbf{B})) \mathbf{B}^{(m-1)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où

$$\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) = \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})(\mathbf{B}^{(m)})^H. \quad (3.29)$$

La matrice de gradient complexe $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ de la fonction de coût quadratique $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ est calculée au niveau de l'Annexe 2. On y démontre qu'elle est égale à :

$$\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m-1)}(\mathbf{B}) = 2 \left[\sum_{i=1}^{N_m} \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H + \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right]. \quad (3.30)$$

Cette équation est utilisée au niveau de l'algorithme du gradient décrit par l'Eq. 3.27 de même qu'au niveau de l'algorithme du gradient relatif décrit par l'Eq. 3.28. En résumé, le principe des deux algorithmes de BDC (non-unitaires) $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ fondés sur une approche de type gradient (absolu) et de type gradient relatif est fourni au niveau des Tab. 3.3 et 3.4 :

Données & initialisations :

Considérer les N_m matrices carrées $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.

Choisir une initialisation de la matrice recherchée $\mathbf{B}^{(0)}$ et fixer un pas d'adaptation μ_a .

Pour $m = 1, 2, \dots$

Calculer $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.30.

Affecter $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)})$.

FinPour

TABLE 3.3 – Principe de l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient (absolu), le calcul du gradient matriciel étant exact, $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$.

<p>Données & initialisations :</p> <p>Considérer les N_m matrices carrées $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.</p> <p>Choisir une initialisation de la matrice recherchée $\mathbf{B}^{(0)}$ (par exemple, dans le cas carré ($N = M$) on peut choisir $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$) et fixer un pas d'adaptation μ_r.</p> <p>Pour $m = 1, 2, \dots$</p> <p>Calculer $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.30.</p> <p>Calculer $\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.29.</p> <p>Affecter $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)}) \mathbf{B}^{(m-1)}$.</p> <p>FinPour</p>
--

TABLE 3.4 – Principe de l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient relatif, le calcul du gradient matriciel étant exact, $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$.

3.3.2.2 Recherche des pas optimaux : algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$

Afin d'accélérer la convergence des deux algorithmes précédents $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$, il est possible de calculer le pas optimal μ_{opt} . Il est déterminé algébriquement à chaque itération par le calcul de $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_1^{(m)})$ pour l'algorithme de gradient (absolu) et par le calcul de $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)})$ pour l'algorithme de gradient relatif, où $\mathbf{F}_1^{(m)} = \mathbf{B} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ et où $\mathbf{F}_2^{(m)} = \mathbf{B} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \mathbf{B}$. Il convient ensuite de rechercher le pas permettant de minimiser la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_1^{(m)})$ (resp. $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)})$) par rapport à μ dans ce cas là. Ce pas d'adaptation optimal, μ_{opt} , est déterminé par la recherche des racines d'un polynôme d'ordre trois obtenu comme la dérivée d'un polynôme d'ordre quatre en μ dont les coefficients sont exprimés par (voir la démonstration donnée au niveau de l'Annexe 2) :

$$a_0^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H \mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H \text{vec}(\mathbf{M}_i), \quad (3.31)$$

$$a_1^{(m)} = - \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i), \quad (3.32)$$

$$a_2^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i), \quad (3.33)$$

$$a_3^{(m)} = - \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H (\mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i), \quad (3.34)$$

$$a_4^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H \text{vec}(\mathbf{M}_i), \quad (3.35)$$

avec

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H \quad (3.36)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \otimes \left(\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \right)^H + \left(\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \right)^T \otimes \mathbf{B}^H \quad (3.37)$$

$$\mathbf{R} = \left(\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \right)^T \otimes \left(\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) \right)^H \quad (3.38)$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker [14] et l'opérateur de vectorisation $\mathbf{vec}(\cdot)$ appliqué à la matrice \mathbf{M} permet la concaténation de ses colonnes en un vecteur colonne, *c.à.d.* pour toute matrice carrée $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{M \times M}$, il est défini par le vecteur de dimension $M^2 \times 1$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1M} \\ M_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ M_{M1} & M_{M2} & \dots & M_{MM} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{vec}(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} M_{11} \\ \vdots \\ M_{M1} \\ M_{12} \\ \vdots \\ M_{M2} \\ \vdots \\ M_{MM} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Les matrices de transformation \mathbf{T}_{Diag} et \mathbf{T}_{Boff} de dimension $N^2 \times N^2$ sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{T}_{\text{Diag}} = \mathbf{diag}\{\mathbf{vec}(\mathbf{B}\mathbf{Diag}(\mathbf{n})\{\mathbf{1}_N\})\}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T}_{\text{Boff}} = \mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T}_{\text{Diag}}, \quad (3.41)$$

où $\mathbf{I}_{N^2} = \mathbf{Diag}\{\mathbf{1}_{N^2}\}$ est la matrice identité de dimension $N^2 \times N^2$ et $\mathbf{diag}\{\mathbf{a}\}$ est la matrice carrée diagonale contenant les éléments du vecteur \mathbf{a} .

Le pas optimal μ_{opt} correspond à la racine du polynôme $\frac{\partial \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_1^{(m)})}{\partial \mu}$ qui donne le minimum au niveau du polynôme $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_1^{(m)})$.

Notons que $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)})$ est également un polynôme d'ordre 4. La fonction $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)})$ est exprimée par

$$\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)}) = a_{0r}^{(m)} + a_{1r}^{(m)}\mu + a_{2r}^{(m)}\mu^2 + a_{3r}^{(m)}\mu^3 + a_{4r}^{(m)}\mu^4, \quad (3.42)$$

et par conséquent, sa dérivée est donnée de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_2^{(m)})}{\partial \mu} = 4a_{4r}^{(m)}\mu^3 + 3a_{3r}^{(m)}\mu^2 + 2a_{2r}^{(m)}\mu + a_{1r}^{(m)}, \quad (3.43)$$

où les coefficients a_{0r} , a_{1r} , a_{2r} , a_{3r} , a_{4r} ont les mêmes expressions que celles trouvées au niveau des Eq. 3.31, 3.32, 3.33, 3.34 et 3.35 à cette différence près que la matrice \mathbf{Q} (Eq. 4.57) est remplacée par la matrice :

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{B}^T \otimes \left(\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})\mathbf{B} \right)^H + \left(\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})\mathbf{B} \right)^T \otimes \mathbf{B}^H, \quad (3.44)$$

et la matrice \mathbf{R} (Eq. 4.58) par la matrice :

$$\mathbf{R}_r = \left(\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})\mathbf{B} \right)^T \otimes \left(\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})\mathbf{B} \right)^H. \quad (3.45)$$

En résumé, le principe des deux algorithmes de BDC (non-unitaires) à base de gradient (absolu) et relatif à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{0,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{0,R}}$ est donné au niveau du Tab. 3.5 et du Tab. 3.6 :

<p>Données & initialisation :</p> <p>Considérer les N_m matrices carrées $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.</p> <p>Choisir une initialisation de la matrice recherchée $\mathbf{B}^{(0)}$ (par exemple, dans le cas carré ($N = M$) on peut choisir $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).</p> <p>Pour $m = 1, 2, \dots$</p> <p>Calculer $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.30.</p> <p>Calculer les coefficients du polynôme $a_0^{(m)}, \dots, a_4^{(m)}$ grâce à (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35).</p> <p>Calculer le pas optimal $\mu_{opt}^{(m-1)}$ par la recherche de la racine de la dérivée du polynôme $\mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{F}_1^{(m)})$ d'ordre 4 qui donne le minimum dans ce polynôme.</p> <p>Affecter $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_{opt}^{(m-1)} \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)})$.</p> <p>Arrêter après un certain nombre d'itérations ou quand $\ \mathbf{B}^{(m)} - \mathbf{B}^{(m-1)}\ _F \leq \varepsilon$ avec ε seuil positif de faible valeur.</p> <p>FinPour</p>

TABLE 3.5 – Principe de l'algorithme de BDC à base de gradient à pas optimal : $\text{JBD}_{\text{Grad}_{0,A}}$.

<p>Données & initialisation :</p> <p>Considérer les N_m matrices carrées $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.</p> <p>Choisir une initialisation de la matrice recherchée $\mathbf{B}^{(0)}$ (par exemple, dans le cas carré ($N = M$) on peut choisir $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).</p> <p>Pour $m = 1, 2, \dots$</p> <p>Calculer $\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.30.</p> <p>Calculer $\nabla_r \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ dont l'expression est donnée au niveau de l'Eq. 3.29.</p> <p>Calculer les coefficients du polynôme $a_{0r}^{(m)}, \dots, a_{4r}^{(m)}$ grâce à (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35) en remplaçant \mathbf{Q} par \mathbf{Q}_r et \mathbf{R} par \mathbf{R}_r.</p> <p>Calculer le pas optimal $\mu_{opt}^{(m-1)}$ par la recherche de la racine de la dérivée donnée par l'Eq. 3.43 du polynôme d'ordre 4 exprimé au niveau de l'Eq. 3.42 qui donne le minimum dans ce polynôme.</p> <p>Affecter $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_{opt}^{(m-1)} \nabla_r \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{B}^{(m-1)}) \mathbf{B}^{(m-1)}$.</p> <p>Arrêter après un certain nombre d'itérations ou quand $\ \mathbf{B}^{(m)} - \mathbf{B}^{(m-1)}\ _F \leq \varepsilon$ avec ε seuil positif de faible valeur.</p> <p>FinPour</p>
--

TABLE 3.6 – Principe de l'algorithme de BDC à base de gradient relatif à pas optimal : $\text{JBD}_{\text{Grad}_{0,R}}$.

3.4 Simulations informatiques et résultats numériques

3.4.1 Cas général de la BDC d'un ensemble de matrices complexes

Nous commençons par considérer des ensembles \mathcal{D} (construits) de N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$) matrices carrées, de taille $N \times N$, complexes, exactement bloc diagonales. Ces matrices sont générées aléatoirement : les différentes composantes de ces matrices (partie réelle et partie imaginaire) suivent une loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. Dans un second temps, ces matrices sont perturbées par un bruit additif afin de s'écarter de l'hypothèse de bloc-diagonalité. Dans ce cas là, une matrice complexe dont les termes aléatoires (parties réelle et imaginaire) sont tirés selon une loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance σ_b^2 est ajoutée à la matrice précédente. Un rapport signal à bruit (RSB) peut alors être défini en dB comme $\text{RSB} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$.

Afin de pouvoir juger de la qualité de l'estimation de la matrice \mathbf{B} (bloc-diagonaliseur conjoint commun à toutes les matrices de l'ensemble \mathcal{M}), nous utilisons l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ décrit au niveau de l'Eq. 1.38. Nous rappelons que la matrice produit \mathbf{G} vaut, dans notre cas, $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. Quand l'estimation est parfaite, l'indice de performance doit tendre vers $-\infty$ en échelle logarithmique (0 en échelle linéaire). Quand $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ est donné en dB, il est défini comme $l_{\text{Conv}}(\cdot) \text{ dB} = 10 \log(l_{\text{Conv}}(\cdot))$.

Convergence des algorithmes

Nous considérons dans un premier temps $M = N = 9$ (la matrice \mathbf{A} est carrée) et $r = 3$ ($n_j = 3$ pour tout $j = 1, \dots, 3$). La matrice \mathbf{A} est choisie de manière aléatoire selon une loi uniforme de moyenne 0 et de variance 1 sur l'intervalle $[-1, 1]$. L'ensemble \mathcal{M} des matrices considérées \mathbf{M}_i , $i = 1, \dots, N_m$ est constitué de $N_m = 100$ (resp. 20) matrices complexes de taille $M \times M$.

Au niveau de la Fig. 3.1, nous avons tracé l'évolution de l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB en fonction du nombre d'itérations dans le cas où les matrices de l'ensemble \mathcal{D} sont quasiment bloc-diagonales (RSB = 100 dB) pour l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient (absolu) qui a été présenté au niveau du §3.3.2. Les deux versions de l'algorithme sont comparées : celle à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ (§3.3.2.1) et celle à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ (§3.3.2.2). Deux cas sont par ailleurs étudiés : sur la courbe de gauche, l'ensemble à bloc diagonaliser conjointement est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite de cette même figure, l'ensemble étudié n'est plus constitué que de $N_m = 20$ matrices.

Au niveau de la Fig. 3.3, nous nous plaçons dans les mêmes conditions sauf que cette fois, nous nous intéressons à l'algorithme de BDC fondé sur une approche de type gradient relatif que. Les deux versions de l'algorithme sont comparées : celle à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ (§3.3.2.1) et celle à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ (§3.3.2.2). Deux cas sont également étudiés : sur la courbe de gauche, l'ensemble à bloc diagonaliser conjointement est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite de cette même figure, l'ensemble étudié n'est plus constitué que de $N_m = 20$ matrices.

Notons que dans les versions des algorithmes à pas d'adaptation fixe, l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ est tracé pour différentes valeurs des pas d'adaptation μ_a et μ_r . Pour des valeurs du pas d'adaptation plus élevées que la valeur la plus grande présentée ici, on observe la divergence des algorithmes.

Au niveau de la Fig. 3.2, nous avons représenté l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ pour les deux versions de l'algorithme à base de gradient (absolu) $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ en fonction du nombre d'itérations dans le cas où les matrices de l'ensemble \mathcal{D} s'écarteront de la bloc-diagonalité. Elles sont maintenant perturbées par un bruit Gaussien additif et le RSB vaut 20 dB. Deux cas sont à nouveau étudiés. A

gauche de la courbe, l'ensemble à bloc-diagonaliser conjointement est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite, cet ensemble ne contient plus que $N_m = 20$ matrices.

Enfin au niveau de la Fig. 3.4, nous avons représenté l'indice de performance $I_{\text{Conv}}(\cdot)$ pour les deux versions de l'algorithme à base de gradient relatif $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ en fonction du nombre d'itérations dans le cas où les matrices de l'ensemble \mathcal{D} s'écartent de la bloc-diagonalité. Elles sont maintenant perturbées par un bruit Gaussien additif et le RSB vaut 20 dB. Deux cas sont à nouveau étudiés. A gauche de la courbe, l'ensemble à bloc-diagonaliser conjointement est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite, cet ensemble ne contient plus que $N_m = 20$ matrices.

A la vue de ces courbes, plusieurs constats peuvent être faits. Tout d'abord nous vérifions qu'au fur et à mesure que nous augmentons les valeurs des pas d'adaptation μ_a et μ_r , la vitesse de convergence des deux algorithmes à pas fixe (celui à base de gradient (absolu) $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et celui à base de gradient relatif $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$) s'accélère. La valeur de μ_a impliquant la convergence la plus rapide de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ sans entraîner sa divergence est différente de la valeur de μ_r donnant la convergence la plus rapide de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ (sans entraîner sa divergence). Si l'on continue d'augmenter les valeurs de μ_a et μ_r (au delà des valeurs présentées ici), alors ces deux algorithmes se mettent à diverger (la convergence des algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ dépend donc du choix de la valeur du pas d'adaptation).

Nous constatons également que les versions à pas optimal (dans lesquelles les pas d'adaptation μ_a et μ_r sont réévalués algébriquement à chaque itération) convergent nettement plus rapidement vers la solution que les deux versions à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ obtenues avec les valeurs de pas d'adaptation les plus grandes possibles (sans que cela n'entraîne la divergence des algorithmes). Enfin, on constate qu'en général l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ est plus rapide que l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$, mais au prix d'une baisse de performances, les meilleures performances étant généralement atteintes au moyen de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$.

Dans un second temps, nous comparons la vitesse de la convergence des quatre algorithmes de BDC proposés : l'algorithme basé sur un schéma d'optimisation algébrique JBD_{Alg} (détaillé au §3.1) et les trois algorithmes fondés sur une approche de type gradient dans leur version à pas optimal $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ (détaillé au §3.3 et pour lequel le calcul du gradient matriciel est approximé) et les algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ (pour lesquels le calcul du gradient matriciel est exact).

Au niveau de la Fig. 3.5, nous comparons l'évolution de l'indice de performance $I_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB obtenu au moyen des quatre algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ en fonction du nombre d'itérations dans le cas où les matrices de l'ensemble \mathcal{D} sont quasiment bloc-diagonales (RSB = 100 dB). Pour la courbe de gauche, l'ensemble sur lequel nous travaillons est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite nous ne considérons plus que $N_m = 20$ matrices. Au niveau de la Fig. 3.6, nous représentons l'évolution de l'indice de performance $I_{\text{Conv}}(\cdot)$ en fonction du nombre d'itérations pour les quatre algorithmes lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse de bloc-diagonalité (RSB = 20 dB). A nouveau, pour la courbe de gauche, l'ensemble sur lequel nous travaillons est constitué de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite nous ne considérons plus que $N_m = 20$ matrices.

Nous remarquons que l'algorithme algébrique est généralement le plus rapide des quatre, mais il est aussi le moins performant (surtout dans un contexte bruité). En fait, il est très sensible à l'initialisation de la matrice recherchée (dans cet exemple, tous les algorithmes sont initialisés au moyen de la matrice identité de taille $M \times M$) et dépend du choix des matrices à bloc-diagonaliser (elles doivent être définies positives). L'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ est celui qui donne les meilleures performances même

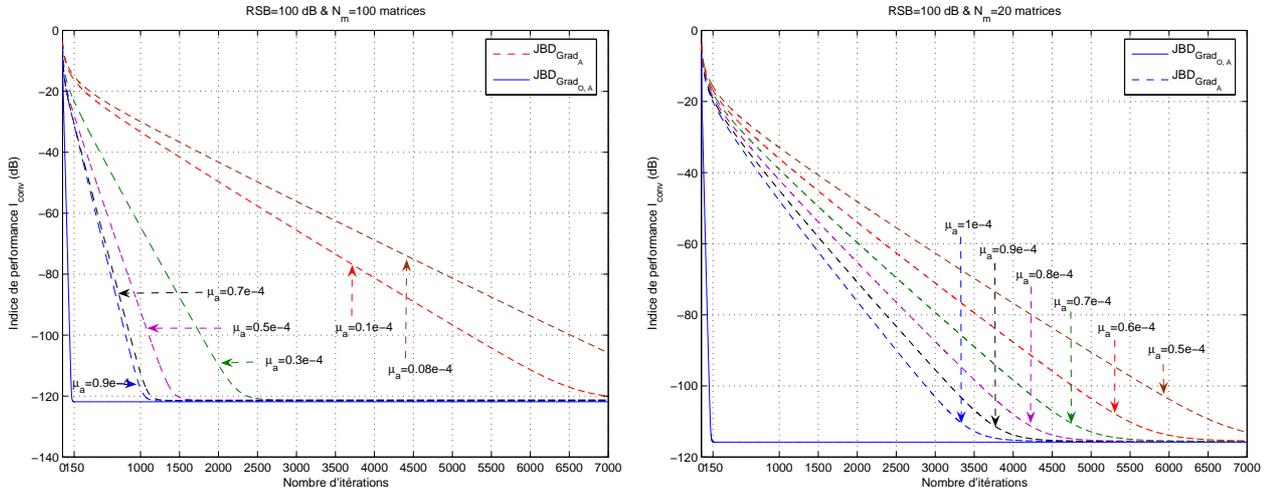


FIGURE 3.1 – Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient (absolu) à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ dans un contexte quasiment non-bruité (RSB = 100 dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.

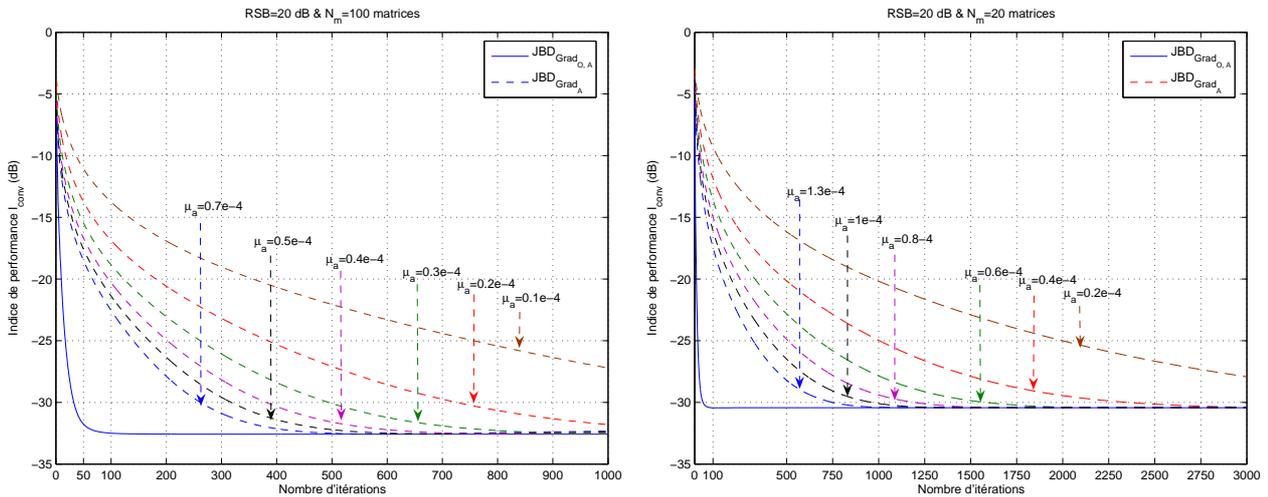


FIGURE 3.2 – Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient (absolu) à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$, dans un contexte bruité (RSB = 20 dB). Gauche (resp. droite) : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.

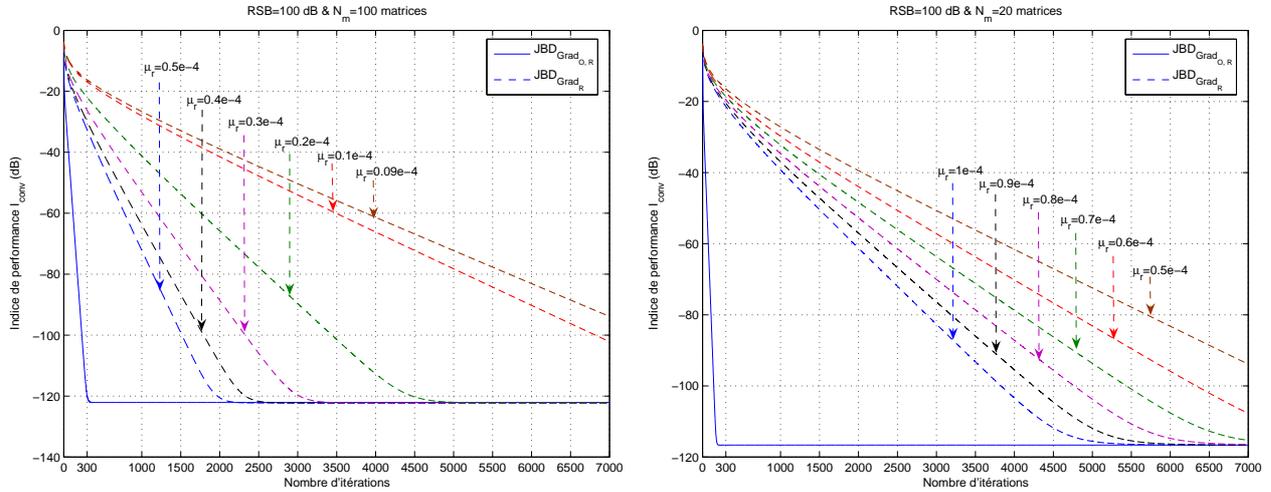


FIGURE 3.3 – Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient relatif à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasiment non bruité ($\text{RSB} = 100$ dB). Gauche (resp. droite) : $I_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.

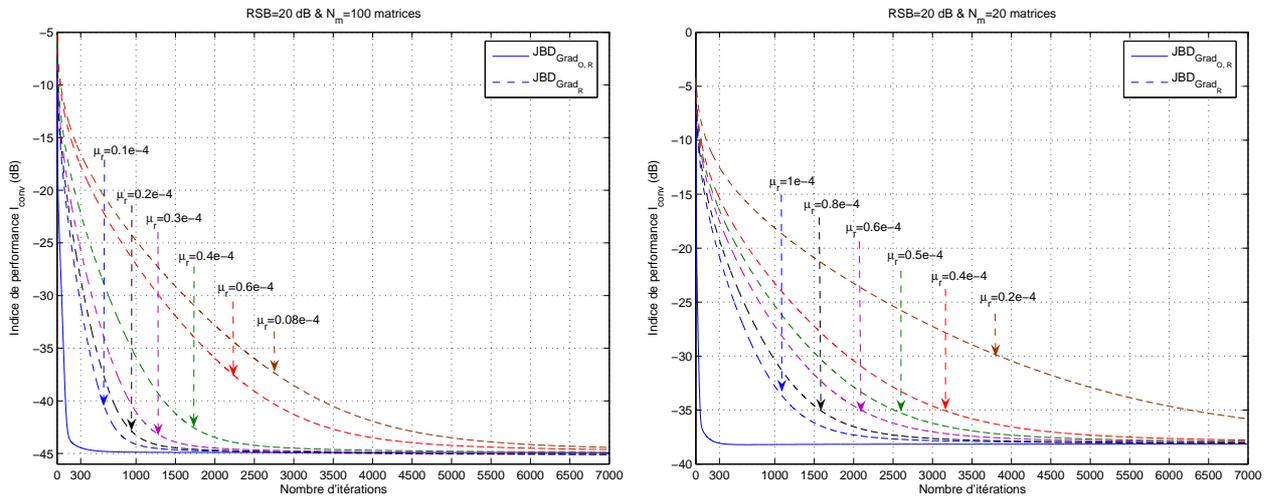


FIGURE 3.4 – Etude de la convergence des algorithmes à base du gradient relatif à pas d'adaptation fixe $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ et à pas optimal $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB). Gauche (resp. droite) : $I_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ (resp. 20) matrices.

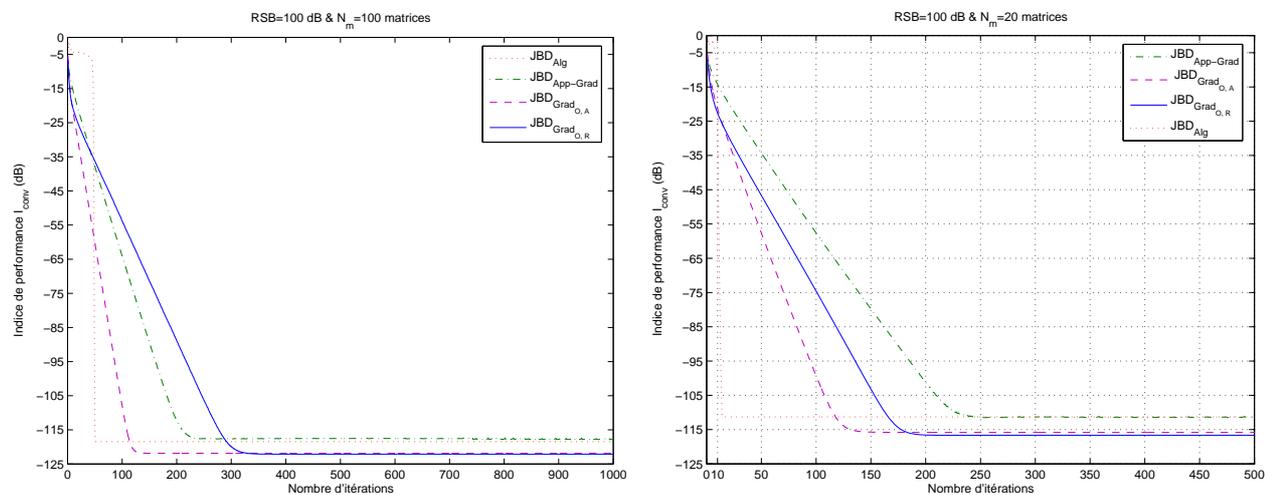


FIGURE 3.5 – Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$ dans un contexte quasi non-bruité ($RSB = 100$ dB) pour le cas d'une matrice \mathbf{A} carrée. Gauche : $l_{Conv}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

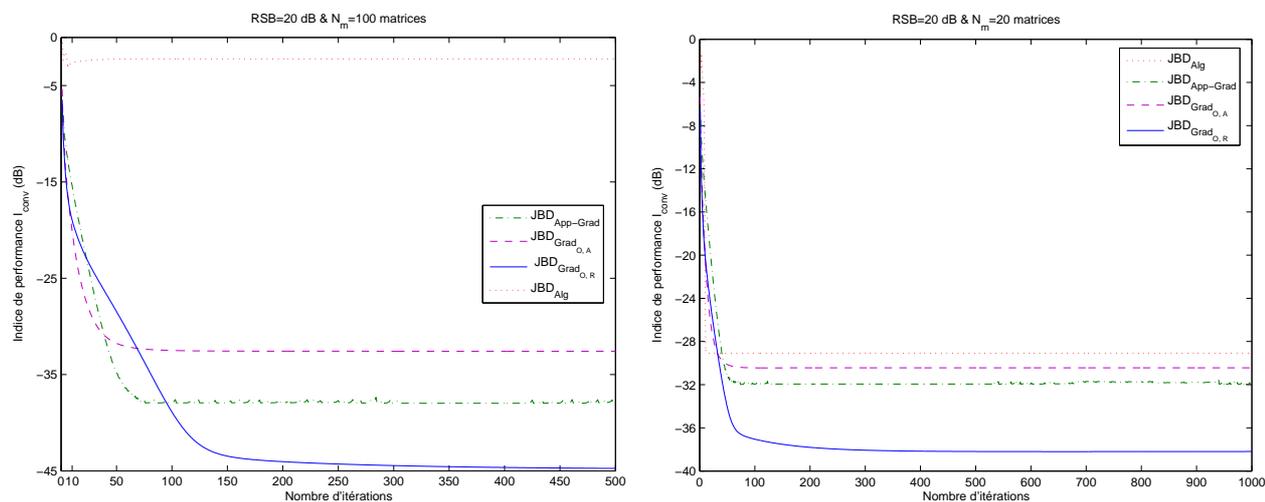


FIGURE 3.6 – Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($RSB = 20$ dB) pour le cas d'une matrice \mathbf{A} carrée. Gauche : $l_{Conv}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d'itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

en contexte difficile : avec du bruit et avec un ensemble contenant relativement peu de matrices à bloc-diagonaliser conjointement. Lorsque les matrices sont exactement bloc-diagonales et que le nombre N_m de matrices à bloc-diagonaliser n'est pas trop faible, les deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ convergent approximativement vers la même solution. Ils sont basés sur un calcul exact du gradient matriciel alors que l'algorithme $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ repose sur un calcul approché. Comme on pouvait s'y attendre, c'est l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ qui conduit aux meilleures performances quel que soit le contexte envisagé. Notons toutefois, qu'il est généralement le moins rapide des quatre algorithmes.

Dans un second temps, nous nous plaçons toujours dans les mêmes conditions que celles de l'exemple précédent à ceci près que nous considérons maintenant le cas d'une matrice \mathbf{A} rectangulaire (et non plus carrée) de taille $M \times N$ ($M = 12$, $N = 8$), la taille d'un bloc est ici prise égale à $n_j = 4$.

Au niveau de la Fig. 3.7, nous comparons les différents algorithmes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ en traçant l'indice de performance $\text{I}_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB en fonction du nombre d'itérations. Les matrices de l'ensemble \mathcal{D} sont d'abord considérées comme quasiment bloc-diagonales ($\text{RSB} = 100$ dB). A gauche, nous représentons les résultats obtenus sur un ensemble de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite nous fournissons ces mêmes résultats sur un ensemble constitué de $N_m = 20$ matrices. Au niveau de la Fig. 3.8, nous fournissons l'évolution de l'indice de performance $\text{I}_{\text{Conv}}(\cdot)$ pour les trois même algorithmes en fonction du nombre d'itérations. Les matrices de l'ensemble \mathcal{D} sont maintenant perturbées par un bruit Gaussien et le $\text{RSB} = 20$ dB. A gauche, nous donnons les résultats obtenus sur un ensemble de $N_m = 100$ matrices tandis qu'à droite, ce sont les résultats obtenus sur un ensemble de $N_m = 20$ matrices.

Ces courbes confirment bien le fait que les deux algorithmes basés sur un calcul du gradient matriciel exact et non plus approché ($\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$) conduisent à de meilleures performances que l'algorithme $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$. On vérifie une nouvelle fois que l'algorithme basé sur une approche de type gradient relatif $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ est bien le plus robuste aussi bien vis-à-vis d'un écart par rapport à la bloc diagonalité que vis-à-vis d'une réduction du nombre de matrices à bloc-diagonaliser conjointement. Nous constatons encore (comme sur les exemples précédents) que les performances dépendent bien de la taille N_m de l'ensemble des matrices à bloc-diagonaliser. En augmentant la valeur de N_m , on améliore les performances des algorithmes de BDC.

Etude des performances en fonction de la taille d'un bloc n_j , du nombre de matrices N_m et du RSB

Afin de continuer à illustrer le comportement des algorithmes proposés, nous présentons une nouvelle simulation numérique consistant à étudier l'évolution des performances en fonction de trois paramètres : en l'occurrence la taille d'un bloc n_j , le nombre N_m des matrices à bloc-diagonaliser et le rapport signal à bruit (qui quantifie ici l'écart vis-à-vis de l'hypothèse de bloc-diagonalité).

Nous considérons $M = N = 12$ (la matrice \mathbf{A} est carrée complexe, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont générées aléatoirement selon une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$). L'ensemble \mathcal{M} est constitué d'un nombre N_m variable de matrices allant de 20 à 100 matrices complexes de taille $M \times M$. Nous faisons également évoluer le RSB qui vaut respectivement 20, 100 dB et la taille d'un bloc n_j qui varie entre 1, 3, 4 et 6.

Les résultats obtenus en fonction de la taille d'un bloc n_j dans un contexte quasi non-bruité (resp. bruité ($\text{RSB} = 20$ dB)) sont représentés au niveau de la Fig. 3.9 (resp. Fig. 3.10). La taille N_m de l'ensemble \mathcal{M} et le RSB sont alors fixés. Sur cet exemple, on constate que les performances des algorithmes de BDC proposés dépendent de la taille d'un bloc n_j considéré ou bien du nombre de

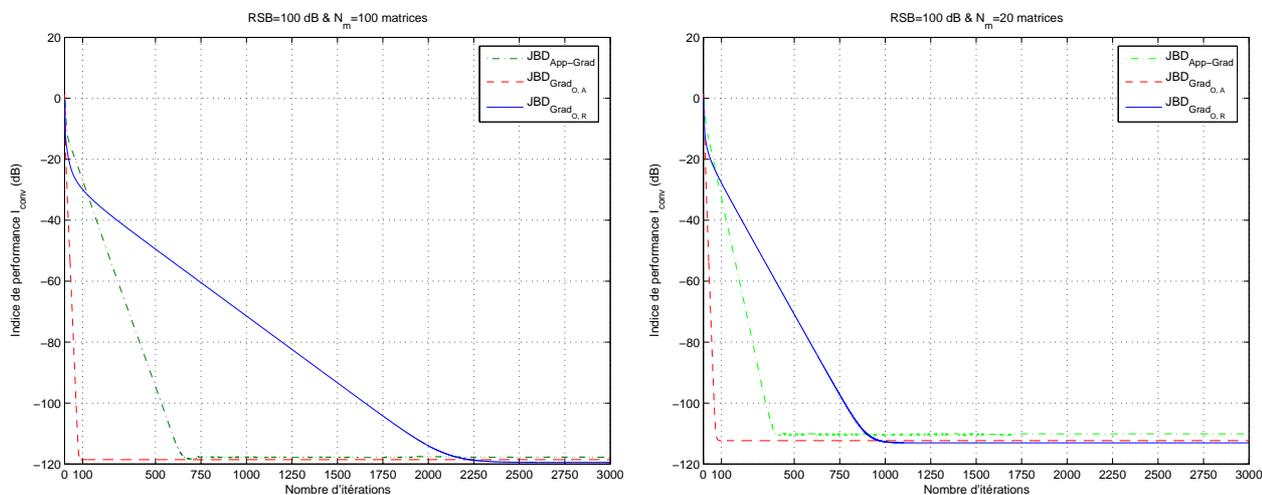


FIGURE 3.7 – Comparaison des algorithmes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasi non-bruité dans le cas d’une matrice \mathbf{A} rectangulaire. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d’itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

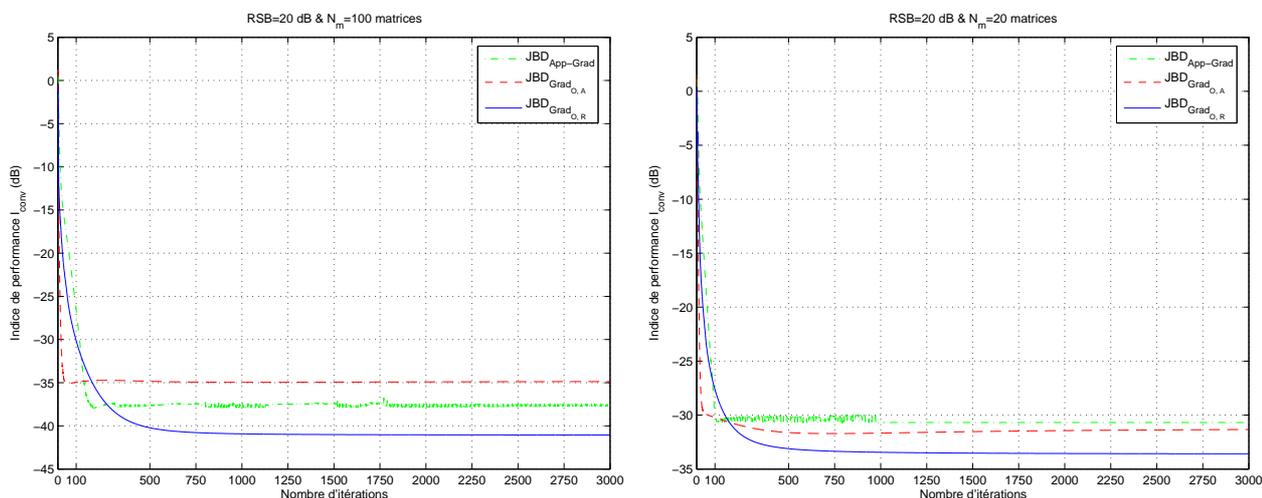


FIGURE 3.8 – Comparaison des algorithmes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($RSB = 20$ dB) et pour une matrice \mathbf{A} rectangulaire. Gauche : $l_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction du nombre d’itérations pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

blocs $r = \frac{N}{n_j}$ ³. On constate également que les résultats obtenus auparavant restent valables même si l'on change la taille d'un bloc : l'algorithme basé sur le gradient relatif à pas optimal $\text{JBD}_{\text{GradO,R}}$ est toujours celui qui donne les meilleures performances, suivi des algorithmes $\text{JBD}_{\text{GradO,A}}$, $\text{JBD}_{\text{GradApp-Grad}}$ et $\text{JBD}_{\text{GradAlg}}$. Les performances sont d'autant meilleures que l'on diminue la valeur de la taille d'un bloc n_j . Notons que dans le cas particulier où $n_j = 1$, on retombe sur un problème de diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices. Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, les quatre algorithmes de BDC proposés peuvent servir pour résoudre le problème de la DC. Dans ce cas là, l'algorithme $\text{JBD}_{\text{GradAlg}}$ équivaut alors à l'algorithme JD_A présenté dans [44] et l'algorithme $\text{JBD}_{\text{GradApp-Grad}}$ équivaut alors à l'algorithme DOMUNG proposé dans [118]. Nos deux autres algorithmes $\text{JBD}_{\text{GradO,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{GradO,R}}$ constituent deux nouvelles solutions au problème de la diagonalisation conjointe non unitaire.

Étudions maintenant le comportement des algorithmes proposés en fonction du nombre de matrices N_m à bloc-diagonaliser conjointement tout d'abord puis en fonction du rapport signal à bruit en travaillant cette fois à taille de bloc n_j fixée.

Pour une taille de bloc $n_j = 3, 4, 6$ donnée, l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB est représenté respectivement au niveau des Fig. 3.11, 3.13 et 3.15 en fonction de la taille N_m de l'ensemble de matrices considéré pour deux valeurs de RSB : 5 et 10 dB (à gauche), 70 et 100 dB (à droite).

Pour les mêmes tailles de bloc, l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB est représenté respectivement au niveau des Fig. 3.12, 3.14 et 3.16 en fonction du rapport signal à bruit pour deux tailles d'ensemble \mathcal{M} de matrices à bloc diagonaliser conjointement : $N_m = 1$ et 5 matrices (à gauche) et $N_m = 60$ et 100 matrices (à droite).

De façon tout à fait logique, on constate que plus le RSB est favorable, meilleurs sont les résultats. Sur des ensembles de matrices quasi bloc diagonales (RSB = 100 dB), on ré-estime quasiment le bloc-diagonaliseur conjoint commun à toute les matrices de l'ensemble \mathcal{M} puisque $I \approx -120$ dB. On constate également que plus que le nombre N_m de matrices à bloc-diagonaliser conjointement est grand, meilleurs sont les résultats. Finalement, de la même manière que sur les exemples précédents, l'algorithme basé sur une approche de type gradient relatif à pas optimal est le plus stable et le plus adapté à des situations défavorables (peu de matrices au niveau de l'ensemble \mathcal{M} et écart par rapport à l'hypothèse de bloc-diagonalité).

3.4.2 Etude d'un cas particulier : la DC d'un ensemble de matrices complexes

Nous présentons un dernier exemple montrant l'intérêt des algorithmes de BDC proposés et leur efficacité à résoudre un sous-problème de la BDC : la DC. Comme nous l'avons déjà noté auparavant, les algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{GradO,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{GradO,R}}$ peuvent être utilisés à des fins non plus de bloc-diagonalisation conjointe mais de diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices (on rappelle que les algorithmes JBD_{Alg} et $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ constituent des généralisations des algorithmes de DC JD_A [44] et DOMUNG [118]).

Sur les mêmes données que celles de l'exemple précédent, l'évolution de l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ ⁴ en dB est donnée au niveau de la Fig. 3.17 en fonction de la taille N_m de l'ensemble de matrices considérées pour deux valeurs de RSB : 5 et 10 dB (à gauche) et 70 et 100 dB (à droite). L'évolution de l'indice de performance $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ en dB est tracée au niveau de la Fig. 3.18 en fonction du rapport signal à bruit pour deux valeurs de taille des ensembles considérés : $N_m = 1$ et 5 matrices (à gauche) et $N_m = 60$ et 100 matrices (à droite).

3. En séparation de sources, le nombre de blocs r représente le nombre de signaux sources n .

4. Lorsque $n_j = 1$, $l_{\text{Conv}}(\cdot)$ n'est rien d'autre que l'indice de performance proposé dans [86].

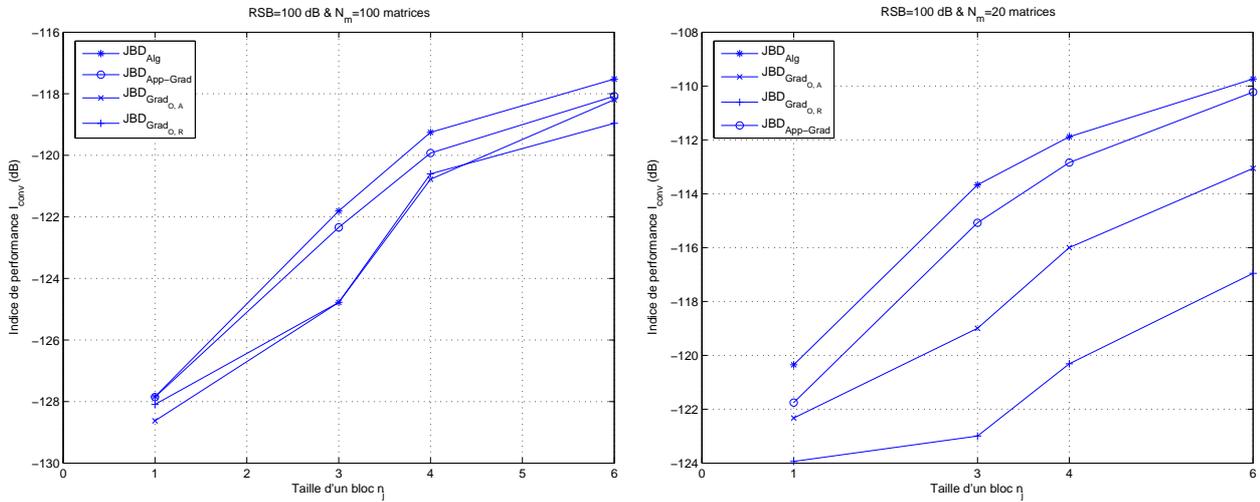


FIGURE 3.9 – Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte quasi non-bruité. Gauche : $I_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction de la taille d'un bloc n_j pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

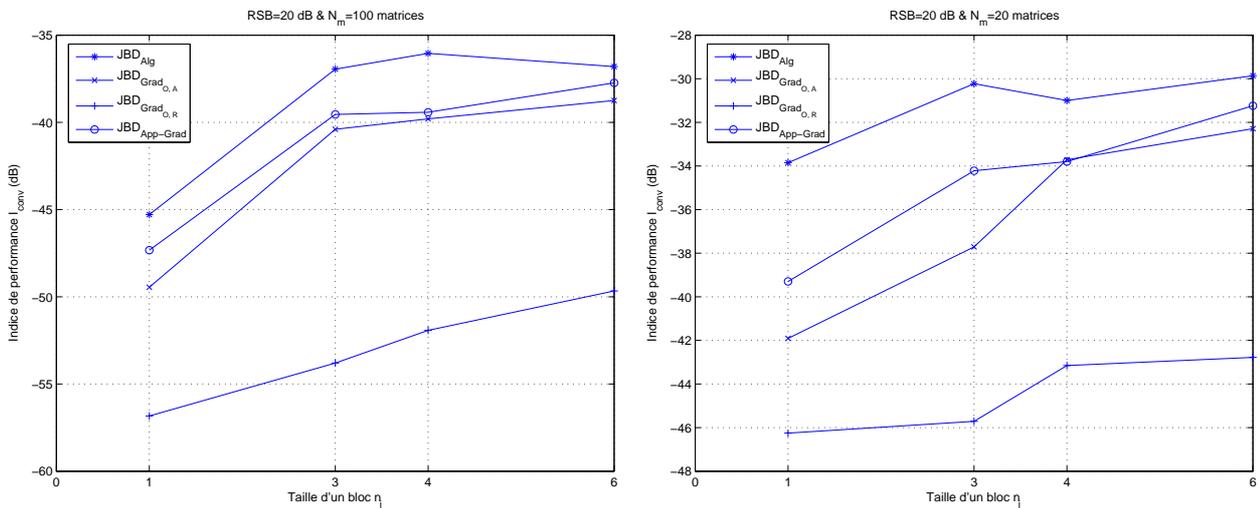


FIGURE 3.10 – Comparaison des algorithmes JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ dans un contexte bruité ($\text{RSB} = 20$ dB). Gauche : $I_{\text{Conv}}(\mathbf{G})$ en dB en fonction de la taille d'un bloc n_j pour un ensemble \mathcal{M} de taille $N_m = 100$ matrices (resp. $N_m = 20$ matrices à droite).

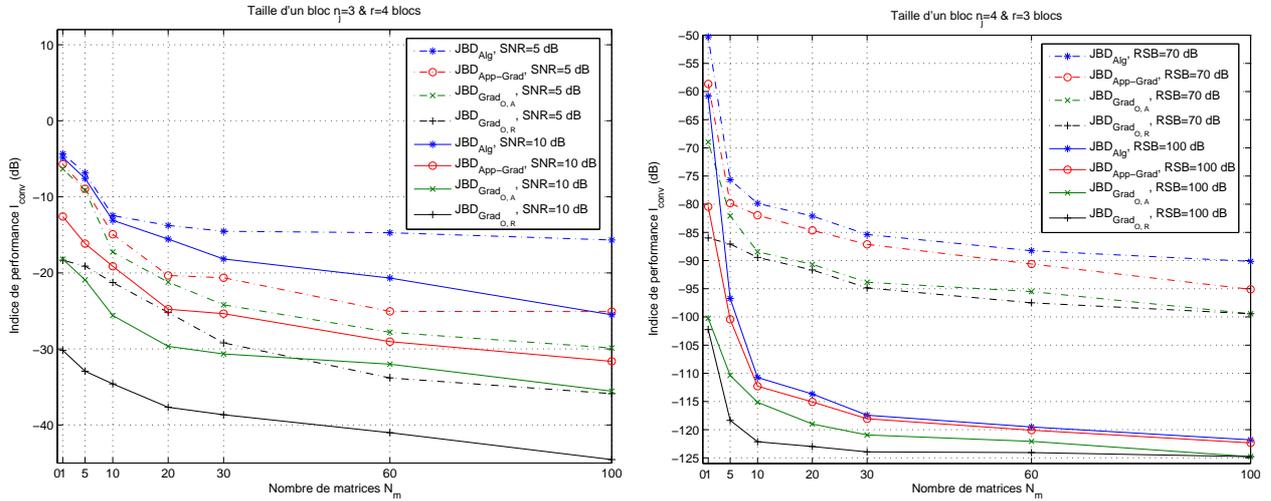


FIGURE 3.11 – Comparaison des algorithmes (JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$) dans un contexte quasi-bruité. A gauche : RSB = 5 et 10 dB. A droite : RSB = 70 et 100 dB.

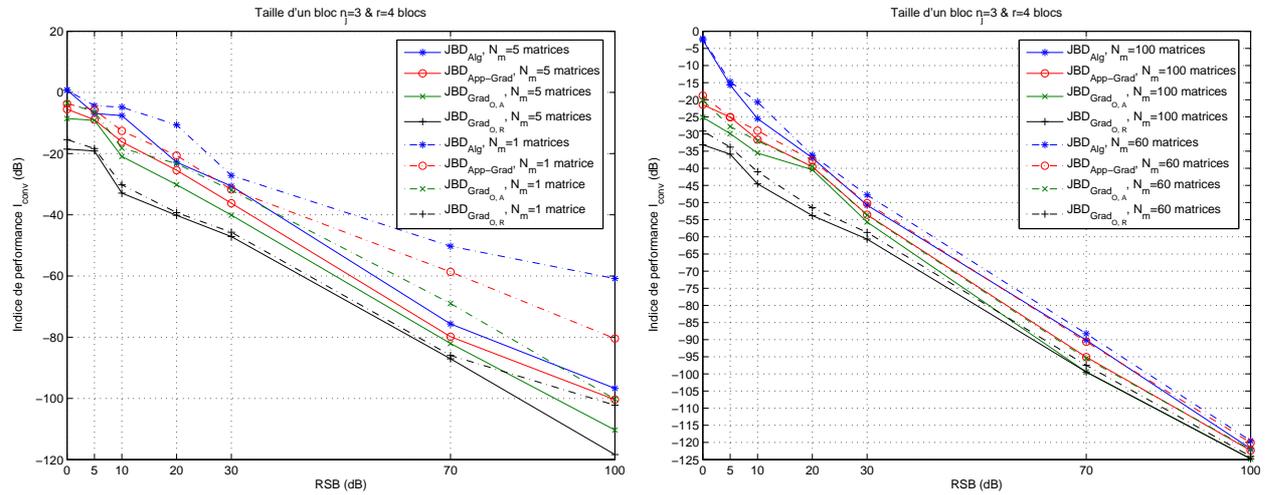


FIGURE 3.12 – Taille d'un bloc $n_j = 3$: performance en fonction du rapport signal à bruit des algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. Gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. Droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.

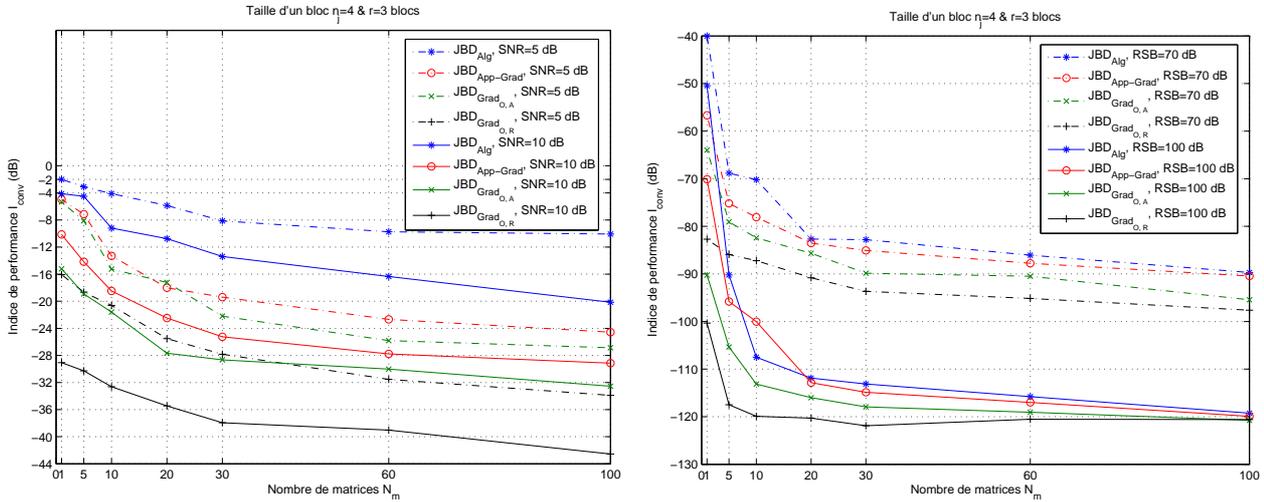


FIGURE 3.13 – Pour une taille de bloc fixée à $n_j = 4$, performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les différents algorithmes (JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$). A gauche : RSB = 5 et 10 dB. A droite : RSB = 70 et 100 dB.

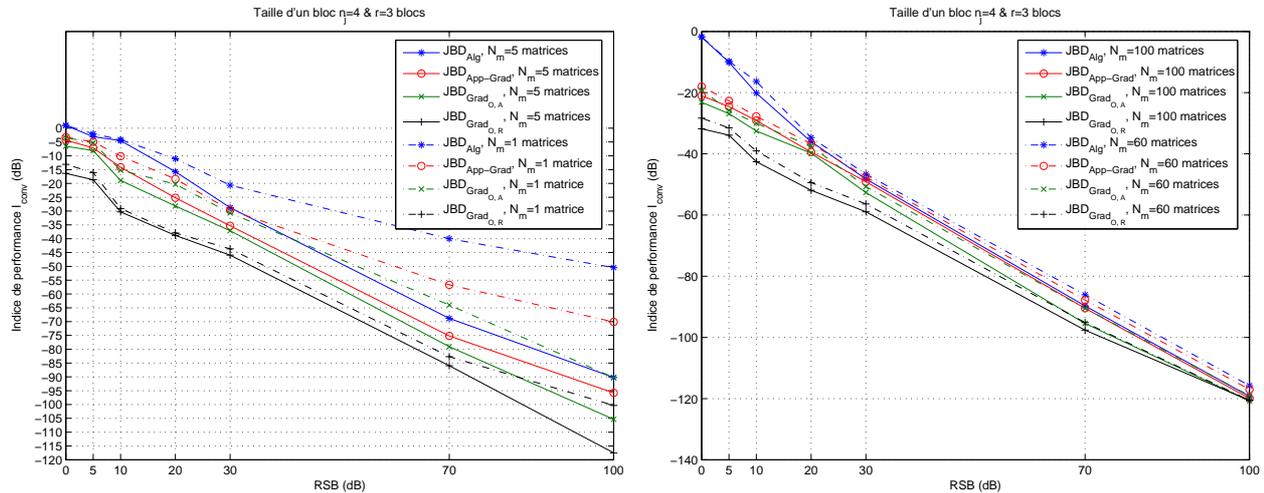


FIGURE 3.14 – Pour un taille de bloc fixée à $n_j = 4$, performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.

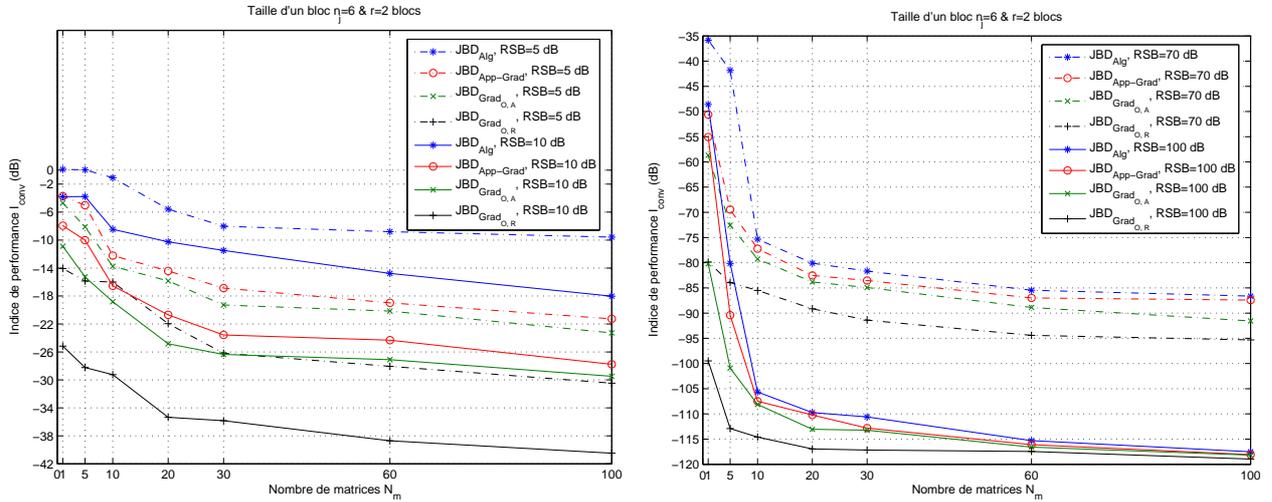


FIGURE 3.15 – Pour une taille de bloc fixée à $n_j = 6$, performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. A gauche : RSB = 5 et 10 dB. A droite : RSB = 70 et 100 dB.

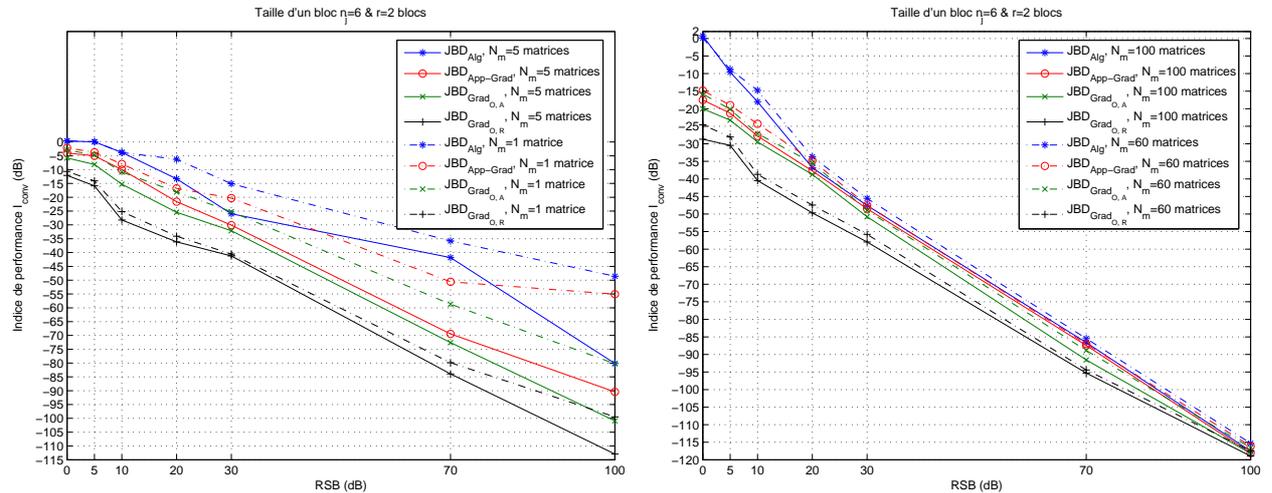


FIGURE 3.16 – Pour une taille de bloc fixée à $n_j = 6$, performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JBD_{Alg} , $JBD_{App-Grad}$, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.

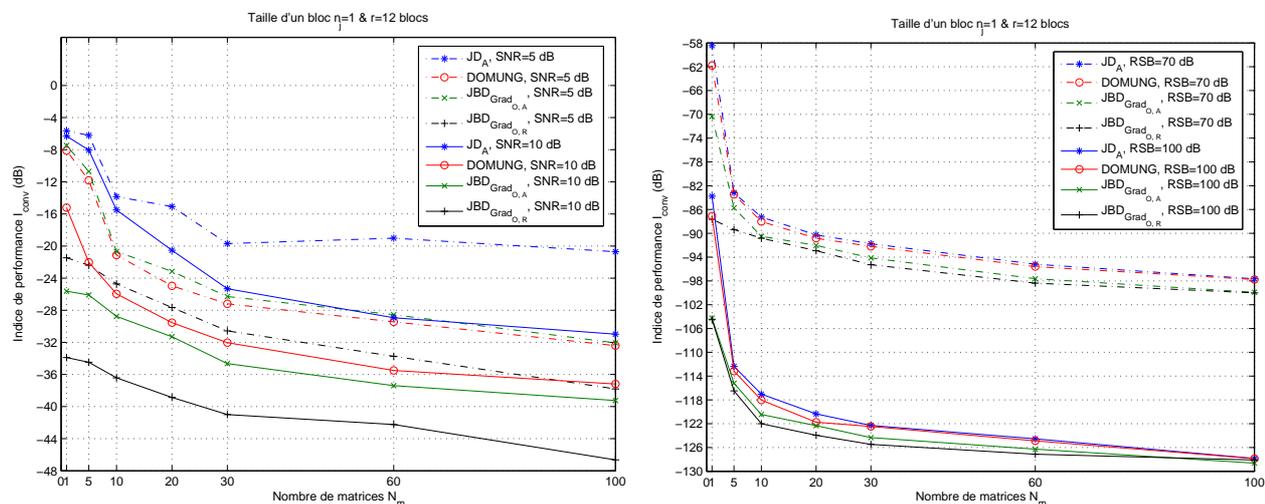


FIGURE 3.17 – Diagonalisation conjointe ($n_j = 1$) : performances en fonction du nombre de matrices N_m pour les algorithmes JD_A , DOMUNG, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. A gauche : RSB = 5 et 10 dB. A droite : RSB = 70 et 100 dB.

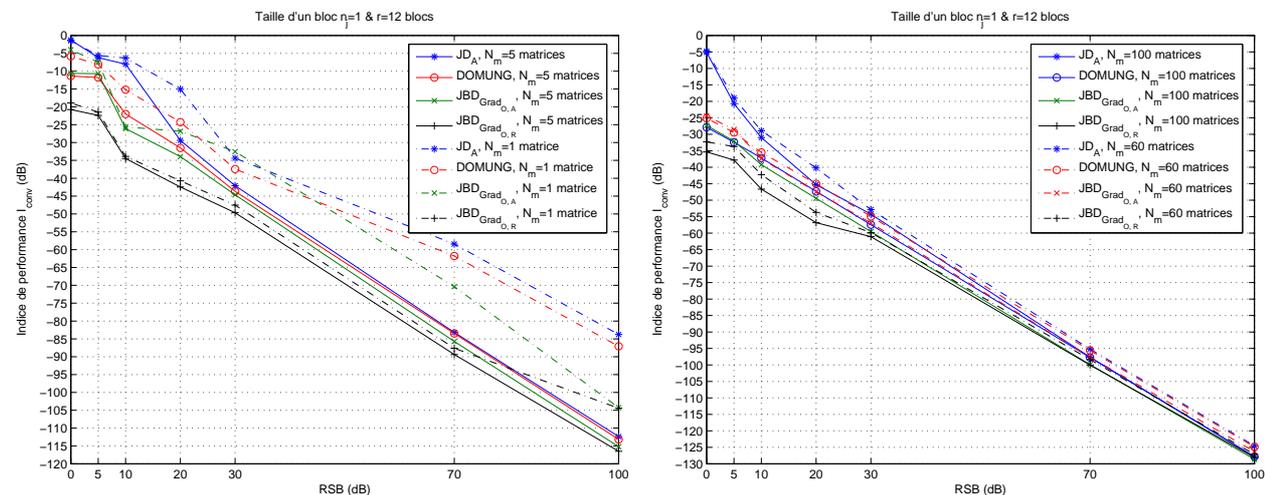


FIGURE 3.18 – Diagonalisation conjointe ($n_j = 1$) : performances en fonction du rapport signal à bruit pour les algorithmes JD_A , DOMUNG, $JBD_{Grad_{O,A}}$ et $JBD_{Grad_{O,R}}$. A gauche : $N_m = 1$ et 5 matrices. A droite : $N_m = 60$ et 100 matrices.

On tire exactement les mêmes conclusions de cette étude que celles tirées dans le cadre de la bloc diagonalisation conjointe.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quatre nouveaux algorithmes permettant de résoudre le problème de la bloc-diagonalisation conjointe (non-unitaire) d'un ensemble donnée de matrices. Les quatre algorithmes proposés sont itératifs et passent par l'optimisation d'une même fonction de coût quadratique de type moindres carrés. Le premier algorithme noté JBD_{Alg} est fondé sur une optimisation algébrique tandis que les trois autres algorithmes utilisent une approche de type gradient à pas optimal (le pas est alors recalculé algébriquement à chaque itération par la recherche des racines d'un polynôme d'ordre trois). L'un, $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, repose sur un calcul approximé du gradient matriciel (en imposant la zéro bloc-diagonalité de la matrice \mathbf{W} utilisée afin d'assurer l'inversibilité de la matrice recherchée au niveau de l'Eq. 3.15), les deux autres ($\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$) reposent sur un calcul exact (le second de ces deux derniers algorithmes est fondé sur une variante de la méthode du gradient : le gradient relatif). L'avantage majeur de l'algorithme à base de gradient relatif ($\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{R}}}$ dans sa version à pas fixe et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ dans sa version à pas optimal) est que l'inversibilité de la matrice recherchée est assurée (lorsque le pas d'adaptation reste suffisamment petit). Ces deux versions de cet algorithme sont par conséquent plus stables.

Tous ces algorithmes ont déjà fait l'objet de publications [56][58][60] (un article est également en soumission [59]) et possèdent l'avantage d'être généraux dans la mesure où les matrices de l'ensemble à bloc-diagonaliser conjointement peuvent être réelles ou complexes, elles ne sont plus forcément à symétrie hermitienne et le bloc-diagonaliseur conjoint recherché peut être une matrice unitaire ou non. Si les matrices considérées doivent être définies positives dans le cas de l'algorithme JBD_{Alg} , cette condition est levée avec les trois algorithmes à base de gradient.

Enfin, à l'aide des simulations informatiques, nous avons montré l'efficacité des solutions suggérées. Nous avons noté que l'algorithme JBD_{Alg} était le plus rapide, que l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ était le plus performant surtout en situation difficile (peu de matrices et beaucoup de bruits). Nous avons également montré que ces algorithmes peuvent être utilisés dans la résolution du problème de la diagonalisation conjointe (les algorithmes JBD_{Alg} et $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ sont des généralisation d'algorithmes de diagonalisation conjointe proposés dans [44] et [118]).

Ces algorithmes trouvent des applications intéressantes aussi bien en séparation aveugle de mélanges instantanés et convolutifs de sources qu'en traitement d'antenne : les matrices de l'ensemble à bloc-diagonaliser conjointement pouvant alors être des matrices de corrélation ou bien des matrices de corrélation cyclique estimées, ou encore des matrices issues des distributions temps-fréquence spatiales quadratiques ou bien des spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques, etc... Comme nous allons le voir au chapitre suivant, l'intérêt majeur de ces algorithmes est qu'ils ne nécessitent plus de blanchiment préalable des observations et qu'ils permettent donc d'atteindre des performances souvent meilleures que celles obtenues au moyen de leurs homologues sous contrainte unitaire.

Nouvelles approches de la séparation de sources

L'objectif principal de ce chapitre est de proposer des alternatives aux méthodes de séparation de mélanges linéaires instantanés et convolutifs de sources déjà existantes dans la littérature. La plupart de ces méthodes opèrent sous transformation unitaire et requièrent donc un blanchiment préalable des observations. C'est pour pouvoir nous affranchir de cette étape de normalisation, que nous avons donc cherché au niveau du troisième chapitre à construire de nouveaux algorithmes de BDC sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée. Un autre aspect de nos travaux concerne l'élaboration de nouveaux détecteurs automatiques des points "utiles" permettant la construction des ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement.

Ainsi, les méthodes que nous proposons pour résoudre le problème de la séparation de mélanges instantanés (resp. convolutifs) de sources combinent un des algorithmes de DC (resp. BDC) non-unitaire aux nouveaux détecteurs de points utiles permettant d'élaborer l'ensemble des matrices à (bloc) diagonaliser conjointement. Elles se décomposent alors toutes en trois étapes principales, consistant à :

1. appliquer un opérateur bilinéaire matriciel $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ ¹ aux observations (non blanchies),
2. sélectionner certains points (α, β) permettant la construction d'un ensemble de matrices possédant toutes une structure algébrique particulière,
3. effectuer une décomposition matricielle conjointe de l'ensemble précédent afin d'estimer le système mélangeant (et pouvoir éventuellement restituer les sources).

Les matrices de l'ensemble construit au niveau de la seconde étape possèdent une structure qui dépend du type de mélange considéré : elles correspondent à des matrices des sources bloc-diagonales dans le cas d'un mélange convolutif (resp. diagonales dans le cas d'un mélange instantané). L'algorithme de décomposition matricielle conjointe appliqué au niveau de la troisième étape dépend quant à lui de la structure des matrices de l'ensemble considéré (construit directement ou bien à l'aide d'un détecteur de points particuliers). En d'autres-termes, lorsque ces matrices sont diagonales (resp. bloc-diagonales) la décomposition matricielle utilisée n'est rien d'autre que la DC ou bien la décomposition aux valeurs propres généralisées (resp. la BDC). Les nouvelles approches de SAS que nous proposons possèdent l'avantage d'être générales (en ce sens que les sources peuvent être aussi bien réelles que complexes, déterministes ou aléatoires, et dans ce dernier cas statistiquement mutuellement indépendantes ou corrélées, i.i.d. ou non, stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires et le système servant à mélanger ces sources n'est ni nécessairement réel ni forcément unitaire). Enfin, au moyen de simulations informatiques, nous illustrons l'intérêt de ces approches et les comparons aux autres approches du même type mais opérant sous transformation unitaire.

1. Le couple (α, β) peut être un couple fréquence-retard (ν, τ) , temps-retard (t, τ) , temps-fréquence (t, ν) et le résultat de l'application de l'opérateur $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ correspondant peut être une matrice de corrélation, une matrice de corrélation cyclique, une TTFL, un STFQ, TTFQ exprimés respectivement au niveau des Eq. 1.41, 1.44, 4.66, 4.72.

4.1 Nouveaux détecteurs de matrices possédant une structure algébrique particulière

Un deuxième aspect des travaux menés dans cette thèse concerne l'élaboration de nouveaux détecteurs automatiques de points utiles permettant de construire des ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. Que ce soit en contexte instantané ou en contexte convolutif, toutes les méthodes de SAS fondées sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ, passent par une étape préalable de sélections de points temps-fréquence "utiles". En contexte instantané, de nombreux travaux sont dédiés au problème de la détection automatique de points t - f particuliers permettant la construction soit d'un seul ensemble (celui des matrices qui devront être diagonalisées conjointement) soit de deux ensembles (ceux des matrices qui devront être diagonalisées conjointement et zéro-diagonalisées conjointement). Certains de ces détecteurs opèrent sur données blanchies, d'autres directement sur données non blanchies. La plupart des détecteurs suggérés dans la littérature [8][7][49][63][64][79][62][44][102][107] exploitent les propriétés des transformées temps-fréquence spatiales bilinéaires ou quadratiques et/ou la propriété de l'invariance de la norme de Frobenius et de la trace d'une matrice sous transformation unitaire. En contexte convolutif, un premier détecteur a été proposé dans [50].

Les deux détecteurs que nous proposons dans ce paragraphe possèdent l'avantage d'être généraux en ce sens qu'ils peuvent être appliqués à des matrices non nécessairement issues d'une transformée temps-fréquence mais de manière plus générale à des matrices issues de l'application d'un opérateur bilinéaire matriciel quelconque. En outre, ils possèdent comme autre avantage de ne plus requérir d'étape préalable de blanchiment des données.

4.1.1 Formulation du problème de la détection

Nous formalisons le problème de la détection de points utiles de la manière suivante. Considérons un ensemble \mathcal{E} de matrices carrées $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{C}^{M \times M}$, admettant toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) = \mathbf{H}\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)\mathbf{H}^H, \quad (4.1)$$

où les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ et $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ proviennent de l'application d'un même opérateur bilinéaire matriciel $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ dépendant de deux paramètres réels α et β . α_i et β_j désignent un couple de deux composantes de α et β . La matrice $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ est une matrice rectangulaire de rang plein ($M \geq N$).

Le problème de la détection automatique consiste à chercher des points (α_i, β_j) à partir uniquement de l'ensemble \mathcal{M} des matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ pour lesquelles, les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ (correspondant aux matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$) possèdent une structure bien particulière. Elles peuvent être par exemple :

- > diagonales,
- > zéro-diagonales,
- > diagonales avec un seul terme non nul sur la diagonale et tous les autres termes nuls,
- > bloc-diagonales avec r blocs de taille $Q \times Q$ non nuls sur la diagonale,
- > bloc-diagonales avec un seul bloc de taille $Q \times Q$ non nul sur la diagonale et tous les autres blocs nuls.

Les trois premières structures correspondent à ce que nous qualifions sous la terminologie suivante : problème de la détection en instantané ; les deux dernières correspondent par analogie à celui de la détection en convolutif.

Dans le contexte de la séparation aveugle de sources, rappelons que le modèle instantané se déduit du modèle convolutif décrit au niveau de l'Eq. 1.7, en considérant simplement comme valeur de L ,

L' et $\mathbf{H} : L = 0, L' = 1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Nous adoptons donc pour la suite du document les notations du modèle convolutif.

L'état de l'art en matière de détecteurs de points utiles dans le cas où le couple (α, β) représente un couple temps-fréquence (t, ν) et les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ sont alors des matrices issues d'une TTFQ ou bien un STFQ est présenté au niveau de la quatrième Annexe de ce document.

4.1.2 Détecteur en instantané dans un contexte non-blanchi

En nous appuyant sur les propriétés du rang d'une matrice, nous proposons un nouveau critère de détection de points particuliers permettant la construction de l'ensemble des matrices devant être diagonalisées conjointement. Ce critère est fondé sur l'identification des matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ diagonales possédant un seul terme non-nul sur la diagonale. Il généralise ainsi les deux détecteurs en instantané $\mathbf{C}_{\mathbf{U}, \mathbf{F}, \text{Inst}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{L}, \text{Inst}}$ présentés au niveau de l'Annexe 4 de ce document. La différence majeure vient du fait que les hypothèses de sources indépendantes ou quasi-disjointes dans le plan temps-fréquence ne sont plus nécessaires pour ce nouveau détecteur. Pour que l'existence de telles matrices soit assurée, nous imposons l'hypothèse de travail suivante :

H_D. Il existe au moins un couple de points (α_i, β_j) auquel est associé une matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ diagonale avec un seul terme non-nul sur la diagonale. De tels points existent pour toutes les possibilités de matrices diagonales avec un seul terme non nul sur la diagonale.

Dans le cas où l'opérateur matriciel utilisé est une RTFSQ ou bien un STFSQ, l'hypothèse précédente équivaut à :

Si $D_{S_i S_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu))_{ij}$, $\exists(t_k, \nu_k)$ tels que $D_{S_i S_j}(t_k, \nu_k) = \delta_{i,j} D_{i,j,k}$ tels que $\forall j$ et $\forall i$, \exists au moins un k , tel que $D_{i,i,k} \neq 0$ avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Remarquons qu'ici l'hypothèse **H_D** remplace en quelque sorte l'hypothèse classique de "sources aléatoires indépendantes". Il est évident qu'une propriété discriminante "connue" portant sur les signaux sources est toujours requise dès lors que l'on envisage la séparation de sources en aveugle. Ici, on considère des signaux dont les distributions temps-fréquence spatiales quadratiques (ou les spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques) ne se chevauchent pas trop (2 à 2) au sens précédent. En d'autres termes les signatures des sources dans le plan t - f sont "suffisamment" différentes pour pouvoir trouver des points t - f particuliers vérifiant l'hypothèse **H_D** (il n'y figure qu'une seule source à la fois). En outre, cette hypothèse, nous permettra d'aborder le problème de la séparation de sources corrélées.

Le nouveau détecteur (noté \mathbf{C}_{Inst}) consiste alors à sélectionner uniquement les points (α, β) correspondants aux matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ de rang un. En fait,

$$\begin{aligned} \text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\} &\leq \min \{ \text{rg}\{\mathbf{H}\}, \text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)\}, \text{rg}\{\mathbf{H}^H\} \} \\ &\leq \min \{ \text{rg}\{\mathbf{H}\}, \text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)\} \} \text{ car } \text{rg}\{\mathbf{H}\} = \text{rg}\{\mathbf{H}^H\}. \end{aligned}$$

On déduit donc,

$$\text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)\} = 1 \Rightarrow \text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\} = 1.$$

De plus si la matrice \mathbf{H} est de rang plein alors,

$$\text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\} = \text{rg}\{\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)\}. \quad (4.2)$$

Ainsi, pour construire l'ensemble \mathcal{M}_{dc} des matrices devant être diagonalisées conjointement, nous ne retenons que les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ de rang un. Notons que pour éviter le cas où la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ est nulle, nous écartons les matrices de faible énergie ($\|\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\|_F$ doit être non nulle *i.e.* $\|\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\|_F \geq \varepsilon$ avec ε une constante fixée).

Du fait de la propriété sur le rang donnée au niveau de l'Eq. 4.2, les deux matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ et $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ possèdent le même nombre de valeurs singulières. Ainsi, une implémentation pratique du détecteur \mathbf{C}_{Inst} est possible grâce à la décomposition en valeurs singulières. Les matrices à diagonaliser conjointement sont choisies de telle façon à vérifier la règle suivante :

$$\frac{\delta_1^2(\alpha_i, \beta_j)}{\|\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\|_F^2} > 1 - \eta_1. \quad (4.3)$$

où $\delta_1(\alpha_i, \beta_j)$ est la plus grande valeur singulière de $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ et η_1 est une constante de faible valeur. Cette nouvelle procédure de détection est alors présentée au niveau du Tab. 4.1.

<p>➤ Faire une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$,</p> $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) = \mathbf{U}(\alpha_i, \beta_j)\mathbf{\Delta}(\alpha_i, \beta_j)\mathbf{V}(\alpha_i, \beta_j)^H$ <p>avec $\mathbf{V}(\alpha_i, \beta_j)$ et $\mathbf{U}(\alpha_i, \beta_j)$ matrices unitaires de taille $(m \times m)$ ($M = m \times L' = m$) et $\delta(\alpha_i, \beta_j) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(t, \nu)\}$ un vecteur composé des termes diagonaux de la matrice diagonale $\mathbf{\Delta}(\alpha_i, \beta_j)$.</p> <p>On note $\delta(\alpha_i, \beta_j) = (\delta_1(\alpha_i, \beta_j), \dots, \delta_m(\alpha_i, \beta_j))^T$ et on suppose que les valeurs singulières sont rangées dans l'ordre décroissant : $\delta_1(\alpha_i, \beta_j) \geq \delta_2(\alpha_i, \beta_j) \geq \dots \geq \delta_m(\alpha_i, \beta_j) \geq 0$.</p> <p>➤ Pour des matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ non nulles, calculer le rapport $\frac{\delta_1^2(\alpha_i, \beta_j)}{\ \mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\ _F^2}$ et vérifier s'il est proche de 1,</p> <p>➤ Si oui alors $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ est retenue sinon elle est rejetée.</p>
--

TABLE 4.1 – Implémentation pratique du détecteur automatique \mathbf{C}_{Inst} de matrices diagonales avec un seul terme non-nul sur la diagonale en utilisant une décomposition en valeurs singulières.

Nous notons également que dans [62], nous avons proposé d'autres variantes consistant à choisir les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ vérifiant la règle suivante :

$$\begin{cases} \delta_1(\alpha_i, \beta_j) > \epsilon_{11} \\ \sum_{k=1}^m \delta_k(\alpha_i, \beta_j) < \epsilon_{12} \end{cases}, \quad (4.4)$$

ou encore à considérer la règle équivalente suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \delta_k(\alpha_i, \beta_j) > \epsilon_{13} \\ \frac{\delta_1(\alpha_i, \beta_j)}{\sum_{k=1}^m \delta_k(\alpha_i, \beta_j)} > 1 - \epsilon_{14} \end{cases}, \quad (4.5)$$

où ϵ_{11} est une constante positive suffisamment grande, ϵ_{12} est une constante positive de faible valeur et ϵ_{13} et ϵ_{14} sont deux constantes positives.

Ce détecteur et ses variantes (lesquelles suivent la même logique) ont été utilisés dans des méthodes de séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés de sources basées soit sur l'utilisation de distributions temps-fréquence spatiales quadratiques ou de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques², soit sur un opérateur de corrélation cyclique³ dans [44][102][107].

2. $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) = \mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$ exprimée au niveau de l'Eq. 4.72.

3. $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) = \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ exprimée au niveau de l'Eq. 1.44.

4.1.3 Détecteur en convolutif dans un contexte non-blanchi

Dans le but de construire l'ensemble \mathcal{M}_{bdc} de matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement, un premier détecteur noté $\mathbf{C}_{\mathbf{U},\mathbf{F},\text{Conv}}$ a été proposé dans [50] dans le but de sélectionner des matrices issues des STFSQ des observations correspondant à des matrices des STFSQ des sources bloc-diagonales avec un seul bloc non nul de taille $Q = L + L'$. L'auteur généralise le détecteur $\mathbf{C}_{\mathbf{U},\mathbf{F},\text{Inst}}$ proposé en instantané au convolutif. Comme en instantané, une étape de pré-blanchiment des données est requise par l'auteur afin que la matrice \mathbf{H} soit unitaire.

Pour pouvoir lever la contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée (et par conséquent nous affranchir d'une étape de blanchiment), nous proposons un détecteur généralisant le détecteur \mathbf{C}_{Inst} introduit en contexte instantané dans [62] et qui exploite une propriété de rang 1. De plus, dans le cas où l'opérateur matriciel $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ utilisé représente un STFSQ (noté $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$), ce détecteur peut également alors être vu comme une généralisation du détecteur $\mathbf{C}_{\mathbf{U},\mathbf{F},\text{Conv}}$ au cas de signaux non blanchis. En fait, d'après la propriété de rang écrite au niveau de l'Eq. 4.2, les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ et $\mathbf{L}_{\mathbf{S}}(\alpha_i, \beta_j)$ possèdent le même rang, il s'agit donc de sélectionner les matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ dont le rang est égal à $Q = L + L'$.

Pour la construction de l'ensemble \mathcal{M}_{bdc} des matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement, nous proposons donc en pratique la procédure présentée au niveau du Tab 4.2.

➤ Faire une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$,

$$\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j) = \mathbf{U}(\alpha_i, \beta_j)\mathbf{\Delta}(\alpha_i, \beta_j)\mathbf{V}(\alpha_i, \beta_j)^H$$

avec $\mathbf{V}(\alpha_i, \beta_j)$ et $\mathbf{U}(\alpha_i, \beta_j)$ matrices unitaires de taille $(M \times M)$ et $\delta(\alpha_i, \beta_j) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(t, \nu)\}$ un vecteur composé des termes diagonaux de la matrice diagonale $\mathbf{\Delta}(\alpha_i, \beta_j)$.

On note $\delta(\alpha_i, \beta_j) = (\delta_1(\alpha_i, \beta_j), \dots, \delta_M(\alpha_i, \beta_j))^T$ et on suppose que les valeurs singulières sont rangées dans l'ordre décroissant : $\delta_1(\alpha_i, \beta_j) \geq \delta_2(\alpha_i, \beta_j) \geq \dots \geq \delta_M(\alpha_i, \beta_j) \geq 0$.

➤ Pour des matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ non nulles, calculer le rapport $\frac{\sum_{k=1}^{L+L'} \delta_k^2(\alpha_i, \beta_j)}{\|\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)\|_{\mathbf{F}}^2}$ (Nous rappelons qu'en SAS, L désigne l'ordre du filtre de mélange et L' est le nombre de retards) et vérifier s'il est proche de 1,

➤ Si oui alors $\mathbf{L}_{\mathbf{X}}(\alpha_i, \beta_j)$ est retenue sinon elle est rejetée.

TABLE 4.2 – Implémentation pratique du détecteur automatique \mathbf{C}_{Conv} de matrices bloc-diagonales avec un seul bloc non nul sur la diagonale et utilisant une décomposition en valeurs singulières.

4.2 Nouvelles approches de séparation de mélanges linéaires instantanés de sources

4.2.1 Approche consistant à se ramener à un problème aux valeurs propres généralisées : $\mathbf{P}_{\text{NU},\text{TFM}}$

En exploitant les statistiques du second ordre, de nombreux travaux suggèrent de se ramener à une approche basée sur le problème aux valeurs propres généralisées [22][26][25]... Ces approches consistent à construire une nouvelle matrice à l'aide de deux matrices de corrélation prises à des retards différents : ainsi, on pourra par exemple utiliser la matrice $\mathbf{R}_{xx}(\tau_1) - \lambda \mathbf{R}_{xx}(\tau_2)$, où $\tau_1 \neq \tau_2$ et λ désigne un scalaire. La matrice de séparation peut alors être estimée à partir de la matrice des

vecteurs propres généralisés. La plupart de ces méthodes supposent que les sources sont stationnaires et décorréelées.

Nous proposons une nouvelle méthode suivant la même logique mais en considérant cette fois des sources non-stationnaires et corrélées. Cette méthode consiste à reformuler le problème de SAS en contexte instantané comme un problème aux valeurs propres généralisées (§2.1.2). L'idée clé est alors de construire une matrice à décomposer en valeurs propres généralisées à partir des distributions temps-fréquence spatiales quadratiques possédant la propriété de symétrie hermitienne (comme c'est le cas de la distribution (ou du spectre) de Wigner, de pseudo-Wigner, de pseudo-Wigner lissée, ...). Nos développements sont fondés sur les hypothèses suivantes :

H₁. Il existe des points t - f où une seule source est présente.

H₂. Le système mélangeant les sources est de rang plein. C'est un système linéaire instantané et sur-déterminé ($m > n$).

Notons que :

- il est possible de considérer le problème de séparation de sources corrélées,
- le nombre de sources n'est pas nécessairement connu,
- le mélange peut être réel ou complexe,
- les sources ne sont pas nécessairement aléatoires, ni réelles. Elles peuvent être stationnaires, cyclo-stationnaires, non-stationnaires.

Principe de l'approche P_{NU,TFM}

Le STFSQ (ou sa RTFSQ) des observations $\mathbf{x}(t)$ non bruitées, noté $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu)$, de dimension $m \times m$ (m est le nombre de capteurs), vaut :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu) \mathbf{A}^H, \quad (4.6)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu)$ représente le STFSQ (ou sa RTFSQ) des sources. $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu)$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ (n est le nombre de sources considérées).

Une étape préalable de sélection de points t - f correspondant à des matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu)$ diagonales est nécessaire. Cette étape de pré-sélection est réalisée au moyen du détecteur \mathbf{C}_{Inst} proposé au niveau du paragraphe précédent. Par conséquent, les N_m matrices de l'ensemble $\mathcal{M} = \{\mathbf{D}_{\mathbf{xx},1}(t, \nu), \mathbf{D}_{\mathbf{xx},2}(t, \nu), \dots, \mathbf{D}_{\mathbf{xx},N_m}(t, \nu)\}$ (on suppose en effet que sa taille est N_m avec $N_m \in N^*$) ont alors une structure particulière puisqu'elles se factorisent toutes en $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu) \mathbf{A}^H$, avec $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, \nu)$ matrice diagonale possédant un seul terme non nul sur la diagonale.

Par construction, si l'on choisit d'utiliser une RTFSQ ou un STFSQ satisfaisant la condition de symétrie hermitienne), les matrices de l'ensemble \mathcal{M} sont à symétrie hermitienne (si tel n'était pas le cas, on pourrait toujours les symétriser via l'opération suivante $\forall k = 1, \dots, N_m, \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}(t, \nu) = \frac{\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}(t, \nu) + \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}(t, \nu)^H}{2}$). Pour pouvoir ensuite appliquer le Théorème 1 des valeurs propres généralisées énoncé au niveau du Chapitre 2, on doit disposer d'une matrice t - f des observations définie positive. Pour cela, il suffit de considérer une combinaison linéaire des matrices de l'ensemble \mathcal{M} , soit $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^{(2)}(t, \nu) = \sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}(t, \nu) = \mathbf{A} \sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k \mathbf{D}_{\mathbf{ss},k}(t, \nu) \mathbf{A}^H = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(2)}(t, \nu) \mathbf{A}^H$ où les α_k pour $k = 1, \dots, N_m$ sont des coefficients réels. On pourrait considérer d'autres combinaisons linéaires ou bien tout simplement une matrice t - f des observations $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^{(1)}(t, \nu) = \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k}(t, \nu)$, $k = 1, \dots, N_m$, correspondant à une matrice t - f des sources $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(1)}(t, \nu) = \mathbf{D}_{\mathbf{ss},k}(t, \nu)$.

Une autre approche possible consiste à construire deux matrices temps-fréquence de la façon suivante.

Nous commençons d'abord par définir deux signaux $x_j^{(l)}(t)$ et $x_j^{(c)}(t)$ comme :

$$x_j^{(l)}(t) = x_j(t) - \langle x_j(t) \rangle, \quad (4.7)$$

$$x_j^{(c)}(t) = x_j(t) - \{x_j * w\}(t), \quad (4.8)$$

où $\{*\}(\cdot)$ désigne l'opérateur de convolution, $\langle \cdot \rangle$ désigne l'opérateur de moyennage temporel et $w(t)$ est une fenêtre glissante. On constate que l'Eq. 4.7 (resp. l'Eq. 4.8) représente un moyennage de $x(t)$ à "long-terme" (resp. à "court-terme").

Les STFSQ ou les TTFSQ des observations à long-terme $\mathbf{x}^{(l)}(t)$ et des observations à court-terme $\mathbf{x}^{(c)}(t)$ s'écrivent alors :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^{(l)}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(l)}(t, \nu) \mathbf{A}^H, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^{(c)}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(c)}(t, \nu) \mathbf{A}^H, \quad (4.10)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(l)}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^{(c)}(t, \nu)$ représentent respectivement le STFSQ des sources à long-terme et le STFSQ des sources à court-terme.

A nouveau, une étape préalable de sélection automatique de matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_1}^{(l)}(t, \nu)$ et de matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_2}^{(c)}(t, \nu)$ correspondant respectivement à des matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{ss},k_1}^{(l)}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{ss},k_2}^{(c)}(t, \nu)$ diagonales (toujours au moyen du même détecteur \mathbf{C}_{Inst}) s'avère nécessaire. L'ensemble des matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_1}^{(l)}(t, \nu)$ est supposé être de taille K_1 et celui des matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_2}^{(c)}(t, \nu)$ est supposé être de taille K_2 . Nous construisons ensuite deux nouvelles matrices $\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(l)}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(c)}$ comme combinaisons linéaires de matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_1}^{(l)}(t, \nu)$ et de matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_2}^{(c)}(t, \nu)$, en procédant de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(l)} = \sum_{k_1=1}^{K_1} \alpha_{k_1} \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_1}^{(l)}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)} \mathbf{A}^H, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(c)} = \sum_{k_2=1}^{K_2} \alpha_{k_2} \mathbf{D}_{\mathbf{xx},k_2}^{(c)}(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \mathbf{A}^H, \quad (4.12)$$

où α_{k_1} et α_{k_2} sont des coefficients réels, et où

$$\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)} = \sum_{k_1=1}^{K_1} \alpha_{k_1} \mathbf{D}_{\mathbf{ss},k_1}^{(l)}(t, \nu), \text{ et } \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} = \sum_{k_2=1}^{K_2} \alpha_{k_2} \mathbf{D}_{\mathbf{ss},k_2}^{(c)}(t, \nu),$$

sont deux matrices diagonales. Si l'on considère ensuite une matrice \mathbf{V} représentant une estimée de l'inverse de la matrice transposée conjuguée de la matrice de mélange \mathbf{A} , alors on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(l)} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)} \mathbf{A}^H \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(c)} \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \mathbf{A}^H \mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \end{cases}, \quad (4.13)$$

Soit encore :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(l)} \mathbf{V} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(c)} \mathbf{V} \left(\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \right)^{-1} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)}, \quad (4.14)$$

où $\left(\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \right)^{-1}$ est l'inverse de $\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)}$. Puisque $\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)}$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)}$ sont deux matrices diagonales et définies positives alors la matrice produit $\mathbf{D} = \left(\mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(c)} \right)^{-1} \mathbf{M}_{\mathbf{s}}^{(l)}$ est elle-aussi une matrice diagonale et ainsi la relation donnée par l'Eq. 4.14 représente bien un problème aux valeurs propres généralisées. La matrice \mathbf{V} s'obtient en résolvant ce problème.

Résumé de l'approche $P_{\text{NU,TFM}}$

Le principe de la méthode $P_{\text{NU,TFM}}$ est résumé au niveau du Tab. 4.3 :

1. Calculer les observations à long-terme et à court-terme à l'aide des deux Eq. 4.7 et 4.8,
2. Estimer les STFSQ ou les RTFSQ des signaux observés à court-terme et à long-terme,
3. Déterminer les points temps-fréquence utiles correspondant aux STFSQ ou aux RTFSQ des sources diagonales au moyen de la procédure présentée au niveau du Tab. 4.1 dans le paragraphe précédent,
4. Calculer la matrice des vecteurs propres généralisés de la matrice $\mathbf{M}^{(l)} - \lambda \mathbf{M}^{(c)}$,
5. Restituer les signaux sources en utilisant \mathbf{V}^H qui est l'estimée de la matrice de mélange \mathbf{A} .

TABLE 4.3 – Principe de la méthode de séparation de mélanges instantanés de sources (non-stationnaires et corrélées) utilisant le problème aux valeurs propres généralisées : $P_{\text{NU,TFM}}$.

4.2.2 Approche basée sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ et d'un algorithme de diagonalisation conjointe non unitaire : $JD_{\text{inst,TFM}}$

Nous proposons une nouvelle méthode pour résoudre le problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés de sources non-stationnaires et éventuellement corrélées basée sur l'utilisation de STFSQ ou de RTFSQ. Elle combine le détecteur C_{Inst} de points t - f particuliers (permettant la construction de l'ensemble des matrices devant être diagonalisées conjointement) à un algorithme de diagonalisation conjointe non-unitaire. L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait que le blanchiment des observations devient facultatif et qu'il devient alors possible de séparer des sources corrélées, cas assez rarement traité dans la littérature de la SAS.

Nous nous appuyons sur les mêmes hypothèses H_1 et H_2 que celles utilisées par la méthode $P_{\text{NU,TFM}}$.

Principe de l'approche $JD_{\text{inst,TFM}}$

De la même façon que pour la méthode $P_{\text{NU,TFM}}$, le détecteur C_{Inst} , nous permet de disposer de $N_m = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, $(K_1, \dots, K_n) \in (N^*)^n$ points t - f notés (t_{l,m_l}, ν_{l,m_l}) tels que pour $(i, j) \in (1, \dots, n)^2$, on ait :

$$\forall l \in (1, \dots, n), \quad \forall m_l \in (1, \dots, K_l), \quad D_{s_i s_j}(t_{l,m_l}, \nu_{l,m_l}) = \delta_{i,j,l} D_{s_i}(m_l), \quad (4.15)$$

où l'indice l permet de référencer l'une des n sources, K_l est le nombre de points t - f sélectionnés au moyen du détecteur de points t - f et correspondant à la l -ème source uniquement, l'indice m_l permet de référencer l'un de ces K_l points t - f et $D_{s_i}(m_l) \neq 0$ désigne la valeur de l'auto-terme correspondant à la i -ème source au m_l -ème point t - f et $\delta_{i,j,l}$ désigne la fonction de Kronecker. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{M}_{dc} = \{\mathbf{D}_{\mathbf{xx},1}(t, \nu), \mathbf{D}_{\mathbf{xx},2}(t, \nu), \dots, \mathbf{D}_{\mathbf{xx},N_m}(t, \nu)\}$ ⁴ des matrices sélectionnées de dimension N_m se factorisent toutes en $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t_{l,m_l}, \nu_{l,m_l}) = \mathbf{A} \mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t_{l,m_l}, \nu_{l,m_l}) \mathbf{A}^H$, avec $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t_{l,m_l}, \nu_{l,m_l})$ matrice diagonale possédant un seul terme non nul sur la diagonale (situé au niveau de la l -ème ligne, l -ème colonne de cette matrice puisqu'il correspond à la l -ème source). La matrice de séparation peut alors être estimée

4. $\mathbf{D}_{\mathbf{xx},j}(t, \nu) = \mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t_{l,m_l}, \nu_{l,m_l})$, $\forall j = 1, \dots, N_m$, $l \in (1, \dots, n)$, $m_l \in (1, \dots, K_l)$ et $N_m = K_1 + K_2 + \dots + K_n$, $(K_1, \dots, K_n) \in (N^*)^n$

en diagonalisant conjointement l'ensemble \mathcal{M}_{dc} des matrices sélectionnées au moyen du détecteur \mathbf{C}_{Inst} .

Résumé de l'approche $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$

Le principe de la méthode $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$ est résumé au niveau du Tab. 4.4 :

1. Estimer les STFSQ ou les RTFSQ des signaux observés.
2. Déterminer les points t - f utiles au moyen du détecteur \mathbf{C}_{Inst} (§4.1).
3. Diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{M}_{dc} des matrices sélectionnées et ce à l'aide d'un algorithme de DC non-unitaire (estimation du diagonaliseur conjoint).
4. Restituer les signaux sources en utilisant l'estimée de la matrice mélange \mathbf{A} .

TABLE 4.4 – Principe de la méthode $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$ pour la séparation de mélanges instantanés de sources (non-stationnaires et éventuellement corrélées) combinant le détecteur \mathbf{C}_{Inst} de points utiles et un algorithme diagonalisation conjointe non-unitaire.

Remarquons enfin que les deux algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ fondés sur des approches de type gradient (absolu) et gradient relatif proposés au niveau du chapitre précédent peuvent être utilisés comme algorithmes de diagonalisation conjointe au niveau de l'étape 3 dans la méthode $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$.

4.3 Nouvelles approches pour la séparation de mélanges linéaires convolutifs de sources

Comme nous l'avons fait remarqué au niveau du Chapitre (§3.1.1), lorsque l'on s'intéresse au problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs de sources, il est possible, selon la manière d'aborder ce problème, de faire apparaître un type particulier de décomposition matricielle appelé bloc-diagonalisation conjointe. Le problème de la bloc-diagonalisation conjointe dans le cadre de mélanges unitaires de sources a déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux parmi lesquels [12][13][37][50]. Notre objectif est de proposer des alternatives à ces approches opérant sous contrainte unitaire. Le but est de pouvoir s'affranchir du blanchiment préalable des données ceci afin d'améliorer les performances des méthodes de séparation et également afin de pouvoir considérer le cas des sources complexes, corrélées, cyclo-stationnaires ou de façon plus générale encore non-stationnaires. Pour atteindre cet objectif, nous commençons par construire un ensemble particulier de matrices. Nous nous intéressons à différentes configurations, dans lesquelles ces matrices pourront être :

- ⤢ soit issues directement des fonctions de corrélation pour différents retards (dans ce cas là, nous supposons alors les sources décorréelées),
- ⤢ soit issues des fonctions de corrélation cycliques lesquelles sont obtenues de manière indirecte grâce à l'application d'un opérateur linéaire particulier (dans ce cas là, les sources pourront être supposées soit décorréelées soit corrélées),
- ⤢ soit encore issues d'un STFSQ (pour des signaux aléatoires) ou d'une RTFSQ (pour des signaux déterministes).

Quand les sources sont supposées satisfaire des hypothèses d'indépendance ou plus simplement de décorrélation, les méthodes de SAS proposées opèrent généralement sans pré-sélection automatique de ces matrices (elles appartiennent toutes à l'ensemble \mathcal{M}_{dc}).

Quand les sources sont supposées corrélées, les méthodes de SAS basées sur l'utilisation de fonctions de corrélation cyclique ou de STFSQ proposées reposent toutes sur une étape préalable de sélection (automatique) de points particuliers permettant la construction de l'ensemble des matrices devant ensuite être bloc-diagonalisées conjointement. Il en va de même pour les méthodes de SAS basées sur l'utilisation RTFSQ lesquelles sont dédiées au cas de signaux déterministes.

De façon similaire à la méthode $\text{JD}_{\text{Inst,TFM}}$ proposée en contexte instantané, les méthodes dédiées au modèle convolutif combinent alors un des algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe (non-unitaire) qui ont été proposés au niveau du Chapitre 3 au détecteur de points utiles C_{Conv} présenté au niveau du premier paragraphe de ce Chapitre (§4.1.3).

En résumé, les méthodes que nous suggérons d'utiliser pour résoudre le problème de la séparation des mélanges linéaires convolutifs de sources exploitent soit la diversité temps-fréquence, soit la cohérence temporelle et/ou soit la cyclo-stationnarité des sources. Sans perte de généralité, ces approches peuvent également être appliquées afin de résoudre le problème de la séparation de mélanges linéaires instantanés de sources.

Dans tout ce qui suit, nous optons pour la première écriture temporelle - donnée au niveau de l'Eq. 1.7 - de reformulation du modèle convolutif en un modèle de type instantané.

4.3.1 Approche exploitant la cohérence temporelle des sources : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$

Les sources considérées peuvent être stationnaires ou non-stationnaires, réelles ou complexes. Elles sont supposées décorrélées mais temporellement cohérentes. Les hypothèses de décorrélation et de cohérence temporelle des sources permettent alors aux matrices de corrélation $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(\tau) = \langle \mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau) \rangle$ données au niveau de l'Eq. 1.41 d'être bloc-diagonales pour des retards τ restant proches de l'origine (elles deviennent quasi-nulles pour des valeurs de τ trop éloignées de l'origine, *c.à.d.* $\tau > \tau_{\text{max}}$). L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait que le blanchiment des observations devient facultatif. En fait, comme nous l'avons montré dans le premier chapitre (§1.1.9), le blanchiment des observations influe sur les performances de la méthode de séparation (les performances étant bornées dès lors qu'un blanchiment est utilisé). Par conséquent, on s'attend à ce qu'une méthode de séparation sans blanchiment puisse donner de meilleurs résultats que ceux obtenus au moyen d'une méthode opérant après blanchiment.

Principe de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$

Pour estimer la matrice de mélange \mathbf{H} , nous proposons donc de bloc-diagonaliser conjointement l'ensemble suivant de matrices : $\{\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}(\tau) = \bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau) - \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) = \mathbf{H}\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(\tau)\mathbf{H}^H; \forall \tau = 0, \dots, \tau_{\text{max}}\}$ où $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)$ et $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}(\tau)$ désignent respectivement les matrices de corrélation des observations, des bruits et des observations non-bruitées. Comme il l'a été mentionné au niveau du premier chapitre (§1.1.6), la matrice de corrélation $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)$ de bruits possède la structure particulière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) &= \mathbf{E}\{\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t + \tau)\} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) & \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} & \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

La variance σ_n^2 des bruits peut être estimée grâce à une Décomposition en Valeurs Propres de la matrice de corrélation $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$ des observations à l'origine ($\tau = 0$). Si $M > N$, la moyenne des $M - N$

plus petites valeurs propres de $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$ permet d'estimer σ_n^2 . Si $M = N$, nous sommes obligés de supposer σ_n^2 connue pour pouvoir traiter le cas bruité.

Deux remarques s'imposent. La première est que les sources restituées après inversion du système de séparation sont obtenues à une permutation près et un filtre près qui sont en fait les indéterminations classiques de la SAS dans le cadre des des mélanges convolutifs de signaux (cf. §1.1.7). La deuxième est qu'en pratique, les matrices de corrélation sont estimées comme dans [100] : les séquences observées sont découpées en N_b tranches de T_b échantillons (sans chevauchement), *c.à.d.* $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}(t)w(t-iT_b)$, pour tout $i = 0, \dots, N_b - 1$ (où $w(t)$ est une fenêtre). Les matrices de corrélation sont alors estimées par : $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau) = \frac{1}{N_b} \sum_{i=0}^{N_b-1} \mathbf{X}_i(t)\mathbf{X}_i^H(t+\tau)$.

Résumé de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$

Le principe de la méthode notée $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$ proposée pour résoudre le problème de SAS en contexte linéaire convolutif est résumé au niveau du Tab. 4.5 :

1. Estimer les matrices de corrélation des signaux observés,
2. Construire un ensemble \mathcal{M}_{bdc} de N_m matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement (par exemple en faisant varier le retard τ de 1 à $N_m = \tau_{\max} = 50$),
3. Bloc-diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{M}_{bdc} et ce au moyen de l'un des algorithmes de BDC (non-unitaires) présentés au niveau du Chapitre 3 (estimation du bloc-diagonaliseur conjoint),
4. Identifier la matrice de mélange et éventuellement restituer les sources.

TABLE 4.5 – Principe de la méthode de séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources décorréliées non-stationnaires exploitant la cohérence temporelle : $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$.

4.3.2 Approche exploitant la cyclo-stationnarité des signaux : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$

Nous considérons maintenant des signaux sources de nature cyclo-stationnaire dont les fréquences cycliques peuvent être connues ou non. L'idée clef de cette approche consiste dans un premier temps à appliquer l'opérateur linéaire donné au niveau de l'Eq. 1.44 aux observations. Puis, dans un second temps, nous tirons avantage de certaines propriétés spécifiques des matrices transformées afin de construire un ensemble de matrices possédant une structure algébrique bien particulière. Enfin, dans le but d'estimer la matrice de séparation nous faisons appel à l'un des algorithmes de BDC (non-unitaire) présentés au chapitre précédent. Cette approche nous permet donc d'apporter une nouvelle solution au problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs de sources cyclo-stationnaires tout en supprimant l'étape préalable classique de blanchiment de données et ce dans les deux cas suivants : lorsque les fréquences cycliques des signaux d'entrées sont connues ou inconnues. Nos développements reposent sur les trois hypothèses suivantes :

Hypothèse A : Les signaux sources sont centrés de moyenne zéro et ce sont des signaux cyclo-stationnaires *c.à.d.* que leurs fonctions d'auto-corrélation $R_{s_i}(t, \tau) = \mathbf{E}\{s_i(t)s_i^*(t-\tau)\}$, pour tout $i = 1, \dots, n$ sont périodiques en t de période $T_i \in \mathbb{R}^{+*}$, T_i désignant la période cyclique de la i -ème source $s_i(t)$. Par conséquent, $R_{s_i}(t, \tau)$ est décomposable en Séries de Fourier et réécrite de la façon suivante :

$$R_{s_i}(t, \tau) = \sum_k R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau] \exp(i2\pi \frac{k}{T_i} t). \quad (4.17)$$

$R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau)$ représente la fonction de corrélation cyclique⁵ définie comme :

$$R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau) = \frac{1}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} R_{s_i}(t, \tau) \exp(-2i\pi \frac{k}{T_i} t) dt. \quad (4.18)$$

Hypothèse B : Les périodes cycliques sont différentes deux à deux, *c.à.d.* $T_i \neq T_j$, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $i \neq j$. Nous définissons l'ensemble \mathcal{V}_i des fréquences cycliques de la i -ème source par :

$$\mathcal{V}_i = \left\{ \nu_i = \frac{k}{T_i}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Hypothèse C : Les bruits n_j pour tout $j = 1, \dots, m$ sont des processus aléatoires blanc stationnaires de moyenne nulle, mutuellement décorrélés et indépendants des sources.

Hypothèse D : La matrice \mathbf{H} de mélange obtenue après reformulation du modèle convolutif est de rang plein.

Principe de l'approche JBD_{Conv,CCM}

On montre que la matrice de corrélation des observations admet la décomposition suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau), \quad (4.19)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)$ est la matrice de corrélation des sources. $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)$ est celle des bruits. Ces matrices de corrélation sont définies de la même manière qu'au niveau de l'Eq. 1.39.

Comme au niveau de l'Eq. 4.18 pour des scalaires, on peut maintenant définir un opérateur cyclique $(\cdot)^{\text{fs}}$ pour des matrices. Ce qui conduit à :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) \exp(-2i\pi\nu t) dt. \quad (4.20)$$

Cet opérateur étant linéaire et du fait de la relation établie par l'Eq. (4.19), on obtient donc la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) \\ &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)\alpha(\nu), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ sont définies de façon similaire à $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ au niveau de l'Eq. 1.44 et $\alpha(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-2i\pi\nu t) dt$, *c.à.d.* $\alpha(\nu) = 1$ si $\nu = 0$ sinon 0.

Quand les sources sont supposées décorrélées, la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ est une matrice bloc diagonale. En utilisant le fait que les sources possèdent des périodes différentes (comme postulé au niveau de l'hypothèse B), on peut montrer qu'il existe des valeurs de ν pour lesquelles $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ possède une structure encore plus particulière.

Considérons les fréquences ν_o tels que :

$$\mathbf{H}_1. \nu_o \in \mathcal{V}_i, \nu_o \notin \bigcup_{j, j \neq i} \mathcal{V}_j \text{ and } R_{s_i}^{\text{fs}}(\nu_o, \tau) \neq 0.$$

5. où Coefficient de Fourier de la décomposition.

On constate que les matrices $\mathbf{R}_S^{\text{fs}}(\nu_o, \tau)$ sont bloc-diagonales avec un seul bloc non nul de taille $(L + L') \times (L + L')$ sur leur diagonale situé à la position (i, i) car il correspond à la i -ème source. Ceci est dû au fait que $R_{s_j}^{\text{fs}}(\frac{k}{T_i}, \tau) = 0$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i \neq j$.

Preuve $\forall \nu_i \in \mathcal{V}_i, \tau \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned}
R_{s_j}^{\text{fs}}(\nu_i, \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{s_j}(t, \tau) \exp(-2i\pi\nu_i t) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k R_{s_j}^{\text{fs}}[k, \tau] \exp(2i\pi(\nu_j - \nu_i)t) dt \\
&= \sum_k R_{s_j}^{\text{fs}}[k, \tau] \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(2i\pi(\nu_j - \nu_i)t) dt}_{\alpha(\nu_j - \nu_i)} \\
&= \sum_k R_{s_j}^{\text{fs}}[k, \tau] \alpha(\nu_j - \nu_i), \tag{4.22}
\end{aligned}$$

□

Si maintenant les sources sont supposées corrélées, la structure bloc-diagonale avec un seul bloc non nul sur la diagonale, semble numériquement vérifiée pour toute fréquence cyclique de l'ensemble \mathcal{V}_i (voir aussi l'exemple analytique donné au niveau de l'Annexe 5). Pour de telles fréquences, il semblerait que la fonction de corrélation croisée soit en effet nulle. Nous ne sommes toutefois pas encore parvenu à démontrer ce résultat de manière théorique dans le cas général de signaux cyclostationnaires quelconques corrélés.

Pour tout retard τ et pour toute fréquence ν satisfaisant la propriété \mathbf{H}_1 , la matrice $\mathbf{R}_S^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ possède un seul bloc non nul. Afin d'identifier la matrice de séparation, nous suggérons alors bloc-diagonaliser l'ensemble des matrices $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}_X^{\text{fs}}(\nu, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall \nu \text{ satisfaisant la propriété } \mathbf{H}_1\}$ de taille N_m (où $N_m \in \mathbb{N}^*$). Remarquons que dans le cas de sources décorréliées, on peut directement bloc-diagonaliser l'ensemble \mathcal{T} de toutes les matrices de corrélation cycliques, $\mathcal{T} = \{\mathbf{R}_X^{\text{fs}}(\nu, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall \nu\}$.

Notons enfin que les sources peuvent être restituées après inversion du système à une permutation près et à un filtre près. Nous remarquons également que l'ensemble \mathcal{S} des matrices à bloc-diagonaliser conjointement par un des algorithmes de BDC présentés au chapitre précédent, peut être construit de deux façons différentes :

- Lorsque les fréquences cycliques ν_j sont connues (ou bien estimées comme dans [33]), pour tout $j = 1, \dots, n$, l'ensemble des matrices à bloc-diagonaliser conjointement est : $\mathcal{S} = \{\mathbf{R}_X^{\text{fs}}(\nu_j, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall j = 1, \dots, n\}$.
- Lorsque les fréquences cycliques sont inconnues, on commence par calculer la matrice de corrélation cyclique des observations pour un nombre suffisamment important de fréquences dans le but d'être assuré de trouver une gamme suffisamment large de fréquences cycliques correspondant à l'ensemble des sources. Dans le cas de sources corrélées, l'application d'un algorithme de bloc-diagonalisation conjointe requière ensuite la sélection des matrices $\mathbf{R}_X^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ qui correspondent à des matrices $\mathbf{R}_S^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ bloc-diagonales avec un seul bloc non nul sur la diagonale. A nouveau, nous retombons sur un problème de détection automatique de points utiles similaire à celui énoncé au niveau du premier paragraphe de ce chapitre. Nous préconisons encore d'utiliser le détecteur $\mathcal{C}_{\text{Conv}}$.

Principe de la méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$

Cette approche qui permet de résoudre le problème de la séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources cyclo-stationnaires est résumée au niveau du Tab. 4.6 :

1. Appliqué l'opérateur linéaire matriciel $(\cdot)^{\text{fs}}$ aux signaux observés.
2. Construire l'ensemble $\mathcal{S} : \{(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_1, \dots, (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_{N_m}\}$ de matrices au moyen du détecteur C_{Conv} . La taille de cet ensemble est N_m .
3. Bloc-diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{S} à l'aide de l'un des algorithmes de BDC (non-unitaires) présentés dans le Chapitre 3.
4. Identifier la matrice de mélange et éventuellement restituer les sources.

TABLE 4.6 – Principe de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$ pour la séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources cyclo-stationnaires

4.3.3 Approches basées sur l'utilisation de RTFSQ ou de STFSQ : méthode $\text{JBD}_{\text{Conv,TFM}}$

Nous présentons une dernière approche dédiée à la SAS basée sur l'utilisation de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques ou de représentations temps-fréquences spatiales quadratiques dans le cadre des mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources. Les sources considérées sont des signaux réels ou complexes, déterministes ou aléatoires et dans ce dernier cas éventuellement corrélées, stationnaires ou non-stationnaires. Comme précédemment, une manière possible d'aborder ce problème est de le reformuler en terme de problème de bloc-diagonalisation conjointe.

Nos développements sont basés sur les hypothèses suivantes :

- A₁. Les bruits $n_j(t)$ pour tout $j = 1, \dots, m$ sont des processus aléatoires stationnaires, blancs, de moyenne nulle, mutuellement décorrelés et indépendants des sources.
- A₂. Il existe des points t - f où une seule source et les versions retardées de cette source sont présentes dans le plan t - f .
- A₃. Le système mélangeant les sources est de rang plein linéaire convolutif et sur-déterminé ($m > n$).
- A₄. Ce système mélangeant est modélisé comme un filtre RIF dont l'ordre est supposé connu.
- A₅. La matrice \mathbf{H} de mélange obtenue après reformulation du modèle convolutif en un modèle instantané est inversible.

Principe de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,TFM}}$

Le STFSQ des observations $\mathbf{X}(t)$, notée $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$ de dimension $(M \times M)$ ($M = mL'$), vaut :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{H}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{H}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu) + \mathbf{H}\mathbf{D}_{\mathbf{SN}}(t, \nu) + \mathbf{D}_{\mathbf{NS}}(t, \nu)\mathbf{H}^H, \quad (4.23)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu)$) désigne le STFSQ des signaux sources (resp. des bruits), $\mathbf{D}_{\mathbf{SN}}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{NS}}(t, \nu)$ sont les STFSQ croisés entre sources et bruits. $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ est une matrice de taille $(N \times N)$ avec $N = nQ$, et $Q = L + L'$. Les bruits étant indépendants des sources (Hypothèse A₁), le STFSQ des observations s'écrit finalement :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{H}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{H}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu). \quad (4.24)$$

Pour estimer les matrices t - f correspondant aux signaux observés non-bruités, nous présentons deux solutions. La première manière consiste à éliminer les points t - f de faible énergie en ne gardant que

les points tels que :

$$\min(|D_{x_i x_j}(t, \nu)|^2) > \epsilon \quad i, j \in \{1, \dots, mL'\}, \quad (4.25)$$

où ϵ est un réel de faible valeur et $D_{x_i x_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu))_{ij}$.

Lorsque le spectre de Wigner spatial est utilisé (et non n'importe quel autre spectre temps-fréquence spatial), alors une autre manière de débruiter peut être envisagée. En fait, puisque les bruits sont supposés être des processus stationnaires blancs (Hypothèse \mathbf{A}_1) alors $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(t, \tau) = \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) = \sigma_N^2 \delta(\tau) \mathbf{I}_M$ avec $\delta(\cdot)$ est la fonction de Kronecker. Par conséquent le spectre de Wigner spatial des bruits est : $\mathbf{D}_{\mathbf{W}, \mathbf{N}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) \exp(-2i\nu\tau) d\tau = \mathbf{S}_{\mathbf{N}}(\nu) = \sigma_N^2 \mathbf{I}_M$ où $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}$ n'est rien d'autre que la densité spectrale de puissance des bruits.

Ainsi, pour estimer le spectre de Wigner spatial des observations non-bruitées, il suffit d'estimer la variance σ_N^2 des bruits. Si $M > N$, l'estimation de σ_N^2 se fait de la même manière présentée au premier Chapitre (§1.1.9). Sinon si $M = N$, on devra supposer σ_b^2 connue, pour pouvoir traiter le problème considéré.

Finalement,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) \simeq \mathbf{H} \mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu) \mathbf{H}^H. \quad (4.26)$$

La matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ est définie par :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2}(t, \nu) & \dots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_n}(t, \nu) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2 \mathbf{s}_1}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2}(t, \nu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_{n-1} \mathbf{s}_n}(t, \nu) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n \mathbf{s}_1}(t, \nu) & \dots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n \mathbf{s}_{n-1}}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n}(t, \nu) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

où les matrices carrées $\mathbf{D}_{\mathbf{s}_i \mathbf{s}_j}(t, \nu)$ sont toutes des matrices de taille $(Q \times Q)$. D'après l'hypothèse \mathbf{A}_2 , il existe des points t - f particuliers ne correspondant qu'à des auto-termes sur les sources (et en raison du principe d'interférences, il ne peut y avoir qu'un seul auto-terme) et à des inter-termes entre cette source et ses versions retardées uniquement. En de tels points, la matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ possède une structure algébrique particulière : elle est bloc-diagonale avec un seul bloc non nul sur la diagonale. Là encore, nous retombons sur le problème de détection automatique de points utiles similaire à celui énoncé au premier paragraphe de ce chapitre. Pour construire l'ensemble des matrices t - f devant être bloc-diagonalisées conjointement, nous faisons à nouveau appel au détecteur \mathbf{C}_{Conv} . La BDC de cet ensemble permet d'identifier le système de séparation.

Résumé de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv}, \text{TFM}}$

Le principe de l'approche basée sur l'utilisation des STFSQ ou des RTFSQ, notée $\text{JBD}_{\text{Conv}, \text{TFM}}$ est résumé au niveau du Tab. 4.7 :

Notons que la procédure de débruitage peut être utilisée par les approches $\text{P}_{\text{Inst}, \text{TFM}}$ et $\text{JD}_{\text{Inst}, \text{TFM}}$ proposées en instantané afin de traiter le cas de la séparation de mélanges linéaires instantanés de sources bruités.

1. Estimer les STFSQ ou les RTFSQ des signaux observés.
2. Débruiter les matrices temps-fréquence à l'aide de l'une des deux procédures présentées précédemment.
3. Construire l'ensemble \mathcal{M}_{bdc} des matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement à l'aide du critère C_{Conv} de points t - f utiles.
4. Bloc-diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{M}_{bdc} à l'aide de l'un des algorithmes de BDC présentés au chapitre précédent.
5. Identifier la matrice de mélange et éventuellement restituer les sources.

TABLE 4.7 – Principe de l'approche de séparation de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources (cas de sources non-stationnaires et corrélées) exploitant la diversité temps-fréquence : méthode $JBD_{Conv,TFM}$.

4.4 Résultats des simulations informatiques

4.4.1 Mélanges linéaires instantanés de sources

Nous considérons $n = 3$ sources complexes reçues sur $m = 3$ capteurs. Les signaux émis sont trois modulations linéaires en fréquence. Elles sont constituées de $T = 256$ échantillons, la fréquence réduite de début de la première (resp. la seconde et la troisième) source est $\nu_{d_1} = 0.45$ (resp. $\nu_{d_2} = 0.05$ et $\nu_{d_3} = 0.25$) et les fréquences réduites de fin sont $\nu_{f_1} = 0.15$ (resp. $\nu_{f_2} = 0.45$ et $\nu_{f_3} = 0.05$). Les signaux sont normalisés et centrés.

Les sources sont mélangées au moyen de la matrice de mélange suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est 0.6920, elle est donc bien inversible.

La RTFSQ utilisée est la distribution de Wigner programmée sur 256 points en temps et 128 points en fréquence.

La représentation temporelle des sources (resp. leur spectre) est donnée à gauche (resp. à droite) de la Fig. 4.1. Tandis que la partie réelle (resp. la partie imaginaire) de leur RTFSQ (Wigner-Ville WV) sont données à gauche (resp. à droite) de la Fig. 4.2.

La Fig. 4.3 représente les signaux observés (à gauche) et leurs spectre (à droite) alors que la Fig. 4.4 fournit leur RTFSQ.

Le détecteur C_{Inst} est appliqué à l'ensemble des matrices issues de la RTFSQ des observations. Les points temps-fréquence sélectionnés sont représentés au niveau de la Fig. 4.5.

En diagonalisant conjointement l'ensemble des matrices t - f sélectionnés par un algorithme de DC sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée (algorithme de Yeredor [117]), nous trouvons un indice de performance égal à -44.3652 dB. La Fig. 4.6 représente les signaux ré-estimés et leur spectre alors que la Fig. 4.7 donne leur RTFSQ.

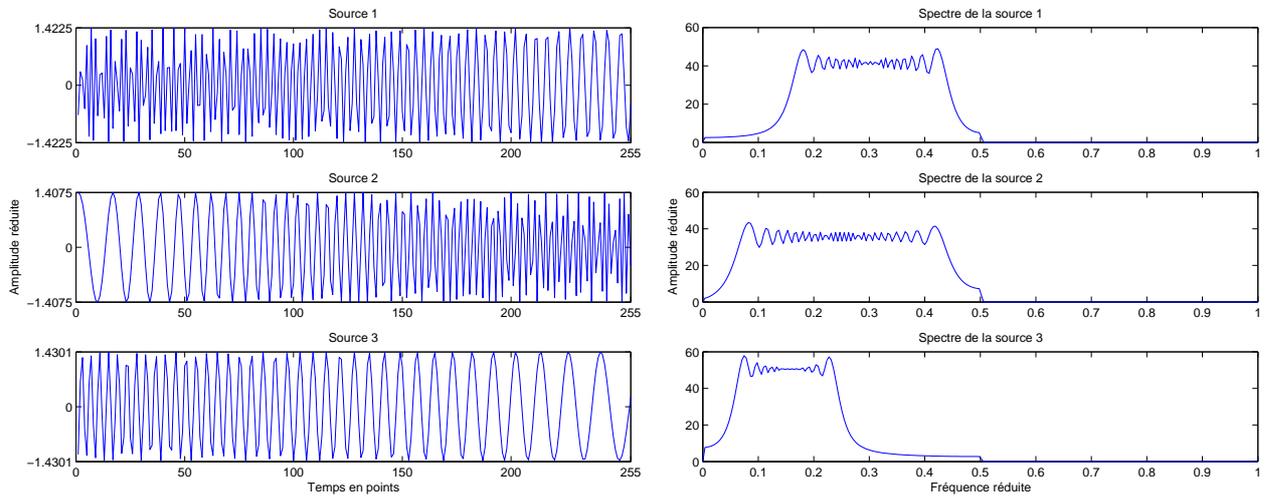


FIGURE 4.1 – Trois modulations linéaires en fréquence. A gauche : partie réelle des sources. A droite : spectre des sources.

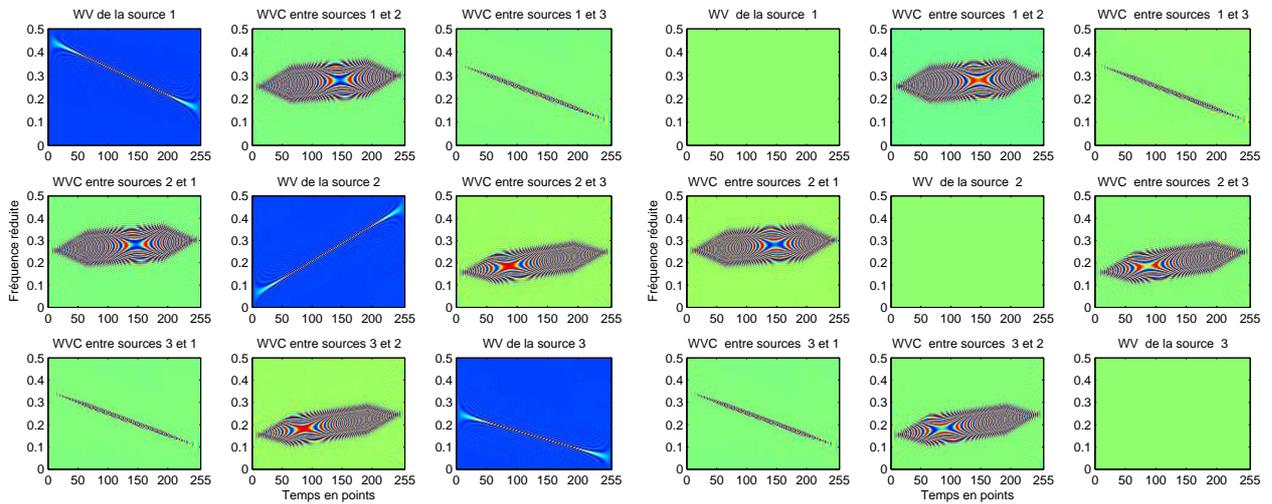


FIGURE 4.2 – A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des sources. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des sources.

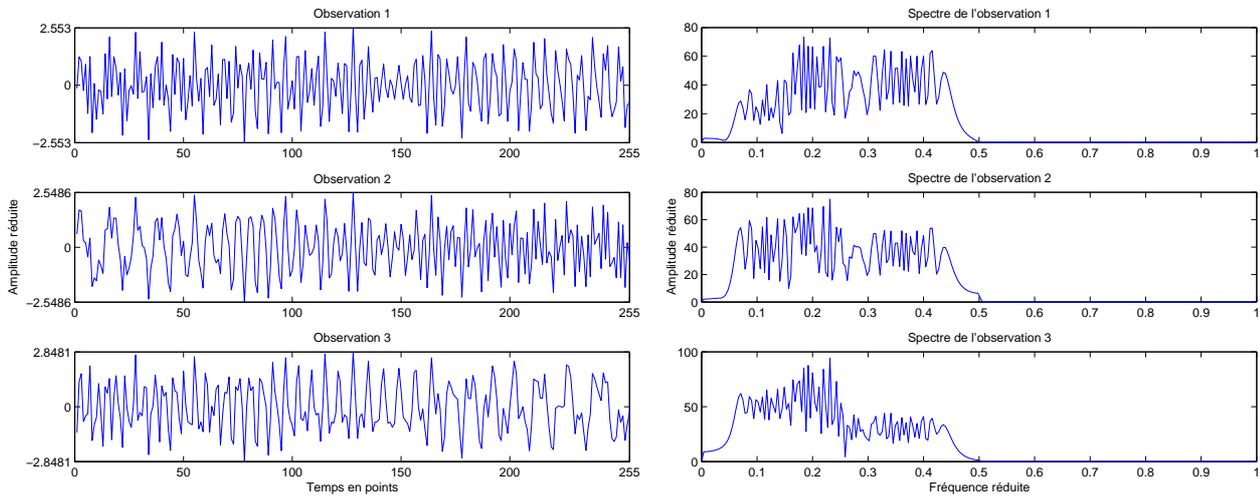


FIGURE 4.3 – A gauche : partie réelle des sources mélangées. A droite : spectre des sources mélangées

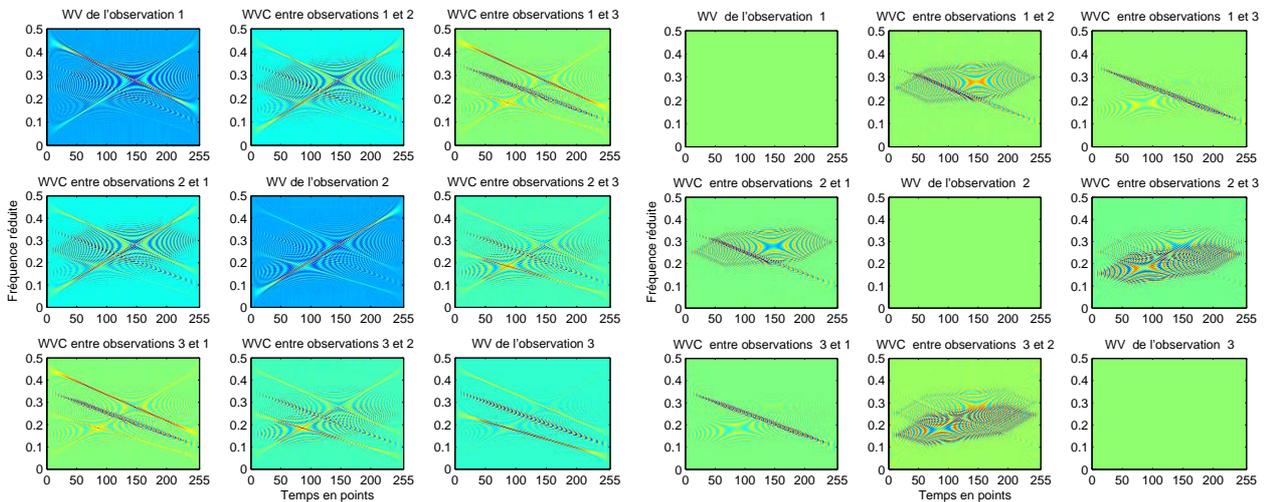
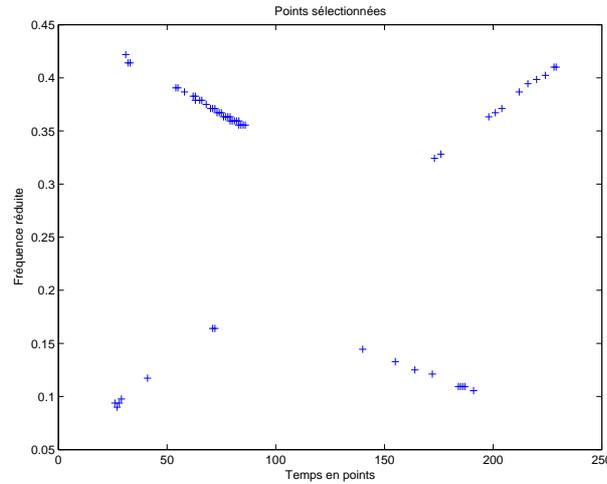


FIGURE 4.4 – A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des observations. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des observations.

FIGURE 4.5 – Points temps-fréquence sélectionnés à l'aide du détecteur C_{Inst} .

4.4.2 Approche exploitant la cohérence temporelle des signaux : application à des signaux de paroles

Exemple 1 : influence du blanchiment

Nous commençons par un exemple permettant de montrer l'influence de l'étape de blanchiment en comparant les résultats obtenus au moyen de notre approche utilisant l'algorithme de BDC (non-unitaire) basé sur l'optimisation algébrique d'un critère de type moindres carrés (notée $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$) à ceux obtenus par une autre approche reposant sur un algorithme de BDC unitaire [13] (notée $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$). Pour être applicable, la seconde approche nécessite un blanchiment préalable des observations. Nous appliquons donc notre approche directement sur les matrices de corrélation des observations, tandis que l'approche $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$ est appliquée sur les matrices de corrélation des observations blanchies. Nous considérons $n = 2$ signaux sources reçus sur $m = 4$ capteurs. Les sources sont des signaux aléatoires Gaussiens indépendants, temporellement cohérents résultant du filtrage RIF de signaux aléatoires Gaussiens blancs et indépendants (dans cet exemple, l'ordre des filtres est de 128 et les coefficients des réponses impulsionnelles sont générés aléatoirement à partir de distributions uniformes sur l'intervalle $[-1, 1]$). Les sources, de taille 4096 points, sont ensuite mélangées à l'aide de la matrice de mélange MIMO (générée aléatoirement) suivante :

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} -0.6528 - 0.6130z^{-1} + 0.4451z^{-2} & -0.4676 - 0.3103z^{-1} + 0.8277z^{-2} \\ 0.5290 - 0.4296z^{-1} - 0.7318z^{-2} & -0.4970 - 0.8582z^{-1} + 0.1285z^{-2} \\ -0.8561 - 0.5125z^{-1} + 0.0674z^{-2} & -0.1294 - 0.7577z^{-1} + 0.6397z^{-2} \\ 0.9740 - 0.1660z^{-1} - 0.1540z^{-2} & 0.2479 + 0.3501z^{-1} - 0.9033z^{-2} \end{pmatrix}.$$

où $\mathbf{A}[z]$ désigne la transformée en z (TZ) de la matrice $m \times n$ $\mathbf{A}(t)$. L'ordre du filtre étant $L = 2$ (on considère 3 retards). On choisit de travailler avec $L' = 4$. Nous définissons ensuite le rapport de corrélation par :

$$\text{RC}(\%) = \frac{\|\text{OffBdiag}_{(\mathbf{p})}\{\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(0)\}\|_F}{\|\text{Bdiag}_{(\mathbf{p})}\{\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(0)\}\|_F} \times 100, \quad (4.28)$$

où $Q = L + L'$, $\mathbf{p} = \underbrace{(Q, Q, \dots, Q)}_{n \times}$, $\text{Bdiag}_{(\mathbf{p})}\{\cdot\}$ désigne la partie bloc diagonale de la matrice passée en argument, $\text{OffBdiag}_{(\mathbf{p})}\{\cdot\}$ sa partie hors bloc-diagonale et $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(0)$ est la matrice de corrélation du

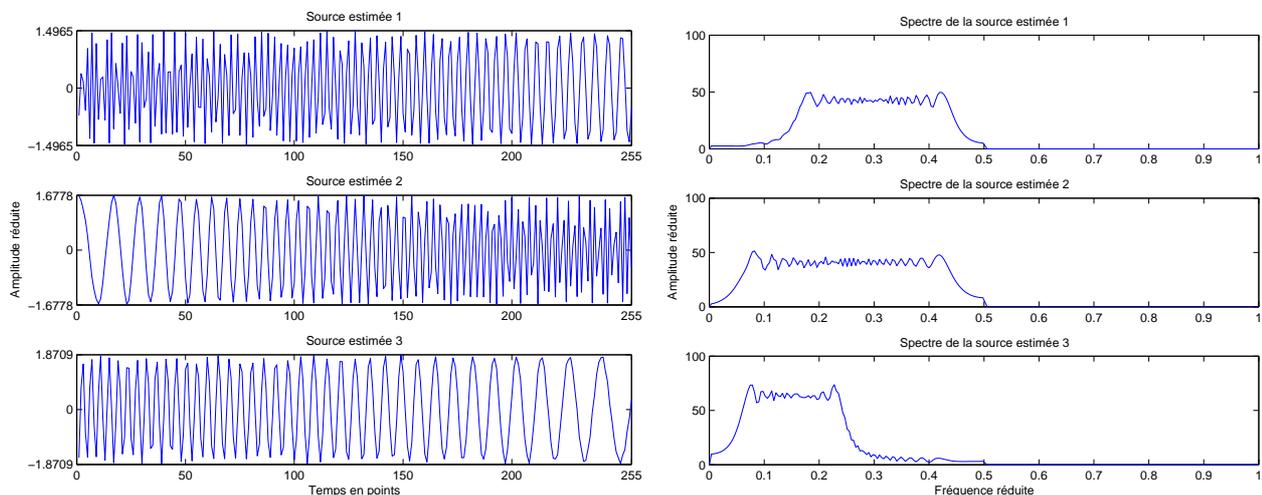


FIGURE 4.6 – Signaux obtenus après diagonalisation conjointe de l'ensemble de matrices temps-fréquence construit à l'aide du détecteur C_{Inst} . A gauche : partie réelle des sources estimées. A droite : spectre des sources estimées

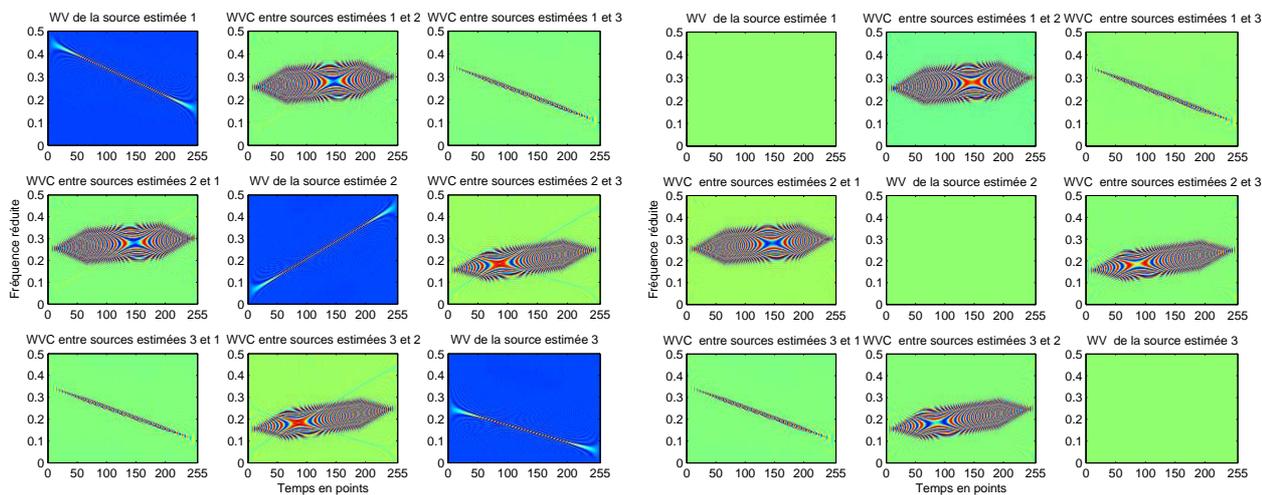


FIGURE 4.7 – A gauche : partie réelle de la distribution de Wigner-Ville des sources estimées. A droite : partie imaginaire de la distribution de Wigner-Ville des sources estimées.

vecteur source à l'origine. Nous gardons la seconde source inchangée, tandis que la première source est modifiée selon la règle suivante : $s_1 = s_1 + \alpha s_2$, avec $\alpha \in [0, 1]$. L'évolution de l'indice de performance en fonction du degré de corrélation RC en % est illustré au niveau de la Fig. 4.8.

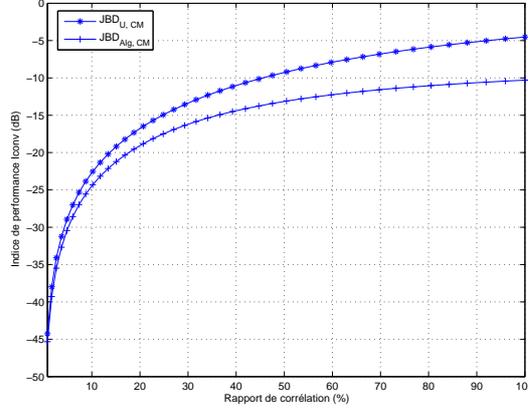


FIGURE 4.8 – Comparaison des algorithmes $JBD_{Alg,CM}$ et $JBD_{U,CM}$ sur des ensembles de matrices de corrélation estimées : l_{Conv} en dB en fonction du degré de corrélation (RC en %) des sources.

On constate que l'algorithme $JBD_{Alg,CM}$ est plus robuste que l'algorithme $JBD_{U,CM}$ (lequel nécessite un blanchiment préalable des observations) vis-à-vis d'une augmentation du degré de corrélation des sources. Ceci était prévisible car l'étape de blanchiment n'a plus de réelle raison d'être dès lors que les sources sont corrélées ($RC \neq 0$).

Exemple 2 : signaux de paroles

Nous présentons un deuxième exemple afin d'illustrer l'efficacité de l'algorithme $JBD_{Alg,CM}$. Nous considérons $m = 4$ mélanges de $n = 2$ signaux sources de parole échantillonnés à 8 kHz pour obtenir 55000 échantillons temporels. Les fonctions de corrélation et de corrélation croisée des sources sont tracées au niveau de la Fig. 4.9.

Les sources sont mélangées à l'aide du filtre RIF suivant (ordre du filtre $L = 3$ et on impose $L' = 4$) :

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} -0.6983 + 0.5357z^{-1} - 0.4337z^{-2} + 0.1932z^{-3} & 0.6490 + 0.6242z^{-1} - 0.0190z^{-2} - 0.4344z^{-3} \\ 0.3895 + 0.2495z^{-1} - 0.1363z^{-2} + 0.8761z^{-3} & 0.5780 - 0.5365z^{-1} + 0.4614z^{-2} + 0.4063z^{-3} \\ 0.6930 + 0.5273z^{-1} + 0.4905z^{-2} - 0.0332z^{-3} & 0.4197 + 0.3713z^{-1} - 0.4190z^{-2} + 0.7144z^{-3} \\ 0.6380 + 0.2437z^{-1} + 0.5087z^{-2} - 0.5243z^{-3} & 0.5951 + 0.3306z^{-1} - 0.3974z^{-2} - 0.6153z^{-3} \end{pmatrix},$$

Utilisant $N_b = 429$ points, $T_b = 128$ points, alors $w(t) = \Pi_{T_b}(t - \frac{T_b}{2})$ ($\Pi_{T_b}(t)$ est la fenêtre rectangulaire de taille T_b , centrée autour de $t = 0$). Les résultats obtenus résultent d'une moyenne sur 10 réalisations de type Monte-Carlo. Comme pour l'exemple précédent, afin de montrer l'influence du blanchiment, nous traçons l'évolution de l'indice de performance en fonction du degré de corrélation RC en % au niveau de la Fig. 4.10 (les signaux de paroles considérés n'étant pas exactement décorrélés, *c.à.d.* pour $\alpha = 0$ on a $RC = 3\%$ et non 0%).

Ensuite, nous traçons au niveau de la Fig. 4.11 l'évolution de l'indice de performance l_{Conv} en fonction du nombre de matrices de corrélation considérées (à gauche) et du RSB (à droite). Enfin, nous pouvons également évaluer l'erreur de bloc-diagonalité définie par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(p)}\{\mathbf{B}\mathbf{R}_Y(t, \tau_k)\mathbf{B}^T\|_F^2, \quad (4.29)$$

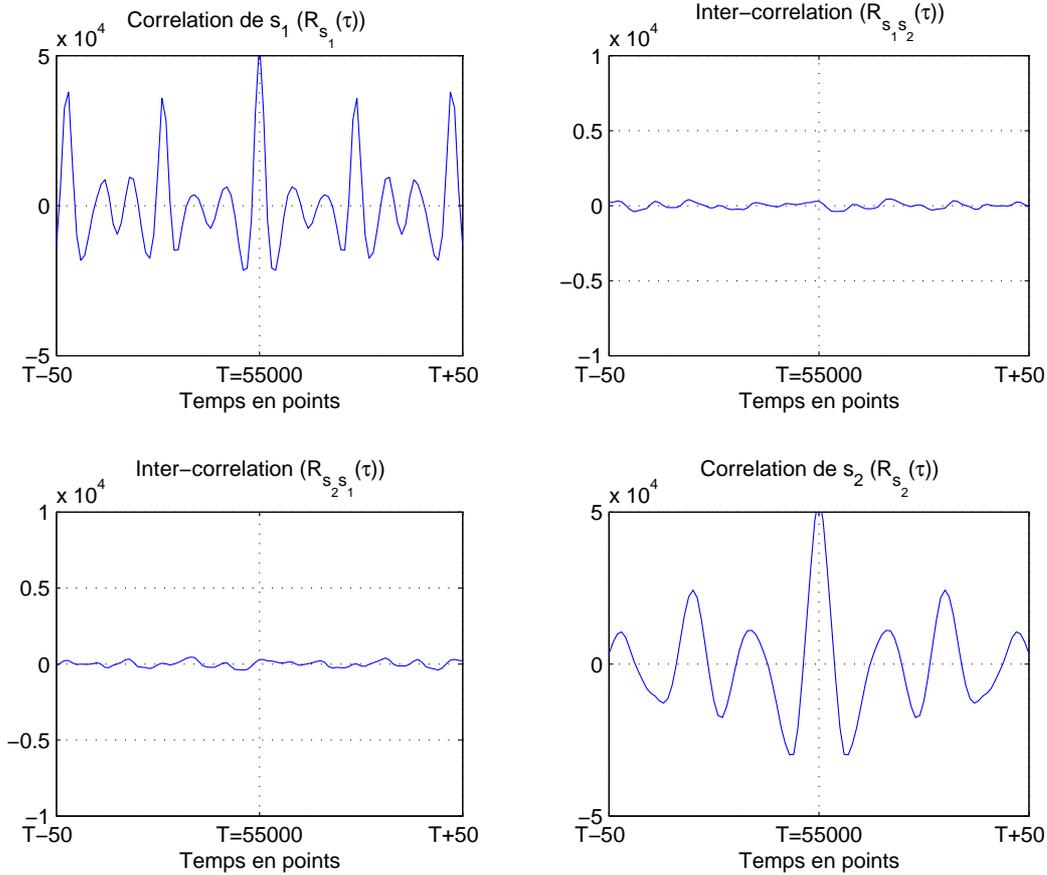


FIGURE 4.9 – Fonctions de corrélation et de corrélation croisée des signaux de paroles considérés.

où $Q = L + L$, $\mathbf{p} = \underbrace{(Q, \dots, Q)}_{n \times}$ et \mathbf{B} est la matrice de séparation. Une comparaison entre l'erreur de bloc-diagonalité obtenue au moyen des deux algorithmes $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$ et $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ en fonction du nombre de matrices (resp. du RSB) est fournie à gauche de la Fig. 4.12 (resp. à sa droite). Ces courbes montrent bien que les performances sont meilleures avec l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ plutôt qu'avec l'algorithme $\text{JBD}_{\text{U,CM}}$.

4.4.3 Approche exploitant la cyclo-stationnarité des signaux : applications à des signaux de télécommunications numériques

Nous considérons $m = 4$ mélanges de $n = 2$ sources issues d'une modulation numérique de la forme suivante :

$$s(t) = \Re\{v(t) \exp(2i\pi f_c t)\}, \quad (4.30)$$

où $\Re\{\cdot\}$ désigne la partie réelle d'un signal complexe, f_c est la fréquence réduite de la porteuse égale 0.2 pour la première source et 0.25 pour la deuxième source et $v(t)$ est l'enveloppe complexe de $s(t)$. Elle peut être s'exprimée de la manière suivante :

$$v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k)h(n - kT), \quad (4.31)$$

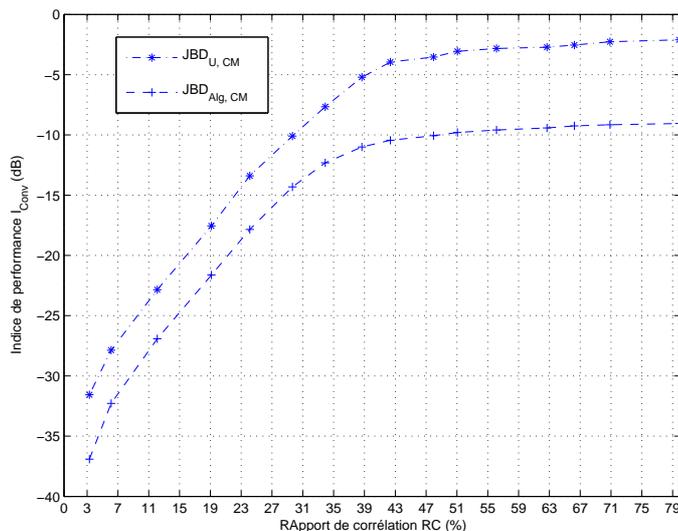


FIGURE 4.10 – Evaluation de la robustesse de l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Alg,CM}}$ par rapport au degré de corrélation (RC en %) des sources ($N_m = 50$ matrices, $\text{RSB} = 100$ dB).

avec $a(n)$ est une séquence binaire complexe i.i.d., centrée de moyenne nulle correspondant aux symboles transmis, T est un entier lié à la période symbole et $h(n)$ est le signal de forme (il est déterministe). Dans cet exemple, la forme $h(n)$ est choisie triangulaire. Elle est définie pour toute période cyclique par :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{T}n & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{2}{T}n + 2 & \text{si } \frac{T}{2} + 1 \leq n \leq T - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

Les périodes cycliques des deux sources considérées valent respectivement $T_1 = 10$, $T_2 = 8$ en points. Les sources sont mélangées à l'aide du filtre RIF suivant ($L = 3$ et $L' = 3$) :

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} 0.5400 + 0.9936z^{-1} - 0.6051z^{-2} + 0.8040z^{-3} & 0.6933 - 0.7387z^{-1} - 0.4140z^{-2} - 0.4746z^{-3} \\ -0.3335 - 0.0827z^{-1} - 0.2809z^{-2} - 0.8249z^{-3} & -0.3995 + 0.8315z^{-1} - 0.2386z^{-2} - 0.6213z^{-3} \\ -0.0849 + 0.7305z^{-1} + 0.5760z^{-2} - 0.1143z^{-3} & -0.5921 - 0.6382z^{-1} - 0.8122z^{-2} + 0.4283z^{-3} \\ -0.4646 - 0.9072z^{-1} - 0.4450z^{-2} - 0.9106z^{-3} & -0.0052 + 0.6556z^{-1} + 0.1437z^{-2} - 0.9450z^{-3} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{A}[z]$ désigne la transformée en z de $\mathbf{A}(t)$. Les performances de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv,CCM}}$ sont illustrées en utilisant les deux algorithmes de BDC nommés $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$, basés respectivement sur la méthode de type gradient à pas optimal (le calcul du gradient étant approché) et sur la méthode de type gradient (absolu) à pas d'adaptation fixe (le calcul du gradient étant exact).

Au niveau de la Fig. 4.13, les deux méthodes de SAS résultantes que nous notons respectivement $\text{JBD}_{\text{App-Grad,CCM}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_A,CCM}$ sont comparées au moyen de l'indice de performance défini au niveau de l'Eq. 1.38.

À gauche (resp. à droite) de la Fig. 4.14, l'indice de performance est tracé en fonction du nombre de réalisations lorsque les fréquences cycliques sont connues (resp. inconnues). Les résultats sont rangés dans l'ordre décroissant des performances obtenues. On constate en outre, que plus la taille des signaux est grande, meilleurs sont les résultats. Enfin, on peut observer que les performances sont meilleurs lorsque les fréquences cycliques sont inconnues simplement parce que les performances

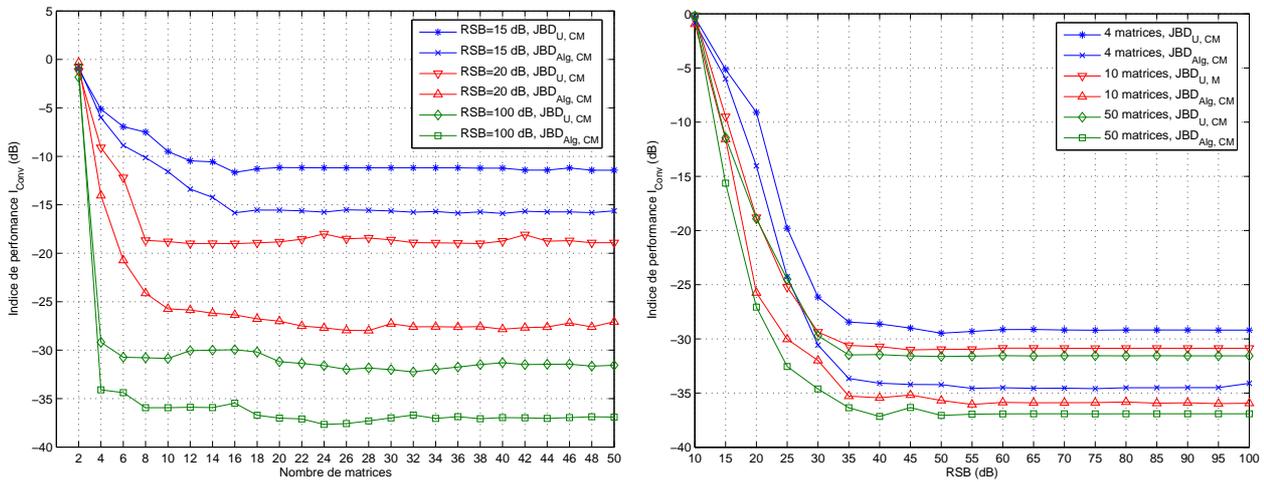


FIGURE 4.11 – I_{Conv} en dB en fonction du nombre de matrices (à gauche), en fonction du RSB (à droite). Comparaison entre les deux algorithmes $JBD_{Alg,CM}$ et $JBD_{U,CM}$.

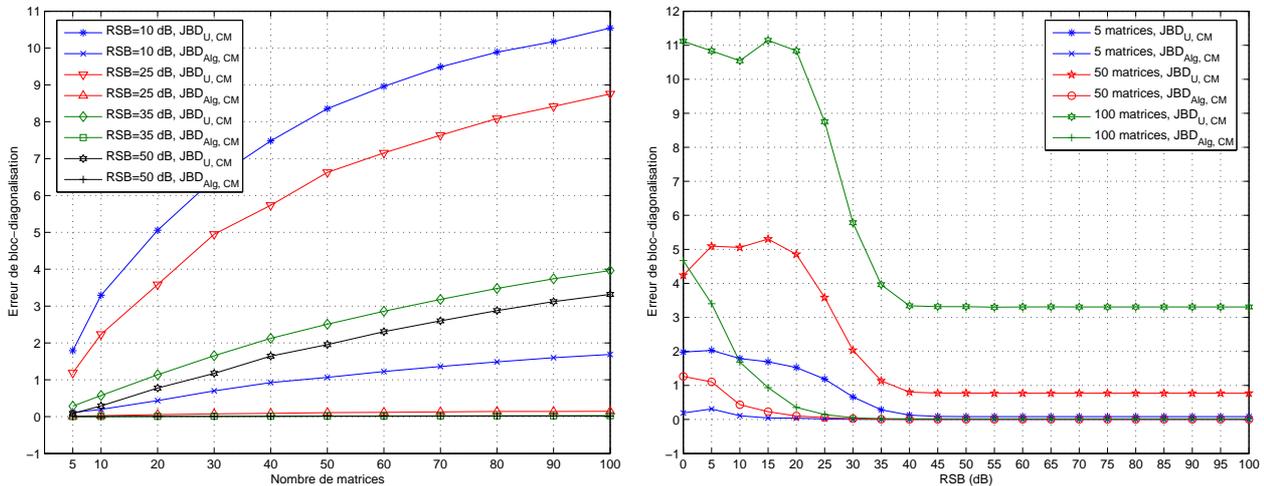


FIGURE 4.12 – Erreur de bloc-diagonalisation en dB en fonction du nombre de matrices (à gauche), en fonction du RSB (à droite). Comparaison entre les deux algorithmes $JBD_{Alg,CM}$ et $JBD_{U,CM}$.

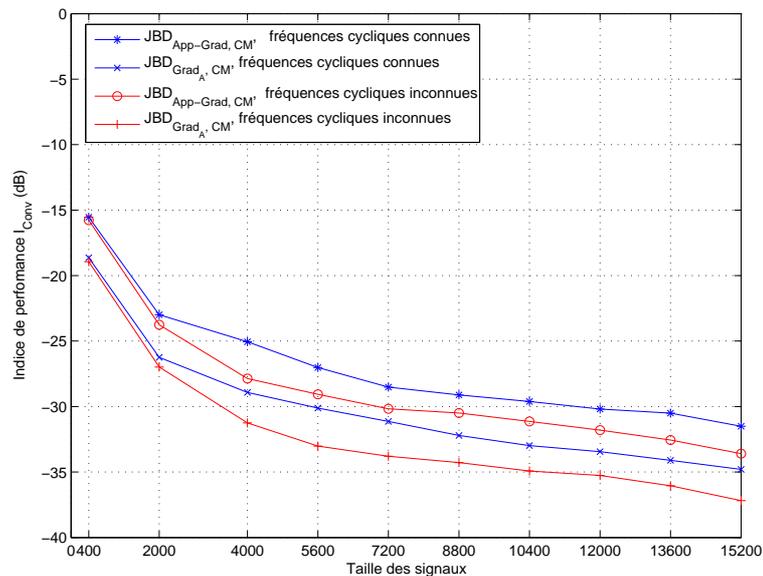


FIGURE 4.13 – I_{Conv} en fonction de la taille des signaux dans les deux cas suivants : fréquences cycliques connues et inconnues.

des algorithmes de BDC dépendent du nombre de matrices utilisées (or la taille de l'ensemble des matrices sélectionnées à l'aide du détecteur C_{Conv} est plus grande que celle de l'ensemble construit lorsque l'on travaille avec des fréquences cycliques connues).

À gauche (resp. à droite) de la Fig. 4.15, nous avons tracé le nombre de matrices sélectionnées par le détecteur C_{Conv} en fonction de la taille des signaux (resp. en fonction du nombre de réalisations) lorsque les fréquences cycliques sont inconnues.

On constate que la méthode $\text{JBD}_{\text{Grad}_A, \text{CCM}}$ améliore la méthode $\text{JBD}_{\text{App-Grad}, \text{CCM}}$ basée sur le gradient approché.

Ces courbes illustrent le bon comportement des deux méthodes $\text{JBD}_{\text{App-Grad}, \text{CCM}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_A, \text{CCM}}$. Les performances sont également meilleures lorsque l'on augmente la taille des signaux considérés.

4.4.4 Approche exploitant la diversité temps-fréquence : application à des signaux de télécommunications numériques

L'efficacité de l'approche $\text{JBD}_{\text{Conv}, \text{TFM}}$ exploitant la richesse temps-fréquence est illustrée au moyen d'un exemple, tout en testant et comparant le comportement des quatre algorithmes de BDC baptisés JBD_{Alg} , $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$, (proposés au niveau du troisième chapitre) sur un ensemble des matrices issues de transformées temps-fréquence spatiales quadratiques. L'ensemble de matrices considéré est construit à l'aide du détecteur C_{Conv} de points temps-fréquence utiles introduit au début de ce Chapitre.

Nous établissons également une comparaison avec l'approche utilisant un algorithme de BDC unitaire [50]. Les méthodes de SAS résultant de l'utilisation de l'un de ces algorithmes de BDC sont notées respectivement $\text{JBD}_{\text{Alg}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{App-grad}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}, \text{TFM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U}, \text{TFM}}$.

Les méthodes $\text{JBD}_{\text{Alg}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{App-grad}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}, \text{TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}, \text{TFM}}$ sont appliquées directement sur l'ensemble des matrices sélectionnées par le détecteur C_{Conv} , tandis que la méthode $\text{JBD}_{\text{U}, \text{TFM}}$ est appliquée après une étape préalable de blanchiment des matrices t - f sélectionnées.

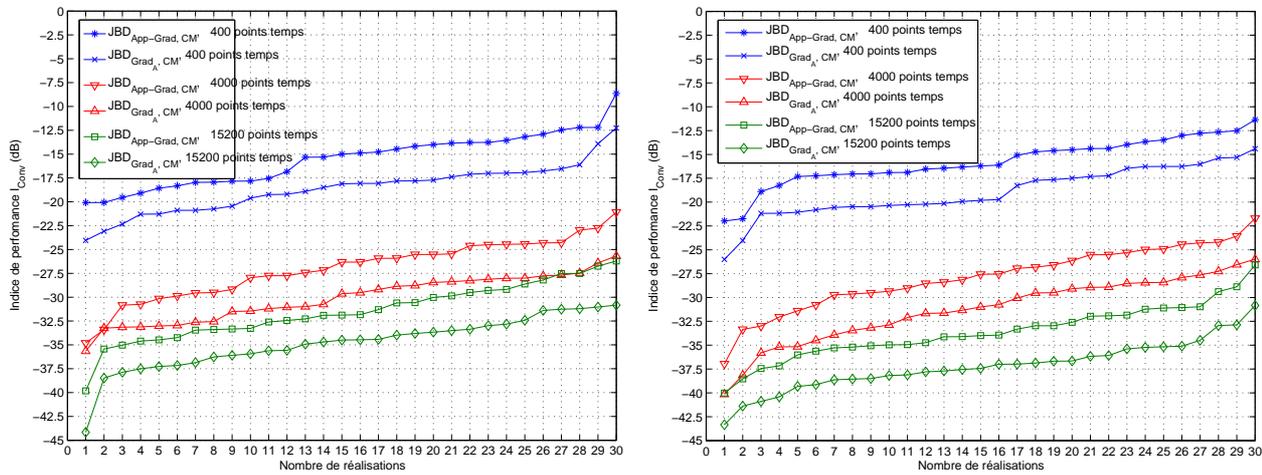


FIGURE 4.14 – I_{Conv} en fonction du nombre de réalisations (méthode de Monte-Carlo sur 30 réalisations). Gauche : les fréquences cycliques sont connues. Droite : les fréquences cycliques sont inconnues. Les réalisations sont rangées dans l'ordre décroissant des performances obtenues.

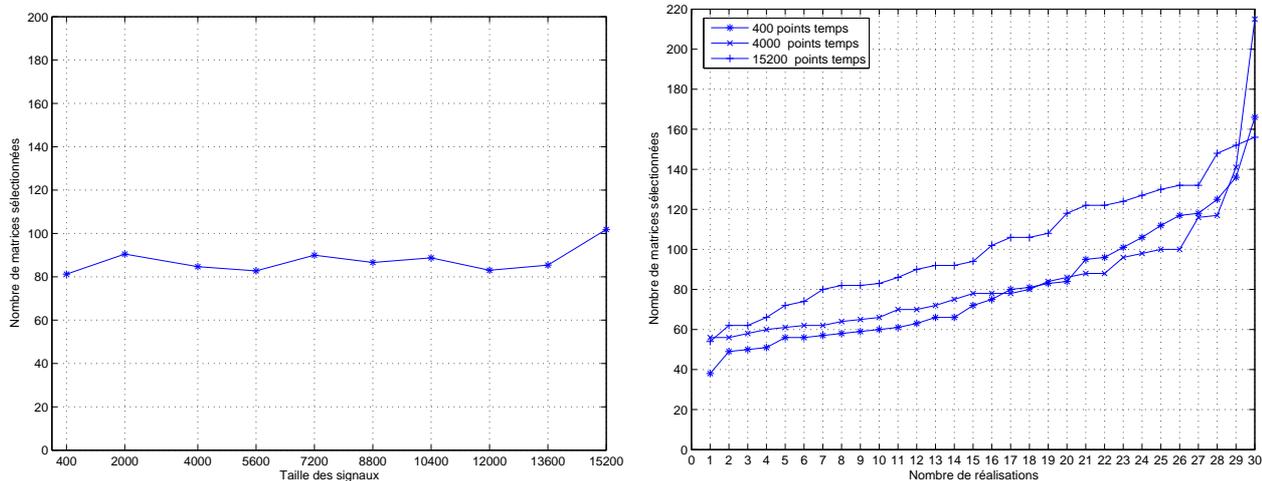


FIGURE 4.15 – Le nombre de matrices sélectionnées lorsque les fréquences cycliques sont inconnues en fonction de la taille des signaux (à gauche) et en fonction du nombre de réalisations rangées dans l'ordre décroissant des performances obtenues (à droite).

Nous considérons $m = 3$ mélanges de $n = 2$ sources de taille 128 échantillons temporels. La première source (resp. la seconde source) est une modulation linéaire de fréquence (resp. une modulation sinusoïdale de fréquence), l'ordre du filtre est $L = 2$ et on considère $L' = 4$. Les sources sont mélangées à l'aide du système mélangeant suivant (ces composantes ont été générées aléatoirement) :

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} -0.3592 + 0.4104z^{-1} + 0.8382z^{-2} & 0.9365 - 0.3316z^{-1} + 0.1138z^{-2} \\ 0.5585 - 0.1108z^{-1} + 0.8221z^{-2} & 0.4876 - 0.3044z^{-1} - 0.8183z^{-2} \\ 0.4550 - 0.7171z^{-1} + 0.5279z^{-2} & -0.8218 + 0.1528z^{-1} + 0.5489z^{-2} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons le spectre de Pseudo Wigner-Ville (voir Annexe 3) avec une fenêtre de Hamming de taille 32 points en temps et nous considérons 64 fréquences.

Au niveau de la Fig. 4.16, nous traçons les points t - f sélectionnés pour des RSB = 5 et 100 dB. Le nombre de matrices t - f sélectionnées (resp. l'indice de performance) en fonction du RSB est présenté à gauche de la Fig 4.17 (resp. à sa droite).

On constate que la procédure de débruitage présentée au paragraphe 4.3.3 est relativement robuste. Les résultats obtenus montrent que les méthodes $\text{JBD}_{\text{Alg,TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{App-grad,TFM}}$, $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,A}},\text{TFM}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}},\text{TFM}}$ présentent de meilleures performances que la méthode $\text{JBD}_{\text{U,TFM}}$ opérant après blanchiment des observations. En outre, la méthode $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}},\text{TFM}}$ basée sur un algorithme de BDC à base de gradient relatif à pas optimal est la plus performante en contexte bruité. Rien d'étonnant à cela puisque l'algorithme $\text{JBD}_{\text{Grad}_{\text{O,R}}}$ sur lequel elle est fondée était déjà le plus performant des quatre algorithmes.

4.5 Discussion & conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons introduit deux nouveaux détecteurs de points utiles et de nouvelles approches permettant de résoudre le problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés et/ou convolutifs sur-déterminés de sources. Les différentes approches proposées combinent généralement un algorithme de (bloc) diagonalisation conjointe à un détecteur de points utiles permettant de construire l'ensemble des matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement.

Nous avons présenté, dans un premier temps, deux approches en contexte instantané. La première approche est basée sur l'utilisation du problème aux valeurs propres généralisées formulé à partir de deux matrices issues de RTFSQ ou bien de STFSQ. Tandis que la deuxième approche consiste à diagonaliser conjointement un ensemble de matrices t - f par un algorithme de DC sans contrainte d'unitarité.

Dans un second temps, nous avons présenté des approches suivant la même logique que celles proposées en instantané. Ces approches exploitent la cohérence temporelle des sources, ou des propriétés propres aux signaux cyclo-stationnaires ou la diversité temps-fréquence dans le cas de signaux non-stationnaires. À l'aide des simulations informatiques, nous avons montré l'efficacité des approches proposées. Nous les avons également comparé à des approches basées sur un algorithme de (bloc) diagonalisation conjointe sous contrainte unitaire.

L'avantage des approches proposées est qu'elles sont générales : elles permettent de traiter le cas des sources réelles ou complexes, stationnaires, cyclo-stationnaires ou non stationnaires, corrélées ou décorréliés et le système mélangeant ces sources peut être réel ou complexe, unitaire ou non-unitaire.

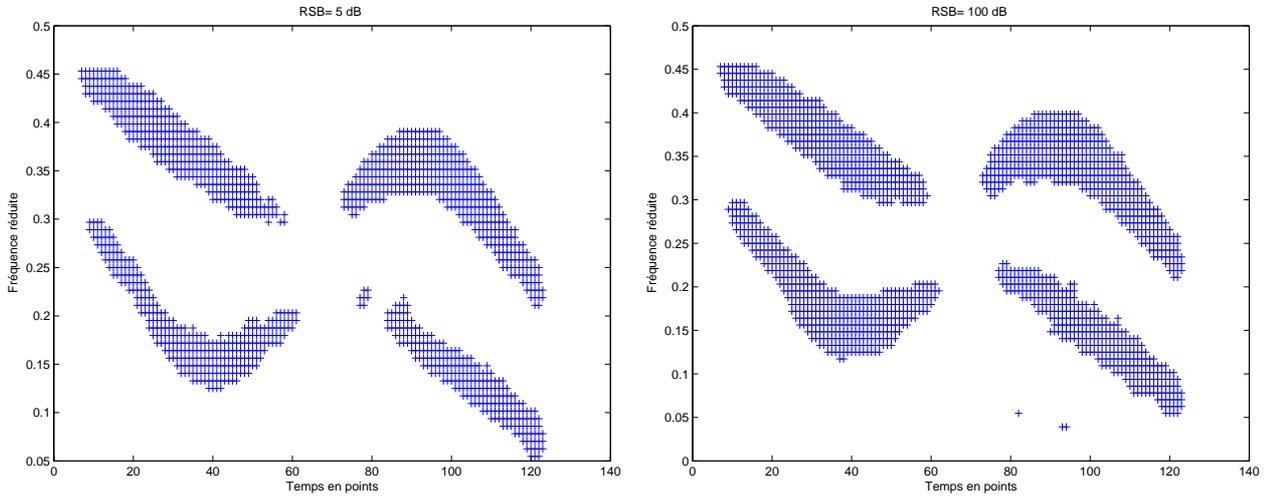


FIGURE 4.16 – Points temps-fréquence sélectionnés à l’aide du détecteur C_{Conv} . A gauche : $RSB = 5$ dB ; à droite : $RSB = 100$ dB.

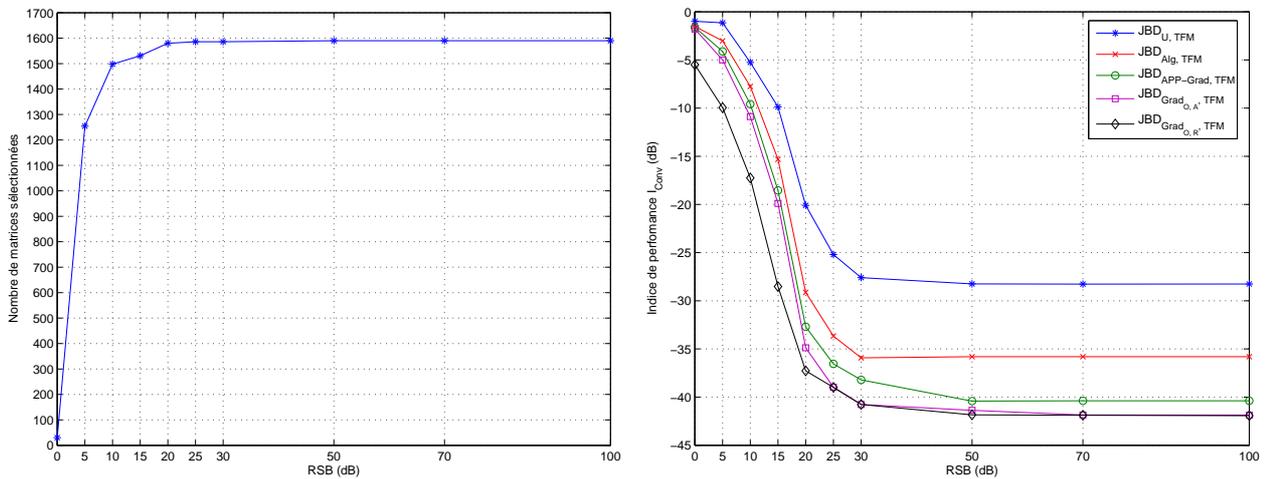


FIGURE 4.17 – A gauche : Nombre de matrices temps-fréquence sélectionnées à l’aide du détecteur C_{Conv} en fonction du RSB . A droite : indice de performance I_{Conv} obtenu au moyen des différentes méthodes $JBD_{Alg,TFM}$, $JBD_{App-grad,TFM}$, $JBD_{Grad_{O,A},TFM}$, $JBD_{Grad_{O,R},TFM}$ et $JBD_{U,TFM}$ en fonction du RSB .

Conclusions & perspectives de recherche

Conclusions

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés et convolutifs de sources. De nombreuses approches ont été développées et étudiées : elles dépendent de la nature des signaux sources considérés. La plupart des approches proposées combinent des algorithmes de (bloc-) diagonalisation conjointe (unitaires ou non) à des détecteurs (automatiques) de points utiles permettant la construction de l'ensemble des matrices à (bloc) diagonaliser conjointement.

Comme nous avons pu le constater au niveau de l'état de l'art en matière d'approches en séparation aveugle de sources, la plupart des algorithmes classiquement suggérés passent par une étape préalable de blanchiment des données (ou normalisation d'ordre deux). En outre, nous avons montré dans le premier chapitre que cette étape influence sur les performances de la séparation. Nous avons en effet généralisé la limite minimale de la séparation introduite dans [61] au nouvel indice de performance proposé dans cette thèse afin de mesurer la qualité de la séparation en contexte convolutif (en instantané cet indice n'est rien d'autre que celui introduit dans [86]). La plupart des algorithmes de SAS reposent généralement sur des hypothèses d'indépendance et de stationnarité des sources. Dans cette thèse, notre objectif était de s'affranchir d'hypothèses aussi fortes, et notamment de pouvoir nous affranchir de l'étape de blanchiment afin de pouvoir aborder le cas de mélanges convolutifs de sources corrélées. Ceci nous a conduit à établir deux nouveaux détecteurs des points utiles opérant sur données non blanchies et à développer de nouveaux algorithmes de BDC sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée.

Nous avons donc proposé dans un premier temps plusieurs nouveaux algorithmes de BDC opérant sur des ensembles de matrices aussi bien réelles que complexes. Tous sont des algorithmes itératifs passant par l'optimisation d'une fonction de coût quadratique. Le premier, baptisé JBD_{Alg} , utilise un schéma d'optimisation de type algébrique. Il possède l'avantage d'être rapide et il ne nécessite pas que les matrices à bloc-diagonaliser conjointement soient à symétrie hermitienne. Cependant, les matrices de l'ensemble considérées doivent quand même être supposées définies positives.

Pour s'affranchir de cette dernière hypothèse, nous avons proposé trois autres algorithmes basés sur des approches de type gradient. Le premier, baptisé $\text{JBD}_{\text{App-Grad}}$, est basé sur une approche de type gradient à pas optimal, mais une approximation est faite au niveau du calcul du gradient matriciel (nous imposons une contrainte de zéro bloc-diagonalité sur la nouvelle matrice recherchée). Ce problème a ensuite été résolu conduisant à l'écriture de quatre nouveaux algorithmes nommés $\text{JBD}_{\text{Grad}_A}$ $\text{JBD}_{\text{Grad}_R}$ (pour les versions à pas fixe) et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,A}}$ et $\text{JBD}_{\text{Grad}_{O,R}}$ (pour les versions à pas optimal). Deux utilisent une approche de type gradient et deux reposent sur une variante : le gradient relatif. Les versions à pas optimal ont pour avantage d'accélérer la vitesse de convergence

des algorithmes. Les deux algorithmes reposant sur une approche de type gradient relatif sont plus stables que les autres algorithmes car la règle d'adaptation assure alors l'inversibilité de la matrice recherchée (lorsque l'on travaille à pas d'adaptation suffisamment petit). Tous ces algorithmes de BDC peuvent également être utilisés afin de résoudre le problème de la DC.

Dans un second temps, nous avons élaboré deux détecteurs de points utiles permettant de construire l'ensemble des matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. Le premier détecteur concerne la sélection de matrices correspondant à des matrices diagonales (de rang un) et le deuxième détecteur est une généralisation du premier au cas d'un modèle convolutif (détection de matrices bloc-diagonales, avec un seul bloc non nul sur la diagonale). Ces deux détecteurs possèdent l'avantage d'être généraux du fait qu'ils opèrent sur données non blanchies et qu'ils n'imposent aucune contrainte particulière sur les matrices considérées (matrices réelles ou à symétrie hermitienne ou inversibles, etc...).

Enfin, la combinaison des algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe non unitaires proposés avec l'un ou l'autre des deux détecteurs de matrices particulières nous a permis de concevoir de nouvelles méthodes de séparation aveugles de mélanges linéaires instantanés et convolutifs sur-déterminés de sources. Les sources que nous traitons peuvent être réelles ou complexes, stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires. L'hypothèse de décorrélation n'est nécessaire que pour une seule des approches que nous suggérons, en l'occurrence celle qui utilise la fonction de corrélation moyenne et que nous avons baptisé $\text{JBD}_{\text{Conv,CM}}$. Toutes les autres approches que nous avons développées permettent d'aborder le cas de sources corrélées.

Perspectives de recherche

Systèmes de mélanges linéaires convolutifs sous-déterminés

Il s'agit de considérer le cas où le nombre de capteurs est inférieur au nombre de sources ($m < n$). Ce cas a déjà été traité en contexte instantané dans [61], [101] et [79] en utilisant un détecteur de points utiles consistant à sélectionner des matrices de rang un. Nous souhaitons généraliser ces méthodes au cas des mélanges linéaires convolutifs sous-déterminés de sources grâce au détecteur que nous avons développé.

Les algorithmes de BDC appliqués à d'autres domaines

Il a été déjà démontré que le problème de l'estimation des directions d'arrivées en traitement d'antenne peut être résolu au moyen d'un algorithme de BDC unitaire [9][10]. Notre prochain objectif consiste à introduire nos algorithmes non unitaires dans certaines méthodes de traitement d'antenne (Music temps-fréquence, etc...) puis à comparer les méthodes résultantes aux méthodes fondées sur des algorithmes sous contraintes unitaires. L'idée étant là encore de mieux prendre en compte une éventuelle corrélation entre les signaux (du fait des multi-trajets), cas rarement traité en traitement d'antenne. Un autre objectif est d'élargir le champ des applications de ce type d'algorithmes.

Approches de SAS basées sur les spectres temps-multifréquence spatiaux quadratiques

En parallèle, nous allons essayer de généraliser aux ordres supérieurs les approches de SAS développées afin de les rendre plus robustes vis-à-vis d'éventuels bruits gaussiens additifs. Ceci se fera en étendant nos résultats en utilisant non plus de simples spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques mais des spectres temps-multifréquence spatiaux quadratiques fondés sur les cumulants d'ordre quatre.

Liste de publications

Revue internationale avec comité de lecture (2 + 1 en soumission + 2 en préparation) :

- [1] L. Giulieri, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices for source separation", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 12, n°5, pp. 415-418, May 2005.
- [2] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, E. Moreau and A. Adib "A non unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, n°11, pp. 860-863, November 2007.
- [3s] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine "Blind separation of FIR convolutive sources mixtures using gradient based joint block diagonalization algorithms", soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*.
- [4p] "Blind separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources using approximated gradient based joint block diagonalization algorithms", en préparation pour *Eurasip journal on Applied Signal Processing*.
- [5p] "Fast joint block diagonalization algorithms based on the Levenberg-Marquardt method", en préparation pour *IEEE Signal Processing Letters*.

Conférences internationales avec actes et comité de lecture (8) :

- [6] H. Ghennioui, A. Adib and D. Aboutajdine, "A Symmetric Pencil Approach to Blind Separation of Non-Orthogonal Mixture of Sources based on Time-Frequency Representations", in Proc. *ICMS'05, AMSE'05-T2-118*, Marrakech , Morocco, pp. 22-24, November 2005.
- [7] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, "Non unitary joint block diagonalization of complex matrices using a gradient approach", in Proc. *Independent Component Analysis and Signal Separation (ICA'07)*, in Springer-Verlag Berlin Heidelberg, editor, Proceeding of ICA, LNCS 4666, London, UK, pp 193-200, September 2007.
- [8] H. Ghennioui, E. M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib and E. Moreau, "An algebraic non orthogonal joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources", in Proc. *Independent Component Analysis and Signal Separation (ICA'07)*, in Springer-Verlag Berlin Heidelberg, editor, Proceeding of ICA, LNCS 4666, London, UK, pp 201-208, September 2007.
- [9] H. Ghennioui, E. M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib et E. Moreau, "Une nouvelle méthode sans blanchiment pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources basée sur l'utilisation

de distributions temps-fréquence spatiales quadratiques”, dans les Proc. du *21ème colloque GRETSI*, pp. 465-468, Troyes, France, Septembre 2007.

[10] E. M. Fadaili, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau et A. Adib, “Un nouvel algorithme de bloc diagonalisation conjointe pour la séparation de sources en mélanges convolutifs”, dans les Proc. du *21ème colloque GRETSI*, pp. 1005-1008, Troyes, France, Septembre 2007.

[11] H. Ghennioui, S. Rhioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, “Blind MIMO equalization of cyclo-stationary signals using a non-unitary joint block diagonalization algorithm”, in Proc. *IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS'2007)*, pp. 1135-1138, Marrakech, Morocco, December 2007.

[12] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, “Two new gradient based non-unitary joint block-diagonalization algorithms”, accepted to *the VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO'08)*, June 2008.

[13] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, “A novel approach based on non-unitary joint block-diagonalization for the blind MIMO equalization of cyclo-stationary signals”, accepted to *the VIII European Signal Processing Conference (EUSIPCO'08)*, June 2008.

Conférences nationales avec actes et comité de lecture (2) :

[14] H. Ghennioui, A. Adib, N. Thirion-Moreau, E. Moreau and D. Aboutajdine, “Séparation Aveugle de Mélange Linéaires de Sources Basée sur les Représentations Temps-Fréquence Spatiales Quadratiques”, Workshop sur les Technologies de l'Information et de la Communication (*WOTIC'05*), pp. 46, Kenitra, Maroc, Juin 2005.

[15] H. Ghennioui, A. Adib, N. Thirion-Moreau, E. Moreau and D. Aboutajdine, “Séparation aveugle de sources basée sur la bloc-diagonalisation conjointe non-unitaire de matrices issues de transformées spatiales quadratiques”, Workshop sur les Technologies de l'Information et de la Communication (*WOTIC'07*), Rabat, Maroc, Juillet 2007.

Journées scientifiques (5+1 en préparation) :

[16] H. Ghennioui, A. Adib et D. Aboutajdine, “Séparation Aveugle de Mélange Non-Orthogonal de Sources basée sur les Transformées Temps-Fréquence Spatiales Quadratiques”, dans les Proc. de la *3èmes Journées Annuelles d'Informatique (JAI'05)*, pp. 69-71, Oujda, Maroc, May 2005.

[17] H. Ghennioui, “Séparation Aveugle de Mélanges Linéaires de Sources basée sur les Transformées Temps-Fréquence”, Journée Scientifique (*SAS'05*), Faculté des Sciences de Rabat, Maroc, 26 Avril 2006.

[18] H. Ghennioui, “Séparation Aveugle de Sources dans le cadre des Mélanges Linéaires et son Application aux Traitement de Parole et aux Télécommunications Mobiles”, École Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes, Rabat, Maroc, 18 Mai 2006.

[19] H. Ghennioui, “Séparation Aveugle de Sources dans le cadre des Mélanges Linéaires et son Application aux Traitement de Parole et aux Télécommunications Mobiles”, École Nationale des Postes et Télécommunications, Rabat, Maroc, 6 Juillet 2007.

[20] H. Ghennioui, "Nouveaux algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe", premières journées doctorales LRIT 2008 (JDLRIT'08) Faculté des Sciences, Rabat, Maroc, 25-26 Avril 2008.

[21p] H. Ghennioui, "Séparation Aveugle de Sources dans le cadre des Mélanges Linéaires et son Application aux Traitement de Parole et aux Télécommunications Mobiles", École Mohammedia d'Ingénieurs, Rabat, Maroc, 18 Juillet 2008.

Bibliographie

- [1] A. Abed-Meraïm, K. Belouchrani and R. Leyman, *Time-frequency signal analysis and processing : a comprehensive reference*. Prentice-Hall, Editor : Boashash B., Oxford, UK, January 2003, ch. Blind source separation using time-frequency distributions.
- [2] K. Abed-Meraïm, P. Loubaton, and E. Moulines, "A subspace algorithm for certain blind identification problem," *in IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 2, pp. 499–511, March 1997.
- [3] K. Abed-Meraïm, Y. Xiang, J.-H. Manton, and Y. Hua, "Blind source separation using second-order cyclostationary statistics," *in IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 4, pp. 694–701, April 2001.
- [4] A. Adib, E. Moreau, and D. Aboutajdine, "Source separation contrasts using a reference signal," *in IEEE Signal Processing Letter*, vol. 11, no. 3, pp. 312–315, March 2004.
- [5] B. Azzerboni, G. Finocchio, M. Ipsale, F. La Foresta, M. McKeown, and F. Morabito, "Spatio-temporal analysis of surface electromyographic signals by independent component and time-scale analysis," *in Proc. second joint EMBS/BMES conference*, pp. 112–315, 2002.
- [6] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics," *in IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, February 1997.
- [7] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, M. G. Amin, and A. Zoubir, "Joint anti-diagonalization for blind source separation," *in Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'01)*, pp. 2196–2199, May 2001.
- [8] A. Belouchrani and M.-G. Amin, "Blind source separation based on time-frequency signal representations," *in IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 11, pp. 2888–2897, November 1998.
- [9] —, "Time-frequency MUSIC," *in IEEE Signal Processing Letter*, vol. 6, no. 5, pp. 109–110, May 1999.
- [10] A. Belouchrani, M.-G. Amin, and K. Abed-Meraïm, "Direction finding in correlated noise fields based on joint block-diagonalization of spatio-temporal correlation matrices," *in IEEE Signal Processing Letter*, vol. 4, no. 9, pp. 266–268, September 1997.
- [11] A. Belouchrani and A. Cichocki, "Robust whitening procedure in blind source separation context," *in IEEE Signal Processing Letter*, vol. 23, no. 24, pp. 2050–2051, November 2000.
- [12] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani, and Abed-Meraïm, "Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization," *in Proc. Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.

- [13] —, “Jacobi-like algorithm for blind signal separation of convolutive mixtures,” in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 37, no. 16, pp. 1049–1050, August 2001.
- [14] J.-W. Brewer, “Kronecker products and matrix calculus in system theory,” in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 25, no. 9, pp. 772–781, November 1978.
- [15] V. Capdevielle, “Séparation de sources large bande à l’aide des moments d’ordre supérieur,” Ph.D. dissertation, INP Grenoble, France, 1995.
- [16] J.-F. Cardoso, “On the performance of orthogonal sources separation algorithms,” in *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO’94)*, pp. 776–779, September 1994.
- [17] J.-F. Cardoso and B. Laheld, “Equivariant adaptative source separation,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 12, pp. 3017–3030, December 1996.
- [18] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non-gaussian signals,” in *IEE Proceedings-F*, vol. 40, no. 6, pp. 362–370, 1993.
- [19] —, “Jacobi angles for simultaneous diagonalization,” in *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 17, no. 1, pp. 161–164, January 1996.
- [20] M. Castella, J.-C. Pesquet, and A.-P. Petropulu, “A family of frequency and time domain contrasts for blind separation of convolutive mixtures of temporally dependent signals,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 1, pp. 107–120, January 2005.
- [21] G. Chabriel, J. Barrère, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, “Algebraic joint zero-diagonalization and blind source separation,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 3, pp. 980–989, March 2008.
- [22] C. Chang, A. Ding, A.-F. Yau, and F.-H.-Y. Chan, “A Matrix-Pencil Approach to Blind Separation of Colored Nonstationary Signals,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 900–907, March 2000.
- [23] N. Charkani, “Séparation auto-adaptative de sources pour les mélanges convolutifs. Application à la téléphonie mains-libres dans les voitures,” Ph.D. dissertation, INP Grenoble, Novembre 1996.
- [24] S. Choi, A. Cichocki, and S.-I. Amari, “Two spatio-temporal decorrelation learning algorithms and their application to multichannel blind deconvolution,” in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP’99)*, pp. 1085–1088, March 1999.
- [25] S. Choi, “A symmetric-definite pencil approach to source separation,” in *Proc. International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC’02)*, July 2002.
- [26] S. Choi, A. Cichocki, and A. Blouchrani, “Blind separation of second-order nonstationary and temporally colored sources,” in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 444–447, 2001.
- [27] —, “Second order nonstationary source separation,” in *Journal of VLSI Signal Processing*, pp. 93–104, 2002.
- [28] P. Comon, “Independant component analysis, a new concept ?” in *Signal Processing*, vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [29] —, “Contrasts for multichannel blind deconvolution,” in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 3, no. 7, pp. 209–211, July 1996.
- [30] P. Comon and C. Jutten, *Séparation de sources*, Tome I et II, *Traité IC2*, Hermès, P. Comon and C. Jutten Editors, 2007.

- [31] P. Comon and E. Moreau, "Blind MIMO equalization and joint diagonalization criteria," in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'01)*, vol. 5, May 2001.
- [32] R. Cristescu, T. Ristaniemi, J. Joutsensalo, and J. Karhunen, "Blind Separation of Convolved Mixtures for CDMA Systems," in *Proc. X European Signal Processing Conference (EUSIP-CO'00)*, vol. 5, pp. 619–622, September 2000.
- [33] A.-V. Dandawaté and G.-B. Giannakis, "Statistical tests for presence of cyclostationarity," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 2355–2369, September 1995.
- [34] L. De Lathauwer, "Signal processing based on multilinear algebra," Ph.D. dissertation, Université catholique de Leuven, Belgique, September 1997.
- [35] L. De Lathauwer, C. D., B. De Moor, and J. Vandewalle, "Fetal electrocardiogram extraction by source subspace separation," in *Proc. IEEE SP / Athos workshop*, pp. 134–138, June 1995.
- [36] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Foetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation," in *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 47, no. 5, pp. 567–572, May 2000.
- [37] L. De Lathauwer, C. Févotte, B. De Moor, and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for block diagonalization in blind identification," in *Proc. 23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, pp. 155–162, May 2002.
- [38] S. Dégerine, "Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés," in *XVIIème colloque GRETSI*, pp. 311–314, Septembre 2001.
- [39] Y. Deville, "Panorama des applications biomédicales des méthodes de séparation aveugle de sources," in *19ème colloque GRETSI*, pp. 31–34, Septembre 2003.
- [40] —, "Temporal and Time-Frequency Correlation-Based Blind Source Separation," in *Proc. International Workshop on Independent Component Analysis (ICA'03)*, pp. 1059–1064, April 2003.
- [41] N. Dimitri, "Méthodes PARAFAC généralisées pour l'extraction aveugle de sources. Application aux systèmes DS-CDMA," Ph.D. dissertation, Université de Cergy-Pontoise, France, 2007.
- [42] E.-M. Fadaili, "Décompositions matricielles conjointes et séparation aveugle de sources," Ph.D. dissertation, Université de Toulon et du Var, France, Juillet 2006.
- [43] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, "Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes," in *20ème Colloque GRETSI*, Septembre 2005.
- [44] —, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 5, pp. 1673–1687, May 2007.
- [45] A. Ferréol and P. Chevalier, "Higher order blind source separation using cyclostationarity property of the signals," in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'97)*, April 1997.
- [46] A. Ferréol, P. Chevalier, and L. Albera, "On the behavior of current second and higher order blind source separation methods for cyclostationary sources - Application to AM, FSK, CPFSK and deterministic sources," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 6, pp. 1712–1725, June 2000.
- [47] —, "Second-order blind separation of first- and second-order cyclostationary sources - Application to AM, FSK, CPFSK and deterministic sources," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 4, pp. 845–861, April 2004.

- [48] —, “Fourth order blind identification of underdetermined mixtures of sources (FOBIUM),” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1640–1653, May 2005.
- [49] C. Févotte, “Approche temps-fréquence pour la séparation aveugle de sources non-stationnaires,” Ph.D. dissertation, Université de Nantes, France, Octobre 2003.
- [50] C. Févotte and C. Doncarli, “A unified presentation of blind separation methods for convolutive mixtures using block-diagonalization,” in *Proc. Independent Component Analysis (ICA’03)*, pp. 349–354, April 2003.
- [51] —, “Two contributions to blind source separation using time-frequency distributions,” in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 11, no. 3, pp. 386–389, March 2004.
- [52] C. Févotte and F.-J. Theis, “Pivot Selection Strategies In Jacobi Joint Block-Diagonalization,” in *Proc. Independent Component Analysis (ICA’07)*, pp. 177–184, September 2007.
- [53] P. Flandrin, *Temps-fréquence*. Edition Hermès, collection traitement du signal, Paris, 2^{ème} édition, 1998.
- [54] P. Gao, E.-C. Chang, and L. Wyse, “Blind separation of foetal ECG from single mixture using SVD and ICA,” in *Proc. Joint Conference of the 4th International Conference on Information, Communications and Signal Processing, and the 4th Pacific Rim Conference on Multimedia (ICICS-PCM’03)*, vol. 3, pp. 1418–1422, December 2003.
- [55] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib, and E. Moreau, “An Algebraic Non Orthogonal Joint Block Diagonalization Algorithm for Blind Separation of Convolutive Mixtures of Sources,” in *Proc. Independent Component Analysis (ICA’07)*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, vol. 4666, pp. 193–200, September 2007.
- [56] —, “A non-unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources,” in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 14, no. 11, pp. 860–863, November 2007.
- [57] —, “Une nouvelle méthode sans blanchiment pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources basée sur l’utilisation de distributions temps-fréquence spatiales quadratiques,” in *21ème Colloque GRETSI*, Septembre 2007.
- [58] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, D. Aboutajdine, and A. Adib, “Two new gradient based non-unitary joint block-diagonalization algorithms.”
- [59] —, “Blind separation of FIR convolutive sources mixtures using gradient based joint block diagonalization algorithms,” in submitted to *IEEE Transactions on Signal Processing*, April 2008.
- [60] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib, and D. Aboutajdine, “Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach,” in *Proc. Independent Component Analysis (ICA’07)*, Lecture Notes in Computer Science, Springer, vol. 4666, pp. 201–208, September 2007.
- [61] L. Giulieri, “Séparation aveugle de sources basée sur l’utilisation des transformées spatiales quadratiques,” Ph.D. dissertation, Université de Toulon et du Var, France, Décembre 2003.
- [62] L. Giulieri, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, “Non orthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices for sources separation,” in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 12, no. 5, pp. 415–418, May 2005.
- [63] L. Giulieri, N. Thirion-Moreau, and P.-Y. Arquès, “Blind sources separation using bilinear and quadratic time-frequency representations,” in *Proc. International Conference on Independent Component Analysis (ICA’01)*, pp. 486–491, December 2001.

- [64] ———, “Blind sources separation based on quadratic time-frequency representations : a method without pre-whitening,” in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'03)*, vol. V, pp. 289–292, April 2003.
- [65] G.-H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [66] A. Gorokhov and P. Loubaton, “Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources,” in *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, vol. 44, no. 9, pp. 813–820, September 1997.
- [67] J. Héroult and B. Ans, “Réseaux de neurones à synapses modifiables : décodage de messages sensoriels composite par apprentissage non supervisé et permanent,” in *Compte-rendu de l'Académie des Sciences, Paris*, vol. t. 299, série 3, no. 13, pp. 525–528, 1984.
- [68] J. Héroult, C. Jutten, and B. Ans, “Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé,” in *Colloque GRETSI*, pp. 1017–1022, Mai 1985.
- [69] A. Hjørungnes and D. Gesbert, “Complex-valued matrix differentiation : techniques and key results,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2740–2746, June 2007.
- [70] F. Hlawatsh and G.-F. Boudreaux-Bartels, “Linear and quadratic time-frequency signal representations,” in *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 21–67, April 1992.
- [71] A. Holobar, C. Févotte, C. Doncarli, and D. Zazula, “Single autoterms separation based on bilinear timefrequency representations,” in *Proc. European Signal Processing Conference (EU-SIPCO'02)*, pp. 565–568, September 2002.
- [72] Y. Inouye, “Criteria for Blind Deconvolution of Multichannel Linear Time-Invariant Systems,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 12, pp. 3432–3436, December 1998.
- [73] A. Jallon, A. Chevreuil, P. Loubaton, and P. Chevalier, “Separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources : a contrast function based approach,” in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, pp. 434–444, February 1997.
- [74] M. Joho, “A systematic approach to adaptive algorithms for multichannel system identification, inverse modeling and blind identification,” Ph.D. dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, December 2000.
- [75] M. Joho and K. Rahbar, “Joint diagonalization of correlation matrices using Newton methods with application to blind signal separation,” in *Proc. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop SAM*, pp. 403–407, 2002.
- [76] T. Jung, S. Makeig, T. Lee, M. McKeown, G. Brown, A. Bell, and T. Sejnowski, “Independent component analysis of biomedical signals,” in *Proc. Second International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation*, pp. 633–644, September 2000.
- [77] E. Klaiman, M. A. Goldenberg, L. sous la direction Bronstein, and M. Zibulevsky, *Blind Separation of Sources in functional MRI sequences*, TECHNION, Israel Institute of Technology, Department of Electrical Engineering The Vision Research and Image Science Laboratory, July 2002.
- [78] D. Knezevic, “Blind Source Separation for Signal Processing Applications,” Ph.D. dissertation, University of Western, Australia, 2004.
- [79] N. Linh-Trung, A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, and B. Boashash, *Time-frequency signal analysis and processing : a comprehensive reference*. Prentice-Hall, Editor : B. Boashash, Oxford, UK, January 2003, ch. 8.5 : Undetermined blind sources separation for FM-like signals, pp. 3357–3366.

- [80] R. Liu and Y. Inouye, “Blind Equalization of MIMO-FIR Channels Driven by White but Higher Order Colored Source Signals,” *in* *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, no. 5, pp. 1206–1214, May 2002.
- [81] S. Makeig, T. Jung, A. Bell, and T. Sejnowski, “Independent component analysis of electroencephalographic data,” *in* *Advances in neural information processing systems*, vol. 8, pp. 145–151, 1996.
- [82] A. Mansour, “Contribution à la séparation aveugle de sources,” Ph.D. dissertation, INP de Grenoble, France, Janvier 1997.
- [83] A. Mansour, C. Jutten, and P. Loubaton, “Adaptive subspace algorithm for blind separation of independent sources in convolutive mixture,” *in* *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, pp. 583–586, March 2000.
- [84] M. Mckeown, S. Makeig, G. Brown, T. Jung, S. Kindermann, A. Bell, and T. Sejnowski, “Analysis of fMRI data by blind separation into independent spatial components,” *in* *Human Brain Mapping*, vol. 6, no. 53, pp. 160–188, 1998.
- [85] N. Mitianoudis and M. Davies, “Audio source separation of convolutive mixtures,” *in* *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 11, no. 5, pp. 489–497, September 2003.
- [86] E. Moreau, “A generalization of joint diagonalization criteria for source separation,” *in* *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, March 2001.
- [87] E. Moreau and J.-C. Pesquet, “Generalized contrasts for multichannel blind deconvolution of linear systems,” *in* *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 4, no. 6, pp. 182–183, June 1997.
- [88] E. Moreau and N. Thirion-Moreau, “Non Symmetrical Contrasts for Source Separation,” *in* *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 8, pp. 2241–2252, August 1999.
- [89] R. Mukai, S. Araki, and S. Makino, “Separation and dereverberation performance of frequency domain blind source separation,” *in* *Proc. Independent Component Analysis (ICA '01)*, pp. 230–235, December 2001.
- [90] N. Murata, S. Ikeda, and A. Ziehe, “An approach to blind source separation based on temporal structure of speech signals,” Riken Brain Science Institute, Technical Report 98-2, April 1998.
- [91] H.-L. Nguyen Thi, “Separation aveugle de sources à bande large dans un mélange convolutif,” Ph.D. dissertation, INP Grenoble, France, 1993.
- [92] L. Nguyen-Thi, C. Jutten, and J. Caelen, “Speech enhancement : Analysis and comparison of methods in various real situations,” *in* *In J. Vandewalle, R. Boite, M. Moonen, and A. Oosterlinck, editors, Signal Processing VI, Theories and Applications*, Elsevier, Ed., pp. 303–306, August 1992.
- [93] T. Nishikawa, H. Saruwatari, K. Shikano, and S. Makino, “Multistage ICA for blind source separation of real acoustic convolutive mixture.” *in* *Proc. Independent Component Analysis (ICA '03)*, pp. 523–528, April 2003.
- [94] L. Parra and C. Spence, “Convolutive blind source separation of non-stationary sources,” *in* *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 320–327, May 2000.
- [95] K.-B. Petersen and M.-S. Pedersen, *The matrix cookbook*, <http://matrixcookbook.com>, September 2007.
- [96] D.-T. Pham, “Joint approximate diagonalization of positive definite matrices.” *in* *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 22, no. 4, pp. 1136–1152, 2001.
- [97] —, “Blind Separation of Cyclostationary Sources Using Joint Block Approximate Diagonalization,” *in* *Proc. Independent Component Analysis (ICA '07)*, pp. 244–251, 2007.

- [98] D.-T. Pham and J.-F. Cardoso, "Blind separation of instantaneous mixtures of non-stationary sources," in *IEEE Transactions Signal Processing*, vol. 49, no. 9, pp. 1837–1848, September 2001.
- [99] K. Rahbar and J.-P. Reilly, "Blind source separation of convolved sources by joint approximate diagonalization of cross-spectral density matrices," in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 5, pp. 2745–2748, May 2001.
- [100] —, "A Frequency Domain Method for Blind Source Separation of Convulsive Audio Mixtures," in *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 832–844, September 2005.
- [101] S. Rhioui, "Nouvelles approches pour la séparation de sources," Ph.D. dissertation, Université de Toulon et du Var, France, Décembre 2006.
- [102] S. Rhioui, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, "Under-determined blind identification of cyclostationary signals with unknown cyclic frequencies," in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP)*, ICASSP, May 2006.
- [103] T. Ristaniemi, K. Raju, J. Karhunen, and E. Oja, "Inter-cell interference cancellation CDMA array systems by independent component analysis," in *Proc. Independent Component Analysis (ICA'03)*, pp. 739–744, April 2003.
- [104] P. Smaragdis, "Blind separation of convolved mixtures in the frequency domain," in *Neurocomputing*, vol. 22, pp. 21–34, 1998.
- [105] P.-H.-A. Sneath and R.-R. Sokal, *Numerical Taxonomy : The Principles and Practice of Numerical Classification*. Freeman, San Francisco, 1973.
- [106] H. Taigang, G. Clifford, and L. Tarassanko, "Application of ICA in removing artefacts from the ECG," in *Neural Processing Letter*, 2006.
- [107] N. Thirion-Moreau, "Temps-fréquence et séparation de sources dans les applications (physiques)," Habilitation, Université de Toulon et du Var, France, Septembre 2007.
- [108] N. Thirion-Moreau and P.-Y. Arquès, *Analyse temps-fréquence linéaires et quadratiques*, T. T. Techniques de l'ingénieur, Ed., 2002, vol. ART. 240.
- [109] N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Generalized criteria for blind multivariate signal equalization," in *IEEE Signal Processing Letter*, vol. 9, no. 2, pp. 72–74, February 2002.
- [110] A.-M. Tomé, "Separation of a mixture of signals using linear filtering and second order statistics," in *Proc. European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN'2002)*, pp. 307–312, 2002.
- [111] L. Tong, V. C. Soon, Y. F. Huang, and R. Liu, "Amuse : a new blind identification algorithm," in *Proc. IEEE ISCAS*, pp. 1784–1787, May 1990.
- [112] A.-J. Van Der Veen, "Joint diagonalization via subspace fitting techniques," in *Proc. International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'01)*, pp. 2773–2776, May 2001.
- [113] W. Wang, J.-A. Chambers, and S. Sanei, "A joint diagonalization method for convulsive blind separation of nonstationary sources in the frequency domain," in *Proc. Independent Component Analysis and Blind Sources Separation (ICA'03)*, pp. 939–944, April 2003.
- [114] A. Weinstein, M. Feder, and A.-V. Oppenheim, "Multi-Channel Signal Separation by Decorrelation," in *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 1, no. 4, pp. 405–413, October 1993.

- [115] A. Westner and V.-M. Bove, "Applying blind source separation and deconvolution to real-world acoustic environments," in *Proc. 106th of Audio Engineering Society*, 1999.
- [116] H.-C. Wu and J.-C. Principe, "Simultaneous diagonalization in the frequency domain (SDIF) for source separation," in *Proc. Independent Component Analysis and Blind Sources Separation (ICA '99)*, pp. 245–250, 1999.
- [117] A. Yeredor, "Non-orthogonal joint-diagonalization in the least squares sense with application in blind sources separation," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, July 2002.
- [118] A. Yeredor, A. Ziehe, and K.-R. Müller, "Approximate joint diagonalization using natural gradient approach," in *Proc. Independent Component Analysis and Blind Sources Separation (ICA '04)*, pp. 89–96, September 2004.
- [119] V. Zarzoso, A.-K. Nandi, and E. Bacharakis, "Noninvasive foetal electrocardiogram extraction : blind separation versus adaptative noise cancellation," in *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 48, no. 1, pp. 12–18, January 2001.
- [120] A. Ziehe, "Blind Source Separation based on Joint Diagonalization of Matrices with Applications in Biomedical Signal Processing," Ph.D. dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam, 2005.
- [121] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation," in *Journal of Machine Learning Research*, no. 5, pp. 801–818, July 2004.
- [122] A. Ziehe and K.-R. Müller, "TDESP- an efficient algorithm for blind separation using time structure," in *Proc. International Conference on Artificial Neural Networks*, pp. 675–680, 1998.

Annexe 1 : Deux types particuliers de décompositions matricielles conjointes : la diagonalisation conjointe et la zéro-diagonalisation conjointe

Le problème de la décomposition d'une matrice consiste à trouver une nouvelle base dans laquelle cette matrice soit le plus simple possible.

Nous présentons dans cette première annexe deux types particuliers de décompositions matricielles conjointes utilisés dans de nombreux domaines d'application en sciences et en ingénierie et notamment au niveau des problèmes de la séparation aveugle de mélanges linéaires instantanés de sources et du traitement d'antenne. Il s'agit du problème de la diagonalisation conjointe et de la zéro-diagonalisation conjointe d'un ensemble donné de matrices.

Diagonalisation conjointe d'un ensemble donné de matrices

Formulation du problème de la diagonalisation conjointe

Le problème de la DC d'un ensemble de matrices s'énonce de la manière suivante. Considérons un ensemble \mathcal{M} de N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$) matrices carrées $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, admettant toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^H \text{ ou } \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H, \forall i \in \{1, \dots, N_m\}, \quad (4.32)$$

avec : $\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} d_{i,11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{i,22} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{i,nn} \end{pmatrix}$, $\forall i \in \{1, \dots, N_m\}$ sont des matrices diagonales de dimen-

sions $n \times n$ et les $d_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ sont des scalaires. La matrice \mathbf{A} est une matrice de rang plein de dimension $m \times n$ ($m \geq n$) et la matrice \mathbf{B} est sa pseudo-inverse (ou inverse généralisée de Moore-Penrose).

Le problème de la DC consiste à estimer la matrice \mathbf{A} ou la matrice \mathbf{B} et ce uniquement à partir des matrices de l'ensemble \mathcal{M} .

On dit alors que \mathbf{B} diagonalise conjointement les matrices de l'ensemble \mathcal{M} , en d'autres termes \mathbf{B} est le "diagonaliseur conjoint" car c'est diagonaliseur commun à toutes les matrices \mathbf{M}_i , $i \in \{1, \dots, N_m\}$.

Principe de la diagonalisation conjointe

Commençons par introduire quelques notations utiles pour la suite des développements. Etant donnée une matrice \mathbf{C} carrée de taille $m \times m$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

on définit l'opérateur $\text{OffDiag}\{\cdot\}$ comme la matrice "zéro-diagonale" construite à partir des éléments hors diagonale de la matrice qui lui est passée en argument. Ainsi :

$$\text{OffDiag}\{\mathbf{C}\} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

et

$$\|\text{OffDiag}\{\mathbf{C}\}\|_F^2 = \text{tr}\{\text{OffDiag}\{\mathbf{C}\}^H \text{OffDiag}\{\mathbf{C}\}\} = \sum_{i \neq j} c_{ij}^2, \quad (4.35)$$

si $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius de la matrice en argument.

On définit également l'opérateur $\text{Diag}\{\cdot\}$ permettant d'extraire la matrice diagonale de la matrice passée en argument. Ainsi :

$$\text{Diag}\{\mathbf{C}\} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

La plupart des algorithmes que l'on trouve dans la littérature pour résoudre le problème de la DC d'un ensemble donné de matrices se ramènent à la minimisation de l'une ou l'autre des trois fonctions de coût suivantes :

$$\mathcal{C}_{dc}^{(1)}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (4.37)$$

$$\mathcal{C}_{dc}^{(2)}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \text{D}_{KL}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{C}_{dc}^{(3-1)}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\mathbf{M}_k - \mathbf{A}\mathbf{D}_k\mathbf{A}^H\|_F^2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}_{dc}^{(3-2)}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_k\|_F^2. \quad (4.39)$$

L'opérateur $\text{D}_{KL}\{\cdot\}$ représente la divergence de Kullback-Leibler (ou divergence K – L) qui est une mesure de dissimilarité définie de la manière suivante :

$$\text{D}_{KL}\{\mathbf{C}\} = \frac{1}{2} \{\log \det(\text{Diag}\{\mathbf{C}\}) - \log \det(\mathbf{C})\}, \quad (4.40)$$

La fonction de coût $\mathcal{C}_{dc}^{(1)}(\mathbf{B})$ a été utilisée par J.-F. Cardoso et A. Souloumiac dans [18] et [19] sous la contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{I}$. La minimisation de cette fonction peut être réalisée par une simple extension de la méthode de Jacobi [65]. Dans le cas où la matrice \mathbf{B} n'est plus nécessairement unitaire, la fonction de coût $\mathcal{C}_{dc}^{(1)}(\mathbf{B})$ a été également utilisée par M. Joho et K. Rahbar dans [75]. Ils ont proposé un algorithme itératif basé sur la méthode de Newton. E.-M. Fadaili et *al.* ont montré dans [44] que la minimisation de cette fonction de coût pouvait être réalisée au moyen d'une méthode d'optimisation algébrique. Dans [118], la minimisation est réalisée à l'aide d'un algorithme itératif utilisant le gradient naturel à pas optimal tandis que dans [121], la minimisation est réalisée en se ramenant à la résolution d'un problème des moindres carrés linéaires : une solution analytique est alors proposée. C'est D.-T. Pham qui a suggéré dans [96] d'exploiter la fonction de coût $\mathcal{C}_{dc}^{(2)}(\mathbf{B})$ pour diagonaliser conjointement un ensemble de matrices définies positives. $\mathcal{C}_{dc}^{(2)}(\mathbf{B})$ peut être vue comme l'information mutuelle gaussienne exprimée dans le domaine spectral. La fonction $\mathcal{C}_{dc}^{(3-1)}(\mathbf{A})$ a été utilisée par A.-J. Van Der Veen dans [112] et A. Yeredor dans [117]. Cette fonction de coût fait intervenir la matrice de mélange \mathbf{A} . S. Dégerine a proposé quant à lui dans [38] de minimiser plutôt la fonction $\mathcal{C}_{dc}^{(3-2)}(\mathbf{B})$ qui porte, elle, sur la matrice de séparation \mathbf{B} . A.-J. Van Der Veen optimise la fonction de coût $\mathcal{C}_{dc}^{(3-1)}(\mathbf{A})$ par la méthode de Gauss-Newton, tandis que A. Yeredor et S. Dégerine ont proposé une solution itérative alternant deux phases de minimisation, dans la première phase baptisée ACS (Alternating Columns Step), A. Yeredor minimise la fonction de coût par rapport à la matrice de mélange \mathbf{A} et S. Dégerine la minimise par rapport à la matrice de séparation \mathbf{B} . Dans la deuxième phase nommée DCS (Diagonal Centers Step), tous les deux minimisent la fonction de coût par rapport un ensemble de matrices diagonales.

Zéro-diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices

Formulation du problème de la zéro-diagonalisation conjointe

Le problème de la ZDC s'énonce de la manière suivante. Considérons un ensemble \mathcal{N} de N_m , $N_m \in \mathbb{N}^*$, matrices carrées $\mathbf{N}_i \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, admettant toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{A} \mathbf{Z}_i \mathbf{A}^H \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}_i = \mathbf{B} \mathbf{N}_i \mathbf{B}^H, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\}, \quad (4.41)$$

avec : $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_{i,12} & \dots & z_{i,1n} \\ z_{i,21} & 0 & \dots & z_{i,2n} \\ & \ddots & \ddots & \\ z_{i,n1} & \dots & z_{i,n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$, sont des matrices zéro-diagonales de dimensions $n \times n$

et les $z_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ sont des scalaires. La matrice \mathbf{A} est une matrice de rang plein de dimensions $m \times n$ ($m \geq n$) et la matrice \mathbf{B} est sa pseudo-inverse.

Comme son nom le laisse supposer, la ZDC d'un ensemble donné de matrices consiste à trouver un "zéro-diagonaliseur" commun à toutes les matrices de l'ensemble \mathcal{N} (encore appelé zéro-diagonaliseur conjoint), permettant d'annuler les termes diagonaux de ces matrices.

Principe de la zéro-diagonalisation conjointe

L'objectif de la ZDC est alors de chercher une matrice \mathbf{A} ou une matrice \mathbf{B} (et éventuellement les matrices zéro-diagonales) permettant de minimiser la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{C}_{zdc}^{(1)}(\mathbf{B}) = - \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B} \mathbf{N}_k \mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (4.42)$$

ou bien de maximiser la quantité suivante :

$$- \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{Diag}\{\mathbf{B}\mathbf{N}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2.$$

Là encore, le cas unitaire a d'abord été traité dans [7] avant que ne soient proposées trois solutions non unitaires dans [43][44][21].

Nous signalons enfin qu'il a également été proposé d'optimiser une combinaison linéaire entre les deux fonctions de coût $\mathcal{C}_{dc}^{(1)}(\mathbf{B})$ et $\mathcal{C}_{zdc}^{(1)}(\mathbf{B})$ afin de diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{M} et zéro-diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{N} simultanément (les tailles de \mathcal{M} et \mathcal{N} peuvent être différentes). Nous cherchons alors à minimiser la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{C}_{dc,zdc}^{(1)}(\mathbf{B}) = \alpha \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2 - (1 - \alpha) \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}\mathbf{N}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (4.43)$$

avec α variable réelle comprise entre 0 et 1. On peut également chercher à maximiser la quantité suivante :

$$\alpha \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{Diag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2 - (1 - \alpha) \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{Diag}\{\mathbf{B}\mathbf{N}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2.$$

Pour davantage de détails, un panorama des différentes méthodes de DC et de ZDC est proposé au niveau de l'habilitation à diriger des recherches [107].

Annexe 2 : Calcul du gradient matriciel & expression des coefficients du polynôme d'ordre 4 obtenu dans le calcul du pas optimal

A) Gradient matriciel approché de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$

Soient $\mathbf{D}_i^{(m)}$ et $\mathbf{E}_i^{(m)}$ les deux matrices respectivement bloc-diagonale et zéro-bloc-diagonale construites à partir de la matrice $\mathbf{M}_i^{(m)}$ ($\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}$ et $\mathbf{E}_i^{(m)} = \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\}$ et $\mathbf{D}_i^{(m)} = \text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\}$). Comme \mathbf{W} est, elle aussi, une matrice zéro bloc-diagonale, la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$ peut donc s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \left\| \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{W}\mathbf{M}_i^{(m)}\} + \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} + \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\} \right. \\
&\quad \left. + \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{W}\mathbf{M}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \right\|_F^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N_m} \left\| \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H \right\|_F^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H)^H (\mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H) \right\} \tag{4.44}
\end{aligned}$$

où $\text{tr}\{\cdot\}$ désigne l'opérateur trace. En utilisant la propriété de linéarité de l'opérateur trace, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{E}_i^{(m)}\} + \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}(\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)})\} \\
&+ \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} + \text{tr}\{(\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H)\mathbf{E}_i^{(m)}\} \\
&+ \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} + \text{tr}\{\mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)}\} \\
&+ \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \\
&+ \text{tr}\{(\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H)\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \\
&+ \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H(\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)})\} \\
&+ \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{E}_i^{(m)}\} + \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

En supposant pour simplifier le calcul que les matrices considérées sont à symétrie hermitienne, la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W})$ peut alors être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{W}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{E}_i^{(m)} \right\} + 2\text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} + 2\text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \right\} \\ &+ \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H + \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \right\} \\ &+ 2\text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

En exploitant maintenant les propriétés suivantes [74] :

$$\text{tr}\{\mathbf{PQR}\} = \text{tr}\{\mathbf{RPQ}\} = \text{tr}\{\mathbf{QRP}\} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{PX}^H\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{P} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{PX}\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

$$d\text{tr}\{\mathbf{P}\} = \text{tr}\{d\mathbf{P}\} \quad (4.50)$$

$$d\text{tr}\{\mathbf{PX}^H \mathbf{QX}\} = \text{tr}\{\mathbf{P} d\mathbf{X}^H \mathbf{QX} + \mathbf{PX}^H \mathbf{Q} d\mathbf{X}\} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{PX}^H \mathbf{QX}\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{QXP} \quad (4.52)$$

où $d(\cdot)$ désigne l'opérateur de différenciation, le gradient de la fonction de coût $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ est :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)}) &= 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{bdc}(\mathbf{W}^{(m-1)})}{\partial \mathbf{W}^{(m-1)*}} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{N_m} 2\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + 2\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} \\ &+ \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{D}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)H} \\ &+ 2\mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} + 2\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + 2\mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \\ &+ \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

nous obtenons finalement le résultat donné au niveau de l'Eq. 3.19.

B) Gradient matriciel exact de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ & coefficients du polynôme d'ordre 4 impliqué dans le calcul du pas optimal

Pour calculer le gradient matriciel de la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ et les coefficients du polynôme d'ordre 4 impliqué dans le calcul du pas optimal, nous nous appuyons sur les propriétés suivantes [69][75][95] :

Considérant trois matrices carrées \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 et \mathbf{D}_3 de dimension $M \times M$ et deux matrices rectangulaires \mathbf{D}_4 ($M \times N$) et \mathbf{D}_5 ($N \times M$) et une matrice carrée ($N \times N$) \mathbf{D}_6 , on a :

\mathbf{P}_1 .

$$\begin{aligned} \|\text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r} \{\mathbf{D}_1\}\|_F^2 &= \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{D}_1\} \right)^H \text{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{D}_1\} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{D}_1^H \text{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{D}_1\} \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_2. \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1^T\}.$$

$$\mathbf{P}_3. \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1\} + \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_2\}.$$

$$\mathbf{P}_4. \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\} \Rightarrow \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\}.$$

$$\mathbf{P}'_4. \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_4\mathbf{D}_5\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_5\mathbf{D}_4\}.$$

$$\mathbf{P}_5. \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1^H \mathbf{D}_2\} = (\operatorname{vec}(\mathbf{D}_1))^H \operatorname{vec}(\mathbf{D}_2).$$

$$\mathbf{P}_6. \operatorname{vec} \left(\operatorname{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{D}_6\} \right) = \mathbf{T}_{\text{Boff}} \operatorname{vec}(\mathbf{D}_6).$$

$$\mathbf{P}_7. d(\mathbf{D}_1^H) = d(\mathbf{D}_1)^H.$$

$$\mathbf{P}_8. d(\mathbf{D}_1^*) = d(\mathbf{D}_1)^*.$$

$$\mathbf{P}_9. d(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) = d(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1d(\mathbf{D}_2).$$

$$\mathbf{P}_{10}. d(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) = d(\mathbf{D}_1) + d(\mathbf{D}_2).$$

$$\mathbf{P}_{11}. d(\operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1\}) = \operatorname{tr} \{d(\mathbf{D}_1)\}.$$

$$\mathbf{P}_{12}. d(\operatorname{vec}(\mathbf{D}_1)) = \operatorname{vec}(d(\mathbf{D}_1)).$$

$$\mathbf{P}_{13}. d(f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)) = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^H \mathbf{D}_2\} = \operatorname{tr} \{\mathbf{D}_1^T d\mathbf{Z} + \mathbf{D}_2^T d\mathbf{Z}^*\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{D}_1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*} = \mathbf{D}_2.$$

$$\mathbf{P}_{14}. \operatorname{vec}(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3) = \mathbf{D}_3^T \otimes \mathbf{D}_1 \operatorname{vec}(\mathbf{D}_2).$$

$$\mathbf{P}_{15}. (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2)^H = \mathbf{D}_1^H \otimes \mathbf{D}_2^H.$$

L'opérateur $\operatorname{vec}(\cdot)$ désigne l'opérateur de vectorisation défini au niveau de l'Eq. 3.39, l'opérateur $\operatorname{OffBdiag}_{(n)}\{\cdot\}$ représente l'opérateur de zéro bloc-diagonalité défini au niveau de l'Eq. 3.7 et la matrice \mathbf{T}_{Boff} désigne la matrice de transformation de dimension $N^2 \times N^2$ définie au niveau de l'Eq. 3.41 et \otimes désigne le produit de Kronecker.

1) Calcul du gradient matriciel de la fonction $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$

En utilisant la propriété \mathbf{P}_1 , la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ peut être écrite :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \operatorname{tr} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \operatorname{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\},$$

D'après les propriétés \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_9 , \mathbf{P}_{10} et \mathbf{P}_{11} , la matrice différentielle de la fonction de coût peut être obtenue comme :

$$d\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \operatorname{tr} \left\{ d \left((\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \operatorname{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(\mathbf{B}) + \mathcal{G}(\mathbf{B}), \quad (4.54)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \operatorname{tr} \left\{ d \left((\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \operatorname{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right\}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \operatorname{tr} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H d \left(\operatorname{OffBdiag}_{(n)} \{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Les propriétés $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}'_4, \mathbf{P}_7, \mathbf{P}_9, \mathbf{P}_8$ et \mathbf{P}_{12} impliquent que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H d\mathbf{B}^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} + \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d\mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \mathbf{B}^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T d\mathbf{B}^* \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T d\mathbf{B} \right\}. \end{aligned}$$

Utilisant maintenant les propriétés $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}'_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6, \mathbf{P}_8$ et \mathbf{P}_9 , nous trouvons que :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right)^H \text{vec} \left(d \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{T}_{\text{Boff}} \text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right)^H \text{vec} \left(d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{vec} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right)^H \text{vec} \left(d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right\}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{G}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T d\mathbf{B} \right\} + \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T d\mathbf{B}^* \right\}.$$

En remplaçant $\mathcal{F}(\mathbf{B})$ et $\mathcal{G}(\mathbf{B})$ dans l'Eq. 4.54 par les expressions que nous venons de trouver, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T + \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T \right) d\mathbf{B} \right\} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T + \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T \right) d\mathbf{B}^* \right\}. \end{aligned}$$

Nous faisons ensuite appel à la propriété \mathbf{P}_{13} pour obtenir les résultats finaux suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T. \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i. \end{aligned}$$

Et par conséquent, nous en déduisons le résultat du gradient matriciel donné au niveau de l'Eq. 3.30.

2) Expression des coefficients du polynôme d'ordre 4 impliqué dans le calcul du pas optimal

Utilisant les deux propriétés \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_5 , la fonction de coût $\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})$ peut être réécrite de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H))^H \text{vec}(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}). \quad (4.55)$$

D'après les propriétés \mathbf{P}_6 , \mathbf{P}_{14} et \mathbf{P}_{15} , nous trouvons que :

$$\mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{M}_i))^H \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B} \text{vec}(\mathbf{M}_i),$$

Introduisons les trois matrices \mathbf{P} , \mathbf{Q} et \mathbf{R} définies respectivement comme :

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}))^H + (\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}))^T \otimes \mathbf{B}^H, \quad (4.57)$$

et

$$\mathbf{R} = (\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}))^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B}))^H. \quad (4.58)$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{bdc}^{(m)}(\mathbf{B})) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H (\mathbf{P} - \mu \mathbf{Q} + \mu^2 \mathbf{R}) \mathbf{T}_{\text{Boff}} (\mathbf{P}^H - \mu \mathbf{Q}^H + \mu^2 \mathbf{R}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H \mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &\quad + \mu^2 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &\quad - \mu^3 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H (\mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H) \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &\quad + \mu^4 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec}(\mathbf{M}_i)^H \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H \text{vec}(\mathbf{M}_i) \\ &= a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + a_3 \mu^3 + a_4 \mu^4. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ce qui conduit finalement aux résultats donnés au niveau des Eq. (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35).

Annexe 3 : Quelques éléments de l'analyse temps-fréquence

Dans cette annexe, nous rappelons dans un premier temps quelques éléments de l'analyse de Fourier et de l'analyse temps-fréquence. Dans un second temps, nous présentons et démontrons quelques résultats analytiques : les calculs sont menés sur certaines transformées temps-fréquence quadratiques appliquées aux mêmes signaux synthétiques que ceux utilisés dans les simulations informatiques du quatrième chapitre. Dans un troisième temps, nous rappelons les propriétés importantes des transformées temps-fréquence spatiales quadratiques ainsi que celles des spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques. Certaines de ces propriétés ont été exploitées afin de concevoir les détecteurs de points temps-fréquence utiles (voir Annexe 4).

Outils mathématiques : spectres, spectres temps-fréquence et transformées temps-fréquence

Ce paragraphe a pour objectif de nous familiariser avec l'analyse temps-fréquence. Nous commencerons par montrer les limites de l'analyse de Fourier et celles de la transformée à court-terme TFCT dès lors qu'il s'agit d'analyser des signaux présentant une très forte non-stationnarité.

TF, TFCT et leurs limites

Un signal est le support physique d'une information. Pour extraire cette dernière du signal, il est nécessaire d'avoir recours à l'analyse de Fourier soit en utilisant le développement en série de Fourier pour les signaux périodiques, soit en appliquant la Transformée de Fourier (TF) pour les signaux non périodiques. La TF et son inverse (TFI pour TF Inverse) établissent la relation entre le domaine temporel (signal $x(t)$) et le domaine fréquentiel (spectre de Fourier $|X_x^{(f)}(\nu)|$) par :

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TF}} X_x^{(f)}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-i2\pi\nu t) dt. \quad (4.60)$$

$$X_x^{(f)}(\nu) \xleftrightarrow{\text{TFI}} x(t) = \int_{\mathbb{R}} X_x^{(f)}(\nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu. \quad (4.61)$$

Le spectre obtenu grâce au module de la TF permet d'extraire les informations pertinentes du signal sur toute sa durée. Cependant, on peut avoir de la redondance d'information. Pour supprimer l'information redondante, on applique la TF au "signal analytique" qui est complexe. En fait, pour tout signal réel $x(t)$, on peut associer le signal analytique complexe $x_a(t)$:

$$x_a(t) = x(t) + i\mathcal{H}\{x(t)\}. \quad (4.62)$$

$x_a(t)$ est appelé “signal analytique”, où $\mathcal{H}\{\cdot\}$ désigne la Transformée de Hilbert (TH) définie comme : $\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \text{VP} \left\{ \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \frac{1}{(t-\tau)} d\tau \right\}$. où $\text{VP}\{\cdot\}$ désigne la valeur principale de l'intégral passée en paramètre. Ainsi, la TF du signal analytique $x_a(t)$ associé au signal $x(t)$ est la suivante :

$$X_{x_a}^{(f)}(\nu) = X_x^{(f)}(\nu) + X_x^{(f)}(\nu) (-i \text{sign}(\nu)), \quad (4.63)$$

où $\text{sign}(\cdot)$ est la fonction signe définie par :

$$\text{sign}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \nu \geq 0 \\ -1 & \text{pour } \nu < 0 \end{cases} . \quad (4.64)$$

En d'autres termes,

$$X_{x_a}^{(f)}(\nu) = \begin{cases} 2X_x^{(f)}(\nu) & \text{pour } \nu \geq 0 \\ 0 & \text{pour } \nu < 0 \end{cases} .$$

En examinant la relation donnée au niveau de l'Eq. 4.60, on constate que la TF compare les signaux aux exponentielles éternelles en effectuant une opération de moyennage selon l'axe des temps. Elle est donc bien adaptée à l'étude des phénomènes dont les caractéristiques varient peu dans le temps, moins à celle de phénomènes transitoires, de durée brève.

Les inconvénients de l'analyse de Fourier sont en général :

- un manque de localisation temporelle. En effet, l'analyse de Fourier permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est à dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises.
- la TF n'est pas un outil adapté à l'étude des signaux dont la fréquence varie dans le temps (signaux non-stationnaires).

D'où la nécessité d'une analyse combinant à la fois le temps et la fréquence, à la manière d'une portée musicale. La solution consiste à calculer des spectres instantanés pour chaque pas temporel du signal. Les outils pour réaliser cette opération sont connus sous la terminologie d'analyse temps-fréquence. La TF ne peut s'appliquer qu'à l'analyse de signaux stationnaires. Si le signal à analyser est non-stationnaire, on peut utiliser la TFCT qui consiste à découper le signal en différentes plages ou fenêtres de longueur fixée puis à étudier chacune de ces plages séparément des autres au moyen d'une analyse de Fourier traditionnelle. Il s'agit donc d'une analyse de Fourier local. Elle présuppose que les non-stationnarités du signal sont lentes ou encore que le signal évolue peu sur la fenêtre d'étude. On va donc considérer :

$$X_x^{(fct)}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h^*(\tau - t) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau, \quad (4.65)$$

où h désigne une fenêtre d'analyse à court terme.

Du fait du principe d'incertitude d'Heisenberg, lors de l'utilisation de la TFCT, quand on améliore la résolution en temps, on détériore la résolution fréquentielle et réciproquement. C'est l'inconvénient majeur des transformées fenêtrées.

Remarquons finalement que la TFCT appartient à la classe des transformées temps-fréquence linéaires (TTFL) définie pour un signal $x(t)$ par :

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TTFL}} C_{Lx}(t, \nu; A) = \int_{\mathbb{R}} K(\theta; t, \nu) x(\theta) d\theta, \quad (4.66)$$

où $K(\theta; t, \nu)$ représente le noyau de la transformation permettant de déterminer des classes particulières de solutions possédant des propriétés spécifiques.

Le spectrogramme est construit comme le module au carré de la TFCT et les limitations théoriques au niveau de l'analyse de signaux par la TFCT ou par le spectrogramme sont de même nature que celles

de l'analyse de Fourier dont elles sont directement issues (allure de représentation liée au choix de la fenêtre laquelle détermine les résolutions fréquentielles et temporelles, ces résolutions ne peuvent être simultanément bonnes (il en résulte un compromis) et analyses peu adaptée à des non-stationnarités rapides).

Dans la suite, nous considérerons des signaux vectoriels et non plus scalaires.

Spectres temps-fréquence spatiaux bilinéaires et quadratiques, transformées temps-fréquence spatiales bilinéaires et quadratiques

Spectre temps-fréquence spatial bilinéaire et transformée temps-fréquence spatiale bilinéaire

Considérons un couple $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ de deux signaux (éventuellement analytiques), vectoriels, où $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ et $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$ aléatoires, réels ou complexes. Le spectre temps-fréquence spatial bilinéaire (STFSB) associé est défini de la façon suivante :

$$(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \xleftrightarrow{\text{STFSB}} \mathbf{D}_{\mathbf{xy}}(t, \nu; \mathbf{K}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta') \odot \mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (4.67)$$

où la fonction $\mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu)$ désigne le noyau de la transformation, \odot désigne le produit de Hadamard⁶ et $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta')$ représente la matrice de corrélation. Elle est définie pour un couple de signaux complexes $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ par : $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta') = \mathbf{E} \{ \mathbf{x}(\theta) \mathbf{y}^H(\theta') \}$ si $\mathbf{E} \{ \cdot \}$ désigne l'opérateur d'espérance mathématique. La matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta')$ s'écrit alors :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta') = \begin{pmatrix} R_{x_1 y_1}(\theta, \theta') & \dots & R_{x_1 y_n}(\theta, \theta') \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{x_n y_1}(\theta, \theta') & \dots & R_{x_n y_n}(\theta, \theta') \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

sachant que chacune des composantes $R_{x_i y_j}(\theta, \theta') = \mathbf{E} \{ x_i(\theta) y_j^*(\theta') \}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, représente l'inter-corrélation entre deux signaux scalaires $x_i(t)$ et $y_j(t)$. Le STFSB $\mathbf{D}_{\mathbf{xy}}(t, \nu; \mathbf{K})$ exprimé au niveau de l'Eq. 4.67 peut lui aussi être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xy}}(t, \nu; \mathbf{K}) = \begin{pmatrix} D_{x_1 y_1}(t, \nu; K_{11}) & \dots & D_{x_1 y_n}(t, \nu; K_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_n y_1}(t, \nu; K_{n1}) & \dots & D_{x_n y_n}(t, \nu; K_{nn}) \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

avec $D_{x_i y_j}(t, \nu; K_{ij})$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, est la transformée bilinéaire associée au couple de deux signaux scalaires $(x_i(t), y_j(t))$. Le spectre temps-fréquence bilinéaire (STFB) $D_{x_i y_j}(t, \nu; K_{ij})$ est paramétré par le noyau K_{ij} et est défini pour $i, j = 1, \dots, n$, comme :

$$(x_i(t), y_j(t)) \xleftrightarrow{\text{STFB}} D_{x_i y_j}(t, \nu; K_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^2} R_{x_i y_j}(\theta, \theta') K_{ij}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (4.70)$$

Notons que pour des signaux déterministes, il suffit d'omettre l'espérance mathématique au niveau de la fonction d'inter-corrélation et de la matrice de corrélation, *c.à.d.* $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(\theta, \theta') = \mathbf{x}(\theta) \mathbf{y}^H(\theta')$ et $R_{x_i y_j}(\theta, \theta') = x_i(\theta) y_j^*(\theta')$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Dans ce cas, $D_{x_i y_j}(t, \nu; K_{ij})$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbf{xy}}(t, \nu; \mathbf{K})$) est qualifié de transformée temps-fréquence (resp. transformée temps-fréquence spatiale) bilinéaire, notée TTFB (resp. TTFSB).

6. C'est un produit terme à terme des éléments de deux matrices de même dimension.

Spectre temps-fréquence (spatial) quadratique et transformée temps-fréquence spatiale quadratique

Le spectre temps-fréquence (resp. spectre temps-fréquence spatial) quadratique noté STFQ (resp. STFSQ) peut être considéré comme la restriction du STFB (resp. STFSB) à un couple de deux signaux identiques (x_i, x_i) (resp. $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t))$). Ainsi,

$$(x_i(t), x_i(t)) \xleftrightarrow{\text{STFQ}} D_{x_i x_i}(t, \nu; K_{ij}) = D_{x_i}(t, \nu; K_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^2} R_{x_i x_i}(\theta, \theta') K_{ij}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (4.71)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) \xleftrightarrow{\text{STFSQ}} \mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu; \mathbf{K}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(\theta, \theta') \odot \mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta' \\ &= \begin{pmatrix} D_{x_1 x_1}(t, \nu; K_{11}) & \dots & D_{x_1 x_n}(t, \nu; K_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_n x_1}(t, \nu; K_{n1}) & \dots & D_{x_n x_n}(t, \nu; K_{nn}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

De la même manière que pour le STFB (resp. le STFSB), dans le cas de signaux déterministes, il suffit d'omettre l'espérance mathématique au niveau de la fonction d'auto-corrélation $D_{x_i x_i}(t, \nu; K_{ij})$ (resp. de la matrice de corrélation $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu; \mathbf{K})$) pour retrouver la définition des transformées temps-fréquence quadratiques, notées TTFQ (resp. transformées temps-fréquences spatiale quadratiques, notées TTFSQ).

Les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, \nu; \mathbf{K})$ sont des termes quadratiques que l'on appelle les "auto-termes", ils correspondent aux STFQ (resp. TTFQ pour des signaux déterministe) de chacune des composantes du vecteur $\mathbf{x}(t)$ de signaux aléatoires (resp. déterministes). Les termes hors diagonale portent l'appellation générique d'"inter-termes". Ils correspondent quant à eux aux STFB ou TTFB associés à des couples de composantes distinctes du vecteur $\mathbf{x}(t)$ de signaux aléatoires (resp. déterministes).

Notons qu'en fonction du choix du noyau K_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, on pourra de déterminer des classes particulières de solutions liées aux propriétés désirées. Ainsi,

- la classe de **Cohen** regroupe les représentations temps-fréquences énergétiques covariantes par translations temporelles et fréquentielles.
- la classe **affine** regroupe les représentations temps-fréquences énergétiques covariantes par translations temporelles et changement d'échelle.

Il existe d'autres classes telles que la classe par corrélation, ou encore la classe hyperbolique, etc...

Les propriétés souhaitables pour les RTFQ ou STFQ sont recensées au niveau du Tab. 4.9 à la fin de cette Annexe. Finalement, pour plus de détail, on peut se reporter à [70], [53] ou encore [108].

Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux distributions de Wigner et de Pseudo-Wigner lesquelles sont utilisées dans les simulations informatiques que nous effectuons au quatrième chapitre afin d'illustrer le comportement de certaines méthodes que nous avons développées afin de résoudre le problème de la séparation aveugle de mélanges de sources non-stationnaires.

Quelques exemples de TTFQ

A) Distribution de Wigner et spectre de Wigner

Le spectre de Wigner (SW) (resp. la Transformée de Wigner (TW)) d'un signal $s(t)$ aléatoire (resp. déterministe) est défini(e) par :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} R_s(t, \tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau, \quad (4.73)$$

où $R_s(t, \tau)$ est la fonction de corrélation définie comme $R_s(t, \tau) = \mathbb{E}\{s(t + \frac{\tau}{2})s^*(t - \frac{\tau}{2})\}$ (resp. elle est la corrélation instantanée définie comme $R_s(t, \tau) = s(t + \frac{\tau}{2})s^*(t - \frac{\tau}{2})$). Pour un signal analytique (§4.62), on parle de spectre de Wigner-Ville (SWV) (resp. Transformée de Wigner-Ville (TWV)).

1) Calcul de la TW sur quelques signaux synthétiques particuliers

Résultat 1. La TW d'une cisoïde $s(t)$ de fréquence ν_0 , d'amplitude a et de durée infinie : $s(t) = ae^{i2\pi\nu_0 t}$, est égale à l'impulsion de Dirac au point $(\nu - \nu_0)$ multipliée par le carré de l'amplitude :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \delta(\nu - \nu_0). \quad (4.74)$$

En fait,

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu_0(t+\tau/2)} e^{-i2\pi\nu_0(t-\tau/2)} e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

c'est à dire encore :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)\tau} d\tau.$$

D'où le résultat donné au niveau de l'Eq. 4.74.

Résultat 2. La TW d'un signal modulé linéairement en fréquence (chirp idéal), de fréquence instantanée λt , d'amplitude a et de durée infinie : $s(t) = ae^{i2\pi\frac{\lambda}{2}t^2}$, est égale à l'impulsion de Dirac au point $(\nu - \lambda t)$ multipliée par le carré de l'amplitude :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \delta(\nu - \lambda t). \quad (4.75)$$

En fait,

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\frac{\lambda}{2}(t+\frac{\tau}{2})^2} e^{-i2\pi\frac{\lambda}{2}(t-\frac{\tau}{2})^2} e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

c'est à dire :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu-\lambda t)\tau} d\tau.$$

D'où le résultat donné au niveau de l'Eq. 4.75.

Résultat 3. La TW d'un signal porte définie par :

$$s(t) = \Pi_{[t_1, t_2]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

est la suivante :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ 4(t - t_1) & \text{si } \nu = 0 \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t - t_1)\text{sinc}(4\pi\nu(t - t_1)) & \text{si } \nu \neq 0 \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t_2 - t) & \text{si } \nu = 0 \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \\ 4(t_2 - t)\text{sinc}(4\pi\nu(t - t_2)) & \text{si } \nu \neq 0 \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \end{cases}. \quad (4.76)$$

où la fonction $\text{sinc}(\cdot)$ représente le sinus cardinal défini comme $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

En fait,

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[t_1, t_2]}(t + \frac{\tau}{2}) \Pi_{[t_1, t_2]}(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

Nous faisons le changement de variable $u = t + \tau/2$, nous obtenons alors :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{[t_1, t_2]}(u) \Pi_{[t_1, t_2]}(2t - u) e^{-i2\pi\nu 2(u-t)} du.$$

Ce qui implique que :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 2 \int_{t_1}^{t_2} \Pi_{[t_1, t_2]}(2t - u) e^{-i2\pi\nu 2(u-t)} du.$$

Nous faisons maintenant un autre changement de variable $v = 2t - u$:

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 2 \int_{2t-t_2}^{2t-t_1} \Pi_{[t_1, t_2]}(v) e^{-i2\pi\nu 2(t-v)} dv$$

Donc :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 2e^{-i4\pi\nu t} \int_{2t-t_2}^{2t-t_1} \Pi_{[t_1, t_2]}(v) e^{i4\pi\nu v} dv.$$

Nous distinguons les cas suivants :

1. si $t < t_1$ ou $t > t_2$ alors la transformée est nulle.
2. si $t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}]$ alors le chevauchement se produit dans l'intervalle $[t_1, 2t - t_1]$ et par conséquent la transformée est donnée par :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) &= 2e^{-i4\pi\nu t} \int_{t_1}^{2t-t_1} \Pi_{[t_1, t_2]}(v) e^{i4\pi\nu v} dv \\ &= \frac{2e^{-i4\pi\nu t}}{i4\pi\nu} [e^{i4\pi\nu(2t-t_1)} - e^{i4\pi\nu t_1}] \\ &= \frac{2}{i4\pi\nu} [e^{i4\pi\nu(t-t_1)} - e^{-i4\pi\nu(t-t_1)}]. \end{aligned}$$

d'où :

- si $\nu \neq 0$ alors :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 4(t - t_1) \text{sinc}(4\pi\nu(t - t_1)).$$

- si $\nu = 0$ alors :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 4(t - t_1)$$

3. Par analogie, si $t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2]$, nous obtenons :

- si $\nu \neq 0$ alors :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 4(t_2 - t) \text{sinc}(4\pi\nu(t_2 - t)).$$

- si $\nu = 0$ alors :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = 4(t_2 - t).$$

D'où le résultat donné par l'Eq. 4.76.

Résultat 4. La TW d'une cisoïde de fréquence ν_0 , d'amplitude a et à support fini : $s(t) = h(t)x(t)$, où $h(t) = \Pi_{[t_1, t_2]}(t)$ et $x(t) = ae^{i2\pi\nu_0 t}$, est donnée par :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ 4(t - t_1) & \text{si } \nu = \nu_0 \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t - t_1)\text{sinc}(4\pi(\nu - \nu_0)(t - t_1)) & \text{si } \nu \neq \nu_0 \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t_2 - t) & \text{si } \nu = \nu_0 \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \\ 4(t_2 - t)\text{sinc}(4\pi(\nu - \nu_0)(t - t_2)) & \text{si } \nu \neq \nu_0 \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \end{cases} . \quad (4.77)$$

Pour calculer la transformée de Wigner d'une cisoïde $s(t)$ de fréquence ν_0 , d'amplitude a et à support fini, nous utilisons la propriété de modulation :

$$y(t) = x(t)e^{i2\pi\nu_0 t} \Rightarrow D_{\mathbf{W},y}(t, \nu) = D_{\mathbf{W},x}(t, \nu - \nu_0).$$

Donc :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 D_{\mathbf{W},h}(t, \nu - \nu_0).$$

où : $h(t) = \Pi_{[t_1, t_2]}(t)$. D'où le résultat donné par l'Eq. 4.77.

Résultat 5. La TW d'un signal modulé linéairement en fréquence, de fréquence instantanée λt , d'amplitude a et à support fini : $s(t) = h(t)x(t)$, où $h(t) = \Pi_{[t_1, t_2]}(t)$ et $x(t) = ae^{i2\pi\frac{\lambda}{2}t^2}$, est donnée par :

$$D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) = a^2 \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou } t > t_2 \\ 4(t - t_1) & \text{si } \nu = \lambda t \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t - t_1)\text{sinc}(4\pi(\nu - \lambda t)(t - t_1)) & \text{si } \nu \neq \lambda t \text{ et } t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ 4(t_2 - t) & \text{si } \nu = \lambda t \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \\ 4(t_2 - t)\text{sinc}(4\pi(\nu - \lambda t)(t - t_2)) & \text{si } \nu \neq \lambda t \text{ et } t \in [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \end{cases} . \quad (4.78)$$

Pour calculer la transformée de Wigner d'un signal modulé linéairement en fréquence, de fréquence instantanée λt , d'amplitude a et à support fini, nous utilisons la propriété de multiplication :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{W},s}(t, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\mathbf{W},h}(t, \nu - \nu') D_{\mathbf{W},x}(t, \nu') d\nu' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\mathbf{W},h}(t, \nu - \nu') a^2 \delta(\nu' - \lambda t) d\nu' \\ &= a^2 D_{\mathbf{W},h}(t, \nu - \lambda t). \end{aligned}$$

où $s(t) = h(t)x(t)$, $h(t) = \Pi_{[t_1, t_2]}(t)$ et $x(t) = ae^{i2\pi\frac{\lambda}{2}t^2}$. D'où le résultat donné par l'Eq. 4.78.

B) Distribution de Wigner croisée

Le SW (resp. la TW) croisé(e) de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ aléatoires (resp. déterministes) est défini(e) par :

$$D_{\mathbf{W},s_1 s_2}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} R_{s_1 s_2}(t, \tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau, \quad (4.79)$$

où $R_{s_1 s_2}(t, \tau) = E \left\{ s_1(t + \frac{\tau}{2}) s_2^*(t - \frac{\tau}{2}) \right\}$ est la fonction d'inter-corrélation (resp. elle est tout simplement l'inter-corrélation locale définie alors par : $R_{s_1 s_2}(t, \tau) = s_1(t + \frac{\tau}{2}) s_2^*(t - \frac{\tau}{2})$). Pour un signal analytique (§4.62), on parle de SWV (resp. TWV) croisé(e).

1) Calcul de transformées de Wigner croisées sur quelques signaux synthétiques

Résultat 6. Soit une cisoïde $s_1(t)$ (resp. une autre $s_2(t)$) de fréquence ν_1 (resp. ν_2) et d'amplitude a_1 (resp. a_2) : $s_1(t) = a_1 e^{i2\pi\nu_1 t}$ et $s_2(t) = a_2 e^{i2\pi\nu_2 t}$. La TW croisée de $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est donnée par :

$$D_{\mathbf{W},s_1s_2}(t, \nu) = a_1 a_2^* e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \delta\left(\nu - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right). \quad (4.80)$$

En fait,

$$D_{\mathbf{W},s_1s_2}(t, \nu) = a_1 a_2^* e^{i2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu - (\nu_1 + \nu_2)/2)\tau} d\tau.$$

D'où le résultat donné par l'Eq. 4.80.

Résultat 7. Soient deux chirps $s_1(t)$ et $s_2(t)$ d'amplitudes a_1 et a_2 , de fréquences instantanées $\lambda_1 t$ et $\lambda_2 t$ respectivement et de durée infinie : $s_1(t) = a_1 e^{i2\pi\frac{\lambda_1}{2}t^2}$ et $s_2(t) = a_2 e^{i2\pi\frac{\lambda_2}{2}t^2}$. La TW croisée de $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est donnée par :

$$D_{\mathbf{W},s_1s_2}(t, \nu) = \begin{cases} a_1 a_2^* \delta(\nu - \lambda_1 t) = a_1 a_2^* \delta(\nu - \lambda_2 t) & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \\ a_1 a_2^* e^{i\pi(\lambda_1 - \lambda_2)t^2} \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} e^{i\left(\frac{4\pi\mu^2}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\pi}{4}\right)} & \text{si } \lambda_1 < \lambda_2 \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} e^{i\left(\frac{4\pi\mu^2}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{3\pi}{4}\right)} & \text{si } \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \quad (4.81)$$

où $\mu = \nu - (\lambda_1 + \lambda_2)t/2$.

En fait,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{W},s_1s_2}(t, \nu) &= a_1 a_2^* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\frac{\lambda_1(t+\tau/2)^2}{2}} e^{-i2\pi\frac{\lambda_2(t-\tau/2)^2}{2}} e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= a_1 a_2^* e^{i\pi(\lambda_1 - \lambda_2)t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau^2}{8}} e^{-i2\pi\left(\nu - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)t}{2}\right)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Donc $D_{\mathbf{W},s_1s_2}(t, \nu) = a_1 a_2^* e^{i\pi(\lambda_1 - \lambda_2)t^2} \text{TF}\{f(\tau)\}(\mu)$, où : $f(\tau) = e^{i\pi\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau^2}{4}}$ et $\mu = \nu - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)t}{2}$. La dérivée de f est :

$$f'(\tau) = \frac{i2\pi(\lambda_1 - \lambda_2)\tau}{4} f(\tau) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} (-i2\pi\tau) f(\tau).$$

Nous utilisons la propriété de la dérivée d'une transformée de Fourier ($(-i2\pi t)^m x(t) \Leftrightarrow X^{(m)}(\nu)$) :

$$\text{TF}\{f'(\tau)\}(\mu) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4} \text{TF}\{f(\tau)\}(\mu)$$

D'après la propriété de la transformée de Fourier d'une dérivée ($x^{(m)}(t) \Leftrightarrow (i2\pi\nu)^m X(\nu)$), nous avons : $\text{TF}\{f'(\tau)\}(\mu) = (i2\pi\nu) \text{TF}\{f(\tau)\}(\mu)$. Donc pour $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\frac{\text{TF}\{f(\tau)\}(\mu)}{\text{TF}\{f(\tau)\}(\mu)} = \frac{i8\pi\mu}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

D'où : $\text{TF}\{f(\tau)\}(\mu) = K e^{i\pi\frac{4\mu^2}{\lambda_2 - \lambda_1}}$, où K est une constante.

$$K = \text{TF}\{f(\tau)\}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\tau^2}{4}} d\tau$$

Nous posons $b^2 = \frac{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)}{4}$ et nous faisons le changement de variable $x^2 = \imath b^2 \tau^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} b^2 \tau^2$ donc :

$$K = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Nous savons que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2)} dx = \sqrt{\pi}$, donc :

$$K = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \text{si } \lambda_1 < \lambda_2 \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} & \text{si } \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$\text{TF}\{f(\tau)\}(\mu) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{4\pi\mu^2}{\lambda_2 - \lambda_1}} & \text{si } \lambda_1 < \lambda_2 \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} e^{i\frac{4\pi\mu^2}{\lambda_2 - \lambda_1}} & \text{si } \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$$

D'où le résultat donné par l'Eq. 4.81.

C) Distribution de Pseudo Wigner

Le Spectre de Pseudo Wigner (SPW) (resp. la Transformée de Pseudo Wigner (TPW)) d'un signal $s(t)$ aléatoire (resp. déterministe) est défini(e) par :

$$D_{\text{PW},s}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} R_s(t, \tau) h(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau, \quad (4.82)$$

où $h(t)$ est une fenêtre glissante à court-terme. Pour un signal analytique (§4.62), on parle de spectre de Pseudo Wigner-Ville (SPWV) (resp. Transformée de Pseudo Wigner-Ville (TPWV)).

Notons qu'en considérant $h(\tau) = 1$, quel que soit τ , on retrouve le SW, tandis qu'en enlevant l'espérance mathématique, on retrouve la TW.

1) Calcul de transformées de Pseudo Wigner sur quelques signaux synthétiques

Résultat 8. Soit une cisoïde $s(t)$ de fréquence ν_0 et d'amplitude a : $s(t) = ae^{i2\pi\nu_0 t}$. La TPW de $s(t)$ est donnée par :

$$D_{\text{PW},s}(t, \nu) = a^2 H(\nu - \nu_0). \quad (4.83)$$

où $H(\nu)$ est la TF §4.60 de $h(t)$. La TF de quelques fenêtres usuelles est donnée au niveau du Tab. 4.8.

En fait,

$$D_{\text{PW},s}(t, \nu) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi\nu_0(t+\frac{\tau}{2})} e^{-i2\pi\nu_0(t-\frac{\tau}{2})} h(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau.$$

C'est à dire :

$$D_{\text{PW},s}(t, \nu) = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)\tau} h(\tau) d\tau.$$

D'où le résultat donné par l'Eq. 4.83.

Type de fenêtre	Expression en temps	Transformée de Fourier
Rectangulaire	$\Pi_{[-T/2, T/2]}(t)$	$T \text{sinc}(\pi\nu T)$
Triangulaire	$(1 - 2 t /T)\Pi_{[-T/2, T/2]}(t)$	$(T/2)^2 \text{sinc}^2(\pi\nu T/2)$
Hanning	$\cos^2(\pi t/T)\Pi_{[-T/2, T/2]}(t)$	$0.5T \text{sinc}(\pi\nu T) + 0.25T[\text{sinc}(\pi(\nu - 1/T)T) + \text{sinc}(\pi(\nu + 1/T)T)]$
Hamming	$[0.54 + 0.46 \cos(2\pi t/T)]\Pi_{[-T/2, T/2]}(t)$	$0.54T \text{sinc}(\pi\nu T) + 0.23[\text{sinc}(\pi(\nu - 1/T)/T) + \text{sinc}(\pi(\nu + 1/T)/T)]$
Blackman	$[0.42 + 0.5 \cos(2\pi t/T) + 0.08 \cos(4\pi t/T)]\Pi_{[-T/2, T/2]}(t)$	$0.42T \text{sinc}(\pi\nu T) + 0.25[\text{sinc}(\pi(\nu - 1/T)/T) + \text{sinc}(\pi(\nu + 1/T)/T)] + 0.04[\text{sinc}(\pi(\nu - 2/T)/T) + \text{sinc}(\pi(\nu + 2/T)/T)]$

TABLE 4.8 – TF des fenêtres glissantes les plus usuelles.

Résultat 9. La TPW d'un signal $s(t)$ modulé linéairement en fréquence tel que : $s(t) = ae^{i2\pi\frac{\lambda}{2}t^2}$, où a est l'amplitude de $s(t)$ et λt sa fréquence instantanée, est la suivante :

$$D_{\mathbf{PW},s}(t, \nu) = a^2 H(\nu - \lambda t). \quad (4.84)$$

En fait,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{PW},s}(t, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu - \nu') D_{\mathbf{W},s}(t, \nu') d\nu' \\ &= a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu - \nu') \delta(\nu' - \lambda t) d\nu'. \end{aligned}$$

D'où le résultat donné au niveau de l'Eq. 4.84.

Propriétés des STFSQ ou des TTFSQ

Pour une présentation plus détaillée de ces propriétés (et d'autres propriétés ne figurant pas ici), on pourra se reporter à [53]. Dans [70], enfin, il est montré que la transformée de Wigner est la transformée temps-fréquence qui possède le plus grand nombre de propriétés mathématiques.

Propriété	Expression mathématique
P ₁ . Réalité	$D_x(t, \nu) = D_x^*(t, \nu)$
P ₂ . Covariance en translation	$y(t) = x(t - t_0)e^{j2\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow D_y(t, \nu) = D_x(t - t_0, \nu - \nu_0)$
P ₃ . Marginale temporelle	$\int D_x(t, \nu) d\nu = x(t) ^2$
P ₄ . Marginale fréquentielle	$\int D_x(t, \nu) dt = X^{(f)}(\nu) ^2$
P ₅ . Moments en temps	$\int_{\mathbb{R}^2} t^n D_x(t, \nu) dt d\nu = \int_{\mathbb{R}} t^n x(t) ^2 dt$
P ₆ . Moments en fréquence	$\int_{\mathbb{R}^2} \nu^n D_x(t, \nu) dt d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n X^{(f)}(\nu) ^2 d\nu$
P ₇ . Changement d'échelle	$y(t) = a ^{\frac{1}{2}} x(at) \Rightarrow D_y(t, \nu) = D_x(at, \frac{\nu}{a})$
P ₈ . Fréquence instantanée	$\frac{\int \nu D_x(t, \nu) d\nu}{\int D_x(t, \nu) d\nu} = \nu_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg}{dt} \{x(t)\}$
P ₉ . Retard de groupe	$\frac{\int t D_x(t, \nu) dt}{\int D_x(t, \nu) dt} = \nu_x(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d \arg}{dt} \{X(\nu)\}$
P ₁₀ . Support (large) en temps	$x(t) = 0, t \notin [t_1, t_2] \Rightarrow D_x(t, \nu) = 0, t \notin [t_1, t_2]$
P ₁₁ . Support (large) en fréquence	$X^{(f)}(\nu) = 0, \nu \notin [\nu_1, \nu_2] \Rightarrow D_x(t, \nu) = 0, \nu \notin [\nu_1, \nu_2]$
P ₁₂ . Convolution	$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\theta)x(\theta)d\theta \Rightarrow D_y(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} D_h(t-\theta)D_x(\theta, \nu)d\theta$
P ₁₃ . Multiplication	$y(t) = h(t)x(t) \Rightarrow D_y(t, \nu) = \int D_h(t, \nu - \eta)D_x(t, \eta)d\eta$
P ₁₄ . Formule de Moyal (Unitarité)	$\int \int D_x(t, \nu) D_y^*(t, \nu) dt d\nu = \int x(t)y^*(t)dt ^2$
P ₁₅ . Convolution par le chirp	$y(t) = x(t) * a ^{\frac{1}{2}} e^{j\pi a t^2} \Rightarrow D_y(t, \nu) = D_x(t - \frac{\nu}{a}, \nu)$
P ₁₆ . Multiplication par le chirp	$y(t) = x(t)e^{j\pi a t^2} \Rightarrow D_y(t, \nu) = D_x(t, \nu - at)$

TABLE 4.9 – Principales propriétés des transformées temps-fréquence quadratiques.

Annexe 4 : Détecteurs de points temps-fréquence utiles

Détecteurs de points utiles dans un contexte de mélange instantané

Dans le cas où le couple (α, β) représente un couple de points temps-fréquence (t, ν) , l'opérateur matriciel $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ est alors une RTFSQ ou un STFSQ et $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{H}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{H}^H$, où \mathbf{H} est la matrice de mélange exprimée par l'Eq. 1.11, $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ représente la RTFSQ des observations $\mathbf{X}(t)$ (décrites au niveau de l'Eq. 1.7; $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ est celle des sources). Le problème de la détection énoncé au niveau du paragraphe 4.1.1 se pose dans la plupart des méthodes de SAS basées sur l'utilisation des RTFSQ. En fait, la plupart de ces méthodes reposent sur une étape préalable de sélection (automatique) de points temps-fréquence $(t-f)$ particuliers permettant la construction d'ensembles de matrices devant ensuite être (bloc) diagonalisées conjointement et/ou (bloc) zéro-diagonalisées conjointement. On trouve un panorama des différents détecteurs proposés dans [44]. Pour que la séparation soit effectivement possible et pour pouvoir effectivement détecter les points $t-f$ utiles, il faut donc que les RTFSQ des sources possèdent certaines propriétés qui varient d'une méthode à une autre.

Détecteurs en contexte blanchi

L'un des premiers travaux à avoir porté sur ce problème de la détection de points $t-f$ utiles en contexte instantané a été proposé dans [8]. Le détecteur suggéré consiste à choisir les points (t, ν) correspondant aux points "de plus haute énergie dans le plan $t-f$ ". Sur une idée similaire, un deuxième détecteur a été présenté dans [7], consistant à construire deux ensembles de matrices correspondant à des matrices diagonales et zéro-diagonales. Ce détecteur (que nous notons $\mathcal{C}_{U,B,Inst}$) est le suivant :

$$\frac{\text{tr}\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu)\}}{\|\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu)\|_F} \begin{cases} > \epsilon_0 \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu) \text{ est ajoutée à } \mathcal{M}_{\mathcal{DC}} \\ < \epsilon_0 \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu) \text{ est ajoutée à } \mathcal{M}_{\mathcal{ZDC}} \end{cases}, \quad (4.85)$$

où ϵ_0 un seuil arbitraire positif de faible valeur, $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius et $\mathcal{M}_{\mathcal{DC}}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathcal{ZDC}}$) l'ensemble des matrices devant être diagonalisées (resp. zéro-diagonalisées) conjointement.

Un autre détecteur a été proposé dans [49]. Il est basé sur la recherche de matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ diagonales avec un seul terme non nul sur la diagonale (matrices diagonales de rang 1). Si la matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu)$ est de rang 1, cela signifie que la plus grande de ses valeurs propres est quasiment égale à la somme de toutes les valeurs propres en valeur absolue. Ce détecteur (que nous notons $\mathcal{C}_{U,F,Inst}$) s'écrit donc de la manière suivante :

$$\frac{\max\{|\text{eig}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu))|\}}{\sum |\text{eig}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu))|} \simeq 1 \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b}(t, \nu) \text{ est ajoutée à } \mathcal{M}_{\mathcal{DC}}, \quad (4.86)$$

où $\text{eig}(\cdot)$ désigne l'ensemble des valeurs propres.

Nous trouvons également dans [63], un détecteur instantané combinant la trace et la partie imaginaire des transformées. Ce détecteur exploite des propriétés spécifiques des RTFSQ. En particulier, il requière leur symétrie hermitienne (les auto-termes sont alors réels alors que les inter-termes sont généralement complexes). Ainsi, pour construire un ensemble de matrices correspondant à des matrices $\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)$ zéro-diagonales, il suffit de choisir les points (t, ν) associés à des matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)$ de trace faible (la trace est invariante sous transformation unitaire, *c.à.d.* $\text{tr}\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)\}$) :

$$\begin{cases} \|\Im\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}\| > \epsilon_1 \\ |\text{tr}\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}| < \epsilon_2 \end{cases}, \quad (4.87)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 deux seuils. Pour choisir les points (t, ν) correspondant à des matrices diagonales, les auteurs proposent :

$$\begin{cases} \|\Im\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}\| < \epsilon_3 \\ |\text{tr}\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}| > \epsilon_4 \end{cases}, \quad (4.88)$$

où ϵ_3 et ϵ_4 deux seuils. Nous notons ce détecteur $\mathbf{C}_{\text{U}, \text{G}_1, \text{Inst}}$.

Les auteurs ont améliorés le détecteur précédent, afin de résoudre le problème du choix lié aux matrices à diagonaliser conjointement. En effet un problème peut se poser dans le cas d'un point temps-fréquence où sont présents des auto-termes et des inter-termes sur les sources, mais pour lesquels la partie imaginaire des inter-termes est nulle. Un tel point devrait être écarté alors qu'il est conservé avec le détecteur précédent. Deux solutions à base de filtrage d'image ont été envisagées. L'une consiste à estimer la partie réelle des inter-termes sur les sources, l'autre à estimer l'aire dans le plan temps-fréquence où sont présents les inter-termes. Le nouveau détecteur à base de filtrage (que nous notons $\mathbf{C}_{\text{U}, \text{G}_2, \text{Inst}}$) est obtenu de la manière suivante :

$$\begin{cases} \|\Im\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}\| < \epsilon_3 \\ |\text{tr}\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}| > \epsilon_4 \\ \|\{G * \Im^2\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}_b \mathbf{X}_b}(t, \nu)\}\}\| < \epsilon'_3 \end{cases}, \quad (4.89)$$

où $(\cdot * \cdot)$ désigne le produit de convolution et $G(t, \nu)$ représente un filtre 2D passe-bas.

Détecteurs en contexte non blanchi

Dans [64], L. Giulieri et *al.* ont proposé un détecteur dans le cas où la matrice \mathbf{H} n'est plus nécessairement unitaire, mais en supposant que :

- > le noyau de la transformée temps-fréquence utilisée est à symétrie hermitienne.
- > les sources et la matrice de mélange \mathbf{H} ne sont pas simultanément complexes.

Ce détecteur consiste à construire l'ensemble des matrices à diagonaliser conjointement au moyen de la procédure de sélection automatique suivante :

$$\begin{cases} \|\Im\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)\}\| < \epsilon_7 \\ \|\Re\{\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)\}\| > \epsilon_8 \end{cases} \quad (4.90)$$

Nous notons ce détecteur $\mathbf{C}_{\text{G}_3, \text{Inst}}$. De même que pour le détecteur $\mathbf{C}_{\text{U}, \text{G}, \text{Inst}}$, les auteurs améliorent le détecteur $\mathbf{C}_{\text{G}_3, \text{Inst}}$ au moyen d'une opération de filtrage 2D passe-bas.

Un autre détecteur a été introduit dans [79]. Ce détecteur exploite comme $\mathbf{C}_{\text{U}, \text{F}, \text{Inst}}$ décrit en Eq. 4.86, la propriété de rang 1 des matrices considérées. Les auteurs n'imposent plus le pré-blanchiment des

observations mais ils supposent que les sources sont “quasi-disjointes” dans le planj temps-fréquence. Ce détecteur permet alors de construire les deux ensembles $\mathcal{M}_{\mathcal{DC}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{ZDC}}$ par la procédure suivante :

$$\left| \frac{\max\{\text{eig}(\mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu))\}}{\|\mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu)\|_F} - 1 \right| \begin{cases} < \epsilon_9 \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu) \text{ est ajoutée à } \mathcal{M}_{\mathcal{DC}} \\ > \epsilon_9 \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu) \text{ est ajoutée à } \mathcal{M}_{\mathcal{ZDC}} \end{cases}, \quad (4.91)$$

Nous notons ce détecteur $C_{L, \text{Inst}}$. Dans le cas où les matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu)$ sont perturbées par des bruits Gaussiens, les auteurs commencent par pré-sélectionner les matrices au moyen d’une technique de débruitage s’écrivant :

$$\|\mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t, \nu)\|_F > \epsilon_{10}, \quad \epsilon_{10} \approx 0.05 \times \mathbf{D}_{\mathbf{XX}}(t_h, \nu_h), \quad (4.92)$$

où (t_h, ν_h) est le couple de points t - f qui correspond à la plus haute énergie.

Annexe 5 : Corrélation et corrélation croisée cycliques d'un modèle cyclo-stationnaire particulier

On considère deux signaux $x_i(t)$, $i = 1, 2$, satisfaisant le modèle suivant :

$$x_i(t) = a_i(t) \cos(2\pi f_i t), \forall i = 1, 2, \quad (4.93)$$

où les $a_i(t)$, $i = 1, 2$ sont deux signaux aléatoires stationnaires, centrés et mutuellement corrélés.

Fonctions de corrélation et de corrélation croisée

Il est évident que $x_i(t)$ est centré. En fait, la moyenne de $x_i(t)$ vaut :

$$\mu_{x_i}(t) = E\{x_i(t)\} = \mu_{a_i}(t) \cos(2\pi f_i t) = 0, \quad (a_i(t) \text{ est centré}).$$

Corrélation de $x_i(t)$

Il reste à montrer que $R_{x_i}(t, \tau)$ est périodique pour déduire que $x_i(t)$ est cyclo-stationnaire.

$$R_{x_i}(t, \tau) = E\{x_i(t)x_i^*(t + \tau)\} = R_{a_i}(\tau) \cos(2\pi f_i t) \cos(2\pi f_i(t + \tau)), \quad (a_i(t) \text{ est stationnaire}).$$

$R_{x_i}(t, \tau)$ est périodique de période $\frac{1}{f_i}$, et par conséquent $x_i(t)$ est cyclo-stationnaire pour tout $i = 1, 2$. On montre maintenant que la corrélation croisée est périodique.

Corrélation croisée entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$

$$R_{x_1 x_2}(t, \tau) = E\{x_1(t)x_2^*(t + \tau)\} = R_{a_1 a_2}(\tau) \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2(t + \tau)),$$

En utilisant la formule trigonométrique suivante :

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)), \quad (4.94)$$

la corrélation croisée peut s'écrire :

$$R_{x_1 x_2}(t, \tau) = R_{a_1 a_2}(\tau) \frac{1}{2}(\cos(2\pi((f_1 - f_2)t - f_2\tau)) + \cos(2\pi((f_1 + f_2)t + f_2\tau))).$$

$R_{x_1 \times x_2}(t, \tau)$ est égale à la somme de deux fonctions périodiques de périodes respectivement $\frac{1}{f_1 - f_2}$ ($f_1 \neq f_2$) et $\frac{1}{f_1 + f_2}$ ($f_1 \neq -f_2$), donc elle est périodique de période $T = \frac{n}{f_1 - f_2} = \frac{m}{f_1 + f_2}$, avec n et m deux entiers.

Exemples :

si $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$ alors pour $n = -1$ et $m = 3$ on a $T = 1$.

si $f_1 = 2$ et $f_2 = 4$ alors pour $n = -2$ et $m = 6$ on a $T = 1$ ou bien pour $n = -4$ et $m = 12$ on a $T = 2, \dots$

Fonctions de corrélation cyclique et de corrélation cyclique croisée

On a montré que les fonctions $R_{x_i}(t, \tau)$ et $R_{x_1 \times x_2}(t, \tau)$ sont périodiques, alors elles sont décomposables en série de Fourier.

Corrélation cyclique de $x_i(t)$

$$\begin{aligned}
 R_{x_i}^{\text{fs}}(\nu_i, \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{x_i}(t, \tau) \exp(-i2\pi\nu_i t) dt \\
 &= \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_i \tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-i2\pi\nu_i t) dt + \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi(2f_i t + f_i \tau)) \exp(-i2\pi\nu_i t) dt \\
 &= \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_i \tau) \alpha(\nu_i) + \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} (\exp(i2\pi(2f_i t + f_i \tau)) + \exp(-i2\pi(2f_i t + f_i \tau))) \exp(-i2\pi\nu_i t) dt \\
 &= \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \cos(2\pi f_i \tau) \alpha(\nu_i) + \frac{R_{a_i}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} (\exp(-i2\pi((\nu_i - 2f_i)t - f_i \tau)) + \exp(-i2\pi((\nu_i + 2f_i)t + f_i \tau))) dt \\
 &= \frac{R_{a_i}(\tau)}{4} \cos(2\pi f_i \tau) \alpha(\nu_i) + \frac{R_{a_i}(\tau)}{4} \exp(i2\pi f_i \tau) \alpha(\nu_i - 2f_i) + \exp(-i2\pi f_i \tau) \alpha(\nu_i + 2f_i).
 \end{aligned}$$

$R_{x_i}^{\text{fs}}(\nu_i, \tau)$ est non nulle pour $\nu_i = 0$ et $\nu_i = \pm 2f_i$.

Corrélation cyclique croisée

$$\begin{aligned}
 R_{x_1 \times x_2}^{\text{fs}}(\nu, \tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{x_1 \times x_2}(t, \tau) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\
 &= \frac{R_{a_1 a_2}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} ((\cos(2\pi((f_1 - f_2)t - f_2 \tau)) + \cos(2\pi((f_1 + f_2)t + f_2 \tau)))) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\
 &= \frac{R_{a_1 a_2}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} ((\exp(i2\pi((f_1 - f_2)t - f_2 \tau)) + \exp(-i2\pi((f_1 + f_2)t - f_2 \tau)))) \right) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\
 &+ \frac{R_{a_1 a_2}(\tau)}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} ((\exp(i2\pi((f_1 + f_2)t + f_2 \tau)) + \exp(-i2\pi((f_1 + f_2)t + f_2 \tau)))) \right) \exp(-i2\pi\nu t) dt \\
 &= \frac{R_{a_1 a_2}(\tau)}{4} (\exp(-i2\pi f_2 \tau) \alpha(\nu - (f_1 - f_2)) + \exp(i2\pi f_2 \tau) \alpha(\nu + (f_1 - f_2))) \\
 &+ \frac{R_{a_1 a_2}(\tau)}{4} (\exp(i2\pi f_2 \tau) \alpha(\nu - (f_1 + f_2)) + \exp(-i2\pi f_2 \tau) \alpha(\nu + (f_1 + f_2))).
 \end{aligned}$$

$R_{x_1 \times x_2}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ est non-nulle pour $\nu = \pm(f_1 - f_2)$ et $\nu = \pm(f_1 + f_2)$.

Remarques

1. En appliquant les statistiques sur les signaux analytiques associés aux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on élimine la redondance d'information. En d'autre terme, la corrélation cyclique $R_{x_i}^{fs}(\nu_i, \tau)$ sera non nulle pour $\nu_i = 0$ et $\nu_i = 2f_i$ et la corrélation cyclique croisée sera non nulle pour $\nu = f_1 - f_2$ et $\nu = f_1 + f_2$.
2. Les résultats obtenus doivent être généralisés aux différents types de modulations numériques en considérant que les symboles des différentes sources sont corrélés.

SÉPARATION AVEUGLE DE MÉLANGES LINÉAIRES CONVOLUTIFS DE SOURCES CORRÉLÉES

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions le problème de la séparation aveugle de mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés réels ou complexes de sources. Les sources considérées sont réelles ou complexes, déterministes ou aléatoires et dans ce dernier cas statistiquement indépendantes ou corrélées, stationnaires, cyclostationnaires ou non-stationnaires. Nous développons des approches combinant de nouveaux algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe (non unitaires) à de nouveaux détecteurs de points (temps-fréquence ou autres...) particuliers permettant d'élaborer le ou les ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. Les principaux avantages de ces approches sont d'être plus directes en ce sens qu'elles ne requièrent plus de blanchiment préalable des observations. Elles permettent en outre d'aborder le cas réputé difficile des signaux corrélés.

En ce qui concerne les algorithmes de (bloc) diagonalisation conjointe, nous proposons quatre nouveaux algorithmes sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée. Le premier algorithme est de type algébrique itératif. Il est basé sur l'optimisation d'un critère de type moindres carrés. Les trois autres approches utilisent un schéma d'optimisation de type gradient. Dans un premier temps le calcul du gradient matriciel de la fonction de coût étudiée est approché. Puis dans un second temps le calcul exact est mené et deux nouveaux algorithmes sont proposés : l'un à base de gradient, l'autre à base de gradient relatif. Nous étudions les versions à pas fixe de ces trois algorithmes, puis les versions à pas optimal afin d'accélérer la convergence des algorithmes (le pas est alors recalculé algébriquement à chaque itération en cherchant les racines d'un polynôme d'ordre trois). Un lien avec la diagonalisation conjointe non unitaire est également établi. Ces algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe possèdent l'avantage d'être généraux : les matrices de l'ensemble considéré ne sont ni nécessairement réelles, ni à symétrie hermitienne, ni définies positives et le bloc-diagonaliseur conjoint peut être une matrice unitaire ou non-unitaire.

Mots clefs : Algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe, décompositions matricielles conjointes, séparation aveugle de sources, mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources corrélées, fonction de corrélation cyclique, spectres et distributions temps-fréquence spatiaux bilinéaires et quadratiques, détecteurs automatiques de points.

BLIND SEPARATION OF LINEAR CONVOLUTIVE MIXTURES OF CORRELATED SOURCES

Abstract : In this thesis, we study the problem of the blind separation of over-determined linear convolutive real or complex mixtures of deterministic or random, statistically independent or correlated, stationary, cyclo-stationary or non-stationary and real or complex sources. We have developed approaches that combine the new (non-unitary) joint (block) diagonalization to two novel detectors of particular points to build the matrices set to be joint (block) diagonalized. The main advantages of the proposed approaches are that they are more direct since they do not require a pre-whitening stage any more and that they can be used with correlated signals.

Concerning the joint block-diagonalization algorithms, we have proposed four joint block-diagonalization algorithms. The first algorithm is iterative and based on an algebraic optimization scheme. The three other ones are based on gradient approaches. The first one relies upon a gradient approach, but the matrix gradient is approximated, whereas the two other ones are based on an exact calculus (one is based on the gradient approach, the other is based on the relative gradient approach). The optimal

step size versions of these three algorithms is provided to accelerate their convergence. It means that the step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of a 3rd-degree polynomial. The main advantage of the proposed algorithms is that they are more general (the real, positive definite or hermitian assumptions about the matrices belonging to the considered set are no more necessary and the found joint block diagonalizer can be either a unitary or a non-unitary matrix). They can also be applied to solve the joint diagonalization problem.

Key words : Joint block-diagonalization algorithms, matrix decompositions, blind sources separation, over-determined convolutive linear mixtures of correlated sources, cyclic correlation function, bilinear and quadratic time-frequency spectra and distributions, points automatic detection procedures.

Deuxième partie
Documents annexes

Nonorthogonal Joint Diagonalization of Spatial Quadratic Time-Frequency Matrices for Source Separation

Laurent Giulieri, Hicham Ghennioui, Nadège Thirion-Moreau, and Eric Moreau

Abstract—The separation problem of an instantaneous mixture of deterministic or random source signals is addressed. We show that the separation can be realized through the nonorthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices. One advantage of the proposed method is that it does not require any whitening stage, and thus, it is intended to work even with a class of correlated signals. We also propose a general automatic time-frequency point selection procedure for the determination of the above matrices to be joint diagonalized. An analytical example and computer simulations are provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed approach and to compare it with classical ones.

Index Terms—Blind source separation, nonorthogonal joint diagonalization, spatial quadratic time-frequency representations.

I. INTRODUCTION

DURING the past decade, many blind identification approaches have considered a problem called *source separation*. In such a problem, the coupling channels are assumed to have unknown constant gains. The aim is to recover the input signals called sources from the output ones called observations. It has to be realized without the explicit use of the sources (assumed unobservable) and without any model of the mixture matrix.

Many solutions have been proposed to solve this problem. Most of them consider random sources. Recently, interest has been growing for solutions based on the use of time-frequency (t-f) representations (see [1]–[4], which are directly related to our development). One of the very first solutions of that kind proposes, after a first whitening stage, to joint diagonalize matrices of quadratic t-f representations calculated at some particular t-f points corresponding to so-called source autoterms [1]. However, a problem subsists that concerns the building of the matrices set to be joint diagonalized. This requires the automatic selection of specific t-f points in such a way that the associated spatial quadratic time-frequency (SQTF) matrices for the sources are diagonal. Some papers have considered this problem [2]–[4].

This letter follows two main objectives. First, we propose a general automatic t-f point selection procedure to determine which points correspond to one single source autoterm. It is

general because it is only based on the algebraic properties of the SQTF matrices of the observations. Moreover, it is not restricted to the case of an orthogonal mixing matrix and, thus, can be considered when observations are not prewhitened. Moreover, the sources can be deterministic or random and, in the latter case, correlated or not. The second objective consists in showing that the separation can be realized thanks to joint diagonalization (JD) of SPTF matrices without the whitening stage by considering a nonorthogonal JD procedure. Notice that this last point was preliminary proposed in [4] but in the real case. For that task, we use the nonorthogonal JD procedure proposed by Yeredor in [5]. Since the whitening stage is no longer required, one of the main advantages of such an approach is the ability to separate even correlated sources.

Finally, computer simulations are provided in order to evaluate the effectiveness of the proposed method and to compare it with other existing methods.

II. PROBLEM STATEMENT AND DEFINITIONS

A. Model and Assumptions

In the blind source separation problem $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, sources are assumed to be received on an antenna of $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ sensors. We consider that $M \geq N$ and thus, this is the so-called overdetermined case. In matrix and vector notations, the input/output relationship of the mixing system is given, in the noiseless case, by

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad (1)$$

where \mathbf{A} is the $M \times N$ mixing matrix, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_M(t))^T$ is the $M \times 1$ observations vector, and $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_N(t))^T$ is the $N \times 1$ sources vector. The superscript $(\cdot)^T$ denotes the transpose operator.

Assuming that the mixing matrix is unknown and that the sources are unobservable, the problem is then to estimate an “inverse” of the matrix \mathbf{A} . It is well known that such a problem possesses some undetermined factors. In fact, it can be solved generally only up to a diagonal matrix \mathbf{D} (arbitrary attenuations for the restored sources) and a permutation matrix \mathbf{P} (arbitrary order of restitution).

Finally, if the mixing matrix \mathbf{A} is first estimated, we just have to apply the pseudo-inverse $\mathbf{A}^\#$ of \mathbf{A} to the observations vector to recover the sources.

In what follows, we consider the following assumptions.

- The mixing matrix \mathbf{A} is complex and full-column rank.

Manuscript received July 2, 2004; revised October 14, 2004. The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Dr. Geert Leus.

The authors are with the STD, ISITV, F-83162 La Valette du Var Cedex, France (e-mail: giulieri@univ-tln.fr; thirion@univ-tln.fr).

Digital Object Identifier 10.1109/LSP.2005.843760

- The number N of sources is known.
- The source signals $s_i(t), i = 1, \dots, N$ are complex. They are either deterministic or nonstationary random signals.

Notice that in the random case, the sources are not *a priori* assumed to be uncorrelated. That is an important difference from the works presented in [1] and [2].

Now, we need to introduce two operators.

B. Spatial Quadratic Time-Frequency Spectrum

For any vectorial complex signal $\mathbf{z}(t)$, its correlation matrix is defined as

$$\mathbf{R}_z(t, \tau) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{z} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \mathbf{z}^H \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right\} \quad (\text{a})$$

where $\mathbf{E}\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation operator, and superscript $(\cdot)^H$ denotes the conjugate transpose operator. Notice that in the deterministic signal case, the expectation is simply removed.

The Spatial Quadratic Time-Frequency Spectrum (SQTFS) is defined as

$$\mathbf{D}_z(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_z(\theta, \theta') K(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta' \quad (2)$$

where the integral operates component wise onto the matrix, leading, thus, to a matrix of the same dimension. The function $K(\theta, \theta'; t, \nu)$ stands for the kernel of the transformation. Diagonal terms of matrix $\mathbf{D}_z(t, \nu)$ are called autoterms, while the other ones are called crossterms.

Now, let us give an important example. The spatial Wigner–Ville Spectrum [SWVS, denoted $\mathbf{D}_{\text{WVS},z}(t, \nu)$] [6] is given by

$$\mathbf{D}_{\text{WVS},z}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_z(t, \tau) e^{-2i\nu\pi\tau} d\tau, \text{ where} \quad (3)$$

where $i^2 = -1$.

One can remark that the spatial Wigner–Ville transformation [SWV, denoted $\mathbf{D}_{\text{WV},z}(t, \nu)$] is directly obtained considering deterministic signals using the above definition.

Moreover, as most simulations in Section V are performed using the spatial Pseudo Wigner–Ville transformation [SPWV, denoted $\mathbf{D}_{\text{PWV},z}(t, \nu)$], its expression is also recalled here in the deterministic case

$$\mathbf{D}_{\text{PWV},z}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{z} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \mathbf{z}^H \left(t - \frac{\tau}{2} \right) h(\tau) \times \exp(-2i\nu\pi\tau) d\tau \quad (4)$$

where $h(\tau)$ is any smoothing window. Notice that SWV is obtained by considering $h(\tau) = 1$ for all τ .

III. WHY NONORTHOGONAL JOINT DIAGONALIZATION?

Using (1), (a), and (2), the SQTFS $\mathbf{D}_x(t, \nu)$ of the observations vector directly admits the following decomposition

$$\mathbf{D}_x(t, \nu) = \mathbf{A} \mathbf{D}_s(t, \nu) \mathbf{A}^H \quad (5)$$

where $\mathbf{D}_s(t, \nu)$ is the SQTFS of the sources vector.

Notice that in general, the matrix $\mathbf{D}_s(t, \nu)$ for any t and ν has no special structure. Nevertheless, considering the random signal case, if the sources are moreover assumed uncorrelated (often, the strong assumption of statistical independence is considered), as in [1] and [2], then $\mathbf{D}_s(t, \nu)$ is diagonal for any t

and ν . Thus, an idea for the estimation of \mathbf{A} is, after a whitening stage, to find an orthogonal matrix for the JD of $\mathbf{D}_x(t, \nu)$ for a given set of t-f points.

On the other hand, one can take more complete advantage of the t-f representation properties. That is what we propose. However, before entering into the details, let us just give a simple analytical example to illustrate our future assumptions and derivations. To that aim, let us consider as sources two random exponential waves as

$$s_k(t) = \exp(i(2\pi f_k t + \phi_k)), \quad k = 1, 2 \quad (6)$$

with distinct frequencies, i.e., $f_2 \neq f_1$ and where ϕ_1 and ϕ_2 are two random variables, uniformly distributed over $[0, 2\pi[$. Notice that if we put $\phi_2 \equiv \phi_1$, these two signals are zero mean and correlated. Otherwise, if ϕ_1 and ϕ_2 are statistically independent, the two random waves are zero mean and uncorrelated. First, the components of the correlation matrix are calculated. It is easy to see that

$$R_{s_k, s_k}(t, \tau) = \exp(2i\nu\pi f_k \tau) \quad (7)$$

$$k = 1, 2 \quad (8)$$

$$R_{s_1, s_2}(t, \tau) = \mathbf{E}\{\exp(i(\phi_1 - \phi_2))\} \times \exp(2i\nu\pi t(f_1 - f_2)) \exp\left(2i\nu\pi\tau\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)\right) \quad (9)$$

where $R_{s_i, s_j}(t, \tau) = (\mathbf{R}_s(t, \tau))_{i,j}$.

Considering the Wigner–Ville spectrum whose expression is given in (3), it is also easy to see that

$$D_{\text{WVS}, s_k, s_k}(t, \nu) = \delta(\nu - f_k), k = 1, 2 \quad (10)$$

$$D_{\text{WVS}, s_1, s_2}(t, \nu) = \mathbf{E}\{\exp(i(\phi_1 - \phi_2))\} \times \exp(2i\nu\pi(f_1 - f_2)t) \delta\left(\nu - \frac{f_1 + f_2}{2}\right) \quad (11)$$

where $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function and where $D_{\text{WVS}, s_i, s_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\text{WVS}, s}(t, \nu))_{i,j}$.

Let us make two remarks about the above result. First, except for the case where the signals $s_1(t)$ and $s_2(t)$ are uncorrelated, where the matrix $\mathbf{D}_{\text{WVS}, s}(t, \nu)$ is naturally diagonal for all t and ν , the term $D_{\text{WVS}, s_1, s_2}(t, \nu)$ is, in general, nonzero for $\nu = (f_1 + f_2)/2$. That is true in particular when $\phi_2 \equiv \phi_1$. Hence, the matrix $\mathbf{D}_{\text{WVS}, s}(t, \nu)$ is not diagonal for all t and ν , implying that a JD procedure for the estimation of \mathbf{A} is, in that case, not applicable for all t and ν . Nevertheless, there exists some t-f points for which the matrix $\mathbf{D}_{\text{WVS}, s}(t, \nu)$ has a particular structure, even when correlated signals are considered. Indeed, for $\nu = f_1$ and for all t , we have $D_{\text{WVS}, s_1, s_1}(t, \nu) = \delta(0)$ and $D_{\text{WVS}, s_2, s_2}(t, \nu) = D_{\text{WVS}, s_1, s_2}(t, \nu) = 0$. Also, for $\nu = f_2$ and for all t , we have $D_{\text{WVS}, s_2, s_2}(t, \nu) = \delta(0)$ and $D_{\text{WVS}, s_1, s_1}(t, \nu) = D_{\text{WVS}, s_1, s_2}(t, \nu) = 0$. Hence, for the above considered t-f points, the matrix $\mathbf{D}_{\text{WVS}, s}(t, \nu)$ is diagonal and rank one. Thus, for that kind of t-f point, a JD procedure can be considered again.

It is also important to notice that, when considering single autoterm t-f points, the above rank-one property is general. Indeed, according to the ‘‘middle point rule’’ [6] that defines the geometry of interferences, if two sources are simultaneously

present on the same t-f point, then these two “autoterms” interfere in their middle (here, at the same t-f point) to give a third term, which happens to be a crossterm. Hence, the SQTFS of the sources vector calculated at this t-f point is no longer diagonal. The rank-one diagonal matrix is, thus, the “only” possibility of the diagonal matrix.

Notice also that since the sources are no longer considered uncorrelated, a classical whitening stage (full diagonalization of the correlation matrix at zero lag) cannot be considered any more. Moreover, since the above SQTFS matrices are all rank one, none of them can be used for any whitening stage. This is the reason why we propose the use of a nonorthogonal JD procedure in order to estimate \mathbf{A} .

We now briefly describe the problem of nonorthogonal JD. Let us consider a set \mathcal{D} of N_m complex matrices $\mathbf{D}_i, i \in \{1, \dots, N_m\}$ that all admit the following decomposition: There exists a matrix \mathbf{A} and N_m diagonal matrices $\mathbf{\Lambda}_i, i \in \{1, \dots, N_m\}$ such that

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{A}\mathbf{\Lambda}_i\mathbf{A}^H, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\}.$$

The problem consists in estimating the matrix \mathbf{A} and the diagonal matrices $\mathbf{\Lambda}_i, i \in \{1, \dots, N_m\}$ from the matrices set \mathcal{D} . For that task, different approaches can be considered. With regard to our specific problem (matrix \mathbf{A} potentially rectangular and matrices $\mathbf{\Lambda}_i, i \in \{1, \dots, N_m\}$ near rank one when they are estimated), the two algorithms in [5] and [7] can be considered. The algorithm in [7] consists of a subspace fitting approach based on a Gauss–Newton descent, while the algorithm in [5] consists of an iterative alternating directions algorithm in order to minimize a weighted least-squares criterion. Since the first one possesses the classical problems of Gauss–Newton-type algorithms (i.e., the convergence depends on the initialization), we use the second one in the presented computer simulations.

IV. BUILDING OF THE SET OF MATRICES TO BE JOINT DIAGONALIZED

An important problem subsists: to find the t-f points for which the SQTFS matrix of the sources vector corresponds to a single source signal autoterm. Such t-f point selection procedures can be found in the literature [2], [3]. However, they are all built under the assumption of a unitary mixing matrix, i.e., a whitening stage is first considered.

However, in all cases, the sources cannot be just any signals. They have to satisfy an additional (cross) assumption to ensure that such t-f points effectively exist and can be found. Hence, we assume in the following that the quadratic t-f representations or spectra of each source signals do not overlap (too much) two by two. In other words, we assume that the signatures of the source signals in the t-f plane are “sufficiently” different. Moreover, we assume that t-f points corresponding to all source signal autoterms can be found. Notice that the above assumptions are implicit in all published source separation algorithms based on t-f representations. Thus, this is not a particularity of our developments.

In this section, we propose a general approach, i.e., without restrictions, for finding a single source signal autoterm. Because a blind problem is considered, we have to find a property about the SQTFS matrix of the sources vector from the only use of

the SQTFS matrix of the observations vector. Thus, directly working on the SQTFS matrix of the observations vector instead of those of the prewhitened observations as classically done, we have to determine which t-f points correspond to single source autoterms. The key point consists in taking advantage of the fact that in such t-f points, the SQTFS should be rank one. Indeed, let us consider that we have a t-f point, say, (t_1, ν_1) , which corresponds to a single source autoterm, say, source signal number one. Then, we have

$$(\mathbf{D}_s(t_1, \nu_1))_{i,j} = \delta_{i,j,1} D_{s_1}(t_1, \nu_1)$$

where $\delta_{i,j,1} = 1$ if $i = j = 1$ and 0 otherwise, and where $D_{s_1}(t_1, \nu_1) \neq 0$. Thus, matrix $\mathbf{D}_s(t_1, \nu_1)$ is rank one. Now, according to (5), we have $\mathbf{D}_x(t_1, \nu_1) = \mathbf{A}\mathbf{D}_s(t_1, \nu_1)\mathbf{A}^H$. Since matrix \mathbf{A} is assumed to be full-column rank, then it is well known that the matrix $\mathbf{D}_x(t_1, \nu_1)$ is also rank one. Notice that if $M = N$, the converse is also true [8, p. 220]. Hence, an idea for finding useful t-f points is to look at the time-frequency points where the SQTFS matrix of the observations vector is rank one.

Now, from a practical point of view, to test this property, we propose to use a Singular Value Decomposition (SVD). Hence, by SVD, we have $\mathbf{D}_x(t, \nu) = \mathbf{V}(t, \nu)\mathbf{\Lambda}(t, \nu)\mathbf{U}^H(t, \nu)$, $\mathbf{V}(t, \nu)$ and $\mathbf{U}(t, \nu)$ are $M \times M$ unitary matrices, and $\mathbf{\Lambda}(t, \nu) = \text{diag}\{\lambda(t, \nu)\}$ is a diagonal matrix in $\mathbb{R}^{M \times M}$ with non-negative components. Let $\lambda(t, \nu) = (\lambda_1(t, \nu), \dots, \lambda_M(t, \nu))^T$, and assume that the singular values are organized in a decreasing order: $\lambda_1(t, \nu) \geq \lambda_2(t, \nu) \geq \dots \geq \lambda_M(t, \nu) \geq 0$. Then, the first way to check whether or not a matrix is rank one is to consider the following rule:

$$\text{choose } (t, \nu), \quad \text{such that } \begin{cases} \lambda_1(t, \nu) > \varepsilon_1 \\ \sum_{k=2}^M \lambda_k(t, \nu) < \varepsilon_2 \end{cases} \quad (12)$$

where ε_1 is a (sufficiently) high constant, and ε_2 is a (sufficiently) small positive constant.

A second way can be the following rule:

$$\text{choose } (t, \nu), \quad \text{such that } \begin{cases} \mathcal{C}(t, \nu) = \frac{\lambda_1(t, \nu)}{\sum_{k=1}^M \lambda_k(t, \nu)} > 1 - \varepsilon_3 \\ \sum_{k=1}^M \lambda_k(t, \nu) > \varepsilon_4 \end{cases} \quad (13)$$

where ε_3 and ε_4 are positive constants. Notice that the above selection procedure can be seen as a generalization of the one in [2] to the extent that it is applied without prewhitening of the observations, i.e., directly from $\mathbf{D}_x(t, \nu)$. Let us make a few complementary remarks: From a practical point of view, to avoid having to divide by zero, we have to detect t-f points corresponding to sufficiently significant energy. In our case, this is not done using the trace matrix operator, as suggested in [2], but only checking that the sum of the singular values is not null. Notice, finally, that a “threshold-free” procedure could be proposed, as the one in [2], but it requires the derivation of the gradient and the Hessian of $\mathcal{C}(t, \nu)$.

V. COMPUTER SIMULATIONS

We consider $N = 3$ complex sources with 256 time samples. With regard to the first source, both its real and its imaginary parts are the real part of linear frequency modulation signals. With regard to the second source, both its real and its imaginary parts are the real part of sinusoidal frequency modulation

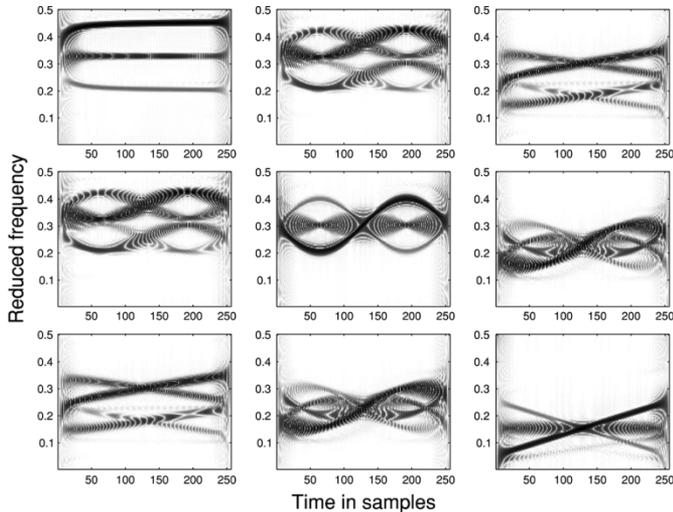


Fig. 1. Real part of the SPWV transform of the sources vector.

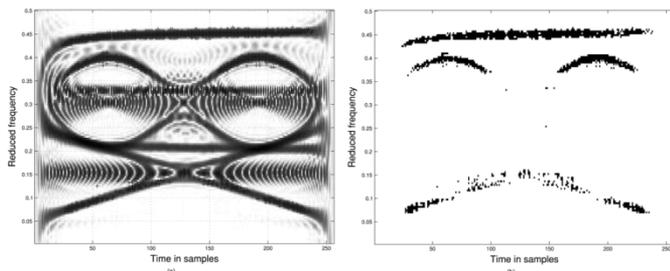


Fig. 2. T-f points selected in an automatic mode. Left: represented by a “+” and superimposed on the trace of the SPWV distribution of the sources. Right: represented by a small black box.

signals, and finally, with regard to the third source, both its real part and its imaginary parts are the real part of power-law frequency modulation signals. The Spatial Pseudo Wigner–Ville representation [definition in (4)] is used in the present simulations. The real part of the source SPWV, i.e., $D_{PWV,s}(t, \nu)$, is given in Fig. 1. It is computed over 128 frequency bins and with a Hamming window of length 65. The sources are mixed by a complex 3×3 mixing matrix.

The used t-f points are displayed in Fig. 2. On the left, they are displayed with a “plus,” and for an easier interpretation, they are superimposed with the trace of the source SPWV; on the right, they are represented by a small black box. They have been obtained in an automatic mode using the proposed selection procedure, and they have led to the selection of 1501 matrices among the 32 768 possible ones in our case. The second rule in (14) is chosen in this example with $\varepsilon_3 = 0.005$ and $\varepsilon_4 = 5$. For questions of computational load, we also randomly (according to a uniform law) choose 10, 50, 100, and 500 matrices, which constitute four smaller sets of matrices (subsets of the initial set of 1501 matrices) to be joint diagonalized.

We compare our proposed algorithm, denoted by JD_{NO} , with the unitary JD algorithm proposed in [1] using the same set of matrices and with the classical JADE algorithm [10]. To evaluate the performances of the separating algorithms, we use the performance index I proposed in [9]. This index is given in deci-

TABLE I
COMPARISON OF THE PERFORMANCE INDEXES

Number of considered time-frequency points	10	50	100	500	1501
$I_{JD_{NO}}$ (dB)	-30.1	-35.9	-39.9	-41.0	-41.3
I_{JD} (dB)	-23.9	-24.5	-24.7	-24.9	-24.9
I_{JADE} (dB)	-22.5				

bels, defined by $I \text{ dB} = 10 \log(I)$. The resulting performances indexes are summed up in Table I.

It is clear from these results that in this case, the proposed nonorthogonal JD method performs better than the others. We can also observe a decrease in the performances using smaller subsets of matrices, even though those remain relatively good.

VI. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this letter, we have shown that blind source separation based on SQTF representations can be performed without a preliminary whitening stage of the observations. We have considered in the same framework both deterministic and nonstationary random signals. Moreover, the complex mixture and signals case is considered. All of that is made possible thanks to the proposition of a general automatic single autoterm selection procedure combined with a nonunitary JD procedure. One of the main advantages of such an approach is that it applies even to correlated sources.

ACKNOWLEDGMENT

The authors wish to greatly thank the reviewers for their very interesting suggestions and comments.

REFERENCES

- [1] A. Belouchrani and M. G. Amin, “Blind source separation based on time-frequency signal representations,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, no. 11, pp. 2888–2897, Nov. 1998.
- [2] C. Févotte and C. Doncarli, “Two contributions to blind source separation using time-frequency distributions,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, no. 3, pp. 386–389, Mar. 2004.
- [3] L. Giulieri, N. Thirion-Moreau, and P.-Y. Arquès, “Blind sources separation based on bilinear time-frequency representations: A performance analysis,” in *Proc. ICASSP*, Orlando, FL, May 2002, pp. 1649–1652.
- [4] —, “Blind sources separation based on quadratic time-frequency representations: A method without pre-whitening,” in *Proc. ICASSP*, vol. V, Hong Kong, China, Apr. 2003, pp. 289–292.
- [5] A. Yeredor, “Non-orthogonal joint-diagonalization in the least squares sense with application in blind sources separation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, Jul. 2002.
- [6] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, X. Hermès, Ed. Paris, France, 1993.
- [7] A. J. Van Der Veen, “Joint diagonalization via subspace fitting techniques,” in *Proc. ICASSP*, Salt Lake City, UT, May 2001, pp. 2773–2776.
- [8] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [9] E. Moreau, “A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, Mar. 2001.
- [10] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non-Gaussian signals,” *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, vol. 40, pp. 362–370, 1993.

A Nonunitary Joint Block Diagonalization Algorithm for Blind Separation of Convolutive Mixtures of Sources

Hicham Ghennioui, El Mostafa Fadaili, Nadège Thirion-Moreau, Abdellah Adib, and Eric Moreau, *Member, IEEE*

Abstract—This letter addresses the problem of the nonunitary joint block diagonalization of a given set of complex matrices whose potential applications stem from the blind separation of convolutive mixtures of sources and from the array processing. The proposed algorithm is based on the algebraic optimization of a least-mean-square criterion. One of its advantage is that a pre-whitening stage is no more compulsorily required when this algorithm is applied in the blind source separation context. Computer simulations are provided in order to illustrate its behavior in three cases: when exact block-diagonal matrices are built, then when they are progressively perturbed by an additive Gaussian noise and, finally, in the context of blind separation of convolutive mixtures of temporally correlated sources with estimated correlation matrices. A comparison with a classical orthogonal joint block diagonalization algorithm is also performed, and a new performance index is introduced to measure the performance of the separation.

Index Terms—Blind source separation, convolutive mixtures, joint decomposition, joint-block diagonalization algorithm.

I. INTRODUCTION

DURING the last decade, the problem of the joint decomposition of matrices or tensors sets has been widely studied since it finds interesting applications in signal processing stemming from blind source separation (BSS) or array processing.

The first problem to have been considered was the so-called unitary joint diagonalization of a matrices set. It has led to the well-known JADE [5] and SOBI [3] algorithms for blind separation of instantaneous mixtures of sources. The unitary joint diagonalization of tensors sets has been studied in [6], [7], and [13]. Thereafter, the nonunitary joint diagonalization of matrices sets has been tackled in [10], [14], and [17]–[20] using more or less strong assumptions on the matrices belonging to the set under consideration. More recently, another matrix decomposition has proven to be useful in BSS, cryptography, and telecommunications. It is called joint zero-diagonalization since the wanted matrices possess a zero diagonal in such a decomposition. The

Manuscript received April 23, 2007; revised June 1, 2007. The work of H. Ghennioui was supported by a French-Moroccan STIC cooperation grant. The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Prof. Yue (Joseph) Wang.

H. Ghennioui is with the LSEET-LEPI, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var, 83957 La Garde, France, and also with GSCM-LRIT, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc (e-mail: ghennioui@gmail.com).

E. M. Fadaili is with the I.B.I.S.C, CNRS FRE 2873, 91020 Evry-Courcouronnes, France (e-mail: fadaili@iup.univ-evry.fr).

N. Thirion-Moreau and E. Moreau are with the LSEET-LEPI, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var, 83957 La Garde, France (e-mail: moreau@univ-tln.fr; thirion@univ-tln.fr).

A. Adib is with the GSCM-LRIT, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc, and also with DPG, IS, Rabat, Maroc (e-mail: adib@israbat.ac.ma).

Digital Object Identifier 10.1109/LSP.2007.903273

unitary case has been first addressed, e.g., in [1], while the two first nonunitary solutions (which are iterative ones) can be found in [9] and [10].

Finally, a last matrix decomposition appears as particularly interesting in blind separation of convolutive mixtures of sources or array processing [2], [4], [11], [16]. It is called joint block-diagonalization (JBD) since the sought-after matrices are block diagonal matrices¹ in such a decomposition. The unitary case has been addressed, e.g., in [4] and [8]. The main goal of this letter is to provide a new algorithm operating under nonunitary transformation. It relies upon the minimization of a least-mean-square criterion. The links with the nonunitary joint diagonalization approach developed in [10] are emphasized. Computer simulations are also provided in order to illustrate the behavior of this algorithm in different cases. First, exactly block-diagonal matrices are used, then, they are slightly corrupted by noise (the block diagonal assumption is no more valuable), and finally, in the context of blind separation of convolutive mixtures of temporally correlated sources, estimated correlation matrices are considered. A comparison with a classical orthogonal JBD algorithm is also performed, and a new performance index is introduced to measure the quality of the separation. This letter is organized as follows: in Section II, we present the algebraical derivations leading to the proposed nonunitary JBD algorithm. We also emphasize its links with nonunitary joint-diagonalization. We show that the proposed algorithm finds applications in the field of the blind separation of convolutive mixtures of sources in Section III-A, where the model and the related assumptions are recalled. In Section III-B, the performances of the proposed method are evaluated and compared with another existing one by computer simulations. Finally, in Section IV, conclusions are given.

II. NEW APPROACH OF THE JBD PROBLEM

The problem of the nonunitary JBD is stated as follows. Let us consider a set \mathcal{M} of N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$) square (Hermitian) matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, for all $i \in \{1, \dots, N_m\}$ that all admit the following decomposition:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^H, \text{ or } \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\}$$

$$\text{where } \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{D}_{i,22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{r-1r} \\ \mathbf{0}_{r1} & \dots & \mathbf{0}_{rr-1} & \mathbf{D}_{i,rr} \end{pmatrix}, \text{ for all } i \in \{1, \dots, N_m\}$$

are $N \times N$ block diagonal matrices with $\mathbf{D}_{i,jj}$,

¹A block diagonal matrix is a block matrix in which the diagonal blocks are square matrices of any size (possibly even), and the off-diagonal blocks are zero matrices.

$i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ are $n_j \times n_j$ square matrices so that $n_1 + \dots + n_r = N$ (in the specific case of sources separation, we will assume that all the matrices have the same size, i.e., $N = r \times n_j$, where $\mathbf{0}_{ij}$ denotes the $n_i \times n_j$ null matrix and $(\cdot)^H$ the transpose conjugate operator. \mathbf{A} is a $M \times N$ ($M \geq N$) full rank matrix and \mathbf{B} stands for its pseudo-inverse (or generalized Moore–Penrose inverse). The set of the N_m square (Hermitian) matrices $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ is denoted \mathcal{D} . The nonunitary approximate JBD problem consists of estimating the matrix \mathbf{B} from the matrices set \mathcal{M} . The particular case of an unitary matrix \mathbf{B} (orthogonal in the real case) has been already studied in [4] and [8], leading to unitary approximate JBD algorithms. Here, we propose to consider the following cost function:

$$C_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \left\| \text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r} \{ \mathbf{B} \mathbf{M}_k \mathbf{B}^H \} \right\|_F^2 \quad (1)$$

where the operator $\text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r} \{ \cdot \}$ denotes the zero-block-diagonal matrix and $\| \cdot \|_F$ the Frobenius norm. Thus

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r} \{ \mathbf{M} \} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notice that links with the nonunitary joint-diagonalization problem can be easily established by considering that the $\mathbf{D}_{i,j,j}$, for all $j \in \{1, \dots, r\}$ and for all $i \in \{1, \dots, N_m\}$, are no more $n_j \times n_j$ matrices but simply scalars, i.e., $n_j = 1$, for all $j \in \{1, \dots, r\}$ involving $r = N$. Then, the cost function $C_{BD}(\mathbf{B})$ writes $\sum_{k=1}^{N_m} \left\| \text{Offdiag} \{ \mathbf{B} \mathbf{M}_k \mathbf{B}^H \} \right\|_F^2$, with $(\text{Offdiag} \{ \mathbf{M} \})_{ij} = (1 - \delta_{ij}) M_{ij}$, which is the cost function $C_D(\mathbf{B})$ used in [10].

Let us consider that $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix}$, where \mathbf{B}_j , $j \in \{1, \dots, r\}$

are r block matrices of dimension $n_j \times M$. The cost function (1) can be rewritten as

$$\begin{aligned} C_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \left\| \mathbf{B}_i \mathbf{M}_k \mathbf{B}_j^H \right\|_F^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \left| \mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^H \right|^2 \quad (2) \end{aligned}$$

where \mathbf{b}_j^n , for all $n \in \{1, \dots, n_j\}$ stand for the n_j row vectors of matrices \mathbf{B}_j , for all $j \in \{1, \dots, r\}$. Then

$$\begin{aligned} C_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \left(\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^H \right) \\ &\quad \times \left(\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^H \right)^H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \left[\sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_k^H \right] \\ &\quad \times (\mathbf{b}_i^m)^H \\ &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) (\mathbf{b}_i^m)^H \quad (3) \end{aligned}$$

where $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) = \sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_k^H$ is a Hermitian matrix.

As $(\mathbf{b}_j^n)^H \mathbf{b}_j^n$ is of rank one, for all $j = 1, \dots, r$, and for all $n = 1, \dots, n_j$, the matrix $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$ possesses $N - (r-1)n_j = n_j$ eigenvectors associated with null eigenvalues. Then, the minimization of this quadratic form under the unit norm constraint can be achieved by taking the n_j unit eigenvectors associated with the n_j smallest eigenvalues of $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$. However, since matrix \mathbf{Q}_i for a given i also depends on row vectors of matrix \mathbf{B} , we propose to use an iterative procedure. The proposed algebraic nonunitary joint block-diagonalization (denoted by JBD_{A,NU}) algorithm, that provides an estimate, denoted $\hat{\mathbf{B}}$, of the sought-after joint block-diagonalizer, writes

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ with $l \in \mathbb{N}^*$ and given $\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(0)}$ an initial matrix, do (a) and (b).

(a) Calculate $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$.

(b) Find the n_i lowest eigenvalues $\lambda_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ and the associated eigenvectors $\mathbf{b}_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ of matrix $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$.

Stop after a fixed number of iterations or when

$$\left| \lambda_i^{m(l)} - \lambda_i^{m(l-1)} \right| \leq \varepsilon \text{ where } \varepsilon \text{ is a small positive threshold.}$$

We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm. We consider $M = N = 9$ and $r = 3$. We build a set \mathcal{D} of $N_m = 6$ (resp. 21, 51, 101) Hermitian complex 9×9 matrices, with random entries chosen from a complex Gaussian distribution with zero mean and unit variance. Initially, these matrices are exactly block-diagonal, and then, complex random noise matrices of zero mean and variance σ_b^2 are added. A signal-to-noise ratio can be defined as $\text{SNR} = 10 \log(1/\sigma_b^2)$. To measure the quality of the separation, the following performance index (which is an extension of the one introduced in [13]) is used:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{G}) &= \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

where $(\mathbf{G})_{i,j}$ for all $i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) th (square) block matrix of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{A}$. The better results are obtained when the index performance $I(\cdot)$ is found to be close to 0. Regarding to the plots, $I(\cdot)$ is given in dB and is then defined by $I(\cdot) \text{ dB} = 10 \log(I(\cdot))$. All the displayed results have been averaged over ten Monte Carlo trials. In Fig. 1, the performance index of algorithm JBD_{A,NU} is displayed versus the number of used matrices (left) and versus the SNR (right). These curves illustrate

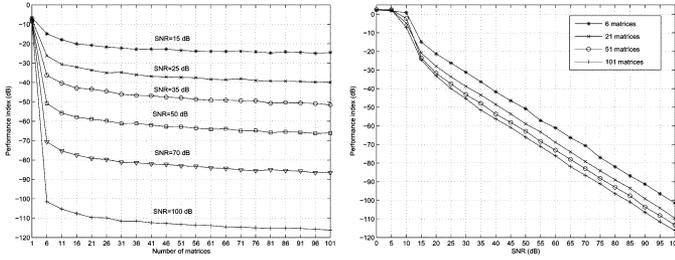


Fig. 1. I in dB versus number of matrices for different values of the SNR (left), I versus SNR for sets of matrices of different size N_m (right).

the good behavior of the algorithm since I is found to be approximately equal to -110 dB at high SNR (as also expected a decrease of the SNR leads to a loss of performance).

III. APPLICATION TO THE BSS PROBLEM

A. Principle

In BSS, the aim is to separate multiple sources mixed through an unknown mixing system from the only system outputs (also called observations). In the convolutive case, the sources are assumed mixed through a linear finite impulse response FIR filter, implying that the observations are linear combinations of the sources combined with their corresponding delayed versions

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t-\ell) + n_j(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4)$$

where $s_j(t)$, for all $j = 1, \dots, n$ are the n sources, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ are the $m > n$ observed signals, $h_{ij}(t)$ is the impulse response between the j th source and i th sensor with an overall extent of $(L + 1)$ taps. $n_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are additive noises.

One possible way to tackle such a problem is to amount to a JBD problem of a given set of matrices (see, for example, [4] and [11]). All the already proposed approaches operate under unitary transformation made possible thanks to a preliminary whitening stage. Our aim is to discard this pre-whitening operation, taking advantage of both our nonunitary JBD algorithm and the following assumptions.

Assumption A: Each source signal is a temporally coherent signal. Moreover, they are uncorrelated two by two, i.e., for all pairs of sources $(s_i(t), s_j(t))$ with $i \neq j$, for all time delay τ , we have $R_{s_i s_j}(t, \tau) = 0$, where $R_{s_i s_j}(t, \tau)$ denotes the cross-correlation function between the two sources $s_i(t)$ and $s_j(t)$ and is defined as $E\{s_i(t) s_j^*(t + \tau)\}$ ($E\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation).

Assumption B: The noises $n_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ are assumed stationary white random signals, mutually uncorrelated, independent from the sources, with the same variance σ_n^2 . The noises correlation matrix can be written as $\mathbf{R}_n(\tau) = E\{\mathbf{n}(t) \mathbf{n}^H(t + \tau)\} = \sigma_n^2 \delta(\tau) \mathbf{I}_m$, where $\delta(\tau)$ stands for the Delta impulse and \mathbf{I}_m for the $m \times m$ identity matrix.

Let us now recall how the convolutive mixing model can be reformulated into an instantaneous one as suggested in [12]. We consider three vectors $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{X}(t)$, and $\mathbf{N}(t)$, respectively, defined as

$$\mathbf{S}(t) = [s_1(t), \dots, s_1(t - (L + L') + 1), \dots, s_n(t - (L + L') + 1)]^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t - L' + 1), \dots, x_m(t - L' + 1)]^T \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t - L' + 1), \dots, n_m(t - L' + 1)]^T \end{aligned} \quad (5)$$

and the $(M \times N)$ matrix \mathbf{A} , where $M = mL'$ and $N = n(L + L')$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

with

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & \dots \\ & & & h_{ij}(L) & & & \end{pmatrix} \quad (6)$$

are $(L' \times (L + L'))$ matrices. The model described by (4) is rewritten in matrix form as $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t)$. To have an overdetermined model, L' must be chosen such that $mL' \geq n(L + L')$. With regard to the noise vector $\mathbf{N}(t)$, assumption B holds for each of its components, involving that its correlation matrix $\mathbf{R}_N(\tau)$ reads

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_N(\tau) &= E\{\mathbf{N}(t) \mathbf{N}^H(t + \tau)\} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) & \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} & \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

where $\tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau)$ is the $L' \times L'$ matrix that contains ones on the τ th superdiagonal if $0 \leq \tau < L'$ or on the $|\tau|$ th subdiagonal if $-L' \leq \tau \leq 0$ and zeros elsewhere.

One finally has $\mathbf{R}_X(t, \tau) - \mathbf{R}_N(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{R}_S(t, \tau) \mathbf{A}^H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_Y(t, \tau)$; moreover, since the source signals are spatially uncorrelated and temporally coherent, the matrices $\mathbf{R}_S(t, \tau)$, for all τ and t are block diagonal matrices. σ_n^2 being either estimated or assumed known (in the square case when it cannot be estimated anymore), the nonunitary approximate joint block diagonalization of the matrices set $\{\mathbf{R}_Y(t, \tau); \forall t, \forall \tau\}$ enables to recover the mixing matrix \mathbf{A} . Yet, let us make two remarks: first, the recovered signals after inversion of the system are obtained up to a permutation and a filter, which are the classical indeterminations of BSS in the convolutive case. Second, in practice, the correlation matrices are estimated like in [15]: the observed sequences are divided into N_b epochs of T_b samples (there is no overlapping), and then, by defining $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{X}(t) w(t - iT_b)$, for all $i = 0, \dots, N_b - 1$ (where $w(t)$ is the windowing sequence), the used correlation matrices are estimated as $\hat{\mathbf{R}}_X(\tau) = 1/N_b \sum_{i=0}^{N_b-1} \mathbf{X}_i(t) \mathbf{X}_i^H(t + \tau)$.

B. Computer Simulations

We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm in the BSS context and to establish a comparison with another algorithm (JBD_U [1]) for the unitary JBD of matrices. While our algorithm is directly applied on the correlation matrices of the observations, the second one is applied

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} -0.6983 + 0.5357z^{-1} - 0.4337z^{-2} + 0.1932z^{-3} & 0.6490 + 0.6242z^{-1} - 0.0190z^{-2} - 0.4344z^{-3} \\ 0.3895 + 0.2495z^{-1} - 0.1363z^{-2} + 0.8761z^{-3} & 0.5780 - 0.5365z^{-1} + 0.4614z^{-2} + 0.4063z^{-3} \\ 0.6930 + 0.5273z^{-1} + 0.4905z^{-2} - 0.0332z^{-3} & 0.4197 + 0.3713z^{-1} - 0.4190z^{-2} + 0.7144z^{-3} \\ 0.6380 + 0.2437z^{-1} + 0.5087z^{-2} - 0.5243z^{-3} & 0.5951 + 0.3306z^{-1} - 0.3974z^{-2} - 0.6153z^{-3} \end{pmatrix}$$

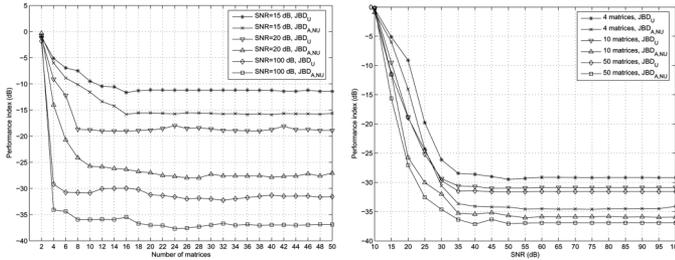


Fig. 2. I in dB versus number of matrices (left), versus SNR (right). Comparison of the $\text{JBD}_{A,NU}$ and the JBD_U algorithms.

after a pre-whitening stage. We consider $m = 4$ mixtures of $n = 2$ speech source signals sampled at 8 kHz to obtain 55 040 time samples. These sources are mixed according to the following matrix ($L = 3$ and $L' = 4$; see the equation at the top of the page), where $\mathbf{A}[z]$ stands for the z transform of the impulse response $\mathbf{A}(t)$. Using $N_b = 429$ pts, $T_b = 128$ pts, $w(t) = \Pi_{T_b}(t - T_b/2)$ ($\Pi_{T_b}(t)$ is the rectangular window of width T_b centered around $t = 0$) and an average over ten Monte Carlo trials, we have obtained the performance index displayed in Fig. 2, versus the number of matrices (left) and versus the SNR (right). One can check that the performance are better with $\text{JBD}_{A,NU}$ than with JBD_U .

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

We have proposed an alternative to existing approximate JBD algorithms under the shape of a novel algorithm that discards the unitary constraint on the sought-after joint-block diagonalizer. It is based on the minimization of a least-mean-square criterion. We have shown that it finds application in the separation of convolutive mixtures of sources. In the chosen example, the set under consideration was constituted of correlation matrices of the observed signals evaluated over different time delays.

REFERENCES

- [1] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, M. Amin, and A. Zoubir, "Blind separation of nonstationary sources," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, no. 7, pp. 605–608, Jul. 2004.
- [2] A. Belouchrani, M. G. Amin, and K. Abed-Meraïm, "Direction finding in correlated noise fields based on joint block-diagonalization of spatio-temporal correlation matrices," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 4, no. 9, pp. 266–268, Sep. 1997.
- [3] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, Feb. 1997.
- [4] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani, and K. Abed-Meraïm, "Jacobi-like algorithm for blind signal separation of convolutive mixtures," *Electron. Lett.*, no. 37, pp. 1049–1050, 2001.
- [5] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non Gaussian signals," *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, vol. 40, pp. 362–370, 1993.
- [6] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?," *Signal Process.*, vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [7] L. DeLathauwer, "Signal processing based on multilinear algebra," Ph.D. dissertation, Univ. Catholique de Leuven, Leuven, Belgium, 1997.
- [8] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. D. Moor, and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification," in *Proc. 23rd Symp. Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.
- [9] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, "Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes," in *Proc. 20ème colloque GRETSI* (in French), Belgium, Sep. 2005, pp. 981–984.
- [10] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 5, pp. 1673–1687, May 2007.
- [11] C. Févotte and C. Doncarli, "A unified presentation of blind source separation methods for convolutive mixtures using block-diagonalization," in *Proc. ICA*, Nara, Japan, 2003.
- [12] A. Gorokhov and P. Loubaton, "Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources," *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. 44, no. 9, pp. 813–820, Sep. 1997.
- [13] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 3, pp. 530–541, Mar. 2001.
- [14] D.-T. Pham, "Joint approximate diagonalization of positive definite matrices," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 1136–1152, 2001.
- [15] K. Rahbar and J. P. Reilly, "A frequency domain method for blind source separation of convolutive audio mixtures," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 13, no. 5, pp. 832–844, Sep. 2005.
- [16] F. J. Theis, "Blind signal separation into groups of dependent signals using joint-block diagonalization," in *Proc. ISCAS 2005*, Kobe, Japan, 2005, pp. 5878–5881.
- [17] A. J. Van Der Veen, "Joint diagonalization via subspace fitting techniques," in *Proc. Int. Conf. Acoustic, Speech, and Signal Processing (ICASSP'2001)*, Salt Lake City, UT, May 2001, pp. 2773–2776.
- [18] A. Yeredor, "Non-orthogonal joint diagonalization in the least square sense with application in blind source separation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, Jul. 2002.
- [19] A. Yeredor, A. Ziehe, and K.-R. Müller, "Approximate joint diagonalization using natural gradient approach," in *Proc. ICA: Lecture Notes in Computer Science (LNCS 3195): Independent Component Analysis and Blind Sources Separation*, Granada, Spain, Sep. 2004, pp. 89–96.
- [20] A. Ziehe, P. Laskov, G. G. Nolte, and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation," *J. Mach. Learn. Res.*, no. 5, pp. 801–818, Jul. 2004.

Non Unitary Joint Block Diagonalization of Complex Matrices Using a Gradient Approach

Hicham Ghennioui^{1,2}, Nadège Thirion-Moreau¹, Eric Moreau¹,
Abdellah Adib^{2,3}, and Driss Aboutajdine²

¹ STD, ISITV, av. G. Pompidou, BP56, F-83162 La Valette du Var Cedex, France
ghennioui@gmail.com, {thirion,moreau}@univ-tln.fr

² GSCM-LRIT, FSR, av. Ibn Battouta, BP1014, Rabat, Maroc

³ DPG, IS, av. Ibn Battouta, BP703, Rabat, Maroc
adib@israbat.ac.ma, aboutaj@ieee.org

Abstract. This paper addresses the problem of the non-unitary approximate joint block diagonalization (NU – JBD) of matrices. Such a problem occurs in various fields of applications among which blind separation of convolutive mixtures of sources and wide-band signals array processing. We present a new algorithm for the non-unitary joint block-diagonalization of complex matrices based on a gradient-descent algorithm whereby the optimal step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of a 3rd-degree polynomial. Computer simulations are provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

1 Introduction

In the recent years, the problem of the joint decomposition of matrices or tensors sets have found interesting solutions through signal processing applications in blind source separation and array processing.

One of the first considered problem was the joint-diagonalization of matrices under the unitary constraint, leading to the nowadays well-known JADE [4] and SOBI [2] algorithms. The following works have addressed either the problem of the joint-diagonalization of tensors [5][7][12] or the problem of the joint-diagonalization of matrices but discarding the unitarity constraint [6][10][14][15][16][17].

A second type of matrices decomposition has proven to be useful in blind source separation, telecommunications and cryptography. It consists in joint zero-diagonalizing several matrices either under the unitary constraint [1] or not [9][10]. Most of the proposed (unitary) joint-diagonalization and/or zero-diagonalization algorithms have been applied to the problem of the blind separation of instantaneous mixtures of sources.

Finally, a third particular type of matrices decomposition arises in both the wide-band sources localization in correlated noise fields and the blind separation

of convolutive mixtures of sources problems. It is called joint block-diagonalization since the wanted matrices are block diagonal matrices¹ in such a decomposition. Such a problem has been considered in [3][8] where the block-diagonal matrices under consideration have to be positive definite and hermitian matrices and the required joint-block diagonalizer is a unitary matrix.

In this paper, our purpose is to discard this unitary constraint. To that aim, we generalize the non unitary joint-diagonalization approach proposed in [16] to the non-unitary joint block-diagonalization of several complex hermitian matrices. The resulting algorithm is based on a gradient-descent approach whereby the optimal step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of a 3rd-degree polynomial. The main advantage of the proposed algorithm is that it is relatively general since the only needed assumption about the complex matrices under consideration is their hermitian symmetry. Finally, the use of the optimal step size speeds up the convergence.

The paper is organized as follows. We state the considered problem in the Section 2. In the Section 3, we present the algebraical derivations leading to the proposed non-unitary joint block-diagonalization algorithm. Computer simulations are provided in the Section 4 in order to illustrate the behaviour of the proposed approach.

2 Problem Statement

The non-unitary joint block-diagonalization problem is stated in the following way: let us consider a set \mathcal{M} of N_m , $N_m \in \mathbb{N}^*$ square matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$ which all admit the following decomposition:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^H \quad \text{or} \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\} \tag{1}$$

where $\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i1} & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{ir} \end{pmatrix}$, $\forall i \in \{1, \dots, N_m\}$, are $N \times N$ block diagonal matrices with \mathbf{D}_{ij} , $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ are $n_j \times n_j$ square matrices so that $n_1 + \dots + n_r = N$ (in our case, we assume that all the matrices have the same size *i.e.* $N = r \times n_j$, $j \in \{1, \dots, r\}$) and where $\mathbf{0}$ denotes the $n_j \times n_j$ null matrix. \mathbf{A} is the $M \times N$ ($M \geq N$) full rank matrix and \mathbf{B} is its pseudo-inverse (or generalized Moore-Penrose inverse).

The non-unitary joint bloc-diagonalization problem consists in estimating the matrix \mathbf{A} and the matrices \mathbf{D}_{ij} , $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ from only the matrices set \mathcal{M} . The case of a unitary matrix \mathbf{A} has been considered in [8] where a first solution is proposed.

¹ A block diagonal matrix is a square diagonal matrix in which the diagonal elements are square matrices of any size (possibly even), and the off-diagonal elements are 0. A block diagonal matrix is therefore a block matrix in which the blocks off the diagonal are the zero matrices and the diagonal matrices are square.

3 Non-Unitary Joint Block-Diagonalization Using a Gradient Approach

In this section, we present a new algorithm to solve the problem of the non-unitary joint block-diagonalization. We propose to consider the following cost function

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2, \tag{2}$$

where $\|\cdot\|_F$ stands for the Frobenius norm and the operator $\text{OffBdiag}\{\cdot\}$ denotes the zero block-diagonal matrix. Thus:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{OffBdiag}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{E} \tag{3}$$

Our aim is to minimize the cost function (2).

To make sure that the found matrix \mathbf{B} keeps on being invertible, it is updated according to the following scheme (see [17]):

$$\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)} \quad \forall m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

where $\mathbf{B}^{(0)}$ is some initial guess, $\mathbf{B}^{(m)}$ denotes the estimated matrix \mathbf{B} at the m -th iteration, $\mathbf{W}^{(m-1)}$ is a sufficiently small (in terms of Frobenius norm) zero-block diagonal matrix and \mathbf{I} is the identity matrix.

Denoting $\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^{(m-1)H} \quad \forall i = 1, \dots, N_m$ and $\forall m = 1, 2, \dots$, where $(\cdot)^H$ stands for the transpose conjugate operator, then at the m -th iteration, the cost function can be expressed versus $\mathbf{W}^{(m-1)}$ rather than $\mathbf{B}^{(m)}$. We now have:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{(\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{M}_i^{(m)}(\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})^H\}\|_F^2 \tag{5}$$

or more simply $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) \triangleq \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{(\mathbf{I} + \mathbf{W})\mathbf{M}_i^{(m)}(\mathbf{I} + \mathbf{W})^H\}\|_F^2$.

At each iteration, the wanted matrix \mathbf{W} is then updated according to the following adaptation rule:

$$\mathbf{W}^{(m)} = -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)}) \quad \forall m = 1, 2, \dots \tag{6}$$

where μ is the step size or adaptation coefficient and where $\nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)})$ stands for the complex gradient matrix defined, like in [13], by:

$$\nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)})}{\partial \mathbf{W}^{(m-1)*}} \quad \forall m = 1, 2, \dots \tag{7}$$

where $(\cdot)^*$ is the complex conjugate operator. We now have to calculate the complex gradient matrix $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^*}$.

3.1 Gradient of the Cost Function $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$

Let $\mathbf{D}_i^{(m)}$ and $\mathbf{E}_i^{(m)}$ respectively denote the block-diagonal and zero block-diagonal matrices extracted from the matrix $\mathbf{M}_i^{(m)}$ ($\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}$). As \mathbf{W} is a zero-block diagonal matrix too, the cost function $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ can be expressed as:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\} + \text{OffBdiag}\{\mathbf{M}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} + \text{OffBdiag}\{\mathbf{W}\mathbf{M}_i^{(m)}\} \\
 &\quad + \text{OffBdiag}\{\mathbf{W}\mathbf{M}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\}\|_F^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\|_F^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{(\mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H)^H (\mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H \\
 &\quad + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H)\} \tag{8}
 \end{aligned}$$

where $\text{tr}\{\cdot\}$ stands for the trace operator. Then, using the linearity property of the trace and assuming to simplify the derivations that the considered matrices are hermitian, we finally find that:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{E}_i^{(m)}\} + 2\text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}(\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)})\} \\
 &\quad + \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)}\} \\
 &\quad + 2\text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \\
 &\quad + \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \\
 &\quad + 2\text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H(\mathbf{D}_i^{(m)}\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{D}_i^{(m)})\} \\
 &\quad + \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)H}\mathbf{W}^H\mathbf{W}\mathbf{E}_i^{(m)}\mathbf{W}^H\} \tag{9}
 \end{aligned}$$

Using now the following properties [11]

$$\text{tr}\{\mathbf{PQR}\} = \text{tr}\{\mathbf{RPQ}\} = \text{tr}\{\mathbf{QRP}\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{P}\mathbf{X}^H\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{P} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{P}\mathbf{X}\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{0} \tag{12}$$

$$d\text{tr}\{\mathbf{P}\} = \text{tr}\{d\mathbf{P}\} \tag{13}$$

$$d\text{tr}\{\mathbf{P}\mathbf{X}^H\mathbf{Q}\mathbf{X}\} = \text{tr}\{\mathbf{P}d\mathbf{X}^H\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{P}\mathbf{X}^H\mathbf{Q}d\mathbf{X}\} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \text{tr}\{\mathbf{P}\mathbf{X}^H\mathbf{Q}\mathbf{X}\}}{\partial \mathbf{X}^*} = \mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{P} \tag{15}$$

It finally leads to the following result:

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) = & 4 \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \right. \\ & + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)H} \\ & \left. + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 Seek of the Optimal Step Size

The expression (16) is then used in the gradient descent algorithm (6). To accelerate its convergence, the optimal step size μ is computed algebraically at each iteration. To that aim, one has to calculate $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}))$, but here we use $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow \mu \mathbf{F}^{(m)}) = -\mu \text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$. $\mathbf{F}^{(m)}$ is the anti-gradient matrix. We use $\text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$ instead of $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ because \mathbf{W} is a sufficiently small (in terms of norm) zero block-diagonal matrix and thus only the off block-diagonal terms are involved in the descent of the criterion. We now have to seek for the optimal step μ ensuring the minimization of the cost function $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$. This step is determined by the rooting of the 3rd-degree polynomial (18) which is obtained as the derivative of the 4rd-degree polynomial $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$ with respect to μ :

$$\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)}) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} \mu + a_2^{(m)} \mu^2 + a_3^{(m)} \mu^3 + a_4^{(m)} \mu^4, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})}{\partial \mu} = 4a_4^{(m)} \mu^3 + 3a_3^{(m)} \mu^2 + 2a_2^{(m)} \mu + a_1^{(m)}, \quad (18)$$

where the coefficients have been found to be equal to:

$$a_0^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{E}_i^{(m)}\} \quad (19)$$

$$a_1^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{E}_i^{(m)H} (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) + (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H \mathbf{E}_i^{(m)}\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_2^{(m)} = & \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^H \mathbf{E}_i^{(m)} \right. \\ & \left. + (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_3^{(m)} = & \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)})^H \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^H \right. \\ & \left. + \mathbf{F} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^H (\mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{F}^H + \mathbf{F} \mathbf{D}_i^{(m)}) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$a_4^{(m)} = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{F}^{(m)} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{F}^{(m)H} \mathbf{F}^{(m)} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{F}^{(m)H}\}. \quad (23)$$

The optimal step μ corresponds to the root of the polynomial (18) attaining the absolute minimum in the polynomial (17).

3.3 Summary of the Proposed Algorithm

The proposed non-unitary joint block-diagonalization based on a gradient algorithm denoted by $\text{JBD}_{\text{NU,G}}$ is now presented below:

Denote the N_m square matrices as $\mathbf{M}_1^{(0)}, \mathbf{M}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{M}_{N_m}^{(0)}$

Given initial estimates $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$ and $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}$

For $m = 1, 2, \dots$

For $i = 1, \dots, N_m$
 Compute $\mathbf{M}_i^{(m)}$ as

$$\mathbf{M}_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} \mathbf{M}_i^{(m-1)} \mathbf{B}^{(m-1)H}$$

 Compute $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ whose expression is given by equation (16)

EndFor

Set $\mathbf{F}^{(m)} = -\text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$

Compute the coefficients $a_0^{(m)}, \dots, a_4^{(m)}$ thanks to (19), (20), (21), (22) and (23)

Set the optimal step μ by the research of the root of the polynomial (18) attaining the absolute minimum in the polynomial (17)

Set $\mathbf{W}^{(m)} = \mu \mathbf{F}^{(m)}$ and $\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)}) \mathbf{B}^{(m-1)}$

EndFor

4 Computer Simulations

In this section, we perform simulations to illustrate the behaviour of the proposed algorithm. We consider a set \mathbf{D} of $N_m = 11$ (resp. 31, 101) matrices, randomly chosen (according to a Gaussian law of mean 0 and variance 1). Initially these matrices are exactly block-diagonal, then matrices with random entries chosen from a Gaussian law of mean 0 and variance σ_b^2 are added. The signal to noise ratio (SNR) is then defined by $\text{SNR} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$. We use the following performance index which is an extension of that introduced in [12]:

$$I(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|^2} - 1 \right) \right]$$

where $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th matrix block (square) of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. The displayed results are averaged over 30 Monte-Carlo trials. In this example, they were obtained considering $M = N = 12$, $r = 3$ and real and symmetric matrices. On the left of Fig. 1 we display the performance index obtained with the proposed algorithm versus the number of used matrices for different values of the SNR. On its right we have plotted the evolution of the performance index versus the SNR.

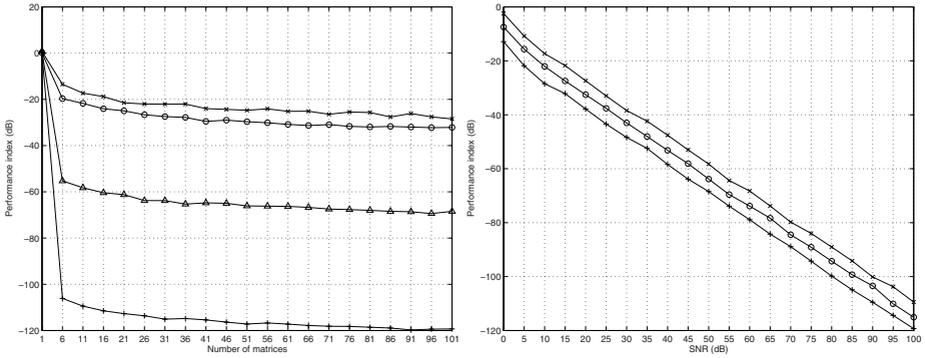


Fig. 1. Left: performance index versus number N_m of used matrices for different values of the SNR (SNR=10 dB (\times), 20 dB (\circ), 50 dB (Δ) and 100 dB ($+$)). Right: performance index versus SNR for different size of the matrices set to be joint block-diagonalized ($N_m=11$ (\times), 31 (\circ), 101 ($+$)).

5 Discussion and Conclusion

In this paper, we have proposed a new algorithm (named $\text{JBD}_{\text{NU,G}}$) based on a gradient approach to perform the non-unitary joint block-diagonalization of a given set of complex matrices. One of the main advantages of this algorithm is that it applies to complex hermitian matrices. This algorithm finds application in blind separation of convolutive mixtures of sources and in array processing. In the context of blind sources separation, it should enable to achieve better performances by discarding the unitary constraint. In fact, starting with a pre-whitening stage is a possible way to amount to a unitary square mixture of sources to be able to use unitary joint-decomposition algorithms. But such a pre-whitening stage imposes a limit on the attainable performances that can be overcome thanks to non-unitary algorithms.

References

1. Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K., Amin, M., Zoubir, A.: Joint anti-diagonalization for blind source separation. In: Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2001), Salt Lake City, Utah (May 2001)
2. Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K., Cardoso, J.-F., Moulines, E.: A blind source separation technique using second order statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing* 45, 434–444 (1997)
3. Bousbiah-Salah, H., Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K.: Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization. In: Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, pp. 448–451 (2001)
4. Cardoso, J.-F., Souloumiac, A.: Blind beamforming for non Gaussian signals. *IEEE Proceedings-F* 40, 362–370 (1993)

5. Comon, P.: Independent component analysis, a new concept? *Signal Processing* 36, 287–314 (1994)
6. Dégerine, S.: Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés. In: Proc. 18ème Colloque GRETSI, Toulouse, Septembre 2001, pp. 311–314 (2001)
7. DeLathauwer, L.: Signal processing based on multilinear algebra. PhD Thesis, Université Catholique de Leuven, Belgique (September 1997)
8. DeLathauwer, L., Févotte, C., De Moor, B., Vandewalle, J.: Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification. In: 23rd Symposium on Information Theory in the Benelux, Louvain-la-Neuve, Belgium (May 2002)
9. Fadaili, E.-M., Thirion-Moreau, N., Moreau, E.: Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes. In: dans les Proc. du 20ème colloque GRETSI, Louvain-La-Neuve, Belgique, Septembre 2005, pp. 981–984 (2005)
10. Fadaili, E.-M., Thirion-Moreau, N., Moreau, E.: Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions. To appear in *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(4) (April 2007)
11. Joho, M.: A systematic approach to adaptive algorithms for multichannel system identification, inverse modeling and blind identification. PHD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich (December 2000)
12. Moreau, E.: A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation. *IEEE Trans. Signal Processing* 49(3), 530–541 (2001)
13. Petersen, K.B., Pedersen, M.S.: The matrix cookbook (January 5, 2005)
14. Pham, D.-T.: Joint approximate diagonalization of positive definite matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 22(4), 1136–1152 (2001)
15. Yeredor, A.: Non-orthogonal joint diagonalization in the least square sense with application in blind source separation. *IEEE Transactions on Signal Processing* 50(7), 1545–1553 (2002)
16. Yeredor, A., Ziehe, A., Müller, K.R.: Approximate joint diagonalization using a natural gradient approach. In: Puntonet, C.G., Prieto, A.G. (eds.) *ICA 2004*. LNCS, vol. 3195, pp. 89–96. Springer, Heidelberg (2004)
17. Ziehe, A., Laskov, P., Nolte, G.G., Müller, K.-R.: A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation. *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, 801–818 (July 2004)

An Algebraic Non Orthogonal Joint Block Diagonalization Algorithm for Blind Separation of Convulsive Mixtures of Sources

Hicham Ghennioui^{2,3}, El Mostafa Fadaili¹,
Nadège Thirion-Moreau², Abdellah Adib^{3,4}, and Eric Moreau²

¹ IBISC, CNRS FRE 2873 40 rue du Pelvoux, F-91020 Evry-Courcouronnes, France

² STD, ISITV, av. G. Pompidou, BP56, F-83162 La Valette du Var Cedex, France
ghennioui@gmail.com, {fadaili,thirion,moreau}@univ-tln.fr

³ GSCM-LRIT, FSR, av. Ibn Battouta, BP1014, Rabat, Maroc

⁴ DPG, IS, av. Ibn Battouta, BP703, Rabat, Maroc
adib@israbat.ac.ma

Abstract. This paper deals with the problem of the blind separation of convulsive mixtures of sources. We present a novel method based on a new non orthogonal joint block diagonalization algorithm (NO – JBD) of a given set of matrices. The main advantages of the proposed method are that it is more general and a preliminary whitening stage is no more compulsorily required. The proposed joint block diagonalization algorithm is based on the algebraic optimization of a least mean squares criterion. Computer simulations are provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed approach in three cases: when exact block-diagonal matrices are considered, then when they are progressively perturbed by an additive Gaussian noise and finally when estimated correlation matrices are used. A comparison with a classical orthogonal joint block-diagonalization algorithm is also performed, emphasizing the good performances of the method.

1 Introduction

In the signal processing community, many works have been recently dedicated to the study of the problem of joint decomposition of matrices or tensors because of their numerous applications especially in blind source separation and array processing [1]-[14].

Here, we are interested in the problem of the blind separation of convulsive mixtures of sources. That is why this communication is dedicated to the so-called joint block-diagonalization of matrices problem. In such a decomposition, the wanted matrices are block diagonal ones¹. Such a problem has been already considered in [1][4][7] but under the constraint that the joint-block diagonalizer is an orthogonal (unitary in the complex case) matrix. Our purpose, here, is to

¹ A block diagonal matrix is a block matrix in which the off-diagonal block terms are zero matrices and the diagonal matrices are square.

discard this unitary constraint. To that aim, we show how the (non necessarily orthogonal) joint-block diagonalizer can be algebraically estimated by minimizing a least mean squares criterion, leading to a new non-orthogonal joint block-diagonalization algorithm. Some computer simulations are provided in order to illustrate the good behaviour of the proposed algorithm. Then, it is shown how this algorithm finds application in blind source separation where it is applied, here, to a set of observations correlation matrices at different time delays.

The rest of this communication is organized as follows. The problem statement and the proposed joint block-diagonalization algorithm are both introduced in the Section 2. In the Section 3, we show how this algorithm can be applied to solve the problem of blind separation of convolutive mixtures of sources. Computer simulations are provided in both sections to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm and to compare it with another one based on an orthogonal joint block-diagonalization.

2 Non-orthogonal Joint Block-Diagonalization Problem

2.1 Problem Statement

The non-orthogonal joint block-diagonalization problem is stated in the following way: let us consider a set \mathcal{M} of N_m , $N_m \in \mathbb{N}^*$ square invertible matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$ which all admit the following decomposition:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^T, \quad \text{or} \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^T, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\} \tag{1}$$

where $\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i1} & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{ir} \end{pmatrix}$, $\forall i \in \{1, \dots, N_m\}$, are $N \times N$ block diagonal

matrices with \mathbf{D}_{ij} , $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ are $n_j \times n_j$ square matrices so that $n_1 + \dots + n_r = N$ (in our case, we will assume that all the matrices have the same size *i.e* $N = r \times n_j$, $\forall j \in \{1, \dots, r\}$) and where $\mathbf{0}$ denotes the $n_j \times n_j$ null matrix. \mathbf{A} is the $M \times N$ ($M \geq N$) full rank matrix and \mathbf{B} is its pseudo-inverse (or generalized Moore-Penrose inverse).

The non-orthogonal joint block-diagonalization problem consists in estimating the matrix \mathbf{A} and the matrices \mathbf{D}_{ij} , $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ (or more simply the matrix \mathbf{B} only) from the matrices set \mathcal{M} . The case of an orthogonal matrix \mathbf{A} has been already considered in [7] where a first solution is proposed.

2.2 Joint Block-Diagonalization Algorithm

In this communication, we propose to consider the following cost function

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{C}^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}\}\|^2, \tag{2}$$

where the operator $\text{OffBdiag}\{\cdot\}$ denotes the zero-block-diagonal matrix and $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. Thus:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{OffBdiag}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Let $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_r]$, where $\mathbf{C}_j, j \in \{1, \dots, r\}$, are r block matrices of dimension $M \times n_j$. The cost function (2) can be rewritten as:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \|\mathbf{C}_i^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r |(\mathbf{c}_i^m)^T \mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n|^2 \quad (4)$$

where $\mathbf{c}_j^n, \forall n \in \{1, \dots, n_j\}$ stand for the n_j column vectors of matrices $\mathbf{C}_j, \forall j \in \{1, \dots, r\}$. Then:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{C}) &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r ((\mathbf{c}_i^m)^T \mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n)((\mathbf{c}_i^m)^T \mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n)^T \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r (\mathbf{c}_i^m)^T (\mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n (\mathbf{c}_j^n)^T \mathbf{M}_k^T) \mathbf{c}_i^m \\ &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r (\mathbf{c}_i^m)^T \left[\sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n (\mathbf{c}_j^n)^T \mathbf{M}_k^T \right] \mathbf{c}_i^m \\ &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r (\mathbf{c}_i^m)^T \mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}}) \mathbf{c}_i^m \end{aligned} \quad (5)$$

where $\mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}}) = \sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k \mathbf{c}_j^n (\mathbf{c}_j^n)^T \mathbf{M}_k^T$ is a symmetric matrix.

As $\mathbf{c}_j^n (\mathbf{c}_j^n)^T$ is rank one, $\forall j = 1, \dots, r$, and $\forall n = 1, \dots, n_j$, the matrix $\mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}})$ possesses $N - (r - 1)n_j = n_j$ eigenvectors associated with null eigenvalues. Then, the minimization of this quadratic form under the unit norm constraint can be achieved by taking the n_j unit eigenvectors associated with the n_j smallest eigenvalues of $\mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}})$. However since matrix \mathbf{Q}_i for a given i also depends on column vectors of matrix \mathbf{C} , we propose to use an iterative procedure. The proposed non-orthogonal joint block-diagonalization (denoted by NO – JBD) writes:

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ with $l \in \mathbb{N}^*$ and given $\mathbf{C}_i^{(0)}$ an initial matrix, do (a) and (b)

- (a) Calculate $\mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}}^{(l)})$
- (b) Find the n_i lowest eigenvalues $\lambda_i^m(l), m \in \{1, \dots, n_i\}$ and the associated eigenvectors $\mathbf{c}_i^m(l), m \in \{1, \dots, n_i\}$ of matrix $\mathbf{Q}_i(\mathbf{C}_{\bar{i}}^{(l)})$

Stop after a given number of iterations or when $|\lambda_i^m(l) - \lambda_i^m(l-1)| \leq \varepsilon$ where ε is a given small positive threshold.

2.3 Computer Simulations

We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm. We consider a set \mathbf{D} of $N_m = 11$ (resp. 31, 56, 96) matrices, randomly chosen (according to a Gaussian law) of mean 0 and variance 1. Initially these matrices are exactly block-diagonal, then random noise matrices of mean 0 and variance σ_b^2 are added. A signal to noise ratio can be defined as $\text{SNR} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$. To measure the quality of the separation, the following performance index (which is an extension of the one introduced in [10]) is used:

$$I(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|^2} - 1 \right) \right]$$

where $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th (square) block matrix of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{C}}^T \mathbf{A}$. All the displayed results have been averaged over 30 Monte-Carlo trials. On the Fig. 1, the performance index of algorithm NO – JBD is displayed versus the number of used matrices (left) and versus the SNR (right). These curves illustrate the good behaviour of the algorithm since $I \approx -110$ dB at high SNR.

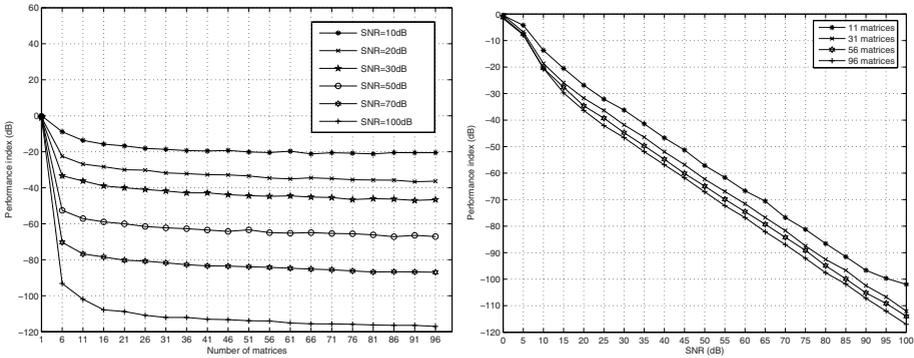


Fig. 1. Left: performance index versus number of matrices, right: performance index versus SNR

3 Separation of Convulsive Mixtures of Sources

3.1 Model and Assumptions

We consider a convulsive finite-duration impulse response (FIR) model given by

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_j(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \tag{6}$$

where $s_j(t), \forall j = 1, \dots, n$ are the n sources, $x_i(t), i = 1, \dots, m$, are the $m > n$ observed signals, $h_{ij}(t)$ is the real transfer function between the j -th source and i -th sensor with an overall extent of $(L + 1)$ taps. $n_i(t), \forall i = 1, \dots, m$ are additive noises. Our developments are based on the two following assumptions:

Assumption A: Each source signal is a real temporally coherent signal. Moreover they are uncorrelated two by two, *i.e.*, for all pairs of sources $(s_i(t), s_j(t))$ with $i \neq j$, for all time delay τ_{ij} , we have $R_{ij}(t, \tau_{ij}) = 0$, where $R_{ij}(t, \tau)$ denotes the cross-correlation function between the sources $s_i(t)$ and $s_j(t)$. It is defined as follows: $R_{ij}(t, \tau) = \mathbf{E}\{s_i(t)s_j(t + \tau)\}$, where $\mathbf{E}\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation.

Assumption B: The noises $n_i(t), i = 1, \dots, m$, are assumed real stationary white random signals, mutually uncorrelated, independent from the sources, with the same variance σ_n^2 . The noises correlation matrix can be written as:

$$\mathbf{R}_n(\tau) = \mathbf{E}\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t + \tau)\} = \sigma_n^2\delta(\tau)\mathbf{I}_m \tag{7}$$

where $\delta(\tau)$ stands for the Delta impulse, \mathbf{I}_m for the $m \times m$ identity matrix and $(\cdot)^T$ for the transpose operator.

Let us now recall how the convolutive mixing model can be reformulated into an instantaneous one [4][7].

Considering the vectors $\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{N}(t)$ respectively defined as:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t - (L + L') + 1), \dots, s_n(t - (L + L') + 1)]^T \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t - L' + 1), \dots, x_m(t - L' + 1)]^T \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t - L' + 1), \dots, n_m(t - L' + 1)]^T \end{aligned}$$

and the $(M \times N)$ matrix \mathbf{A} , where $M = mL'$ and $N = n(L + L')$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

where

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix} \tag{8}$$

are $(L' \times (L + L'))$ matrices, the model described by Eq. (6) can be written in matrix form as:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \tag{9}$$

In order to have an over-determined model, L' must be chosen such that $mL' \geq n(L + L')$. We assume, here, that the matrix \mathbf{A} is full rank. Because of the Assumption A, all the components of $\mathbf{S}(t)$ are temporally coherent signals. Moreover, two different components of this vector are correlated at least in one non

null time delay. With regard to the noise vector $\mathbf{N}(t)$, the Assumption B holds for each of its components involving that its correlation matrix $\mathbf{R}_N(\tau)$ reads:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_N(\tau) &= \mathbb{E}\{\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^T(t + \tau)\} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) & \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{L'} \\ \mathbf{0}_{L'} & \dots & \mathbf{0}_{L'} & \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

where $\tilde{\mathbf{I}}_{L'}(\tau)$ is the $L' \times L'$ matrix which contains ones on the τ^{th} superdiagonal if $0 \leq \tau < L'$ or on the $|\tau|^{th}$ subdiagonal if $-L' \leq \tau \leq 0$ and zeros elsewhere. Then, we have:

$$\mathbf{R}_X(t, \tau) - \mathbf{R}_N(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_S(t, \tau)\mathbf{A}^T = \mathbf{R}_Y(t, \tau) \tag{11}$$

Because sources signals are spatially uncorrelated and temporally coherent, the matrices $\mathbf{R}_S(t, \tau)$, $\forall \tau$ are block diagonal matrices. To recover the mixing matrix \mathbf{A} , the matrices $\mathbf{R}_Y(t, \tau)$, $\forall \tau$ and $\forall t$ can be joint block diagonalized without any unitarity constraint about the wanted matrix \mathbf{A} .

Notice that in this case, the recovered sources after inversion of the system are obtained up to a permutation and up to a filter but we will not discuss about these indeterminations in this communication.

3.2 Computer Simulations

We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm in the blind source separation context and to establish a comparison with another algorithm (O – JBD) for the orthogonal joint block diagonalization of matrices. While our algorithm is directly applied on the correlation matrices of the observations, the second algorithm is applied after a pre-whitening stage on the correlation matrices of the pre-whitened observations. We consider $m = 4$ mixtures of $n = 2$ speech source signals sampled at 8 kHz, $L = 2$ and $L' = 4$. These signal sources are mixed according to the following transfer function matrix whose components are randomly generated:

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} 0.9772 + 0.2079z^{-1} - 0.0439z^{-2} & -0.6179 + 0.7715z^{-1} + 0.1517z^{-2} \\ -0.2517 - 0.3204z^{-1} + 0.9132z^{-2} & -0.1861 + 0.4359z^{-1} - 0.8805z^{-2} \\ 0.0803 - 0.7989z^{-1} - 0.5961z^{-2} & 0.5677 + 0.6769z^{-1} + 0.4685z^{-2} \\ -0.7952 + 0.3522z^{-1} + 0.4936z^{-2} & -0.2459 + 0.8138z^{-1} - 0.5266z^{-2} \end{pmatrix}$$

where $\mathbf{A}[z]$ stands for the z transform of $\mathbf{A}(t)$. On the Fig. 2, we have displayed the performance index versus the number of matrices (left) and versus the SNR. One can check that the obtained performance are better with the NO – JBD algorithm than with the O – JBD algorithm. One can also evaluate the block-diagonalization error defined as:

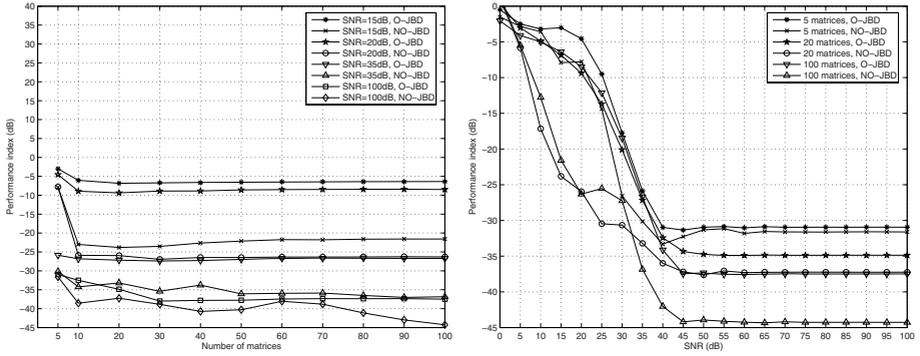


Fig. 2. Left: performance index versus number of matrices, right: performance index versus SNR

$\mathcal{E} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{1}{N^m} \sum_{k=1}^{N^m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{R}_Y(t, \tau_k)\mathbf{B}^T\|_F^2 \right\}$ where \mathbf{B} is the pseudo-inverse of the mixing matrix \mathbf{A} and $\|\cdot\|_F$ denotes the Frobenius norm. Finally, a comparison of the block-diagonalization error with the NO – JBD and O – JBD algorithms versus the number of matrices (resp. SNR) is given in the left of Fig. 3 (resp. its right).

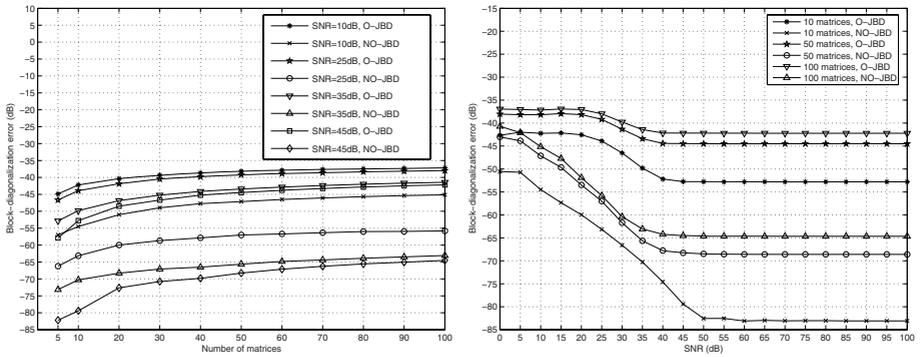


Fig. 3. Left: block-diagonalization error versus number of matrices, right: block-diagonalization error versus SNR

4 Discussion and Conclusion

In this paper, we have proposed a new joint block diagonalization algorithm for the separation of convolutive mixtures of sources that does not rely upon a unitary constraint. We have illustrated the usefulness of the proposed approach thanks to computer simulations: the considered algorithm has been applied to source separation using the correlation matrices of speech sources evaluated over different time delays.

References

1. Abed-Meraïm, K., Belouchrani, A., Leyman, R.: Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference. In: Boashash, B. (ed.) chapter in *Blind source separation using time-frequency distributions*, Prentice-Hall, Oxford (2003)
2. Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K., Amin, M., Zoubir, A.: Joint anti-diagonalization for blind source separation. In: *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2001)*, Salt Lake City, Utah (May 2001)
3. Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K., Cardoso, J.-F., Moulines, E.: A blind source separation technique using second order statistics. *IEEE Trans. on Signal Processing* 45, 434–444 (1997)
4. Bousbiah-Salah, H., Belouchrani, A., Abed-Meraïm, K.: Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization. In: *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451 (2001)
5. Cardoso, J.-F., Souloumiac, A.: Blind Beamforming for non Gaussian signals. *IEEE Proceedings-F* 40, 362–370 (1993)
6. Comon, P.: Independant component analysis, a new concept? *Signal Processing* 36, 287–314 (1994)
7. DeLathauwer, L., Févotte, C., De Moor, B., Vandewalle, J.: Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification. In: *23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium (May 2002)
8. Fadaili, E.-M., Thirion-Moreau, N., Moreau, E.: Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes, dans les Proc. du 20ème colloque GRETSI, Louvain-La-Neuve, Belgique, Septembre 2005, pp. 981–984 (2005)
9. Fadaili, E.-M., Thirion-Moreau, N., Moreau, E.: Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions. To appear in *IEEE Trans. on Signal Processing* 55(5) (2007)
10. Moreau, E.: A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation. *IEEE Trans. Signal Processing* 49(3), 530–541 (2001)
11. Pham, D.-T.: Joint approximate diagonalization of positive definite matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Appli* 22(4), 1136–1152 (2001)
12. Yeredor, A.: Non-orthogonal joint diagonalization in the least square sense with application in blind source separation. *IEEE Transactions on signal processing* 50(7), 1545–1553 (2002)
13. Yeredor, A., Ziehe, A., Müller, K.R.: Approximate joint diagonalization using a natural gradient approach. In: Puntinet, C.G., Prieto, A.G. (eds.) *ICA 2004*. LNCS, vol. 3195, pp. 89–96. Springer, Heidelberg (2004)
14. Ziehe, A., Laskov, P., Nolte, G.G., Müller, K.-R.: A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, pp. 801–818 (July 2004)

Une nouvelle méthode sans blanchiment pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources basée sur l'utilisation de distributions temps-fréquence spatiales quadratiques

Hicham GHENNIoui^{1,3}, El Mostafa FADAILI², Nadège THIRION-MOREAU¹, Abdellah ADIB^{3,4}, Eric MOREAU¹

¹LSEET, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var
Avenue G. Pompidou, BP. 56, 83162 La Valette du Var Cédex, France

²I.B.I.S.C, CNRS FRE 2873
40 rue du Pelvoux, 91020 Evry-Courcouronnes, France

³GSCM-LRIT, FSR, Université Mohammed V-Agdal
Av. Ibn Battouta, BP. 1014, Rabat, Maroc

⁴DPG, IS, Université Mohammed V-Agdal
Av. Ibn Battouta, P 703, Rabat, Maroc

ghennioui@gmail.com, ElMostafa.Fadaili@iup.univ-evry.fr, {thirion,moreau}@univ-tln.fr, adib@israbat.ac.ma

Résumé – Nous considérons le problème de la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources par bloc-diagonalisation conjointe non unitaire d'un ensemble de matrices issues de transformées temps-fréquence spatiales quadratiques. Nous proposons un nouveau critère de sélection automatique de points temps-fréquence permettant la construction de l'ensemble des matrices à bloc-diagonaliser conjointement. Les principaux avantages de cette méthode sont d'être plus directe en ce sens qu'elle ne requière plus de blanchiment préalable des observations et de pouvoir être appliquée à des signaux corrélés. À l'aide de simulations informatiques, nous illustrons le comportement de la méthode proposée ainsi que son efficacité et la comparons à une autre méthode basée quant à elle sur un algorithme de bloc-diagonalisation conjointe unitaire.

Abstract – This paper considers the problem of the blind separation of convolutive mixtures of sources based on the non unitary joint block-diagonalization of a set of spatial quadratic time-frequency matrices. We propose a novel automatic time-frequency selection criterion to build the matrices set to be joint block-diagonalized. The main advantages of the proposed method are that it more direct since it does not require a pre-whitening stage any more and that it can be used with correlated signals. Computer simulations are provided in order to illustrate the behavior and effectiveness of the proposed method and to compare it with another method based upon a unitary joint block-diagonalization algorithm.

1 Introduction

L'objet de la séparation aveugle de sources (SAS) est de parvenir à ré-estimer n signaux source à partir de la seule connaissance de m signaux d'observation correspondant à des mélanges de ces sources. Elle possède plusieurs degrés de difficulté selon les caractéristiques des sources considérées (signaux déterministes ou aléatoires, statistiquement mutuellement indépendants ou corrélés, i.i.d. ou non, stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires...) et également selon le type de système mélangeant envisagé (système linéaire ou non linéaire, mélange instantané ou convolutif, modèle de mélange sur-déterminé ou sous-déterminé). Elle possède de nombreuses applications parmi lesquelles la téléphonie mobile, les télécommunications numériques, le traitement de la parole, le génie biomédical, la géophysique interne ou externe, le radar, le sonar, etc...

Dans ce papier, nous nous intéressons au problème de la SAS basée sur l'utilisation de :

- représentations temps-fréquence spatiales quadratiques (RTFSQ) dans le contexte des mélanges linéaires, convolutifs à réponse impulsionnelle finie (RIF) de sources déterministes,
- ou de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques (STFSQ) dans le cas des mélanges linéaires convolutifs RIF de sources aléatoires non-stationnaires, éventuellement corrélées.

Notre objectif est de proposer une alternative aux méthodes présentées dans [1] et [5], lesquelles opèrent sous transformation unitaire. Notons que le problème de la séparation de mélanges linéaires instantanés de sources au moyen de RTFSQ a doré et déjà fait l'objet de nombreux travaux parmi lesquels [1][4][6].

Les méthodes de SAS basées sur l'utilisation de RTFSQ reposent toutes sur une étape préalable de sélection (automatique) de points temps-fréquence ($t-f$) particuliers permettant la construction d'ensembles de matrices devant ensuite être (bloc) diagonalisées conjointement et/ou

(bloc) zéro-diagonalisées conjointement. Pour que la séparation soit effectivement possible, il faut donc que les RTFSQ des sources diffèrent en un nombre suffisant de points t - f , en d'autres termes que les signatures des sources soient suffisamment différentes dans le plan t - f pour permettre la construction des ensembles de matrices auxquels on s'intéresse (cette hypothèse jouant le rôle de l'hypothèse d'indépendance sur laquelle sont fondées la plupart des méthodes de SAS classiques). En contexte instantané, de nombreux travaux sont dédiés au problème de la sélection automatique des points t - f permettant la construction soit d'un seul ensemble [6] (celui des matrices qui devront être diagonalisées conjointement) soit de deux ensembles (ceux des matrices qui devront être diagonalisées conjointement et zéro-diagonalisées conjointement) [1][4]. Certains de ces détecteurs opèrent sur les données blanches, d'autres directement sur les données non blanches. En contexte convolutif, un premier détecteur a été proposé dans [5]. En ce qui concerne la mise au point d'algorithmes de bloc-diagonalisation conjointe, cette problématique a suscité un certain nombre de travaux parmi lesquels [2][3]. Ces algorithmes ont ensuite été appliqués au problème de la SAS basée sur l'utilisation de RTFSQ en mélange convolutif dans [1][5].

Dans ce papier, nous proposons un nouveau détecteur automatique de points t - f pour la construction de l'ensemble des matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement. Il généralise celui présenté dans [5] au cas de données non blanches. Nous proposons également une nouvelle méthode pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources basée sur l'utilisation de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques : elle sera baptisée NO – JBDMTF. Son intérêt principal est de ne plus requérir de blanchiment préalable des observations puisqu'elle combine ce détecteur automatique de points t - f à l'algorithme de bloc diagonalisation conjointe non orthogonal proposé dans [8]. Enfin, au moyen de simulations informatiques, nous montrons l'intérêt de cette méthode en la comparant à d'autres approches opérant sous transformation unitaire, le domaine d'application visé étant celui des télé-communications numériques.

2 Séparation aveugle de sources en contexte convolutif

2.1 Formulation du problème

On considère le système multi-entrées multi-sorties RIF à temps discret décrit par l'équation suivante :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_i(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

où $s_j(t)$ représente la j -ème des n sources, $x_i(t)$ est la i -ème des $m > n$ observations, $h_{ij}(t)$ est la réponse impulsionnelle réelle entre la j -ème source et le i -ème capteur. L'ordre du filtre à RIF $\mathbf{H}(t)$ considéré est supposé être égale à L et les $n_i(t)$ pour tout $i = 1, \dots, m$ sont des bruits blancs Gaussiens stationnaires, centrés, mutuellement indépendants et indépendants des sources.

Il est classique de réécrire ce modèle convolutif RIF sous la forme d'un modèle instantané de type $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t)$. Le vecteur $\mathbf{S}(t)$ de taille $n(L+L') \times 1$ et les vecteurs $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ tous deux de taille $mL' \times 1$ sont alors définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t - (L+L') + 1), \dots, s_n(t - (L+L') + 1)]^T \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t - L' + 1), \dots, x_m(t - L' + 1)]^T \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t - L' + 1), \dots, n_m(t - L' + 1)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

avec $(\cdot)^T$ opérateur de transposition et L' le nombre de retards considérés (suffisamment grand *i.e.* $mL' \geq n(L+L')$ pour que le modèle considéré soit sur-déterminé). La matrice \mathbf{A} de dimension $mL' \times n(L+L')$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Elle est constituée de blocs \mathbf{A}_{ij} de dimension $L' \times (L+L')$, possédant alors la structure particulière suivante :

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.2 Principe des méthodes basées sur les STFSQ ou les RTFSQ

Le spectre temps-fréquence spatial quadratique d'un vecteur aléatoire complexe $\mathbf{X}(t)$ est défini par :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') K(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (5)$$

où la fonction $K(\theta, \theta'; t, \nu)$ désigne le noyau de la transformation et $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta')$ représente la matrice de corrélation de $\mathbf{X}(t)$. Elle est définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{X}(\theta + \frac{\theta'}{2}) \mathbf{X}^H(\theta - \frac{\theta'}{2}) \right\}, \quad (6)$$

où $\mathbf{E}\{\cdot\}$ désigne l'espérance mathématique et $(\cdot)^H$ l'opérateur de transposition conjuguaison. Dans le cas de signaux déterministes, cela devient

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') = \mathbf{X}(\theta + \frac{\theta'}{2}) \mathbf{X}^H(\theta - \frac{\theta'}{2}). \quad (7)$$

Donnons un exemple important : le Spectre de Pseudo Wigner Spatial (SPWS) que nous utiliserons pour les simulations informatiques (Section 4) car il permet la réduction des interférences entre sources. Il est défini par

$$\mathbf{D}_{\text{SPWS}, \mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) h(\tau) \exp\{-2i\nu\pi\tau\} d\tau \quad (8)$$

où $i^2 = -1$ et $h(\tau)$ est une fenêtre de lissage. Notons qu'en considérant $h(\tau) = 1$, quel que soit τ , on retrouve le Spectre de Wigner Spatial (SWS) tandis qu'en enlevant l'espérance mathématique on retrouve la distribution de Pseudo-Wigner Spatiale (PWS) ou celle de Wigner Spatiale (WS) si en plus $h(\tau) = 1$ pour tout τ .

Le STFSQ des observations, noté $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$, de dimension $mL' \times mL'$, vaut alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) &= \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(t, \nu) \\ &+ \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{N}}(t, \nu) + \mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ représente le STFSQ des sources, $\mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(t, \nu)$ celui des bruits tandis que $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{N}}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{S}}(t, \nu)$ sont les STFSQ croisés entre sources et bruits. $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ est une matrice carrée de taille $n(L + L') \times n(L + L')$.

Les bruits étant indépendants des sources alors le STFSQ des observations devient :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(t, \nu) \quad (10)$$

Remarquons que si l'on considère comme STFSQ celui de Wigner alors : $\mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) \exp\{-2i\pi\nu\tau\} d\tau = \mathbf{S}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(\nu)$, où $\mathbf{S}_{\mathbf{N}\mathbf{N}}(\nu)$ est la matrice inter-spectrale du vecteur des bruits [7].

Pour obtenir une estimation des matrices t - f correspondant à des observations non-bruitées, nous éliminons les points t - f de faible énergie en ne gardant que les points tels que :

$$\min(|D_{x_i x_j}(t, \nu)|^2) > \epsilon \quad i, j \in \{1, \dots, mL'\} \quad (11)$$

où ϵ est un réel de faible valeur ($\epsilon > 0.01$ par exemple) et $D_{x_i x_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_{ij}$.

On peut alors considérer que :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) \simeq \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H. \quad (12)$$

La matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ est composée de blocs carrés de dimensions $(L + L') \times (L + L')$. En des points t - f ne correspondant qu'à des auto-termes sur les sources - et en raison du principe d'interférences, il ne peut y avoir qu'un seul auto-terme, c'est la raison pour laquelle nous pourrions traiter le cas de sources corrélées -, cette matrice est bloc-diagonale avec un seul bloc non nul sur la diagonale. C'est de cette structure particulière dont nous allons tirer avantage au niveau du détecteur que nous proposons dans la section suivante.

3 Une méthode sans blanchiment

3.1 Détecteur de "bons" points t - f

Le principe du détecteur que nous proposons est de sélectionner des points temps-fréquence ne correspondant qu'à des auto-termes sur une seule source et des inter-termes entre cette même source et ses versions retardées. La matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ correspondant possède alors une structure particulière : elle est bloc-diagonale avec un seul bloc non nul sur la diagonale. Cette approche généralise donc le détecteur proposé en contexte instantané dans [6] lequel exploite une propriété de rang 1. Ce détecteur peut également être vu comme une généralisation de celui développé dans [5] au cas de signaux non blanchis. Les matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ possédant le même rang, il s'agit donc de sélectionner les matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ dont le rang est égal à $L + L'$.

Pour la construction de l'ensemble \mathcal{M} des matrices devant être bloc-diagonalisées conjointement, nous proposons donc la procédure suivante :

- Faire une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{U}(t, \nu)\mathbf{\Delta}(t, \nu)\mathbf{V}(t, \nu)^H$$

avec $\mathbf{V}(t, \nu)$ et $\mathbf{U}(t, \nu)$ matrices unitaires de taille $(mL' \times mL')$ et $\delta(t, \nu) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(t, \nu)\}$ un vecteur composé des termes diagonaux de la matrice diagonale $\mathbf{\Delta}(t, \nu)$.

On note $\delta(t, \nu) = (\delta_1(t, \nu), \dots, \delta_{mL'}(t, \nu))^T$ et on suppose que les valeurs singulières sont rangées dans l'ordre décroissant : $\delta_1(t, \nu) \geq \delta_2(t, \nu) \geq \dots \geq \delta_{mL'}(t, \nu) \geq 0$.

- Calculer le rapport $\frac{\sum_{i=1}^{L+L'} \delta_i^2(t, \nu)}{\|\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)\|_F^2}$ et vérifier s'il est proche de 1,
- Si oui alors $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ est retenue sinon elle est rejetée.

Les matrices de l'ensemble \mathcal{M} (que l'on supposera de dimension N_m avec $N_m \in N^*$) ont alors une structure particulière puisqu'elles se factorisent toutes en $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H$, avec $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ matrice bloc-diagonale possédant un seul bloc non nul sur la diagonale.

3.2 Bloc-diagonalisation conjointe non unitaire

Considérons l'ensemble \mathcal{M} construit au moyen du détecteur qui vient d'être présenté :

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t_i, \nu_i) \in \mathbb{C}^{mL' \times mL'}, \forall i = 1, \dots, N_m\}.$$

Les matrices de l'ensemble \mathcal{M} admettent toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^H \text{ ou alors } \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\} \quad (13)$$

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{L+L'} & \dots & \mathbf{0}_{L+L'} \\ \mathbf{0}_{L+L'} & \mathbf{D}_{i,22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{L+L'} \\ \mathbf{0}_{L+L'} & \dots & \mathbf{0}_{L+L'} & \mathbf{D}_{i,nn} \end{pmatrix}, \forall i \in \{1, \dots, N_m\}$$

sont des matrices bloc-diagonales de dimension $n(L + L') \times n(L + L')$ et les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ sont des matrices carrées de dimension $(L + L') \times (L + L')$ et $\mathbf{0}_{L+L'}$ désigne la matrice carrée, nulle, de dimension $(L + L') \times (L + L')$. La matrice \mathbf{A} est une matrice de rang plein de dimension $mL' \times n(L + L')$ et \mathbf{B} est sa pseudo-inverse (ou inverse généralisée de Moore-Penrose). Le problème de la bloc diagonalisation conjointe non unitaire est alors d'estimer la matrice de séparation \mathbf{B} uniquement à partir des matrices de l'ensemble \mathcal{M} . Nous proposons donc de considérer le critère suivant :

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{L+L'}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2 \quad (14)$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius et l'opérateur $\text{OffBdiag}_{L+L'}\{\cdot\}$ la matrice "zéro bloc-diagonale" construite à partir des éléments hors bloc-diagonal de son argument (ses éléments bloc-diagonaux sont donc des matrices $\mathbf{0}_{L+L'}$). Pour trouver l'estimée $\hat{\mathbf{B}}$ de la matrice \mathbf{B} , il faut donc minimiser la somme des carrés des normes des blocs hors diagonale de $\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H$. Ceci est réalisé comme dans [8] à savoir au moyen d'une solution algébrique (notée NO - JBD)

basée sur le calcul des éléments propres d'une forme quadratique particulière. La combinaison de cet algorithme à la sélection automatique de points t - f précédemment décrite conduit à un algorithme baptisé NO – JBDMTF.

4 Simulations & conclusion

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus au moyen de la méthode proposée à ceux obtenus au moyen d'une approche basée sur l'utilisation d'un algorithme de bloc diagonalisation conjointe sous transformation orthogonale [5] (cette méthode sera notée O – JBDMTF dans la suite). Pour être applicable, cette seconde approche nécessite un blanchiment préalable des observations. Les deux méthodes sont comparées sur des ensembles de matrices de même dimension : ceux construits à partir du détecteur de points t - f donné au niveau de la Section 3.1. Dans cette simulation, nous considérons $n = 2$ sources composées de 256 échantillons temporels, reçus au niveau de $m = 3$ capteurs. La première source correspond à une modulation linéaire de fréquence caractérisée par une fréquence de début $\nu_{d_1} = 0.05$ et une fréquence de fin $\nu_{f_1} = 0.45$ tandis que la seconde est une modulation sinusoïdale de fréquence (MSF) dont la fréquence de début vaut $\nu_{d_2} = 0.15$ et celle de fin $\nu_{f_2} = 0.35$. La période de la MSF est $T_{fm} = 200$. On considère $L = 2$, $L' = 4$ et le filtre RIF suivant : $\mathbf{H}[z] = (\mathbf{H}_1[z] \ \mathbf{H}_2[z])$ où

$$\mathbf{H}_1[z] = \begin{pmatrix} -0.3592 + 0.4104z^{-1} + 0.8382z^{-2} \\ 0.5585 - 0.1108z^{-1} + 0.8221z^{-2} \\ 0.4550 - 0.7171z^{-1} + 0.5279z^{-2} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{H}_2[z] = \begin{pmatrix} 0.9365 - 0.3316z^{-1} + 0.1138z^{-2} \\ 0.4876 - 0.3044z^{-1} - 0.8183z^{-2} \\ -0.8218 + 0.1528z^{-1} + 0.5489z^{-2} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{H}[z]$ transformée en z de $\mathbf{H}(t)$. Le STFSQ utilisé est le spectre de Pseudo Wigner. Les points t - f sélectionnés à l'aide du critère proposé sont représentés au niveau de la Fig. 1 pour deux valeurs de RSB (10 dB et 100 dB). En utilisant l'indice de performance suivant :

$$I(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right]$$

où $r = L + L'$ et $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ est la (i, j) -ème matrice bloc (carrée) de $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. Avec ce choix d'indice de performance, I tendant vers $-\infty$ en échelle logarithmique (0 en échelle linéaire) implique une séparation parfaite. Les résultats obtenus sont présentés au niveau de la Fig. 2. A gauche, nous donnons le nombre de matrices sélectionnées en fonction du RSB et à droite la valeur de l'indice de performance (en dB) en fonction du RSB. Sur cet exemple, on constate qu'il est possible avec la méthode NO – JBDMTF d'atteindre de meilleures performances que celles obtenues au moyen d'une méthode opérant après blanchiment (on passe ici de -31 dB à -38 dB soit un gain de 7 dB). Cette méthode combine un détecteur

de points t - f opérant sur des données non blanchies à un algorithme de bloc-diagonalisation conjointe non-unitaire. Nous remarquons également que le détecteur proposé est robuste par rapport à l'addition de bruit.

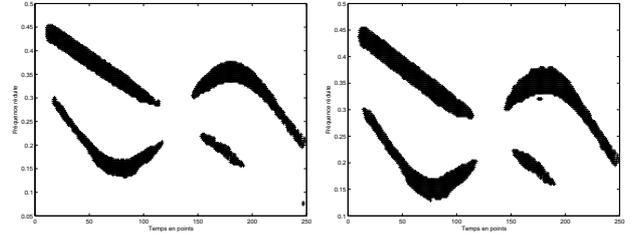


FIG. 1 – Points t - f sélectionnés avec un RSB de 10 dB (à gauche) et de 100 dB (à droite).

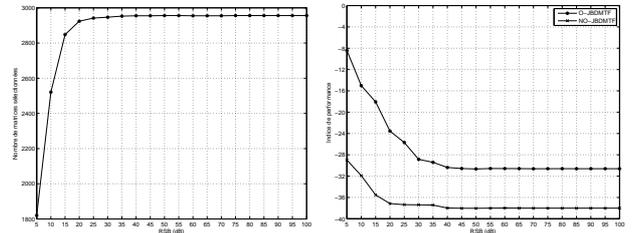


FIG. 2 – Evolution du nombre de matrices sélectionnées avec le détecteur proposé en fonction du RSB (à gauche) et évolution de I en dB ($I(\cdot)$ dB = $10 \log(I(\cdot))$) obtenu avec les méthodes NO – JBDMTF et O – JBDMTF en fonction du RSB (à droite).

Références

- [1] K. Abed-Meraïm, A. Belouchrani and R. Leyman, "Time-frequency signal analysis and processing : a comprehensive reference", chapter in "Blind source separation using time-frequency distributions", Prentice-Hall, B. Boashash Editor, Oxford, UK, January 2003.
- [2] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraïm, "Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization", in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.
- [3] L. De Lathauwer, C. Févotte, B. De Moor and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification", in *Proc. 23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.
- [4] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, No. 5, pp. 1673–1687, May 2007.
- [5] C. Févotte and C. Doncarli, "A unified presentation of blind source separation methods for convolutive mixtures using block-diagonalization", in *Proc. Independent Component Analysis (ICA)*, pp. 349–354, Nara, Japan, April 2003.
- [6] L. Giulieri, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non-orthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices for source separation", *IEEE Signal Processing Letter*, Vol. 12, No. 5, pp. 415–418, May 2005.
- [7] L. Stankovic and S. Stankovic, "Wigner distribution of noisy signals", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 41, No. 2, pp. 956–960, February 1993.
- [8] E.-M. Fadaili, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau and A. Adib, "Un nouvel algorithme de bloc diagonalisation conjointe pour la séparation de sources en mélanges convolutifs", in *Proc. GRETSI'07*, 11-14 septembre 2007, Troyes, France

Un nouvel algorithme de bloc diagonalisation conjointe pour la séparation de sources en mélanges convolutifs

El Mostafa FADAILI², Hicham GHENNIoui^{1,3}, Nadège THIRION-MOREAU¹, Eric MOREAU¹, Abdellah ADIB^{3,4}

¹LSEET, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var
Avenue G. Pompidou, BP. 56, 83162 La Valette du Var Cédex, France

²I.B.I.S.C, CNRS FRE 2873
40 rue du Pelvoux, 91020 Evry-Courcouronnes, France

³GSCM-LRIT, FSR, Université Mohammed V-Agdal
Av. Ibn Battouta, BP. 1014, Rabat, Maroc

⁴DPG, IS, Université Mohammed V-Agdal
Av. Ibn Battouta, P 703, Rabat, Maroc

ElMostafa.Fadaili@iup.univ-evry.fr, ghennioui@gmail.com, {thirion,moreau}@univ-tln.fr, adib@israbat.ac.ma

Résumé – Nous considérons le problème de la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources. Nous proposons un nouvel algorithme de bloc-diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices sous transformation non-orthogonale. Il repose sur l'optimisation algébrique d'un critère de type moindres carrés. L'intérêt majeur d'une telle approche, outre le fait qu'elle soit plus générale, est de rendre facultatif le blanchiment des observations. Des simulations informatiques sont présentées afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée dans trois cas de figure : lorsque les matrices considérées sont exactement bloc-diagonales puis lorsqu'elles sont progressivement perturbées par un bruit additif Gaussien et enfin dans le contexte de la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources (les matrices considérées sont alors des matrices de covariance estimées).

Abstract – This paper deals with the problem of blind separation of convolutive mixtures of sources. We propose a novel non orthogonal joint block-diagonalization algorithm of a given matrices set. This algorithm is based on the algebraic optimization of a least mean squares criterion. The main advantages of the proposed approach is that it is more general and a preliminary whitening stage is no more compulsorily required. Computer simulations are provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed approach in three cases: when exact block-diagonal matrices are built then when they are progressively perturbed by an additive Gaussian noise and, finally, in the context of blind separation of convolutive mixtures of sources (the considered matrices are then estimated covariance matrices).

1 Introduction

Au cours des dix dernières années, le problème de la décomposition conjointe d'ensembles de matrices ou de tenseurs a été largement étudié au sein de la communauté traitement du signal du fait de ces nombreuses implications en séparation aveugle de sources (SAS) et en traitement d'antenne.

Le premier type de problème à avoir été considéré est celui de la diagonalisation conjointe sous contrainte unitaire d'un ensemble donné de matrices. Cela a conduit à de nombreux algorithmes en séparation aveugle de mélanges instantanés de sources, les plus connus étant JADE [5] et SOBI [3]. Par la suite, d'autres travaux ont été conduits afin de généraliser à des ensembles de tenseurs et non plus de matrices [6][8][12] ou pour pouvoir lever la contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée [7][11][13]-[16]. Plus récemment, un second type de décomposition matricielle s'est révélé utile pour des applications telles que la séparation aveugle de sources basée sur l'utilisation de représentations temps-fréquence ou la cryptographie. Il s'agit de la zéro-diagonalisation conjointe. Là encore, le cas unitaire a

d'abord été traité [2] avant que ne soient proposées deux solutions non unitaires dans [10][11].

Lorsque l'on s'intéresse au problème de la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources, il est possible de faire apparaître un type particulier de décomposition matricielle appelé bloc-diagonalisation conjointe (BDC) dans la mesure où les matrices recherchées dans ce type de décomposition sont maintenant bloc-diagonales [1][4][9]. Le cas unitaire a été étudié dans [4][9]. Notre objectif est donc de proposer une alternative à ces algorithmes sous la forme d'une solution non-orthogonale fondée sur la minimisation d'un critère quadratique de type moindres carrés tout en mettant en évidence les liens qui existent entre cet algorithme et celui de diagonalisation non-orthogonale développé dans [11]. Le comportement de cet algorithme sur des ensembles de matrices soit exactement bloc-diagonales, soit bruitées (càd s'écartant de la bloc-diagonalité) est ensuite étudié. Puis, nous montrons que cet algorithme trouve une application intéressante en séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources temporellement cohérentes : les matrices de l'ensemble à bloc-diagonaliser

conjointement étant alors des matrices de corrélation estimées. L'intérêt principal de cet algorithme est qu'il ne nécessite plus de blanchiment préalable des observations. Le papier est organisé de la façon suivante. Le problème général de la BDC de même que la solution proposée sont présentés au niveau de la Section 2. Dans la Section 3, nous rappelons comment reformuler le problème de la SAS en contexte convolutif en un problème de séparation aveugle de mélange instantané de sources puis nous montrons comment l'algorithme proposé trouve une application en SAS. Des simulations informatiques illustrent chacune de ces deux sections. Elles témoignent de l'efficacité de la méthode proposée et permettent d'établir une comparaison avec un algorithme de bloc diagonalisation conjointe sous contrainte orthogonale [4].

2 Bloc diagonalisation conjointe non-orthogonale

2.1 Formulation du problème

Le problème de la BDC sous transformation non orthogonale s'énonce de la manière suivante. Considérons un ensemble \mathcal{M} de N_m , $N_m \in \mathbb{N}^*$, matrices carrées $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, admettant toutes la factorisation suivante :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}\mathbf{D}_i\mathbf{A}^T \text{ ou } \mathbf{D}_i = \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^T, \forall i \in \{1, \dots, N_m\} \quad (1)$$

$$\text{avec : } \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{D}_{i,22} & & \mathbf{0}_{2r} \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{r-1r} \\ \mathbf{0}_{r1} & \dots & \mathbf{0}_{rr-1} & \mathbf{D}_{i,rr} \end{pmatrix},$$

$\forall i \in \{1, \dots, N_m\}$ sont des matrices bloc-diagonales de dimensions $N \times N$ et les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ sont des matrices carrées de dimensions $n_j \times n_j$ avec $n_1 + \dots + n_r = N$ (au niveau de l'application en SAS, nous nous restreindrons au cas où les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$ sont toutes de la même taille *i.e.* $N = r \times n_j$, $j \in \{1, \dots, r\}$), où $\mathbf{0}_{ij}$ désigne la matrice nulle de dimensions $n_i \times n_j$ et $(\cdot)^T$ l'opérateur de transposition. La matrice \mathbf{A} est une matrice de rang plein de dimensions $M \times N$ ($M \geq N$) et \mathbf{B} est sa pseudo-inverse (ou inverse généralisée de Moore-Penrose). Le problème de la BDC non orthogonale est alors d'estimer la matrice \mathbf{B} et ce uniquement à partir des matrices de l'ensemble \mathcal{M} .

2.2 Algorithme proposé

Le cas d'une matrice \mathbf{B} orthogonale a été traité dans [9] où une solution est proposée. Dans le cas où la matrice \mathbf{B} n'est plus nécessairement orthogonale, nous proposons de considérer la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^T\}\|_F^2 \quad (2)$$

où l'opérateur $\text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\cdot\}$ représente la matrice "zéro bloc-diagonale" construite à partir des éléments hors

bloc diagonal de son argument et $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Ainsi :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix} \quad (3)$$

avec \mathbf{M}_{ij} , $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ matrices de taille $n_i \times n_j$. Notons que lorsque les matrices $\mathbf{D}_{i,jj}$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, N_m\}$ se réduisent à des scalaires *i.e.* $n_j = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ impliquant $r = N$, on retombe alors sur un problème de diagonalisation conjointe (DC) sous transformation non orthogonale. La fonction de coût donnée Eq. (2) se simplifie alors en $\sum_{k=1}^{N_m} \|\text{Offdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^T\}\|^2$, avec $(\text{Offdiag}\{\mathbf{M}\})_{ij} = (1 - \delta_{ij})M_{ij}$, qui n'est autre que la fonction de coût $\mathcal{C}_D(\mathbf{B})$ utilisée dans [7][11]. Dans [10] et [11] nous avons proposé deux algorithmes différents pour l'optimiser, l'un algébrique, l'autre de type Levenberg-Marquardt avec paramétrisation des colonnes de la matrice \mathbf{B} recherchée. Précisons que d'autres approches de la DC non-unitaire ont été proposées dans [13]-[16].

Dans le cas de la bloc-diagonalisation conjointe, il s'agit de trouver une matrice \mathbf{B} en minimisant la somme des carrés des normes des blocs hors diagonale de $\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^T$. Pour cela, nous proposons un algorithme de type algébrique, basé sur le calcul des éléments propres d'une forme quadratique particulière.

En posant $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \end{pmatrix}$ où les \mathbf{B}_j , $j \in \{1, \dots, r\}$ désignent

les r matrices bloc de taille $n_j \times M$, l'Eq. (2) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \|\mathbf{B}_i\mathbf{M}_k\mathbf{B}_j^T\|_F^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r |\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^T|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

où \mathbf{b}_j^n pour tout $n \in \{1, \dots, n_j\}$ désigne le n -ième des n_j vecteurs ligne de la matrice \mathbf{B}_j , $\forall j \in \{1, \dots, r\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r (\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^T) (\mathbf{b}_i^m \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^T)^T \\ &= \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m,n=1}^{n_i, n_j} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^r \mathbf{b}_i^m (\mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^T \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_k^T (\mathbf{b}_i^m)^T) \\ &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \left[\sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k (\mathbf{b}_j^n)^T \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_k^T \right] (\mathbf{b}_i^m)^T \\ &= \sum_{m=1}^{n_i} \sum_{i=1}^r \mathbf{b}_i^m \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) (\mathbf{b}_i^m)^T \end{aligned} \quad (5)$$

où $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}) = \sum_{j=1(j \neq i)}^r \sum_{n=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{N_m} \mathbf{M}_k(\mathbf{b}_j^n)^T \mathbf{b}_j^n \mathbf{M}_k^T$ est une matrice symétrique.

Comme $(\mathbf{b}_j^n)^T \mathbf{b}_j^n$ est de rang un, pour tout $j = 1, \dots, r$ et pour tout $n = 1, \dots, n_j$, la matrice $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$ possède $N - (r - 1)n_j = n_j$ vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles. Si bien que la minimisation de cette forme quadratique sous la contrainte de la norme unité peut être effectuée par la recherche des n_j vecteurs propres associés aux n_j plus petites valeurs propres de $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}})$. Cependant comme la matrice \mathbf{Q}_i pour un i donné dépend elle-même des vecteurs ligne de la matrice \mathbf{B} , nous proposons donc d'utiliser une procédure itérative. En résumé, l'algorithme de BDC non-orthogonal (baptisé NO - JBD) que nous proposons afin d'estimer le bloc-diagonaliseur conjoint ($\hat{\mathbf{B}}$) s'écrit :

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$ avec $l \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(0)}$ une matrice initiale, Faire (a) et (b)

(a) Calculer $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$

(b) Chercher les n_i plus petites valeurs propres $\lambda_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ et les vecteurs propres associés $\mathbf{b}_i^{m(l)}$, $m \in \{1, \dots, n_i\}$ de la matrice $\mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_{\bar{i}}^{(l)})$

Arrêter après un certain nombre d'itérations ou quand $|\lambda_i^{m(l)} - \lambda_i^{m(l-1)}| \leq \varepsilon$ avec ε seuil positif de faible valeur.

2.3 Simulations informatiques

Le comportement de l'algorithme est testé au moyen de simulations informatiques. Nous commençons par considérer des ensembles (construits) de N_m matrices exactement bloc diagonales générées aléatoirement (les différentes composantes de ces matrices suivent une loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance 1). Ensuite, nous les perturbons afin de nous écarter de l'hypothèse de bloc-diagonalité. Dans ce second cas, une matrice dont les termes aléatoires sont tirés selon une loi Gaussienne de moyenne 0 et de variance σ_b^2 est ajoutée à la précédente. Le rapport signal à bruit (RSB) est alors défini en dB comme $\text{RSB} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$. Afin de pouvoir juger de la qualité de la séparation, nous utilisons l'indice de performance suivant - extension de celui introduit dans [12] - :

$$I(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right] \quad (6)$$

où $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ est la (i, j) -ème matrice bloc (carrée) de $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. Quand la séparation est parfaite, l'indice de performance doit tendre vers $-\infty$ en échelle logarithmique (0 en échelle linéaire). I en dB est représenté au niveau de la Fig. 1 en fonction de la taille N_m de l'ensemble de matrices considéré (à gauche) et en fonction du RSB (à droite). Ces résultats ont été obtenus par la méthode de Monte-Carlo sur 30 réalisations. On constate que plus le RSB est favorable, meilleurs sont les résultats. Sur des ensembles de matrices quasi bloc diagonales (RSB = 100 dB), on réstime quasiment la matrice de séparation puisque $I \approx -110$ dB.

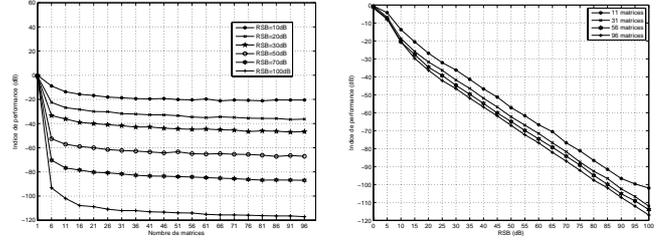


FIG. 1 - Comportement de l'algorithme NO - JBD. Gauche : I en dB en fonction du nombre de matrices considérées pour la bloc diagonalisation conjointe pour différentes valeurs de RSB = 10, 20, 30, 50, 70, 100 dB. Droite : I en dB en fonction du RSB pour des ensembles de taille variable ($N_m = 11, 31, 56, 96$ matrices).

3 Application à la séparation de mélanges convolutifs de sources

3.1 Modèle & hypothèses

On considère le système multi-entrées multi-sorties à réponse impulsionnelle finie (RIF) à temps discret décrit par l'équation suivante :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_i(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (7)$$

où les $s_j(t)$, $\forall j = 1, \dots, n$ désignent les n sources supposées aléatoires, réelles, décorréliées deux à deux et temporellement cohérentes, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, sont les $m > n$ observations, $h_{ij}(t)$ est la fonction de transfert réelle entre la j -ème source et le i -ème capteur, en supposant que l'ordre du filtre RIF considéré est L et $n_i(t)$ sont des bruits blanc Gaussiens mutuellement indépendants et indépendants des sources.

Il est classique de reformuler ce modèle convolutif RIF sous la forme d'un modèle instantané de type $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t)$. Le vecteur $\mathbf{S}(t)$ de taille $n(L + L') \times 1$ et les vecteurs $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ tous deux de taille $mL' \times 1$ sont alors définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t - (L + L') + 1), \dots, s_n(t - (L + L') + 1)]^T \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t - L' + 1), \dots, x_m(t - L' + 1)]^T \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t - L' + 1), \dots, n_m(t - L' + 1)]^T \end{aligned} \quad (8)$$

avec L' le nombre de retards considérés (suffisamment grand *i.e.* $mL' \geq n(L + L')$ pour que le modèle considéré soit bien sur-déterminé). La matrice \mathbf{A} de dimension $(mL' \times n(L + L'))$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Elle est constituée de blocs \mathbf{A}_{ij} de dimensions $L' \times (L + L')$, possédant tous la structure particulière suivante :

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix} \quad (10)$$

On la suppose de plus de rang plein. Les sources étant supposées décorréliées et temporellement cohérentes alors leurs matrices de corrélation $\mathbf{R}_S(t, \tau) = \mathbf{E}\{\mathbf{S}(t + \frac{\tau}{2})\mathbf{S}^T(t - \frac{\tau}{2})\}$ (avec $\mathbf{E}\{\cdot\}$ l'espérance mathématique) sont bloc diagonales pour des retards τ restant proches de l'origine (elles deviennent quasi nulles pour des valeurs de τ trop éloignées de l'origine *i.e.* $\tau > \tau_{\max}$). Pour estimer la matrice de mélange \mathbf{A} , nous proposons donc bloc diagonaliser conjointement l'ensemble suivant de matrices : $\{\mathbf{R}_Y(t, \tau) = \mathbf{R}_X(t, \tau) - \mathbf{R}_N(t, \tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_S(t, \tau)\mathbf{A}^T; \forall \tau = 0, \dots, \tau_{\max}, \forall t\}$, $\mathbf{R}_X(t, \tau)$, $\mathbf{R}_N(t, \tau)$ et $\mathbf{R}_Y(t, \tau)$ désignant respectivement les matrices de corrélation des observations, de bruits et des observations non bruitées.

3.2 Simulations informatiques

Nous montrons au moyen de simulations informatiques comment notre algorithme de BDC trouve une première application en séparation aveugle de mélange convolutifs de sources. Nous considérons $n = 2$ signaux sources reçus sur $m = 4$ capteurs. Les sources sont des signaux aléatoires Gaussiens indépendants, temporellement cohérents résultant du filtrage RIF de signaux aléatoires Gaussiens blancs et indépendants (dans cet exemple, l'ordre des filtres est de 128 et les coefficients des réponses impulsionnelles sont générés aléatoirement à partir de distributions uniformes sur l'intervalle $[-1, 1]$). Les sources, de taille 4096 pts, sont ensuite mélangées à l'aide de la matrice de mélange MIMO suivante ($L = 2$ et $L' = 4$) : $\mathbf{A}[z] = (\mathbf{A}_1[z] \ \mathbf{A}_2[z])$ où

$$\mathbf{A}_1[z] = \begin{pmatrix} -0.6528 - 0.6130z^{-1} + 0.4451z^{-2} \\ 0.5290 - 0.4296z^{-1} - 0.7318z^{-2} \\ -0.8561 - 0.5125z^{-1} + 0.0674z^{-2} \\ 0.9740 - 0.1660z^{-1} - 0.1540z^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2[z] = \begin{pmatrix} -0.4676 - 0.3103z^{-1} + 0.8277z^{-2} \\ -0.4970 - 0.8582z^{-1} + 0.1285z^{-2} \\ -0.1294 - 0.7577z^{-1} + 0.6397z^{-2} \\ 0.2479 + 0.3501z^{-1} - 0.9033z^{-2} \end{pmatrix}$$

Nous définissons ensuite le rapport de corrélation suivant : $\text{RC} (\%) = \frac{\|\text{OffBdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\mathbf{R}_S(0)\}\|_F}{\|\text{Bdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\mathbf{R}_S(0)\}\|_F} \times 100$ où $\text{Bdiag}_{n_j, j=1, \dots, r}\{\cdot\}$ désigne la partie bloc diagonale d'une matrice et $\mathbf{R}_S(0)$ est la matrice de corrélation du vecteur source à l'origine. Au niveau de la Fig. 2, nous présentons l'évolution de I en fonction du degré de corrélation en % entre les sources et comparons nos résultats à ceux obtenus au moyen d'une méthode de BDC sous transformation orthogonale ([4], notée O – JBD). On constate qu'en l'absence de bruit, l'algorithme NO – JBD est plus robuste par rapport à l'augmentation du degré de corrélation des sources que l'algorithme O – JBD qui, lui, nécessite un blanchiment préalable des observations.

Références

[1] K. Abed-Meraïm, A. Belouchrani and R. Leyman, "Time-frequency signal analysis and processing", chapter : Blind source separation using time-frequency distributions, in *Handbook : Time-frequency signal processing & applications*, Elsevier (Editeur : B. Boashash), September 2003.

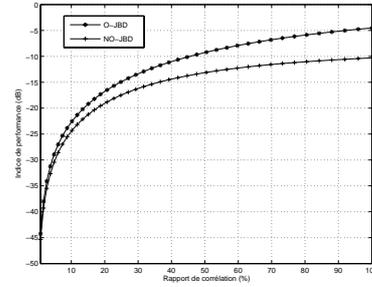


FIG. 2 – Séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources. Comparaison des algorithmes O – JBD et NO – JBD sur des ensembles de matrices de corrélation estimées : I en dB en fonction du degré de corrélation (RC en %) des sources.

- [2] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, M. Amin and A. Zoubir, "Joint anti-diagonalization for blind source separation", in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'2001)*, Salt Lake City, Utah, May 2001.
- [3] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, J.-F. Cardoso and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 434–444, February 1997.
- [4] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraïm, "Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization", in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.
- [5] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non Gaussian signals", *IEEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp. 362–370, 1993.
- [6] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?", *Signal Processing*, Vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [7] S. Dégerine, "Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés", in *Proc. 18ème Colloque GRETSI*, pp. 311–314, Toulouse, Septembre 2001 (in french).
- [8] L. DeLathauwer, "Signal processing based on multilinear algebra", *PhD Thesis*, Université catholique de Leuven, Belgique, September 1997.
- [9] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. De Moor and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification", *23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.
- [10] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau et E. Moreau, "Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes", dans *les Proc. du 20ème colloque GRETSI*, Louvain-La-Neuve, Belgique, pp. 981-984, Septembre 2005.
- [11] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, n°5, pp. 1673-1687, May 2007.
- [12] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp. 530–541, March 2001.
- [13] D.-T. Pham, "Joint approximate diagonalization of positive definite matrices", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 22, No. 4, pp. 1136–1152, 2001.
- [14] A.J. Van Der Veen, "Joint diagonalization via subspace fitting techniques", in *Proc. Int. Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'2001)*, pp. 2773–2776, Salt Lake City, USA, May 2001.
- [15] A. Yeredor, "Non-orthogonal joint diagonalization in the least square sense with application in blind source separation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No. 7, pp. 1545–1553, July 2002.
- [16] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, G. and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation", *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, pp. 801–818, July 2004.

Séparation Aveugle de Sources Basée sur la Bloc-Diagonalisation Conjointe Non-Unitaire de Matrices Issues de Transformées Spatiales Quadratiques

H. Ghennioui^{1,2} A. Adib^{2,3} N. Thirion-Moreau¹ E. Moreau¹ D. Aboutajdine²

¹ LSEET, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var,
Avenue G. Pompidou, BP 56, La Valette du Var, France

² GSCM-LRIT, FSR, av. Ibn Battouta, BP 1014, Rabat, Maroc

³ DPG, IS, av. Ibn Battouta, BP 703, Rabat, Maroc

{thirion, moreau}@univ.tln.fr, ghennioui@gmail.com, adib@israbat.ac.ma, aboutaj@fsr.ac.ma

Résumé

Nous proposons une nouvelle méthode pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources non-stationnaires. Elle combine un algorithme de bloc-diagonalisation conjointe non-unitaire à un détecteur de points temps-fréquence particuliers permettant la construction de l'ensemble des matrices (issues de transformées spatiales quadratiques) devant être bloc-diagonalisées conjointement. L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait que le blanchiment des observations devient facultatif. Finalement nous étudions le comportement de cette méthode et la comparons à d'autres approches au moyen de simulations informatiques.

Mots clefs

Séparation aveugle de sources, mélanges linéaires instantanés, convolutifs, (bloc) diagonalisation conjointe, distributions temps-fréquence, critère de sélection automatique.

1 Introduction

Le principe de la séparation aveugle de sources (SAS) est de chercher à estimer n signaux sources à partir de la seule connaissance de m observations correspondant à des mélanges de ces sources. Elle possède plusieurs degrés de difficulté selon les caractéristiques des sources considérées (signaux déterministes ou aléatoires, statistiquement mutuellement indépendants ou corrélés, i.i.d. ou non, stationnaires, cyclo-stationnaires ou non-stationnaires...) et également selon le type de système mélangeant envisagé (système linéaire ou non linéaire, mélange instantané ou convolutif, modèle de mélange sur-déterminé ou sous-déterminé...). Elle possède de nombreuses applications parmi lesquelles la téléphonie mobile, les télécommunications numériques, le traitement de la parole, le génie biomédical, la géophysique interne ou externe, le radar, le sonar, etc... On trouve un panorama relativement exhaustif des principales méthodes de SAS de même que des principales applications dans [9]. Dans cette contribution, nous nous intéressons à la

SAS basée sur l'utilisation de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques (STFSQ) ou de représentations temps-fréquences spatiales quadratiques (RTFSQ) dans le cadre des mélanges linéaires convolutifs sur-déterminés de sources déterministes ou aléatoires, non-stationnaires. Une manière possible de traiter ce problème est de le reformuler comme un problème de bloc-diagonalisation conjointe (BDC) lequel généralise celui de la diagonalisation conjointe (DC). Notre objectif principal est de proposer une alternative aux méthodes présentées dans [1][2][4] lesquelles opèrent toutes sous transformation unitaire après un blanchiment préalable des observations. C'est pourquoi, nous avons cherché à construire de nouveaux algorithmes de BDC sans contrainte d'unitarité sur la matrice recherchée [7][8] (ces algorithmes pouvant être vus comme une généralisation des algorithmes de DC proposés dans [3][11]). Un second aspect de nos travaux concerne l'élaboration de nouveaux critères de sélection automatique des points temps-fréquence utiles [5][6] permettant la construction des ensembles de matrices devant être (bloc) diagonalisées conjointement. La méthode proposée se décompose en trois étapes principales, consistant à :

1. calculer les RTFSQ ou les STFSQ des observations (non blanchies),
2. sélectionner certains points temps-fréquence permettant la construction d'un ensemble de matrices possédant toutes une structure algébrique particulière,
3. effectuer une décomposition matricielle conjointe de l'ensemble précédent afin d'estimer le système mélangeant (et éventuellement les sources).

Les matrices de l'ensemble construit au niveau de la seconde étape possèdent une structure qui dépend du type de mélange considéré : elles correspondent à des matrices de sources bloc-diagonales dans le cas convolutif (respectivement diagonales dans le cas instantané). Enfin, au moyen de simulations informatiques, nous illustrons l'intérêt d'une telle approche et la comparons à deux autres

approches du même type (l'une opérant sous transformation unitaire [4] et l'autre pas [6]).

2 Séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources

2.1 Formulation du problème

On considère le système multi-entrées multi-sorties à réponse impulsionnelle finie (RIF) à temps discret décrit par l'équation suivante :

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t-\ell) + n_i(t), \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

où les signaux $s_j(t)$, $\forall j = 1, \dots, n$ désignent les n signaux sources supposés déterministes ou stochastiques, $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, sont les $m > n$ observations, $h_{ij}(t)$ est la fonction de transfert réelle entre la j -ème source et le i -ème capteur, en supposant que l'ordre du filtre RIF considéré est L et $n_i(t)$ sont des bruits blanc gaussiens indépendants et mutuellement indépendants des sources.

Il est classique de reformuler ce modèle convolutif RIF sous la forme d'un modèle instantané du type $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t)$. Le vecteur $\mathbf{S}(t)$ de taille $(n(L+L') \times 1)$ et les vecteurs $\mathbf{X}(t)$ et $\mathbf{N}(t)$ tous deux de taille $(mL' \times 1)$ sont alors définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t-Q+1), \dots, s_n(t-Q+1)]^T \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t-L'+1), \dots, x_m(t-L'+1)]^T \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t-L'+1), \dots, n_m(t-L'+1)]^T \end{aligned} \quad (2)$$

avec $Q = L + L'$, $(\cdot)^T$ opérateur de transposition et L' le nombre de retards considéré (suffisamment grand i.e. $mL' \geq nQ$ pour que le modèle considéré soit bien sur-déterminé). La matrice \mathbf{A} de dimension $(mL' \times nQ)$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Elle est constituée de blocs \mathbf{A}_{ij} de dimension $(L' \times Q)$, possédant la structure particulière suivante :

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix} \quad (4)$$

On la suppose de plus de rang plein. Notons que lorsque $L = 0$ et $L' = 1$, on retombe alors sur un problème de SAS en contexte linéaire instantané et dans ce cas on peut supposer que $m \geq n$ au lieu de $m > n$.

Le problème de la SAS consiste à chercher une matrice \mathbf{B} dite de "séparation" telle que les signaux restaurés $\hat{\mathbf{S}}(t)$ soient de la forme :

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{S}(t) = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{S}(t) \quad (5)$$

où \mathbf{P} est une matrice de permutation et \mathbf{D} est une matrice bloc-diagonale inversible. Les sources ne peuvent être restituées qu'à un filtre près en modèle convolutif (resp. une amplitude près en instantané, la matrice \mathbf{D} étant dans ce cas là une matrice diagonale inversible) et à une permutation près. Pour mesurer la qualité de la séparation dans les simulations informatiques, nous utilisons l'indice de performance suivant, qui est une extension de celui introduit dans [10] :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{G}) &= \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

où $r = L + L'$, $(\mathbf{G})_{i,j} \forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ est la (i, j) -ème matrice bloc (carrée) de $\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{A}$. Une séparation parfaite correspond à un indice de performance tendant vers $-∞$ en échelle logarithmique (0 en échelle linéaire).

2.2 Une méthode basée sur les STFSQ

Nous considérons les méthodes de SAS basées sur l'utilisation de spectres temps-fréquence spatiaux quadratiques. Considérons un signal aléatoire $\mathbf{X}(t)$, son STFSQ est alors défini par :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') \mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta' \quad (7)$$

où la fonction $\mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu)$ désigne le noyau de la transformation et $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta')$ représente la matrice de corrélation. Elle est définie pour un vecteur $\mathbf{X}(t)$ complexe par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{X}(\theta + \frac{\theta'}{2}) \mathbf{X}^H(\theta - \frac{\theta'}{2}) \right\}, \text{ avec } \mathbf{E}\{\cdot\}$$

l'espérance mathématique et $(\cdot)^H$ l'opérateur de transposition conjuguaison. Pour des signaux déterministes, cela devient : $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') = \mathbf{X}(\theta + \frac{\theta'}{2}) \mathbf{X}^H(\theta - \frac{\theta'}{2})$.

L'ensemble des simulations informatiques ont été réalisées en utilisant le spectre de Pseudo Wigner-Ville lequel permet de réduire les interférences entre sources. Il est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{D}_{\text{PWV}, \mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) h(\tau) \exp\{-2i\pi\nu\tau\} d\tau \quad (8)$$

où $h(\tau)$ est une fenêtre glissante.

Le STFSQ des observations $\mathbf{X}(t)$, notée $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ de dimension $(mL' \times mL')$, vaut alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) &= \mathbf{A}\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\text{NN}}(t, \nu) \\ &\quad + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\text{SN}}(t, \nu) + \mathbf{D}_{\text{NS}}(t, \nu)\mathbf{A}^H \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)$ (resp. $\mathbf{D}_{\text{NN}}(t, \nu)$) représente le STFSQ des signaux sources (resp. des bruits), $\mathbf{D}_{\text{SN}}(t, \nu)$ et $\mathbf{D}_{\text{NS}}(t, \nu)$ sont les STFSQ croisés entre sources et bruits. $\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)$ est une matrice de taille $(nQ \times nQ)$. Les bruits étant indépendants des sources, le STFSQ des observations s'écrit finalement :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\text{SS}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\text{NN}}(t, \nu) \quad (10)$$

Pour estimer les matrices temps-fréquence correspondant aux signaux observés non-bruités, nous éliminons les points temps-fréquence de faible énergie en ne gardant que les points tels que :

$$\min(|D_{x_i x_j}(t, \nu)|^2) > \epsilon \quad i, j \in \{1, \dots, mL'\} \quad (11)$$

où ϵ est un réel de faible valeur et $D_{x_i x_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_{ij}$.

Ainsi,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) \simeq \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H. \quad (12)$$

La matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ est composée de blocs carrés de dimensions $(Q \times Q)$. En des points t - f ne correspondant qu'à des auto-termes sur les sources (et en raison du principe d'interférences, il ne peut y avoir qu'un seul auto-terme), cette matrice possède une structure algébrique particulière : elle est bloc-diagonale avec un seul bloc non nul sur la diagonale d'où la procédure de sélection automatique que nous présentons ci-dessous :

-
- Faire une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$, $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{U}(t, \nu)\mathbf{\Delta}(t, \nu)\mathbf{V}(t, \nu)^H$, avec $\mathbf{V}(t, \nu)$ et $\mathbf{U}(t, \nu)$ matrices unitaires de taille $(mL' \times mL')$ et $\delta(t, \nu) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(t, \nu)\}$ un vecteur d'éléments de la matrice diagonale $\mathbf{\Delta}(t, \nu)$.
 - On note $\delta(t, \nu) = (\delta_1(t, \nu), \dots, \delta_{mL'}(t, \nu))^T$ et on suppose que les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant : $\delta_1(t, \nu) \geq \delta_2(t, \nu) \geq \dots \geq \delta_{mL'}(t, \nu) \geq 0$.
 - Calculer le rapport $\frac{\sum_{i=1}^{L+L'} \delta_i^2(t, \nu)}{\|\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)\|_F^2}$ et vérifier s'il est proche de 1.
 - Si oui alors $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)$ est retenue sinon elle est rejetée.
-

Les matrices de \mathcal{S} (supposé de dimension N_m avec $N_m \in N^*$) possèdent alors une structure particulière puisqu'elles se factorisent toutes en $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H$, avec $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t, \nu)$ matrice bloc-diagonale possédant un seul bloc non nul sur la diagonale. Pour estimer la matrice de mélange \mathbf{A} , nous proposons donc de bloc-diagonaliser conjointement l'ensemble \mathcal{S} , ce au moyen de l'algorithme que nous allons maintenant présenter.

2.3 Algorithme de BDC non-unitaire

Pour résoudre le problème de la BDC non-unitaire, nous considérons la fonction de coût suivante :

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i \mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (13)$$

où $(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i$ est la i -ème des N_m matrices de l'ensemble \mathcal{S} . \mathbf{B} est la pseudo-inverse de \mathbf{A} et l'opérateur $\text{OffBdiag}\{\cdot\}$ désigne la matrice zéro bloc-diagonale. Notons que lorsque les matrices blocs de $(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i$ se réduisent à des scalaires *i.e.* $L = 0$ et $L' = 1$, on retombe alors sur un problème de diagonalisation conjointe sous transformation non unitaire. La fonction objective $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ se simplifie alors en $\sum_{i=1}^{N_m} \|\text{Offdiag}\{\mathbf{B}(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i \mathbf{B}^H\}\|^2$, avec $(\text{Offdiag}\{(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i\})_{ij} = (1 - \delta_{ij})(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_{ij}$,

qui n'est autre que la fonction de coût $\mathcal{C}_D(\mathbf{B})$, utilisée dans [3][11].

Afin d'assurer le fait que la matrice recherchée \mathbf{B} soit bel et bien inversible, elle est mise à jour à chaque itération m suivant la règle suivante ([12]) :

$$\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)}, \quad \forall m = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

où $\mathbf{B}^{(0)}$ est une matrice initiale, $\mathbf{B}^{(m)}$ est l'estimée de \mathbf{B} à la m -ème itération, $\mathbf{W}^{(m-1)}$ est une matrices zéro bloc-diagonale suffisamment petite (en terme de la norme de Frobenius) et \mathbf{I} est la matrice identité. La matrice \mathbf{W} est alors mise à jour selon la règle suivante :

$$\mathbf{W}^{(m)} = -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)}) \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

où μ est le pas d'adaptation et $\nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)})$ représente la matrice de gradient complexe. Dans [7], nous avons démontré qu'elle avait pour expression :

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) &= 4 \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} \right. \\ &+ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} \\ &+ \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)H} \\ &+ \left. \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^H + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^H \right) \quad (16) \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}_i^{(m)}$ et $\mathbf{E}_i^{(m)}$ désignent respectivement les matrices bloc-diagonale et zéro bloc-diagonale construite à partir de $(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i^{(m)}$ *i.e.* $(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i^{(m)} = \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}$. L'expression (16) est alors utilisée dans l'algorithme du gradient descendant (15). Afin d'accélérer la convergence de l'algorithme, le pas optimal μ est calculé algébriquement à chaque itération. Pour cela, nous devrions normalement calculer $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}))$, toutefois, nous nous contentons ici de calculer $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow \mu \mathbf{F}^{(m)}) = -\mu \text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$, \mathbf{W} étant suffisamment petite (en terme de norme) et zéro bloc-diagonale, si bien que seuls les blocs hors diagonale participent à la descente de l'algorithme. Le pas optimal est déterminé par la recherche des racines d'un polynôme d'ordre 3 obtenu par la dérivation du polynôme d'ordre 4 $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$. Finalement, l'algorithme de BDC non-unitaire à base de gradient descendant est résumé de la manière suivante :

Considérer les N_m matrices de l'ensemble \mathcal{S} : $\{(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_1^{(0)}, \dots, (\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_{N_m}^{(0)}\}$

Initialiser $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}$

Pour $m = 1, 2, \dots$

 Pour $i = 1, \dots, N_m$

 Calculer $\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu)_i^{(m)}$ par :

$$(\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} (\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu))_i^{(m-1)} \mathbf{B}^{(m-1)H}$$

 Calculer $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ dont l'expression est donnée dans (16)

 FinPour

Affecter $\mathbf{F}^{(m)} = -\text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$

Calculer les coefficients du polynôme $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$ d'ordre 4

Calculer le pas optimal μ par la recherche de la racine de la dérivée du polynôme d'ordre 4 qui donne le minimum dans ce polynôme
Affecter $\mathbf{W}^{(m)} = \mu \mathbf{F}^{(m)}$ et $\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)}$
FinPour

2.4 Simulations informatiques

Nous illustrons au moyen de simulations informatiques l'intérêt de la méthode proposée (baptisée $\text{JBD}_{\text{NU,G,STFSQM}}$) en comparant ses performances avec celles obtenues au moyen de deux autres approches. La première est basée sur l'utilisation d'un algorithme de BDC non-unitaire reposant sur l'optimisation algébrique d'un critère de type moindres carrés (baptisée $\text{JBD}_{\text{NU,A,STFSQM}}$) [6] et la seconde utilise un algorithme de BDC sous transformation unitaire [4] (cette méthode sera notée $\text{JBD}_{\text{U,STFSQM}}$ dans la suite). Pour être applicable, cette seconde approche nécessite un blanchiment préalable des observations. Les trois méthodes sont comparées sur des ensembles de matrices de même dimension : ceux construits à partir de notre détecteur de points temps-fréquence présentés dans (2.2). Dans la simulation présentée ici, nous considérons $n = 2$ signaux sources composées de 128 échantillons temporels, reçus au niveau de $m = 3$ capteurs. Le premier signal source (resp. le deuxième signal source) émis est une modulation linéaire de fréquence (resp. une modulation sinusoïdale de fréquence (MSF)). Ce signal est caractérisé par une fréquence de début $\nu_{d_1} = 0.05$ (resp. $\nu_{d_2} = 0.15$) et une fréquence de fin $\nu_{f_1} = 0.45$ (resp. $\nu_{f_2} = 0.35$) et la période de la MSF est $T_{f_m} = 100$. On considère $L = 2$, $L' = 4$ et une matrice de mélange de la forme : $\mathbf{A}[z] = (\mathbf{A}_1[z] \ \mathbf{A}_2[z])$ où :

$$\mathbf{A}_1[z] = \begin{pmatrix} -0.3592 + 0.4104z^{-1} + 0.8382z^{-2} \\ 0.5585 - 0.1108z^{-1} + 0.8221z^{-2} \\ 0.4550 - 0.7171z^{-1} + 0.5279z^{-2} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}_2[z] = \begin{pmatrix} 0.9365 - 0.3316z^{-1} + 0.1138z^{-2} \\ 0.4876 - 0.3044z^{-1} - 0.8183z^{-2} \\ -0.8218 + 0.1528z^{-1} + 0.5489z^{-2} \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{A}[z]$ transformée en z de $\mathbf{A}(t)$. Le STFSQ utilisé est le spectre de Pseudo Wigner-Ville. Les points temps-fréquence sélectionnés à l'aide de la procédure présentée dans (2.2) sont représentés au niveau de la Fig. (1) pour deux valeurs de RSB (15 dB et 100 dB). En utilisant

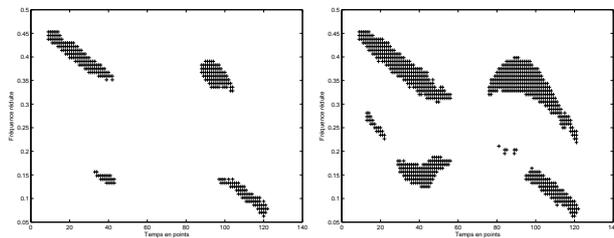


FIG. 1 – Points temps-fréquence sélectionnés pour un RSB de 15 dB (à gauche), de 100 dB (à droite).

l'indice de performance (6), nous obtenons les résultats présentés au niveau de la Fig. (2). A gauche, nous donnons le nombre de matrices sélectionnées en fonction du RSB et à droite la valeur de l'indice de performance en fonction du RSB. Ces résultats montrent qu'il est possible d'obtenir de meilleures performances avec les méthodes

$\text{JBD}_{\text{NU,G,STFSQM}}$ et $\text{JBD}_{\text{NU,A,STFSQM}}$ du fait de l'absence de blanchiment.

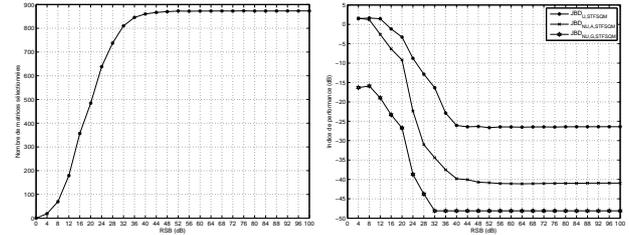


FIG. 2 – Evolution du nombre de matrices sélectionnées en fonction du RSB (à gauche) et évolution de l'indice de performance en dB obtenu avec les méthodes $\text{JBD}_{\text{NU,G,STFSQM}}$, $\text{JBD}_{\text{NU,A,STFSQM}}$ et $\text{JBD}_{\text{U,STFSQM}}$ en fonction du RSB (à droite).

Références

- [1] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraïm, "Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization", in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.
- [2] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. De Moor and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification", 23rd Symposium on Information Theory in the Benelux, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.
- [3] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, n°5, pp. 1673-1687, May 2007
- [4] C. Févotte and C. Doncarli, "A unified presentation of blind source separation methods for convolutive mixtures using block-diagonalization", in *Proc. Independent Component Analysis (ICA)*, pp. 349-354, Nara, Japan, April 2003.
- [5] L. Giulieri, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non-orthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices for source separation", *IEEE Signal Processing Letter*, Vol. 12, No. 5, pp. 415-418, May 2005.
- [6] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib and E. Moreau, "Une nouvelle méthode sans blanchiment pour la séparation aveugle de mélanges convolutifs de sources basée sur l'utilisation de distributions temps-fréquence spatiales quadratiques", *accepté GRETSI 07*, 11-14 septembre 2007, Troyes, France
- [7] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Abou-tajidine, "Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach", *accepted to the 7th ICA*, London, UK, September 2007.
- [8] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib and E. Moreau, "A non-unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources", *accepted to IEEE Signal Processing Letter*.
- [9] C. Jutten, P. Comon (sous la direction de), "Séparation de sources 1 et 2", *Edition Hermès*, Collection de traitement de signal et de l'image, Paris, Tome 1 & 2.
- [10] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp. 530–541, March 2001.
- [11] A. Yeredor, A. Ziehe and K.R. Müller, "Approximate joint diagonalization using a natural gradient approach", *ICA 2004*, LNCS 3195, pp. 89–96, 2004.
- [12] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, G. and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation", *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, pp. 801–818, July 2004.

Separation of convolutive mixtures of cyclo-stationary signals using a non-unitary block-diagonalization algorithm

Hicham Ghennioui^{1,2}, Saloua Rhioui¹, Nadège Thirion-Moreau¹, Eric Moreau¹, Abdellah Adib^{2,3}, Driss Aboutajdine²

{1} STD, ISITV, av. George Pompidou, BP 56, La Valette du Var, Cedex, France

{2} GSCM-LRIT, FSR, av. Ibn Battouta, BP 1014, Rabat, Maroc

{3} DPG, IS, av. Ibn Battouta, BP 703, Rabat, Maroc

E-mail: ghennioui@gmail.com, {rhioui, thirion, moreau}@univ.tln.fr, adib@israbat.ac.ma, aboutaj@ieee.org

Abstract—In this communication, we address the problem of the blind separation of convolutive mixtures of sources also known as blind equalization of linear time invariant multi-input multi-output systems in digital communications. The considered input signals are cyclo-stationary processes whose cyclic frequencies are not necessarily known. We propose a new method which, by some aspects, generalizes previous works developed in the instantaneous case of mixtures. The key idea consists of applying a particular linear operator on the correlation matrices of the observations and, then, to take advantage of some specific properties of the aforementioned “transformed” matrices in order to build a particular set of matrices (for instance, the frequencies that correspond to the matrices belonging to that set do happen to be the cyclic ones). Then, the (non-unitary) joint block diagonalization of this matrices set makes it possible to estimate the mixing system and, consequently, to recover the sought after source signals. Finally, computer simulations are provided in order to illustrate the behaviour and the usefulness of the proposed approach in the context of digital communication.

Index Terms—Blind sources separation, convolutive mixtures, blind MIMO equalization, cyclo-stationary signals, second order statistics, approximate joint block-diagonalization algorithm.

I. INTRODUCTION

In this communication, we consider the problem of blind equalization of Linear Time Invariant (LTI) Multi-Input Multi-Output (MIMO) systems. Such a problem arises in a wide variety of applications among which the multi-user wireless communications where the observed signals have to be equalized both in space and time in order to eliminate both inter-symbols and co-channel interferences. These interferences are due to possible delays introduced by multi-paths propagation and to possible multi-users. Examples can be found in the Space Division Multiple Access (SDMA) or the Code Division Multiple Access (CDMA) communication systems [12].

The considered problem can be basically formulated as follows. Several linear (temporal and spatial) mixtures of input signals, called sources, are observed. Assuming that the sources are unknown and inobservable as well as the mixing MIMO system, the purpose is to recover them thanks to the observed signals only. That is why such a problem is often qualified as “blind” or “unsupervised”.

To that aim, different approaches depending on the characteristics of the input signal(s) and on the number of input and output signals of the considered linear system, have been developed in the literature. Most of them assume that the sources are random independent stationary processes. Comparatively, very few works are dedicated to the case of non stationary signals. Here, we focus on a particular class of non stationary signals: modulated ones stemming from unknown digital communication systems (involving that the baud-rates of the various transmitted signals are unknown). In such a context, the resulting signals are proved to be cyclo-stationary sequences. It is Gardner, in [6],

who was the first to introduce this concept in the field of array processing. Since, it has proven to be useful for the modelling of communication signals and also led to many breakthroughs in that field among which [1] [4] [5] [9]. Most of these methods, by taking into account the very specific statistical properties of the communications signals [4] [5] and the knowledge (or not) of their different cyclic frequencies, generalize techniques that were developed in the context of stationary signals.

In [9], it has been pointed out that the contrast function (involving higher order statistics) to be maximized cannot, in general, be consistently estimated if the cyclic frequencies of the second order statistics of the observations are unknown. Yet, it has been shown in [4] [5] that if the second order statistics of the various source signals do not share the same cyclic frequencies, then the knowledge of these latter ones is no more required. Let us finally notice that our developments originate from the works presented in [1]. Albeit taking advantage of the same property of a “transformed” correlation matrix, the treatments that follow are rather different: while their algorithm is based on the optimization of a given contrast function, our approach, in the instantaneous case [11], is more direct since it combines a rank-one matrices selection procedure together with a Singular Value Decomposition (SVD) followed by a classification algorithm and enables to tackle the under-determined case.

The main objective of this communication is to provide a new solution to the problem of the blind equalization of LTI MIMO systems in both cases: when the second order cyclic frequencies of the inputs are either known or unknown. By reformulating the convolutive mixing model into an instantaneous one (as suggested in [8]) and by fully exploiting the particular structure of the correlation matrices after the application of a particular linear transformation, we show that the considered problem can be rewritten as a problem of joint block-diagonalization of a given set of matrices. Then, the joint block-diagonalization algorithm in [7] is applied on the set of matrices that have been automatically selected thanks to a procedure that is described too. Finally, computer simulations are provided in order to illustrate the behaviour and the usefulness of the proposed approach in the context of digital telecommunications.

II. PROBLEM STATEMENT

A. Model and assumptions

We consider m observations denoted by $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. In the convolutive case, the sources are assumed mixed through a linear Finite Impulse Response (FIR) multichannel system, denoted $\mathbf{H}(t)$, implying that the system is described by the following input-output relation:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_j(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

where $x_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are the m observations, $s_j(t)$, for all $j = 1, \dots, n$ are the n sources ($n \leq m$), $h_{ij}(t)$ is the real transfer function between the j -th source and the i -th sensor with an overall extent of $L + 1$ taps and $n_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are additive noises. Our developments are based on the following assumptions:

Assumption A: The sources are zero-mean and cyclostationary. Hence, their autocorrelation functions $R_{s_i}(t, \tau) = \mathbb{E}\{s_i(t)s_i^*(t - \tau)\}$, for all $i = 1, \dots, n$ are periodic in t with a period $T_i \in \mathbb{R}^{+*}$, for all $i = 1, \dots, n$. $\mathbb{E}\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation operator and T_i stands for the cyclic-period of the i -th source signal $s_i(t)$. Hence, $R_{s_i}(t, \tau)$ can be decomposed into Fourier series as

$$R_{s_i}(t, \tau) = \sum_k R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau] \exp(i2\pi \frac{k}{T_i} t), \quad (2)$$

where $i^2 = -1$. $R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau]$ stands for the cyclic correlation function (coefficient of the Fourier series expansion) defined as

$$R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau] = \frac{1}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} R_{s_i}(t, \tau) \exp(-2i\pi \frac{k}{T_i} t) dt. \quad (3)$$

Assumption B: The cyclic periods of the sources are different two by two, i.e. $T_i \neq T_j$, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ and $i \neq j$. We define the set \mathcal{V}_i of the whole cyclic frequencies of the i -th source signal as

$$\mathcal{V}_i = \left\{ \nu_i = \frac{k}{T_i}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Assumption C: The noises n_j for all $j = 1, \dots, m$ are stationary white zero-mean random signals, mutually uncorrelated, independent from the sources.

B. Some recalls

Let us now recall how the convolutive mixing model can be reformulated into an instantaneous one [8]. Considering the vectors $\mathbf{S}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{N}(t)$ respectively defined as:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t - Q + 1), \dots, s_n(t - Q + 1)]^T, \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t - L' + 1), \dots, x_m(t - L' + 1)]^T, \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t - L' + 1), \dots, n_m(t - L' + 1)]^T, \end{aligned}$$

where $Q = L + L'$ and $(\cdot)^T$ stands for the transpose operator. The $(M \times N)$ matrix \mathbf{A} , with $M = mL'$ and $N = nQ$, writes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

where

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix} \quad (4)$$

are $(L' \times Q)$ matrices. The model described in (1) can be written in matrix form as:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (5)$$

In order to have an over-determined model, L' must be chosen such that $mL' \geq nQ$. We assume, here, that the matrix \mathbf{A} is full rank. The correlation matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau)$ of the observations $\mathbf{X}(t)$ is defined as:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t - \tau)\}, \quad (6)$$

where $(\cdot)^H$ stands for the conjugate transpose operator. Using (5), it is easily seen that the correlation matrix in (6) admits the following decomposition

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau), \quad (7)$$

where $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)$ is the correlation matrix of the sources. $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)$ is the correlation matrix of the noises. Those two matrices are defined like in (6).

III. THE PROPOSED APPROACH

A. A useful property

Like in (3), let us now define the following linear operator $(\cdot)^{\text{fs}}$ which operates on the matrix argument component wise

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) \exp(-2i\pi\nu t) dt \quad (8)$$

Since this operator is linear, using (7) in (8), we directly have

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)\alpha(\nu) \end{aligned} \quad (9)$$

where $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ are defined similarly to $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ in (8) and

$$\alpha(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-2i\pi\nu t) dt.$$

Thus $\alpha(\nu) = 1$ if $\nu = 0$ and else 0. Using the fact that the sources have distinct cyclic periods as stated in Assumption B, then, there exist values of ν for which $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ has a particular structure. In fact, for frequencies ν_o such that:

$$\text{H}_1. \nu_o \in \mathcal{V}_i, \nu_o \notin \bigcup_{j, j \neq i} \mathcal{V}_j \text{ and } R_{s_i}^{\text{fs}}(\nu_o, \tau) \neq 0,$$

one can show that the matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu_o, \tau)$ possesses only $(L + L') \times (L + L')$ non null elements all inside the same block. This is due to the fact that $R_{s_j}^{\text{fs}}(\frac{k}{T_i}, \tau) = 0$, with $k \in \mathbb{Z}$ and for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ such that $i \neq j$. Thus, for such a frequency value, the matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is a block-diagonal matrix with only one non null block: the one at the position (i, i) . As a consequence, we propose to joint block-diagonalize the following matrices set $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall \nu \text{ satisfying property H}_1\}$ in order to estimate the sought after mixing matrix \mathbf{A} . In the following, the size of this set will be denoted N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$).

Let us notice, finally, that the recovered signals after inversion of the system are obtained up to a permutation and up to a filter which are the classical indetermination of blind source separation in the convolutive case. In the subsection III-B, we explain how the matrices set \mathcal{S} is built while in the subsection III-C, we recall the main points of the (non-unitary) joint block diagonalization algorithm that we have developed. It is based on a gradient descent method whereby the optimal step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of 3rd-degree polynomial.

B. Practical considerations: how to build the matrices set to be joint block-diagonalized ?

It has to be noticed that the knowledge of the cyclic frequencies is not necessary to achieve the identification of the mixing system, even though such a knowledge simplifies such a task.

1) Known cyclic frequencies

When the cyclic frequencies ν_j are known (or estimated like in [2]), for all $j = 1, \dots, n$, the matrices set $\{\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu_j, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall j = 1, \dots, n\}$ is directly joint block-diagonalized.

2) Unknown cyclic frequencies

When the cyclic frequencies are unknown, the transformed correlation matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is calculated for a sufficiently large number of frequency bins in order to make sure to find a sufficiently wide range of cyclic frequencies corresponding to all the source signals. To be able to apply our joint block-diagonalization algorithm, we first have to detect matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ corresponding to matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ which are block-diagonal with only one non-null block. It can be shown that the matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ have the same rank implying that matrices whose rank is equal to $L + L'$ have to be detected to build the set \mathcal{S} .

We thus propose the following detection procedure:

- Use a Singular Value Decomposition (SVD) of $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \mathbf{U}(\nu, \tau)\mathbf{\Delta}(\nu, \tau)\mathbf{V}(\nu, \tau)^H$ with $\mathbf{V}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{U}(\nu, \tau)$ are $(mL' \times mL')$ unitary matrices and $\{\delta(\nu, \tau_i) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(\nu, \tau)\}$ is a diagonal vector with non-negative components. Let $\delta(\nu, \tau) = (\delta_1(\nu, \tau), \dots, \delta_{mL'}(\nu, \tau))^T$ and assume that the singular values are organised in a decreasing order: $\delta_1(\nu, \tau) \geq \delta_2(\nu, \tau) \geq \dots \geq \delta_{mL'}(\nu, \tau) \geq 0$.
- Calculate the ratio $\frac{\sum_{i=1}^{L+L'} \delta_i(\nu, \tau)^2}{\|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\|_F^2}$ where $\|\cdot\|_F$ stands for the Frobenius norm and check if it is near to 1,
- If it is the case, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is retained else it is discarded.

The matrices that belong to \mathcal{S} have a particular structure since they can all be written as $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H$, for $\tau \neq 0$ where $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is a block-diagonal matrix having only one non null block on the diagonal. One possible way to estimate the mixing matrix \mathbf{A} , is to joint block diagonalize the matrices set \mathcal{S} without any unitary constraint about the sought after matrix \mathbf{A} .

C. Non-unitary joint block diagonalisation algorithm

To solve the problem of the non-unitary joint block-diagonalization, we consider the following cost function

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i \mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (10)$$

where $(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i$ is the i -th of the N_m matrices belonging to \mathcal{S} . \mathbf{B} is the pseudo-inverse of \mathbf{A} and the operator $\text{OffBdiag}\{\cdot\}$ denotes the zero block-diagonal matrix. To make sure that the found matrix \mathbf{B} keeps on being invertible, it is updated at each iteration m according to the following scheme (see [13]):

$$\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)} \quad \forall m = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

where $\mathbf{B}^{(0)}$ is some initial guess, $\mathbf{B}^{(m)}$ denotes the estimated matrix \mathbf{B} at the m -th iteration, $\mathbf{W}^{(m-1)}$ is a sufficiently small (in terms of Frobenius norm) zero-block diagonal matrix and \mathbf{I} is the identity matrix. The wanted matrix \mathbf{W} is then updated according to the following adaptation rule:

$$\mathbf{W}^{(m)} = -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)}) \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

where μ is the step size or adaptation coefficient and where $\nabla \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{W}^{(m-1)})$ stands for the complex gradient matrix. In [7], it has been shown to be equal to:

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}) &= 4 \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)H} \mathbf{D}_i^{(m)} \right. \\ &+ \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W} \mathbf{E}_i + \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)} \\ &+ \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^{(m)H} + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{D}_i^{(m)H} \\ &\left. + \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{E}_i^H + \mathbf{W} \mathbf{D}_i^{(m)} \mathbf{W} \mathbf{E}_i^H \right) \quad (13) \end{aligned}$$

where $\mathbf{D}_i^{(m)}$ and $\mathbf{E}_i^{(m)}$ respectively denote the block-diagonal and zero block-diagonal matrices extracted from the matrix $(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i^{(m)}$ i.e. $(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i^{(m)} = \mathbf{E}_i^{(m)} + \mathbf{D}_i^{(m)}$. The expression (13) is then used in the gradient descent algorithm (12). To accelerate the convergence of the algorithm, the optimal step size μ is computed algebraically at each iteration. To that aim, one normally has to calculate $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow -\mu \nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W}))$ but, here, it is replaced by $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W} \leftarrow \mu \mathbf{F}^{(m)} = -\mu \text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\})$. $\text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$ is used rather than $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ since \mathbf{W} is a sufficiently small (in terms of norm) zero block-diagonal matrix implying that only the off block-diagonal terms are involved in the descent of the criterion. The optimal step is determined by the rooting of the 3rd-degree polynomial which is obtained as the derivative of the 4rd-degree polynomial $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$ with respect to μ . The non-unitary joint block-diagonalization algorithm based on a gradient method is finally summarized below:

Consider the N_m matrices of set \mathcal{S} : $\{(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_1^{(0)}, \dots, (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_{N_m}^{(0)}\}$

Given initial estimates $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0}$ and $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}$

For $m = 1, 2, \dots$

For $i = 1, \dots, N_m$

Compute $(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i^{(m)}$ as

$$(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i^{(m-1)} \mathbf{B}^{(m-1)H}$$

Compute $\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})$ whose expression is given by (13)

EndFor

Set $\mathbf{F}^{(m)} = -\text{OffBdiag}\{\nabla \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{W})\}$

Compute the coefficients of the 4rd-degree polynomial $\mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mu \mathbf{F}^{(m)})$

Set the optimal step μ by the research of the roots of the derivative of the 4rd-degree polynomial attaining the absolute minimum in this polynomial

Set $\mathbf{W}^{(m)} = \mu \mathbf{F}^{(m)}$ and $\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)}$

EndFor

IV. COMPUTER SIMULATIONS & CONCLUSIONS

We consider $m = 4$ mixtures of $n = 2$ digital carrier-modulated source signals written as

$$s(t) = \Re\{v(t) \exp(2i\pi f_c t)\} \quad (14)$$

where $\Re\{x\}$ stands for the real part of the complex number x , f_c is the reduced carrier frequency which is equal to 0.5 for the first source (respectively 0.3333 for the second one) and $v(t)$ is the complex envelope of $s(t)$. It can be expressed as

$$v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) h(n - kT) \quad (15)$$

with $a(n)$ is an i.i.d. zero-mean complex random binary sequence referred to as the transmitted symbols, T is an integer related to the period symbol and $h(n)$ is a deterministic waveform signal. The waveform $h(n)$ is chosen triangular. It is defined for an even cyclic period as: $h(n) = \frac{2}{T}n$ if $0 \leq n \leq \frac{T}{2}$; $h(n) = -\frac{2}{T}n + 2$ if $\frac{T}{2} + 1 \leq n \leq T - 1$ and $h(n) = 0$ otherwise. The cyclic period of the two considered sources are respectively $T_1 = 4$, $T_2 = 6$. There is no noise and the sources are mixed according to the following transfer function matrix (we use $L = 3$ and $L' = 3$):

$$\mathbf{A}[z] = (\mathbf{A}_1[z] \ \mathbf{A}_2[z])$$

where $\mathbf{A}[z]$ stands for the z transform of $\mathbf{A}(t)$ and

$$\mathbf{A}_1[z] = \begin{pmatrix} -0.0070 + 0.6980z^{-1} - 0.1087z^{-2} - 0.9996z^{-3} \\ 0.2493 + 0.7965z^{-1} - 0.3674z^{-2} + 0.9663z^{-3} \\ -0.0675 - 0.0367z^{-1} - 0.8465z^{-2} - 0.4451z^{-3} \\ 0.7954 - 0.3343z^{-1} + 0.5201z^{-2} + 0.9924z^{-3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2[z] = \begin{pmatrix} -0.7952 + 0.6810z^{-1} - 0.7811z^{-2} + 0.1853z^{-3} \\ 0.9768 + 0.4496z^{-1} + 0.4614z^{-2} - 0.8298z^{-3} \\ -0.2325 + 0.4162z^{-1} + 0.5530z^{-2} - 0.5414z^{-3} \\ 0.9354 + 0.1975z^{-1} - 0.5893z^{-2} + 0.7924z^{-3} \end{pmatrix}.$$

To measure the quality of the separation, we use this performance index (extension of the one introduced in [10]):

$$I(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right]$$

where $(\mathbf{G})_{i,j}$ for all $i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th (square) block matrix of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. On the left of the Fig. 1 (resp. its right), the obtained performance index is displayed versus the number of matrices (resp. the number of the selected matrices by the criterion presented in Section III-B) in the case of known (resp. unknown) cyclic frequencies. Finally, on the Fig.

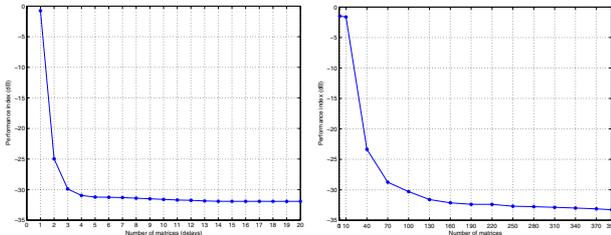


Figure 1. Left: I versus the number of matrices in the case of known cyclic frequencies, right: I versus the number of selected matrices when the cyclic frequencies are unknown.

2, the two approaches (known or unknown cyclic frequencies) are compared. The performance index versus the realization is given: results have been sorted in the decreasing order of the obtained performance. They illustrate the good behaviour of the proposed method.

To conclude, we have presented a new approach dedicated to blindly equalize LTI MIMO systems in digital communication when the inputs are cyclo-stationary signals. It operates into three steps: first a linear operator is applied on the observations correlation matrix, then, a detection procedure based on the rank is used to select particular matrices and finally a non unitary joint-block diagonalization algorithm is applied to estimate the mixing system and to restore the sources.

REFERENCES

- [1] K. Abed-Meraïm, Y. Xiang, J. H. Manton and Y. Hua, "Blind source separation using second-order cyclostationary statistics", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 4, pp. 694-701, April 2001.
- [2] A. V. Dandawat and G. B. Giannakis, "Statistical tests for presence of cyclostationarity". *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, pp. 2355-2369, September 1995.
- [3] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. De Moor and J. Vandewalle, "Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification", *23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.

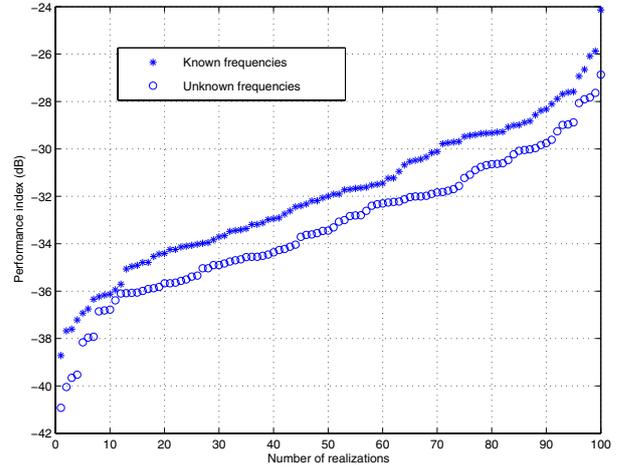


Figure 2. I versus the realization (chosen among the 100 Monte-Carlo trials). The realizations are sorted in the decreasing order of the obtained performance.

- [4] A. Ferréol, P. Chevalier and L. Albera, "Second-order blind separation of first- and second-order cyclostationary sources - Application to AM, FSK, CPFSK and deterministic sources", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 4, pp. 845-861, April 2004.
- [5] A. Ferréol, P. Chevalier and L. Albera, "On the behavior of current second and higher order blind source separation methods for cyclostationary sources - Application to AM, FSK, CPFSK and deterministic sources", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 6, pp. 1712-1725, June 2000.
- [6] W. A. Gardner, "Cyclostationarity in communications and signal processing", *IEEE press*, W. A. Gardner Editor, 1993.
- [7] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajidine, "Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach", *submitted to the 7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, London, UK, September 2007.
- [8] A. Gorokhov and Ph. Loubaton, "Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources", *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, Vol. 44, no. 9, pp. 813-820, September 1997.
- [9] P. A. Jallon, A. Chevreuil, P. Loubaton and P. Chevalier, "Separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources: a contrast function based approach", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, pp. 434-444, February 1997.
- [10] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 3, pp. 530-541, March 2001.
- [11] S. Rhioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Under-determined blind identification of cyclo-stationary signals with unknown cyclic frequencies", in *Proc. IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'2006)*, Toulouse, France, May 2006
- [12] A.-J. Van der Veen, S. Talwar and A. Paulraj, "A subspace approach to blind space-time signal processing for wireless communication systems", *IEEE on Signal Processing*, vol. 45, pp. 173-190, January 1997.
- [13] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation", *Journal of Machine Learning Research*, pp. 801-818, vol. 5, July 2004.

TWO NEW GRADIENT BASED NON-UNITARY JOINT BLOCK-DIAGONALIZATION ALGORITHMS

H. Ghennioui^{1,2}, N. Thirion-Moreau¹, E. Moreau¹, D. Aboutajdine², A. Adib^{2,3}

¹ LSEET-LEPI, UMR CNRS 6017,
Université du Sud Toulon Var
F-83957, La Garde Cédex, France
email: {thirion,moreau}@univ.tln.fr

² GSCM-LRIT, FSR
Av. Ibn Battouta, BP 1014
Rabat, Maroc
email: ghennioui@gmail.com

³ DPG, IS, Av. Ibn Battouta
BP 703, Rabat, Maroc
email: adib@israbat.ac.ma
aboutaj@ieee.org

ABSTRACT

This paper addresses the problem of the non-unitary joint block diagonalization (NU – JBD) of a given set of matrices. Such a problem arises in various fields of applications among which blind separation of convolutive mixtures of sources and array processing for wide-band signals. We present two new algorithms based respectively on (absolute) gradient and relative gradient descent approaches. The main advantage of the proposed algorithms is that they are more general (the real, positive definite or hermitian assumptions about the matrices belonging to the considered set are no more necessary and the found joint block diagonalizer can be either a unitary or non-unitary matrix). These algorithms also outperform the JBD algorithm based on an optimal step size but “approximate gradient” approach that we had previously suggested in [12]. In fact, here, the exact calculus of the complex gradient matrix is performed whereas it was approximated in [12]. Finally, by ensuring the invertibility of the estimated matrix, the relative gradient approach makes the proposed NU – JBD algorithm more stable and consequently more robust. Computer simulations are provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed approaches in two cases: when exact block-diagonal matrices are considered and when they are perturbed by an additive Gaussian noise. A comparison with the method presented in [12] is also performed, emphasizing the good behavior of the proposed algorithms.

1. INTRODUCTION

The problem of joint decompositions of matrices or tensors sets arises in many multivariate signal processing applications.

One of the first considered problem was the joint-diagonalization of matrices under the unitary constraint, leading to the nowadays well-known JADE [4] and SOBI [1] algorithms. The following works have addressed either the problem of the joint-diagonalization of tensors [7][10][17] or the problem of the joint-diagonalization of matrices but discarding the unitary constraint [8][11][18][21][22]. A second type of matrices decomposition has proven to be useful in blind source separation, telecommunications and cryptography. It consists of joint zero-diagonalizing a set of matrices either under the unitary constraint [2] or not [6][11]. Most of the proposed (unitary) joint-diagonalization (JD) and/or zero-diagonalization (JZD) algorithms have been applied to the problem of the blind separation of instantaneous mixtures of sources. Finally, a third particular type of matrices decomposition arises in both the wide-band sources localization and the blind separation of convolutive mixtures of sources problems. It is called joint block-diagonalization since the considered matrices are block diagonal ones: a block diagonal matrix is a square diagonal matrix in which the diagonal elements are square matrices of any size (possibly even), and the off-diagonal blocks are zero matrices.

Such a problem has been considered in [3][9] where the block-diagonal matrices under consideration have to be positive definite and hermitian matrices and the joint-block diagonalizer is required to be a unitary matrix. When the joint-block diagonalizer is no more necessarily a unitary matrix, alternative solutions have been proposed. [13][19] address the problem of the NU – JBD of a set of positive definite matrices whereas this assumption is discarded in [12] and the considered matrices simply have to be hermitian ones. Yet, let us remark that this latter solution relies upon an approximation in the calculation of the complex gradient matrix of the considered cost function.

In this communication, we present two new algorithms based respectively on a (absolute) gradient and on a relative gradient-descent approach. The main advantage of these algorithms is that they are more general (the considered matrices can be complex, non-positive definite, non-hermitian and the joint block-diagonalizer is not necessarily a unitary matrix). Besides, the relative gradient based algorithm ensures the invertibility of the joint block-diagonalizer (when the step size is sufficiently small) and hence a greater numerical stability and robustness of the resulting algorithm.

2. PROBLEM STATEMENT

The non-unitary joint block-diagonalization (NU – JBD) problem is stated in the following way: let us consider a set \mathcal{M} of N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$) square matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, for all $i \in \{1, \dots, N_m\}$ which all admit the following decomposition:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A} \mathbf{D}_i \mathbf{A}^H, \quad (1)$$

$$\text{where } \mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{D}_{i,22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{r-1r} \\ \mathbf{0}_{r1} & \dots & \mathbf{0}_{rr-1} & \mathbf{D}_{i,rr} \end{pmatrix}, \text{ for all } i \in$$

$\{1, \dots, N_m\}$ are $N \times N$ block diagonal matrices with $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{D}_{i,jj}, i \in \{1, \dots, N_m\}, j \in \{1, \dots, r\}$ are $n_j \times n_j$ square matrices so that $n_1 + \dots + n_r = N$ where $\mathbf{0}_{ij}$ denotes the $n_i \times n_j$ null matrix and $(\cdot)^H$ the transpose conjugate operator. \mathbf{A} is a $M \times N$ ($M \geq N$) full rank matrix and the $N \geq M$ matrix \mathbf{B} is its pseudo-inverse (or generalized Moore-Penrose inverse). The set of the N_m square matrices $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ is denoted \mathcal{D} . The NU – JBD problem consists of estimating the matrix \mathbf{A} or \mathbf{B} and eventually the block-diagonal matrices set \mathcal{D} from only the matrices set \mathcal{M} .

The case of a unitary matrix \mathbf{A} has been considered in [9] where a first solution is suggested. Recently, two solutions have been proposed in [13][19] for a non-unitary matrix \mathbf{A} and for a set \mathcal{M} of positive definite matrices. Finally in [12], the matrices in \mathcal{M} simply have to be hermitian. However, the calculus of the complex gradient matrix is an approximated one like in [21] for the JD problem.

3. JOINT BLOCK-DIAGONALIZATION BASED ON GRADIENT APPROACHES

3.1 Principle

Our aim is to present a new algorithm to solve the problem of the NU – JBD. The following cost function is considered as suggested in [12]:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2, \quad (2)$$

where $\|\cdot\|_F$ is the Frobenius norm and the vector \mathbf{n} is defined as $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$. Considering a square $N \times N$ matrix $\mathbf{M} = (M_{ij})$, such that:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where \mathbf{M}_{ij} for all $i, j = 1, \dots, r$ are $n_i \times n_j$ matrices. The matrix operator $\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}^1$ is then defined as:

$$\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The NU – JBD problem is linked to the non-unitary joint diagonalization (NU – JD) one. In this latter, $\mathbf{D}_{i,jj}, i \in \{1, \dots, N_m\}, j \in \{1, \dots, r\}$ are no more matrices but scalars ($n_j = 1$ for all $j \in \{1, \dots, r\}$ and $N = r$). The zero block-diagonality operator can then be simplified as follows:

$$\text{OffBdiag}_{(\mathbf{1})}\{\mathbf{M}\} = ((1 - \delta_{ij})M_{ij})\mathbf{1}_N = \text{OffDiag}\{\mathbf{M}\},$$

where $\mathbf{1}_N$ is a $N \times N$ matrix whose components are all equal to 1 which leads to the minimization of the following cost function:

$$\mathcal{C}_D(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2. \quad (5)$$

It has been used in [4] under the unitary constraint (*i.e.* $M = N$ and $\mathbf{B}\mathbf{B}^H = \mathbf{B}^H\mathbf{B} = \mathbf{I}_N$, with \mathbf{I}_N the $N \times N$ identity matrix). When \mathbf{B} is not necessarily a unitary matrix, this cost function $\mathcal{C}_D(\mathbf{B})$ has also been used in [11][16][21][22].

We propose, here, to use a gradient-descent algorithm to minimize the cost function given by Eq. (2) to estimate the matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times M}$. It means that \mathbf{B} is re-estimated at each iteration m and from now on denoted $\mathbf{B}^{(m)}$. It is updated according to the following adaptation rule for all $m = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)}), \quad (6)$$

where μ_a is positive a small enough number called the step size or adaptation coefficient and where $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ stands for the complex (absolute) gradient matrix defined by [20]:

$$\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*}. \quad (7)$$

$(\cdot)^*$ stands for the complex conjugate operator.

¹When there is no ambiguity, this notation $\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\cdot\}$ will be simplified into $\text{OffBdiag}\{\cdot\}$

To ensure the invertibility of the matrix \mathbf{B} and hence the stability of the algorithm, one can use another optimization scheme called relative gradient method [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(m)} &= \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)})\mathbf{B}^{(m-1)}, \\ &= \left(\mathbf{I}_N - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)}) \right) \mathbf{B}^{(m-1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} \mathbf{B}^H = \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})(\mathbf{B})^H. \quad (9)$$

The complex absolute gradient matrix $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ (given by Eq. (7)) of the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ has to be calculated to derive the algorithm.

3.2 Gradient matrix of the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$

Let us introduce some notations: $\text{tr}\{\cdot\}$ denotes the trace operator, $d(\cdot)$ stands for the differential operator, $\text{vec}(\cdot)$ is the vec-operator (applied on a matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ it stacks its columns into a column vector belonging to $\mathbb{C}^{N^2 \times 1}$) and \mathbf{T}_{Boff} is the $N^2 \times N^2$ “transformation” matrix defined as:

$$\mathbf{T}_{\text{Diag}} = \text{diag}\{\text{vec}(\text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{1}_N\})\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_{\text{Boff}} = \mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T}_{\text{Diag}}, \quad (11)$$

where $\mathbf{I}_{N^2} = \text{Diag}\{\mathbf{1}_{N^2}\}$ is the $N^2 \times N^2$ identity matrix, $\text{diag}\{\mathbf{a}\}$ is a square diagonal matrix which contains the elements of the vector \mathbf{a} on its diagonal and $\text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} - \text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\mathbf{M}\}$ (generally $\text{Bdiag}_{(\mathbf{1})}\{\cdot\}$ is simply denoted by $\text{Diag}\{\cdot\}$). Considering three $N \times N$ square matrices \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 and \mathbf{D}_3 and two rectangular matrices \mathbf{D}_4 ($M \times N$) and \mathbf{D}_5 ($N \times M$) and a square $N \times N$ matrix \mathbf{D}_6 , our developments are based on the following properties [15][16]:

- P₁. $\|\text{OffBdiag}\{\mathbf{D}_1\}\|_F^2 = \text{tr}\left\{(\text{OffBdiag}\{\mathbf{D}_1\})^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{D}_1\}\right\} = \text{tr}\left\{\mathbf{D}_1^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{D}_1\}\right\}.$
- P₂. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T\}.$
- P₃. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1\} + \text{tr}\{\mathbf{D}_2\}.$
- P₄. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\} \Rightarrow \text{tr}\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\}.$
- P₄' . $\text{tr}\{\mathbf{D}_4\mathbf{D}_5\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_5\mathbf{D}_4\}.$
- P₅. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1^H\mathbf{D}_2\} = (\text{vec}(\mathbf{D}_1))^H \text{vec}(\mathbf{D}_2).$
- P₆. $\text{vec}(\text{OffBdiag}\{\mathbf{D}_6\}) = \mathbf{T}_{\text{Boff}}\text{vec}(\mathbf{D}_6).$
- P₇. $d(\mathbf{D}_1^H) = d(\mathbf{D}_1)^H.$
- P₈. $d(\mathbf{D}_1^*) = d(\mathbf{D}_1)^*.$
- P₉. $d(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) = d(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1d(\mathbf{D}_2).$
- P₁₀. $d(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) = d(\mathbf{D}_1) + d(\mathbf{D}_2).$
- P₁₁. $d(\text{tr}\{\mathbf{D}_1\}) = \text{tr}\{d(\mathbf{D}_1)\}.$
- P₁₂. $d(\text{vec}(\mathbf{D}_1)) = \text{vec}(d(\mathbf{D}_1)).$
- P₁₃. $d(f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)) = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^H\mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T d\mathbf{Z} + \mathbf{D}_2^T d\mathbf{Z}^*\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{D}_1$ and $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*} = \mathbf{D}_2.$
- P₁₄. $\text{vec}(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3) = \mathbf{D}_3^T \otimes \mathbf{D}_1 \text{vec}(\mathbf{D}_2)$ where \otimes denotes the Kronecker product.
- P₁₅. $(\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2)^H = \mathbf{D}_1^H \otimes \mathbf{D}_2^H.$

Using P₁, $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ can be expressed as:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\left\{(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\right\}.$$

From the properties \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_9 , \mathbf{P}_{10} and \mathbf{P}_{11} , the differential of the cost function can be obtained as:

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d \left((\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right\} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d \left((\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \right) \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\}}_{\mathcal{F}(\mathbf{B})} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H d \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \right\}}_{\mathcal{G}(\mathbf{B})}. \end{aligned} \quad (12)$$

The properties \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_4 , \mathbf{P}'_4 , \mathbf{P}_7 , \mathbf{P}_9 , \mathbf{P}_8 and \mathbf{P}_{12} imply that:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H d\mathbf{B}^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d\mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \mathbf{B}^H \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T d\mathbf{B} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T d\mathbf{B} \right\}. \end{aligned}$$

While properties \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_4 , \mathbf{P}'_4 , \mathbf{P}_5 , \mathbf{P}_6 , \mathbf{P}_8 and \mathbf{P}_9 involve

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H))^H \text{vec}(d(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\})) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{T}_{\text{Boff}} \text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right)^H \text{vec} \left(d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}))^H \text{vec}(d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)) \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H d(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T d\mathbf{B} \right\} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T d\mathbf{B}^* \right\}. \end{aligned}$$

We replace $\mathcal{F}(\mathbf{B})$ and $\mathcal{G}(\mathbf{B})$ in Eq. (12) to finally find that:

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T \right) d\mathbf{B} \right\} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T \right) d\mathbf{B}^* \right\}. \end{aligned}$$

Using the property \mathbf{P}_{13} we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T. \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i. \end{aligned}$$

Leading to the following result:

$$\begin{aligned} \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) &= 2 \left[\sum_{i=1}^{N_m} \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right. \\ &\quad \left. + \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Eq. (13) is then used in the absolute gradient descent algorithm given by Eq. (6).

3.3 Summary of the proposed algorithms

The proposed non-unitary joint block-diagonalization algorithms based on absolute gradient and relative gradient-descent approaches are respectively denoted $\text{JBD}_{\text{NU},\text{GF},\text{A}}$ and $\text{JBD}_{\text{NU},\text{GF},\text{R}}$. Their principle is summed up below:

NU – JBD algorithms	
A1.	$\text{JBD}_{\text{NU},\text{GF},\text{A}}$ based on a (absolute) gradient approach,
A2.	$\text{JBD}_{\text{NU},\text{GF},\text{R}}$ based on a relative gradient approach.
<p>The N_m square matrices of \mathcal{M} are denoted by $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.</p> <p>Given an initial estimate $\mathbf{B}^{(0)}$ (for example, in the square case ($N = M$), one can choose $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).</p> <p>For $m = 1, 2, \dots$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Compute $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m)})$ given in Eq. (13). - (A1) Set $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)})$. - (A2) Compute $\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ given in Eq. (9). - (A2) Set $\mathbf{B}^{(m)} = (\mathbf{I}_N - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)})) \mathbf{B}^{(m-1)}$. - Eventually normalize $\mathbf{B} = \mathbf{B} / \ \mathbf{B}\ _F$. - Stop after a fixed number of iterations or when $\ \mathbf{B}^{(m)} - \mathbf{B}^{(m-1)}\ _F \leq \varepsilon$ where ε is a small positive threshold. <p>EndFor</p>	

4. COMPUTER SIMULATIONS

We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed algorithms. We consider a set \mathcal{D} of $N_m = 20$ (resp. 100) matrices, randomly chosen (according to a Gaussian law) of mean 0 and variance 1. Initially these matrices are exactly block-diagonal, then a random noise matrix of mean 0 and variance σ_b^2 is added. The signal to noise ratio is defined as $\text{SNR} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$ (in this case $\sigma_b^2 = 0.01$ implying $\text{SNR} = 20$ dB).

To measure the quality of the estimation, the following performance index (which is an extension of the one introduced

in [17]) is used:

$$I_{conv}(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right],$$

where $(\mathbf{G})_{i,j}$ for all $i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th block matrix of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. The better results are obtained when the index performance $I_{conv}(\cdot)$ is found to be close to 0 in linear scale ($-\infty$ in logarithmic scale). All the displayed results have been averaged over 10 Monte-Carlo trials. The non-unitary joint block diagonalization presented in [12] and based on an optimal step size but approximated gradient is denoted by $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_0}$. We use a mixture matrix \mathbf{A} whose components are randomly generated according to a uniform law in $[-1, 1]$. It remains unchanged through the Monte-Carlo runs. We consider $M = N = 9$, $r = 3$ and $n_j = 3$ for all $j = 1, \dots, 3$. Here, the initial matrix $\mathbf{B}^{(0)}$ has been chosen equal to \mathbf{I}_M . Let us, however notice, that a good initial estimate remains important to ensure the convergence to the true solution. One possible way to initialize is to consider the solution given by the orthogonal joint block-diagonalisation [9] to start in the neighborhood of the solution.

First, we compare the performance index obtained thanks to the three algorithms ($\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,A}}}$, $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,R}}}$ and $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_0}$) versus the number of iterations for $N_m = 100$ matrices in a quasi noiseless context (SNR = 100 dB) on the Fig. 1 and then in a noisy context (SNR = 20 dB) on the Fig. 2. While the three algorithms behave quite similarly in the nearly noiseless case since they reach nearly the same performance (≈ -120 dB), the algorithm based on a relative gradient approach outperforms the two other algorithms in a noisy context (-43 dB instead of -38 dB and -36 dB). Let us also notice that the convergence is quicker with the $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_0}$ algorithm since we use the ‘‘optimal’’ step size version of the algorithm which is not the case with the two other algorithms. With regard to $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,A}}}$, $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,R}}}$, we have plotted the evolution of the performance index versus the value of the step size: the convergence speed increases when the step size increases.

Then, we show the influence of the size N_m of \mathcal{M} . We have displayed the performance index versus the number of iterations for $N_m = 20$ matrices in a nearly noiseless context (SNR = 100 dB) on the Fig. 3 then in a noisy context (SNR = 20 dB) on the Fig. 4. These charts illustrate the good behavior of the two proposed algorithms. One can effectively notice a decrease of the $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_0}$ algorithm performance in a noisy context especially when very few matrices are simultaneously joint block-diagonalized. In a rather difficult context (noisy case + few matrices to be joint block diagonalized), the $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,R}}}$ algorithm seems to be numerically more stable and exhibits better performances than those obtained thanks to the other algorithms.

5. CONCLUSION AND DISCUSSION

In this communication, we have proposed two new algorithms (namely $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,A}}}$ and $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,R}}}$). The first one is based on an absolute gradient descent approach while the second one relies upon a relative gradient-descent approach. They both perform the non-unitary joint block-diagonalization of a given set of complex non necessarily hermitian matrices. One of the main advantages of these algorithms is that they are more general. The algorithm $\text{JBD}_{\text{NU},\mathbf{G}_{\text{F,R}}}$ based on a relative gradient approach exhibits the best performances in a difficult context (noisy case and very

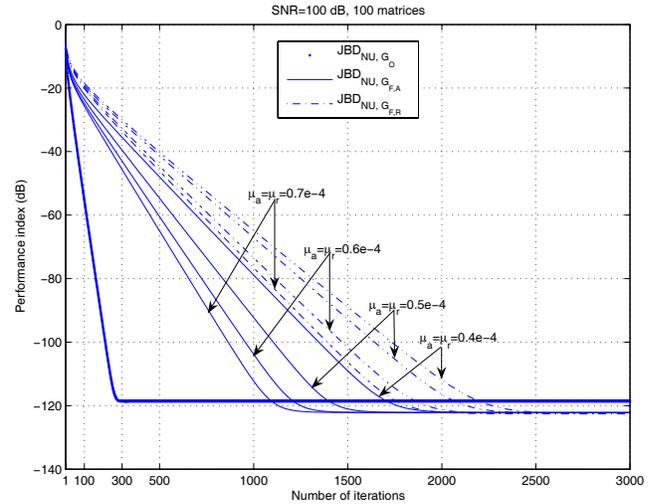


Figure 1: Performance index versus number of iterations: $N_m = 100$ matrices and SNR = 100 dB.

few matrices to be simultaneously joint block-diagonalized). These algorithms find applications in blind separation of convolutive mixtures of sources and in array processing (see for example [14]). In the blind sources separation context, they should enable to achieve better performances since the unitary constraint is discarded. Extensions for futur researches would be to study optimal step size versions.

REFERENCES

- [1] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines, ‘‘A blind source separation technique using second order statistics’’, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 434–444, February 1997.
- [2] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, M. Amin and A. Zoubir, ‘‘Joint anti-diagonalization for blind source separation’’, in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP’2001)*, Salt Lake City, Utah, May 2001.
- [3] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraim, ‘‘Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization’’, in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.
- [4] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, ‘‘Blind beamforming for non Gaussian signals’’, *IEEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp. 362–370, 1993.
- [5] J.-F. Cardoso and B. Laheld, ‘‘Equivariant adaptative source separation’’, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 12, pp. 3017–3030, December 1996.
- [6] G. Chabriel, J. Barrère, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, ‘‘Algebraic joint zero-diagonalization and blind source separation’’, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, n°3, pp. 980–989, March 2008.
- [7] P. Comon, ‘‘Independant component analysis, a new concept ?’’, *Sig. Processing*, Vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [8] S. Dégerine, ‘‘Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés’’, in *Proc. 18ème Colloque GRETSI*, pp. 311–314, Toulouse, Septembre 2001.
- [9] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. De Moor and J. Vandewalle, ‘‘Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification’’, in *Proc. 23rd Symposium on*

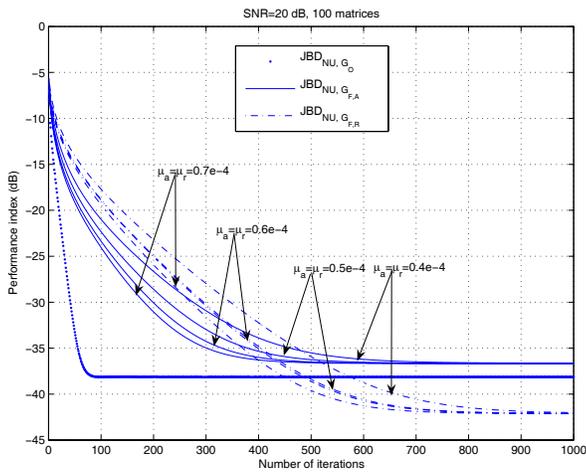


Figure 2: Performance index versus number of iterations for the three algorithms: $N_m = 100$ matrices and $\text{SNR} = 20$ dB.

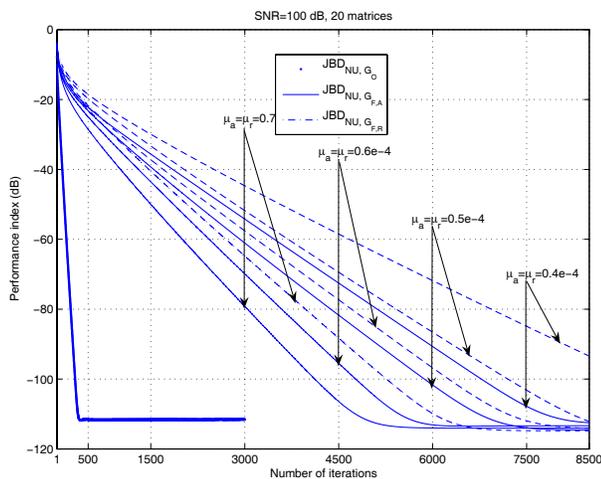


Figure 3: Performance index versus number of iterations for the three algorithms: $N_m = 20$ matrices and $\text{SNR} = 100$ dB.

Information Theory in the Benelux, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.

- [10] L. DeLathauwer, "Signal processing based on multilinear algebra", PhD Thesis, Université Catholique de Leuven, Belgique, September 1997.
- [11] E. M. Fadaili, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, No 5, pp. 1673-1687, May 2007.
- [12] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, "Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach", in *Proc. 7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, LNCS 4666, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 4666, Mike E. Davies et al. (Eds), pp. 201-208, London, UK, September 2007.
- [13] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A.

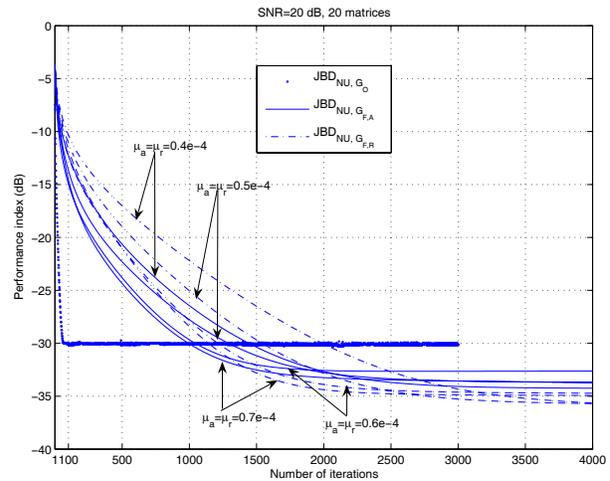


Figure 4: Performance index versus number of iterations for the three algorithms: $N_m = 20$ matrices and $\text{SNR} = 20$ dB.

Adib and E. Moreau, "A non-unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources", *IEEE Signal Processing Letters*, pp. 860-863, November 2007.

- [14] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, "A novel approach based on non-unitary joint block-diagonalization for the blind MIMO equalization of cyclo-stationary signals", *16th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2008)*, Lausanne, Switzerland, 25-29 August 2008.
- [15] A. Hjørungnes and D. Gesbert, "Complex-valued matrix differentiation: techniques and key results", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 55, No. 6, pp. 2740-2746, June 2007.
- [16] M. Joho and K. Rahbar, "Joint diagonalization of correlation matrices by using Newton methods with application to blind signal separation", *IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop SAM*, pp. 403-407, 2002.
- [17] E. Moreau, "A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp. 530-541, March 2001.
- [18] D.-T. Pham, "Joint approximate diagonalization of positive definite matrices", in *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 22, No. 4, pp. 1136-1152, 2001.
- [19] D.-T. Pham, "Blind separation of cyclostationary sources using joint block approximate diagonalization", in *Proc. 7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 4666, Mike E. Davies et al. (Eds), pp. 244-251, London, September 2007.
- [20] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, "The matrix cookbook", 5 January 2005.
- [21] A. Yeredor, A. Ziehe and K.R. Müller, "Approximate joint diagonalization using a natural gradient approach", *ICA 2004*, LNCS 3195, pp. 89-96, 2004.
- [22] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, G. and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation", *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, pp. 801-818, July 2004.

A NOVEL APPROACH BASED ON NON-UNITARY JOINT BLOCK-DIAGONALIZATION FOR THE BLIND MIMO EQUALIZATION OF CYCLO-STATIONARY SIGNALS

H. Ghennioui^{1,2}, N. Thirion-Moreau¹, E. Moreau¹, D. Aboutajdine² and A. Adib^{2,3}

¹ LSEET-LEPI, UMR CNRS 6017,
Université du Sud Toulon Var
F-83957, La Garde Cédex, France
email: {thirion,moreau}@univ.tln.fr

² GSCM-LRIT, FSR
Av. Ibn Battouta, BP 1014
Rabat, Maroc
email: ghennioui@gmail.com

³ DPG, IS, Av. Ibn Battouta
BP 703, Rabat, Maroc
email: adib@israbat.ac.ma
aboutaj@ieee.org

ABSTRACT

In this paper, we address the problem of the blind separation of convolutive mixtures of sources also known as blind equalization of linear time invariant multi-input multi-output systems in digital communications. In our case, the considered input signals are cyclo-stationary processes whose cyclic frequencies are not necessarily known. To tackle that problem, we propose to use a new algorithm that performs the (non-unitary) joint block diagonalization (JBD) of a given set of complex matrices. It is based on a gradient approach. But first, the matrices set to be joint block-diagonalized has to be built: this is done using a particular linear operator on the correlation matrices of the observations and taking advantage of some specific algebraic properties of the aforementioned “transformed” matrices (for instance, the frequencies that correspond to the matrices belonging to that set happen to be the cyclic ones). Then, the JBD of this matrices set enables to estimate the mixing system and, consequently, to recover the source signals. Computer simulations are provided in order to illustrate the behavior and the usefulness of the proposed approach in the context of digital communications and a comparison with another existing method is also performed.

1. INTRODUCTION

We consider the problem of the blind equalization of Linear Time Invariant (LTI) Finite Impulse Response (FIR) Multi-Input Multi-Output (MIMO) systems. Such a problem arises in a wide variety of applications among which the multi-user wireless communications where the received signals have to be equalized in space as well as in time to eliminate both inter-symbols and co-channel interferences. These interferences are due to possible delays introduced by multi-paths propagation and/or to possible multi-users. Examples can be found in the Space Division Multiple Access (SDMA) or the Code Division Multiple Access (CDMA) communication systems [12].

The problem of the blind equalization of LTI FIR MIMO systems can be stated as follows: observing several linear (temporal and spatial) mixtures of input signals (called sources) and assuming that both the sources and the mixing MIMO system are unknown and unobservable, the goal is to recover the sources from the output signals only. As a consequence, this problem is often qualified as “blind” or “unsupervised”. To perform that task, different approaches have been developed in the literature. They may differ in the assumptions made about the sources (deterministic, stochastic, mutually statistically independent or correlated, i.i.d. or not, stationary, cyclo-stationary or non-stationary...) and/or in the kind of considered mixture system (linear or non-linear, over-determined (more outputs than inputs) or under-determined mixture model). However, most of the existing

methods assume that the sources are random independent stationary processes and comparatively, very few works are dedicated to the case of non stationary signals. Here, we focus on a particular class of non stationary signals: modulated ones stemming from unknown digital communication systems (involving that the baud-rates of the various transmitted signals are unknown). In such a context, the resulting signals are proved to be cyclo-stationary sequences. If W. Gardner was the first to introduce such a concept in [5] for array processing, it has proven, since, to be really useful for the modelling of communication signals. It has also led to many breakthroughs in that field among which [1][3][4][10]. Most of these works, by taking into account the very specific statistical properties of the communications signals [3][4] and the knowledge (or not) of their different cyclic frequencies, generalize techniques that were established in the context of stationary signals.

Our developments originate from the works presented in [1] (yet, those works were dedicated to the instantaneous case). Albeit taking advantage of the same property of a “transformed” correlation matrix, the treatments that follow are rather different in our case: while their algorithm is based on the optimization of a given contrast function, our approach, in the instantaneous case [11], is more direct since it combines a rank-one matrices selection procedure together with a Singular Value Decomposition (SVD) followed by a classification algorithm. It enables to tackle the under-determined case too.

Our aim, here, is to generalize some of the ideas developed in [11] to provide a solution in the case of convolutive (over-determined) mixtures of sources. Two situations are considered: the second order cyclic frequencies of the inputs are either known or unknown. Our approach consists of reformulating the convolutive mixing model into an instantaneous one (as suggested in [9]) and of fully exploiting the particular algebraic structure of the correlation matrices of the outputs after the application of a particular linear transformation. We show that the considered problem can be rewritten into a problem of JBD of a given set of matrices which leads us to introduce a new non-unitary JBD algorithm. It is based on a gradient approach but despite [6] there is no more an approximation in the calculation of the complex gradient matrix of the considered cost function. This algorithm is then applied on a particular set of matrices whose automatic selection procedure is described too. Finally, computer simulations are provided in order to illustrate the good behavior and the usefulness of the proposed approach in the context of digital telecommunications.

2. BLIND MIMO EQUALIZATION

2.1 Model and assumptions

The $m \times 1$ vector of the observations is denoted $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. In the convolutive case, the sources are assumed mixed through a linear Finite Impulse Response (FIR) multichannel system, denoted $\mathbf{H}(t)$, implying that the system is described by the following input-output relation:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L h_{ij}(\ell) s_j(t-\ell) + n_j(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

where $x_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are the m observations, $s_j(t)$, for all $j = 1, \dots, n$ are the n sources ($n \leq m$), $h_{ij}(t)$ is the real transfer function between the j -th source and the i -th sensor with an overall extent of $L+1$ taps and $n_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are additive noises. Our developments are based on the following assumptions:

Assumption A. The sources are zero-mean and cyclo-stationary. Hence, their autocorrelation functions $R_{s_i}(t, \tau) = \mathbb{E}\{s_i(t)s_i^*(t-\tau)\}$, for all $i = 1, \dots, n$ are periodic in t with a period $T_i \in \mathbb{Z}^{+*}$, for all $i = 1, \dots, n$. $\mathbb{E}\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation operator and T_i stands for the cyclic-period of the i -th source signal $s_i(t)$. Hence, $R_{s_i}(t, \tau)$ can be decomposed into Fourier series as

$$R_{s_i}(t, \tau) = \sum_k R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau] \exp(i2\pi \frac{k}{T_i} t), \quad (2)$$

where $i^2 = -1$. $R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau]$ is the cyclic correlation function (coefficient of the Fourier series expansion). It is defined as:

$$R_{s_i}^{\text{fs}}[k, \tau) = \frac{1}{T_i} \int_{-\frac{T_i}{2}}^{\frac{T_i}{2}} R_{s_i}(t, \tau) \exp(-2i\pi \frac{k}{T_i} t) dt. \quad (3)$$

Assumption B. The cyclic periods of the sources are (two by two) distinct, *i.e.* $T_i \neq T_j$, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ and $i \neq j$. We define the set \mathcal{V}_i of the whole cyclic frequencies of the i -th source signal as

$$\mathcal{V}_i = \left\{ \nu_i = \frac{k}{T_i}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Assumption C. The noises n_j for all $j = 1, \dots, m$ are stationary white zero-mean random signals, mutually uncorrelated, independent from the sources.

2.2 Some recalls

Let us now recall how the convolutive mixing model can be reformulated into an instantaneous one [9]. Denoting $M = mL'$ and $N = nQ$, let us consider three vectors: the $N \times 1$ vector $\mathbf{S}(t)$ and the $M \times 1$ vectors $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{N}(t)$. They are respectively defined as:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), \dots, s_1(t-Q+1), \dots, s_n(t-Q+1)]^T, \\ \mathbf{X}(t) &= [x_1(t), \dots, x_1(t-L'+1), \dots, x_m(t-L'+1)]^T, \\ \mathbf{N}(t) &= [n_1(t), \dots, n_1(t-L'+1), \dots, n_m(t-L'+1)]^T, \end{aligned}$$

where $Q = L+L'$ and $(\cdot)^T$ stands for the transpose operator. The $M \times N$ matrix \mathbf{A} , writes:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

where each matrix \mathbf{A}_{ij} for all $i = 1, \dots, m$ and for all $j = 1, \dots, n$ is a $L' \times Q$ matrix, defined as:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{ij}(0) & \dots & \dots & h_{ij}(L) \end{pmatrix}$$

Eq. (1) can be rewritten in a matrix form:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (4)$$

To make sure that the considered model is an over-determined one, L' must be chosen such that $M = mL' \geq nQ = N$. We also assume, here, that the matrix \mathbf{A} is full rank. The correlation matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau)$ of the observations $\mathbf{X}(t)$ is defined as:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \mathbb{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t-\tau)\}, \quad (5)$$

where $(\cdot)^H$ is the conjugate transpose operator. Using Eq. (4), it is easily seen that the correlation matrix defined in Eq. (5) admits the following decomposition:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau), \quad (6)$$

where $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, \tau)$ (resp. $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)$) is the correlation matrix of the sources (resp. the noises). Those two matrices are defined like in Eq. (5) and using Assumption C.

3. THE PROPOSED APPROACH

3.1 A useful property

Like in Eq. (3), we now define the following linear operator $(\cdot)^{\text{fs}}$ operating on a matrix argument component wise

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) \exp(-2i\pi\nu t) dt. \quad (7)$$

Since this operator is linear, using Eq. (6) in Eq. (7), we directly have

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau)\alpha(\nu), \end{aligned} \quad (8)$$

where $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ are defined similarly to $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ in (7) and

$$\alpha(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-2i\pi\nu t) dt.$$

Thus $\alpha(\nu) = 1$ if $\nu = 0$ and else 0. Using the fact that the sources have distinct cyclic periods as stated in Assumption B, then, there exist values of ν for which $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ has a particular structure. In fact, for frequencies ν_o such that:

$$\mathbf{H}_1. \nu_o \in \mathcal{V}_i, \nu_o \notin \bigcup_{j, j \neq i} \mathcal{V}_j \text{ and } R_{s_i}^{\text{fs}}(\nu_o, \tau) \neq 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

one can show that the matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu_o, \tau)$ possesses only $Q \times Q$ non null elements all inside the same block. This is due to the fact that $R_{s_j}^{\text{fs}}(\frac{k}{T_i}, \tau) = 0$ for all $k \in \mathbb{Z}$ and for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$ such that $i \neq j$. Thus, for such a frequency value, the matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is a block-diagonal matrix with

only one non null block: the one at the position (i, i) . As a consequence, one possible way to estimate the mixing matrix \mathbf{A} is to joint block-diagonalize the following matrices set:

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall \nu \text{ satisfying property H}_1\} \quad (9)$$

In the following, the size of this set will be denoted N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$). Let us notice, finally, that the recovered signals after inversion of the system are obtained up to a permutation and up to a filter which are the classical indeterminations of blind source separation in the convolutive case.

In the following subsection (3.2), we explain how to build the matrices set \mathcal{S} while in the next subsection (3.3), we briefly present the principle of the (non-unitary) JBD algorithm based on a gradient descent approach that we use (the mathematical derivations of the used JBD algorithm are further detailed in [7]). The calculation of the complex gradient matrix of the cost function is no more approximated as it was the case in [6].

3.2 Building of the matrices set to be joint block-diagonalized

First, let us notice that the knowledge of the cyclic frequencies is not necessary to achieve the identification of the mixing system, even though such a knowledge can simplify this task.

1) Known cyclic frequencies

When the cyclic frequencies ν_j for all $j = 1, \dots, n$ are known (or estimated like in [2]), the matrices set $\{\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu_j, \tau); \forall \tau \neq 0, \forall j = 1, \dots, n\}$ is directly joint block-diagonalized.

2) Unknown cyclic frequencies

When the cyclic frequencies are unknown, the ‘‘transformed’’ correlation matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ are calculated for a sufficiently large number of frequency bins to make sure that a sufficiently wide range of cyclic frequencies, *i.e.* corresponding to all the source signals, can be found. Before being able to apply a JBD algorithm, specific matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ have to be selected: for instance, those that correspond to block-diagonal matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ with only one non-null block matrix on their diagonal. Due to our hypothesis, one can show that matrices $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ have the same rank. The matrices set \mathcal{S} is thus the set of matrices whose rank equals Q which leads to the following automatic detection procedure:

Automatic detection procedure denoted $\text{Cr}_{\text{NU,conv}}^{(\text{Ghe})}$

- Use a Singular Value Decomposition (SVD) of $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ *i.e.* $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \mathbf{U}(\nu, \tau)\mathbf{\Delta}(\nu, \tau)\mathbf{V}(\nu, \tau)^H$ with $\mathbf{V}(\nu, \tau)$ and $\mathbf{U}(\nu, \tau)$ are $M \times M$ unitary matrices and $\delta(\nu, \tau) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(\nu, \tau)\} = (\delta_1(\nu, \tau), \dots, \delta_M(\nu, \tau))^T$ is a diagonal vector with non-negative components organized in the decreasing order: $\delta_1(\nu, \tau) \geq \delta_2(\nu, \tau) \geq \dots \geq \delta_M(\nu, \tau) \geq 0$.
- Calculate the ratio $\mathcal{R} = \frac{\sum_{i=1}^Q \delta_i(\nu, \tau)^2}{\|\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\|_F^2}$ where $\|\cdot\|_F$ stands for the Frobenius norm,
- Check if \mathcal{R} is near to 1: if this assertion is true $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ is kept else it is discarded.

In terms of numerical implementation, it leads to the following rule: choose (ν, τ) such that $\mathcal{R} < 1 - \epsilon$, where ϵ is a (sufficiently) small positive constant. The matrices that belong to \mathcal{S} all have a particular algebraic structure since, for $\tau \neq 0$, they all admit the same following decomposition $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}}(\nu, \tau) = \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)\mathbf{A}^H$, with $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}^{\text{fs}}(\nu, \tau)$ being a block-diagonal matrix with only one non null block on its diagonal.

One possible way to estimate the mixing matrix \mathbf{A} (or its pseudo-inverse \mathbf{B} also called the separation matrix) is to directly joint block diagonalize (without any unitary constraint about \mathbf{A} or \mathbf{B}) the matrices set \mathcal{S} .

3.3 A non-unitary joint block diagonalisation algorithm based on a gradient approach

To solve the non-unitary JBD problem, the following cost function [6] is considered:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2 \quad (10)$$

where $\mathbf{M}_i = (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_i$ is the i -th of the N_m matrices belonging to \mathcal{S} . Considering a square $N \times N$ matrix $\mathbf{M} = (M_{ij})$, such that:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

where \mathbf{M}_{ij} for all $i, j = 1, \dots, r$ are $n_i \times n_j$ matrices. The matrix operator $\text{OffBdiag}_{(n)}$ is then defined as:

$$\text{OffBdiag}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

The case we are interested in, is characterized by $r = n$, square $Q \times Q$ block matrices \mathbf{M}_{ij} for all $i, j = 1, \dots, r$ and square $Q \times Q$ null matrices $\mathbf{0}_{ii}$ for all $i = 1, \dots, r$.

We suggest to use a gradient-descent algorithm to minimize the cost function given by Eq. (10) to estimate the matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times M}$. It means that \mathbf{B} is re-estimated at each iteration m and from now on denoted $\mathbf{B}^{(m)}$.

The matrix \mathbf{B} is updated according to the following adaptation rule for all $m = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)}), \quad (13)$$

where μ_a is the step size and the complex absolute gradient matrix $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ is given by:

$$\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} \quad (14)$$

$(\cdot)^*$ stands for the complex conjugate operator. $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ has to be calculated to derive the algorithm. It is found to be equal to (see the proof provided in [7]):

$$\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \left[\sum_{i=1}^{N_m} \text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H + \left(\text{OffBdiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right] \quad (15)$$

Eq. (15) is then used in the gradient descent algorithm given by Eq. (13). In the following, we will denote by $\text{JBD}_{\text{NU,GF,A}}$ this non-unitary JBD algorithm based on a gradient approach.

3.4 Summary of the proposed method

The proposed method, namely $\text{JBD}_{\text{NU,GF,A,CM}}$, combines the non-unitary JBD algorithm $\text{JBD}_{\text{NU,GF,A}}$ together with the detector $\text{Cr}_{\text{NU,conv}}^{(\text{Ghe})}$. Its principle is summed up below:

JBD_{NU,G_{F,A},CM} method for the blind separation of convolutive mixtures of cyclo-stationary sources

Consider the N_m matrices of set \mathcal{S} : $\{(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_{1,\dots}, (\mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{\text{fs}})_{N_m}\}$.

Given an initial estimate $\mathbf{B}^{(0)}$ (for example in the square case $M = N$ one can choose $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M^a$).

For $m = 1, 2, \dots$

Compute $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}^{(m)}(\mathbf{B})$ given in Eq. (15).

Set $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(m-1)})$.

Eventually normalize $\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m)} / \|\mathbf{B}^{(m)}\|_F$.

Stop after a fixed number of iterations or when $\|\mathbf{B}^{(m)} - \mathbf{B}^{(m-1)}\|_F \leq \varepsilon$ where ε is a small positive threshold.

EndFor

^aLet us notice that a good initial estimate remains important to ensure the convergence to the true solution. Other ways could be considered to start in the neighborhood of the solution among which the solution given by an orthogonal JBD algorithm or the SVD of the observations' cyclic correlation matrices.

4. COMPUTER SIMULATIONS

We consider $m = 4$ mixtures of $n = 2$ digital carrier-modulated source signals written as:

$$s(t) = \Re\{v(t) \exp(2i\pi f_c t)\}, \quad (16)$$

where $\Re\{\cdot\}$ stands for the real part of a complex signal, f_c is the reduced carrier frequency which is equal to 0.2 for the first source (respectively 0.25 for the second one) and $v(t)$ is the complex envelop of $s(t)$. It can be expressed as:

$$v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k)h(n - kT), \quad (17)$$

with $a(n)$ is an i.i.d. zero-mean complex random binary sequence referred to as the transmitted symbols, T is an integer related to the period symbol and $h(n)$ is a deterministic waveform signal. The waveform $h(n)$ is a triangular one. It is defined for an even cyclic period as: $h(n) = \frac{2}{T}n$ if $0 \leq n \leq \frac{T}{2}$; $h(n) = -\frac{2}{T}n + 2$ if $\frac{T}{2} + 1 \leq n \leq T - 1$ and $h(n) = 0$ otherwise. The cyclic period of the two considered sources are respectively equal to $T_1 = 10$, $T_2 = 8$. The noiseless case is studied and the sources are mixed according to the following transfer function matrix (we use $L = 3$ and $L' = 3$) $\mathbf{A}[z] = (\mathbf{A}_1[z] \ \mathbf{A}_2[z])$, where $\mathbf{A}[z]$ stands for the z transform of $\mathbf{A}(t)$ and:

$$\mathbf{A}_1[z] = \begin{pmatrix} 0.5400 + 0.9936z^{-1} - 0.6051z^{-2} + 0.8040z^{-3} \\ -0.3335 - 0.0827z^{-1} - 0.2809z^{-2} - 0.8249z^{-3} \\ -0.0849 + 0.7305z^{-1} + 0.5760z^{-2} - 0.1143z^{-3} \\ -0.4646 - 0.9072z^{-1} - 0.4450z^{-2} - 0.9106z^{-3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2[z] = \begin{pmatrix} 0.6933 - 0.7387z^{-1} - 0.4140z^{-2} - 0.4746z^{-3} \\ -0.3995 + 0.8315z^{-1} - 0.2386z^{-2} - 0.6213z^{-3} \\ -0.5921 - 0.6382z^{-1} - 0.8122z^{-2} + 0.4283z^{-3} \\ -0.0052 + 0.6556z^{-1} + 0.1437z^{-2} - 0.9450z^{-3} \end{pmatrix}.$$

To measure the quality of the estimation, the following performance index is used [8]:

$$I_{conv}(\mathbf{G}) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\mathbf{G})_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\mathbf{G})_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right],$$

where $(\mathbf{G})_{i,j}$ for all $i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th block matrix of $\mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}$. The best results are obtained when the index performance $I_{conv}(\cdot)$ is found to be close to 0 in linear scale ($-\infty$ in logarithmic scale). The proposed method is also compared with another one (for instance the one suggested in [6]) based on an ‘‘approximate gradient’’ and denoted JBD_{NU,G₀,CM}. On the Fig. 1 (resp. Fig. 2), the performance index is displayed versus the realizations. The results have been sorted in the decreasing order of the obtained performances in both cases *i.e.* when the cyclic frequencies are known or unknown.

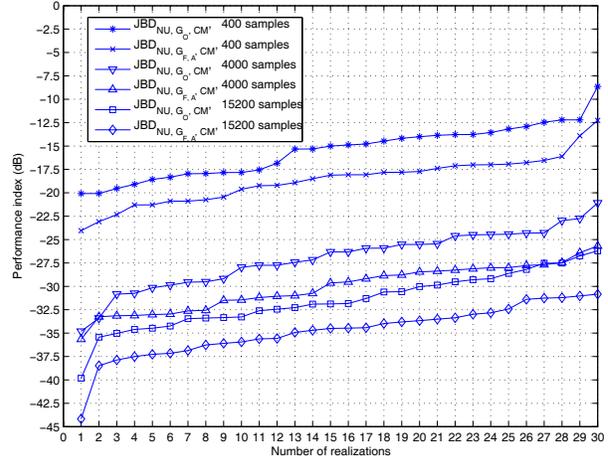


Figure 1: I_{conv} versus realizations (chosen among 30 Monte-Carlo trials) when the cyclic frequencies are assumed known. The realizations are sorted in the decreasing order of the obtained performances.

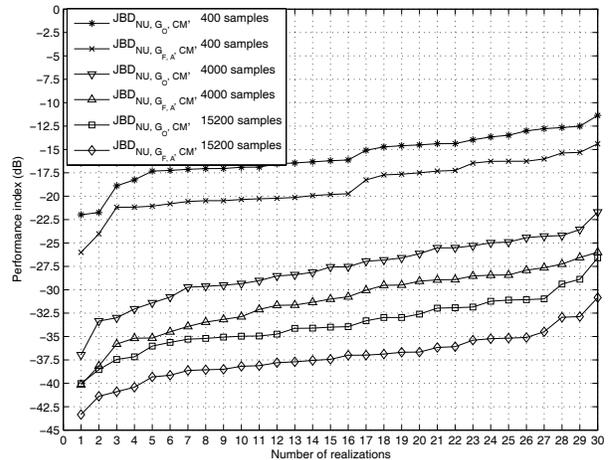


Figure 2: I_{conv} versus realizations (chosen among the 30 Monte-Carlo trials) when the cyclic frequencies are unknown. The realizations are sorted in the decreasing order of the obtained performances.

One can notice that the proposed method always outperforms the method based on an approximated gradient. Moreover the more samples we use, the better the results are. Finally, it can be observed too that satisfying performances are reached whether the cyclic frequencies are known or unknown.

On the Fig. 3, we have displayed the performance index versus the number of sources time samples in the case of known and unknown cyclic frequencies: the displayed results have been averaged over 30 Monte-Carlo trials. On the Fig. 4, we have plotted the number of matrices selected by the detector $Cr_{NU,conv}^{(Ghe)}$ versus the number of time samples when the cyclic frequencies are unknown. This chart illustrates the

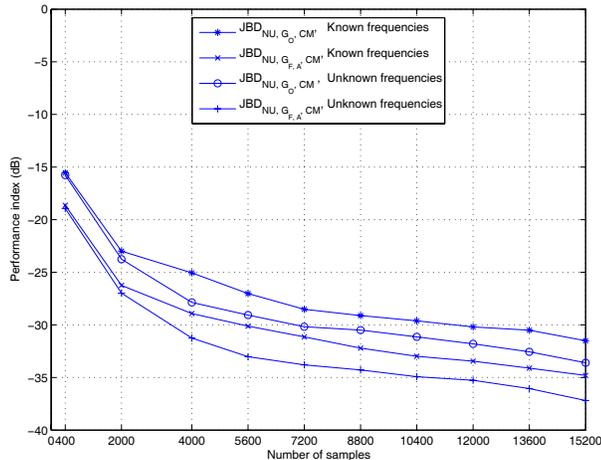


Figure 3: I_{conv} versus the number of time samples in both cases of known and unknown cyclic frequencies.

good behavior of the proposed method which always outperforms the method based on an approximated gradient. The better results are obtained with unknown cyclic frequencies since the size of the considered matrices set is then higher.

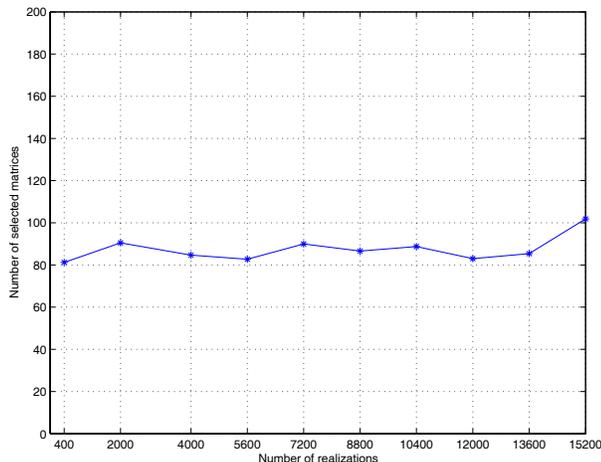


Figure 4: The number of selected matrices when the cyclic frequencies are unknown versus the number of samples.

5. CONCLUSION

We have presented a new approach for the blind separation of LTI MIMO systems in digital communications. The inputs are cyclo-stationary signals. It operates in three stages: first a linear operator is applied on the observations correlation matrices, then, a detection procedure (based on a rank property) is used to select matrices with a specific algebraic

structure and finally a (non unitary) JBD algorithm is applied onto the selected matrices set. It enables to estimate the mixing system and to restore the sources.

REFERENCES

- [1] K. Abed-Meraim, Y. Xiang, J. H. Manton and Y. Hua, "Blind source separation using second-order cyclostationary statistics", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 49, No. 4, pp. 694–701, April 2001.
- [2] A. V. Dandawaté and G. B. Giannakis, "Statistical tests for presence of cyclostationarity", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 42, pp. 2355–2369, September 1995.
- [3] A. Ferréol, P. Chevalier and L. Albera, "Second-order blind separation of first- and second-order cyclostationary sources - Application to AM, FSK, CPFSK and deterministic sources", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 52, No. 4, pp. 845–861, April 2004.
- [4] A. Ferréol, P. Chevalier and L. Albera, "On the behavior of current second order blind source separation methods for first and second order cyclostationary sources - Application to CPFSK sources", in Proc. *ICASSP*, Orlando, May 2002.
- [5] W. A. Gardner, "Cyclostationarity in communications and signal processing", *IEEE press*, W. A. Gardner Editor, 1993.
- [6] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, "Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach", in Proc. *7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, LNCS 4666, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 4666, Mike E. Davies et al. (Eds), pp. 201–208, London, UK, September 2007.
- [7] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, D. Aboutajdine and A. Adib, "Two new gradient based non-unitary joint block-diagonalization algorithms", in Proc. *European Signal Processing Conference (EU-SIPCO'2008)*, Lausanne, Switzerland, 25-29 August 2008.
- [8] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib and E. Moreau, "A non-unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources", *IEEE Signal Processing Letters*, pp. 860–863, November 2007.
- [9] A. Gorokhov and Ph. Loubaton, "Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources", *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, Vol. 44, No. 9, pp. 813–820, September 1997.
- [10] P. A. Jallon, A. Chevreuril, P. Loubaton and P. Chevalier, "Separation of convolutive mixtures of cyclostationary sources: a contrast function based approach", in Proc. *International Conference on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA'2004)*, No. 5, vol. 3195, pp. 508-515, Granada, Spain, September 2004.
- [11] S. Rhioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Under-determined blind identification of cyclo-stationary signals with unknown cyclic frequencies", in Proc. *IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP'2006)*, Toulouse, France, May 2006
- [12] A.-J. Van der Veen, S. Talwar and A. Paulraj, "A subspace approach to blind space-time signal processing for wireless communication systems", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 173–190, January 1997.

Blind separation of FIR convolutive sources mixtures using gradient based joint block diagonalization algorithms

Hicham Ghennioui^{1 2}, Nadège Thirion-Moreau¹,

Eric Moreau¹, *Senior Member IEEE*, Driss Aboutajdine², *Senior Member IEEE*, Abdellah Adib^{2 3}

¹LSEET, UMR CNRS 6017, Université du Sud Toulon Var, F-83957 La Garde Cédex, France

Fax: +33 4 94 14 26 71

²GSCM-LRIT, Faculté des Sciences, av. Ibn Battouta, BP 1014, Rabat, Maroc

Fax/Tel: +212 37 68 69 44

³DPG, IS, av. Ibn Battouta, BP703, Rabat, Maroc

E-mail : ghennioui@gmail.com, {thirion, moreau}@univ-tln.fr, adib@israbat.ac.ma, aboutaj@ieee.org

Abstract

This article addresses the problem of the blind separation of convolutive mixtures of sources using either spatial quadratic time-frequency spectra or distributions. We present a new method that combines a new non unitary joint block diagonalization algorithm of a given set of matrices together with a novel automatic selection procedure for the determination of the matrices set to be joint block-diagonalized. Its main advantages are that it is general (the sources can be real or complex, deterministic or stochastic, correlated or uncorrelated, stationary, cyclo-stationary or non-stationary signals) and a preliminary whitening stage is no more compulsorily required. With regard to the non unitary joint block diagonalization problem: two new algorithms are provided. The first one relies upon a classical gradient approach whereas the second one is based upon a relative gradient approach. For each algorithm, the optimal step size is computed algebraically at each iteration to increase the convergence speed. Computer simulations are provided in order to illustrate the behavior of both algorithms in two cases: when exact block-diagonal matrices are considered, then when they are progressively perturbed by an additive gaussian noise. As for the automatic selection procedure of useful time-frequency points leading to the building of the matrices set to be joint block diagonalized, it exploits specific rank properties of the considered matrices. The proposed blind source separation approaches finally make it possible to discard the classical pre-whitening step of the observations. They are compared with two other methods: one also based on a non unitary joint block diagonalization algorithm (but using the algebraic optimization of a least mean squares criterion) and one based on a classical unitary joint block diagonalization algorithm.

Index Terms

Joint block-diagonalization, matrices decompositions, blind sources separation, convolutive mixtures of correlated sources, spatial quadratic time-frequency distributions and spectra.

I. INTRODUCTION

The goal of blind source separation (BSS) is to recover unobservable data called “sources” from the only mixtures of the data called “observations”. To perform this task, assumptions have to be made. They can concern the sources characteristics (deterministic or stochastic, mutually statistically independent or correlated, independent identically distributed (i.i.d.) or not, stationary, cyclo-stationary or non-stationary...) and also the kind of considered mixture (linear, non-linear or post non-linear system, instantaneous or convolutive linear mixture, over-determined or undetermined mixture model).

The BSS is of great importance and practical relevance in many scientific and technical applications. A popular example to illustrate this problem is the so called “cocktail-party” effect: the problem is to separate the voices of the different speakers, using recordings from several microphones in a room. It also finds applications in other fields like digital communications, speech processing, geophysics, radar, sonar, biomedical engineering (see [1] for a relatively exhaustive review).

In the research literature, different approaches have been developed for solving the BSS problem: a first possible one consists of performing Independent Component Analysis (ICA) exploiting the independence assumption of sources [1]. One possible way is to optimize a cost function called “contrast function” [7][10][26]. However, the independence assumption of the sources cannot always be satisfied in practice.

Another possible way to tackle the BSS problem is to take advantage of a specific structure of matrices or tensors derived from the sources [1]: they happen to be zero-diagonal, diagonal, block-diagonal, (block-) Toeplitz... The goal is then to develop some particular matrix or tensor decomposition algorithms to perform the BSS. One of the first considered problem was, namely, the joint diagonalization (JD) of matrices under the unitary constraint, leading to the nowadays well-known JADE (Joint Approximate Diagonalization of Eigenmatrices) [7] and SOBI (Second Order Blind Identification) [3] algorithms. The following works have addressed either the problem of the JD of tensors [10][12][26] or the problem of the JD of matrices but discarding the unitarity constraint [11][15][27][30][31][32][34]. Finally, a systematic treatment of the aforementioned unitary joint diagonalization of matrices or tensors sets in connection with the blind source separation problem has been given in [26].

A second type of matrices decomposition has proven to be useful in BSS, telecommunications and cryptography. It is called joint zero-diagonalization (JZD) since the matrices possess a zero-diagonal in such a decomposition. The unitary case has been first addressed in [2] while non unitary solutions can be found in [9][14][15]. Most of these (unitary) joint-diagonalization and/or zero-diagonalization algorithms have been applied to the problem of the BSS of instantaneous mixtures of sources.

Finally, a third particular type of matrices decomposition arises in both the wide-band sources localization and the blind separation of convolutive mixtures of sources problems. It is called joint block-diagonalization (JBD) since the considered matrices are block diagonal in such a decomposition. Let us recall that a block diagonal matrix is a block matrix in which the diagonal blocks are square matrices of any size (possibly even) while the off-diagonal blocks are zero matrices. This problem has been considered in [4][5][13] where the block-diagonal matrices under consideration have to be positive definite and hermitian matrices and the required joint-block

diagonalizer is an unitary matrix.

In this article, our purpose is to consider a more general case by discarding the unitary constraint while considering the case of not necessarily positive definite matrices. To that aim, we propose a new (non unitary) joint block-diagonalization algorithm (NU – JBD) of a given set of complex matrices . The two proposed algorithms are based on gradient-descent approach whereby the optimal step size is computed algebraically at each iteration as the rooting of a 3rd-degree polynomial. The first one relies upon a classical gradient optimization while the second one relies on a relative gradient optimization. The main advantage of these two algorithms is that they are more general (the real, positive definite or hermitian assumptions regarding the matrices of the considered set are no more necessary and the found joint block diagonalizer can be either an unitary or non-unitary matrix). Moreover, the use of the optimal step size speeds up their convergence. Finally, we show how these algorithms find application in BSS based on the use of Spatial Quadratic Time Frequency Spectra (SQTFS) or Spatial Quadratic Time Frequency Distributions (SQTFD). Most of these BSS methods rely upon a preliminary stage of particular time-frequency points selection. As a consequence, it leads us to propose a new automatic time-frequency points selection procedure for the building of the matrices set to be joint block-diagonalized. It operates directly on non pre-whitened data and exploits specific rank properties. Another advantage of these BSS methods is that they make it possible to discard the classical pre-whitening stage of the observations and thus to tackle the case of correlated sources. Finally, computer simulations emphasize both the effectiveness and the good performances of the proposed approaches which are compared with two other methods: one also based on a non unitary joint block diagonalization algorithm (but using the algebraic optimization of a least mean squares criterion [19]) and one based on a classical unitary joint block diagonalization algorithm [16]. Notice that the problem of the identifiability of the sought after joint block diagonalizer is not addressed since we focus on algorithms aspects.

Thus, this article follows three main objectives. First, we intend to generalize the joint block-diagonalization approach to the case of non-unitary matrices. The resulting algorithms are based on optimal step size gradient approaches. Secondly, since the joint block-diagonalization problem generalizes the joint-diagonalization one, we also provide a new non-unitary joint-diagonalization algorithm based, here, on a relative gradient approach. Finally, we illustrate the usefulness of these algorithms for BSS based on spatial quadratic time-frequency spectra (SQTFS) or distributions (SQTFD). Most of the methods based on the use of SQTFS rely upon a preliminary stage consisting of selecting particular t - f points. That is why we also introduce a new automatic selection procedure of t - f points (we are interested in those corresponding to auto-source terms linked to one single source and cross-source terms between one source and its delayed versions only).

The article is organized as follows: the problem of blind separation of FIR convolutive mixtures of sources based on either SQTFS or SQTFD is introduced in Section II. The model and the related assumptions are first presented, then some recalls about SQTFS and SQTFD are made. A new detector of useful time-frequency points is described and finally it is shown how the blind separation problem of FIR convolutive mixtures of sources can be reformulated into a non-unitary joint-block diagonalization problem. Section III is dedicated to this problem as well as its links with the joint diagonalization problem. The two proposed (gradient based) solutions are derived in Section IV. Computer simulations are provided in section V to illustrate the effectiveness

and the good behavior of these JBD algorithms and to show their usefulness in BSS methods based on the use of SQTFS. A comparison with other existing methods is also performed. Finally, in Section VI, conclusions are given.

II. SEPARATION OF CONVOLUTIVE MIXTURES OF SOURCES BASED ON SQTFS OR SQTFD

A. The problem of blind separation of convolutive mixtures of sources

1) *Model*: In the blind source separation problem, the goal is to recover multiple sources mixed through an unknown mixing system from the system outputs only (namely the observations). We assume that we have m ($m \in \mathbb{N}^*$) observation signals $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, $t \in \mathbb{Z}$, and that the n ($n \in \mathbb{N}^*$) sources $s_j(t)$, for all $j = 1, \dots, n$ are mixed through a linear Finite Impulse Response (FIR) multichannel system, denoted by $\mathbf{H}(t) = (H_{ij}(t))$. It implies that the system under consideration is described by the following input-output relation:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^L H_{ij}(\ell) s_j(t - \ell) + n_j(t), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (1)$$

where $n \leq m$ (only the over-determined case is tackled), $H_{ij}(t)$ is the impulse response function between the j -th source and the i -th sensor with an overall extent of $L + 1$ taps and $n_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are noises.

2) *Reformulation of the convolutive mixture into an instantaneous one*: As suggested in [22], a possible way to deal with Eq. (1) is to reformulate the convolutive mixing model into an instantaneous one. Denoting by $M = mL'$, $N = n(L + L') = nQ$ (with $Q = L + L'$ and $L' \in \mathbb{N}^*$) and $(\cdot)^T$ the transpose operator, let us consider a $(N \times 1)$ vector $\mathbf{S}(t)$, and two $(M \times 1)$ vectors $\mathbf{x}(t)$ and $\mathbf{b}(t)$, respectively defined as:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [\mathbf{s}_1(t)^T, \mathbf{s}_2(t)^T, \dots, \mathbf{s}_n(t)^T]^T, \\ \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{x}_1(t)^T, \mathbf{x}_2(t)^T, \dots, \mathbf{x}_m(t)^T]^T, \\ \mathbf{b}(t) &= [\mathbf{b}_1(t)^T, \mathbf{b}_2(t)^T, \dots, \mathbf{b}_m(t)^T]^T, \end{aligned} \quad (2)$$

where the $(Q \times 1)$ vectors $\mathbf{s}_i(t)$, for all $i = 1, \dots, n$ are such that $\mathbf{s}_i(t) = [s_i(t), s_i(t-1), \dots, s_i(t-Q+1)]^T$, the $(L' \times 1)$ vectors $\mathbf{x}_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are such that $\mathbf{x}_i(t) = [x_i(t), x_i(t-1), \dots, x_i(t-L'+1)]^T$ and the $(L' \times 1)$ vectors $\mathbf{b}_i(t)$, for all $i = 1, \dots, m$ are such that $\mathbf{b}_i(t) = [b_i(t), b_i(t-1), \dots, b_i(t-L'+1)]^T$.

We also consider the following $(M \times N)$ matrix \mathbf{A} called the mixing matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \dots & \mathbf{A}_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

whose blocks \mathbf{A}_{ij} are $(L' \times Q)$ Toeplitz matrices defined as:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} H_{ij}(0) & \dots & \dots & H_{ij}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_{ij}(0) & \dots & \dots & H_{ij}(L) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The model described by Eq. (1) can now be written in a matrix form as:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t). \quad (5)$$

To ensure that the model keeps on being an over-determined one, L' has to be chosen such that $M \geq N$.

3) *Assumptions*: Our developments are based on the following assumptions:

Assumption A: The noises $n_j(t)$ for all $j = 1, \dots, m$ are stationary, white, zero-mean random signals, mutually uncorrelated and independent from the sources.

Assumption B: There exist time-frequency points where only one source s_i and its delayed versions are present in the time-frequency plane.

Assumption C: The number of sensors m and the number of sources n are both known and $m \geq n$. The FIR filter order L is known too.

Assumption D: The matrix \mathbf{A} (given in Eq. (3)) is full column rank.

Let us notice that Assumption B replaces the classical “random independent sources” assumption. Therefore, this assertion makes it possible to tackle the problem of the separation of correlated sources.

B. The Spatial Quadratic Time-Frequency Spectrum based BSS methods

1) *Some recalls*: Let us now introduce the definition of the Spatial Bilinear Time-Frequency Spectrum (SBTFS).

For a couple of vectorial signals $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$, the SBTFS is defined as:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\theta, \theta') \mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (6)$$

where the function $\mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu)$ stands for the kernel of the transformation and $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(t, \tau)$ is the cross-correlation matrix of signals $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$. It is defined as:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(t, \tau) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{X}(t + \frac{\tau}{2}) \mathbf{Y}^H(t - \frac{\tau}{2}) \right\}, \quad (7)$$

where $\mathbf{E}\{\cdot\}$ stands for the mathematical expectation operator and $(\cdot)^H$ the transpose conjugate operator.

The Spatial Quadratic Time-Frequency Spectrum (SQTF) is the restriction of the SBTFS at one single signal *i.e.* $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)$:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') \mathbf{K}(\theta, \theta'; t, \nu) d\theta d\theta', \quad (8)$$

where $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}(\theta, \theta') \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\theta, \theta')$ stands for the correlation matrix of signal $\mathbf{X}(t)$. Let us give two important examples: first the Spatial Pseudo Wigner Spectrum (SPWS), whose expression is given by:

$$\mathbf{D}_{\text{SPWS}, \mathbf{X}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}(t, \tau) h(\tau) \exp(-2i\pi\nu\tau) d\tau, \quad (9)$$

where $i^2 = -1$, $h(\cdot)$ stands for the “short-time” (or frequential smoothing) window (rectangular, Kaiser-Bessel, Hamming, Bartlett, etc...). It is the quadratic transformation that we use in all the computer simulations. One can notice that when deterministic instead of random signals are considered, one simply has to discard the mathematical expectation in Eq. (7) used in Eq. (9) to recover the definition of the Spatial Pseudo-Wigner distribution (SPWD, $\mathbf{D}_{\text{SPW}, \mathbf{X}}(t, \nu)$). Secondly, let us notice that the Spatial Wigner Spectrum (SWS) can be recovered by considering $h(\tau) = 1$ for all τ , while the Spatial Wigner distribution (SWD), $\mathbf{D}_{\text{SW}, \mathbf{X}}(t, \nu)$, is recovered by discarding the mathematical expectation.

Using Eq. (5) in Eq. (8), the SQTFS of the observations is then a $(M \times M)$ matrix, which equals:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu) + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{N}}(t, \nu) + \mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H, \quad (10)$$

where $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu)$) stands for the $(N \times N)$ SQTFS of the sources (resp. the $(M \times M)$ SQTFS of the noises) and $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{N}}(t, \nu)$ and $\mathbf{D}_{\mathbf{N}\mathbf{S}}(t, \nu)$ are the SBTFs between the sources and the noises. Since the noises are centered and independent from the source signals (Assumption A), we finally have:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{N}}(t, \nu). \quad (11)$$

2) *How to deal with the noise ?*: A first solution consists of trying to get rid of it by eliminating the weak energy t - f points. The kept t - f points (t, ν) are such that:

$$\min(|\mathbf{D}_{x_i x_j}(t, \nu)|^2) > \epsilon \quad i, j \in \{1, \dots, M\}, \quad (12)$$

where ϵ is a (sufficiently) small constant (for example $\epsilon \geq 0.01$), $\min(\cdot)$ stands for the minimum value and $\mathbf{D}_{x_i x_j}(t, \nu) = (\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu))_{ij}$. Thus,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) \simeq \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H. \quad (13)$$

When the spatial Wigner spectrum is used (instead of any other spatial quadratic time-frequency spectrum), there is another way to deal with the noise, which can be estimated [29]. Since the noises are assumed to be stationary processes (Assumption A), $\mathbf{R}_{\mathbf{N}}(t, \tau) = \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) = \sigma_N^2 \delta(\tau) \mathbf{I}_M$ with $\delta(\cdot)$ the Kronecker function. It finally involves that $\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}\mathbf{S}, \mathbf{N}}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{R}_{\mathbf{N}}(\tau) \exp(-2i\nu\pi\tau) d\tau = \mathbf{S}_{\mathbf{N}}(\nu) = \sigma_N^2 \mathbf{I}_M$ where $\mathbf{S}_{\mathbf{N}}(\nu)$ is nothing else but the spatial power spectral density function of the noisy signals.

To estimate the SWS of the noiseless observed signals, one has to estimate the variance σ_N^2 of the noises as stated by Eq (11). Let us now introduce the temporal smoothing operator defined as:

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} z(t) dt, \quad (14)$$

and the ‘‘mean’’ correlation matrix $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}(\tau)$ defined as:

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}}(\tau) = \langle \mathbf{R}_{\mathbf{z}}(t, \tau) \rangle. \quad (15)$$

The mean correlation matrix of the observed signals $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(\tau)$ at $\tau = 0$, is given by:

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{A}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}(0)\mathbf{A}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I}_M = \mathbf{A}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)\mathbf{A}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I}_M. \quad (16)$$

Considering the matrix \mathbf{F} defined as $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)$ whose singular value decomposition leads to $\mathbf{F} = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}_2^H$ where \mathbf{V}_1 and \mathbf{V}_2 are respectively $(M \times M)$ and $(N \times N)$ unitary matrices, $\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}}$ is the $(M \times N)$ matrix whose $(N \times N)$ upper block is a diagonal matrix and whose $((M - N) \times N)$ lower block is a null matrix. $\mathbf{\Delta}' = \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}})^H$ is a $(M \times M)$ diagonal matrix such that $\mathbf{\Delta}' = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_N, 0, \dots, 0\}$. $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}}^{\frac{1}{2}}(0)$ is a hermitian definite positive matrix since $\mathbf{R}_{\mathbf{S}}(t, 0)$ is hermitian definite positive too. We finally have:

$$\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{F}\mathbf{F}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I}_M = \mathbf{V}_1 (\mathbf{\Delta}' + \sigma_N^2 \mathbf{I}_M) \mathbf{V}_1^H = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Delta}'' \mathbf{V}_1^H, \quad (17)$$

with $\mathbf{\Delta}'' = \mathbf{\Delta}' + \sigma_N^2 \mathbf{I}_M = \text{diag}\{\delta_1 + \sigma_N^2, \dots, \delta_N + \sigma_N^2, \sigma_N^2, \dots, \sigma_N^2\}$. Eq. (17) is recognized as the eigenvalues decomposition of the matrix $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$. Hence, if $M > N$ it is possible to estimate the variance σ_N^2 of the noisy

signals thanks to the mean of the $M - N$ lowest eigenvalues of $\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{X}}(0)$. Otherwise, if $M = N$, σ_N^2 has to be assumed known.

3) *Algebraic properties of matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$* : There exist t - f points for which the matrix $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ possesses a very specific algebraic structure.

Proposition 1. *The SQTFS of the sources signals, $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$, calculated at the time-frequency points given in Assumption B are block-diagonal with one single non null ($Q \times Q$) block on the diagonal.*

Proof.

One has

$$\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}(t, \nu) & \dots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_n}(t, \nu) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2}(t, \nu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_{n-1}\mathbf{s}_n}(t, \nu) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n\mathbf{s}_1}(t, \nu) & \dots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n\mathbf{s}_{n-1}}(t, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_n}(t, \nu) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

where all the matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t, \nu)$ for all $i, j = 1, \dots, n$ are square ($Q \times Q$) matrices. Considering $\alpha = e^{-2i\pi\nu}$ and denoting by $(\cdot)^*$ the complex conjugate operator, one can check for example that

$$\mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t, \nu) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t, \nu) & \alpha^* \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{1}{2}, \nu) & \dots & \alpha^{*Q-1} \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{Q-1}{2}, \nu) \\ \alpha \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{1}{2}, \nu) & \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - 1, \nu) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \alpha^* \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{2Q-3}{2}, \nu) \\ \alpha^{Q-1} \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{Q-1}{2}, \nu) & \alpha^{Q-2} \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - \frac{Q}{2}, \nu) & \dots & \mathbf{D}_{\mathbf{S}\mathbf{W}, \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t - Q + 1, \nu) \end{pmatrix}.$$

Time-frequency points (t, ν) satisfying the Assumption B correspond to auto-source terms linked to one single source and cross-source terms but only between this source and its delayed versions. It is obvious that the matrix $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ is block-diagonal ($\mathbf{D}_{\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(\cdot, \cdot) = 0$ if $i \neq j$). Due to the ‘‘middle point rule’’ [17] that defines the geometry of interferences, this matrix can possess only one single non null ($Q \times Q$) block on its diagonal. In fact, if two sources could be simultaneously present on the same t - f point then these two ‘‘auto-source terms’’ would interfere in their middle (here at the same t - f point (t, ν)) to give a third term which would happen to be a cross-source term (between two different sources in this case). Hence, the SQTFS of the ‘‘source signals vector’’ $\mathbf{S}(t)$ calculated at this t - f point would no more be a block-diagonal matrix. \square

Notice that this algebraic property is general: in the case of matrices stemming from spatial time-frequency spectra or distributions, the block-diagonal matrix with one single non null block in the diagonal is the only possibility of block-diagonal matrix.

4) *A new detector for the building of the matrices set to be joint block-diagonalized*: Most of the methods based on the use of SQTFS or SQTDFD rely upon a preliminary stage of automatic selection of ‘‘useful’’ t - f points in order to build particular matrices sets. Our aim is to introduce a new automatic selection procedure operating directly on non pre-whitened observations to detect t - f points satisfying Assumption B to be able to build a set \mathcal{M} of time-frequency matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$ (resp. $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) - \sigma_N^2 \mathbf{I}_M$ if the noises variance is estimated) such that the corresponding matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ are block-diagonal matrices. Because of our assumptions, the

matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$ and $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ have the same rank. The previous subsection discussion and Proposition 1 suggest to select the matrices whose rank equals Q , which leads to the following detector denoted by C_{conv} :

Detector C_{conv} of useful SQTFS matrices

- Use a Singular Value Decomposition (SVD) of $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$: $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu) = \mathbf{U}(t, \nu)\mathbf{\Delta}(t, \nu)\mathbf{V}(t, \nu)^H$ with $\mathbf{V}(t, \nu)$ and $\mathbf{U}(t, \nu)$ are $(M \times M)$ unitary matrices and $\mathbf{\Delta}(t, \nu) = \text{Diag}\{\mathbf{\Delta}(t, \nu)\}$ is a diagonal vector with non-negative components. Let $\boldsymbol{\delta}(t, \nu) = (\delta_1(t, \nu), \dots, \delta_M(t, \nu))^T$ and assume that the singular values are organized in a decreasing order: $\delta_1(t, \nu) \geq \delta_2(t, \nu) \geq \dots \geq \delta_M(t, \nu) \geq 0$.
- Calculate the ratio $\mathcal{R} = \frac{\sum_{i=1}^Q \delta_i^2(t, \nu)}{\|\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)\|_F^2}$.
- Check if \mathcal{R} is near to 1: if this assertion is true $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}(t, \nu)$ is kept else it is discarded. In terms of numerical implementation, it leads to: choose (t, ν) such that $\mathcal{R} \leq 1 - \epsilon$ where ϵ is a (sufficiently) small positive constant.

Let us finally notice that such an approach generalizes the detector proposed in [20] for the instantaneous case. This detector exploits a rank one property. It can even be seen as a generalization to the case of non-whitened signals of the one suggested in [16] for whitened observations.

The matrices belonging to the set \mathcal{M} (whose size is denoted by N_m ($N_m \in \mathbb{N}^*$)) all admit a particular structure since they can be decomposed into $\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)\mathbf{A}^H$ with $\mathbf{D}_{\mathbf{S}}(t, \nu)$ a block-diagonal matrix with only one non null ($Q \times Q$) block on its diagonal. One possible way to recover the mixing matrix \mathbf{A} (or its pseudo-inverse: the separation matrix \mathbf{B}) is to directly joint block diagonalize the matrices set \mathcal{M} ¹. It finally leads to the following BSS method:

The proposed BSS method

- 1- Estimate the SQTFS of the observations.
- 2- Estimate the noiseless SQTFS thanks to the procedure presented in Section II-B.2.
- 3- Select particular t - f points corresponding to block-diagonal matrices of the sources thanks to the detector C_{conv} proposed in Section II-B.4. The number of selected matrices is denoted by N_m and the set of these matrices is denoted by \mathcal{M} .
- 4- Joint block-diagonalize \mathcal{M} (by either the JBD_G or the JBD_{RG} algorithm presented in Section IV-C).
- 5- Estimate the separating matrix \mathbf{B} and finally its pseudo-inverse: the mixing matrix \mathbf{A} .

Now we are going to explain how to perform the fourth point of the suggested method. First we state the problem of the non unitary joint block-diagonalization in Section III and then we derive two new solutions to that problem in Section IV.

¹Let us notice that the recovered sources after inversion of the system are obtained up to a permutation and up to a filter which are the classical indetermination of the BSS in the convolutive case.

III. THE NON UNITARY JOINT BLOCK-DIAGONALIZATION PROBLEM

A. Problem statement

The problem of the NU – JBD is stated in the following way. Let us consider a set \mathcal{M} of N_m square matrices $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{M \times M}$, for all $i \in \{1, \dots, N_m\}$ that all admit the following decomposition:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A} \mathbf{D}_i \mathbf{A}^H, \quad (19)$$

where $\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{i,11} & \mathbf{0}_{12} & & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{D}_{i,22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{r-1r} \\ \mathbf{0}_{r1} & & \mathbf{0}_{rr-1} & \mathbf{D}_{i,rr} \end{pmatrix}$, for all $i \in \{1, \dots, N_m\}$ are $(N \times N)$ block diagonal matrices

with $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{D}_{i,jj}$, $i \in \{1, \dots, N_m\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ are $(n_j \times n_j)$ square matrices so that $n_1 + \dots + n_r = N$ and with $\mathbf{0}_{ij}$ denotes the $(n_i \times n_j)$ null matrix. \mathbf{A} belongs to $\mathbb{C}^{M \times N}$. The set of the N_m square matrices $\mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ is denoted \mathcal{D} . The block sizes n_j for all $j = 1, \dots, r$ are assumed known.

The general non-unitary JBD problem consists of estimating the matrix \mathbf{A} and the block-diagonal matrices set \mathcal{D} from only the matrices set \mathcal{M} .

Knowing the matrices factorization, a rather classical way to solve the above JBD problem consists of the minimization of the following quadratic cost function

$$\mathcal{F}_{BD}(\mathbf{A}, \{\mathbf{D}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{M}_i - \mathbf{A} \mathbf{D}_i \mathbf{A}^H\|_F^2, \quad (20)$$

where $\|\cdot\|_F$ stands for the Frobenius norm.

However, another way can be considered. Indeed, multiplying \mathbf{M}_i in Eq. (19) on the left by the pseudoinverse (Moore-Penrose generalized matrix inverse) \mathbf{A}^+ of \mathbf{A} and on the right by $(\mathbf{A}^+)^H$, leads to

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{M}_i (\mathbf{A}^+)^H = \mathbf{D}_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_m\}. \quad (21)$$

Hence, for the goal of the direct estimation of the pseudo-inverse, denoted by \mathbf{B} , of the matrix \mathbf{A} , one can consider the following quadratic cost function

$$\mathcal{C}'_{BD}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{B} \mathbf{M}_i \mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i\|_F^2. \quad (22)$$

For simplicity reasons, we will use the cost function \mathcal{C}'_{BD} . This is due to the fact that, in this case, the minimization of \mathcal{C}'_{BD} with respect to matrices \mathbf{D}_i , $i \in \{1, \dots, N_m\}$ has a direct solution when matrix \mathbf{B} is fixed. But first let us introduce some useful notations. Considering a square $(N \times N)$ matrix \mathbf{M} such that

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

where \mathbf{M}_{ij} for all $i, j = 1, \dots, r$ are $(n_i \times n_j)$ matrices (and $n_1 + \dots + n_r = N$). By introducing the following vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$, the matrix operators $\text{Bdiag}_{(\mathbf{n})}\{\cdot\}$ and $\text{OffBdiag}_{(\mathbf{n})}\{\cdot\}$ are respectively defined for

a square matrix $\mathbf{M} = (M_{ij})$ as

$$\text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \dots & \mathbf{0}_{1r} \\ \mathbf{0}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{r1} & \mathbf{0}_{r2} & \dots & \mathbf{M}_{rr} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} - \text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{M}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1r} \\ \mathbf{M}_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \dots & \mathbf{0}_{rr} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

By defining

$$\widehat{\mathbf{D}}_i = \arg \min_{\mathbf{D}_i} \mathcal{C}'_{BD}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}), \quad (26)$$

and using the properties given in the Appendix, one easily finds that

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_{BD}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \|\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i)^H(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i^H\mathbf{B}^H\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i^H\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H\mathbf{B}^H\mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^H\mathbf{D}_i\}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}_i} \mathcal{C}'_{BD}(\mathbf{B}, \{\mathbf{D}_i\}) = -2(\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H - \mathbf{D}_i) = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{D}}_i = \text{Bdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \quad \forall i = 1, \dots, N_m, \quad (28)$$

since the matrices \mathbf{D}_i for all $i = 1, \dots, N_m$ are block diagonal matrices. And finally using Eq. (25), it leads to:

$$\mathcal{C}'_{BD}(\mathbf{B}, \{\widehat{\mathbf{D}}_i\}) = \sum_{i=1}^{N_m} \|\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\}\|_F^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}). \quad (29)$$

In the literature, one can find solutions to the joint block-diagonalization problem based on the use of the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ defined Eq. (29). The case of an unitary matrix \mathbf{B} has been first addressed in [4][5][13] where solutions under the unitary constraint are proposed. Recently, we have suggested a first solution to the NU – JBD problem in [19]. This algorithm is based on the algebraic optimization of a least mean squares criterion. Finally, another solution has been proposed in [28] but for matrices that are assumed definite positive and hermitian.

B. Links with the Joint Diagonalization problem

The NU – JBD problem is linked to the NU – JD one. In this latter, $\mathbf{D}_{i,jj}, i \in \{1, \dots, N_m\}, j \in \{1, \dots, r\}$ are no more $(n_j \times n_j)$ matrices but scalars ($n_j = 1$ for all $j \in \{1, \dots, r\}$ and consequently $N = r$). The zero block-diagonality operator can then be simplified as follows:

$$\text{OffBdiag}_{(1)}\{\mathbf{M}\} = ((1 - \delta_{ij})M_{ij})\mathbf{1}_N = \text{OffDiag}\{\mathbf{M}\},$$

where $\mathbf{M} = (M_{ij})$, $\mathbf{1}_N$ is a $(N \times N)$ matrix whose components are all equal to 1 and $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$ and 0 otherwise. With regard to the matrix operator $\text{Bdiag}_{(1)}\{\cdot\}$, it is simply denoted by $\text{Diag}\{\cdot\}$:

$$\text{BDiag}_{(1)}\{\mathbf{M}\} = ((\delta_{ij})M_{ij})\mathbf{1}_N = \text{Diag}\{\mathbf{M}\} = \mathbf{M} - \text{OffDiag}\{\mathbf{M}\}.$$

It finally leads to the minimization of the following cost function:

$$\mathcal{C}_D(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{N_m} \|\text{OffDiag}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_k\mathbf{B}^H\}\|_F^2. \quad (30)$$

It has been used in [7] under the unitary constraint (*i.e.* $M = N$ and $\mathbf{B}\mathbf{B}^H = \mathbf{B}^H\mathbf{B} = \mathbf{I}_N$, with \mathbf{I}_N the $(N \times N)$ identity matrix). The minimization of this function can then be realized by a simple extension of the Jacobi method [21]. This cost function $\mathcal{C}_D(\mathbf{B})$ has also been used in [11][15][25][32][34] where the considered matrix \mathbf{B} is no more necessarily an unitary one.

IV. JOINT BLOCK-DIAGONALIZATION ALGORITHMS BASED ON GRADIENT APPROACHES

To estimate the matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times M}$, the cost function \mathcal{C}_{BD} given by Eq. (29) has to be minimized. To that aim, we propose, here, to use gradient based algorithms. The first one uses a classical gradient approach while the second one relies upon a relative gradient approach [8]. For each algorithm, the optimal step size is computed algebraically at each iteration in order to speed up the convergence speed.

A. Gradient based methods

First, we consider a classic gradient descent algorithm written as $\Delta\mathbf{B} = -\mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ since the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ has to be minimized versus \mathbf{B} . μ_a is a positive small enough number called the step size or adaptation coefficient. The complex gradient matrix $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ of the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ given Eq. (29) is defined as (see [24]):

$$\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*}, \quad (31)$$

We also consider a relative gradient approach like in [8] written as $\Delta\mathbf{B} = -\mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B}$ with $\mu_r > 0$ and $\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\cdot)$ defined as:

$$\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} \mathbf{B}^H = \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) \mathbf{B}^H. \quad (32)$$

In all the cases, the complex gradient matrix $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ has to be calculated. It is found to be equal to (see Appendix A):

$$\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = 2 \sum_{i=1}^{N_m} \left[\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H + \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right]. \quad (33)$$

The two proposed gradient based algorithms can now be derived. In the classical gradient approach, the sought after matrix \mathbf{B} is updated at each iteration k according to the following adaptation rule:

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} - \mu_a \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}) \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (34)$$

In the following, the resulting algorithm will be denoted by JBD_G .

In a relative gradient approach, \mathbf{B} is updated at each iteration k according to the following scheme:

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}) \mathbf{B}^{(k-1)} = \left(\mathbf{I}_N - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}) \right) \mathbf{B}^{(k-1)} \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

In the following, the resulting algorithm will be denoted by JBD_{RG} .

We can notice, that in the particular case of an unitary matrix \mathbf{B} ($M = N$ and $\mathbf{B}\mathbf{B}^H = \mathbf{B}^H\mathbf{B} = \mathbf{I}_N$) both adaptation rules (gradient and relative gradient) are identical, whereas they are not equivalent in the general case.

B. Seek of the optimal step size

To increase the convergence speed, it is possible to calculate the optimal step size μ_{opt} at each iteration. It can be computed algebraically for a given iteration k involving the calculation of $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k)}) = \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}))$ for the gradient algorithm and its minimization with respect to μ . For the relative gradient algorithm one has to evaluate $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k)}) = \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)} - \mu \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)})\mathbf{B}^{(k-1)})$ and to minimize it with respect to μ too.

As shown in Appendix B, $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}))$ is a 4th-degree polynomial whose expression is given by (the dependency upon the iteration k has been omitted to simplify the different expressions):

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + a_4\mu^4. \quad (36)$$

The five coefficients a_0 , a_1 , a_2 , a_3 and a_4 have been found to be equal to (see Appendix B):

$$a_0 = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}\{\mathbf{M}_i\})^H \mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H \text{vec}\{\mathbf{M}_i\}, \quad (37)$$

$$a_1 = - \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}\{\mathbf{M}_i\})^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}}^H + \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}\{\mathbf{M}_i\}, \quad (38)$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}\{\mathbf{M}_i\})^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{T}_{\text{Boff}}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec}\{\mathbf{M}_i\}, \quad (39)$$

$$a_3 = - \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}\{\mathbf{M}_i\})^H (\mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}}^H) \text{vec}\{\mathbf{M}_i\}, \quad (40)$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec}\{\mathbf{M}_i\})^H \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H \text{vec}\{\mathbf{M}_i\}, \quad (41)$$

with $\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H$, $\mathbf{T}_{\text{Boff}} = \mathbf{B}^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^H + (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^T \otimes \mathbf{B}^H$ and $\mathbf{R} = (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^H$. \otimes denotes the Kronecker product [6]. The $\text{vec}\{\cdot\}$ operator applied on a matrix \mathbf{M} stacks its columns into a column vector. The $(N^2 \times N^2)$ transformation matrices \mathbf{T}_{Diag} and \mathbf{T}_{Boff} are defined as:

$$\mathbf{T}_{\text{Diag}} = \text{diag}\{\text{vec}\{\mathbf{B} \text{diag}_{(n)}\{\mathbf{1}_N\}\}\}, \quad (42)$$

$$\mathbf{T}_{\text{Boff}} = \mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T}_{\text{Diag}}, \quad (43)$$

where $\mathbf{I}_{N^2} = \text{Diag}\{\mathbf{1}_{N^2}\}$ is the $(N^2 \times N^2)$ identity matrix and $\text{diag}\{\mathbf{a}\}$ is a square diagonal matrix which contains the elements of the vector \mathbf{a} on its diagonal.

The derivative with respect to μ of the 4th-degree polynomial defined in Eq. (36) is given by

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))}{\partial \mu} = 4a_4\mu^3 + 3a_3\mu^2 + 2a_2\mu + a_1. \quad (44)$$

The optimal step size μ_{opt} corresponds, then, to the root of the polynomial defined in Eq. (44) leading to the minimum of the criterion given in Eq. (36).

Considering the relative gradient algorithm, $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})$ is obviously a 4th-degree polynomial too whose expression is given by:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B}) = a_{0r} + a_{1r}\mu + a_{2r}\mu^2 + a_{3r}\mu^3 + a_{4r}\mu^4, \quad (45)$$

Its derivative is then:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu_r \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})}{\partial \mu} = 4a_{4r}\mu^3 + 3a_{3r}\mu^2 + 2a_{2r}\mu + a_{1r}, \quad (46)$$

where the coefficients a_{0r} , a_{1r} , a_{2r} , a_{3r} , a_{4r} have same expressions as the ones given Eq. (37), Eq. (38), Eq. (39), Eq. (40) and Eq. (41) but replacing the matrix \mathbf{R} (Eq. (49)) by the matrix $\mathbf{R}_r = \mathbf{B}^T \otimes (\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})^H + (\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})^T \otimes \mathbf{B}^H$ and the matrix \mathbf{R} (Eq. (50)) by the matrix $\mathbf{R}_r = (\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})^T \otimes (\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\mathbf{B})^H$. In the following, we will denote the non-unitary joint block-diagonalization algorithm based on an optimal step size relative gradient approach by JBD_{ORG} and the one based on an optimal step size gradient approach by JBD_{OG} .

C. Summary of the proposed algorithms

The proposed joint block-diagonalization algorithms based on (relative) gradient-descent approach are now summarized in the following tables:

JBD_{OG}: optimal step size JBD algorithm based on a gradient approach
Denote the N_m square matrices to be joint block-diagonalized as $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.
Given a $(N \times M)$ initial estimate $\mathbf{B}^{(0)}$ (for example, in the square case $(N = M)$ one can choose $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).
For $k = 1, 2, \dots$
- Compute $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)})$ whose expression is given by Eq. (33).
- Compute the coefficients $a_0^{(k-1)}, \dots, a_4^{(k-1)}$ thanks to Eq. (37), (38), (39), (40) and (41).
- Set the optimal step size $\mu_{\text{opt}}^{(k-1)}$ by the research of the root of the polynomial given in Eq. (44) attaining the minimum in the polynomial given in Eq. (36).
- Set $\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} - \mu_{\text{opt}}^{(k-1)} \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)})$.
- Stop after a fixed number of iterations or when $ \mathbf{B}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k-1)} \leq \varepsilon$ where ε is a small positive threshold.
EndFor

JBD_{ORG}: optimal step size JBD algorithm based on a relative gradient approach

Denote the N_m square matrices to be joint block-diagonalized as $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{N_m}$.

Given a $(N \times M)$ initial estimate $\mathbf{B}^{(0)}$ (for example, in the square case ($N = M$) one can choose $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}_M$).

For $k = 1, 2, \dots$

- Compute $\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)})$ whose expression is given by Eq. (33).
- Compute $\nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)})$ whose expression is given by Eq. (32).
- Compute the coefficients $a_{0r}^{(k-1)}, \dots, a_{4r}^{(k-1)}$ thanks to Eq. (37), (38), (39), (40) and (41) replacing $(\)^{(k-1)}$ by $(\)_r^{(k-1)}$ and $\mathbf{R}^{(k-1)}$ by $\mathbf{R}_r^{(k-1)}$.
- Set the optimal step size $\mu_{\text{opt}}^{(k-1)}$ by the research of the root of the polynomial given in Eq. (46) attaining the minimum in the polynomial given in Eq. (45).
- Set $\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} - \mu_{\text{opt}}^{(k-1)} \nabla_r \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}^{(k-1)}) \mathbf{B}^{(k-1)}$.
- Stop after a fixed number of iterations or when $|\mathbf{B}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k-1)}| \leq \varepsilon$ where ε is a small positive threshold.

EndFor

V. COMPUTER SIMULATIONS

A. A comparison of the proposed JBD algorithms

Simulations are provided to illustrate the effectiveness of the proposed JBD algorithms. We consider a set \mathcal{D} of $N_m = 100$ (or 20) block-diagonal complex matrices, with random entries chosen from a Gaussian distribution with zero mean and unit variance. Complex random entries chosen from a Gaussian distribution with zero mean and variance σ_b^2 are then added on the off-diagonal blocks of the previous matrices. A signal to noise ratio can be defined as $\text{SNR} = 10 \log(\frac{1}{\sigma_b^2})$.

To measure the quality of the results, the following performance index is used [19]:

$$I_{\text{conv}}(\) = \frac{1}{r(r-1)} \left[\sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{\|(\)_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\)_{i,\ell}\|_F^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^r \frac{\|(\)_{i,j}\|_F^2}{\max_{\ell} \|(\)_{\ell,j}\|_F^2} - 1 \right) \right],$$

where $(\)_{i,j}$ for all $i, j \in \{1, \dots, r\}$ is the (i, j) -th (square) block matrix of $\ = \mathbf{BA}$. The best results are obtained when the index performance $I_{\text{conv}}(\cdot)$ is found to be close to 0 in linear scale ($-\infty$ in logarithmic scale). Regarding to the charts, $I_{\text{conv}}(\cdot)$ is given in dB and is then defined by $I_{\text{conv}}(\cdot) \text{ dB} = 10 \log(I_{\text{conv}}(\cdot))$.

We compare the performance index obtained thanks to the different algorithms (JBD_{OG}, JBD_{ORG}, JBD_G, JBD_{RG}) versus the number of iterations and with respect to two different parameters: the SNR and the number N_m of matrices to be joint block diagonalized. The mixing matrix $\mathbf{A}(t)$ is randomly chosen. In the first example, we consider $M = N = 9$, $r = 3$ and $n_j = 3$ for all $j = 1, \dots, 3$. On the top of Figure 1, we present the results obtained with $N_m = 100$ matrices in a nearly noiseless context (SNR = 100 dB) with the classical gradient algorithm (fixed step size version JBD_G for seven different values of the step size μ and optimal step size version JBD_{OG}). On the bottom of Figure 1, we have displayed the results obtained under the same conditions but with the relative gradient algorithm (fixed step size version JBD_{RG} for seven different values of the step size μ and optimal step size version JBD_{ORG}). Both algorithms are tested on the same set of 100 matrices. The

highest value of the step size presented in these charts corresponds to the nearly highest value that does not lead to the divergence of the algorithm. One can observe that in the nearly noiseless case, the two algorithms behave quite similarly since they reach nearly the same performances (≈ -142 dB). Let us also notice that the convergence is effectively quicker with the optimal step size version of the proposed algorithms (*i.e.* JBD_{OG} , and JBD_{ORG}) since ≈ 140 iterations (resp. 350) are required to reach the convergence in this example against more than 1000 (resp. 2000) with the fixed step size versions (JBD_{G} and JBD_{RG}) which are presented here. We have plotted the evolution of the performance index versus the value of the step size: the convergence speed increases when the step size value increases which is quite classical too.

[Figure 1 about here.]

From now on, we focus on the optimal step size versions of the two algorithms. We now study what happens in a noisy context since the SNR amounts to 20 dB. First, 100 matrices are used (left column of Figure 2), then fewer matrices are joint block-diagonalized (for instance $N_m = 20$ matrices, right column of Figure 2). While we still consider the square case $M = N = 9$, $r = 3$ and $n_j = 3$ for all $j = 1, \dots, 3$ on the top of Figure 2, the rectangular case is addressed on the bottom of Figure 2 by choosing $M = 12$, $N = 8$, $r = 2$ and $n_j = 4$ for all $j = 1, \dots, 2$. We can observe that the algorithm based on the relative gradient approach outperforms the gradient algorithm in a noisy context but with a slower convergence speed. One can notice a decrease of the performances of the gradient algorithm (JBD_{OG}) in a noisy context especially when very few matrices are simultaneously joint block-diagonalized. In a rather difficult context (noisy case and few matrices to be joint block-diagonalized), the JBD_{ORG} seem to be numerically more stable and exhibit better performances than those obtained thanks to the gradient algorithm. The same conclusions are led in the rectangular case.

[Figure 2 about here.]

On the Figure 3, we focus on the use of the considered JBD algorithms in the context of joint diagonalization, by choosing $M = N = r = 12$ and $n_j = 1$ for all $j = 1, \dots, 12$. We have plotted the performance index I_{conv} versus the number of matrices to be joint diagonalized (top) and versus the SNR (bottom). We compare the two proposed algorithms with two other existing ones: the JD_{A} algorithm suggested in [15] (and based on the algebraic optimization of a least mean square criterion) and the DOMUNG (Diagonalization Of Matrices Using Natural Gradient) algorithm suggested in [32] (based on an optimal step size approximated natural gradient approach). We can observe that our relative gradient based algorithm always outperforms the other algorithms (especially in a difficult context: noisy and few matrices to be joint-diagonalized).

[Figure 3 about here.]

On the Figure 4, we consider joint block-diagonalization algorithms. The charts are obtained considering $M = N = 9$, $r = 3$ and $Q = 3$. We have plotted the performance index I_{conv} versus the number of used matrices (top) and versus the SNR (bottom) for each of the two optimal step size algorithms. Results have been averaged over 10 Monte-Carlo trials. We can observe that the more matrices to be joint block-diagonalized we have, the better the obtained results are. The performances obviously increase when the SNR is higher. And finally, after

convergence, the relative gradient based algorithm always outperforms the gradient algorithm.

[Figure 4 about here.]

B. Application to the BSS problem

Two BSS methods can be derived (see last Table of the Section II): the first one is called JBD_{OGTF} since it combines the JBD algorithm based on a gradient approach JBD_{OG} together with the automatic time-frequency points detector C_{conv} . The second method called $\text{JBD}_{\text{ORGTf}}$ consists of replacing the gradient based JBD algorithm by the relative gradient algorithm JBD_{ORG} . We present simulations to illustrate the effectiveness of the proposed methods in the context of blind separation of convolutive mixture of sources using SQTFS. We also establish a comparison with two other JBD algorithms combined with our t - f points selection procedure:

- the unitary JBD algorithm proposed in [16] and denoted by UJBD_{TF} .
- the non-unitary JBD algorithm proposed in [19] and denoted by JBD_{ATF} . It is based on the algebraic optimization of a least mean squares criterion.

The JBD_{ATF} , $\text{JBD}_{\text{OGTFM}}$ and $\text{JBD}_{\text{ORGTf}}$ algorithms are directly applied on the same matrices set \mathcal{M} , whereas the algorithm UJBD_{TF} is applied after a pre-whitening stage of the selected t - f matrices. We consider $m = 3$ mixtures of $n = 2$ sources of 128 time samples. The first source (resp. the second source) is a linear frequency modulation (resp. a sinusoidal frequency modulation), $L = 2$ and $L' = 4$. These sources are mixed according to the following mixture matrix whose components are randomly generated:

$$\mathbf{A}[z] = \begin{pmatrix} -0.3592 + 0.4104z^{-1} + 0.8382z^{-2} & 0.9365 - 0.3316z^{-1} + 0.1138z^{-2} \\ 0.5585 - 0.1108z^{-1} + 0.8221z^{-2} & 0.4876 - 0.3044z^{-1} - 0.8183z^{-2} \\ 0.4550 - 0.7171z^{-1} + 0.5279z^{-2} & -0.8218 + 0.1528z^{-1} + 0.5489z^{-2} \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{A}[z]$ stands for the z transform of $\mathbf{A}(t)$. We use the SPWVS with a Hamming smoothing window of size 32 and 64 frequency bins. We have chosen $\epsilon = 0.01$ in the detector C_{conv} . On the Figure 5, we have plotted the number of selected t - f matrices versus the SNR (top) and the performance index versus the SNR (bottom).

[Figure 5 about here.]

The resulting performance index shows that the JBD_{OGTF} and $\text{JBD}_{\text{ORGTf}}$ methods exhibit the best performances whereas the method based on an unitary JBD algorithm exhibits the worst performances. Moreover, in a noisy environment, the $\text{JBD}_{\text{ORGTf}}$ method outperforms all the other ones, which is not surprising since the JBD_{ORG} algorithm on which it is based already outperformed all the other JBD algorithms.

VI. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this article, we have proposed two new joint block diagonalization algorithms (namely JBD_{OG} and JBD_{ORG}). The first one is based on a gradient-descent approach and the second one relies upon a relative gradient-descent approach. They do not rely upon restrictive assumptions about the matrices belonging to the considered set and the found joint block diagonalizer can be either an unitary or a non-unitary matrix. They generalize the joint diagonalization problem that is why we were able to suggest a new JD algorithm based on an optimal step

size relative gradient algorithm too. It outperforms other JD algorithms (JD_A, DOMUNG). The convergence of the proposed algorithms is increased thanks to the calculus of the optimal step size. The JBD_{ORG} algorithm exhibits the best performances after convergence even in a difficult context (noisy case and very few matrices to be joint block-diagonalized). The convergence speed is higher with the JBD_{OG} algorithm. We have also presented two new BSS methods (denoted by JBD_{OGTF} and JBD_{ORGTf}) combining a novel time-frequency points detector (namely C_{conv}) together with the aforementioned JBD_{OG} and JBD_{ORG} algorithms. We have illustrated the usefulness of the proposed approaches thanks to computer simulations.

APPENDIX

Considering three $(M \times M)$ square matrices \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 and \mathbf{D}_3 and two rectangular matrices \mathbf{D}_4 ($M \times N$) and \mathbf{D}_5 ($N \times M$) and a square $N \times N$ matrix \mathbf{D}_6 , let $\text{tr}\{\cdot\}$, $d\{\cdot\}$, $\text{vec}\{\cdot\}$, $\text{OffBdiag}_{(n)}\{\cdot\}$ and \mathbf{T}_{Boff} respectively denote the trace operator, the differential operator, the vec-operator, the zero-block-diagonal operator defined in Eq. (25) and the $(N^2 \times N^2)$ “transformation” matrix defined in Eq. (43). We have the following properties [24][25]:

P₁.

$$\begin{aligned} \|\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{D}_1\}\|_F^2 &= \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{D}_1\} \right)^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{D}_1\} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{D}_1^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{D}_1\} \right\}. \end{aligned}$$

P₂. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T\}$.

P₃. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1\} + \text{tr}\{\mathbf{D}_2\}$.

P₄. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\mathbf{D}_1\} \Rightarrow \text{tr}\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\}$.

P'₄. $\text{tr}\{\mathbf{D}_4\mathbf{D}_5\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_5\mathbf{D}_4\}$.

P₅. $\text{tr}\{\mathbf{D}_1^H\mathbf{D}_2\} = (\text{vec}\{\mathbf{D}_1\})^H \text{vec}\{\mathbf{D}_2\}$.

P₆. $\text{vec}\{\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{D}_6\}\} = \mathbf{T}_{\text{Boff}}\text{vec}\{\mathbf{D}_6\}$.

P₇. $d\{\mathbf{D}_1^H\} = (d\{\mathbf{D}_1\})^H$.

P₈. $d\{\mathbf{D}_1^*\} = (d\{\mathbf{D}_1\})^*$.

P₉. $d\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\} = d\{\mathbf{D}_1\}\mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1d\{\mathbf{D}_2\}$.

P₁₀. $d\{\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2\} = d\{\mathbf{D}_1\} + d\{\mathbf{D}_2\}$.

P₁₁. $d\{\text{tr}\{\mathbf{D}_1\}\} = \text{tr}\{d\{\mathbf{D}_1\}\}$.

P₁₂. $d\{\text{vec}\{\mathbf{D}_1\}\} = \text{vec}\{d\{\mathbf{D}_1\}\}$.

P₁₃. $d\{f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^H\mathbf{D}_2\}\} = \text{tr}\{\mathbf{D}_1^T d\mathbf{Z} + \mathbf{D}_2^T d\mathbf{Z}^*\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}} = \mathbf{D}_1$ and $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*} = \mathbf{D}_2$.

P₁₄. $\text{vec}\{\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3\} = \mathbf{D}_3^T \otimes \mathbf{D}_1 \text{vec}\{\mathbf{D}_2\}$.

P₁₅. $(\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_2)^H = \mathbf{D}_1^H \otimes \mathbf{D}_2^H$.

A. Calculation of the gradient of the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$

Using the properties **P₁**, the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ can be expressed as:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\},$$

From the properties \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_9 , \mathbf{P}_{10} and \mathbf{P}_{11} , the differential of the cost function can be obtained as:

$$\begin{aligned} d\{\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\} &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \right\} \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{B}) + \mathcal{G}(\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (47)$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H \right\} \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\}, \\ \mathcal{G}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ (\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H)^H d \left\{ \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

The properties \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_4 , \mathbf{P}'_4 , \mathbf{P}_7 , \mathbf{P}_9 , \mathbf{P}_8 and \mathbf{P}_{12} implies that:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H d\{\mathbf{B}^H\} \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} + \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ d\{\mathbf{B}\} \mathbf{M}_i^H \mathbf{B}^H \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T d\{\mathbf{B}^*\} \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T d\{\mathbf{B}\} \right\}. \end{aligned}$$

Using now the properties \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 , \mathbf{P}_4 , \mathbf{P}'_4 , \mathbf{P}_5 , \mathbf{P}_6 , \mathbf{P}_8 and \mathbf{P}_9 , we find that:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{vec} \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \right\} \right)^H \text{vec} \left\{ d \left\{ \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\mathbf{T}_{\text{Boff}} \text{vec} \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \right\} \right)^H \text{vec} \left\{ d \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{vec} \left\{ \text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right\} \right)^H \text{vec} \left\{ d \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H d \left\{ \mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T d\{\mathbf{B}\} \right\} \\ &+ \text{tr} \left\{ \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T d\{\mathbf{B}^*\} \right\}. \end{aligned}$$

We replace $\mathcal{F}(\mathbf{B})$ and $\mathcal{G}(\mathbf{B})$ in Eq. (47), we finally find that:

$$\begin{aligned} d\{\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})\} &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* \right)^T + \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T \right)^T \right) d\{\mathbf{B}\} \right\} \\ &+ \text{tr} \left\{ \left(\left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H \right)^T + \left(\left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i \right)^T \right) d\{\mathbf{B}^*\} \right\}. \end{aligned}$$

Using the properties \mathbf{P}_{13} , we obtain the following results:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^T \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^* + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^* \mathbf{B}^* \mathbf{M}_i^T. \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}^*} &= \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right) \mathbf{B}\mathbf{M}_i^H + \sum_{i=1}^{N_m} \left(\text{OffBdiag}_{(n)}\{\mathbf{B}\mathbf{M}_i\mathbf{B}^H\} \right)^H \mathbf{B}\mathbf{M}_i. \end{aligned}$$

It finally leads to the result stated by Eq. (33).

B. Coefficients of the 4th-degree polynomial

To simplify, the dependency over the iteration is omitted. Using the properties \mathbf{P}_1 and \mathbf{P}_5 , the cost function $\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})$ can be expressed as:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec} \{ \mathbf{B} \mathbf{M}_i \mathbf{B}^H \})^H \text{vec} \{ \text{OffBdiag}_{(n)} \{ \mathbf{B} \mathbf{M}_i \mathbf{B}^H \} \}.$$

From the properties \mathbf{P}_6 , \mathbf{P}_{14} and \mathbf{P}_{15} , we find that:

$$\mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{N_m} (\text{vec} \{ \mathbf{M}_i \})^H \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{B}^* \otimes \mathbf{B} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}.$$

Let us introduce the three matrices \mathbf{P} , \mathbf{Q} and \mathbf{R} respectively defined as:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \otimes \mathbf{B}^H \quad (48)$$

$$= \mathbf{B}^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^H + (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^T \otimes \mathbf{B}^H \quad (49)$$

$$\mathbf{R} = (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^T \otimes (\nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B}))^H \quad (50)$$

Thus, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B} - \mu \nabla_a \mathcal{C}_{BD}(\mathbf{B})) &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H (\mathbf{P} - \mu \mathbf{Q} + \mu^2 \mathbf{R}) \mathbf{T}_{\text{Boff}} (\mathbf{P}^H - \mu \mathbf{Q}^H + \mu^2 \mathbf{R}^H) \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H \mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &\quad + \mu^2 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H (\mathbf{P} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{P}^H) \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &\quad - \mu^3 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H (\mathbf{Q} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H + \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{Q}^H) \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &\quad + \mu^4 \sum_{i=1}^{N_m} \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \}^H \mathbf{R} \mathbf{T}_{\text{Boff}} \mathbf{R}^H \text{vec} \{ \mathbf{M}_i \} \\ &= a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + a_3 \mu^3 + a_4 \mu^4. \end{aligned}$$

It finally leads to the results stated by Eq. (37), (38), (39), (40) and (41).

REFERENCES

- [1] “Séparation de sources”, Tome 1 “Concepts de base et analyse en composantes indépendantes” & Tome 2 : “Au-delà de l’aveugle et applications”, Traité IC2, Editions Hermès, Lavoisier, P. Comon et C. Jutten Eds, Mars 2007.
- [2] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, M. Amin and A. Zoubir, “Joint anti-diagonalization for blind source separation”, in Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP’2001), Salt Lake City, Utah, May 2001.

- [3] A. Belouchrani, K. Abed-Meraïm, J.-F. Cardoso and E. Moulines, “A blind source separation technique using second order statistics”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, pp. 434–444, February 1997.
- [4] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraïm, “Jacobi-like algorithm for blind signal separation of convolutive mixtures”, *Electronic Letters*, No. 37, pp. 1049–1050, 2001.
- [5] H. Bousbiah-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraïm, “Blind separation of non stationary sources using joint block diagonalization”, in *Proc. IEEE Workshop on Statistical Signal Processing*, pp. 448–451, 2001.
- [6] J. W. Brewer, “Kronecker products and matrix calculus in system theory”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 25, No. 9, pp. 772–781, September 1978.
- [7] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, “Blind beamforming for non Gaussian signals”, *IEEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp. 362–370, 1993.
- [8] J.-F. Cardoso and B. Laheld, “Equivariant adaptative source separation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 12, pp. 3017–3030, December 1996.
- [9] G. Chabriel, J. Barrère, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, “Algebraic joint zero-diagonalization and blind source separation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, n°3, pp. 980-989, March 2008.
- [10] P. Comon, “Independant component analysis, a new concept ?”, *Signal Processing*, Vol. 36, pp. 287–314, 1994.
- [11] S. Dégerine and E. Kane, “A comparative study of approximate joint diagonalization algorithms for blind source separation in presence of additive noise”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, n°6, pp. 3022-3031, June 2007.
- [12] L. DeLathauwer, “Signal processing based on multilinear algebra”, PhD Thesis, Université Catholique de Leuven, Belgique, September 1997.
- [13] L. DeLathauwer, C. Févotte, B. De Moor, J. Vandewalle, “Jacobi algorithm for joint block diagonalization in blind identification”, in *Proc. 23rd Symposium on Information Theory in the Benelux*, Louvain-la-Neuve, Belgium, May 2002.
- [14] E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau et E. Moreau, “Algorithme de zéro-diagonalisation conjointe pour la séparation de sources déterministes”, dans les *Proc. du 20ème colloque GRETSI*, Louvain-La-Neuve, Belgique, pp. 981-984, Septembre 2005.
- [15] E. M. Fadaili, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, “Non orthogonal joint diagonalization/zero-diagonalization for source separation based on time-frequency distributions”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No 5, pp. 1673-1687, May 2007.
- [16] C. Févotte and C. Doncarli, “A unified presentation of blind source separation methods for convolutive mixtures using block-diagonalization”, in *Proc. ICA*, Nara, Japan, 2003.
- [17] P. Flandrin, “Time-Frequency/Time-Scale Analysis”, Academic Press, September 1998.
- [18] H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau, E. Moreau, A. Adib and D. Aboutajdine, “Non unitary joint-block diagonalization of complex matrices using a gradient approach”, in *Proc. 7th International Conference on Independent Component Analysis and Signal Separation*, LNCS 4666, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 4666, Mike E. Davies et al. (Eds), pp. 201–208, London, UK, September 2007.
- [19] H. Ghennioui, E.-M. Fadaili, N. Thirion-Moreau, A. Adib and E. Moreau, “A non-unitary joint block diagonalization algorithm for blind separation of convolutive mixtures of sources”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, n°11, pp. 860–863, November 2007.
- [20] L. Giulieri, H. Ghennioui, N. Thirion-Moreau and E. Moreau, “Non-orthogonal joint diagonalization of spatial quadratic time-frequency matrices for source separation”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 12, No. 5, pp. 415-418, May 2005.
- [21] G.-H. Golub and C.-F. Van Loan, “Matrix computation”, MD: Johns Hopkins, Univ. Press Baltimore, 1989.
- [22] A. Gorokhov and Ph. Loubaton, “Subspace based techniques for second order blind separation of convolutive mixtures with temporally correlated sources”, *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, Vol. 44, No. 9, pp. 813–820, September 1997.

- [23] Y. Grenier and D. Aboutajdine, “Comparaison des représentations temps-fréquence de signaux présentant des sauts”, *Annales des Télécommunications*, Vol. 38, No. 11-12, pp. 429–442, 1983.
- [24] A. Hjørungnes and D. Gesbert, “Complex-valued matrix differentiation: techniques and key results”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 6, pp. 2740-2746, June 2007.
- [25] M. Joho and K. Rahbar, “Joint diagonalization of correlation matrices by using Newton methods with application to blind signal separation”, *IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop SAM*, pp. 403–407, 2002.
- [26] E. Moreau, “A generalization of joint-diagonalization criteria for source separation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 49, No. 3, pp. 530–541, March 2001.
- [27] D.-T. Pham, “Joint approximate diagonalization of positive definite matrices”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 22, No. 4, pp. 1136–1152, 2001.
- [28] D.-T. Pham, “Blind separation of cyclostationary sources using joint block approximate diagonalization”, in *Proc. Independent Component Analysis and Signal Separation (ICA 2007)*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, LNCS 4666, Mike E. Davies et al. (Eds), pp. 244-251, London, September 2007.
- [29] L. Stankovic and S. Stankovic, “Wigner distribution of noisy signals”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, No. 2, pp. 956–960, February 1993.
- [30] A.-J. Van Der Veen, “Joint diagonalization via subspace fitting techniques”, in *Proc. Int. Conference on Acoustic Speech and Signal Processing (ICASSP’2001)*, pp. 2773–2776, Salt Lake City, USA, May 2001.
- [31] A. Yeredor, “Non-orthogonal joint diagonalization in the least square sense with application in blind source separation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No. 7, pp. 1545–1553, July 2002.
- [32] A. Yeredor, A. Ziehe and K.-R. Müller, “Approximate joint diagonalization using a natural gradient approach”, in *Lecture Notes in Computer Science (LNCS 3195): Independent Component Analysis and Blind Sources Separation*, in *Proceedings ICA*, Granada, Spain, pp. 89–96, September 2004.
- [33] V. Zarzoso and P. Comon, “Blind channel equalization with algebraic optimal step size”, in *Proc. EUSIPCO*, Antalya, Turkey, September 2005.
- [34] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, G. and K.-R. Müller, “A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation”, *Journal of Machine Learning Research*, No. 5, pp. 801–818, July 2004.

LIST OF FIGURES

1	Performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus the number of iterations for SNR = 100 dB and $N_m = 100$ matrices. A comparison of the optimal step size version with the fixed step size version of the gradient algorithm (top), the relative gradient algorithm (bottom) for different values of the step size.	22
2	Comparison between the optimal step size version of the gradient and the relative gradient algorithms: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus the number of iteration. Square case (top): left: SNR = 20 dB and $N_m = 100$ matrices, right: SNR = 20 dB and $N_m = 20$ matrices ; Rectangular case (bottom): left: SNR = 20 dB and $N_m = 100$ matrices, right: SNR = 20 dB and $N_m = 20$ matrices.	23
3	Joint diagonalization algorithms: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus the number N_m of matrices to be joint block diagonalized for a SNR = 20 dB (top) ; versus the SNR for $N_m = 20$ matrices (bottom)	24
4	Top: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus number N_m of used matrices for different values of the SNR (5 dB, 20 dB, 40 dB and 100 dB) ; bottom: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus SNR for different size of the matrices set to be joint block-diagonalized ($N_m = 5$, and $N_m = 100$). Results are averaged over 10 Monte-Carlo trials.	25
5	Number of the selected time-frequency matrices versus the SNR (top) and comparison of the UJBD _{TF} , JBD _{ATF} , JBD _{OGTF} and JBD _{ORGTf} methods: evolution of the performance index versus the SNR (bottom).	26

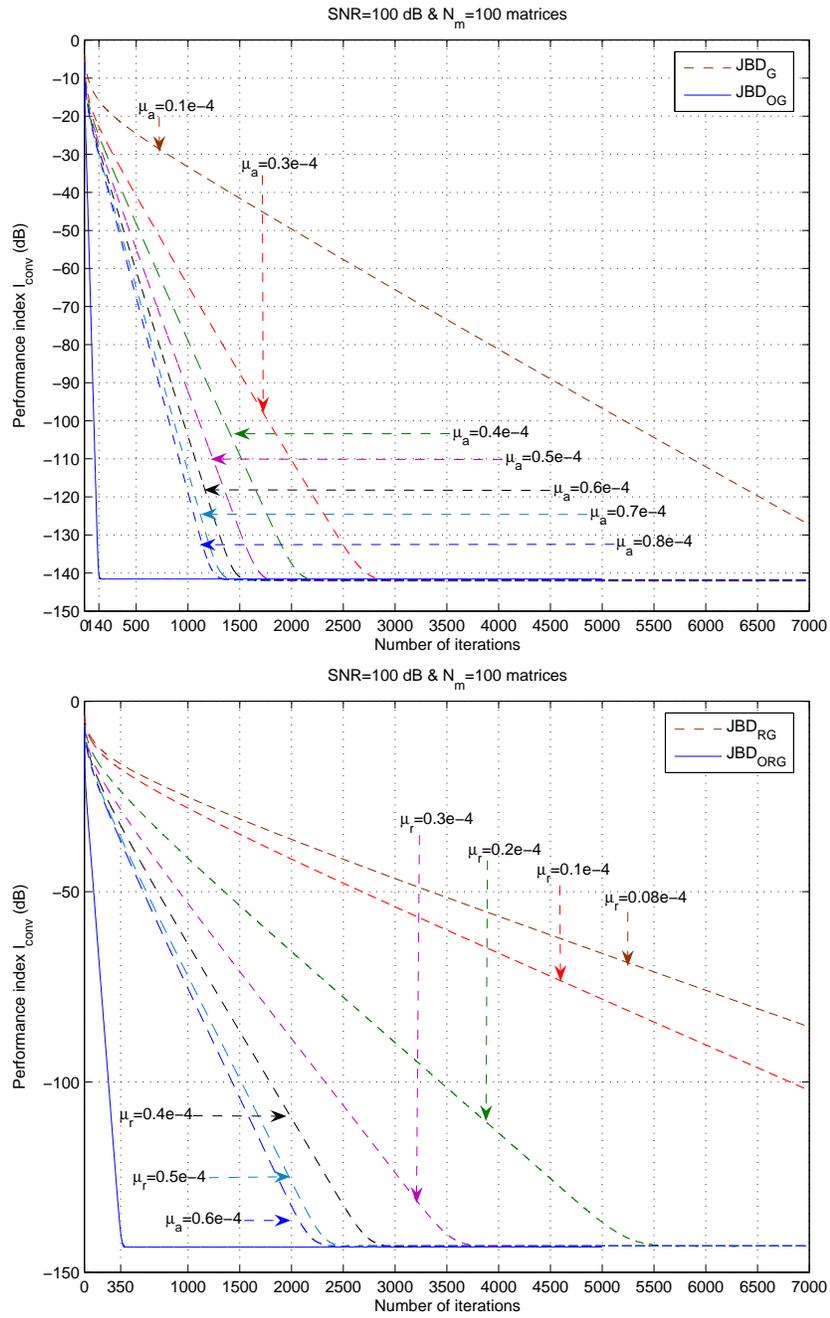


Fig. 1. Performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus the number of iterations for SNR = 100 dB and $N_m = 100$ matrices. A comparison of the optimal step size version with the fixed step size version of the gradient algorithm (top), the relative gradient algorithm (bottom) for different values of the step size.

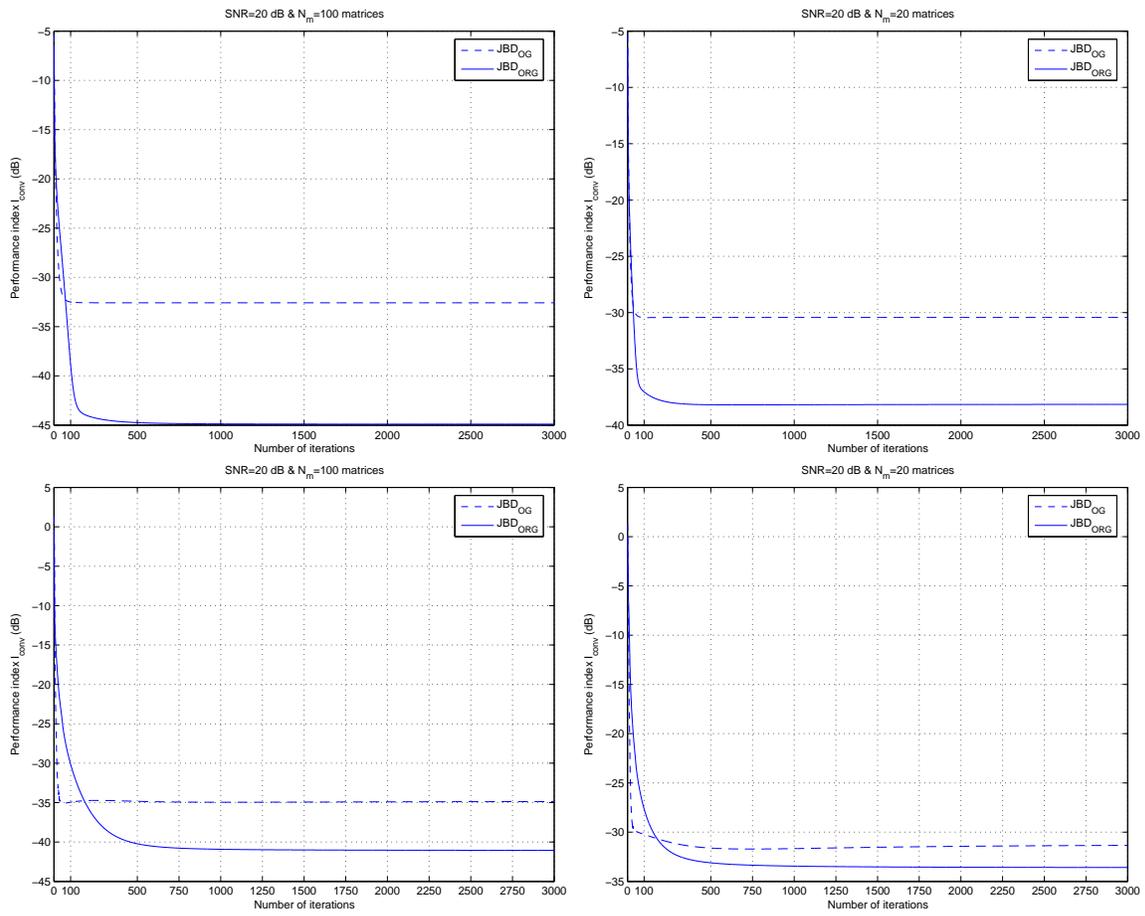


Fig. 2. Comparison between the optimal step size version of the gradient and the relative gradient algorithms: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus the number of iteration. Square case (top): left: SNR = 20 dB and $N_m = 100$ matrices, right: SNR = 20 dB and $N_m = 20$ matrices ; Rectangular case (bottom): left: SNR = 20 dB and $N_m = 100$ matrices, right: SNR = 20 dB and $N_m = 20$ matrices.

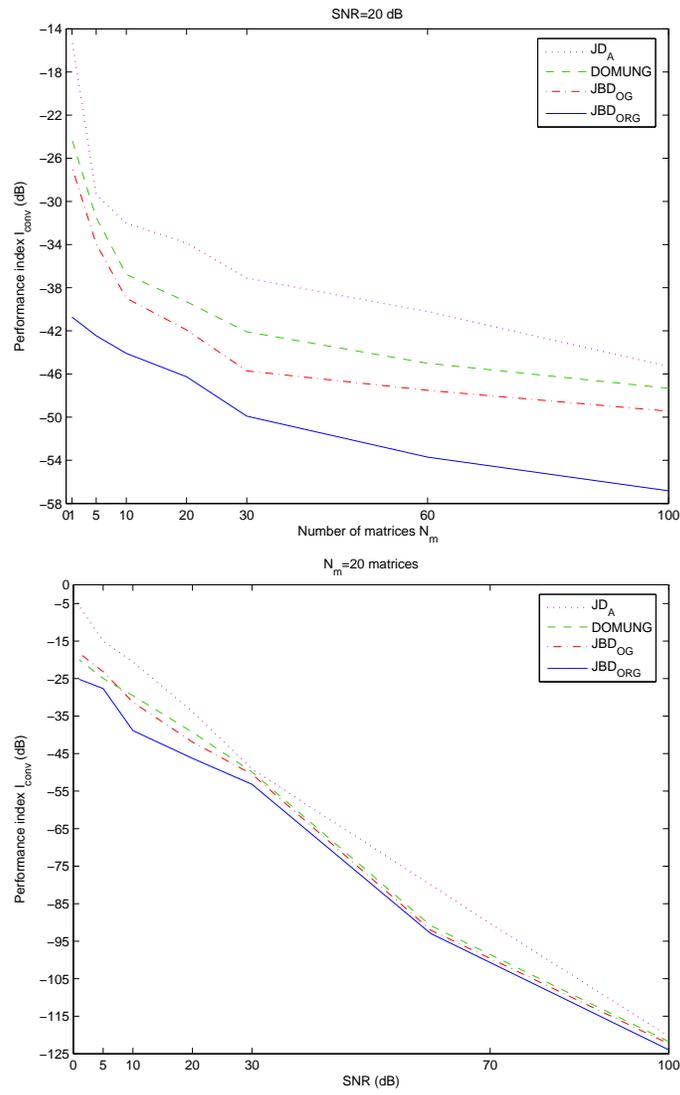


Fig. 3. Joint diagonalization algorithms: performance index $I_{conv}(\cdot)$ versus the number N_m of matrices to be joint block diagonalized for a SNR = 20 dB (top) ; versus the SNR for $N_m = 20$ matrices (bottom) .

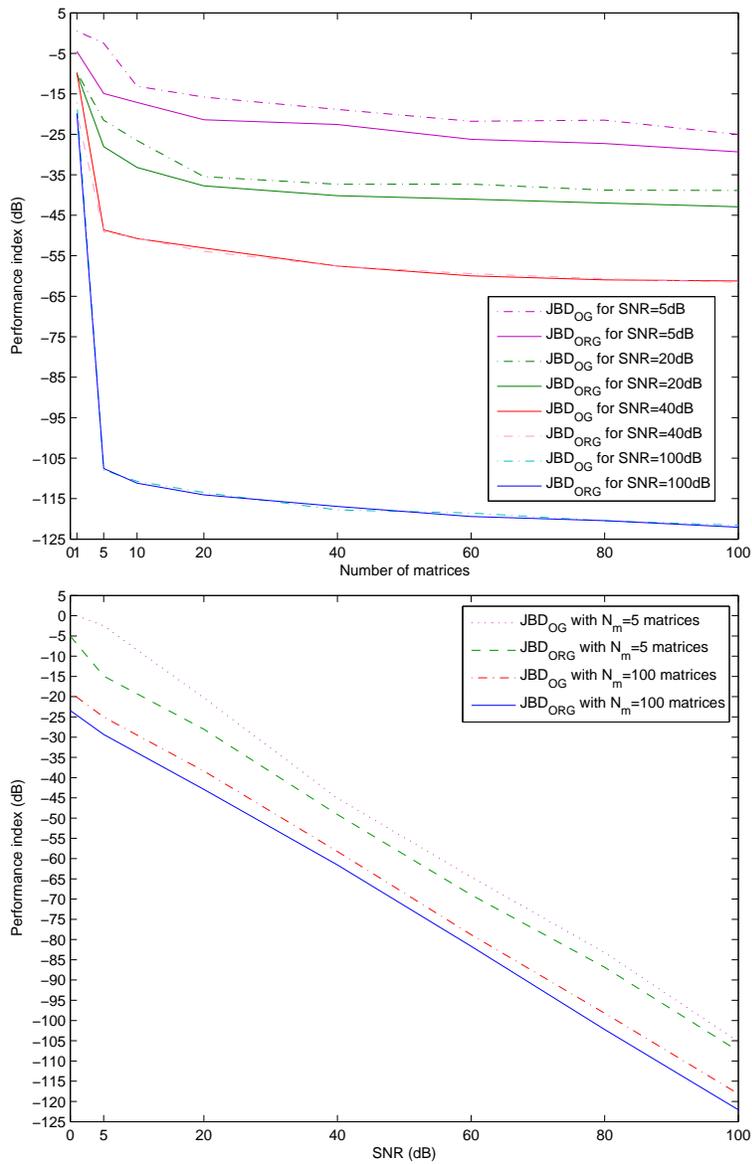


Fig. 4. Top: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus number N_m of used matrices for different values of the SNR (5 dB, 20 dB, 40 dB and 100 dB) ; bottom: performance index $I_{\text{conv}}(\cdot)$ versus SNR for different size of the matrices set to be joint block-diagonalized ($N_m = 5$, and $N_m = 100$). Results are averaged over 10 Monte-Carlo trials.

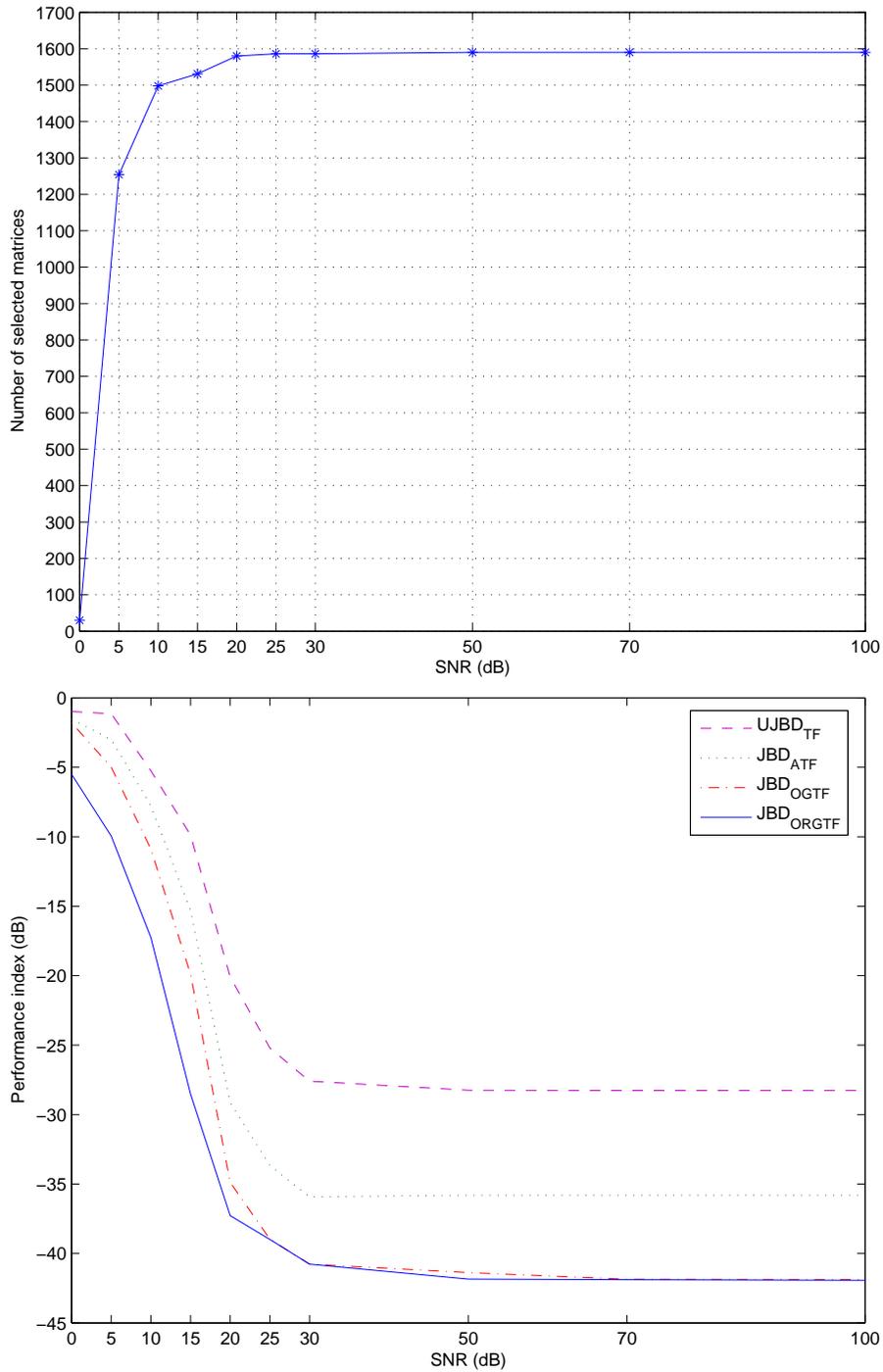


Fig. 5. Number of the selected time-frequency matrices versus the SNR (top) and comparison of the UJBD_{TF}, JBD_{ATF}, JBD_{ORTF} and JBD_{ORGTF} methods: evolution of the performance index versus the SNR (bottom).