

Calcul formel et nombre de racines d'un polynôme dans le disque unité : applications en automatique et biochimie

Bernard Gleyse

▶ **To cite this version:**

Bernard Gleyse. Calcul formel et nombre de racines d'un polynôme dans le disque unité : applications en automatique et biochimie. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1986. Français. NNT : . tel-00320629

HAL Id: tel-00320629

https://theses.hal.science/tel-00320629

Submitted on 11 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

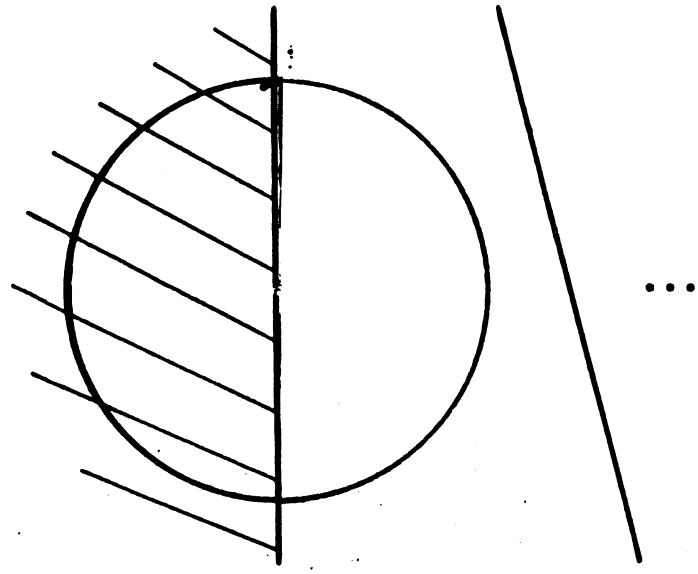
THESE

présentée à

l' Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

Docteur de 3ème cycle
Mathématiques Appliquées



par

Bernard GLEYSE

CALCUL FORMEL ET NOMBRE DE RACINES D'UN POLYNOME DANS LE DISQUE UNITE : APPLICATIONS EN AUTOMATIQUE ET BIOCHIMIE.

Thèse soutenue le 30 juin 1986 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	P.J. LAURENT	:	Président
Messieurs	P. CHENIN		
	J. DELLA DORA		
	J. DEMONGEOT		Examinateurs
	J.M. DION		
	F. ROBERT		

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

A mes Parents

Cette thèse a été préparée au Laboratoire des Techniques de l'Informatique, des Mathématiques, de la Microélectronique et de la Microscopie quantitative (TIM3) de l'Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Je remercie les membres du jury et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser cette thèse :

Monsieur Pierre-Jean LAURENT pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Monsieur Jean DELLA DORA d' avoir accepté de participer au jury.

Monsieur François ROBERT pour ses constants encouragements.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Patrick CHENIN qui m'a accueilli au sein de l'Equipe d'Algorithmique Mathématique et a dirigé de main de Maître mon travail.

Je témoigne toute ma gratitude à Messieurs Jacques DEMONGEOT et Jean-Michel DION pour les discussions fructueuses que nous avons eues dans les domaines d'applications en Automatique et Biochimie et l'intérêt qu'ils ont manifesté à ce travail.

Je tiens à remercier également :

Madame Claire DI CRESCENZO et Monsieur Yvon SIRET pour leurs précieux renseignements en Informatique.

Mes collègues de thèse pour leur sympathie et leur générosité.

Les membres du service de reprographie de l'IMAG pour le tirage de cette thèse.

Mes amis pour leur soutien inconditionnel.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

PARTIE A. Transformation de Schur, Algorithme de Schur-Cohn 3

chapitre 1] Notations et rappels de résultats fondamentaux 5
------- 2] Nombre de racines dans le disque unité et transformation circulaire dans $\mathbb{R}[X]$ 13
------- 3] Nombre de racines dans le disque unité et transformations de Marden et Cohn dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ 41
------- 4] Comparaison algorithmique des transformations circulaire et de Marden et Cohn 83
------- 5] Etude des constantes de Schur paramétrées 91
------- 6] Annexe des programmes 111

PARTIE B. Transformations de Sturm et Schelin 129

chapitre 1] Nombre de racines dans le disque unité dans $\mathbb{R}[X]$ 131
------- 2] Comparaison algorithmique des transformations de Schur et de Sturm et Schelin 163
------- 3] Annexe du programme 171

PARTIE C. Polynômes paramétrés 177

chapitre 1] Nombre de racines dans le disque unité dans $(\mathbb{R}[y])[X]$ 179
------- 2] Applications : Automatique - Biochimie 197
------- 3] Annexe du programme 213

CONCLUSION 221

INTRODUCTION

L'algorithme de Schur-Cohn fournit des résultats partiels pour le calcul du nombre de racines d'un polynôme en comptant leurs ordres de multiplicité dans le disque unité.

Nous proposons plusieurs méthodes programmées sur un DPS8 sous système Multics en utilisant le langage symbolique Reduce.

Les deux premières méthodes ont fait l'objet de deux rapports de recherches qui sont largement repris dans la première partie.

La première méthode, dans $\mathbb{R}[X]$, s'appuie sur la transformation circulaire.

La deuxième, dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$, est inspirée des transformations de Marden et Cohn. Elle donne un meilleur temps de calcul de façon quasi générale.

Nous dégageons quelques propriétés de ces deux méthodes, en particulier le calcul du nombre de racines dans toutes régions homographiquement équivalentes au disque unité et le comportement d'une classe de polynômes appelés autoréciproques (racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité).

Nous étudions l'effet des coefficients du polynôme considéré sur les constantes de Schur.

Ensuite nous proposons une tout autre démarche qui consiste à utiliser les suites de Sturm et les indices de Cauchy sur l'intervalle $[-1,1]$; c'est le sujet d'un article récent (1984) de C.W. Schelin qui présente un algorithme numérique et des résultats en programmation Fortran. Il subsiste un inconvénient, car il existe des polynômes pour lesquels l'algorithme n'aboutit pas au calcul du nombre de racines et de plus les polynômes d'entrée ne doivent pas s'annuler sur le cercle unité. Le calcul formel nous a permis de modifier cet algorithme ; nous avons dégagé dans ce cadre quelques propriétés sur les indices de Cauchy et grâce à l'étude des polynômes autoréciproques nous avons pu agrandir la famille des polynômes pour lesquels l'algorithme conclut. Nous avons programmé cette troisième méthode.

Nous proposons un algorithme utilisant ces deux dernières méthodes et les comparons.

Puis, nous étudions le calcul du nombre de racines de polynômes à un

paramètre du type $\sum_{i=0}^{n} a_i(y)\, x^i$ avec $a_i(y) \in \mathbb{R}[y]$, en fonction du paramètre réel y. Nous proposons un algorithme s'appuyant sur la deuxième méthode choisie pour sa généralité avec toutefois un intervalle de confiance des y de l'ordre de 10^{-7}. Nous la programmons en Reduce interfacé à un autre langage symbolique : Macsyma, en donnant des exemples. Nous en dégageons quelques propriétés. Un article dans la revue ACM Sigsam Bulletin est en cours de publication.

Dans un dernier chapitre nous présentons des applications d'une part en Automatique pour le calcul du stathme euclidien dans les anneaux de fractions rationnelles propres et stables (pôles dans une région donnée du champ complexe, dite de stabilité) et d'autre part en Biochimie pour l'étude de problèmes de stabilité de modèles de cinétique de réactions enzymatiques et chimiques.

La programmation est en Reduce, ce qui nous permet de déterminer de façon exacte (précision machine très grande) avec les deux premières méthodes le nombre de racines sur le cercle unité, ce qui peut poser quelque problème en numérique (une parade consiste à faire justement une transformation circulaire, comme dans l'algorithme de C.W. Schelin) ; évidemment les méthodes sans paramètre sont plus performantes que celle tout à fait naïve de calcul de racines à une précision algorithmique près et de la comparaison en module (surtout pour des polynômes de degré élevé). De plus, le programme de la deuxième méthode doit faire partie du logiciel "Autored" d'aide à l'étude des systèmes linéaires en Automatique, écrit en Reduce.

PARTIE A

TRANSFORMATION DE SCHUR

ALGORITHME DE SCHUR-COHN

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET RAPPELS

NOTATIONS ET RAPPELS DE RESULTATS FONDAMENTAUX

Soit $p \in \mathbf{C}[X]$ de degré n ($n>1$) écrit sous la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

1 - Transformation de Schur d'un polynôme de C[X].

Définition:

On appelle itérés de Schur les polynômes en la variable z, notés p_k tels que:

$$p_{k+1}(z) = \overline{a_0^{(k)}}\, p_k(z) - a_{n-k}^{(k)}\, p_k^*(z) \qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

où $p_0 = p$ et $p_k(z) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i^{(k)} z^i$

$p_k^*(z) = z^{n-k}\, \overline{p_k}(1/\bar{z})$ est dit polynôme réciproque de p_k.

$a_{n-k}^{(k)}$ peut être éventuellement nul.

On appelle ampleur de p_k, le nombre $n-k$, noté $A(p_k)$ et constantes de Schur les nombres $a_0^{(k)}$, notés γ_k.

Remarque:

La transformation de Schur est le passage de p_k à p_{k+1} par la formule récurrente des itérés de Schur.

Propriétés des coefficients de p_k:

i) $$a_i^{(k+1)} = \overline{a_0^{(k)}}\, a_i^{(k)} - a_{n-k}^{(k)}\, \overline{a_{n-k-i}^{(k)}} \qquad i=0,1,\ldots,n-(k+1)$$

ii) $a_0^{(k+1)} = \left|a_0^{(k)}\right|^2 - \left|a_{n-k}^{(k)}\right|^2 \qquad k=0,1\ldots,n-1$

iii) $a_0^{(k)}$ est réel , $k=1,2,\ldots,n$

Propriétés de p_k^* :

$$p_k^* = \sum_{i=0}^{n-k} \overline{a_{n-k-i}^{(k)}}\, z^i$$

$a_0^{(k)}$ peut être éventuellement nul.

Pour tout z sur le cercle unité, $\left|p_k^*(z)\right| = \left|p_k(z)\right|$.

Soient $z_j^{(k)}$, $j=1,\ldots,A(p_k)$ les zéros (éventuellement nul ou infini) de p_k, p_k^* a alors les zéros suivants: $1/\overline{z_j^{(k)}}$, $j=1,\ldots,A(p_k)$. Si p a une racine nulle d'ordre m, alors p^* sera de degré n-m.

Propriétés des itérés de Schur:

i) $d^\circ(p_k) \leq A(p_k)$, $A(p) = d^\circ p$.

ii) La différence $A(p_k) - d^\circ(p_k)$ est l'ordre de multiplicité du zéro infini de p_k c'est-à-dire tel que :

$$a_{n-k}^{(k)} = a_{n-k-1}^{(k)} = \ldots = a_{n-k-j_0+1}^{(k)} = 0 \quad \text{et} \quad a_{n-k-j_0}^{(k)} \neq 0$$

où $j_0 = n-(d^\circ(p_k)+k)$.

iii) si $A(p_k) > d^\circ(p_k)$ alors

1) $p_{k+1} = \overline{a_0^{(k)}}\, p_k$, de plus si $\gamma_k \neq 0$ alors $d^\circ(p_{k+1}) = d^\circ(p_k)$

2) $p_{k+2} = \overline{a_0^{(k)}}\left(\left|a_0^{(k)}\right|^2 p_k - a_0^{(k)}\, a_{n-(k+1)}^{(k)}\, p_k^*/z\right)$

d'où

1) $\gamma_{k+1} = \gamma_k^2$

2) $\gamma_{k+2} = \gamma_k^4 - \left|a_{n-(k+1)}^{(k)}\right|^2 \gamma_k^2$

remarque: p_k^*/z est un polynôme ($a_{n-k}^{(k)} = 0$).

iv) L'ampleur de p_k baisse d'une unité pour chaque k.

remarque: 1) si le degré baisse de plus une unité il n'existe pas nécessairement une constante de Schur nulle, d'indice plus élevé:
un exemple: $p(z) = z^4+4$

$p_1(z) = 3$

$p_2(z) = 9$

$p_3(z) = 81$

$p_4(z) = 6561$

2) Ainsi si $A(p_k) > d°(p_k)$ alors nous n'avons pas nécessairement une constante de Schur nulle.

v) soit $q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $q = ap$ avec $a \in \mathbf{R}^*$

nous avons $q_k = a^{2^k} p_k \quad k = 0,1,\ldots,n$

d'où $\gamma_k(q) = a^{2^k} \gamma_k(p) \quad k=1,2,\ldots,n$

vi) si $a_0^{(k)} = 0$ on a $p_{k+1} = a_{n-k}^{(k)} p_k^*$

soit $p_{k+1} = a_{n-k}^{(k)} \sum_{i=0}^{n-(k+1)} \overline{a_{n-k-i}^{(k)}} x^i$

on retrouve bien la propriété i)

vii) p_n est constant et égal à γ_n.

remarque: il peut exister des itérés de Schur p_k constants non nuls avec $k < n$ (cf l'exemple ci-dessus), donc égaux à γ_k .

viii) Si $\gamma_1,\ldots,\gamma_k \neq 0$, $k < n$ et p_k constant ($= \gamma_k$) alors $\gamma_{k+1} > 0$. En effet p_k est constant non nul, $d°(p_k) = 0$ d'où d'après la propriété ii) l'ordre de multiplicité du zéro infini de p_k est égal à $n-k > 0$ donc $a_{n-k}^{(k)} = 0$ soit d'après la propriété iii) $\gamma_{k+1} = \gamma_k^2 > 0$.

2 - Nombre de zéros dans le disque unité des itérés de Schur.

Lemme de Cohn:

Si p_k a n_k zéros dans le disque unité ouvert et si $\gamma_{k+1} \neq 0$ alors p_{k+1} a n_{k+1} zéros dans le disque unité ouvert tels que:

$$n_{k+1} = 1/2 \left(n-k - (n-k-2n_k)\,sg\ \gamma_{k+1} \right)$$

où sg est la fonction signe;

et de plus, p_{k+1} a les mêmes zéros sur le cercle unité que p_k.

Cas particuliers

1) Si $\gamma_k \neq 0$, $k=1,2,\ldots,n-1$ et $\gamma_n = 0$ alors le zéros de p_{n-1} est sur le cercle unité. De plus, si $p \in \mathbb{R}[X]$ alors 1 ou -1 sont racines de p_{n-1}.

2) Théorème d'Eneström-Kakeya.

Si $p \in \mathbb{R}[X]$ et si on a $0 < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_0$ alors

pour tout $k = 1,2,\ldots,n$ on a $0 < a_{n-k}^{(k)} < a_{n-k-1}^{(k)} < \ldots < a_0^{(k)}$ et ainsi p ne s'annule pas dans le disque unité.

Remarque:

Les itérés de Schur peuvent se mettre sous forme matricielle en mémorisant leurs coefficients, et en utilisant une suite de déterminants on retrouve les résultats de Cohn par le critère de Schur-Cohn.

Etude du cas $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \neq 0$ et $p_{k+1} = 0$

M. Marden a étudié une classe de polynômes qui sous certaines conditions est invariante par transformation de Schur.

Polynômes ayant des racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité.

Ce sont des polynômes de la forme $p(z) = r(z)q(z)$

avec $r(z) = \prod_{j=1}^{s} (z - r_j e^{i\theta_j})(z - r_j^{-1} e^{i\theta_j}) \prod_{l=1}^{c} (z - e^{i\theta_l})$

où $r_j^{\pm 1} e^{i\theta_j}$ sont ses racines symétriques par rapport au cercle unité $j=1,2,\ldots,s$

et $e^{i\theta_l}$ sont ses racines unité $l=1,2,\ldots,c$

le degré de q est égal à $n-2s-c$.

Propriétés:

i) Le pgcd de p et p^* est égal à r.

ii) Si p et p^* ont un facteur commun r de degré $n-k_0$ alors:

1) c'est un facteur commun à tous les p_k , $k=1,2,\ldots,k_0$ et $p_{k_0+1} = 0$

2) $\gamma_k(p) = \gamma_k(q)$ $k=1,2,\ldots,k_0$

3) r et p_{k_0} sont égaux à un coefficient multiplicatif près.

iii) Inversement s'il existe k_0 tel que $p_{k_0+1} = 0$ alors p_{k_0} est un facteur commun à tous les p_k et p_k^*, $k=0,1,\ldots,k_0-1$, sous l'hypothèse $\gamma_1 \neq 0,\ldots,\gamma_{k_0} \neq 0$.

iv) Le degré de r est égal au nombre de ses racines avec o.d.m. sur le cercle unité plus deux fois le nombre de ses racines avec o.d.m. dans le disque unité ouvert.

Théorème de base .

Soit p un polynôme de $C[X]$ de degré n ($n>1$) et soient les constantes de Schur associés à p, γ_k, $k=1,2,\ldots,n$.

Notation: $\delta_k = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k$, $k=1,2,\ldots,n$.

D'après M. Marden nous avons:

S'il existe $k_0 < n$ tel que $\delta_{k_0} \neq 0$ et $p_{k_0+1} = 0$

alors p a :

* $(n-k_0)$ zéros sur ou symétriques par rapport au cercle unité, les mêmes que p_{k_0}.

S'il existe k_1 nombres δ_k négatifs de $k=1,\ldots,k_0$

alors p a :

* k_1 zéros supplémentaires dans le disque unité ouvert,
* (k_0-k_1) zéros supplémentaires à l'extérieur du disque unité.

D'après P. Henrici nous avons:

Si tous les nombres γ_k , $k=1,2,\ldots,n$ sont non nuls alors:
p n'a pas de racines sur le cercle unité.
i) considérant les indices k tels que $\gamma_k < 0$ et les notant k_j, $j=1,2,\ldots m$ où $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$,le nombre $N_D(p)$ de racines de p dans le disque unité (en comptant leurs ordres de multiplicité) est donné par la formule suivante:

$$N_D(p) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}(n+1-k_j)$$

ii) si tous les nombres γ_k sont strictement positifs alors toutes les racines de p sont à l'extérieur du disque unité et réciproquement.

CHAPITRE 2

NOMBRE DE RACINES D'UN POLYNOME DE $\mathbb{R}[X]$ DANS LE DISQUE UNITE PAR TRANSFORMATION CIRCULAIRE

INTRODUCTION

L'algorithme de Schur-Cohn fournit des résultats partiels concernant le nombre de racines d'un polynôme dans le disque unité du champ complexe étudié par P. Henrici (1) .

Nous donnons ici un algorithme de calcul du nombre exact de racines en utilisant les résultats de P. Henrici et particulièrement adapté à l' utilisation d'un système de calcul formel (par exemple Reduce).

Ce type de résultats est utile en particulier pour le calcul de certains invariants intervenant dans l'étude structurelle de systèmes linéaires de l'automatique par L Pernebo (4), A.S. Morse(5), J.M.Dion(6), Commault (7).

Dans une première partie, nous rappelons les résultats classiques et indiquons comment il est possible de les adapter au cas d'un polynôme quelconque .Dans la seconde, nous présentons notre algorithme et quelques exemples. Une étude de la complexité ainsi que la mise au point d'autres algorithmes sont en cours de réalisation .

I

DESCRIPTION DE LA METHODE

1 - Traitement de polynômes ne rentrant pas dans les hypothèses du théorème de base: cas singulier.

Nous allons montrer qu'il est toujours possible de calculer le nombre de racines d'un polynôme, noté p, de $\mathbb{R}[X]$ à partir de ses coefficients dans le disque unité en utilisant de façon indirecte le théorème de base (1).

1.1 Transformation circulaire.

Nous transformons p en un polynôme, noté p_c, choisi de telle sorte que:

i) le théorème de base (1) lui soit applicable,

ii) son nombre de racines soit le même que celui de p.

Par conséquence, il s'agit de trouver un "bon" nombre réel positif c.

Définition:

$$p_c : x \to p(cx)$$

C'est parmi cette famille de polynômes que nous allons trouver ce nombre, noté $\tilde{c}$ et un intervalle, noté $I_{\tilde{c}}$ tel que pour tout polynôme p_c, $c \in I_{\tilde{c}}$, les hypothèses du théorème de base (1) soient vérifiées, c'est-à-dire les constantes de Schur de p_c, notées $\gamma_k(c)$ soient non nulles.

1.2 Etude des transformations notées $\Gamma_k : c \to \gamma_k(c)$.

Propriétés:

i) Ce sont des polynômes en la variable c, à coefficients réels.

ii) Leur degré est $2^k n$, de coefficient de tête:

. $-a_n^2$ pour k=1,

. $a_n^{2^k}$ pour k=2,...,n.

iii) Tous les coefficients d'indice impair sont nuls.

Démonstrations:

i) et ii) .

Nous allons prouver, de façon plus générale, que pour tout i de 0 à n-k, le i-ème coefficient $a_i^{(k)}$ du k-ème itéré de Schur de p_c, noté $(p_c)_k$, est un polynôme de R[X] en la variable c de degré au plus $2^k n - i$:

Par récurrence sur l'indice k nous avons :

pour k = 1 :

$$(p_c)_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0 a_i c^i - a_n a_{n-i} c^{2n-i}) x^i$$

$$\text{soit } a_i^{(1)}(c) = a_0 a_i c^i - a_n a_{n-i} c^{2n-i} \text{ de } i=0,\ldots,n-1.$$

donc $a_i^{(1)}$ est un polynôme de R[X] en c ,puisque n > i pour tout i de 0 à n-1, et son degré est au plus 2n-i.

supposons la propriété vraie pour k et étudions-la au rang suivant :

Nous avons :

$$(p_c)_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-(k+1)} (a_0^{(k)}(c)\, a_i^{(k)}(c) - a_{n-k}^{(k)}(c)\, a_{n-k-i}^{(k)}(c)) x^i$$

$$\text{soit } a_i^{(k+1)}(c) = a_0^{(k)}(c)\, a_i^{(k)}(c) - a_{n-k}^{(k)}(c)\, a_{n-k-i}^{(k)}(c) \quad i=0,\ldots,n-(k+1).$$

par hypothèse de récurrence nous avons :

$$d^\circ(a_0^{(k)} a_i^{(k)}) \leq 2^k n + 2^k n - i$$

$$\text{soit } d^\circ(a_0^{(k)} a_i^{(k)}) \leq 2^{k+1} n - i$$

$$\text{et } d^\circ(a_{n-k}^{(k)} a_{n-k-i}^{(k)}) \leq 2^k n - (n-k) + 2^k n - (n-k-i)$$

$$\text{d'où } d^\circ(a_{n-k}^{(k)} a_{n-k-i}^{(k)}) \leq 2^{k+1} n - 2(n-k) + i$$

or $2^{(k+1)}n - i > 2^{(k+1)}n - 2(n-k) + i$, puisque $n-k>i$ pour tout $i=0,\ldots,n-(k+1)$.

D'où le degré de $a_i^{(k+1)}$ est au plus $2^{(k+1)}n - i$. Or $a_0^{(k)} = \Gamma_k$, donc nous venons de démontrer i) et que leur degré est au plus $2^k n$. Montrons qu'ils sont exactement de degré $2^k n$ par l'étude du coefficient de rang $2^k n$.

pour k=1 : $\gamma_1(c) = a_0^2 - a_n^2 c^{2n}$

donc puisque $a_n \neq 0$, γ_1 est de degré 2n de coefficient de tête $-a_n^2$.

Par récurrence sur k nous avons :

pour k=2 , d'après la formule suivante :

$$\gamma_2 = \gamma_1^2 - a_{n-1}^{(1)2}$$

puisque $d^\circ\gamma_1 > d^\circ(a_{n-1}^{(1)})$ et $a_n \neq 0$, γ_2 est de degré 4n de coefficient de tête a_n^4 .

supposons la propriété vraie pour k et étudions γ_{k+1} :

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k^2 - a_{n-k}^{(k)2}$$

puisque $d^\circ\gamma_k > d^\circ(a_{n-k}^{(k)})$ et $a_n \neq 0$, γ_{k+1} est de degré $2^k n$ de coefficient de tête $a_n^{2^{k+1}}$. Ainsi nous venons de démontrer la propriété ii) .

iii) .

Montrons que tous les coefficients des puissances impaires de $\gamma_k(c)$ sont nuls par la propriété équivalente suivante :

pour tout $c \in \mathbf{R}$ $\quad \gamma_k(-c) = \gamma_k(c)$

Pour cela , nous allons démontrer l'égalité suivante :

pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $c \in \mathbf{R}$, $(p_{-c})_k(x) = (p_c)_k(-x)$.

Par récurrence sur k nous avons :

pour k=1 :

$$(p_c)_1(x) = p_c(0)\, p_c(x) - (p_c)^*(0)\, (p_c^*)\,(x)$$

soit $(p_c)_1(x) = p(0)\ p(cx) - c^{2n} p^*(0)\ p^*(x/c)$

en prenant -c nous obtenons :

$$(p_{-c})_1(x) = p(0)\ p(c(-x)) - c^{2n} p^*(0)\ p^*(-x/c)$$

soit $(p_{-c})_1(x) = p_c(0)\ p_c(-x) - p_c^*(0)\ p_c^*(-x)$

d'où $(p_{-c})_1(x) = (p_c)_1(x)$.

supposons la propriété vraie pour k et étudions $(p_{-c})_{k+1}$:

Nous avons par définition des itérés de Schur :

$$(p_{-c})_{k+1}(x) = (p_{-c})_k(0)\ (p_{-c})_k(x) - ((p_{-c})_k)^*(0)\ ((p_{-c})_k)^*(x)$$

soit par hypothèse de récurrence :

$$(p_{-c})_{k+1}(x) = (p_c)_k(0)\ (p_c)_k(-x) - ((p_c)_k)^*(0)\ ((p_c)_k)^*(-x)$$

d'où $(p_{-c})_{k+1}(x) = (p_c)_{k+1}(-x)$.

Il suffit de prendre x = 0 dans la formule démontrée ci-dessus pour prouver la propriété de symétrie des polynômes Γ_k énoncée au début de la démonstration de la propriété iii).

1.3 Choix du nombre $\tilde{c}$ de la méthode.

C'est au voisinage de 1 des Γ_k que l'on veut trouver un nombre $\tilde{c}$ tel que tous les $\gamma_k(\tilde{c})$ soient non nuls .

A cet effet nous regardons les positions des racines pour chaque Γ_k représentant les constantes de Schur de p_c au voisinage de 1 .

Nous rappelons que nous sommes dans le cas où pour le polynôme considéré p il existe un indice $k_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que la constante de Schur de p γ_{k_0} soit nulle , c'est-à-dire $\gamma_{k_0}(1)=0$.

Ainsi nous préférons étudier la localisation des racines au voisinage de 0 des polynômes suivants :

$$\zeta_k(x) = \delta_k(x+1)$$

où $$\delta_k(x) = \gamma_k(x)/(x-1)^{m_k}$$

m_k étant l'ordre de multiplicité de la racine éventuelle 1 de Γ_k .

Ce retrait total de la racine 1 des Γ_k et cette translation du point 1 en 0 n'affectent en rien le nombre $\tilde{c}$ à trouver et permettent l'utilisation d'une minoration des modules des racines d'un polynôme :

Soit le polynôme $R_d(x) = \sum_{i=0}^{d} r_i x^i$, $r_0 \neq 0$, $d > 0$

Soient $z_j \in \mathbf{C}$, $j=1,2,\ldots,d$ les racines de R_d

Nous rappelons le résultat suivant (3) :

$$\min_{j=1}^{d}\{|z_j|\} > \frac{|r_0|}{|r_0| + \max_{i=1}^{d}\{|r_i|\}}$$

Remarque: Cette minoration est valable si 0 n'est pas racine du polynôme . Dans le cas contraire nous ferons la division .

Revenons à notre méthode .

Le choix des polynômes ζ_k plutôt que les Γ_k réside dans le fait que nous avons un indice $k_0 \in \{1,2,\ldots n\}$ pour lequel $\gamma_{k_0}(1)=0$ et dès lors si nous avions uniquement translaté nous aurions 0 comme racine et donc nous devrions appliquer la remarque précédente c'est-à-dire tomber sur les polynômes ζ_k . Nous rappelons aussi que l'étude des racines de Γ_k se fait au voisinage de 1 et plus précisemment dans un intervalle noté $I_{\tilde{c}} =]1,\tilde{c}[$ avec $\tilde{c} > 1$ et à chercher . Ainsi l'utilisation de la minoration ne peut se faire qu'en translatant à l'origine et puisque 1 n'est pas dans l'intervalle $I_{\tilde{c}}$ nous sommes sûrs que 0 ne sera pas racine à considérer , une raison supplémentaire pour l'enlever .

Soient les polynômes ζ_k de degré au plus $2^k n - m_k$ noté l_k

$$\zeta_k(x) = \sum_{i=0}^{l_k} r_i^{(k)} x^i$$

Notons

$$c_0^{(k)} = \frac{\left| r_0^{(k)} \right|}{\left| r_0^{(k)} \right| + \operatorname{Max}_{i=1}^{l_k} \{ \left| r_i^{(k)} \right| \}}$$

Nous avons pour chaque $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ en écrivant $z_j^{(k)}$ $j=1,2,\ldots,l_k$ les racines de ζ_k d'après la minoration des modules de racines de polynôme :

$$\operatorname{Min}_{j=1}^{l_k} \{ \left| z_j^{(k)} \right| \} > c_0^{(k)}$$

Ainsi pour chaque $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ nous sommes sûrs que ζ_k ne s'annulera pas sur $[0,c_0^{(k)}]$ et pour tout k de 1 à n en prenant :

$$\tilde{c}_0 = \operatorname{Min}_{k=1}^{n} \{ c_0^{(k)} \}$$

Aucun des polynômes ζ_k s'annulera sur $[0,\tilde{c}_0[$.

Par translation de 1 nous aurons la certitude que tous les polynômes Γ_k ne s'annuleront pas sur $I_{\tilde{c}}$ égal à $]1,\tilde{c}[$ en prenant :

$$\tilde{c} = 1 + \tilde{c}_0$$

Propriétés des polynômes p_c avec $c \in I_{\tilde{c}}$.

i) . pour tout $c \in I_{\tilde{c}}$, $\gamma_k(c) \neq 0$, pour tout $k \in \{1,2,\ldots,n\}$

ii) . pour tout $c \in I_{\tilde{c}}$, p_c a le même nombre de racines que p dans le disque unité .

Démonstrations:

i) voir ci-dessus .

ii) Par l'absurde , supposons qu'il existe un nombre $c_0 \in I_{\tilde{c}}$ tel que p_{c_0} n'est pas le même nombre de racines que p dans le disque unité .

Le nombre de racines de p_{c_0} dans le disque unité noté D(0,1) est égal au nombre de racines de p dans le disque $D(0,c_0)$:
En effet , le nombre de racines de p_{c_0} dans D(0,1) est inférieur ou égal à celui de p dans $D(0,c_0)$:

soit w^0 tel que $p_{c_0}(w^0) = 0$ avec $|w^0| < 1$

d'où $p(c_0 w^0) = 0$ par définition de p_c

donc $c_0 w^0$ est racine de p .

puisque $|w^0| < 1$, $|c_0 w^0| < c_0$.

Le nombre de racines de p dans $D(0,c_0)$ est inférieur ou égal à celui de p_{c_0} dans D(0,1) :

soit x tel que $p(x) = 0$ avec $|x| < c_0$
si on écrit x sous la forme $ce^{i\theta}$ avec $c < c_0$

nous avons $p(ce^{i\theta}) = p_{c_0}\left(\frac{c}{c_0} e^{i\theta}\right)$

donc x/c_0 est racine de p_{c_0} dans D(0,1) .

Donc d'après l'hypothèse le nombre de racines de p_{c_0} ne peut être que strictement supérieur à celui de p dans D(0,1) :
c'est-à-dire il existe une racine x_j de p telle que $1 < |x_j| < c_0$

si on écrit x_j sous la forme $c_j e^{i\theta_j}$ avec $|x_j| = c_j$

$$p(c_j e^{i\theta_j}) = p_{c_j}(e^{i\theta_j})$$

donc il existe c_j tel que $\begin{cases} 1 < c_j < \tilde{c} \\ p_{c_j} \text{ s'annule sur le cercle unité .} \end{cases}$

D'où d'après les propriétés des constantes de Schur il existe un indice $k_0 \in \{1,2,\ldots n\}$ tel que $\gamma_{k_0}(c_j) = 0$. Ce qui est impossible d'après i) .

Remarques :

Le nombre de racines de p est le même dans D(0,1) que dans D(0,c) pour tout $c \in I_{\tilde{c}}$. Ceci résulte de la propriété ii) et de l'élément de démonstration de ii) , mais nous pouvons le voir autrement :

Considérons la borne supérieure des c donnée par le rayon d'agrandissement du disque défini par la non-rencontre d'une nouvelle racine. Si nous avions fait différemment il existerait un rayon c^0 tel que sur le cercle $C(0,c^0)$ la racine supplémentaire soit , mais alors nous trouverions un indice $k_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $\gamma_{k_0}(c^0) = 0$, donc $\tilde{c} < c^0$.

CONCLUSION

Nous pouvons calculer le nombre de racines sur le cercle unité en utilisant cette méthode . En effet en prenant $\bar{c} = 1 - \tilde{c}_0$, $p_{\bar{c}}$ donne le nombre de racines à l'intérieur du disque unité et par différence des deux nombres $N_D(p_{\tilde{c}})$ et $N_D(p_{\bar{c}})$ du théorème de base (1) nous obtenons le nombre voulu .

Il est possible aussi d'utiliser cette méthode de calcul du nombre de racines dans le disque unité afin de trouver le nombre de racines dans toute région donnée du champ complexe conformément équivalente par homographie , par exemple le demi-plan ouvert à gauche (cf. appendice) utilisé comme région de référence de stabilité pour des matrices de transfert de systèmes linéaires de l'automatique (4), (5), (6) et (7).

APPENDICE

I - Algorithme de Schur-Cohn .

Il s'agit de calculer les constantes de Schur-Cohn, notées γ_k .

L'algorithme itératif est le suivant :

A chaque pas k de 1 à n (degré de p) :

. Calcul du k-ème itéré de Schur p_k par la formule récurrente en fonction de p_{k-1} et p^*_{k-1} ,

. Calcul de la k-ème constante de Schur γ_k égale à $p_k(0)$.

II - Etude des trasformations homographiques d'espace image le disque unité ouvert :

0 - position du problème.

Nous voulons calculer le nombre de racines noté $N_R(p)$ dans un région R donnée du champ complexe conformément équivalente par homographie au disque unité ouvert noté D .

Notons la transformation homographique du plan des z au plan des w par :

$$w = \frac{a_1 z + a_0}{b_1 z + b_0} \quad , \qquad a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0$$

0.1 - cas $b_1 \neq 0$.

remarque : $-b_0/b_1 \notin R$, sinon $w=f(-b_0/b_1) = \infty \notin D$.

soit p le polynôme considéré de degré $n \geq 1$ sous la forme suivante :

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$$

ou encore $$p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{-b_0 w + a_0}{b_1 w - a_1}\right)^i$$

soit $$p(z) = \frac{q(w)}{(b_1 w - a_1)^n}$$

avec $$q(w) = \sum_{i=0}^{n} p_i (-b_0 w + a_0)^i (b_1 w - a_1)^{n-i}$$

i) q est un polynôme de degré au plus n .

ii) $N_R(p) = N_D(q)$.

démonstration de ii) :

1) $N_R(p) \leq N_D(q)$.

soit z_0 racine de p dans R
prenons $w_0 = f(z_0)$ et montrons que $q(w_0) = 0$:
nous avons :

$$z_0 = -\frac{-b_0 w_0 + a_0}{b_1 w_0 - a_1} \quad ;$$

puisque z_0 est racine de p , $z_0 \neq \infty$, donc $w_0 \neq a_1/b_1$
d'où

$$q(w_0) = (b_1 w_0 - a_1)^n p(z_0)$$

soit $$q(w_0) = 0$$

d'où w_0 est racine de q dans D .

2) $N_D(q) \leq N_R(p)$.

soit w_0 racine de q dans D
considérons $z_0 = f^{-1}(w_0)$ et montrons que $p(z_0) = 0$
puisque w_0 est racine de q , $w_0 \neq a_1/b_1$ ($q(a_1/b_1) \neq 0$)
or nous avons :

$$p(z_0) = \frac{q(w_0)}{(b_1 w_0 - a_1)^n}$$

d'où $p(z_0) = 0$
donc z_0 est racine de p dans R .

0.2 - cas $b_1 = 0$.

remarque : cette transformation homographique s'écrit alors :

$w = (a_1 z + a_0)/b_0$ avec a_1 et b_0 non nuls , soit pour simplifier
$w = c_1 z + c_0$, $c_1 \neq 0$.

nous avons :

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i c_1^{-i} (w - c_0)^i$$

$$p(z) = q(w)$$

avec $$q(w) = \sum_{i=0}^{n} p_i c_1^{-i} (w - c_0)^i$$

i) q est un polynôme de degré au plus n .
ii) $N_R(p) = N_D(q)$.

remarque : dans ce cas le polynôme q est le même que pour le cas général à un coefficient près qui ne change donc en rien l'étude de la localisation des racines de q .

1) - Cas particulier de transformation homographique .

La fonction homographique suivante :

$$w = \frac{z + 1}{z - 1}$$

transforme le demi-plan à gauche ouvert en le disque unité ouvert .

II

ALGORITHME

Entrées: un polynôme p de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n ($n > 1$) .

Sorties: son nombre de racines noté nrdup , en comptant leurs ordres de multiplicité dans le disque unité .

Algorithme:

1 Normalisation de p en p_u.

1.1 Calcul du nombre de racines rationnelles éventuelles de p dans D(0,1) par factorisation de p (avec leurs ordres de multiplicité)

1.2 Transformation de p (sans les racines rationnelles) en polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de coefficients premiers entre eux noté p_u

2 Calcul du nombre de racines de p_u dans D(0,1) noté npu.

Si $p_u = 1$ alors npu = 0 sinon :

Pour $k=1,\ldots,d°p_u$ faire :

- Calcul des γ_k par l'algorithme de Schur-Cohn
- Test suivant :

2.1 si $\gamma_k \neq 0$ alors calcul itératif du nombre de racines dans D(0,1) d'après le théorème de base

2.2 sinon

2.2.1 Calcul de $\tilde{c}$

-transformation de p_u en p_c

-pour $k=1,\ldots,d°p_u$ faire :

- calcul des $\gamma_k(c)$ par algorithme de Schur-Cohn
- ordre de multiplicité de la racine 1 de $\gamma_k(c)$
- transformation de γ_k en ζ_k

- calcul de c_0^k
- calcul de $\tilde{c}_0$ à partir de c_0^{k-1}

2.2.2 Calcul du nombre de racines de $p_{\tilde{c}}$ dans D(0,1)

pour k=1,...,d°p_u faire :

- calcul des $\gamma_k(\tilde{c})$ par algorithme de Schur-Cohn
- calcul itératif du nombre de racines dans D(0,1) d'après le théorème de base , noté npu

3 Nombre de racines de p dans D(0,1) noté nrdup.

-EXEMPLES-

I Etude d'un cas classique.

$$p := (2*(3*x^6 + 13*x^4 + 16*x^2 + 4))/3$$

son polynôme normalisé (au sens de l'algorithme) est:

$$pu = 3*x^6 + 13*x^4 + 16*x^2 + 4$$

les constantes de Schur de pu sont:

$\gamma_1 = 7$

$\gamma_2 = 49$

$\gamma_3 = 1617$

$\gamma_4 = 2614689$

$\gamma_5 = (-284764105589 04)$

$\gamma_6 = 8109059583192592216536812 16$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$(2*(3*x^6 + 13*x^4 + 16*x^2 + 4))/3$ est égal à :

2 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

2 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

II Etude du cas général.

1) Polynôme avec facteurs autoréciproques.

$$p := (2*(x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1))/3$$

son polynôme normalisé est:

$$pu = x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1$$

le pgcd de pu et son polynôme réciproque est:

$$ru = x^2 + 1$$

le polynôme réciproque de la dérivée de ru est constant:

rdru=2

le polynôme quotient de pu et ru est:

$$qu = x^3 - 9*x + 1$$

le calcul des constantes de Schur de qu donne:

$$\gamma_1 = 0$$

le transformé de qu est:

$$qu_c = c*x^3 - c*x + 1$$

le calcul des constantes de Schur de qu_c et des nombres $c_0^{(k)}$ donne:

$$\gamma_1(c) = -c^6 + 1$$

$$\xi_1(c) = -c^5 - 6*c^4 - 15*c^3 - 20*c^2 - 15*c - 6$$

$$c_0^{(1)} = 3/13$$

$$\gamma_2(c) = c^{12} - 81*c^8 - 2*c^6 + 1$$

```
       12        11        10         9         8         7         6         5
ξ (c)=c   + 12*c   + 66*c   + 220*c  + 414*c  + 144*c  - 1346*c  - 3756*c
 2

              4         3         2
       - 5205*c  - 4356*c  - 2232*c  - 648*c - 81

 (2)
c   =27/1762
 0

       24        20        18          16        14          12          10
γ (c)=c   - 162*c   - 4*c   + 6561*c   + 243*c   - 1452*c   - 6561*c   +
 3

            6       2
      1454*c  - 81*c  + 1

       23        22        21          20          19          18
ξ (c)=c   + 24*c   + 276*c   + 2024*c   + 10464*c   + 39264*c   + 103812*
 3

       17          16          15          14          13
      c   + 161352*c   - 43470*c   - 1102432*c   - 3542541*c   - 6418806*

       12          11          10          9          8
      c   - 5815559*c   + 3888804*c   + 24537090*c  + 49062780*c  +

              7           6           5          4          3
      64309113*c  + 61615080*c  + 44333433*c  + 23846886*c  + 9323019*c  +

             2
      2499012*c  + 408969*c + 30618

 (3)
c   =1134/2382953
 0


le nombre c_  est:
          0


c_ =1134/2382953
 0

le polynôme qu_ s'écrit:
             c


                                  3
qu_=(135122062613721762 59*x  - 12172568245499520 1539*x + 135315152076430 37177)/
  c

    1353151520764303 7177
```

ses constantes de Schur sont:

$\gamma_1(\bar{c}) = 522185764809342652647967723240894248/$

$183101903814674787527897198089004129329$

$\gamma_2(\bar{c}) = (-$

$27053092938354568577440792201487234195259210420159290940298693157948058713996 97)/$
$33526307180558417508652294550553683010783970130668320820339175321613357990241$

$\gamma_3(\bar{c}) = (-$

$16273633863843890722053019233077760310145415557038647437853181931220459520341283$
$18315948305259603492991436997797445432649095379263763273891145284127481327 2)/$
$11240132731651629062598460999413750668590110939963515998094205581782723713815244$
$90237852547974552191750443235415755397171434359063072020108914478651238081$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$(2*(x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1))/3$ est égal à :

3 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

1 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

2 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

2) Polynôme autoréciproque.

$p := (4*x^4 + 17*x^2 + 4)/6$

son polynôme normalisé est:

$pu = 4*x^4 + 17*x^2 + 4$

le pgcd de pu et son réciproque est:

$$ru = 4*x^4 + 17*x^2 + 4$$

le polynôme réciproque de la dérivée de ru est:

$$rdru = 2*(17*x^2 + 8)$$

le transformé de rdru unitaire est:

$$rdru_c = (17*c^2*x^2 + 8)/17$$

le calcul des constantes de Schur de $rdru_c$ et des nombres $c_0^{(k)}$ donne:

$$\gamma_1(c) = (-289*c^4 + 64)/289$$

$$\xi_1(c) = (-289*c^4 - 1156*c^3 - 1734*c^2 - 1156*c - 225)/289$$

$$c_0^{(1)} = 75/653$$

$$\gamma_2(c) = (83521*c^8 - 36992*c^4 + 4096)/83521$$

$$\xi_2(c) = (83521*c^8 + 668168*c^7 + 2338588*c^6 + 4677176*c^5 + 5809478*c^4 + 4529208*c^3 + 2116636*c^2 + 520200*c + 50625)/83521$$

$$c_0^{(2)} = 50625/5860103$$

le nombre $\bar{c}_0$ est:

$$\bar{c}_0 = 50625/5860103$$

le polynôme $rdru_{\bar{c}}$ s'écrit:

$$rdru_c = (8*(143437647188057*x^2 + 68681614341218))/34340807170609$$

ses constantes de Schur sont:

$$\gamma_1(\bar{c}) = (-10148604468691017056633415504 00)/11792910371289505120334308 81$$

$$\gamma_2(\bar{c}) = 10299417266193528060130568381654805271399888764870757401600 00/$$

$$139072735025267573513179959919831119644423976780443616 1$$

le polynôme quotient de pu et ru est constant:

qu=1

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$(4*x^4 + 17*x^2 + 4)/6$ est égal à :

2 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

2 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

2 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

III Exemples divers.

1) Normalisation (racines rationnelles).

```
                3       2
p := (16*x  - 24*x  - 15*x - 2)/24

N (p) = 2
 D

temps = 407 msec.
```

```
                5    4       3      2
p := (2*x  + x  - 13*x  - 2*x  + 20*x - 8)/3

N (p) = 2
 D

temps = 794 msec.
```

2) Cas régulier (constantes de Schur toutes non nulles).

```
                6       4       2
p := (2*(3*x  + 13*x  + 16*x  + 4))/3

N (p) = 2
 D

temps = 997 msec.
```

```
                 9            8            7            6
p := (1000000*x  - 1099999*x  + 1120000*x  - 1231999*x  + 2083999*

 5            4            3            2
x  - 2292400*x  + 1075647*x  - 1183212*x  + 1079105*x - 1187701)/

1000000

N (p) = 4
 D

temps = 8687 msec.
```

3) Cas singulier (constante de Schur nulle).

3.1) Polynômes sans facteurs autoréciproques.

```
               3
p := (2*(x  - 9*x + 1))/3
```

```
N (p) = 1
 D

temps = 7182 msec.


          3     2
p := (2*(x  - x  + x + 2))/3

N (p) = 1
 D

temps = 1805 msec.
```

3.2) Polynômes avec facteurs autoréciproques.

```
          5      3     2
p := (2*(x  - 8*x  + x  - 9*x + 1))/3

N (p) = 3
 D

temps = 7837 msec.
```

3.3) Polynômes autoréciproques.

```
          4      3      2
p := (2*(x  + 2*x  + 3*x  + 2*x + 1))/3

N (p) = 4
 D

temps = 5925 msec.


          4      3      2
p := (2*(x  + 3*x  + 2*x  + 3*x + 1))/3

N (p) = 3
 D

temps = 7424 msec.


          4      2
p := (4*x  + 17*x  + 4)/6

N (p) = 2
 D

temps = 2563 msec.
```

REFERENCES

(1) P. HENRICI

" Applied and Computational Complex Analysis "
Vol 1 : Power series - Integration - Conformal mapping - Location of zeros .
Wiley interscience (1974) .

(2) A.S. HOUSEHOLDER

" The numerical treatment of a single nonlinear equation "
Mc Graw-Hill , Inc 1970 .

(3) M. MIGNOTTE

" Aide mémoire sur les polynômes "
Séminaire d'Informatique Strasbourg 1979 (ou CALSYF n°1)

(4) L. PERNEBO

" An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems "
Part I : Structure Matrices and Feed , forward Design.
IEEE Transactions on Automatic Control , vol AC-26 , 1981 .

(5) A.S. MORSE

" System invariants under feedback and cascade control "
Proc. Int. Symp. , Udine , Springer-Verlag , 1975 .

(6) J.M. DION

" Sur la structure à l'infini des systèmes linéaires "
Thèse d'état au Laboratoire d'Automatique de Grenoble , 1983 .

(7) C. COMMAULT

" Quelques aspects structurels de la commande des systèmes multivariables "
Thèse d'état au Laboratoire d'Automatique de Grenoble ,1983 .

CHAPITRE 3

NOMBRE DE RACINES D'UN POLYNOME DE R[X] OU C[X] DANS LE DISQUE UNITE PAR TRANSFORMATIONS DE MARDEN ET COHN

INTRODUCTION

L'algorithme de Schur-Cohn fournit des résultats partiels concernant le nombre de racines d'un polynôme dans le disque unité du champ complexe (1).

Le théorème de Marden (2) permet de construire une classe de polynômes pour laquelle on sait que le test de Schur-Cohn sera négatif.En transformant le polynôme qui le rend négatif,nous pouvons caculer le nombre exact de racines dans $\mathbb{R}[X]$ (approché dans $\mathbb{C}[X]$) dans le disque unité d'un polynôme quelconque (3).

Ce calcul intervient dans l'étude de certains problèmes de stabilité des systèmes biochimiques ou physiques (8),(9),(10),(11).

Dans une première partie,nous rappelons les résultats fondamentaux de la méthode de Schur-Cohn et du prolongement de Marden et démontrons la finitude et quelques propriétés de l'algorithme.Dans la seconde,nous présentons le schéma algorithmique et des applications dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ sur le HB 68 DPS 8 sous système Multics du CICG.

I

DESCRIPTION DE LA METHODE

1 - Cas singulier (théorème de base (2) inapplicable).

Dès qu'il existe une constante de Schur nulle sans que son itéré correspondant le soit le théorème de base ne peut pas s'appliquer.Mais en modifiant cet itéré en un polynôme de degré inférieur ou égal et tel que:

i) sa première constante de Schur soit non nul,

ii) il existe une relation entre leurs nombres de zéros avec leur o.d.m. dans le disque unité ,

on peut trouver le nombre de zéros de p.

1.1 Transformation de Marden.

Notation:

$$g(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i \quad , \quad b_i \in \mathbf{C} \ , \ d°g = m \ (m>1)$$

Théorème:

Si $b_m = u\bar{b}_0$, $b_{m-1} = u\bar{b}_1$, ... , $b_{m-q+1} = u\bar{b}_{q-1}$ et $b_{m-q} \neq u\bar{b}_q$ où $q \leq m/2$ et $|u|=1$

Alors g a le même nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité que G_1 tel que:

soit $b = (b_{m-q} - \bar{b}_q)/b_m$

$G(z) = (z^q + 2b/|b|)\, g(z)$

$G_1(z)$ le premier itéré de Schur de G

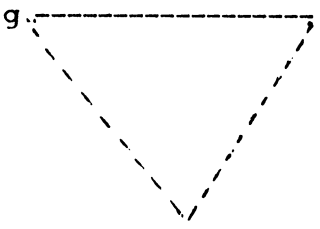
i) le degré de G_1 est égal à m

ii) $\gamma_1(G_1) < 0$

Définition:

La transformation de g en G_1 est dite de Marden et G_1 est le transformé de Marden de g.

$\gamma_1(g)= 0$
$g_1 \neq 0$



$(\gamma_1(G_1) < 0 , d°(G_1) = d°g)$

Remarque: La transformation de Marden conserve les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité.

1.2 Transformation de Cohn.

Définition:

p est un polynôme autoréciproque s'il existe u $\in$ **C** tel que :
$p^* = up$ avec $|u|=1$.

Exemples:

$$x^2-1 \ , \ x^4-2x^3+ x^2-2x +1$$

Propriété:

i) Dans **R**[X].
La condition d'autoréciprocité s'écrit: $p^* = p$ ou $p^* = -p$.
Si n est pair et si p est autoréciproque alors:
$p^*=p$ ou le coefficient central d'indice n/2 est nul.

ii) Si g est autoréciproque sans racines multiples sur le cercle unité alors la dérivée de g, notée g', n'a pas de racine sur ce cercle.

iii) p est autoréciproque si et seulement si $pgcd(p,p^*)=p$

iv) p est autoréciproque si et seulement si toutes ses racines sont sur ou symétriques par rapport au cercle unité.

v) D'après M.A Malik (5.1) si p est autoréciproque et tel que:
$|p(x)| < 1$ dès que $|x| < 1$ et $|a_0| = 1/2$ alors p est de la forme:
$(\omega x^n + \bar{\omega})/2$, $|\omega| = 1$.

vi) D'après M.A Malik (5.2) si p est autoréciproque et $|p(x)|$ atteint

son maximum en n points du cercle unité alors p est de la forme:
$\beta x^n + \bar{\beta}$ où β est une constante.

Théorème de Cohn.

Si g est autoréciproque alors g a le même nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert que $\tilde{g}$ vérifiant:

$$\tilde{g}(z) = (g')^*(z) = \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\, \bar{b}_{m-j} z^j$$

Et g et g' ont le même nombre de zéros avec o.d.m. à l'extérieur du disque unité (par propriété des polynômes réciproques).

Définition:

La transformation de g en $\tilde{g}$ est dite de Cohn et $\tilde{g}$ est le transformé de Cohn de g.

Remarque:

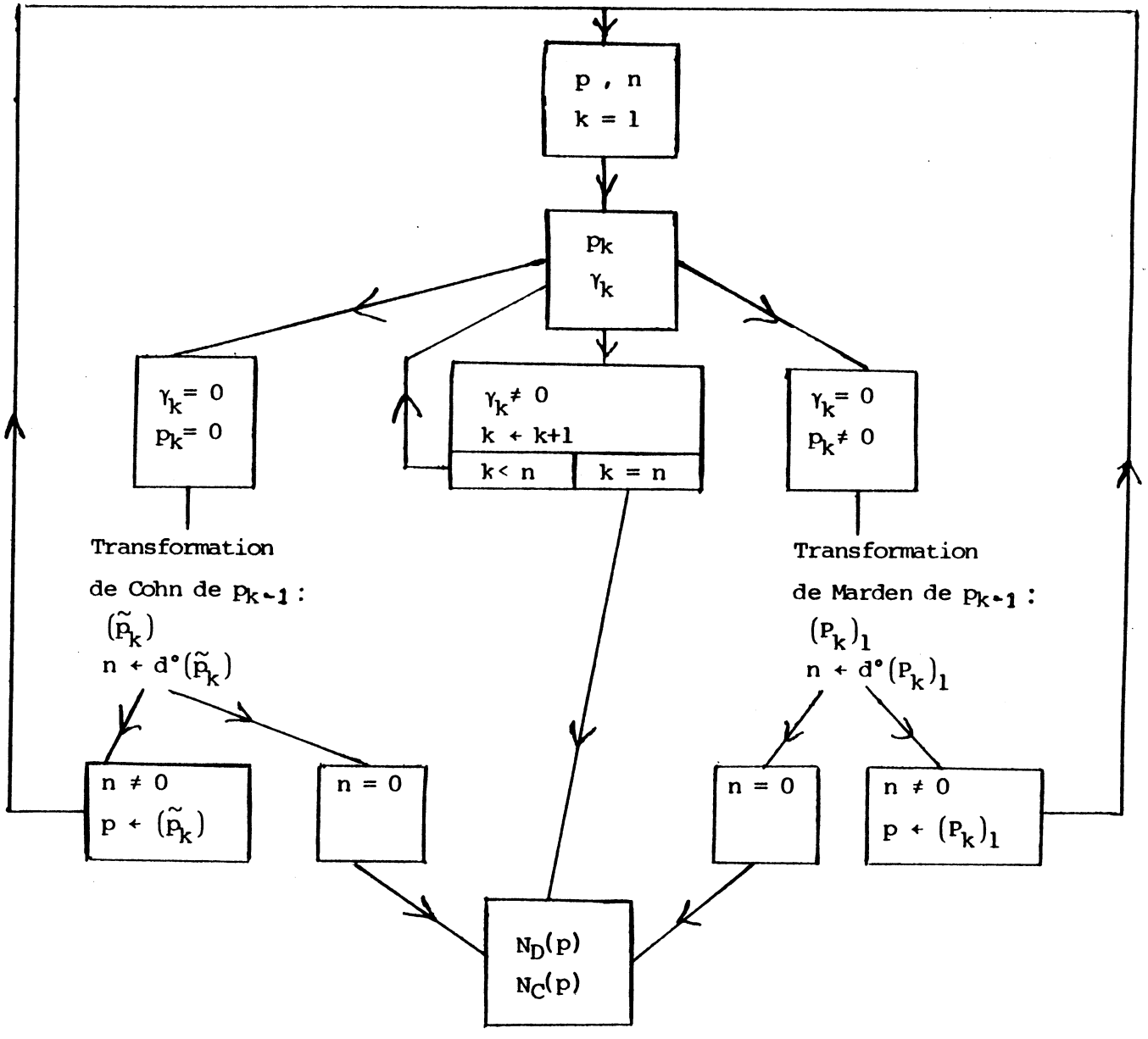
Si g n'est pas constant les deux transformés de Marden et Cohn sont non nuls.

1.3 Conclusion.

Ainsi dès qu'il existe une constante de Schur nulle par l'une des deux transformations on construit un nouveau polynôme de degré inférieur ou égal,non nul, qui permet de calculer de façon itérative le nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité de p.

De plus,le calcul du nombre de zéros avec o.d.m. sur le cercle unité revient à celui dans le disque unité ouvert d'après la propriété iv) du paragraphe 1.2 sur les polynômes autoréciproques.

2 - Schéma algorithmique.



3 - Relations récurrentes du nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité des itérés de Schur des transformations de Marden ou Cohn.

Il s'agit d'expliciter par des formules le lien qui existe entre le nombre de zéros avec o.d.m. des itérés de Schur d'un polynôme et du transformé éventuel.

3.1 Nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité de p en fonction de ses itérés de Schur.

Notation:

- n le degré de p ($n > 1$)
- p_k les itérés de Schur de p , $k=0,1,\ldots,n$
  avec $p_0=p$
- γ_k les constantes de Schur de p , $k=0,1,\ldots,n$
- $S(p_{k_0}) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}(n+1-k_j)$

  où les k_j sont les indices $k \in \{1,2,\ldots,k_0\}$
  tels que $\gamma_k < 0$, avec $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$,
  si $m=0$ on pose $S(p_{k_0}) = 0$.
- $N_R(p)$ le nombre de zéros avec o.d.m. dans la région R de $\mathbf{C}$

Résultats:

Soit $k_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$

1) D'après P. Henrici nous avons:

Pour tout $k \in \{1,2,\ldots,k_0\}$ avec $\gamma_1 \neq 0, \ldots, \gamma_{k_0} \neq 0$

1.1) $$N_D(p_{k-1}) = \begin{cases} N_D(p_k) & \text{si } \gamma_k > 0 \\ n+1-k-N_D(p_k) & \text{si } \gamma_k < 0 \end{cases}$$

1.2) $N_C(p_{k-1}) = N_C(p_k)$

2) A l'intérieur du disque unité nous avons:

$$N_{o_D}(p) = S(p_{k_0}) + (-1)^m N_{o_D}(p_{k_0})$$

3) Sur le cercle unité:

$$N_C(p) = N_C(p_{k_0})$$

Remarques:

i) si $\gamma_1 = 0$ les formules ci-dessus restent valables en prenant $k_0=0, m=0$ et $S(p)=0$.

ii) s'il existe $k_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $S(p_{k_0}) = 0$ alors $m=0$.

iii) si p_{k_0} est constant (nécessairement non nul, sinon $\gamma_{k_0} = 0$)

alors $N_{o_D}(p) = S(p_{k_0})$

$$N_C(p) = 0$$

iv) si $k_0=n$, on retrouve la formule du théorème de Henrici, directement applicable ($p_{k_0} = p_n = \gamma_n \neq 0$) et on a:

$$N_{o_D}(p) = S(p_n)$$

$$N_C(p) = 0$$

v) si $k_0=0$, on ne peut pas utiliser les formules récurrentes, $\gamma_1=0$. Dans ce cas on transforme p en un polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que:

1) sa première constante de Schur soit non nulle (pour utiliser les formules récurrents entre itérés) ou il soit constant non nul

2) il existe une relation entre leurs nombres de zéros avec o.d.m. dans le disque unité.

3.2 Nombre de zéros dans le disque unité en fonction des itérés de Schur des transformés de Marden ou Cohn.

Notation:

- $p_k^{i.t}$ les itérés de Schur de $p^{i.t}$ (ième transformé de Marden si t=1 et de Cohn si t=2) avec $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $p_k^{0.t} = p_k$, $k=0,1,\ldots,n$
- n_i^t le degré de $p^{i.t}$, $n_0^t = n$

- $S(p_{k_i}^{i.t}) = \sum_{j=1}^{m_i^t} (-1)^{j-1}(n_i^t + 1 - k_j^{i.t})$

où les $k_j^{i.t}$ sont les m_i^t indices $k \in \{1,2,\ldots,k_i\}$ tels que $\gamma_k^{i.t} \neq 0$, avec $k_1 < \ldots < k_{m_i^t}$;

si $m_i^t = 0$ on pose $S(p_{k_i}^{i.t}) = 0$

Résultats:

D'après les théorèmes de Cohn et de Marden (conservation du nombre de zéros avec o.d.m. par leurs transformations), nous avons:

pour chaque transformation i.t un indice $k_i \in \{0,1,\ldots,n_i^t\}$ tel que:

1) $\gamma_1^{i.t} \neq 0 , \ldots, \gamma_{k_i}^{i.t} \neq 0$ si $k_i > 0$

2) le transformé soit constant (non nul, t=2) si $k_i = 0$.

Enoncé de la proposition:

Soit i_0 le nombre de transformations , $i_0 \in \{0,1,\ldots,n\}$

- Dans le disque unité ouvert :

$$N_{\circ D}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p_{k_{i+1}}^{i+1.t}) + (-1)^{M_{i_0}^t} N_{\circ D}(p_{k_{i_0}}^{i_0.t})$$

où $M_i^t = \sum_{j=0}^{i} m_j^t$, $M_{-1}^t = 0$.

Démonstration: (par récurrence sur i_0)

$i_0 = 1$.

Par hypothèse nous transformons p_{k_0} en $p^{1.t}$ avec

$N_{\circ D}(p_{k_0}) = N_{\circ D}(p^{1.t})$

p_{k_0} non constant (donc $k_0 < n$)

De plus $N_{\circ D}(p) = S(p_{k_0}) + (-1)^m N_{\circ D}(p_{k_0})$, $k_0 \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

D'où $N_{D}(p) = S(p_{k_0}) + (-1)^{m} N_{D}(p^{l.t})$

Deux cas se présentent:

1) si $p^{l.t}$ est constant (nécessairement non nul et t=2) alors $N_{D}(p) = S(p_{k_0})$ avec nos notations, $k_1=0$ d'où $m_1^t=0$ et $S(p^{l.t}) = 0$, nous retrouvons bien la formule de la proposition.

2) si $p^{l.t}$ n'est pas constant alors il existe $k_1 \in \{1,2,\ldots,n_1^t\}$ tel que:

$$N_{D}(p^{l.t}) = S(p_{k_1}^{l.t}) + (-1)^{m_1^t} N_{D}(p_{k_1}^{l.t})$$

soit

$$N_{D}(p) = S(p_{k_0}) + (-1)^{m}\{ S(p_{k_1}^{l.t}) + (-1)^{m_1^t} N_{D}(p_{k_1}^{l.t}) \}$$

c'est-à-dire

$$N_{D}(p) = S(p_{k_0}) + (-1)^{m} S(p_{k_1}^{l.t}) + (-1)^{m+m_1^t} N_{D}(p_{k_1}^{l.t})$$

et ainsi la proposition est démontrée pour $i_0=1$.

Supposons la formule vraie pour i_0 et étudions-la au rang suivant:

Nous avons par hypothèse de récurrence:

$$N_{D}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p_{k_{i+1}}^{i+1.t}) + (-1)^{M_{i_0}^t} N_{D}(p_{k_{i_0}}^{i_0.t})$$

et par transformation de $p_{k_{i_0}}^{i_0.t}$ en $p^{i_0+1.t}$ (non nécessaire si $p_{k_{i_0}}^{i_0.t}$ est constant non nul, en particulier pour $k_{i_0} = n_{i_0}^t$) avec:

$$N_{D}(p_{k_{i_0}}^{i_0.t}) = N_{D}(p^{i_0+1.t})$$

1) si $p^{i_0+1.t}$ est constant (nécessairement non nul et t=2) alors

$$N_{o_D}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p^{i+1.t}_{k_{i+1}})$$

avec nos notations $k_{i_0+1} = 0$ d'où $m^t_{i_0+1} = 0$ et par convention

$S(p^{i_0+1.t}) = 0$ et ainsi nous retrouvons bien la formule au rang i_0+1.

2) si $p^{i_0+1.t}$ n'est pas constant alors il existe $k_{i_0+1} \in \{1,\ldots,n^t_{i_0+1}\}$ tel que:

$$N_{o_D}(p^{i_0+1.t}) = S(p^{i_0+1.t}_{k_{i_0+1}}) + (-1)^{m^t_{i_0+1}} N_{o_D}(p^{i_0+1.t}_{k_{i_0+1}})$$

où l'indice k_{i_0+1} représente le plus grand indice des $\gamma^{i_0+1.t}_k$ consécutivement non nuls.

Soit:

$$N_{o_D}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p^{i+1.t}_{k_{i+1}}) + (-1)^{M^t_{i_0}} \{ S(p^{i_0+1.t}_{k_{i_0+1}}) + (-1)^{m^t_{i_0+1}} N_{o_D}(p^{i_0+1.t}_{k_{i_0+1}}) \}$$

ou encore

$$N_{o_D}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0} (-1)^{M_i^t} S(p^{i+1.t}_{k_{i+1}}) + (-1)^{M^t_{i_0+1}} N_{o_D}(p^{i_0+1.t}_{k_{i_0+1}})$$

Ainsi nous venons de démontrer la proposition.

Remarques:

Soit $i_0=0,1,\ldots$

i) si $p^{i_0.t}$ est constant (nécessairement non nul et t=2) alors

par notation $k_{i_0} = 0$ et par convention $m_{i_0}^t = 0$ et $S(p^{i_0.t}) = 0$,on connaît explicitement (par calcul itératif) $N_{\circ}(p)$.
D

ii) si $p_{k_{i_0}}^{i_0.t}$ est constant (nécessairement non nul sinon $\gamma_{k_{i_0}}^{i_0.t} = 0$)

avec $k_{i_0} \neq 0$,en particulier $k_{i_0} = n_{i_0}^t$,nous avons:

$$N_{\circ}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p_{k_{i+1}}^{i+1.t}) \quad .$$
D

iii) si $p_{k_{i_0}}^{i_0.t}$ n'est pas constant,mais tel que son transformé $p^{i_0+1.t}$ le soit (nécessairement non nul et t=2) alors

$$N_{\circ}(p) = \sum_{i=-1}^{i_0-1} (-1)^{M_i^t} S(p_{k_{i+1}}^{i+1.t}) \quad .$$
D

iv) si $i_0=0$ nous retrouvons les formules du paragraphe 3.1 .

- Sur le cercle unité,noté C .

D'après le théorème de Marden,nous pouvons écrire la formule suivante avec $0 \leq i < i_0$ (i_0 le nombre de premières transformations consécutives de Marden depuis le début de l'algorithme):

$$N_C(p) = N_C(p_{k_i}^{i.1})$$

Supposons que la (i_0+1)ème transformation soit de Cohn alors $N_C(p)$ n'est plus invariant.

En effet le passage de i_0 à i_0+1 implique que $p_{k_{i_0}}^{i_0.1}$ soit autoréciproque,d'où la formule suivante:

$$N_C(p_{k_{i_0}}^{i_0.1}) = d^{\circ}(p_{k_{i_0}}^{i_0.1}) - 2\, N_{\circ}(p_{k_{i_0}}^{i_0.1})$$
D

Soit

$$N_C(p) = d^\circ(p_{k_{i_0}}^{i_0 \cdot 1}) - 2\, N_{\underset{D}{\circ}}(p_{k_{i_0}}^{i_0 \cdot 1})$$

Ainsi le calcul du nombre de zéros avec o.d.m. sur C revient au calcul à l'intérieur du disque unité.

Si $p_{k_{i_0}}^{i_0 \cdot 1}$ est non constant (nécessairement non nul) nous avons:

$$N_C(p) = d^\circ(p_{k_{i_0}}^{i_0 \cdot 1}) - 2\, N_{\underset{D}{\circ}}(p^{i_0+1.2}) \ .$$

On calcule alors $N_{\underset{D}{\circ}}(p^{i_0+1.2})$ par la proposition précédente.

Ainsi on mène le calcul de $N_{\underset{D}{\circ}}(p)$ et $N_C(p)$ en parallèle.

4 - Racines sur ou symetriques par rapport au cercle unité et transformations de Marden et Cohn.

Nous avons vu précédemment que les transformations de Schur (sous l'hypothèse que les premières constantes de Schur soient non nulles) et de Marden conservent les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité et que la transformation de Cohn s'applique uniquement pour des polynômes qui ont de telles racines.

4.1 Critère d'utilisation de la transformation de Cohn.

Proposition:

Dans l'algorithme proposé au paragraphe 2, si p a des racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité alors la transformation de Cohn sera utilisée et réciproquement.
De plus soit r_i de telles racines i=1,...,s d'o.d.m. k_i; la transformation de Cohn sera utilisée au moins r fois avec $r = \mathrm{Max}(k_i, i=1,\ldots,s)$.

Démonstration:

1) Supposons que p possède de telles racines, c'est-à-dire divisible par un polynôme autoréciproque (non constant).

Si p est lui-même autoréciproque ou s'il existe $k_0 \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $\gamma_1 \neq 0,\ldots,\gamma_{k_0} \neq 0$ et p_{k_0} autoréciproque (non constant) alors la première transformation sera de Cohn,

Sinon par conservation de telles racines par transformations de Schur et de Marden et du degré par transformation de Marden on sait qu'il existera i_0 premières transformations consécutives de Marden depuis le début del'algorithme tel qu'il

existe un itéré de Schur $p_{k_0}^{i_0.1}$, $k_0 \in \{0,\ldots,n_{i_0}^1\}$ autoréciproque (non

constant), avec $i_0 > 0$, dès lors la (i_0+1)ème transformation sera de Cohn.

2) Réciproquement, supposons $i_0 > 0$.
Si on utilise la transformation de Cohn $p^{i_0.2}$ alors il existe par

définition $p_{k_{i_0-1}}^{i_0-1.t}$ autoréciproque (non constant) qui divise $p^{i_0-1.t}$ (par conservation de telles racines par transformation de Schur).

Si $i_0=1$ alors la démonstration est faite.

Sinon si t=2 (c'est-à-dire la (i_0-1)ème transformation est de Cohn) alors on recommence le processus (ce chemin correspond à l'existence de telles racines avec un o.d.m. plus grand que 1) jusqu'à atteindre le polynôme origine p (alors la démonstration est faite) ou bien il existe une transformation $i_1 < i_0$ de Marden $p^{i_1.1}$ qui contient les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité de $p_{k_1}^{i_1.1}$ autoréciproque (non constant).

Or la transformation de Marden conserve ces racines sans en générer donc $p_{k_{i_1-1}}^{i_1-1.t}$ contient ces racines et ainsi de suite...

Remarques:

1) Pour les racines r_i d'o.d.m. supérieurs à 1, la transformation de Cohn est utilisée au moins r fois (par conservation de ces racines). Nous verrons plus loin (au paragraphe 4.2.3) qu'on l'utilise exactement r fois (par non générescence de telles racines par la transformation de Cohn dans $\mathbb{C}[X]$).

2) La transformation de Cohn génère la transformation de Marden .

Prenons un exemple:

$g(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 4x + 1$

$g'^*(x) = 4x^3 + 14x^2 + 12x + 4$

Le premier itéré de Schur de g'^* est:

$(g'^*)_1(x) = 8x(x-1)$

D'où la première constante de Schur est:

$\gamma_1(g'^*) = 0$

3) Dans l'algorithme on ne finit pas nécessairement par la transformation de Cohn.

Reprenons l'exemple ci-dessus; le transformé de Marden de g'^* est:

$16x^3 + 40x^2 + 34x + 12$

Ses itérés de Schur sont dans l'ordre:

$4(-16x^2 - 58x - 28)$

$16(174x + 132)$

Donc ses constantes de Schur sont toutes non nulles.

4.2 Etude de l'autoréciprocité de la transformation de Cohn .

On reprend les notations du paragraphe I.1

4.2.1 Etude du cas trivial: transformé de Cohn constant.

Soit g le polynôme autoréciproque de degré $m > 1$ (on ne s'occupe pas du cas g constant car la transformation de Cohn n'est pas utilisée dans l'algorithme).

$$g'^*(x) = \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\bar{b}_{m-j}x^j$$

g'^* est constant (et égal à $m\bar{b}_m$) si et seulement si $b_{m-1}=\ldots=b_1=0$.
Par autoréciprocité de g, il existe $u \in \mathbf{C}$ tel que:
$b_m = u\bar{b}_0$ avec $|u| = 1$.
D'où g'^* est constant si et seulement si g est de la forme suivante:
$u\bar{b}_0x^m + b_0$, avec $|u| = 1$.
On remarque que g ne s'annule que sur le cercle unité.
Si $m = 1$ alors g'^* est constant quel que soit g.
Si $g \in \mathbf{R}[X]$:
si m est pair $u=1$ ou le coefficient de g d'indice $m/2$ est nul et $u=\pm 1$
sinon $u=1$ ou -1 ;
D'où:
g'^* est constant (et égal à mb_m) dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si g est du type $\eta(x^m \mp 1)$ avec $m > 1$ et η une constante réelle non nulle.

Maintenant on suppose que nous ne sommes pas dans le cas trivial de transformé de Cohn constant, c'est-à-dire dans la suite on prend $m > 2$.

4.2.2 Autoréciprocité dans R[X].

On s'intéresse dans ce paragraphe aux polynômes autoréciproques c'est-à-dire ayant toutes ses racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité.

Proposition:

Soit g un polynôme autoréciproque de $\mathbf{R}[X]$.

Si g n'entre pas dans le cas trivial alors le transformé de Cohn g'^* n'est pas autoréciproque sauf pour les polynômes du type $\alpha(x^q \pm 1)^k$ avec $q > 1$, $k > 2$ et α une constante réelle non nulle, qui ne s'annulent que sur le cercle unité.

Démonstration:

g'^* est autoréciproque si et seulement si g' l'est sous l'hypothèse $b_1 b_m \neq 0$, c'est-à-dire $b_1 \neq 0$ (d'où $b_{m-1} \neq 0$) par propriété des polynômes réciproques.

Deux cas se présentent:

1) $b_1 \neq 0$ et on étudie les conditions, sur les coefficients de g (autoréciproque), de g' autoréciproque.

2) $b_1 = 0$ et on regarde sous quelles conditions, sur les coefficients de g, g'^* est autoréciproque.

Etudions le premier cas: $b_1 \neq 0$.

Nous avons $g' = \sum_{j=1}^{m} j b_j x^{j-1}$ avec $d^\circ(g') = m-1$.

Donc si g' est autoréciproque il existe $v \in \mathbf{R}$ tel que:

$(m-j)b_{m-j} = v(j+1)b_{j+1}$ $j=0,\ldots,m-1$ avec $|v| = 1$.

Soit par autoréciprocité de g:

$(m-j)ub_j - v(j+1)b_{j+1} = 0$ $j=1,\ldots,m-1$

$mb_m - vb_1 = 0$

Remarque: Tous les coefficients de g sont non nuls.

En effet, s'il existe $j_0 \in \{2,\ldots,m-2\}$ tel que $b_{j_0} = 0$ alors pour tout $i=j_0,\ldots,m$ $b_i=0$, or par hypothèse $b_m \neq 0$.

Soit le système linéaire carré d'ordre m homogène, Ab = 0 :

$$A = \begin{bmatrix} (m-1)u & -2v & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (m-2)u & -3v & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & u & -mv \\ -v & 0 & . & . & 0 & m \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

Par la méthode de Gauss nous obtenons la matrice triangulaire supérieure suivante:

$$\begin{bmatrix} (m-1)u & -2v & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (m-2)u & -3v & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & u & -mv \\ 0 & . & . & . & 0 & m!(u^{m-1}-v^m) \end{bmatrix}$$

Donc si $v^m = u^{m-1}$ alors le système à une infinité de solutions de la forme:

$$b_{m-j} = C_m^j (v/u)^j b_m \quad j=1,\ldots,m-1.$$

Or l'hypothèse $v^m = u^{m-1}$ entraîne dans $\mathbb{R}[X]$:

si m est pair $u=1$, $v=1$ ou -1

sinon $v=1$, $u=1$ ou -1

soit $b_{m-j} = C_m^j (\pm 1)^j b_m \quad j=1,\ldots,m-1$

De plus $b_0 = u^{-1} b_m$

Donc si m est pair $b_0 = b_m$, sinon $b_0 = \pm b_m$

D'où, par le développement du binôme de Newton, si $b_1 \neq 0$,les seuls polynômes susceptibles de propager leur autoréciprocité par transformation de Cohn sont du tupe $\alpha(x \pm 1)^m$ avec $m > 2$ et α une constante réelle non nulle.

On remarque que les racines de tels polynômes sont d'o.d.m. plus

grandeque 1, donc conservées par dérivation et bien sûr par réciprocité.

Ainsi nous venons de démontrer le premier cas.

Passons au deuxième cas:

Si $b_1 = 0$, nous étudions l'autoréciprocité de g'^* .

Or $g'^* = \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\, b_{m-j} x^j$

D'où $d°g'^* < m-1$ $\quad (b_{m-1}=ub_1)$

Soit $m-q$ son degré (> 0 par hypothèse) avec $q > 1$

C'est-à-dire: $b_1=0,\ldots,b_{q-1}=0,\ b_q \neq 0$.

On peut prendre $q \leq m/2$ par autoréciprocité de g.D'où nous avons $m-q \geq q$.

On ne s'occupe pas de la racine ∞ d'o.d.m. q de g'^* ,car sinon nécessairement par hypothèse d'autoréciprocité de g'^* il faudrait que 0 soit racine de même o.d.m. or son coefficient origine mb_m est non nul.

Donc on applique la condition d'autoréciprocité sur:

$$g'^* = \sum_{j=0}^{m-q} (m-j)\, b_{m-j} x^j$$

c'est-à-dire il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que:

i) $jqb_{jq} = v(m-(j-1)q)b_{m-(j-1)q}$ $\quad j=1,\ldots,k$ où $m=kq$, $k>1$
avec $|v| = 1$.

ii) $b_{jq+i}=0$ pour tout $i=1,\ldots,q-1$ et $j=0,\ldots,k-1$.

Remarques:

1) Si $m \neq kq$ alors $b_m=0$ impossible,donc g'^* n'est pas autoréciproque.

2) Si $m = kq$ alors $d°g'^*=(k-1)q$ $(=d°g-q)$
si $m = q$ alors g'^* est constant (cas exclus)

Donc nous supposons $m = kq$ avec $k \geq 2$.

Nous avons par autoréciprocité de g:

$jb_{jq}-vu(k-j+1)b_{(j-1)q} = 0 \quad j=1,\ldots,k$

$b_{kq} - ub_0 = 0$

Remarque: Tous les coefficients de g d'indices divisibles par q sont non nuls.

En effet, s'il existe $j_0 \in \{1,\ldots,k-1\}$ tel que $b_{j_0 q} = 0$ alors pour tout $i=j_0,\ldots,k$ $b_{iq}=0$, or par hypothèse $b_m \neq 0$.

Soit le système linéaire carré d'ordre k+1 homogène, Ab = 0 de 1er membre

$$\begin{bmatrix} -kvu & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (1-k)vu & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & -vu & k \\ -u & 0 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_0 \\ b_q \\ . \\ . \\ b_{(k-1)q} \\ b_{kq} \end{bmatrix}$$

Par la méthode de Gauss nous obtenons la matrice triangulaire supérieure suivante:

$$\begin{bmatrix} -kvu & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (1-k)vu & 2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -vu & k \\ 0 & . & . & . & 0 & k!(1-v^k u^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Donc si $v^k u^{k-1} = 1$ alors le système a une infinité de solutions de la forme:

$$b_{(k-j)q} = C_k^j (uv)^{-j} b_{kq} \qquad j=1,\ldots,k.$$

Or l'hypothèse $v^k u^{k-1} = 1$ entraîne dans $\mathbb{R}[X]$:

si k est pair $\quad u=1$, $v=1$ ou -1

sinon $\quad v=1$, $u=1$ ou -1

soit $b_{(k-j)q} = C_k^j (\pm 1)^j b_{kq} \qquad j=1,\ldots,k.$

D'où, par développement du binôme de Newton, si $b_1=0,\ldots,b_{q-1}=0$, $b_q \neq 0$ les seuls polynômes susceptibles de propager leur autoréciprocité par transformation de Cohn sont du type $\alpha(x^q \mp 1)^k$ avec $q > 1$, $k > 2$

et α une constante réelle non nulle.

On remarque que les q ème racines de plus ou moins l'unité sont d'o.d.m. plus grands que 1, donc conservées par dérivation et bien sûr par réciprocité et qu'en prenant par extension q=1, on retrouve les polynômes du premier cas.

Ainsi la proposition est démontrée.

4.2.3 Autoréciprocité locale dans C[X].

Définition:

Un polynôme est autoréciproque local s'il a des racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité .

Propriété: Un polynôme est autoréciproque local si et seulement si il contient un facteur autoréciproque.

Remarque: L'autoréciprocité est un cas particulier d'autoréciprocité locale.

Proposition:

Soit g un polynôme autoréciproque de $\mathbf{C}[X]$.

Si g n'entre pas dans le cas trivial (cf début du paragraphe 4.2) , alors le transformé de Cohn g'^* n'est pas autoréciproque local sauf si g a des racines multiples, et dans ce cas le transformé a les mêmes racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité que g d'o.d.m. plus petits d'une unité.

Démonstration:

g'^* est autoréciproque si et seulement si g' l'est sous l'hypothèse $b_1 \neq 0$.

1) $b_1 \neq 0$.

Par hypothèse il existe $u \in \mathbf{C}$, tel que:

$g = ug^*$ avec $|u| = 1$

D'après G. Ancochea (4) nous avons:

pout tout $x \in \mathbf{C}$ $\quad xg'(x) + ug'^*(x) = mg(x) \qquad (1)$

Soit $w_i \in \mathbf{C}$ tel que $g'(w_i) = 0$

On peut supposer w_i non nul puisque $g'(0) = b_1$.
Nous avons $g'^*(w_i) = w_i^{m-1}\overline{g'}(1/\overline{w_i})$
d'où dans (1) nous obtenons:
$w_i^{m-1}\overline{g'}(1/w_i) = u^{-1} m\, g(w_i)$
puisque $w_i \neq 0$
$g'(1/\overline{w_i}) = 0$ si et seulement si $g(w_i) = 0$
Donc g' est autoréciproque local si et seulement si g a des racines multiples, et de plus les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité de g' sont les mêmes que celles de g.

2) $b_1 = 0, \ldots, b_{q-1} = 0$, $b_q \neq 0$ avec $q > 1$.
On peut prendre $q \leq m/2$ par autoréciprocité de g.D'où nous avons $m-q \geq q$.

$$g'^*(x) = m\tilde{b}_m + \ldots + q\bar{b}_q x^{m-q} \quad , \quad m-q > 0$$

D'où $(g'^*)^* = mb_m x^{m-q} + \ldots + qb_q$

Or $g'(x) = x^{q-1}(qb_q + \ldots + mb_m x^{m-q})$

Soit $g'(x) = x^{q-1}(g'^*)^*(x)$

et par définition $(g'^*)^* = x^{m-q}\overline{g'^*}(1/\bar{x})$

D'où $g'(x) = x^{m-1}\overline{g'^*}(1/\bar{x})$ (2)
C'est la formule du calcul du polynôme réciproque en changeant de variable x en $1/\bar{x}$
Soit $w_i \in \mathbf{C}$ tel que $g'^*(w_i) = 0$
On peut supposer $w_i \neq 0$ puisque $g'^*(0) = mb_m$.
Nous avons d'après la formule (1):
$g'(w_i) = mw_i^{-1}g(w_i)$ (3)
soit en utilisant (2):
$w_i^{m-1}\overline{g'^*}(1/\overline{w_i}) = mw_i^{-1}g(w_i)$
puisque $w_i \neq 0$, $g'^*(1/\overline{w_i}) = 0$ si et seulement si $g(w_i) = 0$
Or d'après (3) , $g(w_i) = 0$ si et seulement si $g'(w_i) = 0$.
Donc g'^* est autoréciproque local si et seulement si g contient des racines multiples; de plus les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité de g'^* sont les mêmes que celles de g.

Remarque:

On retrouve le lemme de Bonsall-Marden, propriété ii) du paragraphe I.1.2 par l'absurde et de plus g' ne s'annule pas pour des nombres symétriques par rapport au cercle unité sauf les racines multiples de g.

Conclusion:

1) La transformation de Cohn dans $\mathbb{C}[X]$ ne se génère pas ; elle se conserve tout au plus.

2) La transformation de Cohn est utilisée consécutivement plusieurs fois si et seulement si le polynôme d'entrée, p, de l'algorithme possède des racines multiples sur ou symétriques par rapport au cercle unité.

3) Une étude de calcul de bornes de polynômes autoréciproques sur le cercle unité en fonction de zéros de polynôme du type z^n+1 peut être intéressante (cf article d' Abdul Aziz, Journ. Approx. theory 41 (1984)).

CONCLUSION

Cette méthode permet de calculer le nombre exact dans **R**[X] et approché dans **C**[X] de racines sur le cercle unité,C, groupées en paires symétriques par rapport à C en comptant leurs o.d.m. et donne une factorisation du polynôme en facteur autoréciproque.

Nous étendons cette méthode aux polynômes à plusieurs paramètres dans **R**[X], c'est-à-dire à coefficients polynômiaux de plusieurs variables. Nous mettons au point un programme de calcul du nombre de racines avec o.d.m. dans le disque unité de polynômes à un paramètre dans **R**[Y][X].

Nous rappelons (3) qu'il est possible d'utiliser cette méthode pour trouver le nombre de racines dans n'importe quelle région du champ complexe conformément équivalente par homographie, par exemple le demi-plan fermé à droite, région d'instabilité des matrices de transfert des systèmes linéaires de l'automatique.

Nous étudions d'autres méthodes reprenant l'algorithme de Schur-Cohn mais d'un point de vue hermitien (7), ou bien utilisant les suites de Sturm et les indices de Cauchy.

II

ALGORITHME

Entrées: un polynôme p de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n (n > 1).

Sorties: ses nombres de racines sur le cercle unité, noté C, et dans le disque unité ouvert (avec o.d.m.).

Algorithme:

1. Normalisation de p en pu.
   1.1 Calculs des racines rationnelles et de leur nombre avec o.d.m. à l'intérieur de D et sur C.
   1.2 Transformation de p en pl sans ses racines rationnelles.
   1.3 Transformation de pl en pu, polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de coefficients premiers entre eux.
2. Calcul des nombres de racines de pu à l'intérieur de D et sur C, notés respectivement nrdupu et nrcupu.

Si d°(pu) = 0 alors nrdoupu = 0, nrcupu = 0

Sinon

Tant que d°(pu) non nul faire

- Calcul de $\gamma_k(pu)$ par l'algorithme de Schur-Cohn

- Test suivant:
  2.1 si $\gamma_k(pu) \neq 0$ alors calcul de $S(p_k)$
  2.2 sinon si $(pu)_k = 0$ alors transformation de Cohn de $(pu)_{k-1}$

sinon transformation de Marden de $(pu)_{k-1}$

- pu ←transformé de Marden ou Cohn,ou polynôme constant (non nul).
- Calcul de nrdopu et nrcupu par les formules du paragraphe I.3.2 (le calcul de nrcupu est déclenché dès que la transformation de Cohn est utilisée,puis mené en parallèle avec le calcul de nrdopu)

3. Calcul des nombres de racines avec o.d.m. de p sur C et à l'intérieur de D.

-EXEMPLES-

I Etude d'un cas classique.

$$p := (62500000x^9 - 68750000x^8 + 70000000x^7 - 77000000x^6 + 130250000x^5 - 143275000x^4 + 67228000x^3 - 73950800x^2 + 67444090x - 74188499)/62500000$$

son polynôme normalisé (au sens de l'algorithme) est:

$$pu = 6250000x^8 + 7000000x^6 + 13025000x^4 + 6722800x^2 + 6744409$$

les constantes de Schur de pu sont:

$\gamma_1 = 6424552759281$

$\gamma_2 = 412748781567851107316369 61$

$\gamma_3 = 590390033558935417109038859699688244185062701315521$

$\gamma_4 =$

348560391725720888016157234451617875191051412665239162559129240055094346722032960288445738063995501441

$\gamma_5 = ($

-529398922723317951416759910527200062741665869008921996610446482626174903053506569645012003966395572891939823839411764760483784904507095295398434794694292540377020340592555030015396846299950434715591923519

)

$\gamma_6 =$

280263219380609572009750997573570580044184732396419225850013710087448305145028966171890810991839042965905784614065630332936598063849495832457320320971324527681343097749512319830828600758393456000254340935859430133977010214369651671557682538430878101544818106500408086228660915012898296162175561577236148036981703915028 17

0826991425969720209916715995740807137691580277728985809716604214712909515497622345343361

$\gamma_7 =$

5970704524898720736499907960075698339145430516524733252912623828734962703602554975651324303851782624729493149859539015115021549251412116556468271221592637249875352515867570320852046375257488612596656143140007609030303230580177685233406547595899841272824505808355980790723624137808716023200651745886441305334523958089291420734917611887397748736997291845469153329356520359496040345271854448333152935772639464660099907791690526126837281370150792458499962510924696593143573901816940128550258146486749148165462881334955976446305132969692736926506816812125400602236711894509166497305052849771332874122617843823958917731373154116910606114385498386988160610927656413246619422078638343023947895274066638004248270536801808308744141532973402284039368787765410258198286377456106038240267544520715157141835419535232938041336321

$\gamma_8 =$

3564931252364605851127292372783010390786270498057232703641410626862332888296398586939294480893803667381531949699824142973843209952601155091557603857061499136466705404889828439824415461120073240988992653363557541359845876755788457715981257719926287323523292473657922597665352737730736798425163047681964118107342112162509070644271045239990403594913539752468675489774573349141985318618580059418089447814036116286629502558348630248420065349437173883453544862558466833710282669768516108284890484822079093469087273695885470458597198413859511161899715793588853153127374240298176176784423620986134093669663829440132261781411278552873736056234407403358219471071550662796593844627837750655173856256788234520237331107398226687304097751342557250329159243744007383156682106985418886149627806877610714147680150230196172040592635083096936649488765447997474223863237885532694322707391990404275246790918151174170163676928340009542853728197584415883345792011243854618203100445269011836127117082205197228707195418131459711055596007007164976911355062406834351784211618163793480229523349883745306951638895417121256821634057126256275382259745344487218759173530766558080673208894554688067160486965381000682061806238532778474930280687290159735016991827772877998302462762212668933133509213510197784613107810390697523947827830841916108730333403276720459614606765578622760674110644548884181198908441440104200811261405758679463104768886870971531493449150948855135114330518778104837683038867633586863337457831395770588112403183338606564670157196492038445815811528294117291056160417126231149121526898591246698821151611598215104497044782267963071590887433815041

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$$(62500000*x^9 - 68750000*x^8 + 70000000*x^7 - 77000000*x^6 + 130250000*x^5 - 143275000*x^4 + 67228000*x^3 - 73950800*x^2 + 67444090*x - 74188499)/62500000$$

est égal à :

4 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

4 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque, dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

II Etude du cas général.

1) Polynôme avec facteurs autoréciproques.

$$p := (2*(x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1))/3$$

son polynôme normalisé est:

$$pu = x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1$$

le calcul des constantes de Schur de pu donne:

$\gamma_1 = 0$

le transformé de Marden de pu est:

$$p^{1.1} = 3*(7*x^5 - 3*x^4 - 5*x^3 - 2*x^2 - 12*x + 1)$$

le calcul des constantes de Schur de $p^{1.1}$ donne:

$\gamma_1 = (-432)$

$\gamma_2 = (-344817)$

$\gamma_3 = 110055053808$

$\gamma_4 = 0$

le quatrième itéré de Schur est:

$$p^{1.1}_4 = 0$$

$$p^{1.1}_3 = 110055053808*(x^2 + 1)$$

le transformé de Cohn de $p^{1.1}_3$ est:

$$p^{2.2} = 220110107616$$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$(2*(x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1))/3$ est égal à :

3 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

1 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

2 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

2) Polynôme autoréciproque.

$p := (16*x^8 + 136*x^6 + 321*x^4 + 136*x^2 + 16)/24$

son polynôme normalisé est:

$pu=16*x^8 + 136*x^6 + 321*x^4 + 136*x^2 + 16$

le calcul des constantes de Schur de pu donne:

$\gamma_1 = 0$

le premier itére de Schur est:

$p_1 = 0$

$p_0 = 16*x^8 + 136*x^6 + 321*x^4 + 136*x^2 + 16$

le transformé de Cohn de p_0 (=pu) est:

$p_0^{1.2} = 4*(68*x^6 + 321*x^4 + 204*x^2 + 32)$

le calcul des constantes de Schur de $p_0^{1.2}$ donne:

$\gamma_1 = (-57600)$

$\gamma_2 = 3317760000$

$\gamma_3 = 0$

le troisième itéré de Schur est:

$$p_3^{1.2} = 0$$

$$p_2^{1.2} = 829440000*(4*x^4 + 17*x^2 + 4)$$

le transformé de Cohn de $p_2^{1.2}$ est:

$$p^{2.2} = 1658880000*(17*x^2 + 8)$$

les constantes de Schur de $p^{2.2}$ sont:

$$\gamma_1 = (-619173642240000000000)$$

$$\gamma_2 = 383375999244747512217600000000000000000000$$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$(16*x^8 + 136*x^6 + 321*x^4 + 136*x^2 + 16)/24$ est égal à :

4 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

4 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

4 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

III Exemples divers.

1) Normalisation (racines rationnelles).

```
          3       2
p := (16*x  - 24*x  - 15*x - 2)/24

N (p) = 2
 D

temps = 386 msec.
```

```
          5    4       3       2
p := (2*x  + x  - 13*x  - 2*x  + 20*x - 8)/3

N (p) = 2
 D

temps = 782 msec.
```

2) Cas régulier (constantes de Schur toutes non nulles).

```
          6       4       2
p := (2*(3*x  + 13*x  + 16*x  + 4))/3

N (p) = 2
 D

temps = 1657 msec.
```

```
               9            8            7            6
p := (1000000*x  - 1099999*x  + 1120000*x  - 1231999*x  + 2083999*

 5            4            3            2
x  - 2292400*x  + 1075647*x  - 1183212*x  + 1079105*x - 1187701)/

1000000

N (p) = 4
 D

temps = 8712 msec.
```

3) Cas singulier (constante de Schur nulle).

3.1) Polynômes sans facteurs autoréciproques.

```
          3
p := (2*(x  - 9*x + 1))/3
```

```
N (p) = 1
 D

temps = 998 msec.

          3     2
p := (2*(x  - x  + x + 2))/3

N (p) = 1
 D

temps = 951 msec.
```

3.2) Polynômes avec facteurs autoréciproques.

```
          5      3     2
p := (2*(x  - 8*x  + x  - 9*x + 1))/3

N (p) = 3
 D

temps = 2542 msec.
```

3.3) Polynômes autoréciproques.

```
          4      3      2
p := (2*(x  + 2*x  + 3*x  + 2*x + 1))/3

N (p) = 4
 D

temps = 1123 msec.

          4      3      2
p := (2*(x  + 3*x  + 2*x  + 3*x + 1))/3

N (p) = 3
 D

temps = 1223 msec.

          4       2
p := (4*x  + 17*x  + 4)/6

N (p) = 2
 D

temps = 835 msec.
```

```
          6        4        2
p := (4*x  + 21*x  + 21*x  + 4)/6

N (p) = 4
 D

temps = 1912 msec.


          8        6        4        2
p := (16*x  + 136*x  + 321*x  + 136*x  + 16)/24

N (p) = 4
 D

temps = 1546 msec.
```

IV Polynômes dans C[X].

1) Cas régulier.

$$p := i*x^5 + 2*x + i + 1$$

son polynôme normalisé (au sens de l'algorithme) est:

$$pu = i*x^5 + 2*x + i + 1$$

les constantes de Schur de pu sont:

$\gamma_1 = 1$

$\gamma_2 = (-3)$

$\gamma_3 = (-23)$

$\gamma_4 = 273$

$\gamma_5 = 18009$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$i*x^5 + 2*x + i + 1$ est égal à :

1 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

1 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

2) Cas singulier.

2.1) Polynômes sans facteurs autoréciproques.

$$p := x^5*i + x^2*(-2*i - 1) - i$$

son polynôme normalisé est:

$$pu = x^5 * i + x^2 * (- 2*i - 1) - i$$

le calcul des constantes de Schur de pu donne:

$$\gamma_1 = 0$$

le transformé de Marden de pu est:

$$p^{1.1} = 5*x^5 * (- 2*\mathrm{sqrt}(5) - 3) + 2*x^4 * \mathrm{sqrt}(5) * (4*i - 3) + 5*x^3 * (i + 2) + 20*x^2 * (- i + 2) + 15$$

les constantes de Schur de $p^{1.1}$ sont:

$$\gamma_1 = 100 (- 3\mathrm{sqrt}(5) - 5)$$

$$\gamma_2 = 12500 (24\mathrm{sqrt}(5) + 47)$$

$$\gamma_3 = 37500000 (- 13773\mathrm{sqrt}(5) - 30769)$$

$$\gamma_4 = 13183593750000000 (80248979\mathrm{sqrt}(5) + 179441879)$$

$$\gamma_5 = 109011840820312500000000000000000000 * (2911306766911749 * \mathrm{sqrt}(5) + 6509879834172133)$$

En évaluant la racine carrée de 5 par:

*** 0.4472136 represented by 447213/1000000

$p^{1.1}$ s'écrit de la manière suivante:

$$p^{1.1} = - 373605967369*x^5 + 44721300000*x^4 * (4*i - 3) + 50000000000 *x^3 * (i + 2) + 199999467369*x^2 * (- i + 2) + 149999467369$$

ses constantes de Schur deviennent:

$$\gamma_1 = (-11708157864274259700000 0)$$

$$\gamma_2 = 1258310704295563248728034503535330675000000000 0$$

γ_3 =(
-230869515727370869735359311409845228051539432791436818819612034816478639528828445000000000000
)

γ_4 =
473120326454339215088307125142726725991420435724675865680402571401577320923425166111432803699188690921927988635900315410224985648129314337353682422920153714635187500000000000000000000000

γ_5 =
1419202581050881094794214286029495177738749952791130183126942904237072096414442039187396346884607123920722002258139825188861697407869575894684886796700440079145338882146502798935629278250818703044236866272124093527150103141516011765039032330787405241040797643620230601897463387646974165580163208179802492494758831574062500000000000000000000000000000000000000000000000000000000

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$x^5 + x^2*(-2*i - 1) - i$ est égal à :

2 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

2 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

0 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

2.2)Polynômes autoréciproques.

$p := x^6*(i + 1) - i + 1$

son polynôme normalisé est:

$pu = x^6*(i + 1) - i + 1$

le calcul des constantes de Schur de pu donne:

γ_1 =0

le premier itéré de Schur est:

p_1 =0

$$p_0 = x^6 * (i + 1) - i + 1$$

le transformé de Cohn de p_0 (= pu) est:

$$p_{1.2} = 6 * (- i + 1)$$

le nombre de racines avec leurs ordres de multiplicité de

$x^6 * (i + 1) - i + 1$ est égal à :

6 dans le disque unité fermé,dont 0 rationnelles.

0 dans le disque unité ouvert,dont 0 rationnelles.

0 symétriques par rapport au cercle unité à l'intérieur du disque,

dont 0 rationnelles.

6 sur le cercle unité,dont 0 rationnelles.

REFERENCES

(1) P. Henrici — "Applied & Computational complex Analysis" vl, Wiley Interscience, 1974.

(2) M. Marden — "Geometry of polynomials" AMS Surveys 3, 2nd ed. ,1966.

(3) P. Chenin, B. Gleyse — "Nombre de racines d'un polynôme de R[X] dans le disque unité" Rapp. Rech. n° 458, IMAG TIM3, 1984.

(4) G. Ancochea — "Zeros of self-inversive polynomials" Proceedings of AMS, v4, 1953.

(5) M.A. Malik
1) "On the coefficients of self-inverse polynomials" Bollettino della unione matematica italiana, serie VI, VII-A, n° 3, 1983.
2) "An integral mean estimate for polynomials" Proceedings of AMS, v91, n° 2,1984.

(6) A. Aziz, Q.G. Mohammed — "Zero-free regions for polynomials and some generalizations of Eneström-Kakeya theorem" Canad. Math. Bull. vol. 27 (3), 1984.

(7) Vlastimil Ptak, N.J. Young — "A generalization of the zero location theorem of Schur and Cohn" IEEE Trans. Aut. Control, v25, n°5, 1980.

(8) A.S. Morse — "System invariants under feedback and cascade control" Proc. Int. Symp., 1975.

(9) L. Pernebo "An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems" IEEE Trans. Aut. Control. v26, n° 1, 1981.

(10) J.M. Dion "Sur la structure à l'infini des systèmes linéaires" Thèse d'Etat au Laboratoire d'automatique de Grenoble,1983.

(11) J. Demongeot "Systèmes dynamiques et champs aléatoires:application en biologie fondamentale" Thèse d'Etat au Laboratoire d'informatique et de mathémathiques appliquées de Grenoble,1983.

CHAPITRE 4

COMPARAISON ALGORITIMIQUE DES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRE ET DE MARDEN ET COHN

COMPARAISON ALGORITHMIQUE DE LA TRANSFORMATION CIRCULAIRE ET DES TRANSFORMATIONS DE MARDEN ET COHN

Introduction :

Nous rappelons que ces deux algorithmes sont applicables à n'importe quel polynôme de $\mathbb{R}[X]$, donc très généraux.

Il n'en reste pas moins vrai que sur les exemples simulés la transformation circulaire est de toute évidence moins efficace.

Dans une première partie nous ferons une étude de la complexité de ces deux groupes de transformations et dans une seconde nous étudirons d'une part leurs relations possibles et d'autre part la taille des coefficients.

I] Etude de la complexité.

Nous sommes dans le cas singulier, c'est-à-dire il existe une constante de Schur d'indice k_0+1, de 0 à n-1, nulle.

1) Transformation circulaire [3]

$\sim$

Calcul du nombre c.

Notons N_0 le degré du k_0-ème itéré de Schur.

1.1 Calcul de toutes les constantes de Schur du k_0-ème itéré de Schur, dépendant de c, d'indice de 1 à N_0.

Nous rappelons que ces constantes sont des polynômes en la variable c de degré $2^k N_0$, noté $N_1(k)$.

Nous allons calculer leur coût en opérations élémentaires (multiplications et divisions arithmétiques).

Pour chaque itéré de Schur, il faut calculer ses coefficients dépendant de c; pour chaque coefficient il faut faire deux fois la multiplication de deux polynômes par la formule récurrente suivante [3] :

$$a_i^{(k+1)}(c) = a_0^{(k)}(c)\, a_i^{(k)}(c) - a_{N_0-k}^{(k)}(c)\, a_{N_0-k-i}^{(k)}(c) \qquad i=0,\ldots,N_0-(k+1)$$

On sait de plus que le degré de $a_i^{(k)}$ est au plus $2^k N_0 - i$,[3].

Soit au total:

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{i=0}^{N_0-(k+1)} (2^k N_0+1)(2^k N_0-i+1) + (2^k N_0-(N_0-k)+1)(2^k N_0-(N_0-k-i)+1)$$

Soit après développements et calculs récurrents:

$$8/9 N_0{}^2 4^{N_0} - 4 N_0 2^{N_0} + 1/8 N_0{}^4 + 5/4 N_0{}^3 + 395/72 N_0{}^2 + 31/12 N_0$$

1.2 Calcul des translatés de δ_k, notés ζ_k.

Après avoir enlever la racine 1 des constantes de Schur, nous obtenons de nouveaux polynômes, notés δ_k, de degré $N_2(k)$ ($\leq N_1(k)$).

Leur coût en opérations est négligeable [2].

Nous avons $\zeta_k(c) = \delta_k(c+1)$.

Par la méthode de Ruffini-Horner il faut pour chaque k $(N_2(k)+1)^2 + 2$ opérations. Il existe une méthode basée sur la transformation de Fourier rapide en $O(N_2(k) \log(N_2(k))$,[1].

Le calcul des nombres c_k s'en déduit.

Ainsi pour le calcul de $\tilde{c}$ il faut au total ($N_2(k)$ proche de $N_1(k)$) :

$$\sum_{k=1}^{N_0} (N_1(k)+1)^2 + 2 \text{ opérations , c'esr-à-dire :}$$

$$4/3 N_0{}^2(4^{N_0} - 1) + 4N_0(2^{N_0} - 1) + 3N_0 .$$

Remarque:

Il reste encore le calcul des constantes de Schur du k_0-ème itéré de Schur en $\tilde{c}$ avec un coût de $N_0(N_0+1)$ opérations.

1.3 Conclusion.

Au total le coût du calcul du nombre $\tilde{c}$ est en $o(20/9 N_0{}^2 4^{N_0})$ en opérations élémentaires, avec une dominance du calcul des δ_k sur celui des constantes de Schur, γ_k.

De plus au niveau algébrique nous avons à étudier les coefficients de N_0 polynômes de degré $2^k N_0$ de $k=1,\ldots,N_0$.

2) Transformations de Marden et Cohn [4].

Nous rappelons que ces transformations sont utilisées conjointement au plus N_0 fois.

2.1 Transformation de Cohn.

Il s'agit de calculer le polynôme réciproque de la dérivée du k_0-ème itéré de Schur, de degré N_0. Ce qui est très peu coûteux en opérations.

2.2 Transformation de Marden.

On suppose qu'on fait N_0 transformations de Marden.
A chaque pas i de 1 à N_0 il y a $2(i+1)$ multiplications et divisions à faire pour calculer la i-ème transformation.

$$\text{D'où au total } \sum_{i=1}^{N_0} 2(i+1) = N_0(N_0+3).$$

Il reste pour chaque transformation de Marden à calculer ses 2 premières constantes de Schur.
Soit d_i le degré de la i-ème transformation, variant de 2 à N_0 (si $d_i=1$ on n'a pas besoin de calculer ses constantes de Schur).
Pour chaque d_i de 2 à N_0 il y a $2(d_i-1)$ multiplications et divisions à faire.

$$\text{Soit au total } \sum_{d_i=2}^{N_0} 2(d_i-1) = 2(N_0{}^2-1)$$

2.3 Conclusion.

Au total les transformations de Marden et Cohn et leurs calculs de constantes de Schur demandent un coût en opérations élémentaires en $o(3N_0{}^2)$.

De toute évidence ces transformations sont de loin plus efficaces.

II] Transformation circulaire et transformations de Marden et Cohn.

La transformation de Cohn est utilisée si et seulement si il existe un facteur autoréciproque du polynôme considéré, noté p. Or ce facteur s'obtient en prenant le pgcd de p et de son polynôme réciproque.

Donc nous avons intégré dans l'algorithme basé sur la transformation circulaire cette normalisation. On évite ainsi des tests de Schur-Cohn et surtout d'avoir des polynômes en la variable c de degré très élevé avec toutefois des calculs en plus; par exemple pour le polynôme $(x^2+1)(x^3-9x+1)$ il faut calculer 2 nombres $\underset{\sim}{c}$, un pour la partie autoréciproque et un autre pour l'autre facteur.

D'autre part, nous rappelons l'existence de critères dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ d'utilisation des transformations de Marden et Cohn (factorisation en éléments autoréciproques, caractérisation de certaines classes de polynômes) qui est très intéressante pour diminuer le coût en opérations.

III] Taille des coefficients.

Le choix de la normalisation au départ de l'algorithme : rendre les coefficients de p premiers entre eux et dans $\mathbb{Z}[X]$ peut introduire des coefficients d'itérés de Schur de grande taille. Mais en divisant par le pgcd des coefficients extrêmes de la transformation de Schur on réduit cette taille. De plus pour la transformation circulaire on peut revenir à la normalisation classique (coefficient de tête égal à 1) ; c'est le choix qui a été fait en raison du degré des polynômes en la variable c.

Conclusion.

Le calcul du nombre $\underset{\sim}{c}$ ne permet pas la paramétrisation ; par ailleurs, on retrouvera certains résultats dans l'étude des polynômes paramétrés.

L'intérêt des transformations de Marden et Cohn est le suivant : elles prennent plus directement en compte l'effet du test de Schur-Cohn à chaque étape du calcul, alors que la transformation circulaire le globalise.

Références :

[1] **A.G. Akritas** "On the complexity of Algorithms for the Translation of Polynomials"
S.D. Danielopoulos Computing, v24, fasc. 1, 1980.

[2] **J.H. Davenport** "intégration formelle"
Rapp. Rech., n°375, p23-39, IMAG, 1983.

[3] **P. Chenin**
B. Gleyse "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°458, IMAG TIM3, 1984.

[4] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°551, IMAG TIM3, 1985.

CHAPITRE 5

ETUDE DES CONSTANTES DE SCHUR PARAMETREES

ETUDE DES CONSTANTES DE SCHUR

EN FONCTION DES COEFFICIENTS DU POLYNOME

DANS $\mathbb{R}[X]$

Notation :

$p = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$, $n \geq 1$; sg(a) est le signe du nombre réel a.

Introduction :

Nous rappelons que les constantes de Schur sont réelles à partir de l'indice 1 et leurs signes donnent le nombre de racines dans le disque unité de façon générale ou partielle [1].

L'étude des constantes de Schur s'appuie sur la relation récurrente suivante :

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k^2 - (p_{n-k}^{(k)})^2 \quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

On voit tout de suite que γ_{k+1} est factorisable en au moins 2 facteurs.

Il est donc intéressant d'étudier le comportement de cette factorisation entre constantes de Schur, leur pgcd ...

D'autre part nous rappelons [3] que si $p_{n-k}^{(k)} = 0$ et $\gamma_k \neq 0$ alors γ_{k+1} est positif et nous avons :

$$\gamma_{k+2} = \gamma_k^2 \left(\gamma_k^2 - (p_{n-(k+1)}^{(k)})^2\right)$$

d'où $sg(\gamma_{k+2}) = sg(\gamma_k^2 - (p_{n-(k+1)}^{(k)})^2)$

jusqu'au cas extrême où l'itéré de Schur p_k est constant et on a $\gamma_{k+j} = \gamma_k^{2j}$ de j=0 à n-k ; mais dans ce cas le nombre de zéros de cet itéré dans le disque unité est nul.

I] Normalisation.

Notation : $p^n = p(p_0,p_1,\ldots,p_n)$

Propriétés :

D'après les relations de récurrence entre coefficients d'itérés de Schur [2], nous avons pour tout $k \leq E((n+1)/2)$:

(1) $\gamma_k(p^n) = \gamma_k(p^{2k-1}(p_0,p_1,\ldots,p_{k-1},p_{n-k+1},\ldots,p_{n-1},p_n))$

Ainsi si on fixe k on sait calculer symboliquement (par substitution) $\gamma_k(p^n)$ pour tout $n \geq 2k-1$ si on connaît formellement $\gamma_k(p^{2k-1})$.

Par exemple : le calcul formel de $\gamma_3(p^5)$ permet de calculer $\gamma_3(p^n)$ pour tout $n \geq 5$.

Remarque : On voit dans la formule (1) ci-dessus l'invariance des k premiers termes de p^{2k-1} justifiée puisque $n \geq k$ et la substitution par décalage d'une unité en partant de n des k derniers.

II Factorisation des constantes de Schur.

D'après la normalisation précédente on peut étudier la factorisation des premières constantes de Schur d'un polynôme à coefficients symboliques de degré limité.

Calcul formel des facteurs pour n=1,2,....5.

cf annexe sorties-listing.

Remarque : On voit dans ce calcul très nettement les facteurs communs entre constantes de Schur.

Conclusion :

De telles propriétés s'appliquent avantageusement en coût calcul et en précision (facteurs communs de constantes de Schur) dans le cas de polynômes à coefficients polynomiaux.

Références :

[1] P. Henrici "Applied and Computational Complex Analysis" Wiley Interscience, v1, 1974.

[2] **P. Chenin**
B. Gleyse "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°458, TIM3/IMAG, Grenoble, 1984.

[3] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°551, TIM3/IMAG, Grenoble, 1985.

- ANNEXE -

Notations : Les constantes de Schur sont notées gk k=1,...,n
Leurs facteurs sont écrits gk,l l=0,...,L(k) où L(k) est le nombre de facteurs non constants de gk.

$p(x):=p0 + p1*x$

$g1=p0^2 - p1^2$

g1,0=1

g1,1=p0 - p1

g1,2=p0 + p1

$p(x):=p0 + p1*x + p2*x^2$

$g1=p0^2 - p2^2$

g1,0=1

g1,1=p0 - p2

g1,2=p0 + p2

$g2=p0^4 - p0^2*p1^2 - 2*p0^2*p2^2 + 2*p0*p1^2*p2 - p1^2*p2^2 + p2^4$

g2,0=(-1)

g2,1= - p0 + p1 - p2

g2,2=p0 + p1 + p2

g2,3=p0 - p2

g2,4=p0 - p2

$p(x):=p0 + p1*x + p2*x^2 + p3*x^3$

$g1=p0^2 - p3^2$

g1,0=1

g1,1=p0 - p3

g1,2=p0 + p3

```
      4     2   2        2   2                          2   2     4
g2=p0  - p0 *p2  - 2*p0 *p3  + 2*p0*p1*p2*p3 - p1 *p3  + p3

g2,0=(-1)

          2                        2
g2,1= - p0  + p0*p2 - p1*p3 + p3

        2                        2
g2,2=p0  + p0*p2 - p1*p3 - p3

      8     6   2        6   2        6   2        5   2           5
g3=p0  - p0 *p1  - 2*p0 *p2  - 4*p0 *p3  + 2*p0 *p1 *p2 + 6*p0 *p1*p2*p3

           4   3        4   2   2        4       2         4   4        4   2
    - 2*p0 *p1 *p3 - p0 *p1 *p2  - 4*p0 *p1*p2 *p3 + p0 *p2  + 3*p0 *p2

       2        4   4        3   3              3   2       2        3       3
    *p3  + 6*p0 *p3  + 2*p0 *p1 *p2*p3 + 2*p0 *p1 *p2*p3  - 2*p0 *p1*p2 *

             3          3        3   3   2      2   4   2        2   3   3
    p3 - 12*p0 *p1*p2*p3  + 2*p0 *p2 *p3  - p0 *p1 *p3  + 2*p0 *p1 *p3

           2   2   2   2        2   2   4        2       2   3      2   4   2
     + 2*p0 *p1 *p2 *p3  + 3*p0 *p1 *p3  + 2*p0 *p1*p2 *p3  - p0 *p2 *p3

           2   6           3       3           2       4              3   3
     - 4*p0 *p3  - 2*p0*p1 *p2*p3  - 4*p0*p1 *p2*p3  + 2*p0*p1*p2 *p3  +

                  5           3   4      4   4      2   2   4        2   6
    6*p0*p1*p2*p3  - 2*p0*p2 *p3  + p1 *p3  - p1 *p2 *p3  - 2*p1 *p3  + 2

          2   5      2   6      8
    *p1*p2 *p3  - p2 *p3  + p3

g3,0=(-1)

g3,1= - p0 + p1 - p2 + p3

g3,2=p0 + p1 + p2 + p3

g3,3=p0 - p3

g3,4=p0 + p3

        2                        2
g3,5=p0  - p0*p2 + p1*p3 - p3

        2                        2
g3,6=p0  - p0*p2 + p1*p3 - p3


                          2        3        4
p(x):=p0 + p1*x + p2*x  + p3*x  + p4*x

      2      2
g1=p0  - p4

g1,0=1
```

g1,1=p0 - p4

g1,2=p0 + p4

$$g2=p0^4 - p0^2*p3^2 - 2*p0^2*p4^2 + 2*p0*p1*p3*p4 - p1^2*p4^2 + p4^4$$

g2,0=(-1)

$$g2,1= - p0^2 + p0*p3 - p1*p4 + p4^2$$

$$g2,2=p0^2 + p0*p3 - p1*p4 - p4^2$$

$$g3=p0^8 - p0^6*p2^2 - 2*p0^6*p3^2 - 4*p0^6*p4^2 + 2*p0^5*p1*p2*p3 + 4*p0^5*p1*p3*p4$$
$$+ 2*p0^5*p2^2*p4^2 - 2*p0^4*p1^2*p2*p4^2 - p0^4*p1^2*p3^2 - 2*p0^4*p1^2*p4^2 - 2*p0^4*$$
$$p1*p2*p3*p4^2 + p0^4*p2^2*p4^4 - 2*p0^4*p2*p3^2*p4^2 + p0^4*p3^4 + 4*p0^4*p3^2*p4^4 +$$
$$6*p0^4*p4^8 + 2*p0^3*p1^3*p3*p4^2 + 2*p0^3*p1^2*p2*p4^2 - 2*p0^3*p1*p3^3*p4^2 - 8*p0^3$$
$$*p1*p3*p4^6 - 4*p0^3*p2^2*p4^6 + 2*p0^3*p2*p3^2*p4^4 - p0^2*p1^2*p4^4 + 2*p0^2*p1^2*$$
$$p2*p4^4 + 2*p0^2*p1^2*p3^2*p4^4 + 4*p0^2*p1^2*p4^6 + p0^2*p2^2*p4^6 + 2*p0^2*p2*p3^2*$$
$$p4^5 - p0^2*p3^4*p4^4 - 2*p0^2*p3^2*p4^6 - 4*p0^2*p4^8 - 2*p0*p1^3*p3*p4^4 - 2*p0*$$
$$p1^2*p2*p4^5 - 2*p0*p1*p2*p3*p4^5 + 2*p0*p1*p3^3*p4^5 + 4*p0*p1*p3*p4^7 + 2*p0$$
$$*p2^2*p4^6 - 2*p0*p2*p3^2*p4^6 + p1^2*p4^6 - p1^2*p3^2*p4^6 - 2*p1^2*p4^8 + 2*p1*p2$$
$$*p3*p4^7 - p2^2*p4^8 + p4^{10}$$

g3,0=(-1)

$$g3,1= - p0^3 + p0^2*p2 + p0^2*p4 - p0*p1*p3 - 2*p0*p2*p4^2 + p0*p3^2 + p0*p4^2 +$$
$$p1^2*p4^2 - p1*p3*p4^2 + p2*p4^3 - p4^4$$

g3,2=p0 - p4

g3,3=p0 + p4

$$g3,4=p0^3 + p0^2*p2^2 + p0^2*p4^2 - p0*p1*p3^2 - p0*p3^2*p4^2 - p0*p4^4 + p1^2*p4^4 + p1*p3*p4^4$$

$$- p2*p4^2 - p4^3$$

$$g4=p0^{16} - p0^{14}*p1^2 - 2*p0^{14}*p2^2 - 4*p0^{14}*p3^2 - 8*p0^{14}*p4^2 + 2*p0^{13}*p1*p2$$

$$+ 6*p0^{13}*p1*p2*p3 + 10*p0^{13}*p1*p3*p4 + 4*p0^{13}*p2^2*p4 - 2*p0^{12}*p1^3 -$$

$$p0^{12}*p1^2*p2^2 - 8*p0^{12}*p1^2*p2*p4 + 2*p0^{12}*p1^2*p4^2 - 4*p0^{12}*p1*p2^2*p3 - 10$$

$$*p0^{12}*p1*p2*p3*p4 + p0^{12}*p2^4 + 3*p0^{12}*p2^2*p3^2 + 10*p0^{12}*p2^2*p4^2 - 6*p0^{12}$$

$$*p2^2*p3^2*p4 + 6*p0^{12}*p3^4 + 23*p0^{12}*p3^2*p4^2 + 28*p0^{12}*p4^4 + 2*p0^{11}*p1^3*p4$$

$$+ 2*p0^{11}*p1^3*p2*p3 + 6*p0^{11}*p1^2*p2^2*p4 + 2*p0^{11}*p1^2*p2^2*p3^2 - 4*p0^{11}*p1$$

$$*p2^2*p4^2 + 6*p0^{11}*p1^2*p3^2*p4^2 - 2*p0^{11}*p1*p2^2*p3^3 + 4*p0^{11}*p1*p2^2*p3*p4^3 -$$

$$12*p0^{11}*p1*p2*p3^3 - 20*p0^{11}*p1*p2*p3^2*p4^2 - 24*p0^{11}*p1*p3^4*p4^2 - 60*p0^{11}*$$

$$p1*p3^3*p4^3 - 4*p0^{11}*p2^3*p4^2 + 2*p0^{11}*p2^3*p3^2 - 2*p0^{11}*p2^2*p3^3*p4^2 - 24*p0^{11}$$

$$*p2^3*p4^3 + 8*p0^{11}*p2^2*p3^2*p4^3 - 2*p0^{10}*p1^2*p2^2*p4^2 - p0^{10}*p1^2*p3^4 - 6*p0^{10}*$$

$$p1^3*p2*p3*p4^2 + 2*p0^{10}*p1^3*p3^3 + 2*p0^{10}*p1^3*p3^2*p4^3 + 2*p0^{10}*p1^2*p2^2*p4^3 +$$

$$2*p0^{10}*p1^2*p2^2*p3^3 - 2*p0^{10}*p1^2*p2^2*p4^4 + 28*p0^{10}*p1^2*p2*p3^3*p4^3 + 40*$$

$$p0^{10}*p1^2*p2*p3^4 + 3*p0^{10}*p1^2*p3^5 + 36*p0^{10}*p1^2*p3^3*p4^4 + 9*p0^{10}*p1^2*p4^6$$

$$+ 2*p0^{10}*p1*p2^3*p3^2*p4^3 + 2*p0^{10}*p1*p2^3*p3^3 + 16*p0^{10}*p1*p2^2*p3^2*p4^4 + 8*$$

$$p0^{10}*p1*p2*p3^5*p4^2 + 44*p0^{10}*p1*p2*p3^3*p4^4 - 6*p0^{10}*p1*p3^5*p4^3 - p0^{10}*p2^2*$$

$$p3^2 + 2*p0^{10}*p2^2*p4^2 - 4*p0^{10}*p2^2*p3^2*p4^3 - 18*p0^{10}*p2^2*p3^4*p4^2 - 18*p0^{10}$$

$$*p2^2*p4^6 + 12*p0^{10}*p2*p3^2*p4^5 + 28*p0^{10}*p2*p3^4*p4^3 - 4*p0^{10}*p3^6 - 24*p0^{10}$$

$$*p3^4*p4^4 - 54*p0^{10}*p3^2*p4^6 - 56*p0^{10}*p4^8 + 2*p0^{9}*p1^2*p3^3*p4^4 + 4*p0^{9}*p1^2*$$

$$p2*p4^4 - 6*p0^{9}*p1^2*p3^2*p4^5 - 8*p0^{9}*p1^2*p4^7 - 4*p0^{9}*p1*p2^2*p3^3*p4^3 - 2*p0^{9}*$$

$$p1^{3}*p2^{3}*p3^{9} - 32*p0*p1^{3}*p2^{2}*p3^{9}*p4^{3} - 8*p0*p1^{3}*p3^{9}*p4^{3} - 24*p0*p1^{3}*p3^{9}*p4^{3}$$

$$- 4*p0*p1^{2}*p2^{3}*p4^{2} - 10*p0*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{9} - 26*p0*p1^{2}*p2^{2}*p4^{3} - 4*$$

$$p0^{2}*p1^{9}*p2^{4}*p3^{2} - 28*p0^{2}*p1^{9}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{4} - 10*p0^{2}*p1^{9}*p2^{4}*p4^{2} - 6*p0^{2}*p1^{9}*$$

$$p3^{4}*p4^{2} - 18*p0^{2}*p1^{9}*p3^{2}*p4^{3} + 2*p0^{2}*p1^{9}*p2^{4}*p3^{3}*p4^{2} + 2*p0^{2}*p1^{9}*p2^{3}*p3^{3} + 10$$

$$*p0^{2}*p1^{9}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{3} - 8*p0^{2}*p1^{9}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{3} - 12*p0^{2}*p1^{9}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{2} + 6*p0^{2}*$$

$$p1^{9}*p2^{5}*p3^{3} + 10*p0^{2}*p1^{9}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{4} + 10*p0^{2}*p1^{9}*p2^{3}*p3^{4}*p4^{5} + 18*p0^{2}*p1^{9}*p3^{3}*$$

$$p4^{3} + 96*p0^{2}*p1^{9}*p3^{3}*p4^{5} + 150*p0^{2}*p1^{9}*p3^{5}*p4^{4} + 4*p0^{2}*p2^{9}*p3^{4}*p4^{2} + 12*p0^{2}*$$

$$p2^{4}*p3^{3}*p4^{4} - 2*p0^{2}*p2^{9}*p3^{3}*p4^{4} - 6*p0^{2}*p2^{9}*p3^{3}*p4^{2}*p4^{2} - 2*p0^{2}*p2^{9}*p3^{2}*p4^{4} + 14*p0^{2}*$$

$$p2^{2}*p3^{2}*p4^{3} + 60*p0^{2}*p2^{9}*p4^{5} - 10*p0^{2}*p2^{9}*p3^{4}*p4^{2} - 40*p0^{2}*p2^{9}*p3^{2}*p4^{4} + 2$$

$$*p0^{2}*p3^{9}*p4^{4}*p4^{3} - p0^{2}*p1^{8}*p4^{6}*p4^{2} + 6*p0^{2}*p1^{8}*p3^{5}*p4^{2} + 2*p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p4^{2}*p4^{2} + 6*$$

$$p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p3^{2}*p4^{2} + 16*p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p4^{3} + p0^{2}*p1^{8}*p3^{4}*p4^{4} + 12*p0^{2}*p1^{8}*p3^{4}*p4^{2}$$

$$+ 6*p0^{2}*p1^{8}*p4^{4}*p4^{4} + 14*p0^{2}*p1^{8}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{2} + 18*p0^{2}*p1^{8}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{3} + 44*p0^{2}$$

$$*p1^{3}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{8} + 14*p0^{2}*p1^{8}*p3^{3}*p4^{3}*p4^{2} + 12*p0^{2}*p1^{8}*p3^{4}*p4^{2} - p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p4^{2} *$$

$$p4^{2} - 6*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{2} - 6*p0^{2}*p1^{8}*p2^{3}*p4^{3} - p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{4} + 18*$$

$$p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{2}*p4^{2} + 21*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p4^{4} - 20*p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p3^{2}*p4^{4} - 62*p0^{2}$$

$$*p1^{2}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{8} - 80*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p4^{5} - 2*p0^{2}*p1^{8}*p3^{2}*p4^{6} - 48*p0^{2}*p1^{8}*p3^{4}*p4^{2}$$

$$- 144*p0^{2}*p1^{8}*p3^{2}*p4^{2}*p4^{4} - 40*p0^{2}*p1^{8}*p4^{6} - 8*p0^{2}*p1^{8}*p2^{4}*p3^{2}*p4^{4} + 2*p0^{2}*p1^{8}$$

$$*p2^{3}*p3^{3}*p4^{8} - 10*p0^{2}*p1^{8}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{2} + 2*p0^{2}*p1^{8}*p2^{3}*p3^{2} + 12*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*$$

$$p3^{2}*p4^{8} - 28*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{4} + 2*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{5}*p4^{8} + 2*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{3}*$$

$$p4^{3} - 70*p0^{2}*p1^{8}*p2^{2}*p3^{5}*p4^{8} + 6*p0^{2}*p1^{8}*p3^{5}*p4^{2} + 22*p0^{2}*p1^{8}*p3^{3}*p4^{4} - 4*p0^{2}$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{4\ 2\ 2}_{*p2\ *p3\ *p4} - 17{}^{*p0\ *p2\ *p4} + 4{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} + 16{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} - \\
&{}^{8\ 2\ 6}_{p0\ *p2\ *p3} + 6{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} + 41{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} + 10{}^{*p0\ *p2\ *p4} - \\
&{}^{8\ \ 6}_{6*p0\ *p2*p3\ *p4} - 40{}^{*p0\ *p2*p3\ *p4} - 50{}^{*p0\ *p2*p3\ *p4} + {}^{p0\ *p3} + 11* \\
&{}^{8\ 6\ 2}_{p0\ *p3\ *p4} + 36{}^{*p0\ *p3\ *p4} + 65{}^{*p0\ *p3\ *p4} + 70{}^{*p0\ *p4} - 2{}^{*p0\ *p1\ *} \\
&{}^{3\ \ 7\ 5\ \ 2\ \ 7\ 5\ 3\ \ 7\ 5\ \ 3\ \ 7}_{p4} - 6{}^{*p0\ *p1\ *p2*p3*p4} - 4{}^{*p0\ *p1\ *p3\ *p4} - 12{}^{*p0\ *p1\ *p3*p4} - 6{}^{*p0} \\
&{}^{4\ 2\ 3\ \ 7\ 4\ \ 2\ 2\ \ 7\ 4\ \ 4\ \ 7\ 4\ 2}_{*p1\ *p2\ *p4} - 30{}^{*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4} - 24{}^{*p0\ *p1\ *p2*p4} - 6{}^{*p0\ *p1\ *p3} \\
&{}^{3\ \ 7\ 4\ 5\ \ 7\ 3\ 3\ \ 2\ \ 7\ 3\ 2\ 3}_{*p4} + 12{}^{*p0\ *p1\ *p4} + 6{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p3*p4} + 4{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4} - 12 \\
&{}^{7\ 3\ 2\ \ 3\ \ 7\ 3\ \ 3\ 2\ \ 7\ 3\ \ 4}_{*p0\ *p1\ *p2\ *p3*p4} + 28{}^{*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4} + 76{}^{*p0\ *p1\ *p2*p3*p4} + 8* \\
&{}^{7\ 3\ 5\ \ 7\ 3\ 3\ 3\ \ 7\ 3\ \ 5\ \ 7\ 2\ 4}_{p0\ *p1\ *p3\ *p4} + 72{}^{*p0\ *p1\ *p3\ *p4} + 96{}^{*p0\ *p1\ *p3*p4} + 4{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *} \\
&{}^{3\ \ 7\ 2\ 3\ 2\ 2\ \ 7\ 2\ 3\ 4\ \ 7\ 2\ 2\ 4}_{p4} + 6{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4} + 16{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p4} - 8{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4} \\
&{}^{7\ 2\ 2\ 2\ 3\ \ 7\ 2\ 2\ 5\ \ 7\ 2\ \ 4\ 2}_{-\ 8*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4} + 44{}^{*p0\ *p1\ *p2\ *p4} - 4{}^{*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4} + \\
&{}^{7\ 2\ \ 2\ 4\ \ 7\ 2\ \ 6\ \ 7\ 2\ 4\ 3\ \ 7}_{44*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4} + 40{}^{*p0\ *p1\ *p2*p4} - 6{}^{*p0\ *p1\ *p3\ *p4} + 12{}^{*p0\ *} \\
&{}^{2\ 2\ 5\ \ 7\ \ 4\ \ 3\ \ 7\ \ 3\ 3\ 2\ \ 7}_{p1\ *p3\ *p4} + 8{}^{*p0\ *p1*p2\ *p3*p4} - 14{}^{*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4} - 20{}^{*p0\ *p1*} \\
&{}^{3\ \ 4\ \ 7\ \ 2\ 5\ \ 7\ \ 2\ 3\ 3\ \ 7\ \ 2}_{p2\ *p3*p4} + 4{}^{*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4} - 4{}^{*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4} + 8{}^{*p0\ *p1*p2\ *} \\
&{}^{5\ \ 7\ \ 5\ 2\ \ 7\ \ 3\ 4\ \ 7}_{p3*p4} + 10{}^{*p0\ *p1*p2*p3\ *p4} + 48{}^{*p0\ *p1*p2*p3\ *p4} + 40{}^{*p0\ *p1*p2*p3*} \\
&{}^{6\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 5\ 3\ \ 7\ \ 3\ 5\ \ 7}_{p4} - 4{}^{*p0\ *p1*p3\ *p4} - 44{}^{*p0\ *p1*p3\ *p4} - 144{}^{*p0\ *p1*p3\ *p4} - 200{}^{*p0} \\
&{}^{7\ \ 7\ 4\ 2\ 3\ \ 7\ 4\ 5\ \ 7\ 3\ 4\ 2}_{*p1*p3*p4} - 4{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} - 8{}^{*p0\ *p2\ *p4} + 2{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} + 4* \\
&{}^{7\ 3\ 2\ 4\ \ 7\ 2\ 4\ 3\ \ 7\ 2\ 2\ 5\ \ 7\ 2}_{p0\ *p2\ *p3\ *p4} - 2{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} - 36{}^{*p0\ *p2\ *p3\ *p4} - 80{}^{*p0\ *p2\ *} \\
&{}^{7\ \ 7\ \ 6\ 2\ \ 7\ \ 4\ 4\ \ 7\ \ 2\ 6\ \ 7}_{p4} + 2{}^{*p0\ *p2*p3\ *p4} + 32{}^{*p0\ *p2*p3\ *p4} + 80{}^{*p0\ *p2*p3\ *p4} - 2{}^{*p0\ *} \\
&{}^{6\ 3\ \ 7\ 4\ 5\ \ 6\ 6\ \ 3\ \ 6\ 6\ 2\ 2\ \ 6}_{p3\ *p4} - 8{}^{*p0\ *p3\ *p4} + 2{}^{*p0\ *p1\ *p2*p4} + 6{}^{*p0\ *p1\ *p3\ *p4} + 5{}^{*p0\ *}
\end{aligned}
$$

$$p1^{6}\,p4^{4} + 22\,p0\,p1^{6}\,p2\,p3\,p4^{5} - 6\,p0\,p1^{3}\,p3\,p4^{6} - 2\,p0\,p1^{5}\,p2\,p4^{4} -$$

$$6\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{2}\,p4^{2} + 2\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p4^{4} - 24\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{4}\,p4^{3} - 36\,p0\,p1^{6}\,p2\,p4^{5} -$$

$$14\,p0\,p1^{6}\,p3^{4}\,p4^{4} - 63\,p0\,p1^{6}\,p3^{2}\,p4^{4} - 24\,p0\,p1^{6}\,p4^{6} - 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{3}\,p4^{3} + 12\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{2}\,p4^{2} - 12\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{4}\,p4^{2} -$$

$$12\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{3}\,p4^{3} - 84\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{3}\,p4^{5} - 16\,p0\,p1^{6}\,p3^{3}\,p4^{4} - 28\,p0\,p1^{6}\,p3^{6}\,p4^{2} - 4\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p4^{4} + 18\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{2}\,p4^{3} + 4\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{5}\,p4^{2} - 4\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{2}\,p4^{4} - 20\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{2}\,p4^{4} - 44\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{2}\,p4^{6} + 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{3}\,p4^{2} + 16\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{5}\,p4^{2} + 80\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{7}\,p4^{2} + 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{6}\,p3^{2}\,p4^{2} + 97\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{4}\,p4^{2} + 216\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{4}\,p4^{6} + 65\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{8}\,p4^{6} + 8\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{4}\,p4^{6} + 2\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{3}\,p4^{3} + 20\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{5}\,p4^{6} - 4\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{5}\,p4^{2} - 16\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{3}\,p4^{4} + 32\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{6}\,p4^{6} - 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{5}\,p3^{3}\,p4^{6} - 56\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{5}\,p4^{6} + 40\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{7}\,p4^{6} - 6\,p0\,p1^{6}\,p2^{5}\,p3^{4}\,p4^{6} - 28\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{6}\,p4^{6} + 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{6}\,p3^{4}\,p4^{2} + 28\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{6}\,p4^{4} - 8\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{4}\,p4^{6} - 24\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{2}\,p4^{5} + 2\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{6}\,p4^{2} - 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{4}\,p3^{4}\,p4^{4} - 44\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{2}\,p4^{6} + 10\,p0\,p1^{6}\,p2^{6}\,p3^{2}\,p4^{8} + 12\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{6}\,p4^{3} + 48\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{4}\,p4^{5} + 40\,p0\,p1^{6}\,p2^{3}\,p3^{2}\,p4^{7} - 2\,p0\,p1^{6}\,p2^{2}\,p3^{6}\,p4^{6} - 11\,p0\,p1^{6}\,p3^{4}\,p4^{6} - 24\,p0\,p1^{6}\,p3^{2}\,p4^{8} - 40\,p0\,p1^{6}\,p3^{4}\,p4^{6} - 56\,p0\,p1^{6}\,p4^{10} -$$

$$4\,p0\,p1^{5}\,p3^{7}\,p4^{3} - 6\,p0\,p1^{5}\,p2^{6}\,p3^{4}\,p4^{4} + 4\,p0\,p1^{5}\,p2^{6}\,p3^{5}\,p4^{5} + 4\,p0\,p1^{5}\,p2^{6}\,p3^{5}\,p4^{5} + 14\,p0\,p1^{5}\,p2^{5}\,p3^{3}\,p4^{3} + 16\,p0\,p1^{5}\,p2^{5}\,p3^{5}\,p4^{5} + 36\,p0\,p1^{5}\,p2^{5}\,p3^{5}\,p4^{5} + 4\,p0\,p1^{5}\,p2^{4}\,p3^{3}\,p4^{4} - 8\,p0\,p1^{5}\,p2^{4}\,p3^{2}\,p4^{2} + 10\,p0\,p1^{5}\,p2^{4}\,p3^{2}\,p4^{5} + 40\,p0\,$$

$$
\begin{aligned}
&p1^{4}\,*p2^{2}*p3^{4}*p4^{5} + 48*p0^{4}*p1^{5}*p2^{6}*p4^{5} + 24*p0^{4}*p1^{5}*p3^{2}*p4^{5} - 8*p0^{5}*p1^{4}*p4^{7}\\
&- 10*p0^{5}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{4}*p4^{5} - 4*p0^{5}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{5} + 28*p0^{5}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{5}\\
&- 32*p0^{5}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{4} - 56*p0^{5}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{6} - 20*p0^{5}*p1^{3}*p3^{5}*p4^{3} -\\
&128*p0^{5}*p1^{3}*p3^{3}*p4^{5} - 144*p0^{5}*p1^{3}*p3^{3}*p4^{7} - 4*p0^{5}*p1^{2}*p2^{4}*p4^{5} - 18*p0^{5}*\\
&p1^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{4} - 24*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{6} + 16*p0^{5}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{4} + 36*p0^{5}*\\
&p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{5} - 36*p0^{5}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{7} + 26*p0^{5}*p1^{2}*p2^{4}*p3^{4}*p4^{4} + 16*p0^{5}*\\
&p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{6} - 50*p0^{5}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{8} + 24*p0^{5}*p1^{2}*p2^{4}*p3^{4}*p4^{5} + 12*p0^{5}*p1^{2}*p3^{2}\\
&*p4^{7} - 20*p0^{5}*p1^{2}*p2^{5}*p3^{3}*p4^{4} + 22*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{4} + 20*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*\\
&p4^{6} - 8*p0^{5}*p1^{2}*p2^{5}*p3^{3}*p4^{5} + 28*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{5} + 8*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{7}\\
&- 38*p0^{5}*p1^{2}*p2^{5}*p3^{4}*p4^{4} - 84*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{6}*p4^{5} - 70*p0^{5}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{8} + 8\\
&*p0^{5}*p1^{2}*p3^{7}*p4^{5} + 36*p0^{5}*p1^{2}*p3^{5}*p4^{5} + 96*p0^{5}*p1^{2}*p3^{3}*p4^{7} + 150*p0^{5}*p1^{2}*p3^{3}*\\
&p4^{9} - 4*p0^{5}*p2^{5}*p3^{4}*p4^{2} - 8*p0^{5}*p2^{5}*p4^{7} + 2*p0^{5}*p2^{3}*p3^{4}*p4^{4} + 4*p0^{5}*p2^{3}*\\
&p3^{2}*p4^{6} + 10*p0^{5}*p2^{5}*p3^{2}*p4^{4} + 44*p0^{5}*p2^{5}*p3^{2}*p4^{7} + 60*p0^{5}*p2^{5}*p4^{2} - 4*\\
&p0^{5}*p2^{6}*p3^{4}*p4^{5} - 36*p0^{5}*p2^{4}*p3^{6}*p4^{5} - 80*p0^{5}*p2^{2}*p3^{8}*p4^{5} + 4*p0^{5}*p3^{6}*p4^{5}\\
&+ 12*p0^{5}*p3^{4}*p4^{7} + p0^{4}*p1^{8}*p4^{4} - p0^{4}*p1^{6}*p2^{2}*p4^{4} - 4*p0^{4}*p1^{6}*p2^{4}*p4^{5} -\\
&14*p0^{4}*p1^{6}*p3^{2}*p4^{4} - 11*p0^{4}*p1^{6}*p4^{6} + 2*p0^{4}*p1^{5}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{4} - 38*p0^{4}*p1^{5}*\\
&p2^{5}*p3^{4}*p4^{5} - 6*p0^{4}*p1^{5}*p3^{6}*p4^{4} + 2*p0^{4}*p1^{4}*p2^{3}*p4^{5} + 11*p0^{4}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{2}*\\
&p4^{4} - 10*p0^{4}*p1^{4}*p2^{4}*p4^{6} + 26*p0^{4}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{4}*p4^{5} + 32*p0^{4}*p1^{4}*p2^{4}*p4^{7} +\\
&26*p0^{4}*p1^{4}*p3^{4}*p4^{4} + 97*p0^{4}*p1^{4}*p3^{4}*p4^{6} + 36*p0^{4}*p1^{4}*p4^{8} + 22*p0^{4}*p1^{3}*\\
&p2^{3}*p3^{2}*p4^{5} - 24*p0^{4}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{4} - 16*p0^{4}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{6} - 32*p0^{4}*p1^{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}^{3}{}^{5}\quad {}^{4}{}^{3}\quad {}^{7}\quad {}^{4}{}^{3}{}^{3}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{3}\\
&*p2*p3\ *p4\ + 48*p0\ *p1\ *p2*p3*p4\ - 16*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ + 22*p0\ *p1\ *p3*\\
&{}^{8}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{4}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{3}{}^{2}{}^{5}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{3}{}^{7}\\
&p4\ + 10*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ - 18*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4\ + 4*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ +\\
&{}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{4}{}^{4}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{2}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{8}\\
&11*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4\ - 20*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4\ + 41*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ +\\
&{}^{4}{}^{2}\quad {}^{4}{}^{5}\quad {}^{4}{}^{2}\quad {}^{2}{}^{7}\quad {}^{4}{}^{2}\quad {}^{9}\\
&40*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4\ + 44*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4\ - 40*p0\ *p1\ *p2*p4\ - 14*\\
&{}^{4}{}^{2}{}^{6}{}^{4}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{4}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{8}\quad {}^{4}{}^{2}\\
&p0\ *p1\ *p3\ *p4\ - 63*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ - 144*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ - 54*p0\ *p1\ *\\
&{}^{10}\quad {}^{4}\quad {}^{4}\quad {}^{6}\quad {}^{4}\quad {}^{3}{}^{3}{}^{5}\quad {}^{4}\quad {}^{3}\\
&p4\ + 8*p0\ *p1*p2\ *p3*p4\ - 10*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4\ - 20*p0\ *p1*p2\ *p3*\\
&{}^{7}\quad {}^{4}\quad {}^{2}{}^{5}{}^{4}\quad {}^{4}\quad {}^{2}{}^{3}{}^{6}\quad {}^{4}\quad {}^{2}\\
&p4\ + 2*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4\ - 12*p0\ *p1*p2\ *p3\ *p4\ - 28*p0\ *p1*p2\ *p3*\\
&{}^{8}\quad {}^{4}\quad {}^{5}{}^{5}\quad {}^{4}\quad {}^{3}{}^{7}\quad {}^{4}\quad {}^{9}\\
&p4\ + 14*p0\ *p1*p2*p3\ *p4\ + 76*p0\ *p1*p2*p3\ *p4\ + 10*p0\ *p1*p2*p3*p4\\
&{}^{4}\quad {}^{5}{}^{6}\quad {}^{4}\quad {}^{3}{}^{8}\quad {}^{4}{}^{4}{}^{2}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{4}\\
&-\ 6*p0\ *p1*p3\ *p4\ + 12*p0\ *p1*p3\ *p4\ - 4*p0\ *p2\ *p3\ *p4\ - 17*p0\ *p2\\
&{}^{8}\quad {}^{4}{}^{3}{}^{4}{}^{5}\quad {}^{4}{}^{3}{}^{2}{}^{7}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{6}{}^{4}\quad {}^{4}\\
&*p4\ + 4*p0\ *p2\ *p3\ *p4\ + 16*p0\ *p2\ *p3\ *p4\ - p0\ *p2\ *p3\ *p4\ + 2*p0\ *\\
&{}^{2}{}^{4}{}^{6}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{8}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{10}\quad {}^{4}\quad {}^{6}{}^{5}\\
&p2\ *p3\ *p4\ + 21*p0\ *p2\ *p3\ *p4\ - 18*p0\ *p2\ *p4\ - 6*p0\ *p2*p3\ *p4\ -\\
&{}^{4}\quad {}^{4}{}^{7}\quad {}^{4}\quad {}^{2}{}^{9}\quad {}^{4}{}^{8}{}^{4}\quad {}^{4}{}^{6}{}^{6}\\
&24*p0\ *p2*p3\ *p4\ - 10*p0\ *p2*p3\ *p4\ + p0\ *p3\ *p4\ + 5*p0\ *p3\ *p4\ + 6*\\
&{}^{4}{}^{4}{}^{8}\quad {}^{4}{}^{2}{}^{10}\quad {}^{4}{}^{12}\quad {}^{3}{}^{7}\quad {}^{5}\quad {}^{3}\\
&p0\ *p3\ *p4\ + 9*p0\ *p3\ *p4\ + 28*p0\ *p4\ + 8*p0\ *p1\ *p3*p4\ + 12*p0\ *\\
&{}^{6}\quad {}^{6}\quad {}^{3}{}^{6}{}^{7}\quad {}^{3}{}^{5}{}^{2}\quad {}^{5}\quad {}^{3}{}^{5}\quad {}^{6}\\
&p1\ *p2*p4\ - 2*p0\ *p1\ *p4\ - 8*p0\ *p1\ *p2\ *p3*p4\ - 10*p0\ *p1\ *p2*p3*p4\\
&{}^{3}{}^{5}{}^{3}{}^{5}\quad {}^{3}{}^{5}\quad {}^{7}\quad {}^{3}{}^{4}{}^{3}{}^{6}\quad {}^{3}\\
&-\ 20*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ - 44*p0\ *p1\ *p3*p4\ - 8*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ + 16*p0\ *\\
&{}^{4}{}^{2}{}^{2}{}^{5}\quad {}^{3}{}^{4}{}^{2}{}^{7}\quad {}^{3}{}^{4}\quad {}^{2}{}^{6}\quad {}^{3}{}^{4}\\
&p1\ *p2\ *p3\ *p4\ - 2*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ + 10*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4\ - 40*p0\ *p1\\
&{}^{8}\quad {}^{3}{}^{4}{}^{2}{}^{7}\quad {}^{3}{}^{4}{}^{9}\quad {}^{3}{}^{3}{}^{3}\quad {}^{6}\\
&*p2*p4\ - 6*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ + 2*p0\ *p1\ *p4\ + 2*p0\ *p1\ *p2\ *p3*p4\ - 4*\\
&{}^{3}{}^{3}{}^{2}{}^{3}{}^{5}\quad {}^{3}{}^{3}{}^{2}\quad {}^{7}\quad {}^{3}{}^{3}\quad {}^{3}{}^{6}\\
&p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4\ - 4*p0\ *p1\ *p2\ *p3*p4\ - 12*p0\ *p1\ *p2*p3\ *p4\ + 2*\\
&{}^{3}{}^{3}\quad {}^{8}\quad {}^{3}{}^{3}{}^{5}{}^{5}\quad {}^{3}{}^{3}{}^{3}{}^{7}\quad {}^{3}{}^{3}\\
&p0\ *p1\ *p2*p3*p4\ + 16*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ + 72*p0\ *p1\ *p3\ *p4\ + 96*p0\ *p1\\
&{}^{9}\quad {}^{3}{}^{2}{}^{4}{}^{7}\quad {}^{3}{}^{2}{}^{3}{}^{2}{}^{6}\quad {}^{3}{}^{2}{}^{3}\\
&*p3*p4\ - 4*p0\ *p1\ *p2\ *p4\ + 18*p0\ *p1\ *p2\ *p3\ *p4\ + 16*p0\ *p1\ *p2\ *
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_4^8 - 8p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^4 p_4^5 - 8p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^7 + 14p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_4^9 \\
&- 24p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^4 p_4^6 - 62p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^2 p_4^8 + 28p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_4^{10} - \\
&6p_0^3 p_1^2 p_3^4 p_4^7 - 18p_0^3 p_1^2 p_3^2 p_4^9 + 8p_0^3 p_1^4 p_2^2 p_3^2 p_4^7 - 10p_0^3 p_1^3 \\
&p_2^3 p_3^6 p_4^3 - 10p_0^3 p_1^3 p_2^2 p_3^8 p_4^3 + 4p_0^3 p_1^2 p_2^5 p_3^5 p_4^3 - 12p_0^3 p_1^2 \\
&p_2^2 p_3^7 p_4^3 - 12p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^9 p_4^3 + 22p_0^3 p_1^2 p_2^5 p_3^6 p_4^3 + 44p_0^3 p_1^2 p_2^3 \\
&p_3^8 p_4^3 + 44p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^{10} p_4^3 - 4p_0^3 p_1^2 p_3^7 p_4^5 - 12p_0^3 p_1^2 p_3^5 p_4^7 \\
&- 24p_0^3 p_1^2 p_3^3 p_4^9 - 60p_0^3 p_1^2 p_3^3 p_4^{11} + 4p_0^3 p_1^4 p_2^2 p_3^4 p_4^3 + 12p_0^3 p_1^2 \\
&p_2^4 p_4^9 - 2p_0^3 p_1^3 p_2^3 p_3^4 p_4^6 - 6p_0^3 p_1^3 p_2^2 p_3^2 p_4^8 - 6p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_3^2 p_4^7 - 26 \\
&p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^9 - 24p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_4^{11} + 2p_0^3 p_1^3 p_2^3 p_3^6 p_4^6 + 16p_0^3 p_1^3 p_2^4 p_3^4 \\
&p_4^8 + 40p_0^3 p_1^3 p_2^2 p_3^{10} p_4^3 - 2p_0^3 p_1^6 p_3^7 p_4^3 - 8p_0^3 p_1^4 p_3^9 p_4^2 - 2p_0^3 p_1^8 p_4^6 \\
&+ 2p_0^3 p_1^2 p_2^6 p_4^2 + 2p_0^3 p_1^2 p_2^6 p_4^6 + 2p_0^3 p_1^2 p_2^6 p_4^7 + 10p_0^3 p_1^2 p_3^6 p_4^2 + 11p_0^3 p_1^2 \\
&p_1^6 p_4^8 - 4p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^5 p_4^2 + 10p_0^3 p_1^2 p_2^5 p_3^7 p_4^2 + 6p_0^3 p_1^2 p_3^5 p_4^8 \\
&+ 2p_0^3 p_1^4 p_2^3 p_4^7 - 4p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_3^2 p_4^6 + 6p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_4^8 - 4p_0^3 p_1^4 p_2^2 p_4^6 \\
&p_1^4 p_2^2 p_3^7 p_4^2 - 10p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_4^9 - 14p_0^3 p_1^2 p_3^4 p_4^6 - 48p_0^3 p_1^4 p_2^2 p_3^8 \\
&p_4^2 - 24p_0^3 p_1^2 p_4^{10} - 14p_0^3 p_1^4 p_2^3 p_3^3 p_4^7 + 12p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^2 p_4^6 \\
&+ 12p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^2 p_4^8 + 28p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^3 p_4^7 + 10p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_3^3 p_4^9 \\
&+ 14p_0^3 p_1^2 p_3^3 p_4^8 - 6p_0^3 p_1^2 p_3^3 p_4^{10} - 4p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_4^8 + 6p_0^3 p_1^2 p_2^3 p_4^7 \\
&p_1^2 p_2^3 p_3^2 p_4^7 - 6p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_4^9 - 6p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^6 + 18p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^8 \\
&p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^8 - 18p_0^3 p_1^2 p_2^2 p_4^{10} - 30p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_3^2 p_4^7 - 28p_0^3 p_1^2 \\
&p_1^2 p_2^4 p_3^2 p_4^9 + 8p_0^3 p_1^2 p_2^4 p_4^{11} + 6p_0^3 p_1^2 p_3^2 p_4^6 + 12p_0^3 p_1^2 p_3^2 p_4^8
\end{aligned}
$$

$$p4^{8} + 36*p0^{2}*p1^{2}*p3^{2}*p4^{10} + 23*p0^{2}*p1^{2}*p4^{12} - 8*p0^{2}*p1*p2^{2}*p3*p4^{4} + 6*p0^{2}*p1*p2^{3}*p3^{3}*p4^{7} + 10*p0^{2}*p1*p2^{3}*p3*p4^{9} + 14*p0^{2}*p1*p2^{2}*p3^{2}*p4^{8} + 16*p0^{2}*p1*p2^{2}*p3*p4^{10} - 6*p0^{2}*p1*p2^{2}*p3^{2}*p4^{5} - 32*p0^{2}*p1*p2^{3}*p3^{2}*p4^{7} - 20*p0^{2}*p1*p2^{3}*p3*p4^{9} + 6*p0^{2}*p1*p3^{2}*p4^{11} + 2*p0^{2}*p1*p3^{3}*p4^{2} - p0^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{5} + 2*p0^{2}*p2^{4}*p4^{8} - 4*p0^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{10} + 2*p0^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{9} - 2*p0^{2}*p2^{2}*p3^{4}*p4^{8} + 2*p0^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{10} + 10*p0^{2}*p2^{2}*p4^{12} + 4*p0^{2}*p2^{4}*p3^{2}*p4^{9} - 4*p0^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{11} - p0^{2}*p3^{6}*p4^{8} + 2*p0^{2}*p3^{2}*p4^{12} - 8*p0^{2}*p4^{14} - 4*p0^{2}*p1^{7}*p3^{7}*p4^{6} - 6*p0^{2}*p1^{7}*p2^{2}*p4^{8} + 4*p0^{2}*p1^{5}*p2^{2}*p3^{7}*p4^{5} + 2*p0^{2}*p1^{5}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{8} + 8*p0^{2}*p1^{5}*p3^{3}*p4^{7} + 18*p0^{2}*p1^{5}*p3^{2}*p4^{9} + 4*p0^{2}*p1^{4}*p2^{3}*p3^{8} + 4*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p4^{7} - 8*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{8} - 2*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{9} - 20*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{10} + 12*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p4^{9} - 6*p0^{2}*p1^{4}*p3^{3}*p4^{8} + 2*p0^{2}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{8} + 4*p0^{2}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{7} - 8*p0^{2}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{9} + 18*p0^{2}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{8} + 8*p0^{2}*p1^{3}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{10} - 4*p0^{2}*p1^{3}*p2^{5}*p3^{7}*p4^{3} - 8*p0^{2}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{3}*p4^{9} - 24*p0^{2}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{11} + 4*p0^{2}*p1^{2}*p2^{4}*p3^{9}*p4^{2} - 6*p0^{2}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{8} - 4*p0^{2}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{10} - 10*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{9} - 2*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p4^{11} + 6*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{4}*p4^{8} + 28*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p3^{2}*p4^{10} - 6*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p4^{12} - 6*p0^{2}*p1^{2}*p3^{2}*p4^{4}*p4^{9} + 6*p0^{2}*p1^{2}*p3^{3}*p4^{11} + 2*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{9}*p4^{3} + 2*p0^{2}*p1^{4}*p2^{2}*p3^{3}*p4^{10} - 4*p0^{2}*p1^{4}*p2^{3}*p3^{9}*p4^{2} - 10*p0^{2}*p1^{4}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{11} + 2*p0^{2}*p1^{3}*p2^{5}*p3^{9}*p4^{12} + 10*p0^{2}*p1^{3}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{13} - 4*p0^{2}*p1^{3}*p2^{4}*p4^{11} + 2*p0^{2}*p1^{3}*p2^{2}*p4^{13} + 6*p0^{2}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{2}*p4^{11} + 4*p0^{2}*p1^{2}*p2^{3}*p4^{13} - 2*p0^{2}*p1^{2}*p2^{3}*p3^{4}*p4^{10} - 8*p0^{2}*p1^{2}*p2^{2}*p4^{12} + 2*p0^{2}*p1^{2}*p3^{4}*p4^{11} + 2*p0^{2}*p1^{2}*p3^{2}*p4^{8}*p4^{8} + p1^{6}*p4^{2}*p4^{8} - p1^{6}*p2^{2}*p4^{8} - 2*p1^{6}*p3^{2}*p4^{8} - 4*$$

```
  6   10       5   2       8       5         9       4   3   9     4   2
p1 *p4   + 2*p1 *p2 *p3*p4  + 6*p1 *p2*p3*p4  - 2*p1 *p2 *p4  - p1 *p2 *

  2   8       4       2   9     4   4   8       4   2   10       4   12
p3 *p4  - 4*p1 *p2*p3 *p4  + p1 *p3 *p4  + 3*p1 *p3 *p4   + 6*p1 *p4

       3   3       9       3   2       10       3       3   9        3
 + 2*p1 *p2 *p3*p4  + 2*p1 *p2 *p3*p4   - 2*p1 *p2*p3 *p4  - 12*p1 *p2*

     11       3   3   10      2   4   10       2   3   11       2   2   2
p3*p4   + 2*p1 *p3 *p4   - p1 *p2 *p4   + 2*p1 *p2 *p4   + 2*p1 *p2 *p3

   10       2   2   12       2       2   11      2   4   10       2   14
*p4   + 3*p1 *p2 *p4   + 2*p1 *p2*p3 *p4   - p1 *p3 *p4   - 4*p1 *p4

          3       11          2       12             3   11
 - 2*p1*p2 *p3*p4   - 4*p1*p2 *p3*p4   + 2*p1*p2*p3 *p4   + 6*p1*p2*p3*

  13          3   12      4   12      2   2   12       2   14          2
p4   - 2*p1*p3 *p4   + p2 *p4   - p2 *p3 *p4   - 2*p2 *p4   + 2*p2*p3 *

  13      2   14      16
p4   - p3 *p4   + p4
```

g4,0=(-1)

```
          2                          2
g4,1= - p0  - p0*p3 + p1*p4 + p4
```

g4,2=p0 + p1 + p2 + p3 + p4

```
       2                          2
g4,3=p0  - p0*p3 + p1*p4 - p4
```

g4,4=p0 - p1 + p2 - p3 + p4

```
          3     2         2                                          2         2
g4,5= - p0  + p0 *p2 + p0 *p4 - p0*p1*p3 - 2*p0*p2*p4 + p0*p3  + p0*p4  +

       2                          2     3
     p1 *p4 - p1*p3*p4 + p2*p4  - p4
```

```
          3     2         2                                          2         2
g4,6= - p0  + p0 *p2 + p0 *p4 - p0*p1*p3 - 2*p0*p2*p4 + p0*p3  + p0*p4  +

       2                          2     3
     p1 *p4 - p1*p3*p4 + p2*p4  - p4
```

g4,7=p0 - p4

g4,8=p0 - p4

g4,9=p0 + p4

g4,10=p0 + p4

```
                          2       3       4       5
p(x):=p0 + p1*x + p2*x  + p3*x  + p4*x  + p5*x
```

```
     2     2
g1=p0  - p5

g1,0=1

g1,1=p0 - p5

g1,2=p0 + p5

     4     2  2        2  2                        2  2     4
g2=p0  - p0 *p4  - 2*p0 *p5  + 2*p0*p1*p4*p5 - p1 *p5  + p5

g2,0=(-1)

          2                        2
g2,1= - p0  + p0*p4 - p1*p5 + p5

       2                       2
g2,2=p0  + p0*p4 - p1*p5 - p5

     8     6  2        6  2        6  2        5                  5
g3=p0  - p0 *p3  - 2*p0 *p4  - 4*p0 *p5  + 2*p0 *p1*p3*p4 + 4*p0 *p1*p4*p5

          5                  4  2           4  2  2        4  2  2
   + 2*p0 *p2*p3*p5 - 2*p0 *p1 *p3*p5 - p0 *p1 *p4  - 2*p0 *p1 *p5  - 2*

    4                   4  2  2        4  2  2        4       2        4
  p0 *p1*p2*p4*p5 - p0 *p2 *p5  + 2*p0 *p3 *p5  - 2*p0 *p3*p4 *p5 + p0 *

    4        4  2  2        4  4        3  3              3  2       2
  p4  + 4*p0 *p4 *p5  + 6*p0 *p5  + 2*p0 *p1 *p4*p5 + 2*p0 *p1 *p2*p5  - 2

     3       3          3          3          3          3       3  2  2
  *p0 *p1*p4 *p5 - 8*p0 *p1*p4*p5  - 4*p0 *p2*p3*p5  + 2*p0 *p2*p4 *p5  -

    2  4  2        2  2       3        2  2  2  2        2  2  4
  p0 *p1 *p5  + 2*p0 *p1 *p3*p5  + 2*p0 *p1 *p4 *p5  + 4*p0 *p1 *p5  + 2*

    2  2  4     2  2  4        2       2  3     2  4  2        2  2
  p0 *p2 *p5  - p0 *p3 *p5  + 2*p0 *p3*p4 *p5  - p0 *p4 *p5  - 2*p0 *p4 *

    4       2  6          3       3          2      4                    4
  p5  - 4*p0 *p5  - 2*p0*p1 *p4*p5  - 2*p0*p1 *p2*p5  - 2*p0*p1*p3*p4*p5

               3  3                  5                  5              2  4
   + 2*p0*p1*p4 *p5  + 4*p0*p1*p4*p5  + 2*p0*p2*p3*p5  - 2*p0*p2*p4 *p5

       4  4     2  2  4        2  6                5     2  6     8
   + p1 *p5  - p1 *p4 *p5  - 2*p1 *p5  + 2*p1*p2*p4*p5  - p2 *p5  + p5

g3,0=(-1)

       3     2        2                                          2
g3,1=p0  + p0 *p3 + p0 *p5 - p0*p1*p4 - p0*p2*p5 + p0*p3*p5 - p0*p4  - p0*

      2     2                       2     3
   p5  + p1 *p5 + p1*p4*p5 - p2*p5  - p5

g3,2=p0 - p5
```

```
g3,3=p0 + p5

                3      2          2                                        2
g3,4= - p0   + p0 *p3 + p0 *p5 - p0*p1*p4 - p0*p2*p5 - p0*p3*p5 + p0*p4   +

          2      2                          2      3
     p0*p5   + p1 *p5 - p1*p4*p5 + p2*p5   - p5
```

CHAPITRE 6

ANNEXE DES PROGRAMMES

```
%%%
```

```
procedure norsdu(p) ;
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: le gcd de p et son polynome reciproque ;

 gcd(p,num(sub(x=1/x,p))) ;
%attention au mode (reduction au meme denominateur imposee),
end norsdu ;


procedure recip(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x,
          k ampleur du polynome p egale au degre de p plus l'o.d.m. de la raci-
          ne infini de p ,
 sortie:  son polynome reciproque ;

 sub(x=1/x,p)*x**k;

%attention au mode (reduction au meme denominateur imposee),
end recip ;


procedure schur(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x , k (cf procedure recip),
 sortie:  son transforme de Schur ;

 sub(x=0,p)*p-sub(x=0,recip(p,k))*recip(p,k) ;

%end schur ;


procedure gamk(p) ;
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: sa constante de Schur ;

 sub(x=0,p) ;

%end gamk ;


procedure npue(a,k,n);
%entrees: a un nombre reel,
          k une variable iterative,
          n le degre d'un polynome,
 sortie:  npu le nombre partiel de racines du polynome avec leurs o.d.m. dans
          le disque unite ouvert;

begin
if a<0 then
 begin
  nk:=nk+1;
  npu:=npu+(n+1-k)*((-1)**(nk-1));
 end
end npue;


procedure chg(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: py le polynome de parametre y en la variable x tel que py(x)=p(yx);

 sub(x=y*x,p);
```

```
%end chg;


procedure orp(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: tpor son polynome sans la racine 1;

begin
orx:=0;
tpor:=p;
tpor1:=sub(x=1,tpor);
while tpor1 eq 0 do
 begin
  tpor:=tpor/(x-1);
  orx:=orx+1;
  tpor1:=sub(x=1,tpor);
 end;
end orp;


procedure dzetak(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: son polynome translate de 1 et sans la racine 1;

begin
orp(p);
return(sub(x=x+1,tpor))
end dzetak;


procedure maxicok(a);
%entree: a un nombre reel,
 sortie: maxi le maximum de a et maxi prealablement affecte;

if maxi<a then maxi:=a;

%end maxicok;


procedure mincok(p,dp);
%entrees: p polynome de coef de tete egal a 1 en module en la variable x,
          dp son degre >=2,
 sortie:  sa borne de minoration du minimum de ses racines en module;

begin
adko:=abs(sub(x=0,p));
for pok:=1:(dp-1) do
 << ek:=(p-sub(x=0,p))/x;
    maxicok(abs(sub(x=0,ek)));
    p:=ek;                          >>;
return(adko/(adko+maxi))
end mincok;


procedure minco(a);
%entree: a un nombre rationnel,
 sortie: coj le minimum de a et coj prealablement affecte;

begin
```

```
if a<coj then coj:=a;
return coj
end minco;


procedure npuco(p,dp);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
         dp son degre prealablement calcule,
 sortie: pytild polynome de meme degre en x tel que le theoreme de base lui
         soit applicable avec le meme nombre de racines dans le disque unite
         ouvert;

begin
coj:=1;
py:=chg(norp(p));
for kuo:=1:dp do
 begin
    maxi:=1;
    Tpy := schur(py,dp-kuo+1) ;
    gky := gamk(Tpy) ;
    gkx := sub(y=x,gky) ;
    dk := dzetak(gkx) ;
    cok := mincok(dk,(2**kuo)*dp-orx) ;
    co := minco(cok) ;
    py := Tpy ;
 end;
pytild:=sub(x=(1-co)*x,p);
return pytild
end npuco;


procedure nrduc(p,dp);
%entrees: p polynome en la variable x tel que le theoreme lui soit applicable,
          dp son degre prealablement calcule et >=1,
 sortie:  npu son nombre de racines avec leurs ordres de multiplicite dans le
          disque unite ouvert;

begin
for kuc:=1:dp do
 begin
    Tpytild:=schur(p,dp-kuc+1);
    gkytild:=gamk(Tpytild);
    npue(gkytild,kuc,dp);
    p:=Tpytild;
 end;
return npu
end nrduc;


procedure nrdu(p,dp);
%entree: p polynome en la variable x sans racines sur le cercle unite,
         dp son degre prealablement calcule,
 sortie: nrdupu son nombre de racines avec leurs o.d.m. dans le disque unite
         ouvert;

begin
npu:=0;
nk:=0;
for ku:=1:dp do
 begin
```

```
  kuu:=ku;
  po:=p;
  Tp:=schur(p,dp-ku+1);
  gk:=gamk(Tp);
  if gk neq 0 then
   begin
    npue(gk,ku,dp);
    p:=Tp;
   end
              else
   begin
    dopo:=deg(po,x);
    pouy:=npuco(po,dopo);
    ku:=dp+1;
   end;
 end;
nppu:=npu;
mgk:=nk;
if kuu eq dp then nrdupu:=nppu else
 begin
  npu:=0;
  nk:=0;
  nrdupo:=nrduc(pouy,dopo);
  nrdupu:=nppu+((-1)**mgk)*nrdupo;
 end;
return nrdupu
end nrdu;


%programme principal;


procedure nrdupe(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: nrdup son nombre de racines avec leurs o.d.m. dans le disque unite
         ferme;

begin
 pu:=norpu(p);
 dopu:=deg(pu,x);
 if dopu eq 0 then nrdup:=nrrdup else
 begin
  ru:=norsdu(pu);
  if ru eq 1 then nrdup:=nrdu(pu,dopu)+nrrdup else
   begin
    doru:=deg(ru,x);
    rdru:=num(sub(x=1/x,df(ru,x)));
    dordru:=deg(rdru,x);
    if deg(rdru,x) neq 0 then
     begin
         rdruc:=npuco(rdru,dordru);
         npu:=0;
         nk:=0;
         nrdurdruc:=nrduc(rdruc,dordru);
         nrdur:=doru-nrdurdruc;
     end
                          else nrdur:=doru;
    qu:=pu/ru;
    doqu:=deg(qu,x);
    if qu eq 1 then nrdup:=nrrdup+nrdur else
```

```
      begin
       nrduqu:=nrdu(qu,doqu);
       nrdup:=nrrdup+nrdur+nrduqu;
      end;
    end;
  end;

return nrdup

end nrdupe;


end;
```

```
%%%
```

```
                else << nrrdop:=nrrdop+nrdupr(rrd1);
                        pros:=pros*ndop(j)          >>;
    prs:=prs/ndop(j)                                  >>;
rrou:=norsdu(pros);
nrrscdop:=deg(rrou,x)/2;
return prs

end norpu ;


procedure recip(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x,
          k ampleur du polynome p egale au degre de p plus l'o.d.m. de la raci-
          ne infini de p ,
 sortie:  son polynome reciproque ;

 sub(x=1/x,p)*x**k;

%attention au mode (reduction au meme denominateur imposee),
end recip ;


procedure schur(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x , k (cf procedure recip) ,
 sortie:  son transforme de Schur ;

 sub(x=0,p)*p-sub(x=0,recip(p,k))*recip(p,k) ;

%end schur ;


procedure gamk(p) ;
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: sa constante de Schur ;

 sub(x=0,p) ;

%end gamk ;


procedure npue(a,k,n);
%entrees: a un nombre reel,
          k une variable iterative,
          n le degre d'un polynome,
 sortie:  npu le nombre partiel de racines du polynome avec leurs o.d.m. dans
          le disque unite ouvert;

begin
if a<0 then
 begin
  nk:=nk+1;
  npu:=npu+(n+1-k)*((-1)**(nk-1));
 end
end npue;


procedure tripoa(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: son transforme de Cohn;
```

```
num(sub(x=1/x,df(p,x)));

%end tr1poa;


procedure tr2poa(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: son transforme de Marden;

begin
i1oa:=1;
do1poa:=coeff(p,x,ndop2);
u1:=ndop2(do1poa)/ndop2(0);
while ndop2(do1poa-i1oa)eq(u1*ndop2(i1oa))do
 i1oa:=i1oa+1;
if (ndop2(do1poa-i1oa)-(u1*ndop2(i1oa)))*ndop2(do1poa)>0
 then trmard:=schur((x**i1oa+2)*p,do1poa+i1oa)
 else trmard:=schur((x**i1oa-2)*p,do1poa+i1oa) ;
return trmard
end tr2poa;


procedure nrdum(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: trpo le polynome egal a:
         0 si les constantes de Schur de p sont toutes non nulles,
         transforme de Cohn ou Marden du dernier itere de Schur de coefficient
         origine non nul,note po, de p;

begin
npu:=0;
nk:=0;
trpo:=0;
dopu:=deg(p,x);
for ku:=1:dopu do
 begin
  po:=p;
  Tp:=schur(p,dopu-ku+1);
  gk:=gamk(Tp);
  if gk neq 0 then
   begin
    npue(gk,ku,dopu);
    p:=Tp;
   end
              else
   begin
    if Tp eq 0 then
     begin
      trpo:=tr1poa(po);
      if prodopo eq true then dopo:=deg(po,x);
      prodopo:=false;
     end
               else
     trpo:=tr2poa(po);
    ku:=dopu+1;
   end;
 end;
nppu:=npu;
mgk:=nk;
return trpo;
```

```
end nrdu;


%programme principal;


procedure nrdupm(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: nrdup son nombre de racines avec leurs o.d.m. dans le disque unite
         ferme,
         nrdop dans le disque unite ouvert, dont nrscdop symetriques par
         rapport au cercle unite,
         nrcup sur le cercle unite;


begin
prodopo:=true;
dopo:=0;
pu:=norpu(p);
nrdopu:=0;
nrcupu:=0;
nrscdopu:=0;
if deg(pu,x) eq 0 then nrdup:=nrrdup else
 begin
  pu1:=pu;
  smgk:=0;
  while deg(pu1,x) neq 0 and prodopo eq true do
  << pu1:=nrdum(pu1);
     nrdopu:=nrdopu+((-1)**smgk)*nppu;
     smgk:=smgk+mgk;
                                                  >>;
  if prodopo eq false then
   begin
    scmgk:=0;
    while deg(pu1,x) neq 0 do
    << pu1:=nrdum(pu1);
       nrdopu:=nrdopu+((-1)**smgk)*nppu;
       smgk:=smgk+mgk;
       nrscdopu:=nrscdopu+((-1)**scmgk)*nppu;
       scmgk:=scmgk+mgk;
                                                        >>;
   end;
  nrcupu:=dopo-2*nrscdopu;
 end;

nrdop:=nrrdop+nrdopu;
nrcup:=nrrcup+nrcupu;
nrscdop:=nrrscdop+nrscdopu;
nrrdup:=nrrdop+nrrcup;
nrdup:=nrdop+nrcup;


return nrdup


end nrdupm;


end;
```

```
%%%
```

```
procedure norpu(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: son polynome sans racines rationnelles de Z[X] de coefficients pre-
         miers entre eux,
         nrrdop le nombre de racines rationnelles en comptant leurs o.d.m. de p
         dans le disque unite ouvert ,dont nrrscdop symetriques par rapport
         au cercle unite,
         nrrcup sur le cercle unite;

begin
nrrcup:=0;
nrrdop:=0;
nrrscdop:=0;
prs:=p;
nndop:=factorize(prs,ndop,0);
prs:=prs/ndop(0);
pros:=1;
for j:=1:nndop do
 if deg(ndop(j),x) eq 1 then
 << rror:=sub(x=0,ndop(j));
    rrd1:=modul2(rror/(sub(x=1,ndop(j))-rror));
    if rrd1 eq 1 then nrrcup:=nrrcup+1
                 else << nrrdop:=nrrdop+nrdupr(rrd1);
                         pros:=pros*ndop(j)          >>;
    prs:=prs/ndop(j)                                   >>;
rrou:=norsdu(pros);
nrrscdop:=deg(rrou,x)/2;
return prs

end norpu ;


procedure recip(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x,
          k ampleur du polynome p egale au degre de p plus l'o.d.m. de la raci-
          ne infini de p ,
 sortie:  son polynome reciproque ;

 conj(sub(x=1/x,p)*x**k);

%attention au mode (reduction au meme denominateur imposee),
end recip ;


procedure schur(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x , k (cf procedure recip) ,
 sortie: son transforme de Schur ;

 conj(sub(x=0,p))*p-conj(sub(x=0,recip(p,k)))*recip(p,k) ;

%end schur ;


procedure gamk(p) ;
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: sa constante de Schur,reelle ;

 sub(x=0,p) ;
```

```
%end gamk ;


procedure npue(a,k,n);
%entrees: a un nombre reel,
          k une variable iterative,
          n le degre d'un polynome,
 sortie:  npu le nombre partiel de racines du polynome avec leurs o.d.m. dans
          le disque unite ouvert;

begin
if a<0 then
 begin
  nk:=nk+1;
  npu:=npu+(n+1-k)*((-1)**(nk-1));
 end
end npue;


procedure tr1poa(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: son transforme de Cohn;

num(conj(sub(x=1/x,df(p,x))));

%end tr1poa;


procedure tr2poa(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: son transforme de Marden;

begin
i1oa:=1;
do1poa:=coeff(p,x,ndop2);
u1:=ndop2(do1poa)/conj(ndop2(0));
while ndop2(do1poa-i1oa)=u1*conj(ndop2(i1oa)) do
 i1oa:=i1oa+1;
b2poa:=(ndop2(do1poa-i1oa)-u1*conj(ndop2(i1oa)))/ndop2(do1poa);
nmd1:=num(modul2(b2poa));
dmd1:=den(modul2(b2poa));
trmard:=schur((x**i1oa+2*b2poa*symbolic (sqrt dmd1)/symbolic (sqrt nmd1))*p,do1
poa+i1oa);
return num(trmard)
end tr2poa;


procedure nrdum(p);
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: trpo le polynome egal a:
         0 si les constantes de Schur de p sont toutes non nulles,
         transforme de Cohn ou Marden du dernier itere de Schur de coefficient
         origine non nul, note po, de p;

begin
npu:=0;
nk:=0;
trpo:=0;
dopu:=deg(p,x);
for ku:=1:dopu do
```

```
 begin
   po:=p;
   Tp:=schur(p,dopu-ku+1);
   gk:=gamk(Tp);
   if gk neq 0 then
    begin
     npue(gk,ku,dopu);
     p:=Tp;
    end
               else
    begin
     if Tp eq 0 then
      begin
       trpo:=tr1poa(po);
       if prodopo eq true then dopo:=deg(po,x);
       prodopo:=false;
      end
                 else
      trpo:=tr2poa(po);
     ku:=dopu+1;
    end;
 end;
nppu:=npu;
mgk:=nk;
return trpo;
end nrdum;


procedure nrdupm(p);
%entree: p polynome de degre >=1 en la variable x,
 sortie: nrdup son nombre de racines avec leurs o.d.m. dans le disque unite
         ferme,
         nrdop dans le disque unite ouvert, dont nrscdop symetriques par
         rapport au cercle unite,
         nrcup sur le cercle unite;


begin
prodopo:=true;
dopo:=0;
pu:=norpu(p);
nrdopu:=0;
nrcupu:=0;
nrscdopu:=0;
if deg(pu,x) eq 0 then nrdup:=nrrdup else
 begin
  pu1:=pu;
  smgk:=0;
  while deg(pu1,x) neq 0 and prodopo eq true do
  << pu1:=nrdum(pu1);
     nrdopu:=nrdopu+((-1)**smgk)*nppu;
     smgk:=smgk+mgk;
                                          >>;
  if prodopo eq false then
   begin
    scmgk:=0;
    while deg(pu1,x) neq 0 do
    << pu1:=nrdum(pu1);
       nrdopu:=nrdopu+((-1)**smgk)*nppu;
       smgk:=smgk+mgk;
```

```
        nrscdopu:=nrscdopu+((-1)**scmgk)*nppu;
        scmgk:=scmgk+mgk;
                                                    >>;
    end;
   nrcupu:=dopo-2*nrscdopu;
  end;

nrdop:=nrrdop+nrdopu;
nrcup:=nrrcup+nrcupu;
nrscdop:=nrrscdop+nrscdopu;
nrrdup:=nrrdop+nrrcup;
nrdup:=nrdop+nrcup;


return nrdup


end nrdupm;



end;
```

PARTIE B

TRANSFORMATIONS DE STURM ET SCHELIN

CHAPITRE 1

NOMBRE DE RACINES D'UN POLYNOME DE R[X] DANS LE DISQUE UNITE OUVERT

INTRODUCTION

L'algorithme de Sturm fournit des résultats partiels concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$,[1].

Dans un article récent C.W. Schelin [4] présente une méthode de calcul du nombre de zéros à l'intérieur du disque unité d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ par le principe de l'argument et les indices de Cauchy sur [-1,1] en s'inspirant de l'algorithme de Sturm.

Ce calcul intervient dans l'étude de certains problèmes de stabilité des systèmes biochimiques ou physiques [8],[9],[10],[11].

Dans une première partie, nous rappelons quelques résultats fondamentaux, décrivons la méthode numérique de Schelin et démontrons quelques propriétés qui améliorent les conditions d'applications de cette méthode.

Dans la seconde, nous présentons un algorithme formel, modifié par rapport à celui de Schelin et quelques exemples dans $\mathbb{R}[X]$ sur le Bull DPS8 sous système Multics du CICG.

I

DESCRIPTION DE LA METHODE

Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ de degré n ($n \geq 1$) de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

1- Rappels

1.1 Polynômes de Tchebyschev de premier et deuxième espèces [2]

Les polynômes de Tchebyschev, notés T_i $i=0,1,\ldots$ de 1^{er} espèce, sont définis par:

$T_i(x) = \cos i\theta$, $x = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $x \in [-1,1]$, $i=0,1,\ldots$

Ils vérifient les relations suivantes:

$T_i(x) = 2x\, T_{i-1}(x) - T_{i-2}(x)$ $i=2,3,\ldots$

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

Les polynômes de Tchebyschev de $2^{ème}$ espèce, notés U_i $i=0,1,\ldots$ sont définis par:

$U_{i-1}(x) = i^{-1}\, d(T_i)/dx$ $i=1,2,\ldots$

$U_{-1} = 0$

Soit:

$U_{i-1}(x) = \sin(i\theta)/\sin\theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $x \in [-1,1]$ avec $x = \cos\theta$

D'où 1) $U_0 = T_0$ et $U_1 = 2T_1$

2) $U_i(-1) = (-1)^i(i+1)$ et $U_i(1) = i+1$ $\quad i=-1,0,\ldots$

Ils vérifient les relations suivantes:

$U_i - U_{i-2} = 2T_i \quad i=2,3,\ldots$ et $U_i - T_1U_{i-1} = T_i \quad i=1,2,\ldots$

D'où:

$T_1U_{i-1} = U_{i-2} + T_i \quad i=1,2,\ldots$ et $U_1U_i = U_{i+1} + U_{i-1} \quad i=0,1,\ldots$

1.2 Itérés de Sturm

Définition:

On appelle itérés de Sturm les polynômes, notés f_k, tels que:

(1) $\quad f_{k+1} = U_1 f_k - f_{k-1} \quad k=2,3,\ldots,s=E(n/2)$

avec $\quad f_2 = T_1 f_1 - f_0$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i U_{i-1} \quad , \quad d^\circ f_1 = n-1$$

$$f_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i \quad , \quad d^\circ f_0 = n$$

On appelle constantes de Sturm les nombres $f_j(\pm 1)$, $j=0,1,\ldots,s+1$.

Propriétés des constantes de Sturm

$f_0(\pm 1) = p(\pm 1)$; $f_1(\pm 1) = dp/dx(\pm 1)$

$f_j(-1) = (-1)^{j-1}(f_1(-1) + (j-1) f_0(-1))$

$f_j(1) = f_1(1) - (j-1) f_0(1)$ $\qquad j=1,2,\ldots,s+1.$

1.2.1 Etude de la formule récurrente (1)

Dans la base (U_i), les itérés de Sturm s'écrivent de la façon suivante:

$$f_k = \sum_{i=0}^{n-k} u(k,i)\, U_i \qquad k=2,3,\ldots,s$$

$$\text{avec } u(k,i) = \begin{cases} a_{i+k} - a_{k-2-i} & i=0,\ldots,k-2 \\ a_{i+k} & i=k-1,\ldots,n-k \end{cases} \qquad (2)$$

Remarque:

Cette formule reste valable pour $k=1,2$, même si f_1 et f_2 sont définis différemment.

Cas particulier (dernier terme de la suite f_k: f_{s+1})

$$u(s+1,i) = \begin{cases} a_{s+i+1} - a_{s-(i+1)} & i=0,\ldots,s-1 \\ a_n & i=s \quad (n=2s+1) \\ 0 & \quad (n=2s) \end{cases} \qquad (3)$$

Remarque:

i) Pour tout $k=0,1,\ldots,s$ le degré de f_k est $n-k$.

En effet pour tout k de 2 à s le coefficient de tête de f_k dans la base (U_i) est a_n, non nul.

ii) Pour tout $n\geq 2$, pour tout k de 0 à s f_k est non constant.

iii) Pour $k=s+1$

-si n est impair nous conservons la propriété i) et de plus pour $n=1$ $f_{s+1} = f_1$ (constant non nul, égal à a_1)

- si n est pair ($n\geq 2$) $d^\circ f_{s+1} \leq s-1$.

1.2.2 Etude de f_{s+1}.

Nous venons de voir que le degré de f_{s+1}, si n est pair ($n\geq 2$), peut être inférieur ou égal à $s-1$.

Etudions le cas f_{s+1} constant en fonction des coefficients de p dans le cas n pair ($n\geq 2$).

D'après la formule (3) du paragraphe 1.2.1 il faut et il suffit que:

$a_{s+i+1} = a_{s-(i+1)}$ $\quad i=1,\ldots,s-1$

et on a alors $f_{s+1} = u(s+1,0) = a_{s+1} - a_{s-1}$

1.3 Théorème de base (C.W. Schelin) [4]

Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ non nul sur le cercle unité, noté C.

Soit $\Delta(i,j)$ la différence des nombres de variations en signe de la séquence $f_i(-1)$ à $f_j(-1)$ et $f_i(1)$ à $f_j(1)$.

Soient $L = -f_1(-1)/f_0(-1)$ et $R = f_1(1)/f_0(1)$.

Si L et R sont différents de s alors:

i) $f_0, f_1, \ldots, f_{s+1}$ est une suite de Sturm

ii)
$$\Delta(0,s+1) = \begin{cases} s+1 & \text{si L et R sont plus grands que s} \\ s & \text{si s est encadré par L et R} \\ s-1 & \text{si L et R sont plus petits que s} \end{cases}$$

iii) d'après le théorème de Sturm [1]:

$$\Delta(0,s+1) = \int_{-1}^{1} f_1/f_0 + \int_{-1}^{1} f_s/f_{s+1}$$

où $\int_{-1}^{1} f$ est l'indice de Cauchy de la fonction à valeurs réelles, f, sur [-1,1]

d'après le principe de l'argument et l'hypothèse sur C de p :

$$N_D(p) = \int_{-1}^{1} f_1/f_0$$

Remarques:

D'après les propriétés des constantes de Sturm du début du paragraphe 1.2 nous avons:

1) $L = -dp/dx(-1) / p(-1)$ et $R = dp/dx(1) / p(1)$;

2) Si f_{s+1} est de signe constant sur [-1,1] (c'est le cas si f_{s+1} est constant non nul) alors:

i) $\int_{-1}^{1} f_s/f_{s+1} = 0$

ii) et sous l'hypothèse du théorème de base nous avons:

$$N_D(p) = \Delta(0,s+1)$$

Corollaire:

Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ sans racine sur C

Soient L et R définis comme précédemment

p s'annule dans le disque unité si L et R sont plus grands que s,

p s'annule à l'extérieur du disque unité si L et R sont plus petits que s.

Propriétés des constantes de Sturm:

1) $f_{j+1}(-1)\, f_j(-1) = -\, f_0^2(-1)\,(j+L)\,(j-L-1)$

$f_{j+1}(1)\, f_j(1) = f_0^2(1)\,(R-j+1)\,(R-j)$ $\qquad j=1,2,\ldots,s$

Et d'après les formules des constantes de Sturm du début du paragraphe 1.2 nous avons:

2) $f_j(-1) = 0$ si et seulement si $L = j-1$

$f_j(1) = 0$ si et seulement si $R = j-1$ $\qquad j=1,2,\ldots,s+1$

D'où la condition du théorème (R=s ou L=s) est équivalente à $f_{s+1}(\pm 1)=0$.

3) $f_{s+1}(-1) = (-1)^s\, p(-1)\,(s-L)$

$f_{s+1}(1) = p(1)\,(R-s)$

4) $f_0(\pm 1) \neq 0$ par propriété des constantes de Sturm et hypothèse de p ne s'annulant pas sur C.

2 - Evaluation de l'indice de Cauchy de f_s/f_{s+1} sur [-1,1].

On suppose que f_{s+1} n'est pas de signe constant sur [-1,1], ou constant non nul, en raison de la remarque 2) du paragraphe 1.3 .

Si f_{s+1} est de degré peu élevé (inférieur ou égal à 4) on peut calculer ses zéros dans [-1,1] et déterminer l'indice de Cauchy par une formule pour les fractions rationnelles.

Sinon, il faut prolonger la suite de Sturm, f_k, à un polynôme constant, non nul.

2.1 Prolongement des itérés de Sturm: transformation de Schelin

Nous avons vu au paragraphe 1.2.1 que le degré de f_{s+1} peut baisser de plus d'une unité; on ne peut alors pas utiliser la formule récurrente (1) des itérés de Sturm du paragraphe 1.2 car f_{s+2} serait de degré plus élevé que f_{s+1}. L'idée de C.W. Schelin est de modifier (1), qui n'est autre qu'une division, de la façon suivante:

$$f_{j+1} = (q(j,1)\,U_1 + q(j,0)\,U_0)\,f_j - f_{j-1} \qquad j \geq s+1 \qquad (1)$$

de telle manière que f_{j+1} soit de degré plus petit d'une unité que celui de f_j ou constant (non nul).

Définition:
On dit que f_j, $j \geq s+1$ est régulier si $(d^\circ f_{j-1} - d^\circ f_j)$ est égal à 1, sinon il est singulier. De plus f_j est dit itéré de Schelin.

Propriétés: Soit jo ($\geq s+1$) fixé.

i) si $f_{s+1},\ldots,f_{jo}$ sont réguliers alors:

1) $d^\circ f_j = n-j \quad j=s+1,\ldots,jo$

2) $f_{jo+1} = \sum_{i=0}^{n-(jo+1)} (q(jo,1)\,(u(jo,i+1) + u(jo,i-1)) + q(jo,0)\,u(jo,i) - u(jo-1,i))\,U_i$

avec $u(jo,-1) = 0$

et tel que : $u(jo,n-jo)\,q(jo,1) = u(jo-1,n-jo+1)$
$u(jo,n-jo)\,q(jo,0) + u(jo,n-jo-1)\,q(jo,1) = u(jo-1,n-jo)$

Si $d^\circ f_{jo+1} = n-(jo+1)$ c'est-à-dire si $u(jo+1,n-(jo+1))$, noté $q(jo,2)$ et appelé constante de singularité, est non nulle alors f_{jo+1} est régulier.

Remarque: la constante de singularité, $q(jo,2)$ impose que $jo \leq n-1$.

ii) si f_{jo} est singulier alors
si f_{jo} est constant (non nul) alors on ne calcule pas f_{jo+1}.

sinon f_{j_0+1} sera de degré plus grand que f_{j_0}

Exemple: $j_0=s+1$, $n>3$, $d^\circ f_s=n-s$, f_{s+1} singulier $(d^\circ f_{s+1}=1)$

d'où $d^\circ f_s>2$ et on a $d^\circ f_{s+2} = d^\circ f_s$ (>2).

Remarque: Dès qu'un terme f_j, $j\geq s+1$ est singulier, on arrête la construction de la suite.

iii) la régularité de chaque itéré de Schelin d'indice plus grand ou égal à $s+1$ entraîne f_n constant (non nul).

iv) f_{s+1} est singulier si et seulement si $n=2s$ et $a_n=a_0$ (en particulier si f_{s+1} est constant et n pair et supérieur ou égal à 2).

2.2 Calcul de l'indice de Cauchy de f_s/f_{s+1} sur [-1,1]

Théorème:

Soient $f_{s+1}, f_{s+2}, \ldots, f_m$ les itérés de Schelin définis par (1) paragraphe 2.1, supposés réguliers; f_s et f_{s+1} sont pris comme précédemment.

Les constantes de Schelin sont les nombres suivants:

$$l(s+k) = f_{s+k+1}(-1) / f_{s+k}(-1)$$

$$r(s+k) = f_{s+k+1}(1) / f_{s+k}(1) \qquad k=1,\ldots,m-(s+1)$$

En supposant $f_j(\pm 1) \neq 0$, $j=s+1,\ldots,m$ et en reprenant les notations du théorème de base du paragraphe 1.3 nous avons:

$$\Delta(s+1,m) = \sum_{k=1}^{m-(s+1)} \delta_{s+k} \quad \text{avec} \quad \delta_{s+k} = \begin{cases} 1 & \text{si } l(s+k)<0<r(s+k) \\ -1 & \text{si } r(s+k)<0<l(s+k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et de plus si p ne s'annule pas sur C,

i) $f_0, f_1, \ldots, f_m$ est une suite de Sturm,

ii) et d'après le théorème de Sturm [1]:

$$\Delta(s+1,m) = {}_{-1}^{1}\!\left[f_{m-1}/f_m \right]_{-1}^{1} - {}_{-1}^{1}\!\left[f_s/f_{s+1} \right]_{-1}^{1}$$

Remarques:

1) Si f_m est de signe constant sur $[-1,1]$ ou constant non nul alors:

$$\Delta(s+1,m) = \left| f_s/f_{s+1} \right|_{-1}^{1}$$

2) si f_n est régulier alors f_n est constant non nul.

2.3 Equations récurrentes des constantes de Schelin.

En prenant comme origine $l(s)$ et $r(s)$ tels que:

$$l(s) = f_{s+1}(-1)/f_s(-1) \text{ et } r(s) = f_{s+1}(1)/f_s(1)$$

soit $l(s) = (s-L)/(L-s+1)$ et $r(s) = (R-s)/(R-s+1)$

Nous avons (sous l'hypothèse de régularité des itérés de Schelin et des constantes de Sturm non nulles):

$$(1)\quad \begin{aligned} l(s+k) &= -2q(s+k,1) + q(s+k,0) - 1/l(s+k-1) \\ r(s+k) &= 2q(s+k,1) + q(s+k,0) - 1/r(s+k-1) \end{aligned} \qquad k=1,2,\ldots,m-(s+1)$$

Remarque: On suppose $f_{s+1}(\pm 1) \neq 0$.

Si $f_s(-1)$ ou $f_s(1)$ sont nuls alors on ne peut pas calculer $l(s)$ ou $r(s)$ et ainsi dans les équations récurrentes (1) on ne peut pas démarrer le calcul, mais en prenant dans ce cas $l(s+1)$ ou $r(s+1)$ comme origine par passage à la limite dans les formules (1) on retrouve la définition du terme $(s+1)$ des constantes de Schelin:

$$l(s+1) = -2q(s+1,1) + q(s+1,0) \text{ ou } r(s+1) = 2q(s+1,1) + q(s+1,0)$$

Autres formules:

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, soit d le degré de f_j, $j \geq s+1$ $(d=n-j)$, nous avons:

$$r(n-d) = f_{n-(d-1)}(1) \,/\, \left(f_{s+1}(1) \prod_{j=s+1}^{n-d-1} r(j)\right) \qquad d=n-(s+1),\ldots,n-m.$$

(éventuellement $m=n$ par régularité)

Pour $d=n-m$ avec $s+1<m<n$ et f_m régulier

$$r(m) = f_{m+1}(1) \,/\, \left(f_{s+1}(1) \prod_{j=s+1}^{m-1} r(j)\right)$$

<u>si m=n-1</u> alors f_n est constant et nous avons:

$$r(n-1) = f_n(1) \,/\, \left(f_{s+1}(1) \prod_{j=s+1}^{n-2} r(j)\right)$$

soit $f_n = f_{s+1}(1) \prod_{j=s+1}^{n-1} r(j)$ d'où $f_n = p(1)\,(R-s) \prod_{j=s+1}^{n-1} r(j)$

De même pour l(n-d) nous avons:

$$f_n = f_{s+1}(-1) \prod_{j=s+1}^{n-1} l(j) \quad \text{soit} \quad f_n = (-1)^s\, p(-1)\,(s-L) \prod_{j=s+1}^{n-1} l(j)$$

Et sous ces hypothèse nous avons une relation entre les constantes de Schelin de même indice:

$$p(1)\,(R-s) \prod_{j=s+1}^{n-1} r(j) = (-1)^s\, p(-1)\,(s-L) \prod_{j=s+1}^{n-1} l(j)$$

2.4 Singularité des itérés de Schelin .

Nous avons étudier la singularité de f_{s+1} au paragraphe 2.1 (propriété iv)).

2.4.1 Etude de la singularité de f_n

On fait les hypothèses suivantes:
$f_{s+1},\ldots,f_{n-1}$ réguliers et $f_j(\pm 1)\neq 0$ $j=s+1,\ldots,n-1$.
D'après l'étude précédente du paragraphe 2.3 f_n est constant tel que:

$$f_n = p(1)\,(R-s) \prod_{j=s+1}^{n-1} r(j)$$

D'où f_n est nul si et seulement si r(n-1) est nul c'est-à-dire $f_n(1)$ est nul (et alors de plus $f_n(-1)$ sera nul).

Or $f_n = q(n-1,1)\,u(n-1,1) + q(n-1,0)\,u(n-1,0) - u(n-2,0)$ (= q(n-1,2))

D'où f_n est nul si et seulement si nous avons:

$$q(n-1,1)\,u(n-1,1) + q(n-1,0)\,u(n-1,0) = u(n-2,0)$$

Soit

$$(u(n-2,2) - u(n-2,0))\,u(n-1,1)^2 + u(n-2,1)\,u(n-1,0)\,u(n-1,1) - u(n-2,2)\,u(n-1,0)^2 = 0$$

On a par exemple quelque soit u(n-1,1), si u(n-2,2) = u(n-2,0) et u(n-1,0) est nul, f_n nul.

Remarque: De plus r(n-1) est nul si et seulement si nous avons:

$$r(n-2) = (2q(n-1,1) + q(n-1,0))^{-1}$$

Calcul de $N_D(p)$ si f_n est nul.

D'après les 2 théorèmes des paragraphes 1.3 et 2.2 et pour m=n-1 nous avons la formule suivante:

$$N_D(p) = \Delta(0,s+1) + \Delta(s+1,n-1) - \int_{-1}^{1} f_{n-2}/f_{n-1}$$

On peut évaluer l'indice de Cauchy du 2ème membre puisque le degré de f_{n-1} est égal à 1 en testant si f_{n-1} est de signe constant sur [-1,1] ou s'il a son zéro dans cet intervalle.

2.4.2 Singularité de f_m de degré peu élevé (inférieur à 4)

Par régularité des itérés de Sturm jusqu'à l'indice m-1 et par hypothèse des $f_j(\pm 1) \neq 0$, j=s+1,. . .,m-1 nous avons d'après les 2 théorèmes des paragraphes 1.3 et 2.2 la formule suivante:

$$N_D(p) = \Delta(0,s+1) + \Delta(s+1,m-1) - \int_{-1}^{1} f_{m-2}/f_{m-1}$$

Il s'agit ensuite d'évaluer l'indice de Cauchy du second membre. Si f_{m-1} est de signe constant sur [-1,1] (par exemple en calculant le nombre de zéros dans [-1,1] par les règles de Descartes) alors l'indice est nul, sinon on peut calculer les zéros de f_{m-1} dans cet intervalle et appliquer la formule de calcul d'indice de Cauchy sur un intervalle pour des fractions rationnelles.

3 - Itérés de Sturm et autoréciprocité de p.

Définition [3],[6]:
$p \in \mathbb{R}[X]$ est autoréciproque s'il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $a_{n-i} = ua_i$ $i=0,1,\ldots,n$ avec $u=\pm 1$.

Nous avons vu au paragraphe 1.2.2 que f_{s+1} est nul si et seulement si n est pair et $a_{s+i+1} = a_{s-(i+1)}$ $i=0,\ldots,s-1$. D'où si f_{s+1} est nul alors p est autoréciproque.

On remarque dans ce cas que la condition du théorème de base ($f_{s+1}(\pm 1)$ non nul) du paragraphe 1.3 n'est pas satisfaite et ainsi on ne peut pas démarrer le calcul du nombre de zéros de p dans le disque unité.

Etudions la réciproque.
Si p est autoréciproque et ne s'annule pas sur le cercle unité alors évidemment n est pair et le coefficient central a_s joue un rôle important:
si a_s est nul alors f_{s+1} ne sera pas nécessairement nul (il suffit de prendre $u=-1$)
sinon f_{s+1} est nul.

D'où la proposition suivante:

Soit p de degré pair (égal à 2s) ne s'annulant pas sur le cercle unité et tel que $a_s \neq 0$,

p autoréciproque est équivalent à f_{s+1} nul.

Etude de polynômes autoréciproques ne s'annulant pas sur le cercle unité.

D'après la proposition précédente il est intéressant d'étudier la question suivante:

Si p est autoréciproque et sans racines sur le cercle unité, est-ce que son coefficient central peut s'annuler ?

Sous cette hypothèse n est évidemment pair (n=2s).

Par les formules de Viéta nous pouvons exprimer le coefficient central en fonction des racines symétriques par rapport au cercle unité:

en notant $r_j e^{i\theta_j}$ les s racines de p, A_j le nombre $(r_j + r_j^{-1})$, A_j est alors strictement supérieur à 2, puisque $r_j \neq 1$.

Nous avons le tableau suivant:

degré, n	coefficient central, a_s
2	$-e^{i\theta_1} A_1$
4	$e^{i(\theta_1+\theta_2)}(A_1A_2 + 2\cos(\theta_1-\theta_2))$
6	$-e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}(A_1A_2A_3 + 2\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A_j)$ avec $\alpha_j=\cos\eta_j$ et $\sum_{j=1}^{3}\eta_j = 0$ où $\eta_1 = \theta_3-\theta_2$, $\eta_2=\theta_1-\theta_3$, $\eta_3=\theta_2-\theta_1$.

Il est évident que pour n=2 ou 4, a_s est non nul puisque $A_j>2$.

Pour n=6 nous avons:

$a_3 = 0$ est équivalent à l'équation suivante:

$$2\sum_{j=1}^{3}\alpha_j A_j = -\prod_{j=1}^{3} A_j \qquad \text{avec } |\alpha_j|\leq 1 \ ;$$

Soit $2\sum_{j=1}^{2}\alpha_j A_j = -(A_1A_2 + 2\alpha_3)A_3$ (1)

puisque $A_3>2$ et $2\alpha_3 + A_1A_2<0$ (1) est équivalent à l'inéquation suivante :

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j A_j + 2\alpha_3 + A_1A_2<0 \qquad (2)$$

Notons $F(A_1,A_2)$ le 1^{er} membre de (2). $F(A_1,A_2)$ est nul si et seulement si $A_2 = -(\alpha_1A_1 + 2\alpha_3)/(A_1+\alpha_2)$, fonction homographique en A_1, notée f.

Notons P le point d'intersection des asymptôtes de coordonnée $(-\alpha_2,-\alpha_1)$

dans le repère cartésien (O,A_1,A_2).

1er cas: La branche supérieure est dans le demi-plan à gauche.

Le signe de F dans le cadran $A_1,A_2>2$ est celui de F au point P c'est-à-dire le signe de $2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2$.

Or la position de f par rapport à l'asymptôte horizontale est telle que $f(2)<-\alpha_1$ soit $2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2>0$.

D'où $F>0$, pour tout $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ et $A_1,A_2>2$, donc l'équation (1) n'est jamais vérifier en α_j et A_j avec $|\alpha_j|\leq 1$ et $A_j>2$.

2ème cas: La branche supérieure est dans le demi-plan à droite.

Si $f(2)\leq 2$ alors $F>0$ pour tout $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ et $A_1,A_2>2$.

Montrons que cette condition est toujours vérifiée:

$$f(2)\leq 2 \text{ est équivalente à } 2 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \geq 0$$

Or α_3 dépend de α_1 et α_2 puisque $\sum_{j=1}^{3} \eta_j = 0$

$$\text{Donc} \qquad 2 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 2 + \cos\eta_1 + \cos\eta_2 + \cos\eta_1\cos\eta_2 - \sin\eta_1\sin\eta_2$$

Notons $g(\eta_1,\eta_2)$ le second membre de cette égalité. Cette fonction est bornée; montrons qu'elle est positive ou nulle. L'étude des points stationnaires donne le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} -\sin\eta_1(1 + \cos\eta_2) - \cos\eta_1\sin\eta_2 = 0 \\ -\sin\eta_2(1 + \cos\eta_1) - \cos\eta_2\sin\eta_1 = 0 \end{cases}$$

Soit la réunion des 2 systèmes suivants:

$$\begin{cases} \sin\eta_1 = \sin\eta_2 \\ 1 + \cos\eta_1 + \cos\eta_2 = 0 \end{cases} \quad (S1) \qquad \begin{cases} \sin\eta_1 = \sin\eta_2 \\ \sin\eta_1 = 0 \end{cases} \quad (S2)$$

L'étude du système (S2) donne:

$\eta_1 = k\pi$ et $\eta_2 = k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

soit $g(\eta_1,\eta_2) = 2 + (-1)^k + (-1)^{k'} + (-1)^{k+k'} > 0$

donc la valeur de la fonction g en ces points est strictement positives, et par suite $g \geq 0$.

L'étude du système (S1) entraîne:

$\eta_1 = \eta_2 + k''\pi$ avec $k'' \in \mathbb{Z}$ et $1 + \cos(\eta_2 + k''\pi) + \cos\eta_2 = 0$

soit $1 + ((-1)^{k''} + 1)\cos\eta_2 = 0$

d'où $\eta_1 = \eta_2$ avec k'' pair

donc $\cos\eta_2 = -1/2$, $\eta_2 = \pm 2\pi/3$

soit $g(\eta_1,\eta_2) = 1/2$

Donc la valeur de la fonction g en ces points est strictement positive, et par suite $g \geq 0$.

Conclusion:

Nous avons la conjecture suivante:

Si p est autoréciproque et sans racines sur le cercle unité alors son coefficient central est non nul.

Nous l'avons transformée en proposition pour n=2,4 et 6.

II

ALGORITHME

Entrée : un polyôme p de $\mathbb{Q}[X]$ de degré n ($n \geq 1$) sans racines sur le cercle unité.

Sortie : son nombre de racines dans le disque unité ouvert (avec o.d.m.) noté nrdop.

Algorithme:

1. Calculs et tests dans la 1ère partie de la construction des itérés de Sturm.

Calculs de s, R et L et test si R et L ≠ 0.
Si R ou L = 0 alors nrdop := ?
Sinon
  Calcul des coefficients de f_{s+1} dans la base (U_k) et test si f_{s+1} est régulier.
  Si f_{s+1} est singulier alors
    si f_{s+1} est constant non nul alors nrdop := $\Delta(0,s+1)$
    sinon nrdop := ?
  Sinon
    calcul des coefficients de f_s dans la base (U_k) et test $f_s(\pm 1) \neq 0$.
    si $f_s(\pm 1) \neq 0$ alors l(s):=(s-L)/(L-s+1) et r(s):=(R-s)/(R-s+1)
    k:=s+1.

2. Calcul et tests dans la 2ème partie de la construction des itérés de Sturm.

Tant que k<n faire:

Calcul des constantes de régularité q(k,1) et q(k,0)

Calcul des constantes de Schelin l(n-k) et r(n-k)

Si $f_s(1)=0$ alors r(s+1):=2q(s+1,1) + q(s+1,0) et $f_s(1):=1$

Sinon r(n-k):=2q(k,1) - 1/r(n-k-1) + q(k,0)

Si $f_s(-1)=0$ alors l(s+1):=-2q(s+1,1) + q(s+1,0) et $f_s(-1):=1$

Sinon l(n-k):=-2q(k,1) - 1/l(n-k-1) + q(k,0)

Test si l(n-k) et r(n-k) ≠ 0

Si l(n-k) ou r(n-k) = 0 alors nrdop := ? et k:=n

Sinon

calcul de Δ(k,k+1)

calcul de la constante de singularité q(k,2) et test q(k,2)≠0

si q(k,2)=0 alors f_{k+1} est singulier (et réciproquement)

si f_{k+1} est constant non nul alors nrdop:=nrdop + Δ(k,k+1) et k:=n

sinon nrdop := ? et k:=n

si q(k,2)≠0 alors

calcul des coefficients de f_{k+1} dans la base (U_k)

k:=k+1

3. Calcul du nombre de racines avec o.d.m. de p à l'intérieur du disque unité.

retour de la valeur de nrdop.

-EXEMPLES-

Notation: les coefficients de f(k) k=s,... dans la base U(k) sont notés u(k,i) avec i=0,...,k-1.

I Etude d'un cas classique.

$$p := (62500000*x^9 - 68750000*x^8 + 70000000*x^7 - 77000000*x^6 + 130250000*x^5 - 143275000*x^4 + 67228000*x^3 - 73950800*x^2 + 67444090*x - 74188499)/62500000$$

s=4

R=(- 79958830)/13247403

L=411764410/92731821

les coefficients de f(s+1) dans la base U(k) sont:

u(5,0)=31511/31250

u(5,1)=(- 7623)/156250

u(5,2)=255591/6250000

u(5,3)=5438499/62500000

u(5,4)=1

degré de f(s+1)=4

les coefficients de f(s) sont:

u(4,0)=(- 346621)/312500

u(4,1)=6280591/6250000

u(4,2)=(- 2811501)/62500000

u(4,3)=28/25

u(4,4)=(- 11)/10

u(4,5)=1

l(4)=(- 40837126)/133568947

r(4)=132948442/119701039

les constantes de régularité sont:

q(5,1)=1

q(5,0)=(- 74188499)/62500000

les constantes de Schelin sont:

l(5)=106886678043063/1276160187500000

r(5)=(- 363002521934279)/4154638812500000

la constante de singularité q(5,2) vaut :(- 712479702623001)/
3906250000000000

les coefficients de f(6) dans la base U(k) sont

u(6,0)=(- 266660041989)/1953125000000

u(6,1)=998663927877/9765625000000

u(6,2)=13543087352091/390625000000000

u(6,3)=(- 712479702623001)/3906250000000000

les constantes de régularité sont:

q(6,1)=(- 3906250000000000)/712479702623001

q(6,0)=(- 257067703026924235739562500000)/169209108883253312679844748667

les constantes de Schelin sont:

l(6)=(- 501064442413765533735895613085937500000000)/
2009577727017543142298157793854745848649669

r(6)=(- 212780471448230445779459859941406250000000000)/
204744444196243214075739771239816871489520 31

la constante de singularité q(6,2) vaut :19502130355025636010190832889/
564030362944177708932815828 89

les coefficients de f(7) dans la base U(k) sont

u(7,0)=(- 767984251174922834865350862 00)/564030362944177708932815828 89

u(7,1)=176865076125425730 90/391395974771261446 01

u(7,2)=195021303550256360101908328 89/564030362944177708932815828 89

les constantes de régularité sont:

q(7,1)=(- 133953395086937018946693672210427794998099 63)/

25393398899772963554935980324218750000000000

q(7,0)=714285913906332636613708217539940243821803839160646678584682 3817/

90452123379093497823926969192260510768107373233334305156250000 00

les constantes de Schelin sont:

l(7)=

1115436757651232599376130082953569799612240875130254611998398790965415414969263

/

4966832083954696883339165374247184265853228778989475445703451520236602459767377

r(7)=

5879536060383529509766505859312184241514954318802136198665261637672184301429148

/

8436798008152119059253671110587622453037299012112085926352473131092798010365905

la constante de singularité q(7,2) vaut :

1787443098261733555839126702122333431251707362288185309755192154066447/

2261303084477337445598174229806512769202684330833357628906250000000000

les coefficients de f(8) dans la base U(k) sont

u(8,0)=(- 168037833145318151828755703915674757830432296834135 33)/

1427584140581638595650850028983590645976562500000000 0

u(8,1)=

1787443098261733555839126702122333431251707362288185309755192154066447

/

2261303084477337445598174229806512769202684330833357628906250000000000

les constantes de régularité sont:

q(8,1)=

4410022752569858269629653764773248906327122121664382071155782931613492832795686

/

1008172179454631077612027435719531264903468205534459518850306836662154349363065

q(8,0)=

2560932827352089214104914024766818789396348729783128958535568234203114825778636

/

2093865773630097427887230501383325537706984305592563502527476214197430142658733

les constantes de Schelin sont:

l(8)=(-

139763037638237692230035068037267451878436554442673235619736185560954146387023 3
)/
143978763059646782659545971466363947800274596424160164122768959226787165176321 0

r (8) =
503146935497655692028126244934162826762371595993623648231050268019434926993284 0
/
758920954981919452461567994970644101679731464093384952070651004028532499721497 4

le nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert est 4.

II Etude de cas singuliers.

1) Constantes de Sturm nulles.

$p := x^3 - x + 2$

s=1

R=1

L=(-1)

R=s ou L=s.

le nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert est x.

2) Itérés de Sturm singuliers.

2.1) Itérés de Sturm nuls.

$p := (4*x^4 + 17*x^2 + 4)/6$

s=2

R=2

L=2

R=s ou L=s.

le nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert est x.

2.2) Itérés de Sturm non constants.

$p := x^6 + x^4 + x + 1$

s=3

R=11/4

L=9/2

les coefficients de f(s+1) dans la base U(k) sont:

u(4,0)=1

u(4,1)=(-1)

u(4,2)=0

f(s+1) singulier.

le nombre de zéros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert est x.

III Exemples divers.

1) Polynômes solutions d'équations différentielles (Gear, 1971).

```
       2
p:=(5*x  - x + 2)/6

N (p) = 2
 D

temps= 211 msec.

       3      2
p:=(7*x  + 7*x  - 5*x + 3)/12

N (p) = 2
 D

temps= 1020 msec.

        4       3       2
p:=(47*x  - 13*x  + 47*x  - 33*x + 12)/60

N (p) = 2
 D

temps= 536 msec.

        5       4       3       2
p:=(37*x  + 37*x  - 53*x  + 67*x  - 38*x + 10)/60

N (p) = 3
 D

temps= 787 msec.

         6       5       4       3       2
p:=(319*x  - 101*x  + 529*x  - 731*x  + 634*x  - 290*x + 60)/420

N (p) = 3
 D

temps= 1487 msec.
```

2) Exemples comparatifs.

```
                9           8           7           6           5
p := (1000000*x  - 1099999*x  + 1120000*x  - 1231999*x  + 2083999*x  -

               4           3           2
      2292400*x  + 1075647*x  - 1183212*x  + 1079105*x - 1187701)/1000000

N (p) = 4
 D

temps= 2624 msec.
```

```
                6        4        2
p := (2*(3*x  + 13*x  + 16*x  + 4))/3

N (p) = 2
 D

temps= 725 msec.

              6        4        2
p := (4*x  + 17*x  + 20*x  + 4)/2

N (p) = 2
 D

temps= 330 msec.

              3
p := (2*(x  - 9*x + 1))/3

N (p) = 1
 D

temps= 448 msec.

              3     2
p := (2*(x  - x  + x + 2))/3

N (p) = 1
 D

temps= 486 msec.

       4
p := x  + 2

N (p) = 0
 D

temps= 438 msec.
```

IV Polynômes s'annulant sur le cercle unité.

$p := (2*(x^5 - 8*x^3 + x^2 - 9*x + 1))/3$

s=2

R=13/7

L=5/3

les coefficients de f(s+1) dans la base U(k) sont:

u(3,0)=2/3

u(3,1)=(- 2)/3

u(3,2)=2/3

degre de f(s+1)=2

les coefficients de f(s) sont:

u(2,0)=0

u(2,1)=(- 16)/3

u(2,2)=0

u(2,3)=2/3

les constantes de Schelin l(s) et r(s) sont:

l(2)=1/2

r(2)=(- 1)/6

les constantes de régularité sont:

q(3,1)=1

q(3,0)=1

les constantes de Schelin sont:

l(3)=(-3)

r(3)=9

la constante de singularité q(3,2) vaut :6

les coefficients de f(4) dans la base U(k) sont

u(4,0)=0

u(4,1)=6 .

les constantes de régularité sont:

q(4,1)=1/9

$q(4,0) = (- 1)/9$

les constantes de Schelin sont:

$l(4) = 0$

$r(4) = 0$

le nombre de zeros avec o.d.m. dans le disque unité ouvert est x.

CONCLUSION

Cette méthode permet de calculer le nombre exact dans $\mathbb{R}[X]$ de racines à l'intérieur du disque unité sous 2 conditions (régularité de la suite et constantes de Sturm non nulles). Il existe des cas où l'algorithme ne peut pas fonctionner (polynômes autoréciproques) sans oublier la condition initiale des racines toutes de module différent de 1 qui ne permet pas de généraliser la méthode à des polynômes à plusieurs paramètres. Une solution existe pour traiter ce genre de problème en factorisant le polynôme en facteur autoréciproque [6] ou en prenant un bon disque de rayon plus grand que 1 contenant le même nombre de zéros [5] mais il subsiste des cas impossibles.

Nous rappelons [5] qu'il est possible d'utiliser cette méthode pour trouver le nombre de racines dans n'importe quelle région du champ complexe conformément équivalente par homographie.

Nous étudions une méthode pour évaluer d'une part l'indice de Cauchy sur $[-1,1]$ formellement et d'autre part les constantes de Sturm en fonction des coefficients du polynôme.

L'introduction d'indice de Cauchy sur le cercle unité [7] permet de calculer le nombre de zéros dans le disque unité de polynôme de $\mathbb{C}[X]$ mais d'un point de vue matricielle (formes de Bezout et de Toeplitz).

REFERENCES

[1] **C. Brezinski** "Critères simples de localisation des racines d'un polynôme"
Publication ANO 8, IEEA Lille, 1979.

[2] **T. J. Rivlin** "The Chebyshev polynomials"
J. Wiley, New York, 1974.

[3] **M. Marden** "Geometry of polynomials"
AMS Surveys 3, 2nd ed., 1966.

[4] **C.W. Schelin** "Counting zeros of real polynomials within the unit disk"
SIAM J. Numer. Anal. v20, n°5, 1983.

[5] **P. Chenin**
B. Gleyse "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°458, IMAG TIM3, 1984.

[6] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ dans le disque unité"
Rapp. Rech., n°551, IMAG TIM3, 1985.

[7] **N. Hamada**
B.D.O. Anderson "The unit circle Cauchy index: definition, characterization and polynomial zero distribution"
SIAM J. Appl. Math., v24, n°4, 1984.

[8] **L. Pernebo** "An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems"
IEEE Trans. Aut. Control, v26, n°1, 1981.

[9] **A.S. Morse** "System invariants under feedback and cascade control".
Proc. Int. Symp. on Math. Syst. Theory, Udine, Italy, 1976.

[10] **J.M. Dion** "Sur la stucture à l'infini de systèmes linéaires" Thèse d'Etat au LAG, Grenoble, 1983.

[11] **J. Demongeot** "Systèmes dynamiques et champs aléatoires: application en biologie fondamentale" Thèse d'Etat à l'IMAG, Grenoble, 1983.

CHAPITRE 2

COMPARAISON ALGORITHMIQUE DES TRANSFORMATIONS DE SCHUR ET DE STURM ET SCHELIN

COMPARAISON ALGORITHMIQUE

DE LA TRANSFORMATION DE SCHUR

ET DES TRANSFORMATIONS DE STURM ET SCHELIN

Introduction :

Nous rappelons une hypothèse importante et assez restrictive dans la méthode de Schelin : le polynôme considéré, p, ne doit pas s'annuler sur le cercle unité ; nous présentons un moyen de l'éviter. De plus nous pouvons conclure sur le nombre de zéros à condition que les constantes de Schelin soient non nulles et les itérés de Schelin réguliers.

Nous donnons une brève relation entre constantes de Schur et celles de Schelin.

Après une étude de la complexité et à travers quelques exemples particuliers nous précisons le choix des algorithmes.

I] Transformation de Sturm et racines sue le cercle unité.

Il s'agit d'isoler ces racines dans un facteur commun de p. Nous rappelons que l'on peut isoler les facteurs autoréciproques de p en prenant le pgcd de p et p^* son polynôme réciproque [3] qui contient les racines sur ou symétriques par rapport au cercle unité de p. Si p est dans $\mathbb{Z}[X]$, ce pgcd aussi et est divisible par certains facteurs de p dans $\mathbb{Z}[X]$ en éléments irréductibles.

On peut aussi faire des transformations complexes du type $z \mapsto iz$ pour calculer le nombre de racines sur le cercle unité [1] en utilisant les suites classiques de Sturm et indices de Cauchy sur $\mathbb{R}$, [2].

Remarque :

L'algorithme utilisant les transformations de Sturm et Schelin permet de prendre des polynômes s'annulant sur le cercle unité mais alors il existe une constante de Schelin nulle et ainsi on ne peut pas conclure ; c'est par exemple le cas du polynôme simulé suivant : $2/3(x^2+1)(x^3-9x+1)$.

II] Constantes de Schur et constantes de Schelin dans $\mathbb{R}[X]$.

Il s'agit d'étudier l'effet du test de Schur-Cohn sur les constantes de

Schelin et réciproquement.

1) Si la première constante de Schur de p est nulle

Nous avons :
dans le cas n pair :
si les coefficients extrêmes de p sont de même signe (resp. opposé) le (s+1)-ème itéré de Schelin est singulier (resp. régulier).
exemple : x^6+x^4+x+1 .
dans le cas n impair :
le (s+1)-ème itéré de Schelin est régulier.
les exemples suivants x^3-9x+1 ou x^3-x^2+x+2 sont des cas qui aboutissent par les transformations de Sturm et Schelin mais pas par la transformation de Schur.

De plus l'intérêt de cette relation réside dans le fait de calculer directement le nombre de zéros dans le disque unité de l'itéré de Schur précédent c'est-à-dire tel que sa première constante de Schur soit nulle à condition de satisfaire les hypothèses de l'algorithme.

2) Si la dernière constante de Schur de p est nulle

les autres étant non nulles,
On sait alors que p s'annule sur le cercle unité et ainsi on se retrouve dans le cas de l'hypothèse de départ sur le polynôme considéré p de l'algorithme.
Remarque :
Il existe des polynômes tels que l'algorithme basé sur les transformations de Sturm et Schelin n'aboutisse pas, mais par contre avec la transformation de Schur on peut trouver leurs nombres de zéros dans le disque unité (avec leurs constantes de Schur toutes non nulles).
Exemple: x^3-x+2 .

III] Etude de la complexité.

On entend par opérations élémentaires les multiplications et divisions arithmétiques.

1) Transformations de Sturm et Schelin.
Nombre d'opérations élémentaires dans le calcul des constantes de Schelin
- calcul de R et L : 2 divisions

- calcul de l(s) et r(s) : 2 divisions
- le calcul des coefficients de f_s et f_{s+1} est sans multiplication et division.
- calcul des constantes de régularité q(k,0) et q(k,1), k=s+1,...,n-1 : 3(n-s-1) multiplications et divisions.
- calcul des constantes de Schelin l(k) et r(k), k=s+1,...,n-1 : 2(n-s-1) multiplications et divisions.

Calcul des coefficients des itérés de Schelin f_k , k=s+2,...,n-1 .

On ne calcule pas f_n car si l(n-1)≠0 ou r(n-1)≠0 alors $f_n \neq 0$.

Pour chaque itéré de Schelin d'indice k variant de s+2 à n-1 il faut faire 2(n-k) multiplications et divisions.

Soit au total $2 \sum_{k=s+2}^{n-1} (n-k) = (n-s-2)(n-s-1)$.

Au total :

(n-s-1)((n-s-2)+5)+4 = $n^2-2ns+s^2+2n-2s+1$ multiplications et divisions, c'est-à-dire si n=2s $(n^2+4n+4)/4$ et si n=2s+1 $(n^2+6n+9)/4$.
Soit un coût en opérations élémentaires en $o(1/4n^2)$.

2) Transformation de Schur.

2.1 Cas régulier.

Il s'agit de déterminer le nombre d'opérations élémentaires dans le calcul des constantes de Schur.

Pour chaque itéré de Schur d'indice k, variant de 1 à n, il faut faire seulement 2(n-k+1) multiplications.

Soit au total $2 \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) = n(n+1)$ multiplications . Il n'y a pas de division. D'où un coût en opérations élémentaires en $o(n^2)$.

2.2 Cas singulier (transformations de Marden et Cohn).

D'après le chapitre sur la comparaison algorithmique de la transformation circulaire et des transformations de Marden et Cohn nous avons en reprenant les notations (N_0 degré du k_0-ème itéré de Schur ($N_0 \leq n-k_0$) tel que la (k_0+1)-ème constante de Schur de p soit nulle) et l'hypothèse (on fait N_0 transformations de Marden et Cohn, d'où $N_0=n-k_0$) un coût, en négligeant le calcul du transformé de Cohn, en $3N_0^2+3N_0-2$ opérations

élémentaires, c'est-à-dire $3n^2-6nk_0+3k_0^2+3n-3k_0-2$.

Reste à déterminer le nombre d'opérations dans le calcul des constantes de Schur d'indice 1 à k_0+1 ; pour chaque itéré de Schur d'indice k, variant de 1 à k_0+1, il faut faire seulement $2(n-k+1)$ multiplications.

$$\text{Soit au total } 2\sum_{k=1}^{k_0+1}(n-k+1) = 2nk_0-k_0^2+2n-k_0-2$$

Soit globalement un coût en $3n^2-4nk_0+2k_0^2+5n-4k_0-4$.

Or k_0 varie de 0 à n-1 et ce coût est décroissant en k_0 dans cet ensemble, d'où on a un coût maximal ($k_0=0$) en $3n^2+5n-4$ et minimal ($k_0=n-1$) en n^2+4n-1.

3) Conclusion.

Sous forme de tableau nous avons les coûts en opérations élémentaires suivants :

Transformations	coût en o
Sturm et Schelin	$1/4n^2$
Schur _ régulier	n^2
Schur _ singulier	$3n^2$ pour n transformations de Marden et Cohn n^2 pour 1 transformation de Marden ou Cohn

Ainsi l'algorithme basé sur les transformations de Sturm et Schelin reste plus efficace en coût en opérations élémentaires que celui utilisant la transformation de Schur. On peut le voir sur les exemples simulés dans les 2 méthodes.

Remarque :

Un problème important réside dans la taille des coefficients. En prenant pour chaque itéré de Schur d'indice k le pgcd des coefficients extrêmes et en divisant l'itéré de Schur suivant par ce pgcd on réduit la taille des

coefficients sensiblement.

On peut faire une étude modulaire mais on ne conserve pas les propriétés de la transformation de Schur.

Conclusion.

Les transformations de Sturm et Schelin sont très efficaces en coût en opérations élémentaires mais plus restrictives dans leurs applications (les polynômes à facteurs autoréciproques ne marchent pas).

On peut intégrer ces transformations dans l'algorithme basé sur les transformations de Marden et Cohn, sur la partie non autoréciproque du polynôme p, de façon aléatoire quant aux résultats car en l'état actuel on ne peut pas évaluer les indices de Cauchy des fractions rationnelles des itérés de Sturm et Schelin consécutifs lorsque le dénominateur s'annule en ± 1 ou est singulier.

De plus l'hypothèse restrictive sur le cercle unité empêche une paramétrisation.

Ainsi le choix de l'agorithme pour la paramétrisation s'est fait sur les transformations de Schur, Marden et Cohn.

Références :

1] **C. Brezinski** "Critères simples de localisation des racines d'un polynôme" Publication ANO. 8, 1979.

[2] **J. Moulin-Ollagnier** programme Macsyma de calcul du nombre de zéros dans $\mathbf{C}[X]$, dans le disque unité. Université de Paris-Nord, 1985.

[3] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$ dans le disque unité" Rapp. Rech., n°551, IMAG TIM3, 1985.

CHAPITRE 3

ANNEXE DU PROGRAMME

```
**************************************************

METHODE PAR TRANSFORMATIONS DE STURM ET SCHELIN

**************************************************


array top(10);


matrix mfjp(2,6);


share np,sp;


real procedure encdlr(a,b,c);
%entrees: a,b 2 nombres reels non nuls,
          c un nombre entier positif ou nul,
 sorties: c+1 si a<0<b,
          c-1 si b<0<a,
          c   sinon ;

begin
a1:=a*b;
if a1 < 0 then if a < 0 then nchgs:=c+1
                        else nchgs:=c-1
          else nchgs:=c;
return nchgs
end encldr;


procedure nrdops(p);
%entree: p polynome en la variable x de degre >1, sans racines sur le cercle
         unite,
 sortie: son nombre de zeros en comptant leurs o.d.m. dans le disque unite
         ouvert;

begin
np:=deg(num(p),x);
symbolic sp:=quotient(np,2);
dfp:=df(p,x);
rp:=sub(x=1,dfp)/sub(x=1,p);
lp:=-sub(x=-1,dfp)/sub(x=-1,p);
if (rp eq sp) or (lp eq sp) then nrdop:=x else
begin
   coeff(p,x,top);
   i1:=1;
   i2:=2;
   bolp:=true;
   bols1:=true;
   bols2:=true;
   dfs1:=0;
   mfjp(1,1):=top(sp+1)-top(sp-1);
   for j:=2:sp do
```

```
begin
 mfjp(1,j):=top(sp+j)-top(sp-j);
 if (dfs1 eq 0) and (mfjp(1,j) neq 0) then dfs1:=1;
end;
if (2*sp)=np then << if dfs1=0 then << nrdop:=encdlr(sp-rp,lp-sp,sp);
                                       bolp:=false                    >>;
                    if (dfs1=1) and (top(np)=top(0)) then
                                              << nrdop:=x;
                                              bolp:=false             >>;
                                                                       >>
             else mfjp(1,sp+1):=top(np);
if bolp eq true then
 begin
   dp:=np-(sp+1);
   nrdop:=encdlr(sp-rp,lp-sp,sp);
   for j:=1:(sp-1) do mfjp(2,j):=top(sp+j-1)-top(sp-j-1);
   for j:=sp:(np-sp+1) do mfjp(2,j):=top(sp+j-1);
   if lp neq (sp-1) then
   << ls:=(sp-lp)/(lp-sp+1);
      bols1:=false          >>;
   if rp neq (sp-1) then
   << rs:=(rp-sp)/(rp-sp+1);
      bols2:=false          >>;
   while dp neq 0 do
    begin
    q1:=mfjp(i2,dp+2)/mfjp(i1,dp+1);
    q0:=(mfjp(i2,dp+1)-mfjp(i1,dp)*q1)/mfjp(i1,dp+1);
    if bols1 eq true then
    << ls:=-2*q1+q0;
       bols1:=false           >>
                    else
    ls:=-2*q1-1/ls+q0;
    if bols2 eq true then
    << rs:=2*q1+q0;
       bols2:=false           >>
                   else
    rs:=2*q1-1/rs+q0;
    if (ls eq 0) or (rs eq 0) then << nrdop:=x ;
                                      dp:=1                          >>
                                else
     begin
     nrdop:=nrdop+encdlr(ls,rs,0);
     if dp neq 1 then
     begin
     dfsd:=0;
     mfjp(i2,dp):=-mfjp(i2,dp)+(mfjp(i1,dp+1)+mfjp(i1,dp-1))*q1+mfjp(i1,dp)*
     q0;
     if mfjp(i2,dp) eq 0 then dfsd:=1 ;
     if dp neq 2 then
      begin
      for k:=2:(dp-1) do
       begin
       mfjp(i2,k):=q1*(mfjp(i1,k-1)+mfjp(i1,k+1))+q0*mfjp(i1,k)-mfjp(i2,k);
       if (dfsd eq 1) and (mfjp(i2,k) neq 0) then
        << k:=dp ; dp:=1                          >>
       end;
      if (dp neq 1) and (dfsd eq 1) then dp:=1 ;
      end
                         else
      if dfsd eq 1 then dp:=1 ;
```

```
          if dfsd eq 0 then
           << mfjp(i2,1):=q1*mfjp(i1,2)+q0*mfjp(i1,1)-mfjp(i2,1);
              i3:=i1;
              i1:=i2;
              i2:=i3                                                    >>;
           end;
          end;
         dp:=dp-1;
         end;
        end;
       end;

return nrdop

end nrdops;


end;
```

PARTIE C

POLYNOMES PARAMETRES

CHAPITRE 1

NOMBRE DE RACINES DE POLYNOMES PARAMETRES DE $\mathbb{R}[X]$ DANS LE DISQUE UNITE

INTRODUCTION

La méthode basée sur les transformations de Marden et de Cohn permet de calculer le nombre de zéros de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dans le disque unité de façon très générale.

Nous proposons un algorithme s'appuyant sur cette méthode pour calculer le nombre de zéros d'un polynôme de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i(y)\, x^i$ avec

$a_i(y) \in \mathbb{R}[y]$ de $i=0,\ldots,n$ tel que le pgcd des $a_i(y)$ soit constant en y.

Nous nous intéressons au nombre de zéros dans le disque unité en fonction du nombre réel y.

Ce calcul permet d'étudier certains problèmes de stabilité avec paramètre des systèmes biochimiques ou physiques [4].

Le calcul formel contribue de façon originale à cette étude.

Dans une première partie, nous adaptons au cas des polynômes paramétrés la méthode classique. Dans la seconde, nous présentons notre algorithme et divers exemples traités sur le Bull DPS8 sous système Multics du CICG.

I

DESCRIPTION DE LA METHODE

Nous reprenons les résultats de le méthode classique, la plus générale, qui permettent de calculer le nombre de zéros de polynômes paramétrés sous certaines conditions sur le paramètre afin d'éviter les ennuis du genre : nombre de zéros infini.

Cette étude revient à celle des points stationnaires du polynôme noté

$p(y)(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(y)\, x^i$; étudions à y fixé la dérivée partielle première notée

$\partial p/\partial x$ au point (x,y) : $\partial p/\partial x(x,y) = \sum_{i=1}^{n} i a_i(y)\, x^{i-1}$.

Peut-on trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I \;\; \partial p/\partial x(x,y) = 0$?

La dérivée est un polynôme en x qui ne peut s'annuler sur I que si les $a_i(y)$ de i=1 à n ont au moins une racine commune y_0. Mais dans ce cas p est égal à $a_0(y_0)$. Donc si le pgcd des $a_i(y)$ de i=0 à n est constant nous pouvons calculer le nombre de zéros, sinon p est divisible par ce pgcd.

Le coefficient de tête $a_n(y)$ peut éventuellement s'annuler pour une valeur du paramètre y_0. Dans ce cas nous calculons le nombre de zéros du polynôme $p(y_0)$ dans le disque unité par une méthode classique (sans paramètre). Cependant nous nous intéressons aux polynômes de degré n formellement c'est-à-dire nous ne nous préoccupons pas des racines du coefficient de tête.

Notations :

- les itérés de Schur sont notés $p_k(y)(x) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i^{(k)}(y)\, x^i$
- les constantes de Schur sont notées $g_k(y) = p_k(y)(0)$

1) Cas régulier (constantes de Schur toutes non identiquement nulles).

Nous reprenons le lemme de Cohn sur les constantes de Schur toutes non

nulles [3] et nous étudions le nombre de zéros en fonction de leurs racines.

Nous avons la formule récurrente suivante [2] :

Pour tout k=1,...,n

$$N_D(p_{k-1}(y)) = \begin{cases} N_D(p_k(y)) & \text{si } g_k(y)>0 \\ n+1-k-N_D(p_k(y)) & \text{si } g_k(y)<0 \end{cases}$$

Il nous suffit donc de gérer les racines réelles des constantes de Schur.

Il y a cependant des cas relativement embêtants :

1).Des constantes de Schur sans racines réelles (de signes constants).

.Des constantes de Schur constantes en y.

2).Des racines réelles identiques d'une constante de Schur à sa précédente.

Critère d'existence de racines réelles des constantes de Schur.

Nous supposons g_{k+1} non constant en y.

Nous avons par propriétés des constantes de Schur [1] :

$$g_{k+1}(y) = g_k^2(y) - (a_{n-k}^{(k)})^2(y) \qquad k=0,1,...,n-1.$$

Si $d^\circ(g_k)$ et $d^\circ(a_{n-k}^{(k)})$ sont strictement positifs alors g_{k+1} a au moins une racine réelle.

Si $d^\circ(g_k)>0$ et $a_{n-k}^{(k)}$ constant non nul alors

1) si g_k est non borné alors g_{k+1} a au moins une racine réelle.

2) si g_k est borné alors :

si le $\text{Min}(g_k^2) \leq (a_{n-k}^{(k)})^2$ alors g_{k+1} a au moins une racine réelle, sinon g_{k+1} est de signe constant positif.

Critère d'existence de racines réelles identiques d'une constante de Schur à sa précédente.

Il suffit de prendre le pgcd de g_{k+1} et g_k pour déterminer de façon précise ces racines réelles communes, puisque le calcul des racines réelles des constantes de Schur se fait avec une erreur relative.

Ce calcul cependant engendre cette même erreur relative sur le bilan

final du nombre de zéros en fonction du paramètre pour chaque racine des constantes de Schur.

Remarque:

Le nombre de zéros sur le cercle unité est nul.

Conclusion:

Dès qu'il existe une racine réelle y_0 de g_{k+1} nous calculons $N_D(p_k(y_0))$ par les méthodes classiques sans paramètre [3], [5].

2) Cas singulier.

Soient $g_1(y),\ldots,g_k(y)\neq 0$ et $g_{k+1}=0$.

Par propriété des constantes de Schur, nous avons :

$$a_{n-k}^{(k)} = u\, a_0^{(k)} \quad \text{où } u=\pm 1 \quad (1)$$

Etudions p_{k+1} :

$$a_i^{(k+1)} = a_0^{(k)} a_i^{(k)} - a_{n-k}^{(k)} a_{n-k-i}^{(k)} \qquad i=0,1,\ldots,n-(k+1).$$

D'après (1) nous trouvons :

$$a_i^{(k+1)} = a_0^{(k)} \left(a_i^{(k)} - u a_{n-k-i}^{(k)}\right) \qquad i=0,1,\ldots,n-(k+1).$$

Puisque $g_1(y),\ldots,g_k(y)\neq 0$ (ainsi $a_{n-k}^{(k)}(y)\neq 0$) nous avons :

p_{k+1} est identiquement nul si et seulement si

$$a_{n-k-i}^{(k)} = u a_i^{(k)} \qquad i=1,\ldots,n-(k+1).$$

de plus $p_k = u p_k^*$ et p_k divise p.

Transformation de Cohn ($p_{k+1}=0$)

Notons $p^{(1)}$ le transformé de Cohn défini de la manière suivante :

$$p^{(1)}(y) = (\partial p_k(y)/\partial x)^*(y)$$

Nous avons $N_D(p^{(1)}) = N_D(p_k)$.

Transformation de Marden [2] (p_{k+1} non identiquement nul).

Il existe un indice $q \leq (n-k)/2$ tel que :

$a_{n-k-i}^{(k)} = u a_i^{(k)}$ $i=0,1,\ldots,n-k-q+1$ et $a_{n-k-q}^{(k)} \neq u a_q^{(k)}$ alors

soit $a(y) = (a_{n-k-q}^{(k)}(y) - u a_q^{(k)}(y))/a_{n-k}^{(k)}(y)$

Notons $p^{(2)}$ le transformé de Marden défini de la façon suivante :

$$p^{(2)} = \begin{cases} ((x^q + 2)\, p_k(y)(x))_1 & \text{if } a(y)>0 \\ ((x^q - 2)\, p_k(y)(x))_1 & \text{if } a(y)<0 \end{cases}$$

où $(\ )_1$ est le premier itéré de Schur du polynôme entre parenthèses.

Nous avons les propriétés suivantes :

i) Le degré du transformé de Marden est égal à celui de p_k.

ii) La première constante de Schur du transformé de Marden est négative.

iii) $N_D(p^{(2)}) = N_D(p_k)$.

Remarques :

S'il existe un zéro réel y_0 de a, nous calculons $N_D(p_k(y_0))$ par les méthodes classiques sans paramètre [3], [5].

Ces deux transformés sont non identiquement nuls (p_k non constant en x), d'où la finitude de l'algorithme.

Conclusion :

Le cas régulier donne les valeurs singulières discrètes du paramètre pour le calcul du nombre de zéros dans le disque unité avec une erreur relative due au calcul des racines réelles des constantes de Schur.

II

ALGORITHME

Entrée: un polynôme p de $(\mathbb{Q}[y])[X]$ de degré n en x ($n \geq 1$).

Sortie: son nombre de racines dans le disque unité (avec o.d.m.) suivant les valeurs de y réel.

Algorithme:

1. Normalisation de p en p_U tel que les coefficients en y soient premiers entre eux.
2. Calcul du nombre de racines de p_U dans D(0,1).

   Pour k=1,...,n faire :

   calcul des γ_k par l'algorithme de Schur-Cohn dans $\mathbb{Q}[y]$

   2.1 Calcul des racines réelles des γ_k

   2.2 tri de ces racines

   2.3 détermination du signe des γ_k entre ces racines

   2.4 insertion de ces nouvelles racines par rapport aux précédentes sur l'axe réel

   2.5 calcul itératif du nombre de racines dans D(0,1) d'après la formule récurrente du paragraphe I.1
3. Nombre de racines de p dans D(0,1) dans chaque intervalle délimité par les racines des constantes de Schur.

- EXEMPLES -

$p := 2*x^4 + x^2*(y + 1) + x*(y - 1) + 1$

les constantes de Schur de p sont:

g1(y) = (-3)

g1(y) est constant non nul en y.

$g2(y) = -4*y^2 + 8*y + 5$

les racines réelles de g2(y) sont:

(- 1)/2

5/2

$g3(y) = 3*y*(4*y^3 - 20*y^2 + y + 30)$

les racines réelles de g3(y) sont:

(- 36556015)/33554432

0

3/2

153996527/33554432

$g4(y) = 45*y^2*(-32*y^5 + 112*y^4 + 16*y^3 - 312*y^2 + 126*y + 135)$

les racines réelles de g4(y) sont:

(- 3)/2

(- 1)/2

0

3/2

5/2

Nous avons:

si y < (- 3)/2 $N_D(p) = 1$

si $(-3)/2 < y < (-36556015)/33554432$ $N_D(p) = 2$

si $(-36556015)/33554432 < y < (-1)/2$ $N_D(p) = 2$

si $(-1)/2 < y < 0$ $N_D(p) = 2$

si $0 < y < 3/2$ $N_D(p) = 4$

si $3/2 < y < 5/2$ $N_D(p) = 2$

si $5/2 < y < 153996527/33554432$ $N_D(p) = 2$

si $y > 153996527/33554432$ $N_D(p) = 2$

```
          5    3            2  2
p := 2*x  - x *(y + 1) + x *y  + x*(y - 1) + 1

les constantes de Schur de p sont:

g1(y) = (-3)

g1(y) est constant non nul en y.

                2
g2(y) = - 4*y  + 8*y + 5

les racines réelles de g2(y) sont:

( - 1)/2

5/2

                          3        2
g3(y) = 3*y*( - 16*y  - 16*y  - 19*y + 30)

les racines réelles de g3(y) sont:

0

3/4

                   10       8        7        6        5        4        3
g4(y) = 9*( - 64*y   - 128*y  + 864*y  + 768*y  + 1104*y  + 357*y  - 1260*y

                 2
          - 1100*y  - 1500*y - 625)

les racines réelles de g4(y) sont:

(-1)

( - 1)/2

37650363/33554432

5/2

                      19          17           16           15           14
g5(y) = 81*y*(4096*y   + 9984*y   - 116992*y   - 89920*y   - 207296*y   +

                 13           12           11           10
            836992*y   + 1461360*y   + 1667644*y   - 548100*y   - 3630037*

             9           8           7           6           5
            y  - 3361254*y  - 3375456*y  + 1451760*y  + 4470050*y  +

                    4           3           2
            2594500*y  + 1902500*y  - 587500*y  - 1578125*y - 468750)

les racines réelles de g5(y) sont:

(-1)

( - 1)/2
```

0

3/4

37650363/33554432

5/2

Nous avons:

si $y < (-1)$	$N_D(p) = 2$
si $(-1) < y < (-1)/2$	$N_D(p) = 4$
si $(-1)/2 < y < 0$	$N_D(p) = 4$
si $0 < y < 3/4$	$N_D(p) = 4$
si $3/4 < y < 37650363/33554432$	$N_D(p) = 4$
si $37650363/33554432 < y < 5/2$	$N_D(p) = 2$
si $y > 5/2$	$N_D(p) = 2$

$$p := x^2*(y^2 - 2*y + 1) + x*y^3 + y$$

les constantes de Schur de p sont:

$$g1(y) = y^6 - y^4 + 4*y^3 - 6*y^2 + 4*y - 1$$

les racines réelles de g1(y) sont:

(- 72071533)/33554432

19120667/33554432

$$g2(y) = y^{12} - 2*y^{10} + 8*y^9 - 12*y^8 + 2*y^7 + 21*y^6 - 50*y^5 + 64*y^4 - 52*y^3 + 27*y^2 - 8*y + 1$$

les racines réelles de g2(y) sont:

(- 81007565)/33554432

(- 61716223)/33554432

13898701/33554432

19120667/33554432

1

Nous avons:

si $y < (- 81007565)/33554432$ $N_D(p) = 0$

si $(- 81007565)/33554432 < y < (- 72071533)/33554432$ $N_D(p) = 1$

si $(- 72071533)/33554432 < y < (- 61716223)/33554432$ $N_D(p) = 1$

si $(- 61716223)/33554432 < y < 13898701/33554432$ $N_D(p) = 2$

si $13898701/33554432 < y < 19120667/33554432$ $N_D(p) = 1$

si $19120667/33554432 < y < 1$ $N_D(p) = 1$

si $y > 1$ $N_D(p) = 0$

```
      5      3                    2
p := x *y + x *( - 3*y - 5) + x *y + x*( - 5*y - 4) + 1
```

les constantes de Schur de p sont:

```
          2
g1(y) = - y  + 1
```

les racines réelles de g1(y) sont:

(-1)

1

```
                4        3        2
g2(y) = - 24*y  - 40*y  - 18*y  + 1
```

les racines réelles de g2(y) sont:

(- 28869549)/33554432

(- 1)/2

6499927/33554432

```
                8        7        6        5        4        3        2
g3(y) =575*y  + 1864*y  + 1592*y  - 1050*y  - 2378*y  - 944*y  + 235*y  +
      130*y - 24
```

les racines réelles de g3(y) sont:

(-1)

6948073/33554432

7479557/33554432

1

```
                 16          15          14          13          12
g4(y) =148296*y  + 684968*y  + 838022*y  - 854268*y  - 2897179*y  -
          11          10         9          8          7
     1557954*y  + 2097362*y  + 2934796*y  + 491181*y  - 1187496*y  -
          6         5         4         3         2
     770735*y  - 36968*y  + 98346*y  + 17842*y  - 5469*y  - 920*y + 176
```

les racines réelles de g4(y) sont:

(- 43563147)/33554432

(-1)

(- 28869549)/33554432

(- 1)/2

6499927/33554432

7098843/33554432

7193943/33554432

1

$$g5(y) = 4*(5440953600*y^{32} + 50418672192*y^{31} + 178876459776*y^{30} + 225141140576*y^{29} - 326538761936*y^{28} - 1464623261740*y^{27} - 1424908796752*y^{26} + 1503442329728*y^{25} + 4702345524708*y^{24} + 2714542537849*y^{23} - 3940946509828*y^{22} - 6913658709155*y^{21} - 1751859012540*y^{20} + 4798040266457*y^{19} + 4815595954304*y^{18} + 88668390779*y^{17} - 2641799901430*y^{16} - 1570459071348*y^{15} + 215347592674*y^{14} + 623178323234*y^{13} + 214760116870*y^{12} - 50614017015*y^{11} - 50923964692*y^{10} - 5197093597*y^{9} + 4848561866*y^{8} + 1212964997*y^{7} - 246170634*y^{6} - 96436349*y^{5} + 8221982*y^{4} + 4043008*y^{3} - 275648*y^{2} - 79616*y + 7680)$$

les racines réelles de g5(y) sont:

(- 44739243) /33554432

(- 5) /4

(-1)

(- 28869549) /33554432

(- 1) /2

6499927/33554432

6948073/33554432

7098843/33554432

7479557/33554432

1

Nous avons:

si $y < (- 44739243)/33554432$	$N_D(p) = 1$
si $(- 44739243)/33554432 < y < (- 43563147)/33554432$	$N_D(p) = 2$
si $(- 43563147)/33554432 < y < (- 5)/4$	$N_D(p) = 2$
si $(- 5)/4 < y < (-1)$	$N_D(p) = 3$
si $(-1) < y < (- 28869549)/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $(- 28869549)/33554432 < y < (- 1)/2$	$N_D(p) = 3$
si $(- 1)/2 < y < 6499927/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $6499927/33554432 < y < 6948073/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $6948073/33554432 < y < 7098843/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $7098843/33554432 < y < 7193943/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $7193943/33554432 < y < 7479557/33554432$	$N_D(p) = 3$
si $7479557/33554432 < y < 1$	$N_D(p) = 3$
si $y > 1$	$N_D(p) = 1$

CONCLUSION

Cette méthode permet de calculer le nombre dans $(\mathbb{R}[y])[X]$ de racines dans le disque unité en fonction du paramètre réel y. Il existe une erreur relative de ce nombre due au calcul des racines réelles des constantes de Schur.

Il est possible d'utiliser cette méthode pour trouver le nombre de racines dans n'importe quel région du champ complexe conformément équivalente par homographie.

Nous pouvons généraliser cette méthode avec deux, trois ou quatre paramètres en gérant dans le plan les zéros des constantes de Schur,polynômes à 2, 3 ou 4 variables, (points, courbes, surfaces ou volumes) d'une manière graphique ; on peut penser utiliser les résultats de géométrie algébrique réelle (algorithme de G.E. Collins).

REFERENCES

[1] **P. Henrici** "Applied and Computational Complex Analysis" Wiley Interscience, v1, 1974.

[2] **M. Marden** "Geometry of polynomials" AMS Surveys 3, 2nd ed. , 1966.

[3] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ dans le disque unité" Rapp. Rech., n°551, TIM3/IMAG, Grenoble, 1985.

[4] **J. Demongeot** "Systèmes dynamiques et champs aléatoires: application en biologie fondamentale" Thèse d'Etat à l'IMAG, Grenoble, 1983.

[5] **C.W. Schelin** "Counting zeros of real polynomials within the unit disk" SIAM J. Numer. Anal., v20, n°5, 1983.

CHAPITRE 2

APPLICATIONS :

AUTOMATIQUE - BIOCHIMIE

APPLICATIONS

FORMES NORMALES DE HERMITE DANS DES ANNEAUX DE FRACTIONS RATIONNELLES PROPRES STABLES

Abréviation :

fractions rationnelles propres stables (f.r.p.s.)

Introduction :

La forme normale de Hermite de matrice de transfert (caractérisant le système multivariable) permet de déterminer les zéros finis instables et infinis du système [6], [7].

Les fractions rationnelles propres (le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur) sont stables si leurs pôles sont tous dans une région donnée du champ complexe qui est symétrique par rapport à l'axe réel et coupant celui-ci en au moins un point, dite région de stabilité, notée S.

Les systèmes à temps discret (resp. continu) ont souvent comme région de stabilité le disque unité ouvert (resp. le demi-plan à gauche ouvert).

L'existence du calcul de la forme normale de Hermite dans un anneau euclidien s'appuie naturellement sur la division euclidienne.

La calculabilité du stathme [1] d'un élément non nul d'anneaux de f.r.p.s. revient à déterminer le nombre de zéros d'un polynôme dans la région S (en comptant leurs o.d.m.) [3].

Nous présentons les méthodes de Pernebo et de Hung-Anderson et montrons leurs limites d'applications algorithmique et en calcul formel.

Il est à noter que la méthode de factorisation polynômiale de la matrice de transfert donne pas mal d'informations sur la structure du système (zéros et pôles finis et zéros infinis avec leurs o.d.m.).

I Méthode de Pernebo.

1) Anneau des polynômes Λ-généralisés.

Définition :

L'ensemble des polynômes Λ-généralisés, noté $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ est défini comme l'ensemble des fractions rationnelles sans pôles dans une région Λ donnée, symétrique par rapport à l'axe réel dans le champ complexe.

Propriétés :

$\mathbb{R}_\Lambda[y]$ est un anneau euclidien [5].

En effet à tout élément non nul, a, de $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ on peut associer le nombre de zéros avec o.d.m., dans la région Λ, du numérateur de a, noté $d^\circ_\Lambda a$.

Pour chaque paire d'éléments a et b (non nul) il existe deux éléments q et r dans $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ tels que $a=bq+r$ avec $r=0$ ou $d^\circ_\Lambda r < d^\circ_\Lambda b$.

Tout élément non nul, a, de $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ peut se factoriser de façon unique en $p_a r_a$ où p_a est un polynôme unitaire (son coefficient de tête est égal à 1) avec tous ses zéros dans Λ ; r_a est une unité (ou élément inversible) de $\mathbb{R}_\Lambda[y]$.

Par la division polynômiale de p_a et p_b nous obtenons le quotient q_p et le reste r_p dans $\mathbb{R}[y]$ tels que $p_a=p_b q_p+r_p$ avec $r_p=0$ ou $d^\circ r_p < d^\circ p_b$.

Et ainsi $q = q_p r_a / r_b$ et $r = r_p r_a$.

Remarque : si $\Lambda=\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_\Lambda[y] = \mathbb{R}[y]$.

2) Existence du calcul de la forme normale de Hermite dans des anneaux de f.r.p.s.

L'idée de Pernebo est de calculer la forme normale dans cet anneau principal [2], [4], via une transformation inversible dans $\mathbb{R}_\Lambda[y]$.

Soient Λ_0 la région d'instabilité (complémentaire de la région stable) des f.r.p.s. contenant le point infini et α un réel en dehors de cette région. Sa transformation est la suivante : $y=1/(x-\alpha)$. Le transformé de Λ_0, noté Λ est la région des poynômes généralisés ($0 \in \Lambda$).

Et ainsi on peut prouver l'existence du calcul de la forme normale

dans $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ et par transformation inverse on obtient la forme normale dans l'anneau des f.r.p.s.

3) Conclusion :

On peut calculer le stathme de tout élément non nul de $\mathbb{R}_\Lambda[y]$, mais on ne peut pas obtenir par le calcul formel ou de façon algorithmique la factorisation de tout élément non nul de $\mathbb{R}_\Lambda[y]$ nécessaire au calcul du quotient et du reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}_\Lambda[y]$, sauf si Λ est évidemment fini [8].

II Méthode de Hung-Anderson.

1) Anneau des f.r.p.s. noté $\mathbb{R}_S[X]$.

Récemment Hung et Anderson ont démontré que cet anneau était euclidien [3].

Soit la factorisation suivante d'un élément non nul, a, de $\mathbb{R}_S[X]$:

$$a=\alpha_a/\beta_a=\gamma_a\mu_a/\beta_a=\gamma_a(\mu_a\pi^{n(a)})/\beta_a*1/\pi^{n(a)}=\gamma_a e_a/\pi^{n(a)}$$

où γ_a est un polynôme unitaire ayant tous ses zéros instables,
π est un polynôme unitaire de degré 1 stable donné,
e_a est une unité de $\mathbb{R}_S[X]$ (degré du numérateur égal à celui du dénominateur et zéros du numérateur stables),
$n(a)$ est tel que $d^\circ\beta_a = d^\circ\mu_a + n(a)$.

Cette factorisation permet de trouver un système complet de non associés de $\mathbb{R}_S[X]$, noté N_π, de tous les éléments non nuls de $\mathbb{R}_S[X]$ de la forme γ/π^n, $n\geq 0$ où γ est un polynôme unitaire ayant tous ses zéros instables.
Morse trouve un système de résidu complet pour chaque élément de N_π, noté R_n tel que pour chaque élément non nul x de $\mathbb{R}_S[X]$ et chaque élément γ/π^n de N_π il existe de façon unique un élément y de R_n et z dans (γ/π^n) idéal engendré par γ/π^n tel que $x=y+z$.

A tout élément non nul, a, de $\mathbb{R}_S[X]$ on peut associer le nombre n(a) qui n'est autre que la différence du nombre de pôles stables avec celui des zéros stables de a (en comptant leurs o.d.m.).

Nous avons $n(ab) = n(a) + n(b)$.
Pour chaque paire d'éléments a et b (non nul) il existe deux éléments q et r

dans $\mathbb{R}_S[X]$ tels que $a=bq+r$ avec $r=0$ ou $n(r) < n(b)$.

Par identité de Bezout dans $\mathbb{R}[X]$ il existe deux polynômes ρ et θ tels que :
$\alpha_a \pi^{n(b)-1} = \rho\beta_a + \gamma_b\theta$ avec $d^\circ\theta < d^\circ\beta_a$ (rendu possible car γ_b et β_a sont premiers entre eux),
On a $d^\circ\rho < n(b)$.
Et ainsi $q=\pi\theta/(e_b\beta_a)$ et $r=\rho/\pi^{n(b)-1}$

2) Conclusion :

L'existence du calcul de la forme normale dans $\mathbb{R}_S[X]$ se fait ici directement ; on peut trouver le stathme de tout élément non nul. Mais on ne peut toujours pas obtenir par le calcul formel ou de façon algorithmique la factorisation de tout élément non nul de $\mathbb{R}_S[X]$ nécessaire pour calculer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}_S[X]$, sauf si S est évidemment fini [8].

III Exemples.

La région de stabilité est le demi-plan ouvert à gauche noté R.

La fraction rationnelle propre stable est la suivante:

$$(x^2*(y + 1) - x + y)/(2*(x^3 + 3*x^2 + 3*x + 1))$$

Le polynôme considéré est:

$$p := (x^2*(y + 1) - x + y)/2$$

Son transformé homographique est:

$$thp := x^2*y + x + y + 1$$

Nous avons:

si $y < (-1)$ $\quad N_R(p) = 2$

si $(-1) < y < (-1)/2$ $\quad N_R(p) = 1$

si $(-1)/2 < y < 0$ $\quad N_R(p) = 1$

si $y > 0$ $\quad N_R(p) = 0$

Conclusion :

Pour calculer de façon algorithmique la forme normale de Hermite dans des anneaux de f.r.p.s. il faut connaître le quotient et le reste de la division euclidienne dans ces anneaux, or nous ne pouvons que déterminer le stathme de cette division (nombre de zéros dans une région conformément équivalente par homographie au disque unité du champ complexe) ; il semble que l'on ne puisse pas trouver ces 2 nombres du fait de la factorisation sous-jacente, mais cela reste à prouver.

Références :

[1] **C.C. Mac Duffee** "The theory of matrices"
Chelsea publishing company, New York, 1956.

[2] **G.D. Forney** "Convolutional codes I : Algebraic structure"
IEEE Trans. Inform. Theory, v16, 1970.

[3] **N.T. Hung**
B.D.O. Anderson "Triangularization technique for the design of multivariable control systems"
IEEE Trans. Aut. Control, v24, 1979.

[4] **A.S. Morse** "System invariants under feedback and cascade control"
Proc. Int. Symp. on Math. Syst. Theory, Udine, Italy, 1976.

[5] **L. Pernebo** "An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems"
IEEE Trans. Aut. Control, v26, n°1, 1981.

[6] **J.M. Dion** "Sur la stucture à l'infini de systèmes linéaires"
Thèse d'Etat au LAG, Grenoble, 1983.

[7] **C. Commault** "Quelques aspects structurels de la commande des systèmes multivariables"
Thèse d'Etat au LAG, Grenoble, 1983.

[8] **B. Gleyse** "Calcul de formes normales de Hermite de matrices de transfert"
Rapp. de DEA, TIM3/IMAG, Grenoble, 1982.

APPLICATIONS

ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES BIOCHIMIQUES REGULES

Introduction :

Les systèmes biochimiques régulés sont constitués de réactions enzymatiques, groupées dans une chaîne réactionnelle : par exemple la réaction de la phosphofructokinase dans la glycolyse (dégradation du glucose).

Ces réactions comportent plusieurs substances appelées métabolites. Elles ont différents états :

- substrat ou produit d'une des réactions en amont dans la chaîne.
- produit de celle-ci ou de l'une des réactions en aval.
- effecteurs qui activent ou inhibent l'activité enzymatique.

Le système différentiel qui gouverne la dynamique est construit à partir des lois classiques de la cinétique chimique (loi d'action de masse, cinétiques d'ordres divers) et biochimique (cinétique michaëllienne, allostérique). Il traduit les variations des vitesses des réactants en fonction de leurs concentrations : c'est la cinétique réactionnelle.

Si le système comporte n réactants indépendants (c'est-à-dire non liés par des équations de conservation ou d'action de masse) alors en prenant : x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ représentant les concentrations de ces n réactants nous avons le système différentiel autonome d'ordre 1 suivant :

$\dot{x} = f(x)$ où $\dot{x}$ représente la vitesse de fuite,
f les différents états des métabolites dépendant de paramètres α_i $i=1,\ldots,m$ dans les réactions.

L'espace dans lequel varient les concentrations (resp. les paramètres) est dit espace des états (resp. des contraintes) de dimension n.

L'étude du système passe par la détermination de ses attracteurs (classe de trajectoires telles que toute autre trajectoire ayant son origine dans une partie de l'espace des états contenant l'attracteur, dite bassin d'attraction, tende asymptôtiquement vers l'attracteur lorsque le temps tend vers l'infini). Si l'attracteur est un point, c'est un état station-

naire stable ; s'il est constitué par une courbe fermée dans l'espace des états , c'est un cycle limite.

Ces attracteurs sont bien définis expérimentalement (leur bassin d'attraction donnant la mesure des perturbations admissibles permettant de conserver l'intégrité du comportement asymptôtique, après retour à l'attracteur) à l'opposé des transitoires qui ne sont pas durables.

Il suffit donc de dénombrer et localiser ces attracteurs.

I Etude du système dynamique [1].

- Recherche des états stationnaires du système (x=0).
- Etude de la stabilité de ces états :
  méthode des modes normaux (étude du spectre de la matrice jacobienne à l'état stationnaire).
  1) Toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives (état stationnaire stable, attracteur ponctuel).
  2) Deux valeurs propres complexes conjuguées sont à parties réelles changeant de signe pour certaines valeurs des paramètres appelées valeurs de bifurcation (petit cycle limite grossissant lorsqu'on se déplace à distance des frontières de la région constituées par des lignes de bifurcations, puis diminuant lorsqu'on se rapproche de celles-ci).
- Simulation du comportement du système, à partir des conditions initiales choisies dans le bassin d'attraction de l'attracteur que l'on veut étudier.

II Partie_logiciel.

En fonction de différents types de réactions choisis, ce logiciel permet de faire l'étude du chapitre I.

Il existe un programme "SIMETAB" de simulation de système biochimique régulé comportant au plus 20 enzymes michaëliens et 2 allostériques [1] écrit en Fortran.

L'étude formelle de l'obtention du système différentiel en fonction de paramètres symboliques :

- construction de f,
- matrice jacobienne,
- équations réduites de l'état stationnaire,

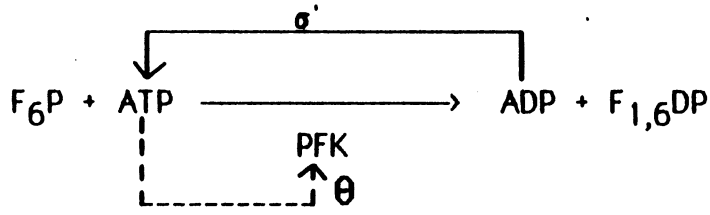
a abouti à un programme "ENZYME" écrit en Lelisp [5].

Nous intervenons dans l'étude des états stationnaires en calculant le nombre de zéros du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne

dans le demi-plan à gauche ouvert [4].

III Exemple : Modèle de la glycolyse selon Selkov et Goldbeter [2], [3].

Le schéma réactionnel est de la forme :



On suppose que les adénylates se conservent globalement :
[ATP] + [ADP] = 1 .
On note x (resp. y) la concentration réduite du substrat F_6P (resp. ATP).
Le système différentiel obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma_1 - g(x,y) \\ \dot{y} = \rho[-g(x,y) - \sigma'(y)] \end{cases}$$

où σ_1 est le flux d'entrée réduit du substrat F_6P,
g(x,y) la vitesse de réaction de la PFK, enzyme supposé michaëlien de constantes d'association des substrats égales et très grandes,
$\sigma'(y)$ le flux de reconstitution du substrat inhibiteur compétitif ATP à partir de l'ADP,
ρ le facteur de proportionnalité des constantes de réactions, égal à $K_{R,F_6P}/K_{R,ATP}$.

$g(x,y) = x/(x+y)$; $\sigma'(y) = \sigma_2(y-1)$.

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma_1 - x/(x+y) \\ \dot{y} = \rho\{x/(x+y) - \sigma_2(1-y)\} \end{cases}$$

Points stationnaires :
On prend $\sigma_1 \neq 1$ et $\sigma_2 \neq 0$.

$$(x^*, y^*) = (\sigma_1(\sigma_2-\sigma_1)/(\sigma_2(1-\sigma_1)), 1-\sigma_1/\sigma_2)$$

Matrice Jacobienne :

$$J(x,y) = (x+y)^{-2} J_1(x,y) \text{ avec } J_1(x,y) = \begin{bmatrix} -y & x \\ \rho y & \rho(x-\sigma_2(x+y)^2) \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :
Puisqu'on s'intéresse au spectre de la matrice jacobienne dans le demi-plan à gauche ouvert, il nous suffit d'étudier celui de la matrice J_1.

Le polynôme caractéristique de $J_1(x,y)$ en la variable λ est :

$$\lambda^2 + [\rho\sigma_2(x+y)^2 - \rho x + y]*\lambda + \rho\sigma_2 y(x+y)^2$$

aux points stationnaires :

$$\lambda^2 + [(\rho+1)\sigma_1^2 - 2(\rho+1)\sigma_1 + \rho\sigma_2 + 1][\sigma_2-\sigma_1]/(\sigma_2(\sigma_1-1)^2)*\lambda + \rho(\sigma_2-\sigma_1)^3/(\sigma_2^2(\sigma_1-1)^2)$$

soit le polynôme réduit :

$$(\sigma_2^2(\sigma_1-1)^2)*\lambda^2 + \sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)[(\rho+1)\sigma_1^2 - 2(\rho+1)\sigma_1 + \rho\sigma_2 + 1]*\lambda + \rho(\sigma_2-\sigma_1)^3$$

Prenons $\sigma_2 = 1$ et notons σ_1 par σ.
le polynôme s'écrit :

$$\lambda^2 + (1-\sigma)(\rho+1)*\lambda + \rho(1-\sigma)$$

Etude du nombre de zéros dans le demi-plan à gauche ouvert, noté R :

Le polynôme considéré est :

$$p := x^2 + x*(- y*z - y + z + 1) + z*(- y + 1)$$

Pour z=1, p s'écrit :

$$x^2 + 2*x*(- y + 1) - y + 1$$

Nous avons :

si $y < 1$	$N_R(p) = 2$
si $1 < y < 2$	$N_R(p) = 1$
si $y > 2$	$N_R(p) = 1$

Pour z=y, p est égal à :

$$x^2 + x*(- y^2 + 1) + y*(- y + 1)$$

Nous avons :

si $y < (-1)$	$N_R(p) = 1$
si $(-1) < y < 0$	$N_R(p) = 1$
si $0 < y < 1$	$N_R(p) = 2$
si $1 < y < 36909875/33554432$	$N_R(p) = 1$
si $y > 36909875/33554432$	$N_R(p) = 1$

Pour $z=y^2$, p est de la forme :

$$x^2 + x*(- y^3 + y^2 - y + 1) + y^2*(- y + 1)$$

Nous avons :

si y < 0 $N_R(p) = 2$

si 0 < y < 1 $N_R(p) = 2$

si 1 < y < 49176411/33554432 $N_R(p) = 1$

si y > 49176411/33554432 $N_R(p) = 1$

Pour $z=y^3 + 1$, p a pour expression :

$$x^2 + x*(- y^4 + y^3 - 2*y + 2) - y^4 + y^3 - y + 1$$

Nous avons :

si y < (- 42275935)/33554432 $N_R(p) = 1$

si (- 42275935)/33554432 < y < (- 38135555)/33554432 $N_R(p) = 1$

si (- 38135555)/33554432 < y < (-1) $N_R(p) = 1$

si (-1) < y < 1 $N_R(p) = 2$

si 1 < y < 43908363/33554432 $N_R(p) = 1$

si y > 43908363/33554432 $N_R(p) = 1$

Conclusion :

Le calcul formel du nombre de zéros du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne dans la région de stabilité permet de déterminer les valeurs du paramètre pour lesquelles le système est stable. On peut généraliser ces calculs à plusieurs paramètres et en étudiant alors la représentation graphique dans le plan ou l'espace des paramètres qui rendent le système stable.

Références :

[1] **J. Demongeot** "Systèmes dynamiques et champs aléatoires : application en biologie fondamentale" Thèse d'Etat à l'IMAG, Grenoble, 1983.

[2] **E.E. Sel'kov** "Self-oscillations in glycolysis" Eur. J. Biochem., 4, 1968.

[3] **A. Goldbeter** **R. Lefever** "Dissipative structures for allosteric model" Biophys. J., 12, 1972.

[4] **B. Gleyse** "Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ dans le disque unité" Rapp. Rech. n°551, TIM3/IMAG, Grenoble, 1985.

[5] **F. Cougard** "Systèmes différentiels en cinétique enzymatique" Rapp. de DEA, TIM3/IMAG, Grenoble, 1985.

CHAPITRE 3

ANNEXE DU PROGRAMME

****

POLYNOMES A UN PARAMETRE

****

```
% MODULE 1 ;
```

L'interface reduce macsyma se fait par le fichier appele treqgk.absin en mode absentee, utilise dans la procedure racgk du MODULE 2 et qui contient les instructions suivantes:

```
macsyma
batch("gk.mac")$
nroots(gk)$
string(realroots(gk))$
writefile(">udd>ANALYNUM>BGleyse")$
print(d4)$
print(d5)$
closefile("gk.red")$
quit();
ted
r gk.red
-2,$d
1,3d
2,4d
1a
;
array drac(nr,2);
for i:=0:nr-1 do drac(i,0):=lire();
\f
1s/^/nr:=/
5,$s/#\c
/x/
5,$s/x\c
//
5,$s/y = /    /
5,$s/,/;/
5,$s/[/ /
5,$s/]/;/
$a
end;
\f
w
q
```

```
% MODULE 2 ;
```

```
array disc(35,2);
```

```
symbolic procedure lire ;
xread (nil) ;
flag ('(lire),'opfn);


procedure trhomdu(a1,a0,b1,b0,p0);
%entrees: les coefficients a1,a0,b1,b0, de la transformation homographique,
          notee f, egale a (a1*x+a0)/(b1*x+b0), telle que la region R donnee
          du champ complexe soit conformement equivalente par f au disque unite
          p0 polynome en la variable x,
 sortie:  son transforme homographique par f, en la variable x;

begin
 tdopr:=deg(num(p0),x);
 p:=sub(x=(-b0*x+a0)/(b1*x-a1),p0)*(b1*x-a1)**tdopr;
 return(p)
end trhomdu;


procedure recip(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x,
          k ampleur du polynome p egale au degre de p plus l'o.d.m. de la raci-
          ne infini de p ,
 sortie:  son polynome reciproque ;

 sub(x=1/x,p)*x**k;

%attention au mode (reduction au meme denominateur imposee),
 end recip ;


procedure schur(p,k) ;
%entrees: p polynome en la variable x , k (cf procedure recip) ,
 sortie:  son transforme de Schur ;

 sub(x=0,p)*p-sub(x=0,recip(p,k))*recip(p,k) ;

%end schur ;


procedure gamk(p) ;
%entree: p polynome en la variable x,
 sortie: sa constante de Schur ;

 sub(x=0,p) ;

%end gamk ;


procedure racgk(p);
%entree: p polynome de degre >0 en la variable y,
 sortie: ses racines reelles contenues dans le tableau drac;

begin
gks:=num(p/gcd(p,df(p,y)));
off nat;
Out "gk.mac";
write "gk:",gks;
Shut "gk.mac";
```

```
on nat;
lisp (cline "ear treqgk.absin -li 20 -q 1")$
lisp (sleep(30));
lisp (cline "dl gk.mac");
In "gk.red";
lisp (sleep(10));
lisp (cline "dl gk.red");
end racgk;


procedure selection(h,n);
%predeclaration d'un tableau drac a 2 dimensions preaffecte;

begin
dr:=drac(h,0);
kse:=h;
for i:=h+1:n do
if drac(i,0)<dr then <<kse:=i;dr:=drac(i,0)>>
end selection;


procedure ordonne(n);

for j:=0:n-1 do
 begin
 selection(j,n);
 ech:=drac(kse,0);
 drac(kse,0):=drac(j,0);
 drac(j,0):=ech;
 end;

%end ordonne;


procedure npue(a,k,n,cnk);
%entrees: a un nombre reel,
          k une variable iterative,
          n le degre d'un polynome,
          cnk un entier naturel,
 sortie:  npu le nombre partiel de racines du polynome avec leurs o.d.m. dans
          le disque unite ouvert;

begin
npu:=0;
nk:=cnk;
if a<0 then
 begin
  nk:=nk+1;
  npu:=(n+1-k)*(-1)**(nk-1);
 end;
return npu
end npue;


procedure insert(a,b,c,d);
%entrees: a nombre de racines reelles distinctes des polynomes q1,...,qk ,
          b nombre de racines reelles distinctes du polynome qk+1, eventuel-
          lement communes avec celles de q1,...,qk ,
          disc le tableau contenant en 1ere ligne les racines reelles dis-
          tinctes de q1,...,qk et en 2eme ligne la somme des poids correspon-
```

```
            dant a gauche de chaque racine,
            drac le tableau ----------------------------------------------------
            ----qk+1 et ------------ les poids correspondant a gauche de chaque
            racine reelles distinctes de qk+1,
  sorties: a,disc actualises de q1,...,qk+1;

 begin
 jnc:=0;jjnc:=0;
 inc:=0;
 while (inc < a) and (jnc < b) do
  begin
  while (drac(jnc,0) >= disc(inc,0)) and (inc < a) do
   begin
   disc(inc,1):=disc(inc,1)+npue(drac(jnc,1),c,d,disc(inc,2));
   disc(inc,2):=nk;
   if drac(jnc,0) eq disc(inc,0) then
    begin
    jnc:=jnc+1;
    jjnc:=jjnc+1;
    end;
   inc:=inc+1;
   end;
  while (drac(jnc,0) < disc(inc,0)) and (jnc < b) and (inc < a) do
   begin
     drac(jnc,1):=disc(inc,1)+npue(drac(jnc,1),c,d,disc(inc,2));
     drac(jnc,2):=nk;
     jnc:=jnc+1
   end;
  if jnc neq jjnc then
   begin
   insr:=jnc-jjnc;
   %translation;
   ainsr:=a+insr;
   disc(ainsr,1):=disc(a,1);
   disc(ainsr,2):=disc(a,2);
   for tinc:=a-1 step -1 until inc do
    for kt:=0:2 do
      begin
      ttinc:=tinc+insr;
      disc(ttinc,kt):=disc(tinc,kt);
      end;
   %injection et calcul de la somme partielle des poids correspondants;
   for ici:=1:insr do
    for kici:=0:2 do
     begin
     iici:=ici+inc-1;
     disc(iici,kici):=drac(ici+jjnc-1,kici);
     end;
   % mise a jour;
   a:=ainsr;
   inc:=inc+insr;
   jjnc:=jnc;
   end;
  end;
 % calcul du dernier terme;
 if jnc eq b then
  while inc neq a+1 do
   begin
   disc(inc,1):=disc(inc,1)+npue(drac(b,1),c,d,disc(inc,2));
   disc(inc,2):=nk;
```

```
 inc:=inc+1
 end
           else %jnc < b et inc = a;
begin
cnr:=disc(a,1);
cmr:=disc(a,2);
while jnc neq b do
 begin
 disc(a,0):=drac(jnc,0);
 disc(a,1):=cnr+npue(drac(jnc,1),c,d,cmr);
 disc(a,2):=nk;
 a:=a+1;
 jnc:=jnc+1
 end;
disc(a,1):=cnr+npue(drac(b,1),c,d,cmr);
disc(a,2):=nk;
end;
return a
end insert;


%programme principal;


procedure nrdum(a1,a0,b1,b0,p);
%entrees: les coefficients a1,a0,b1,b0, de la transformation homographique,
          notee f, egale a (a1*x+a0)/(b1*x+b0), telle que la region R donnee
          du champ complexe soit conformement equivalente par f au disque unite
          p polynome de degre >=1 en la variable x, a coefficients polynomiaux
          en la variable y,
  sortie: N(p) son nombre de racines avec o.d.m. dans le disque unite ouvert,
          suivant les valeurs du parametre y ;

begin
p0:=p;
p:=num(trhomdu(a1,a0,b1,b0,p0));
dopu:=deg(p,x);
for ku:=1:dopu do
 begin
  po:=p;
  Tp:=schur(p,dopu-ku+1);
  gk:=gamk(Tp);
  if deg(gk,y) neq 0 then
   begin
   racgk(gk);
   ordonne(nr-1);
   prm:=lterm(gk,y);
   drac(0,1):=sub(y=-1,prm);
   drac(nr,1):=sub(y=1,prm);
   for iku:=1:nr-1 do
    drac(iku,1):=sub(y=(drac(iku-1,0)+drac(iku,0))/2,gk);
   if ku eq 1 then
    begin
    for ki0:=0:nr do
     begin
     disc(ki0,0):=drac(ki0,0);
     disc(ki0,1):=npue(drac(ki0,1),1,dopu,0);
     disc(ki0,2):=nk;
     end;
    snr:=nr;
```

```
      end
                else
      snr:=insert(snr,nr,ku,dopu);
     p:=Tp;
     end
                        else %constante de Schur constante (en y);
     if gk neq 0 then
      begin
      if ku eq 1 then snr:=0;
      for kci0:=0:snr do
       begin
       disc(kci0,1):=disc(kci0,1)+npue(gk,ku,dopu,disc(kci0,2));
       disc(kci0,2):=nk;
       end;
      p:=Tp;
      end
                 else %constante de Schur identiquement nulle (en y);
      begin
      write "la",ku,"eme constante de Schur est identiquement nulle.";
      ku:=dopu+1;
      end;
    end;
  if ku neq dopu+1 then
   if snr eq 0 then
    write                                "pour tout y reel      N(p) = ",disc(0,1)
              else
    begin
     write "si y < ",disc(0,0),"                                N(p) = ",disc(0,1);
     for i:=1:snr-1 do
      if disc(i-1,0) neq disc(i,0) then
      write "si ",disc(i-1,0)," < y < ",disc(i,0),"             N(p) = ",disc(i,1);
     write "si y > ",disc(snr-1,0),"                            N(p) = ",disc(snr,1);
    end;

  end nrdum;


  end;
```

CONCLUSION

Par le calcul formel, les différentes méthodes présentées nous ont permis de calculer le nombre exact dans $\mathbb{R}[X]$, et approché dans $\mathbb{C}[X]$ ou $(\mathbb{R}[y])[X]$ de racines dans le disque unité.

Nous avons dégagé une méthode rapide mais plus restrictive et une autre tout à fait générale. En remarquant que l'effet global du pgcd (arithmétique ou polynômial) sur les calculs intervient pour une part importante dans le coût.

Ainsi, grâce au calcul formel nous avons pu généraliser cette dernière méthode aux polynômes à coefficients polynômiaux à une variable dits polynômes paramétrés.

Ce qui permet de résoudre des problèmes de stabilité ou de faire l'étude algébrique des systèmes linéaires de l'automatique avec paramètres.

De plus ce travail a permis d'étudier d'une part une classe de polynômes : les polynômes à facteurs autoréciproques d'un point de vue théorique, et d'autre part l'effet des coefficients quelconques de polynômes de degré inférieur ou égal à 5 sur les constantes de Schur d'un point de vue formel et théorique qui reste l'axe principal de la détermination du nombre de racines de polynômes dans le disque unité.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. ..P.....CHENIN.....

M. .....

M. ...Bernard.....GLEYSE..... est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du ..grade de...DOCTEUR..

....Troisième...Cycle.....

Grenoble, le 13 JUIN 1986

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

M. TANCHE

RESUME

Cette thèse présente, par le calcul formel, différentes méthodes de calcul du nombre de racines de polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ et $(\mathbb{R}[y])[X]$ dans le disque unité qui utilisent les transformations de Schur (1ère partie) et de Sturm et Schelin (2ème partie).

Une classe de polynômes : les polynômes à facteurs autoréciproques y joue un rôle important que nous avons cerné.

Après une brève étude de la complexité de ces algorithmes nous adoptons la méthode la plus générale au calcul du nombre de zéros de polynômes en fonction d'un paramètre.

Différentes applications en automatique et biochimie sont présentées dans la dernière partie.

Mots Clés

Calcul formel, Transformation de Schur, Transformations de Sturm et Schelin, polynômes autoréciproques, polynômes paramétrés.