Représentations des groupes de Lie conformes et quantification des espaces symétriques

Michael Pevzner

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE CONFORMES ET QUANTIFICATION DES ESPACES SYMÉTRIQUES

MICHAEL PEVZNER

Quand bien nous pourrions être savants du savoir d'autrui, au moins sages ne pouvons-nous être que de notre propre sagesse, écrivait Michel de Montaigne. Il n'est pas question de sagesse dans ce mémoire, mais j'aimerais insister sur la chance que j'ai eue d'avoir rencontré au fil des années et des voyages des gens extrêmement généreux qui ont bien voulu partager avec moi leurs savoirs, leur enthousiasme et leur amour des Mathématiques.

Les cinq années passées à l'université de Moscou (MGU Lomonossov) où j'avais été guidé par A.A. Kirillov et G.I. Olshanskii ont servi d'un vrai déclancheur de vocation professionnelle. Les deux mémoires que j'y ai préparés ont été consacrés aux algèbres de Weyl et aux distributions invariantes sur des espaces préhomogènes. En 1994 j'avais commencé, sous la direction de J.Faraut, une thèse sur les représentations des groupes conformes. Elle a été soutenue trois ans et demi plus tard dans l'équipe d'analyse algébrique de l'institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ, UMR 7586) de l'université de Paris 6. Grâce à l'ambiance chaleureuse et effervescente que j'avais trouvée à l'IMJ et surtout grâce au soutien constant de mon directeur de thèse cette période a été très formatrice. En passant par l'université de Padoue, où j'ai été invité par G. Zampieri, j'étais allé à l'université de Leyde où j'ai travaillé avec G. van Dijk sur la transformation de Berezin. Cette collaboration très stimulante continue toujours. Mon intérêt pour les problèmes de quantification est dû aux contacts enrichissants que j'ai eus lors de mon post-doc au service de la géométrie différentielle de l'université libre de Bruxelles (ULB) où j'ai surtout travaillé avec P. Bieliavsky. L'année passée au département de Mathématiques et Applications (UMR 8553) de l'ENS de Paris, où j'ai travaillé avec Ch.Torossian sur la quantification de Kontsevich et son application à l'étude de l'isomorphisme de Duflo a été studieuse mais tout simplement merveilleuse. Enfin, en 2003 j'ai été nommé maître de conférences à l'université de Reims où j'ai été très chaleureusement accueilli au sens du laboratoire de Mathématiques (UMR 6056). C'est en arrivant à Reims que j'ai eu l'occasion de travailler avec A.Unterberger sur des problèmes de quantification et plus précisément sur les relations qui existent entre les crochets de Rankin-Cohen, l'analyse pseudo-différentielle et les représentations de la série discrète holomorphe. Il me semble important de mentionner des séjours plus courts mais pas pour autant moins intenses en

contacts et échanges : MSRI de Berkeley sur l'invitation de S. Gindikin en 2001, ESI de Vienne sur l'invitation de H. Upmeier et RIMS de Kyoto sur l'invitation de T. Kobayashi en 2005. C'est donc avec une grande joie que j'exprime ma gratitude et réconnaissance à mes professeurs et collaborateurs.

Je remercie également les rapporteurs et les memebres du jury d'avoir bien voulu porter leur jugement sur mon travail.

Introduction

Le commencement de toutes les sciences, c'est l'étonnement de ce que les choses sont ce qu'elles sont. Aristote.

Mes intérêts mathématiques ont essentiellement deux pôles d'attraction : l'analyse harmonique non-commutative et la quantification des espaces symétriques. Si la signification du premier terme est claire, il s'agit là de la décomposition des représentations unitaires d'un groupe de Lie en composantes irréductibles, la notion de la quantification a des frontières plus floues. Conceptualisée dans les années 1920, la théorie de la quantification est à présent une branche des Mathématiques à part entière, pour ne pas dire un univers en soi, dont les ramifications vont de la topologie algébrique à l'analyse pseudo-différentielle, de la géométrie symplectique à la théorie des représentations, de la théorie des nombres à la géométrie non-commutative.

Dans mon travail j'ai toujours été motivé par la curiosité, mais quoi de plus passionnant que ce domaine effervescent et bouillonnant où des disciplines aussi bien mathématiques que physiques se rencontrent et s'influencent mutuellement.

L'analyse harmonique est précisément un des exemples de cette interaction créative des différentes théories. Issu des travaux classiques de J. Fourier sur l'équation de la chaleur, l'esprit de l'analyse harmonique s'est avéré d'une grande longévité et efficacité dans le traitement des représentations de dimension infinie des groupes de Lie non-commutatifs. Ces derniers jouent un rôle fondamental dans différentes questions de la mécanique quantique et de la physique des particules élémentaires.

Réciproquement, des idées "venues d'ailleurs", telle la quantification par déformation de Kontsevich ou encore l'analyse pseudo-différentielle, ont sensiblement stimulé, ces dernières années, la recherche dans le domaine de l'analyse harmonique et ont permis de résoudre des problèmes ouverts depuis longtemps.

Le cheminement des idées est rarement linéaire et ordonné. Ces dernières forment une arborescence complexe où les cycles et les intersections des arêtes sont admis et même souhaités. Des notions et des théories se développent, se croisent, s'absorbent ou surgissent, parfois, dans des endroits inattendus.

Dans ce texte j'ai essayé de décrire une "projection plane" d'une des branches de ce graphe en faisant état des modestes contributions de l'auteur à la théorie des représentations et à la quantification des espaces symétriques.

1. Différents aspects de la théorie des représentations des groupes de Lie conformes

Parmi les groupes de Lie semi-simples, réels ou complexes, on distingue une classe particulière, celle des groupes de Lie conformes. Un tel groupe de Lie peut être introduit et compris comme le groupe des transformations ϕ

d'une variété différentiable V dont les applications dérivées $D\phi$ préservent une structure géométrique donnée sur V. Cette terminologie ainsi que le problème géométrique lui-même ont pour origine le résultat classique de Liouville [71] sur la description des transformations conformes de $\mathbb{R}^3$, *i.e.* des difféomorphismes dont la différentielle conserve les angles. D'après le théorème de Liouville toutes les transformations conformes sont des composées des translations, similitudes et de l'inversion $x \to \frac{x}{\|x\|^2}$.

En paraphrasant ce résultat posons $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et définissons, pour tous $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1) \in V$ le produit de Jordan par

$$z = x \cdot y \quad \text{si} \quad z = (z_0, z_1) \quad \text{avec} \quad z_0 = x_0 y_0 - (x_1|y_1), z_1 = x_0 y_1 + y_0 x_1,$$

où $(x_1|y_1)$ est le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^2$. L'inversion dans V est alors définie grâce à ce produit.

Le groupe engendré par les translations, similitudes et l'inversion de V est isomorphe à $O(1,3)$. Il est naturel de l'appeler groupe conforme, car pour tout $g \in O(1,3)$ sa différentielle Dg est un élément de $\mathbb{R}_+ \times O(3)$.

Si la variété V est une algèbre de Jordan semi-simple la différentielle d'une transformation conforme devra appartenir en tout point de V au groupe de structure de V. On obtient ainsi un groupe de Lie semi-simple G dont un sous-groupe parabolique maximal P vérifie
(i) $P = L \ltimes N$ où L est le sous-groupe de Levi de G et N est un nilradical abélien ;
(ii) Le sous-groupe P est conjugé à $\bar{P} = \theta(P)$ où θ désigne une involution de Cartan de G.

Outre l'intérêt propre de la correspondance fonctorielle entre la théorie de Jordan et celle de Lie [17], dont un bref rappel sera donné dans le prochain paragraphe, il faut souligner que le recours à ces méthodes géométriques s'avère d'une grande efficacité pour l'analyse harmonique ainsi que pour l'analyse de Fourier sur les espaces symétriques et plus généralement pour la théorie des représentations des groupes de Lie conformes. En effet, ces techniques permettent d'avoir des formules à la fois générales et explicites pour une large classe de groupes de Lie incluant également des groupes de Lie semi-simples exceptionnels tels que $E_{7(-25)}$, par exemple.

Cette partie est consacrée à la description de mes résultats concernant les représentations unitaires des groupes de Lie conformes illustrant l'efficacité de cette approche.

1.1. **Construction de Kantor-Koecher-Tits.** Afin de rendre la présentation plus claire, rappelons la définition des groupes conformes.

Une algèbre V sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ est une algèbre de Jordan si

$$x \cdot y = y \cdot x, \text{ et } x \cdot (x^2 \cdot y) = x^2 \cdot (x \cdot y),\ \forall x, y \in V.$$

Pour tout $x \in V$, on définit une application linéaire $L(x)y := x \cdot y$ ainsi qu'une forme bilinéaire symétrique sur V : $\tau(x, y) = \operatorname{Tr} L(x \cdot y)$. Une algèbre de Jordan V est dite semi-simple (respectivement euclidienne) si la forme τ est non-dégénérée (respectivement définie-positive). On ne considérera que des algèbres de Jordan semi-simples.

Soient r et n le rang et la dimension de V, $\Delta(x)$ et $\operatorname{tr}(x)$ le déterminant et la trace de Jordan d'un élément régulier $x \in V$ (cf [36] p.28, pour plus de détails).

Le *groupe de structure* de V, noté $\operatorname{Str}(V)$ est défini comme le sous-groupe de $GL(V)$ des éléments g pour lesquels il existe un réel $\chi(g)$ vérifiant $\Delta(g.x) = \chi(g)\Delta(x)$. C'est un groupe réductif. L'application $g \mapsto \chi(g)$ est un caractère de $\operatorname{Str}(V)$. Dans le cas où V est euclidienne on peut également voir ce groupe comme celui des automorphismes du cône symétrique $\Omega = \{x^2 \,|\, x \in V\}$ des éléments positifs de V et de leurs opposés.

L'algèbre V s'identifie au groupe abélien de ses translations $N : x \to n_x$, où $n_x(y) = y + x, \forall x, y \in V$. Le *groupe conforme* G ou le *groupe de Kantor-Koecher-Tits* ([52, 64]) de V est le groupe des transformations rationnelles de V engendré par les translations, éléments de $\operatorname{Str}(V)$ et l'inversion $j : x \to -x^{-1}$. C'est un groupe de Lie semi-simple. Un élément $g \in G$ est conforme au sens, qu'en tout point x où la transformation g est définie, la différentielle $(Dg)_x$ appartient à $\operatorname{Str}(V)$. Au niveau infinitésimal on peut caractériser l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$ comme une algèbre de Lie symétrique de champs de vecteurs quadratiques sur V. Elle admet la graduation $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Le sous-groupe des transformations conformes affines $P = \operatorname{Str}(V) \ltimes N$ est un sous-groupe parabolique maximal de G. Soient σ l'involution de G donnée par $\sigma(g) = j \circ g \circ j$, $\bar{N} = \sigma(N)$ et $\bar{P} = \operatorname{Str(V)} \ltimes \bar{N}$. Ce dernier groupe est le stabilisateur dans G de l'origine. De plus l'ensemble G' des transformations conformes définies en 0 s'écrit $G' = N\operatorname{Str}(V)\bar{N}$. Enfin, on dira qu'une involution α de V est euclidienne si la forme $\operatorname{Tr}L(\alpha(x) \cdot y)$ est définie positive. On définit alors l'involution de Cartan θ sur G par $\theta(g) = \alpha \circ j \circ g \circ j \circ \alpha$. On renvoie le lecteur à [17] pour plus de détails.

1.2. **Deux problèmes de la théorie des représentations : induction et restriction.** Étant donné un groupe et un de ses sous-groupes on définit le foncteur, appelé *induction*, de la catégorie des représentations du sous-groupe dans celle des représentations du groupe lui-même. Pour une large classe de groupes il se trouve que presque toutes les représentations unitaires irréductibles sont obtenues par induction des représentations de dimension finie voire des caractères des sous-groupes appropriés. La section suivante est consacrée à la description de mes résultats sur les représentations induites des groupes conformes.

Un autre problème classique de la théorie des représentations est, dans un certain sens, l'inverse du premier : étant donnée une représentation irréductible π d'un groupe G on s'intéresse à sa restriction $\pi_{|_H}$ à un sous-groupe H donné. En général, le foncteur de la restriction ne préserve pas l'irréductibilité et on est amené à étudier la décomposition de la restriction en somme (continue ou discrète) des composantes unitaires et irréductibles.

Comme exemple du problème de la restriction on peut citer le calcul des coefficients de Clebsh-Gordan, les lois de Littlewood-Richardson, les formules de caractères, les formules de Blattner ou encore les formules de Plancherel pour des espaces homogènes. À cause de la combinatoire sous-jacente au cas des groupes finis, ce problème est souvent appelé *branching laws*.

Cette question fondamentale trouve ses applications aussi bien dans la physique des particules élémentaires, où l'on étudie la décomposition des produits tensoriels des représentations des groupes de symétrie (breaking symmetries) qu'en géométrie où l'on s'intéresse aux symétries internes des sous-variétés des domaines symétriques etc...

La dernière section de ce chapitre porte sur les résultats obtenus dans cette direction.

1.2.1. *Induction parabolique et représentation de Weil* [II, IV]. Les puissances signées χ_ε^m, $m \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$ du caractère χ du groupe de structure se prolongent en caractères du sous-groupe parabolique $\bar{P}$ et induisent une série de représentations $\pi_{m,\varepsilon}$ du groupe conforme. Ces dernières peuvent être réalisées dans l'espace $L^2(V, B_m(x)dx)$ des fonctions de carré intégrable sur V par rapport à la mesure de Lebesgue dx pondérée par une puissance appropriée du déterminant de l'opérateur de Bergman $B(x, y) = P(x)P(x^{-1} - y)$, où $P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$. En choisissant convenablement le paramètre complexe m on obtient une série de représentations unitaires : la *série maximale dégénérée* (SMD) de G.

Le problème d'irréductibilité de ces représentations se pose naturellement. C'est une question classique qui a été abordée par des techniques et dans des situations différentes par de nombreux auteurs, par exemple : [10, 18, 19, 45, 46, 49, 50, 69, 70, 85, 74, 94, 97, 98, 99, 101, 121].

La situation étudiée par M.Kashiwara et M.Vergne [55] correspond au cas où $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $G = Sp(n, \mathbb{R})$. Ils ont montré que cette action se décomposait en somme finie de sous-espaces invariants composés d'élémets de $L^2(V)$ dont les transformées de Fourier sont à support dans des cônes non-convexes de matrices symétriques de signature donnée. Le point clé de la démonstration est l'existence d'un entrelacement entre $\pi_{m,\varepsilon}$ et la représentation de Weil, vues comme des représentations du groupe métaplectique.

Cette méthode a été généralisée dans [II, IV]. En partant d'une représentation d'une algèbre de Jordan simple nous avons défini l'analogue de la représentation de Weil d'une algèbre de Lie conforme $\mathfrak{g}$ et avons construit une famille d'opérateurs d'entrelacement entre cette représentation et les représentations infinitésimales de la sŕie maximale dégénérée. Grâce à la connaissance de la structure de $\mathfrak{g}$ il est possible de définir la représentation de Weil sur les générateurs ce qui permet d'éviter la description des orbites minimales, laquelle se fait au cas par cas.

La construction des opérateurs d'entrelacement est basée sur une généralisation de l'identité de Hecke dont la version classique s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2 - i(x,y)\right) p(x)dx = (2\pi)^{n/2}\exp(-\frac{1}{2}\|y\|^2)(-i)^k p(y),$$

où $p(x)$ est un polynôme harmonique homogène de degré k.

Cette formule à été adaptée aux situations où l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est remplacé par un espace pseudo-euclidien ([106]) ou encore par l'algèbre de Jordan $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ ([42]). Nous avons formulé une conjecture sur l'identité de Hecke pour une algèbre de Jordan simple quelconque :

$$\begin{aligned} &\int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(x)\xi,\xi)} e^{-i\beta(\xi,\eta)} p(\xi) d\xi \\ &= \ (2)^{\frac{N}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma(x)} |\det(x)|_\varepsilon^{-\nu-\frac{N}{2r}} e^{-\frac{i}{2}\beta(\phi(x^{-1})\eta,\eta)} p(\eta), \end{aligned}$$

où ϕ est une représentation de V, β est une forme bilinéaire dans l'espace de la représentation ϕ, $\sigma(x)$ la signature de la forme $\beta(\phi(x),x)$ et p une distribution β-harmonique, ϕ-homogène de degré (ν,ε). Cette conjecture a été démontrée par J-L. Clerc ([21]).

En adaptant la réalisation de la représentation de Weil au cas de l'algèbre de Jordan simple non-euclidienne $V = Mat(n,\mathbb{R})$ nous avons obtenu une nouvelle démonstration de la décomposition de la SDM pour le groupe $SL(2n,\mathbb{R})$:

Théorème 1.1. *Sous l'action de la représentation $\pi_{n,1}$ l'espace $L^2(V)$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces invariants irréductibles, $L^2(V) = H_+ \oplus H_-$, où $H_\pm = \{f \in L^2(V) \,|\, \mathrm{supp}\hat{f} \in \bar{\Omega}_\pm\}$ avec $\Omega_\pm = \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) \,|\, \det A > 0\, (\text{resp. } \det A < 0)\}$.*

Question 1. Nous avons montré que dans le cas d'une algèbre de Jordan simple V, une représentation de la SDM se décompose en somme finie d'espaces irréductibles de fonctions dont les transformées de Fourier sont supportées par des réunions d'orbites ouvertes du groupe de structure agissant dans V. Il serait intéressant de comprendre la combinatoire des ces réunions dans la situation générale.

Question 2. Dans le cas considéré dans [55] les premier et le dernier espace irréductible apparaissant dans la décomposition de $L^2(\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}))$ s'identifient aux espaces de Hardy du domaine de Siegel associé D, i.e. les espaces des valeurs aux bords des fonctions holomorphes et anti-holomorphes sur D (rappelons que V est la frontière de Shilov du domaine D). Ce sont donc des espaces hilbertiens à noyaux reproduisants. Pourrait-on avoir une description analytique explicite de la structure hilbertienne des autres composantes irréductibles ? De façon plus générale, on aimerait comprendre la structure hilbertienne des espaces de fonctions L^2 dont les transformées de Fourier sont à support dans une ou plusieurs orbites du groupe de structure. Proviendrait-elle de celle des espaces de $\bar{\partial}$-cohomologie de carré intégrable sur les orbites du groupe de structure ?

Question 3. Soit $\mathcal{O}$ un orbite non ouverte du groupe de structure $\mathrm{Str}(V)$ dans V et soit $d\mu$ une mesure $\mathrm{Str}(V)$-équivariante sur $\mathcal{O}$. Dans [96, 31, 32] les auteurs décrivent la structure hilbertienne des représentations de G dans $L^2(\mathcal{O}, d\mu)$. Ces méthodes peuvent-elles apporter des réponses à la question précédente ?

1.3. **Restriction des représentations : deux approches.** De par sa complexité et la diversité des cas de figure possibles, le problème de la décomposition des restrictions des représentations aux sous-groupes a été et reste toujours l'objet d'intenses recherches. De nombreux auteurs ont utilisé des angles d'attaque différents [48, 57, 58, 59, 60, 73, 75, 84, 91] etc...

Nous allons présenter deux méthodes qui permettent, dans des situations géométriques particulières, d'obtenir la description explicite des restrictions des représentations unitaires d'un groupe conforme à un sous-groupe approprié.

1.3.1. *Espace de Bergman d'un semi-groupe complexe, représentation de Weil et transformation de Laplace sphérique* [I]. Soit G un groupe de Lie simple connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. D'après un théorème de E.B.Vinberg [118] $\mathfrak{g}$ possède un cône $\mathrm{Ad}(G)$-invariant régulier C si et seulement si $\mathfrak{g}$ est hermitienne. Ainsi, à toute algèbre de Lie simple hermitienne $\mathfrak{g}$ on peut associer un semi-groupe d'Olshanski $\Gamma(C) = G\exp(iC)$ [81] qui peut servir de modèle pour la réalisation de certaines représentations du groupe $G \times G$. En effet, $G \times G$ agit par

$$(\pi(g_1, g_2)f)(\gamma) = f(g_1^{-1} \cdot \gamma \cdot g_2)$$

dans l'espace de Bergman pondéré $B^2(C, p)$ des fonctions holomorphes dans l'intérieur du semi-groupe $\Gamma(C)$ et de carré intégrable par rapport à un certain poids positif $p(\gamma)$.

Cette action est unitaire et réductible. Plus précisément, soit $\widehat{\Gamma(C)}$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles et C-dissipatives du groupe G ([81]). Krötz ([68]) a établi la formule de Plancherel pour la représentation π qui s'écrit :

$$\|f\|^2_{B^2} = \sum_{\lambda \in \Sigma} \frac{1}{c(\lambda)} |||\hat{f}(\lambda)|||^2,$$

où $\Sigma \subset \widehat{\Gamma(C)}$ et $|||\hat{f}(\lambda)|||$ denote la norme de Hilbert-Schmidt de la transformée de Fourier $\hat{f}(\lambda) = \int_{\Gamma(C)} f(\gamma)\pi_\lambda(\bar{\gamma}^{-1})p(\gamma)d\gamma$ d'une fonction $f \in B^2(C,p)$. Le spectre de cette decomposition est défini par la condition

$$c(\lambda) = \int\limits_{\Gamma(C)} |(\pi_\lambda(\gamma)v_\lambda, v_\lambda)|^2 p(\gamma)d\gamma < \infty.$$

Ainsi la description de l'ensemble Σ se ramène à l'étude de la convergence de l'intégrale définissant $c(\lambda)$ qui n'est autre chose que la transformée de Laplace sphérique de la fonction $p(\gamma)$:

$$c(\lambda) = \frac{1}{d_\lambda} \int_{iC \cap \imath\mathfrak{h}} \Phi_{(-2\lambda-2\rho)}(\exp X)p(\exp X)\Delta^2(X)dX = \frac{1}{d_\lambda}\mathcal{L}(p)(-2\lambda - 2\rho),$$

où Φ_μ est la fonction sphérique de l'espace symétrique $G \setminus G^{\mathbb{C}}$, d_λ la dimension formelle de la représentation π_λ, ρ est la demi-somme des racines positives $\alpha \in \Delta^+$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par rapport à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ et $\Delta(X) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \sinh \alpha(X)$.

Il se trouve que le problème de la décomposition de l'action régulière π de $G \times G$ se ramène, dans le cas où $G = Sp(n,\mathbb{R})$, à la question de la restriction d'une représentation de la série discrète holomorphe du groupe $Sp(2n,\mathbb{R})$ au sous-groupe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$.

Plus précisément, soient (τ, V_τ) une représentation irréductible du groupe $K = U(n)$, sous-groupe compact maximal de $G = Sp(n,\mathbb{R})$, et $T_n(\tau) = \mathrm{Ind}_K^G \tau$ le $(\mathfrak{g}, K)$-module de plus haut poids correspondant à une représentation de la série discrète holomorphe vectorielle de G qui peut être réalisée dans l'espace $\mathcal{H}^2_\tau(D_n)$ des fonctions holomorphes dans le domaine de Siegel D_n à valeurs dans V_τ qui sont de carré intégrables (dans un certain sens) sur D_n.

D'après le principe de dualité de Howe [44], déjà mis en œuvre par Kashiwara et Vergne dans [53], à tout $\lambda \in \widehat{O(k)}$ on peut associer une représentation irréductible $\tau(\lambda)$ de $GL(n,\mathbb{C})$ de telle sorte qu'il existe un entrelacement entre la composante isotypique $W_{n,k}(\lambda)$ de la $k-$ème puissance tensorielle de la représentation de Weil et $T_n(\tau(\lambda))$ vue comme une représentation du groupe $Mp(n,\mathbb{R})$.

L'espace $L^2(Mat(n,k))^{O(k)}$ des $O(k)$-invariants de l'espace de la représentation de $W_{n,k}$ s'identifie à l'espace de Bergman du domaine de Siegel $B^2(D_n)$ si $k = n+1$. On montre alors que $B^2(C)$ est isomorphe à $B^2(D_{2n})$ qui est l'espace de la représentation $T_{2n}(\tau)$ de $Sp(2n,\mathbb{R})$. Ainsi le problème de la décomposition de l'action régulière de $Sp(n,\mathbb{R})\times Sp(n,\mathbb{R})$ dans $B^2(C)$ équivaut à la décomposition de la restriction de $T_{2n}(\tau)$ au sous-groupe $Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(n,\mathbb{R})$ en somme des représentations unitaires irréductibles de $Sp(n,\mathbb{R})$. Ce problème a été résolu dans [I] :

Théorème 1.2. *La restriction de la représentation T_{2n} au sous-groupe $Sp(n,\mathbb{R})\times Sp(n,\mathbb{R})$ se decompose en somme directe des représentations unitaires irréductible comme suit :*

$$T_{2n}|_{Sp(n,\mathbb{R})\times Sp(n,\mathbb{R})} = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_n} T_n(\tau)\otimes T_n(\tau'),$$

où $\Sigma_n = \{\tau \in \widehat{GL(n,\mathbb{C})} \mid \tau = \tau(\lambda)\} = \{\underline{m} = (m_1,\ldots,m_2) \mid m_1 \geq \ldots \geq m_n \geq 2n+1\}$.

On peut aussi obtenir ce résultat en calculant explicitement le spectre de la décomposition de la représentation régulière π par la méthode de la transformation de Laplace sphérique.

Notons que l'étude systématique des espaces de Bergman pondérés associés aux groupes d'automorphismes des domaines de type tube a depuis été réalisée dans [12].

1.3.2. *Transformation de Berezin et restriction à un sous-groupe symétrique.* [III, VI, VII, XI]. La théorie des noyaux reproduisants prenant ses racines dans les travaux classiques d'analyse complexe a été formalisée par Aronszajn [9] et Bergman [15] dans le cadre des sous-espaces hilbertiens de fonctions et dans le contexte plus général d'un espace topologique séparé, localement convexe et quasi-complet par L.Schwartz [104]. Appliquées à la théorie des représentations unitaires, ces idées ont permis de traiter les problèmes spectraux en termes de fonctions sphériques. En effet, le théorème de Bochner-Schwartz-Godement affirme d'une part qu'il existe une correspondance univoque entre les fonctions définies positives sur un groupe de Lie et les classes d'équivalence des triplets composés d'une représentation unitaire π, de l'espace hilbertien $\mathcal{H}_\pi$ de la representation et d'un vecteur π-cyclique de $\mathcal{H}_\pi$ et d'autre part que toute fonction définie positive est décomposable en "somme" des fonctions définies positives extrémales (au sens du théorème de Krein-Milman), *i.e.* des fonctions correspondant aux représentations unitaires irréductibles du groupe (voir par exemple [107] pour l'historique et les énoncés précis).

C'est dans cette optique que nous abordons le problème de la restriction des représentations des groupes conformes et développons la théorie de la transformation de Berezin.

Initialement introduite dans le contexte de la quantification des espaces symétriques kählériens [13, 14], la transformation de Berezin est définie de la façon suivante.

Soit X un espace mesurable et H un sous-espace fermé de $L^2(X)$. A toute fonction bornée f sur X on peut associer un opérateur $\sigma^*(f)$ dans $L^2(X)$, l'opérateur de Berezin de symbole contravariant f, tel que

$$\sigma^*(f)h = P_H(fh),$$

où P_H est la projection orthogonale $L^2(X) \to H$. Si de plus le sous-espace H possède un noyau reproduisant $K_H(z,w)$ on peut définir en chaque point $w \in X$ une famille d'états cohérents $e_w(z) = K_H(z,w)K_H(w,w)^{-1/2}$. Ainsi à tout opérateur borné A sur H on associe son symbole covariant au sens de Berezin $\sigma(A)$ défini par $\sigma(A)(w) = (e_w,\, Ae_w)_H$. Les applications σ et σ^* sont duales dans un certain sens et la transformation définie sur les fonctions (symboles) bornées de X par $\sigma\sigma^*$ porte le nom de *la transformation de Berezin.*

Cette transformation a dernièrement suscité un vif intérêt de la part des spécialistes de l'analyse harmonique et cela s'explique, entre autre, par le rôle qu'elle joue dans le problème de la restriction [84, 75, 76, 77, 78, 116, 122, 123]. (liste non exhaustive !)

Il est possible, dans des situations différentes, de donner des définitions alternatives de la transformation de Berezin. Par exemple, on peut la voir comme une transformation intégrale sur un domaine complexe symétrique borné dont le noyau est une généralisation du bi-rapport de 4 points [35, XI], ou encore comme une forme bilinéaire invariante sur l'espace de représentation d'une série principale d'un groupe de Lie conforme [26, 27, 43, XI]. C'est précisément cette approche que nous adaptons.

Soit G le groupe conforme d'une algèbre de Jordan simple V. L'utilisation de la transformation de Berezin dans la résolution du problème de la restriction d'une représentation de G s'avère efficace dans un cadre géométrique bien précis.

Soient α une involution euclidienne de V, $V_0 := \{x \in V \mid \alpha(x) = x\}$, $V_1 := \{x \in V \mid \alpha(x) = -x\}$, ses sous-espaces propres dans V. L'espace V_0 est une algèbre de Jordan euclidienne dont la dimension et le rang seront notés n_0 et r_0. Notons Ω_0 le cône symétrique associé. Introduisons

$$H := \{g \in G \mid (-\alpha) \circ g \circ (-\alpha) = g\}_o \quad \text{et} \quad K_H := \{g \in H \mid g.e = e\},$$

alors l'espace riemannien associé $\mathcal{X} = H/K_H = \Omega_0 + V_1$ est un *espace symétrique de Makarevich de type tube*. Il peut être vu comme une orbite symétrique ouverte dans la compactification conforme G/P de l'algèbre V ([16]).

Soit π_m une représentation de la série maximale dégénérée introduite précédemment agissant dans un fibré en droites I_m sur la compactification conforme de V.

Le sous-espace $I_m(\mathcal{X})$ des fonctions dans I_m supportées par l'adhérence de $\mathcal{X}$ est H-invariant. L'action T_m du groupe H dans ce sous-espace, appelée *repésentation canonique* [24, 117], n'est pas nécessairement unitaire ni irréductible, sa décomposition en représentations irréductibles équivaut au problème de la restriction de π_m au sous-groupe H.

Considérons sur $I_m(\mathcal{X}) \times I_m(\mathcal{X})$ la forme bilinéaire H-invariante

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_m^{\alpha}(f_1, f_2) := \mathfrak{B}_m(f_1, f_2 \circ (-\alpha)),$$

où

$$\mathfrak{B}_m(f_1, f_2) = \int\int_{V\times V} |\Delta(x-y)|^{2m-\frac{n}{r}} f_1(x) f_2(y) dx dy.$$

Définissons sur $I_m(\mathcal{X})$ l'opérateur de multiplication M_m par

$$M_m f(x) = \Delta(x_0)^{m+\frac{n}{2r}} f(x),$$

où $x = x_0 + x_1 \in \mathcal{X} = \Omega_0 + V_1$. Alors M_m entrelace la représentation canonique T_m et l'action régulière à gauche L de H : $M_m \circ T_m(g) = L(g) \circ M_m, \quad g \in H$.

Posons $\mathfrak{B}_m^{\alpha}(F_1, F_1) = \mathfrak{B}_m^{\alpha}(M_s f_1, M_s f_2) = \widetilde{\mathfrak{B}}_m^{\alpha}(f_1, f_2)$. C'est une forme bilinéaire sur $\mathcal{C}_c(\mathcal{X}) \times \mathcal{C}_c(\mathcal{X})$ qui est donnée par

$$\mathfrak{B}_m^{\alpha}(F_1, F_2) = \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} B_\nu(x, y) F_1(x) F_2(y) \mu(dx) \mu(dy),$$

où $B_\nu(x, y) = \left(\dfrac{\Delta\big(x + \alpha(x)\big)\Delta\big(y + \alpha(y)\big)}{\Delta\big(x + \alpha(y)\big)\Delta\big(y + \alpha(x)\big)} \right)^{\frac{r_0}{r}\nu}$ est le noyau de Berezin, avec $\nu = -\frac{r}{r_0}\left(m - \frac{n}{2r}\right)$.

Ainsi l'unitarisabilité de T_m équivaut au fait que cette forme soit définie positive et le problème de la restriction se ramène à la diagonalisation de la forme $\mathfrak{B}_m^{\alpha}$ par rapport à l'action du groupe H.

Soient Λ l'ensemble de paramètres spectraux pour lesquels la fonction sphérique φ_λ de l'espace symétrique $\mathcal{X}$ est définie positive et

$$\psi_\nu(x) = B_\nu(x, e) = \left(\frac{\Delta(x_0)}{\Delta\left(\frac{x+e}{2}\right)^2} \right)^{\frac{r_0}{r}\nu}$$

la fonction continue K_H-invariante sur H associée au noyau de Berezin $B_m(x, y)$. C'est ici que le théorème de Bochner-Schwartz-Godement entre en jeu. Il existe une unique mesure positive bornée m_ν sur Λ telle que

$$\psi_\nu(x) = \int_\Lambda \varphi_\lambda(x) m_\nu(d\lambda).$$

Si ψ_ν est intégrable, cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Plancherel, dont la densité est égale à la transformée de Fourier sphérique de la fonction ψ_ν : $m(d\lambda) = \mathcal{F}\psi_\nu(\lambda)\dfrac{d\lambda}{|c(\lambda)|}$, où $c(\lambda)$ est la c-fonction de Harish-Chandra de l'espace symétrique $\mathcal{X}$.

Dans [III, XI] nous avons explicitement calculé le spectre de la décomposition des représentations canoniques qui s'est avéré être continu.

Théorème 1.3. *Soit $\Re\nu > \frac{n}{r_0} - 1$. Alors la fonction ψ_ν est intégrable et sa transformée de Fourier sphérique est donnée par*

$$\mathcal{F}\psi_\nu(\lambda) = \frac{P(\lambda,\nu)P(-\lambda,\nu)}{Q(\nu)},$$

avec $P(\lambda,\nu) = \prod_{j=1}^{r_o} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - \delta + \lambda_j\right), \delta = \frac{n}{2r_0}, Q(\nu) = c\prod_{j=1}^{2r_o} \Gamma\left(\nu - \beta_j\right)$, où la constante c et les réels β_j ne dépendent que de l'algèbre de Jordan V. En particulier, pour ν réel et $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{F}\psi_\nu(\lambda) = \frac{|P(\lambda,\nu)|^2}{Q(\nu)} \geq 0$.

Un phénomène intéressant se produit lorsque l'on considère le même problème pour la forme réelle compacte U du groupe conforme G. Il a déjà été mentionné par Berezin, developpé par Neretin [75] et Zhang [122] et généralisé dans [XI] pour tout espace symétrique compact $\mathcal{Y}$ dual d'un espace de Makarvich de type tube $\mathcal{X}$, un espace qui n'est pas hermitien en général.

Plus précisément les coefficients de Fourier sphériques du noyau de Berezin sur $\mathcal{Y}$ sont donnés par

$$a_\kappa(\mathbf{m}) = J(\kappa)\frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\kappa + \frac{1}{2} + \delta - \rho_j)\Gamma(\kappa + \frac{1}{2} + \delta + \rho_j)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\kappa + \frac{1}{2} + \delta - \rho_j + m_j)\Gamma(\kappa + \frac{1}{2} + \delta + \rho_j - m_j)}.$$

où $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ est un poids, ρ la demi-somme des racines positives, δ une constante reliée à la dimension et au rang de l'algèbre de Jordan associée et $J(\kappa) = \int_{\mathcal{Y}} \psi_{-\kappa}(y)\mu_o(dy)$ est l'intégrale de Hua [47]. Dans [XI] on montre que pour $\kappa \in \mathbb{N}$, la forme de Berezin "compacte" $\mathfrak{B}_s^c$ est définie positive. Ainsi la restriction de π_m au groupe compacte U se décompose en somme directe des représentations de la série principale sphérique $\Pi_{\mathbf{m}}$ de U :

$$\mathfrak{B}_s^c(f,\bar{f}) = \sum_{\mathbf{m}\in\hat{U}_K} d_{\mathbf{m}} a_\kappa(\mathbf{m})\|\hat{f}(\mathbf{m})\|^2,$$

La forme des coefficients $a_\kappa(\mathbf{m})$ implique que, en un certain sens, les représentations canoniques du dual compact de G "tendent" vers la représentation régulière lorsque le paramètre κ tend vers $-\infty$ en parcourant les points entiers négatifs.

De même façon, dans le cas non compact, lorsque $\nu \to \infty$, la mesure $I(\nu)^{-1}\psi_\nu(x)\mu(dx)$ converge vers la mesure de Dirac δ_e. La transformation de Berezin peut être vue comme une interpolation de deux représentations régulières, celle du groupe G et de son dual compact U.

Le lien entre le problème de la restriction et l'analyse sphérique des noyaux de Berezin se lit déjà en filigrane dans les travaux de Berezin lui-même, et a été mis en évidence dans une série de travaux de van Dijk et Hille [25], van Dijk et Molchanov [27, 28] et Unterberger et Upmeier [116] ainsi que dans [III].

Dans les premiers travaux il s'agissait de la décomposition de la restriction à $G \simeq \mathrm{diag}(G \times G)$ de la représentation $\pi_\lambda \otimes \bar{\pi}_\lambda$ du groupe $G \times G$, où G était un groupe de Lie simple hermitien et π_λ une représentation de la série discrète holomorphe scalaire de G. En général, un $(\mathfrak{g}, K)$-module de plus haut poids d'un tel groupe de Lie n'est pas nécessairement obtenu par induction holomorphe d'un caractère d'un sous-groupe compact maximal K mais il provient d'une représentation irréductible de K. Il est donc naturel d'étendre la méthode de la transformation de Berezin au cas des produits tensoriels des représentations de la série discrète holomorphe vectorielle. La théorie des noyaux de Berezin à valeurs matricielles a été développée dans [VI]. Dans le cas de l'espace hyperbolique complexe $H_n = SU(1,n)/S(U(1) \times U(n))$ nous avons considéré les représentations de la série discrète holomorphe vectorielle induites par les représentations spinorielles τ de $S(U(1) \times U(n))$ et, grâce aux formules explicites pour les fonctions τ-sphériques obtenues par E. Pedon [88], nous avons déterminé le spectre du produit tensoriel d'une représentation de la série discrète holomorphe vectorielle π_λ^τ et de la représentation de la série discrète anti-holomorphe scalaire $\bar{\pi}_{\lambda-1}$ vue comme une représentation du groupe $SU(1,n)$. De même nous avons obtenu la décomposition de la représentation π_λ^τ restreinte au sous-groupe $SO_o(1,n)$.

On observe curieusement que la densité de la mesure spectrale ainsi obtenue s'exprime en termes des fonctions hypergéométriques de rang supérieur, notamment des fonctions ${}_3F_2$.

Au delà du problème de la détermination du spectre des représentations unitaires réductibles la théorie de Bochner-Schwartz-Godement permet d'étudier les multiplicités des décompositions et plus particulièrement elle donne un critère efficace de décomposition sans multiplicité. Une telle décomposition est d'un intérêt primordial car dans un certain sens elle est canonique. Par exemple, l'action du tore $\mathbb{T}^d$ dans l'espace des fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^d$ se décompose sans multiplicité. C'est la raison pour laquelle on peut écrire la formule de Taylor dans $\mathbb{C}^d$: $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} c_\alpha x^\alpha$. En effet, cette formule est basée sur le fait que chaque monôme $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha^d}$ n'intervient dans la décomposition qu'un seule fois. De même, la représentation regulière de $\mathbb{R}^d$

dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ se décompose sans multiplicité ce qui nous permet d'introduire la notion de la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$.

Depuis quelques années T.Kobayashi a developpé une théorie, basée sur les méthodes algébriques des modules de Harish-Chandra qui conduit à plusieurs critères de décomposition sans multiplicité [56, 62].

Dans le cadre des sous-espaces hilbertiens invariants le critère de décomposition sans multiplicité est le suivant. Soient E un espace topologique, localement convexe, quasi-complet, muni d'une action d'un groupe G, $J : E \to E$ un anti-automorphisme. Si pour tout sous-espace hilbertien G-invariant $H \subset E$ on a $JH = H$, alors G opère dans E sans multiplicité [108]. Si E est l'espace des fonctions holomorphes sur un domaine complexe Z, il existe une formulation de ce critère ne faisant intervenir que des propriétés géométriques du domaine Z et de l'action du groupe G sur Z [38].

Dans [VIII] nous avons considéré la représentation $\omega_{p,q}$ de l'oscillateur harmonique du groupe $SL(2,\mathbb{R}) \times O(p,q)$ définie par

$$\omega_{p,q}(g)f(x) = f(g^{-1}.x), \qquad g \in O(p,q),$$

$$\omega_{p,q}(g(a)f(x) = |a|^{\frac{p+q}{2}}\mathrm{sgn}^{\frac{p+q}{2}}(a)f(ax),\ g(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

$$\omega_{p,q}(t(b))f(x) = e^{-i\pi b[x,x]}f(x), \qquad t(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

$$\omega_{p,q}(\sigma)f(x) = i^{\frac{p+q}{2}} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} e^{2i\pi[x,y]}f(y)dy, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $[x,y] = x_1y_1 + ... + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - ... - x_ny_n$ pour $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ et $n = p+q$.

En utilisant les propriétés des distributions coniques nous avons montré que cette représentation se décomposait sans multiplicité.

Théorème 1.4. *Tout sous-espace hilbertien $\omega_{p,q}(G)$-invariant $\mathcal{H}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se décompose sans multiplicité en somme de sous-espace hilbertiens irréducibles de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Notons que pour un sous-espace particulier $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce résultat a été obtenu par Kobayashi et Ørsted [63].

Question 1. Une conséquence curieuse du théorème 1.3 est l'identité de Bernstein. Soit $D(\nu)$ l'opérateur différentiel invariant sur $\mathcal{X}$ dont le symbole, *i.e.* son image par l'isomorphisme d'Harish-Chandra

$$\gamma : \mathbb{D}(\mathcal{X}) \to S(\mathbb{C}^{r_0}), \quad D \to \gamma_D(\lambda),$$

est $\gamma_{D(\nu)}(\lambda) = \gamma_\nu(\lambda) = \prod_{j=1}^{r_0}(\nu + \frac{1}{2} - \delta + \lambda_j)(\nu + \frac{1}{2} - \delta - \lambda_j)$.

Alors le noyau de Berezin vérifie l'identité :

$$D(\nu)B_\nu = b(\nu)B_{\nu+1},$$

où $b(\nu)$ est un polynôme de degré $2r_0$ donné par :

$$b(\nu) = \frac{Q(\nu+1)}{Q(\nu)} = \prod_{j=1}^{2r_o}(\nu - \beta_j).$$

Cette identité a été établie pour les algèbres de Jordan complexes par Engliš [34], dans une forme légèrement différente par Unterberger et Upmeier [116], et a été généralisée dans [35]. En général on ne connaît pas la forme explicite de l'opérateur $D(\nu)$.

Question 2. Il est évident que le cas général d'un espace symétrique hermitien G/K de rang supérieur à 1 est d'un autre ordre de complexité. Cependant on aimerait savoir jusqu'où on peut aller dans la connaissance du spectre des restrictions des représentations agissant dans les sections des fibrés vectoriels ?

Question-remarque 3. Le monde des représentations unitaires avec sa panoplie extrèmement riche d'outils hilbertiens permet d'obtenir un grande précision dans l'analyse spectrale. Cependant, l'analyse sur les espaces symétriques pseudo-riemanniens échappe à ce schema. Il nous semble donc très important de développer des techniques appropriées au cadre des représentations non-unitaires. L'intérêt pour cette thématique est motivé ne serait-ce que par le rôle que de telles représentations jouent en théorie de quantification des espaces symétriques non-riemanniens.

2. Quantification des espaces symétriques

Le concept de quantification est apparu dans la littérature physique dans les années 1920 et dès le début était utilisé dans des contextes différents. Nous la comprenons comme un procédé qui, à partir d'un système mécanique classique, permet de retrouver un système mécanique quantique dont la limite semi-classique ($\hbar \to 0$, *i.e.* lors que l'on change de système d'unités de mesure) est le système classique initial. Plus précisément, un système mécanique est défini par son espace de phases (qui est une variété symplectique M ou plus généralement une variété de Poisson) et les observables qui sont des fonctions régulières sur M, par exemple des fonctions de classe C^∞. La dynamique d'un tel système est définie par un hamiltonien $H \in C^\infty(M)$ et l'équation d'évolution d'une observable $f(x,t)$, $x \in M$, $t \in \mathbb{R}$ qui s'écrit $\dot{f}(x,t) = -\{H, f\}$.

Le cadre de la mécanique quantique étant conceptuellement plus complexe sa description requiert des objets d'une autre nature. Par exemple, dans la formulation de Heisenberg l'espace des phases d'un système quantique est un espace hilbertien, les observables sont représentées par des opérateurs auto-adjoints sur un espace hilbertien tandis que la dynamique d'un tel système est définie par son hamiltonien H, qui est un opérateur auto-adjoint et l'équation d'évolution d'une observable $A(t)$ s'écrit : $\dot{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)]$.

Par quantification on entend alors une correspondance $Q : f \to Q(f)$ associant à une fonction f un opérateur auto-adjoint $Q(f)$ sur un espace de Hilbert de telle sorte que $Q(1) = Id$ et $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$.

Posé ainsi, le problème de la quantification n'est pas univoque et nécessite plus de précisions sur les types de symboles admis, la nature de l'espace des phases etc. La première construction mathématique rigoureuse est due sans doute à H.Weyl. Mais le calcul de Weyl n'est valable que pour un espace de phases linéaire. Développer un calcul symbolique sur un espace homogène, *i.e.* une procédure de quantification respectant les symétries, est un grand défi. Le premier à y apporter une contribution fondamentale a été Dirac [29] qui a développé une méthode de quantification des systèmes avec contraintes. Par ailleurs beaucoup de résultats ont déjà été obtenus pour des classes particulières d'espaces homogènes. La quantification de Berezin (analogue du calcul de Wick) [13], dont il a été indirectement question dans la partie précédente, fournit une construction valable pour des systèmes dont l'espace des phases est une variété complexe kählerienne et en particulier un domaine symétrique borné dans $\mathbb{C}^n$.

Différents calculs symboliques covariants généralisant le calcul standard, celui de Berezin et de Weyl ont été proposés par A. et J. Unterberger [113, 114, 115] et ont permis de quantifier un certain nombre d'espaces symétriques semi-simples dont le demi-plan de Poincaré ou encore l'hyperboloïde à une nappe qui sont en fait des orbites coadjointes du groupe $SL(2, \mathbb{R})$. Nous reviendrons à ce sujet dans la dernière section de cette partie. Des travaux récents d'Arazy, Ørsted et Upmeier vont également dans ce sens [6, 7, 8].

Cependant les méthodes et surtout l'esprit de cette approche sont différents de ceux d'une autre direction importante, celle de la quantification géométrique due à Kirillov, Kostant et Souriau. Leur idée est d'associer à une orbite coadjointe d'un groupe de Lie G munie de sa structure symplectique canonique une famille d'opérateurs agissant dans un espace hilbertien de représentations du groupe G. Très efficace pour les groupes de Lie nilpotents ou exponentiels cette théorie se complique et perd son caractère univoque dans le cadre des groupes de Lie quelconques. Nous parlerons d'un des aspects de cette méthode (dite des orbites) lorsque l'on évoquera l'isomorphisme de Duflo dans la deuxième section.

Le calcul de Weyl est également à l'origine de la quantification par déformation. En effet, soit f une fonction, par exemple sommable sur $\mathbb{R}^{2n}$, alors le calcul de Weyl lui associe l'opérateur $W(f)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$W(f)u(x) = \hbar^{-n} \iint f\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) e^{\frac{2i\pi}{\hbar}\langle x-y,\eta\rangle} u(y)dyd\eta.$$

Soit Λ la structure de Poisson canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par $\Lambda = \sum \Lambda^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$ avec $\Lambda^{ij} = -\Lambda^{ji} \in \mathbb{R}$. Il se trouve que $W(f) \circ W(g) = W(f \star_M g)$ où $\star_M$ désigne le produit de Moyal associé à Λ :

$$f \star_M g\,(z) = \exp(i\pi\hbar\,\Lambda^{rs}\partial_{x_r}\partial_{x_s})(f(x)g(y))_{|x=y=z}.$$

Ce résultat a été le point de départ de la théorie de déformation [11] qui propose de voir la quantification "de l'autre côté" du calcul symbolique, i.e. en généralisant systématiquement les développements asymptotiques en la constante de Planck $\hbar$. Au lieu de considérer le calcul des opérateurs on cherche alors une loi de multiplication associative dans l'espace des séries formelles en $\hbar$ qui déformerait le produit habituel des fonctions sur une variété de Poisson dans la direction du crochet de Poisson. Ce problème a été résolu en 1997 avec brio par M.Kontsevich [65] pour une variété de Poisson lisse quelconque.

La théorie de déformation de Kontsevich, bien que formelle en général, permet de démontrer ou de redémontrer des théorèmes fondamentaux de la théorie de Lie, par exemple la formule de Campbell-Hausdorff, ainsi que ceux de la théorie des représentations des groupes de Lie. Ce dernier aspect sera expliqué dans la deuxième section de cette partie.

Toutefois, malgré les progrès considérables dans ce domaine, il nous semble important de remarquer que pour certains calculs symboliques les développements asymptotiques suivant les puissances du paramètre formel $\hbar$ ne sont plus pertinents voire sont tout simplement privés de sens car ils ne sont plus convergents. Il nous semble qu'en général au lieu du paramtre $\hbar$ nous devrions considérer un paramètre spectral choisi en fonction des "séries" de représentations liées au calcul symbolique en question.

2.1. **Star-représentations et leurs applications.** Une des approches possibles de la quantification des espaces homogènes consiste à adapter le calcul de Weyl à la situation courbe en travaillant du côté de son développement asymptotique et en cherchant une alternative au produit de Moyal qui respecterait les symétries du système à quantifier. Telle a été la stratégie développée dans [V, IX].

2.1.1. *Espaces symétriques semi-simples et star-représentations,* [V, IX]. Un star-produit $\star_\hbar$ sur une variété de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$ est un produit associatif sur l'espace $C^\infty(M)[[\hbar]]$ des séries formelles en $\hbar$ à coefficients dans l'espace des fonctions $C^\infty(M)$ vérifiant :

(i) l'application $\star_\hbar : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(M)[[\hbar]] \to C^\infty(M)[[\hbar]]$ est $\mathbb{C}[[\hbar]]$-bilinéaire,
(ii) si $f \in C^\infty(M) \subset C^\infty(M)[[\hbar]]$ alors $f \star_\hbar 1 = 1 \star_\hbar f = f$,
(iii) si $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ alors $f_1 \star_\hbar f_2 = f_1 \cdot f_2 \bmod(\hbar)$ et $f_1 \star_\hbar f_2 - f_2 \star_\hbar f_1 = 2\hbar\{f_1, f_2\} \bmod(\hbar^2)$.

Soient (M, ω) une variété symplectique et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie agissant comme une algèbre de champs de vecteurs symplectiques sur M, *i.e.* telle qu'il existe un homomorphisme $\mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M) : X \to X^*$ pour lequel $\mathcal{L}_{X^*}(\omega) = 0$. On suppose que cette action est fortement hamiltonnienne, i.e. l'application moment $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : X \to \lambda_X$ vérifie $D\lambda_X = i_{X^*}\omega$ et $\lambda_{[X,Y]} = \{\lambda_X, \lambda_Y\}$. Un tel quadruple $(M, \omega, \mathfrak{g}, \lambda)$ est alors appelé système fortement hamiltonien.

Un star-produit sur un système fortement hamiltonien est $\mathfrak{g}$-covariant si $\lambda_X \star_\hbar \lambda_Y - \lambda_Y \star_\hbar \lambda_X = 2\nu\{\lambda_X, \lambda_Y\}$.

Sous certaines conditions de nature technique on définit la star-représentation à gauche $\rho^L(X)a = (2\nu)^{-1}(\lambda_X \star_\hbar a)$ de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(M)[[\nu]]$ (on définit de même la star-représentation à droite ρ^R).

L'étude des star-produits covariants passe par une bonne compréhension des représentations ρ^L et ρ^R. Dans [V] nous avons considéré la cas où le système fortement hamiltonien est une orbite coadjointe particulière, c'est-à-dire que $M = G/H$ est un espace symétrique causal de type Cayley [37]. Un tel espace symétrique est le quotient du groupe conforme G d'une algèbre de Jordan euclidienne par son groupe de structure H. Le recours aux techniques des groupes conformes nous a permis d'identifier précisément les star-représentations associées.

Soit $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ avec $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. Il se trouve que l'espace G/H possède une carte de Darboux et par conséquent son espace tangent $\mathfrak{q}$ est un espace vectoriel symplectique sur lequel le produit de Moyal habituel est $\mathfrak{g}$-covariant ! De plus, la représentation ρ^L associée à ce produit est équivalente à la représentation dérivée de la série discrète holomorphe $d\pi_m$ de l'algèbre de Lie conforme pour une certaine spécialisation des paramètres ν et m. La formule liant m et ν montre que lorsque $m \to \infty$ le paramètre formel ν tend vers 0.

Il est connu [37] qu'il existe une dualité algébrique entre les espaces symétriques causaux de type Cayley G/H et les espaces symétriques hermitiens de type tube G/K . Cette dualité est algébrique au sens que c'est une correspondance entre deux séries d'algèbres de Lie simples involutives. Une autre dualité existant pour un espace symétrique hermitien est celle qui existe entre ses formes compacte U/K et non-compacte G/K. Cette dualité est plus qu'algébrique car il existe un plongement holomorphe équivariant : $G/K \to U/K$ sous-jacent à cette dualité. Autrement dit, il existe un homomorphisme d'algèbres $C^\infty(U/K) \to C^\infty(G/K)$. Notre résultat montre qu'il existe une réalisation non commutative de la dualité entre G/H et G/K. Plus précisément nous montrons qu'il existe une déformation de l'action de G dans un ouvert de G/H équivalente à l'action de G dans le domaine de type tube G/K mais vue cette fois au niveau des fonctions sur ces espaces.

Théorème 2.1. *Soient V une algèbre de Jordan euclidienne de rang r munie d'une forme bilinéaire β et G son groupe conforme. La star-représentation ρ^L de l'algèbre de Lie $g = \mathrm{Lie}(G)$ associée à $\star_\hbar$ s'intègre en une représentation du groupe G. Cette dernière est équivalente à la représentation de la série discrète holomorphe $d\pi_m$ de G pour $m = (\beta(o,o) + n\nu c)(4\nu rc)^{-1}$, où c est la valeur propre de l'action adjointe du point de base o.*

L'article [IX] est consacré à la construction d'une quantification par déformation convergente sur le demi-plan de Poincaré Π_+. En partant des résultats de [V], nous étudions la représentation $\mathrm{ad}_\star = (\rho^L - \rho^R)$ de $\mathfrak{g}$ agissant par des dérivations du star-produit dans les séries formelles sur G/H et montrons qu'elle se restreint à l'action régulière de $\mathfrak{g}$ dans $C_c^\infty(G/K)$. En utilisant la formule de Plancherel pour $L^2(\Pi_+)$ nous construisons un opérateur d'entrelacement qui permet de réaliser la star-représentation $\mathrm{ad}_\star$ dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur G/K.

Question 1. Puisque la déformation ainsi obtenue est convergente elle devrait correspondre à un certain calcul symbolique covariant. Sachant que tous les calculs symboliques covariants sont conjugés peut-on le décrire d'une façon simple ?

2.2. **Théorème de formalité de Kontsevich et isomorphisme de Duflo.** Les récentes avancées de la théorie de déformation dues à M.Kontsevich [65] ont eu déjà de nombreuses applications dans différents domaines des mathématiques et en particulier en analyse harmonique non-commutative.

Une des questions importantes de l'analyse harmonique est celle de la résolubilité des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie donné G. L'idée fondamentale, développée par différents auteurs et qui remonte à Chevalley et Harish-Chandra, est de ramener ce problème à la résolubilité des opérateurs différentiels sur l'algèbre de Lie correspondante, i.e. à la résolubilité des opérateurs différentiels à coefficients constants dans l'espace tangent T_eG. Des méthodes variées, dues à Harish-Chandra, Dixmier, Duflo, Raïs, Rouvière et autres, développées d'abord pour des classes de groupes de Lie particulières (semi-simples, nilpotents, réductifs etc.) et ensuite généralisées pour des groupes de Lie quelconques de dimension finie par Duflo [30], sont désormais classiques.

Le théorème de formalité de M. Kontsevich y a apporté une nouvelle lumière en soulignant le caractère canonique de la formule de Duflo et en donnant lieu à des nouveaux résultats sur l'extension de l'isomorphisme de Duflo [X].

2.2.1. *Isomorphisme de Duflo et cohomologie tangentielle,* [X]. Soient G un groupe de Lie réel connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (on supposera toujours $\dim \mathfrak{g} < \infty$). On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (*i.e.* l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G) et $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ que l'on voit comme l'algèbre d'opérateurs différentiels à coefficients constants. Ces deux algèbres s'identifient aux algèbres des distributions de support ponctuel en $e \in G$ et $0 \in \mathfrak{g}$ respectivement. Les structures multiplicatives de ces deux algèbres correspondent alors aux convolutions des distributions sur G et sur $\mathfrak{g}$.

Bien qu'isomorphes comme espaces vectoriels via la symétrisation $\beta : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ définie par :

$$\beta(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

ces deux ensembles ne sont pas isomorphes comme algèbres : en effet la première n'est généralement pas commutative tandis que la deuxième l'est toujours.

Il se trouve cependant que le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ et l'espace des invariants $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ de l'action adjointe forment des sous-algèbres dans $U(\mathfrak{g})$ et $S(\mathfrak{g})$ respectivement qui sont, par contre, isomorphes. Ce fait a été successivement démontré pour les algèbres de Lie résolubles, semi-simples et nilpotentes par Chevalley, Harish-Chandra et Dixmier.

D'après le théorème de Duflo, cela reste vrai pour une algèbre de Lie réelle de dimension finie quelconque. Soit

$$J(x) = \det{}_{\mathfrak{g}} \left(\frac{1 - e^{-\mathrm{ad} x}}{\mathrm{ad} x} \right)$$

dont la série formelle est vue comme le symbole d'un opérateur différentiel d'ordre infini sur $\mathfrak{g}$. On note $J^{1/2}(x)$ la série racine carrée formelle. Alors l'application $Q : S(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ définie par $Q = \beta \circ J^{1/2}$ est un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur $Z(\mathfrak{g})$ pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ réelle de dimension finie [30].

La démonstration hautement non triviale de ce théorème est basée sur la méthode des orbites *i.e.* la quantification géométrique des orbites coadjointes.

Précisons que ce théorème a inspiré ce que l'on appelle désormais la conjecture de Kashiwara-Vergne [54] dont il existe plusieurs formulations (analytique, combinatoire ou encore géométrique) [2, 3, 4, 5, 111] et que nous résumons ainsi : l'isomorphisme de Duflo se prolonge en un isomorphisme des algèbres des germes de distributions (hyperfonctions) invariantes sur $\mathfrak{g}$ et G respectivement. Cette conjecture, complètement démontrée cette année par A. Alekseev et E. Meinrenken [3], est la clé de voûte de la théorie car elle fait intervenir non seulement la structure multiplicative du groupe G via la formule Campbell-Haussdorff ou bien la description du dual unitaire de G via la méthode des orbites, mais elle donne également des pistes pour des recherches ultérieures que nous allons discuter dans ce qui suit.

Il se trouve que cette belle construction qu'est l'isomorphisme de Duflo n'est que le sommet d'un iceberg et que l'on peut l'étendre en un isomorphisme entre toutes les groupes de la cohomologie de Poisson de $\mathfrak{g}$ d'un côté et ceux de la cohomologie de Hochschild de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $U(\mathfrak{g})$ de l'autre et cela grâce au théorème de formalité de M. Kontsevich que nous expliquerons brièvement.

L'existence de l'isomorphisme en cohomologie a déjà été énoncé dans [65] et [105]. Dans [X] nous avons donné sa description explicite et plus précisément avons montré que l'isomorphisme de Duflo se prolongeait trivialement en cohomologie.

Pour la suite il nous semble important de souligner que les récents résultats d'Alekseev et Meinrenken [1, 2, 3] utilisant les méthodes de la géométrie de Poisson et de la cohomologie équivariante "à la Cartan", montrent que la conjecture de Kashiwara-Vergne dans sa formulation générale [2, 3] implique l'existence de l'isomorphisme de Duflo en cohomologie.

Nous avons déjà rappelé la définition d'un star-produit mais on peut la reformuler ainsi. Étant donné un bi-vecteur de Poisson α sur une variété lisse M, *i.e.* un élément $\alpha \in \Gamma(M, \bigwedge^2 TM)$ vérifiant l'équation de Maurer-Cartan $d\alpha = -[\alpha, \alpha]$, on cherche un opérateur bi-différentiel série formelle en $\hbar$ que l'on note

$$\star_\alpha : (f, g) \to \sum_n \hbar^n B_n(f, g),\ f, g \in C^\infty(M),$$

qui définisse un produit associatif sur $C^\infty(M)$. Il se trouve que la condition d'associativité se traduit par le fait que cet opérateur bi-différentiel vérifie une sorte d'équation de Maurer-Cartan ! Il faut donc relier deux solutions de deux équations de même type mais vérifiées par des objets de nature différente : des poly-champs de vecteurs d'un côté et des opérateurs poly-différentiels de l'autre.

Plus précisément, à toute variété lisse M on associe deux algèbres de Lie différentielles graduées (ALDG). La première ALDG $\mathfrak{g}_1 = T_{\mathrm{poly}}(M)$ est l'algèbre graduée des poly-champs de vecteurs sur M :

$$T^n_{\mathrm{poly}}(M) := \Gamma(M, \Lambda^n TM), \quad n \geq 0$$

munie du crochet de Schouten-Nijenhuis $[\ ,\ ]_{SN}$ et de la différentielle $d := 0$.

La deuxième ALDG associée à M est celle des opérateurs poly-différentiels $\mathfrak{g}_2 = D_{\mathrm{poly}}(M)$ vue comme une sous-algèbre du complexe de Hochschild décalé de l'algèbre des fonctions sur M.

On définit sur $D_{\mathrm{poly}}(M)$ une graduation donnée par $|A| = m-1$ où $A \in D_{\mathrm{poly}}(M)$ est un opérateur $m-$différentiel. La composition de deux opérateurs $A_1 \in D^{m_1}_{\mathrm{poly}}(M)$ et $A_2 \in D^{m_2}_{\mathrm{poly}}(M)$ s'écrit pour $f_i \in \mathcal{O}_M$:

$$\begin{aligned}(A_1 \circ A_2)(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) \ &= \ \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(j-1)} A_1(f_1, \dots, f_{j-1},\\ &\qquad A_2(f_j, \dots, f_{j+m_2-1}), f_{j+m_2}, \dots, f_{m_1+m_2-1}).\end{aligned}$$

Cette opération de composition permet de définir le crochet de Gerstenhaber : $[A_1, A_2]_G := A_1 \circ A_2 - (-1)^{|A_1||A_2|} A_2 \circ A_1$. La différentielle dans $D_{\mathrm{poly}}(M)$ s'écrit alors $dA = -[\mu, A]_G$, où μ est l'opérateur bi-différentiel de multiplication des fonctions : $\mu(f_1, f_2) = f_1 f_2$.

À un poly-champ de vecteurs on peut associer un opérateur poly-différentiel. En effet, l'application $\mathcal{U}_1^{(0)} : T_{\mathrm{poly}} \to D_{\mathrm{poly}}$ donnée par

$$\mathcal{U}_1^{(0)} : (\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_n) \to \left(f_0 \otimes \cdots \otimes f_n \to \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} \xi_{\sigma(i)}(f_i) \right) \tag{2.1}$$

pour $n \geq 1$ et par $f \to (1 \to f)$ pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un quasi-isomorphisme de complexes. C'est une version du théorème de Kostant-Hochschild-Rosenberg ([65] §4.6.1.1). D'après le théorème de formalité de Kontsevich cette application se prolonge en un L_∞-quasi-isomorphisme entre les variétés formelles graduées pointées $\mathfrak{g}_1[1]$ et $\mathfrak{g}_2[1]$, *i.e.* un morphisme de cogèbres $\mathcal{U} : S^+\big(\mathfrak{g}_1[1]\big) \to S^+\big(\mathfrak{g}_2[1]\big)$ tel que $\mathcal{U} \circ Q^1 = Q^2 \circ \mathcal{U}$ où les Q^i sont les codérivations de degré 1 définies par les structures d'ALDG. Ce théorème implique que les solutions de l'équation de Maurer-Cartan dans $\mathfrak{g}_1$ se transforment par l'application $\mathcal{U}$ en les solutions de la même équation dans $\mathfrak{g}_2$.

Lorsque $M = \mathbb{R}^d$ la dérivée $d\overline{\mathcal{U}}_{\hbar\gamma}$ induit un isomorphisme d'algèbres de l'espace de la cohomologie de l'espace tangent $T_{\hbar\alpha}(\mathfrak{g}_1[1])$ muni du cup-produit induit par le produit extérieur des poly-champs sur l'espace de la cohomologie de l'espace tangent $T_{\overline{\mathcal{U}}(\hbar\alpha)}(\mathfrak{g}_2[1])$ muni du cup-produit induit par le star-produit de Kontsevich $\star_\alpha$. [65, 72].

Les démonstrations de ces théorèmes sont d'une grande ingéniosité et complexité. Elles sont basées sur les méthodes graphiques inspirées par les diagrammes de Feynman et liées au développement perturbatif d'une certaine théorie des champs quantique bi-dimensionnelle [20].

Dans le cas où la variété M est le dual d'une algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ les coefficients du bi-vecteur de Kirillov-Kostant-Poisson α sont des fonctions linéaires sur $\mathfrak{g}^*$. Si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ et $\{e_1^*, \ldots, e_d^*\}$ sa base duale on a

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [e_i, e_j] e_i^* \wedge e_j^*.$$

Ceci étant, on peut considérablement simplifier l'expression des opérateurs poly-différentiels qui interviennent dans les constructions de façon à pouvoir réellement manipuler tous les graphes décrivant la formalité. Il est facile de voir que si f_1 et f_2 sont deux polynômes alors la série $f_1 \star_\alpha f_2$ est une somme finie. En localisant en $\hbar = 1$ on obtient un produit associatif sur l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. Ce produit définit sur $S(\mathfrak{g})$ une structure d'algèbre isomorphe à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. De plus, le 0-ème groupe de cohomologie de Poisson de $\mathfrak{g}$ n'est autre que $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tandis que le 0-ème groupe de cohomologie de Hochschild de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans $U(\mathfrak{g})$ est précisément le centre de $U(g)$. En tant que groupes de cohomologie tangentielle ces deux ensembles possèdent une structure d'anneau définie par le cup-produit et d'après le théorème de Kontsevich ils sont isomorphes en tant qu'algèbres. Cet isomorphisme est précisément celui de Duflo. Étant donné le caractère canonique de la déformation de Kontsevich on peut en dire autant de l'isomorphisme de Duflo.

En fait, le théorème de Kontsevich dit plus, il assure qu'il existe un isomorphisme d'algèbres pour tous les groupes de cohomologie tangentielle. Notre article [X] a été consacré à la description précise de cet isomorphisme. Nous y avons montré :

Théorème 2.2. *L'isomorphisme d'algèbres de $H_{\mathrm{Poisson}}(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{g}))$ sur $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ est donné par l'extension triviale de l'application de Duflo.*

Question 1. L'isomorphisme de Duflo est lié au problème du transport de la convolution des distributions invariantes (ou plus généralement des germes de distributions invariantes) du groupe G à l'algèbre de Lie associée. M. Raïs nous a demandé si le même phénomène de transport de la convolution restait valable pour les courants (i.e. des distributions à coefficients dans les formes différentielles) invariants. Il semblerait que le résultat soit plus nuancé et qu'il faille parler des classes de cohomologie des courants invariants. C'est un travail en préparation.

Question 2. Les techniques de Kontsevich sont essentiellement cohomologiques. Peut-on, à l'instar des travaux d'Alekseev et Meinrenken, trouver des démonstrations directes pour tous ces théorèmes, n'utilisant que la structure géométrique des objets ?

Question 3. Tout groupe de Lie G peut être vu comme un espace symétrique : $G \simeq G \times G/G$. Bien qu'il n'y existe plus de structure de Poisson canonique, il est naturel d'appliquer la théorie de Kontsevich au cas des espaces symétriques. Notons tout d'abord que le problème de l'extension de l'isomorphisme de Duflo au cas des espaces symétriques par des méthodes de la théorie des représentations a fait objet d'une profonde étude par Rouvière [92, 93] et Torossian [109, 110] . Un certain progrès dans l'utilisation des méthodes de déformation a également été obtenu pour certaines classes d'espaces symétriques [112], mais il s'agit toujours d'espaces symétriques qui ressemblent, dans un certain sens, au cas des groupes. Peut-on adapter les méthodes perturbatives de Kontsevich au cas des espaces symétriques comme l'ont suggéré Cattaneo et Torossian pour les espaces co-isotropes (travail à paraître) ou bien conceptuellement ne suffisent-elles plus au cas des espaces homogènes généraux ? La discussion sur la pertinence des méthodes asymptotiques nous laisse penser que la réponse soit non triviale et qu'il faille trouver des idées nouvelles.

2.3. **Calculs symboliques sur les espaces symétriques et crochets de Rankin-Cohen.** Depuis les résultats fondamentaux de A. et J. Unterberger [113, 114] sur la quantification covariante des orbites co-adjointes du groupe $SL(2,\mathbb{R})$ on sait qu'un calcul symbolique covariant n'admet pas forcément de développement asymptotique en le paramètre formel $\hbar$. Il est donc plus raisonnable d'aborder la question de la quantification des espaces symétriques, au moins semi-simples, directement du côté du calcul symbolique. Cela correspond davantage au problème du "principe de correspondance" tel que l'ont posé les fondateurs de la mécanique quantique : celui-ci exige en effet la construction d'un espace de Hilbert et d'une correspondance (le "symbole") allant des observables quantiques vers les observables classiques.

Les avantages des espaces symétriques semi-simples sont multiples. Tout d'abord on connaît très bien leur géométrie et leurs groupes de transformations. Par ailleurs, on a acquis à présent beaucoup d'informations sur les représentations de ces groupes. Enfin, grâce aux riches structures géométriques que possèdent ces espaces il est souvent possible de développer une analyse harmonique puissante et précise. La quantification des espaces symétriques est un de ces domaines mathématiques où des idées et des théories à priori très éloignées se rencontrent, s'entremêlent et s'enrichissent mutuellement.

En 1975 H.Cohen [22] a mis en évidence une structure particulière agissant dans l'espace des fonctions de classe C^∞ définies sur le demi-plan de Poincaré Π consistant en une famille d'opérateurs bi-différentiels. Ces opérateurs bi-différentiels, que l'on appelle désormais crochets de Rankin-Cohen (CRC), sont introduits de la façon suivante. Étant donné trois entiers positifs k_1, k_2 et j et deux fonctions $f, g \in C^\infty(\Pi)$, on pose

$$(2.2)\quad F_j(f,g) = \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^\ell C^\ell_{k_1+j-1} C^{j-\ell}_{k_2+j-1} f^{(j-\ell)} g^{(\ell)}, \qquad \text{où } f^{(\ell)} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(\ell)} f.$$

Les CRC F_j sont d'un grand intérêt dans l'étude des formes modulaires. En effet, posons

$$(f_{|k}\gamma)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

Alors, pour tout entier positif j et tout couple de fonctions $f, g \in C^\infty(\Pi)$ les crochets de Rankin-Cohen satisfont l'identité suivante :

$$F_j(f_{|k_1}\gamma, g_{|k_2}\gamma) = F_j(f,g)_{|k_1+k_2+2j}\gamma, \qquad \gamma \in SL(2,\mathbb{R}).$$

Cette construction a été généralisée dans le cadre de formes $Sp(n,\mathbb{Z})$-modulaires sur le demi-plan de Siegel, *i.e.* l'ensemble des matrices symétriques de partie imaginaire définie positive, par W.Eholzer et T.Ibukiyama [33].

Une approche algébrique des CRC et leurs éventuelles généralisations via les relations de commutation qu'ils doivent satisfaire a été développée par D. Zagier [119, 120].

En 1996 A. et J. Unterberger [114] ont montré que cette famille d'opérateurs bi-différentiels apparaissait d'une façon étonnante dans le contexte de la quantification covariante des orbites coadjointes du groupe de Lie $SL(2,\mathbb{R})$. Plus précisément, il s'agit de la construction d'un calcul symbolique covariant sur l'hyperboloïde à une nappe dans $\mathbb{R}^3$ que l'on identifie à l'espace symétrique $SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$. L'idée de leur construction est la suivante. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des couples $(s,t) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ tels que $s \neq t$. Le groupe $G = SL(2,\mathbb{R})$ agit dans $\mathcal{X}$ par les transformations homographiques. Cet ensemble peut être vu comme une orbite coadjointe du groupe G. Il admet une mesure invariante $d\mu(s,t) = (s-t)^{-2}dsdt$ et un opérateur différentiel invariant $\square = (s-t)^2\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$. Il s'avère alors possible de construire un calcul symbolique sur $L^2(\mathcal{X})$, *i.e.* d'associer à toute fonction $f \in L^2(\mathcal{X})$ un opérateur de Hilbert-Schmidt $\mathrm{Op}(f)$ agissant dans $L^2(\mathbb{R})$. Cet opérateur est défini par

$$(\mathrm{Op}(f)u)(s) = c_\lambda \int f(s,t)|s-t|^{-1-i\lambda}(\theta u)(t)dt, \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{R}),$$

où θu est un opérateur de convolution par une distribution particulière et c_λ un coefficient spectral. Il se trouve que ce calcul symbolique est covariant :

$$\pi_\lambda(g)\mathrm{Op}(f)\pi_\lambda(g^{-1}) = \mathrm{Op}(\rho(g)f), \qquad g \in G,$$

où π_λ désigne une représentation de la série maximale dégénérée du groupe G dans $L^2(\mathbb{R})$ et ρ la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(\mathcal{X})$.

La composition des opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$ définit alors un produit associatif $\sharp$ sur $L^2(\mathcal{X})$: $\mathrm{Op}(f)\mathrm{Op}(g) = \mathrm{Op}(f\sharp g)$. Le résultat central de [115] porte sur l'existence d'algèbres de fonctions sur $\mathcal{X}$ pour le produit $\sharp$.

En fait, l'espace $L^2(\mathcal{X})$ se décompose en somme directe de sous espaces invariants par l'action du groupe G (c'est la décomposition spectrale de l'opérateur $\Box$). Il est connu que le spectre de l'opérateur $\Box$ contient une partie continue et une partie discrète de la forme $\{-n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$. Les sous-espaces propres correspondant aux valeurs $-n(n+1)$ se décomposent en somme directe $E_n^+ \oplus E_n^-$ des espaces de représentations de la série discrète holomorphe et anti-holomorphe du groupe G. Il se trouve que l'adhérence dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'espace vectoriel $\{\mathrm{Op}(f) \mid f \in \sum_n^{\oplus} E_n^+\}$ est une algèbre.

Le point clé de la démonstration est le fait que le produit $\sharp$ de deux fonctions $f \in E_m^+$ et $g \in E_n^+$ s'exprime comme une série de termes dans les sous-espaces E_k^+, dont chacun est donné par un crochet de Rankin-Cohen à un coefficient explicite près.

Cette construction ouvre deux voies plus ou moins complémentaires pour définir les crochets de Rankin-Cohen sur des classes plus larges d'espaces symétriques.

Il est vraisemblable que le bon cadre soit celui des groupes de Lie semi-simples hermitiens G dont l'espace hermitien associé G/K soit de type tube. En effet, un tel groupe G possède des représentations de la série discrète holomorphe et anti-holomorphe qui constituent à notre avis un bon modèle pour la réalisation des CRC. D'autre part, la nature même du calcul symbolique, *i.e.* la nécessité de distinguer des variables dans l'espace de phases, selon qu'elles décrivent la position ou l'impulsion, nous impose une condition supplémetaire sur le groupe G en question. Il doit également être le groupe d'automorphismes d'un certain espace symétrique semi-simple para-hermitien. Plus précisément, soit σ un automorphisme involutif de G et H un sous-groupe ouvert connexe de G^σ. Le quotient G/H (qui est une orbite coadjointe de G et possède donc une structure symplectique canonique) est dit para-hermitien si son fibré tangent $T(G/H)$ se déploie en somme de deux sous-fibrés G-invariants isomorphes entre eux [51].

Si l'on garde les deux conditions sur le groupe G, à savoir que G/K est hermitien de type tube et que G/H est para-hermitien, on se restreint à la classe des groupes conformes associés aux algèbres de Jordan euclidiennes V. Suivant les auteurs, ces espaces de phases G/H sont appelés espaces symétriques causaux de type Cayley [37] ou bien espaces symétriques affines para-hermitiens de type hermitien [80].

2.3.1. *Structures d'anneau pour les séries discrètes holomorphes,* [XII]. Dans [XII] nous montrons que, dans le cas d'un espace symétrique causal de type Cayley, l'ensemble des représentations des séries discrètes du groupe G possède deux structures d'anneaux. Tout d'abord, grâce à la transformation de Laplace sphérique, on montre que pour deux fonctions f_1 et f_2 appartenant aux espaces des représentations de la série discrète holomorphe scalaire de paramètres spectraux ν_1 et ν_2 respectivement leur produit $f_1 \cdot f_2$ appartient à l'espace de la représentation de la série discrète holomorphe scalaire de paramètre spectral $\nu_1 + \nu_2$.

En utilisant la polarisation G-invariante de l'espace symétrique G/H nous développons sur G/H, suivant [115], un calcul symbolique covariant. Ce dernier est basé sur les représentations de la série maximale dégénérée que nous avons décrites dans la première partie. Soit $\pi_\lambda^\pm$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$ une telle représentation unitaire.

Il existe un plongement G-équivariant de l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'espace causal G/H dans l'algèbre (pour la loi de composition) des opérateurs de Hilbert-Schmidt :

$$L^2(G/H) \hookrightarrow \pi_\lambda^+ \otimes \pi_\lambda^- \hookrightarrow \pi_\lambda^+ \otimes \overline{\pi_\lambda^+} \simeq HS(L^2(V), dx),$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur V.

La première flèche est géométrique et correspond au fait que l'espace symétrique G/H est un ouvert dense de $G/P \cap G/\bar{P}$ ou P est un sous-groupe parabolique maximal de G. Le dernier isomorphisme est donné par

$$L^2(V, dx) \otimes \overline{L^2(V, dx)} \simeq HS(L^2(V, dx)).$$

La composition d'opérateurs donne donc lieu à un produit non-commutatif $\sharp$ dans l'espace de la représentation de π_λ.

Le lien entre ce calcul covariant et la série discrète holomorphe du groupe G se manifeste à travers l'étude spectrale de l'espace $L^2(G/H)$. Un espace symétrique G/H a des séries discrètes si l'ensemble des représentations de G dans des sous-espaces minimaux invariants fermés de $L^2(G/H)$ n'est pas vide. D'après un résultat fondamental de Flensted-Jensen [39] de telles représentations existent si $rang(G/H) = rang(K/K \cap H)$. Pour un espace causal de type Cayley cette condition est vérifiée et de plus on peut réaliser une partie du spectre discret dans les espaces des représentations de la série discrète holomorphe du groupe G lui-même. Le plongement des séries discrètes holomorphes de G dans $L^2(G/H)$ a été étudié dans [80].

Notons $L^2(G/H)_{\text{hol}}$ la partie du spectre discret de G/H provenant des représentations des séries discrètes holomorphes de G. Grâce aux récents résultats de T.Kobayashi [61] sur les produits tensoriels des modules de Harish-Chandra de plus haut poids nous démontrons :

Théorème 2.3. *Soient π et π' deux représentations de la série discrète holomorphe de G, et H_π et $H_{\pi'}$ les sous-espaces fermés et irréductibles correspondant de $L^2(G/H)_{\mathrm{hol}}$. Alors $f\sharp g \in L^2(G/H)_{\mathrm{hol}}$ pour tous $f \in \mathcal{H}_\pi$ et $g \in \mathcal{H}_{\pi'}$.*

Dans le cas où $G = SL(2,\mathbb{R})$ ce théorème se déduit du fait que le produit tensoriel de deux représentations de la série discrète holomorphe π_n et π_m a un spectre discret : $\pi_n \hat{\otimes}_2 \pi_m = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \pi_{m+n+2k}$. Ce résultat a été démontré indépendamment et par des méthodes différentes dans les années 1978 par Molchanov [73] et Repka [91]. La connaissance du spectre du produit tensoriel simplifie considérablement la démonstration de l'existence de la structure d'anneau proposée dans [115].

Question 1. Le fait que les crochets de Rankin-Cohen produisent, dans la situation classique, de nouvelles formes modulaires reflète le lien qui existe entre les transvectants (Überschienbung) des fonctions analytiques de deux variables complexes, introduits dans la théorie des invariants par Gordan [40], et les formes automorphes dans le demi-plan. Cette correspondance, dernièrement mise en évidence par Olver dans [82, 83], est basée sur des relations obtenue par Gundelfinger encore en 1886 [41]. Existerait-il alors un lien entre les CRC et les identités de Capelli pour des opérateurs différentiels agissant dans les espaces des représentations de la série maximale dégénérée et ceux de la série discrète relative [66, 67, 86, 95] ?

Question 2. La description du spectre du produit tensoriel proposée dans [73] pour le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ utilise une réalisation de cette représentation dans l'espace des fonctions sur l'hyperboloïde à une nappe et donne tous les coefficients de Fourier du noyau intégral définissant la structure hilbertienne sur cet espace de fonctions. Les opérateurs d'entrelacement entre les différents modèles de ces représentations sont en général des opérateurs de convolution dont le noyau est une fonction méromorphe en le paramètre spectral. Lorsque que l'on considère ces opérateurs en des points singuliers du spectre on obtient des opérateurs différentiels. Est-ce qu'en général les crochets de Rankin-Cohen doivent être définis comme des opérateurs de la restriction du produit tensoriel de deux représentations dans $L^2(G/H)_{\mathrm{hol}}$ à ses composantes irréductibles ?

Notons que, dans le cas où G est le groupe des automorphismes d'un domaine complexe symétrique borné, de tels opérateurs sont précisément des opérateurs bi-différentiels généralisant ceux de Rankin-Cohen. Ils ont été décrits d'une façon explicite par Peetre [89] et Peng et Zhang [90]. Le fait que la méthode développée dans [89] est basée sur la théorie des transvectants constitue un argument supplémentaire en faveur de l'iterprétation des crochets de Rankin-Cohen proposée ci-dessus.

Question 3. Est-ce que les présentes observations et suggestions apportent une meilleure compréhension du procédé que Connes et Moscovici [23] appellent la quantification de Rankin-Cohen ?

Question 4. D'après la classification des $(\mathfrak{g}, K)$-modules de Beilinson-Bernstein [103] on peut étudier les représentations des groupes de Lie semi-simples en termes des D-modules sur les variétés de drapeaux associées. Par exemple, pour le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ la variété des drapeaux n'est autre chose que la sphère de Riemann qui possède deux $K^{\mathbb{C}}$-orbites fermées : les pôles, et une orbite ouverte qui est la sphère privée des pôles. Les séries discrètes holomorphe et anti-holomorphe de $SL(2, \mathbb{R})$ correspondent à certains faisceaux sur les orbites fermées. Est-ce que la structure d'anneau sur l'ensemble des séries discrètes que nous avons discutée peut alors être interprétée du point de vue fonctoriel en termes d'un cup-produit sur les faisceaux associés ?

Question 5. Nous avons vu que la structure d'anneau sur $L^2(G/H)_{\mathrm{hol}}$ est liée au produit tensoriel des représentations de la série discrète. Reflète-t-elle, via la dualité de Tannaka-Krein, l'existence d'une certaine algèbre de Hopf qui gouvernerait alors le produit non-commutatif $\sharp$ sur l'espace de phases ?

Question-remarque 6. Les observations faites par Zagier [119] et surtout les derniers résultats obtenus par H. Aoki et T. Ibukiyama [79] laissent présager un lien entre les CRC et les algèbres de Vertex. Il serait intéressant de le mettre en évidence.

2.3.2. *Quantification d'un espace symétrique para-hermitien et analyse pseudo-différentielle* [XIII]. Une autre approche possible aux CRC consiste en l'abandon de la condition de l'existence de séries discrètes holomorphes. Ceci permet de gagner en simplicité du côté du calcul symbolique mais en contre-partie on perd la structure complexe et tous les outils relatifs aux fonctions holomorphes. Cette piste nous amène à étudier la quantification covariante d'un espace para-hermitien quelconque.

Cette considération guide notre travail commun avec A.Unterberger [XIII]. Nous avons donc construit un calcul symbolique covariant sur un espace symétrique para-hermitien G/H de rang 1 qui, à un recouvrement près, est isomorphe à $SL(n, \mathbb{R})/GL(n-1, \mathbb{R})$, $n > 2$. L'étude des formules de composition nous a confrontés à de sérieux problèmes d'analyse harmonique sur l'espace symétrique G/H que nous espérons surmonter grâce aux méthodes de la transformation de Poisson développées par van Dijk et Molchanov, Flensted-Jensen, et Oshima et Matsuki [27, 39, 87].

Malheureusement l'espace $L^2(G/H)_{\mathrm{hol}}$ est réduit à 0, et pour cause, puisque le groupe $G = SL(n, \mathbb{R})$ n'a pas de série discrète pour $n > 2$! Toutefois, nous pouvons déjà décrire les noyaux auto-reproduisants du calcul symbolique. De tels noyaux ont la propriété remarquable $f\sharp f = f^2$, et ils doivent, à notre avis, engendrer une algèbre de symboles stables pour le produit non-commutatif $\sharp$ et dans laquelle l'équivalent des CRC pourrait être défini.

La description aussi précise que possible des formules de composition des symboles (intégrale, fonctionnelle, asymptotique) reste notre préoccupation première. En effet, c'est elle qui nous permettrait de comprendre les éventuelles structures d'anneau pour les différentes séries de représentations unitaires des groupes conformes.

Publications de M.Pevzner

[I] M. Pevzner, Espace de Bergman d'un semi-groupe complexe, *C.R. Acad.Sci. Paris.*, **322**, Série I (1996), pp. 635-640.

[II] M. Pevzner, Représentation de Weil associée à une représentation d'algèbre de Jordan, *C.R.Acad.Sci.Paris*, **328**, Série I, p.463-468, 1999.

[III] G. van Dijk, M. Pevzner, Berezin Kernels on Tube domains, *J. Funct. Anal.* **181**, No.2, (2001), pp. 189-209 .

[IV] M. Pevzner, Analyse conforme sur les algèbres de Jordan, *J. Austral. Math. Soc.* **73**,(2002), 1–21.

[V] P.Bieliavsky, M.Pevzner, Symmetric spaces and star representations. II. Causal symmetric spaces. *J. Geom. Phys.* **41** (2002), pp.224–234.

[VI] G. van Dijk, M. Pevzner, Matrix-valued Berezin kernels, in "Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups" A.Strasburger, (ed.) et al. Warszawa : Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Cent. Publ. **55**, 269-288 (2002).

[VII] G. van Dijk, M. Pevzner, Berezin kernels and maximal degenerate representations associated with Riemannian symmetric spaces of Hermitian type. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **292** (2002), 7, pp.11–21, 177.

[VIII] G. van Dijk, M. Pevzner, S. Aparicio, Invariant Hilbert subspaces of the oscillator representation, *Indag. Math.* N.S., **14** (2003), pp. 309-318.

[IX] P. Bieliavsky, M. Pevzner, Symmetric spaces and star representations. III. The Poincar disc. dans *Noncommutative harmonic analysis*, 61–77, Progr. Math., **220**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[X] M. Pevzner, Ch. Torossian, Isomorphisme de Duflo et la cohomologie tangentielle. *J. Geom. Phys.* **51**, (2004) pp. 486-505.

[XI] J. Faraut, M. Pevzner, Berezin kernels and analysis on Makarevich spaces, à paraître dans Indag. Math. (2005).

[XII] G. van Dijk, M. Pevzner, Ring structures for holomorphic discrete series and Rankincohen brackets. Preprint ESI, (2005).

[XIII] M. Pevzner, A.Unterberger, The quantization of a para-Hermitian symmetric space and pseudodifferential analysis on the projective space. En préparation.

Références

1. A. Alekseev, E. Meinrenken, The non-commutative Weil algebra. *Invent. Math.* **139** (2000), pp.135–172.

2. A. Alekseev, E. Meinrenken, Poisson geometry and the Kashiwara-Vergne conjecture. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), no. 9, pp.723–728.
3. A. Alekseev, E. Meinrenken, On the Kashiwara-Vergne conjecture, *E-print* : arXiv : math.QA/0506499.
4. M. Andler, A. Dvorsky, S. Sahi, Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **35**, (2002), 371–390.
5. M. Andler, Ch. Torossian, S. Sahi, Convolution of invariant distributions : proof of the Kashiwara-Vergne conjecture. *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), pp.177–203.
6. J. Arazy, B.Ørsted, Asymptotic expansions of Berezin transforms. *Indiana Univ. Math. J.* **49** (2000), pp. 7–30.
7. J. Arazy, H. Upmeier, Weyl calculus for complex and real symmetric domains. dans Harmonic analysis on complex homogeneous domains and Lie groups (Rome, 2001). *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) Mat. Appl. **13** (2002), no. 3-4, 165–181.
8. J. Arazy, H. Upmeier, Invariant symbolic calculi and eigenvalues of invariant operators on symmetric domains. Dans Function spaces, interpolation theory and related topics (Lund, 2000), 151–211, de Gruyter, Berlin, 2002.
9. N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), pp.337-404.
10. D. Barbash, S. Sahi, B. Speh, Degenerate series representations for $GL(2n, \mathbb{R})$ and Fourier analysis, in "Indecomposable representations of Lie groups and their physical applications" (V.Cantoni, Ed.), *Sympos. Math.* **31** (1988), pp. 45-69.
11. F.Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lischnerowicz, D. Sternheimer, Deformation theory and Quantization. *Ann. Phys.* **111**, (1978), pp.61–110.
12. S. Ben Saïd, Weighted Bergman spaces on bounded symmetric domains, Pac. J. Math. 206, No.1, (2002), pp.39-68.
13. F.A. Berezin, General concept of quantization, *Commun. Math. Phys.* **40** (1975), pp. 153-174.
14. F.A. Berezin, Connection between co- and contravariant symbols of operators on the classical complex symmetric spaces. Dokl. Akad. Nauk USSR 241, (1978), pp. 15-17.
15. S. Bergman, The kernel function and conformal mapping, *Math. Surveys,* n. V, *Amer. Math. Soc.*, 1950.
16. W. Bertram, Algebraic structures of Makarevic spaces. I. *Transform. Groups* **3**, No.1,(1998), pp.3-32.
17. W. Bertram, The Geometry of Jordan and Lie Structures, Lecture Notes in Maths, **1754**, Springer, 2000.
18. Th. Branson, Group representations arising from Lorentz conformal geometry, *J. Funct. Anal.* **74**, (1987), pp.199-241.
19. Th. Branson, G.Ólafsson, B.Ørsted, Spectrum generating operators and intertwining operators for representations induced from a maximal parabolic subgroup. *J. Funct. Anal.* **135**, (1996), 163-205.
20. A. Cattaneo, G. Felder, A path integral aproach to the Kontsevich quantization formula, *Comm. Amth. Phys.*, **212**, (2000), pp 591-611.

21. J.-L. Clerc, A generalized Hecke Identity, *J. Fourier Anal. Appl.* **6** (2000), pp. 105-111.
22. H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, *Math.Ann.* **217** (1975), p.271–295.
23. A. Connes, H. Moscovici, Rankin-Cohen brackets and the Hopf algebra of transverse geometry, *Mosc. Math. J.* **4**, No.1,(2004), pp. 111-130 .
24. G. van Dijk, A new approach to Berezin kernels and canonical representations. in "Asymptotic combinatorics with application to mathematical physics." Malyshev, V. A. (ed.) et al., Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers. NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem. (2002),**77**, pp.279-305.
25. G. van Dijk, S. Hille, Canonical representations related to hyperbolic spaces. *J. Funct. Anal.* **147**, (1997), pp.107-139.
26. G. van Dijk, S. Hille, Maximal degenerate representations, Berezin kernels and canonical representations, in "Lie Groups and Lie algebras, their representations, generalizations and applications" (B.Komrakov, G. Litvinov, A. Sossinsky Edt.), Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.
27. G. van Dijk, V.F. Molchanov, The Berezin form for rank one para-Hermitian symmetric spaces. *J. Math. Pures Appl.* **77**, (1998), pp.747-799.
28. G. van Dijk, V.F. Molchanov, Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $SL(n,\mathbb{R})$, *J. Math. Pures Appl.*, **78**, (1999), pp. 99–119.
29. P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics.* 3d ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1947.
30. M. Duflo, Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **10** (1977), pp.265–288.
31. A. Dvorsky, S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, *Invent. Math.* **138**, (1999), 203-224.
32. A. Dvorsky, S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations II, *J. Funct. Anal.* **201**, (2003) pp.430-456.
33. W. Eholzer, T. Ibukiyama, Rankin-Cohen type differential operators for Siegel modular forms. *Int. J. Math.* **9**, no. 4 (1998), pp. 443-463.
34. M. Engliš, A mean value theorem on bounded symmetric domains, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**7, pp. 3259–3268.
35. J. Faraut, Intégrales de Riesz sur un espace symétrique ordonné. Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups (Będlewo, 2000), pp.289–308, Banach Center Publ., **55**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2002.
36. J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on symmetric cones.* Oxford Science Publications, 1994.
37. J. Faraut, G. Ólafsson, Causal semisimple symmetric spaces, the geometry and harmonic analysis. In : *Hofmann, Lawson and Vinberg, eds., Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis.* De Gruyter, Berlin, 1995.
38. J. Faraut, E.G.F. Thomas, Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions. *J. Lie Theory* **9**, No.2,(1999), pp.383-402.
39. M. Flensted-Jensen, Discrete series for Semisimple Symmetric spaces, *Ann. of Maths, 2nd Ser.*, **111**, No 2 (1980), 253–311.
40. P. Gordan, *Ivariantentheorie*, Teubner, Leipzig, 1887.

41. S.Gundelfinger, Zur der binären Formen, *J. Reine Angew. Math.* **100** (1886), pp. 413-424.

42. C.S. Herz, Bessel functions of matrix argument, *Ann. of Math.*,**61** (1955), 474-523.

43. S. Hille, Canonical representations, Ph.D Thesis, Leiden Univeristy, 1999.

44. R. Howe, Remarks on classical Invariant Theory, *Trans. Amer. Math. Sci.* **313**, N.2, (1989), pp. 539-570.

45. R. Howe, S.T. Lee, Degenerate principal series representations of $GL_n(\mathbb{C})$ and $GL_n(\mathbb{R})$, *J. Funct. Anal.* **166** (1999), pp. 244-309.

46. R. Howe, E. Tan, Homogeneous functions on light cones : the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1993), pp. 1-74.

47. L.K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains.* Translations of Mathematical monographs, 6, AMS, Providence, 1963.

48. H.P. Jacobsen, M. Vergne, Restrictions and expansions of holomorphic representations, *J. Funct. Anal.* **34** (1979), pp. 29-53.

49. K. Johnson, Degenerate principal series and compact groups, *Math. Ann.* **287** (1990), pp. 703-718.

50. K. Johnson, Degenerate principal series on tube type domains, *Contemp. Math.* **138** (1992), 175-187.

51. S. Kaneyuki, M. Kozai, Paracomplex Structures and affine symmetric spaces, *Tokyo J. Math.* **8**, No.1, 1985, pp 81–98.

52. I.L. Kantor, Non-linear groups of transformations defined by general norms of Jordan algebras. *Soviet Math Dokl.*, **8**, (1967), pp.176-180.

53. M. Kashiwara, M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, *Invent.Math.* **44**.1, (1978), 1-47.

54. M. Kashiwara, M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, *Invent.Math.* **47**, (1978), 249-272.

55. M. Kashiwara, M. Vergne, Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, Lectures notes in Math. **728**, (1979), pp.136-176.

56. T. Kobayashi, Multiplicity-free theorem in branching problems of unitary highest weight modules, *Proceedings of the Symposium on Representation Theory held at Saga, Kyushu* (K.Mimachi ed.) (1997), pp. 9-17.

57. T. Kobayashi, The restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ to reductive subgroups, Part I, *Proc. Japan Acad.* **69** (1993), pp 262-267 ; Part II, ibid. **71** (1995), pp 24-26.

58. T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications, *Invent, Math.* **117** (1994), pp. 181-205.

59. T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups II - microlocal analysis and asymptotic K-support, Annals of Math. 147 (1998), pp. 709-729.

60. T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups III - restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties, Invent. Math. 131 (1998), pp. 229-256.

61. T. Kobayashi, Discrete Series Representations for the Orbit Spaces Arising from Two Involutions of Real Reductive Lie Groups, *J. Funct. Anal.* **152** (1998), pp. 100-135.

62. T. Kobayashi, Multiplicity-free Representations and Visible actions on complex manifolds. Preprint, RIMS, 2005.

63. T. Kobayashi, B.Ørsted, Analysis on the Minimal Representation of $O(p,q)$-I. Realization via conformal Geometry, *Adv. Math.* **180**, (2003), 486-512.

64. M. Koecher, Über eine Gruppe von rationalen Abbildungen, *Inv. Math.* **3** (1967), pp. 136-171.

65. M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, **66** (2003), pp.157–216.

66. B. Kostant, S. Sahi, The Capelli identity, tube domains, and the generalized Laplace transform. *Adv. Math.* **87** (1991), pp.71–92.

67. B. Kostant, S. Sahi, Jordan algebras and Capelli identities. *Invent. Math.* **112** (1993), pp.657–664.

68. B. Krötz, On Hardy and Bergman spaces on complex Ol'shanskii semigroups. *Math. Ann.* **312**,(1998), pp.13-52.

69. S. Lee, On some degenerate principal series representations of $U(n,n)$, *J. Funct. Anal.* **126** (1994), pp. 305-366.

70. S. Lee, Degenerate principal series representations of $Sp(2n,\mathbb{R})$, *Compositio Math.* **103** (1996), pp.123-151.

71. J. Liouville, Théorème sur l'équation $dx^2+dy^2+dz^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)$. *J. Math. Pures et Appl.*, **15** (1850), p.103.

72. D. Manchon, Ch. Torossian, Cohomologie tangente et cup-produit pour la quantification de Kontsevich, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **10** (2003), pp. 75-106.

73. V.F. Molchanov, Tensor products of unitary representations of the three-dimensional Lorentz group. *Math. USSR, Izv.* 15,(1980), pp. 113-143.

74. V.F. Molchanov, Maximal degenerate series representations of the universal covering of the group $SU(n,n)$. in "Lie groups and Lie algebras. Their representations, generalisations and applications" (Komrakov, B. P. (ed.) et al.) Dordrecht, Kluwer Academic Publishers. Math. Appl., Dordr. **433**, 313-336 (1998).

75. Yu. Neretin, Matrix analogues of the B-function, and the Plancherel formula for Berezin kernel representations. *Sb. Math.* **191** (2000), no. 5-6, pp.683–715.

76. Yu. Neretin, Matrix balls, radial analysis of Berezin kernels, and hypergeometric determinants, *Mosc.Math.J.* **1** (2001), pp.157-220.

77. Yu. Neretin, Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space. *J. Funct.Anal.* **189** (2002), pp. 336-408.

78. T. Nomura, Berezin transforms and group representations, *J. Lie Theory,* **8** (1998), pp.433-440.

79. H. Aoki, T. Ibukiyama, Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products, *I*nt. J. Math. **16**, (2005), pp. 249–279.

80. G. Òlafsson, B. Ørsted. The holomorphic discrete series for Affine Symmetric Spaces. *J. Funct. Anal.* **81**, 126-159 (1988).

81. G.I. Olshanski, Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups and holomorphic discrete series, *Funct.Anal. and Appl.*, **15** (1981), 275-285.

82. P.J. Olver, *Classical Invariant Theory*, London Math. Society Student Texts **44**, Cambridge University Press, 1999.

83. P.J. Olver, J.A. Sanders, Transvectants, modular forms, and the Heisenberg algebra. *Adv. in Appl. Math.* **25** (2000), pp. 252–283.
84. B. Ørsted, J. Vargas, Restriction of square integrable representations : discrete spectrum, *Duke Math. J.* **123** (2004).
85. B. Ørsted, G. Zhang, Generalized principal series representations and tube domains, *Duke Math. J.* **78** (1995), pp. 335-356.
86. B. Ørsted, G. Zhang, Capelli identity and relative discrete series of line bundles over tube domains. dans *Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups.* Proceedings of the workshop on Lie groups and Lie algebras, Bedlewo, Poland, September 4-15, 2000. Warszawa : Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics. Banach Cent. Publ. **55**, (2002), pp.349-357 .
87. T. Oshima, T. Matsuki, Discrete Series for Symmetric Spaces, *Adv. Stud. Pure Math.* **4**, 1984, 331–390.
88. E. Pedon, Harmonic Analysis for differential forms on complex hyperbolic spaces, *J. of Geometry and Physics*, **32**, (1999), 102-130.
89. J. Peetre, Hankel forms of arbitrary weight over a symmetric domain via the transvectant. *Rocky Mount. J. Math.* **24** (1994), pp. 1065–1085.
90. L. Peng, G. Zhang, Tensor products of holomorphic representations and bilinear differential operators. *J. Funct. Anal.* **210**,(2004), pp. 171-192.
91. J. Repka, Tensor products of holomorphic discrete series representations. *Can. J. Math.* **31**,(1979), pp. 836-844.
92. F. Rouvière, Invariant analysis and contractions of symmetric spaces, I, *Compositio Math.* **73**, (1990), pp 241-270, II - *Compositio Math.* **80**, (1991), pp. 11-136.
93. F. Rouvière, Fibrés en droites sur un espace symétrique et analyse invariante, *J. Funct. Anal.* 124 (1994), pp. 263-291.
94. H. Rubenthaler, Une série dégénérée de représentations de $SL_n(\mathbb{R})$, Lecture Notes in Maths, **739** (1979), 427-459.
95. S. Sahi, The Capelli identity and unitary representations. *Compositio Math.* **81** (1992), pp.247–260.
96. S. Sahi, Explicit Hilbert spaces for certain unipotent representations, *Invent. Math.* **110** (1992), pp. 409-418.
97. S. Sahi, The Capelli identity and unitary representations, *Compositio Math.* **81** (1992), pp.175-187.
98. S. Sahi, Unitary representations on the Shilov boundary of a symmetric tube domain, in "Representations of groups and algebras", *Contemp. Math.* **145** (1993), pp. 275-286.
99. S. Sahi, Jordan algebras and degenerate principal series, *J. Reine-Angew.Math.*, **462** (1995), 1-18.
100. I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains.* Iwanami-Shoten and Princeton University Press, 1980.
101. S. Sahi, E.M. Stein, Analysis in matrix space and Speh's representations, *Invent. Math.,* **101** (1990), 379-393.
102. M. Schlichenmaier, Berezin-Toeplitz quantization and Berezin transform. in "Long time behaviour of classical and quantum systems". *Proceedings of the Bologna APTEX international conference, Bologna, Graffi, Sandro (ed.). Singapore : World Scientific. Ser. Concr. Appl. Math.* **1**, 271-287 (2001).

103. W. Schmid, Construction and classification of irreducible Harish-Chandra modules. Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989), 235–275, Progr. Math., **101**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

104. L. Schwartz, Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés. *J. Anal. Math.* **13** (1964), pp. 115-256.

105. B. Shoikhet, On the Duflo formula for L_∞-algebras and Q-manifolds, e-print, QA/9812009.

106. R.S. Strichartz, Harmonic analysis on hyperboloids, *J.Funct.Anal.,* **12**, (1973), 218-235.

107. E.G.F. Thomas, The theorem of Bochner-Schwartz-Godement for generalised Gelfand pairs. Functional analysis : surveys and recent results III, Proc. Conf., Paderborn/Ger. 1983, North-Holland Math. Stud. **90**, 291-304 (1984).

108. E.G.F. Thomas, Integral representations in conuclear cones. *J. Convex Anal.* **1**, (1994), pp. 225-258.

109. Ch. Torossian, Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques I - Méthodes des orbites. *J. Funct. Anal.* **117** (1993), pp.118-173.

110. Ch. Torossian, Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques II - L'homomorphisme de Harish-Chandra généralisé. *J. Funct. Anal.* **117** (1993), pp.174-214.

111. Ch. Torossian, Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne. *J. Lie Theory* **12** (2002), pp.597–616.

112. Ch. Torossian, Méthodes de Kashiwara-Verge-Rouvière pour les espaces symétriques, dans *Noncommutative harmonic analysis*, 61–77, Progr. Math., **220**, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2004.

113. A. Unterberger, J. Unterberger, La série discrète de SL(2, R) et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17** (1984), pp.83–116.

114. A. Unterberger, J. Unterberger, Quantification et analyse pseudo-différentielle. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21** (1988), pp.133–158.

115. A. Unterberger, J. Unterberger, Algebras of symbols and modular forms. *J. Anal. Math.* **68** (1996), pp.121–143.

116. A. Unterberger, H. Upmeier, The Berezin transform and invariant differential operators. *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no.3, pp.563–597.

117. A.M. Vershik, I.M. Gelfand, M.I. Graev, Representations of the group SL(2, R), where R is a ring of functions. *Uspehi Mat. Nauk*, **28** (1973), no.5(173), pp.83–128.

118. E.B. Vinberg, Invariant cones and ordering in Lie groups, *Funct.Anal. and Appl.*, **14**, (1980), 1-13.

119. D. Zagier, Modular forms and differential operators, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **104** (1) (1994), pp. 57-75.

120. D. Zagier, Introduction to modular forms, in *From Number theory to Physics* (W.Waldschmidt, P.Moussa, J.-M. Luck and C. Itzykson, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1992, pp. 238-291.

121. G. Zhang, Jordan algebras and generalized principal series representations. *Math. Ann.* **302**, (1995), pp. 773–786.

122. G. Zhang, Berezin transform on compact Hermitian symmetric spaces, *Manuscripta Math.* **97** (1998), pp.371-388.

123. G. Zhang, Berezin transform on real bounded symmetric domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no.9, pp. 3769–3787.